

Tesis defendida por
Alfredo Samuel González Vera

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Zavala Sansón
Director del Comité

Dr. Javier Camacho González
Miembro del Comité

Dr. Enric Pallàs Sanz
Miembro del Comité

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Miembro del Comité

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres
*Coordinador del programa de
posgrado en Oceanografía Física*

Dr. Jesús Favela Vara
Director de la Dirección de Estudios de Posgrado

Febrero de 2014

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA, BAJA CALIFORNIA**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Oceanografía Física**

Dinámica de un flujo de corte en un dominio cerrado rectangular

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

Alfredo Samuel González Vera

Ensenada, Baja California, México, 2014

Resumen de la tesis de Alfredo Samuel González Vera, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física.

Dinámica de un flujo de corte en un dominio cerrado rectangular

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón

Director de Tesis

La dinámica de un flujo de corte continuamente forzado en un dominio cerrado es estudiada mediante experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas. Los flujos de corte se presentan con frecuencia en lo océanos y en la atmósfera a diferentes escalas, por lo que su estudio es de amplio interés para la mecánica de fluidos geofísicos. Los experimentos fueron llevados a cabo en tanques rectangulares con una capa delgada de fluido conductor forzado electromagnéticamente. El forzamiento fue diseñado para generar dos flujos paralelos, con la misma magnitud pero con dirección opuesta. La distribución y comportamiento de las estructuras coherentes formadas por el flujo de corte son investigados al cambiar las dimensiones del dominio (utilizando tanques de diferente razón de aspecto) y al variar la magnitud del forzamiento con el que se induce el movimiento.

La evolución inestable del flujo generó remolinos intensos a lo largo de su eje con circulación del mismo signo que la del corte (positiva). Una serie de vórtices con vorticidad negativa de menor intensidad y tamaño fueron formados debido a la interacción con las fronteras. En todos los experimentos, la evolución temporal de variables globales (energía cinética y enstrofía) mostró una oscilación cuasi-regular cuya frecuencia dependió de la intensidad del forzamiento.

Simulaciones numéricas basadas en un modelo de dos dimensiones reprodujeron los principales resultados experimentales, lo cual indicó el carácter bidimensional de la dinámica del flujo. En particular, los resultados numéricos confirmaron las auto-oscilaciones del sistema, las cuales se debieron a la alternante orientación relativa de los remolinos semi-elípticos (con vorticidad positiva) con respecto al forzamiento.

Las oscilaciones temporales de las variables globales muestran que no se establece un balance entre la inyección de energía proporcionada por el continuo forzamiento y la disipación viscosa, sino que el sistema tiene la capacidad de ganar y ceder energía dependiendo del tamaño y disposición de las estructuras formadas durante su evolución inestable. El presente trabajo demuestra la presencia de este mecanismo de auto-regulación, el cual ha tenido escasa atención en estudios anteriores.

Palabras Clave: Vórtices, forzamiento electromagnético, flujo de corte, flujo cuasi-bidimensional, auto-oscilaciones.

Abstract of the thesis presented by Alfredo Samuel González Vera, in partial fulfillment of the requirements of Master of Sciences degree in Physical Oceanography.

Dynamics of a shear flow in a closed rectangular domain

Abstract approved by:

Dr. Luis Zavala Sansón

Thesis Advisor

The dynamics of a continuously forced shear flow in a closed domain is studied by means of laboratory experiments and numerical simulations. Shear flows are frequently present in the oceans and the atmosphere at different scales, and therefore its study is of importance to geophysical fluid mechanics. The experiments were carried out in rectangular tanks with an electromagnetically-forced, shallow conducting fluid. The forcing was designed to generate two parallel flows, with the same magnitude but opposite direction. The distribution and behavior of the coherent structures formed by the shear flow are investigated by changing the dimensions of the domain (using tanks of different aspect ratio) and by varying the magnitude of the forcing by which the movement is induced.

The evolution of the unstable flow generated intense eddies along its axis with a circulation of the same sign as that of the shear (positive). A series of vortices with negative vorticity of lower intensity and size were formed due to the interaction with the boundaries. In all of the experiments, the temporal evolution of global variables showed a quasi-regular oscillation whose frequency depended on the strength of the forcing.

Numerical simulations based on a two dimensional model reproduced the main experimental results, which indicated the bi-dimensional character of the flow dynamics. In particular, the numerical results confirmed the presence of auto-oscillations in the system, which were caused by the alternating relative orientation of the semi-elliptical vortices (with positive vorticity) with respect to the forcing.

The temporal oscillations of the global variables show that a balance between the injection of energy provided by the continuous forcing and the viscous dissipation is not established, instead the system has the capacity to gain and yield energy depending on the size and disposition of the structures formed during its unstable evolution. The present thesis shows the presence of this auto-regulation mechanism, which has had scarce attention in past studies.

Keywords: Vortices, electromagnetic forcing, shear flow, quasi-two-dimensional flow, auto-oscillations.

*Para mi... Para ti... y para los
demás*

Agradecimientos

Le agradezco a todos quienes se lo merecen. Ustedes saben quiénes son.

Pero por las dudas:

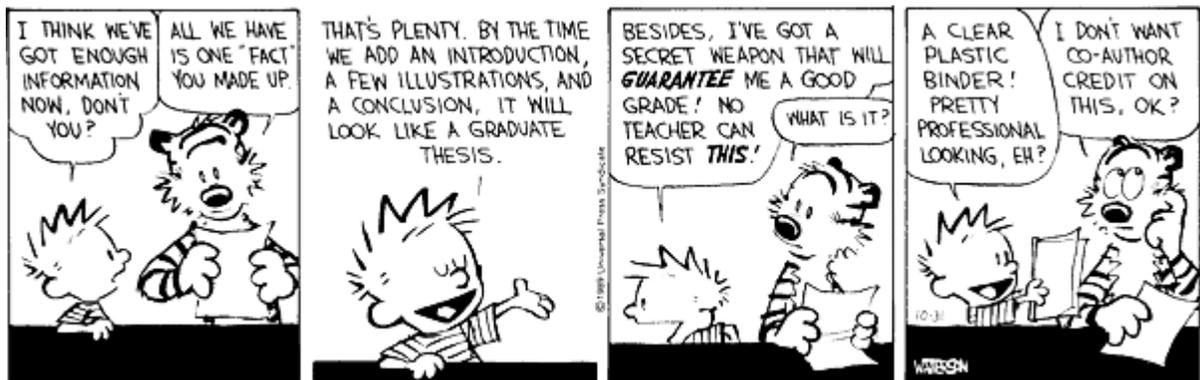
A mi familia, por su inmensurable apoyo, amor y serenidad.

A mi asesor y sinodales por su paciencia y ayuda.

Y a ti (si... tú)

Para todos.

Muchas gracias.



"Calvin and Hobbes" Bill Waterson (Octubre 31, 1989)

Contenido

Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de Figuras	viii
1. Introducción	1
1.1 Antecedentes generales	1
1.2 Antecedentes experimentales	5
1.2.1 Flujos de corte por discos en rotación	6
1.2.2 Flujos de corte en fluidos conductores	7
1.3 Objetivo y resumen	8
2. Teoría	10
2.1 Ecuaciones fundamentales	10
2.2 Bidimensionalidad del flujo	11
2.3 Análisis de estabilidad	13
2.3.1 Teorema de Rayleigh	15
2.3.2 Criterio de Fjørtoft	16
3. Experimentos de laboratorio	17
3.1 Arreglo experimental	17
3.1.1 Configuración del campo magnético B	20
3.1.2 Configuración de la densidad de corriente J	23
3.1.3 Campo de forzamiento	26
3.2 Mediciones experimentales	27
3.3 Procedimiento experimental	30
4. Resultados experimentales	31
4.1 Deformación del flujo inicial	31
4.2 Evolución inestable: formación de vórtices	37
4.3 Evolución de las estructuras coherentes	39
4.4 Caso particular: $\delta = 1$	40
4.5 Análisis del flujo	42
4.5.1 Energía y enstrofia	42
4.5.2 Auto-oscilaciones	44
4.5.3 Espectro de potencia	48
5. Simulaciones numéricas	53
5.1 Modelo numérico	53
5.2 Resultados numéricos	56
5.3 Efecto del forzamiento continuo	62

	Página
6. Discusión y conclusión	68
Referencias bibliográficas	73

Lista de Figuras

Figura	Página	
1	Tres etapas del proceso de decaimiento observado en un experimento realizado en una capa delgada de fluido forzada electromagnéticamente (Tabeling, 2002, pp.20). Se observa un proceso de auto-organización al formarse estructuras de mayor tamaño a partir de las más pequeñas. Comportamientos similares fueron observados por Hansen <i>et al.</i> (1998). El color de las figuras representa vorticidad negativa (negro) y positiva (blanco).	3
2	Se muestran 4 diferentes ejemplos de flujos de corte con su respectivos perfiles de velocidad característicos. a) <i>jet</i> , b) flujos a diferente velocidad, c) estela detrás de un cilindro, d) capa límite. Esquemas modificados de Pope (2000), pp.112.	4
3	Esquemas de dos de los arreglos experimentales utilizados para generar flujos de corte en un tanque anular. a) Discos en rotación con diferentes velocidades (Niino & Misawa, 1984) b) Flujo de corte generado a partir de una fuerza de Lorentz (Dovzhenko <i>et al.</i> , 1979).	7
4	Esquema del perfil de velocidad de un flujo de corte sinusoidal. Las flechas indican la dirección del flujo.	19
5	Esquema del arreglo experimental utilizado. Se muestra por niveles los componentes principales del arreglo. En la configuración de los imanes se indica la polaridad magnética con colores (rojo para positivo y azul para negativo). Además se muestra la posición de los electrodos con respecto a las filas de imanes.	20
6	Campo magnético generado por la configuración de veinticuatro imanes medido a una distancia de 1.5 cm. Valores positivos son representados por colores rojos y negativos azules.	21
7	Perfil del campo magnético medido en $x = 1.2$ cm. Se observan las variaciones del campo en la dirección horizontal y	22
8	Variación del campo magnético medido en la dirección vertical z . Se observa un decaimiento exponencial de la magnitud del campo.	23
9	Modelo bidimensional de un capacitor de placas paralelas y su distribución del campo eléctrico y su potencial. Las líneas perpendiculares a las placas representan el campo eléctrico, con las paralelas (curvándose fuera del capacitor) representando el potencial. Esquema obtenido de Catalán-Izquierdo <i>et al.</i> (2009), pp. 2.	25
10	Campo eléctrico obtenido con un esquema de diferencias finitas para un potencial de 7.6 Volts y con un dominio equivalente al tanque de razón de aspecto cuatro. Las flechas indican la dirección del campo eléctrico y las líneas de color su intensidad, de azules para las intensidades más bajas y rojas para las más altas.	26

Figura	Página	
11	Campo de forzamiento obtenido a partir de los campos eléctrico y magnético medidos. Se utilizó un dominio equivalente para un tanque de razón de aspecto 2 y una corriente de 370mA. Los colores representan la intensidad del forzamiento, con los valores positivos en rojo y los negativos en azul. Las flechas pequeñas representan el campo de forzamiento calculado, mientras que las flechas grandes indican la dirección promedio del flujo.	27
12	Perfil del campo de forzamiento obtenido a partir de los campos eléctricos y magnéticos medidos en $x = 0$. Se utilizó una corriente de 370mA.	28
13	Esquema del procesamiento de imágenes de partículas para medir los campos de velocidad en un tanque de razón de aspecto 1. El tiempo entre cada imagen es representado por Δt	29
14	Espacio de parámetros explorados (Re, δ) con los experimentos realizados. Se obtuvieron 12 configuraciones características.	32
15	Los paneles superiores muestran el campo de velocidad y vorticidad relativa al tiempo $t = 5s$, para un experimento con $\delta = 4$ y un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Los colores de la imagen del campo de vorticidad representan vorticidad positiva (rojo) y negativa (azul). Esta convención se adopta para el resto de la tesis. El panel inferior muestra el perfil del flujo obtenido bajo las mismas condiciones. .	33
16	Criterios de Rayleigh (a) y Fjørtoft (b) calculados a partir del un ajuste del perfil del flujo inicial generado por el forzamiento. Se eligió utilizar las mediciones del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$).	34
17	Campo de velocidad del flujo observado a los 10, 13 y 16 s en el tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa la deformación del flujo de corte al transcurrir el tiempo.	35
18	Superficies de vorticidad relativa del flujo de corte observado a los 10, 13 y 16 s en el tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Su campo de velocidad asociado se muestra en la figura 17.	36
19	Evolución del parámetro Sh contra el tiempo para cada razón de aspecto (a) $\delta = 1$, (b) $\delta = 2$, (c) $\delta = 3$ y (c) $\delta = 4$. En cada gráfica se muestra el comportamiento para los tres rangos de forzamiento: $Re \sim 600, I = 160mA$ (rojo), $Re \sim 1000, I = 370mA$ (azul), $Re \sim 1800, I = 770mA$ (verde).	37
20	Secuencia del campo de vorticidad en el tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa la formación de estructuras coherentes por la deformación del flujo de corte.	38

Figura	Página
21	Campo de vorticidad del tanque de razón de aspecto cuatro con forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Las flechas indican la dirección del desplazamiento de la vorticidad negativa. 39
22	Campos de vorticidad obtenidos para el tanque de razón de aspecto uno con un forzamiento débil ($Re \sim 600$). Se observa la formación (panel izquierdo) y el desplazamiento hacia las paredes (panel derecho) de los vórtices positivos. 40
23	Campo de vorticidad medido en el tanque de razón de aspecto uno con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa la deformación de los vórtices positivos por la acción del forzamiento y las paredes. 41
24	Campo de vorticidad medido en el tanque de razón de aspecto uno con un forzamiento intenso ($Re \sim 1800$). Se dio la formación de un vórtice central al desplazarse hacia las paredes los vórtices positivos generados por la inestabilidad. . . 42
25	Energía cinética total medida en todos los experimentos. Se separó las gráficas por el forzamiento aplicado, teniendo un forzamiento (a) débil ($Re \sim 600$), (b) intermedio ($Re \sim 1000$) y (c) intenso ($Re \sim 1800$). El color indica la razón de aspecto (δ). Se observa el incremento de oscilaciones y pérdida de regularidad con el forzamiento. 44
26	Enstrofía total medida en todos los experimentos. Los paneles y las curvas representaron los mismos casos que en la figura (25) 45
27	Energía cinética total (E) del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de energía (E_f) medidos en el primer mínimo y máximo de E . Los colores del campo indican la intensidad de la energía cinética: azules para valores bajos y rojos para intensos. 46
28	Enstrofía total (Z) del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de enstrofía (Z_f) medidos en el primer mínimo y máximo de Z . Los colores del campo indican la intensidad de la enstrofía: azules para valores bajos y rojos para intensos. 47
29	Energía cinética total del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de energía (E_f) medidos en el segundo mínimo y máximo de E 47
30	Enstrofía total (Z) del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de enstrofía (Z_f) medidos en el primer mínimo y máximo de Z 48

Figura	Página	
31	Energía cinética total de las componentes x (u^2) e y (v^2) del tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa el desfase de los máximos de las componentes de energía cinética u^2 (rojo) y v^2 (negro).	49
32	Espectros de densidad de energía de las componentes x, y calculados para los tiempos del primer máximo (panel (a), 20s.) y mínimo (panel (b), 37.25 s.) la energía cinética global E , y del segundo máximo (panel (c), 69s.) y mínimo (panel (d), 91s.), para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). La componente u^2 se muestra en color rojo, mientras que v^2 está en color negro.	51
33	Espectro de densidad de enstrofia calculado para los tiempos del primer máximo (panel (a), 20s.) y mínimo (panel (b), 37.25 s.) de la enstrofia global Z , y del segundo máximo (panel (c), 69s.) y mínimo (panel (d), 91s.) para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$).	52
34	Campo de forzamiento obtenido a partir de un ajuste del campo de fuerza utilizado en los experimentos. Las flechas indican la dirección del forzamiento.	54
35	Comparación de un perfil de forzamiento experimental (azul) y numérico (rojo). El perfil experimental se obtuvo al realizar un corte del campo de fuerza en $x = 1.2cm$. En ambos casos se utilizó un forzamiento intermedio.	55
36	Campos de vorticidad obtenidos a (a) $t = 5s.$, (b) $t = 20s.$, (c) $t = 33s.$, (d) $t = 45s.$ para una simulación con un dominio de $\delta = 4$ y un forzamiento intermedio. La vorticidad positiva es representada por los colores rojos y la negativa por los azules.	56
37	Campos de velocidad y función corriente (a) y vorticidad (b) a $t = 75s.$ de una simulación realizada en un dominio de razón de aspecto 4 con forzamiento intermedio. La distribución de las estructuras coherentes es similar a la observada en los experimentos (figura (21)).	57
38	Campos de velocidad y de función corriente mostrando la generación de un vórtice central en el tanque de razón de aspecto 1 para un forzamiento intenso.	58
39	Secuencia de campos de velocidad y de función corriente mostrando la supresión y generación de nuevos vórtices en los límites del área de forzamiento. La simulación fue realizada en un tanque de razón de aspecto dos con un forzamiento intermedio.	59
40	Energía cinética total de las simulaciones realizadas para (a) forzamientos débiles, (b) forzamientos intermedios y (c) forzamientos intensos. El color indica la razón de aspecto.	60
41	Enstrofia total de las simulaciones realizadas para (a) forzamientos débiles, (b) forzamientos intermedios y (c) forzamientos intensos.	61

Figura	Página
42	Componentes u^2 (rojo) e v^2 (azul) de la energía cinética de la simulación realizada en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio. 62
43	Espectros de densidad de energía de las componentes $x(u^2), y(v^2)$ calculados para los tiempos de dos mínimos ($t=82$ s. (a) y $t=121$ s. (b)) y un máximo ($t=105$ s. (b)) de la energía cinética total para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio. La componente u^2 se muestra de color rojo, mientras que v^2 esta en color negro. 63
44	Evolución temporal de dos vórtices positivos en un dominio de razón de aspecto uno. No se tiene forzamiento externo, sólo fricción del fondo. 64
45	Evolución temporal de dos vórtices positivos en un dominio de razón de aspecto cuatro. No se tiene forzamiento externo, sólo fricción del fondo. 65
46	Evolución temporal de dos vórtices positivos en un tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio y disipación. Se observa el confinamiento de los vórtices, formando una estructura similar a la observada en los experimentos. . . 66
47	Energía cinética total de la simulación realizada en un tanque de razón de aspecto cuatro mostrada en la figura (46). 67
48	Imagen del campo de vorticidad obtenido para el experimento realizado en un tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio. Las flechas indican la dirección de la recirculación del flujo al salir y entrar a la zona de forzamiento. . . 69
49	Imagen de un campo de vorticidad obtenido para el experimento realizado en un tanque de razón de aspecto 1 con un forzamiento débil. Las flechas indican la dirección del flujo. 70

Capítulo 1

Introducción

Los flujos de corte juegan un papel relevante en la modelación de flujos geofísicos, por ejemplo en atmósferas planetarias y océanos, debido a la generación de estructuras coherentes que ocurren cuando son inestables. Por esta razón, es importante estudiar su dinámica bajo diferentes condiciones físicas. En particular, en esta tesis se estudia con detalle mediante experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas la evolución de un flujo de corte al tener la aplicación de un forzamiento continuo (lo que le atribuye una constante inyección de energía), y cómo su comportamiento es afectado al estar confinado en un dominio cerrado.

1.1 Antecedentes generales

El estudio de la dinámica de fluidos en movimiento ha sido uno de los temas de investigación más importantes en la ciencia, originando un número de disciplinas especializadas debido al gran rango de características y aplicaciones que poseen, desde lo macroscópico hasta lo microscópico. En la naturaleza, los fluidos en movimiento tienen un comportamiento complejo, ya que las variables que definen su dinámica (velocidad, presión, etc.) dependen del tiempo y de las tres dimensiones espaciales (son tridimensionales). Sin embargo, en ocasiones es posible simplificar su descripción al considerar la dinámica de los flujos como bidimensional, es decir, representando la evolución característica del flujo en función del tiempo y de dos coordenadas espaciales.

Para determinar si es posible realizar esta aproximación, se analiza las escalas características del flujo (Pedlosky, 1987) para encontrar en qué coordenadas se presentan los mayores cambios de las variables dinámicas. De esta manera, si se presentan pocas variaciones en alguna coordenada espacial con respecto a las demás, es factible describir la dinámica del flujo como un fenómeno bidimensional.

Esta aproximación es utilizada en una variedad de disciplinas en donde se estudian fluidos, ya que en muchos fenómenos se tiene la supresión del movimiento en alguna de las coordenadas espaciales. En el caso de la oceanografía física, algunos fenómenos de gran escala observados en el océano y en la atmósfera en ocasiones son modelados como flujos bidimensionales en un plano. Esto ocurre al tener que los movimientos en la dirección vertical (z) son suprimidos debido a tres factores principales: la estratificación del flujo, los efectos de rotación de la tierra y que el flujo sea somero (esto es, que las escalas de movimiento horizontales (x, y) sean mucho mayores que la vertical). Cualquiera de estos tres factores, si tiene suficiente importancia, puede causar que el movimiento del fluido sea predominantemente en dos dimensiones.

Una de las características mas importantes observadas en flujos bidimensionales es la llamada *cascada inversa de energía* y la *cascada de enstrofía* (Kraichnan, 1967), en donde se tiene el flujo de energía de escalas pequeñas a escalas grandes y un flujo de enstrofía de escalas grandes a escalas menores. En cambio, en flujos tridimensionales, se tiene el comportamiento inverso, en donde la energía va de escalas grandes a escalas más pequeñas. Otra característica importante, la cual está relacionada a la cascada inversa de energía, es el proceso de auto-organización, en el cual el flujo inicial se organiza en estructuras coherentes de mayor tamaño que las iniciales (Matteus & Montgomery, 1980). Una secuencia de este comportamiento se muestra en la Figura(1). Investigaciones de este comportamiento han sido realizadas generalmente para fenómenos de turbulencia (Lilly, 1969; Carnevale, 1991; Dritschel, 1993).

Adicionalmente, se ha estudiado la importancia que juegan las fronteras en el desarrollo y evolución de la turbulencia en un dominio finito, teniendo que las paredes sólidas actúan como fuente de filamentos de vorticidad, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales, lo que altera la estructura del flujo (Clercx *et al.*, 2005; van Heijst *et al.*, 2006; Clercx *et al.*, 2009).

Uno de los flujos bidimensionales más estudiados debido a sus características son los flujos de corte. Estos se presentan en una variedad de configuraciones, como lo son: *jets*, capas límite cercanas a fronteras sólidas, flujos en contacto con diferente velocidad, estelas detrás de objetos sólidos, entre otros. En la Figura (2) se muestra una imagen con cuatro ejemplos. Dichos flujos

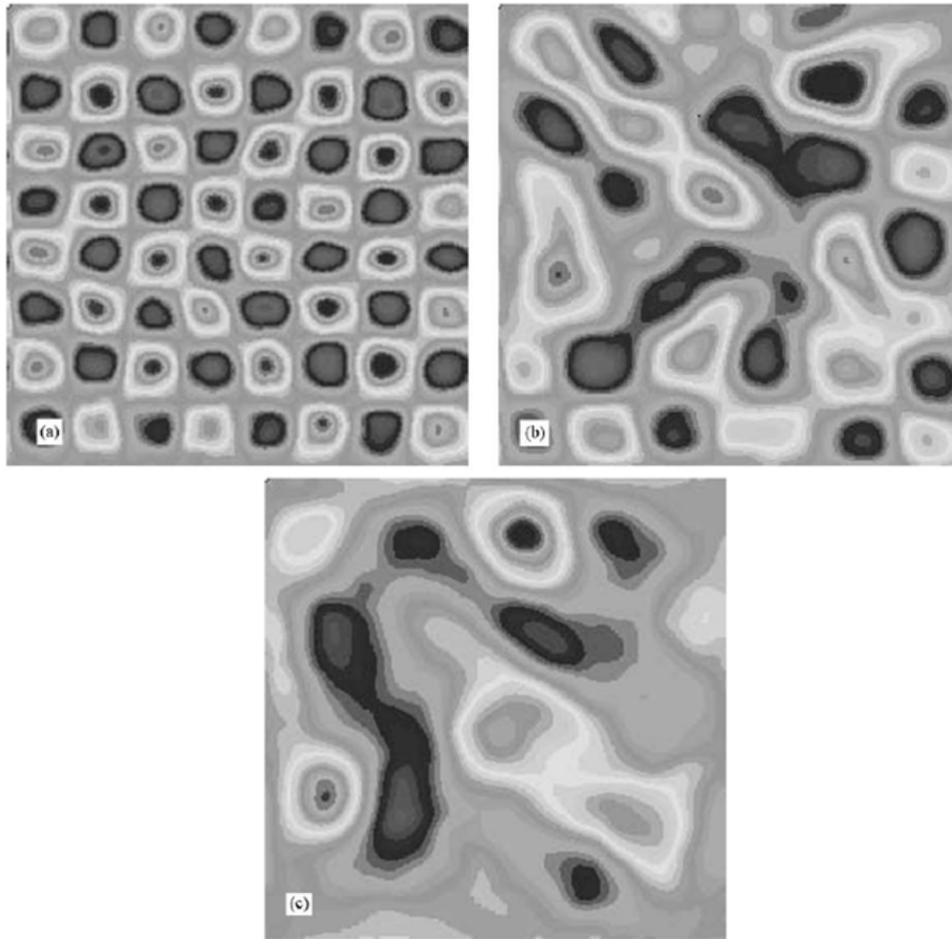


Figura 1: Tres etapas del proceso de decaimiento observado en un experimento realizado en una capa delgada de fluido forzada electromagnéticamente (Tabeling, 2002, pp.20). Se observa un proceso de auto-organización al formarse estructuras de mayor tamaño a partir de las más pequeñas. Comportamientos similares fueron observados por Hansen *et al.* (1998). El color de las figuras representa vorticidad negativa (negro) y positiva (blanco).

tienden a ser inestables, esto es, son sensibles a perturbaciones que causan la deformación del corte inicial y lleva a la formación de estructuras coherentes en el flujo.

Para determinar si un flujo es inestable, se puede realizar un análisis de estabilidad lineal (Drazin & Reid, 1981) en el cual se determina si una perturbación infinitesimal crecerá (flujo inestable) o se disipará (flujo estable). Dependiendo del comportamiento de esta perturbación se clasifica a las inestabilidades en dos categorías (Huerre & Monkevitz, 1985): absolutamente inestables, en la cual las perturbaciones crecen en el tiempo, y convectivamente inestables, con las perturbaciones creciendo en el espacio. También se clasifican, respectivamente, como amplificadores de ruido y

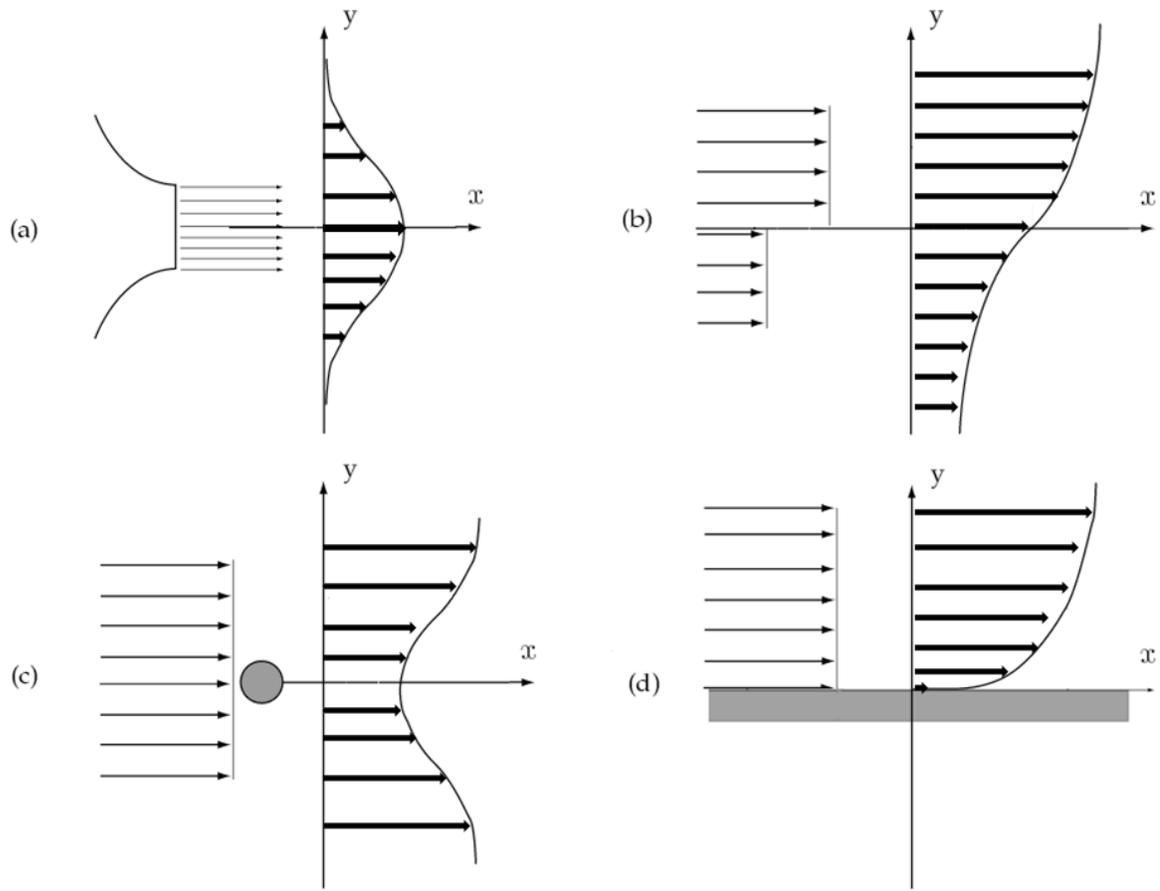


Figura 2: Se muestran 4 diferentes ejemplos de flujos de corte con sus respectivos perfiles de velocidad característicos. a) *jet*, b) flujos a diferente velocidad, c) estela detrás de un cilindro, d) capa límite. Esquemas modificados de Pope (2000), pp.112.

osciladores de flujo. Mayores detalles sobre inestabilidades hidrodinámicas se pueden consultar en Chandrasekhar (1961), Lin (1966), Joseph (1976), Acheson (1990), Cushman-Roisin & Beckers (1994), entre otros.

Dos importantes inestabilidades hidrodinámicas en la oceanografía física son las llamadas inestabilidad baroclínica y la inestabilidad barotrópica. La inestabilidad baroclínica es aquella que se origina a partir de gradientes de temperatura (horizontales) en fluidos estratificados en rotación. Da origen a los movimientos de gran escala y meso-escala en el océano y en la atmósfera. En el caso de la inestabilidad barotrópica (o de corte), la inestabilidad ocurre debido al corte en un flujo (una diferencia de densidad no es necesaria). Es uno de los mecanismos de inestabilidad más importantes en jets y vórtices, y es un proceso dinámico importante en turbulencia (tanto en dos

dimensiones como en tres). Ambas inestabilidades hidrodinámicas presentan similitudes (tanto dinámicamente como matemáticamente), por lo que ideas y soluciones obtenidas de problemas de inestabilidad barotrópicos (en ocasiones más simples) pueden ser útiles para explicar y entender el caso baroclínico. Por esta razón y debido a sus importantes propiedades de mezcla, transporte, formación de estructuras coherentes, etc., la inestabilidad de corte ha sido estudiada en diferentes campos, tanto astrofísicos (Drury, 1985; Narayan *et al.*, 1987) como geofísicos (Satomura, 1981; Griffiths *et al.*, 1982).

1.2 Antecedentes experimentales

Con el propósito de modelar el comportamiento de fenómenos observados en la naturaleza y representarlos adecuadamente, se implementan diferentes técnicas experimentales en el laboratorio. Por ejemplo, algunos flujos atmosféricos y oceánicos de gran escala y meso-escala presentan comportamientos predominantemente bidimensionales, por lo cual es necesario restringir los movimientos verticales en el laboratorio. Algunas de las técnicas más conocidas son el uso de estratificación (Maassen *et al.*, 2003), efectos de rotación (Hopfinger, 1982) y configuraciones de capas someras (Sommeria, 1986). Estos métodos experimentales pueden ser combinados para reforzar la bidimensionalidad de los flujos a estudiar (Paret *et al.*, 1997).

