

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

DINÁMICA COMPLEJA EN EL CONVERTIDOR REDUCTOR ("BUCK")

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

MANUEL MOISÉS MIRANDA VELASCO

Ensenada, Baja California, México, Mayo de 2009.

TESIS DEFENDIDA POR
Manuel Moisés Miranda Velasco
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Joaquín Alvarez Gallegos
Director del Comité

Dr. Iouri Orlov Kuchina
Miembro del Comité

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Miembro del Comité

Dr. Jaime Eugenio Arau Roffiel
Miembro del Comité

Dr. Leonardo Acho Zuppa
Miembro del Comité

Dr. María del Carmen Maya Sánchez
*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y
Telecomunicaciones*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Estudios de Posgrado

22 de Mayo de 2008

RESUMEN de la tesis de Manuel Moisés Miranda Velasco, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **DOCTOR EN CIENCIAS** en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Control. Ensenada, Baja California, México. Mayo 2009.

DINÁMICA COMPLEJA EN EL CONVERTIDOR REDUCTOR (“BUCK”)

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director

Los convertidores conmutados son dispositivos electrónicos ampliamente usados para adecuar los niveles de voltaje necesarios para alimentar equipos electrónicos de diversa índole. La naturaleza discontinua de estos dispositivos les permite mostrar un comportamiento dinámico muy diverso, desde puntos de equilibrio hasta oscilaciones caóticas.

En esta tesis se estudia el tipo más sencillo de estos dispositivos, conocido como convertidor reductor (“buck”), retroalimentado con uno de los controladores más sencillos (control proporcional), con el objeto de mostrar que aún con este simple dispositivo es posible observar un comportamiento dinámico complejo. Para ello se analizan diferentes escenarios dinámicos ante variaciones de los parámetros del control.

Se muestran las condiciones necesarias para la existencia del fenómeno dinámico llamado “modo deslizante”, el cual se caracteriza por forzar al sistema a moverse en una superficie caracterizada por $S = \{x \in \mathfrak{R}^n : \sigma(x, t) = 0\}$, donde $\sigma : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, y x es el estado del sistema; S es llamada superficie de discontinuidad. Una vez que el sistema alcanza la superficie S , el sistema se desliza por ésta hasta alcanzar el punto de equilibrio deseado. También se dan condiciones necesarias para la existencia de una órbita 1-periódica en estado estacionario con un control tipo PWM (“Pulse Width Modulated”). Se estudia la presencia de bifurcaciones, órbitas periódicas, órbitas cuasi-periódicas y caóticas cuando ocurren variaciones en la ganancia del controlador (k_p), el voltaje de entrada V_{in} y el periodo T de la señal de modulación universalmente utilizada en este tipo de controladores.

Este estudio complementa el análisis realizado por diversos autores, los cuales se enfocan en el análisis de los efectos en su dinámica ante la variación de los parámetros internos del circuito y del controlador PWM.

Palabras clave: circuitos de potencia, control discontinuo, bifurcaciones, caos.

ABSTRACT of the thesis presented by **Manuel Moisés Miranda Velasco** as a partial requirement to obtain the **DOCTOR OF SCIENCES** degree in Electronics and Telecommunications with major in Control. Ensenada, Baja California, Mexico. May 2009.

COMPLEX DYNAMIC IN THE STEP-DOWN CONVERTER (“BUCK ”)

Switched converters are electronic devices widely used to adapt the different voltage levels needed to energize the wide variety of electronic equipment. The discontinuous nature of these circuits makes them display a wide range of dynamical behaviors, from stable equilibrium points to chaotic oscillations, whose formal analysis is not easy to perform.

In this thesis we study the simplest type of these devices, known as step-down (“buck”) converter, with a simple feedback controller (proportional control), to show that even with this simple device, a complex dynamic behavior can be observed. To do this, different dynamic scenarios with control parameter variations are analyzed.

We find conditions to analyze the existence of the dynamical phenomenon known as “sliding mode”. This phenomenon constraints the behavior of the circuit, forcing the system to move on a surface, called the “discontinuity surface”, given by $S = \{x \in \mathfrak{R}^n : \sigma(x, t) = 0\}$, where $\sigma : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, and x is the system state. Once it reaches the surface S , the system can be guided to the desired equilibrium point lying on this surface. Conditions are also given to predict the existence of a 1-periodic orbit at the buck output fed back with a PWM (“Pulse Width Modulated”) controller, widely used in practice. We also study the presence of bifurcations, as well as periodic, quasi-periodic, and chaotic orbits of the buck dynamics when a control gain (k_p), the input voltage V_{in} , and the period T of the modulation signal, widely used in these controllers, are varied.

