


RESUMEN de la tesis de José Pedro Osuna Cañedo presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS con opción en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California, México. Enero 1994.

EVOLUCIÓN DE UNA CORRIENTE OCEÁNICA FRONTAL

Resumen aprobado por:


Dr. Edgar Pavía López
Director de tesis

Se estudia mediante un modelo oceánico de una y media capas la evolución de una corriente frontal con perfil de profundidad monótonico. La corriente está situada en latitudes medias y se excluyen de su modelación los efectos termodinámicos y de fricción. Se resuelven numéricamente, con un método de partículas, las Ecuaciones Primitivas de aguas someras con gravedad reducida y la ecuación de la Dinámica de Frentes Geostroficados. Tres casos son resueltos, siendo caracterizado cada uno de ellos por el número de Rossby (Ro). Para las Ecuaciones Primitivas se resuelven los casos: $Ro = 0.01$, $Ro = 0.1$ y $Ro = 1.0$, mientras que para la Dinámica de Frentes Geostroficados, cuya validez se restringe a valores de $Ro \ll 1$, se resuelven únicamente los casos: $Ro = 0.01$ y $Ro = 0.1$.

Independientemente de los resultados numéricos, de forma analítica se obtiene un criterio de estabilidad lineal para la Dinámica de Frentes Geostroficados, el cual nos indica que una corriente con perfil de profundidad monótonico es estable a perturbaciones infinitesimales. Este resultado solo pudo ser corroborado con el caso $Ro = 0.01$ resuelto numéricamente con la misma dinámica.

De los resultados obtenidos con las Ecuaciones Primitivas se puede apreciar que la evolución de oscilaciones en el frente está relacionada con el orden de magnitud del número de Rossby y la amplitud de las perturbaciones iniciales. Estas perturbaciones iniciales pueden ser simplemente numéricas (infinitesimales) o explícitamente inducidas al estado inicial (de amplitud finita). La presencia de variabilidad frontal en el caso con $Ro = 0.1$ parece estar asociada a perturbaciones de amplitud finita, mientras que los resultados con $Ro = 1.0$ sugieren que la variabilidad intensa que se produce solo requiere perturbaciones infinitesimales. La evolución de perturbaciones en los casos $Ro = 0.1$ y $Ro = 1.0$ producen estructuras cualitativamente semejantes a las que se presentan en corrientes oceánicas reales. Además, las escalas espaciales y la velocidad de dichas estructuras son del mismo orden de magnitud que las observadas en corrientes oceánicas.

La estabilidad observada en los experimentos numéricos para el caso $Ro = 0.01$ sugieren que los flujos con $Ro \rightarrow 0$ son estables a perturbaciones de amplitud pequeña. La inestabilidad de los casos $Ro > 0.1$ es atribuida al efecto de ondas inercio-gravitatorias, las cuales están ausentes en la formulación de la dinámica frontal.

TESIS DEFENDIDA POR: JOSE PEDRO OSUNA CAÑEDO
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:

Edgar Pavia

DR. EDGAR GERARDO PAVIA LOPEZ.- Director del Comité

Edgar Pavia Lopez

DR. JUAN MANUEL LOPEZ MARISCAL.- Miembro del Comité

José Luis Ochoa de la Torre.

DR. JOSE LUIS OCHOA DE LA TORRE.- Miembro del Comité

Cecilio Javier Rebollar Bustamante

DR. CECILIO JAVIER REBOLLAR BUSTAMANTE.- Miembro del Comité

Ma. Luisa Argote Espinoza

DRA. MA. LUISA ARGOTE ESPINOZA.- Miembro de Comité

Ma. Luisa Argote Espinoza

DR. ANTOINE BADAN DANGON.- Jefe Depto. Oceanografía Física

Antoine Badan Dangon

DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director de Estudios de Posgrado

21 DE ENERO DE 1994

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISIÓN DE OCEANOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFÍA FÍSICA

EVOLUCIÓN DE UNA CORRIENTE OCEÁNICA FRONTAL

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos
necesarios para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS
presenta

JOSÉ PEDRO OSUNA CAÑEDO

Ensenada, Baja California, Enero de 1994.

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a las personas más importantes en mi vida;

A mis padres

A mis hermanos y sobrinos

A Margarita Mata

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Dr. Edgar Pavía López el haber aceptado dirigirme en este trabajo. Agradezco también sus consejos, apoyo y optimismo que mostró durante el desarrollo del mismo.

A los miembros del comité; Pepe Ochoa, Manuel López, Mary Argote y Cecilio Rebollar por tomarse la molestia de revisar el trabajo y hacer valiosos apuntes y comentarios.

También debo agradecer a quienes en algún momento aportaron críticas al trabajo, particularmente a Julio Sheinbaum, Pedro Ripa, Federico Graef y Alejandro Parés.

Agradezco al CONACyT el apoyo económico en mi período como becario. Además, este trabajo forma parte del proyecto de CONACyT (No. 1002-T9111) "Corrientes y Remolinos en el Golfo de México y Mar Caribe", del cual obtuve una sobrebeca por espacio de un año.

Agradezco también a la Universidad Estatal de Florida (FSU) por haber proporcionado acceso a la Supercomputadora CRAY-YMP, donde se realizaron las primeras corridas del modelo. También a la DGSCA-UNAM por el tiempo de Supercómputo en la CRAY-YMP.

A la gente del Centro de Cómputo, Biblioteca y Servicios Escolares de CICESE. Al personal del Departamento de Oceanografía, particularmente a Chema Robles por el apoyo inicial, a Julieta, Lina y Adriana por el café y a los técnicos Joaquín, Chava, Javier, Carolina y Fer.

A mis compañeros y excompañeros alumnos de CICESE.

Agradezco muy especialmente a la Profesora Virginia Castañeda por tratarme como a un miembro de su familia y apoyarme siempre.....Gracias Profe.

CONTENIDO

| | <u>Página</u> |
|-------------------------------|---------------|
| I. INTRODUCCIÓN | 1 |
| II. EL MODELO | 7 |
| II.1.- Modelos dinámicos | 7 |
| II.2.- Modelos numéricos | 12 |
| III. CONSIDERACIONES TEÓRICAS | 17 |
| IV. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS | 23 |
| IV.1.- Descripción | 23 |
| IV.2.- Resultados | 27 |
| IV.2.1.- Caso $Ro=0.01$ | 27 |
| IV.2.3.- Caso $Ro=0.1$ | 28 |
| IV.2.4.- Caso $Ro=1.0$ | 38 |
| V. DISCUSIÓN | 43 |
| VI. CONCLUSIONES | 48 |
| LITERATURA CITADA | 51 |

LISTA DE FIGURAS

| <u>Figura</u> | | <u>Página</u> |
|---------------|---|---------------|
| 1. | Esquematación de los tipos de filamentos más comunes en la literatura: a) filamento doble, b) filamento costero y c) filamento abierto. El presente trabajo se enfoca en el estudio sobre la evolución de estructuras del tipo (c). | 3 |
| 2. | Representación esquemática del frente aislado y ejes coordenados en un océano de una y media capas. | 8 |
| 3. | Diagrama de flujo para el modelo numérico que resuelve las ECP. El superíndice señala el proceso en la k -ésima partícula al tiempo n . El volumen (Vol) es definido inicialmente para cada partícula y ese valor se mantiene constante para toda n . | 14 |
| 4. | Igual que en la Figura 3 pero para la DFG. | 15 |
| 5. | Geometría utilizada en el solución numérica del problema. En el esquema h es el perfil de profundidades, L es el ancho del flujo y H es la profundidad máxima en la zona $y_0 \leq y \leq -y_0$. Este esquema es equivalente a la estructura que se muestra en la Figura 1a con el punto $y = 0$ (línea punteada) separado la distancia correspondiente a H . En el trabajo solo se presenta la evolución de uno de los frentes. | 24 |
| 6. | Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 0.01$ resuelto con la DFG. El frente es representado por la isóbata de 10 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 10 m. Debido a que el caso no presenta inestabilidad frontal, solo se muestran las gráficas correspondientes a los tiempos; a)0 y b)60 días. | 29 |
| 7. | Igual que en la Figura 6 pero para las ECP. | 30 |

LISTA DE FIGURAS

(continuación)

| <u>Figura</u> | | <u>Página</u> |
|---------------|--|---------------|
| 8. | Gráficas de ε_c (línea discontinua) y ε_p (línea continua) (ver ecuaciones 33a y 33b) en el modelo que resuelve la dinámica ECP. Las gráficas <i>a</i> , <i>b</i> y <i>c</i> corresponden a los casos; $Ro = 0.01$, $Ro = 0.1$ y $Ro = 1.0$, respectivamente. Es importante tener en cuenta que en el caso (<i>a</i>) Ep es dos ordenes de magnitud mayor que Ec y en los casos (<i>b</i>) y (<i>c</i>) es un orden mayor (Ec y Ep representados por 32a y 32b, respectivamente). | 31 |
| 9. | Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 0.1$ resuelto con DFG. El frente es representado por la isóbata de 50 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 100 m . Las gráficas corresponden a los tiempos; a)0, b)11, c)12, d)13, e)14 y f)15 días. | 32 |
| 10. | Gráficas de ε_c y ε_p para el caso $Ro = 0.1$ resuelto con la dinámica DFG. Tanto ε_c como ε_p están representados como en la Figura 8. Se omite graficar el caso $Ro = 0.01$ ya que en este, $\varepsilon_c = \varepsilon_p = 0$ hasta el final de la corrida. | 33 |
| 11. | Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 0.1$ resuelto con las ECP. El frente es representado por la isóbata de 50 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 100 m. Las gráficas corresponden a los tiempos; a)0, b)28, c)30, d)32, e)34 y f)36 días. | 35 |
| 12. | Igual que en la Figura 11 pero para los tiempos; a)38, b)40, c)42, d)44, e)46 y f)48 días. | 36 |
| 13. | Igual que en la Figura 11 pero para los tiempos; a)50, b)52, c)54, d)56, e)58 y f)60 días. | 37 |

LISTA DE FIGURAS
(continuación)

| <u>Figura</u> | | <u>Página</u> |
|---------------|--|---------------|
| 14. | Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 1.0$ resuelto con las ECP. El frente es representado por la isóbata de 50 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 100 m . Las gráficas corresponden a los tiempos; a)0, b)6, c)10, d)16, e)18 y f)20 días. | 39 |
| 15. | Igual que en la Figura 14 pero para los tiempos; a)28, b)30, c)32, d)34, e)36 y f)38 días. | 40 |
| 16. | Igual que en la Figura 14 pero para los tiempos; a)50, b)52, c)54, d)56, e)58 y f)60 días. | 41 |

EVOLUCIÓN DE UNA CORRIENTE OCEÁNICA FRONTAL

I. INTRODUCCIÓN

Algunas de las corrientes más importantes en el océano, tales como la Corriente del Golfo, la Corriente de Kuroshio y la Corriente de Noruega, presentan un carácter frontal bien definido (ver la figura 3 de *Csanady, 1979*). También es posible observar en estas una alta variabilidad que se manifiesta en la formación de meandros y su posterior rompimiento en forma de remolinos ciclónicos o anticiclónicos -esto es a lo que en términos generales se le conoce como inestabilidad de corrientes oceánicas-. Dichos sistemas reales son físicamente muy complejos por lo que su estudio requiere de aproximaciones que aislen efectos con escalas temporales convenientes al fenómeno de interés.

La escala temporal de las variaciones en las corrientes frontales suele ser grande con respecto al período inercial, lo cual en principio sugiere la validez de la aproximación cuasi-geostrófica (*Pedlosky, 1986*) como modelo dinámico. Sin embargo, dicha aproximación es incapaz de resolver la estructura frontal que caracteriza a las corrientes antes mencionadas. No obstante esta restricción, la dinámica cuasi-geostrófica ha sido utilizada en no pocos trabajos teóricos (*Lipps, 1963, Pedlosky, 1964, Killworth, 1980*) y en algunos otros trabajos numéricos encaminados a simular la evolución de sistemas reales (*Holland y Haidvogel, 1980, Ikeda, 1981, Lozier y Bercovici, 1992*).

En este trabajo se simplifica el concepto de corriente oceánica de tal modo que, para su estudio, se le considera como un filamento. Un filamento lo definimos como un chorro

de longitud infinita en una capa de fluido homogéneo. Dicho flujo se encuentra sobre otra capa de mayor densidad e infinitamente profunda (sin movimiento). El filamento se caracteriza por la presencia de uno o dos frentes que intersectan la superficie y acotan lateralmente al chorro. Como resultado de las aproximaciones, dejaremos a un lado el papel que podría desempeñar la inclusión de más capas activas y solo retendremos el efecto producido por la distribución horizontal de las variables dinámicas.

Podemos definir varios filamentos modelo a partir de los frentes o fronteras que lo delimitan; uno es el filamento doble, formado por dos frentes que intersectan la superficie (figura 1a), otro es el filamento costero, limitado por un frente en uno de sus extremos y una pared en el otro (figura 1b) y el filamento abierto, que se encuentra limitado por un frente en uno de sus extremos mientras que la otra frontera se encuentra a una distancia "infinita" del frente (figura 1c).

Las características particulares del filamento requieren el uso de una dinámica que resuelva físicamente su caracter frontal. Por lo tanto el modelo propuesto para este trabajo está representado por las ecuaciones primitivas de aguas someras con gravedad reducida para un océano de una y media capas (ECP) o alguna otra dinámica que retenga el modo frontal del filamento. A continuación se mencionan algunos trabajos en que se utilizan las ECP para el estudio de filamentos oceánicos.

Un trabajo importante sobre la estabilidad de un filamento doble como representación simple de una corriente fue realizado por *Griffiths et al. (1982)*. Estos autores realizaron un estudio teórico y experimental sobre la estabilidad de dichos filamentos demostrando que son altamente inestables. Señalan también que el acoplamiento entre los dos frentes

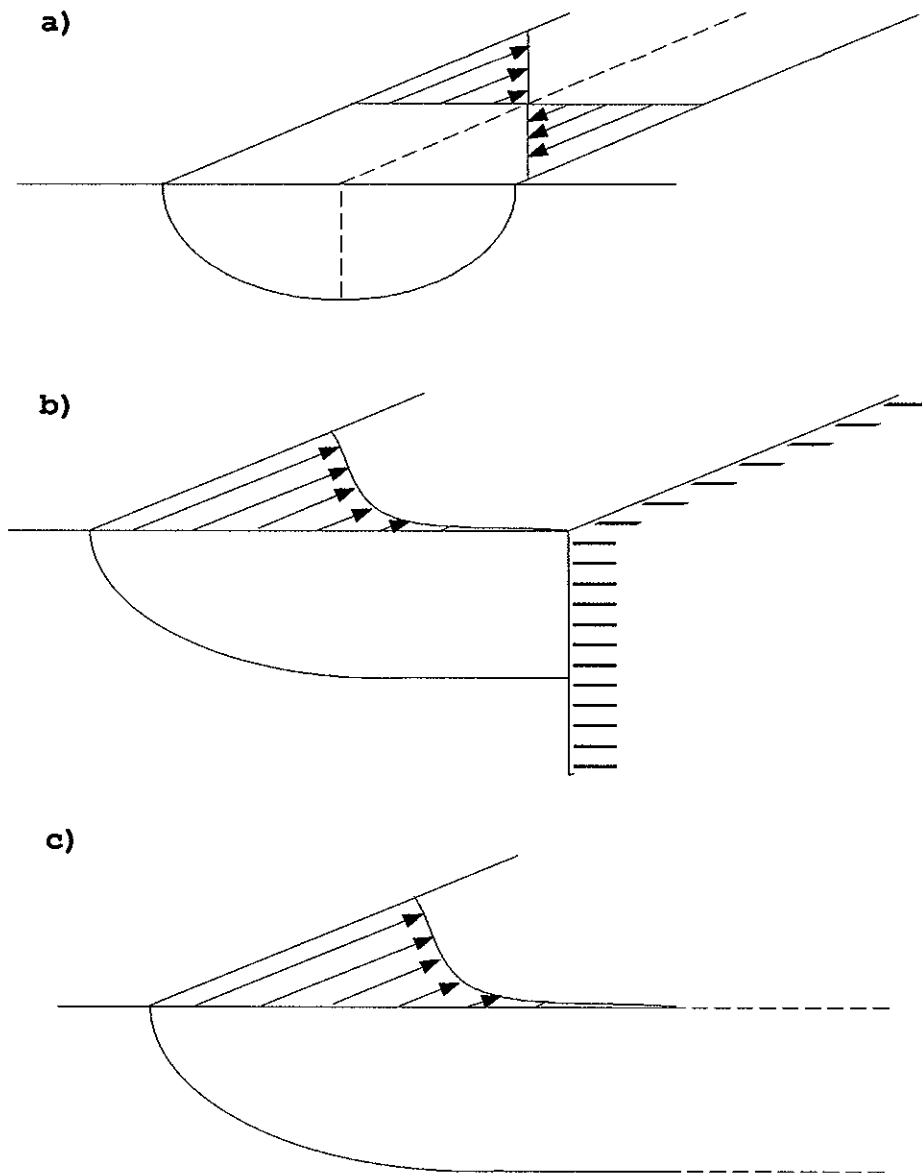


Fig. 1.- Esquematización de los tipos de filamentos más comunes en la literatura: a)filamento doble, b)filamento costero y c)filamento abierto. El presente trabajo se enfoca en el estudio sobre la evolución de estructuras del tipo (c).

es el factor importante en la generación de inestabilidad. Sus resultados teóricos son cualitativamente coherentes con los resultados experimentales. Posteriormente *Salmon (1983)* y *Pavia (1992)* han de corroborar este resultado al realizar estudios numéricos sobre la evolución de estos filamentos.