En el caso de los experimentos realizados en flujos en rotación, su comportamiento bidimensional se explica con el teorema de Taylor-Proudman, en el cual se establece que si la rotación a la cual se encuentra el flujo es considerable, la velocidad es independiente de la coordenada paralela al eje de rotación. Esto lleva al flujo a desplazarse en columnas (ver nota histórica de Velasco Fuentes, 2009). En cambio, en el caso de los flujos someros, el comportamiento bidimensional se atribuye a la diferencia de magnitud entre las velocidades verticales y horizontales debida a la poca profundidad de la capa de fluido, la cual restringe los movimientos verticales. Este argumento está basado en un análisis dimensional de la ecuación de conservación de masa de fluidos incompresibles (Pedlosky, 1987).

No obstante, la presencia de fronteras sólidas y deformaciones en la superficie libre modifican el

comportamiento bidimensional del flujo al causar movimientos importantes en la dirección vertical. Esto requiere considerar los efectos producidos por estas variaciones para describir correctamente la dinámica del problema.

Sin embargo, es posible continuar modelando estos fenómenos de manera bidimensional al parametrizar los movimientos verticales de manera adecuada. Esto se logra cuando se pueden describir las variaciones verticales en función de los movimientos horizontales. A aquellos flujos que pueden ser modelados de esta forma se les conoce como cuasi- bidimensionales. Ejemplos de esto son los experimentos realizados en capas someras y en flujos en rotación, en donde los efectos de disipación causados por el fondo sólido son parametrizados como un término lineal (Bodarenko *et al.*, 1979). Esta parametrización no es única, ya que depende de las variables dadas por la física del problema hidrodinámico a tratar. Para una revisión detallada de la teoría y aplicaciones de flujos bidimensionales se tiene la revisión de Tabeling (2001), y para el caso de los flujos cuasi- bidimensionales la revisión presentada por Danilov & Gurarie (2000).

La modelación de flujos cuasi-bidimensionales ha sido utilizada en un gran número de investigaciones experimentales, tanto para describir fenómenos turbulentos, como para estudiar la estabilidad de flujos, entre otros. Este trabajo se concentra en aquellos estudios realizados sobre flujos de corte cuasi-bidimensionales continuamente forzados en el tiempo. Generalmente, este tipo de experimentos son realizados en capas delgadas (o someras) y en fluidos en rotación debido a su comportamiento cuasi-bidimensional. En estos, se genera un flujo de corte por medio del movimiento de las fronteras, aplicando fuerzas de volumen (ej. fuerza electromagnética) o con el uso de fuentes y sumideros de fluido. A continuación se presenta las dos formas más comunes de generar flujos de corte en arreglos experimentales de flujos someros o en rotación.

1.2.1 Flujos de corte por discos en rotación

En experimentos realizados para estudiar una inestabilidad barotrópica, Niino & Misawa (1984) generaron un flujo de corte circular en un contenedor cilíndrico al rotar en diferente dirección dos secciones de la base relativa al contenedor (se muestra un esquema en la Figura (3)(a). En este

trabajo se estudió la formación de estructuras estables en el flujo de corte. La velocidad angular del sistema en rotación fue el parámetro variado.

Basados en este arreglo, Früh & Read (1999) formaron un flujo de corte circular por medio de discos en rotación a diferente velocidad, ubicados en las fronteras superior e inferior de un contenedor cilíndrico. En su trabajo se discute la susceptibilidad del flujo a la dirección del corte y la dinámica no lineal de los vórtices generados por la inestabilidad.

De manera similar, Rabaud & Couder (1983) realizaron experimentos en un arreglo en rotación, con la diferencia de que en este trabajo se utilizó una capa delgada de fluido (una capa de jabón) para estudiar la transición entre diferentes distribuciones de vórtices formados por la inestabilidad de corte.

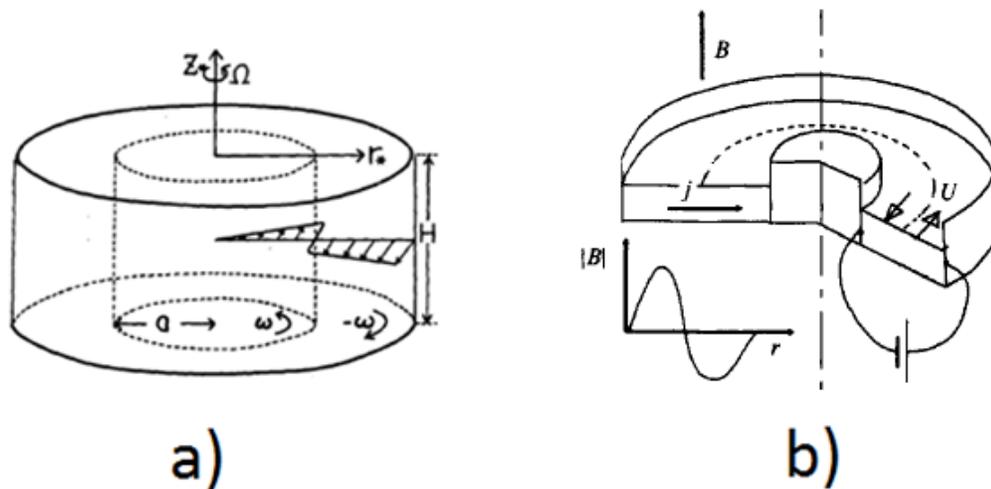


Figura 3: Esquemas de dos de los arreglos experimentales utilizados para generar flujos de corte en un tanque anular. a) Discos en rotación con diferentes velocidades (Niino & Misawa, 1984) b) Flujo de corte generado a partir de una fuerza de Lorentz (Dovzhenko *et al.*, 1979).

1.2.2 Flujos de corte en fluidos conductores

Otro tipo de arreglos experimentales en donde se generan movimientos horizontales son aquellos que utilizan capas someras de un fluido conductor. En estos experimentos, el movimiento se genera debido a una fuerza que surge a partir de la interacción electromagnética que ocurre entre un campo magnético y una densidad de corriente eléctrica. Generalmente, el campo magnético se origina por

un imán permanente, mientras que la densidad de corriente es generada en un fluido electrolítico mediante una diferencia de potencial. Además, dada la forma en que se genera el forzamiento, es posible obtener una variedad de configuraciones de flujo al variar la distribución del campo magnético. Esto ha llevado a realizar una amplia gama de experimentos, por ejemplo, flujos de Kolmogorov (Obukhov, 1983; Thess 1992), flujos con un perfil sinusoidal en un tanque rectangular (Bodarenko *et al.*, 1979; Batchaev, 1990), y flujos de corte (Krymov, 1989).

En el trabajo realizado por Krymov (1989), se estudió la estabilidad del flujo bajo diferentes velocidades modificando el ancho de su perfil. Se encontró que la fricción de fondo juega un papel importante en la disipación de energía y en el estado de equilibrio final.

Es importante mencionar que, independientemente del método de generación del flujo de corte, los experimentos realizados con un perfil similar presentan un comportamiento característico. Este consiste en el establecimiento de un flujo de corte estable a bajas velocidades, el cual se inestabiliza una vez que la velocidad en el flujo se incrementa, formando una cadena de vórtices. El número de vórtices producidos y la magnitud de la velocidad necesaria para inestabilizar el flujo depende de parámetros sujetos a cada experimento.

1.3 Objetivo y resumen

Esta tesis se basa en el estudio del efecto de las fronteras de un dominio cerrado en el comportamiento de un flujo de corte bidimensional continuamente forzado. Para esto, se realizó una serie de experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas.

En los experimentos realizados se utilizaron como variables de control la intensidad del forzamiento (la cual fue inducida por métodos electromagnéticos) y el largo y ancho del dominio en que se encuentra confinado el fluido. Para determinar si el comportamiento observado en estos experimentos puede ser modelado como un fenómeno cuasi-bidimensional, se realizaron simulaciones numéricas basadas en esta dinámica. Para ello, se implementó un forzamiento continuo similar al experimental, además de incluir efectos disipativos del fondo parametrizados como una fricción lineal.

En el capítulo 2, se explica algunos aspectos teóricos que son fundamentales para entender este trabajo. Estos están relacionados con la definición de flujos bidimensionales y cuasi-bidimensionales. Además, se discuten aspectos básicos del análisis de estabilidad lineal y algunos de los teoremas de estabilidad.

El capítulo 3 muestra el arreglo experimental utilizado, junto con una breve explicación del método para obtener mediciones cuantitativas a partir de los experimentos.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos de los diferentes experimentos realizados al considerar tamaños de dominio e intensidades de forzamiento diferentes.

En el capítulo 5 se muestra los resultados de las simulaciones llevadas a cabo. El propósito de estas simulaciones fue determinar si es posible modelar el comportamiento observado en los experimentos como un fenómeno cuasi-bidimensional. Se trataron dominios y forzamientos similares a aquellos utilizados en los experimentos de laboratorio.

En el capítulo 6 se presenta las discusiones de los resultados obtenidos, tanto de los experimentales como de los numéricos, y se comparan con trabajos previamente realizados por otros autores. Se incluye un resumen de las conclusiones principales.

Capítulo 2

Teoría

En este capítulo se presenta los aspectos básicos de la teoría relevante a esta tesis, en los cuales se discute de manera breve las ecuaciones que gobiernan al flujo estudiado.

2.1 Ecuaciones fundamentales

Al considerar un fluido Newtoniano, homogéneo e incompresible, se tiene que las leyes que dictan el movimiento del flujo vienen dadas por las ecuaciones de balance de momento, conocidas como las ecuaciones de Navier- Stokes, y la conservación de masa (o de continuidad) las cuales se escriben, respectivamente, como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

en donde \mathbf{u} es la velocidad del fluido, p es la presión, ν la viscosidad cinemática, ρ la densidad, t es el tiempo y \mathbf{F} representa las fuerzas externas aplicadas al fluido. ∇^2 representa el operador Laplaciano y ∇ el operador gradiente.

De la ecuación (1) se tiene que el término $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ es conocido como la aceleración advectiva, $\nabla p/\rho$ representa la aceleración debida al gradiente de presión y $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ las aceleraciones viscosas que surgen a partir de los esfuerzos viscosos (efectos disipativos).

Es posible simplificar la notación de (1) al representar los dos primeros términos en función del

operador conocido como la derivada material:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad (3)$$

que expresa la aceleración asociada a un elemento de fluido. Una vez sustituido este término en (1) se obtiene:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}. \quad (4)$$

Para evitar el manejo del término de gradiente de presión, es conveniente obtener el rotacional de la ecuación de momento (1). Para esto, se define la vorticidad como $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, lo cual lleva a:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{\rho}. \quad (5)$$

$(\nabla \times \mathbf{F})/\rho$ es el rotor del forzamiento externo y $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ es conocido como el término de estiramiento y doblamiento de vorticidad. Este último término está asociado a efectos tridimensionales en el flujo.

2.2 Bidimensionalidad del flujo

Es posible simplificar la ecuación de momento (4) para un sistema bidimensional si las escalas de movimiento horizontales y verticales presentan una gran diferencia. Para determinar esto, se realiza un análisis de escalas de la ecuación de continuidad (2):

$$\frac{1}{L}[u] \sim \frac{1}{L}[v] \sim \frac{1}{H}[w], \quad (6)$$

donde la velocidad del flujo está constituida por las componentes $\mathbf{u} = (u, v, w)$ siendo (u, v) horizontales y w vertical, las cuales tienen una escala característica horizontal L y una escala característica vertical H , respectivamente.

Al despejar las escalas características de (6) se determina que cuando $(H/L) \ll 1$ (en el caso de

flujos someros), el orden de las velocidades verticales es menor que el de las velocidades horizontales, $w \ll u, v$. Con este análisis y considerando un sistema cartesiano (x, y, z) donde (x, y) es el plano horizontal, es posible omitir la componente vertical w , reduciendo la ecuación (2) a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

A su vez, se puede simplificar la ecuación de vorticidad (5) al caso bidimensional:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega + \mathfrak{N}, \quad (8)$$

en donde:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (9)$$

es la componente de la vorticidad perpendicular al plano horizontal (i.e. la componente vertical) y $\mathfrak{N} = (\nabla \times \mathbf{F}/\rho) \cdot \hat{k}$ es la componente vertical del rotacional del forzamiento.

Adicionalmente, al tratar con flujos bidimensionales es posible proponer una manera de obtener las componentes u y v a partir de un campo escalar ψ (conocido como función corriente) debido a la forma de la ecuación (7):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10)$$

La función corriente se relaciona con la vorticidad por medio del operador Laplaciano bidimensional (∇_H^2):

$$\omega = -\nabla_H^2 \psi. \quad (11)$$

Sin embargo, en flujos reales no se tiene configuraciones completamente bidimensionales debido a una variedad de factores. Por ejemplo, en diversos estudios experimentales se ha observado que las fronteras sólidas modifican la dinámica de los flujos (van Heijst & Clercx, 2009). Esto lleva a la pérdida de la bidimensionalidad dada por la aproximación de flujos someros.

Un caso frecuente es el fondo sólido de un recipiente, sobre el cual se forma una capa límite

debido a la condición de frontera de no- deslizamiento. Para remediar esto, el término de disipación de la ecuación (4) se separa en sus componentes horizontales y verticales:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nu \nabla_H^2 \mathbf{u}_H + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (12)$$

con $\mathbf{u}_H = (u(x, y, t), v(x, y, t))$. Para capas someras el último término se parametriza de manera lineal ($\nu \partial^2 w / \partial z^2 = \lambda \mathbf{u}_H$, Dolzhanskii *et al.* 1990), llevando a la modificación de la ecuación (4):

$$\frac{D\mathbf{u}_H}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla_H^2 \mathbf{u}_H + \frac{\mathbf{F}}{\rho} - \lambda \mathbf{u}_H, \quad (13)$$

en donde el parámetro λ depende de la física del sistema hidrodinámico estudiado. En el contexto de esta tesis λ es el coeficiente de fricción de fondo. El término de forzamiento \mathbf{F} es estrictamente bidimensional. Esta modificación de la aproximación en dos dimensiones lleva el nombre de cuasi-bidimensional (C2D).

De manera similar, al realizar la aproximación C2D de la ecuación de vorticidad (8) se tiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbb{J}(\omega, \psi) = \nu \nabla^2 \omega + \mathfrak{S} - \lambda \omega, \quad (14)$$

siendo \mathbb{J} el Jacobiano, el cual tiene la forma:

$$\mathbb{J}(\omega, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (15)$$

2.3 Análisis de estabilidad

La estabilidad de flujos ha sido estudiada por un largo periodo de tiempo, siendo uno de los problemas fundamentales de la hidrodinámica debido a su aplicación en varias disciplinas. En estudios de estabilidad se investiga diferentes tipos de perturbaciones que afectan la evolución de un flujo base conocido, determinando si las perturbaciones son atenuadas o si se amplifican (Drazin & Reid, 1981; Huerre & Monkewitz, 1990).

El procedimiento para estudiar la estabilidad hidrodinámica de un flujo bidimensional sujeto a perturbaciones infinitesimales se conoce como análisis de estabilidad lineal, y generalmente se lleva a cabo por medio de cuatro pasos:

1. Se busca una solución estacionaria de las ecuaciones de Navier- Stokes (13) y de conservación de masa (7). A esta solución se le conoce como flujo base o inicial.
2. Al flujo inicial se le añaden pequeñas perturbaciones, obteniendo un flujo de la forma:

$$\varphi = \varphi_0(x, y) + \tilde{\varphi}(x, y, t), \quad (16)$$

con φ_0 el flujo base y $\tilde{\varphi}$ la perturbación añadida, tal que $\varphi_0 \gg \tilde{\varphi}$. La forma de estas perturbaciones se escoge como oscilaciones en el espacio y en el tiempo (ondas viajeras). Para un flujo base que varía en y , las perturbaciones en modos normales en la dirección x se escriben como:

$$\tilde{\varphi}(x, y, t) = \varphi'(y) \exp^{ik(x-ct)}, \quad (17)$$

donde φ' es la amplitud, k es el número de onda en la dirección x y c su razón de propagación.

3. Esta expresión se sustituye en las ecuaciones hidrodinámicas, linealizando con respecto a la perturbación. Las ecuaciones resultantes son conocidas como la ecuación de Rayleigh, para flujos invíscidos, o la ecuación de Orr-Sommerfeld, para flujos viscosos. Estas ecuaciones generalmente son problemas de eigenvalores para la razón de crecimiento de las perturbaciones $\vartheta = kc$. Esta razón es compleja, teniendo la forma $\vartheta = \vartheta_R + i\vartheta_I$.
4. Resolver el problema de eigenvalores para determinar si la perturbación aplicada se amplifica ($\vartheta_I > 0$, inestable) o se amortigua ($\vartheta_I < 0$, estable).

Este procedimiento para determinar la estabilidad de flujos ha sido aplicado para una amplia gama de ejemplos (Krymov, 1989; Thess, 1992). Sin embargo, el procedimiento no siempre es simple y requiere de una variedad de cálculos o de aproximaciones numéricas.

Sin embargo, en algunos casos, al determinar el perfil del flujo base es posible conocer si el flujo puede ser susceptible ante perturbaciones mediante el uso de los teoremas de Rayleigh o de Fjørtoft.

2.3.1 Teorema de Rayleigh

Para perfiles de velocidad simples $U(y)$ (en este caso, un flujo bidimensional en la dirección x con variaciones en y), Rayleigh (1879) derivó un criterio necesario para determinar si un flujo de corte invíscido sin estratificación es inestable. Este criterio es conocido como el teorema de inflexión de Rayleigh, e indica que si el perfil presenta un punto de inflexión:

$$\frac{d^2 U(y)}{dy^2} = 0, \quad (18)$$

el flujo puede ser inestable ante perturbaciones. En caso contrario, este criterio es suficiente para determinar la estabilidad del flujo base. Para casos en donde el flujo base se encuentra bajo la influencia del efecto beta, se utiliza el criterio del punto de inflexión de Rayleigh- Kuo (Kuo, 1949).

Para comprender la física detrás del teorema del punto de inflexión de Rayleigh, se propone como ejemplo un flujo de corte paralelo bidimensional cuya distribución de vorticidad está dada por:

$$\omega = -\frac{dU(y)}{dy}. \quad (19)$$

Basados en la explicación de Lin (1945), se considera que el flujo está constituido por filamentos de vorticidad (de manera análoga a las parcelas de fluido), con las perturbaciones en el flujo representadas por un intercambio de filamentos entre dos zonas distintas. Estos filamentos conservan su vorticidad original al encontrarse en un fluido invíscido. Por lo tanto, al tener un flujo que incrementa su velocidad monotónicamente, un elemento de fluido desplazado de una región con menor vorticidad a una de mayor vorticidad (o viceversa), será desplazada hacia su posición original (en un fluido bidimensional e invíscido la vorticidad es advectada conservativamente), por

lo que el flujo es estable.

En cambio, si el flujo presenta un máximo local de vorticidad, una parcela de fluido no será necesariamente desplazada a su posición original, ya que puede trasladarse lo suficiente para estar al otro lado del máximo local. Esto facilita el intercambio de partículas de fluido, lo cual puede llevar a la inestabilidad. Para una mayor discusión de este mecanismo se recomienda consultar los trabajos de Lin (1945) o Brown (1972).

2.3.2 Criterio de Fjørtoft

Otro criterio necesario para la inestabilidad de un flujo base fue obtenido por Fjørtoft (1950). Este criterio es una extensión (más rigurosa) del teorema del punto de inflexión de Rayleigh, el cual indica que el punto de inflexión debe ser un máximo de vorticidad dentro del dominio (no en la frontera o en infinito, lo cual puede ocurrir en el de Rayleigh).

Por lo tanto, si $U(y)$ es una función con un punto de inflexión, una condición necesaria para que haya inestabilidad en el flujo es que el producto:

$$\frac{d^2 U(y)}{dy^2} (U - U_I) < 0, \quad (20)$$

en alguna parte del dominio, donde U_I es el valor de U en el punto de inflexión.

Es necesario remarcar que estos criterios están diseñados para flujos invíscidos sin estratificación y que son criterios necesarios de inestabilidad, pero no suficientes. Además, al ser invíscidos, no predicen el establecimiento de inestabilidades debido a la formación de capas límite en las fronteras.

Capítulo 3

Experimentos de laboratorio

El estudio de un flujo de corte bidimensional dentro de un dominio rectangular cerrado se realizó por medio de experimentos de laboratorio. En estos experimentos el movimiento del fluido fue inducido por fuerzas electromagnéticas, siendo una de las técnicas menos intrusivas para la generación de momento. Trabajando con capas delgadas de fluido, se trató a los flujos observados como bidimensionales.

Para determinar tanto la influencia del tamaño del dominio como la influencia del forzamiento aplicado, se utilizaron tanques de diferentes dimensiones y se varió la magnitud del forzamiento. Es importante mencionar que, a diferencia de la mayoría de trabajos en donde se utilizan técnicas electromagnéticas en fluidos conductores, el forzamiento utilizado se mantuvo constante durante los experimentos. No se consideraron efectos de rotación ni topografía.

3.1 Arreglo experimental

Los experimentos de laboratorio fueron realizados en cuatro tanques de plexiglás de distintas dimensiones horizontales. Estos se caracterizan por su razón de aspecto:

$$\delta = \frac{L_x}{L_y} \quad (21)$$

siendo L_x el largo y L_y el ancho de cada uno de los recipientes. Se utilizaron cuatro recipientes con dimensiones horizontales de 30.0cm \times 30.0cm, 42.2cm \times 21.1cm, 51.9cm \times 17.3cm y 60.0cm \times 15.0cm, presentando, respectivamente, una razón de aspecto 1, 2, 3 y 4. Cada uno de ellos tiene la misma área ($\sim 900\text{cm}^2$).

Dentro de los tanques se introdujo como fluido conductor una solución electrolítica. Esta

solución fue compuesta por la mezcla de bicarbonato de sodio y agua a una concentración de 50 gramos por litro. La capa de fluido tuvo una altura de 1.3 cm y una densidad de $1.027\text{gr}/\text{cm}^3$, manteniéndose constante en todos los experimentos realizados. Además, la capa de fluido electrolítica tuvo una viscosidad de $1.089 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$.

Para inducir en el fluido la corriente eléctrica requerida para generar el forzamiento, se colocaron dos electrodos de cobre de $29.7\text{cm} \times 0.4\text{cm} \times 3.1\text{cm}$ en los lados largos del tanque utilizado, es decir, a lo largo de L_x . A estos electrodos se les conectó una fuente de poder, con la que se produjo una diferencia de potencial entre las placas de cobre, y así, una corriente eléctrica en el fluido. La diferencia de potencial máxima producida por la fuente de poder fue de aproximadamente 36 Voltios.

Adicionalmente, utilizando una placa de acrílico con espaciamientos predeterminados, se colocaron, debajo del fondo del tanque, veinticuatro imanes permanentes de neodimio cilíndricos con un diámetro de 1.2 cm y un espesor de 0.5 cm. Los imanes se colocaron de tal manera que la máxima magnitud del campo magnético se encontrara en la dirección vertical, esto es, con la superficie circular del imán dispuesta horizontalmente (ya sea de polaridad negativa o positiva).

Para tener el forzamiento necesario para generar un corte en el fluido (como en el diagrama mostrado en la Figura (4)), el arreglo de veinticuatro imanes se distribuyó en dos hileras a lo largo de L_x equidistantes al centro del tanque. Cada una de las filas de imanes se dispuso con una orientación magnética distinta, es decir, de manera que una de ellas tuviera una orientación positiva mientras que la otra fuera negativa. Los imanes de cada hilera se colocaron a una distancia de 2.4cm, de centro a centro, siendo esta la misma distancia que había entre las filas. El arreglo experimental utilizado para generar el forzamiento se muestra en la Figura (5).

Establecido el arreglo experimental, fue necesario determinar la forma del forzamiento generado, conocido como fuerza de Lorentz. Esta fuerza se origina por la interacción de campos electromagnéticos, con la relación entre ellos dada por:

$$\mathbf{F} = \gamma\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (22)$$

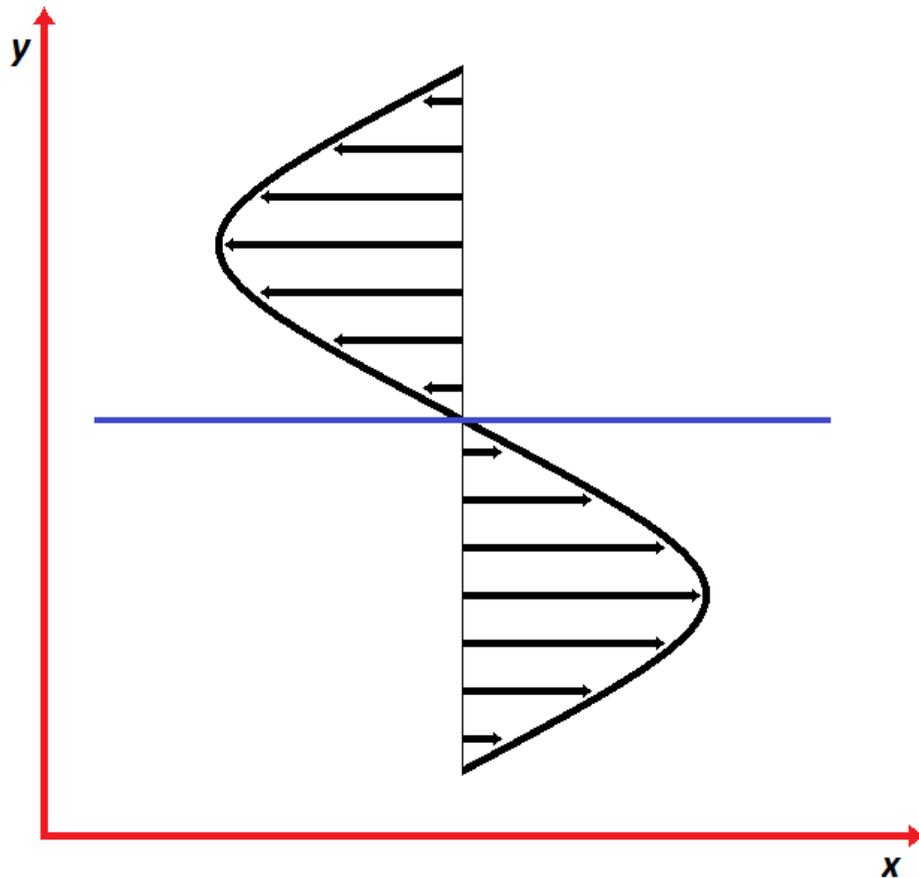


Figura 4: Esquema del perfil de velocidad de un flujo de corte sinusoidal. Las flechas indican la dirección del flujo.

con γ la densidad de carga, \mathbf{E} el campo eléctrico, \mathbf{J} la densidad de corriente y \mathbf{B} el campo magnético.

Debido a que se utilizó un fluido electrolítico con una conductividad pequeña, la densidad de carga en el fluido es mínima, lo que implica que el primer término de (22) es mucho menor que el segundo. Esto se comprobó al realizar un análisis dimensional, lo que redujo la ecuación (22) a una relación más simple:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (23)$$

La forma en la cual queda establecida esta relación indica que el forzamiento es perpendicular a los campos \mathbf{J} y \mathbf{B} . En este trabajo, los cambios en la magnitud del forzamiento fueron dados por cambios en la magnitud de la densidad de corriente, mientras que el campo magnético se mantuvo constante al utilizar imanes permanentes.

A continuación se explica cómo se midieron y distribuyeron los campos aplicados en el fluido.

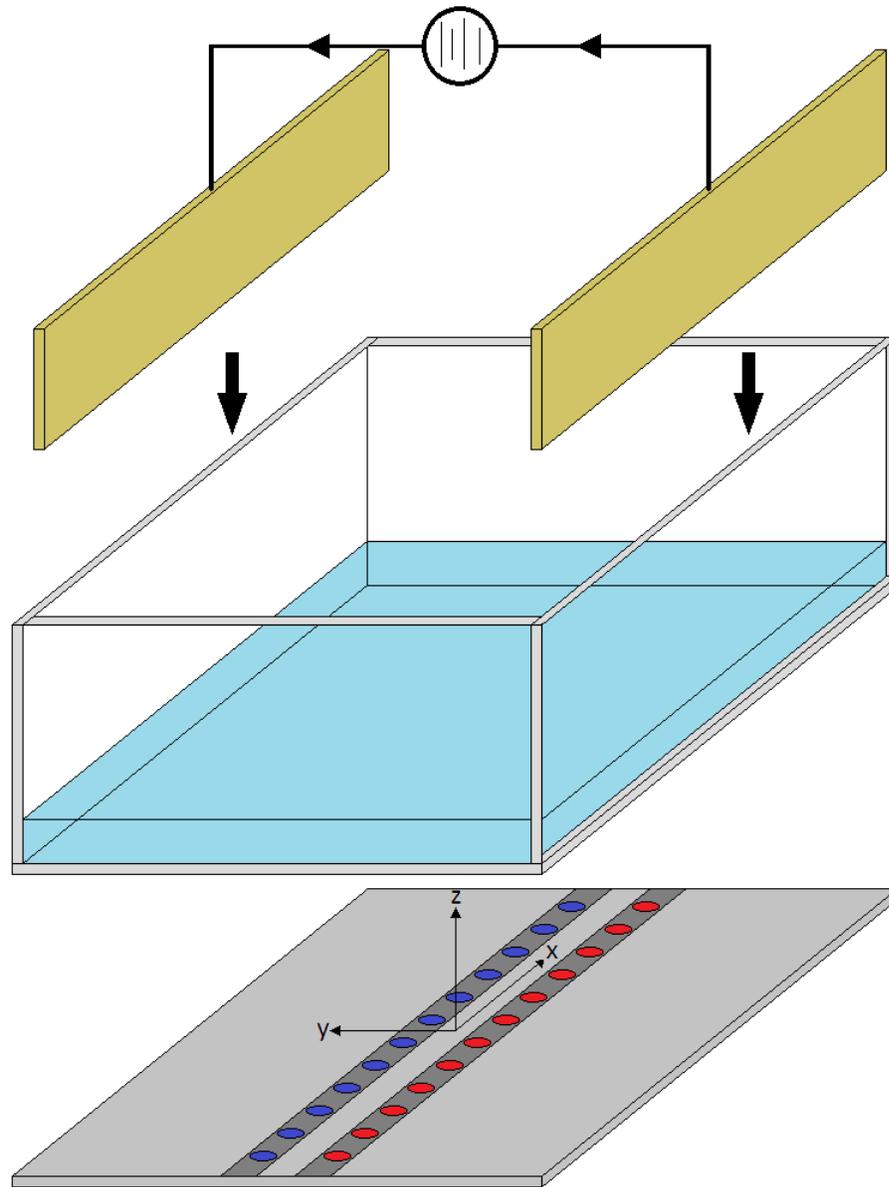


Figura 5: Esquema del arreglo experimental utilizado. Se muestra por niveles los componentes principales del arreglo. En la configuración de los imanes se indica la polaridad magnética con colores (rojo para positivo y azul para negativo). Además se muestra la posición de los electrodos con respecto a las filas de imanes.

3.1.1 Configuración del campo magnético B

Para determinar el campo magnético generado por la distribución de imanes se utilizó un gaussímetro (F.W. Bell, 5180 Gauss/Tesla meter), el cual emplea una sonda para calcular el campo magnético con base en el efecto Hall.

Para llevar a cabo las mediciones necesarias, se dibujó una gradilla horizontal para medir ade-

cuadamente las variaciones del campo magnético en las regiones cercanas a los imanes. Se eligió medir cada 3 mm cerca de los imanes, mientras que lejos de ellos (a más de 4 cm), al no presentar variaciones importantes, se midió cada 6 mm.

