

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Oceanografía física**

Interacción de dos vórtices helicoidales axialmente simétricos

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Alejandro Camilo Espinosa Ramírez

Ensenada, Baja California, México

2015

Tesis defendida por

Alejandro Camilo Espinosa Ramírez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Director del Comité

Dr. Alejandro Francisco Parés Sierra

Dr. José Luis Ochoa de la Torre

Dr. David Alberto Rivas Camargo



Dr. Francisco Javier Ocampo Torres
Coordinador del Programa de Posgrado en Oceanografía física

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Alejandro Camilo Espinosa Ramírez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía física.

Interacción de dos vórtices helicoidales axialmente simétricos

Resumen aprobado por:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Director de tesis

Estudiamos numéricamente el movimiento de dos remolinos helicoidales coaxiales e idénticos. Los simulamos mediante un modelo numérico tridimensional para un fluido inviscido, incompresible y homogéneo basado en el método de vórtice en celda. Validamos el modelo al calcular las velocidades autoinducidas por un remolino delgado para diferentes pendientes $\tau = L/(2\pi R)$, donde R es el radio de la hélice central del remolino y L es la distancia, en la dirección axial, de una espira del vórtice. Además obtuvimos las velocidades a las que se desplazan dos remolinos coaxiales las cuales están en concordancia con las soluciones analíticas. La teoría predice que un remolino helicoidal es estable y se mueve uniformemente cuando $a/R < 0.1$, donde a es el radio de sección transversal del remolino. Sin embargo, nosotros encontramos que el radio límite al que la solución teórica es válida es $a/R \approx 0.45$. Examinamos, en función de la pendiente, la fusión de dos remolinos que cumplen dos tipos de condiciones iniciales: Remolinos distantes ($a/R = 0.5$) y remolinos cercanos ($a/R = 2/3$). Bajo la primera condición los remolinos se fusionan cada vez más rápido al disminuir la pendiente en el rango $4 \leq \tau \leq 25$ pero no se fusionan para pendiente $\tau = \infty$ (dos columnas rectas). Bajo la segunda condición todas las estructuras se fusionan de manera similar en el rango de pendientes $4 \leq \tau \leq \infty$. El comportamiento de la fusión se ve alterado para pendientes pequeñas ($\tau \lesssim 2$) donde tiene lugar una fusión que es principalmente en planos meridionales.

Palabras Clave: **vórtice, helicoidal, movimiento, interacción.**

Abstract of the thesis presented by Alejandro Camilo Espinosa Ramírez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Sciences in PHYSICAL OCEANOGRAPHY.

Interaction of two axially-symmetric, helical vortices

Abstract approved by:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Thesis Director

We studied the interaction of two identical coaxial helical vortices. We simulated them using a tridimensional numerical model for an inviscid, incompressible, and homogeneous fluid based on the vortex-in-cell method. We validate the model calculating the self-induced velocities of translation and rotation of a unique thin vortex for different pitches $\tau = L/(2\pi R)$, where R is the helical radius of the vortex and L is the distance, in the axial direction, of a vortex coil. We also obtained the velocities at which two coaxial helical vortices move, they are in agreement with the analytical solutions. For a single vortex with $a/R < 0.1$, where a is the radius of the vortex' cross-section, the theory predicts a stable motion. However we found such stable behavior for $a/R \leq 0.45$. We examine, as a function of the pitch, the merger of two vortices that satisfy two initial conditions: Distant vortices ($a/R = 0.5$) and nearby vortices ($a/R = 2/3$). Under the first condition the vortices merge faster as the pitch decreases in the range $4 \leq \tau \leq 25$, but they do not merge when the pitch is $\tau = \infty$ (two straight columns). Under the second condition, the structures merge all similarly in the pitch range $4 \leq \tau \leq \infty$. The behaviour of merger is altered for small pitches ($\tau \lesssim 2$), where the merger is mainly on meridional planes.

Keywords: **vortex, helix, motion, interaction**

Agradecimientos

Al Dr. Oscar Velasco por haberme mostrado estos temas antes totalmente desconocidos para mi y por sus consejos tan acertados en esos momentos de incertidumbre.

Al Dr. José Luis Ochoa, Dr. David Rivas y al Dr. Alejandro Parés por su orientación y aprobación de esta tesis.

A todos los profesores que durante el primer año de maestría me proporcionaron las herramientas necesarias para mejorar como profesionista.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico a través de su programa de posgrados y mediante el proyecto 169574 que proporcionó el equipo de cómputo necesario.

A mis compañeros de maestría, y en especial a Esveidy Ramírez, por esos momentos de relajación imprescindibles.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Agradecimientos	iv
Lista de figuras	vi
1. Introducción	1
1.1. Vórtices helicoidales en el laboratorio	1
1.2. Definición de un vórtice helicoidal	1
1.3. Velocidades autoinducidas por un único remolino	3
1.4. Modelo numérico	4
1.5. Estudio de un vórtice al variar su radio α	5
1.6. Velocidad de desplazamiento de N vórtices helicoidales delgados	5
1.7. Distancia mínima entre dos hélices	6
1.8. Fusión de dos remolinos helicoidales axialmente simétricos	8
2. Metodología	10
2.1. Condición inicial	10
2.2. Interpolación	11
2.3. Ecuaciones en la malla	13
2.4. Integración de las ecuaciones	14
2.5. Análisis de los datos de salida	14
2.5.1. Obtención de la velocidad de traslación U	14
2.5.2. Obtención de la velocidad angular Ω	15
2.5.3. Cálculo de la distancia de separación entre los remolinos	17
3. Validación	18
4. Resultados	20
4.1. Velocidades de un remolino helicoidal de diferentes grosores α	20
4.2. Velocidades de dos remolinos helicoidales delgados	23
4.3. Fusión de dos remolinos axialmente simétricos	24
4.3.1. Caso A: $d_0 > 3.3$	24
4.3.2. Caso B: $d_0 < 3.3$	29
4.4. Fusión meridional de los remolinos	30
4.5. Fusión de vórtices delgados y pendiente baja	31
5. Conclusiones	33
Lista de referencias bibliográficas	35
A. Apéndice	37

Lista de figuras

Figura	Lista de figuras	Página
1.	Visualización experimental de un vórtice helicoidal	1
2.	Esquema de un vórtice helicoidal y las variables que lo definen	2
3.	Distancia polar y meridional entre dos hélices	7
4.	Distancia mínima entre dos hélices	8
5.	Distribución de las partículas Lagrangianas de vorticidad	11
6.	Esquema de la interpolación triangular en una dimensión	12
7.	Distribución de la vorticidad en las partículas, en un plano meridional y en uno polar	13
8.	Ejemplo de trayectoria vertical de las partículas	15
9.	Ejemplo de trayectoria angular de las partículas	16
10.	Validación del modelo	18
11.	Divergencia de la vorticidad ω , el potencial \mathbf{A} y la velocidad \mathbf{u} , en la malla .	19
12.	Velocidades autoinducidas por remolinos helicoidales de diferente grosor .	20
13.	Evolución de las partículas de vorticidad de un remolino de radio $\alpha = 0.72$.	21
14.	Evolución de un remolino de radio $\alpha = 0.72$ visto desde un corte polar . . .	22
15.	Desplazamiento axial y angular para un remolino de radio $\alpha = 0.72$	22
16.	Velocidades autoinducidas por un remolino de radio $\alpha = 0.44$ para diferentes pendientes	23
17.	Velocidades a las que se desplazan un par de remolinos delgados para diferentes pendientes	24
18.	Evolución de un par de remolinos helicoidales delgados	24
19.	Evolución de la distancia entre dos remolinos de separación inicial $d_0 = 4$ y pendientes grandes	25
20.	Distancia de separación, posición angular y velocidad angular de dos vórtices helicoidales de pendiente alta y distancia inicial $d_0 = 4$	26
21.	Tiempo al que comienza la fusión para dos vórtices de pendientes en el rango $4 \leq \tau \leq 25$ para el caso de distancia inicial $d_0 = 4$	27
22.	Ejemplo de la fusión de dos vórtices helicoidales de pendiente $\tau = 16$ y distancia inicial $d_0 = 4$	28
23.	Ejemplo del comportamiento de las componentes de la vorticidad durante la fusión	29
24.	Evolución de la distancia entre dos remolinos de separación inicial $d_0 = 4$ y pendientes pequeñas	29

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
25. Evolución de la distancia entre dos remolinos con separación inicial $d_0 = 3$	30
26. Evolución de un par de remolinos de pendiente $\tau = 16$ y distancia inicial $d_0 = 4$ vista desde un plano meridional	31
27. Evolución de un par de remolinos de pendiente $\tau = 0.6$ y distancia inicial $d_0 = 4$ vista desde un plano meridional	31
28. Fusión meridional de dos remolinos de pendiente $\tau = 0.2$ y radio $\alpha = 0.2$. .	32
29. Fusión meridional de dos remolinos de pendiente $\tau = 0.4$ y radio $\alpha = 0.2$. .	32
A.1. Ejemplo de la fusión de dos vórtices de pendiente $\tau = 4$ y distancia inicial $d_0 = 4$	37
A.2. Evolución de un par de remolinos de pendiente $\tau = 4$ y distancia inicial $d_0 = 4$ vista desde un plano meridional	38
A.3. Evolución de un par de remolinos de pendiente $\tau = 1$ y distancia inicial $d_0 = 4$ vista desde un plano meridional	38
A.4. Fusión meridional de dos vórtices de pendiente $\tau = 0.2$ y radio $\alpha = 0.2$ vista desde las partículas	39

Capítulo 1. Introducción

1.1. Vórtices helicoidales en el laboratorio

Los remolinos helicoidales son observados en la estela de turbinas y propelas giratorias en presencia de una corriente media (fig. 1). Un vórtice helicoidal se desprende por cada aspa que forma la turbina y el conjunto de vórtices gira en el mismo sentido. En experimentos de laboratorio Whale *et al.* (2000) han visualizado la estela de un motor de doble hélice mediante velocimetría por imágenes de partículas (PIV, por sus siglas en inglés) y mediante el cálculo del campo de vorticidad se observa el patrón helicoidal proyectado en un plano meridional. En nuestro estudio abordamos el caso de uno y dos remolinos que se encuentran lejos del aparato generador o de cualquier otra frontera sólida. A pesar de que estos vórtices son comunes en la aeronáutica, la interacción entre ellos ha sido poco estudiada. Por este motivo, nuestro objetivo es contribuir al entendimiento del comportamiento de dos de estos remolinos idealizados.



Figura 1: Visualización, mediante humo, de la estela de una hélice giratoria dentro de un túnel de viento. Fuente: Simms *et al.* (2001), extraído de Vermeer (2003).

1.2. Definición de un vórtice helicoidal

Un vórtice helicoidal es una masa de fluido que gira en torno a un eje en forma de hélice. Esta hélice (nombrada hélice central en este trabajo) se puede describir matemáticamente con relativa facilidad usando coordenadas cartesianas y un ángulo que varía de $-\infty$ a ∞ con las siguientes formulas

$$x = R\cos(\theta), \quad y = R\sin(\theta), \quad z = \frac{L\theta}{2\pi}, \quad (1)$$

donde R es el radio constante de la hélice (también se puede decir que es el radio del cilindro, inmaterial y recto, trazado por la hélice) y L es el paso y representa la distancia, en el eje axial, de una espira del vórtice como se muestra en la fig. 2. La vorticidad, donde no es nula, es un vector paralelo a la curva tangente a la hélice. Para fines prácticos, nombraremos vórtice a la porción de fluido que tiene vorticidad no nula de magnitud ω . En nuestro estudio la vorticidad es uniforme en una superficie circular de radio a y perpendicular a la hélice descrita por la ec. 1. Fuera de este 'tubo helicoidal' el flujo es irrotacional. En consecuencia la circulación para cualquier contorno que sólo rodee al tubo helicoidal es $\Gamma = \pi\omega a^2$.

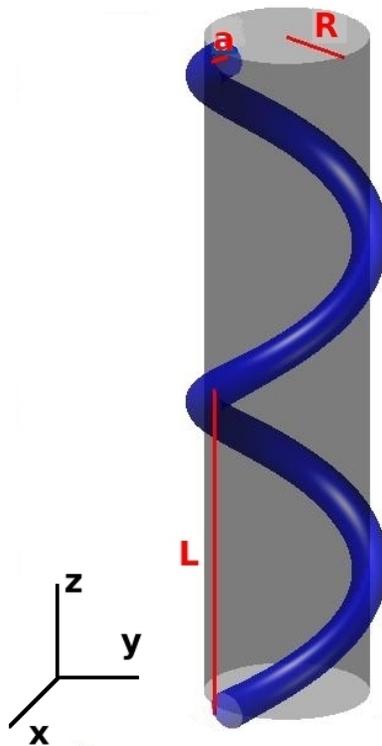


Figura 2: Esquema de un vórtice helicoidal y las variables que lo definen.

A partir de las variables antes mencionadas, dos números adimensionales determinan cualquier remolino helicoidal: la pendiente τ y el radio adimensional α . Estos números

adimensionales son los siguientes:

$$\tau = \frac{L}{2\pi R}, \quad \alpha = \frac{a}{R}. \quad (2)$$

La pendiente τ define la elongación del remolino, si tiende a infinito obtenemos una columna recta. El radio adimensional α determina el grosor del remolino con respecto al radio R del cilindro sobre el que la hélice se enrolla.

1.3. Velocidades autoinducidas por un único remolino

Considerando un marco de referencia en que conforme nos alejamos de la hélice las velocidades del fluido decaen indefinidamente, un remolino helicoidal de $\alpha \leq 0.1$ es estable y presenta una velocidad de traslación U_a y una de rotación Ω_a , ambas uniformes, a lo largo del eje del cilindro sobre el que se encuentra (Joukowski, 1912). A estas velocidades las llamamos las velocidades autoinducidas ya que son las velocidades a las que se desplaza el vórtice cuando colocamos sólo uno de ellos en la condición inicial. Si posicionamos dos o más vórtices helicoidales, la velocidad de cada uno será la velocidad que él mismo se induce más la velocidad que le imprimen los demás, por ello hacemos distinción entre una u otra velocidad. La selección del marco de referencia con velocidad nula a infinito es esencial en la descripción pues tanto la traslación como la rotación se pueden eliminar escogiendo otros marcos de referencia.