A partir de los resultados obtenidos por *Griffiths, et al. (1982)*, también se inicia el estudio de filamentos costeros. En este caso la presencia de la costa inhibe el tipo de inestabilidad que genera la variabilidad de los filamentos dobles. A pesar de esto, *Killworth y Stern (1982)* y *Paldor (1983a)* encuentran otros tipos de inestabilidad bajo ciertas condiciones. Ambos coinciden al asegurar que los filamentos costeros se vuelven más inestables al incrementar su ancho. Otros trabajos importantes en que se hace referencia al tipo de ondas presentes en los filamentos costeros son los de *Stern (1980)* y *Kubokawa y Hanawa (1984)*. Estos últimos señalan que la variabilidad de los filamentos costeros está caracterizada por la presencia de dos tipos de ondas; una asociada a la existencia de la pared que se manifiesta como variaciones en la profundidad de la capa activa y otra causada por la existencia del frente que se manifiesta como variaciones en el ancho de la corriente.

El otro tipo de filamento, el filamento abierto, suele ser el prototipo de las grandes corrientes situadas en latitudes medias. La estructura que define estos filamentos es analíticamente complicada debido a la singularidad que introduce la ausencia de una de las fronteras. Sin embargo es posible encontrar condiciones necesarias para inestabilidad bajo cierto tipo de restricciones. *Paldor (1983b)* demuestra que los frentes aislados son estables a pequeñas perturbaciones siempre que su perfil de profundidad posea vorticidad potencial uniforme. *Killworth (1983)* encuentra inestabilidad ante perturbaciones infinitesimales de onda larga si el perfil tiende a su profundidad máxima lejos del frente más rápido que el

caso estudiado por *Paldor (1983b)*. El resultado de *Killworth (1983)* es general y la forma en que varía la profundidad cerca del frente, en los casos inestables, determina la magnitud en la razón de crecimiento de las perturbaciones. *Barth (1989)*, utilizando criterios de estabilidad derivados de la conservación de propiedades (vorticidad potencial, energía y momento) en un sistema regido por las ecuaciones de momento geostrófico (*Hoskins, 1975*), encuentra resultados que coinciden con las conclusiones de *Killworth (1983)*.

En párrafos anteriores mencioné la posibilidad de utilizar una dinámica distinta a las ECP bajo la condición de que esta representara de manera adecuada la característica frontal del filamento. *Cushman-Roisin (1986)* (de aquí en adelante nos referiremos a este trabajo como CR86) derivó, a partir de las ECP, una dinámica para frentes la cual llamó Dinámica de Frentes Geostróficos (DFG). La suposición fundamental en la derivación de la DFG es que la evolución de los frentes es un fenómeno principalmente geostrófico y dentro de las correcciones a este balance solo se contemplan fenómenos con escalas temporales mucho mayores que el período inercial. Esta dinámica ha sido utilizada principalmente para estudiar la evolución de frentes cerrados (como es el caso de remolinos, (*Pavia y Cushman-Roisin, 1990*)) y filamentos dobles (*Pavia, 1992*) y es una aproximación de las ECP menos severa que la aproximación clásica de cuasi-geostrofia en el estudio de corrientes frontales.

Como objetivo principal del trabajo, se pretende el estudio básico sobre la evolución de un filamento abierto localizado en latitudes medias, por lo cual se excluyen efectos de fricción y/o termodinámica. A partir de este estudio se pretende determinar la importancia del carácter frontal del filamento en el crecimiento y propagación de perturbaciones. Para esto se utilizan dos modelos dinámicos; las ECP y la DFG, ambos modelos son resueltos numéricamente utilizando un método de partículas. En particular, para la DFG se obtiene

analíticamente un criterio de estabilidad lineal. La solución numérica de ambos modelos nos permitirá observar la evolución a largo plazo del filamento, mientras que las diferencias entre los resultados nos darán una idea sobre los mecanismos físicos importantes en la generación de inestabilidad (barotrópica) en este tipo de sistemas.

A continuación se señala la organización con que es presentado el trabajo. En el capítulo II se da una descripción de los modelos dinámicos que se utilizarán en el trabajo. En el capítulo III se presentan algunas consideraciones teóricas y se utiliza el método de modos normales en el problema de estabilidad de cierto flujo básico ante perturbaciones infinitesimales, derivandose un criterio de estabilidad válido solo para la DFG. En el capítulo IV se describen los experimentos numéricos y se presentan los resultados obtenidos. En el capítulo V se discuten los resultados y finalmente se presentan las conclusiones en el capítulo VI.

II. EL MODELO

II.1. Modelos dinámicos

Consideramos en este trabajo una corriente con la estructura típica de un filamento abierto localizado en latitudes medias (ver figura 2). Las ecuaciones de movimiento que rigen el sistema son las ecuaciones primitivas de aguas someras con gravedad reducida para un océano de una y media capas,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (3)$$

donde u y v son las componentes de velocidad en x y y respectivamente, t representa el tiempo, $f = f_0 + \beta y$ es el parámetro de Coriolis, h es el espesor de la capa activa y $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ es la gravedad reducida.

A partir del sistema (1)-(3), es posible obtener algunas leyes de conservación importantes, por ejemplo las de vorticidad potencial y la de energía total,

$$\frac{Dq}{Dt} = 0, \quad \int_A E_t dA = const, \quad (4a, b)$$

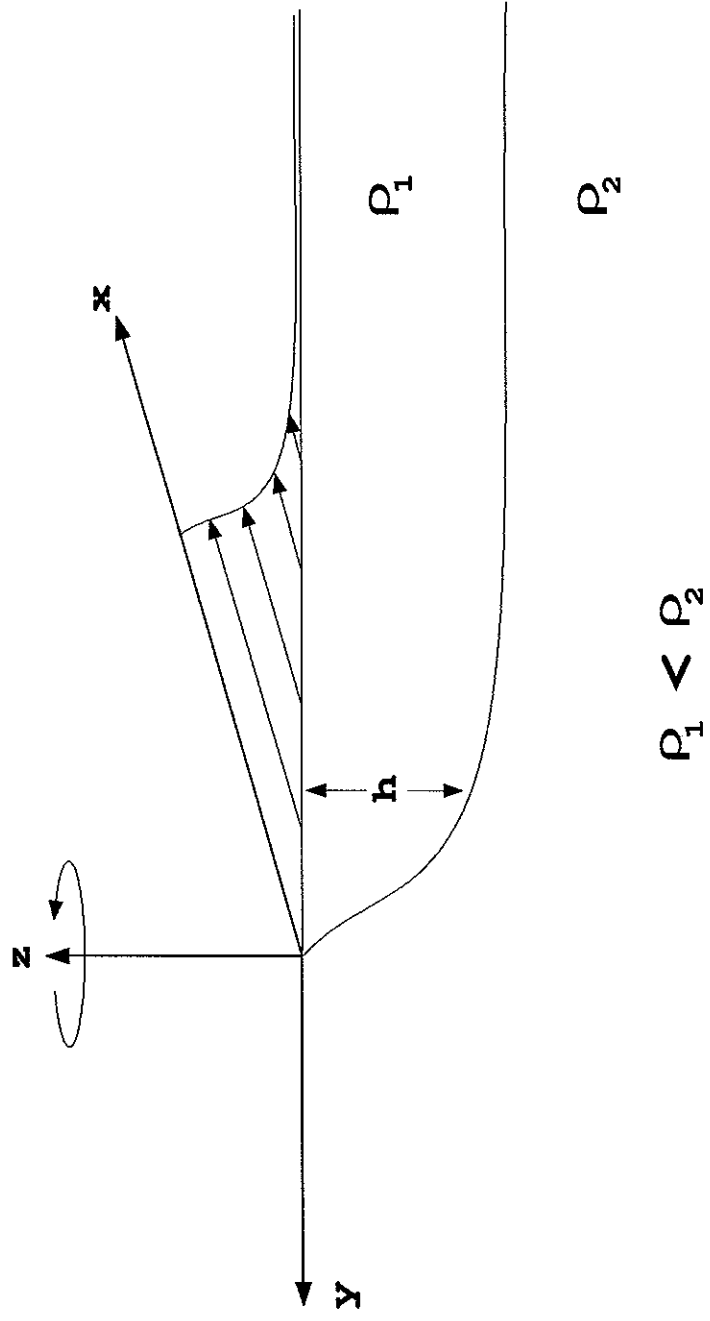


Fig. 2.- Representación esquemática del frente aislado y ejes coordenados en un océano de una y media capas.

donde

$$q = \frac{\left(f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{h} \quad (5)$$

es la vorticidad potencial, y

$$E_t = \frac{1}{2}h(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}g'h^2 \quad (6)$$

es la densidad de energía.

A partir del sistema de ecuaciones (1)-(3), CR86 derivó una dinámica mediante el análisis de los términos cuya contribución determina la evolución de un frente, dicho análisis es similar al que se realiza en la derivación de la dinámica cuasi-geostrófica (*Pedlosky, 1986*). Ambas dinámicas son aproximaciones del sistema (1)-(3) bajo la restricción de movimientos con escalas temporales mucho mayores que el período inercial. El punto de divergencia entre la dinámica cuasi-geostrófica y la dinámica frontal se presenta cuando esta última considera que el desplazamientos de la interfase entre las dos capas es del mismo orden de magnitud que la profundidad de la capa activa. En base a las escalas apropiadas, CR86 adimensionalizó el sistema (1)-(3) excluyendo los términos que, por su importancia relativa, no son significativos en la dinámica frontal. De acuerdo a CR86, el conjunto de ecuaciones adimensionales que describen la evolución de un frente son

$$u = -\frac{\partial h}{\partial y} - RoJ\left(h, \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \beta y \frac{\partial h}{\partial y} + O(Ro^2, \beta Ro, \beta^2) \quad (7)$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial x} - Ro J\left(h, \frac{\partial h}{\partial y}\right) - \beta y \frac{\partial h}{\partial x} + O(Ro^2, \beta Ro, \beta^2) \quad (8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = J\left[h, \frac{Ro^2}{\omega} \left(h \nabla^2 h + \frac{1}{2} \nabla h \cdot \nabla h\right) + \frac{\beta Ro}{\omega} y h\right] + O(Ro^3, \beta Ro^2, \beta^2 Ro) \quad (9)$$

donde $J(a, b) = a_x b_y - a_y b_x$ (los subíndices implican derivadas con respecto a esas variables) es el operador Jacobiano, $Ro = (U/f_o L)$ es el número de Rossby, $\beta = (\beta L/f_o)$ es la importancia relativa del efecto beta en el término de Coriolis y $\omega = (1/f_o T)$ es la razón entre el período inercial y la escala temporal (T) de evolución frontal. Otras escalas típicas utilizadas en la adimensionalización de (1)-(3) son; H como la profundidad (por ejemplo, la profundidad central de un remolino o un filamento), U como la velocidad (básicamente la velocidad geostrófica) y L como la escala espacial de variación de H . Los términos advectivos de la ecuación de movimiento están contenidos en el operador Jacobiano y son representados por la parte geostrófica de la velocidad, es decir

$$J\left(h, \frac{\partial h}{\partial x}\right) = \left[u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} \right] \quad (10a)$$

$$J\left(h, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = - \left[u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} \right] \quad (10b)$$

donde u_g y v_g son las expresiones adimensionales del balance geostrófico.

Las expresiones para las velocidades en DFG (ecuaciones 7 y 8) son a primer orden geostróficas y están corregidas por los términos advectivos (10a,b) y los términos debidos

a la curvatura terrestre a órden Ro y β , respectivamente. Una suposición importante para esta dinámica es que $Ro \ll 1$ y $\beta \ll 1$. De acuerdo a CR86, bajo la presencia de frentes esto se cumple siempre que $L \geq 3.2L_R$ (donde $L_R = (g'H)^{1/2}/f_0$ es el radio de deformación), ya que $Ro = (L_R/L)^2$.

Es despreciada de la formulación la dependencia temporal de la velocidad en (1) y (2) ya que que estos términos son $O(Ro^2)$, con lo cual se eliminan las oscilaciones inerciales. La ecuación (9) es derivada a partir de la forma adimensional de (3) utilizando las expresiones (7) y (8), de tal manera que (9) representa una ecuación de continuidad para el espesor de la capa activa. Al considerar la dependencia temporal de h en (9), se retiene el modo puramente frontal del sistema.

En CR86 se identifican tres regímenes para la DFG; β despreciable, β relevante y β dominante, esto de acuerdo a las características espaciales del frente. Para el presente trabajo se considera el primero de los casos con lo que (9) está expresada como

$$\frac{\partial h}{\partial t} = J \left[h, \left(h \nabla^2 h + \frac{1}{2} \nabla h \cdot \nabla h \right) \right] \quad (11)$$

lo cual es equivalente a suponer plano- f . De la ecuación (11), pueden ser obtenidas las siguientes invariantes (*Cushman-Roisin y Tang, 1990*);

$$I_n = \int_A h^n dA \quad ; \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_A h |\nabla h|^2 dA \quad (13)$$

donde I_n son los momentos del volumen y K es la energía cinética. CR86 señala que en DFG la principal contribución a la energía es por parte de la energía potencial, la cual es proporcional a I_2 . Como podemos ver en (12) y (13), en un sistema frontal regido por la ecuación (11), tanto la energía cinética como la energía potencial son cantidades integrales que se conservan independientemente.

