

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones
con orientación en Instrumentación y Control**

**Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas discontinuos
afectados por perturbaciones desacopladas**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Topacio Osuna Altamirano

Ensenada, Baja California, México

2016

Tesis defendida por

Topacio Osuna Altamirano

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Yury Orlov
Director del Comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Dra. Iliana Marlen Meza Sánchez



Dr. Miguel Ángel Alonso Arévalo
Coordinador del Programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez
Director de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Topacio Osuna Altamirano como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas discontinuos afectados por perturbaciones desacopladas

Resumen aprobado por:

Dr. Yury Orlov
Director de Tesis

En el presente trabajo de tesis se aborda el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas discontinuos afectados por perturbaciones acopladas y desacopladas. Las condiciones de suficiencia para que tales sistemas tengan una ganancia \mathcal{L}_2 menor que cierto nivel de atenuación $\gamma > 0$ se dan en términos de la solución de las desigualdades diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi. Se debe destacar que estas desigualdades parciales se reducen a una dimensión más baja, de acuerdo a la técnica de Filippov, a lo largo del conjunto de discontinuidad donde la dinámica de la planta conmuta. Con base en las condiciones de suficiencia encontradas, los parámetros de los controladores/observadores por modos deslizantes de primer orden estándar se logran sintonizar no sólo para asegurar el rechazo de perturbaciones acopladas de amplitud acotada sino también para atenuar las perturbaciones no acopladas y no acotadas. Operando en conjunto, la sintonización de los controladores por modos deslizantes de primer orden con los observadores se obtiene un diseño unificado de modos deslizantes por retroalimentación de salida con un nivel de atenuación de perturbación pre-especificado. Las cualidades del procedimiento de sintonización del control por modos deslizantes por retroalimentación de salida, se ilustraron de forma experimental aplicado a un emulador del péndulo con rueda inercial.

Palabras Clave: **Atenuación de perturbaciones, análisis de la ganancia \mathcal{L}_2 , modos deslizantes, desigualdad de Hamilton–Jacobi, perturbaciones desacopladas.**

Abstract of the thesis presented by Topacio Osuna Altamirano as a partial requirement to obtain the Doctor of Sciences degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

\mathcal{L}_2 -gain analysis of discontinuous systems affected by mismatched disturbances

Abstract approved by:

Dr. Yury Orlov
Thesis Director

\mathcal{L}_2 -gain analysis is developed for discontinuous systems affected by both matched and mismatched disturbances. Sufficient conditions of such a system to possess the \mathcal{L}_2 -gain less than a certain attenuation level $\gamma > 0$ are given in terms of appropriate solutions of Hamilton-Jacobi partial differential inequalities (PDEs). Remarkably, these PDEs are reduced according to the Fiippov's technique to a lower dimension along the discontinuity manifold where the plant dynamics are switched. Based on the sufficient conditions obtained, the parameters of the standard (first order) sliding mode (SM) controllers/observers are tuned not only to reject matched disturbances of a bounded amplitude, but also to attenuate unbounded, possibly, mismatched disturbances. Coupled together, tuning of first order SM controllers and observers yields a unified output SM design with a pre-specified disturbance attenuation level. Capabilities of the proposed tuning of SM output feedback synthesis are illustrated in an experimental study made for the inertia wheel pendulum emulator.

Keywords: **Disturbances attenuation, \mathcal{L}_2 -gain analysis, sliding modes, Hamilton–Jacobi inequality, unmatched disturbances.**

Dedicatoria

***A mis padres Gloria Alicia y Jesús Eduardo
por enseñarme a caminar en la vida.***

***A mis hermanos Cristina y Jesús Miriel por
su incondicional apoyo en cada una de mis
locuras, aún cuando no estaban de acuerdo.***

Agradecimientos

A Dios...

Al doctor Yury Orlov por ser una guía y un ejemplo de como ser un investigador de calidad. Gracias por compartir sus conocimientos, por ser crítico y exigente lo cual me ayudo a ser una mejor persona. Le doy gracias por su infinita paciencia, su apoyo incondicional y la confianza depositada en mi, que me permitieron descubrir al gran ser humano que es usted.

Al doctor Luis T. Aguilar, muchas gracias por seguir compartiendo sus conocimientos y su paciencia, por seguir siendo un ejemplo y por todo el apoyo que siempre ha mostrado. Por siempre exigir más de mi para así mejorar en cada aspecto académico de mi persona.

A los miembros de mi comité los doctores Joaquín Álvarez, Alejandro Márquez y Marlen Meza, por aceptar formar parte de mi comité. Por contribuir en mi formación, por su paciencia y sus comentarios, que me dieron el enfoque necesario para realizar este trabajo con éxito. Muchas gracias sin ustedes no hubiera sido posible.

Al doctor Jonatan Peña muchas gracias por siempre asesorame cuando tenía alguna duda.

A Silvia por su apoyo, cariño y más que nada por hacerme sentir en un hogar durante todo este tiempo.

A Olguita, Rosario, Rosy y a los doctores Conte y Rufina, les doy muchas gracias por ser mis confidentes y por brindarme su apoyo incondicional cada vez que lo necesitaba, por demostrarme que no estaba sola.

A mis amigos y todas las personas con las que tuve contacto durante mi estancia aquí en CICESE.

A Efrén por ser mi amigo, confidente y novio. Gracias Sweetie por apoyarme y estar conmigo siempre aún en mis locuras.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por ser mi casa estos años y siempre buscar la manera de apoyarme, por demostrarme que no es necesario ir tan lejos para encontrar un lugar en donde hacer investigación de calidad. Por sentirme orgullosa de ser parte del gremio de alumnos egresado de esta enorme casa de estudios de la cual me siento orgullosa.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	iii
Resumen en inglés	iv
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Lista de figuras	xi
Lista de tablas	xii
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo general	4
1.3.2. Objetivos específicos	4
1.4. Organización del trabajo	4
2. Metodología	6
2.1. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de sistemas discontinuos	6
2.1.1. Suposiciones básicas y definiciones	6
2.1.2. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de estructura variable	11
3. Sintonización del controlador por modos deslizantes de doble integrador perturbado	15
3.1. Sintonización del controlador por modos deslizantes de doble integrador perturbado: el caso de información completa	15
3.1.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.	16
3.1.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.	19
3.1.3. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado con la información completa	20
3.1.4. Resultados de simulación	21
3.2. Sintonización del observador en modos deslizantes de doble integrador perturbado	24
3.2.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.	26
3.2.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.	28
3.2.3. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del observador de doble integrador perturbado	32
3.2.4. Resultados de simulación	33

3.3.	Sintonización del controlador por modos deslizantes de doble integrador perturbado: el caso de información incompleta	35
3.3.1.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.	37
3.3.2.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.	42
3.3.3.	Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema completo del controlador por retroalimentación de la salida	59
3.3.4.	Resultados de simulación	60
4.	Sintonización del controlador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados	63
4.1.	Sintonización del controlador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados: el caso de información completa	63
4.1.1.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.	64
4.1.2.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.	66
4.1.3.	Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado con la información completa	68
4.2.	Sintonización del observador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados	68
4.2.1.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento	71
4.2.2.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento	74
4.2.3.	Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del observador para una cadena de integradores de orden n perturbados	76
4.3.	Sintonización del controlador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados: el caso de información incompleta	77
5.	Sintonización de controladores por modos deslizantes de sistemas de orden n en forma canónica	81
5.1.	Sintonización de controladores por modos deslizantes: el caso de información completa	82
5.1.1.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento	83
5.1.2.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie	84
5.1.3.	Atenuación de perturbaciones desacopladas	85
5.2.	Sintonización de observadores por modos deslizantes de sistemas de orden n en forma canónica	86
5.2.1.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie del observador discontinuo	89

5.2.2.	Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de conmutación	91
5.2.3.	Observador robusto frente a perturbaciones no acopladas . . .	93
5.3.	Sintonización de controladores por modos deslizantes: el caso de información parcial	94
6.	Caso de estudio experimental: Regulación de un péndulo subactuado con rueda inercial	96
6.1.	Verificación experimental con emulador	98
7.	Conclusiones	101
7.1.	Conclusiones generales	101
7.1.1.	Limitaciones	103
7.2.	Productividad	103
7.3.	Trabajos a Futuro	104
	Lista de referencias bibliográficas	105

Lista de figuras

Figura		Página
1.	Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbación armónica desacoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.	22
2.	Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbaciones armónicas desacoplada y acoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.	23
3.	Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbaciones armónicas desacoplada y acoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0.1$ y $x_2(0) = 1$.	23
4.	Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbación armónica acoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.	24
5.	Dinámica del sistema en errores (53) no perturbado con condiciones iniciales $e_1(0) = 0.5$ y $e_2(0) = 0.6$.	34
6.	Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en errores (53) afectado por las perturbaciones (84).	34
7.	Dinámica del sistema en errores (53) afectado por las perturbaciones (84), con $e_1(0) = 0.5$ y $e_2(0) = 0.8$.	35
8.	Dinámica del sistema completo no perturbado con condiciones iniciales $y(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0.8$, $e_1(0) = 1$, $e_2(0) = 1.2$ y $s(0) = 0.2$.	61
9.	Dinámica del sistema completo perturbado con (154) con condiciones iniciales $y(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0.8$, $e_1(0) = 1$, $e_2(0) = 1.2$ y $s(0) = 0.2$.	62
10.	Ganancia del sistema completo perturbado.	62
11.	Péndulo con rueda inercial.	97
12.	Dinámica del sistema en lazo cerrado sin perturbaciones con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$ y $s(0) = 40$.	100
13.	Dinámica del sistema en lazo cerrado afectado por perturbaciones acopladas y desacopladas (275) con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$ y $s(0) = 40$.	100

Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Casos posibles para un doble integrador por retroalimentación del estado.	16
2.	Casos posibles para el observador de un doble integrador por retroalimentación de la salida.	26
3.	Casos posibles para un doble integrador por retroalimentación de la salida.	37
4.	Casos posibles para un sistema canónico de orden n por retroalimentación del estado.	64
5.	Casos posibles para el observador de un sistema canónico de orden n por retroalimentación de la salida.	71
6.	Casos posibles para un sistema canónico de orden n por retroalimentación de la salida.	79

Capítulo 1. Introducción

Los algoritmos de control por modos deslizantes (MD) son reconocidos por su propiedad de robustez en contra de perturbaciones acopladas con magnitudes conocidas *a priori*. Su capacidad para atenuar perturbaciones desacopladas con límites desconocidos en sus magnitudes ha sido desatendida en la literatura y constituye el tema principal de esta investigación.

1.1. Estado del arte

Los trabajos relacionados con control por modos deslizantes (Utkin (1992) y referencias del mismo) suponen que sólo las perturbaciones acopladas y acotadas afectan al sistema. En los trabajos Benderradji *et al.* (2012); Estrada *et al.* (2011); Moreno y Osorio (2012); Orlov (2005); Orlov *et al.* (2011); Polyakov y Poznyak (2012) y Santiesteban *et al.* (2010), por nombrar algunos, el análisis de sistemas en lazo cerrado que presentan MD se realizó mediante el uso de funciones de Lyapunov no suaves, para el caso donde se presentan solamente perturbaciones acopladas. En estos trabajos se impusieron condiciones en los parámetros del controlador y el límite superior de la magnitud de las perturbaciones acopladas, para garantizar la estabilidad en tiempo finito. Sin embargo, no se proporcionó un análisis general con perturbaciones desacopladas con límites desconocidos en sus magnitudes.

El análisis en la Estabilidad Entrada-Estado Integral (iISS, por sus siglas en inglés) de sistemas que presentan modos deslizantes (ver Bernuau *et al.* (2014) y sus referencias) se ha basado en la propiedad de homogeneidad ponderada, limitándose así a aplicaciones con perturbaciones acopladas, dejando a los sistemas no homogéneos desatendidos. Este concepto está relacionado con el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 pero ha sido restringido a sistemas suaves. Resulta entonces interesante extender el método de análisis de iISS a sistemas discontinuos, que todavía no son bien atendidos en la literatura. El trabajo de Castaños y Fridman (2011) es el único en cual se demostró para sistemas lineales que aplicando control por modos deslizantes el sistema en lazo cerrado presenta buen desempeño cuando aparecen perturbaciones no acopladas. Sin embargo, no se lleva a cabo un análisis de ganancia \mathcal{L}_2 en el caso de un sistema no lineal. Además, el controlador im-

plementado utilizó la derivada de las mediciones que proporcionó una limitación práctica de usar retroalimentación no causal. El trabajo reciente de Aparicio *et al.* (2016) extendió los resultados de Castaños y Fridman (2011) para sistemas no lineales sin embargo aun sufre del uso de diferenciadores no causales del estado.

Un número significativo de investigaciones científicas ha demostrado interés en el análisis de estabilidad y la síntesis del control en los sistemas conmutados sujetos a restricciones de la entrada o el estado. La robustez de sistemas lineales conmutados sujetos a limitaciones en el actuador ha sido estudiada en (X. Zhang *et al.* (2012)) en términos de la ganancia \mathcal{L}_2 , usando el enfoque de optimización mediante desigualdades lineales matriciales (LMI, por sus siglas en inglés).

A diferencia de los trabajos anteriores, J. Zhang *et al.* (2009) propone el enfoque de ganancia \mathcal{L}_2 para el análisis y síntesis de controladores realimentados de sistemas discontinuos con retardos de tiempo. Sin embargo, no realizó un análisis específico de MD. Además de este trabajo, en Zhao y Wang (2013) se consideraron problemas de estabilidad en tiempo finito y acotamiento en tiempo finito para sistemas lineales conmutados sujetos a perturbaciones de clase \mathcal{L}_2 . Sin embargo, en este trabajo los modos deslizantes fueron descartados. Los trabajos de Ponce *et al.* (2013a) y Ponce *et al.* (2013b) tampoco contaron con el análisis incluyendo MD.

Dado que los sistemas dinámicos que presentan MD poseen soluciones no suaves, un problema desafiante es extender las técnicas de control robusto como en el enfoque de control \mathcal{H}_∞ (Basar y Bernhard, 1995; Isidori y Astolfi, 1992; Orlov y Aguilar, 2014; Van der Shaft, 1992) para esta clase de sistemas no lineales. En la presente investigación, el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 se extiende hacia sistemas dinámicos que presentan MD. Es así que se demuestra que un controlador por MD es capaz no sólo de rechazar perturbaciones acotadas y acopladas, sino también de atenuar las desacopladas de clase \mathcal{L}_2 .

1.2. Planteamiento del problema

La característica más atractiva de los controladores por modos deslizantes es su robustez ante perturbaciones acopladas, por lo tanto, para comprobar si son capaces de

atenuar el efecto de las perturbaciones desacopladas y errores de medición, es necesario desarrollar una metodología para analizar la ganancia \mathcal{L}_2 de sistemas discontinuos. Con esta motivación, el principal objetivo del trabajo es extender el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 hacia sistemas dinámicos que presentan modos deslizantes.

Las condiciones suficientes para que un sistema de estructura variable (VSS, por sus siglas en inglés) sea asintóticamente estable internamente y posea ganancia \mathcal{L}_2 menor que un nivel de atenuación de una perturbación *a priori* dada, se derivan en términos de las desigualdades diferenciales parciales (PDEs, por sus siglas en inglés) de Hamilton-Jacobi, propiamente especificadas fuera y a lo largo de la superficie de conmutación. Estas condiciones pueden ser vistas como una alternativa de aquellas propuestas en el diseño de alta ganancia mediante control \mathcal{H}_∞ singular de Astolfi (1997).

En la base de las condiciones obtenidas, las reglas constructivas de sintonización de los llamados controladores de modos deslizantes de primer orden se deducen, para un VSS linealizable por retroalimentación de estado de orden de grado relativo n , representado en la forma canónica en el sentido de Byrnes y Isidori (1991). Sintonizados con estas reglas, los controladores por MD se demuestran que son capaces de no sólo el rechazar perturbaciones acopladas y acotadas, sino también de atenuar las perturbaciones de clase \mathcal{L}_2 , incluyendo las desacopladas.

La contribución del presente trabajo a la literatura existente es la siguiente. Primero, el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 no lineal se amplía a los sistemas dinámicos discontinuos por modos deslizantes. Este análisis es aplicado constructivamente para sintonizar un VSS de grado relativo n , manipulado por un controlador por modos deslizantes de primer orden y afectado por perturbaciones desacopladas, para lograr un nivel de atenuación de perturbación deseado en el sistema de lazo cerrado. La efectividad y robustez en contra de perturbaciones externas desacopladas de la sintonización propuesta son verificadas numéricamente utilizando un emulador de un modelo de un péndulo con rueda inercial, manipulado por un controlador por MD.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas discontinuos.

1.3.2. Objetivos específicos

OE.1 Sintonización de los parámetros del controlador por modos deslizantes para sistemas no lineales en su forma canónica con el objetivo de obtener el nivel deseado de atenuación de perturbaciones.

OE.1.1 *Para el caso de diseño del controlador por modos deslizantes del primer orden por retroalimentación del estado para tener la ganancia \mathcal{L}_2 deseada.*

OE.1.2 *Para el caso del diseño del observador por modos deslizantes del primer orden por retroalimentación de la salida para tener la ganancia \mathcal{L}_2 deseada.*

OE.1.3 *Para el caso de diseño del controlador por modos deslizantes del primer orden por retroalimentación de la salida para tener la ganancia \mathcal{L}_2 deseada.*

OE.2 Verificación de la metodología propuesta a través de su aplicación e implementación en un emulador de sistemas mecánicos.

1.4. Organización del trabajo

En el primer Capítulo se muestran los objetivos y planteamiento del problema, mientras que en el Capítulo 2 la metodología implementada y los preliminares teóricos necesarios para el desarrollo de la investigación. En el Capítulo 3 se obtienen los parámetros necesarios para sintonización de un controlador y un observador de segundo orden por modos deslizantes, mediante retroalimentación de estado y de salida respectivamente. Continuando así con el Capítulo 4 el cual es una extensión del material previo, donde ahora se aborda un sistema discontinuo de orden n . Adicionalmente en el Capítulo 5 se aborda un sistema discontinuo de orden n en su forma canónica se realiza la sintonización de los parámetros para un sistema no lineal controlado por modos deslizantes. En

el Capítulo 6 donde se muestran algunos experimentos realizados en un emulador y con lo cual se verifica la teoría. Por último en el Capítulo 7 se detallan las conclusiones y aportaciones obtenidas durante la investigación.

Capítulo 2. Metodología

En este capítulo se desarrolla la metodología del análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de sistemas discontinuos perturbados con modos deslizantes. Se presentan conceptos bien conocidos de sistemas discontinuos y los elementos básicos del análisis de ganancia \mathcal{L}_2 estándar para después demostrar el resultado central, el Teorema 2.1.

2.1. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de sistemas discontinuos

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 , presentado aquí, se basa en el enfoque de teoría de juegos de Basar y Bernhard (1995) y extiende los resultados de Isidori y Astolfi (1992); Orlov y Aguilar (2014) y Van der Shaft (1992) donde sus investigaciones fueron restringidas a sistemas autónomos continuos a tramos.

2.1.1. Suposiciones básicas y definiciones

A lo largo de este trabajo de investigación, operamos con funciones absolutamente continuas y continuas en el sentido de Lipschitz las cuales se definen de la siguiente manera clásica:

Definición 2.1 (Función absolutamente continua) *Una función φ diferenciable para casi todos los valores t , se dice que es una función absolutamente continua, si y sólo si se representa en la siguiente forma.*

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{\varphi}(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Definición 2.2 (Función Lipschitz) *Se dice que una función $f(x)$ es localmente Lipschitz para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ si existe una bola $\mathcal{B}(x)$ de radio $\epsilon > 0$ dentro de la cual se cumpla la siguiente desigualdad*

$$\|f(y) - f(z)\| \leq L\|y - z\| \quad \forall \quad y, z \in \mathcal{B}(x; \epsilon) \quad (2)$$

con una constante $L(x)$ que puede depender de x .

Además la función $f(x)$ es globalmente Lipschitz si la desigualdad (2) cumple con una constante L absoluta que no depende de x .

En general, la notación utilizada a lo largo del trabajo es estándar, una función continua escalar $v(x)$ es *definida positiva*, i.e., $v(x) > 0$ si y sólo si $v(0) = 0$ y $v(x) > 0$ para toda $x \neq 0$. Es *radialmente desacotada* si y sólo si $\lim v(x) = \infty$ como $\|x\| \rightarrow \infty$. Una función escalar continua no autónoma $V(x, t)$ es *definida positiva*, i.e., $V(x, t) > 0$ si y sólo si $V(x, t) \geq v(x)$ para toda $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y algunas funciones definidas positivas $v(x)$, *radialmente desacotada* si y sólo si $v(x)$ lo es, y *decreciente* si y sólo si $V(x, t) \leq v_1(x)$ para toda $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y algunas funciones definidas positivas $v_1(x)$. Es *semidefinida positiva* si y sólo si $V(x, t) \geq 0$ para toda $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y se dice que es *definida negativa* (*semidefinida*) si y sólo si $-V(x, t)$ es definida positiva (semidefinida).

Definición 2.3 (Derivada de Dini) Se utiliza para una derivada de Dini (si existiese)

$$DV(x; \nu) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{V(x + \tau\nu) - V(x)}{\tau} \quad (3)$$

de una función escalar $V(x)$, calculada en la dirección de $\nu \in \mathbb{R}^n$ en $x \in \mathbb{R}^n$.

La siguiente noción es por Clarke (1983).

Definición 2.4 (Supergradiente, Clarke (1983)) Un vector $\eta(\hat{x}, \hat{t}) = [\zeta(\hat{x}, \hat{t}), \xi(\hat{x}, \hat{t})]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un supergradiente de una función escalar $V(x, t)$ en $(\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ si existe una

$$V(x, t) \leq V(\hat{x}, \hat{t}) + \zeta^T(\hat{x}, \hat{t})(x - \hat{x}) + \xi(\hat{x}, \hat{t})(t - \hat{t}) + \sigma(\hat{x}, \hat{t}) \left[\|x - \hat{x}\|^2 + |t - \hat{t}|^2 \right] \quad (4)$$

para toda x, t en alguna vecindad $U(\hat{x}, \hat{t})$ de (\hat{x}, \hat{t}) .

Definición 2.5 (Superdiferencial, Clarke (1983)) El conjunto de supergradiente en x se denota como $\partial V(x, t)$, y se le conoce como el superdiferencial.

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 finita se desarrolla para el sistema de estructura variable dado en la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)\omega(t) \quad (5)$$

con salida

$$z(t) = h(x(t), t). \quad (6)$$

En lo sucesivo, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $t \in \mathbb{R}$ es la variable del tiempo, $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de perturbaciones desconocidas, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ el desempeño de la salida, $h(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$ es un vector de función, y $g(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n \times r}$ es una función matricial, la función no lineal $f(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$.

La función $f(x, t)$ es sometida a discontinuidades en la superficie variante en tiempo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x, t) = 0\}, \quad (7)$$

determinada mediante la función $s(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, y la cual conmuta de acuerdo a

$$f(x, t) = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ f^-(x, t) & \text{si } s(x, t) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Se supone que las funciones $\omega(t)$, $f^+(x, t)$, $f^-(x, t)$, $g(x, t)$, $s(x, t)$, y $h(x, t)$ son continuas a tramos en t y localmente continuas en x en sus dominios en el sentido de Lipschitz. El significado preciso de la ecuación diferencial (5) con lado derecho continuo a tramos es definido en el sentido de Filippov (1988) así como la inclusión diferencial correspondiente, la cual es obtenida de el lado derecho de (5) mediante el paso de la envolvente convexa mínima, abarcado por los vectores $f^+(x, t)$ y $f^-(x, t)$.

Definición 2.6 (Filippov (1988)) *Dada la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (9)$$

vamos a introducir para cada punto $x(t) \in \mathbb{R}^n$ el conjunto cerrado convexo más pequeño $F(x, t)$ el cual contiene todos los puntos límites de $f(x^, t)$ conforme $x^* \rightarrow x$, y $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus (\cup_{j=1}^N \partial G_j)$ y t es una constante. Una función absolutamente continua $x(\cdot)$ se dice que es solución de (9) si esto satisface la inclusión diferencial*

$$\dot{x} \in F(x, t). \quad (10)$$

Es bien conocido desde el método de control equivalente de Utkin (1992) que una solución en el sentido de Filippov (1988) que se desliza en una superficie de conmutación (7), si existe, se rige por

$$\dot{x} = f^0(x, t) + g^0(x, t)\omega \quad (11)$$

donde

$$f^0(x, t) + g^0(x, t)\omega = \mu(x, t)f^+(x, t) + [1 - \mu(x, t)]f^-(x, t) + g(x, t)\omega, \quad (12)$$

y

$$\mu(x, t) = \frac{\text{grad}^T s(x, t)[f^-(x, t) + g(x, t)\omega]}{\text{grad}^T s(x, t)[f^-(x, t) - f^+(x, t)]} \in [0, 1] \quad (13)$$

se encuentra de la condición

$$\text{grad}^T s(x, t) \cdot [\mu(x, t)f^+(x, t) + (1 - \mu(x, t))f^-(x, t) + g(x, t)\omega] = 0 \quad (14)$$

de que el vector velocidad (12) está en el plano T , tangencial a S . En resumen, las siguientes relaciones:

$$f^0(x, t) = \left(\frac{\text{grad}^T s(x, t)f^-(x, t)}{\text{grad}^T s(x, t)[f^-(x, t) - f^+(x, t)]} \right) f^+(x, t) - \left(\frac{\text{grad}^T s(x, t)f^+(x, t)}{\text{grad}^T s(x, t)[f^-(x, t) - f^+(x, t)]} \right) f^-(x, t) \quad (15)$$

$$g^0(x, t)\omega = g(x, t)\omega + \left(\frac{\text{grad}^T s(x, t)g(x, t)\omega}{\text{grad}^T s(x, t)[f^-(x, t) - f^+(x, t)]} \right) f^+(x, t) + \left(1 - \frac{\text{grad}^T s(x, t)g(x, t)\omega}{\text{grad}^T s(x, t)[f^-(x, t) - f^+(x, t)]} \right) f^-(x, t) \quad (16)$$

se derivaron de (12)-(14) para determinar las funciones $f^0(x, t)$ y $g^0(x, t)$.