La existencia de una solución analítica para el campo de velocidades generado por un vórtice helicoidal infinitamente delgado (Hardin, 1982) ha desencadenado una serie de nuevas investigaciones para descubrir la velocidad neta a la que se desplaza un remolino helicoidal delgado (ver, por ejemplo, Okulov, 2004 o Boersma y Wood, 1999); sin embargo, estas soluciones han despreciado la velocidad tangencial o calculado erróneamente la velocidad total. Estas velocidades autoinducidas fueron recientemente obtenidas correctamente y verificadas al integrar numéricamente la fórmula de Helmholtz y mediante la aproximación de Rosenhead-Moore de la Ley de Biot-Savart (Velasco Fuentes, 2015-A). Éstas tienen la forma

$$U_a^* = \frac{1}{(1 + \tau^2)^{3/2}} \left(\ln(2/\epsilon) - \ln(\sqrt{1 + \tau^2}) + (1 + \tau^2)^{3/2} W(\tau) \right), \quad (3)$$

$$\Omega_a^* = \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{2(1 + \tau^2) + \ln(2/\epsilon) - \ln(\sqrt{1 + \tau^2}) - (1 + \tau^2)^{3/2}(2/\tau - W(\tau))}{\epsilon^2(1 + \tau^2)^2 - 1} \right), \quad (4)$$

donde

$$\epsilon = \frac{a}{R(1 + \tau^2)}$$

y

$$W(\tau) = \int_0^\infty \left[\frac{\text{sen}^2(t)}{(\tau^2 t^2 + \text{sen}^2(t))^{3/2}} - \frac{1}{(1 + \tau^2)^{3/2}} \frac{H(1/2 - t)}{t} \right] dt$$

es una integral que se resuelve numéricamente donde H es la función escalón de Heaviside. Las velocidades autoinducidas, con dimensiones, están dadas de la siguiente manera:

$$U_a = \frac{\Gamma}{4\pi R} U_a^* \quad (5)$$

y

$$\Omega_a = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \Omega_a^*. \quad (6)$$

Las ecs. 3 y 4 son las que utilizaremos para validar el modelo numérico empleado.

1.4. Modelo numérico

Existen numerosos métodos numéricos que permiten describir alguna propiedad de un fluido. Entre ellos está el método de partícula-malla en paralelo (PPM, por sus siglas en inglés) que permite estudiar alguna propiedad física, como la carga, vorticidad, concentración, etc., desde una descripción Lagrangiana en combinación con una Euleriana. Esto se logra interpolando desde las partículas a una malla y viceversa (ver, por ejemplo, Sbalzarini *et al.*, 2006). Otra manera de estudiar las propiedades de una estructura de vorticidad concentrada es mediante la evaluación numérica de la integral de Biot-Savart que permite obtener la evolución de un vórtice de sección transversal finita. Sin embargo, estas secciones no pueden deformarse (ver, por ejemplo, Velasco Fuentes, 2014), lo cual es un problema para nosotros ya que necesitamos un modelo numérico que permita evolucionar en cualquier dirección a los vórtices e incluso deformarse. El modelo que se

ajusta a nuestras necesidades, y el que utilizaremos, es el basado en el método de vórtice en celda (Christiansen, 1973). Este modelo está hecho para un fluido tridimensional, inviscido, incompresible y homogéneo. Al igual que el método de PPM tiene la particularidad de que combina una descripción Lagrangiana con una Euleriana. Sin embargo, este método ya está hecho específicamente para partículas de vorticidad. La desventaja del modelo es que, como ya se mencionó, está hecho para un fluido inviscido por lo que no podemos abordar correctamente efectos de disipación viscosa.

1.5. Estudio de un vórtice al variar su radio α

Teniendo en mente que las soluciones analíticas (ecs. 3 y 4) están construidas para vórtices delgados, es deseable observar cómo se comportan los remolinos al aumentar gradualmente su radio α . En otras palabras deseamos observar si las velocidades numéricas divergen de las analíticas, si se mantienen constantes y si los remolinos se deforman o desprenden vorticidad al ser cada vez más gruesos. Encontramos que para radios $\alpha \gtrsim 0.45$ las soluciones se separan notablemente.

1.6. Velocidad de desplazamiento de N vórtices helicoidales delgados

Un grupo de N vórtices helicoidales idénticos y coaxiales es solución estacionaria de las ecuaciones de Euler (Joukowski, 1912). Actualmente existen soluciones analíticas para la velocidad axial y angular a la que se desplazan estos N vórtices (Velasco Fuentes, 2015-B).

$$U^* = U_a^* + U_i^*, \quad (7)$$

$$\Omega^* = \Omega_a^* + \Omega_i^*, \quad (8)$$

donde U_i y Ω_i son las velocidades inducidas a un remolino por los restantes. Éstas están dadas por las siguientes ecuaciones (Okulov, 2004):

$$U_i^* = \frac{1}{\tau}(N - 1 - \Omega_i^*/2), \quad (9)$$

$$\Omega_i^* = N - 3 + \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{3/2}} \ln(N - 1) + \frac{\tau^3}{(1 + \tau^2)^{9/2}} \left[(\tau^4 - 3\tau^2 + 3/8) \left(\frac{1.202(N^2 - 1)}{N^2} - 1 \right) \right] - \frac{4}{\tau} I_1(1/\tau) K_1'(1/\tau), \quad (10)$$

donde K_1 e I_1 son las funciones modificadas de Bessel de orden 1 y la prima indica su derivada con respecto al argumento.

Nuevamente las velocidades U_i^* y Ω_i^* están escaladas de la siguiente manera:

$$U_i^* = \frac{2\pi R}{\Gamma} U_i, \quad (11)$$

$$\Omega_i^* = \frac{4\pi R^2}{\Gamma} \Omega_i. \quad (12)$$

Después de construir computacionalmente dos remolinos helicoidales axialmente simétricos y de radio α pequeño, calculamos sus velocidades U y Ω para diferentes pendientes y éstas las comparamos con las ecuaciones 7 y 8. Obtuvimos una buena aproximación con las soluciones analíticas.

1.7. Distancia mínima entre dos hélices

Consideremos dos hélices definidas matemáticamente

$$(x_1, y_1, z_1) = (R \cos(\theta), R \sen(\theta), L \theta / (2\pi)), \quad (13)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (R \cos(\theta + \pi), R \sen(\theta + \pi), L \theta / (2\pi)). \quad (14)$$

La distancia entre un punto de la primera hélice (ec. 13), posicionado en

$(x_1, y_1, z_1) = (x_1(\theta_0), y_1(\theta_0), z_1(\theta_0))$ a cualquier otro punto de la segunda hélice (ec. 14) está dada por la siguiente ecuación:

$$d_h = \sqrt{4R^2 \cos^2(\theta_1/2) + \left(\frac{L\theta_1}{2\pi}\right)^2}, \quad (15)$$

donde $\theta_1 = \theta - \theta_0$ y la distancia mínima entre dos puntos de las hélices se obtiene mediante la primera raíz positiva de la siguiente relación:

$$\cos(\theta_1/2) \operatorname{sen}(\theta_1/2) = \frac{\tau^2}{2} \theta_1, \quad (16)$$

para una pendiente τ en específico.

La distancia meridional $d_m = L/2$ y la distancia polar $d_p = 2R$ entre las hélices (ver fig. 3) son de interés ya que, como se hará palpable más adelante, la fusión de dos remolinos para pendientes grandes es en la dirección polar (como en el caso de dos columnas rectas). Para pendientes pequeñas ($\tau \lesssim 2$ para el caso de radio $\alpha = 0.5$) la fusión es principalmente en la dirección meridional.

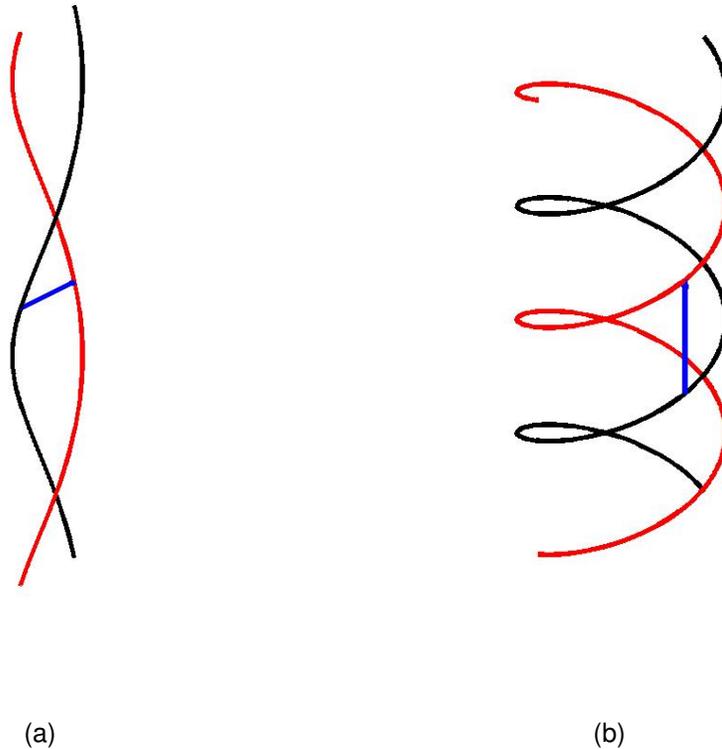


Figura 3: Distancia mínima entre dos hélices. La línea azul representa lo siguiente: (a) Distancia mínima para pendientes grandes $\tau \geq 1$. (b) Distancia mínima para pendientes pequeñas $\tau \ll 1$.

En la fig. 4 mostramos la distancia mínima d_h , junto con la distancia polar y la meridional, entre dos hélices al variar la pendiente. Lo que observamos es que para pendientes $\tau > 1$ la distancia mínima entre las hélices es la polar y para pendientes menores la

distancia mínima se acerca asintóticamente a la meridional. Como ya mencionamos, el conocimiento de la distancia mínima entre las hélices, y por consiguiente entre los remolinos helicoidales, en función de la pendiente es de suma importancia ya que la fusión se dará en la dirección donde la separación entre los remolinos sea la menor.

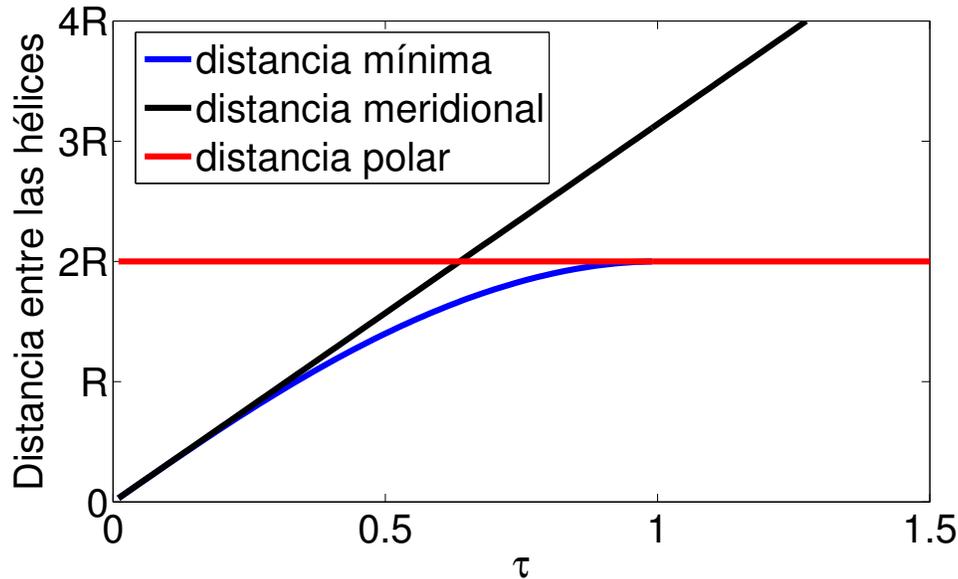


Figura 4: Distancia mínima entre dos hélices. Por encima de pendiente $\tau = 1$ la distancia mínima es la polar y por debajo se acerca asintóticamente a la distancia meridional entre las hélices.

1.8. Fusión de dos remolinos helicoidales axialmente simétricos

Se ha estudiado numéricamente la fusión de dos remolinos helicoidales de grosor finito para diferentes números de Reynolds (Delbende *et al.* 2012, 2015). Para lograr simular los remolinos se utilizó el método de simulación numérica directa y se redujeron las ecuaciones de movimiento a un caso con simetría helicoidal. La fusión observada para pendientes altas (i.e., $1.1 \leq \tau \leq 3$) es similar a la coalescencia bidimensional en presencia de difusión viscosa. Para pendientes más bajas (i.e., $\tau < 1.1$) el patrón de fusión, similar a la coalescencia de dos remolinos circulares, se mantiene. Bajo el esquema numérico de Delbende *et al.* (2012) los remolinos mantienen la simetría helicoidal. En este estudio demostramos que para pendientes pequeñas la fusión, principalmente, es en planos meridionales y este comportamiento sólo puede darse mediante un modelo que permite el movimiento del fluido en las tres dimensiones.

De la teoría bidimensional, en este estudio el caso $\tau = \infty$, sabemos que dos vórtices circulares e idénticos se fusionan si la distancia inicial entre ellos está por debajo de cierto valor crítico $d_0 = 2R/a = 2/\alpha = 3.3$ (donde R es la distancia del centro del remolino al eje de simetría y a es el radio del remolino) y si están más alejados sólo girarán uno alrededor del otro y la distancia de separación entre ellos se mantendrá aproximadamente constante (ver, por ejemplo, Roberts y Christiansen, 1972 o Velasco Fuentes, 2001). Estos dos vórtices circulares son el equivalente a dos columnas rectas o vórtices de Rankine. En nuestro caso cuando la pendiente τ tiende a infinito obtenemos estas dos columnas rectas, por lo que, tomando este caso como referencia, posicionamos los remolinos helicoidales en un arreglo donde la distancia inicial entre ellos es menor a la crítica y en otro donde es mayor. Obtuvimos que por encima del valor crítico los vórtices helicoidales se fusionan cada vez más rápido conforme disminuye la pendiente y forman un vórtice columna. Para el segundo caso todos los remolinos se fusionan de manera similar para pendientes altas $4 \lesssim \tau \leq \infty$. Para pendientes menores a 2, e independientemente de su distancia inicial, la fusión sucede principalmente en planos meridionales.