II.2. Modelos numéricos

Los modelos dinámicos descritos anteriormente se resuelven numéricamente utilizando un modelo de partículas. En este método, el flujo es discretizado por un número N de partículas y la trayectoria de estas es calculada a partir del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i \quad \frac{dy_i}{dt} = v_i \quad ; \quad i = 1, N \quad (14a, b)$$

donde $(x', y', u, v)_i$ son las coordenadas de la posición y las componentes de la velocidad en la i -ésima partícula. El sistema (14) es resuelto numéricamente utilizando un esquema de predicción-corrección de 2° orden. Las expresiones para (u, v) se obtienen a partir de los sistemas,

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + fv \quad (15a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g' \frac{\partial h}{\partial y} - fu \quad (15b)$$

en el caso de ECP, y de

$$u = -\frac{g' \partial h}{f \partial y} - \frac{g'^2}{f^3} J \left(h, \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (16a)$$

$$v = \frac{g' \partial h}{f \partial x} - \frac{g'^2}{f^3} J \left(h, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (16b)$$

en el caso de la DFG (ver diagramas de flujo en las figuras 3 y 4).

Un paso intermedio en la solución numérica del sistema (14) es el cálculo de profundidades sobre una malla regular de acuerdo a la distribución espacial de las partículas. El campo de profundidades es el resultado de la repartición del volúmen puntual sobre un área $\Delta x \times \Delta y$, centrada en la posición de la partícula, que es posteriormente extrapolado a los vértices más cercanos en base a un esquema de nueve puntos (*Pavia y Cushman-Roisin, 1988*). A partir del campo de profundidades en la malla regular se resuelven las derivadas espaciales de los sistemas (15) y (16).

En el caso de la dinámica ECP, las derivadas espaciales se calculan por medio de diferencias centradas en el interior del flujo y diferencias hacia un lado en los frentes, ambos esquemas de 2° orden. Esta información es recuperada por la partícula en base a los pesos calculados en el esquema de repartición de masa. Las derivadas temporales (15a,b), al igual que en (14), se realizan con un esquema de predicción-corrección de 2° orden.

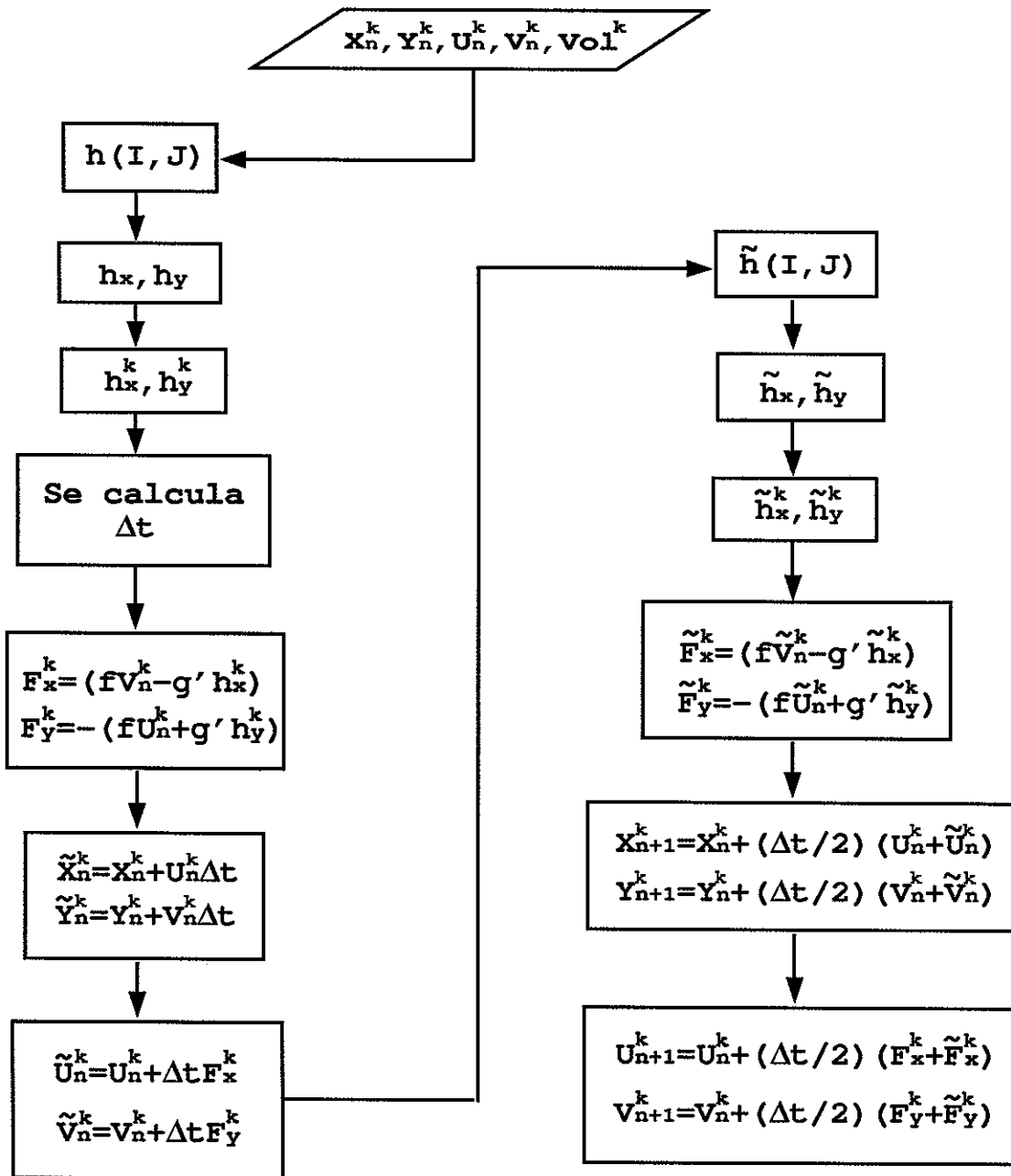


Fig. 3.- Diagrama de flujo para el modelo numérico que resuelve las ECP. El superíndice señala el proceso en la k -ésima partícula al tiempo n . El volumen (Vol) es definido inicialmente para cada partícula y ese valor se mantiene constante para toda n .

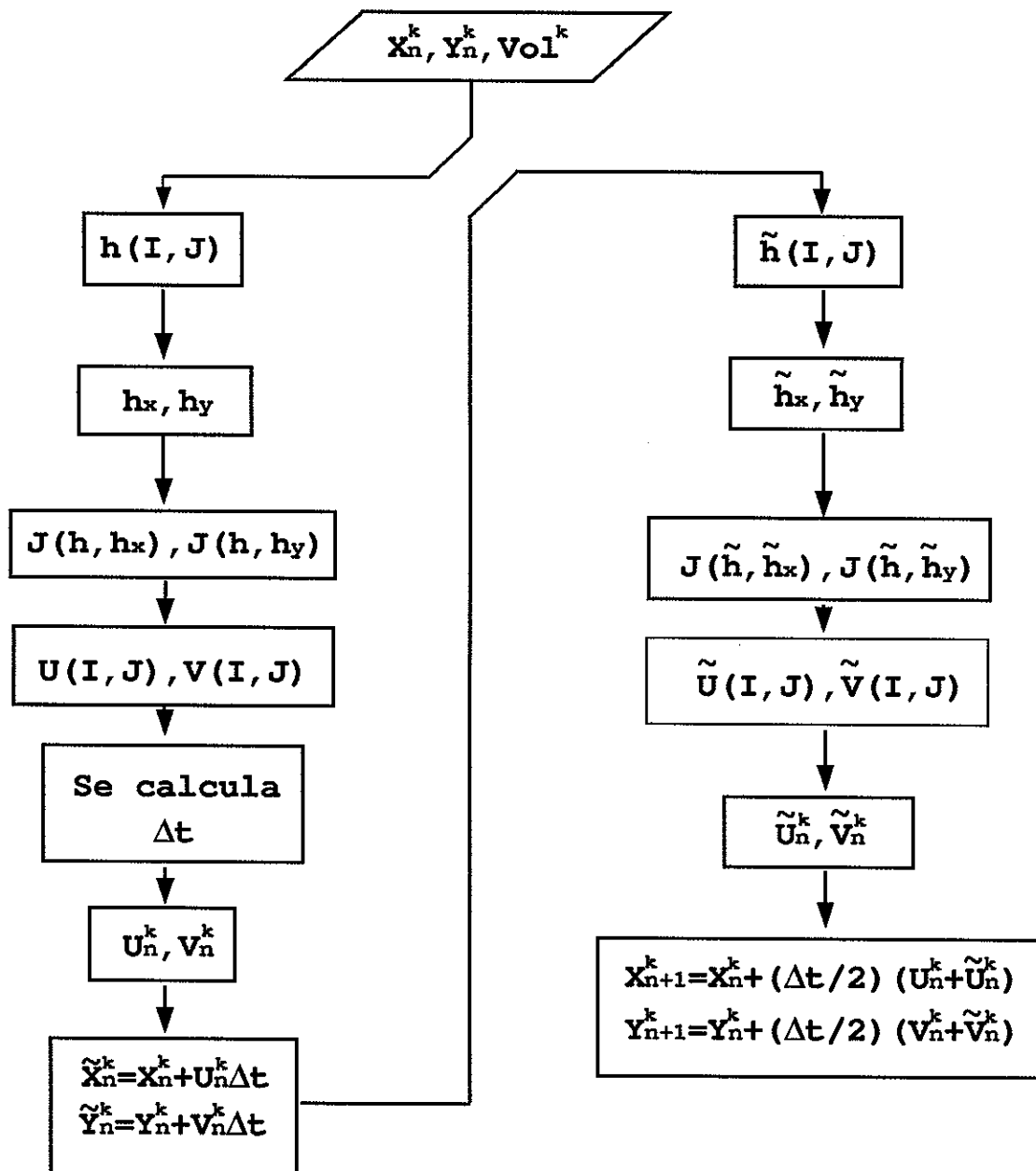


Fig. 4.- Igual que en la Figura 3 pero para la DFG.

Ya que en la DFG las expresiones para la velocidad (16a,b) dependen totalmente del campo de profundidades, estas son resueltas en la malla y, posteriormente, sus valores son interpolados a la partícula con los mismos pesos utilizados en la repartición de masa. Las derivadas se calculan utilizando diferencias centradas en el interior del flujo y diferencias hacia un lado en los frentes, ambos esquemas también de 2° orden. El Jacobiano se resuelve utilizando el método de Arakawa.

Con este método de solución numérica la ecuación de continuidad se satisface sin requerir mayor esfuerzo computacional. Esto se debe a que cada partícula mantiene su volumen, inicialmente asignado, en el transcurso del tiempo y no hay ni pérdida ni ganancia de partículas. El esquema numérico utiliza un paso en tiempo variable,

$$\Delta t^n = 0.1\Delta Z/V^n$$

donde ΔZ es el valor mínimo entre Δx y Δy . En el modelo numérico que resuelve las ECP, V^n se define como la máxima rapidez de partícula al tiempo n , mientras que en el modelo que resuelve la DFG, V^n se define como la máxima rapidez del flujo en la malla al tiempo n . Las condiciones de frontera implementadas al modelo son periódicas tanto en el eje x como en el eje y , esto es equivalente a considerar un espacio cíclico en ambas coordenadas (esto puede verse geoméricamente como un torus). Una descripción detallada sobre el modelo de partículas utilizado en este trabajo se puede encontrar en *Pavia y Cushman-Roisin (1988)*.

III. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

El estudio sobre la variabilidad de un sistema dinámico descrito por $\bar{\Psi} = \Psi + \psi$ (en este capítulo se utilizarán letras griegas mayúsculas para definir el estado básico de los campos, mayúsculas con barra para el campo total y minúsculas para definir la perturbación) está íntimamente ligado a sus propiedades de *estabilidad-inestabilidad*. Los estudios teóricos en torno a dicha cualidad se encaminan a la búsqueda de condiciones en Ψ y el sistema de ecuaciones que gobiernan la evolución de $\bar{\Psi}$ tales que impidan un "crecimiento" ilimitado de ψ . Ripa (1992) señala que la estabilidad es un concepto que depende del modelo utilizado así como de la definición misma. La definición utilizada involucra el elegir una norma de ψ que mida la separación entre el sistema y el estado promedio (básico). Esto significa que pueden, en algunos casos, ser obtenidas condiciones suficientes para estabilidad (o necesarias para inestabilidad) en diferentes modelos dinámicos utilizando definiciones distintas de estabilidad. La definición de estabilidad puede ser categorizada de la manera siguiente: *lineal, formal y no-lineal*, siendo más generales las condiciones obtenidas por este último método. Esto es que, la estabilidad no-lineal implica estabilidad formal, mientras que la estabilidad formal a su vez implica estabilidad lineal. Un análisis más amplio sobre el problema de estabilidad-inestabilidad y los tipos de definición son tratado en Drazin y Howard (1966), McIntyre y Shepherd (1987) y Ripa (1991).

En esta parte del trabajo se hace uso de la DFG como dinámica representativa de la evolución en un frente aislado. Se utiliza el método de estabilidad lineal para derivar una condición suficiente para estabilidad y así tener un marco de referencia teórico con los resultados numéricos.

Es importante notar que el sistema de ecuaciones que definen la DFG (ecuaciones (7)-(9)) solo dependen de un campo dinámico; el campo de profundidades. Suponemos entonces que el estado básico, definido por el filamento, está sujeto a pequeñas perturbaciones

$$\bar{H}(x, y, t) = H(y) + \eta(x, y, t) \quad ; \quad |\eta| \ll 1. \quad (17)$$

La ecuación (11) es escrita en términos del campo total (17) y después de linealizar obtenemos una ecuación para η en un campo de profundidades $H(y)$ arbitrario. La ecuación linealizada está expresada como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -HH_y \nabla^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - H_y^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + (HH_{yy})_y \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (18)$$

donde los subíndices en H significan derivadas y $\nabla^2 \equiv (\partial_{xx}, \partial_{yy})$ es el operador Laplaceano.

Se propone para (18) una solución en modos normales. La estructura de la solución está expresada como

$$\eta(x, y, t) = \Re[\bar{\eta}(y)e^{ik(x-Ct)}] \quad (19)$$

donde \Re denota la parte real de la expresión que precede, el número complejo $C = C_R + iC_I$ es la velocidad de la onda, k el número de onda (real) y $\bar{\eta}$ es la amplitud compleja de la onda. Este tipo de solución nos asegura un crecimiento exponencial de aquellas perturbaciones tales que $C_I > 0$ y la razón de crecimiento estará determinada por el factor

kC_I . En presencia de soluciones inestables, la validez de (19) se restringe a la forma inicial de crecimiento (t pequeños) de tal manera que se justifique la exclusión de los términos no-lineales en (18). Por otra parte, las perturbaciones con número de onda k tales que $C_I \leq 0$ indican estabilidad del estado básico a esas perturbaciones en particular. Es decir, un mismo estado básico puede ser estable a una perturbación infinitesimal con número de onda k_1 e inestable a otra perturbación infinitesimal con número de onda k_2 .

La sustitución de (19) en (18) nos reduce el problema a una ecuación de autovalores C y autofunciones $\bar{\eta}$ para un campo de profundidades básico $H(y)$

$$HH_y \frac{d^2 \bar{\eta}}{dy^2} + H_y^2 \frac{d \bar{\eta}}{dy} - [k^2 HH_y + HH_{yyy} + H_y H_{yy} + C] \bar{\eta} = 0. \quad (20)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación (20) son propuestas de tal forma que las soluciones sean frontalmente atrapadas, esto es que

$$\bar{\eta} \rightarrow 0 \quad ; \quad y \rightarrow \infty \quad (21a)$$

$$\bar{\eta} < \infty \quad ; \quad y \rightarrow 0. \quad (21b)$$

La condición (21a) es llamada de radiación y con ella requerimos que la solución de (20) desaparezca muy lejos del frente. La condición (21b) es llamada de acotamiento y con ella requerimos que la solución de (20) permanezca finita en el frente.