Adicionalmente, los siguientes lemas técnicos se tomaron de (Orlov y Aguilar, 2014, Capítulo 5.3), para ser usados en el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de sistemas de estructura variable.

Lema 2.1 (Orlov y Aguilar, 2014, Capítulo 5.3) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ una función absolutamente

continua con variable del tiempo t , y sea $V(x, t)$ una función escalar localmente Lipschitz alrededor de $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces la función $V(x, t)$ es absolutamente continua y su derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{d}{dt} V(x(t), t) = DV(x(t), t, \dot{x}(t), 1) \quad (17)$$

casi en todas partes. Además,

$$DV(x(t), t, \dot{x}(t), 1) \leq \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x}(t) \quad (18)$$

para casi toda t y para todos los supergradientes $(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x})^T \in \partial V(x)$, si hay alguno.

Lema 2.2 (Orlov y Aguilar, 2014, Capítulo 5.3) Sea el sistema libre de perturbaciones (5) que posee una función de Lyapunov $V(x, t)$ con una derivada temporal definida negativa $\dot{V}(x(t))$ de la función compuesta $V(x(t))$ a lo largo de las trayectorias del sistema. Entonces el sistema (5) es estable. Además, el mismo sistema es (globalmente) estable de manera asintótica siempre que la función $V(x, t)$ es una función estricta (radialmente no acotada) de Lyapunov con una derivada temporal definida negativa $\dot{V}(x(t), t)$.

Las definiciones y lemas anteriores están implicados en el desarrollo posterior para el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas de estructura variable (5).

La estabilidad de ganancia \mathcal{L}_2 juega un papel especial en el análisis de sistemas. Es natural trabajar con la integral del cuadrado de la señales, las cuales son vistas como la energía finita de un señal. En muchos problemas de control, el sistema es representado como un mapeo de entrada-salida del espacio de perturbaciones ω al espacio de la salida z a controlar. El mapeo requiere que su norma sea pequeña, es decir, que con la señal de entrada de clase \mathcal{L}_2 , el sistema de control es diseñado para realizar el mapeo de entrada-salida estable en \mathcal{L}_2 y para minimizar la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado. En este tipo de problemas, es importante no solamente la capacidad de descubrir que el sistema es \mathcal{L}_2 estable con ganancia-finita, sino también para calcular la ganancia \mathcal{L}_2 o una cota superior en la misma.

En nuestro desarrollo utilizamos la idea de estabilidad en el sentido de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas de estructura variable que se establece de la siguiente manera.

Definición 2.7 (Ganancia \mathcal{L}_2 , Isidori y Astolfi (1992)) *Dado un número real $\gamma > 0$, referido como un nivel de atenuación de perturbación, se dice que el sistema (5) posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (6) (o, simplemente, que el sistema (5), (6) posee ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ) si la respuesta z , resultante de ω para el estado inicial $x(t_0) = 0$, satisface*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|\omega(t)\|^2 dt \quad (19)$$

para todo $t_1 > t_0$ y todas las funciones continuas a tramos $\omega(t)$ (localmente alrededor del origen).

2.1.2. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de estructura variable

Condiciones suficientes de el sistema de estructura variable (5) que posee localmente ganancia \mathcal{L}_2 menor que un cierta γ con respecto a la salida (6) son típicamente dadas en términos de una solución proximal de la desigualdad de Hamilton–Jacobi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x, t) g^T(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + h^T(x, t) h(x, t) < 0. \quad (20)$$

La anterior desigualdad es introducida de manera estándar fuera de la superficie de conmutación (7) mientras que, en la superficie de conmutación (7), la desigualdad (20) se especifica de acuerdo a (12) con

$$f(x, t) = f^0(x, t) \quad g(x, t) = g^0(x, t) \quad (21)$$

considerando $s(x, t) = 0$.

En otras palabras, la desigualdad de Hamilton–Jacobi, se restringe a la superficie de

discontinuidad (7), y tomará la forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f^0(x, t) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g^0(x, t) g^{0T}(x, t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + h^T(x, t) h(x, t) < 0. \quad (22)$$

Definición 2.8 (Solución proximal, Clarke (1983)) *Una función localmente continua Lipschitz $V(x, t)$ se dice que es una solución proximal de la desigualdad diferencial parcial (local) (20) sujeta a (21) y especificada de acuerdo a (12) si y sólo si la superdiferencial proximal $\partial^P V(x, t)$ es no vacía en todas partes y (20) se mantiene con $V(x, t)$ más allá de la superficie de discontinuidad (7) (localmente alrededor del origen) para todos los supergradiantes próximos $(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x})^T \in \partial^P V(x, t)$ mientras que la desigualdad de Hamilton–Jacobi en MD (22) se satisface en la superficie de discontinuidad (7) (localmente alrededor del origen) $(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x})^T \in \partial^P V(x, t)$.*

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema (5), (6) se vuelve factible bajo la siguiente hipótesis:

(H) La desigualdad de Hamilton–Jacobi, dada mediante (20) fuera de la superficie de discontinuidad (7) y especificada como (12) y (21) sobre la superficie, posee una solución proximal $V(x, t)$ (local) definida positiva, radialmente desacetada bajo alguna γ positiva.

El siguiente resultado es propio, presenta las condiciones suficientes para que el sistema no suave (5), (6) sea asintóticamente estable internamente y posea una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ .

Teorema 2.1 *Considérese el sistema de estructura variable (5), (6) y la Hipótesis H se cumpla (de manera local). Entonces sistema nominal (5) con $\omega \equiv 0$ es asintóticamente estable de manera global (local) mientras que su versión perturbada (en forma local) posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (6).*

Demostración. Es más bien técnica y sigue los argumentos habituales usados en el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 no lineal (Isidori y Astolfi (1992); Orlov y Aguilar (2014) y Van der

Shaft (1992)). Para iniciar, la validez del Teorema se justifica para las trayectorias del sistema de lazo cerrado que se mantiene más allá del conjunto de discontinuidad $s = 0$ durante el movimiento.

El Lema 2.1 se puede aplicar a la solución proximal $V(x)$ de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (20) vista en la soluciones $x(t)$ del sistema libre de perturbaciones (5). Bajo las relaciones (17), (20), se tiene

$$\frac{d}{dt} V(x(t), t) = DV(x(t), t, \dot{x}(t), 1) \leq \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0. \quad (23)$$

Tomando en cuenta que (23) es válida en casi cualquier parte, la Hipótesis H asegura que $V(x)$ es una función estricta de Lyapunov radialmente desacotada del sistema libre de perturbaciones (5). Mediante el Lema 2.2, se prueba que el sistema libre de perturbaciones es asintóticamente estable de manera global (local).

Aún falta mostrar que el sistema perturbado (5) (localmente) posee ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (6). Para este propósito, se introduce la siguiente función multivaluada

$$\mathcal{H}(x, \omega, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} (f(x, t) + g(x, t)\omega) + h^T(x, t)h(x, t) - \gamma^2 \omega^T \omega \quad (24)$$

donde $(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x})^T \in \partial^P V(x, t)$. Nótese que la función multivaluada (24) es cuadrática en ω .

Entonces

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}(x, \omega, t)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\alpha(x, t)} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} g(x, t) - 2\gamma^2 \alpha^T(x, t) = 0 \quad (25)$$

para $\alpha(x, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g^T(x, t) \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)^T$ y $(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x})^T \in \partial^P V(x, t)$. Expandiendo la ecuación cuadrática $\mathcal{H}(x, \omega, t)$ en series de Taylor, se deriva que

$$\mathcal{H}(x, \omega, t) = \mathcal{H}(x, \alpha(x, t), t) - \gamma^2 \|\omega - \alpha(x, t)\|^2 \quad (26)$$

donde $\mathcal{H}(x, \alpha(x, t), t) \leq 0$ a causa de (20). Por lo tanto,

$$\mathcal{H}(x, \omega) \leq -\gamma^2 \|\omega - \alpha(x, t)\|^2 \quad (27)$$

y empleando (24) y (26) se llega a

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \left(f(x, t) + g(x, t)\omega \right) < -\gamma^2 \|\omega - \alpha(x, t)\|^2 - \|h(x, t)\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2. \quad (28)$$

Aplicando el Lema 2.1 y considerando (28), la derivada temporal de la solución $V(x)$ de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (20) en las trayectorias de (5), se estima de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} V(x, t) < -\gamma^2 \|\omega - \alpha(x, t)\|^2 - \|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2. \quad (29)$$

De hecho, con la desigualdad anterior se asegura que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\gamma^2 \|\omega(t)\|^2 - \|z(t)\|^2 \right) dt &> V(x(t_1), t_1) - V(x(t_0), t_0) \\ &+ \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\|\omega(t) - \alpha(x(t), t)\|^2 \right] dt > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

para cualquier trayectoria de (5), (6), iniciada con $x(t_0) = 0$. Por lo tanto, la desigualdad (19) se satisface para la dinámica del sistema fuera de la superficie de discontinuidad (7). Para los modos deslizantes que posiblemente ocurren en el sistema de lazo cerrado a lo largo de la superficie de discontinuidad (7), la validez del Teorema está justificada siguiendo la misma línea de razonamiento usado en la prueba del resultado cuando la dinámica está confinada sin modos deslizantes. Entonces, de este modo se completa la prueba del Teorema 2.1. ■

Las capacidades del Teorema 2.1, con las cuales se obtiene un método instrumental para el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de VSS, son investigadas más a fondo y así establecer las reglas de sintonización para que los controladores de modos deslizantes de primer orden, sean robustos en la presencia de perturbaciones desacopladas.

Capítulo 3. Sintonización del controlador por modos deslizantes de doble integrador perturbado

En este capítulo, la eficacia del Teorema 2.1 se ilustra mediante la sintonización de un controlador de doble integrador para la atenuación de perturbaciones externas desacopladas. Los controladores de modos deslizantes de primer orden, que implican la síntesis de retroalimentación de estado, el diseño del observador por modos deslizantes y la síntesis de retroalimentación de la salida, incorporando el observador propuesto trabajando en paralelo, son verificados exitosamente cada uno.

3.1. Sintonización del controlador por modos deslizantes de doble integrador perturbado: el caso de información completa

Para iniciar se realizará el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 en un sistema de segundo orden dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + d_1\omega_1(t) \\ \dot{x}_2 &= u + d_2\omega_2(t)\end{aligned}\tag{31}$$

y definiendo a la salida del sistema como:

$$z_c = h(x_c) = [x_1, s]^T,\tag{32}$$

donde, $x_c = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estados, $t \in \mathbb{R}$ es la variable del tiempo, $\omega_c(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ una perturbación que pertenecen a $\mathcal{L}_2(0, T)$, $\forall T > 0$, $f(x_c)$ es una función vectorial continua a tramos, $h(x_c) \in \mathbb{R}^p$ es una función diferenciable y $g(x_c) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es una matriz continua. La entrada de control que rige al sistema (31) es:

$$u = -M\text{sign}(s)\tag{33}$$

donde $M > 0$ y s es la superficie deslizamiento definida como:

$$s = cx_1 + x_2\tag{34}$$

en donde se observa que es un controlador por modos deslizantes de primer orden, donde $c \in \mathbb{R}^+$ es una constante. El sistema (31)-(32) se puede representar de la forma (5) donde

$$x_c = (x_1, x_2)^T; \quad f(x_c) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M \operatorname{sign}(cx_1 + x_2) \end{bmatrix};$$

$$g(x_c) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}; \quad \omega_c = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Nótese que se consideran perturbaciones del tipo acopladas y desacopladas, y cabe señalar que modos deslizantes es una técnica de control que rechaza perturbaciones del tipo acopladas, sin embargo se desea saber es el comportamiento ante perturbaciones desacopladas. Considerando el sistema (31) y su salida óptima (32), se pueden generar dos casos, detallados en la Tabla 1.

Tabla 1: Casos posibles para un doble integrador por retroalimentación del estado.

Caso	s	Orden	Condición en la Superficie	Salida
i)	$\neq 0$	2	Fuera	$z_c = h(x_c) = [x_1, s]^T$
ii)	0	1	Sobre	$z_c^0 = h(x_c^0) = [x_1, 0]^T$

3.1.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.

En esta subsección se deberá verificar que la desigualdad de Hamilton–Jacobi:

$$\mathcal{H}(x_c, \alpha(x_c)) = \frac{\partial V_c}{\partial x_c} f(x_c) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_c}{\partial x_c} g(x_c) g^T(x_c) \left(\frac{\partial V_c}{\partial x_c} \right)^T + h^T(x_c) h(x_c) \leq -v(x_c) \quad (35)$$

se satisface. En principio considérese la función de Lyapunov

$$V_c = x_1^2 + |s|. \quad (36)$$

Esta función de Lyapunov ya ha sido reportada en la literatura para demostrar estabilidad asintótica del punto de equilibrio del sistema no perturbado así como para probar

rechazo a perturbaciones acopladas acotadas. Para fines prácticos se denota el lado izquierdo de la ecuación Hamilton-Jacobi como $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}(x_c, \alpha(x_c))$. Primeramente obtengamos la derivada de (36), la cual es:

$$\frac{\partial V_c}{\partial x} = \left[\frac{\partial V_c}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial V_c}{\partial x_2} \right] \quad (37)$$

donde:

$$\frac{\partial V_c}{\partial x_1} = \frac{\partial V_c}{\partial x_1} + \frac{\partial V_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial V_c}{\partial x_2} = \frac{\partial V_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_2};$$

por consiguiente

$$\frac{\partial V_c}{\partial x_c} = [2x_1 + c \operatorname{sign}(s), \operatorname{sign}(s)],$$

continuando así con la función $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}(x_c, \alpha(x_c))$, se evalúa de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & 2x_1x_2 + cx_2 \operatorname{sign}(s) - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 x_1^2 \\ & + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 x_1 \operatorname{sign}(s) + x_1^2 + s^2 < 0. \end{aligned}$$

De manera inmediata se debe seleccionar un valor para el parámetro M tal que:

$$M > \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2). \quad (38)$$

Mediante una manipulación algebraica para seleccionar el peor caso, se llega a la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & 2x_1x_2 + cx_2 \operatorname{sign}(s) - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 x_1^2 \\ & + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 x_1 \operatorname{sign}(s) + x_1^2 + s^2 \\ \leq & 2x_1x_2 + c|x_2| - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 x_1^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 |x_1| \\ & + x_1^2 + s^2 < 0. \end{aligned}$$

Se considera el conjunto siguiente, donde dentro de una bola $\mathcal{B}_R = \{x = (x_1, x_2)^T \in$

$\mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$ de radio R , considerando que $(x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{B}_R$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &\leq 2x_1x_2 + c|x_2| - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2x_1^2 + \frac{1}{\gamma^2}cd_1^2|x_1| \\ &\quad + x_1^2 + s^2 \\ &\leq x_1^2 + x_2^2 - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + cR + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2R^2 + \frac{1}{\gamma^2}cd_1^2R \\ &\quad + R^2 + 2c^2R^2 + 2R^2 < 0 \end{aligned}$$

donde consideramos previamente las siguientes desigualdades, $(x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{B}_R$ dentro de una bola de radio R

$$s^2 \leq 2c^2x_1^2 + 2x_2^2 \leq 2c^2R^2 + 2R^2$$

y

$$2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq R^2.$$

Nuevamente buscando el peor caso se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &\leq x_1^2 + x_2^2 - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + cR + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2R^2 + \frac{1}{\gamma^2}cd_1^2R \\ &\quad + R^2 + 2c^2R^2 + 2R^2 \\ &\leq R^2 - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + cR + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2R^2 + \frac{1}{\gamma^2}cd_1^2R \\ &\quad + R^2 + 2c^2R^2 + 2R^2 < 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos se llega a:

$$\mathcal{H}_c \leq - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) \right] + R^2 \left(4 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2 + 2c^2 \right) + cR \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2 \right) < 0 \quad (39)$$

por lo tanto si $M(R) = M$ es lo suficientemente grande para satisfacer la última desigualdad, se obtiene que \mathcal{H}_c será definida negativa y además tiene que ser lo suficientemente grande para cumplir con la siguiente desigualdad.

$$M(R) > \frac{1}{4\gamma^2} (c^2d_1^2 + d_2^2) + R^2 \left(4 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2 + 2c^2 \right) + cR \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2 \right). \quad (40)$$

Bajo las condiciones (61)–(40) se dice que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistemas se cumple.

3.1.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.

Si el sistema está restringido a la superficie de discontinuidad (34), entonces la desigualdad de Hamilton–Jacobi, toma la forma

$$\frac{\partial V_c^0}{\partial x_c^0} f^0(x_c^0) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_c^0}{\partial x_c^0} g^0(x_c^0) (g^0)^T(x_c^0) \left(\frac{\partial V_c^0}{\partial x_c^0} \right)^T + h^T(x_c^0) h(x_c^0) \leq -v(x_c^0). \quad (41)$$

En presencia de modos deslizantes la dinámica del sistema cambia y se reduce el orden del sistema dado que en ese caso la superficie cambia su valor, es decir, $s = 0$ y el sistema descrito en (31) se obtiene lo siguiente:

$$s = cx_1 + x_2 = 0$$

por lo tanto:

$$x_2 = -cx_1.$$

La salida en modos deslizantes está dada por:

$$z_c^0 = [x_1, 0]^T. \quad (42)$$

Por ende el sistema (31) se reduce a

$$\dot{x}_1 = -cx_1 + d_1 \omega_1. \quad (43)$$

Definiendo la dinámica (5) en términos de el vector de estados x_c^0 , y el sistema nominal $f(x_c^0)$ repectivamente:

$$x_c^0 = x_1; \quad f(x_c^0) = -cx_1.$$

La matriz de coeficiente que afecta a las perturbaciones g_c^0 y el vector de perturbacio-

nes ω_c^0

$$g(x_c^0) = d_1; \quad \omega_c^0 = \omega_1$$

y la función de Lyapunov (55), se reduce a:

$$V_c^0 = x_1^2 \quad (44)$$

cuya derivada parcial resulta ser

$$\frac{\partial V_c^0}{\partial x_c^0} = 2x_1.$$

De acuerdo con la desigualdad en (41), se obtiene:

$$\mathcal{H}_c^0 = -2cx_1^2 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2x_1^2 + x_1^2,$$

simplificando términos tenemos que la desigualdad queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_c^0 = -x_1^2 \left[2c - \left(\frac{1}{\gamma^2}d_1^2 + 1 \right) \right] < 0$$

que será definida negativa si y sólo si

$$c > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2}d_1^2 + 1 \right). \quad (45)$$

3.1.3. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado con la información completa

Resumiendo las derivaciones hechas en las subsecciones 3.1.1 y 3.1.2 y aplicando el Teorema 2.1 para el sistema en cuestión, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1 Sean una $\gamma > 0$ y un radio $R > 0$ arbitrarios, dados los parámetros del controlador M y c tales que las desigualdades (40) y (45) se cumplan. Entonces el sistema en lazo cerrado (31)–(34) es asintótico e internamente estable y posee localmente una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (32).

Demostración. Se requiere de las operaciones de las subsecciones 3.1.1 y 3.1.2 para que el resultado del Teorema 3.1 se concluya. ■

Esta claro que el Teorema 3.1 presenta las reglas de sintonización para la síntesis de retroalimentación del estado por modos deslizantes de un doble integrador perturbado y sus características constructivas son numéricamente ilustradas a continuación.

3.1.4. Resultados de simulación

El desempeño del sistema en lazo cerrado (31)-(34) fue numéricamente probado para un sistema de segundo orden, bajo los valores de los parámetros $d_1 = d_2 = 1$ en presencia de las perturbaciones armónicas no acopladas y acopladas respectivamente

$$\omega_1 = \omega_2 = 0.2 \text{ sen}(3t). \quad (46)$$

Se implementó en la herramienta de Simulink, con el método de integración numérico *ode4* (Runge–Kutta), con paso fijo y paso de integración 1×10^{-3} , las condiciones iniciales se establecieron en $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$, y nuestro caso de estudio es confinado a una bola B_R de radio $R = 0.2$. Especificando el nivel de atenuación deseado con $\gamma = 0.5$, los parámetros del controlador se ajustan a $c_1 = 2.6$ y $M = 8.5$ para asegurar que las condiciones (38) y (45) del Teorema 2 se satisfagan. La dinámica correspondiente al sistema de lazo cerrado afectado por la perturbación desacoplada se representa en la Figura 1. La dinámica del mismo sistema afectado por ambos tipos de perturbaciones desacopladas y acopladas se representa en la Figura 2 con condiciones iniciales en $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$, mientras que en la Figura 3 se muestra el mismo sistema con condiciones iniciales en $x_1(0) = 0.1$ y $x_2(0) = 1$. El buen desempeño se concluye de estas figuras, apoyando la teoría desarrollada. Estas figuras muestran no sólo el rechazo de perturbaciones acopladas sino también de atenuación de perturbaciones desacopladas.

Además, para demostrar el efecto de atenuación de perturbaciones acopladas con un valor de magnitud mas grande que la magnitud del controlador, se desarrolló otra simulación del sistema en lazo cerrado manipulado con el mismo controlador, cuya ganancia fue disminuida a un valor $M = 0.06$ más pequeño que la magnitud de la perturbación acoplada. Para garantizar que se cumplen las condiciones (38) y (45) se modifican los

parámetros a $c = 0.6$ y $\gamma = 5$. La Figura 4 que corresponde al sistema especificado con estos parámetros muestra que la perturbación acoplada con la magnitud más grande que la ganancia del controlador aún se atenúa.

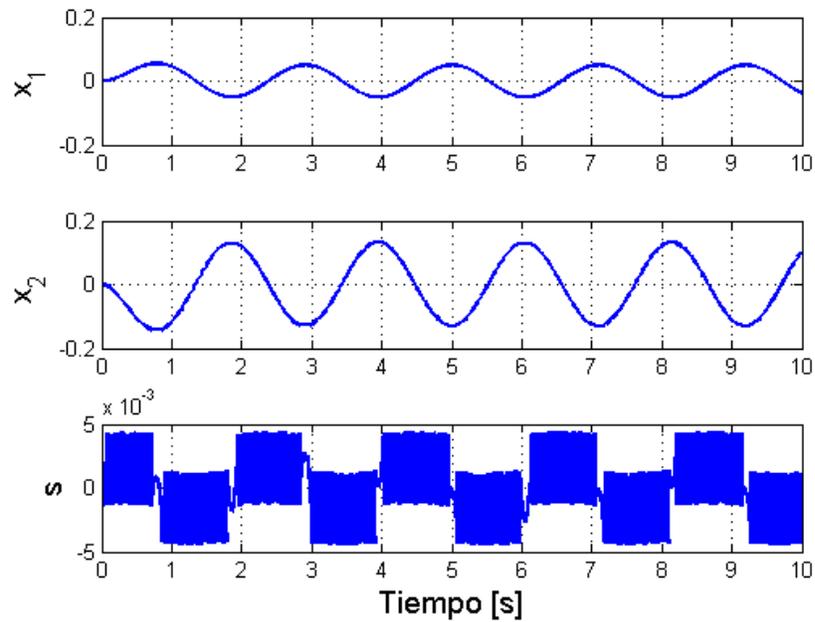


Figura 1: Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbación armónica desacoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.

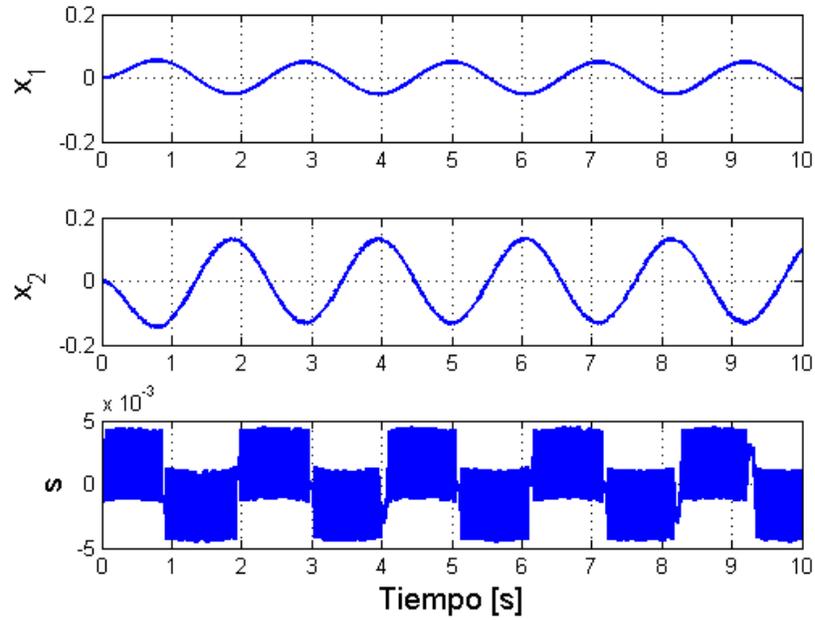


Figura 2: Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbaciones armónicas desacoplada y acoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.