Un número infinito de vórtices circulares, de radio a , posicionados en fila con una separación entre ellos d_c y en un fluido inviscido se amalgamarán para formar una banda de vorticidad si la distancia entre ellos cumple la siguiente condición:

$$d_c < 5.6a, \quad (17)$$

(Moore & Saffman, 1975). Dos vórtices helicoidales axialmente simétricos y delgados (i.e., radio $\alpha \leq 0.2$) girarán y se trasladarán sin cambio de forma obedeciendo las ecuaciones analíticas 7 y 8. Sin embargo, si disminuimos suficientemente la pendiente (e.g., $\tau = 0.1$) estos vórtices se amalgamarán en la dirección axial formando una distribución tubular de vorticidad, con un hueco irrotacional en su interior. La distancia mínima entre estos remolinos en la condición inicial es d_h dada por la ec. 15 al cumplir la condición que le impusimos. Mencionamos esta distancia d_c porque podemos compararla con la distancia d_h para diferentes pendientes y observar si se cumple esta condición para el caso de los dos vórtices helicoidales.

Capítulo 2. Metodología

Utilizamos un modelo tridimensional escrito en Fortran, válido para un fluido inviscido, incompresible y homogéneo (Suaza Jaque, 2013). Las simulaciones se llevan a cabo dentro de una malla tridimensional donde sus seis caras tienen condiciones de frontera periódicas. Para un vórtice helicoidal y para la fusión de los remolinos utilizamos una resolución de 128^3 celdas mientras que para dos remolinos helicoidales delgados usamos una malla de 256^3 nodos, ya que necesitamos mayor precisión al calcular las velocidades de desplazamiento de dos remolinos. Parte de nuestra labor fue construir la condición inicial correspondiente a uno o dos remolinos helicoidales.

2.1. Condición inicial

La condición inicial corresponde a un arreglo geométrico de alrededor de $N = 2.5 \times 10^5$ partículas de vorticidad ω_i y de volumen V_i por remolino, donde i representa a cada una de las partículas. Éstas están distribuidas uniformemente en N_a círculos concéntricos más una en el centro de los círculos que a su vez son orientados en la dirección helicoidal (fig. 5).

El arreglo garantiza que todas las partículas tendrán la misma área en el plano paralelo a los círculos, la cual es $A_0 = \pi dr^2/4$, donde $dr = a/N_a$. En la dirección helicoidal la altura dl_i de las partículas depende de su distancia al eje de simetría $dl_i = 2\pi\sqrt{R_c^2 + k^2}/(knl)$, donde R_c es la distancia de la partícula al eje de simetría, $k = L/2\pi$ y nl es el número de partículas en cada filamento. De esta manera cada partícula tiene un volumen $V_i = A_0 dl_i$.

Ya que, por sencillez, el modelo fue implementado con condiciones de frontera periódicas, los remolinos se posicionan cuidadosamente para que contengan un número entero de espiras en la dirección axial (z), de esta manera se simula un remolino de longitud infinita. Nos aseguramos de que la magnitud de la velocidad se acerque suficientemente a cero cerca de las otras fronteras. La circulación de cada sección circular perpendicular a la hélice (ec. 1) es igual a $\Gamma = \omega\pi a^2$, donde a la vorticidad $|\omega|$ le asignamos el valor de 1 para todas las simulaciones y representa la magnitud de la vorticidad en cualquier punto dentro del remolino.

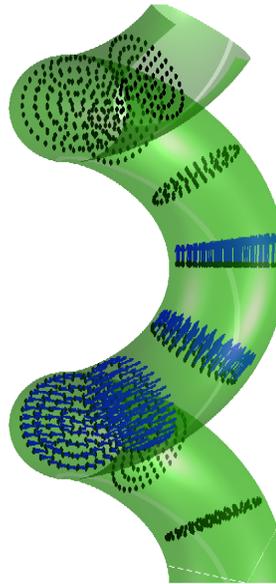


Figura 5: Distribución de las partículas en cada rebanada que está conformada, en este caso, por 4 círculos. Los vectores azules representan a la vorticidad local que siempre está dirigida en la dirección helicoidal. En las simulaciones utilizamos 6 u 8 círculos por rebanada, aquí sólo mostramos 10 de ellas por cuestiones visuales, cuando deben ser 1131 para este vórtice en específico.

También consideramos que mientras más pequeña sea la pendiente de un remolino necesitamos más revoluciones para representar al vórtice dentro del dominio numérico por lo tanto la longitud de arco de sus hélices aumentará. Para evitar que cada partícula represente un volumen elevado, a un filamento de un remolino de Rankine le asignamos un valor fijo de partículas nl_0 dentro de la malla y para cualquier remolino helicoidal el número de partículas nl en cada hélice o filamento será $nl = nl_0 \sqrt{R^2 + k^2} / k$. Por ejemplo si le asignamos 800 partículas por filamento a un vórtice de Rankine, una hélice del vórtice helicoidal de pendiente $\tau = 1$, radio $R = 0.5$ y paso $L = \pi$ tendrá 1131 partículas.

2.2. Interpolación

El arreglo Lagrangiano de vorticidad se interpola a cada punto de la malla mediante una interpolación tridimensional que obedece a la siguiente relación:

$$\omega_m = \sum_i \frac{V_i}{h^3} \omega_i \mathbf{W}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_i), \quad (18)$$

donde h es el espaciamento entre puntos de malla, x_i es la posición de las partículas, x_m es la posición de los m nodos, ω_m es la vorticidad en la malla y \mathbf{W} es una función de interpolación. La función \mathbf{W} se evalúa mediante el método de interpolación triangular tridimensional (Triangular Shaped Cloud, TSC) y está dado en una dimensión por la siguiente ecuación:

$$W\left(\frac{x}{h}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \left(\frac{x_i}{h}\right)^2 & x_i \leq \frac{h}{2}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{x_i}{h}\right)^2 & \frac{h}{2} \leq x_i \leq \frac{3h}{2}, \end{cases} \quad (19)$$

y en tres dimensiones como se muestra a continuación:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = W\left(\frac{x}{h}\right) W\left(\frac{y}{h}\right) W\left(\frac{z}{h}\right). \quad (20)$$

En la fig. 6 mostramos un esquema de la interpolación en una dimensión. Este método utiliza veintisiete puntos de malla alrededor de la partícula a interpolar, de esta manera se logra estimar el valor de la vorticidad ω_i en cada una de las celdas. Las dimensiones asignadas a cada partícula garantizan que dentro del remolino la vorticidad será uniforme y sólo mostrará deformaciones debido a la interpolación.

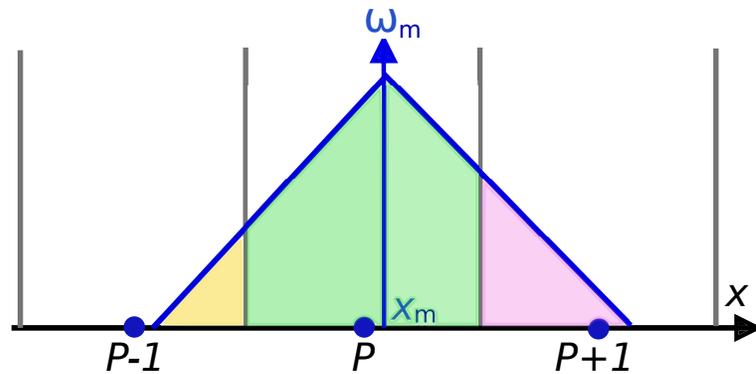


Figura 6: Esquema de la interpolación triangular en una dimensión. El valor de ω_m se estima utilizando los tres puntos P más cercanos. Este esquema puede ser usado para estimar tanto propiedades en la malla como en las partículas.

En la fig. 7 (a) se muestra la distribución de las partículas de vorticidad y, sobrepuestos, un plano meridional y otro polar que se aprecian individualmente en la fig. 7 (b) y en

la fig. 7 (c), respectivamente. Se observa que los núcleos tienen vorticidad $|\omega| = 1$ que decae rápidamente en las fronteras del remolino.

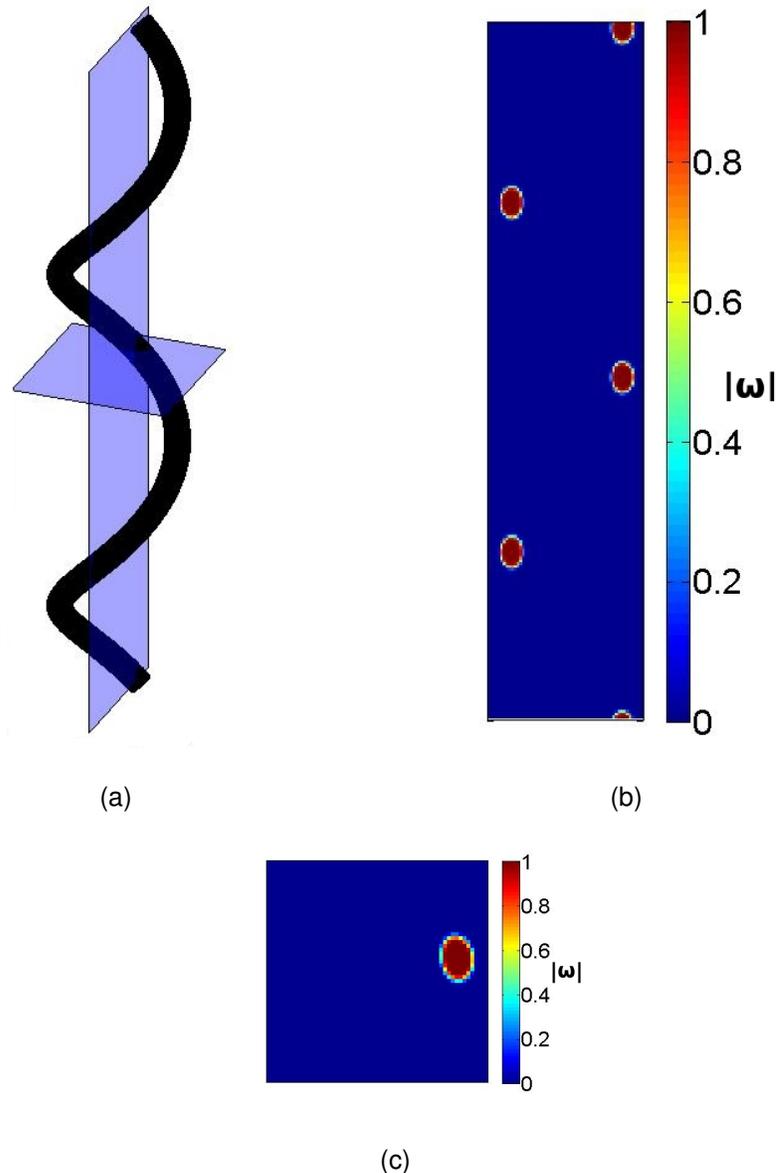


Figura 7: Distribución de la vorticidad. a) Partículas de vorticidad, b) Plano meridional, c) Plano polar. Los planos muestran la magnitud de la vorticidad en la malla.

2.3. Ecuaciones en la malla

Gracias a la relación que existe entre la vorticidad y la velocidad $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ y a que consideramos un fluido incompresible que implica que la divergencia de la velocidad sea nula ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) se puede obtener el campo de velocidades en la malla al resolver la ecuación $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \omega$, donde \mathbf{A} es un potencial que cumple con la relación

$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$. Si suponemos que el campo \mathbf{A} es solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) obtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} \quad (21)$$

La ec. 21 se resuelve numéricamente utilizando la transformada rápida de Fourier que se encuentra predefinida dentro de las bibliotecas de Oracle Linux, utilizadas como base para escribir el modelo. Al obtener el valor del potencial \mathbf{A} en toda la malla se obtiene, a la vez, el campo de velocidades \mathbf{u} . Éste se interpola a las partículas mediante el mismo método descrito en la Secc. 2.2, para evaluar el lado derecho de la ecuación de advección y la de Helmholtz para cada partícula. Éstas ecuaciones son

$$\frac{D\mathbf{x}_i}{Dt} = \mathbf{u}_i, \quad (22)$$

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}_i}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i. \quad (23)$$

2.4. Integración de las ecuaciones

Una vez que se conoce la velocidad de cada partícula es posible conocer su nueva posición y vorticidad al resolver las ecs. 22 y 23. Para lograrlo se integran numéricamente estas $2N$ ecuaciones mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El proceso que se siguió desde la Secc. 2.2 hasta esta sección se repite para cada paso de tiempo, sólo que ahora el arreglo de vorticidad dependerá de la evolución dictada por las ecs. 22 y 23.

2.5. Análisis de los datos de salida

De cada simulación obtuvimos las posiciones $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, en coordenadas rectangulares, de las partículas al transcurrir el tiempo.

2.5.1. Obtención de la velocidad de traslación U

Para obtener la velocidad de traslación en el eje axial (eje z), promediamos el desplazamiento de cada partícula en esta dirección (ver fig. 8 (a)). Cuando estudiamos remolinos que sólo giran sin fusionarse, este desplazamiento es lineal en el tiempo y mediante

la pendiente de su regresión lineal se obtiene la velocidad U deseada (fig. 8 (b)).

Como ya mencionamos el modelo tiene fronteras periódicas en sus tres dimensiones, esto implica que una partícula que sobrepasa la frontera superior será trasladada a la frontera inferior. Por este motivo si una partícula sobrepasa ese límite superior le sumamos la altura de la malla para no despreciarla. Una porción menor al 5% de las partículas sí es despreciada ya que en la condición inicial se encuentran cercanas a la frontera inferior y en los primeros pasos de tiempo son trasladadas a la parte superior de la malla.

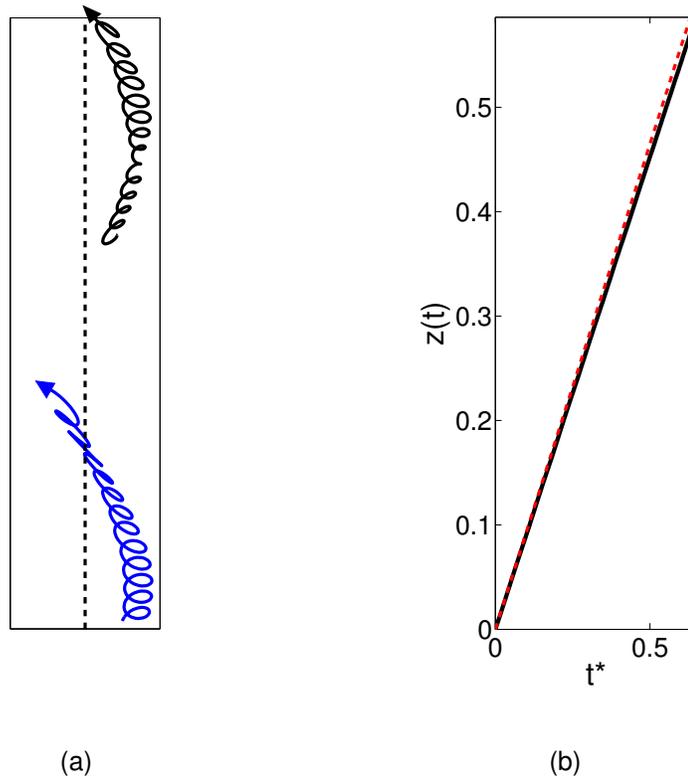


Figura 8: (a) Trayectoria en un plano (x, z) de dos partículas del remolino. La línea punteada representa el eje del remolino, (b) Desplazamiento en el eje z promedio de las partículas de un vórtice de pendiente $\tau = 0.7$ y radio $\alpha = 0.1$. La línea punteada corresponde a su respectiva solución analítica para un remolino delgado (ec. 3).