De la ecuación (20), sujeta a las condiciones de frontera dadas por (21a,b), podemos encontrar una condición en $H(y)$ tal que el flujo sea estable ante perturbaciones

infinitesimales de estructura modal. Utilizamos en la derivación de dicha condición la técnica integral de Rayleigh (ver *Paldor, 1983b*). La ecuación (20), dividida entre H_y , toma la forma (por comodidad, de aquí en adelante vamos a dejar de utilizar las barras en la amplitud de la perturbación)

$$H \frac{d^2 \eta}{dy^2} + H_y \frac{d\eta}{dy} - \left[k^2 H + \frac{H H_{yyy}}{H_y} + H_{yy} + \frac{C}{H_y} \right] \eta = 0 \quad (22)$$

sujeta a las condiciones (21a,b). Multiplicamos la ecuación (22) por η^* (el complejo conjugado de η) e integramos en el dominio de y de tal forma que se obtiene la expresión

$$\int_0^\infty H \eta^* \frac{d^2 \eta}{dy^2} dy + \int_0^\infty H_y \eta^* \frac{d\eta}{dy} dy - \int_0^\infty [k^2 H + (H H_{yyy}/H_y) + H_{yy} + (C/H_y)] |\eta|^2 dy = 0. \quad (23)$$

Ahora integramos por partes el primer término de la parte izquierda de la igualdad en (23)

$$H \eta^* \frac{d\eta}{dy} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty H \left| \frac{d\eta}{dy} \right|^2 dy - \int_0^\infty [k^2 H + (H H_{yyy}/H_y) + H_{yy} + (C/H_y)] |\eta|^2 dy = 0. \quad (24)$$

El primer término de la parte izquierda de la igualdad es eliminado si tomamos en cuenta que $H|_{y=0} = 0$ y $\frac{d\eta}{dy} \Big|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Esta última suposición la hacemos a partir de la condición de frontera (21a) y de suponer que η es una función bien comportada, por lo que cualquiera de sus derivadas también cumplen (21a). A partir de las anteriores suposiciones, la expresión (24) se reduce a

$$\int_0^{\infty} H \left| \frac{d\eta}{dy} \right|^2 dy + \int_0^{\infty} [k^2 H + (HH_{yyy})/H_y + H_{yy}] |\eta|^2 dy + (C_R + iC_I) \int_0^{\infty} \frac{|\eta|^2}{H_y} dy = 0 \quad (25)$$

La parte real de la ecuación (25) es

$$\int_0^{\infty} H \left| \frac{d\eta}{dy} \right|^2 dy + \int_0^{\infty} [k^2 H + (HH_{yyy})/H_y + H_{yy} + (C_R/H_y)] |\eta|^2 dy = 0 \quad (26)$$

mientras que la parte imaginaria de (25) es

$$C_I \int_0^{\infty} \frac{|\eta|^2}{H_y} dy = 0 \quad (27)$$

La expresión (27) define implícitamente el criterio de estabilidad para cierto perfil básico $H(y)$ gobernado por la dinámica DFG. Es decir que, para que se cumpla la igualdad en (27) con $C_I \neq 0$ es necesario que H_y cambie de signo en algún lugar del dominio. Esto nos lleva a la conclusión de que, en DFG, cualquier perfil básico de profundidades monótonico es linealmente estable. Este criterio es equivalente al encontrado independientemente por *Benilov (1992)* bajo el mismo régimen dinámico. Es importante aclarar que esta condición no obliga a la estabilidad del mismo perfil en la dinámica ECP.

El criterio clásico de estabilidad en un modelo cuasi-geostrófico puede ser representado en términos de la vorticidad potencial del flujo básico $Q = (f - dU/dy)/H$. Este requiere que dQ/dy no cambie de signo en algún lugar del dominio para asegurar su

estabilidad lineal (*Ripa, 1983*). El criterio de estabilidad encontrado a partir de (27) es equivalente al cuasi-geostrófico ya que en la DFG la vorticidad potencial está expresada como $Q \approx f/H$ y por lo tanto, dado cualquier estado básico $H(y)$,

$$\frac{dQ}{dy} \approx \frac{f}{H^2} \frac{dH}{dy} \quad (28)$$

posee un solo signo a menos que la pendiente de $H(y)$ cambie de signo dentro del dominio.

IV. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

IV.1. Descripción

De acuerdo al método de solución numérica utilizado, se definen inicialmente la posición y el volumen de las partículas. El volumen es asignado, a partir de una estructura predeterminada, a un número discreto de partículas distribuidas inicialmente de manera equidistante. El campo de profundidades básico que define al flujo está dado por el perfil

$$h(y) = H_{\text{MAX}} \left(1 - \frac{y^2}{L^2} \right) \quad ; \quad \begin{array}{l} -L \leq y \leq -y_o \\ y_o \leq y \leq L \end{array} \quad (29)$$

$$h(y) = H_{\text{MAX}} \quad ; \quad -y_o < y < y_o$$

con H_{MAX} la profundidad máxima del flujo, L es el ancho del flujo y $h(y)$ es el espesor de la capa activa (figura 5). La distancia entre $-y_o$ y y_o , en la cual $h(y) = H_{\text{MAX}}$, se incluye con la finalidad de evitar el acoplamiento inmediato observado en los filamentos dobles (por ejemplo los casos que se muestran en *Pavia, 1992*).

Las dimensiones espaciales de la malla en el modelo están dadas como sigue; se utilizó un dominio numérico de 96×128 , con un $\Delta x = \Delta y = 10 \text{ km}$. Se utilizó un promedio de 16 partículas por celda por lo que en total son 88200 las utilizadas para discretizar el flujo total.

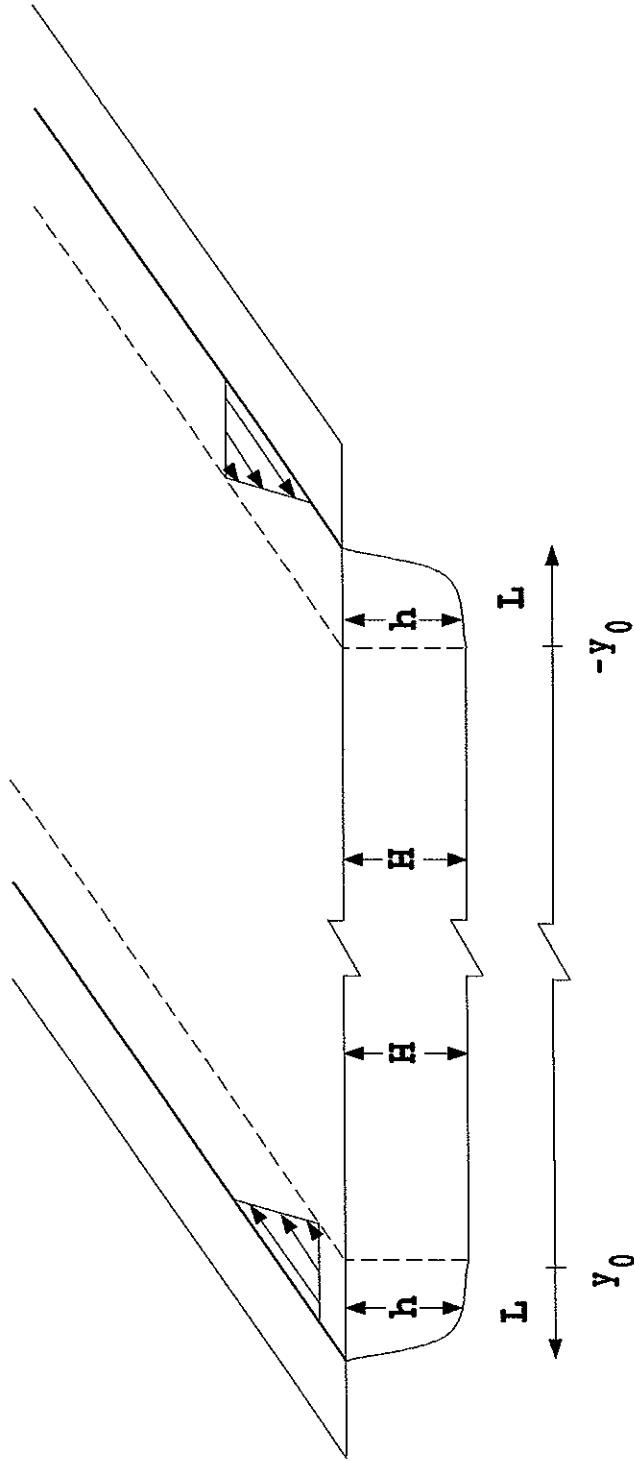


Fig. 5.- Geometría utilizada en la solución numérica del problema. En el esquema, h es el perfil de profundidades, L es el ancho del flujo y H es la profundidad máxima en la zona $y_0 \leq y \leq -y_0$. Este esquema es equivalente a la estructura que se muestra en la figura 1a con el punto $y = 0$ (línea punteada) separado la distancia correspondiente a H . En el trabajo solo se presenta la evolución de uno de los frentes.

Las corridas son caracterizadas por el número de Rossby (Ro). Para la dinámica ECP se resuelven los casos; $a) Ro = 0.01$, $b) Ro = 0.1$ y $c) Ro = 1.0$. Para la dinámica DFG, debido a las restricciones de su formulación, solo se resuelven los casos $a)$ y $b)$.

Todos los casos poseen como condición inicial,

$$i) h = f(y)$$

$$ii) v = 0$$

Los casos $a)$ y $b)$ resueltos con ECP son inicializados con la componente de velocidad u en balance geostrófico,

$$u = -\frac{g' \partial h}{f \partial y} \quad (30)$$

En el caso $c)$ se requiere que el flujo posea *vorticidad potencial cero*,

$$f - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

$$u(0) = 0$$

La solución del problema (31) nos provee la componente de velocidad en la dirección x ,

$$u = fy \quad (32)$$

de tal forma que $u(L) = fL = U$ y $Ro = 1$. La dinámica DFG posee expresiones analíticas que definen el campo de velocidades a partir del campo de profundidades (ver expresiones 16a y 16b). El radio de deformación L_R para cada uno de los casos es de; a) 11.2 km, b) 35.5 km y c) 32 km. Sin embargo, la razón entre el ancho de flujo y el radio de deformación (L/L_R) en cada uno de los casos es; a) 10, b) 3.2 y c) 1. En todas las corridas se definen como parámetros constantes; $f = 9.35 \times 10^{-5} s^{-1}$ y $g' = 1.5 \times 10^{-2} m \cdot s^{-2}$.

Se obtienen como resultados arreglos de profundidad y componentes de velocidad (u, v) en la malla. En el modelo numérico que resuelve las ECP, las velocidades son evaluadas en las partículas por lo cual, los campos (u, v) son extrapolados hacia la malla regular utilizando los mismos pesos calculados en la repartición de volumen. En el modelo que resuelve la dinámica DFG no se tiene mayor problema puesto que las velocidades son evaluadas en la malla. Se presentan en este trabajo, contornos de profundidad a tiempo variable, de tal manera que pueda ser ejemplificado el caso o descrita su evolución. Debo aclarar que las gráficas de contornos presentadas corresponden a una mitad del dominio numérico (ver el pie de la figura 5) ya que la evolución de ambos frentes, aunque no es idéntica, es dinámicamente similar.

El tiempo total de corrida en la mayoría de los experimentos fué de 60 días, excepto en los casos en que, por inestabilidad numérica, se viola el requerimiento de invarianza de energía en el sistema (según se indica en 4b y en 12). En el modelo que resuelve la dinámica ECP, se llevó a cabo el cálculo de energía cinética y potencial (con un intervalo de tiempo de 1 hora para reproducir las oscilaciones inerciales) de acuerdo a la expresión (6). La expresión discretizada de (6) se evaluó de la siguiente manera

$$Ec = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j h_{ij} (u_{ij}^2 + v_{ij}^2) \quad ; \quad Ep = \frac{1}{2} g' \sum_i \sum_j h_{ij}^2 \quad (26a, b)$$

siendo Ec la densidad de energía cinética y Ep la densidad de energía potencial. La energía total la definimos como $E_t = Ec + Ep$. La energía, en los casos resueltos con la DFG, es evaluada (cada día) de la misma manera que en (26a,b). Tomando en consideración (4b), el comportamiento de la energía en el sistema se evalúa (para ambas dinámicas) como

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta Ec}{Ec |_{t=0}} \quad , \quad \varepsilon_p = \frac{\Delta Ep}{Ep |_{t=0}} \quad , \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta E_t}{E_t |_{t=0}} \quad (27a, b, c)$$

donde $\Delta(\cdot) = (\cdot) |_{t=n\Delta t} - (\cdot) |_{t=0}$ y Δt es el intervalo de tiempo con que se evalúa (26). Se realizan gráficas de ε_c y ε_p para todos los casos modelados (aunque no se muestran todas), para evaluar la validez de las corridas. En el caso $Ro = 0.01$ resuelto con la dinámica DFG no se muestra gráfica de energía ya que ε_c y ε_p son cero en el transcurso de la corrida. En todos los casos y en ambas dinámicas E_t se mantiene constante, por lo cual no se incluye ε_t en ninguna de las gráficas presentadas.

IV.2. Resultados

IV.2.1 Caso $Ro=0.01$

Para la DFG se obtienen contornos de profundidad a los tiempos; 0 y 60 días (figura 6). En todos los casos presentados, la gráfica correspondiente al día cero representan el

estado básico de profundidad en el experimento. Podemos observar que el perfil es estable hasta el tiempo final de corrida. En este caso, la energía potencial es dos órdenes de magnitud mayor que la energía cinética y ambas se mantienen constantes en todo el tiempo de corrida.

Para las ECP se presentan contornos de profundidad a los mismos tiempos que la DFG (figura 7). Podemos observar que, al igual que en DFG, el perfil básico de profundidades es estable hasta el final de la corrida. La energía total se conserva y la energía potencial es dos órdenes de magnitud mayor que la energía cinética. Debido a que en este caso la razón $E_p/E_c = O(100)$, la pequeña disminución en energía potencial presente al final de la corrida produce el incremento evidente de la energía cinética (figura 8a). Las oscilaciones presentes en cada una de las gráficas de la figura 8 corresponden al período inercial ($\frac{2\pi}{f} \approx 18.5$ horas).