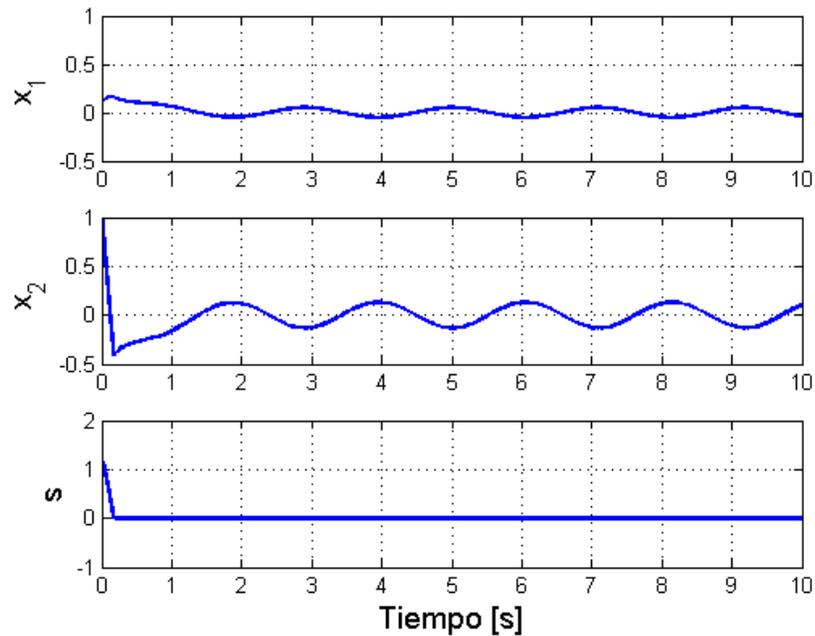


Figura 3: Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbaciones armónicas desacoplada y acoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0.1$ y $x_2(0) = 1$.

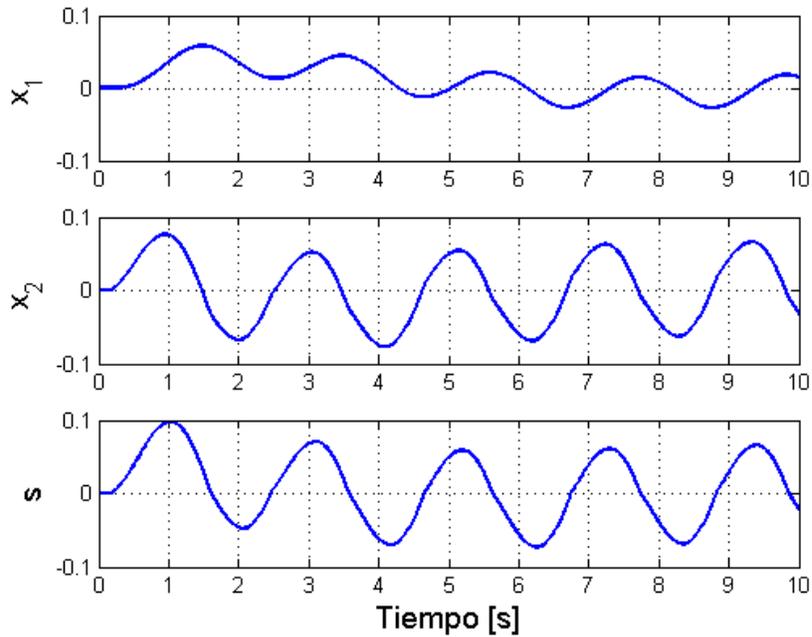


Figura 4: Dinámica del sistema en lazo cerrado (31)-(34) afectado por perturbación armónica acoplada (46) con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.

3.2. Sintonización del observador en modos deslizantes de doble integrador perturbado

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 es aplicado a un observador por modos deslizantes de un doble integrador perturbado

$$\dot{x}_1 = x_2 + d_1\omega_1(t) \quad (47)$$

$$\dot{x}_2 = u + d_2\omega_2(t)$$

con salida

$$y = x_1 + \omega_0(t) \quad (48)$$

donde $\omega_0(t) \in \mathbb{R}$ es una perturbación. Dado a que sólo se tiene acceso a x_1 es necesario definir un observador, para poder estimar los estados restantes. Considerando la salida medida (48) su dinámica sería la siguiente:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{\omega}_0(t) = x_2 + d_1\dot{\omega}_1(t) + \dot{\omega}_0(t). \quad (49)$$

Así, el sistema (47) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\ \dot{x}_2 &= u + d_2\omega_2(t).\end{aligned}\tag{50}$$

Ahora proponemos el siguiente observador discontinuo definido por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}} &= \hat{x}_2 + l_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= u + l_2 \text{sign}(e_1)\end{aligned}\tag{51}$$

donde \hat{y} y \hat{x}_2 son los estados observados. Definiendo los errores de observación de estados como:

$$\begin{aligned}e_1 &= y - \hat{y} \\ e_2 &= x_2 - \hat{x}_2.\end{aligned}\tag{52}$$

Por consiguiente la dinámica del error es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - l_1 \text{sign}(e_1) + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\ \dot{e}_2 &= -l_2 \text{sign}(e_1) + d_2\omega_2(t).\end{aligned}\tag{53}$$

El sistema (53) con salida (49) se puede representar en la forma (5) con:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}^T, \quad \omega_e(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \dot{\omega}_0(t) \end{bmatrix}^T.$$

$$f(e) = \begin{bmatrix} e_2 - l_1 \text{sign}(e_1) \\ -l_2 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}, \quad g(e) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 \end{bmatrix};$$

con la salida objetivo (6) definida como:

$$z_e = h(e) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}^T.\tag{54}$$

Considerando el sistema (53) y su salida óptima (54), se pueden generar dos casos, detallados en la Tabla 2:

Tabla 2: Casos posibles para el observador de un doble integrador por retroalimentación de la salida.

Caso	e_1	Orden	Condición en la Superficie	Salida
i)	$\neq 0$	2	Fuera	$z_e = h(e) = [e_1, e_2]^T$
ii)	0	1	Sobre	$z_e^0 = h(e^0) = [0, e_2]^T$

Para demostrar que el sistema (53) fuera y sobre la superficie de deslizamiento respectivamente, satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi, según sea el caso se emplea la siguiente función definida positiva:

$$V_e = |e_1| + e_2^2. \quad (55)$$

3.2.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.

Redefiniendo la desigualdad de Hamilton–Jacobi, para el sistema bajo estudio:

$$\mathcal{H}(e, \alpha(e)) = \frac{\partial V_e}{\partial e} f(e) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_e}{\partial e} g(e) g^T(e) \left(\frac{\partial V_e}{\partial e} \right)^T + h^T(e) h(e) \leq -v(e). \quad (56)$$

La derivada parcial de (55) resulta ser

$$\frac{\partial V_e}{\partial e} = \left[\frac{\partial V_e}{\partial e_1}, \frac{\partial V_e}{\partial e_2} \right] = [\text{sign}(e_1), 2e_2]. \quad (57)$$

Entonces la función $\mathcal{H}_e = \mathcal{H}(e, \alpha(e))$ resulta ser:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e &= e_2 \text{sign}(e_1) - l_1 \text{sign}^2(e_1) - 2l_2 e_2 \text{sign}(e_1) \\ &+ \frac{1}{4\gamma^2} \left[d_1^2 \text{sign}^2(e_1) + \text{sign}^2(e_1) + 4e_2^2 d_2^2 \right] + e_1^2 + e_2^2 < 0 \end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e = & e_2 \operatorname{sign}(e_1) - 2l_2 e_2 \operatorname{sign}(e_1) - l_1 \operatorname{sign}^2(e_1) + \frac{1}{4\gamma^2} d_1^2 \operatorname{sign}^2(e_1) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \operatorname{sign}^2(e_1) + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0, \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e = & e_2 \operatorname{sign}(e_1) - 2l_2 e_2 \operatorname{sign}(e_1) - \operatorname{sign}^2(e_1) \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] \\ & + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Dado que $\operatorname{sign}^2(e_1) = 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e = & e_2 \operatorname{sign}(e_1) - 2l_2 e_2 \operatorname{sign}(e_1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] \\ & + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0 \end{aligned} \quad (59)$$

de donde podemos obtener la siguiente condición

$$l_1 > \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1). \quad (60)$$

Volviendo a la desigualdad (59) continuamos agrupando y simplificando términos:

$$\mathcal{H}_e = - (e_2) \operatorname{sign}(e_1) [2l_2 - 1] - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0.$$

Procediendo a seleccionar el peor caso tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e = & - (e_2) \operatorname{sign}(e_1) [2l_2 - 1] - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \\ \leq & |e_2| (2l_2 - 1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0, \end{aligned} \quad (61)$$

del cual, se obtiene la condición para l_2 de acuerdo a:

$$l_2 > \frac{1}{2}. \quad (62)$$

Se considera el conjunto siguiente, donde dentro de una bola $\mathcal{B}_R = \{\mathbf{e} = (e_1, e_2)^T \in \mathbb{R}^2 : e_1^2 + e_2^2 \leq R^2\}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (61), agrupados entre sí en

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e &\leq |e_2|(2l_2 - 1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \\ &\leq R(2l_2 - 1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + R^2 \left(\frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) < 0, \end{aligned}$$

luego se selecciona la ganancia del observador $l_1 = l_1(R)$:

$$l_1(R) > \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) + R(2l_2 - 1) + R^2 \left(\frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) \quad (63)$$

por lo tanto la relación la desigualdad de Hamilton–Jacobi (56) se cumple dentro de \mathcal{B}_R .

3.2.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.

Si el sistema está restringido a la superficie de discontinuidad, entonces la desigualdad de Hamilton–Jacobi toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(\mathbf{e}^0, \alpha(\mathbf{e}^0)) &= \frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{e}^0} f^0(\mathbf{e}^0) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{e}^0} \mathbf{g}^0(\mathbf{e}^0) (\mathbf{g}^0)^T(\mathbf{e}^0) \left(\frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{e}^0} \right)^T \\ &\quad + h^T(\mathbf{e}^0) h(\mathbf{e}^0) \leq -v(\mathbf{e}^0). \end{aligned} \quad (64)$$

La ecuación de MD, que rige la dinámica del sistema en la superficie de conmutación (e_1), se obtiene aplicando el método de control equivalente. Entonces, si está restringido a la superficie de deslizamiento (e_1), el sistema (53) de orden dos se reduce a un sistema de orden uno

$$\dot{e}_2 = - \left(\frac{l_2}{l_1} \right) (e_2 + d_1 \omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t)) + d_2 \omega_2(t). \quad (65)$$

La dinámica anterior se puede representar en la forma (5), donde

$$\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{g}(\mathbf{e}^0) = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{l_1} d_1 & d_2 & -\frac{l_2}{l_1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}^0) = -\frac{l_2}{l_1} \mathbf{e}_2, \quad \omega_{\mathbf{e}^0}(t) = \left[\omega_1(t), \omega_2(t), \dot{\omega}_0(t) \right]^T;$$

y la salida (54):

$$\mathbf{z}_e^0 = \mathbf{h}(\mathbf{e}^0) = [0, \mathbf{e}_2]^T. \quad (66)$$

La función definida positiva (55) sobre la superficie de deslizamiento $e_1 = 0$ se simplifica a

$$V_e = \mathbf{e}_2^2. \quad (67)$$

La derivada parcial de (67), viene dada por:

$$\frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{e}^0} = 2\mathbf{e}_2. \quad (68)$$

Ahora demostraremos que para la función (67), el sistema (65)–(66) satisface la desigualdad HJ $\mathcal{H}_e^0 = \mathcal{H}^0(\mathbf{e}^0, \alpha(\mathbf{e}^0))$. Para este fin nótese que

$$\mathcal{H}_e^0 = -2\frac{l_2}{l_1} \mathbf{e}_2^2 + \frac{1}{4\gamma^2} \left(4\mathbf{e}_2^2 \frac{l_2^2 d_1^2}{l_1} + 4\mathbf{e}_2^2 d_2^2 + 4\mathbf{e}_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) + \mathbf{e}_2^2 < 0$$

agrupando términos tenemos:

$$\mathcal{H}_e^0 = -2\frac{l_2}{l_1} \mathbf{e}_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \mathbf{e}_2^2 \frac{l_2^2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 \mathbf{e}_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{e}_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + \mathbf{e}_2^2 < 0. \quad (69)$$

Simplificando términos y dividiendo todo sobre \mathbf{e}_2^2 obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{H}_e^0 \leq \frac{l_2^2}{\gamma^2 l_1^2} (d_1^2 + 1) - 2\frac{l_2}{l_1} + \frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 < 0. \quad (70)$$

Tenemos una desigualdad de segundo orden, entonces para resolverla definimos:

$$\kappa_{1,2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4af}}{2a} \quad (71)$$

donde

$$a = \frac{1}{\gamma^2}(d_1^2 + 1); \quad b = -2; \quad f = \frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1; \quad (72)$$

simplificando la desigualdad (71) se obtiene:

$$\kappa_{1,2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - af}}{a}. \quad (73)$$

Por lo tanto (73), puede tomar un valor dentro de este rango de valores:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - af}}{a} < \kappa < \frac{1 + \sqrt{1 - af}}{a}. \quad (74)$$

Considerando que $af < 1$, obtenemos una desigualdad cuadrática:

$$\gamma^4 - \gamma^2(d_1^2 + 1) - d_2^2(d_1^2 + 1) > 0$$

y, por lo tanto, consideramos el siguiente cambio de variable $\alpha = \gamma^2$, lo que nos lleva a una desigualdad de segundo orden:

$$\alpha^2 - \alpha(d_1^2 + 1) - d_2^2(d_1^2 + 1) > 0.$$

Al resolver la desigualdad previa, obtenemos que:

$$\alpha > \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\eta\mu}}{2\eta},$$

donde los valores son definidos a continuación:

$$\eta = 1; \quad \beta = -(d_1^2 + 1); \quad \mu = -d_2^2(d_1^2 + 1).$$

Por consiguiente se obtiene que la condición para el valor de α la cual satisface:

$$\alpha > d_1^2 + 1 + \sqrt{(d_1^2 + 1)(d_1^2 + 1 + 4d_2^2)} \quad (75)$$

siendo a su vez

$$\gamma^2 > d_1^2 + 1 + \sqrt{(d_1^2 + 1)(d_1^2 + 1 + 4d_2^2)}. \quad (76)$$

Recordando que $\frac{l_2}{l_1} = \kappa$ de (74) es según:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - af}}{a} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{1 + \sqrt{1 - af}}{a},$$

se llega a la conclusión siguiente:

$$l_2 \left(\frac{a}{1 - \sqrt{1 - af}} \right) > l_1 > l_2 \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - af}} \right). \quad (77)$$

Redefiniendo la condición previa:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} \right) > l_1 > l_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - af}}{f} \right). \quad (78)$$

Por otro lado, considerando el valor de l_1 (63), tenemos la siguiente desigualdad:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} \right) > \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) + R(2l_2 - 1) + R^2 \left(\frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 \right). \quad (79)$$

Simplificando términos tenemos de acuerdo a las variables previamente definidas tenemos que:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} \right) > \frac{a}{4} + R(2l_2 - 1) + R^2 f \quad (80)$$

agrupando términos de l_2 , para simplificar en la desigualdad previa tenemos:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} - 2R \right) > \frac{a}{4} - R + R^2 f \quad (81)$$

de donde podemos obtener la condición para R , la cual es:

$$R < \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{2f} \right). \quad (82)$$

Se obtiene la cota para l_2 a partir de (81):

$$l_2 > \frac{f(a - 4R + 4R^2f)}{4(1 + \sqrt{1 - af} - 2Rf)} \quad (83)$$

y con la doble condición para l_1 (78) se reafirma que se necesita que l_1 esté acotada dentro de un rango de valores dependiendo de l_2 y a su vez se obtiene una segunda condición para l_2 (83) y R (82), así la validez de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (64) se verifica en la superficie de deslizamiento (e_1) sujeta a (76).

3.2.3. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del observador de doble integrador perturbado

Resumiendo las derivaciones hechas en las subsecciones 3.2.1 y 3.2.2 y aplicando el Teorema 2.1 para el sistema en cuestión, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2 *Considérese el sistema discontinuo (47) dentro de la región \mathcal{B}_R donde R que satisfacen (72) y (82) y el observador discontinuo (51), basado en la salida medible (48). Suponga que existe una γ^2 suficientemente grande que satisface la desigualdad (76). Si l_2 satisface las desigualdades (62) y (83) y el parámetro l_1 satisface las desigualdades (63) y (78). Entonces el punto de equilibrio del sistema (53) es asintóticamente internamente estable, y de manera local (dentro de \mathcal{B}_R) posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ^2 con respecto a la salida óptima z (54).*

Demostración. Se requiere de las operaciones de las subsecciones 3.2.1 y 3.2.2 para que el resultado del Teorema 3.2 se concluya. ■

Similar al Teorema 3.1, el Teorema anterior 3.2 constituye las reglas de sintonización para el diseño de un observador por modos deslizantes para un doble integrador perturbado. El desempeño del observador, ya sintonizado, es ilustrado en un ejemplo numérico a continuación.

3.2.4. Resultados de simulación

El desempeño del sistema en errores (53) se probó de manera numérica para un sistema de segundo orden, bajo los parámetros $d_1 = d_2 = 1$ en presencia de las perturbaciones armónicas no acopladas y acopladas respectivamente

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0.2 \text{ sen}(3t). \quad (84)$$

Se implementó en la herramienta de Simulink, con el método de integración numérico `ode4` (Runge–Kutta), con paso fijo y un paso de integración de 1×10^{-3} . Las condiciones iniciales se establecieron en $e_1(0) = 0$ y $e_2(0) = 0$, y nuestro caso de estudio es confinado a una bola \mathcal{B}_R de radio $R = 0.7$. Especificando el nivel de atenuación deseado con $\gamma^2 = 5.5$, los parámetros del observador se ajustan a $l_2 = 1$ para asegurar que las condiciones (62) y (83) y el parámetro $l_1 = 1.4$ cumpla con las desigualdades (63) y (78) del Teorema 3.2 se satisfagan. La dinámica del sistema en errores se muestra en la Figura 5, el buen desempeño se concluye de estas figuras, apoyando la teoría desarrollada. En la Figura 6 se muestra la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema, y en la cual se verifica que posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ^2 con respecto a la salida óptima z (54).

En la Figura 7 se muestra la dinámica del sistema con condiciones diferentes de cero, es decir: $e_1(0) = 0.5$ y $e_2(0) = 0.8$, con los mismos parámetros del caso anterior.

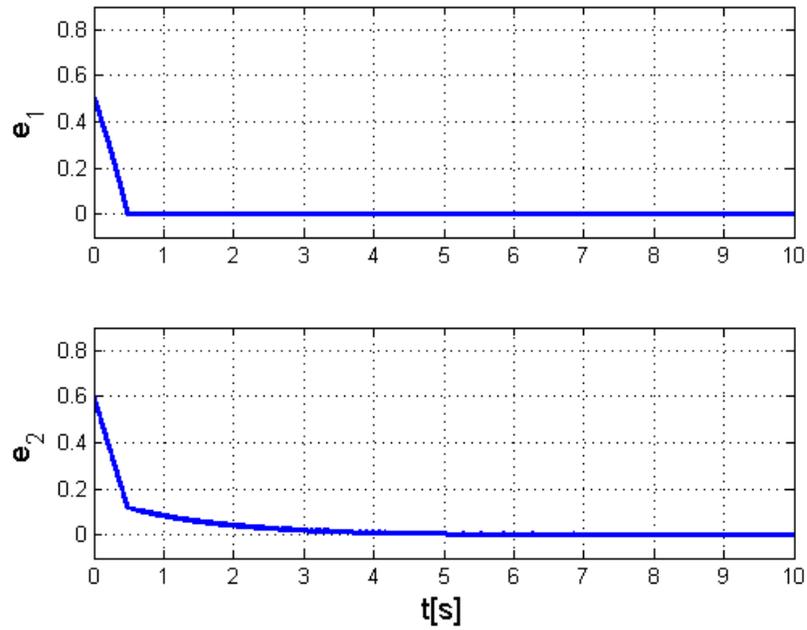


Figura 5: Dinámica del sistema en errores (53) no perturbado con condiciones iniciales $e_1(0) = 0.5$ y $e_2(0) = 0.6$.

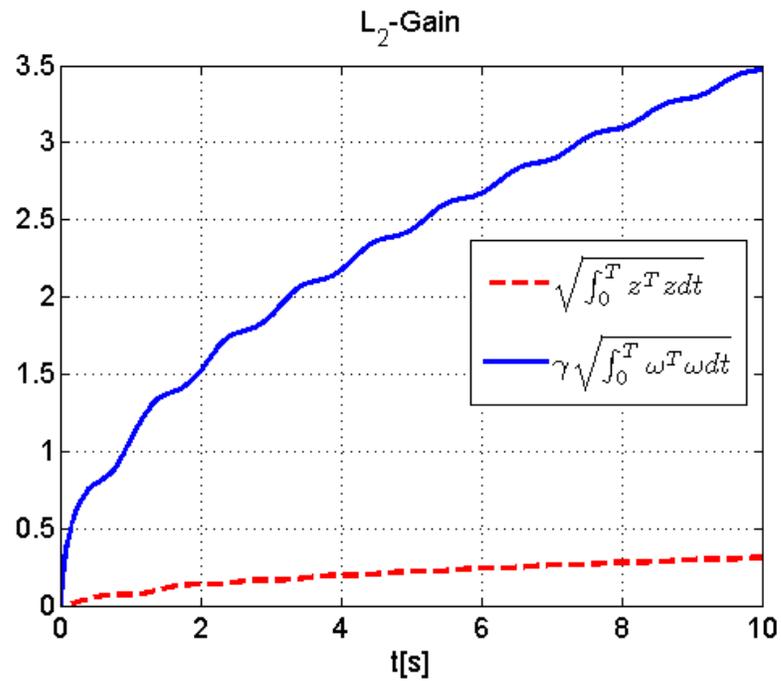


Figura 6: Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en errores (53) afectado por las perturbaciones (84).

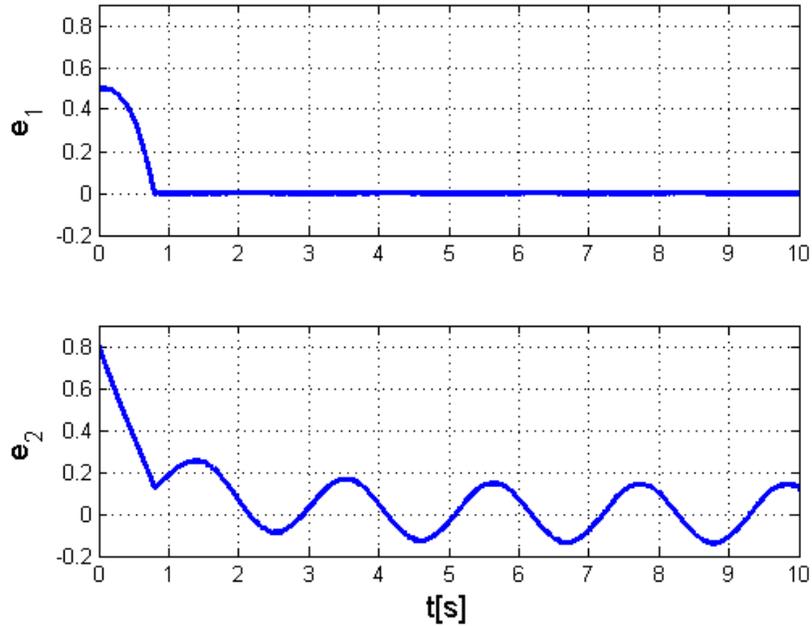


Figura 7: Dinámica del sistema en errores (53) afectado por las perturbaciones (84), con $e_1(0) = 0.5$ y $e_2(0) = 0.8$.

3.3. Sintonización del controlador por modos deslizantes de doble integrador perturbado: el caso de información incompleta

Ahora analizando el sistema completo, es decir, considerando las dinámicas de el sistema (50) y de error del observador (53), el sistema a evaluar es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= x_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\
 \dot{x}_2 &= u + d_2\omega_2(t) \\
 \dot{e}_1 &= e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) - l_1 \text{sign}(e_1) \\
 \dot{e}_2 &= d_2\omega_2(t) - l_2 \text{sign}(e_1)
 \end{aligned} \tag{85}$$

controlado por

$$u = -M \text{sign}(\hat{s}), \tag{86}$$

donde $M > 0$ es la magnitud de conmutación y cuya superficie es definida por:

$$\hat{s} = cy + \hat{x}_2 \tag{87}$$

donde c es una constante positiva. Dado que uno de los elementos del vector de estado del sistema (85) es x_2 , se realiza un cambio de variable utilizando la ecuación de error en e_2 (es decir):

$$e_2 = x_2 - \hat{x}_2;$$

por lo tanto:

$$\hat{x}_2 = x_2 - e_2.$$

Por lo tanto la ecuación de la superficie queda de la siguiente manera

$$\hat{s} = cy + x_2 - e_2. \quad (88)$$

La salida óptima (6) para la dinámica del sistema completo (85) se define:

$$z_\xi = h(\xi) = [y, \hat{s}(y, x_2, e_2), e_1, e_2]^T. \quad (89)$$

La dinámica del sistema (85) se puede representar de la forma (5) con

$$\xi = [y, x_2, e_1, e_2]^T; \quad \omega_\xi(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dot{\omega}_0(t)]^T;$$

$$f(\xi) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M \operatorname{sign}[cy + x_2 - e_2] \\ e_2 - l_1 \operatorname{sign}(e_1) \\ -l_2 \operatorname{sign}(e_1) \end{bmatrix}; \quad g(\xi) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para demostrar que el sistema (85) fuera y sobre la superficie de deslizamiento respectivamente, satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi, según sea el caso se emplea la siguiente función definida positiva:

$$V_\xi = y^2 + |\hat{s}| + |e_1| + e_2^2. \quad (90)$$

Considerando el sistema completo (85) y la salida óptima (89), se pueden generar

cuatro casos, detallados en la Tabla 3.

Tabla 3: Casos posibles para un doble integrador por retroalimentación de la salida.