2.5.2. Obtención de la velocidad angular Ω

Para obtener la velocidad angular alrededor del eje de simetría primero centramos los datos en $(x = 0, y = 0)$. Después transformamos las posiciones $(x_i(t), y_i(t))$ a sus correspondientes valores en coordenadas polares aunque sólo nos interesa el ángulo $\theta_i(t) = \arctan(y_i(t)/x_i(t))$. Obtenemos la posición angular de cada partícula con respecto

al tiempo (ver Fig. 9 (a)). A esta serie de datos le restamos la posición inicial de cada partícula para que todos los desplazamientos comiencen en 0 radianes. Nuevamente nos aseguramos de que si una partícula realiza una revolución completa alrededor del eje de simetría, se le sumará 2π radianes para no despreciarla, ya que de no hacerlo, su posición angular se reiniciaría en 0. Promediamos el desplazamiento de las N partículas para obtener, en el caso de uno o dos vórtices delgados, una recta y mediante la pendiente de esta recta obtenemos la velocidad angular Ω , Fig. 9 (b). Cuando estudiamos la fusión de los remolinos la velocidad angular varía con el tiempo. Para obtener su valor en cada paso de tiempo la calculamos de la siguiente manera:

$$\Omega(t) = \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, \quad (24)$$

donde j representa cada paso de tiempo.

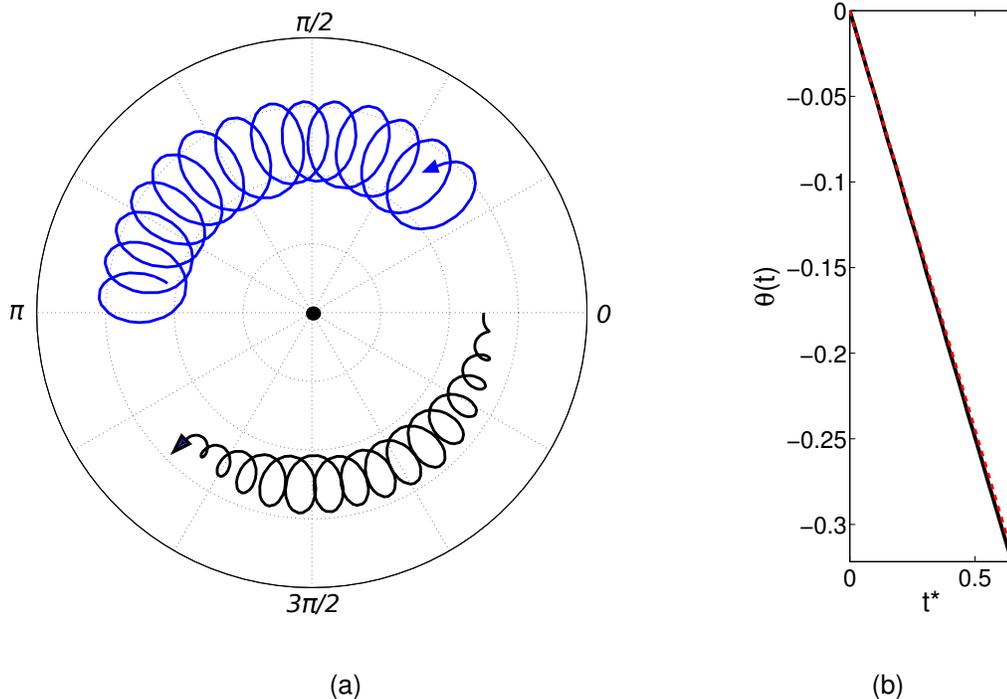


Figura 9: (a) Trayectoria en un plano (x, y) de dos partículas del remolino. El punto central representa el eje del remolino, (b) Desplazamiento angular promedio de las partículas para un vórtice de pendiente $\tau = 0.7$ y radio $\alpha = 0.1$. La línea punteada corresponde a su respectiva solución analítica para un remolino delgado (ec. 4).

2.5.3. Cálculo de la distancia de separación entre los remolinos

Para cuantificar la distancia d a la que están separados dos remolinos helicoidales axialmente simétricos obtenemos el promedio del doble de la distancia polar de cada partícula al eje de simetría. En realidad reportamos una distancia adimensional $d^* = d/a$, donde la distancia de separación entre los remolinos en la condición inicial corresponde a $d_0 = 2R/a$. La evolución de la separación de los remolinos y otras cantidades serán mostradas al transcurrir el tiempo adimensional $t^* = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} t$.

Capítulo 3. Validación

Para garantizar la validez del modelo junto con las condiciones iniciales realizamos simulaciones para un remolino de radio $\alpha = 0.1$ y pendientes $0.1 \leq \tau \leq 4.0$ (fig. 10) para comparar las velocidades autoinducadas U y Ω con las soluciones analíticas de Velasco Fuentes (2015-A), ecs. 3 y 4.

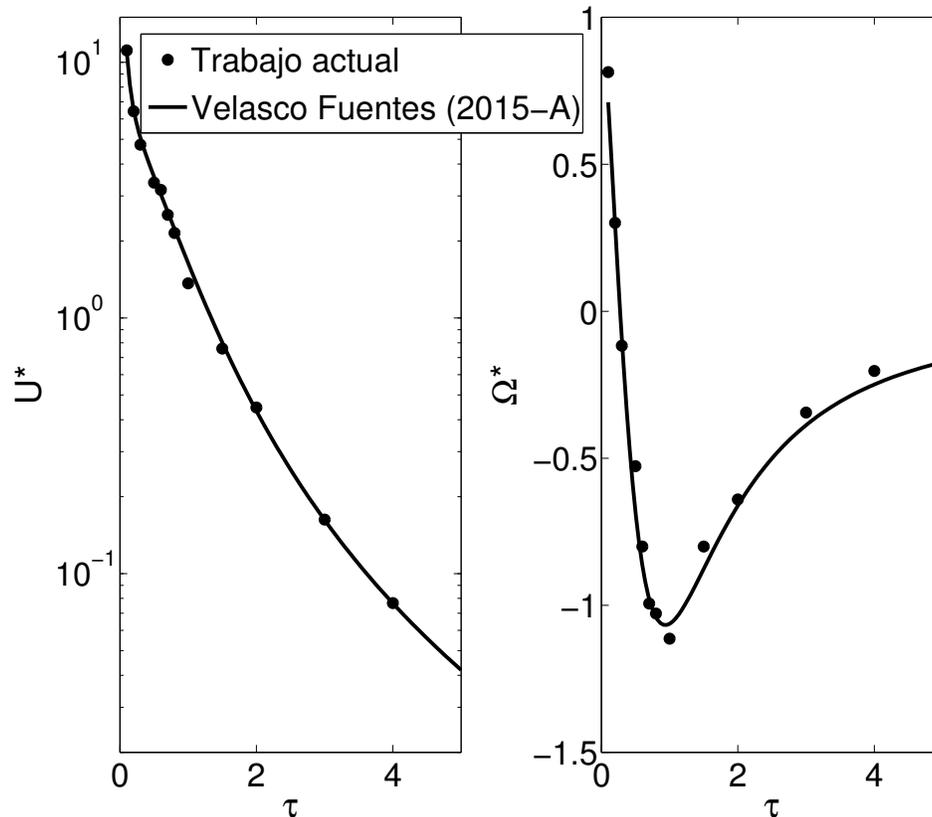


Figura 10: Velocidades autoinducadas por un remolino delgado de radio $\alpha = 0.1$ para diferentes pendientes.

El error cuadrático medio en el caso de la velocidad axial U^* es $ECM = 0.149$ y para la velocidad angular Ω^* es igual a $ECM = 0.0664$.

Otra manera de cuantificar el correcto funcionamiento del modelo, específicamente con vórtices helicoidales, es observar cómo se comportan la divergencia de la vorticidad, del potencial \mathbf{A} y de la velocidad en la malla, ya que éstas deben mantenerse nulas o cercanas a cero, porque estamos considerando un fluido incompresible y suponiendo que el

potencial \mathbf{A} es solenoidal. En las figuras 11 (a), (b) y (c) se muestra el valor máximo de estas tres cantidades para un vórtice de pendiente $\tau = 1$ y radio $\alpha = 0.1$ adimensionalizadas con el radio R y la vorticidad ω inicial.

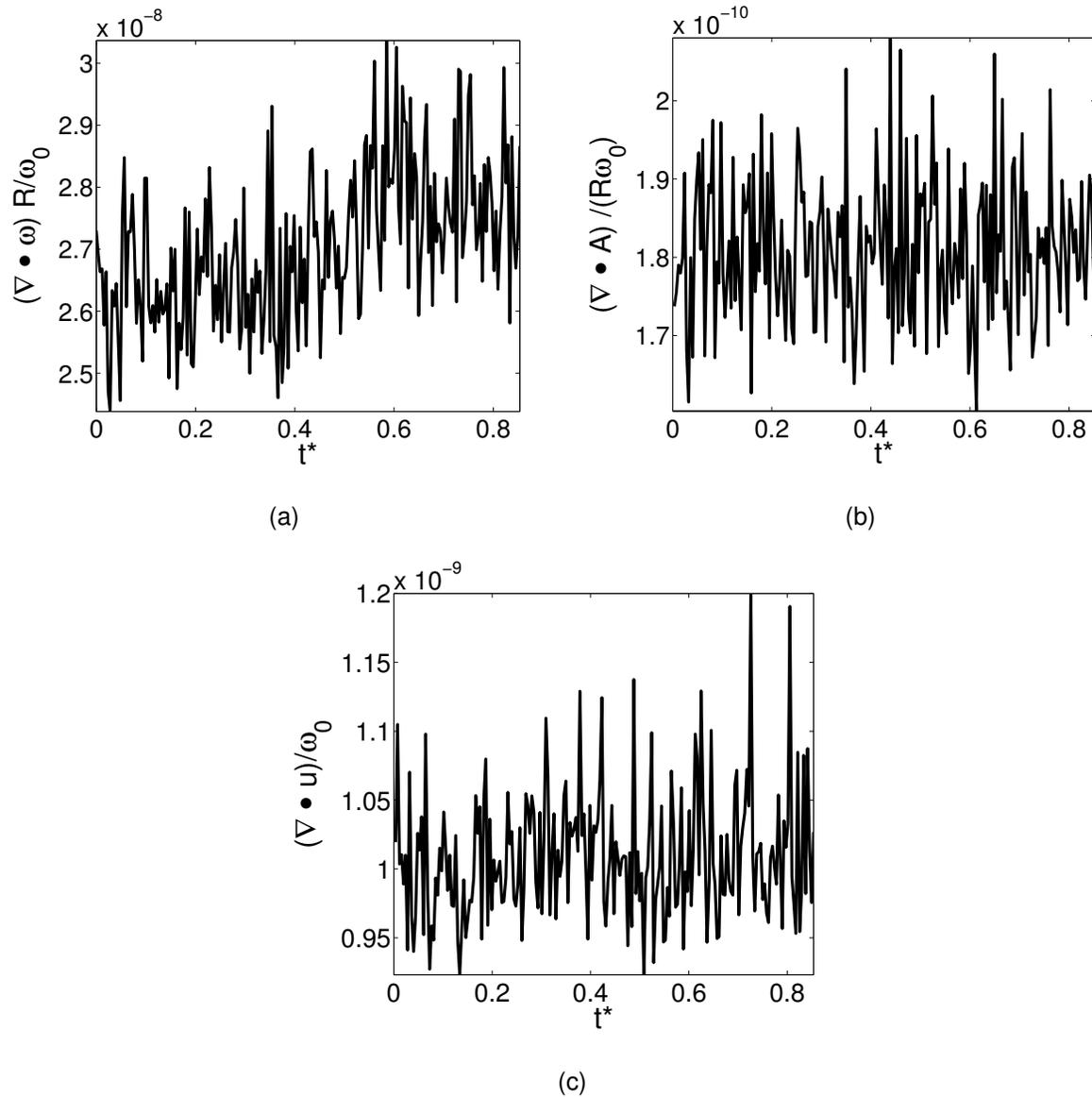


Figura 11: Divergencia de las siguientes cantidades dentro de la malla: (a) Vorticidad ω , (b) Potencial vectorial \mathbf{A} , (c) Velocidad \mathbf{u} . Las cantidades se encuentran escaladas mediante la magnitud de la vorticidad inicial $|\omega|$ y el radio R .

El buen funcionamiento del modelo ya ha sido probado comparando la velocidad de traslación de un vórtice anular con su versión analítica. Para mayores detalles del modelo consulte el trabajo de Suaza Jaque (2013).

Capítulo 4. Resultados

4.1. Velocidades de un remolino helicoidal de diferentes grosores α

Teniendo en mente que las soluciones de Velasco Fuentes (2015-A) para las velocidades autoinducadas por un remolino están hechas para un radio adimensional pequeño ($\alpha \lesssim 0.1$), realizamos simulaciones numéricas para pendientes $\tau = 1$ y 2 al aumentar gradualmente el radio α desde 0.05 a 5.0. Esto lo hicimos con la finalidad de observar si las soluciones analíticas (ecs. 3 y 4) divergen de las nuestras. En la fig. 12 mostramos, del lado izquierdo, las curvas de la velocidad de traslación y del lado derecho las de la velocidad angular comparadas con su respectivas soluciones analíticas.