IV.2.2 Caso $Ro=0.1$

En la figura 9 se presentan los contornos de profundidad para la DFG a los tiempos; 0, 11, 12, 13, 14 y 15 días. Los resultados no muestran indicios de inestabilidad frontal, sin embargo se puede observar el inicio de fluctuaciones en la zona alejada al frente (figuras 9c y 9d). Estas fluctuaciones están asociadas a movimientos en la zona central del flujo, evidentes al día 14 (figura 9e) y que crecen rápidamente como lo muestra la figura 9f. La presencia de fluctuaciones en esta región genera gradientes de presión y por consiguiente la aparición de componentes de velocidad. En el transcurso de la corrida la energía potencial permanece constante, como se muestra en la figura 10. También en la figura 10 puede observarse que el incremento de energía cinética tiene un inicio evidente al día 12, lo cual puede ser asociado a la presencia de las fluctuaciones de la zona central del flujo. El rápido

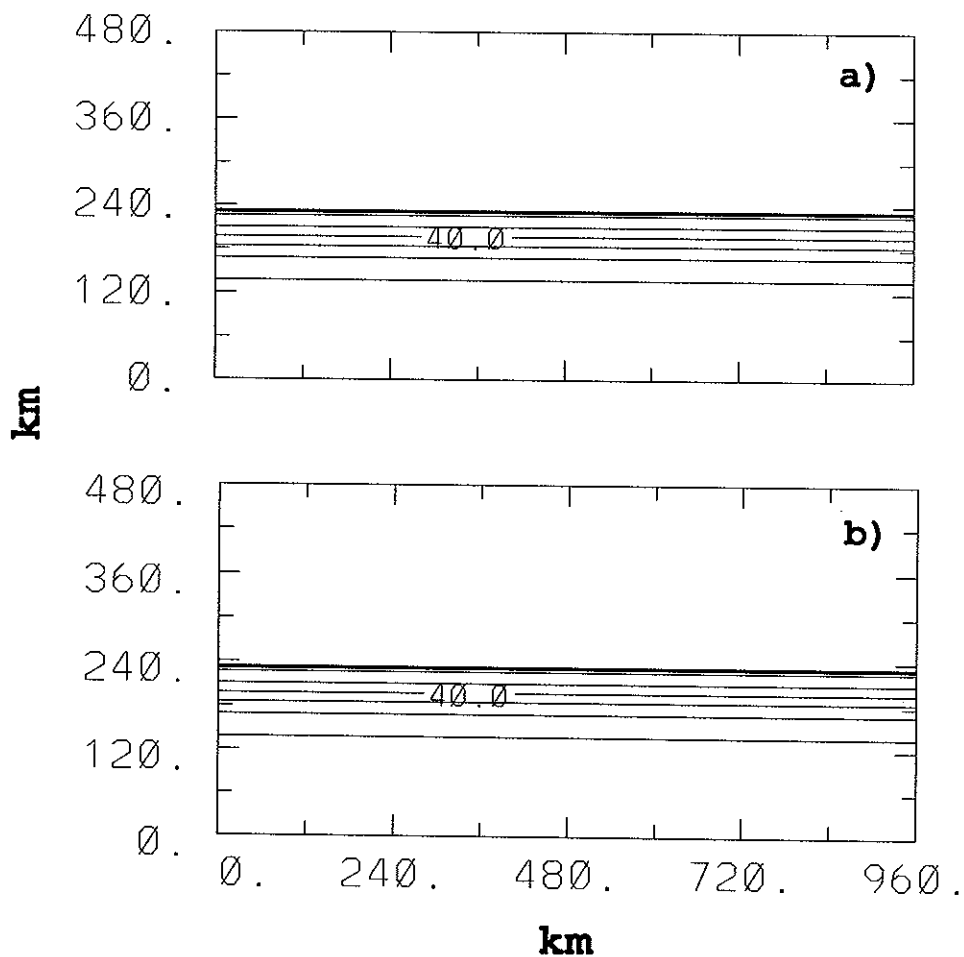


Fig. 6.- Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 0.01$ resuelto con la DFG. El frente es representado por la isóbata de 10 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 10 m. Debido a que el caso no presenta inestabilidad frontal, solo se muestran las gráficas correspondientes a los tiempos; a) 0 y b) 60 días.

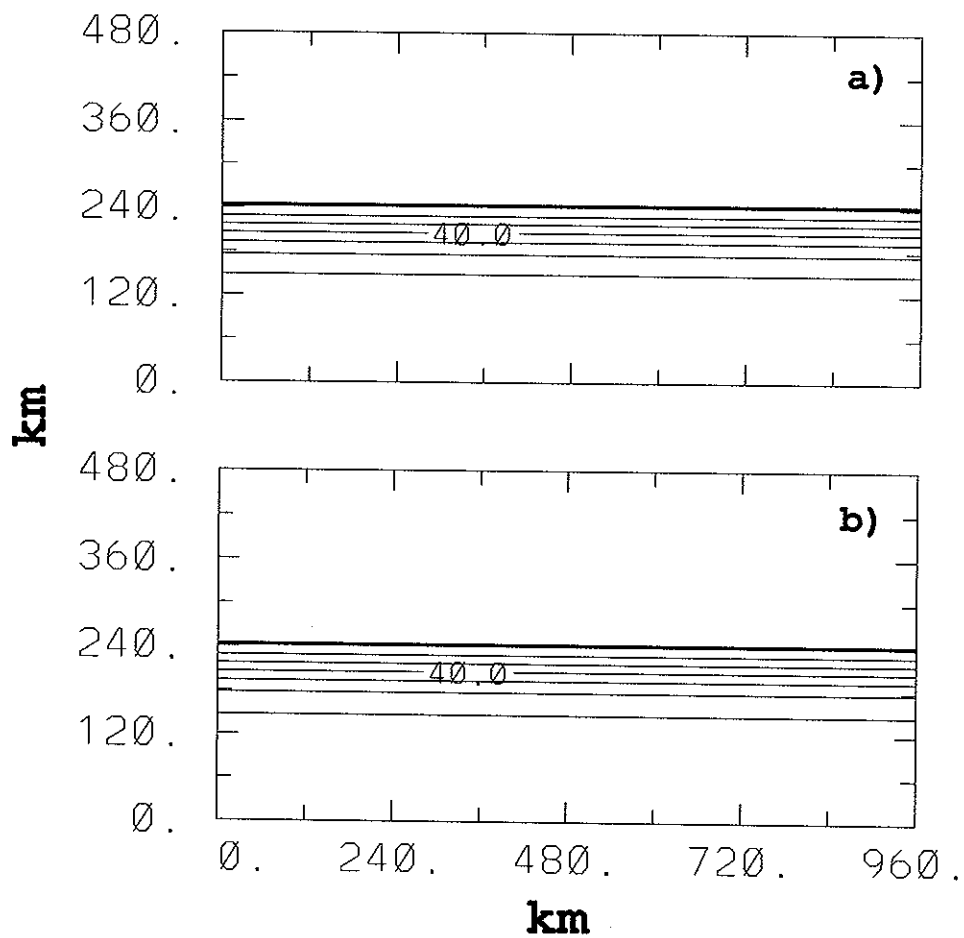


Fig. 7.- Igual que en la Figura 6 pero para las ECP.

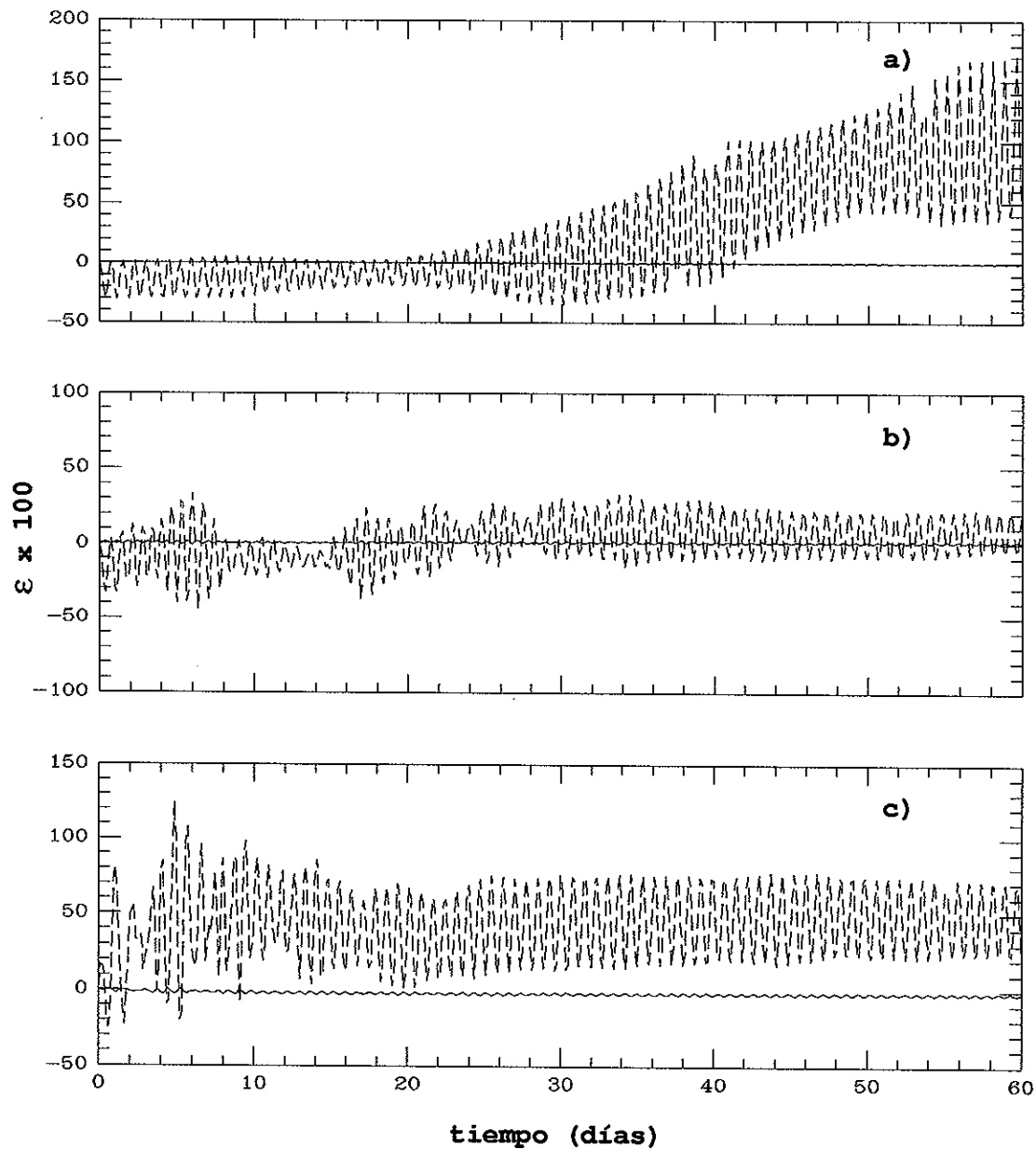


Fig. 8.- Gráficas de ϵ_c (línea discontinua) y ϵ_p (línea continua) (ver ecuaciones 33a y 33b) en el modelo que resuelve la dinámica ECP. Las gráficas a, b y c corresponden a los casos; $Ro = 0.01$, $Ro = 0.1$ y $Ro = 1.0$, respectivamente. Es importante tener en cuenta que en el caso (a) ϵ_p es dos órdenes de magnitud mayor que ϵ_c y en los casos (b) y (c) es un orden de magnitud mayor (ϵ_c y ϵ_p representadas por 32a y 32b, respectivamente).

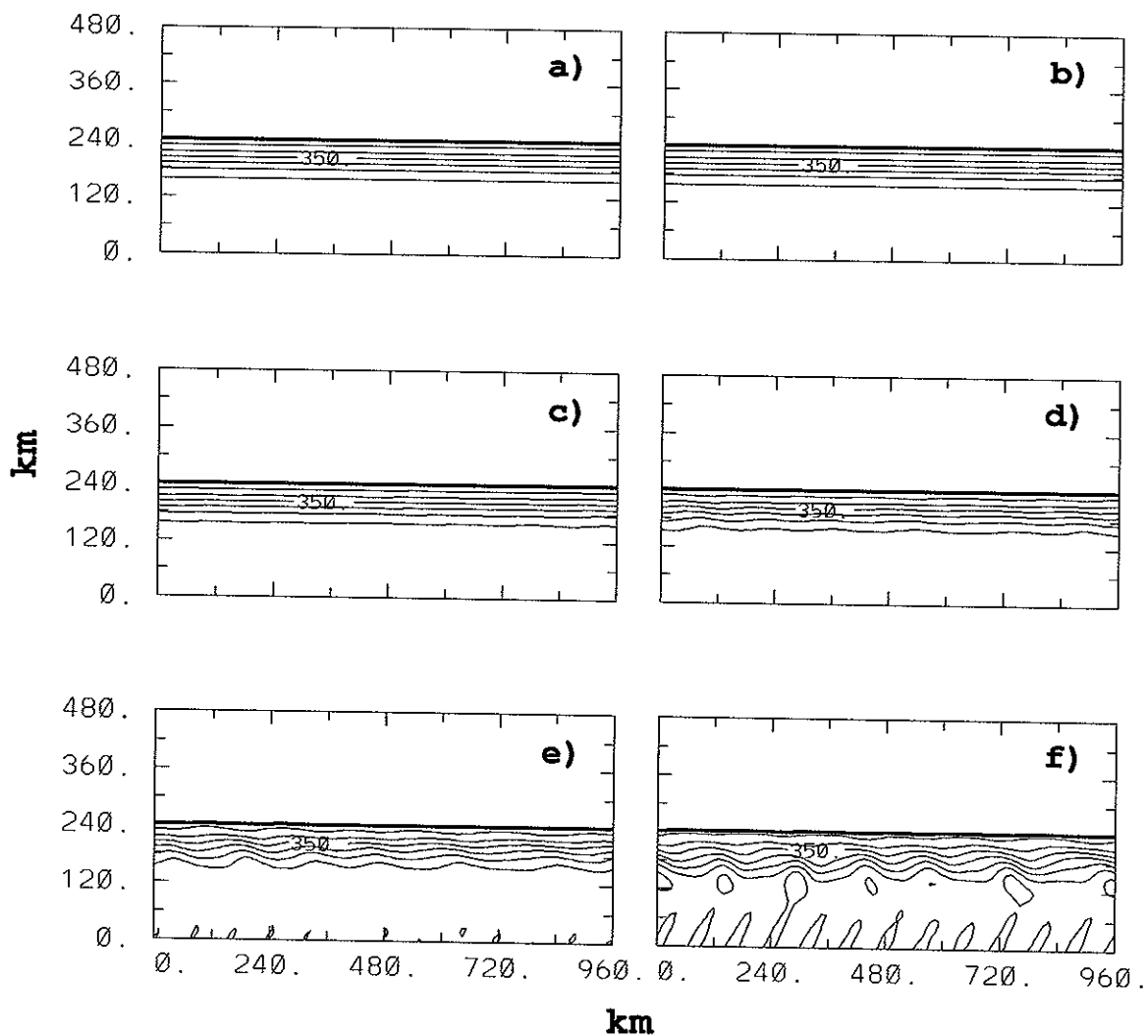


Fig. 9.- Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 0.1$ resuelto con DFG. El frente es representado por la isóbata de 50 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 100 m. Las gráficas corresponden a los tiempos; a)0, b)11, c)12, d)13, e)14 y f)15 días.

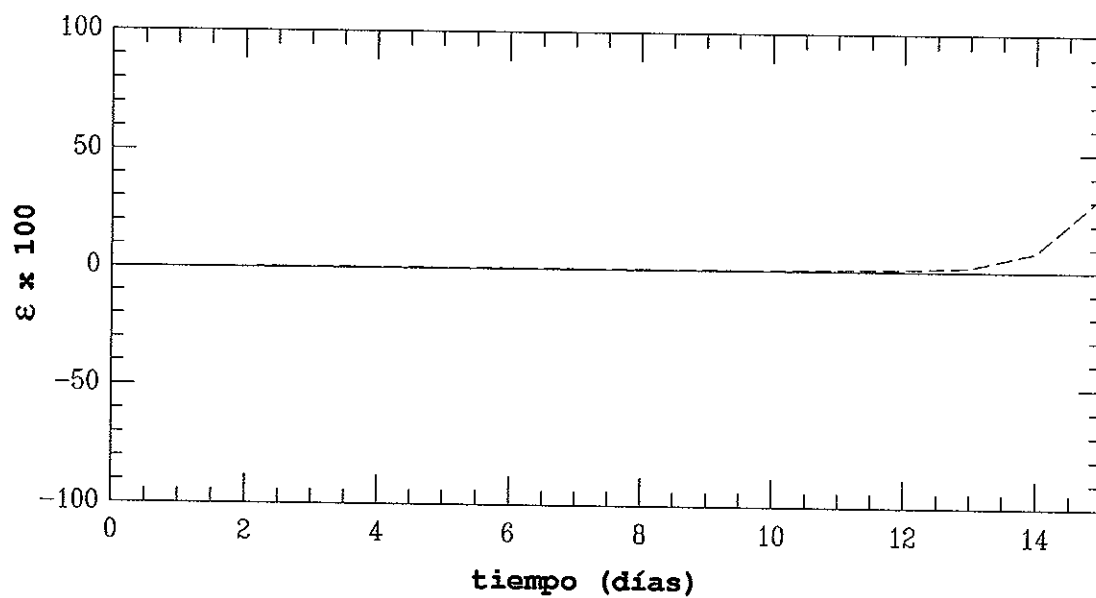


Fig. 10.- Gráficas de ϵ_c y ϵ_p para el caso $Ro = 0.1$ resuelto con la dinámica DFG. Tanto ϵ_c como ϵ_p están representados como en la Figura 8. Se omite graficar el caso $Ro = 0.01$ ya que en este, $\epsilon_c = \epsilon_p = 0$ hasta el final de la corrida.

incremento en la energía cinética a partir del día 14 concuerda también con el incremento en la variabilidad de la zona central del flujo. Este comportamiento energético nos obliga a detener la corrida hacia el día 15.