Caso	\hat{s}	e_1	Orden	Condición en la Superficie	Salida
i)	$\neq 0$	$\neq 0$	4	Fuera	$z_{\xi i} = h(\xi) = [y, \hat{s}(y, x_2, e_2), e_1, e_2]^T$
ii)	0	$\neq 0$	3	Sobre una	$z_{\xi ii}^0 = h(\xi_{ii}^0) = [y, 0, e_1, e_2]^T$
iii)	$\neq 0$	0	3	Sobre una	$z_{\xi iii}^0 = h(\xi_{iii}^0) = [y, \hat{s}(y, x_2, e_2), 0, e_2]^T$
iv)	0	0	2	Sobre ambas	$z_{\xi iv}^0 = h(\xi_{iv}^0) = [y, 0, 0, e_2]^T$

3.3.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.

Redefiniendo la desigualdad de Hamilton–Jacobi, en términos del sistema a aplicar:

$$\mathcal{H}(\xi, \alpha(\xi)) = \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \xi} f(\xi) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \xi} g(\xi) g^T(\xi) \left(\frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \xi} \right)^T + h^T(\xi) h(\xi) \leq -v(\xi). \quad (91)$$

Caso I: Primeramente por claridad se vuelve a definir la salida óptima (6) para la dinámica de este caso, que es la misma que el sistema completo (85), la cual está dada en (89), definida como:

$$z_{\xi i} = h(\xi) = [y, \hat{s}(y, x_2, e_2), e_1, e_2]^T.$$

La función definida positiva (90), queda de la siguiente manera:

$$V_{\xi i} = y^2 + |\hat{s}| + |e_1| + e_2^2.$$

Obtenemos la derivada de (90), la cual es:

$$\frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial V_{\xi i}}{\partial y}, \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial x_2}, \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial e_1}, \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial e_2} \right] \quad (92)$$

donde la derivada del primero, segundo y cuarto término se definen de la siguiente manera,

$$\frac{\partial V_{\xi i}}{\partial y} = \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial \hat{s}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial x_2} = \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial e_2} = \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial e_2} + \frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial \hat{s}}{\partial e_2},$$

por consiguiente la derivada (92) se expresa de la forma

$$\frac{\partial V_{\xi i}}{\partial \xi} = [2y + c \operatorname{sign}(\hat{s}), \quad \operatorname{sign}(\hat{s}), \quad \operatorname{sign}(e_1), \quad 2e_2 - \operatorname{sign}(\hat{s})]. \quad (93)$$

Sustituyendo (93) en el lado izquierdo de (91). Para fines prácticos se denota el lado izquierdo de la ecuación Hamilton–Jacobi como $\mathcal{H}_{\xi i} = \mathcal{H}(\xi, \alpha(\xi))$, la cual se evalúa de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi i} = & 2x_2 y + cx_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - M \operatorname{sign}^2(\hat{s}) + e_2 \operatorname{sign}(e_1) - l_1 \operatorname{sign}^2(e_1) \\ & - 2e_2 l_2 \operatorname{sign}(e_1) + l_2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 y^2 + cd_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s})) \\ & + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 y \operatorname{sign}(e_1) + y^2 + cy \operatorname{sign}(\hat{s}) + y \operatorname{sign}(e_1) + d_2^2 e_2^2) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \operatorname{sign}^2(\hat{s}) (c^2 d_1^2 + c^2) + \frac{1}{2\gamma^2} cd_1^2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) \\ & + \frac{1}{2\gamma^2} c \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{4\gamma^2} \operatorname{sign}^2(e_1) (d_1^2 + 1) \\ & + y^2 + \hat{s}^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi i} = & 2x_2 y + cx_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - \operatorname{sign}^2(\hat{s}) \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) \right] + e_2 \operatorname{sign}(e_1) \\ & - \operatorname{sign}^2(e_1) \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] - 2e_2 l_2 \operatorname{sign}(e_1) + l_2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) \\ & + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y \operatorname{sign}(e_1) + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cy \operatorname{sign}(\hat{s}) \\ & + \frac{1}{\gamma^2} y \operatorname{sign}(e_1) + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 e_2^2 + \frac{1}{2\gamma^2} cd_1^2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) \\ & + \frac{1}{2\gamma^2} c \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) + y^2 + \hat{s}^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Al agrupar términos encontramos que se presenta exactamente el caso con el observador fuera de la superficie (58), generando así que la desigualdad de Hamilton-Jacobi para este caso se particione en dos secciones, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{H}_{\xi i} = \mathcal{H}_{\xi ia} + \mathcal{H}_{\xi ib} < 0 \quad (94)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\xi ia} = & 2x_2y + cx_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - \operatorname{sign}^2(\hat{s}) \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) \right] \\
 & + l_2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y \operatorname{sign}(e_1) \\
 & + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cy \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} y \operatorname{sign}(e_1) + \frac{1}{2\gamma^2} cd_1^2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) \\
 & + \frac{1}{2\gamma^2} c \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) + y^2 + \hat{s}^2 < 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\xi ib} = & e_2 \operatorname{sign}(e_1) - \operatorname{sign}^2(e_1) \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] - 2e_2 l_2 \operatorname{sign}(e_1) \\
 & + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 e_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente con la ecuación de $\mathcal{H}_{\xi ib}$ tenemos el mismo resultado que en (58), generando así que las condiciones para la desigualdad de Hamilton–Jacobi para este caso $\mathcal{H}_{\xi ib}$ sean como en el caso del observador \mathcal{H}_e por retroalimentación del estado fuera de la superficie ($e_1 \neq 0$) en (58), es decir:

$$\mathcal{H}_{\xi ib} = \mathcal{H}_e.$$

Por conveniencia retomaremos los cálculos obtenidos de la sección previa, considerando donde $\operatorname{sign}^2(e_1) = 1$ por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\xi ib} = & e_2 \operatorname{sign}(e_1) - 2l_2 e_2 \operatorname{sign}(e_1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] \\
 & + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0
 \end{aligned} \tag{95}$$

de donde podemos obtener la siguiente condición

$$l_1 > \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1). \tag{96}$$

Volviendo a la desigualdad (95) continuamos agrupando y simplificando términos:

$$\mathcal{H}_{\xi ib} = - (e_2) \text{sign}(e_1) [2l_2 - 1] - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0.$$

Procediendo a seleccionar el peor caso tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi ib} &= - (e_2) \text{sign}(e_1) [2l_2 - 1] - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \\ &\leq |e_2| (2l_2 - 1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0 \end{aligned} \quad (97)$$

del cual, se obtiene la condición para l_2 de acuerdo a:

$$l_2 > \frac{1}{2}. \quad (98)$$

Se considera el conjunto siguiente, donde dentro de una bola $\mathcal{B}_R = \{e = (e_1, e_2)^T \in \mathbb{R}^2 : e_1^2 + e_2^2 \leq R^2\}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (97), agrupados entre sí en

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi ib} &\leq |e_2| (2l_2 - 1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 d_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \\ &\leq R(2l_2 - 1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + R^2 \left(\frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) < 0, \end{aligned}$$

luego se selecciona la ganancia del observador $l_1 = l_1(R)$:

$$l_1(R) > \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) + R(2l_2 - 1) + R^2 \left(\frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) \quad (99)$$

por lo tanto la relación la desigualdad de Hamilton–Jacobi (56) se cumple dentro de \mathcal{B}_R .

Continuando con la otra parte de la desigualdad principal, para $\mathcal{H}_{\xi ia}$, donde $\text{sign}^2(\hat{s}) = 1$ y seleccionando el peor caso, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi ia} &= 2x_2y + cx_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - \operatorname{sign}^2(\hat{s}) \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) \right] \\
&\quad + l_2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y \operatorname{sign}(e_1) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cy \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} y \operatorname{sign}(e_1) + \frac{1}{2\gamma^2} cd_1^2 \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) \\
&\quad + \frac{1}{2\gamma^2} c \operatorname{sign}(e_1) \operatorname{sign}(\hat{s}) + y^2 + \hat{s}^2 \\
&\leq x_2^2 + y^2 + c|x_2| - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) \right] + l_2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 |y| \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |y| + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c|y| + \frac{1}{\gamma^2} |y| + \frac{1}{2\gamma^2} cd_1^2 + \frac{1}{2\gamma^2} c + y^2 + \hat{s}^2 < 0
\end{aligned} \tag{100}$$

entonces obtenemos las condiciones el parámetro M :

$$M > \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1). \tag{101}$$

Se considera el conjunto siguiente, dentro de la bola $\mathcal{B}_R = \{\xi = (y, x_2, e_1, e_2)^T \in \mathbb{R}^4 : y^2 + x_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \leq R^2\}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (100), agrupados entre sí en:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi ia} &\leq x_2^2 + y^2 + c|x_2| - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) \right] + l_2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 |y| \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |y| + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c|y| + \frac{1}{\gamma^2} |y| + \frac{1}{2\gamma^2} cd_1^2 + \frac{1}{2\gamma^2} c + y^2 + \hat{s}^2 < 0
\end{aligned} \tag{102}$$

usando las siguientes desigualdades, válidas dentro de la bola \mathcal{B}_R :

$$\begin{aligned}
\hat{s}^2 &\leq 2c^2 y^2 + (x_2 - e_2)^2 \\
&\leq 2c^2 y^2 + 2(2x_2^2 + 2e_2^2) \\
&\leq 2c^2 y^2 + 4(x_2^2 + e_2^2) \\
&\leq 2c^2 R^2 + 4R^2,
\end{aligned}$$

y

$$2x_2y \leq x_2^2 + y^2 \leq R^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi ia} \leq & R^2 + cR - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) \right] + l_2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 R^2 + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 R \\ & + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 R + \frac{1}{\gamma^2} R^2 + \frac{1}{\gamma^2} cR + \frac{1}{\gamma^2} R + \frac{1}{2\gamma^2} c d_1^2 + \frac{1}{2\gamma^2} c + R^2 \\ & + 2c^2 R^2 + 4R^2 < 0. \end{aligned} \quad (103)$$

Agrupando términos tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi ia} \leq & - \left[M - \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) \right] + R^2 \left[6 + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 2c^2 + 1) \right] + l_2 + \frac{1}{2\gamma^2} c (d_1^2 + 1) \\ & + R \left[c + \frac{1}{\gamma^2} (c d_1^2 + d_1^2 + c + 1) \right] < 0 \end{aligned} \quad (104)$$

por lo tanto si $M(R) = M$ es lo suficientemente grande para satisfacer la desigualdad, se obtiene que $\mathcal{H}_{\xi ia}$ sea definida negativa y además tiene que ser lo suficientemente grande para cumplir con la desigualdad siguiente.

$$\begin{aligned} M(R) > & \frac{1}{4\gamma^2} c^2 (d_1^2 + 1) + R^2 \left[6 + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 2c^2 + 1) \right] + l_2 + \frac{1}{2\gamma^2} c (d_1^2 + 1) \\ & + R \left[c + \frac{1}{\gamma^2} (c d_1^2 + d_1^2 + c + 1) \right] \end{aligned} \quad (105)$$

con estas condiciones se dice que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema se cumple y es menor o igual al cambio, y por lo tanto la relación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (91) se cumple dentro de \mathcal{B}_R .

3.3.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.

La ecuación de MD, que rige la dinámica del sistema completo (85) en la superficie de conmutación \hat{s} (88) y e_1 es obtenida aplicando el método de control equivalente. Entonces, si está restringido a la superficie de deslizamiento \hat{s} (88) ó $e_1 = 0$, el sistema (85)

de orden cuatro se reduce a un sistema de orden tres, produciendo dos casos. Cuando está restringido a la superficie de deslizamiento \hat{s} (88) y $e_1 = 0$, el sistema (85) de orden cuatro se reduce a un sistema de orden dos generando el último caso sobre la superficie tal como se especificó en la Tabla 3. Redefiniendo la desigualdad de Hamilton–Jacobi cuando se encuentra sobre la superficie, en términos del sistema bajo estudio:

$$\mathcal{H}^0(\xi, \alpha(\xi)) = \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} f^0(\xi) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} g^0(\xi) (g^0)^T(\xi) \left(\frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} \right)^T + h^T(\xi) h(\xi) \leq -v(\xi). \quad (106)$$

Caso II: Cuando $\hat{s} = 0$ y $e_1 \neq 0$ el sistema completo (85) se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -cy + e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\ \dot{e}_1 &= e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) - l_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2 &= d_2\omega_2(t) - l_2 \text{sign}(e_1) \end{aligned} \quad (107)$$

y la salida (89) está dada por

$$z_{\xi_{ii}}^0 = h(\xi_{ii}^0) = [y, 0, e_1, e_2]^T. \quad (108)$$

La dinámica (107) se puede describir en la forma (5) con

$$\begin{aligned} \xi_{ii}^0 &= [y, e_1, e_2]^T; \quad \omega_{\xi_{ii}^0}(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dot{\omega}_0(t)]^T; \\ f(\xi_{ii}^0) &= \begin{bmatrix} -cy + e_2 \\ e_2 - l_1 \text{sign}(e_1) \\ -l_2 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}; \quad g(\xi_{ii}^0) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La función definida positiva (90) sobre la superficie de deslizamiento $S = 0$ se simplifica a

$$V_{\xi_{ii}} = y^2 + |e_1| + e_2^2. \quad (109)$$

La derivada parcial de (109) es:

$$\frac{\partial V_{\xi_{ii}}}{\partial \xi_{ii}^0} = \left[\frac{\partial V_{\xi_{ii}}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_{\xi_{ii}}}{\partial \mathbf{e}_1}, \quad \frac{\partial V_{\xi_{ii}}}{\partial \mathbf{e}_2} \right] \quad (110)$$

donde

$$\frac{\partial V_{\xi_{ii}}}{\partial \xi_{ii}^0} = [2y, \quad \text{sign}(\mathbf{e}_1), \quad 2\mathbf{e}_2]. \quad (111)$$

Se demostrará que el sistema (107) sobre la superficie, es decir, cuando $\hat{s} = 0$ y $\mathbf{e}_1 \neq 0$ con la función definida positiva en (109), satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi (106).

Para este fin considérese $\mathcal{H}_{\xi_{ii}}^0 = \mathcal{H}^0(\xi_{ii}^0, \alpha(\xi_{ii}^0))$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{ii}}^0 &= -2cy^2 + 2\mathbf{e}_2y + \mathbf{e}_2 \text{sign}(\mathbf{e}_1) - l_1 \text{sign}^2(\mathbf{e}_1) - 2\mathbf{e}_2l_2 \text{sign}(\mathbf{e}_1) \\ &+ \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2y^2 + d_1^2y \text{sign}(\mathbf{e}_1) + y^2 + y \text{sign}(\mathbf{e}_1) + d_2^2\mathbf{e}_2^2) \\ &+ \frac{1}{4\gamma^2} \text{sign}^2(\mathbf{e}_1) [d_1^2 + 1] + y^2 + \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Expandiendo términos entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{ii}}^0 &= -2cy^2 + 2\mathbf{e}_2y + \mathbf{e}_2 \text{sign}(\mathbf{e}_1) - 2\mathbf{e}_2l_2 \text{sign}(\mathbf{e}_1) \\ &- \text{sign}^2(\mathbf{e}_1) \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2y^2 \\ &+ \frac{1}{\gamma^2} d_1^2y \text{sign}(\mathbf{e}_1) + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} y \text{sign}(\mathbf{e}_1) + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2\mathbf{e}_2^2 \\ &+ y^2 + \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Al agrupar términos encontramos que se presenta exactamente el caso previo como en $\mathcal{H}_{\xi_{ib}}$, generando así que la desigualdad de Hamilton-Jacobi para este caso se particione en dos secciones, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{H}_{\xi_{ii}}^0 = \mathcal{H}_{\xi_{ia}}^0 + \mathcal{H}_{\xi_{ib}}^0 < 0 \quad (112)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi iia}^0 = & -2cy^2 + 2e_2y + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2y^2 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2y \operatorname{sign}(e_1) + \frac{1}{\gamma^2}y^2 + \frac{1}{\gamma^2}y \operatorname{sign}(e_1) \\ & + y^2 < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi iib}^0 = & e_2 \operatorname{sign}(e_1) - \operatorname{sign}^2(e_1) \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] - 2e_2l_2 \operatorname{sign}(e_1) \\ & + \frac{1}{\gamma^2}d_2^2e_2^2 + e_1^2 + e_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente con la ecuación de $\mathcal{H}_{\xi iib}^0$ se tiene el mismo resultado que en (58), y en (95) generando así que las condiciones para la desigualdad de Hamilton–Jacobi para $\mathcal{H}_{\xi iib}^0$ sean como en el caso del observador \mathcal{H}_e por retroalimentación del estado fuera de la superficie ($e_1 \neq 0$) en (58) o el caso previo en $\mathcal{H}_{\xi ib}$ (95), cuando se encuentra fuera de la superficie el controlador por retroalimentación de la salida, es decir:

$$\mathcal{H}_{\xi iib}^0 = \mathcal{H}_{\xi ib} = \mathcal{H}_e.$$

Por lo tanto las condiciones obtenidas en el caso previo, satisfacen la desigualdad de Hamilton–Jacobi, para $\mathcal{H}_{\xi iib}^0 = \mathcal{H}_{\xi ib}$.

Analizando la desigualdad principal, para $\mathcal{H}_{\xi iia}^0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi iia}^0 = & -2cy^2 + 2e_2y + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2y^2 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2y \operatorname{sign}(e_1) + \frac{1}{\gamma^2}y^2 + \frac{1}{\gamma^2}y \operatorname{sign}(e_1) \\ & + y^2 < 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos se llega a:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi iia}^0 = & -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + 2e_2y + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2y \operatorname{sign}(e_1) \\ & + \frac{1}{\gamma^2}y \operatorname{sign}(e_1) < 0 \end{aligned}$$

obtenemos la condición para el parámetro c :

$$c > \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right]. \quad (113)$$

Dado $\text{sign}^2(e_1) = 1$ y seleccionando el peor caso obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{iia}}^0 &= -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + 2e_2 y + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y \text{sign}(e_1) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} y \text{sign}(e_1) \\ &\leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + e_2^2 + y^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |y| + \frac{1}{\gamma^2} |y| < 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Considerando la bola $\mathcal{B}_R = \{\xi_{ii}^0 = (y, e_1, e_2)^T \in \mathbb{R}^3 : y^2 + e_1^2 + e_2^2 \leq R^2\}$ de radio R , y agrupando en el lado derecho de (114), los términos definidos positivos y los que no lo son:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{iia}}^0 &\leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + e_2^2 + y^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |y| + \frac{1}{\gamma^2} |y| \\ &\leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + R^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 R + \frac{1}{\gamma^2} R < 0 \end{aligned} \quad (115)$$

donde consideramos previamente la siguiente desigualdad, de acuerdo a las condiciones dentro de la bola \mathcal{B}_R :

$$2e_2 y \leq e_2^2 + y^2 \leq R^2.$$

Agrupando términos se tiene:

$$\mathcal{H}_{\xi_{iia}}^0 \leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + R^2 + \frac{1}{\gamma^2} R (d_1^2 + 1) < 0 \quad (116)$$

por lo tanto si $c(R) = c$ es lo suficientemente grande para satisfacer la desigualdad, se obtiene que $\mathcal{H}_{\xi_{iia}}^0$ es definida negativa y además tiene que ser lo suficientemente grande

para cumplir con la desigualdad siguiente.

$$c(R) > \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] + \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2\gamma^2} R (d_1^2 + 1) \quad (117)$$

con estas condiciones se dice que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema se cumple y sea menor o igual al cambio, y por lo tanto la relación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (106) se cumple dentro de \mathcal{B}_R .

Caso III: Cuando $\hat{s} \neq 0$ y $e_1 = 0$ donde el sistema completo (85) se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x_2 + d_1 \omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\ \dot{x}_2 &= u + d_2 \omega_2(t) \\ \dot{e}_2 &= d_2 \omega_2(t) - \left(\frac{l_2}{l_1} \right) (e_2 + d_1 \omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t)) \end{aligned} \quad (118)$$

y su salida (89) está dada por

$$z_{\xi_{iii}}^0 = h(\xi_{iii}^0) = [y, \hat{s}(y, x_2, e_2), 0, e_2]^T. \quad (119)$$

Considérese el sistema (118) en la forma (5) donde

$$\begin{aligned} \xi_{iii}^0 &= [y, x_2, e_2]^T; \quad \xi_{iii}^0(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dot{\omega}_0(t)]^T; \\ f(\xi_{iii}^0) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -M \operatorname{sign}[cy + x_2 - e_2] \\ -\frac{l_2}{l_1} e_2 \end{bmatrix}; \quad g_{\xi_{iii}^0} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 \\ -\frac{l_2}{l_1} d_1 & d_2 & -\frac{l_2}{l_1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La función definida positiva (90) sobre la superficie de deslizamiento $e_1 = 0$ se simplifica a

$$V_{\xi_{iii}} = y^2 + |\hat{s}| + e_2^2. \quad (120)$$

La derivada parcial de (120) resulta ser:

$$\frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \xi_{iii}^0} = \left[\frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \mathbf{e}_2} \right] \quad (121)$$

donde

$$\frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial y} = \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial \hat{s}}{\partial y}; \quad \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial x_2} = \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial \hat{s}}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \mathbf{e}_2} = \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \mathbf{e}_2} + \frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \hat{s}} \frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{e}_2};$$

por lo tanto

$$\frac{\partial V_{\xi_{iii}}}{\partial \xi_{iii}^0} = [2y + c \operatorname{sign}(\hat{s}), \quad \operatorname{sign}(\hat{s}), \quad 2\mathbf{e}_2 - \operatorname{sign}(\hat{s})]. \quad (122)$$

Se demostrará que el sistema (118) sobre la superficie, es decir, cuando $\hat{s} \neq 0$ y $\mathbf{e}_1 = 0$ con la función definida positiva en (120), satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi (106). Para este fin considérese $\mathcal{H}_{\xi_{iii}}^0 = \mathcal{H}^0(\xi_{iii}^0, \alpha(\xi_{iii}^0))$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{iii}}^0 = & 2x_2 y + c x_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - M \operatorname{sign}^2(\hat{s}) - 2 \frac{l_2}{l_1} \mathbf{e}_2^2 + \frac{l_2}{l_1} \mathbf{e}_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left(c d_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s}) - 2 d_1^2 \mathbf{e}_2 \frac{l_2}{l_1} y + d_1^2 \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) + y^2 + c y \operatorname{sign}(\hat{s}) \right) \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left(-2 \mathbf{e}_2 \frac{l_2}{l_1} y + \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) - c d_1^2 \mathbf{e}_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) - c \mathbf{e}_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) \right) \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left(d_1^2 \mathbf{e}_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} - d_1^2 \mathbf{e}_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) + d_2^2 \mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} - \mathbf{e}_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) \right) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \operatorname{sign}^2(\hat{s}) \left[c^2 (d_1^2 + 1) + 2c \frac{l_2}{l_1} (d_1^2 + 1) + \frac{l_2^2}{l_1^2} (d_1^2 + 1) \right] \\ & + y^2 + \hat{s}^2 + \mathbf{e}_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos se llega a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi iii}^0 = & 2x_2y + cx_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - \operatorname{sign}^2(\hat{s}) \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c^2 + 2c\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) \right] \\
& + \frac{l_2}{l_1} e_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{2}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} y \\
& + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cy \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y \\
& + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} ce_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) \\
& - \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) + y^2 + \hat{s}^2 \\
& - 2\frac{l_2}{l_1} e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + e_2^2 < 0.
\end{aligned}$$

Al agrupar términos encontramos que se presentan términos con e_2^2 , con lo cual, obtenemos el mismo caso que ocurre cuando el observador se encuentra sobre la superficie ($e_1 = 0$) en (69) generando así que la desigualdad de Hamilton-Jacobi para este caso se particione en dos secciones, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{H}_{\xi iii}^0 = \mathcal{H}_{\xi iii a}^0 + \mathcal{H}_{\xi iii b}^0 < 0 \quad (123)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi iii a}^0 = & 2x_2y + cx_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - \operatorname{sign}^2(\hat{s}) \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c^2 + 2c\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) \right] \\
& + \frac{l_2}{l_1} e_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{2}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} y \\
& + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cy \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y \\
& + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} ce_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) \\
& - \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) + y^2 + \hat{s}^2 < 0.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{\xi iii b}^0 = -2\frac{l_2}{l_1} e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + e_2^2 < 0.$$

Por consiguiente con la ecuación de $\mathcal{H}_{\xi^{iii}b}^0$ tenemos el mismo resultado que en (69) generando así que las condiciones para la desigualdad de Hamilton-Jacobi para este caso $\mathcal{H}_{\xi^{iii}b}^0$ sean como en el caso del observador por retroalimentación del estado sobre la superficie \mathcal{H}_e^0 ($e_1 = 0$) en (70), es decir:

$$\mathcal{H}_{\xi^{iii}b}^0 = \mathcal{H}_e^0.$$

Por claridad definimos nuevamente los cálculos obtenidos en la sección previa, tenemos entonces que $\mathcal{H}_{\xi^{iii}b}^0$ es:

$$\mathcal{H}_{\xi^{iii}b}^0 = -2\frac{l_2}{l_1}e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2}d_1^2e_2^2\frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2}d_2^2e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2}e_2^2\frac{l_2^2}{l_1^2} + e_2^2 < 0. \quad (124)$$

Simplificando términos y dividiendo todo sobre e_2^2 obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{H}_{\xi^{iii}b}^0 = \frac{l_2^2}{\gamma^2 l_1^2} (d_1^2 + 1) - 2\frac{l_2}{l_1} + \frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 < 0. \quad (125)$$

Continuando ahora, tenemos una desigualdad de segundo orden, entonces para resolverla definimos:

$$\kappa_{1,2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4af}}{2a} \quad (126)$$

donde

$$a = \frac{1}{\gamma^2}(d_1^2 + 1); \quad b = -2; \quad f = \frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1; \quad (127)$$

simplificando la desigualdad (126) se obtiene:

$$\kappa_{1,2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - af}}{a}. \quad (128)$$

Donde tenemos que (128), puede tomar un valor dentro de este rango de valores:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - af}}{a} < \kappa < \frac{1 + \sqrt{1 - af}}{a}. \quad (129)$$

Considerando que $af < 1$, obtenemos una desigualdad cuadrática:

$$\gamma^4 - \gamma^2(d_1^2 + 1) - d_2^2(d_1^2 + 1) > 0$$

y considerando el cambio de variable $\alpha = \gamma^2$, nos lleva a la desigualdad de segundo orden:

$$\alpha^2 - \alpha(d_1^2 + 1) - d_2^2(d_1^2 + 1) > 0.$$

Resolviendo se obtiene:

$$\alpha > \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\eta\mu}}{2\eta}$$

donde los valores son definidos a continuación:

$$\eta = 1; \quad \beta = -(d_1^2 + 1); \quad \mu = -d_2^2(d_1^2 + 1).$$

Por consiguiente se obtiene que la condición para el valor de α satisface:

$$\alpha > d_1^2 + 1 + \sqrt{(d_1^2 + 1)(d_1^2 + 1 + 4d_2^2)} \quad (130)$$

lo que implica que

$$\gamma^2 > d_1^2 + 1 + \sqrt{(d_1^2 + 1)(d_1^2 + 1 + 4d_2^2)}. \quad (131)$$

Recordando que $\frac{l_2}{l_1} = \kappa$ de (129) es:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - af}}{a} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{1 + \sqrt{1 - af}}{a},$$

se llega a la conclusión siguiente:

$$l_2 \left(\frac{a}{1 - \sqrt{1 - af}} \right) > l_1 > l_2 \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - af}} \right). \quad (132)$$

Redefiniendo la condición previa:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} \right) > l_1 > l_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - af}}{f} \right). \quad (133)$$

Por otro lado tomando el valor de l_1 (63) tenemos la siguiente desigualdad:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} \right) > \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) + R(2l_2 - 1) + R^2 \left(\frac{d_2^2}{\gamma^2} + 1 \right). \quad (134)$$

Simplificando términos tenemos de acuerdo a las variables previamente definidas tenemos que:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} \right) > \frac{a}{4} + R(2l_2 - 1) + R^2 f \quad (135)$$

agrupando términos de l_2 , para simplificar en la desigualdad previa tenemos:

$$l_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{f} - 2R \right) > \frac{a}{4} - R + R^2 f \quad (136)$$

de donde podemos obtener la condición para R , la cual es:

$$R < \left(\frac{1 + \sqrt{1 - af}}{2f} \right). \quad (137)$$

Se obtiene la cota para l_2 a partir de (136):

$$l_2 > \frac{f(a - 4R + 4R^2 f)}{4(1 + \sqrt{1 - af} - 2Rf)} \quad (138)$$

y con la doble condición para l_1 (133) se reafirma que se necesita que l_1 esté acotada dentro de un rango de valores dependiendo de l_2 y a su vez se obtiene una segunda condición para l_2 (138) y R (137), así la validez de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (64) es entonces sencillamente verificada en la superficie de deslizamiento (e_1) sujeta al parámetro de elección (131).