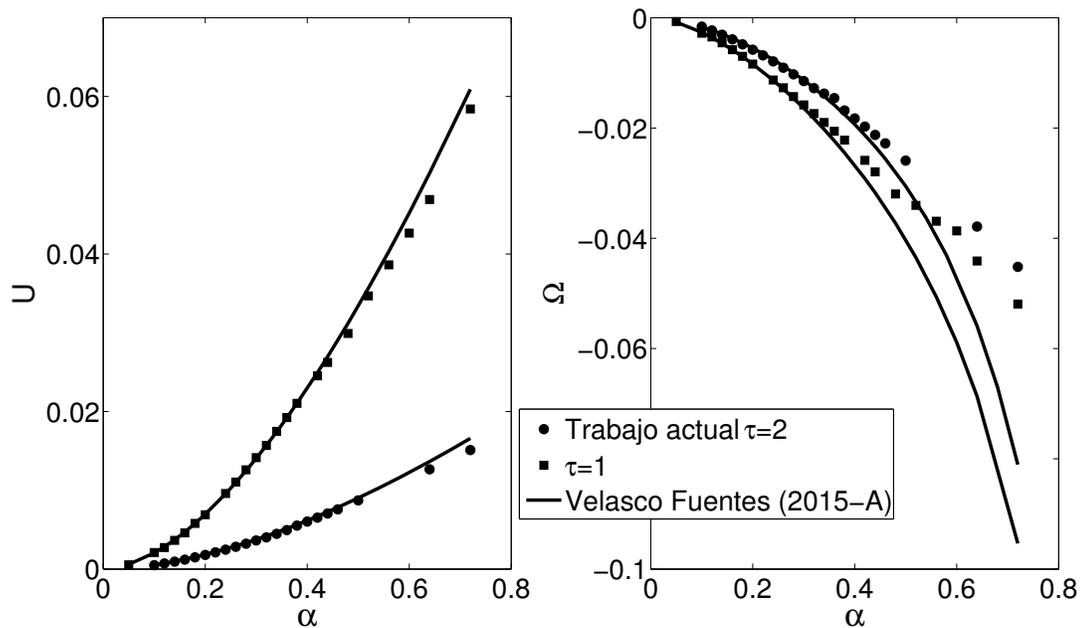


Figura 12: Velocidades autoinducadas por remolinos helicoidales cada vez más gruesos ($0.05 \leq \alpha \leq 0.72$) y de pendiente constante ($\tau = 1$ y 2). Izquierda: Velocidad de traslación. Derecha: Velocidad angular.

Para defender la validez de nuestra curva numérica, a continuación mostramos el comportamiento de un remolino grueso de pendiente $\tau = 2$ y radio $\alpha = 0.72$. De la evolución de las partículas (fig. 13) y de un corte de la vorticidad en un plano polar (fig. 14), observamos que el remolino se mantiene estable sin desprender vorticidad, donde el tiempo

adimensional es igual a $t^* = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} t$. Los remolinos siguen viajando a velocidades constantes aunque éstas no coincidan con las analíticas (fig. 15). Ya esperábamos que nuestras velocidades no coincidieran con las analíticas ya que estas últimas se obtuvieron para remolinos delgados.

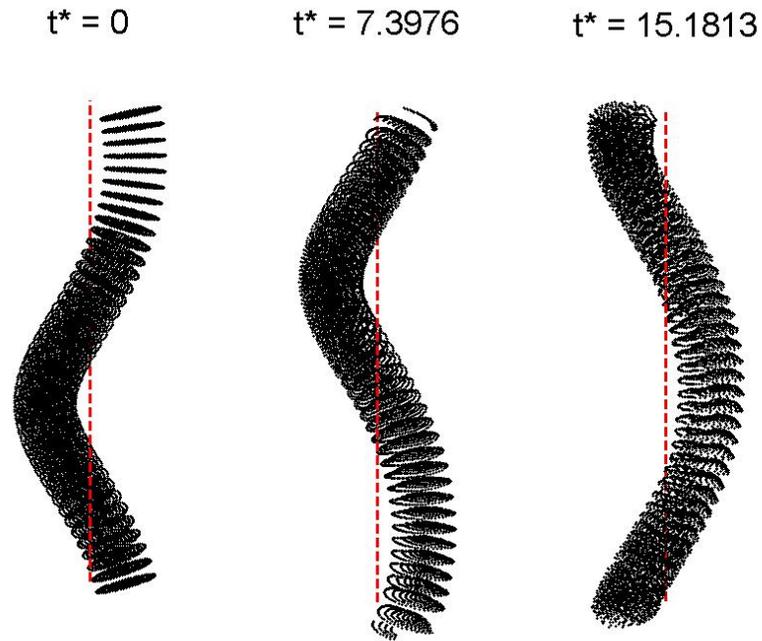


Figura 13: Evolución de las partículas de vorticidad para un remolino de pendiente $\tau = 2$ y radio $\alpha = 0.72$. La línea punteada representa al eje del vórtice. Sólo se muestra uno de cada 18 aros.

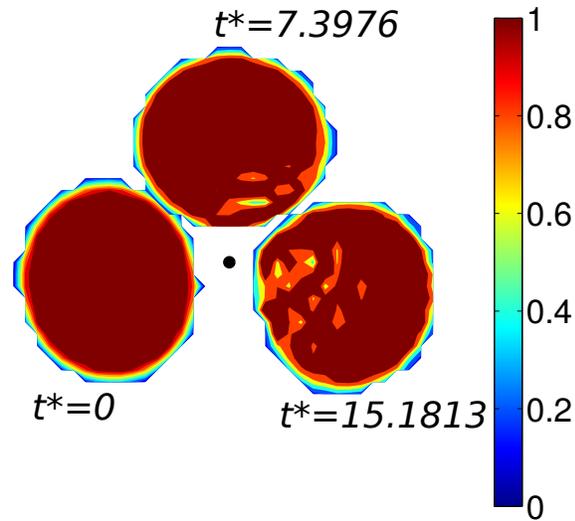


Figura 14: Evolución de la magnitud de la vorticidad en un corte polar en la malla para un remolino de pendiente $\tau = 2$ y radio $\alpha = 0.72$. El punto central representa al eje del vórtice.

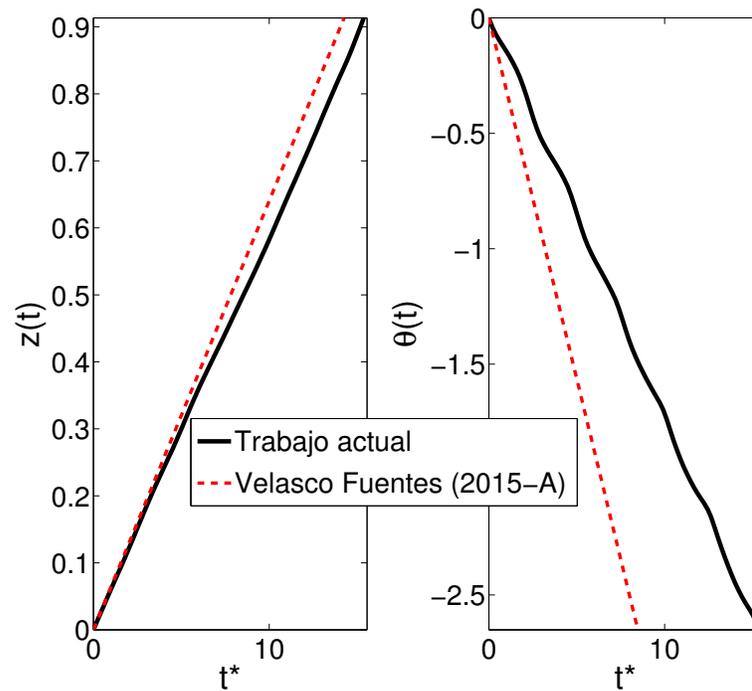


Figura 15: Desplazamiento axial y angular para un remolino de pendiente $\tau = 2$ y radio $\alpha = 0.72$.

Ahora que encontramos que las velocidades autoinducadas por remolinos gruesos divergen de sus respectivas soluciones analíticas, queremos estudiar cómo se comportan

para un vórtice grueso al variar la pendiente. En particular estudiamos el caso de radio $\alpha = 0.44$ y variamos la pendiente entre $\tau = 0.4$ y $\tau = 4.0$. En la fig. 16 exponemos los resultados de las simulaciones donde se observa que, en el caso de la velocidad angular, las soluciones se separan cada vez más al disminuir la pendiente.

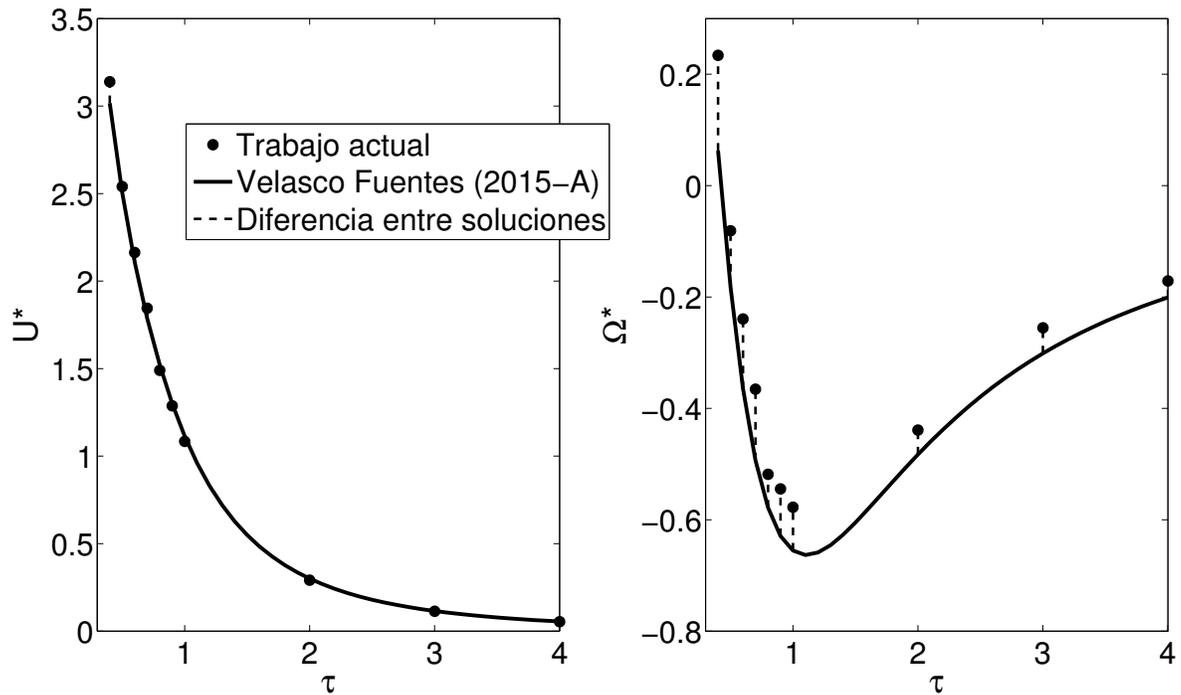


Figura 16: Velocidades autoinducidas por un remolino de radio $\alpha = 0.44$ para el rango de pendientes $0.1 \leq \tau \leq 4$.

4.2. Velocidades de dos remolinos helicoidales delgados

En esta sección estudiamos a dos remolinos helicoidales coaxiales, delgados y localizados en posiciones opuestas del cilindro inmaterial trazado por la hélice central. Las soluciones analíticas para sus velocidades de desplazamiento están dadas por las ecs. 7 y 8. Con el fin de comparar con estas ecuaciones, simulamos remolinos de radio $\alpha = 0.1$ y pendientes en el rango de $0.1 \leq \tau \leq 5.0$ y extrajimos las velocidades de traslación y rotación (fig. 17).

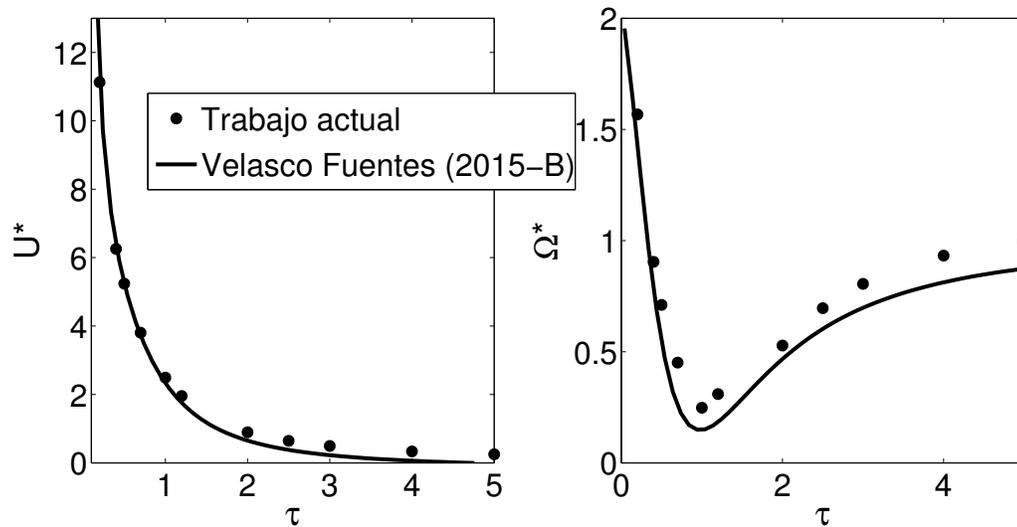


Figura 17: Velocidades a las que se desplazan un par de remolinos de radio $\alpha = 0.1$ para pendientes en el rango $0.1 \leq \tau \leq 5.0$.

En la fig. 18 presentamos la evolución de las partículas de dos remolinos coaxiales de pendiente $\tau = 0.3$ y radio $\alpha = 0.1$.

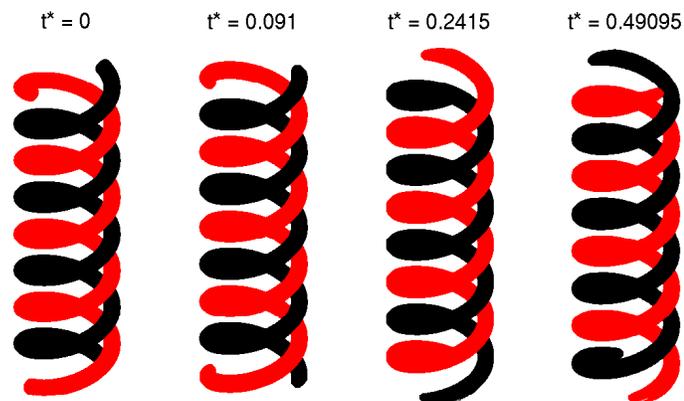


Figura 18: Evolución de un par de remolinos helicoidales de pendiente $\tau = 0.3$ y radio $\alpha = 0.1$.