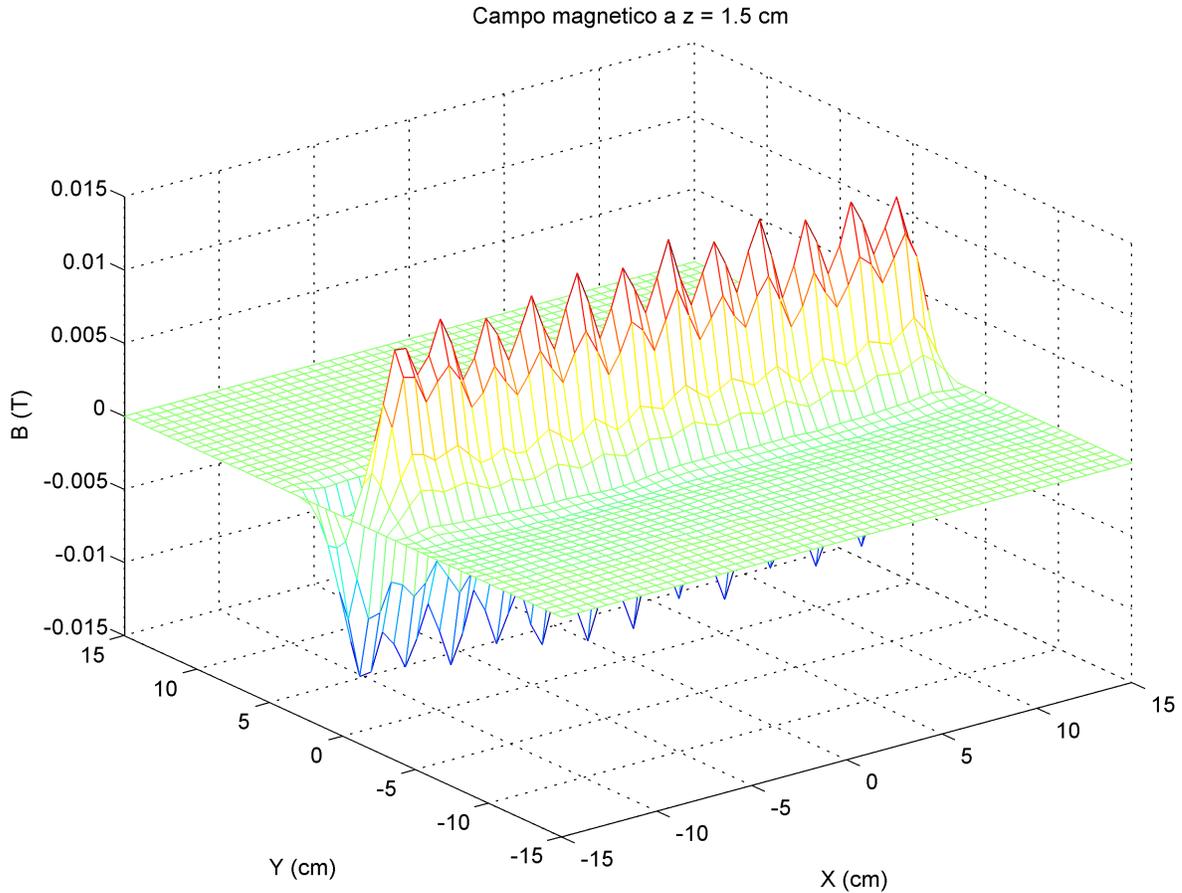


Figura 6: Campo magnético generado por la configuración de veinticuatro imanes medido a una distancia de 1.5 cm. Valores positivos son representados por colores rojos y negativos azules.

Las mediciones de la intensidad del campo magnético mostradas en la Figura (6) se realizaron a una distancia vertical de 1.5 cm de la superficie de las imanes, que es la distancia equivalente a la altura de la capa de fluido conductora más la del grosor del fondo del contenedor. En estas mediciones se obtuvo que la intensidad del campo es mayor en las regiones cercanas a los centros de los imanes, los cuales presentaron una intensidad máxima promedio de alrededor de 0.014 Teslas.

Para poder distinguir los cambios en el campo magnético que ocurren entre las hileras de imanes, se realizó un corte del campo magnético con respecto al eje y (en $x = 1.2$ cm), el cual

se muestra en la Figura (7). Dada la configuración del arreglo, se presentó un rápido cambio en el campo magnético en el eje central del tanque, pasando de valores de campo positivos ($y < 0$) a negativos ($y > 0$) con una magnitud similar. Una segunda inversión, pero de mucha menor magnitud, ocurre en el campo al alejarse de los imanes en dirección de las paredes ($y \sim \pm 5\text{cm}$). Este segundo cambio de signo en el campo magnético ocurre debido a la inversión de las líneas de flujo, al pasar de la parte positiva del imán a la negativa.

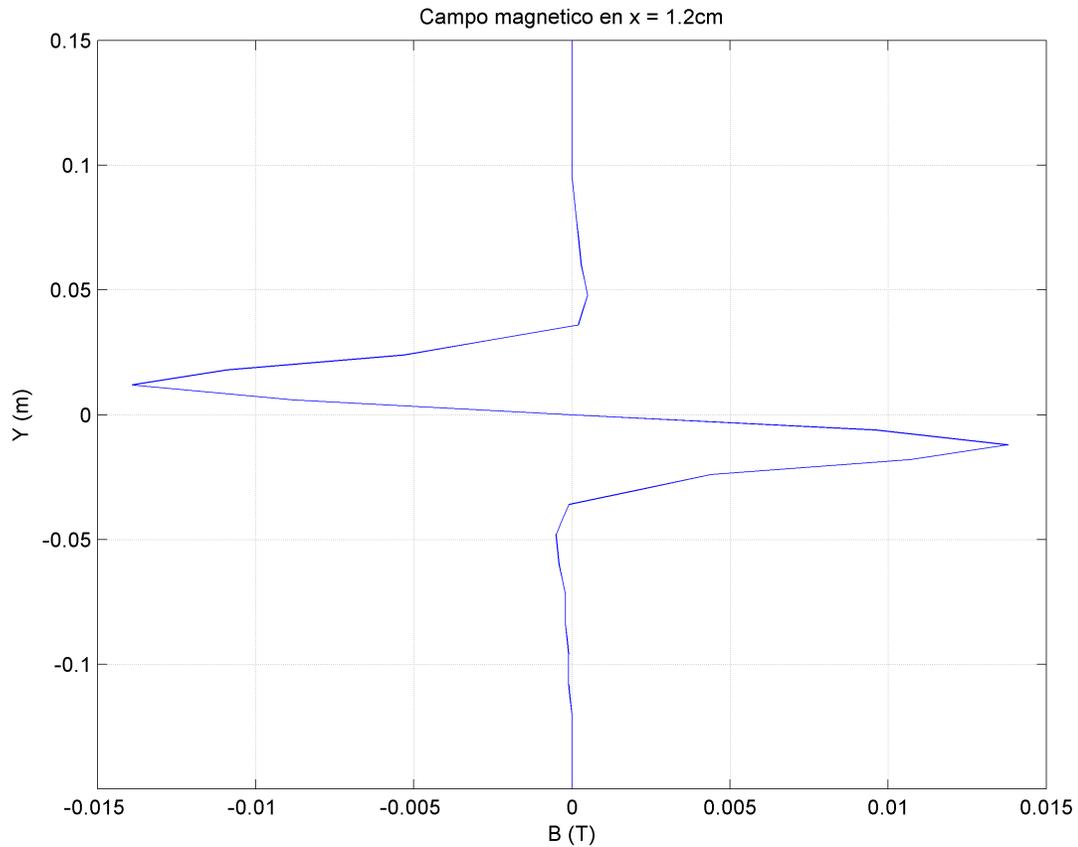


Figura 7: Perfil del campo magnético medido en $x = 1.2\text{ cm}$. Se observan las variaciones del campo en la dirección horizontal y .

Además de presentarse variaciones horizontales del campo magnético, verticalmente hay cambios importantes: al acercarse a la superficie de los imanes se tiene un incremento de la magnitud del campo. Para registrar esta variación, se llevaron a cabo mediciones cada milímetro desde la superficie del imán hasta una altura de 2 cm. El comportamiento del campo se muestra en la Figura (8). Se observa que el campo magnético tiende a decaer de forma exponencial en la dirección vertical, teniendo una intensidad máxima de 0.315 T en la superficie del imán y siendo casi nulo a una

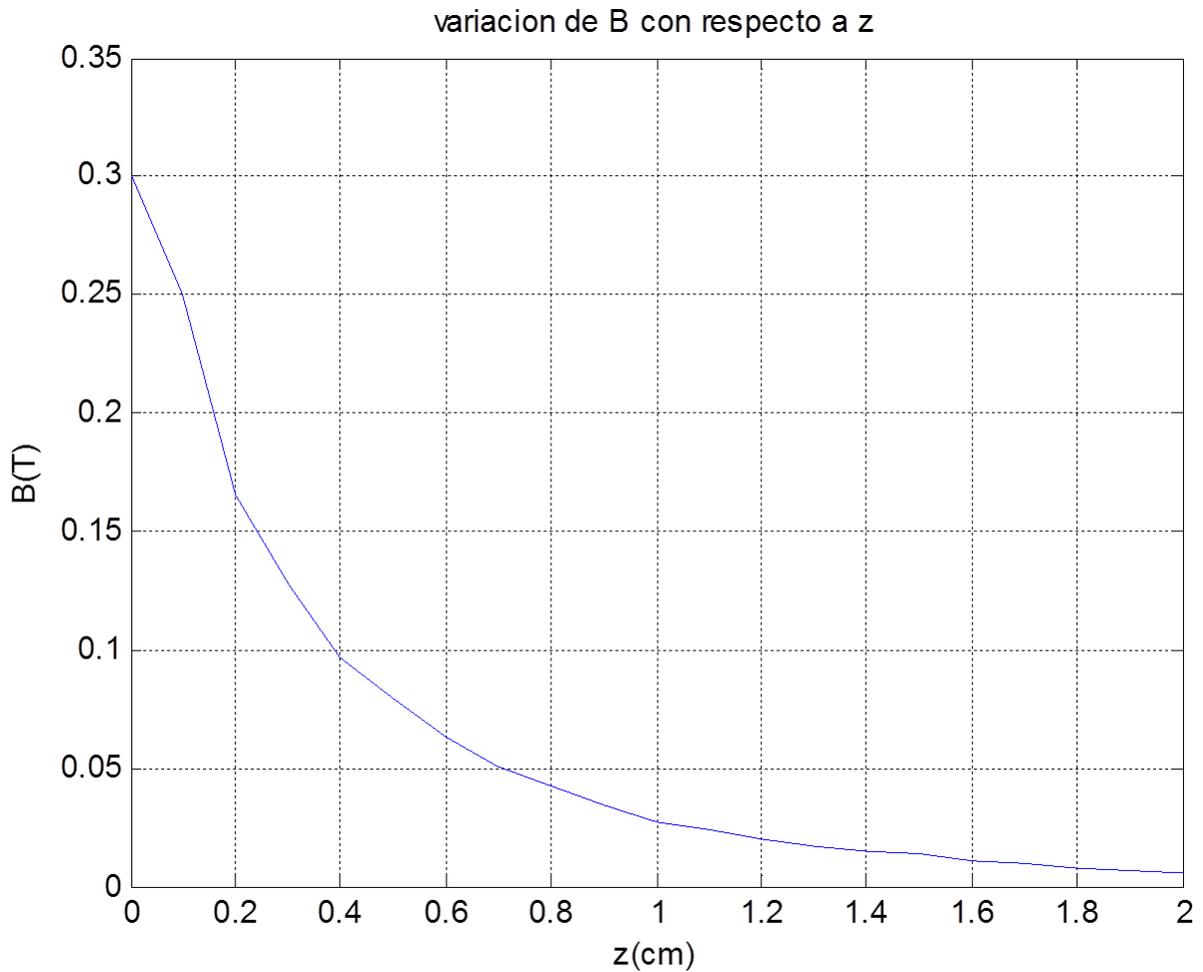


Figura 8: Variación del campo magnético medido en la dirección vertical z . Se observa un decaimiento exponencial de la magnitud del campo.

distancia de 2 cm.

3.1.2 Configuración de la densidad de corriente \mathbf{J}

Se determinó la distribución de la densidad de corriente por medio de la relación que presenta con el campo eléctrico generado. En el caso de un material óhmico, esta relación es dada por:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (24)$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico en el material y σ su conductividad. Para encontrar la distribución del campo \mathbf{E} con base en las variables conocidas (en este caso, la diferencia de potencial eléctrico),

se utilizó:

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \quad (25)$$

con V el campo escalar de potencial eléctrico.

Se determinó la forma del campo al modelar el arreglo de los electrodos utilizados como un capacitor de placas paralelas con una diferencia de potencial. Este análisis ha sido realizado por una variedad de autores, quienes, dependiendo de sus objetivos, utilizan diferentes métodos para encontrar la solución (Parkera, 2002; Jenn, 2002; Hegg & Mamishev, 2004; Catalán et. al., 2009).

Para la solución más simple, se considera que el campo eléctrico entre las placas es constante, y cuya magnitud está dada por:

$$|\mathbf{E}| = \frac{V}{d}, \quad (26)$$

donde d es la distancia entre los electrodos. En soluciones más complejas, se considera el efecto causado por las dimensiones finitas de los electrodos, llevando al uso de métodos de variable compleja (por ejemplo, las transformaciones de Schwarz-Christoffel para realizar mapeos conformes (Palmer, 1937)) para obtener el campo de potencial eléctrico, y con esto, el campo electrostático. Un ejemplo de la forma del campo electrostático y de potencial obtenido a partir de la transformación de Schwarz-Christoffel se muestra en la Figura (9).

Para evitar realizar cálculos en el espacio complejo y aun así estimar la importancia de los efectos de borde, se eligió determinar la forma del campo de potencial eléctrico mediante la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0, \quad (27)$$

la cual se resolvió de manera numérica por medio de un esquema de diferencias finitas. Al resolverse la ecuación por este método, se consideró el potencial en los electrodos como constante, además de elegir condiciones de frontera abiertas. La diferencia de potencial entre las placas (y la corriente entre ellas) se conoce directamente de la fuente de poder. Como ejemplo, el campo eléctrico obtenido para el tanque de razón de aspecto 4 a una diferencia de potencial de 7.4 Volts se muestra en la Figura (10).

El campo eléctrico calculado presentó líneas de campo relativamente constantes dentro de la región definida por los electrodos (ancho de los electrodos por la distancia entre ellos), con dirección del electrodo negativo al positivo (de inferior a superior). Además, se observó un curvamiento de las líneas de campo debido a efectos de borde en las esquinas de los electrodos; sin embargo, estas variaciones tienden a ser pequeñas o muy lejanas de la zona en donde se encuentran los imanes, por lo que no afectan la distribución del forzamiento de manera importante. Esto permite considerar el campo eléctrico como constante (similar a la formula (26)).

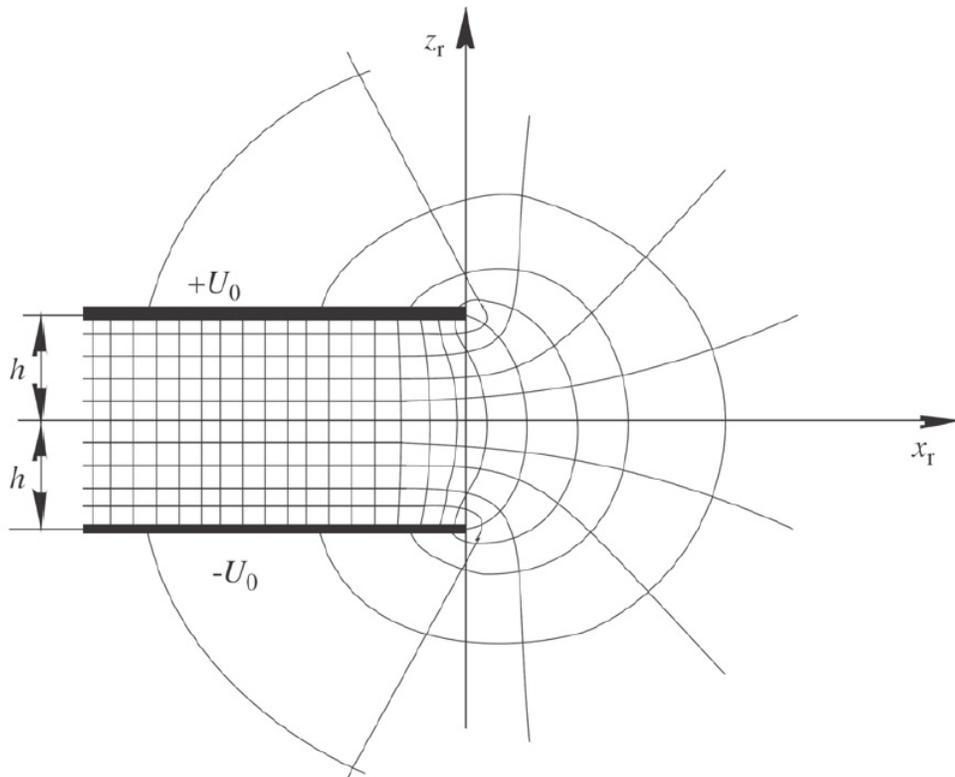


Figura 9: Modelo bidimensional de un capacitor de placas paralelas y su distribución del campo eléctrico y su potencial. Las líneas perpendiculares a las placas representan el campo eléctrico, con las paralelas (curvándose fuera del capacitor) representando el potencial. Esquema obtenido de Catalán-Izquierdo *et al.* (2009), pp. 2.

De manera similar, el comportamiento del campo eléctrico observado para el resto de las razones de aspecto fue considerado constante. Debido a que el campo eléctrico es casi uniforme entre los electrodos, se puede usar la siguiente relación simplificada de la densidad de corriente:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{I}}{S} = \frac{\mathbf{I}}{hL_e}, \quad (28)$$

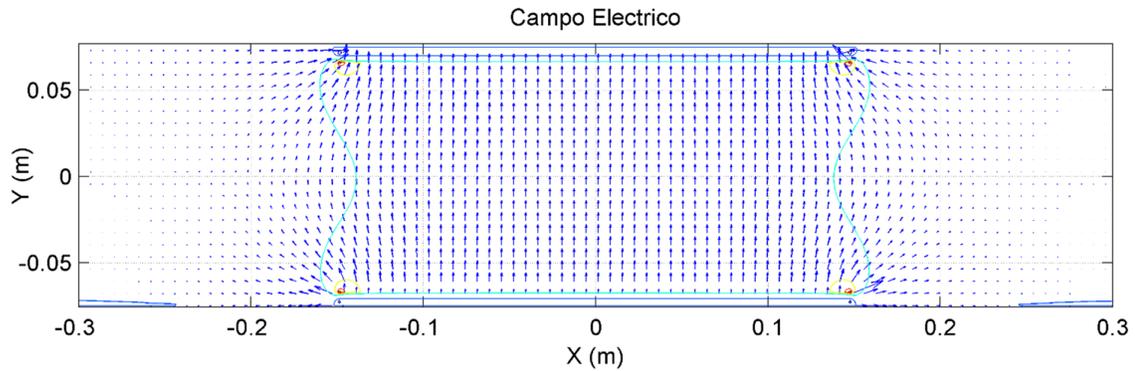


Figura 10: Campo eléctrico obtenido con un esquema de diferencias finitas para un potencial de 7.6 Volts y con un dominio equivalente al tanque de razón de aspecto cuatro. Las flechas indican la dirección del campo eléctrico y las líneas de color su intensidad, de azules para las intensidades más bajas y rojas para las más altas.

con \mathbf{I} la corriente aplicada en el fluido y S el área transversal, conformada por el producto de la profundidad de la capa de fluido h y el largo de los electrodos L_e ; de esta manera se determinó \mathbf{J} sin la necesidad de introducir variables adicionales. El campo de la densidad de corriente obtenido tiene una distribución similar a la de la figura (10), con una densidad de corriente uniforme entre los electrodos y nulo fuera del área entre ellos.

3.1.3 Campo de forzamiento

A partir del campo eléctrico y magnético, se determinó el campo de fuerza producido por la fuerza de Lorentz (definido en la ecuación (23)). Un ejemplo de como se distribuye la fuerza de Lorentz se muestra en la Figura (11), en la que se considera un tanque de razón de aspecto 2 y una corriente aplicada de 370mA.

Esta distribución del campo de forzamiento se observó para las demás razones de aspecto: en la zona central del tanque se encuentran dos flujos opuestos (de una misma magnitud pero dirección contraria), generando así una zona de corte en el centro del dominio. La distancia de los valores máximos de cada uno de los flujos (o *jets*) al centro del tanque fue de $\pm 1.2\text{cm}$. Entre los *jets* formados y las paredes adyacentes, se formaron flujos opuestos de una menor magnitud (alrededor de 7% de la intensidad máxima), producidos por la inversión del campo magnético en los imanes permanentes. Estos flujos se observan de mejor manera en el perfil del forzamiento en $x = 0\text{ cm}$

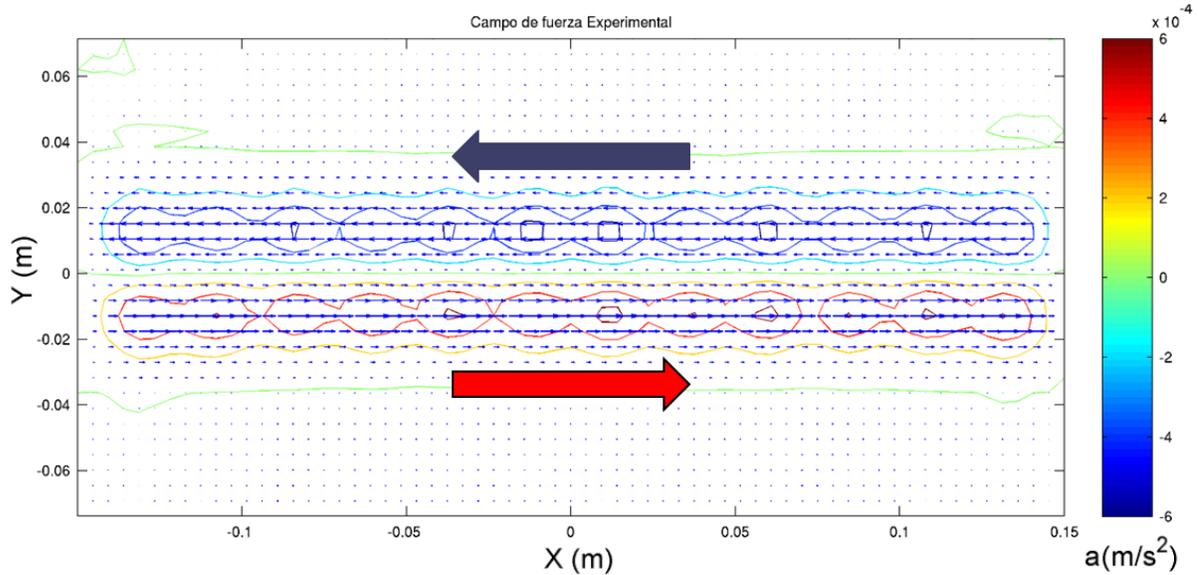


Figura 11: Campo de forzamiento obtenido a partir de los campos eléctrico y magnético medidos. Se utilizó un dominio equivalente para un tanque de razón de aspecto 2 y una corriente de 370mA. Los colores representan la intensidad del forzamiento, con los valores positivos en rojo y los negativos en azul. Las flechas pequeñas representan el campo de forzamiento calculado, mientras que las flechas grandes indican la dirección promedio del flujo.

mostrado en la Figura (12).

3.2 Mediciones experimentales

Establecido el arreglo experimental y los campos aplicados al fluido, se colocó sobre el tanque una cámara (CANON XA10) a una distancia de aproximadamente 60 cm de la superficie del fluido para llevar a cabo las grabaciones de los flujos formados.

Para llevar a cabo observaciones cualitativas de los flujos generados, se añadió tinta vegetal de colores en el fluido, colocando un fondo color blanco debajo del tanque utilizado para resaltar la tinta. Generalmente, se utilizó tinta de dos colores distintos, la cual fue inyectada en el fluido sobre las hileras de imanes, permitiendo observar la mezcla. Durante estas observaciones cualitativas el arreglo experimental se iluminó con luz natural.

En cambio, para realizar mediciones cuantitativas, se añadieron partículas reflectoras a la superficie del fluido. Estas partículas, conocidas como *Polyamid Seeding Particles (PSP)*, tienen un diámetro de $20\mu\text{m}$ y se comportan como trazadores pasivos en el fluido. A diferencia de las

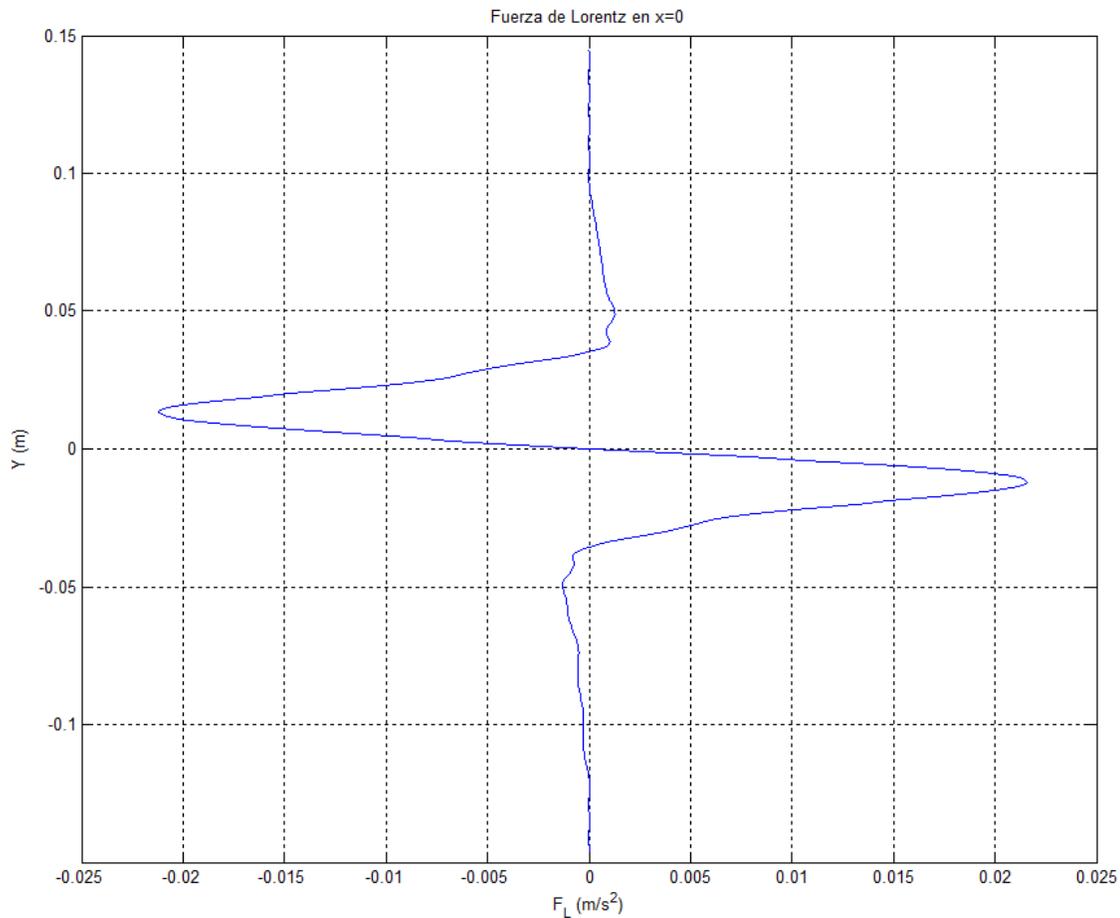


Figura 12: Perfil del campo de forzamiento obtenido a partir de los campos eléctricos y magnéticos medidos en $x = 0$. Se utilizó una corriente de 370mA.

observaciones cualitativas, las partículas se distribuyeron uniformemente en todo el dominio. La iluminación de estas partículas se realizó mediante dos láser Nd:Yag verdes (497nm-529nm). Estos producen un plano iluminado de 1 mm de espesor sobre la superficie del fluido.

Una vez obtenidas las grabaciones de un experimento, se separó el video en una secuencia de imágenes para realizar un análisis por medio de velocimetría por imágenes de partículas (*Particle Image Velocimetry, PIV*). El intervalo de tiempo entre cada imagen fue de un cuarto de segundo. El programa de PIV empleado para llevar a cabo el análisis, llamado Dantec Flow Manager, fue diseñado por DANTEC Dynamics. Este protocolo consiste en dividir las imágenes en regiones rectangulares, llamadas áreas de interrogación. Para cada una de estas regiones se realiza una correlación cruzada entre dos fotografías consecutivas, determinando un vector de desplazamiento

promedio. Utilizando el intervalo de tiempo entre cada fotografía (Δt), estos vectores son transformados en vectores de velocidad. Este proceso se lleva a cabo para todas las áreas de integración, dando así los campos de velocidad del flujo observado. Un diagrama de este procedimiento se muestra en la Figura (13).

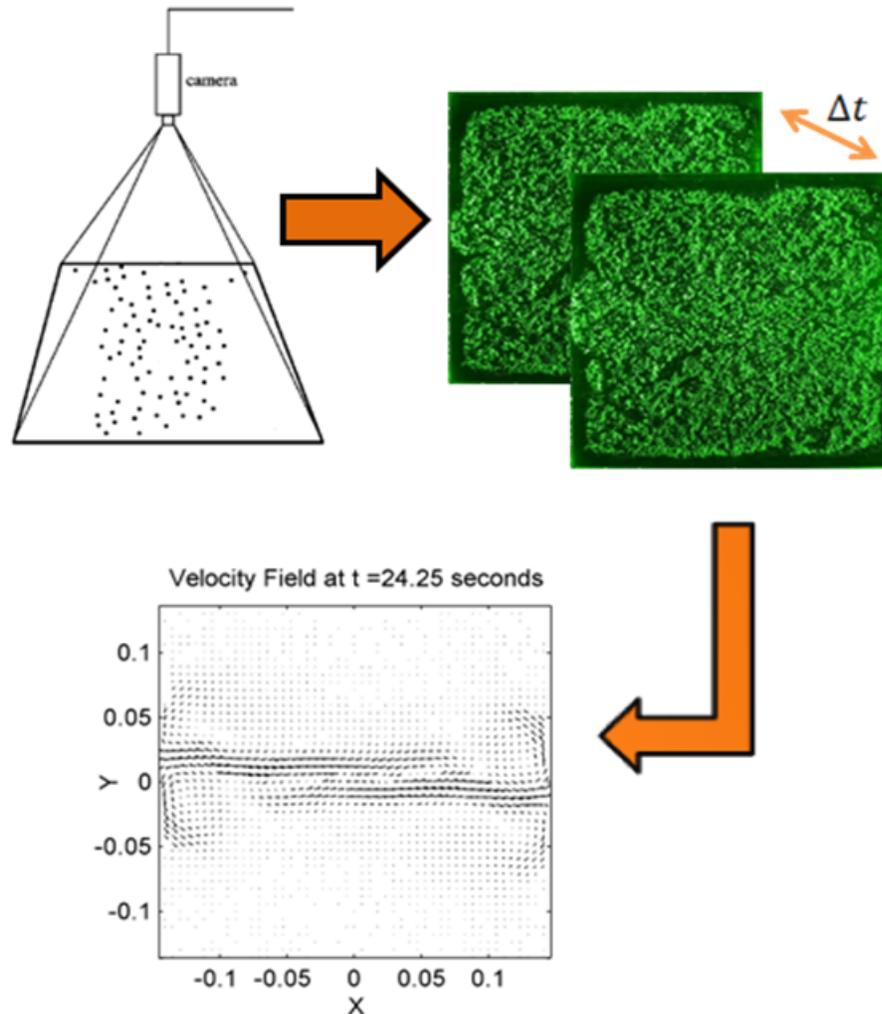


Figura 13: Esquema del procesamiento de imágenes de partículas para medir los campos de velocidad en un tanque de razón de aspecto 1. El tiempo entre cada imagen es representado por Δt .