Continuando con la otra parte de la desigualdad principal, para $\mathcal{H}_{\xi_{iia}}^0$ y dado $\text{sign}^2(\hat{s}) =$

1 y seleccionando el peor caso, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi^{iii}}^0 &= 2x_2y + cx_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c^2 + 2c\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) \right] + \frac{l_2}{l_1} e_2 \operatorname{sign}(\hat{s}) \\
&+ \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 y \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{2}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} y + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) + \frac{1}{\gamma^2} y^2 \\
&+ \frac{1}{\gamma^2} cy \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} y \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) \\
&- \frac{1}{\gamma^2} ce_2 \frac{l_2}{l_1} \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) - \frac{1}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \operatorname{sign}(\hat{s}) + y^2 + \hat{s}^2 \\
&\leq x_2^2 + y^2 + c|x_2| - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c^2 + 2c\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) \right] + \frac{l_2}{l_1} |e_2| + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 \\
&+ \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 |y| - \frac{2}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} y + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} |y| + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c|y| - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y \\
&+ \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} |y| + \frac{1}{\gamma^2} cd_1^2 |e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} c|e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + y^2 \\
&+ \hat{s}^2 < 0
\end{aligned}$$

entonces obtenemos la condición para el parámetro M :

$$M > \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c^2 + 2c\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_2^2}{l_1^2} \right)$$

$$M > \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2. \quad (139)$$

Nuevamente buscando el peor caso, llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi^{iii a}}^0 &\leq x_2^2 + y^2 + c|x_2| - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] + \frac{l_2}{l_1} |e_2| + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 |y| \\
&\quad - \frac{2}{\gamma^2} d_1^2 e_2 \frac{l_2}{l_1} y + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} |y| + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c |y| - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} |y| \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 |e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} c |e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + y^2 + \hat{s}^2 \\
&\leq x_2^2 + y^2 + c|x_2| - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] + \frac{l_2}{l_1} |e_2| + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 |y| \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} (e^2 + y^2) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} |y| + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c |y| + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (e^2 + y^2) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} |y| + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 |e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} c |e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + y^2 + \hat{s}^2 < 0
\end{aligned} \tag{140}$$

Considerando el conjunto definido por la bola $\mathcal{B}_R = \{ \xi_{iii}^0 = (y, x_2, e_2)^T \in \mathbb{R}^3 : y^2 + x_2^2 + e_2^2 \leq R^2 \}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (140), agrupados entre sí en:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi^{iii a}}^0 &\leq x_2^2 + y^2 + c|x_2| - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] + \frac{l_2}{l_1} |e_2| + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 |y| \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} (e^2 + y^2) + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} |y| + \frac{1}{\gamma^2} y^2 + \frac{1}{\gamma^2} c |y| + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (e^2 + y^2) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} |y| + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 |e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} c |e_2| \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} |e_2| \frac{l_2^2}{l_1^2} + y^2 + \hat{s}^2 \\
&\leq R^2 + cR - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] + \frac{l_2}{l_1} R + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 R^2 + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 R \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} R^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 \frac{l_2}{l_1} R + \frac{1}{\gamma^2} R^2 + \frac{1}{\gamma^2} cR + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} R^2 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} R + \frac{1}{\gamma^2} c d_1^2 R \frac{l_2}{l_1} \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} cR \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 R \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} R \frac{l_2^2}{l_1^2} + R^2 + 2c^2 R^2 + 4R^2 < 0
\end{aligned} \tag{141}$$

donde consideramos previamente las siguientes desigualdades, de acuerdo a las condi-

ciones dentro de la bola \mathcal{B}_R :

$$\begin{aligned}\hat{s}^2 &\leq 2c^2 y^2 + (x_2 - e_2)^2 \leq \\ &\leq 2c^2 y^2 + 2(2x_2^2 + 2e_2^2) \leq \\ &\leq 2c^2 y^2 + 4(x_2^2 + e_2^2) \leq \\ &\leq 2c^2 R^2 + 4R^2\end{aligned}$$

$$2x_2 y \leq x_2^2 + y^2 \leq R^2,$$

y

$$-2e_2 y \leq e_2^2 + y^2 \leq R^2.$$

Agrupando términos tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\xi^{iii}}^0 &< - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] \\ &+ R^2 \left[6 + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (d_1^2 + 1) + 2c^2 \right] \\ &+ R \left[\frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2^2}{l_1^2} (d_1^2 + 1) + \frac{1}{\gamma^2} c \frac{l_2}{l_1} (d_1^2 + 1) \right] \\ &+ R \left[\frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (d_1^2 + 1) + \frac{1}{\gamma^2} c (d_1^2 + 1) + \frac{l_2}{l_1} + c \right].\end{aligned}$$

Reduciendo términos obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\xi^{iii}}^0 &< - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] \\ &+ R^2 \left[6 + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + 2c^2 \right] \\ &+ R \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) \left(\frac{l_2}{l_1} + c \right) + \frac{l_2}{l_1} + c \right].\end{aligned}$$

Agrupando términos obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{iii}^0} &< - \left[M - \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] \\ &+ R^2 \left[6 + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + 2c^2 \right] \\ &+ R \left\{ \left[\frac{l_2}{l_1} + c \right] \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) + 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (142)$$

Por lo tanto si $M(R) = M$ es lo suficientemente grande para satisfacer la desigualdad, se obtiene que $\mathcal{H}_{\xi_{iii}^0}$ sea definida negativa y además tiene que ser lo suficientemente grande para cumplir con la desigualdad siguiente.

$$\begin{aligned} M(R) &> \frac{d_1^2 + 1}{4\gamma^2} \left(c + \frac{l_2}{l_1} \right)^2 + R^2 \left[6 + \frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + 2c^2 \right] \\ &+ R \left\{ \left[\frac{l_2}{l_1} + c \right] \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) + 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (143)$$

Bajo esta última condición se dice que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema se cumple y la relación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (106) se cumple dentro de \mathcal{B}_R .

Caso IV: Es el caso cuando se está restringido a la superficie de deslizamiento $\hat{s} = 0$ (88) y $e_1 = 0$, el sistema (85) de orden cuatro se reduce a un sistema de orden dos.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -cy + e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\ \dot{e}_2 &= d_2\omega_2(t) - \left(\frac{l_2}{l_1} \right) (e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t)) \end{aligned} \quad (144)$$

y la salida (89) está dada por

$$z_{\xi_{iv}^0} = h(\xi_{iv}^0) = [y, 0, 0, e_2]^T. \quad (145)$$

El sistema (144) se puede representar en la forma (5) con

$$\xi_{iv}^0 = [y, e_2]^T; \quad \omega_{\xi_{iv}^0}(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dot{\omega}_0(t)]^T;$$

$$f(\xi_{iv}^0) = \begin{bmatrix} -cy + e_2 \\ -\frac{l_2}{l_1} e_2 \end{bmatrix}; \quad g(\xi_{iv}^0) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 1 \\ -\frac{l_2}{l_1} d_1 & d_2 & -\frac{l_2}{l_1} \end{bmatrix}.$$

La función definida positiva (90) sobre la superficie de deslizamiento $s = 0$ y $e_1 = 0$ se simplifica a

$$V_{\xi_{iv}} = y^2 + e_2^2. \quad (146)$$

La derivada parcial de (146) es:

$$\frac{\partial V_{\xi_{iv}}}{\partial \xi_{iv}^0} = \left[\frac{\partial V_{\xi_{iv}}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_{\xi_{iv}}}{\partial e_2} \right] = \frac{\partial V_{\xi_{iv}}}{\partial \xi_{iv}^0} = [2y, \quad 2e_2]. \quad (147)$$

Se demostrará que el sistema (144) sobre la superficie, es decir, cuando $\hat{s} = 0$ (88) y $e_1 = 0$ con la función definida positiva en (146), satisface la desigualdad de Hamilton-Jacobi (106). Para este fin considérese la función $\mathcal{H}_{\xi_{iv}}^0 = \mathcal{H}^0(\xi_{iv}^0, \alpha(\xi_{iv}^0))$, que resulta en:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{iv}}^0 = & -2cy + 2e_2y - 2\frac{l_2}{l_1} e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} y^2 (d_1^2 + 1) - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y (d_1^2 + 1) \\ & + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} (d_1^2 + 1) + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 e_2^2 + y^2 + e_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi_{iv}}^0 = & -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + 2e_2y - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y (d_1^2 + 1) \\ & - 2\frac{l_2}{l_1} e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + e_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Nótese que se presenta exáctamente el caso como en $\mathcal{H}_{\xi_{iib}}^0$, generando así que la desigualdad de Hamilton-Jacobi para este caso se particione en dos secciones, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{H}_{\xi_{iv}}^0 = \mathcal{H}_{\xi_{iva}}^0 + \mathcal{H}_{\xi_{ivb}}^0 < 0 \quad (148)$$

donde:

$$\mathcal{H}_{\xi^{iva}}^0 = -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + 2e_2 y - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y (d_1^2 + 1) < 0$$

$$\mathcal{H}_{\xi^{ivb}}^0 = -2 \frac{l_2}{l_1} e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} d_1^2 e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + \frac{1}{\gamma^2} d_2^2 e_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} e_2^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + e_2^2 < 0.$$

Por consiguiente con la ecuación de $\mathcal{H}_{\xi^{ivb}}^0$ se tiene el mismo resultado que en el caso del observador por retroalimentación del estado sobre la superficie \mathcal{H}_e^0 es decir, ($e_1 = 0$) en (69) y a su vez en el caso previo $\mathcal{H}_{\xi^{iiib}}^0$ en (124), generando así que las condiciones para la desigualdad de Hamilton-Jacobi para este caso, es decir:

$$\mathcal{H}_{\xi^{ivb}}^0 = \mathcal{H}_{\xi^{iiib}}^0 = \mathcal{H}_e^0.$$

Continuando con la otra parte de la desigualdad principal, para $\mathcal{H}_{\xi^{iva}}^0$, seleccionando el peor caso se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\xi^{iva}}^0 &= -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + 2e_2 y - \frac{2}{\gamma^2} e_2 \frac{l_2}{l_1} y (d_1^2 + 1) \\ &\leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + e_2^2 + y^2 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (e_2^2 + y^2) (d_1^2 + 1) < 0 \end{aligned} \quad (149)$$

entonces obtenemos la condición para el parámetro c es igual a la condición para el caso (113) donde $\hat{s} = 0$ y $e_1 \neq 0$, es decir:

$$c > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} d_1^2 + 1 \right) + \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (150)$$

Considerando el conjunto definido por la bola $\mathcal{B}_R = \{\xi_{iv}^0 = (y, e_2)^T \in \mathbb{R}^2 : y^2 + e_2^2 \leq R^2\}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (149), agrupados entre sí, resulta ser:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\xi_{iva}}^0 &\leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + e_2^2 + y^2 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (e_2^2 + y^2) (d_1^2 + 1) \\
&\leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + R^2 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} R^2 (d_1^2 + 1) < 0
\end{aligned} \tag{151}$$

donde consideramos previamente las siguientes desigualdades, de acuerdo a las condiciones dentro de la bola \mathcal{B}_R :

$$-2e_2y \leq e_2^2 + y^2 \leq R^2.$$

Agrupando términos en (151) se tiene que:

$$\mathcal{H}_{\xi_{iva}}^0 \leq -y^2 \left\{ 2c - \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] \right\} + R^2 \left[1 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (d_1^2 + 1) \right] < 0 \tag{152}$$

por lo tanto si $c(R) = c$ es lo suficientemente grande para satisfacer la desigualdad, se obtiene que $\mathcal{H}_{\xi_{iva}}^0$ sea definida negativa y además tiene que ser lo suficientemente grande para cumplir con la desigualdad siguiente:

$$c(R) > \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma^2} (d_1^2 + 1) + 1 \right] + \frac{1}{2} R^2 \left[1 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{l_2}{l_1} (d_1^2 + 1) \right] \tag{153}$$

con estas condiciones se dice que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema se cumple y es menor o igual al cambio, y por lo tanto la relación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (106) se cumple dentro de \mathcal{B}_R .

3.3.3. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema completo del controlador por retroalimentación de la salida

Resumiendo las consideraciones obtenidas en las subsecciones 3.3.1 y 3.3.2 y aplicando el Teorema 2.1 para el sistema en cuestión, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3 *Considérese el sistema de lazo cerrado (85) – (88) dentro de la region \mathcal{B}_R donde R satisface (127) y (137). Suponga que existe una γ^2 suficientemente grande que satisface la desigualdad (131), que el parámetro l_2 cumpla con las desigualdades (98) y*

(138) y que el parámetro l_1 cumpla con las desigualdades (99) y (133). Suponga que las condiciones para el parámetro c se cumplan en las desigualdades (117) y (153) y a su vez la condiciones (105) y (143) en M se cumplan. Entonces el sistema (85) – (88) con retroalimentación de la salida, posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ^2 con respecto a la salida z (89).

Demostración. Se requiere de las operaciones de las subsecciones 3.3.1 y 3.3.2 para que el resultado del Teorema 3.3 se concluya. ■

El Teorema 3.3 se deduce por tanto del Teorema 2.1 para un doble integrador manipulado por un controlador de modos deslizantes de primer orden mediante retroalimentación de la salida. Para caso en específico, el Teorema 3.3 impone las reglas constructivas de sintonización sobre el doble integrado en lazo cerrado para asegurar el nivel de atenuación deseado contra las perturbaciones desacopladas. Esta afirmación esta reforzada por simulaciones numéricas.

3.3.4. Resultados de simulación

Para apoyar la teoría el desempeño del sistema en lazo cerrado (85)–(88) fue numéricamente probado para un sistema de cuarto orden, bajo los valores de los parámetros $d_1 = d_2 = 1$ en presencia de las perturbaciones armónicas no acopladas y acopladas respectivamente

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0.2 \text{ sen}(3t). \quad (154)$$

Se implementó en la herramienta de Simulink, con el método de integración numérico *ode4* (Runge–Kutta), con paso fijo y un paso de integración de 1×10^{-3} , las condiciones iniciales se establecieron en $y(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $e_1(0) = 0$ y $e_2(0) = 0$, y nuestro caso de estudio es confinado a una bola \mathcal{B}_R de radio $R = 0.7$. Especificando el nivel de atenuación deseado con $\gamma^2 = 5.5$, los parámetros del observador se ajustan a $l_2 = 1$ para asegurar que las condiciones (62) y (83) y el parámetro $l_1 = 1.4$ cumple con las desigualdades (63) y (78). Mientras que los parámetros del controlador se definen con los siguientes valores: el valor de $c = 1.2$ cumple con (117) y (153) y a su vez la condición para $M = 7.6$ cumple con las desigualdades en (105) y (143), del Teorema 3.3 se cumplan. En la Figura 8 se

muestra la dinámica del sistema de interés no perturbado con retroalimentación de la salida con las siguientes condiciones iniciales $y(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0.8$, $e_1(0) = 1$, $e_2(0) = 1.2$ y $s(0) = 0.2$, mientras que, en la Figura 9 se muestra la versión perturbada con las siguientes condiciones iniciales $y(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0.8$, $e_1(0) = 1$, $e_2(0) = 1.2$ y $s(0) = 0.2$. El buen desempeño se concluye de estas figuras, apoyando la teoría desarrollada. En la Figura 10 se muestra la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema, y en la cual se verifica que posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ^2 con respecto a la salida óptima z (89).

Resumiendo, el proceso de sintonización resultado del Teorema 3.3, es efectivamente aplicable a la implementación numérica de la síntesis del doble integrador por modos deslizantes de primer orden afectado por perturbaciones desacopladas.

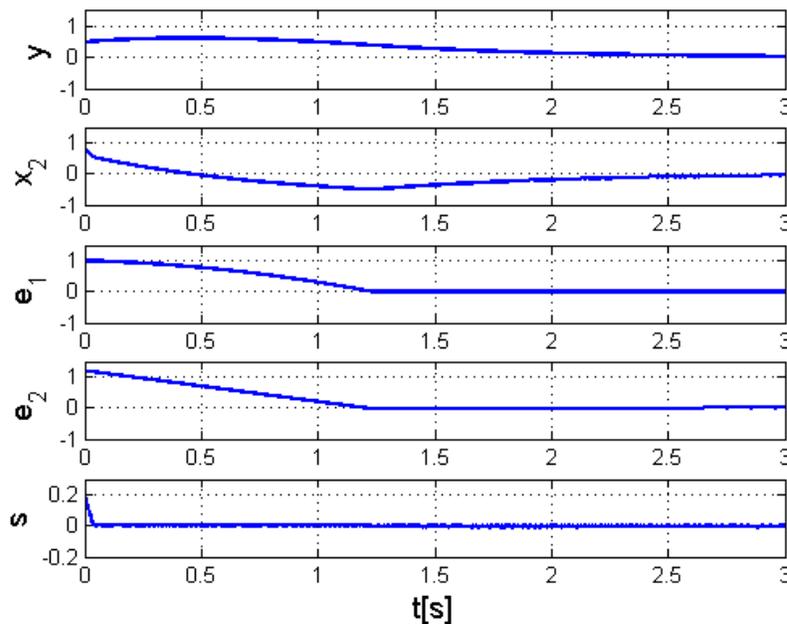


Figura 8: Dinámica del sistema completo no perturbado con condiciones iniciales $y(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0.8$, $e_1(0) = 1$, $e_2(0) = 1.2$ y $s(0) = 0.2$.

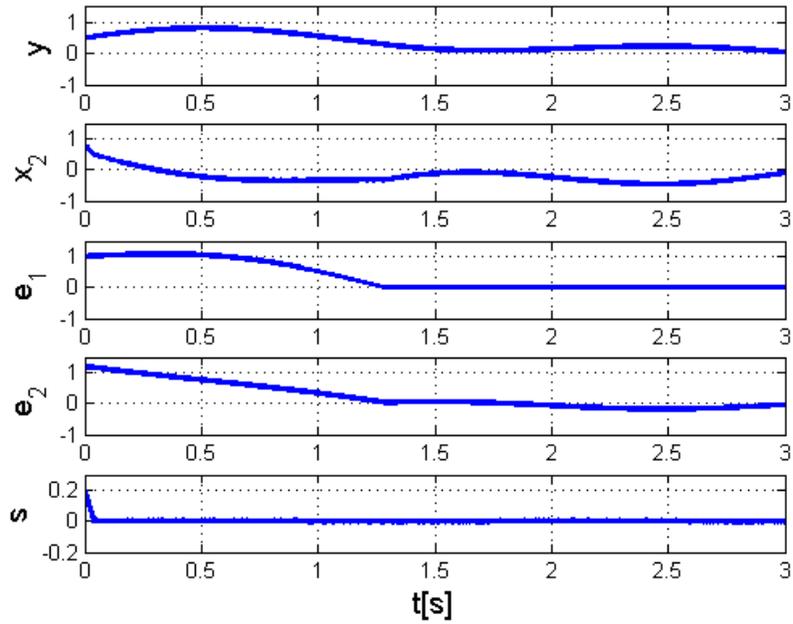


Figura 9: Dinámica del sistema completo perturbado con (154) con condiciones iniciales $y(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0.8$, $e_1(0) = 1$, $e_2(0) = 1.2$ y $s(0) = 0.2$.

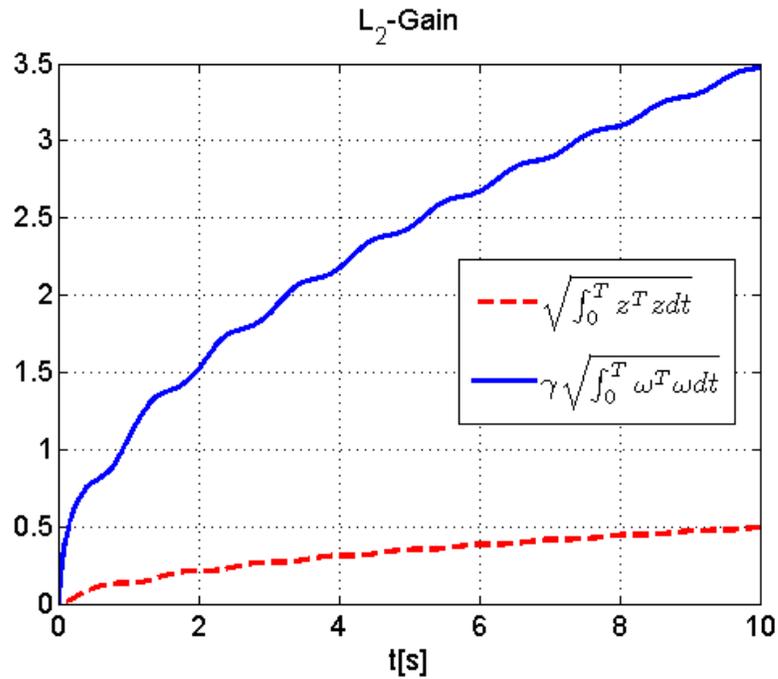


Figura 10: Ganancia del sistema completo perturbado.

Capítulo 4. Sintonización del controlador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados

A continuación, el procedimiento de sintonización del capítulo previo es extendido de manera directa a una cadena de integradores perturbados manipulados por un controlador de modos deslizantes de primer orden. Nuevamente, la síntesis de retroalimentación de estado, el diseño del observador y la síntesis de retroalimentación de la salida basado en el observador, son verificados exitosamente cada uno.

4.1. Sintonización del controlador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados: el caso de información completa

Para apoyar nuestros resultados teóricos el sistema (5) se representa por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + d_1\omega_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + d_{n-1}\omega_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n &= u + d_n\omega_n(t)\end{aligned}\tag{155}$$

y es controlado por

$$u = -M\text{sign}(s)\tag{156}$$

donde $M > 0$ es la magnitud de conmutación y $c_1, \dots, c_{n-1} > 0$ son vistos como los parámetros de la superficie de conmutación

$$s = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k.\tag{157}$$

El objetivo de esta sección es demostrar que con MD de primer orden la superficie, es capaz no sólo de rechazar perturbaciones acopladas uniformemente acotadas, sino también atenuar las no acotadas, incluyendo perturbaciones desacopladas. Con este fin,

la salida (6) se especifica de la siguiente manera:

$$z = h(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}, s]^T. \quad (158)$$

Para validar los resultados, el sistema (155)–(158) se puede representar en la forma (5) con

$$\begin{aligned} x &= [x_1, \dots, x_n]^T; & g(x) &= \text{diag}(d_1, \dots, d_n); \\ \omega &= [\omega_1, \dots, \omega_n]^T; \\ f(x) &= \left[x_2, \dots, x_n, -M \text{sign} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \right) \right]^T. \end{aligned}$$

Considerando el sistema (155) y su salida óptima (158), se pueden generar dos casos, detallados en la Tabla 4.

Tabla 4: Casos posibles para un sistema canónico de orden n por retroalimentación del estado.