4.3. Fusión de dos remolinos axialmente simétricos

4.3.1. Caso A: $d_0 > 3.3$

Como mencionamos en la Secc. 1.8, cuando la separación inicial entre dos remolinos idénticos y en forma de columnas rectas, es mayor a un valor crítico $d_0 = 2R/a > 3.3$

los vórtices girarán uno alrededor del otro con velocidad constante y la separación entre ellos se mantendrá aproximadamente constante. Basados en este hecho estudiamos a dos vórtices helicoidales separados por una distancia inicial de $d_0 = 4.0$ para diferentes pendientes. El primer caso analizado fue el de pendiente infinita para observar si efectivamente los vórtices no alteraban su distancia inicial de separación. Una vez que verificamos este caso, procedimos a disminuir gradualmente la pendiente para observar cómo se comporta su separación (fig. 19).

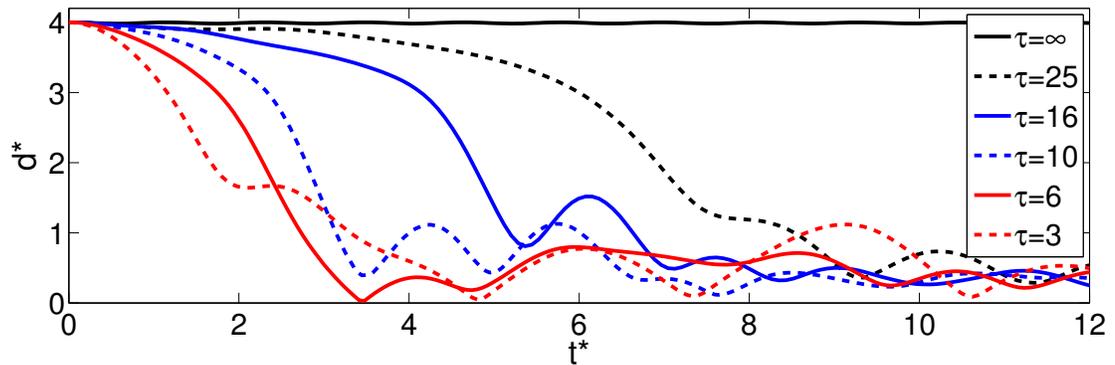


Figura 19: Evolución de la distancia entre dos remolinos cuya separación inicial es $d_0 = 4$ y pendientes en el rango $3 \leq \tau \leq 25$

Como se observa en la fig. 19, al disminuir la pendiente la distancia entre los remolinos decae más rápidamente, las oscilaciones que muestra la separación entre los remolinos son proporcionales a la velocidad angular del vórtice, en forma de columna, que se genera después de la fusión. Para observar si existe un valor crítico al que comienza la coalescencia acudimos al cálculo del desplazamiento angular y a la velocidad angular promedio de las partículas durante la simulación. En la fig. 20 se aprecia la distancia de separación d^* , la posición angular de los remolinos θ y la velocidad angular Ω para un arreglo de pendiente $\tau = 16$ y distancia inicial $d_0 = 4$. De esta figura es fácil observar que el cambio en la posición angular θ sufre un aumento repentino que se traduce en un aumento en la velocidad angular. El momento cuando se interceptan las dos líneas punteadas de la fig. 20 (b) lo definimos como el tiempo al que comienza la fusión t_f^* . Ya que para pendientes entre 4 y 25 todas las simulaciones muestran un cambio repentino en la velocidad angular, obtuvimos un tiempo inicial de fusión t_f^* para estos experimentos (fig. 21).

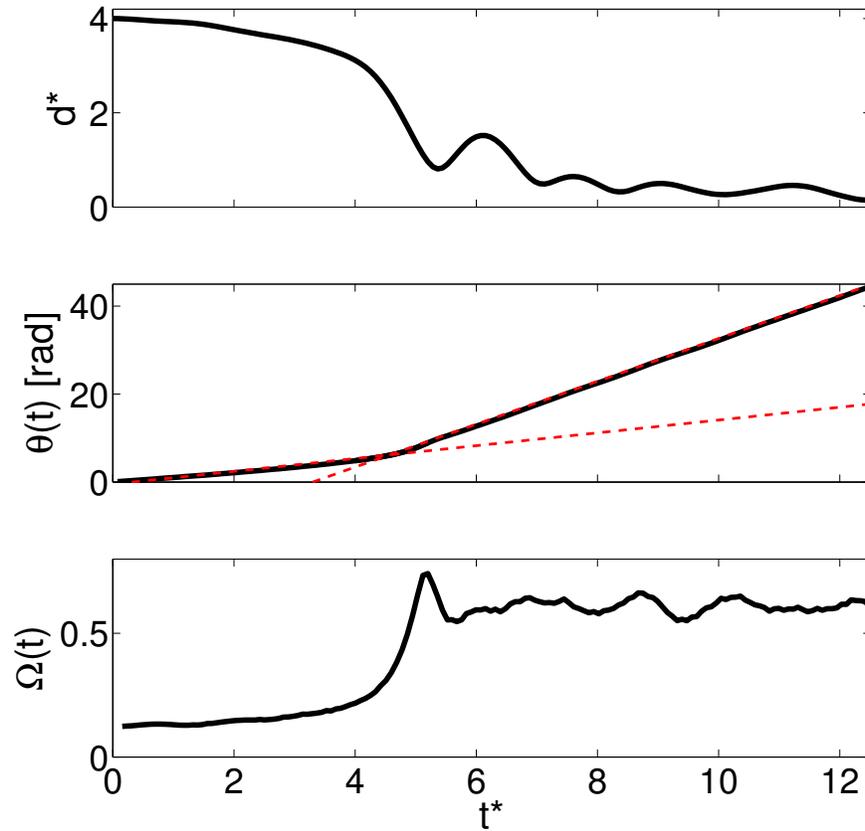


Figura 20: Evolución de dos vórtices helicoidales de pendiente $\tau = 16$ y distancia inicial $d_0 = 4$. (a) Distancia adimensional entre los remolinos. (b) Desplazamiento angular promedio de las partículas, las líneas punteadas representan a regresiones lineales. (c) Velocidad angular durante el proceso de fusión.

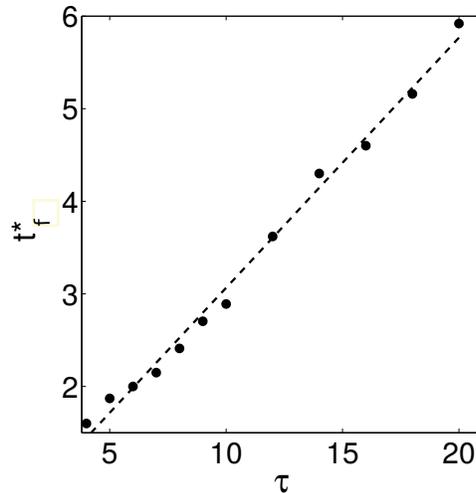


Figura 21: Tiempo al que comienza la fusión de dos vórtices de pendientes $4 \leq \tau \leq 25$ y distancia inicial $d_0 = 4$. La línea punteada representa un ajuste lineal.

Un ejemplo del comportamiento de dos remolinos de pendiente 16 y distancia inicial 4 se muestra en la fig. 22, donde se aprecia que después de que los vórtices se fusionan forman una única columna similar a un vórtice de Rankine (en la fig. A.1 del apéndice es mostrado otro ejemplo). Este desenlace es semejante para los demás remolinos de pendiente $4 \leq \tau \leq 25$.

Al analizar las componentes de la vorticidad ω en toda la malla (fig. 23) observamos que la componente axial de la vorticidad ω_z sólo disminuye ligeramente de su estado inicial. Si sumamos el valor absoluto de las componentes (ω_x, ω_y) en cada punto de la malla observamos que disminuyen un poco de su valor inicial. Sin embargo si sumamos las contribuciones de todos los puntos de malla de estas componentes, vemos que estos valores son 4 órdenes de magnitud menores a la componente axial. En otras palabras, aunque la columna, resultado de la fusión, tenga vorticidad polar no nula, la suma de todos los puntos es cercana a cero.

Hasta ahora analizamos la fusión de vórtices con pendientes mayores a 3. Para pendientes menores la distancia entre los remolinos se comporta de manera diferente. En la fig. 24 presentamos la distancia d^* para vórtices helicoidales de pendientes en el rango $0.6 \leq \tau \leq 3$ con distancia inicial $d_0 = 4$. Lo que ahora observamos es que conforme

disminuye la pendiente la distancia d^* decrece más lentamente, recordemos que esta distancia d^* es la separación polar entre los remolinos.

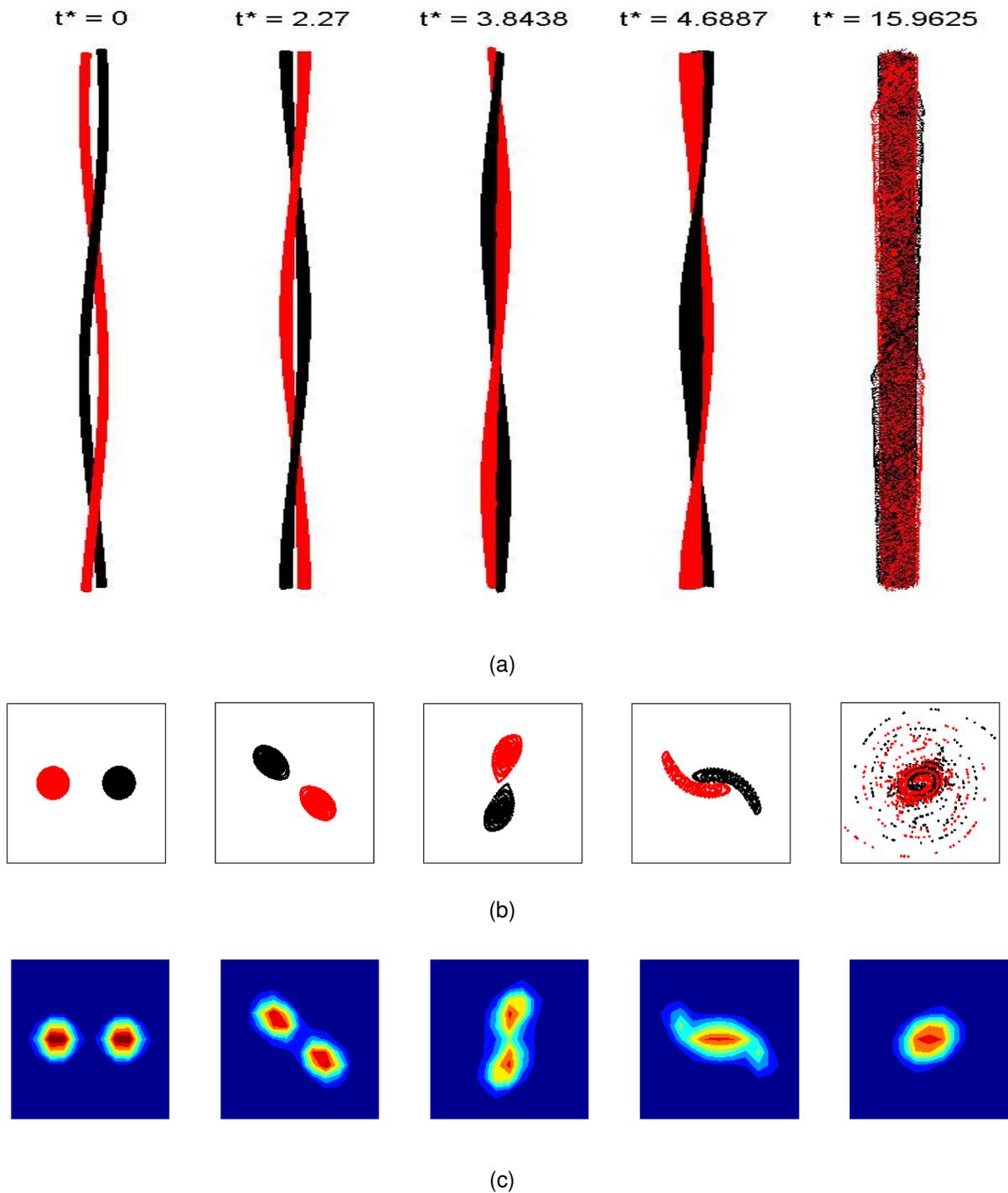


Figura 22: Fusión de dos remolinos helicoidales de pendiente $\tau = 16$ y distancia inicial $d_0 = 4$. (a) Vista tridimensional de las partículas. (b) Partículas confinadas en una sección ($z_m - \epsilon, z_m + \epsilon$) donde ϵ es proporcional al diámetro de las partículas y z_m es constante. (c) Magnitud de la vorticidad vista desde un plano polar en la malla.

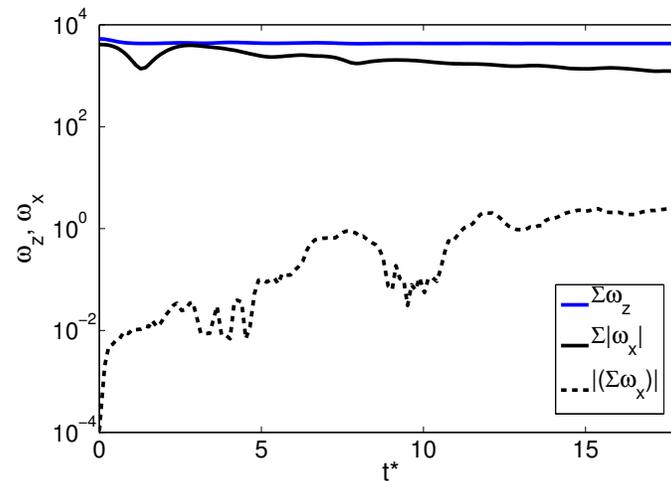


Figura 23: Componentes (x, z) de la vorticidad para dos remolinos de pendiente $\tau = 1$ y separación inicial $d_0 = 4$. Línea azul: Suma de la vorticidad w_z en todos los puntos de malla. Línea continua negra: Suma del valor absoluto de la vorticidad w_x en todos los puntos. Línea punteada: Valor absoluto de la suma de la vorticidad w_x en todos los puntos. No se muestra la componente y de la vorticidad porque es similar a la componente x .