Para determinar el error asociado a las mediciones realizadas con el método PIV se hizo una comparación con simulaciones numéricas (utilizando el modelo descrito en el Capítulo 5). Para esto, se generaron imágenes representando el desplazamiento de partículas virtuales en un campo de velocidad producido por una simulación de un monopolo gaussiano. Estas imágenes fueron

analizadas por PIV de la misma manera en la que se calcularon los campos de velocidad de los experimentos. Al comparar los campos de velocidad obtenidos por el método PIV contra los producidos numéricamente se obtuvo un error de aproximadamente $\pm 0.25\text{cm/s}$ para las velocidades (con un 12% de error absoluto). En el caso de la vorticidad calculada, se obtuvo un error absoluto cercano al 27%.

3.3 Procedimiento experimental

Para cada tanque utilizado (con razón de aspecto 1, 2, 3 y 4), se realizaron tres series de experimentos, las cuales se diferenciaron por la magnitud del forzamiento utilizado. La disminución o aumento del forzamiento se obtuvo variando la diferencia de potencial aplicada a los electrodos, modificando la corriente que se inyecta al fluido con la fuente de poder. Los tres valores de la magnitud de corriente elegidos para los experimentos fueron: 160mA, 370mA y 770mA ($\pm 10\text{mA}$). El cambio de distancia entre los electrodos debido a las diferentes dimensiones de los tanques llevó a la utilización de diferentes voltajes para obtener la misma magnitud de corriente.

Ya elegido tanto el dominio y la magnitud del forzamiento a utilizar, se inició el proceso experimental, comenzando todos los experimentos con el fluido conductor en reposo. Para evitar errores, la fuente de poder se preparó previamente a la diferencia de potencial requerida para generar la corriente deseada, por lo que, para impulsar el fluido, solo fue necesario encender la fuente de poder. Al mismo tiempo que se activó la fuente de poder, comenzó la grabación con la cámara, capturando la evolución del flujo.

Es importante mencionar que, durante el transcurso de los experimentos, se presentaron variaciones en la resistencia eléctrica del fluido, requiriendo variar de manera manual la diferencia de potencial aplicada a los electrodos para mantener la corriente eléctrica constante. La duración de los experimentos fue de aproximadamente 4 minutos.

Capítulo 4

Resultados experimentales

En esta sección se presenta los resultados obtenidos con los experimentos de laboratorio. Ya que los experimentos se realizaron en cuatro tanques con diferente razón de aspecto y bajo tres distintas magnitudes de forzamiento (débil ($I = 160\text{mA}$), intermedio ($I = 370\text{mA}$) e intenso ($I = 770\text{mA}$)), se obtuvieron 12 posibles configuraciones del flujo. Estas configuraciones se caracterizaron por dos números adimensionales, la razón de aspecto (definida por la relación (21)) y el número de Reynolds, el cual se define como:

$$Re = \frac{\langle \mathbf{u} \rangle L_e}{\nu}, \quad (29)$$

con L_e la longitud de los electrodos y $\langle \mathbf{u} \rangle$ el promedio de la magnitud de la velocidad de los *jets* que conforman el corte al inicio de los experimentos. En la Figura (14) se muestra una gráfica del espacio de parámetros ocupado por las 12 configuraciones experimentales.

Ya que algunos de los experimentos presentaron similitudes, se describe primero el comportamiento y la organización más característica que se observó en los diferentes casos. Las particularidades más importantes observadas para cada tanque se describen posteriormente. Finalmente, se investigan las características globales del flujo (energía cinética total, enstrofía, etc.) y cómo se comportan durante el experimento.

4.1 Deformación del flujo inicial

Inicialmente el fluido está en reposo. Al iniciar el forzamiento se produjeron dos *jets* con dirección opuesta, los cuales constituyeron un flujo de corte en el eje central ($y = 0$) del dominio. En la Figura (15) se muestra el flujo inicial establecido y su perfil de velocidad para un caso característico.

A pesar de que el perfil de velocidad medido al inicio de los experimentos (el cual fue similar en todos los casos) no fue estacionario, se calculó tanto el teorema del punto de inflexión de Rayleigh

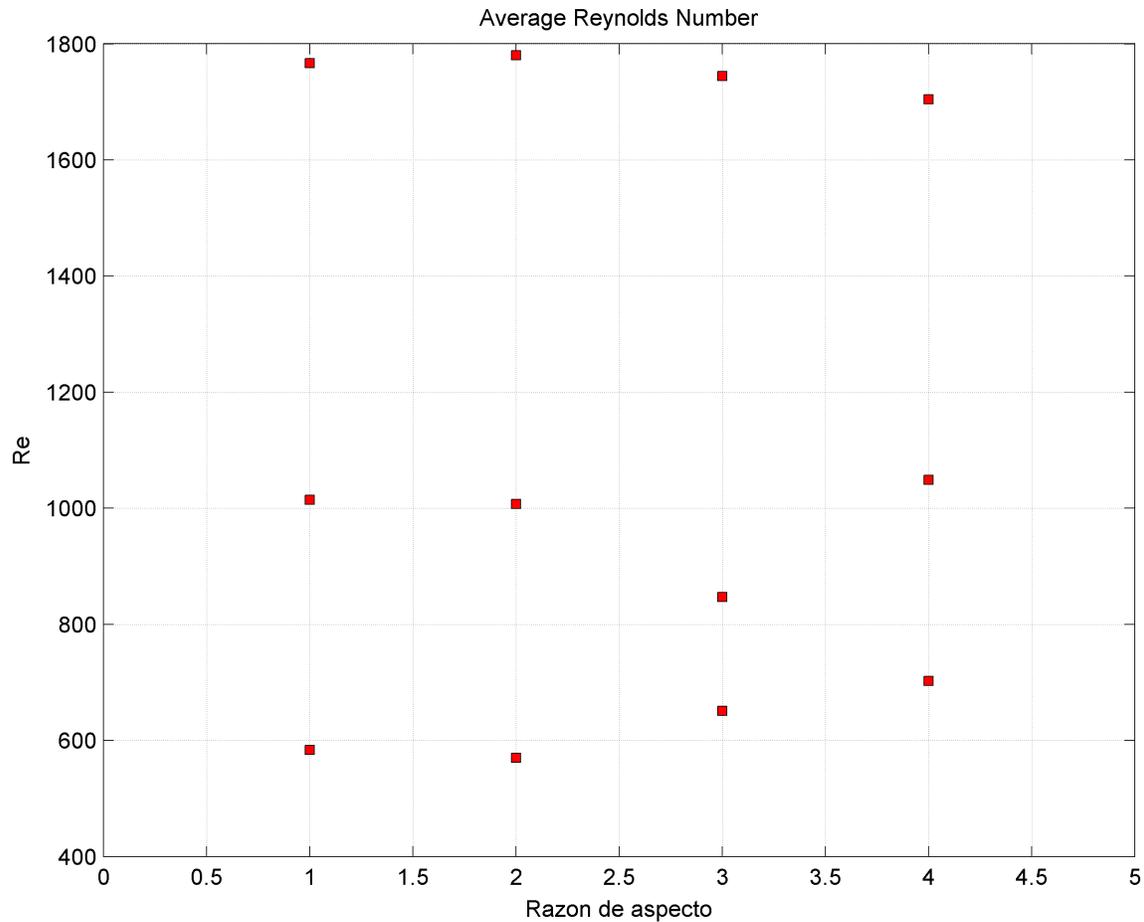


Figura 14: Espacio de parámetros explorados (Re, δ) con los experimentos realizados. Se obtuvieron 12 configuraciones características.

(18) como el criterio de Fjørtoft (20) como guía para conocer si el flujo podía ser estable ante perturbaciones. En la Figura (16) se muestra las gráficas obtenidas al calcular ambos criterios mediante un ajuste de los datos experimentales medidos. Se observa que ambos criterios de necesidad se cumplen, lo cual indica que el flujo de corte utilizado en los experimentos puede ser inestable ante perturbaciones. Se consideró que la velocidad en el punto de inflexión fue nula $U_I = 0$.

Debido al forzamiento continuo, los *jets* experimentaron una aceleración constante, durante la cual se observó la generación de una deformación en los extremos. Esto causó la transferencia de momento de la componente en x (u) a la componente en y (v). Se observa una secuencia de este proceso en las Figuras 17 y 18, aproximadamente en $x = \pm 16\text{cm}$, es decir, hasta los límites del área de forzamiento delimitada por la longitud de los electrodos. La razón por la cual se generó

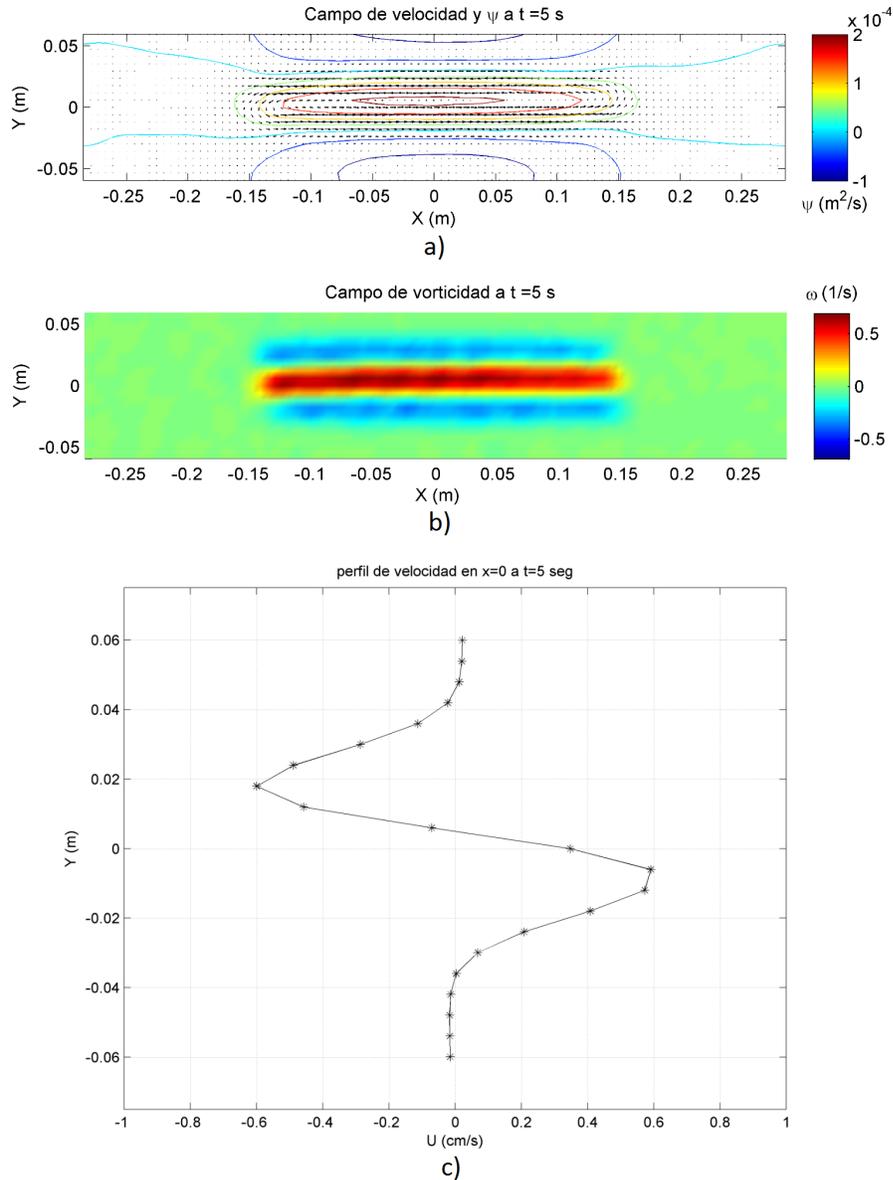


Figura 15: Los paneles superiores muestran el campo de velocidad y vorticidad relativa al tiempo $t = 5$ s, para un experimento con $\delta = 4$ y un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Los colores de la imagen del campo de vorticidad representan vorticidad positiva (rojo) y negativa (azul). Esta convención se adopta para el resto de la tesis. El panel inferior muestra el perfil del flujo obtenido bajo las mismas condiciones.

la deformación de los extremos (observada para todos los casos) se debió a la salida y reentrada del fluido a las zonas más intensas del área de forzamiento. El incremento de la velocidad de los *jets* causó que la perturbación en los extremos aumentara de amplitud, y deformara el flujo hacia el centro del tanque. La generación y aumento de estas perturbaciones trajo como consecuencia la desestabilización del flujo, como se describe en la siguiente subsección.

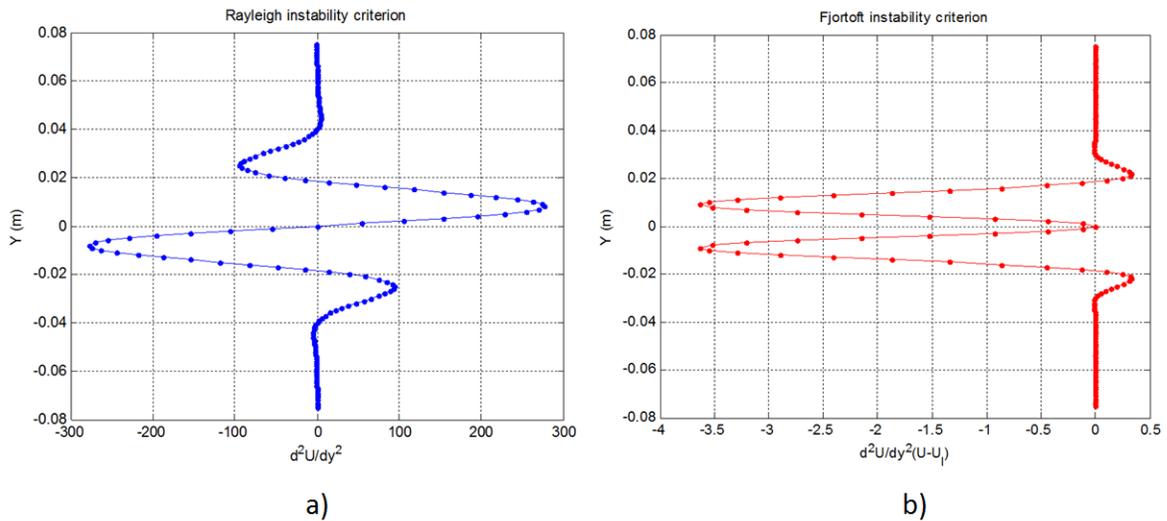


Figura 16: Criterios de Rayleigh (a) y Fjortoft (b) calculados a partir del un ajuste del perfil del flujo inicial generado por el forzamiento. Se eligió utilizar las mediciones del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$).

Previo al análisis de la evolución posterior del flujo, se investigó la respuesta del fluido ante el forzamiento aplicado. Para ello se considera que el cambio temporal de la velocidad en un jet (i.e. su aceleración) es producido solamente por el forzamiento $|F|$:

$$\frac{\Delta U_{jet}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} |F|. \quad (30)$$

Ya que este forzamiento fue constante en el tiempo, al integrar se obtiene la relación:

$$U_{jet} = \frac{|F|t}{\rho} \quad (31)$$

indicando que la velocidad es proporcional al tiempo.

Para corroborar esto se graficó la cantidad $Sh = \Delta U / \rho |F|$ contra el tiempo, tomando los valores de δU como ($\Delta U = U_{jet}^+ - U_{jet}^-$), es decir, la diferencia entre los máximos de velocidad en los jets. En el caso de $|F|$, su escala se calculó a partir de la fuerza de Lorentz (22):

$$|F| = [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] = \frac{IB}{hL_e}, \quad (32)$$

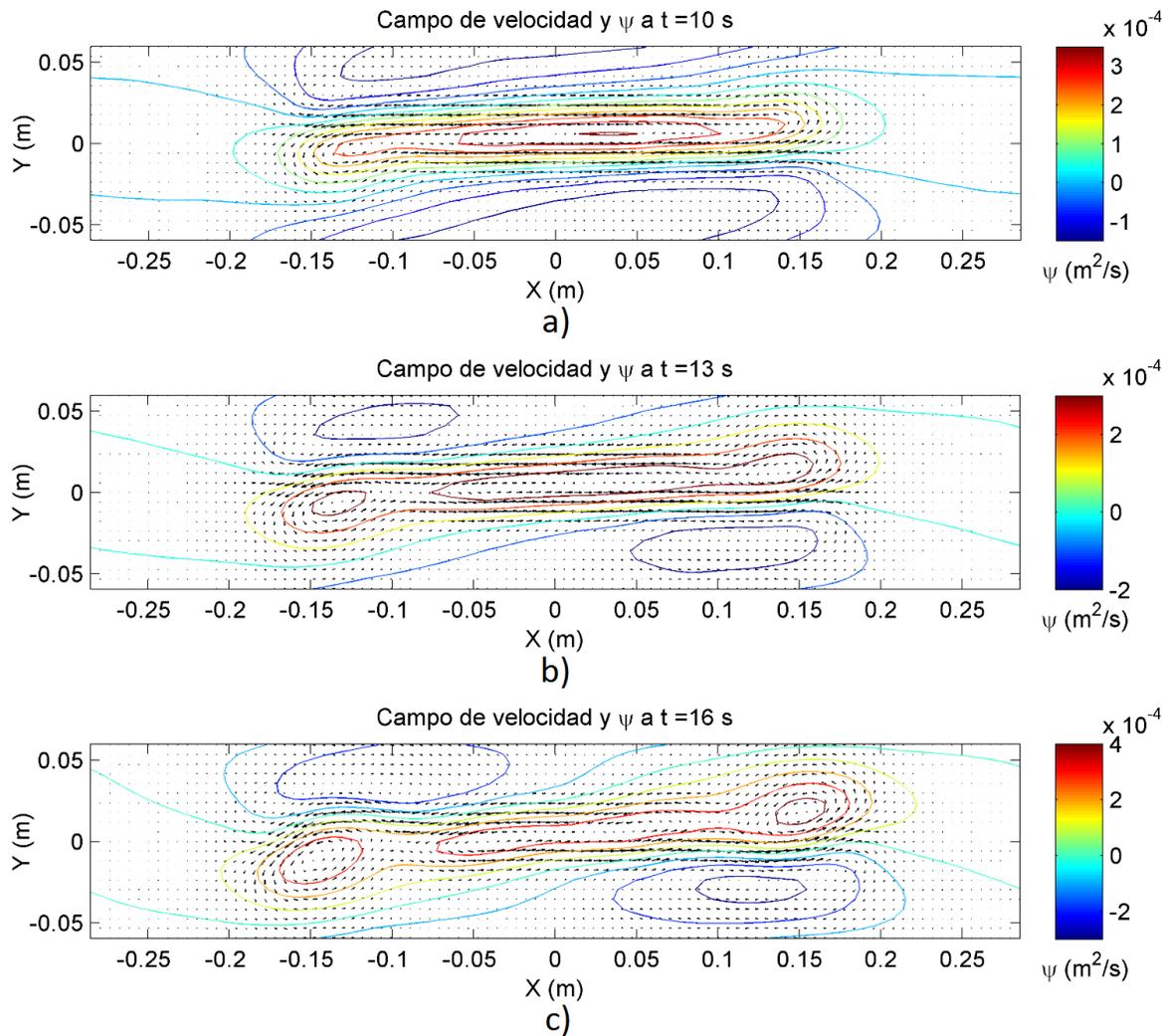


Figura 17: Campo de velocidad del flujo observado a los 10, 13 y 16 s en el tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa la deformación del flujo de corte al transcurrir el tiempo.

en donde I tomó los valores de 160mA, 370mA y 770mA en los tres tipos de forzamiento. B representa el valor del campo magnético máximo ($\sim .015\text{T}$). Las gráficas obtenidas para cada razón de aspecto y forzamiento utilizado se muestra en la Figura (19).

Al tiempo $t = 0$ s. Sh es igual a cero, incrementando de manera lineal conforme el forzamiento imprime momento al fluido. Este incremento de Sh presentó una pendiente similar en casi todos los casos (~ 2), lo cual corrobora el aumento lineal en el tiempo del corte de velocidad para cualquier forzamiento. En los experimentos en donde se utilizó el tanque de razón de aspecto $\delta = 4$ se observó un crecimiento de Sh un tanto diferente para los tres forzamientos.

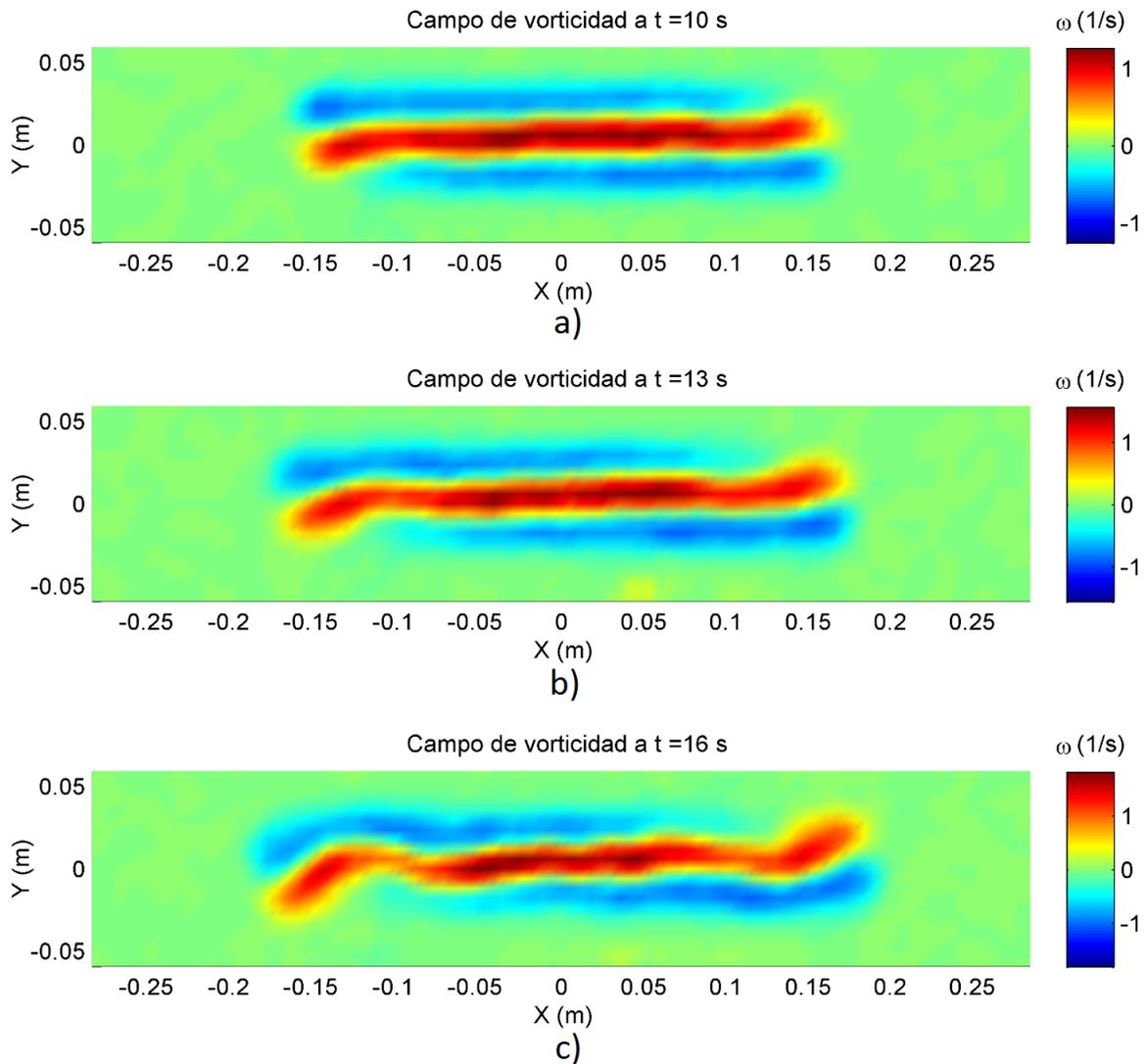


Figura 18: Superficies de vorticidad relativa del flujo de corte observado a los 10, 13 y 16 s en el tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Su campo de velocidad asociado se muestra en la figura 17.

A un cierto tiempo, el cual dependió del forzamiento aplicado, el ritmo de crecimiento de Sh se detuvo (es decir, alcanzó un máximo). Este tiempo coincidió con el momento de la deformación del flujo de corte descrita anteriormente (figs 17 y 18). Tanto el tiempo al cual cesó el incremento de Sh , así como el valor máximo que presentó, dependieron de la intensidad del forzamiento más que de la razón de aspecto del tanque.

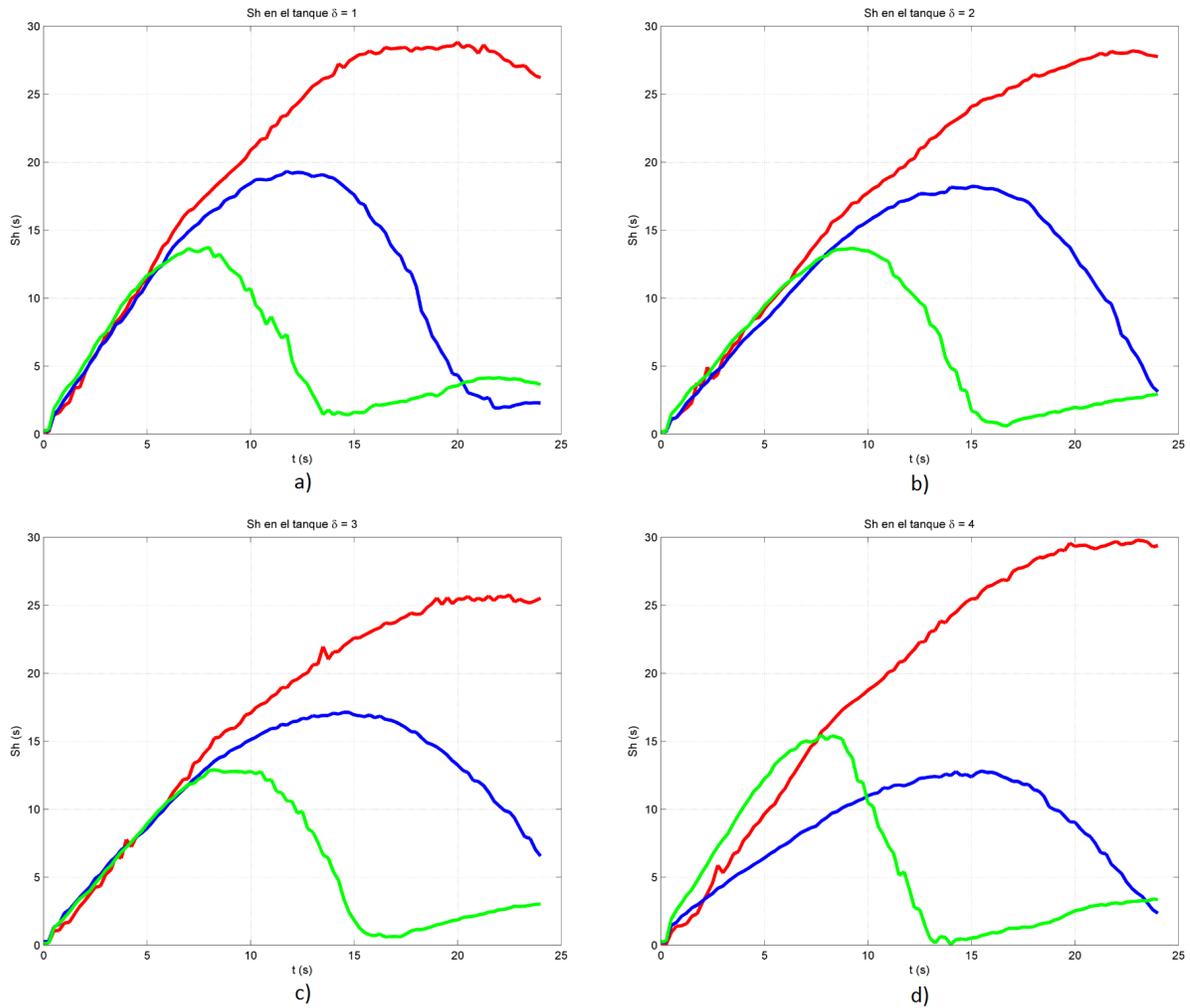


Figura 19: Evolución del parámetro Sh contra el tiempo para cada razón de aspecto (a) $\delta = 1$, (b) $\delta = 2$, (c) $\delta = 3$ y (c) $\delta = 4$. En cada gráfica se muestra el comportamiento para los tres rangos de forzamiento: $Re \sim 600$, $I = 160mA$ (rojo), $Re \sim 1000$, $I = 370mA$ (azul), $Re \sim 1800$, $I = 770mA$ (verde).

4.2 Evolución inestable: formación de vórtices

Una vez deformado el flujo de corte, la amplitud de la perturbación continuó aumentando, causando que los *jets* perdieran completamente su forma inicial y se fragmentaran, llegando a formar una serie de estructuras coherentes. Se muestra una breve secuencia de este proceso en la Figura (20) para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio. De las figuras mostradas se observa una simetría especular con respecto al origen (dirección x o y) en el flujo establecido.

La distribución de los vórtices formados por la fragmentación de los *jets*, fue similar en todos los experimentos; en cada caso se observó una cadena de vórtices centrales con vorticidad positiva

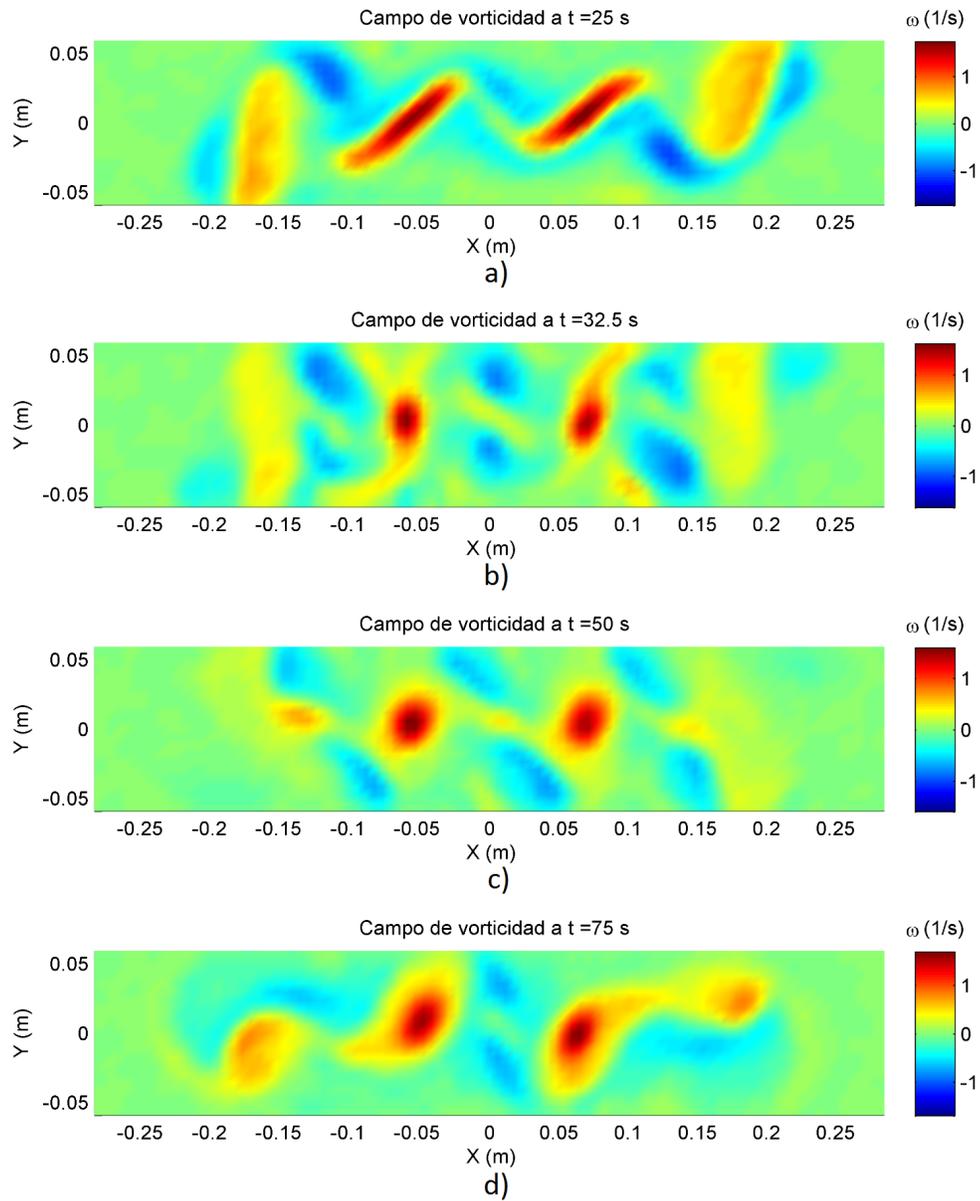


Figura 20: Secuencia del campo de vorticidad en el tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa la formación de estructuras coherentes por la deformación del flujo de corte.