This study complements the analysis performed by other authors on the buck circuit, which focus on analyzing the effect of internal parameter variations of the circuit and the PWM controller on its dynamics.

Keywords: power circuits, discontinuous control, bifurcations, chaos.

Agradecimientos

A la fuerza que ocasiona las cosas inesperadas que me han permitido llegar al fin de esta etapa de mi vida.

A Joaquín que con su sapiencia y paciencia han guiado a buen termino esta aventura de mi doctorado, un reconocimiento por que sin su apoyo mi vida no sería lo que es. Gracias por confiar en mí cuando ni yo mismo lo hacia.

A los miembros de mi comité que por estos largos 6 años me han acompañado y orientado, y sin cuyo apoyo no se habría logrado la finalización de este proyecto.

A mi familia que son el cimiento de todo lo que soy, cuyo apoyo me ha permitido aventurarme en las más descabelladas aventuras y no desfallecer.

Roque si se pudo, hermano un tiempo largo ha pasado desde que te conozco, en este tiempo has sido un apoyo que no puedo pagar de ninguna manera.

Enrique, sin tu apoyo tampoco podría haber llegado al fin de esta etapa, gracias por abrirme las puertas de tu estudio que por mucho tiempo se convirtió en mi refugio, refugio que me permitió sentir la vida como no sabia se podía hacer.

Al grupo de control no lineal que me apoyaron con sus conocimientos, su paciencia y lo más preciado su amistad.

A mis amigos de la UABC que me apoyaron y motivaron a seguir cada día.

A todos los parroquianos de estudio Todos Santos que tanto han soportado de mi necesidad y que me han brindado su amistad.

Al CONACYT que me apoyo por 4 años con la beca de doctorado.

A la UABC que me apoyo de todas las maneras que pudo.

A todos los demás que contribuyeron de manera voluntaria o involuntaria y que por falta de papel y memoria no menciona en este pequeño pedazo de papel.

Contenido

	Página
I. Introducción	1
II. Modelos del convertidor buck	5
II.1. Introducción	5
II.2. Modelo Discontinuo	6
II.3. Modelo Promedio	8
II.4. Puntos de equilibrio	10
II.5. Modelo Normalizado	14
II.6. Conclusiones	15
III. Control por modos deslizantes	17
III.1. Introducción	17
III.2. Regulación	18
III.3. Seguimiento	25
III.4. Conclusiones	27
IV. Control PWM	28
IV.1. Introducción	28
IV.2. Órbita 1-periódica	29
IV.3. Comparación con el diseño clásico PWM	36
IV.4. Conclusiones	38
V. Dinámica compleja en el convertidor buck	40
V.1. Introducción	40
V.2. Incertidumbres paramétricas en el lazo de control.	41
V.2.1. Variaciones en la ganancia k_p	41

Contenido (continuación...)

	Página
V.2.2. Variaciones en el voltaje de entrada V_{in}	56
V.2.3. Variación en el periodo T de la señal de modulación $h(t)$	64
V.3. Conclusiones	74
VI. Caos homoclínico en el convertidor buck	75
VI.1. Introducción	75
VI.2. Método de Melnikov/Smale	76
VI.3. El convertidor buck con una señal $h(t)$ sinusoidal	79
VI.4. El convertidor buck con un control PWM	86
VI.5. Conclusiones	89
VII. Conclusiones	90
VII.1. Trabajos Futuros	90
Bibliografía	92