Caso	s	Orden	Condición en la Superficie	Salida
i)	$\neq 0$	2	Fuera	$z = h(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}, s]^T$
ii)	0	1	Sobre	$z^0 = h(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}, 0]^T$

4.1.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento.

Por claridad se vuelve a definir la desigualdad de Hamilton–Jacobi:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, \alpha(x)) &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \\ &+ h^T(x) h(x) \leq -v(x). \end{aligned} \quad (159)$$

Posteriormente vamos a demostrar que con (157) la función definida positiva

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + |s| \quad (160)$$

con $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ y $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi

(20) fuera de la superficie de deslizamiento (157) para este fin considérese que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, \alpha(x))$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right) x_{k+1} \right] + \left[\sum_{k=1}^{n-1} c_k x_{k+1} \text{sign}(s) \right] + s^2 \\
&\quad - \left\{ M - \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] \right\} + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right)^2 + c_k d_k^2 \text{sign}(s) \sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right] \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right) x_{k+1} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} c_k |x_{k+1}| + s^2 \\
&\quad - \left\{ M - \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] \right\} + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right)^2 + c_k d_k^2 \left| \sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right| \right] < 0.
\end{aligned} \tag{161}$$

Dentro de la bola $\mathcal{B}_R = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (161), se pueden agrupar entre sí de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
a(x) &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right) x_{k+1} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} c_k |x_{k+1}| \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right)^2 + \left(c_k d_k^2 \left| \sum_{i=1}^{n-1} P_{ki} x_i \right| \right) \right] \\
&\quad + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + s^2 \\
b(x) &= \left\{ M - \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Acotando términos en $a(x)$ de la siguiente manera:

$$a(x) < R^2 \left(p + \frac{1}{\gamma^2} d^2 p^2 + 2c + 1 \right) + R \left(c + \frac{1}{\gamma^2} c d^2 p \right)$$

donde

$$\rho = \max_{k,i} |P_{ki}|; \quad c = \max_k c_k; \quad d = \max_k d_k.$$

Si se selecciona la ganancia del controlador $M = M(R)$ de acuerdo a

$$M(R) > \frac{1}{4\gamma^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2 \right) + d_n^2 \right] + R^2 \left(\rho + \frac{1}{\gamma^2} d^2 \rho^2 + 2c + 1 \right) + R \left(c + \frac{1}{\gamma^2} c d^2 \rho \right), \quad (162)$$

entonces la relación (159) será definida negativa dentro de \mathcal{B}_R , asegurando que la desigualdad de Hamilton–Jacobi (159) se satisface de manera local fuera de la superficie de conmutación (157).

4.1.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento.

Por claridad se vuelve a definir la desigualdad de Hamilton–Jacobi:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f^0(x) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g^0(x) (g^0)^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + h^T(x) h(x) \leq -v(x). \quad (163)$$

La ecuación de MD, que rige la dinámica del sistema en la superficie de conmutación (157), se obtiene aplicando el método de control equivalente. Entonces el sistema de orden n restringido a la superficie deslizante (157) se reduce a un sistema de orden $n-1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1 \omega_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k + d_{n-1} \omega_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (164)$$

y su salida (158) está dada por

$$z = h(x) = [x_1, \dots, x_{n-1}, 0]^T. \quad (165)$$

La función definida positiva (160) sobre la superficie de deslizamiento $s = 0$ se simplifica a

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x}. \quad (166)$$

Suponga que los parámetros c_i, \dots, c_{n-1} son convenientemente seleccionados de acuerdo a Utkin (1992) de tal manera que la dinámica no perturbada (con $\omega_1 = \dots, \omega_{n-1} = 0$) de MD (164) es exponencialmente estable con κ arbitrariamente grande. Es decir, la matriz $P > 0$ selecciona de tal manera que la derivada de la función de Lyapunov (166), calculada en las trayectorias de MD de (164) no perturbada satisface la desigualdad

$$\dot{V} \leq -\kappa \|\tilde{x}\|^2. \quad (167)$$

Ahora vamos a demostrar que la desigualdad de Hamilton–Jacobi (163), para el sistema (164), se satisface con la función (166). Sustituyendo (166) en la desigualdad de Hamilton–Jacobi (163), se obtiene,

$$\mathcal{H}^0(x, \alpha(x)) \leq -\kappa \|\tilde{x}\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \|P\|^2 \|\tilde{D}\|^2 \|\tilde{x}\|^2 + R^2 \leq 0. \quad (168)$$

Tomando en cuenta (167) y considerando que

$$h^T(x)h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq R^2$$

$$\tilde{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_{n-1}),$$

donde la constante κ se debe elegir de acuerdo a:

$$\kappa > \frac{\|P\|^2 \|\tilde{D}\|^2 + R^2}{2\gamma^2}. \quad (169)$$

La validez de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (163) se puede verificar en la superficie de deslizamiento (157) sujeta a (169).

4.1.3. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del sistema en lazo cerrado con la información completa

Resumiendo las condiciones encontradas en las subsecciones 4.1.1 y 4.1.2 y aplicando el Teorema 2.1 para el sistema en cuestión, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Dada $\gamma > 0$ y $R > 0$, los parámetros c_1, \dots, c_n , se construyen para cumplir la desigualdad (167) con $\kappa > 0$ y matriz $P^T = P > 0$ que satisfagan (169). Si $M > 0$ satisface la desigualdad (162), entonces el sistema (155), conmutado en la superficie (157), es internamente asintóticamente estable y localmente posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (158).*

Demostración. Se requiere de las operaciones de las subsecciones 4.1.1 y 4.1.2 para que el resultado del Teorema 4.1 se concluya. ■

Esta claro que el Teorema 4.1 presenta las reglas de sintonización para la síntesis de retroalimentación del estado por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados.

4.2. Sintonización del observador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados

El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 es aplicado a un observador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + d_1 \omega_1(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + d_{n-1} \omega_{n-1}(t) \\
 \dot{x}_n &= u + d_n \omega_n(t).
 \end{aligned} \tag{170}$$

La salida medida se especifica ahora de la siguiente manera:

$$y = x_1 + \omega_0(t) \quad (171)$$

donde $\omega_0(t)$ es una perturbación. Dado a que sólo se tiene acceso a x_1 es necesario definir un observador para poder estimar los estados restantes. La dinámica de la salida medida (171) es:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{\omega}_0(t) = x_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t). \quad (172)$$

En consecuencia el sistema (170) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\ \dot{x}_2 &= x_3 + d_2\omega_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + d_{n-1}\omega_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n &= u + d_n\omega_n(t). \end{aligned} \quad (173)$$

Ahora se propone el siguiente observador discontinuo:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= \hat{x}_2 + l_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + l_2 \text{sign}(e_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= \hat{x}_n + l_{n-1} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_n &= u + l_n \text{sign}(e_1) \end{aligned} \quad (174)$$

donde $\hat{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ son los estados observados. Definiendo los errores de observación

de estados como:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= y - \hat{y} \\
 e_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \\
 &\vdots \\
 e_n &= x_n - \hat{x}_n,
 \end{aligned} \tag{175}$$

la dinámica del error de observación queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 + d_1 \omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) - l_1 \text{sign}(e_1) \\
 \dot{e}_2 &= e_3 + d_2 \omega_2(t) - l_2 \text{sign}(e_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_{n-1} &= e_n + d_{n-1} \omega_1(t) - l_{n-1} \text{sign}(e_1) \\
 \dot{e}_n &= d_n \omega_n(t) - l_n \text{sign}(e_1).
 \end{aligned} \tag{176}$$

La salida óptima (6) se especifica como:

$$z_e = h(e) = [e_1, \dots, e_n]^T. \tag{177}$$

Ahora representamos (176)-(177) en la forma (5)-(6) con $e = [e_1, \dots, e_n]^T \in \mathbb{R}^n$ y $\omega_e(t) = [\omega_1(t), \dots, \omega_n(t), \dot{\omega}_0(t)]^T \in \mathbb{R}^{(n+1)}$, donde el sistema nominal $f(e) \in \mathbb{R}^n$ y la matriz de coeficientes $g(e) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ vienen dados por:

$$f(e) = \begin{bmatrix} e_2 - l_1 \text{sign}(e_1) \\ e_3 - l_2 \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ e_n - l_{n-1} \text{sign}(e_1) \\ -l_n \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}; \quad g(e) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{178}$$

Considerando el sistema (176) y su salida (177), se pueden presentar dos casos, detallados en la Tabla 5.

Tabla 5: Casos posibles para el observador de un sistema canónico de orden n por retroalimentación de la salida.

Caso	e_1	Orden	Condición en la Superficie	Salida
i)	$\neq 0$	n	Fuera ($x \neq S$)	$z_e = h(e) = [e_1, \dots, e_n]^T$.
ii)	0	$n - 1$	Sobre ($x = S$)	$z_e^0 = h(e) = [0, e_2, \dots, e_n]^T$.

Para demostrar que el sistema (176) satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi para toda $x \in \mathbb{R}^n$, según sea el caso se emplea la siguiente función de Lyapunov:

$$V_e = |e_1| + \tilde{e}^T Q \tilde{e} \quad (179)$$

con $Q = Q^T > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ y $\tilde{e} \in \mathbb{R}^{n-1}$ donde $\tilde{e} = [e_2, e_3, \dots, e_n]^T$.

4.2.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento

Ahora se demostrará que el sistema (176) fuera de la superficie de deslizamiento, es decir $e_1 \neq 0$, con la función (179) satisface la desigualdad de Hamilton–Jacobi

$$\mathcal{H}(e, \alpha(e)) = \frac{\partial V_e}{\partial e} f(e) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_e}{\partial e} g(e) g^T(e) \left(\frac{\partial V_e}{\partial e} \right)^T + h^T(e) h(e) \leq -v(e) \quad (180)$$

donde

$$\frac{\partial V_e}{\partial e} = \left[\frac{\partial V_e}{\partial e_1}, \frac{\partial V_e}{\partial e_2}, \dots, \frac{\partial V_e}{\partial e_n} \right] = \left[\text{sign}(e_1), 2 \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^n Q_{k-1, i-1} e_i \right]. \quad (181)$$

Sustituyendo (176)–(178) y (181) en (180) la función $\mathcal{H}_e = \mathcal{H}(e, \alpha(e))$ resulta ser

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e = & e_2 \text{sign}(e_1) - \text{sign}^2(e_1) \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + e_1^2 + \dots + e_n^2 \\ & + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1, i-1} e_i e_{k+1} - 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1, i-1} e_i l_k \text{sign}(e_1) \\ & - 2 \sum_{i=2}^n Q_{n-1, i-1} e_i l_n \text{sign}(e_1) + \frac{1}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left(2 \sum_{i=2}^n Q_{k-1, i-1} e_i d_k \right)^2 < 0. \end{aligned} \quad (182)$$

Dado que $\text{sign}^2(e_1) = 1$ y cuando $e_1 \neq 0$, considerando el peor caso de la desigualdad previa obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_e &= e_2 \text{sign}(e_1) - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i e_{k+1} \\
&\quad - 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i l_k \text{sign}(e_1) - 2 \sum_{i=2}^n Q_{n-1,i-1} e_i l_n \text{sign}(e_1) \\
&\quad + \frac{1}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left(2 \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i d_k \right)^2 + e_1^2 + \dots + e_n^2 \\
&\leq |e_2| - \left[l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) \right] + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i e_{k+1} \\
&\quad + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} e_i| |l_k| + 2 \sum_{i=2}^n |Q_{n-1,i-1} e_i| |l_n| \\
&\quad + \frac{1}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left(2 \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i d_k \right)^2 + e_1^2 + \dots + e_n^2 < 0.
\end{aligned} \tag{183}$$

Dentro de la bola $\mathcal{B}_R = \{e = (e_1, \dots, e_n)^T \in \mathbb{R}^n : e_1^2 + \dots + e_n^2 \leq R^2\}$ de radio R , los términos definidos e indefinidos positivos en el lado derecho de (183), se agrupan entre sí teniendo

$$\begin{aligned}
a(e) &= |e_2| + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i e_{k+1} + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} e_i| |l_k| \\
&\quad + 2 \sum_{i=2}^n |Q_{n-1,i-1} e_i| |l_n| + \frac{1}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left(2 \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i d_k \right)^2 \\
&\quad + e_1^2 + \dots + e_n^2 \\
b(e) &= l_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1).
\end{aligned}$$

Antes de continuar procederemos a acotar cada término de $a(e)$:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i e_{k+1} &< 2QR^2(2n-3), \\
2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} e_i| |l_k| &< 2Ql\sqrt{n}R(n-2), \\
2 \sum_{i=2}^n |Q_{n-1,i-1} e_i| |l_n| &< 2Ql\sqrt{n}R, \\
\frac{1}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left(2 \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i d_k \right)^2 &< \frac{n}{\gamma} DR^2
\end{aligned} \tag{184}$$

donde se consideró que $|l_k|, |l_n| \leq l$ para toda k y además

$$\left(\sum a_i \right)^2 \leq n \sum a_i^2.$$

Por lo tanto al considerar (184), $a(e)$ queda acotada superiormente de la siguiente manera:

$$a(e) < R^2 \left(\frac{n}{\gamma^2} D + 1 \right) + 2QR^2(2n-3) + R(1 + 2Ql\sqrt{n}) + 2Ql\sqrt{n}R(n-2)$$

donde

$$q = \max_{k,i} (Q_{k,i}^2).$$

Finalmente, se selecciona el parámetro del observador $l_1 = l_1(R)$ de acuerdo a

$$\begin{aligned}
l_1(R) &> \frac{1}{4\gamma^2} (d_1^2 + 1) + R^2 \left(\frac{n}{\gamma^2} D + 1 \right) + 2QR^2(2n-3) + R(1 + 2Ql\sqrt{n}) \\
&+ 2Ql\sqrt{n}R(n-2).
\end{aligned} \tag{185}$$

Por lo tanto la relación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (180) se cumple dentro de \mathcal{B}_R .

4.2.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de deslizamiento

Si la desigualdad de Hamilton–Jacobi, se restringe a la superficie de discontinuidad (7), toma la forma:

$$\mathcal{H}_{\tilde{e}} = \frac{\partial V_{\tilde{e}}}{\partial \tilde{e}} f(\tilde{e}) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V_{\tilde{e}}}{\partial \tilde{e}} g(\tilde{e})(g)^T(\tilde{e}) \left(\frac{\partial V_{\tilde{e}}}{\partial \tilde{e}} \right)^T + h^T(\tilde{e})h(\tilde{e}) \leq -v(\tilde{e}). \quad (186)$$

donde $\tilde{e} = [e_2, \dots, e_n]^T$; y $\omega_{\tilde{e}}(t) = [\omega_1(t), \dots, \omega_n(t), \dot{\omega}_0(t)]^T$.

La ecuación de MD, que rige la dinámica del sistema en la superficie de conmutación (e_1), se obtiene aplicando el método de control equivalente. Entonces, si el sistema (176) de orden n se restringe a la superficie de deslizamiento (e_1), se reduce a un sistema de orden $n - 1$, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= e_3 + d_2\omega_2(t) - \frac{l_2}{l_1} (e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t)) \\ \dot{e}_3 &= e_4 + d_3\omega_3(t) - \frac{l_3}{l_1} (e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t)) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= e_n + d_{n-1}\omega_{n-1}(t) - \frac{l_{n-1}}{l_1} (e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t)) \\ \dot{e}_n &= d_n\omega_n(t) - \frac{l_n}{l_1} (e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t)) \end{aligned} \quad (187)$$

y la salida (177) está dada por

$$z_e^0 = h(e) = [0, e_2, \dots, e_n]^T. \quad (188)$$

Se define ahora la dinámica del sistema previo (187) como el sistema (5) donde

$$f(\tilde{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 - \frac{l_2}{l_1} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_4 - \frac{l_3}{l_1} \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n - \frac{l_{n-1}}{l_1} \mathbf{e}_2 \\ -\frac{l_n}{l_1} \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}; \quad g(\tilde{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{l_1} d_1 & d_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{l_2}{l_1} \\ -\frac{l_3}{l_1} d_1 & 0 & d_3 & 0 & \dots & 0 & -\frac{l_3}{l_1} \\ \vdots & & & & & & \\ -\frac{l_{n-1}}{l_1} d_1 & 0 & \dots & 0 & d_{n-1} & 0 & -\frac{l_{n-1}}{l_1} \\ -\frac{l_n}{l_1} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n & -\frac{l_n}{l_1} \end{bmatrix}.$$

La función definida positiva (179) sobre la superficie de deslizamiento $e_1 = 0$ se simplifica a

$$V_{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{e}}^T Q \tilde{\mathbf{e}}, \quad (189)$$

donde $Q = Q^T > 0$. La derivada parcial de $\partial V_{\tilde{\mathbf{e}}}/\partial \tilde{\mathbf{e}}$ resulta ser:

$$\frac{\partial V_{\tilde{\mathbf{e}}}}{\partial \tilde{\mathbf{e}}} = 2\tilde{\mathbf{e}}^T Q. \quad (190)$$

Continuando así con la función $\mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{e}}} = H(\tilde{\mathbf{e}}, \alpha(\tilde{\mathbf{e}}))$, se evalúa el primer conjunto de términos de la desigualdad:

$$\frac{\partial V_{\tilde{\mathbf{e}}}}{\partial \tilde{\mathbf{e}}} f(\tilde{\mathbf{e}}) = 2\tilde{\mathbf{e}}^T Q \Phi \tilde{\mathbf{e}}, \quad (191)$$

donde $\Phi \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, viene dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{l_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{l_3}{l_1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -\frac{l_{n-1}}{l_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{l_n}{l_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora considerando todos los términos de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (186) se tiene:

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{e}}^T \underbrace{\left(2Q\Phi + \frac{1}{\gamma^2} Qg(\tilde{\mathbf{e}})g^T(\tilde{\mathbf{e}})Q + I \right)}_L \tilde{\mathbf{e}} < 0 \quad (192)$$

o en su forma equivalente pero simétrica, se representa con:

$$\mathcal{H}_{\tilde{e}} = \tilde{e}^T \underbrace{\left(\Phi^T Q + Q\Phi + \frac{1}{\gamma^2} Qg(\tilde{e})g^T(\tilde{e})Q + I \right)}_L \tilde{e} < 0. \quad (193)$$

Para cumplir la desigualdad de Hamilton–Jacobi de (193) es suficiente garantizar que sea definida negativa, que resulta la siguiente desigualdad, es decir:

$$l_1^2 L = l_1^2 (\Phi^T Q + Q\Phi) + \frac{l_1^2}{\gamma^2} Qg(\tilde{e})g^T(\tilde{e})Q + l_1^2 I = 2Q\Phi_1 + \frac{1}{\gamma^2} Q\Psi_1\Psi_1^T Q + l_1^2 I < 0, \quad (194)$$

donde $\Phi_1 = l_1^2 \Phi$ y con $\Psi_1 = l_1 g(\tilde{e})$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -l_1 l_2 & l_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_1 l_3 & 0 & l_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -l_1 l_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_1^2 \\ -l_1 l_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} -l_2 d_1 & l_1 d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -l_2 \\ -l_3 d_1 & 0 & l_1 d_3 & 0 & \cdots & 0 & -l_3 \\ \vdots & & & & & & \\ -l_{n-1} d_1 & 0 & \cdots & 0 & l_1 d_{n-1} & 0 & -l_{n-1} \\ -l_n d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_1 d_n & -l_n \end{bmatrix}.$$

Entonces las desigualdades de Hamilton–Jacobi (180) y (186) se cumplen si se satisfacen la desigualdad cuadrática (194), la cota en la desigualdad (185) y la matriz Q esta definida positiva, es decir, $Q = Q^T > 0$.

4.2.3. Análisis de ganancia \mathcal{L}_2 del observador para una cadena de integradores de orden n perturbados

Resumiendo las derivaciones hechas en las subsecciones 4.2.1 y 4.2.2 y aplicando el Teorema 2.1 para el sistema en cuestión, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Se considera el sistema discontinuo (170) dentro de la región \mathcal{B}_R . Se propone el diseño de un observador discontinuo (174), basado en la salida medible (171). Dada una γ^2 , si existen los parámetros adecuados para l_1, \dots, l_n y una matriz $Q = Q^T > 0$, tal que cumplan con (185), y la desigualdad cuadrática en (194). Entonces el sistema en errores (176), es asintóticamente internamente estable, y de manera local (dentro de \mathcal{B}_R) posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ^2 con respecto a la salida óptima z (177).*

Demostración. Se requiere de las operaciones de las subsecciones 4.2.1 y 4.2.2 para que el resultado del Teorema 4.2 se concluya. ■

Similar al Teorema 4.1, el Teorema anterior 4.2 constituye las reglas de sintonización para el diseño de un observador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados.

4.3. Sintonización del controlador por modos deslizantes para una cadena de integradores de orden n perturbados: el caso de información incompleta

Ahora analizando el sistema completo (173)–(176), el sistema a evaluar es el siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= x_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + d_2\omega_2(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + d_{n-1}\omega_{n-1}(t) \\
 \dot{x}_n &= u + d_n\omega_n(t)
 \end{aligned} \tag{195}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 + d_1\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) - l_1 \text{sign}(e_1) \\
 \dot{e}_2 &= e_3 + d_2\omega_2(t) - l_2 \text{sign}(e_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_{n-1} &= e_n + d_{n-1}\omega_{n-1}(t) - l_{n-1} \text{sign}(e_1) \\
 \dot{e}_n &= d_n\omega_n(t) - l_n \text{sign}(e_1)
 \end{aligned} \tag{196}$$

donde

$$e_1 = y - \hat{y}; e_k = x_k - \hat{x}_k, k = 2, 3, \dots, n. \quad (197)$$

El sistema (195)–(196) se controla con

$$u = -M \text{sign}(\hat{s}), \quad (198)$$

donde $M > 0$ es la magnitud de conmutación y cuya superficie es definida por

$$\hat{s} = \hat{x}_n + \sum_{k=2}^{n-1} c_k \hat{x}_k + c_1 y \quad (199)$$

con los parámetros de la superficie son $c_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. tomando en cuenta que:

$$\hat{x}_k = x_k - e_k, k = 2, 3, \dots, n.$$

La superficie (199) se toma en la forma

$$\hat{s} = x_n - e_n + \sum_{k=2}^{n-1} c_k (x_k - e_k) + c_1 y. \quad (200)$$

La salida óptima (6) para la dinámica del sistema completo (195)–(200) se define:

$$z_\delta = h(\delta) = [y, x_2, \dots, x_{n-1}, \hat{s}(y, x_2, \dots, x_{n-1}, e_2, \dots, e_n), e_1, \dots, e_n]^T. \quad (201)$$

Considerando la dinámica del sistema completo (195)–(200) escrito en términos del sistema (5) con el estado $\delta = [y, x_2, \dots, x_n, e_1, \dots, e_n]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ y la perturbación $\omega_\delta(t) = [\omega_1(t), \dots, \omega_n(t), \dot{\omega}_0(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, mientras que el función nominal de $f(\delta) \in \mathbb{R}^{2n}$ y la matriz

de coeficientes $g(\delta) \in \mathbb{R}^{(2n) \times (n+1)}$ que afecta a las perturbaciones son:

$$f(\delta) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -M \operatorname{sign} \left[x_n - e_n + \sum_{k=2}^{n-1} c_k (x_k - e_k) + c_1 y \right] \\ e_2 - l_1 \operatorname{sign}(e_1) \\ e_3 - l_2 \operatorname{sign}(e_1) \\ \vdots \\ e_n - l_{n-1} \operatorname{sign}(e_1) \\ -l_n \operatorname{sign}(e_1) \end{bmatrix}; \quad g(\delta) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n & 0 \\ d_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Con el sistema (195)–(200) ocurren cuatro casos, detallados en la Tabla 6.

Tabla 6: Casos posibles para un sistema canónico de orden n por retroalimentación de la salida.

Caso	\hat{s}	e_1	Orden	Superficie	Salida
i)	$\neq 0$	$\neq 0$	$2n$	Fuera	$z_{\delta i} = h(\delta) = [y, x_2, \dots, x_{n-1}, \hat{s}, e_1, \dots, e_n]^T$
ii)	0	$\neq 0$	$2n - 1$	Sobre una	$z_{\delta ii}^0 = h(\delta_{ii}^0) = [y, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, e_1, \dots, e_n]^T$
iii)	$\neq 0$	0	$2n - 1$	Sobre una	$z_{\delta iii}^0 = h(\delta_{iii}^0) = [y, x_2, \dots, x_{n-1}, \hat{s}, 0, e_2, \dots, e_n]^T$
iv)	0	0	$2n - 2$	Sobre ambas	$z_{\delta iv}^0 = h(\delta_{iv}^0) = [y, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0, e_2, \dots, e_n]^T$

Para analizar la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema completo (195)–(200) la desigualdad de Hamilton–Jacobi se verifica en cada caso de la Tabla 6 por medio de la función definida positiva:

$$V_\delta = \tilde{x}^T P \tilde{x} + |\hat{s}| + |e_1| + \tilde{e}^T Q \tilde{e} \quad (202)$$

con matrices P y Q , ya definidas en las subsecciones 4.1 y 4.2, $\tilde{x} = [y, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$ y $\tilde{e} = [e_2, e_3, \dots, e_n]^T$.

En base del diseño de retroalimentación del estado y diseño del observador de el Capítulo 3, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3 *Se considera el sistema en términos de la planta (195) y de errores de observación (196). Suponga que existen una γ^2 , $R > 0$ y los parámetros l_1, \dots, l_n y $Q = Q^T > 0$ que satisfagan las desigualdades (185) y (194). Además suponga i) que los parámetros c_1, \dots, c_n , son convenientemente seleccionados para cumplir la desigualdad (167) con κ y $P^T = P > 0$ que satisfagan (169), y ii) existe una constante no negativa M tal que satisfaga la desigualdad (162), entonces el sistema de lazo cerrado (195)–(200) es internamente asintóticamente estable y localmente posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ^2 con respecto a la salida z (201).*

Demostración. La demostración del resultado sigue la misma línea que se realizó durante estos casos, y representa una combinación sencilla de demostraciones realizadas en cada caso. ■

A primera instancia el Teorema 4.3 parece una generalización del Teorema 3.3 para la cadena de n integradores donde $n > 2$. Similar al estudio del doble integrador del Capítulo 3, el procedimiento de sintonización de la cadena de integradores perturbados manipulados por un controlador de modos deslizantes de primer orden, se obtiene de manera directa del Teorema 4.3. Es posible una generalización más a fondo del procedimiento de sintonización para una clase más amplia de sistemas por modos deslizantes, esto es demostrado en el siguiente Capítulo.