(con sentido anti-horario) con un punto de velocidad casi nula separando uno de otro, ubicado en el centro del tanque. Alrededor de estos vórtices y cerca de los electrodos, se formaron una serie de remolinos con vorticidad negativa, los cuales presentaron una intensidad y tamaño menor que los vórtices con vorticidad positiva.

4.3 Evolución de las estructuras coherentes

No todos los vórtices formados se mantuvieron estáticos: aquellos vórtices que estaban fuera del área de forzamiento ($x \geq |15\text{cm}|$) disiparon parte de su energía y fueron deformados por la continua salida y reentrada de fluido causada por los *jets*. En cambio, los vórtices dentro del área de forzamiento ($x \leq |15\text{cm}|$) mostraron un comportamiento que dependió del signo de su vorticidad. Aquellos con vorticidad negativa fueron deformados por la continua acción del forzamiento (siendo lentamente arrastrados por los *jets*), mientras que aquellos con vorticidad positiva permanecieron casi estáticos en su posición original. En la Figura (21) se muestra una breve secuencia en donde se observa el cambio en la distribución de la vorticidad negativa, la cual lleva a una variación en el tamaño de los remolinos con vorticidad positiva.

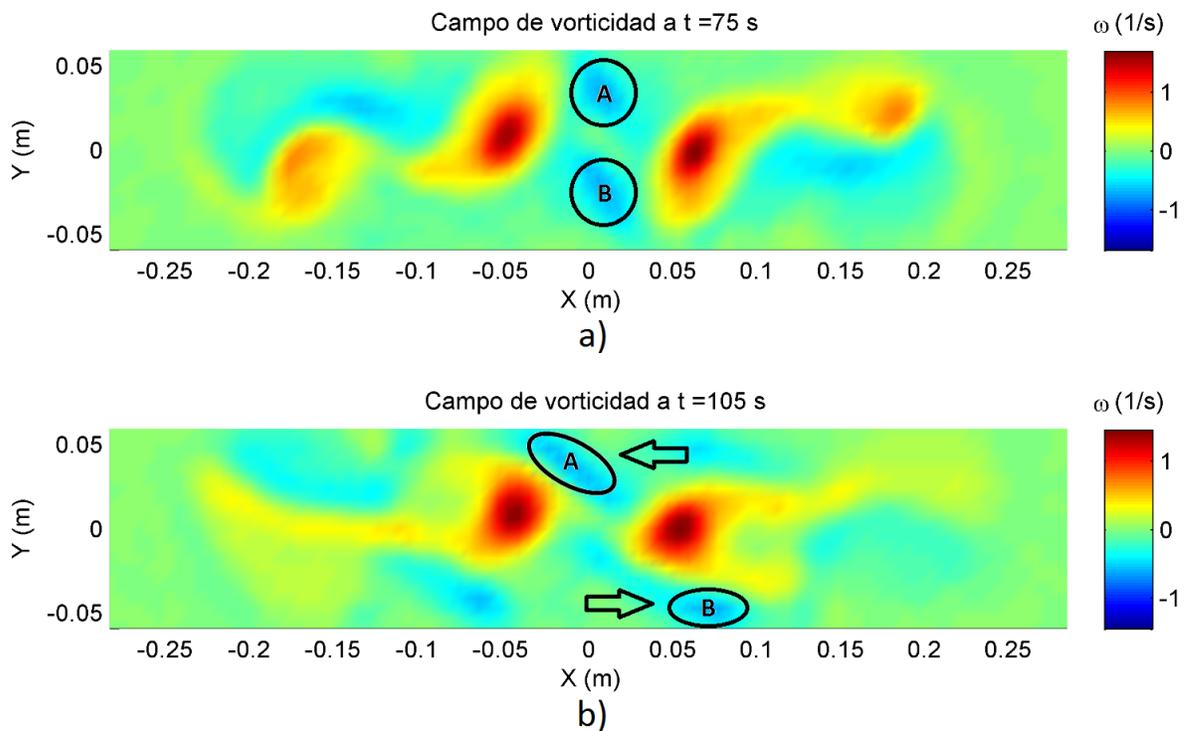


Figura 21: Campo de vorticidad del tanque de razón de aspecto cuatro con forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Las flechas indican la dirección del desplazamiento de la vorticidad negativa.

Debido al forzamiento continuo, este comportamiento se repitió por el resto de la duración del experimento, manteniendo la distribución característica de dos vórtices con vorticidad positiva y

una serie de vórtices negativos desplazándose alrededor de ellos. La deformación de los vórtices centrales dependió de la intensidad del forzamiento utilizado, oscilando entre circulares y elípticos, pudiendo llegar a volverse estructuras sin una forma geométrica definida. Esto último tiende a ocurrir para forzamientos más intensos ($Re \sim 1800$). Los vórtices centrales llegaron a tener un tamaño máximo similar al ancho de los tanques utilizados (a excepción del tanque de razón de aspecto 1).

4.4 Caso particular: $\delta = 1$

A pesar de la similitud de la distribución de los vórtices en la mayoría de los experimentos, se presentó un cambio importante en los remolinos observados en el tanque de razón de aspecto 1. En este caso, las paredes laterales causaron que el flujo en los extremos fuera desplazado hacia la parte inferior y superior del dominio, formando intensos filamentos de vorticidad. Por esto, la distribución de vórtices se limitó a dos remolinos negativos y dos positivos (con un punto hiperbólico en el centro). La Figura (22) muestra el campo de vorticidad observado en el tanque de razón de aspecto 1 a dos tiempos diferentes.

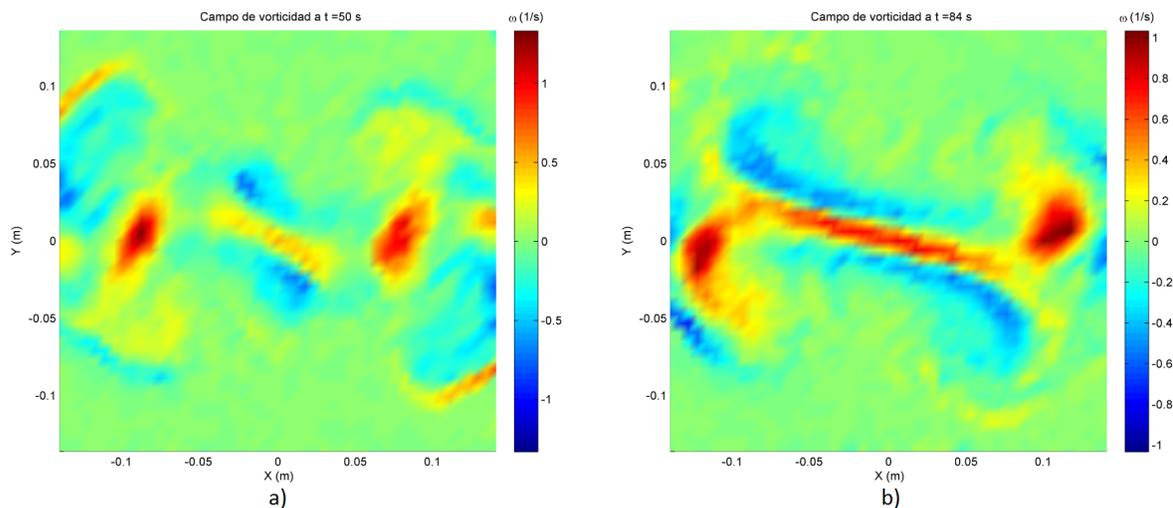


Figura 22: Campos de vorticidad obtenidos para el tanque de razón de aspecto uno con un forzamiento débil ($Re \sim 600$). Se observa la formación (panel izquierdo) y el desplazamiento hacia las paredes (panel derecho) de los vórtices positivos.

En este dominio no se observó el confinamiento de los vórtices positivos por parte de la vortici-

dad negativa ni el intercambio de vorticidad entre los *jets*; en cambio, se observó un desplazamiento de los vórtices positivos hacia las paredes laterales. Al llegar dichos vórtices a las fronteras, estos fueron deformados por el forzamiento, formando un flujo intenso que se desplazó hacia las paredes superior e inferior del tanque. Este flujo continuó desplazándose por las fronteras hasta disiparse casi por completo al no encontrarse en el área de forzamiento. Esto se muestra en la Figura (23). El restablecimiento de la zona de corte junto con el reflujo causado por las paredes, llevó a la repetida generación y supresión de estructuras coherentes en el flujo.

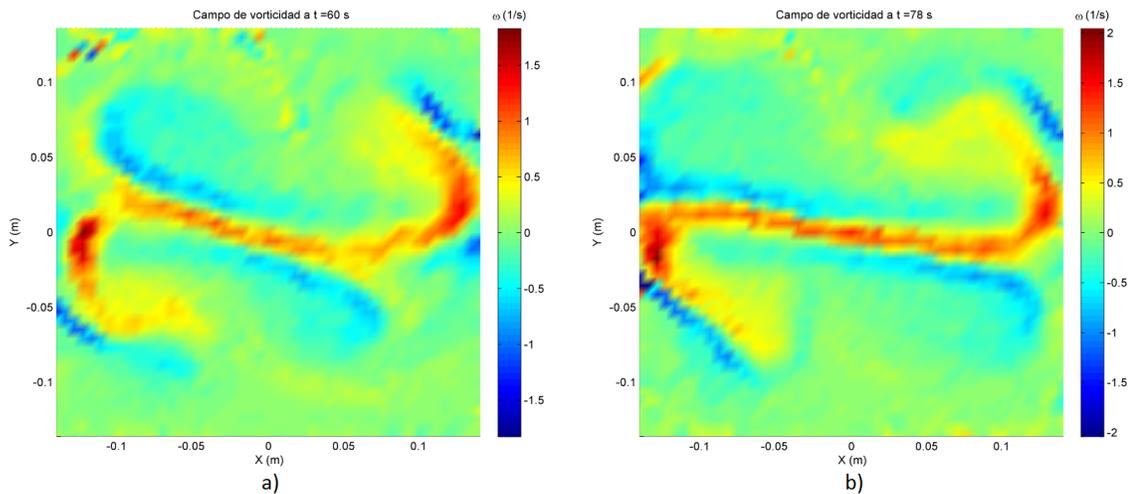


Figura 23: Campo de vorticidad medido en el tanque de razón de aspecto uno con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa la deformación de los vórtices positivos por la acción del forzamiento y las paredes.

La generación de un tercer vórtice cuasi permanente (en una zona de intensa vorticidad positiva) en lugar de un punto hiperbólico bien definido se observó en experimentos realizados con forzamientos intensos. Esta estructura tendió a perdurar en el centro del tanque, pero eventualmente fue advectada hacia alguna pared. Un vórtice central también llegó a formarse en el tanque de razón de aspecto 2 (para forzamientos intermedios e intensos). En la Figura (24) se muestra el campo de vorticidad para un tanque de razón de aspecto 1 al haberse formado este tercer vórtice.

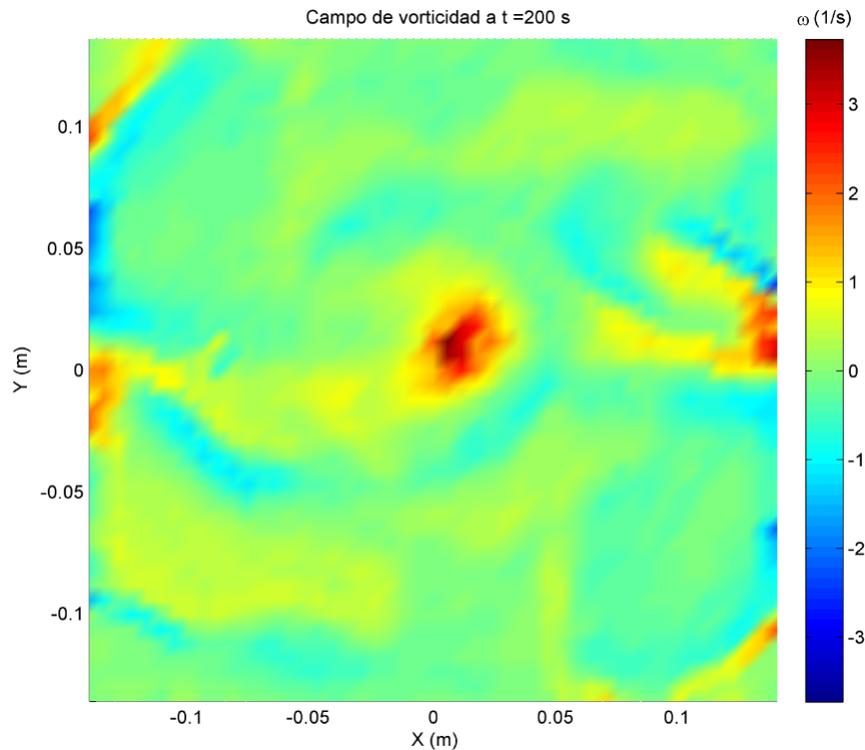


Figura 24: Campo de vorticidad medido en el tanque de razón de aspecto uno con un forzamiento intenso ($Re \sim 1800$). Se dio la formación de un vórtice central al desplazarse hacia las paredes los vórtices positivos generados por la inestabilidad.

4.5 Análisis del flujo

Una vez descrito el comportamiento del flujo experimental por medio de sus campos de velocidad y vorticidad, se investigó la evolución de algunas variables globales y escalares, como la energía cinética total del fluido y la enstrofia. Es importante mencionar que debido a que no fue posible determinar adecuadamente las velocidades cercanas a la frontera del dominio, estas no se tomaron en cuenta en algunos cálculos.

4.5.1 Energía y enstrofia

Para determinar el efecto de la continua acción del forzamiento y de la fricción del fondo, se calculó la energía cinética y enstrofia total del fluido. En primera instancia podría pensarse en un posible equilibrio entre la inyección y disipación de energía, lo cual implicaría un nivel de energía constante en el tiempo. Sin embargo, esto no sucedió en ningún experimento, como se explica a continuación.

La energía cinética global (E) se calcula como:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int \int [u^2(x, y, t) + v^2(x, y, t)] dx dy, \quad (33)$$

mientras que para la enstrofía total (Z) se utiliza:

$$Z(t) = \frac{1}{2} \int \int [\omega^2(x, y, t)] dx dy, \quad (34)$$

En la Figura (25) se muestra el comportamiento de la energía cinética total y en la Figura (26) la enstrofía total para todos los casos estudiados. De estas figuras se observan cinco características principales:

1. Se tiene un incremento de la energía cinética (y enstrofía) total iniciando desde el reposo ($t = 0$) hasta llegar a un máximo. El tiempo al cual se alcanza dicho máximo es mayor para el forzamiento débil, y no parece depender de la razón de aspecto para ningún caso.
2. Después de llegar a un máximo se tiene una disminución importante de energía cinética (y enstrofía) total, que puede llegar a ser hasta de un 40% del valor máximo.
3. Posteriormente se tiene el repetido incremento y decremento de energía cinética (y enstrofía), teniendo una estructura muy similar a la de oscilaciones cuasi-periódicas.
4. El periodo de estas oscilaciones tiende a aumentar al incrementar la magnitud del forzamiento.
5. Para los forzamientos más intensos ($Re \sim 1800$), se tiene la pérdida de regularidad de las oscilaciones observadas.

Estas características se observaron para todas las razones de aspecto. Los máximos y mínimos observados en la energía cinética y en la enstrofía total tuvieron un periodo similar, observándose solo un pequeño desfase ($\sim 1s.$) en la mayoría de los casos.

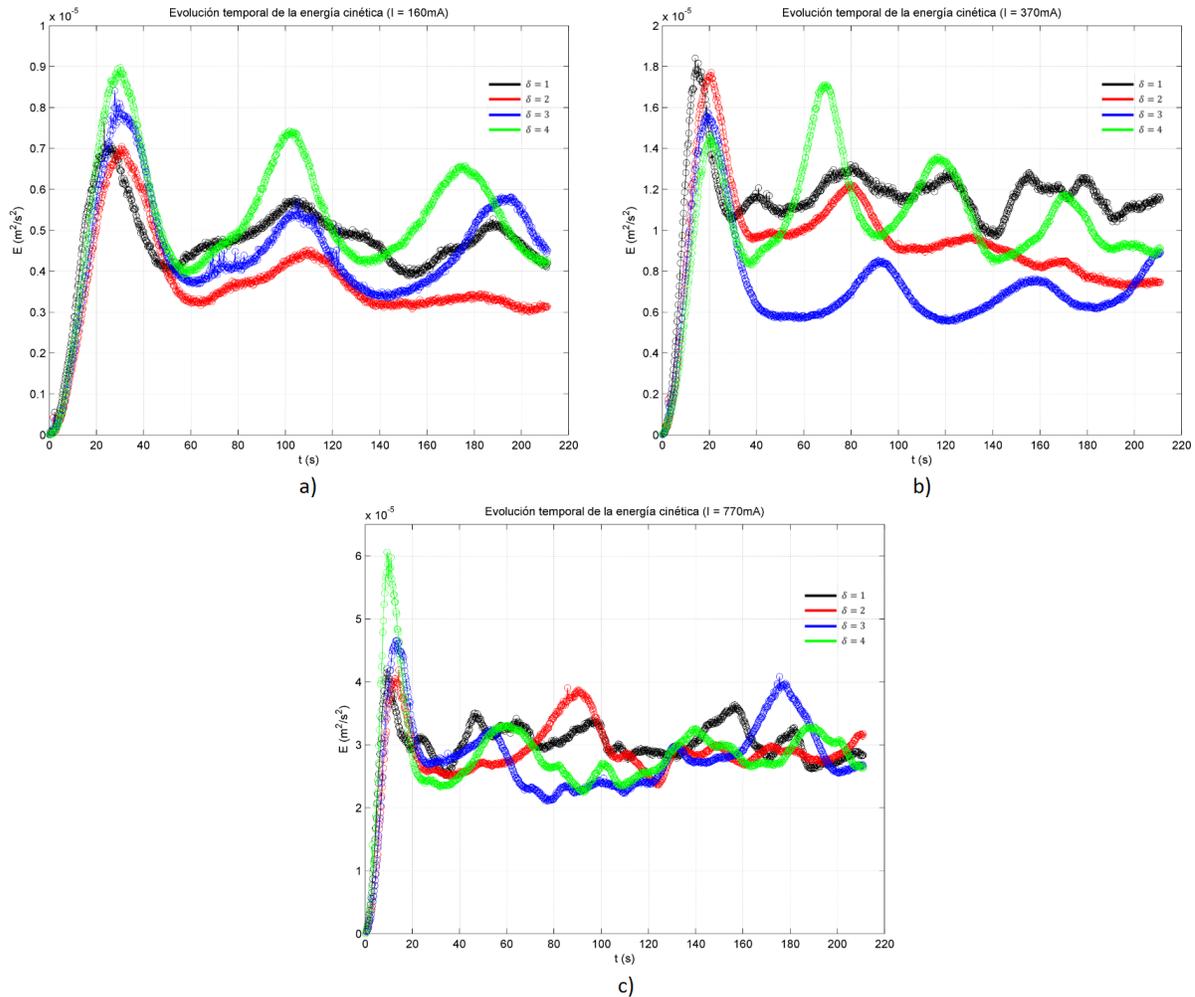


Figura 25: Energía cinética total medida en todos los experimentos. Se separó las gráficas por el forzamiento aplicado, teniendo un forzamiento (a) débil ($Re \sim 600$), (b) intermedio ($Re \sim 1000$) y (c) intenso ($Re \sim 1800$). El color indica la razón de aspecto (δ). Se observa el incremento de oscilaciones y pérdida de regularidad con el forzamiento.

4.5.2 Auto-oscilaciones

Las importantes variaciones observadas en las figuras (25) y (26) indicaron que no se llegó a un balance entre el forzamiento aplicado y la fricción de fondo (disipación). De este hecho se desprende que existe un mecanismo que permite al flujo perder y recuperar una gran cantidad de energía.

Para determinar la causa de las variaciones observadas en la energía cinética total y en la enstrofía total, se calcularon los campos escalares de energía cinética y de enstrofía asociados. Estos

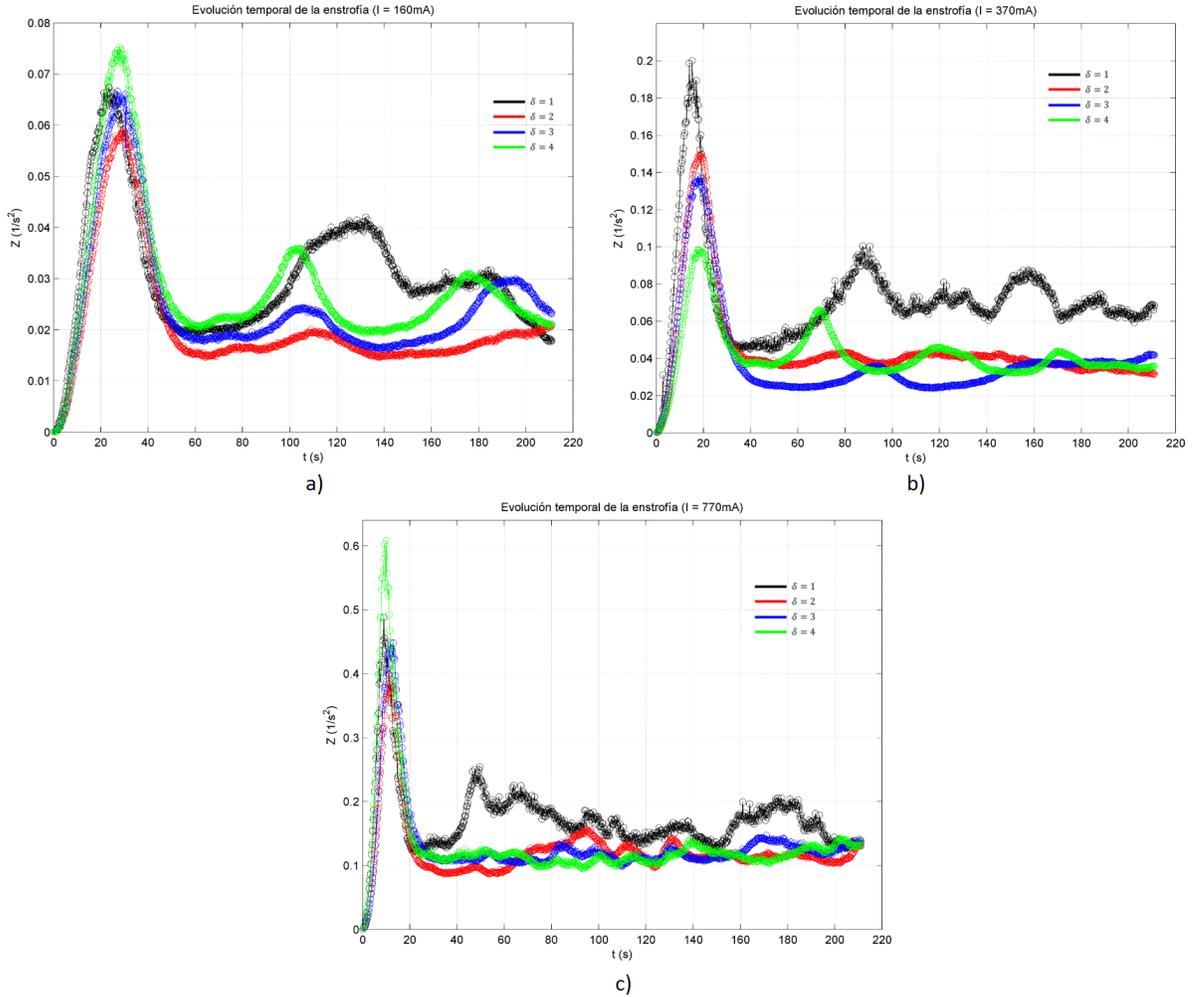


Figura 26: Enstrofia total medida en todos los experimentos. Los paneles y las curvas representaron los mismos casos que en la figura (25)

campos son simplemente las ecuaciones (33) y (34) sin integrar en el dominio:

$$E_f(x, y, t) = \frac{1}{2}[u^2(x, y, t) + v^2(x, y, t)], \quad (35)$$

$$Z_f(x, y, t) = \frac{1}{2}[\omega^2(x, y, t)]. \quad (36)$$

En la Figura (27) se muestra la oscilación de la energía global E para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio. Adicionalmente, se muestra el campo de energía E_f al tiempo en el que se presenta el primer máximo y el primer mínimo de E . La Figura (28) muestra

los campos de enstrofía asociados. Se eligió este caso debido a la regularidad que presentó la auto-oscilación de E .

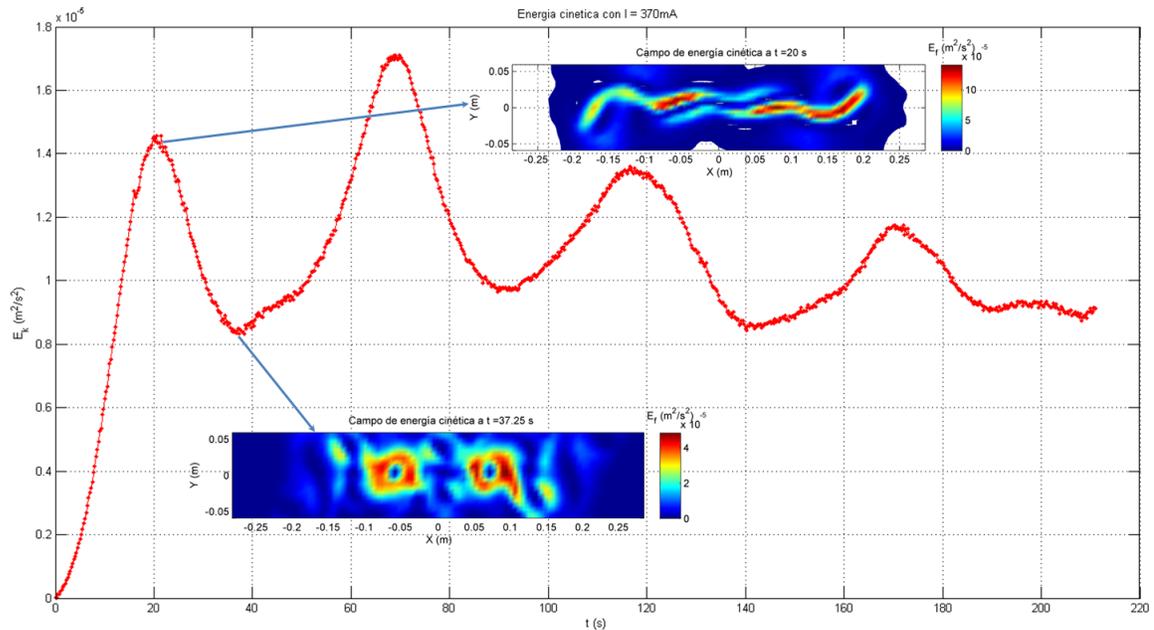


Figura 27: Energía cinética total (E) del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de energía (E_f) medidos en el primer mínimo y máximo de E . Los colores del campo indican la intensidad de la energía cinética: azules para valores bajos y rojos para intensos.

Tanto en la figura (27) como en la (28) se encontró que el primer máximo de energía y enstrofía ocurrió al comenzar a deformarse el flujo de corte. En cambio, el primer mínimo ocurrió al haberse fragmentado los *jets* para dar origen a estructuras coherentes.

Los siguientes mínimos y máximos de la energía cinética presentaron distribuciones similares a las de las figuras anteriores. Esto se observa en la Figura (29), en la que se tiene que el siguiente máximo de E ocurre de nuevo al encontrarse las estructuras de mayor energía orientadas en la dirección x , y el mínimo ocurriendo al tener las estructuras coherentes bien formadas. En el caso de los máximos y mínimos de la enstrofía, estos ocurrieron de manera similar al cambiar la orientación del flujo, como se observa en la Figura (30).

Adicionalmente, la energía cinética total medida se separó en sus componentes principales (u^2, v^2), para determinar la dirección preferencial de los máximos y mínimos de estas componentes.

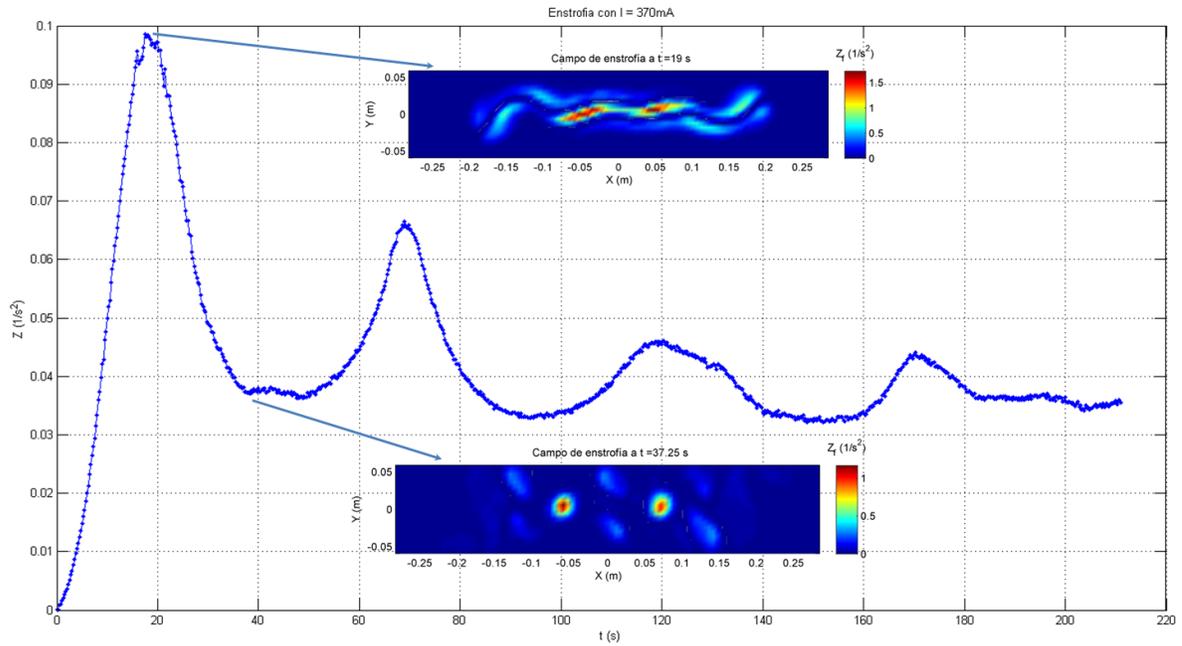


Figura 28: Enstrofia total (Z) del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de enstrofia (Z_f) medidos en el primer mínimo y máximo de Z . Los colores del campo indican la intensidad de la enstrofia: azules para valores bajos y rojos para intensos.