Lista de Figuras

Figura	Página
1. Esquema del convertidor buck como un sistema de segundo orden retroalimentado	3
2. Convertidor Buck en lazo abierto.	6
3. Posición del interruptor u	7
4. Esquema del comportamiento del convertidor buck alrededor de la superficie de discontinuidad S	20
5. Convertidor buck con el esquema de control (37): a) Evolución en tiempo normalizado de x_2 , b) Evolución en tiempo normalizado de σ , c) Retrato de fase de las variables (y_1, y_2)	23
6. a) Evolución en tiempo de la diferencia $\bar{x}_2 - x_2$ con $\bar{x}_2 = 7/8$, b) Acercamiento de la evolución en tiempo de la diferencia $\bar{x}_2 - x_2$	24
7. La diferencia $\bar{x}_2 - \hat{x}_2$	24
8. Evolución en tiempo de x_2 y x_2^* a), del error $x_2^* - x_2$ b), un acercamiento del error $x_2^* - x_2$ c).	26
9. a) Retrato de fase del sistema (47). b) Señal de control u . c) Espectro de la señal de control u	27
10. Evolución en tiempo de las señales en el control PWM.	31
11. Esquema del convertidor buck con un control PWM	32
12. Evolución en tiempo exhibiendo una órbita 1-periódica de: a) x_1 , b) x_2	36
13. D_i , D_s y D_x para diferentes valores $\bar{x}_2$	37
14. $ D_s - D_x $ para $T \in (0,35, 0,6)$ y $\bar{x}_2 \in (0,05, 0,95)$	38
15. Diagrama de bifurcación cuando se considera k_p como parámetro de bifurcación . .	44
16. a) Evolución de $k_p(\bar{x}_2 - x_2(t))$ para $k_p = \{1, 2,59\}$ y $h(t)$. b) Acercamiento de 16.a	45
17. Espectro de x_2 para: $k_p = 1$ a), $k_p = 2,59$ b) y $k_p = 3,1$ c).	46
18. Evolución en tiempo de x_1 con $k_p = 3,15$	46
19. Diagrama de bifurcación utilizando los mínimos de x_1 en el intervalo $k_p \in (3,1, 3,45)$.	47

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
20. Evolución de x_1 con $k_p = 3,3$	48
21. Exponente de Lyapunov para $k_p \in [1, 5]$	49
22. Evolución de la curva $k_p (\bar{x}_2 - x_2)$ y la señal de modulación $h(t)$, considerando la ganancia k_p ; a) con un valor de 3 y b) con un valor de 4.8.	50
23. Evolución a partir de múltiples condiciones iniciales.	50
24. Mapeo estroboscópico con $k_p = 4,8$	51
25. Elementos para la reconstrucción del espacio de estado.	53
26. Atractor reconstruido considerando el voltaje del capacitor x_2 y $k_p = 4,8$	53
27. Atractor reconstruido considerando la corriente del inductor x_1 y la ganancia $k_p = 4,8$	54
28. Magnitud del espectro del voltaje del capacitor x_2 con la ganancia $k_p = 4,8$	54
29. Promedio del voltaje del capacitor x_2 para 100 ciclos de la señal de modulación $h(t)$ para el intervalo $k_p \in [1, 5]$	55
30. Diagrama de bifurcación considerando el voltaje de entrada V_{in} como parámetro de bifurcación.	57
31. Exponente de Lyapunov para $V_{in} \in [12, 50]$	58
32. a) Evolución del voltaje del capacitor (z_2). b) Acercamiento de la evolución del voltaje z_2	58
33. Mapeo estroboscópico del convertidor buck considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 12.8V.	59
34. Múltiples acercamientos al centro de la curva formada por el mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 12.8V.	60
35. Mapeo de Lorenz del voltaje del capacitor z_2 considerando que el voltaje de entrada V_{in} tiene el valor de 12.8V.	60
36. Mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 45V.	61
37. Mapeo de Lorenz del voltaje del capacitor z_2 , considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 45V.	62
38. Atractor reconstruido utilizando el voltaje del capacitor z_2 y el voltaje de entrada V_{in} igual a 45V.	63
39. Promedio del voltaje del capacitor z_2 ante variaciones del voltaje de entrada V_{in}	63
40. Magnitud del espectro del voltaje del capacitor z_2 considerando que el voltaje de entrada V_{in} tiene los valores; a) 12.8V y b) 45V.	64