Para las ECP se reportan gráficas de contorno a los tiempos; 0, 28, 30, 32, 34 y 36 días (figura 11), a los tiempos; 38, 40, 42, 44, 46 y 48 días (figura 12), y a los tiempos; 50, 52, 54, 56, 58 y 60 días (figura 13). En la figura 11 se grafica el estado inicial de crecimiento y la evolución de fluctuaciones en el frente. Estas se observan inicialmente al día 28 y adquieren una estructura bien definida hacia el día 32. Es importante observar que el estado inicial de crecimiento (figura 11*b*) está asociado a un movimiento importante en la zona central del flujo. A partir del día 32, las ondas presentes en el frente poseen una longitud aproximada de $6L_R$ y una velocidades entre 20 y 30 km/día. Puede observarse que, en este período inicial, las ondas crecen principalmente en amplitud. En la figura 12 se observa un aparente incremento en la longitud de las ondas y un ligero decremento en la velocidad de las mismas. También es importante notar la forma de las estructuras que evolucionan sobre el frente (con pendiente más pronunciada en la región contraria al sentido de las ondas) y el rompimiento de una de ellas hacia el día 46. Este rompimiento genera un remolino anticiclónico alargado, el cual posee un diámetro aproximado de 50 km y profundidad menor que 150 m. Se puede observar que el remolino gira sobre su eje de manera anticiclónica y, conforme transcurre el tiempo, adquiere simetría axial (ver figura 13*d*). Hacia el día 56 (figura 13*e*), el remolino es reabsorbido por la corriente principal. A partir del día 56 (figura 13*d*), la longitud aparente de las ondas es de $10L_R$. En la figura 8*b* puede observarse el comportamiento energético de esta corrida. La energía potencial se mantiene constante

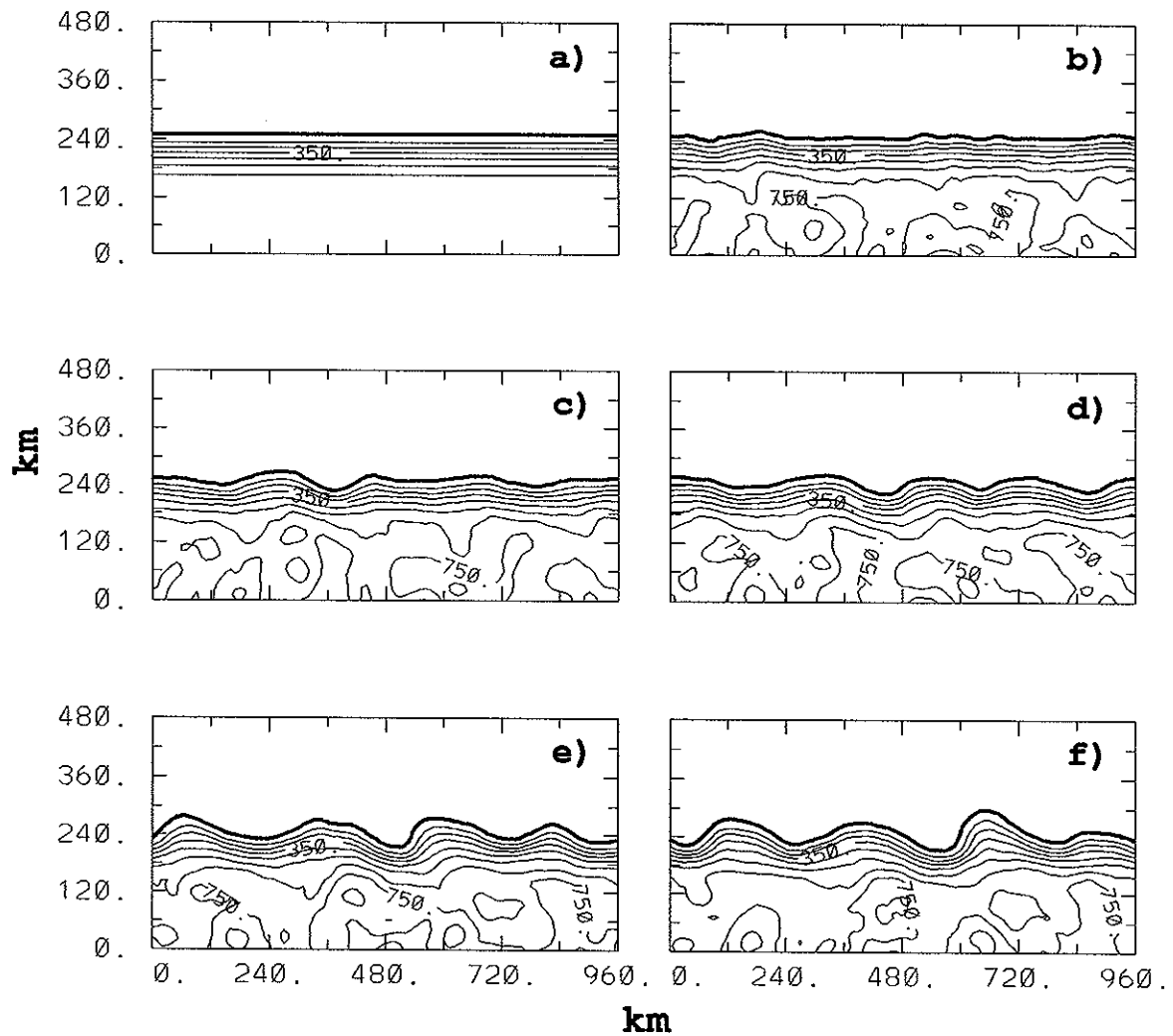


Fig. 11.- Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 0.1$ resuelto con las ECP. El frente es representado por la isóbata de 50 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 100 m. Las gráficas corresponden a los tiempos; a)0, b)28, c)30, d)32, e)34 y f)36 días.

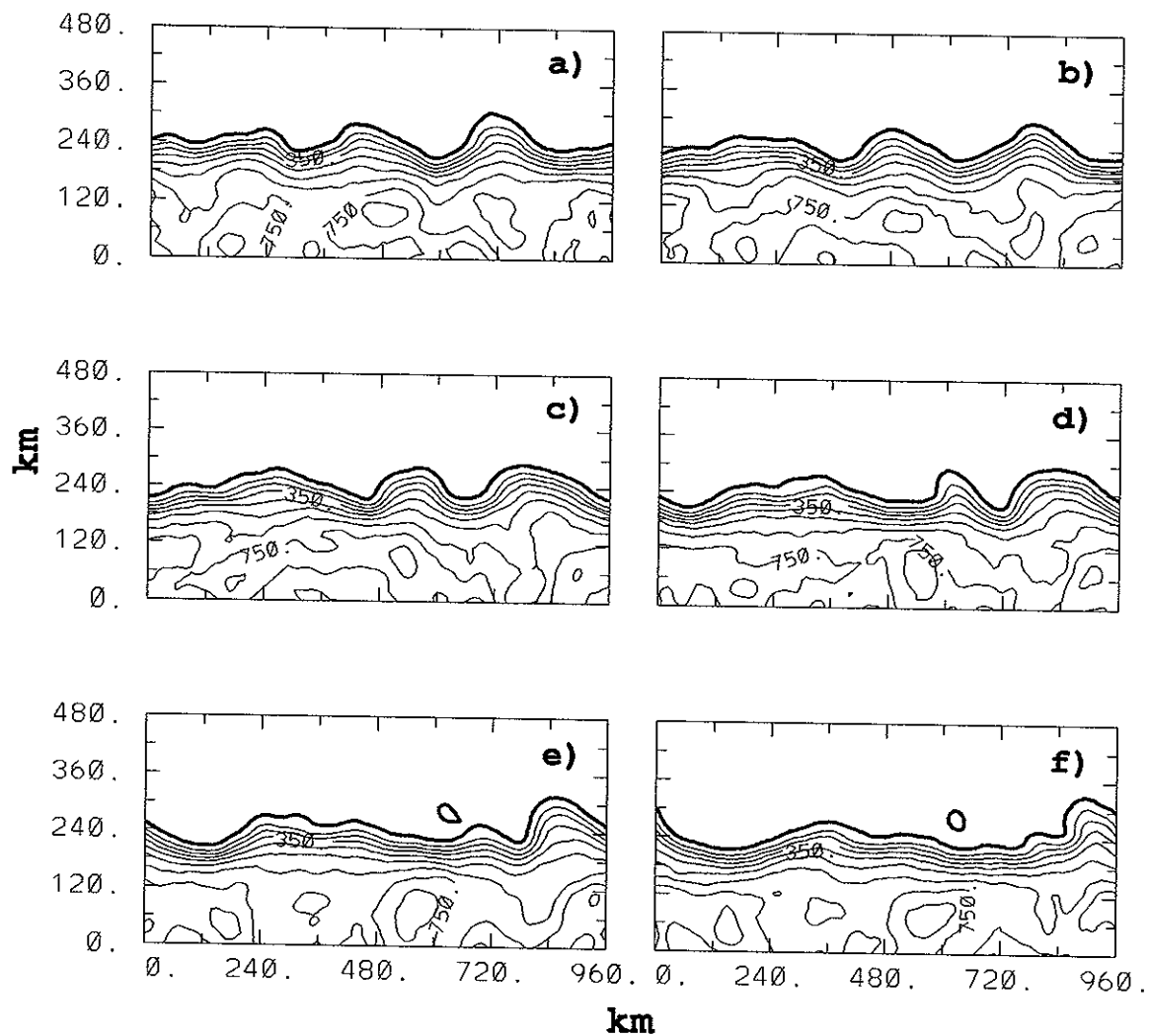


Fig. 12.- Igual que en la Figura 11 pero para los tiempos; a)38, b)40, c)42, d)44, e)46 y f)48 días.

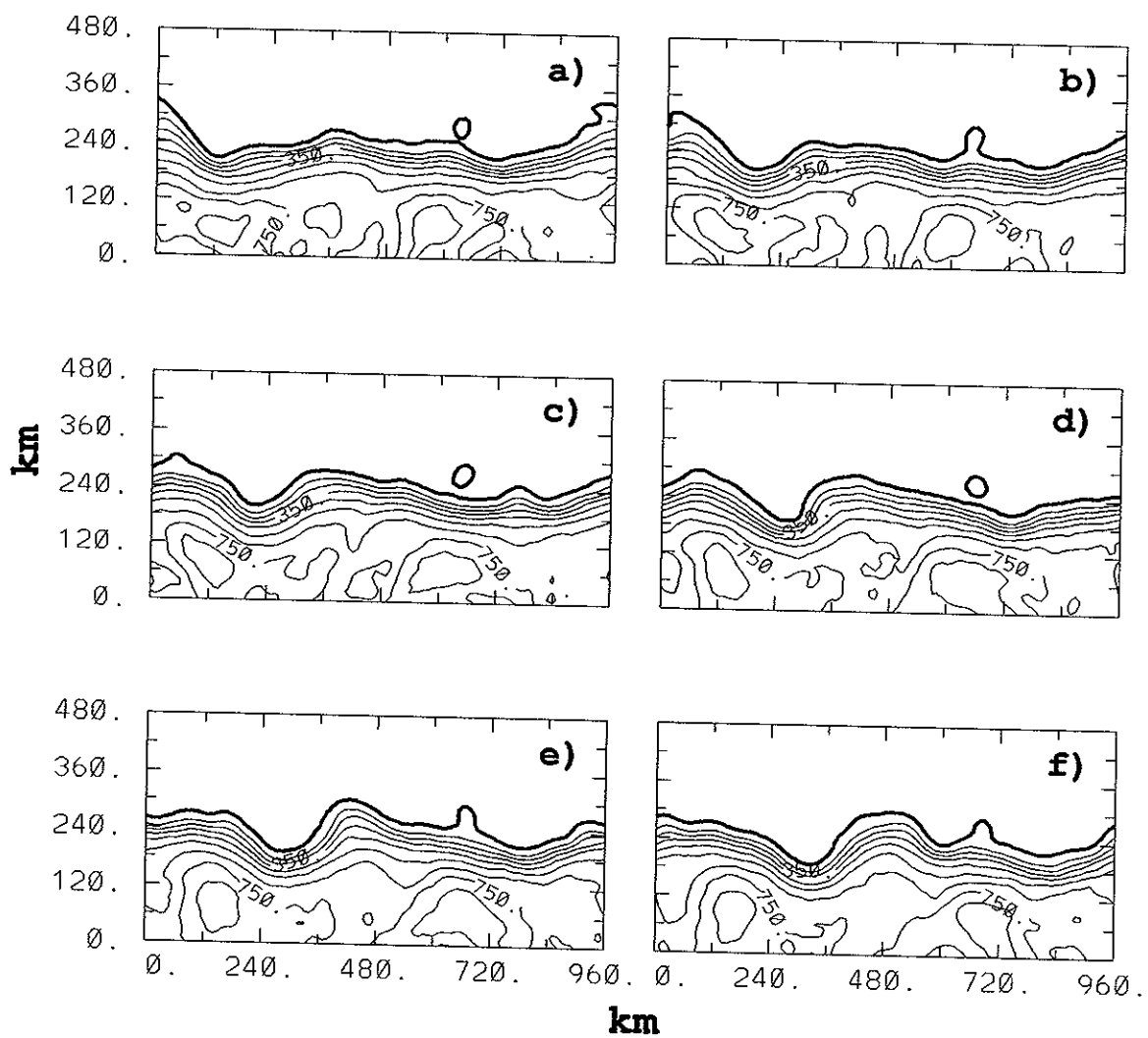


Fig. 13.- Igual que en la Figura 11 pero para los tiempos; a)50, b)52, c)54, d)56, e)58 y f)60 días.

($\varepsilon_p \approx 0$), excepto por las oscilaciones inerciales previamente mencionadas. La energía cinética se mantiene también constante y la gran amplitud en las oscilaciones inerciales se debe a que en este caso $E_p/E_c \approx 30$.