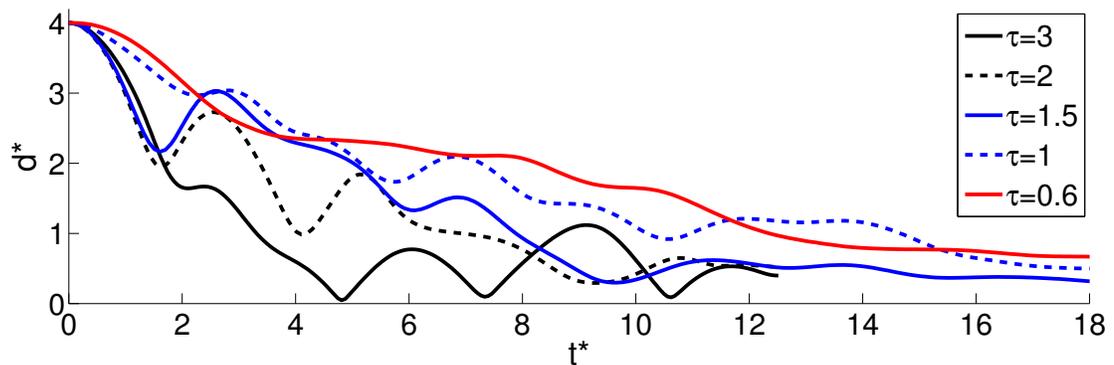


Figura 24: Evolución de la distancia entre dos remolinos de separación inicial $d_0 = 4$ y pendientes en el rango $0.6 \leq \tau \leq 3$.

4.3.2. Caso B: $d_0 < 3.3$

El siguiente objetivo fue realizar simulaciones para dos vórtices helicoidales de distancia inicial $d_0 = 3$. Para este caso sabemos que dos remolinos de pendiente infinita, correspondiente a dos vórtices de Rankine, se fusionarán en una sola estructura. Partiendo de este experimento disminuimos gradualmente la pendiente para observar cómo evoluciona la distancia d^* como se muestra en la fig. 25. Observamos que para pendientes grandes $4 \lesssim \tau \leq \infty$ la distancia de separación d^* decae de manera similar, mientras

que para pendientes más pequeñas esta distancia tiende más lentamente a cero, este comportamiento ya se observó para pendientes bajas en el caso A.

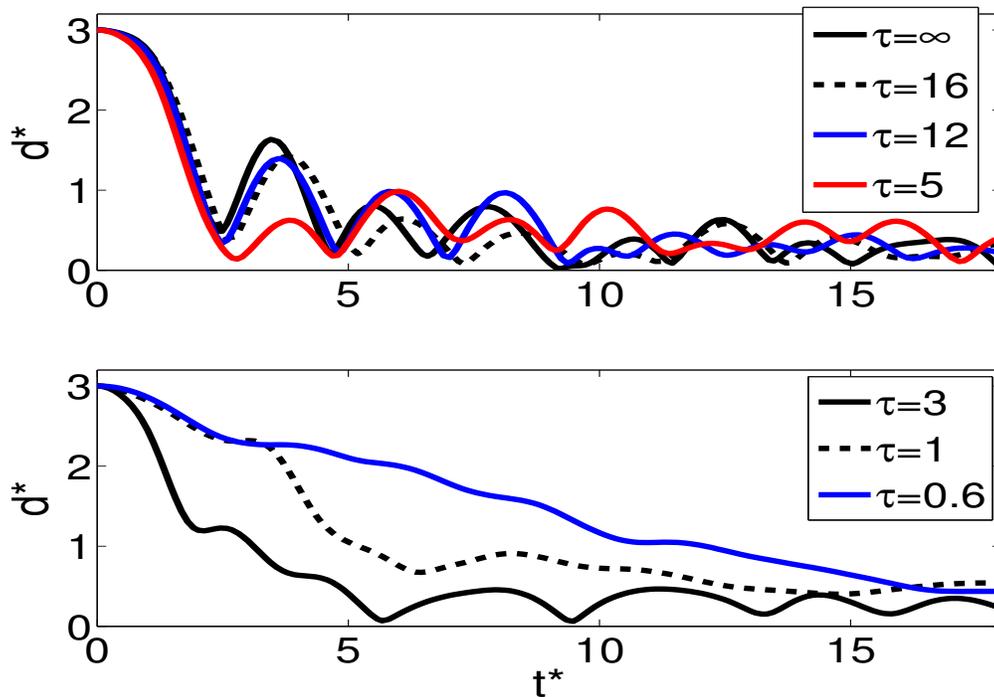


Figura 25: Evolución de la distancia entre dos remolinos con separación inicial $d_0 = 3$ para pendientes en el rango $0.6 \leq \tau \leq \infty$.

4.4. Fusión meridional de los remolinos

Encontramos que la fusión en los dos casos estudiados (i.e., $d_0 = 4$ y $d_0 = 3$) y para pendientes bajas la distancia de separación d^* disminuye más lentamente que para pendientes altas. Esta distancia es la distancia polar d_p que ya abordamos en la Secc. 1.7 porque supusimos que la coalescencia entre los remolinos se da en esa dirección; sin embargo, para pendientes bajas la fusión es principalmente en planos meridionales y la distancia mínima es principalmente meridional d_m . En la fig. 26 mostramos la evolución de dos vórtices helicoidales vistos desde un corte meridional para un caso de pendiente alta, donde la fusión es meramente polar mientras que en la fig. 27 presentamos la evolución meridional de un par de remolinos de pendiente baja donde la fusión es principalmente en la dirección axial. Dos ejemplos similares son mostrados en las figuras A.2 y A.3 del apéndice.

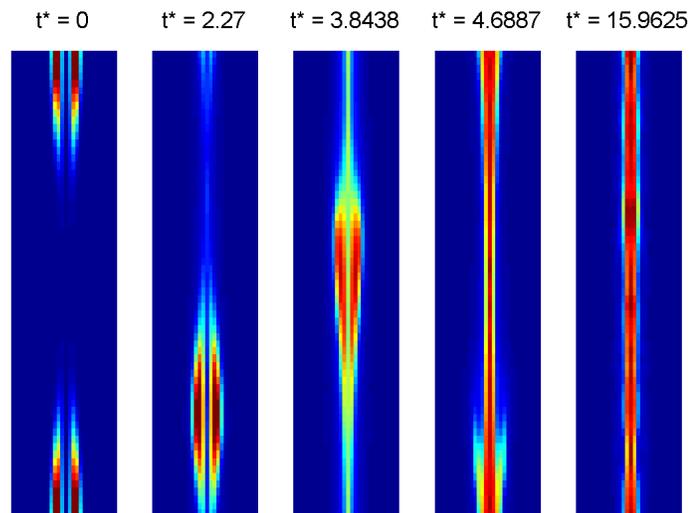


Figura 26: Evolución de un par de remolinos de pendiente $\tau = 16$ y distancia inicial $d_0 = 4$ vista desde un plano meridional

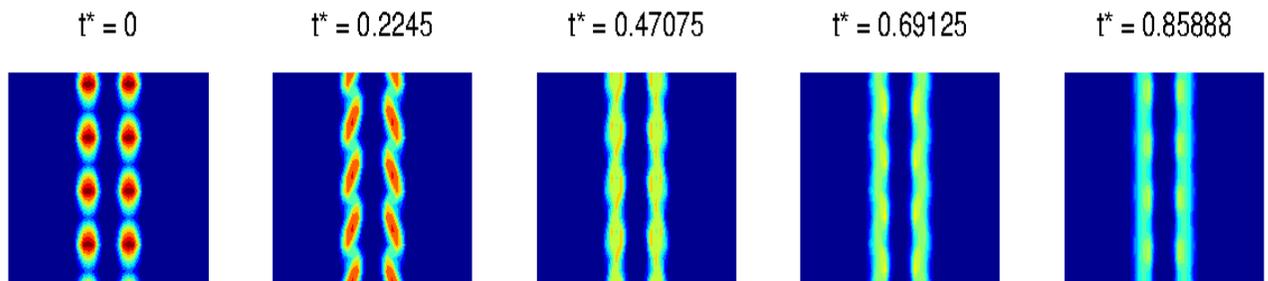


Figura 27: Igual que fig. 26 pero para pendiente $\tau = 0.6$. Para una mejor visualización sólo se muestra un cuarto del plano en la malla.

4.5. Fusión de vórtices delgados y pendiente baja

Como mencionamos en la Secc. 1.8, dos vórtices delgados se fusionarán en la dirección axial para pendientes suficientemente pequeñas (e.g., $\tau = 0.1$). En la fig. 28 mostramos un ejemplo de la evolución de dos remolinos de pendiente $\tau = 0.2$ y radio $\alpha = 0.2$ vistos desde un plano meridional. Su separación mínima en la condición inicial es $d_h = 0.38$ (calculada con la ec. 15) y la distancia crítica encontrada por Moore y Saffman (1975) es $d_c = 0.7$ por lo que este arreglo está por debajo del valor crítico para que los vórtices se amalgamen en una banda de vorticidad. Como dato adicional, su separación

polar es $d_p = 2R = 1.25, 3.25$ veces la distancia mínima. En la fig. A.4 del apéndice se aprecia a los remolinos mediante las partículas de vorticidad.

Dos vórtices de radio $\alpha = 0.2$ y pendientes $\tau = 0.25$ y 0.3 se siguen fusionando en la dirección meridional. No es sino hasta el arreglo de pendiente $\tau = 0.4$ y radio $\alpha = 0.2$ que los vórtices dejan de fusionarse (ver fig. 29) y obedecen a las ecs. de las velocidades de desplazamiento 7 y 8. La distancia mínima entre los remolinos es $d_h = 0.73$ y el valor crítico para la colaescencia es $d_c = 0.7$ por lo que sí se cumple esta condición.

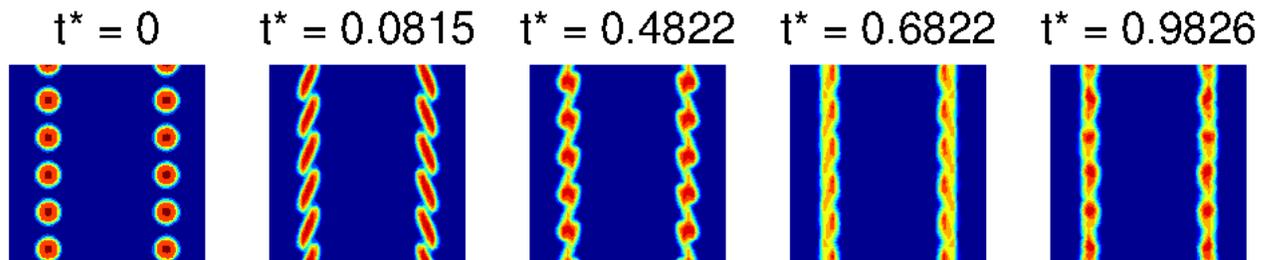


Figura 28: Fusión meridional de dos remolinos de pendiente $\tau = 0.2$ y radio $\alpha = 0.2$.

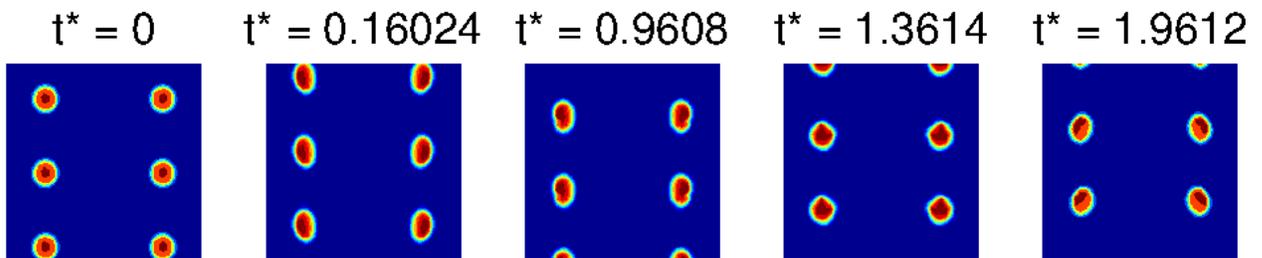


Figura 29: Vista meridional del comportamiento de dos remolinos de pendiente $\tau = 0.4$ y radio $\alpha = 0.2$.

Capítulo 5. Conclusiones

Las soluciones analíticas para las velocidades autoinducidas (ecs. 3 y 4) por un único vórtice (Velasco Fuentes, 2015-A), junto con otras soluciones anteriores (ver, por ejemplo, Boersma y Wood, 1999), se obtuvieron para radios $\alpha \lesssim 0.1$. Sin embargo, nosotros demostramos que incluso para un radio $\alpha \simeq 0.45$ las velocidades U_a y Ω_a coinciden con las soluciones numéricas obtenidas aquí, con una buena aproximación. Por encima de este valor las soluciones divergen, no obstante los remolinos siguen siendo estables sin desprender vorticidad y continúan viajando a velocidades constantes.

Las partículas de vorticidad utilizadas en este trabajo fueron ubicadas cuidadosamente para formar un par de remolinos helicoidales del grosor y pendiente deseados. Cada una de estas partículas obedece a la ecuación de Helmholtz, ec. 22, y a la ecuación de advección, ec. 23, por lo que es independiente del desarrollo analítico para el campo de velocidades inducido por un remolino helicoidal (Hardin, 1982). Por este motivo, las velocidades a las que se desplazan dos remolinos helicoidales axialmente simétricos, delgados y para diferentes pendientes que calculamos aquí, corroboran la validez de las ecs. analíticas 7 y 8 (Velasco Fuentes, 2015-B).

Los remolinos helicoidales de distancia inicial $d_0 = 4 > 3.3$ se fusionan más rápidamente conforme se reduce la pendiente, al menos hasta pendientes mayores a $\tau = 3$. Un cambio repentino en la velocidad angular permite establecer el tiempo t_f^* al que comienza la fusión. Bajo la condición inicial donde la separación es $d_0 = 3 < 3.3$ los vórtices coalescen a una sola estructura de manera similar al caso bidimensional para pendientes mayores o iguales a $\tau = 4$. Los vórtices, después de fusionarse en planos polares, forman un único vórtice columna con vorticidad axial del mismo sentido que la original y vorticidad polar promedio cercana a cero.

En las dos condiciones iniciales elegidas (i.e., $d_0 = 4$ y $d_0 = 3$), para pendientes pequeñas (i.e. $0.6 \leq \tau \leq 2$) la fusión pasa de darse en planos polares a ser, principalmente, en planos meridionales. Esto es por que la distancia mínima entre los remolinos ya no es una línea en la dirección polar, ahora es trazada en la dirección axial.

Las velocidades autoinducidas por vórtices delgados de radio $\alpha \leq 0.2$ obedecen las ecs. 7 y 8 (Velasco Fuentes, 2015-B), siempre y cuando la pendiente no sea demasiado pequeña (e.g. $\tau = 0.1$). Como ya demostramos para el caso de radio $\alpha = 0.2$, por debajo de pendientes $\tau \lesssim 0.4$ los vórtices se amalgaman en la dirección axial formando un cilindro hueco de vorticidad. La distancia mínima d_h entre los remolinos (ec. 15) cumple con la condición impuesta por Moore y Saffman (1975) que establece que la coalescencia de un número infinito de vórtices circulares se da cuando su separación d_c es menor a $5.6a$, donde a es el radio de los remolinos.