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
41. Diagrama de bifurcación del convertidor buck, considerando el periodo T como parámetro de bifurcación y el intervalo de 0.3536s a 1.4s.	65
42. Diagrama de bifurcación del convertidor buck, considerando el periodo T como parámetro de bifurcación y el intervalo de 1.4s a 3.5s.	66
43. Acercamiento del diagrama de la figura 41.	67
44. Máximo exponente de Lyapunov considerando variaciones en el periodo T	67
45. Mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando que el periodo T tiene el valor de 0.78s.	68
46. Mapeo estroboscópico del convertidor buck, para $T = 1,2s$	69
47. Mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando que el periodo T tiene el valor de 0.98s.	69
48. Mapeo de Lorenz considerando el valor del periodo T igual a 1.2s.	70
49. Reconstrucción del atractor para varios valores del periodo T	70
50. Mapeo de Lorenz considerando el valor del periodo T de 2.48s.	72
51. Evolución de $k_p (\bar{x}_2 - x_2)$ y la señal de modulación $h(t)$ cuando el periodo T adquiere los valores: a) de 0.62s y b) de 0.78s.	72
52. Promedio del voltaje del capacitor x_2 considerando variaciones en el periodo T . . .	73
53. Magnitud del espectro del voltaje del capacitor x_2 cuando el periodo T tiene un valor de 1.2s.	73
54. Esquema de una órbita homoclínica.	76
55. Retrato de fase del sistema nominal del convertidor buck.	81
56. Diagrama de bifurcación del convertidor buck descrito por la expresión (102) . . .	83
57. Retrato de fase considerando β igual a 0.25.	84
58. Acercamiento de la figura 56	85
59. Mapeo estroboscópico considerando dos valores de β	85
60. Atractor reconstruido, considerando la amplitud $\beta = 0,13$	86
61. Diagrama de bifurcación del convertidor buck con un control PWM y una ganancia k_p negativa, considerando la amplitud de la señal de modulación Δh como parámetro de bifurcación.	87
62. Mapeo estroboscópico considerando la amplitud β con un valor de 0.011.	88
63. Atractor reconstruido, considerando la amplitud $\beta = 0,011$	88

Capítulo I

Introducción

Los convertidores conmutados, dada su sencillez y eficiencia, son utilizados ampliamente en diversas aplicaciones, de tal manera que en la actualidad existen pocos dispositivos electrónicos que no tengan un convertidor conmutado en su etapa de alimentación. La exigencia de un mejor desempeño y un menor desperdicio de energía en los dispositivos electrónicos, ocasiona que los convertidores conmutados sean sometidos a requisitos cada vez más severos.

En la práctica se desea que los convertidores conmutados estén constituidos por la menor cantidad de elementos posibles; esto no siempre se logra al ser necesario introducir elementos de control y protección. En los convertidores es necesaria una etapa de control debido a que en general algunos de los elementos que lo componen sufren variaciones con el tiempo. Sin embargo, el diseño de controladores para los convertidores no es un problema trivial.

La principal dificultad en el diseño de esquemas de control para los convertidores conmutados se da precisamente en la naturaleza conmutada de los mismos. Esto ocasiona que los modelos que describen la dinámica de los convertidores sean discontinuos, los cuales no resultan fáciles de usar para analizar el comportamiento dinámico de estos dispositivos. Por lo anterior, en la literatura es común el uso de modelos menos complejos para el diseño de los convertidores. Sin embargo, al utilizar modelos más sencillos no se representa toda la dinámica de los convertidores, siendo necesario elementos de protección para evitar que la dinámica no modelada del convertidor afecte su funcionamiento.

El problema de controlar un convertidor conmutado en muchos casos es un problema abierto, dada la complejidad de los modelos discontinuos de los convertidores conmutados, que en ocasiones se pueden considerar de estructura variable. En la literatura autores como Navarro-López *et al.* (2008); Fujioka *et al.* (2007); Elmas *et al.* (2009) muestran diferentes esquemas de control. Estos controladores buscan mejorar algunas características de los convertidores conmutados como mayor robustez a incertidumbres paramétricas o perturbaciones externas, o una implementación menos complicada, entre otros. Lo que estos trabajos tienen en común es el considerar la natu-

raleza conmutada de los convertidores.

Aunque en los últimos años se han desarrollado controladores que consideran la naturaleza conmutada de los convertidores, en la práctica es común considerar el modelo promedio propuesto por Wester y Middlebrook (1972), el cual genera un modelo diferenciable de los convertidores conmutados. Al contar con un modelo diferenciable algunos autores (Agrawal (2001); Mohan *et al.* (2002)) analizan la dinámica de los convertidores alrededor de algún punto de operación de interés a través de la linealización del modelo diferenciable. El contar con un modelo lineal hace posible diseñar esquemas de control a partir de la teoría de sistemas lineales. Sin embargo, un modelo lineal no reproduce toda la dinámica presente en los convertidores conmutados, tal como lo muestran de manera experimental Brockett y Wood (1984).