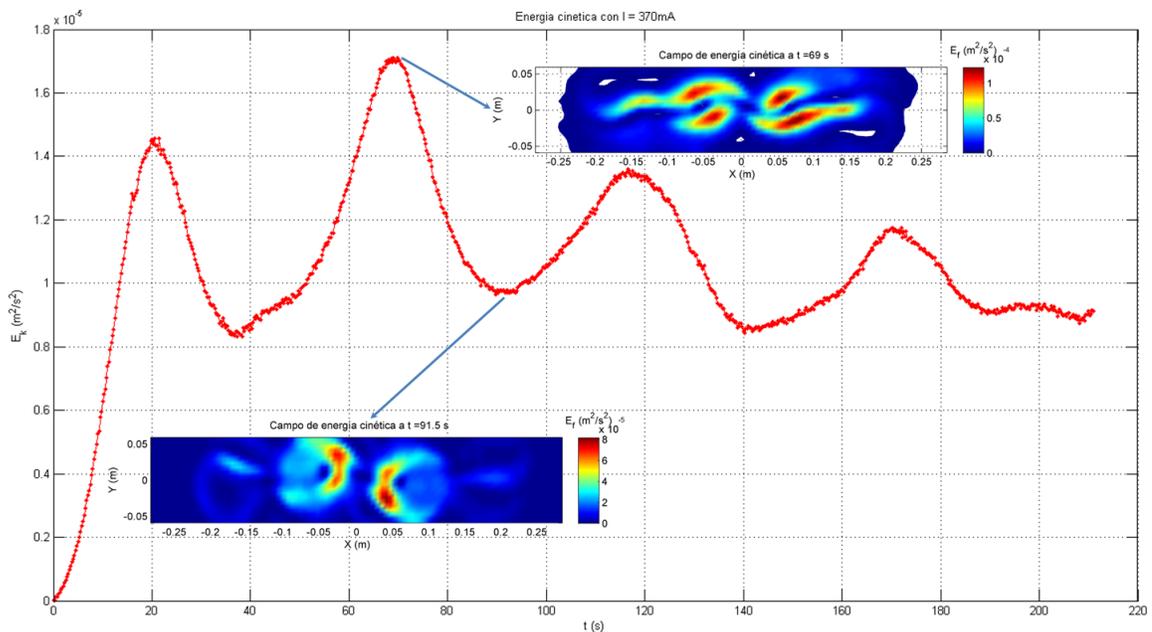


Figura 29: Energía cinética total del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de energía (E_f) medidos en el segundo mínimo y máximo de E .

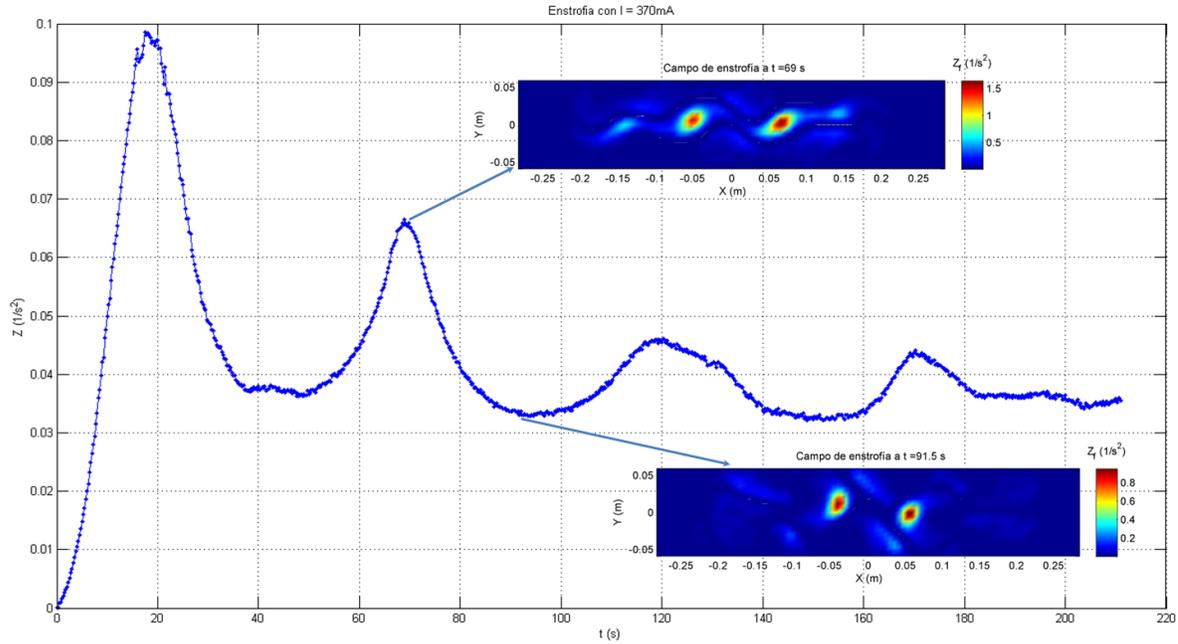


Figura 30: Enstrofia total (Z) del experimento realizado en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se muestra los campos de enstrofia (Z_f) medidos en el primer mínimo y máximo de Z .

Esto se muestra en la Figura (31) para un tanque de razón de aspecto 4 para un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$).

La gráfica muestra que los máximos de energía cinética total están relacionados con los máximos de la velocidad u , mientras que los mínimos coinciden con los máximos en la componente de velocidad v . Esto indicó que el flujo ganó energía al estar mayormente orientado con el forzamiento, y perdió energía al estar orientado en la dirección de y . El comportamiento observado de desfase entre máximos de u^2 y v^2 se observó para todos los experimentos, independientemente de la regularidad del comportamiento oscilatorio.

4.5.3 Espectro de potencia

Una vez determinado qué componente tuvo la mayor cantidad de energía cinética, se calculó el espectro de potencia de cada componente de energía para todo tiempo. Este cálculo se realizó para encontrar la escala espacial a la cual se encontró la mayor cantidad de energía cinética, determinando así los flujos que son fortalecidos por el forzamiento a diferentes tiempos.

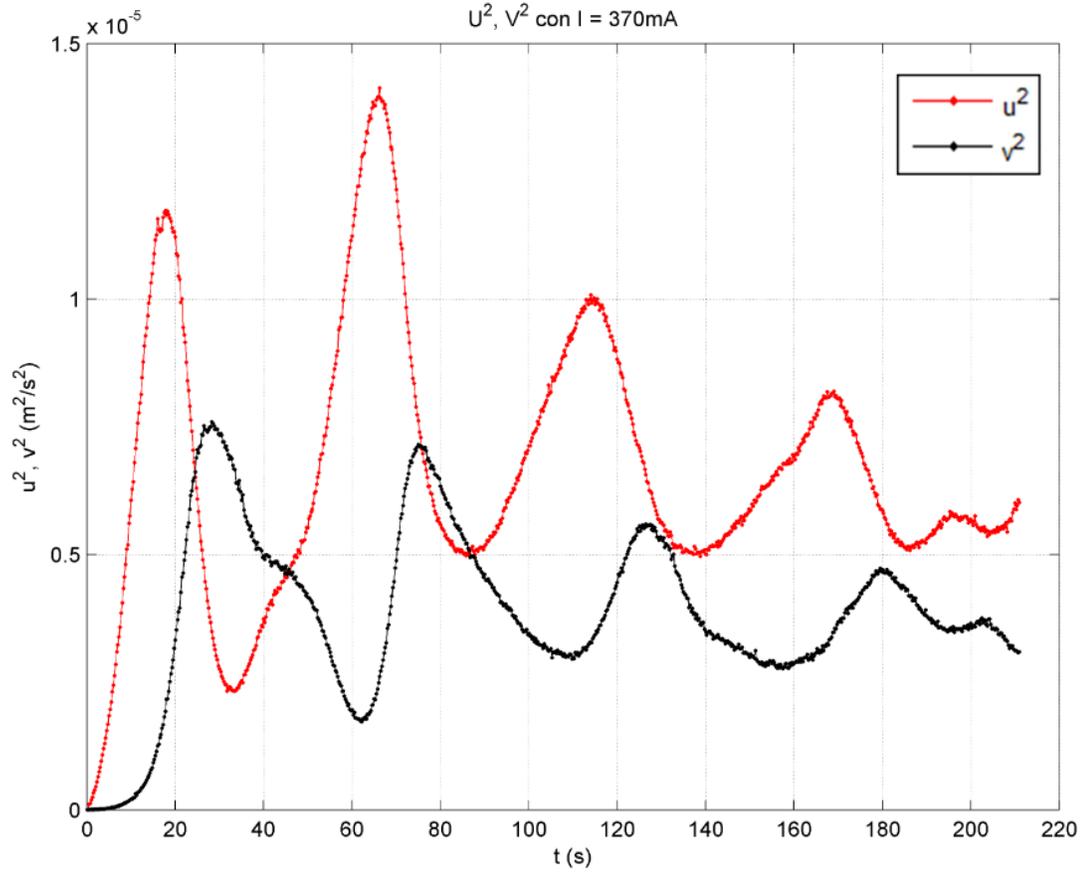


Figura 31: Energía cinética total de las componentes x (u^2) e y (v^2) del tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). Se observa el desfase de los máximos de las componentes de energía cinética u^2 (rojo) y v^2 (negro).

Para calcular estos espectros, se obtiene la transformada de Fourier de los campos de velocidad, que para un espacio bidimensional se define como:

$$F(\nu, \eta) = \mathcal{F}[f(x, y)] = \iint f(x, y) \exp[-2i\pi(\nu x + \eta y)] dx dy, \quad (37)$$

en donde ν y η son las frecuencias espaciales en la dirección x e y , f representa una función aleatoria y F su espectro 2D. A partir de esta definición, el espectro de potencia se expresa como:

$$S_{xy}(\nu, \eta) = \frac{1}{2} |F(\nu, \eta)|^2. \quad (38)$$

Para reducir el espectro calculado por esta ecuación a una sola dimensión, se realizó un pro-

cedimiento análogo al utilizado para calcular la función de densidad de probabilidad a partir de la función de distribución acumulativa. Para esto, se propuso una nueva frecuencia espacial de la forma $\kappa = (\nu^2 + \eta^2)$, con la que se integró el espectro de potencia a lo largo de κ constante, obteniendo así el espectro acumulativo en función de una sola variable. Finalmente, el espectro acumulativo se diferenció con respecto a κ para obtener el espectro de potencia en una dimensión.

En la Figura (32) se muestra una secuencia del espectro calculado para el experimento realizado con un forzamiento intermedio en el tanque de razón de aspecto 4. Los espectros muestran que los máximos de energía cinética coincidieron con las escalas de mayor tamaño observadas en los experimentos (vórtices positivos, *jets*). En cambio, las escalas de menor tamaño (vórtices pequeños y filamentos de vorticidad) mostraron un incremento en el espectro de energía a los tiempos que se registraron los mínimos de energía cinética total. Esta transferencia de energía de escalas grandes a pequeñas (y viceversa) también llegó a observarse en el espectro de la enstrofía, como se aprecia en la Figura (33).

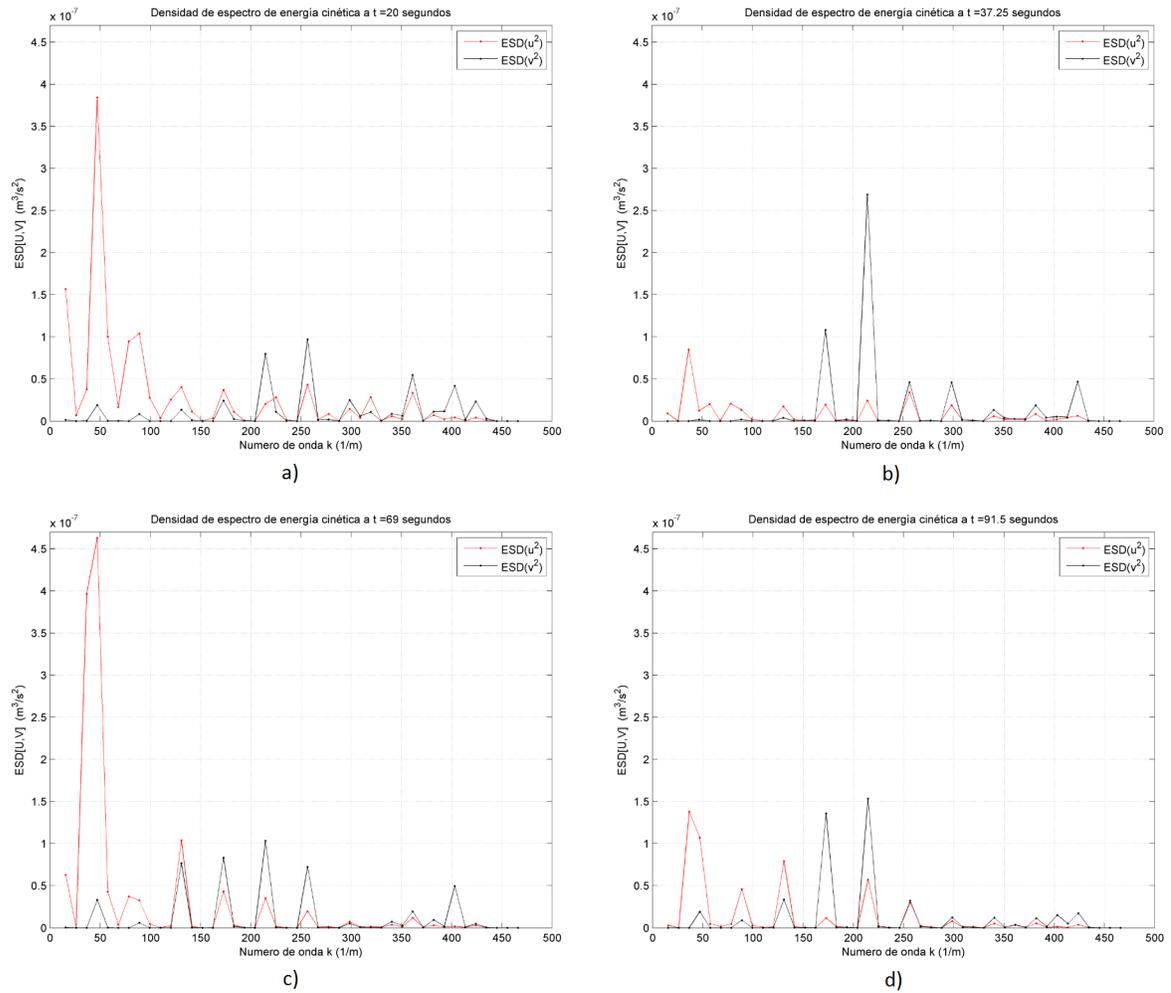


Figura 32: Espectros de densidad de energía de las componentes x, y calculados para los tiempos del primer máximo (panel (a), 20s.) y mínimo (panel (b), 37.25 s.) la energía cinética global E , y del segundo máximo (panel (c), 69s.) y mínimo (panel (d), 91s.), para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$). La componente u^2 se muestra en color rojo, mientras que v^2 está en color negro.

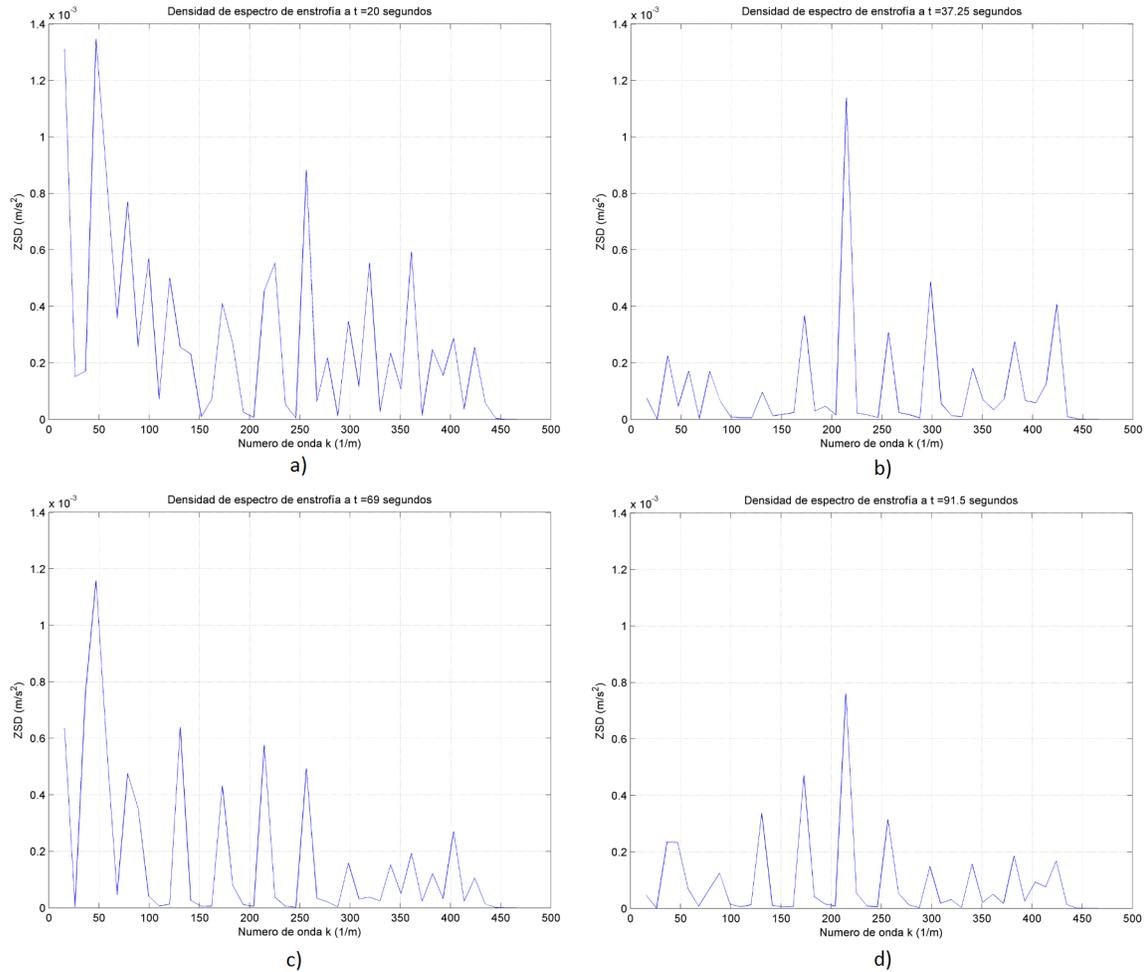


Figura 33: Espectro de densidad de enstrofia calculado para los tiempos del primer máximo (panel (a), 20s.) y mínimo (panel (b), 37.25 s.) de la enstrofia global Z , y del segundo máximo (panel (c), 69s.) y mínimo (panel (d), 91s.) para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio ($Re \sim 1000$).

Capítulo 5

Simulaciones numéricas

Se elaboraron simulaciones numéricas basadas en un modelo cuasi-bidimensional para compararse con las observaciones experimentales realizadas. El objetivo es determinar si el modelo bidimensional es capaz de describir la dinámica característica observada en los experimentos.

Para realizar las simulaciones se resolvió la ecuación de vorticidad (14) del capítulo 2, en donde se incluyen los términos necesarios para considerar la fricción de fondo y el forzamiento. De la misma manera que en el caso experimental, el forzamiento fue continuo durante toda la simulación. Se consideró condiciones de frontera de no-deslizamiento en las paredes laterales.

Los parámetros de control en las simulaciones fueron la intensidad del forzamiento, las dimensiones del dominio y la fricción aplicada al sistema. La modificación de estos parámetros permitió explorar el comportamiento del flujo bajo diferentes condiciones.

5.1 Modelo numérico

Las simulaciones numéricas se llevaron a cabo utilizando un programa codificado en FORTRAN, el cual resuelve las ecuaciones de vorticidad (14) (con $\mathfrak{N} = 0$) y de función corriente (11) por medio de un esquema de diferencias finitas. Este modelo numérico requiere de una condición inicial para la vorticidad para resolver la función corriente (ecuación de Poisson) y un paso de tiempo lo suficientemente pequeño para respetar la condición CFL (Courant-Friedrich-Levy) para la estabilidad del esquema.

El programa utilizado fue originalmente desarrollado por Orlandi y Verzicco (1990) para simular flujos bidimensionales, y desde entonces se han realizado diversas modificaciones y adiciones a este código. Algunas de estas agregaron efectos de rotación (van Geffen, 1998) o incluyeron efectos de topografía y de fricción de fondo no lineal (Zavala Sansón, 2000). En este trabajo, se

incluyó un término de forzamiento dependiente del tiempo en la ecuación de vorticidad. Para esto, el término de forzamiento en la ecuación (13) se sustituyó por una aproximación de la fuerza de Lorentz (23) calculada (capítulo 3), añadiendo una dependencia temporal para obtener:

$$\mathbf{F} = \frac{IB}{hL_y} \left[\sin\left(\frac{9\pi}{L_y}y\right) \exp(-y/\alpha)^2 \right] (1 - \exp(-(t/\tau))) \hat{i}, \quad (39)$$

con τ y α parámetros de ajuste, L_y el ancho del dominio, h la altura de la capa de fluido, I la corriente inyectada y B el campo magnético máximo.

En la Figura (34) se muestra la distribución del campo de forzamiento calculado con (39), utilizando como dominio un tanque de razón de aspecto 4 y una intensidad de corriente de 370 mA. Además, en la Figura (35), se presenta una comparación entre los perfiles del forzamiento experimental con el numérico.

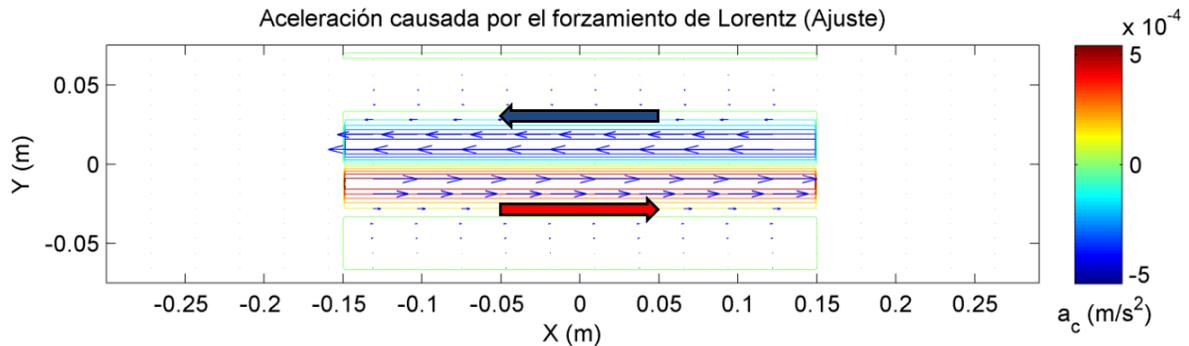


Figura 34: Campo de forzamiento obtenido a partir de un ajuste del campo de fuerza utilizado en los experimentos. Las flechas indican la dirección del forzamiento.

Para representar la disipación del fondo en las simulaciones se utilizó un modelo de fricción lineal. Este modelo ha sido utilizado por varios investigadores (ver por ejemplo Dolzhanskii *et al.*, 1990) como una manera de parametrizar la fricción de fondo en flujos someros y tiene la forma:

$$D = -\lambda\omega, \quad (40)$$

con D la disipación en la ecuación de vorticidad y λ el coeficiente de fricción del fondo (también conocido como el parámetro de fricción de Rayleigh).

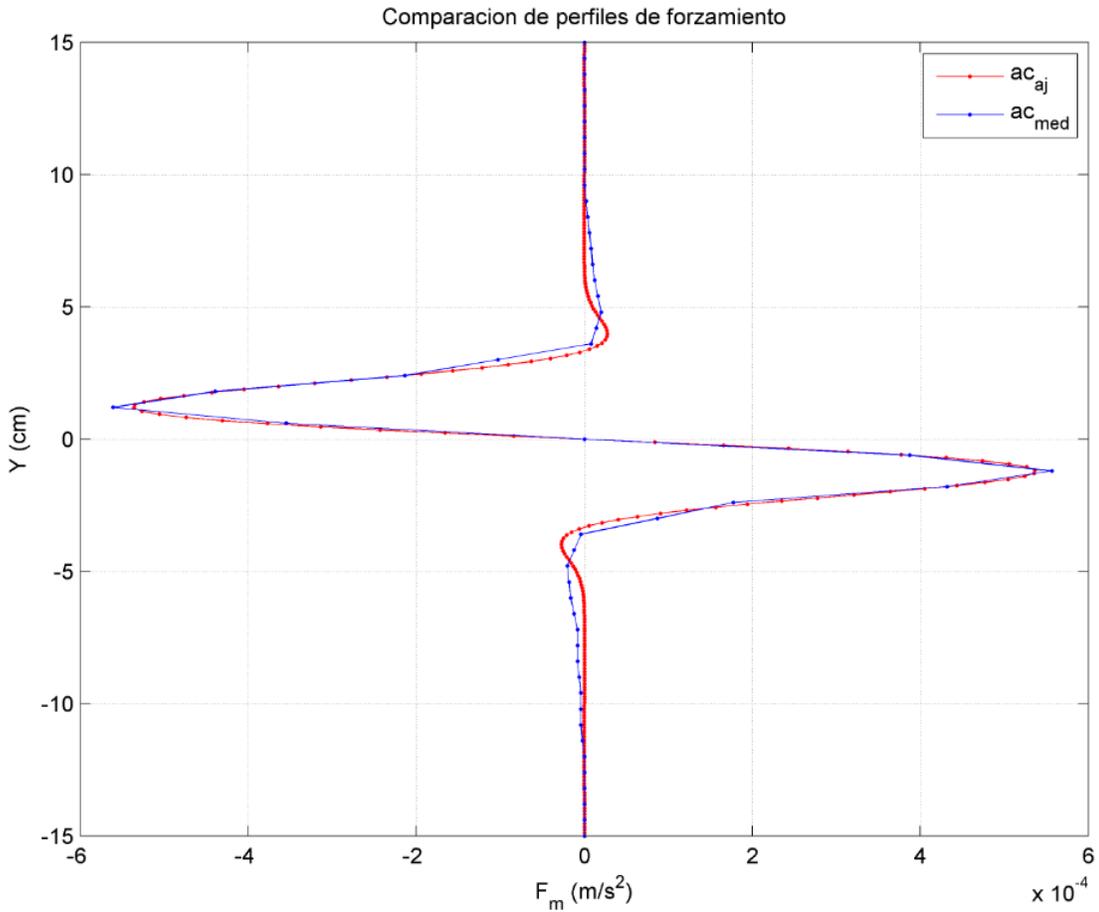


Figura 35: Comparación de un perfil de forzamiento experimental (azul) y numérico (rojo). El perfil experimental se obtuvo al realizar un corte del campo de fuerza en $x = 1.2\text{cm}$. En ambos casos se utilizó un forzamiento intermedio.

Sin embargo, este parámetro presenta diferentes expresiones, tales como $\lambda = 2\nu/H^2$ (Dolzhan-skii *et al.*, 1990), o bien $\lambda = \nu\pi^2/4H^2$ (Hansen *et al.*, 1998; Duran-Matute *et al.*, 2010). En todos los casos H es la altura total del fluido (entre el fondo y la superficie libre) y ν la viscosidad cinemática. Debido a que se tienen estas diferencias, se eligió utilizar el parámetro de fricción de Rayleigh definido por $\lambda = 2k\nu/H^2$ en donde k es un parámetro de ajuste que depende del campo de velocidad. Este coeficiente de fricción es utilizado por Bodarenko *et al.* (1979); Dolzhanskii *et al.* (1992); Danilov & Dovzhensko (1996).

Los parámetros utilizados en las simulaciones se eligieron de tal manera que fueran similares a los de los experimentos realizados. Para ello se escogió una viscosidad (ν) de $1.089 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$, una altura de la capa de fluido de 1.3 cm, una región de forzamiento (L_e) de 29.7 cm de largo y

una duración de la simulación de 240 segundos. El paso de tiempo fue de 0.0625 segundos. Para el caso del parámetro k en el término de disipación, este fue elegido dependiendo del forzamiento aplicado. Para forzamientos débiles se eligió $k = \pi^2/4$, para intermedios $k = \pi^2/2$ y finalmente $k = 3\pi^2/4$ para forzamientos intensos.

5.2 Resultados numéricos

De manera similar a los experimentos, al iniciar el forzamiento se dio la progresiva formación de un flujo de corte. Este continuó, por un tiempo que dependió del forzamiento, hasta deformarse, llevando a la generación de una serie de estructuras coherentes. Una secuencia de este comportamiento se muestra en la Figura (36).

La generación de vórtices bien definidos en la región del forzamiento una vez que el flujo de corte se deforma fue semejante a la registrada en los experimentos. Esta distribución de vorticidad también tuvo un comportamiento que dependió de la razón de aspecto e intensidad del forzamiento utilizado.

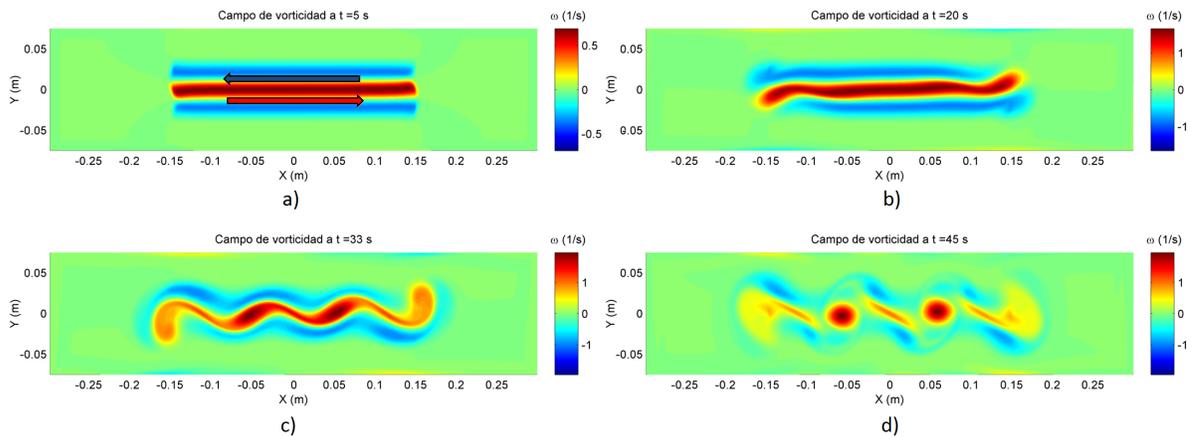


Figura 36: Campos de vorticidad obtenidos a (a) $t = 5s.$, (b) $t = 20s.$, (c) $t = 33s.$, (d) $t = 45s.$ para una simulación con un dominio de $\delta = 4$ y un forzamiento intermedio. La vorticidad positiva es representada por los colores rojos y la negativa por los azules.

En el caso de los tanques de razón de aspecto 3 y 4 (para forzamientos débiles e intermedios) se encontró la distribución de estructuras coherentes como aquella observada para los experimentos (figura (21)), teniendo dos vórtices positivos casi estáticos rodeados de una región de vorticidad

negativa deformada por el forzamiento. Esta organización se muestra en la Figura (37).

La similitud no perduró por el resto de la simulación, ya que, a diferencia de los casos experimentales, los vórtices positivos no llegaron a ocupar el ancho del tanque. Estos vórtices permanecieron en el eje central del dominio, formando una región de corte entre ambos. Estos no presentan ningún desplazamiento debido al forzamiento, pero sí una deformación al transcurrir la simulación, como se muestra en la figura anterior. La deformación de los vórtices positivos y el transporte de los vórtices negativos a su alrededor continuó por el resto de la simulación.