IV.2.3 Caso $Ro=1.0$

Este caso es resuelto únicamente con la dinámica ECP ya que se encuentra fuera del límite de validez física de la dinámica DFG. Se presentan gráficas de contornos a los tiempos; 0, 6, 10, 16, 18 y 20 días (figura 14), a los tiempos; 28, 30, 32, 34, 36 y 38 días (figura 15), y a los tiempos; 50, 52, 54, 56, 58 y 60 días (figura 16). En la figura 14 se muestra el estado básico, el inicio de la perturbación y el posterior desarrollo y crecimiento de la perturbación en un período correspondiente a los 0 y 20 días. En esta serie de gráficas se puede observar que las fluctuaciones iniciales del frente tienen como característica una longitud de onda relativamente corta y amplitud pequeña. Hacia el día 16, poseen una longitud aproximada de $6L_R$. Se puede observar en la figura 15 que las ondas incrementan poco su amplitud y mantienen su longitud, sin embargo podemos notar la tendencia de las ondas a incrementar la pendiente en la porción contraria a su desplazamiento (figuras 15a y 15e). La velocidad de fase aproximada con que se desplazan las ondas en este estado inicial de crecimiento es de 40 km/día. En la figura 16 podemos observar un aparente incremento en la amplitud de las ondas, mientras que estas llegan a alcanzar una longitud aproximada de $10L_R$. Estas ondas, más largas, disminuyen su velocidad de fase en aproximadamente 15 km/día. También es evidente en esta figura la tendencia de las ondas al rompimiento hacia atrás (figura 16a, 16e y 16f). En este caso, la energía potencial del sistema disminuye un poco con respecto a su valor inicial, sin embargo se mantiene constante hasta el final de la corrida (figura 8c), es decir, el valor $\varepsilon_p \times 100$ se mantiene siempre acotado

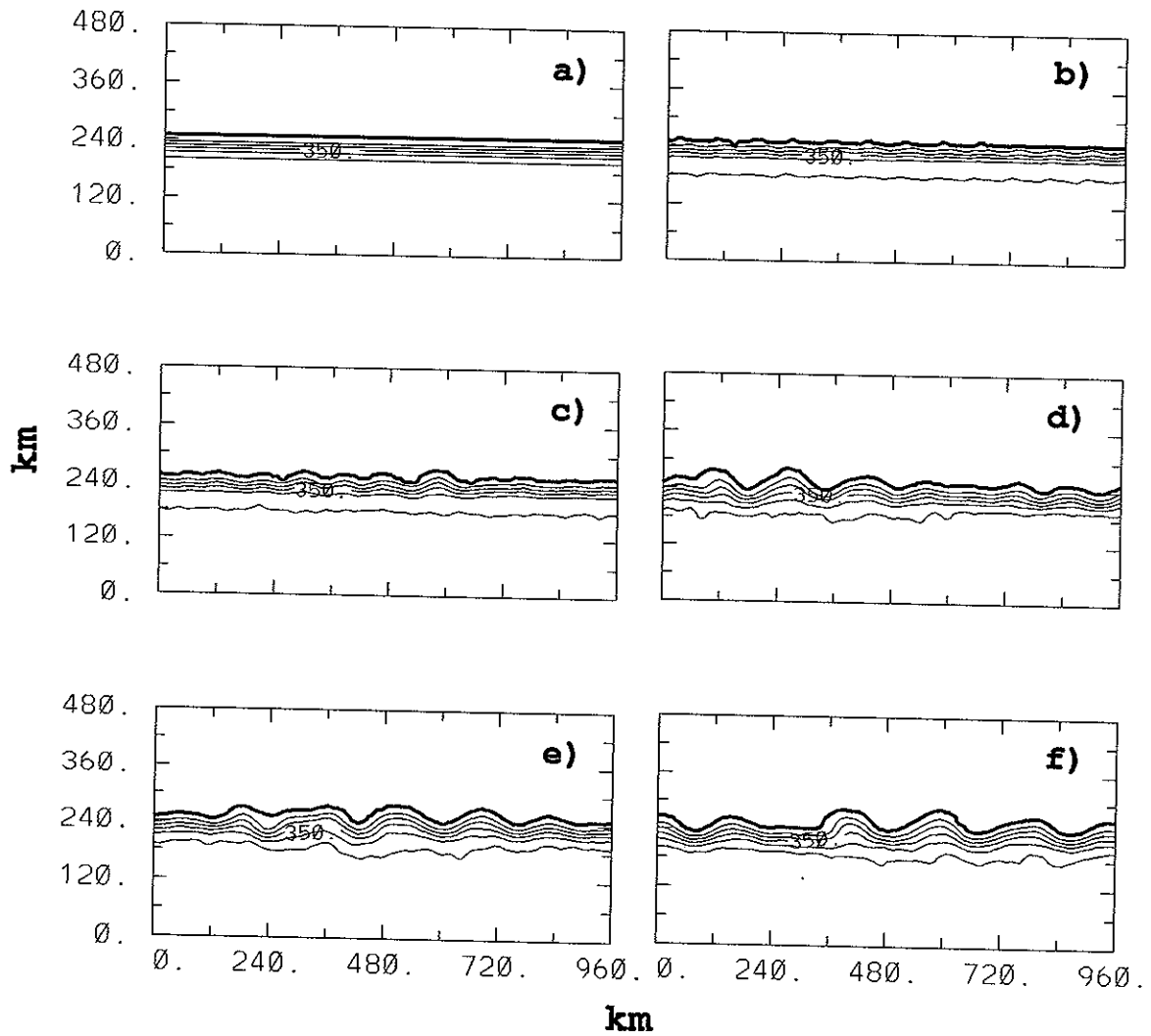


Fig. 14.- Contornos de profundidad en la capa activa para el caso $Ro = 1.0$ resuelto con las ECP. El frente es representado por la isóbata de 50 m (línea gruesa) y el intervalo de contorno es de 100 m. Las gráficas corresponden a los tiempos; a) 0, b) 6, c) 10, d) 16, e) 18 y f) 20 días.

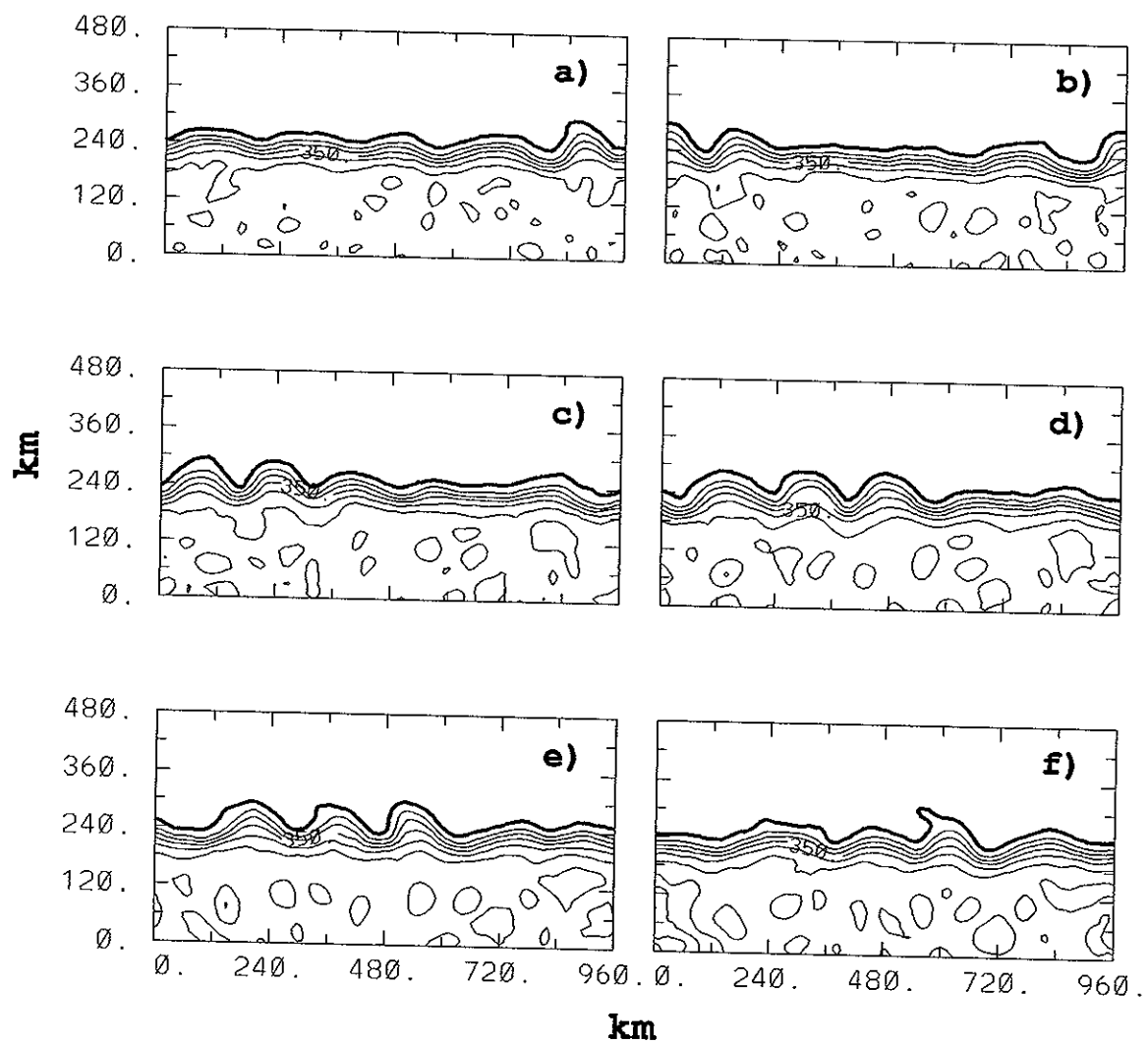


Fig. 15.- Igual que en la Figura 14 pero para los tiempos; a)28, b)30, c)32, d)34, e)36 y f)38 días.

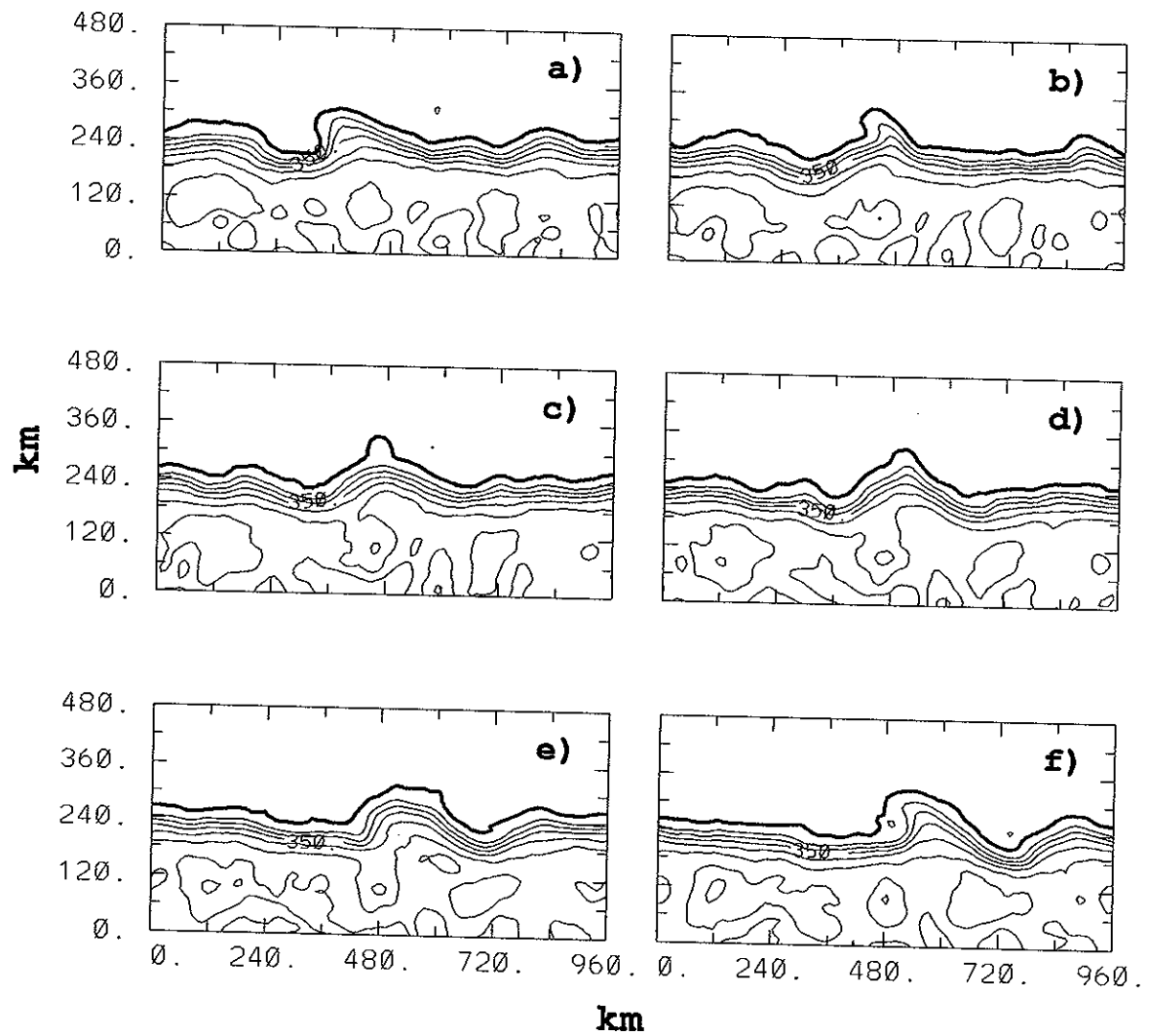


Fig. 16.- Igual que en la Figura 14 pero para los tiempos; a)50, b)52, c)54, d)56, e)58 y f)60 días.

entre $-2.5 < \varepsilon_p \times 100 < 0$. Esto propicia un incremento inicial en el valor de $\varepsilon_c \times 100$, dicho incremento pesado por la razón $E_p/E_c \approx 25$, de tal forma que E_t se mantiene constante en toda la corrida.

V. DISCUSIONES

El criterio de estabilidad derivado en el capítulo III (ecuación 27) nos indica que cualquier perfil de profundidad monotónico es linealmente estable. La expresión (27) concuerda con el criterio obtenido de manera simultánea por *Benilov (1992)* utilizando el mismo régimen dinámico. *Ripa (1993)*, haciendo uso del método de estabilidad formal, señala que la estructura monotónica de un perfil, tanto en DFG como en cuasi-geostrofia, proveen una condición suficiente para estabilidad sin restringirse a perturbaciones infinitesimales. Además, el criterio derivado en este trabajo es consistente con la estabilidad reportada por CR86 en un perfil lineal (caso monotónico resuelto analíticamente) y la inestabilidad reportada por *Pavia (1992)* en un frente doble (caso no-monotónico resuelto numéricamente), ambos utilizando la dinámica DFG. De acuerdo a *Griffiths et al. (1982)*, el tipo de evolución que muestran los frentes dobles se debe al acoplamiento entre las inestabilidades en cada uno de los frentes. Este acoplamiento se hace efectivo cuando la escala $L \leq L_R$ y se debilita cuando $L > L_R$. A partir de este resultado, una prioridad en el trabajo fué desacoplar el frente, principalmente en los casos con $Ro \ll 1$, de tal manera que se pueda ejemplificar numéricamente el criterio de estabilidad (27).

La estabilidad del caso $Ro = 0.01$ (figura 6), resuelto numéricamente con la DFG, concuerda con el criterio de estabilidad definido para esta dinámica. Así también, si suponemos que el límite de validez de la DFG, como lo indica CR86, abarca flujos con $Ro = 0.1$, su estabilidad a perturbaciones infinitesimales es asegurada por el criterio (27) y a pequeñas perturbaciones según lo señala *Ripa (1993)*. La solución numérica del caso $Ro = 0.1$ (figura 9) con DFG no presentó inestabilidad frontal en el tiempo definido como numéricamente válido, sin embargo este período resulta ser muy corto para evaluar la

aplicabilidad del criterio en un flujo con dicho número de Rossby. Las fluctuaciones que se observan en la parte central del flujo (figura 9e y 9f) son inicialmente atribuidas al error en el esquema de repartición de masa que utiliza el modelo. Las escalas espaciales de dichas fluctuaciones no pueden ser resueltas por la física involucrada en la DFG y el error en el cálculo de velocidades se incrementa conforme transcurre el tiempo de simulación. La presencia de estructuras en la zona central propicia un transporte transversal entre las corrientes asociadas al frente. La interfase entre la parte activa y la porción central del flujo actúa como una pared al transporte de masa, lo cual da lugar a las fluctuaciones en esta zona (figuras 9d-f).