Capítulo 5. Sintonización de controladores por modos deslizantes de sistemas de orden n en forma canónica

Los resultados previamente obtenidos se extienden a SISO perturbado dado en la forma canónica de orden n de Byrnes y Isidori (1991)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + d_1(x, t)\omega_1(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + d_{n-1}(x, t)\omega_{n-1}(t) \\
 \dot{x}_n &= \phi(x, t) + b(x, t)u + d_n(x, t)\omega_n(t).
 \end{aligned} \tag{203}$$

En la relación de arriba el vector de estado $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, el vector de perturbaciones $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T \in \mathbb{R}^n$, la entrada de control $u \in \mathbb{R}^1$, y las funciones escalares $\phi(x, t)$, $b(x, t)$, $d_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$ son continuas en el dominio

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2\} \tag{204}$$

de radio $R > 0$. Suponiendo que

$$b(x, t) \geq b_0, \tag{205}$$

$$|\phi(x, t)| \leq L_\phi, \quad |d_i(x, t)| \leq L_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{206}$$

$\forall x \in B_R$ y algunas cotas $b_0, b^0, L_\phi, L_i > 0$, con conocimiento *a priori*.

Suponga que el sistema en lazo cerrado (203), controlado mediante un controlador de modos deslizantes de primer orden

$$u = -M \text{sign}(s), \tag{207}$$

conmutando en la superficie lineal $s(x, t) = 0$, se rige mediante

$$s = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k. \quad (208)$$

Está bien reconocido que el controlador rechaza perturbaciones acopladas con la magnitud bastante pequeña. *El objetivo* es que el controlador también atenúe perturbaciones no acotadas, incluyendo perturbaciones desconocidas, siempre que la magnitud de conmutación M y los parámetros c_i , $i = 1, \dots, n$ de la superficie lineal de conmutación $s(x) = 0$ sean propiamente sintonizadas.

La salida (6) es especificada de acuerdo con

$$z = h(x, t) = [x_1, \dots, x_{n-1}, s(x)]^T \quad (209)$$

la dinámica de la planta (203)–(209) se representa de la forma (5)–(6) con

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad (210)$$

$$\omega = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T, \quad (211)$$

$$g(x, t) = \text{diag}[d_1(x, t), \dots, d_n(x, t)], \quad (212)$$

$$f(x, t) = \left[x_2, \dots, x_n, \phi(x, t) - Mb(x, t) \text{sign} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \right) \right]^T. \quad (213)$$

5.1. Sintonización de controladores por modos deslizantes: el caso de información completa

Los parámetros del controlador de modos deslizantes (207)–(208) son secuencialmente sintonizados para atenuar perturbaciones externas de acuerdo con el Teorema 2.1. Para este propósito, la función no suave definida positiva

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + |s|, \quad (214)$$

especificada con $\bar{x} = [x_1, \dots, x_{n-1}]^T$ y alguna $P = P^T > 0$ la cual es diseñada, son utilizadas para validar la Hipótesis **H**.

5.1.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie de deslizamiento

Sustituyendo (214) en lado izquierdo de (20), especificada con (209)–(213), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} P_{kj} x_j \right) x_{k+1} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_{k+1} \text{sign}(s) + s^2 \\
&\quad - \left[Mb(x, t) - \phi(x, t) - \frac{1}{4\gamma^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2(x, t) + d_n^2(x, t) \right) \right] + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2(x, t) \left(\sum_{j=1}^{n-1} P_{kj} x_j \right)^2 + c_k d_k^2(x, t) \text{sign}(s) \sum_{j=1}^{n-1} P_{kj} x_j \right] \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} P_{kj} x_j \right) x_{k+1} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} c_k |x_{k+1}| + s^2 \\
&\quad - \left[Mb_0 - \phi(x, t) - \frac{1}{4\gamma^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 d_k^2(x, t) + d_n^2(x, t) \right) \right] + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_k^2(x, t) \left(\sum_{j=1}^{n-1} P_{kj} x_j \right)^2 + c_k d_k^2(x, t) \left| \sum_{j=1}^{n-1} P_{kj} x_j \right| \right]. \tag{215}
\end{aligned}$$

donde el hamiltoniano \mathcal{H} estandar para el lado izquierdo de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (20), entonces obtenemos. Dentro del dominio de \mathcal{B}_R , dado en (204), la desigualdad (215) es simplificada a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &\leq -Mb_0 + L_\phi + \frac{1}{4\gamma^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 L_k^2 + L_n^2 \right) + R^2 \left(2\|P\| + \frac{1}{\gamma^2} L_d^2 \|P\|^2 + 2c + 1 \right) \\
&\quad + R\sqrt{n} \left(c + \frac{1}{\gamma^2} c L_d^2 \|P\| \right) \tag{216}
\end{aligned}$$

donde

$$c = \max_k c_k, \quad L_d = \max_k L_k, \tag{217}$$

$L_\phi, L_i, i = 1, \dots, n$ han sido definidos en (205), y se utilizó la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (218)$$

Resulta que el hamiltoniano \mathcal{H} es negativo definido dentro de la bola \mathcal{B}_R con cual se selecciona la ganancia del controlador M de acuerdo con

$$\begin{aligned} M(R) > b_0^{-1} \left[\frac{1}{4\gamma^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k^2 L_k^2 + L_n^2 \right) + R^2 \left(2\|P\| + \frac{1}{\gamma^2} d^2 \|P\|^2 + 2c + 1 \right) \right. \\ \left. + R\sqrt{n} \left(c + \frac{1}{\gamma^2} cL_d^2 \|P\| \right) \right]. \end{aligned} \quad (219)$$

Entonces, bajo la condición (219), la correspondiente desigualdad de Hamilton–Jacobi (20) se demuestra que localmente (dentro \mathcal{B}_R) se mantiene fuera de la superficie de deslizamiento (208).

5.1.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie

La ecuación de modos deslizantes, que rige la dinámica del sistema en la superficie de deslizamiento (208), es obtenida mediante la aplicación del método de control equivalente de Utkin (1992). Entonces, si es confinada a la vriedad de la superficie de deslizamiento (208), el sistema (203) es reducido al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1(x, t)\omega_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k + d_{n-1}(x, t)\omega_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (220)$$

y su salida (209) es entonces especificada de acuerdo a

$$z = h(x, t) = [x_1, \dots, x_{n-1}, 0]^T. \quad (221)$$

Sucesivamente, la función definida positiva (214) en la superficie de deslizamiento $s(x) = 0$ es simplificada a

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x}. \quad (222)$$

Sean los parámetros c_1, \dots, c_{n-1} seleccionados acorde a Utkin (1992) para asegurar que la dinámica interna de los modos deslizantes (220) (cuando $\omega_1 = \dots = \omega_{n-1} = 0$) son exponencialmente estable con gran reducción de $\kappa > 0$. En otras palabras, una matriz definida positiva P es diseñada tal que la derivada temporal de la función de Lyapunov (222) a lo largo de la solución del sistema libre de perturbaciones (220) satisface

$$\dot{V} \leq -\kappa \|\tilde{x}\|^2 \quad (223)$$

con $\kappa > 0$ eligiendo arbitrariamente grande. Ahora se demostrará que la desigualdad de Hamilton-Jacobi (22), mientras sea especificada para la ecuación de modos deslizantes (220), se satisface con la función definida positiva (222). Mediante la sustitución (222) en la desigualdad de Hamilton-Jacobi (22), especificada para (220), y tomando en cuenta que

$$h^T(x, t)h(x, t) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \|\tilde{x}\|^2,$$

se deriva

$$\mathcal{H} \leq -\kappa \|\tilde{x}\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} L_d^2 \|P\|^2 \|\tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x}\|^2 < 0, \quad (224)$$

siempre que el parámetro κ sea elegido de acuerdo con

$$\kappa > \frac{1}{2\gamma^2} L_d^2 \|P\|^2 + 1. \quad (225)$$

La validación de la desigualdad de Hamilton-Jacobi (22) es verificada directamente en la superficie de deslizamiento (208) sujeta a los parámetros de elección (225).

5.1.3. Atenuación de perturbaciones desacopladas

Mediante la aplicación del Teorema 2.1 para el sistema (203)–(209), el siguiente resultado es directamente establecido.

Teorema 5.1 *Dada una $\gamma > 0$ y un radio $R > 0$, sea la magnitud de conmutación $M > 0$ seleccionada de acuerdo a (219) así los parámetros de la superficie c_1, \dots, c_n son tales que (223) son validos con (222) y κ , que satisfacen (225). Entonces el sistema libre de perturbaciones (203)–(208) con $\omega = 0$ es asintóticamente estable y su versión perturbada posee ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (209) localmente dentro de la bola \mathcal{B}_R de radio R .*

Demostración. Siendo sucesivamente especificado para el sistema (203)–(209) fuera de la superficie y a lo largo de la superficie $s = 0$, la desigualdad de Hamilton–Jacobi (20) y la contraparte es modos deslizantes (22) han sido validadas respectivamente en la subsección 5.1.1 and 5.1.2. La Hipótesis **H** se demuestra estar en vigor con el sistema en cuestión. Por lo tanto, el Teorema 2.1 es aplicable al sistema (203)–(209). Las pruebas son completadas mediante una apropiada aplicación del Teorema 2.1. ■

5.2. Sintonización de observadores por modos deslizantes de sistemas de orden n en forma canónica

En lo que sigue, el estado $x_1(t)$ se supone que sea la única medida disponible (203) la cual es corrompida con una perturbación $\omega_0(t) \in \mathbb{R}$, i.e., la salida medida está dada mediante

$$y = x_1 + \omega_0(t). \quad (226)$$

Los observadores por modos deslizantes son básicamente eficaces para los sistemas lineales, solamente la investigación posterior se limita a los sistemas lineales en la forma canónica (203) donde

$$\phi(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad b(x, t) = b, \quad (227)$$

y a_1, \dots, a_n, b son parámetros constantes.

Mediante la diferenciación (226), representamos el siguiente sistema (203),(227) en

términos de la salida dinámica

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= x_2 + \tilde{d}_1(t)\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \tilde{d}_2(t)\omega_2(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \tilde{d}_{n-1}(t)\omega_{n-1}(t) \\
 \dot{x}_n &= a_1 y + \sum_{i=2}^n a_i x_i + bu + \tilde{d}_n(t)\omega_n(t) - a_1 \omega_0(t)
 \end{aligned} \tag{228}$$

donde $\tilde{d}_i(t) = d_i(x(t), t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, y en virtud de (206),

$$|\tilde{d}_i(t)| \leq L_d, \quad i = 1, \dots, n \tag{229}$$

para cualquier t siempre que $x \in B_R$. El siguiente observador discontinuo

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \beta_1 \text{sign}(y - \hat{x}_1) \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \beta_2 \text{sign}(y - \hat{x}_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{x}}_{n-1} &= \hat{x}_n + \beta_{n-1} \text{sign}(y - \hat{x}_1) \\
 \dot{\hat{x}}_n &= \sum_{i=1}^n a_i \hat{x}_i + bu + \beta_n \text{sign}(y - \hat{x}_1).
 \end{aligned} \tag{230}$$

es bien reconocido por estimar los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ del sistema lineal (203),(227) bajo perturbaciones acopladas. El siguiente objetivo es ajustar los parámetros de observación β_1, \dots, β_n para llegar a los dinámica de errores de observación de la ganancia \mathcal{L}_2 menor que un cierto nivel de atenuación de perturbación γ . Con este fin, vamos a reescribir el observador de estado (230) en términos de la estimación de errores

$$\begin{aligned}
 e_1 &= y - \hat{x}_1 \\
 e_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \\
 &\vdots \\
 e_n &= x_n - \hat{x}_n,
 \end{aligned} \tag{231}$$

cuyas dinámicas están claramente reguladas por

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 - \beta_1 \text{sign}(e_1) + \tilde{d}_1(t)\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \\
 \dot{e}_2 &= e_3 - \beta_2 \text{sign}(e_1) + \tilde{d}_2(t)\omega_2(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_{n-1} &= e_n - \beta_{n-1} \text{sign}(e_1) + \tilde{d}_{n-1}(t)\omega_{n-1}(t) \\
 \dot{e}_n &= \sum_{i=1}^n a_i e_i - \beta_n \text{sign}(e_1) + \tilde{d}_n(t)\omega_n(t) - a_1 \omega_0(t).
 \end{aligned} \tag{232}$$

Al evaluar el desempeño de la dinámica del error con la salida de error

$$z_e = h(e, t) = [e_1, \dots, e_n]^T, \tag{233}$$

el sistema de observación de errores (232)–(233) se representa fácilmente en la forma (5)–(6) donde

$$e = [e_1, \dots, e_n]^T \tag{234}$$

$$\omega_e = [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dot{\omega}_0]^T \tag{235}$$

$$g(e, t) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{d}_1(t) & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{d}_n(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{236}$$

$$f(e, t) = \begin{bmatrix} e_2 - \beta_1 \text{sign}(e_1) \\ e_3 - \beta_2 \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ e_n - \beta_{n-1} \text{sign}(e_1) \\ \sum_{i=1}^n a_i e_i - \beta_n \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}. \tag{237}$$

Con el fin de aplicar el Teorema 2.1 para el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 de la dinámica del error de observación (232) la Hipótesis **H** está validada posteriormente con la función definida positiva no suave

$$V_e = |e_1| + \tilde{e}^T Q \tilde{e} \tag{238}$$

donde $\tilde{e} = [e_2, e_3, \dots, e_n]^T$ y una matriz definida positiva $Q \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$.

5.2.1. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi fuera de la superficie del observador discontinuo

Sustituyendo (238) en el lado izquierdo de (20), especificado con (233)–(237), se deriva

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & e_2 \operatorname{sign}(e_1) - \operatorname{sign}^2(e_1) \left[\beta_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (\tilde{d}_1^2 + 1) \right] + e_1^2 + \dots + e_n^2 \\
& + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i e_{k+1} - 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i \beta_k \operatorname{sign}(e_1) \\
& - 2 \sum_{i=2}^n Q_{n-1,i-1} e_i \left[\beta_n \operatorname{sign}(e_1) - \sum_{j=1}^n a_j e_j \right] + \frac{1}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left[2 \sum_{i=2}^n Q_{k-1,i-1} e_i (\tilde{d}_k - \delta_{kn} a_1) \right]^2
\end{aligned} \tag{239}$$

donde el hamiltoniano \mathcal{H} representa el lado izquierdo de la desigualdad de Hamilton–Jacobi (20), así obteniendo el símbolo de Kronecker $\delta_{kn} = 0$ si $k \neq n$ y $\delta_{nn} = 1$. Resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \leq & |e_2| - \left[\beta_1 - \frac{1}{4\gamma^2} (L_d^2 + 1) \right] + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} e_i e_{k+1}| \\
& + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} e_i| |\beta_k| + 2 \sum_{i=2}^n |Q_{n-1,i-1} e_i| \left[|\beta_n| + \sum_{j=1}^n |a_j| |e_j| \right] \\
& + \frac{(L_d + |a_1|)^2}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left(2 \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} e_i| \right)^2 + e_1^2 + \dots + e_n^2,
\end{aligned} \tag{240}$$

donde los límites superiores b^0 , L_ϕ , L_d se consideran de (229). Tomando en cuenta (218), se concluye que

$$2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{k+1}| \leq \|Q\| R^2 (2n-3), \quad (241)$$

$$2 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} \mathbf{e}_i| |\beta_k| \leq 2\beta \|Q\| \sqrt{n(n-2)} R, \quad (242)$$

$$2 \sum_{i=2}^n |Q_{n-1,i-1} \mathbf{e}_i| |\beta_n| \leq 2\beta \|Q\| \sqrt{n} R, \quad (243)$$

$$2 \sum_{i=2}^n |Q_{n-1,i-1} \mathbf{e}_i| \left(\sum_{j=1}^n |a_j| |\mathbf{e}_j| \right) \leq 2a \|Q\| n R^2, \quad (244)$$

$$\frac{(L_d + |a_1|)^2}{4\gamma^2} \sum_{k=2}^n \left(2 \sum_{i=2}^n |Q_{k-1,i-1} \mathbf{e}_i| \right)^2 \leq \frac{(L_d + |a_1|)^2 n(n-2)}{\gamma^2} \|Q\|^2 R^2, \quad (245)$$

dentro de la bola $\mathcal{B}_R = \{ \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)^T \in \mathbb{R}^n : \mathbf{e}_1^2 + \dots + \mathbf{e}_n^2 \leq R^2 \}$ de radio R , siempre que

$$|a_j| \leq a, \quad j = 1, \dots, n \quad (246)$$

$$|\beta_k| \leq \beta, \quad k = 2, \dots, n. \quad (247)$$

Mediante el empleo de las relaciones anteriores, la desigualdad (240) es entonces reducida a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \leq & -\beta_1 + \frac{1}{4\gamma^2} (L_d^2 + 1) + R^2 \left[\frac{(L_d + |a_1|)^2 n(n-2)}{\gamma^2} \|Q\|^2 + \|Q\| (2n-3) + 2a \|Q\| n + 1 \right] \\ & + R \left[2\beta \|Q\| \sqrt{n} + 2\beta \|Q\| \sqrt{n(n-2)} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (248)$$

Una vez que el parámetro observador $\beta_1 = \beta_1(R)$ se elige lo suficientemente grande, llamado

$$\begin{aligned} \beta_1(R) > & \frac{1}{4\gamma^2} (L_d^2 + 1) + R^2 \left[\frac{(L_d + |a_1|)^2 n(n-2)}{\gamma^2} \|Q\|^2 + \|Q\| (2a + 2n - 3) + 1 \right] \\ & + R \left[2\beta \|Q\| \sqrt{n(n-1)} + 1 \right] \end{aligned} \quad (249)$$

para suprimir particularmente las estimaciones superiores (246), (247) de los otros parámetros, el hamiltoniano \mathcal{H} , evaluado mediante (248), resulta ser definida negativa dentro de la bola \mathcal{B}_R . Así, bajo la subordinación de parámetros (249), la correspondiente desigualdad de Hamilton–Jacobi(20) está demostrado que se mantiene localmente fuera de la superficie de conmutación $e_1 = 0$ dentro de la bola \mathcal{B}_R .

5.2.2. Verificación de la desigualdad de Hamilton–Jacobi sobre la superficie de conmutación

La ecuación de modos deslizantes, que rige la dinámica del observador sobre la superficie de conmutación $e_1 = 0$, es obtenida mediante la aplicación del método de control equivalente de Utkin (1992). Por lo tanto, si está sobre la superficie de conmutación $e_1 = 0$, la dinámica de los errores de observación (232) son reducidas a

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_2 &= e_3 + \tilde{d}_2(t)\omega_2(t) - \frac{\beta_2}{\beta_1} \left[e_2 + \tilde{d}_1(t)\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \right] \\
 \dot{e}_3 &= e_4 + \tilde{d}_3(t)\omega_3(t) - \frac{\beta_3}{\beta_1} \left[e_2 + \tilde{d}_1(t)\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \right] \\
 &\vdots \\
 \dot{e}_{n-1} &= e_n + \tilde{d}_{n-1}(t)\omega_{n-1}(t) - \frac{\beta_{n-1}}{\beta_1} \left[e_2 + \tilde{d}_1(t)\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \right] \\
 \dot{e}_n &= \sum_{i=2}^n a_i e_i + \tilde{d}_n(t)\omega_n(t) - a_1 \omega_0(t) - \frac{\beta_n}{\beta_1} \left[e_2 + \tilde{d}_1(t)\omega_1(t) + \dot{\omega}_0(t) \right]
 \end{aligned} \tag{250}$$

y su salida (233) se especifica

$$z_e^0 = h(e) = [0, e_2, \dots, e_n]^T. \tag{251}$$

El sistema resultante (250)–(251) se representa fácilmente en la forma (5)–(6) con

$$\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]^T, \quad \omega_{\tilde{\mathbf{e}}}(t) = [\omega_0(t), \omega_1(t), \dots, \omega_n(t), \dot{\omega}_0(t)]^T \quad (252)$$

$$f(\tilde{\mathbf{e}}) = F\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2}{\beta_1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\beta_3}{\beta_1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_2 - \frac{\beta_n}{\beta_1} & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}, \quad (253)$$

$$g(\tilde{\mathbf{e}}) = G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1} \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1} \\ 0 & -\frac{\beta_3}{\beta_1} \tilde{d}_1 & 0 & \tilde{d}_3 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\beta_3}{\beta_1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1} \tilde{d}_1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{d}_{n-1} & 0 & -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1} \\ -a_1 & -\frac{\beta_n}{\beta_1} \tilde{d}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{d}_n & -\frac{\beta_n}{\beta_1} \end{bmatrix} \quad (254)$$

mientras que la función definida positiva (238) es simplificada a

$$V_{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{e}}^T Q \tilde{\mathbf{e}}. \quad (255)$$

Mediante la sustitución (251)–(255) en el lado izquierdo de la desigualdad de Hamilton - Jacobi (20), el hamiltoniano del sistema de errores de observación a lo largo de la superficie $e_1 = 0$ es derivado en la forma

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{e}}^T \left(F^T Q + QF + \frac{1}{\gamma^2} QGG^T Q + I \right) \tilde{\mathbf{e}}. \quad (256)$$

Es claro que el hamiltoniano $H_{\tilde{\mathbf{e}}}$ es negativo definido, si y sólo si

$$\beta_1^2 \left(F^T Q + QF + \frac{1}{\gamma^2} QGG^T Q + I \right) < 0 \quad (257)$$

o, equivalentemente, si y sólo si

$$\Phi^T Q + Q\Phi + \frac{1}{\gamma^2} Q\Psi\Psi^T Q + \beta_1^2 I < 0 \quad (258)$$

donde

$$\Phi = \beta_1^2 F = \begin{bmatrix} -\beta_1\beta_2 & \beta_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_1\beta_3 & 0 & \beta_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -\beta_1\beta_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1^2 \\ -\beta_1\beta_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (259)$$

$$\Psi = \beta_1 G = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2 d_1 & \beta_1 d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_2 \\ 0 & -\beta_3 d_1 & 0 & \beta_1 d_3 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_3 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & -\beta_{n-1} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 d_{n-1} & 0 & -\beta_{n-1} \\ -\beta_1 a_1 & -\beta_n d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 d_n & -\beta_n \end{bmatrix}. \quad (260)$$

Así, la desigualdad de Hamilton–Jacobi (20), visto a lo largo de la superficie de conmutación observador $e_1 = 0$ y especificada con (251)–(255), es válido siempre que exista una matriz definida positiva simétrica $Q > 0$ y las ganancias del observador β_1, \dots, β_n tal que (258) sea definida negativa. A partir de (259) y (260) la desigualdad (258) es cuadrática, con respecto a los parámetros β_1, \dots, β_n a identificar y su factibilidad se reduce a partir de el lema de Schur a la factibilidad de LMI correspondiente. Esta observación permite utilizar MATLAB para sintonizar las ganancias del observador para la atenuación de las perturbaciones no coincidentes inferiores a un nivel predeterminado especificado de γ .

5.2.3. Observador robusto frente a perturbaciones no acopladas

Las características de robustez deseadas del diseño de observador de modos deslizantes propuesta se establece mediante la aplicación de forma directa del Teorema 2.1 para el sistema en errores de observación (232).

Teorema 5.2 *Dentro del dominio de \mathcal{B}_R , considerar el sistema (203), especificado con (227). Un observador discontinuo (230) es entonces diseñado, basado en la medición del sistema (226). Dada una γ , sea que existen las ganancias del observador β_1, \dots, β_n y una matriz definida positiva Q de tal manera que la subordinación de parámetros (249)*

es válido y la desigualdad cuadrática (258) se satisface. Entonces el sistema en errores de observación (232) es internamente estable y posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto de la salida del error (233).

Demostración. La desigualdad de Hamilton–Jacobi (20) y su contraparte de modos deslizantes (22), especificada para el sistema de errores de observación (232) fuera de y , respectivamente, a lo largo de la superficie de conmutación $e_1 = 0$, han sido validados en la subsección 5.2.1 y 5.2.2. La Hipótesis **H** está así validado para el sistema en cuestión y la aplicabilidad del Teorema 2.1 para el sistema de errores de observación (232) es entonces calculada. Mediante la aplicación del Teorema 2.1 para (232) que la prueba sea completada. ■

5.3. Sintonización de controladores por modos deslizantes: el caso de información parcial

Con el fin de obtener la síntesis de la salida del controlador, alimentado por el único sistema de medición disponible (226), la ley de retroalimentación del estado (207) es modificada de acuerdo a la siguiente:

$$u = -M \text{sign}(\hat{s}) \quad (261)$$

donde en contraste de (208), la superficie de conmutación

$$\hat{s}(x, e) = (x_n - e_n) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k (x_k - e_k) = \hat{x}_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \hat{x}_k \quad (262)$$

se basa en la salida $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T$ el observador discontinuo propuesto (230), utilizando de ese modo solamente la salida medida (226). El desempeño del sistema (209) es entonces actualizado a

$$z = [y, x_2, \dots, x_{n-1}, \hat{s}, e_1, \dots, e_n]^T. \quad (263)$$

Finalmente, resumiendo las derivaciones de la sección 5.1 y 5.2, el siguiente resultado es obtenido.