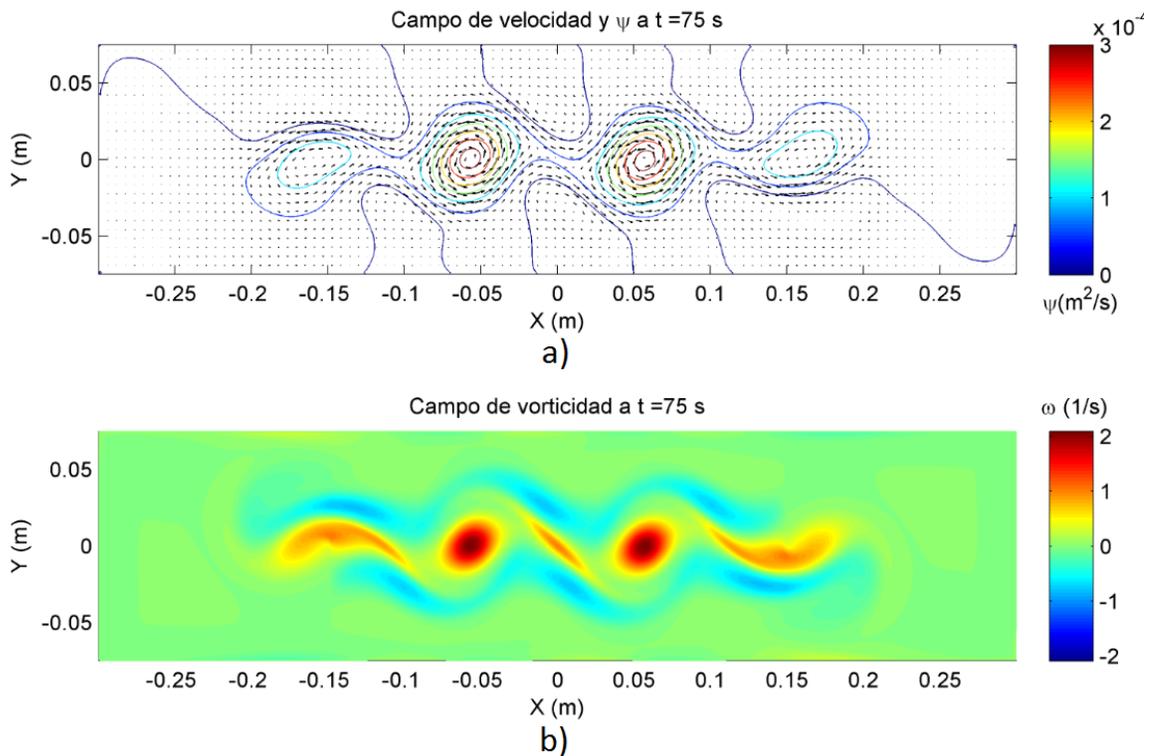


Figura 37: Campos de velocidad y función corriente (a) y vorticidad (b) a $t = 75$ s. de una simulación realizada en un dominio de razón de aspecto 4 con forzamiento intermedio. La distribución de las estructuras coherentes es similar a la observada en los experimentos (figura (21)).

Para forzamientos intensos en los tanques de razón de aspecto 1 y 2 (para todos los rangos de forzamiento), se observó una variación de esta dinámica. En las simulaciones, los vórtices positivos centrales se desplazaron hacia los extremos del área de forzamiento para dar origen a un nuevo vórtice en el centro del tanque. Este vórtice surgió a partir de la región de corte generada por los dos vórtices positivos iniciales, como se muestra en la Figura (38). Una vez establecido el

vórtice central, este perduró por el resto de la simulación.

Debido a la posición e intensidad de este vórtice, se tuvo la generación periódica de vórtices positivos en los límites del área de forzamiento (esto no ocurrió en el tanque de razón de aspecto 1). A diferencia de lo observado en los experimentos, el vórtice central no llegó a desplazarse debido a la simetría en las simulaciones.

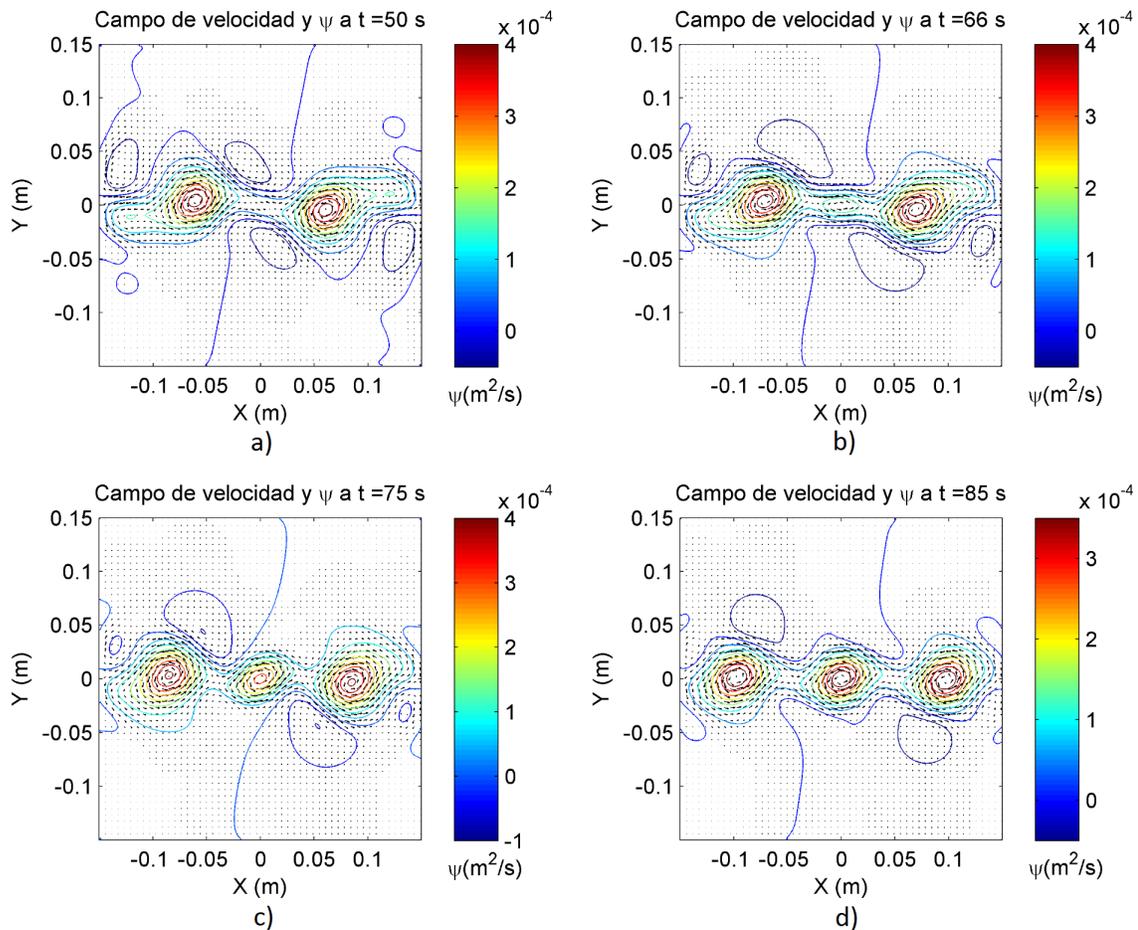


Figura 38: Campos de velocidad y de función corriente mostrando la generación de un vórtice central en el tanque de razón de aspecto 1 para un forzamiento intenso.

Además de presentar similitudes cualitativas en el comportamiento observado entre las simulaciones y los experimentos, se obtuvieron características semejantes al calcular la energía cinética y la enstrofia total de las simulaciones. Esto se muestra en las Figuras (40) y (41). Como se puede apreciar, se tiene una estructura similar a la obtenida en los experimentos: un incremento de energía (o enstrofia), la cual decae y después presenta un comportamiento oscilatorio. Sin

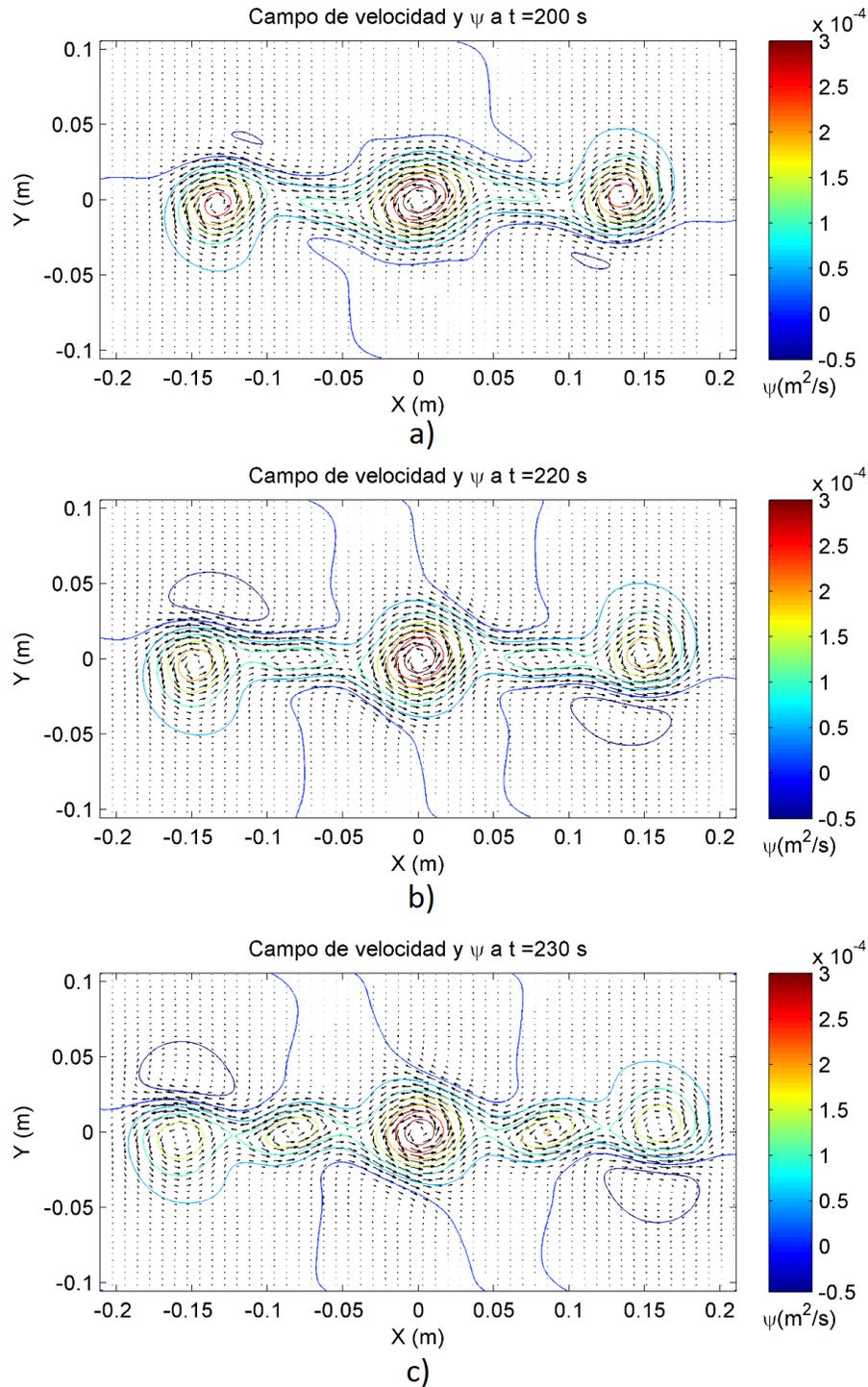


Figura 39: Secuencia de campos de velocidad y de función corriente mostrando la supresión y generación de nuevos vórtices en los límites del área de forzamiento. La simulación fue realizada en un tanque de razón de aspecto dos con un forzamiento intermedio.

embargo, también se tuvieron importantes diferencias con el caso experimental: la amplitud de las variaciones de la energía cinética y enstrofia calculados fueron un 50% menores a aquellas

calculadas experimentalmente. Además, se presentó un mayor periodo y regularidad (el cual dependió del forzamiento y la disipación aplicada en la simulación) en las oscilaciones obtenidas numéricamente.

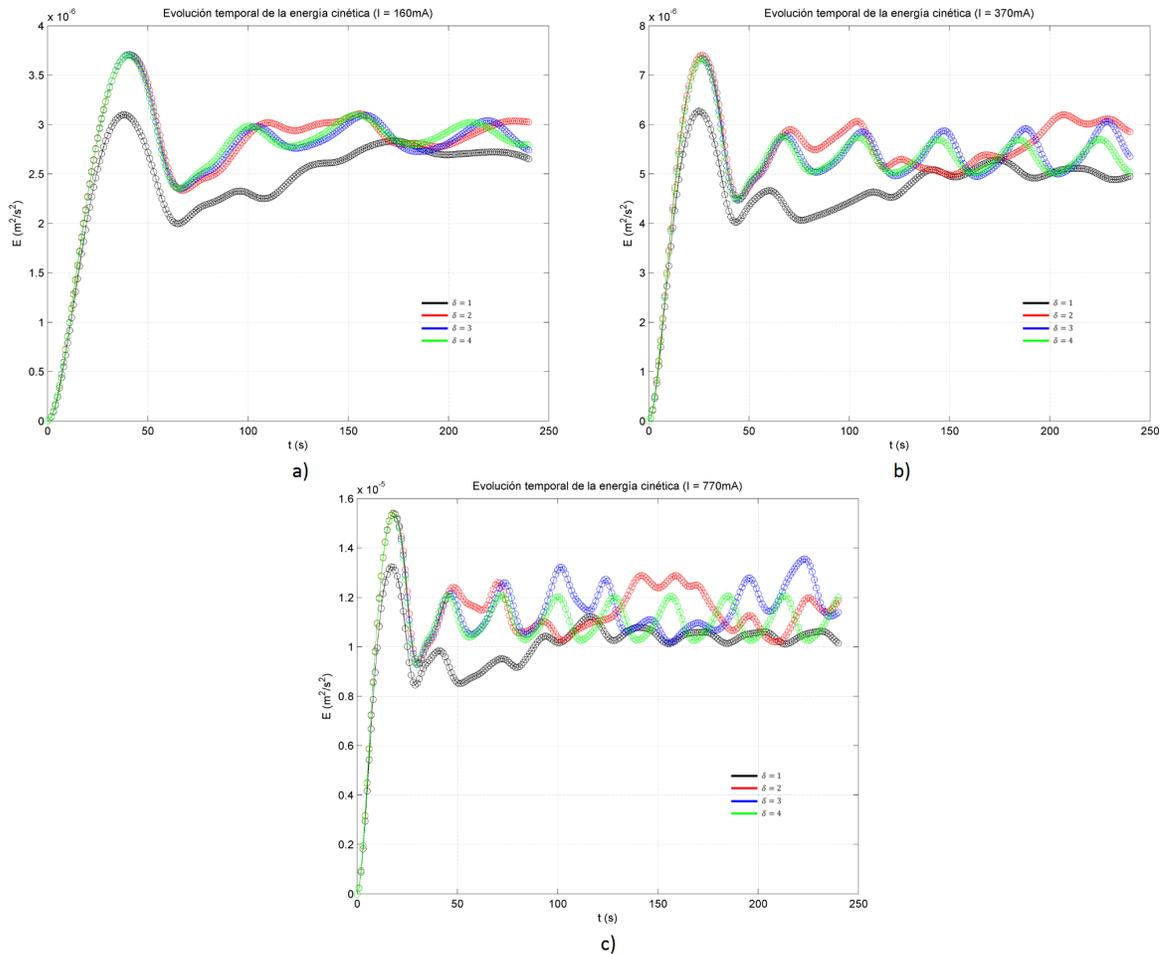


Figura 40: Energía cinética total de las simulaciones realizadas para (a) forzamientos débiles, (b) forzamientos intermedios y (c) forzamientos intensos. El color indica la razón de aspecto.

A pesar de presentar estas diferencias, al calcular la energía cinética de cada componente (x, y) se encontró el mismo comportamiento que en el caso experimental: los máximos de u^2 coinciden con los máximos de energía cinética y los mínimos de v^2 . Esto se observó para todas las simulaciones; se muestra un ejemplo en la Figura (42).

Además de esto, las escalas a las cuales se encontró la mayor cantidad de energía cinética y enstrofía ($k \sim 50$ y $k \sim 200$, siendo respectivamente, escalas con un radio de aproximadamente 12cm y 3cm) pareció ser similar entre los experimentos y simulaciones, teniendo en cuenta de que

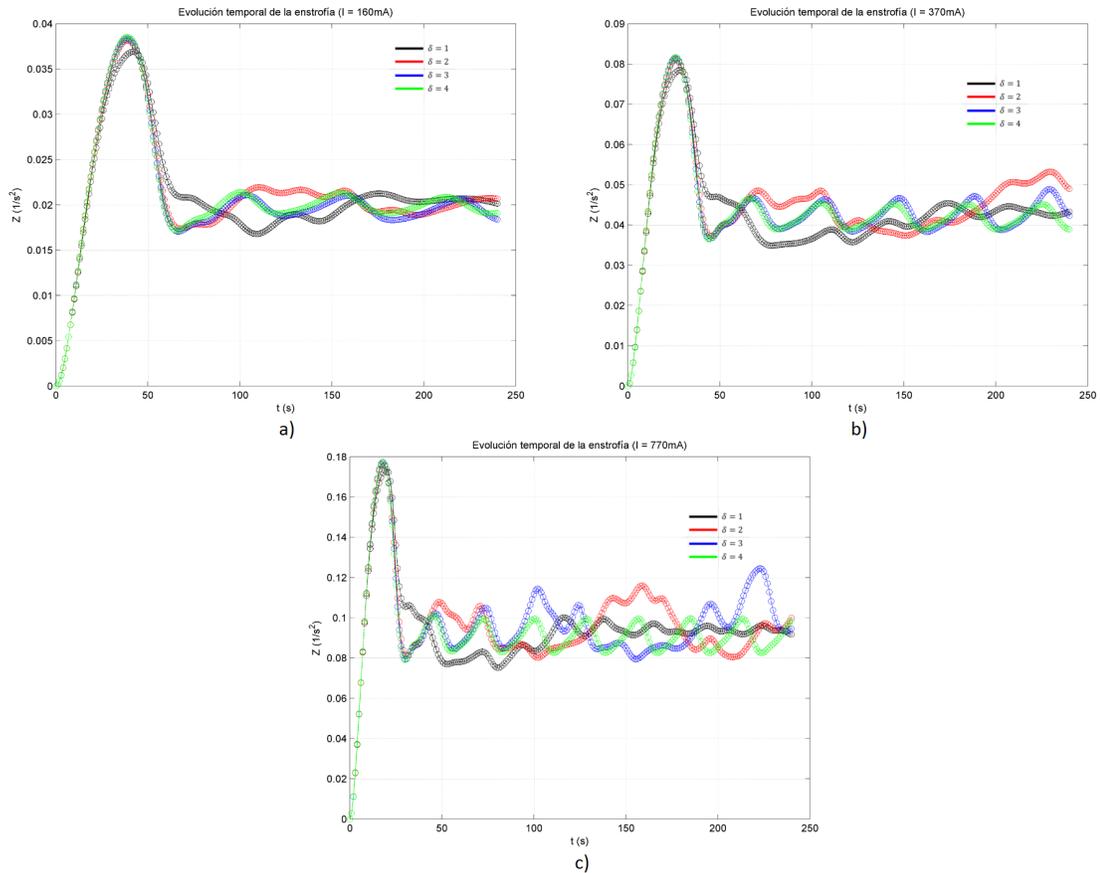


Figura 41: Enstrofia total de las simulaciones realizadas para (a) forzamientos débiles, (b) forzamientos intermedios y (c) forzamientos intensos.

en el caso numérico se observó una mayor distribución de energía alrededor de estas escalas. Esto se aprecia en la Figura (43). Sin embargo, incluso al presentar estas similitudes en el comportamiento, ya sea en energía cinética o enstrofia total, la diferencia entre las magnitudes de densidad de energía cinética que se obtuvo entre las escalas fue menor en las simulaciones (los máximos del espectro de energía de u y v no presentaron tanta variación con respecto uno de otro). Esta menor variación en la densidad espectral de energía cinética entre u y v en las simulaciones implica que hubo una menor transferencia de energía entre ambas componentes de velocidad. Esto lleva a un menor cambio en la distribución de los campos de velocidad y que la energía cinética se conserve en escalas similares.

Aún cuando se presentaron algunas diferencias importantes, las simulaciones numéricas reprodujeron las características más importantes de los fenómenos observados experimentalmente,

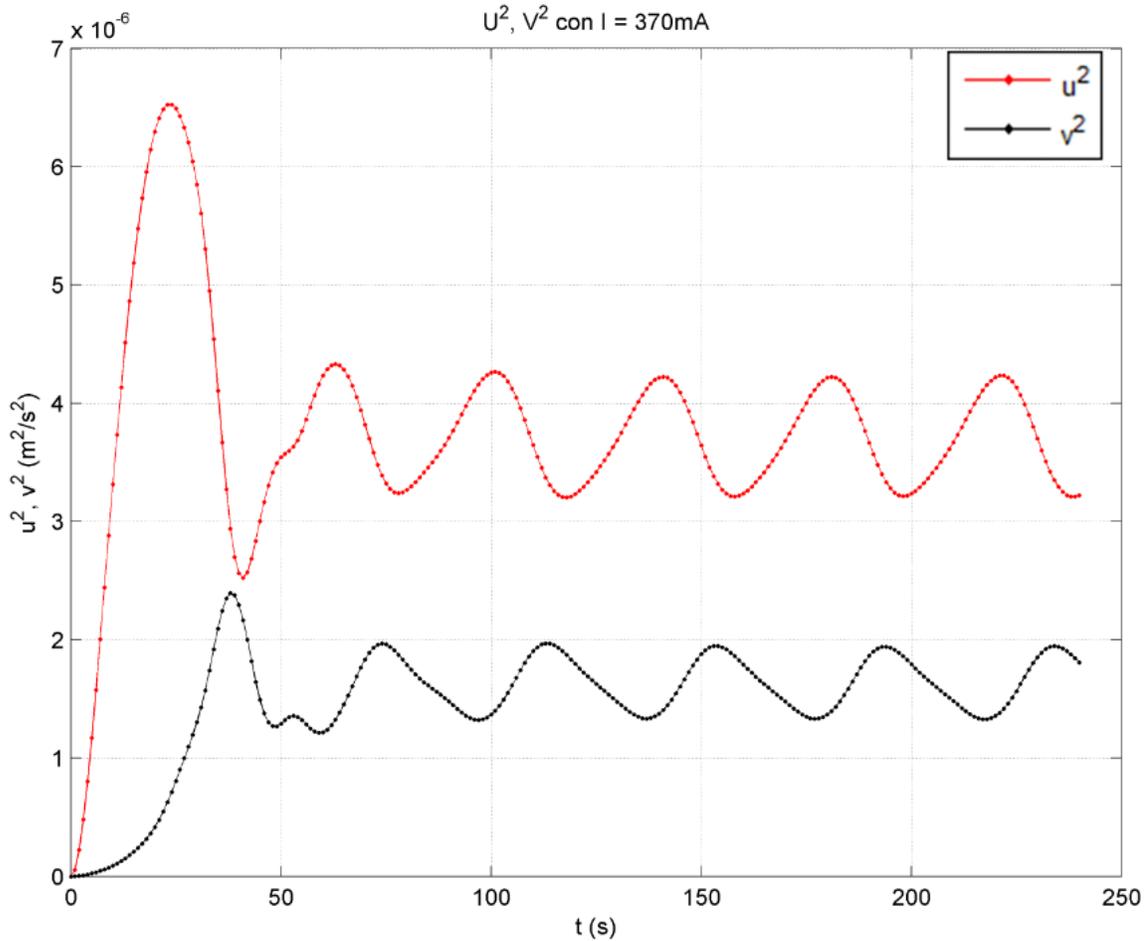


Figura 42: Componentes u^2 (rojo) e v^2 (azul) de la energía cinética de la simulación realizada en el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio.

llevando a concluir que la dinámica de los experimentos es predominantemente bidimensional.

5.3 Efecto del forzamiento continuo

Es importante mencionar que es necesario considerar una adecuada parametrización de la fricción de fondo y la presencia de un forzamiento continuo. Para investigar la importancia de este último, se analizó la evolución de dos vórtices positivos (con una vorticidad y distancia equivalente a la observada en los experimentos y simulaciones) en un dominio sin forzamiento. Esta simulación se realizó en dominios de razón de aspecto 1 y 4.

En el caso del tanque de razón de aspecto uno, la distancia entre los vórtices se mantuvo constante, girando ambos alrededor del centro geométrico del dominio (como se observa en la Figura

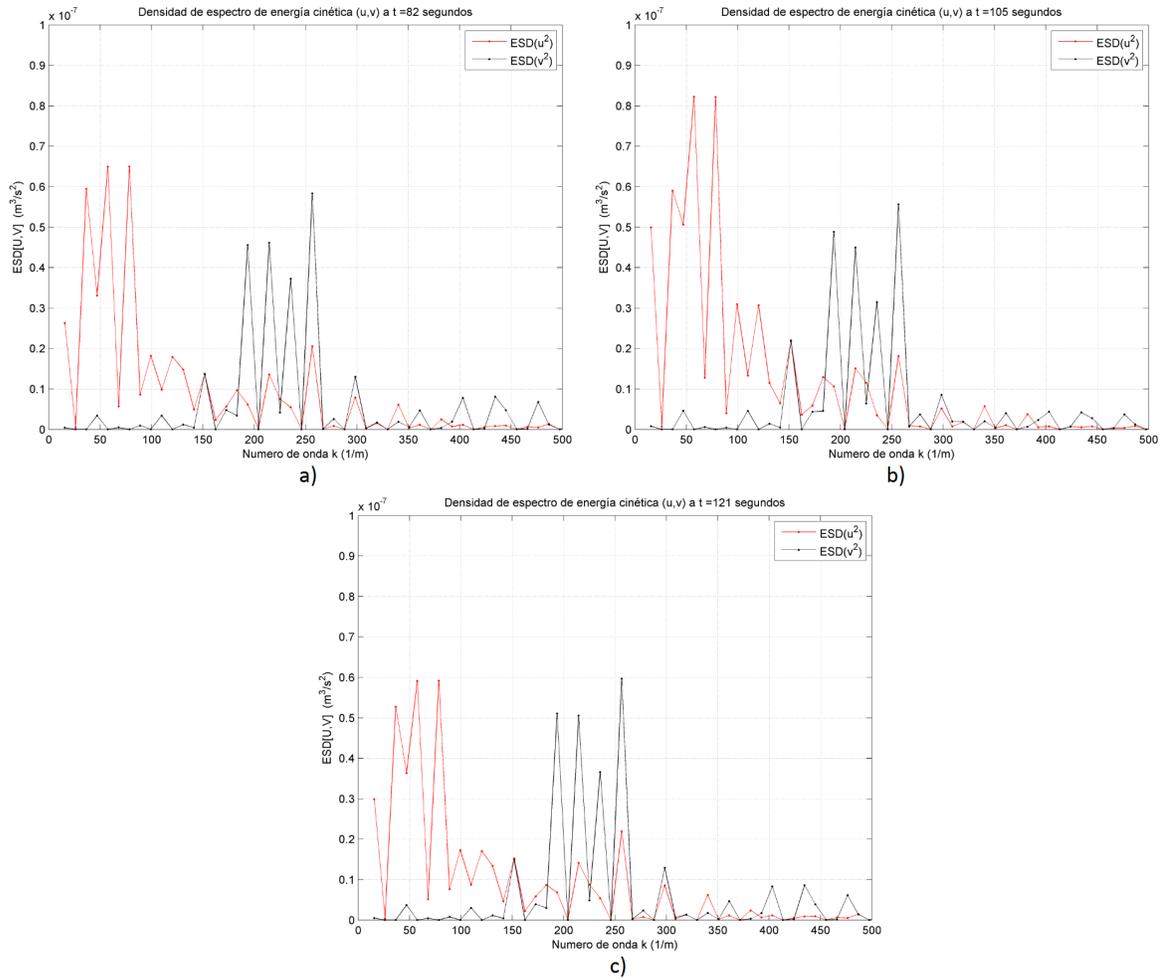


Figura 43: Espectros de densidad de energía de las componentes $x(u^2)$, $y(v^2)$ calculados para los tiempos de dos mínimos ($t=82$ s. (a) y $t=121$ s. (c)) y un máximo ($t=105$ s. (b)) de la energía cinética total para el tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio. La componente u^2 se muestra de color rojo, mientras que v^2 esta en color negro.

(44)). Este comportamiento era esperado, ya que en estudios previamente realizados los vórtices giran alrededor de un centro común siempre y cuando la distancia entre ellos fuera mayor a una distancia crítica, de lo contrario se fusionan (Zabusky, 1979; Melander *et al.*, 1988; Velasco Fuentes, 2001). En estas simulaciones la distancia entre ellos fue aproximadamente el doble de la distancia crítica.

Sin embargo, al utilizar un dominio con razón de aspecto cuatro se tiene que las paredes causan que la distancia entre los remolinos disminuya, llegando a ser menor que la distancia crítica necesaria para mantenerlos separados y, por lo tanto, llegaron a fusionarse. Esto se observa en la Figura (45).

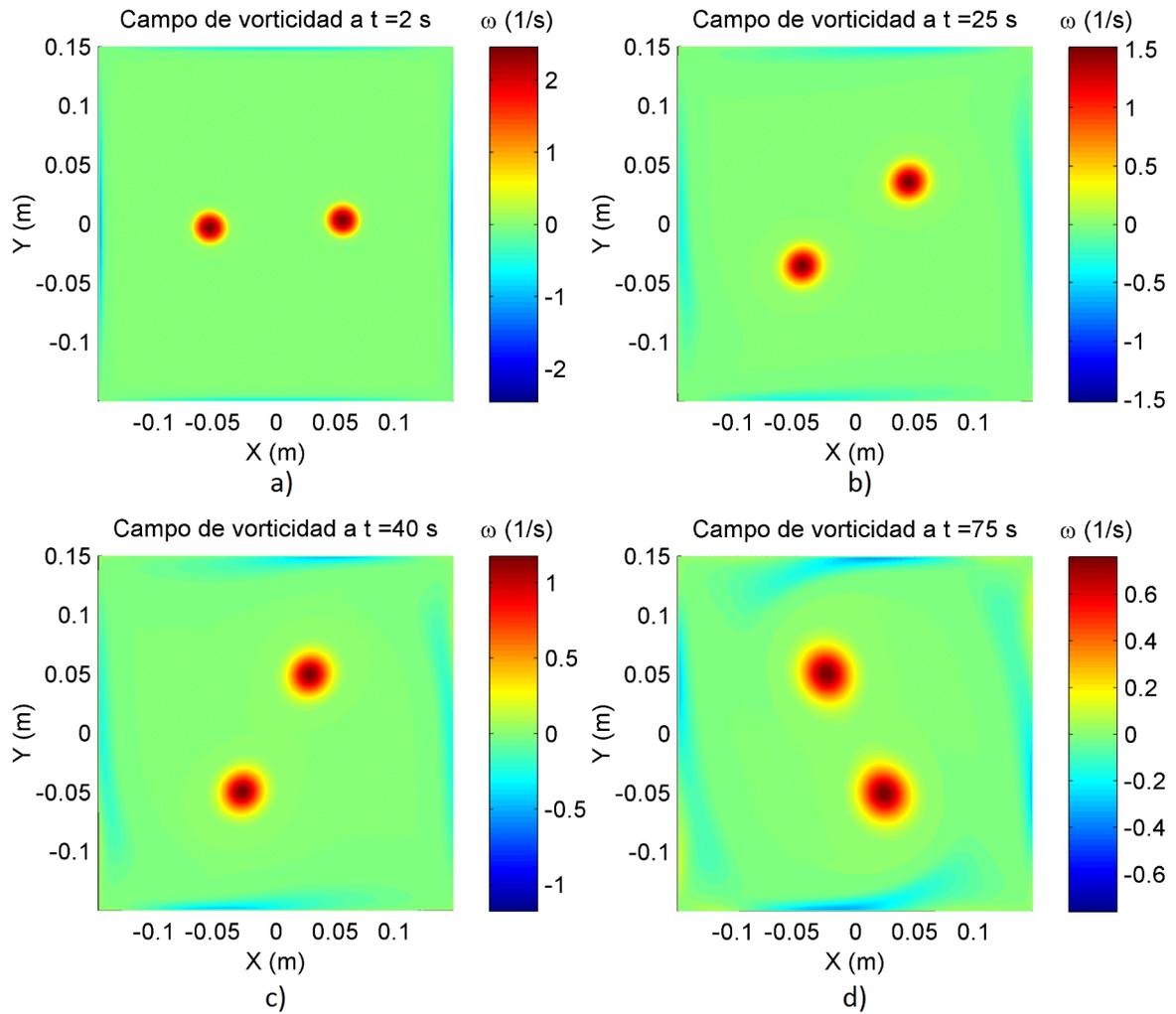


Figura 44: Evolución temporal de dos vórtices positivos en un dominio de razón de aspecto uno. No se tiene forzamiento externo, sólo fricción del fondo.

En una simulación similar a la anterior, pero con forzamiento, se observó que los vórtices fueron atrapados, alcanzando un estado casi estacionario. A diferencia del caso sin forzamiento, la distancia entre ellos no disminuyó, por lo que su posición se mantuvo casi estática. En la Figura (46) se muestra una secuencia de este comportamiento. Adicionalmente, la disipación debida a la fricción de fondo llegó a balancearse con el forzamiento: la Figura (47) presenta una gráfica de la energía cinética calculada, la cual alcanza un valor casi constante.