La rapidez con que pierde validez la corrida está relacionada a la definición de $Ro \ll 1$ que se utilice. La ecuación de continuidad para la DFG, en términos generales, se expresa como

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_a h) + \frac{\partial}{\partial y} (v_a h) \right] \quad (34)$$

donde (u_a, v_a) representan la parte ageostrófica de la velocidad (términos advectivos en (16)). Esto nos dice que los movimientos de la interfase h son debidos a la divergencia del transporte ageostrófico. El mismo error en la repartición de masa genera componentes de velocidad ageostrófica más grandes en el caso $Ro = 0.1$ que en los casos con $Ro < 0.1$ y por lo tanto fluctuaciones más rápidas en la zona central conforme aumenta el valor de Ro (se simuló un caso con $Ro = 0.05$, el cual no se muestra, y se encontró que la corrida pierde validez alrededor de los 30 días).

Para los casos resueltos numéricamente utilizando las ECP se utilizará como marco de referencia teórico el trabajo de *Killworth (1983)* (en adelante nos referiremos a este trabajo como K83). K83 encontró que cualquier perfil monotónico que tienda a su valor máximo de profundidad más rápido que el caso con vorticidad potencial uniforme ($q = \frac{f}{H}$) será inestable a perturbaciones de onda larga. El perfil de profundidad para un flujo constituido por (u, v) estacionarios e independientes de la coordenada x , geostroficamente balanceado y con vorticidad potencial uniforme posee la expresión

$$h(y) = H(1 - e^{-\alpha y}) \quad ; \quad \alpha = 1/L_R \quad @ \quad y \geq 0. \quad (35)$$

Este perfil tiende a su valor máximo (H) en infinito, por lo que solo es rigurosamente comparable con otro perfil exponencial. En este trabajo haremos mención al criterio de K83 considerando que $h(y) \approx H$ a los $6.5L_R$ ya que, de (35), $h(6.5L_R) = 0.99H$.

La solución numérica del caso $Ro = 0.01$ (figura 7), aunado a la estabilidad del mismo caso en DFG (figura 6), pone de manifiesto la estabilidad de los flujos con $Ro \ll 1$. Debido a que este caso se encuentra dentro de los límites de validez de la dinámica DFG, es de esperarse que los resultados, tanto con DFG como con ECP, sean similares. Para este caso la razón $\frac{L}{L_R} = 10$ (hay que recordar que L es una escala que nos define el ancho de la corriente), por lo cual definimos $h(L) = H$ a los $10L_R$. Como podemos ver, en este caso el perfil de profundidades tiende a su valor máximo a una distancia mayor (equivalente en radios de deformación) que el perfil de profundidad con vorticidad potencial uniforme, lo cual satisface el criterio de estabilidad de K83.

La presencia de inestabilidad frontal en el caso $Ro = 0.1$ resuelto con las ECP (ver figura 11) concuerda también con el criterio de K83 ya que la razón inicial L/L_R es 3.2 por lo cual deberíamos esperar que el flujo básico sea inestable. A diferencia del caso $Ro = 0.01$, las ondas en el frente muestran una evolución caracterizada por el incremento en amplitud y longitud, apoyando la suposición de que el flujo básico presenta las condiciones necesarias para permitir el crecimiento de perturbaciones. Ciertamente se puede observar la presencia de fluctuaciones en la zona central del flujo, sin embargo los valores de ε_c y ε_p se mantienen constantes en toda la corrida (figura 8b). Se pueden identificar en el frente estructuras que tienden a romper hacia atrás y otras similares a las reportadas por *Stern (1980)* como "ondas bloqueadas" conforme las ondas aumentan su amplitud (ver figuras 14f, 15d y 16d). Otra característica importante que se puede observar en los resultados numéricos es que dichas ondas bloqueadas pueden llegar a romper y generar remolinos alargados (figura 12e) que, como parte de su evolución, adquieren simetría axial. Posteriormente este remolino es incorporados al flujo (figura 13e).

El Caso $Ro = 1.0$, resuelto únicamente con el modelo de ECP, es el que más claramente muestra el desarrollo de perturbaciones frontales. La razón inicial $(L/L_R) = 1.0$ excede el límite de validez de la DFG y presupone este caso como inestable según el criterio de K83. En este flujo, el estado inicial de crecimiento está caracterizado por la presencia de ondas cortas en el frente (ver figuras 14b y 14c), sin estar asociadas estas a la presencia de variabilidad en la zona central (como en el caso anterior). En este caso no se desarrollan ondas tan largas como en el resuelto para $Ro = 0.1$ ni se observan desprendimientos de giros que puedan ser tomados en cuenta. Sin embargo, es apreciable un aumento en la razón de crecimiento de las ondas con respecto al caso anterior. Al igual que en $Ro = 0.1$, el

incremento en la amplitud de las ondas propicia la adquisición de importancia de los términos alineales (*Stern, 1180 y Kubokawa y Hanawa, 1984*), dando lugar a la formación de estructuras tales como "ondas bloqueadas" (figuras 16a y 16f).

De acuerdo a *Ripa (1991)*, un flujo básico puede ser inestable aún si satisface dQ/dy , en tal caso las perturbaciones que crecen poseen una estructura de modos de Poincaré. Podemos suponer entonces que la inestabilidad de la corriente frontal resuelta con ECP es debida a la presencia de ondas gravitatorio-inerciales en la formulación de las ECP, las cuales se encuentran filtradas en DFG.

Tanto en el caso $Ro = 0.1$ como en el caso $Ro = 1.0$, resueltos con ECP, las ondas frontales poseen escalas de longitud y velocidad comparables a las reportadas en observaciones. Por ejemplo, *Watts y Johns (1982)* reportan, para la Corriente del Golfo, velocidades de propagación entre 40 y 20 km/día en meandros con longitudes de onda en el rango de 180 y 600 km. Hacen notar también que la velocidad de dichas estructuras disminuye conforme se incrementa su longitud de onda. *Ikeda (1981)*, resolviendo numéricamente un modelo cuasi-geostrófico no-lineal en un sistema de dos capas, encontró que los meandros con amplitudes finitas disminuyen su velocidad y razón de crecimiento conforme aumentan su amplitud, esto debido a la adquisición de importancia de los efectos no-lineales. Reporta también el desprendimiento de remolinos con un diámetro de 90 km. Los resultados para los casos $Ro = 0.1$ y $Ro = 1.0$, como puede verse, son coherentes a lo reportado por *Ikeda (1981)* y *Watts y Johns (1982)* en cuanto a la disminución de velocidad de las ondas conforme aumenta su amplitud y longitud.

VI. CONCLUSIONES

Se ha explorado numéricamente las posibilidades de evolución en una corriente frontal oceánica con perfil de profundidad monotónico. El parámetro fundamental que define a la corriente en los diferentes experimentos numéricos es el número de Rossby (Ro), es decir, la razón entre la aceleración relativa y la fuerza de Coriolis en la ecuación de movimiento. Para esto se utilizan dos dinámicas; Ecuaciones Primitivas de aguas someras y Dinámica de Frentes Geostroficados, ambas en un océano de una y media capas.

A partir de la Dinámica de Frentes Geostroficados se derivó un criterio que nos asegura la estabilidad lineal de corrientes frontales con perfil de profundidad monotónico. El criterio es válido únicamente en el contexto de la dinámica frontal. Dicho resultado es corroborado numéricamente para el caso $Ro = 0.01$ resuelto con la misma dinámica. El criterio no pudo ser probado para el caso $Ro = 0.1$ ya que la solución numérica de este pierde validez en un tiempo relativamente corto. La pérdida de validez en el caso $Ro = 0.1$, resuelto con dinámica frontal, se atribuye a la propagación del error numérico en el cálculo de velocidades (particularmente en el cálculo de los términos advectivos).

La solución numérica del experimento $Ro = 0.01$ con Ecuaciones Primitivas, aunado al resultado del mismo caso en la Dinámica de Frentes Geostroficados, nos indica que este tipo de corrientes son estables a perturbaciones de amplitud pequeña cuando $Ro \rightarrow 0$.

Los resultados numéricos para el caso $Ro = 0.1$, resuelto con las Ecuaciones Primitivas, sugieren que la variabilidad inicial en el frente está asociada a perturbaciones de "amplitud grande", producto de las fluctuaciones en la zona central del flujo. La posterior

evolución de estas perturbaciones parece ser independiente de la zona central. El estado básico de la corriente caracterizado por $Ro = 1.0$ se ajustan más a la definición de "inestable a pequeñas perturbaciones" ya que el inicio en su evolución es independiente al efecto de la zona central.

Estos resultados muestran que las corrientes frontales con perfil monotónico pueden ser inestables cuando poseen números de Rossby suficientemente grandes ($Ro \geq O(0.1)$). Las características más importantes en la evolución de las estructuras observadas en los casos $Ro = 0.1$ y $Ro = 1.0$ son;

- a) la razón de crecimiento de las ondas se incrementa conforme aumenta el número de Rossby,
- b) la longitud de la onda más inestable observada en el caso $Ro = 0.1$ es mayor que la observada en el caso $Ro = 1$.
- c) la velocidad de propagación de las ondas disminuye conforme aumenta su longitud,
- d) aunque ambos casos presentan estructuras cuya amplitud se incrementa conforme evolucionan, únicamente en el caso $Ro = 0.1$ se aprecia el rompimiento de las ondas y la generación de remolinos.

Las corrientes oceánicas reales son sistemas que evolucionan a partir de un mecanismo de inestabilidad mezclada (barotrópica y baroclínica) y su comportamiento no puede ser explicado totalmente a partir de uno solo de estos. Los experimentos numéricos para los

casos con $Ro \geq 0.1$ logran reproducir cualitativamente algunos de los rasgos importantes que se observan en corrientes oceánicas reales, subrayando así la importancia del mecanismo de inestabilidad barotrópica en la evolución de dichas corrientes.

Un paso siguiente en el estudio sobre el comportamiento de las corrientes frontales puede ser la inclusión de dos o más capas activas, es decir, considerar la inestabilidad baroclínica como mecanismo importante en la generación y evolución de fluctuaciones en el frente.

En el método de partículas, la definición del campo de profundidad como la envolvente de las partículas incluye aceptablemente a la definición de frente. Sin embargo, esto introduce algunas desventajas insalvables al estudiar estructuras del tipo de los filamentos abiertos. En este trabajo se recurrió a una estructura como la que se muestra en la Figura 5, con las desventajas de aumentar el costo computacional y de no tener control sobre la posible influencia del otro frente en algún momento de la evolución. La opción de una pared en alguna parte lejana al frente puede disminuir el esfuerzo computacional, pero la presencia de la pared da lugar a una evolución inestable diferente a la que se observa en las corrientes con un solo frente aislado. La opción de una segunda capa, como continuación en el estudio sobre la evolución frontal de una corriente, quizá requiera el empleo de un método de solución numérica distinto al utilizado en este estudio.

LITERATURA CITADA

- Barth, J.A. 1989. Stability of a coastal upwelling front, 1. Model development and a stability theorem. **J. Geophys. Res.**, 94: 10844-10856.
- Benilov, E. 1992. A note on stability of one-layer geostrophic front. **Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.**, 66: 81-86.
- Cushman-Roisin, B. 1986. Frontal geostrophic dynamics. **J. Phys. Oceanogr.**, 16: 132-143.
- y B. Tang. 1990. Geostrophic turbulence and emergence of eddies beyond the radius of deformation. **J. Phys. Oceanogr.**, 20: 97-113.
- Csanady, G.T. 1979. The birth and death of a warm core ring. **J. Geophys. Res.**, 84: 777-780.
- Drazin, P.G. y L.N. Howard. 1966. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. **Advances in Applied Mechanics**, Vol 7, Academic Press. 1-89.
- Griffiths, R.W., P.D. Killworth y M.E. Stern. 1982. Ageostrophic instability of ocean currents. **J. Fluid Mech.**, 117: 343-377.
- Holland, W.R. y D.B. Haidvogel. 1980. A parameter study of the mixed instability of idealized ocean currents. **Dyn. Atmos. Oceans**, 4: 185-215.
- Hoskins, B.J. 1975. The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equations. **J. Atmos. Sci.**, 32: 233-242.
- Ikeda, M. 1981. Meanders and detached eddies of a strong eastward-flowing jet using a two-layer quasi-geostrophic model. **J. Phys. Oceanogr.**, 11: 526-540.
-

- Killworth, P.D. 1980. Barotropic and baroclinic instability in rotating stratified fluids. *Dyn. Atmos. Oceans*, 4: 143-184.
- Killworth, P.D. 1983. Long-wave instability of an isolated front. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 25: 235-258.
- y M.E. Stern. 1982. Instabilities on density-driven boundary currents and fronts. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 22: 1-28.
- Kubokawa, A. y K. Hanawa. 1984. A theory of semigeostrophic gravity waves and its applications to the intrusion of a density current along a coast. Part1: semigeostrophic gravity waves. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 40: 247-259.
- Lipps, F. 1963. Stability of jets in a divergent barotropic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20: 120-129.
- Lozier, M.S., D. Bercovici. 1992. Particle exchange in an unstable jet. *J. Phys. Oceanogr.*, 22: 1506-1516.
- McIntyre, M.E. y T.G. Shepherd. 1987. An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnol'd's stability theorems. *J. Fluid Mech.*, 181: 527-565.
- Paldor, N. 1983a. Stability and stable modes of coastal fronts. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 24: 217-228.
- . 1983b. Linear stability and stable modes of geostrophic fronts. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 24: 299-326.
- Pavia, E.G. 1992. The breakup of frontal filaments. *J. Phys. Oceanogr.*, 22: 399-403.
-

- y B. Cushman-Roisin. 1988. Modelling of oceanic fronts using a particle method. **J. Geophys. Res.**, 93: 3554-3562.
- y —— . 1990. Merging of frontal eddies. **J. Phys. Oceanogr.**, 20: 1886-1906.
- Pedlosky, J. 1964. The stability of currents in the atmosphere and ocean. Part I. **J. Atmos. Sci.**, 21: 201-219.
- Pedlosky, J. 1986. Geophysical fluid dynamics. Springer-Verlag. 710 pp.
- Ripa, P. 1991. General stability conditions for a multi-layer model. **J. Fluid Mech.**, 222: 119-137.
- . 1992. Integrals of motion and stability-instability properties of ocean models. **Trends Phys. Oceanogr.**, 1: 141-151.
- . 1993. Hamiltonian dynamics, conservation laws and the vortex stability-instability problem. Trabajo presentado en el coloquio sobre modelación de vortices oceánicos. Academia de Ciencias y Artes de los Países Bajos. Amsterdam, Holanda. Mayo 11-13.
- Salmon, R. 1983. Practical use of Hamilton's principle. **J. Fluid Mech.**, 132: 431-444.
- Stern, M.E. 1980. Geostrophic fronts, bores, breaking and blocking waves. **J. Fluid Mech.**, 99: 687-730.
- Watts, D.R. y W.E. Johns. 1982. Gulf stream meanders: observations on propagation and growth. **J. Geophys. Res.**, 87: 9467-9476.
-