Teorema 5.3 *Considere el sistema (203), especificado con (227). Deje que sea accionado por el controlador con retroalimentación en la salida conmutada (261), (262), que se alimenta por el observador de estado (230), de manera paralela. Dada una $\gamma > 0$ arbitrariamente y el dominio \mathcal{B}_R de radio $R > 0$, suponiendo que la magnitud del controlador $M > 0$ se selecciona para satisfacer la desigualdad (219) así los parámetros de la superficie c_1, \dots, c_n son tales que (223) es válido con (222) y κ , satisfaciendo (225). Por otra parte, sea Q una matriz definida positiva y las ganancias del observador β_1, \dots, β_n elegidos de forma que las desigualdades (249) y (258) se cumplan. Entonces el sistema en lazo cerrado (203), (230), (261), (262) es internamente estable y posee una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (233), (263), localmente dentro de la bola \mathcal{B}_R de radio R .*

Prueba es más bien técnica y que se basa en la validación de la desigualdad de Hamilton correspondiente (20), (22) fuera de y a lo largo de las superficies de conmutación $\hat{s} = 0$ y/o $e_1 = 0$ con respecto a la función definida positiva

$$V_\delta = \tilde{x}^T P \tilde{x} + |\hat{s}| + |e_1| + \tilde{e}^T Q \tilde{e}. \quad (264)$$

Dado que sigue la misma línea de razonamiento utilizado en las demostraciones de los Teoremas 5.1 y 5.2 la demostración detallada se deja al lector. En lugar de ello, las evidencias numéricas que apoyan las capacidades del procedimiento de sintonización heredadas del Teorema 5.3, se presentan en el capítulo siguiente.

Capítulo 6. Caso de estudio experimental: Regulación de un péndulo subactuado con rueda inercial

La efectividad del procedimiento de sintonización, resultado del teorema 5.1, es probado en un modelo de un péndulo subactuado con rueda inercial de Astrom (2001). El modelo se muestra en la Figura 11, reproducida de Astrom (2001) y consiste en una rueda controlada por un motor, conectada hacia un péndulo no actuado. El modelo dinámico está regido por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad (265)$$

donde $q_1(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo absoluto del péndulo, en sentido horario desde la posición vertical hacia abajo, $q_2(t) \in \mathbb{R}$ es el ángulo absoluto del disco, $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo, $\tau \in \mathbb{R}$ es el torque controlado, aplicado al disco, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ son las perturbaciones, J_1 y J_2 son la inercia del péndulo y de la rueda, respectivamente; el factor $r = mgl$ depende de la masa en conjunto m del modelo general péndulo-rueda, de la constante gravitacional g , y de la longitud l del eslabón.

El *problema de interés* es estabilizar localmente el péndulo en torno a su posición vertical, mientras también atenúa perturbaciones acopladas y desacopladas. El estudio se enfoca en el diseño de retroalimentación del estado.

Siguiendo Grizzle *et al.* (2005), se resuelve fácilmente mediante la linealización de retroalimentación exacta a través de sustitución de estado

$$\begin{aligned} \theta &= q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2 \\ \eta &= J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2 + K\theta \end{aligned} \quad (266)$$

con un parámetro de diseño $K > 0$. Mediante la comprobación de

$$J_1 \dot{\theta} = \eta - K\theta \quad (267)$$

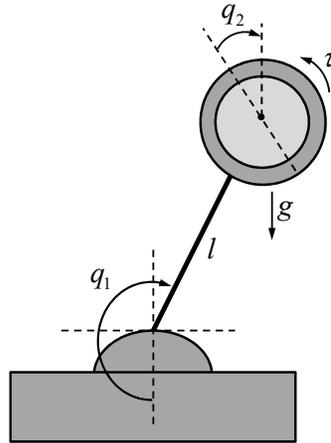


Figura 11: Péndulo con rueda inercial.

se llega a

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= KJ_1^{-1}J_2\dot{q}_2 - r \sin(q_1) + K\dot{q}_1 + w_1(t), \\
 \ddot{\eta} &= -r \cos(q_1)\dot{q}_1 - KJ_1^{-1}r \sin(q_1) + w_2(t), \\
 \ddot{\eta} &= R(q_1, \dot{q}_1) + H(q_1)\tau + w_3(t)
 \end{aligned} \tag{268}$$

donde

$$\begin{aligned}
 H(q_1) &= \frac{r \cos(q_1)}{J_1 - J_2}, \\
 R(q_1, \dot{q}_1) &= [\dot{q}_1^2 + H(q_1)] r \sin(q_1) - \frac{rK}{J_1}\dot{q}_1 \cos(q_1),
 \end{aligned} \tag{269}$$

y

$$\begin{aligned}
 w_1(t) &= \omega_1(t), \quad w_2(t) = K \frac{1 - J_1^{-1}}{J_1 - J_2} \omega_1(t) + \dot{\omega}_1(t), \\
 w_3(t) &= -H(q_1(t))\omega_1(t) + K \frac{1 - J_1^{-1}}{J_1 - J_2} \dot{\omega}_1(t) + \ddot{\omega}_1 - H(q_1(t))\omega_2(t),
 \end{aligned} \tag{270}$$

siempre que la perturbación $\omega_1(t)$ sea lo suficientemente suave. Dado que $H(q_1)$ es localmente no singular alrededor de la posición superior del péndulo $[q_1^* \ \dot{q}_1^*]^T = [\pi \ 0]^T$ el siguiente compensador retroalimentado

$$\tau = H^{-1}(q_1) [u - a_1\eta - a_2\dot{\eta} - a_3\ddot{\eta} - R(q_1, \dot{q}_1)], \tag{271}$$

parametrizado con a_1 , a_2 , y a_3 positivos, linealiza las ecuaciones de la planta en las nuevas cordenadas de estado $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\eta \ \dot{\eta} \ \ddot{\eta} \ \theta]^T$ con una nueva entrada de control u a diseñar. Las ecuaciones lineales resultantes

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad (272)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J_1} x_1 - \frac{K}{J_1} x_4. \quad (273)$$

son representadas en la forma canónica (203), (227), apropiadamente especificadas para la dinámica (266).

Es claro que la dinámica anterior (273) constituye la dinámica cero de la dinámica de la planta en general (272), (273). Dado que estas dinámicas no se ven afectadas por perturbaciones externas y son exponencialmente estables, con una razón de decaimiento $J_1^{-1}K$, la cual es manipulable debido a la elección arbitraria del parámetro de diseño K , el objetivo de control de la estabilización robusta del péndulo en su posición vertical es alcanzado una vez que las dinámicas anterior (272) es robustamente estabilizada. Con esta motivación, el modelo de tercer orden de SISO (272) es refrendado por el controlador (261). La ganancia del controlador son sintonizadas de acuerdo al Teorema 5.1 y el desempeño del sistema en lazo cerrado es sometido a prueba en simulaciones en un emulador.

6.1. Verificación experimental con emulador

El emulador PXI Express de NATIONAL INSTRUMENTS se utilizó para la verificación experimental con los siguientes parámetros $J_1 = 4.572 \times 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$, $J_2 = 2.495 \times 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$, $r = 0.3544 \text{ N} \cdot \text{m}$ del péndulo de rueda inercial fabricado por *Quanser Inc.*, mientras que los parámetros de diseño se ajustaron a $K = 1 \times 10^{-1} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $a_1 = 350 \text{ s}^{-1} \cdot \text{rad}^{-1}$, $a_2 = 155 \text{ rad}^{-1}$, y $a_3 = 22 \text{ s} \cdot \text{rad}^{-2}$. El desempeño del sistema en lazo cerrado (272), (273), controlado por (271) con la superficie de conmutación

$$s = x_3 + c_2 x_2 + c_1 x_1, \quad (274)$$

simulado en paralelo, es probado numéricamente dentro de la bola \mathcal{B}_R de radio 1 en la presencia de perturbaciones desacopladas y acopladas

$$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{\pi}{6} \sin(2t). \quad (275)$$

En las simulaciones, las condiciones iniciales de la planta se fijaron en $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$. Especificando el nivel de atenuación deseado con $\gamma = 2$, las desigualdades (162),(167)–(169) son factibles en la forma cuadrática (166), las matrices

$$P = \begin{bmatrix} 0.305 & -0.5 & -1.362 \\ -0.5 & 1.362 & -0.5 \\ -1.362 & -0.5 & 25.22 \end{bmatrix},$$

la magnitud del controlador $M = 520$, los parámetros del controlador $c_1 = 40$, $c_2 = 13$. Por lo tanto, todas las condiciones del Teorema 5.1 son ciertas, y los parámetros del controlador son entonces sintonizados para alcanzar el sistema de lazo cerrado, provisto de un nivel de atenuación de perturbaciones $\gamma = 2$. El sistema de lazo cerrado resultante es entonces simulado numéricamente para demostrar su desempeño.

La Figura 12 muestra la estabilidad asintótica del sistema libre de perturbaciones, que corresponde a $w_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Con las condiciones iniciales preseleccionadas, la trayectoria alcanza la superficie de deslizamiento $s = 0$ aproximadamente en menos de $t = 1$ s y permanece ahí para siempre. Mientras que la variable de deslizamiento permanece en su valor cero, la trayectoria se acerca al origen asintóticamente, según lo predicho la teoría.

El comportamiento del sistema, afectado tanto por perturbaciones acopladas como desacopladas, se presenta en la Figura 13. Se observa que el movimiento de deslizamiento a lo largo de la superficie $s = 0$ ya no se encuentra afectado debido a la presencia de perturbaciones desacopladas, y la trayectoria perturbada ya no se escapa a cero. Sin embargo, las variables de estado permanecen limitadas y pequeñas, de esta manera las atractivas características de robustez para el sistema perturbado se muestran en la Figura 13.

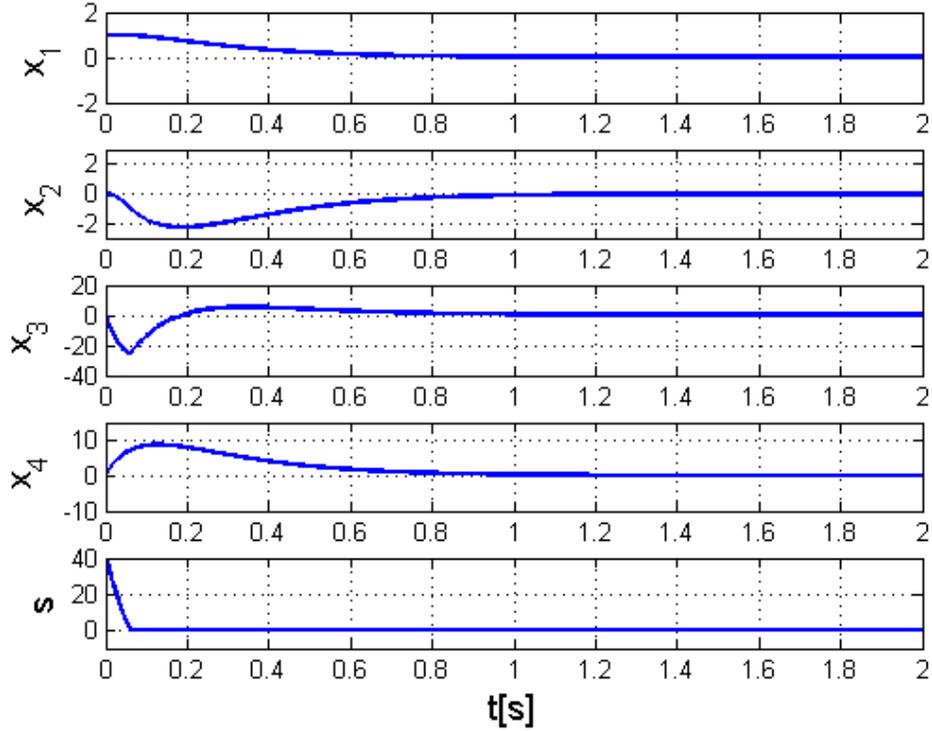


Figura 12: Dinámica del sistema en lazo cerrado sin perturbaciones con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$ y $s(0) = 40$.

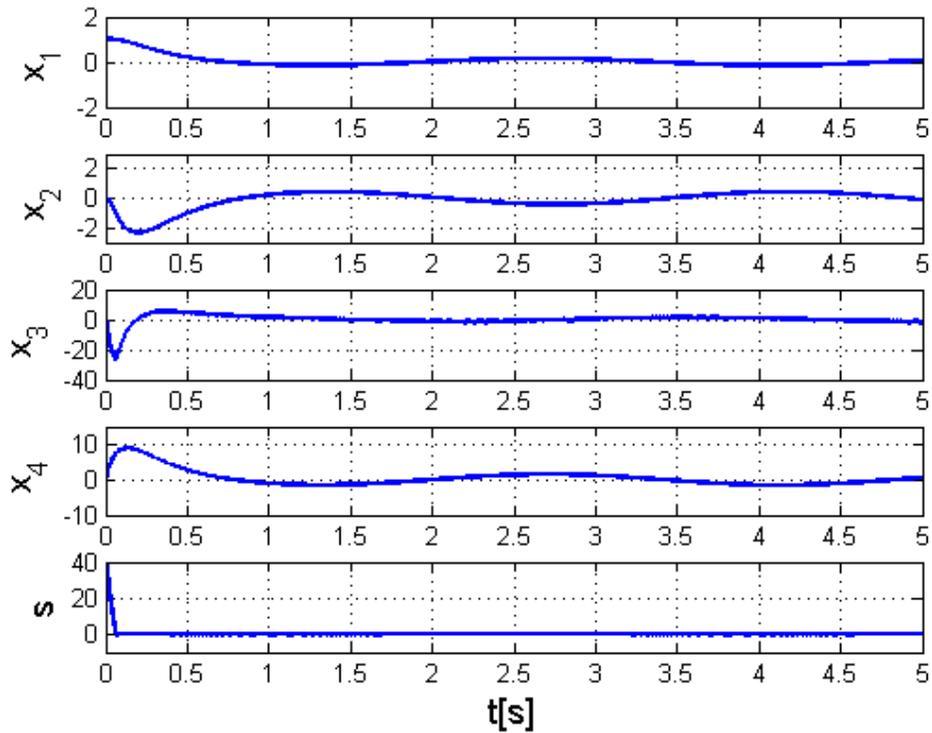


Figura 13: Dinámica del sistema en lazo cerrado afectado por perturbaciones acopladas y desacopladas (275) con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$ y $s(0) = 40$.

Capítulo 7. Conclusiones

7.1. Conclusiones generales

Las conclusiones generales obtenidas del análisis desarrollado en la presente tesis se enlistan a continuación

- Se utilizó el criterio de ganancia \mathcal{L}_2 como estrategia para concluir estabilidad de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acopladas y no acopladas acotadas gobernados por modos deslizantes de primer orden. Con el mismo análisis se pudo concluir estabilidad asintótica para el sistema libre de perturbaciones acopladas.
- El análisis de ganancia \mathcal{L}_2 se desarrolló para sistemas discontinuos, admitiendo modos deslizantes a lo largo de una superficie de deslizamiento. Hasta ahora este tipo de análisis se ha desarrollado para los sistemas dinámicos no suaves pero continuos. Sin embargo, el desarrollo actual constituye una clara contribución a la literatura existente.
- El Teorema 2.1 del Capítulo 2 resulta medular en el desarrollo teóricos de los Capítulos 3, 4 y 5 porque se demuestra que si se satisface la desigualdad de Hamilton-Jacobi entonces la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema de lazo cerrado es menor que una constante γ tomando a la perturbación como señal de entrada.
- En el Capítulo 3 se obtuvieron las condiciones de los parámetros del controlador y observador por modos deslizantes para asegurar rechazo de perturbaciones no acopladas y además lograr atenuación de las perturbaciones no acopladas para sistemas de segundo orden. La validez de las reglas se verificaron al cumplir con la desigualdad de Hamilton-Jacobi del Teorema 2.1.
- En los Teoremas 3.1, 3.2 y 3.3 se resumen las condiciones suficientes para que un sistema discontinuo fuera internamente asintóticamente estable, y para que poseyera una ganancia \mathcal{L}_2 menor que un valor de atenuación de perturbaciones γ definido a priori, tanto dentro como fuera de la superficie de deslizamiento. Las condiciones resultantes son adecuadamente unificadas, en términos de la solución apropiada de

unas desigualdades diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi, especificadas dentro y fuera de la misma superficie. Los resultados de simulación de los capítulos 3, 4 y 5 validaron los resultados teóricos logrados.

- Se dedujeron constructivamente reglas de sintonización para controladores por modos deslizantes de primer orden, a partir de las condiciones obtenidas para sistemas discontinuos de grado relativo n , representados en forma canónica de Byrnes y Isidori (1991). Las reglas de sintonización propuestas resultan ser más precisas para el control de modo deslizante, ya que son aplicables en la presencia de perturbaciones externas desacopladas, que no se consideran normalmente dentro de los métodos de modos deslizantes estándar desarrollados hasta el momento.
- Se dedujeron las reglas de sintonización para un controlador-observador por modos deslizantes de primer orden para sistemas con ambos tipos de perturbaciones, a partir de las condiciones obtenidas para sistemas discontinuos de grado relativo n . De igual manera, Las reglas de sintonización encontradas resultan ser más precisas para el control de modos deslizantes para retroalimentación de salida.
- Los resultados del Capítulo 2 y 3 fueron aplicados a una serie de cadena de integradores de orden n , en el Capítulo 4, gobernados por un controlador por modos deslizantes de primer orden y retroalimentación de salida. Esta forma permite ampliar los resultados a sistemas como robots en forma de vehículos o robos unicycle. Los Teoremas 5.1, 5.2 y 5.3 del Capítulo 5 permiten concluir atenuación de perturbaciones para una clase general de sistemas no lineales.
- A pesar de que los trabajos de Castaños y Fridman (2011) y Aparicio *et al.* (2016) son los únicos donde se abordaron perturbaciones desacopladas, usando un diferenciador no causal para estimar el estado de la planta en la base de mediciones ideales (sin considerar ruido en la medición), mientras que, en el presente trabajo se desarrolló el método aplicable para una clase de sistemas no lineales con mediciones considerando ruido, y este método no sufrió de implementación de una retroalimentación no causal.
- La teoría desarrollada para sistemas de control representados en la forma canónica

fue orientada a sistemas electromecánicos subactuados con perturbaciones des-
acopladas.

- La efectividad de la sintonización propuesta fue ilustrada en el estudio numérico de un emulador de un sistema de péndulo con rueda inercial, controlado usando modos deslizantes. De los resultados obtenidos, es posible observarse que se alcanzó el nivel de atenuación de perturbaciones deseado, aun en presencia de perturbaciones externas no acopladas.

7.1.1. Limitaciones

Las limitaciones del trabajo destaca en que todos los resultados son locales. Es decir, no existe resultados analíticos que permitan determinar el dominio de aplicación en el espacio del estado y este dominio se busca de manera numérica o práctica.

7.2. Productividad

Durante este periodo de investigación se obtuvo como resultado los siguiente productos:

Dos artículos internacionales:

- T. Osuna and Y. Orlov. \mathcal{L}_2 -gain analysis of sliding mode controllers. VSS'14 (Variable Structure Systems 2014), Nantes, Francia.
- T. Osuna y Y. Orlov. Análisis de Ganancia \mathcal{L}_2 de un Sistema de Orden n con Controladores de Modos Deslizantes. Congreso Latinoamericano de Control Automático 2014, para el caso del orden n , Cancún, México.

Un artículo publicado de revista, con los siguientes datos:

- T. Osuna, O. Montaña, and Y. Orlov “Nonlinear \mathcal{L}_2 -Gain analysis of hybrid systems in the presence of sliding modes and impacts”, *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1–10, 2016.

Un Capítulo en el libro, con los siguientes datos:

- T. Osuna, U. Ponce, Y. Orlov and L. Aguilar. Recent Trends in Sliding Mode Control, Capítulo \mathcal{L}_2 gain analysis of sliding mode dynamics. pp.-(23). Edited by Leonid Fridman, Jean-Pierre Barbot and Franck Plestan. The Institution of Engineering and Technology (IET), 2016.

7.3. Trabajos a Futuro

La presente investigación fue enfocada para el análisis de ganancia \mathcal{L}_2 para sistemas de estructura variable que presentan discontinuidades en una superficie, se puede ampliar a los siguientes puntos:

- Extensión del método a sistemas de estructura variable que presenten discontinuidades en varias superficies.
- Extensión de resultados teóricos obtenidos a sistemas de estructura variable a una clase más amplia, cuando no esten en su forma canónica. Particularmente, la aplicación fue enfocada en sistemas SISO y se espera la extensión a sistemas MIMO.
- El estudio fue con énfasis en sistemas con modos deslizantes de primer orden y la extensión a algoritmos de modos deslizantes de segundo orden o superior sería el paso siguiente.
- Buscar y verificar de manera experimental en que aplicaciones la sintonización de controladores por modos deslizantes superan otros controladores y permitan un mejor desempeño del sistema en lazo cerrado.

Lista de referencias bibliográficas

- Aparicio, A., Castaños, F., y Fridman, L. (2016). Output feedback sliding-mode control with unmatched disturbances, an iss approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, online access, p. DOI: 10.1002/rnc.3548.
- Astolfi, A. (1997). Singular \mathcal{H}_∞ control for nonlinear systems. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, **7**: 727–740.
- Astrom (2001). The reaction wheel pendulum [Computer software manual]. Urbana-Champaign. IL.
- Basar, T. y Bernhard, P. (1995). \mathcal{H}_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Birkhauser. Boston.
- Benderradji, H., Benamor, A., Chrifi-Alaoui, L., Bussy, P., y Makouf, A. (2012). Second order sliding mode induction motor control with a new lyapunov approach. 2012–9th International Multi-Conference on Systems, Signal and Devices, pp. 1–6.
- Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., y Polyakov, A. (2014). On homogeneity and its application to sliding mode control. *Journal of Franklin Institute*, **351**(4): 1866–1901.
- Byrnes, C. y Isidori, A. (1991). Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. on Autom. Control*, **36**(10): 1122–1137.
- Castaños, F. y Fridman, L. (2011). Dynamic switching surface for output sliding mode control: An \mathcal{H}_∞ approach. *Automatica*, **47**(8): 1957–1961.
- Clarke, F. H. (1983). *Optimization and Non-smooth Analysis*. Wiley Interscience. New York.
- Estrada, A., Loria, A., Santiesteban, R., y Fridman, L. (2011). Lyapunov stability analysis of a twisting based control algorithm for systems with unmatched perturbations. 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pp. 4586–4591.
- Filippov, F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*. Kluwer, Dordrecht. The Netherlands.
- Grizzle, J., Moog, C., y Chevallereau, C. (2005). Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable. *IEEE Trans. on Autom. Control*, **50**(5): 559–576.
- Isidori, A. y Astolfi, A. (1992). Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, pp. 1283–1293.
- Moreno, J. y Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **57**(4): 1035–1040.
- Orlov, Y. (2005). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **43**(4): 1253–1271.
- Orlov, Y. (2009). *Discontinuous Systems – Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions*. Springer-Verlag. London, UK.

- Orlov, Y. y Aguilar, L. T. (2014). *Advanced \mathcal{H}_∞ Control – Towards Nonsmooth Theory and Applications*. Birkhauser. USA.
- Orlov, Y., Aoustin, Y., y Chevallereau, C. (2011). Finite time stabilization of a perturbed double integrator—part i: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control*, pp. 614–618.
- Osuna, T. y Orlov, Y. (2014a). \mathcal{L}_2 -gain analysis of sliding mode controller. 13th International Workshop on Variable Structure Systems 2014.
- Osuna, T. y Orlov, Y. (2014b). Análisis de \mathcal{L}_2 de un sistema de orden n con controladores de modos deslizantes. *Congreso Latinoamericano de Control Automático 2014, para el caso del orden n* .
- Osuna, T., Montañó, O., y Orlov, Y. (2016a). Nonlinear \mathcal{L}_2 -gain analysis of hybrid systems in the presence of sliding modes and impacts. *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1–10.
- Osuna, T., Ponce, U., Y., O., y L., A. (2016b). *IET book Recent Trends in Sliding Mode Control, chapter: \mathcal{L}_2 gain analysis of sliding mode dynamics*. Fridman, L. and Barbot, J. P. and Plestan F.
- Polyakov, A. y Poznyak, A. (2012). Unified lyapunov fuction for a finite-time stability analysis of relay second-orden sliding mode control systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **29**(4): 529–550.
- Ponce, I., Orlov, Y., y Aguilar, L. (2013a). Nonsmooth \mathcal{L}_2 -gain analysis of twisting controller. 6th International Scientific Conference on Physics and Control, pp. 614–618.
- Ponce, I., Orlov, Y., y Aguilar, L. (2013b). Nonsmooth \mathcal{L}_2 -gain analysis of super-twisting algorithm. 2013 6th Congreso Nacional de Control Automático 2013, pp. 628–633.
- Santiesteban, R., Fridman, L., y Moreno, J. (2010). Finite-time convergence analysis for twisting controller via a strict lyapunov function. 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems, pp. 1–6.
- Utkin, V. (1992). *Sliding modes in control and optimization*. Springer–Verlag. Berlin.
- Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (1999). *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. Taylor and Francis. London.
- Van der Shaft, A. (1992). \mathcal{L}_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control. *IEEE Trans. Autom. Control*, **37**(6): 770–784.
- Zhang, J., Shen, T., y Jiao, X. (2009). \mathcal{L}_2 -gain analysis and feedback design for discontinuous time-delay systems based on functional differential inclusion. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, pp. 5114–5119.
- Zhang, X., Zhao, J., y Dimirovski, G. M. (2012). \mathcal{L}_2 -gain analysis and control synthesis of uncertain switched linear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Systems Science*, **43**(4): 731–740.

Zhao, G. y Wang, J. (2013). Finite time stability and \mathcal{L}_2 -gain analysis for switched linear systems with state-dependent switching. *Journal of the Franklin Institute*, **350**: 1075–1092.