La fusión meridional entre los dos remolinos se puede extender a uno o N vórtices, ya que para alguna pendiente τ lo suficientemente pequeña la distancia meridional entre ellos (o él mismo, en el caso de un remolino) será menor al valor crítico d_c . Esto implica dos cosas:

- Las velocidades autoinducidas por cualquier número de vórtices axialmente simétricos se verán alteradas (con respecto a su solución analítica) para pendientes pequeñas.
- En el caso inviscido, los remolinos coalescerán formando cilindros huecos de vorticidad. Si son generados por turbinas, su fusión sólo dependerá de la pendiente con la que son desprendidos.

Lista de referencias bibliográficas

- Boersma, J. y Wood, D. H. (1999). On the self-induced motion of a helical vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, **384**: 263–279.
- Christiansen, J. P. (1973). Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. *Journal of Computational Physics*, **13**(3): 363–379.
- Delbende, I., Rossi, M. y Piton, B. (2012). Direct numerical simulation of helical vortices. *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation* **46**, **4**(1-2): 94–101.
- Delbende, I., Piton, B. y Rossi, M. (2015). Merging of two helical vortices. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, **49**: 363–372.
- Hardin, J. C. (1982). The velocity field induced by a helical vortex filament. *Physics of Fluids*, **25**(11): 1949–1952.
- Joukowski, N. E. (1912). Vihrevaja teorija grebnogo vinta. Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lubitelei Estestvoznaniya, **16**: 1–31. Traducción al francés en Théorie tourbillon-naire de l'hélice propulsive (*Gauthier-Villars, París, 1929*) 1–47.
- Moore, D. W. y Saffman, P. G. (1975). The density of organized vortices in a turbulent mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, **69**(3): 465–473.
- Okulov, V. L. (2004). On the stability of multiple helical vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, **521**: 319–342.
- Roberts, K. V. y Christiansen, J. P. (1972). Topics in computational fluid mechanics. *Computer Physics Communications*, **3**: 14–32.
- Sbalzarini, I. F., Walther, J. H., Bergdorf, M., Hieber, S. E., Kotsalis, E. M. y Koumoutsakos, P. (2006). PPM—A highly efficient parallel particle–mesh library for the simulation of continuum systems. *Journal of Computational Physics*, **215**(2): 566–588.
- Simms, D. A., Fingersh, L. J., Jager, D. W., Cotrell, J. R., Schreck, S., y Larwood, S. M. (2001). Unsteady aerodynamics experiment phase VI: wind tunnel test configurations and available data campaigns. *Golden, Colorado, USA: National Renewable Energy Laboratory*.
- Suaza Jaque, R. D. (2013). Método de vórtice en celda tridimensional para el estudio de vórtices sin fin. *Tesis de Maestría, CICESE*.
- Velasco Fuentes, O. (2001). Chaotic advection by two interacting finite-area vortices. *Physics of Fluids (1994–presente)*, **13**(4): 901–912.
- Velasco Fuentes, O. (2014). Quasi-steady endless vortices with chaotic streamlines. *In Experimental and Computational Fluid Mechanics*, 111–128. Springer International Publishing.
- Velasco Fuentes, O. (2015-A). Motion of a helical vortex. *Manuscrito enviado a European Journal of Mechanics B/Fluids*.

- Velasco Fuentes, O. (2015-B). Motion and flow topology of multiple helical vortices. *Manuscrito en preparación*.
- Vermeer, L.J., Sørensen, J.N. y Crespo, A. (2003). Wind turbine wake aerodynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, **39**(6): 467–510.
- Whale, J., Anderson, C. G., Bareiss, R. y Wagner, S. (2000). An experimental and numerical study of the vortex structure in the wake of a wind turbine. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **84**(1): 1–21.

Apéndice A.

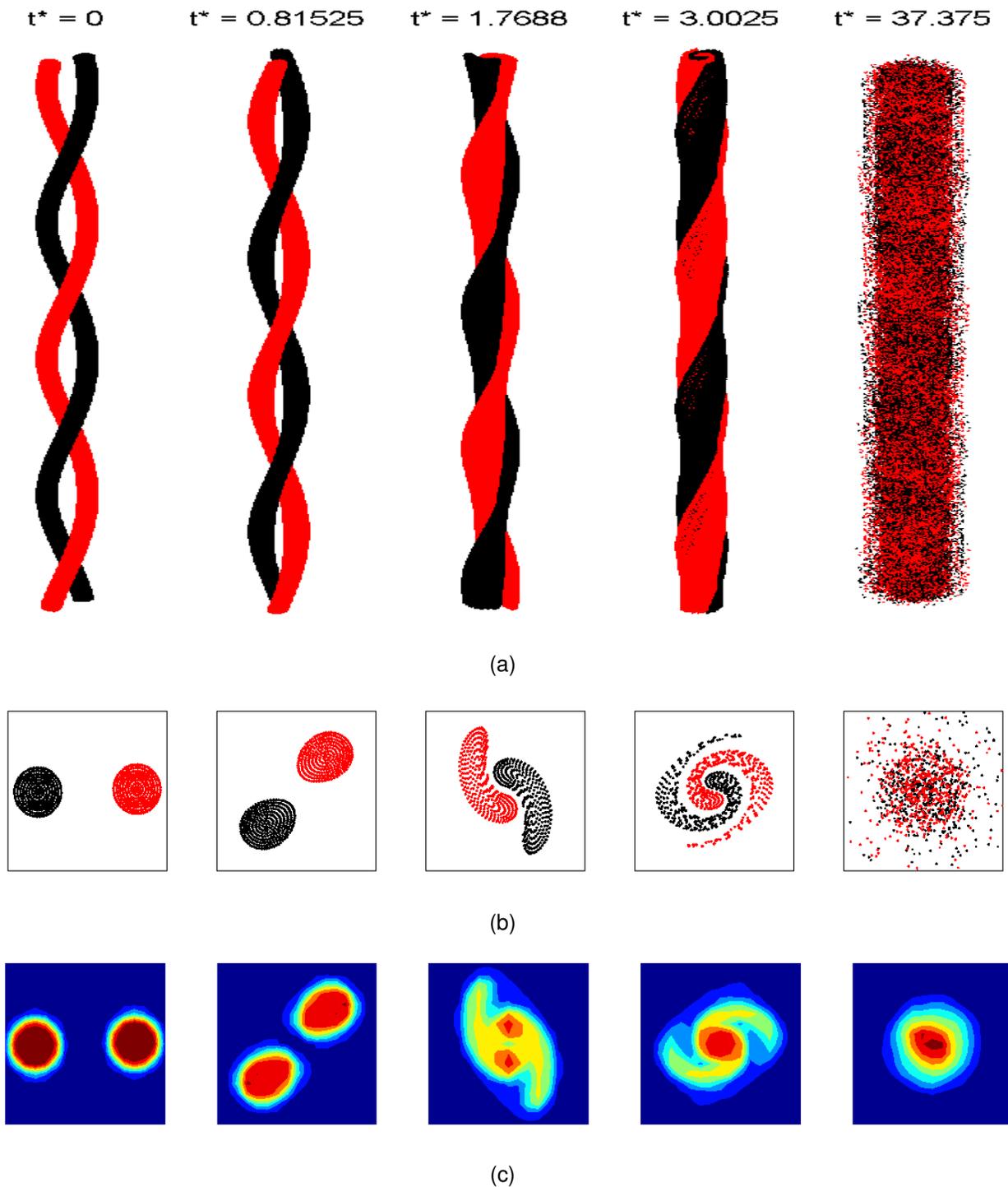


Figura A.1: Fusión de dos remolinos helicoidales de pendiente $\tau = 4$ y distancia inicial $d_0 = 4$. (a) Vista tridimensional de las partículas. (b) Partículas confinadas en una sección $(z_m - \epsilon, z_m + \epsilon)$ donde ϵ es proporcional al diámetro de las partículas y z_m es constante. (c) Magnitud de la vorticidad vista desde un plano polar en la malla.

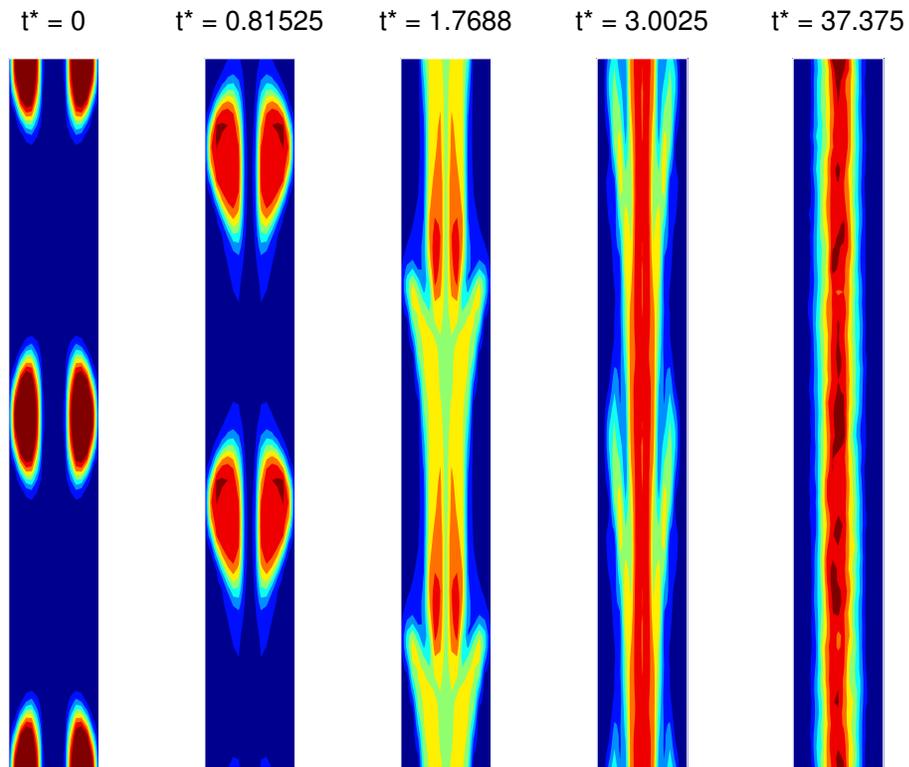


Figura A.2: Evolución de un par de remolinos de pendiente $\tau = 4$ y distancia inicial $d_0 = 4$ vista desde un plano meridional.

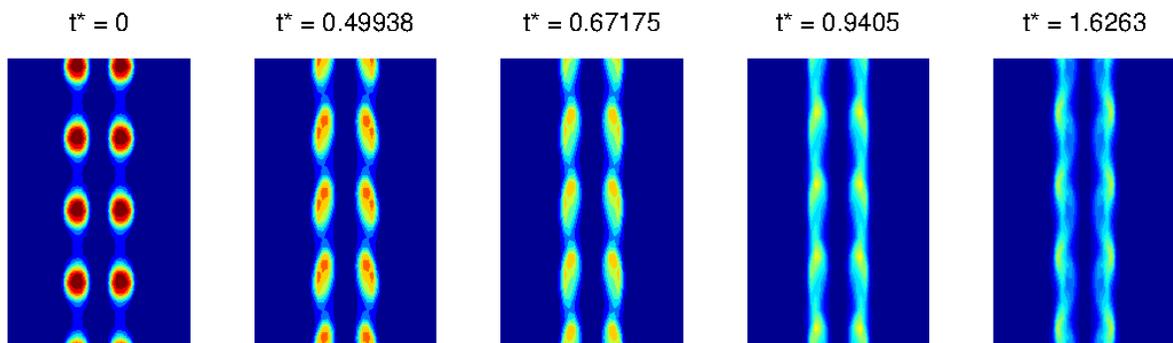
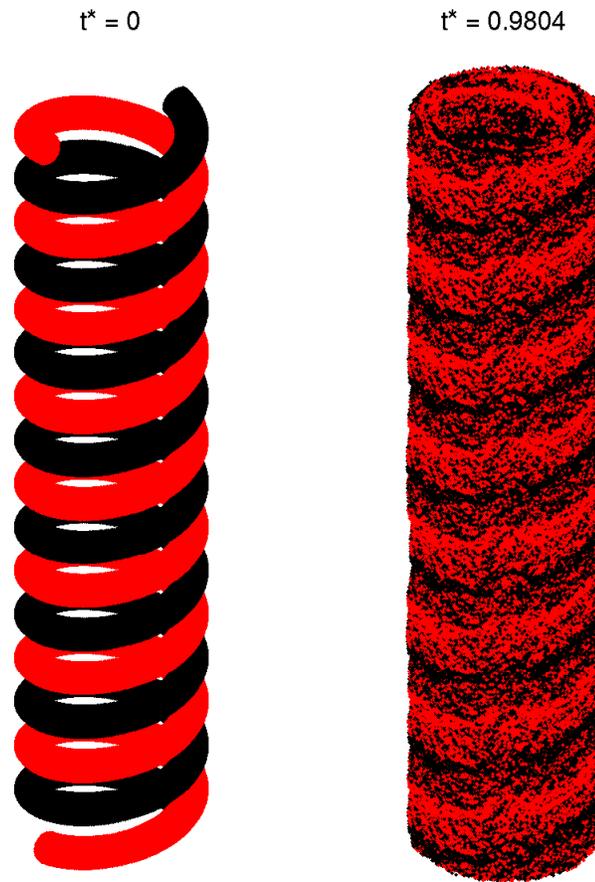
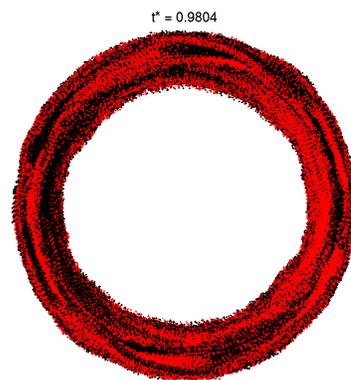


Figura A.3: Evolución de un par de remolinos de pendiente $\tau = 1$ y distancia inicial $d_0 = 4$ vista desde un plano meridional.



(a)



(b)

Figura A.4: Fusión meridional de dos vórtices de pendiente $\tau = 0.2$ y radio $\alpha = 0.2$ vista desde las partículas. (a) Condición inicial y último tiempo obtenido. (b) Vista superior del último tiempo calculado.