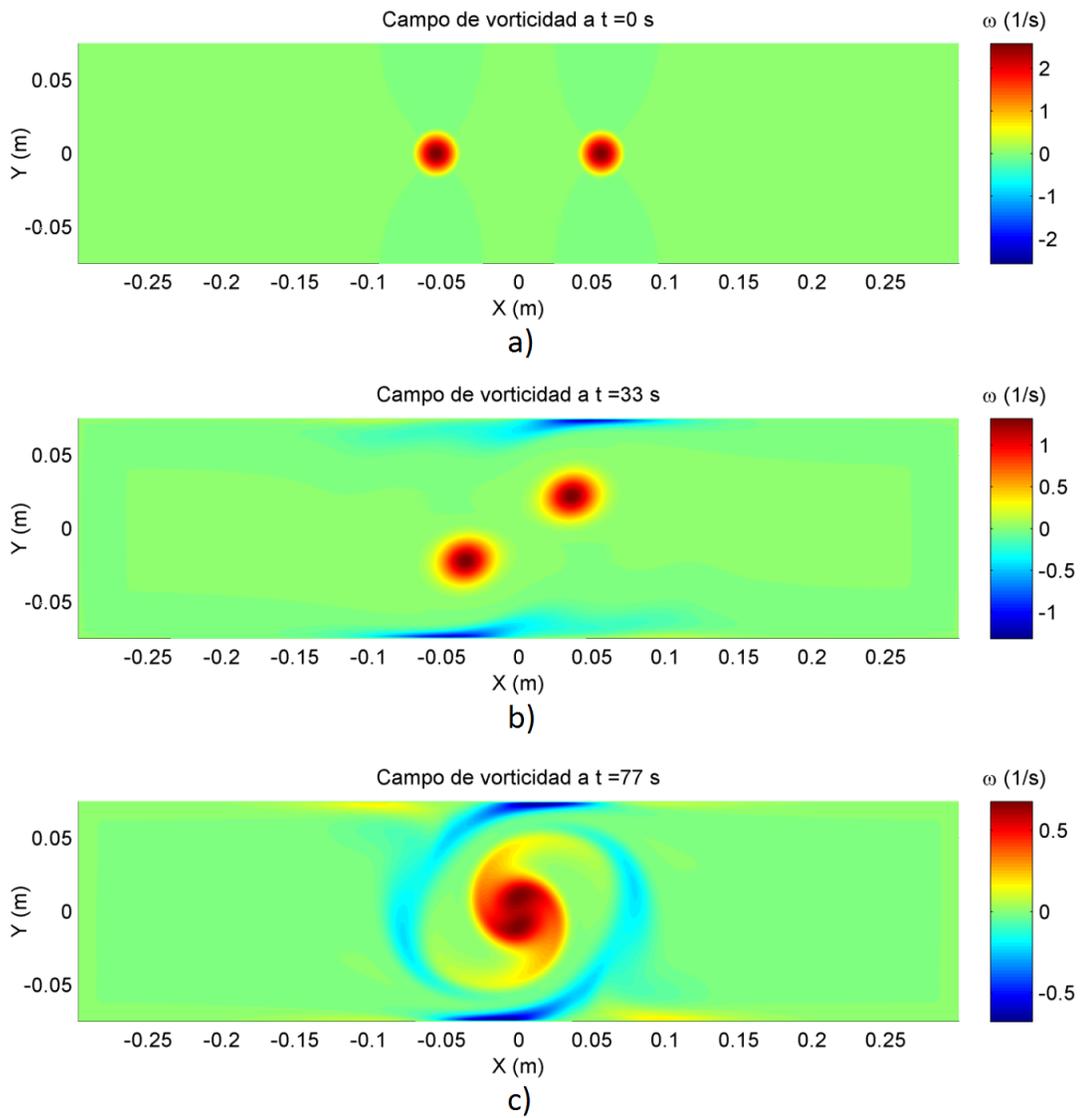


Figura 45: Evolución temporal de dos vórtices positivos en un dominio de razón de aspecto cuatro. No se tiene forzamiento externo, sólo fricción del fondo.

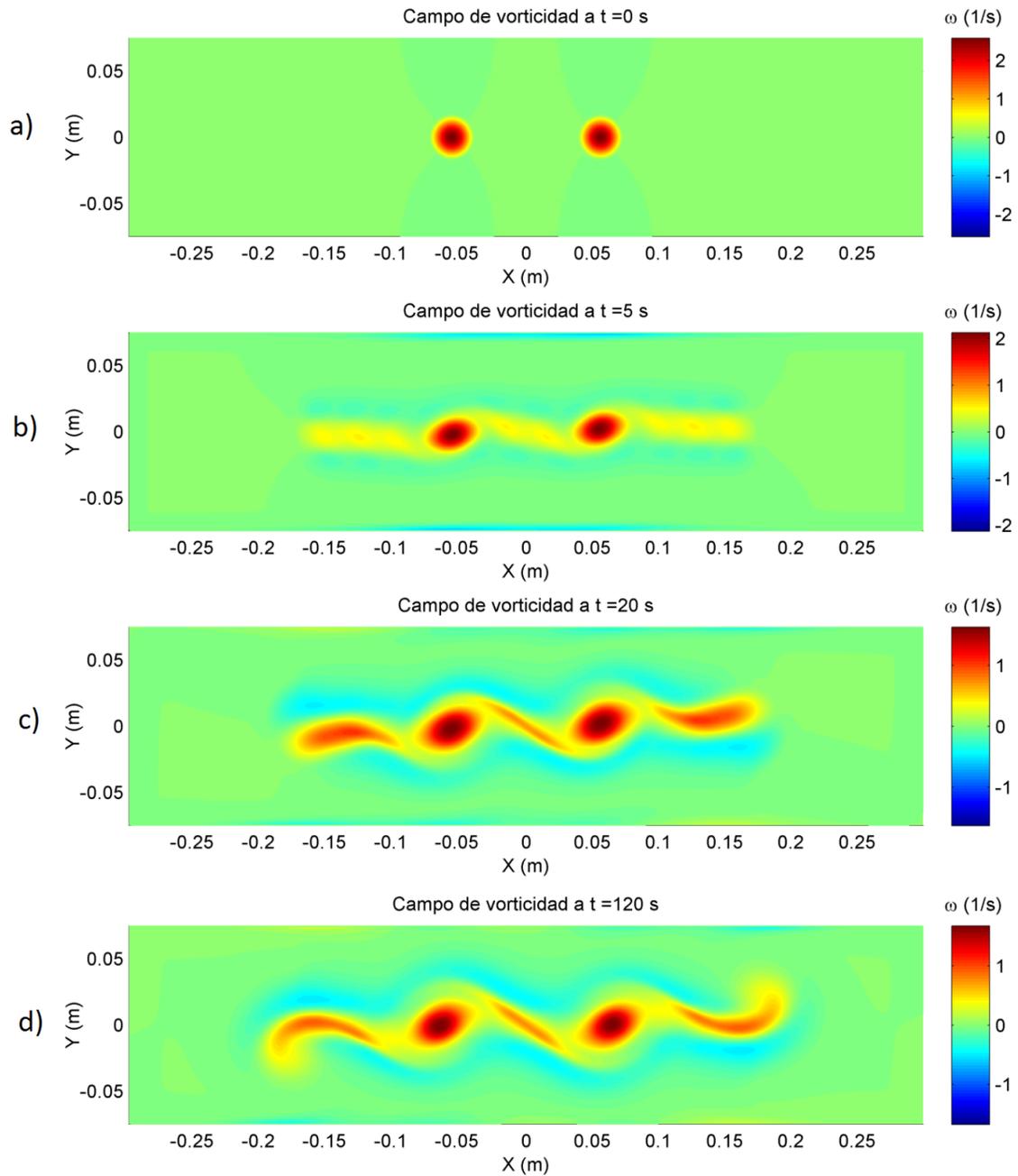


Figura 46: Evolución temporal de dos vórtices positivos en un tanque de razón de aspecto cuatro con un forzamiento intermedio y disipación. Se observa el confinamiento de los vórtices, formando una estructura similar a la observada en los experimentos.

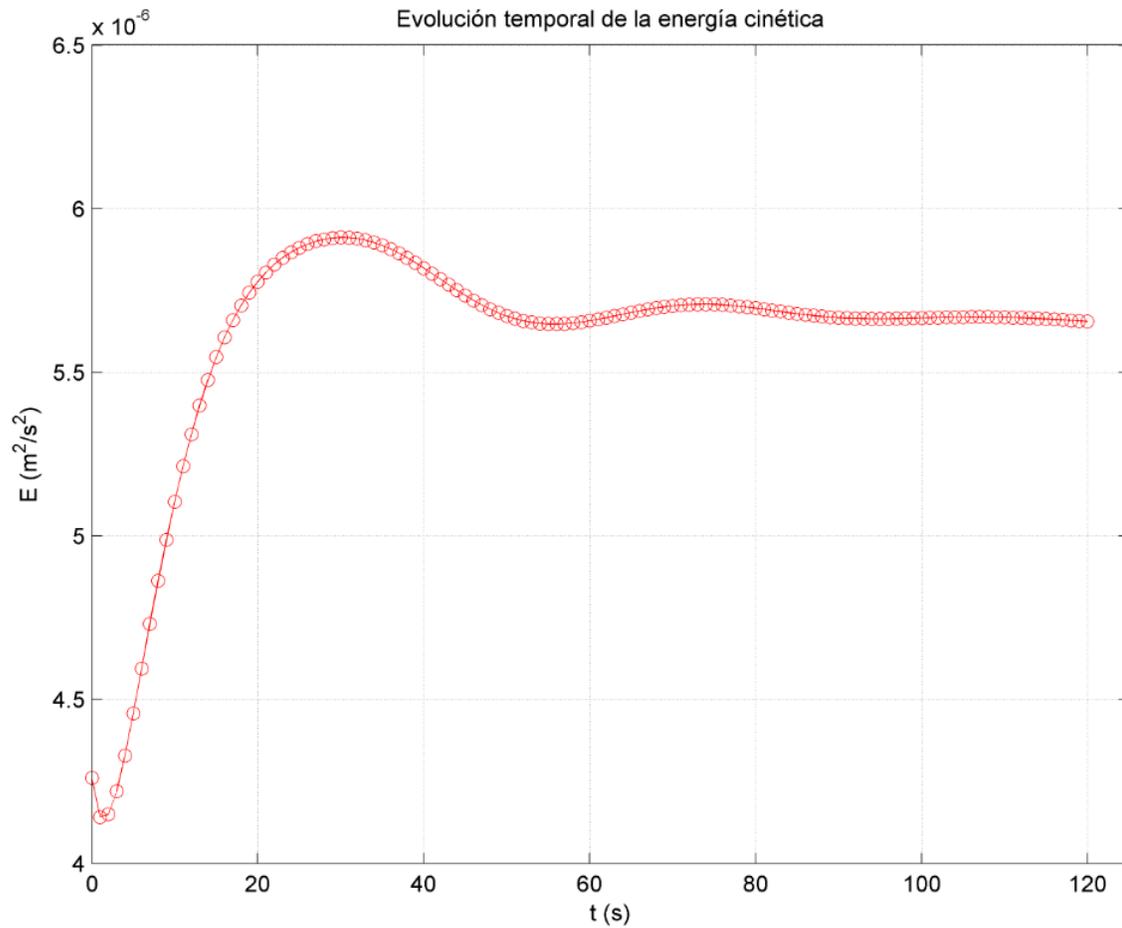


Figura 47: Energía cinética total de la simulación realizada en un tanque de razón de aspecto cuatro mostrada en la figura (46).

Capítulo 6

Discusión y conclusión

En los experimentos de laboratorio realizados se generó un flujo de corte mediante la aplicación de una fuerza de Lorentz. El flujo inicial se mantuvo acelerado debido al continuo forzamiento de la capa de fluido, aumentando su velocidad linealmente en el tiempo hasta llegar a deformarse el flujo. Esta deformación llevó a la generación de estructuras coherentes, las cuales presentaron una distribución similar en la mayor parte de los casos estudiados. Esta etapa inicial de los experimentos fue afectada principalmente por el forzamiento, ya que este determinó la intensidad del flujo de corte ($\Delta U \sim 4\text{cm/s}$ para $I=770\text{mA}$, $\Delta U \sim 2.5\text{cm/s}$ para $I=370\text{mA}$ y $\Delta U \sim 1.5\text{cm/s}$ para $I=160\text{mA}$), el tiempo al cual ocurrió la deformación del flujo, ($t_{df} = 7 \sim 8\text{s}$ para $I=770\text{mA}$, $t_{df} = 15\text{s}$ para $I=370\text{mA}$, $t_{df} = 22\text{s}$ para $I=160\text{mA}$) y la intensidad de los vórtices formados ($\omega \sim 2.3\text{s}^{-1}$ para $I=770\text{mA}$, $\omega \sim 1.4\text{s}^{-1}$ para $I=370\text{mA}$ y $\omega \sim 1\text{s}^{-1}$ para $I=160\text{mA}$).

La evolución posterior de las estructuras coherentes dependió de la razón de aspecto del tanque y del forzamiento utilizado. Para los tanques de razón de aspecto 3 y 4 (y para el caso del tanque de razón de aspecto 2 con un forzamiento débil), se observó el establecimiento de vórtices con vorticidad positiva en posiciones cuasi-permanentes en el eje central de los tanques, mientras que algunos parches de vorticidad negativa (de menor tamaño e intensidad) eran deformados y transportados de una manera semi-periódica alrededor de los remolinos positivos. Este comportamiento se debió a la recirculación de las corrientes establecidas por el forzamiento, advectando a las estructuras de vorticidad negativa entre las regiones de forzamiento y las paredes de los tanques. Un diagrama de esta recirculación se presenta en la Figura (48). Un comportamiento similar fue observado por Batchaev (1990) al tener cuatro vórtices girando alrededor del centro geométrico de un contenedor cuadrado. Este desplazamiento causó la repetida deformación de los vórtices principales, pasando de una forma circular a una estructura elongada y viceversa.

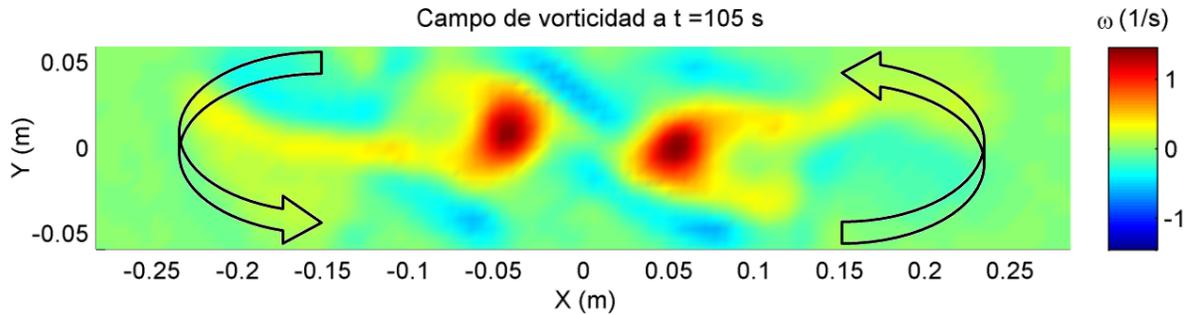


Figura 48: Imagen del campo de vorticidad obtenido para el experimento realizado en un tanque de razón de aspecto 4 con un forzamiento intermedio. Las flechas indican la dirección de la recirculación del flujo al salir y entrar a la zona de forzamiento.

En cambio, para los tanques de razón de aspecto 1 y 2 se tuvo el desplazamiento de los vórtices generados durante la inestabilidad hacia las paredes debido a la recirculación causada por el forzamiento, como se muestra en la Figura (49). Esto forzó el restablecimiento del flujo de corte inicial para el tanque de razón de aspecto 1 (llevando a la repetida generación y supresión de vórtices) y la formación de un tercer vórtice para el caso del tanque de razón de aspecto 2. La formación de este vórtice está relacionada con la concentración de vorticidad en el punto hiperbólico central al desplazarse los vórtices positivos cercanos a él (Manin, 1992).

Al calcular la energía cinética y la enstrofia a partir de los campos de velocidad y de vorticidad medidos en los experimentos, se observó que no se obtuvo un balance entre el forzamiento y la disipación ya que se presentaron importantes variaciones en el tiempo. Estas oscilaciones de las variables globales coincidieron con la orientación de las estructuras coherentes, siendo máximos los valores de energía y enstrofia al tener los vórtices una orientación similar a la del forzamiento (vórtices elongados en la dirección del forzamiento) y mínimos al ser casi circulares. Este comportamiento fue claramente identificado en las figuras (27) y (29). Con estos resultados se puede concluir que los sistemas estudiados (flujos de corte continuamente forzado en un dominio finito) tienen la propiedad de ganar y ceder energía de forma alternada, dependiendo de la disposición y forma de los vórtices generados.

Adicionalmente, para forzamientos intensos se observó la pérdida de simetría del flujo formado en los experimentos, tendiendo a desplazarse hacia la derecha ($x > 0$). Una pérdida de simetría

similar fue observada en los experimentos realizados por Duran-Matute *et al.* (2011), en donde se establece que al tener un forzamiento de Lorentz intenso, las fuerzas inerciales ganan importancia, causando efectos no lineales, lo cual lleva a la pérdida de la bidimensionalidad del flujo estudiado. Para corroborar esto, se calculó la divergencia horizontal de los experimentos realizados, la cual mostró un incremento para forzamientos más intensos. Sin embargo, al calcular el campo de vorticidad no se presentó para ningún caso una estructura bien definida.

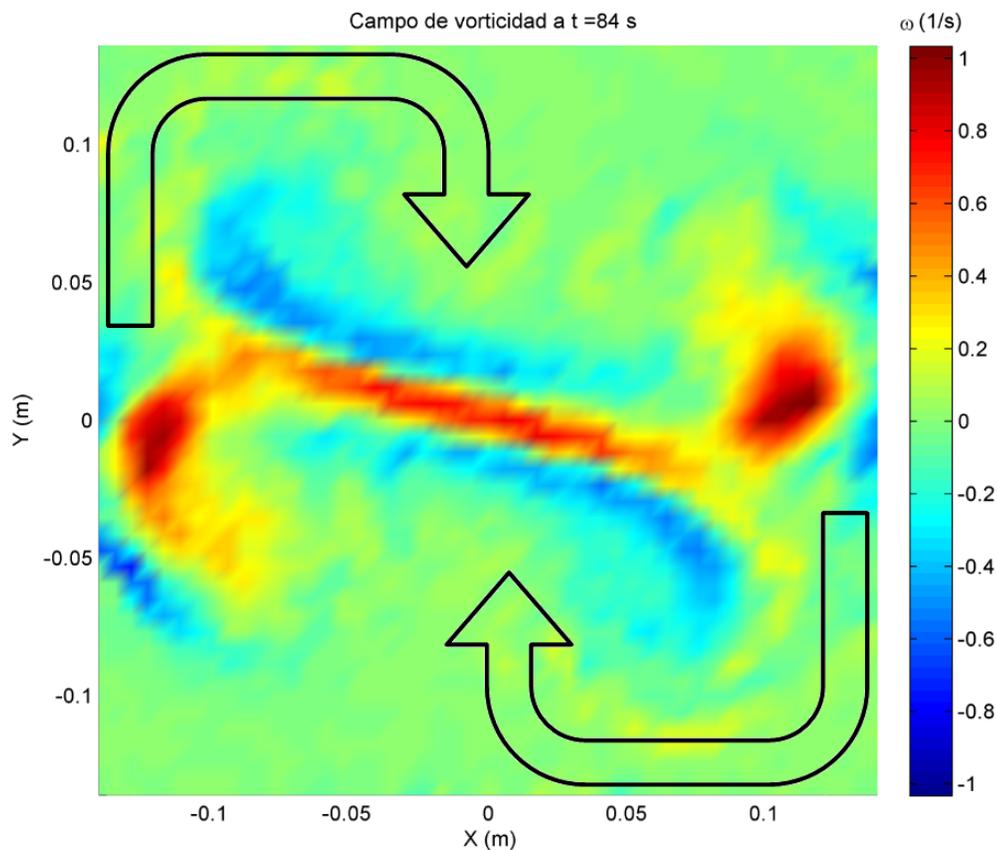


Figura 49: Imagen de un campo de vorticidad obtenido para el experimento realizado en un tanque de razón de aspecto 1 con un forzamiento débil. Las flechas indican la dirección del flujo.

Los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas presentaron un comportamiento similar al observado en los experimentos, desde la formación de vórtices por la distorsión del flujo de corte, hasta la evolución del flujo en el tiempo, incluyendo las oscilaciones observadas en la energía cinética y entropía total del flujo.

Sin embargo, también se presentaron diferencias entre los resultados experimentales y numéri-

cos. Por ejemplo, los vórtices formados por la inestabilidad no llegaron a ocupar el ancho del tanque (para los tanques de razón de aspecto 4) en las simulaciones, a diferencia de lo observado en los experimentos. Además, al calcular la energía cinética y enstrofia total de las simulaciones, se tuvo una mayor regularidad en las oscilaciones y una magnitud menor a las observadas experimentalmente. La diferencia en la amplitud es debida a la diferencia de tamaño de los vórtices observados en los experimentos con aquellos obtenidos en las simulaciones, ya que, al tener una menor cantidad de fluido en movimiento, la energía cinética total es menor. Otro comportamiento que no se observó en las simulaciones fue el desplazamiento de los vórtices centrales en una sola dirección, es decir, la pérdida de simetría, a diferencia de lo registrado en los experimentos. Esto corrobora que la razón de dicha asimetría en el laboratorio se puede deber a efectos tridimensionales o a la variación del campo de forzamiento experimental.

Se debe destacar la importancia que jugó la disipación causada por la fricción de fondo para llegar a obtener un comportamiento periódico o estable, ya que sin este efecto, el sistema no perdería energía y su velocidad tendería a infinito (algo que no ocurre). Sin embargo, la elección de la magnitud del término de fricción de Rayleigh requiere de mayor investigación, ya que fue necesario incrementarlo en simulaciones con forzamientos de magnitudes intensas.

El uso de un modelo numérico permitió explorar algunos aspectos adicionales. Al realizar simulaciones numéricas en donde se incluyeron dos vórtices gaussianos en el dominio antes de iniciar el forzamiento, se observó que los vórtices se mantuvieron estáticos, además de llegar a un balance entre la energía inyectada por el forzamiento con la disipada por la fricción de fondo. Esto lleva a la conclusión de que las variaciones de energía cinética y enstrofia en los experimentos con forzamiento (las auto-oscilaciones del sistema) son predominantemente causadas por la interacción entre los vórtices negativos y positivos. Esta interacción consiste en el transporte de vorticidad negativa en el corredor entre los vórtices positivos y las paredes del tanque. Como consecuencia, dichos remolinos positivos fueron reorientados con respecto al forzamiento, llevando a una pérdida de energía al estar orientados en una dirección perpendicular a este y ganando energía al orientarse de manera paralela.

Finalmente, a pesar de que las similitudes entre los experimentos y simulaciones no fueron exactas, se reprodujeron las características más importantes del flujo experimental, por lo que se puede concluir que el modelo cuasi-bidimensional es una buena aproximación para describir la dinámica del flujo.

Referencias bibliográficas

- Acheson D. J. (1990). *Elementary fluid dynamics*. Clarendon Press, Oxford. 397 pp.
- Batchaev, A. M. (1990). Self-oscillation regimes in a system of four quasi-two-dimensional vortices. *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 4, 85-91.
- Bodarenko, N. F., Z., G. M., & Dolzhanskiy, F. V. (1979). Laboratory and theoretical models of plane periodic flows. *Izv. Acad. Sci. USSR Atmos. Oceanic Phys.*, 15, 711-716.
- Carnevale, G., McWilliams, J., Pomeau, Y., Weiss, J., & Young, W. R. (1991). Evolution of vortex statistics in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 66, 2735-2737.
- Catalan-Izquierdo S., Bueno-Barrachina M., Cañas-Peñuelas S., Cavallé-Sesé F. (2009) Capacitance evaluation on parallel-plate capacitors by means of finite element analysis. (ICREPO 09) Valencia (Spain), 15th to 17th April, 2009.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, Oxford. 652 pp.
- Clercx, H. J. H., van Heijst, G. J. F., & Zoetewij, M. L. (2003). Quasi-two dimensional turbulence in shallow fluid layers: the role of bottom friction and fluid layer depth. *Phys. Rev. E*, 67(6), 1-9.
- Clercx, H. J. H., Van Heijst, G. J. F., Molenaar, D., & Wells, M. G. (2005). No-slip walls as vorticity sources in two-dimensional bounded turbulence. *Dynamics of atmospheres and oceans*, 40(1), 3-21.
- Clercx, H. J. H. & van Heijst, G. J. F. (2009). Two-dimensional Navier-Stokes turbulence in bounded domains. *App. Mech. Rev.*, 62(2), 1-25.
- Cushman-Roisin, B. & J. M. Beckers. (2011). *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects*, Academic Press, Elsevier. 875pp.
- Danilov, S. D. & Dovzhensko, V. A. (1996). Subcritical flow in a system of four vortices. *Atmos. Oceanic Phys.*, 31(5), 593-598.
- Danilov, S. D. & Gurarie, D. (2000). Quasi-two-dimensional turbulence. *Phys. Usp*, 43(9), 863-900.
- Dolzhanskii, F. V., Krymov, V. A., & Manin, D. Y. (1990). Stability and vortex structures of quasi-two-dimensional shear flows. *Sov. Phys. Usp.*, 33(7), 495-520.
- Dolzhanskii, F. V., Krymov, V. A., & Manin, D. Y. (1992). An advanced experimental investigation of quasi-two-dimensional shear flows. *J. Fluid Mech.*, 241, 705-722.

- Dovzhenko, V. A., Novikov, I. V., & Obukhov, A. M. (1979). Modeling of the vortex generation process in an axisymmetric azimuthal field by a magnetohydrodynamic technique. *Akademiia Nauk SSSR Fizika Atmosfery i Okeana*, 15, 1199-1202.
- Drazin, P. G. & Reid, W. H. (1981), *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, Cambridge. 605 pp.
- Dritschel, D. G. (1993). Vortex properties of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, 5(4), 984-997.
- Duran Matute, M., Trieling, R.R. & Heijst, G.J.F. van (2011). Scaling and asymmetry in an electromagnetically forced dipolar flow structure. *Physical Review E*, 83(1), 1-6.
- Drury, L. O'C. (1985). Acoustic amplification in discs and tori. *Mon. Not. R. Astron Soc.* 217, 821-829.
- Fjørtoft, R., (1950). Application of integral theorems in deriving criteria for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. *Geophys. Publ.*, 17(6), 1-52.
- Früh, W.-G. & Read, P. L. (1999). Experiments on a barotropic rotating shear layer. Part 1. instability, steady vortices. *J. Fluid Mech.*, 383, 143-171.
- Griffiths, R. W., Killworth, P. D. & Stern, M. E. (1982). A geostrophic instability of ocean currents. *J. Fluid Mech.* 117, 343-377.
- Hansen, A. E., Marteau, D., & Tabeling, P. (1998). Two-dimensional turbulence and dispersion in a freely decaying system. *Physical Review E*, 58(6), 7261-7271.
- Hegg M. C. & Mamishev A. V. (2004). Influence of Variable Plate Separation on Fringing Electric Fields in Parallel-Plate Capacitors. Conference Record of the 2004 IEEE ISEI, Indianapolis, IN USA, 19-22 September.
- Hopfinger, E. J. (1982). Turbulence and waves in a rotating tank. *J. Fluid Mech.*, 125, 505-534.
- Huerre, P., & Monkewitz, P. A. (1985). Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. of Fluid Mech.*, 159, 151-68.
- Huerre, P. & Monkewitz, P. A. (1990). Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 22(1), 473-537
- Jenn, C. (2002). Applications of the lambert W function in electromagnetics. *Antenna's and propagation Magazine IEEE* 44(3), 139-142
- Joseph, D.D. (1976), *Stability of fluid motions I*, Springer-Verlag. 294 pp.
- Kraichnan, R. H. (1967). Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10(7), 1417-1423.
- Krymov, V. A. (1989). Stability and supercritical regimes of quasi-two dimensional shear flow in the presence of external friction (experiment). *J. Fluid Dynamics* 24(2), 170-176.
- Kuo, H.-I. (1949). Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteorology*, 6(2), 105-122.

- Lilly, D. K. (1969). Numerical simulation of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 12(12), 240-249.
- Lin, C.C. (1966), *The theory of hydrodynamic stability* (corrected ed.), Cambridge University Press, Cambridge. 155pp.
- Maassen, S. R., Clercx, H. J. H., & van Heijst, G. J. F. (2003). Self organization of decaying quasi-two-dimensional turbulence in stratified fluid in rectangular containers. *J. Fluid Mech.*, 495, 19-33.
- Manin D. Yu. (1992). A study of repeated vortex mergers in a forced quasi-2-D shear flow, *Phys. Fluids A*, 4 (8), 1715-1723
- Mattaeus, W. H. & Montgomery, D. C. (1980). Selective decay hypothesis at high mechanical and magnetic Reynolds numbers. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 357(1),20-222.
- Melander, M. V., Zabusky, N. J., & McWilliams, J. C. (1988). Symmetric vortex merger in two dimensions- Causes and conditions. *J. Fluid Mech.*, 195, 303-340.
- Narayan, R., Goldreich, P. & Goodman, J. (1987). Physics of modes in a differentially rotating system, analysis of the shearing sheet. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 228, 1-41.
- Niino, H. & Misawa, N. (1984). An experimental and theoretical study of barotropic instability. *J. Atmos. Sci.*, 41(12), 1992-2011.
- Obukhov A. M. (1983). Kolmogorov flow and laboratory simulation of it, *Russ. Math. Surv.* 38(4), 113-126
- Orlandi, P. (1990). Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids.*, 2(8),1429-1436.
- Palmer, H. B. (1937). The Capacitance of a Parallel-Plate Capacitor Schwartz-Christoffel Transformation. *Electrical Engineering*, 56(3), 363-368.
- Paret, J. & Tabeling, P. (1997). Experimental Observation of the two-dimensional Inverse Energy Cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 79(21), 4162-4165.
- Parkera, G. W. (2002). Electric field outside a parallel plate capacitor, *Am. J. Phys.* 70(5), 502-505.
- Pedlosky, J. (1987). *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2nd edition edition. 636pp.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent flows*. Cambridge University Press, Cambridge. 771pp.
- Rabaud M. & Couder Y. (1983). A shear-flow instability in a circular geometry, *J. Fluid Mech.* 136, 291-319.
- Rayleigh, L. (1879). On the stability or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Maths. Soc.*, 1(1), 57-72
- Satomura, T. (1981). An investigation of shear instability in a shallow water. *J. Met. Soc. Japan* 59, 148-167.

- Sommeria, J. (1986). Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.*, 170, 139-168.
- Tabeling, P. (2002). Two-dimensional turbulence: a Physicist Approach. *Phys. Rep.*, 362(1), 1-62.
- Thess, A. (1992). Instabilities in two-dimensional spatially periodic flows. Part I: Kolmogorov flow. *Phys. Fluids*, 4(7), 1385-1395.
- van Geffen, J. H. G. M. (1998). NS-evol. Faculty of Technical Physics Internal Rep. R-1466-D, Eindhoven University of Technology, Netherlands, 152 pp.
- van Heijst G. J. F., H. J. H. Clercx, & D. Molenaar. (2006). The effects of solid boundaries on confined two- dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* 554, 411-431.
- Velasco Fuentes, O. U. (2001). Chaotic advection by two interacting finite-area vortices. *Phys. Fluids*, 13(4), 901-912.
- Velasco Fuentes, O. U. (2009). Kelvin's discovery of Taylor columns. *European J. Mech. - B Fluids*, 28(3), 469-472.
- Zabusky, N. J., Hughes, M. H., & Roberts, K. V. (1979). Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions. *J. of computational Phys.*, 30(1), 96-106.
- Zavala Sansón, L. (2000). The effects of topography on rotating barotropic flows. Tesis de Doctorado, Technische Universiteit Eindhoven.