El que los convertidores conmutados sean estudiados a través de modelos que no describen de manera completa su comportamiento dinámico ocasiona que en la práctica, ante variaciones paramétricas, puedan presentarse fenómenos que no se contemplan en el diseño tales como; oscilaciones periódicas de diferentes periodos, oscilaciones cuasi periódicas y oscilaciones caóticas. A este comportamiento lo llamaremos dinámica compleja.

Comprender la dinámica compleja que presentan los convertidores conmutados permitiría un diseño de mejores controladores, o utilizar más eficientemente controladores ya existentes que se ven limitados por los sistemas de seguridad agregados para evitar comportamientos no modelados. Este tópico no es nuevo y El-Aroudi *et al.* (2005) presentan un buen resumen de los avances en el análisis de la dinámica compleja de los topologías consideradas básicas dentro de los convertidores conmutados. Sin embargo, también muestran que el problema sigue estando abierto y todavía no se entienden totalmente los mecanismos que generan la dinámica compleja en los convertidores conmutados.

Dada la variedad de topologías en los convertidores conmutados, así como la dinámica compleja que presenta cada topología ante diferentes escenarios, en este trabajo nos enfocaremos en la topología más sencilla que es el convertidor conmutado CD-CD reductor conocido como “buck”. El convertidor buck presenta diferentes ventajas para su análisis; la primera es que el modelo promedio resulta ser lineal, por lo que no se requiere ninguna otra aproximación. Otra ventaja es que al considerarlo un sistema de estructura variable, cada una de las estructuras es estable, y en general sólo difieren en el punto de equilibrio de cada estructura. Este convertidor es estudiado por diversos autores; uno de los trabajos que ha servido como guía para su estudio es el de Hamill y Deane (1992), donde se propone estudiar al convertidor por medio de mapeos discretos. Otros autores extienden esta técnica de estudio a otras topologías (Tse (2003); Banerjee *et al.* (2000); Zhusubaliyev y Mosekilde (2003)). Existen otros autores que estudian a los convertidores como sistemas discontinuos (Banerjee *et al.* (2000); Jain y Banerjee (2003)); además Zhusubaliyev y Soukhoterlin (2001); Zhusubaliyev *et al.* (2003) estudian estos dispositivos como sistemas híbridos.

En los trabajos previos se analiza al convertidor buck con diferentes esquemas de control. En

cada uno de estos trabajos se muestra que el convertidor presenta una dinámica compleja. En todos ellos es común considerar dos elementos en el esquema de control: una señal periódica externa llamada señal de modulación y el “flip-flop” utilizado para prevenir múltiples conmutaciones en el interruptor por ciclo de la señal de modulación. Myles y Di Bernardo (2000) muestran que el flip-flop se puede considerar como un retardo que depende del estado y del tiempo, y puede inducir dinámica compleja en el buck. Sin embargo, no se encontró en la literatura un estudio acerca de los efectos en la dinámica del convertidor buck ante variaciones de la señal de modulación. Dados los diferentes controladores propuestos en la literatura con los cuales el buck presenta una dinámica compleja, surge un problema de interés al tratar de determinar cuál es el mecanismo más simple que puede generar dinámica compleja.

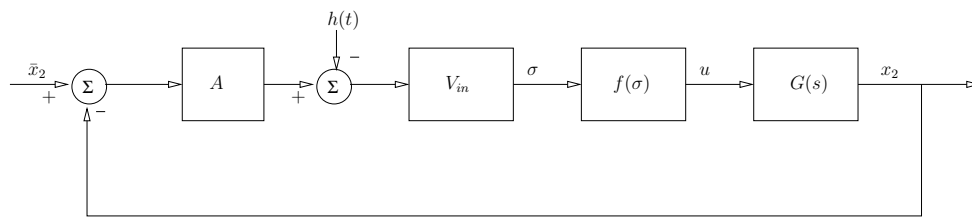


Figura 1: Esquema del convertidor buck como un sistema de segundo orden retroalimentado

En este trabajo se busca el mecanismo más sencillo con el cual el convertidor buck presenta una dinámica compleja. Se considera como base el controlador PWM de frecuencia fija utilizado ampliamente en la práctica. El convertidor buck, con un controlador PWM, se puede estudiar como un sistema de segundo orden retroalimentado, representado por el esquema de la figura 1, donde $\bar{x}_2$ es la señal de referencia; la señal $h(t)$ se puede considerar una "perturbación", el voltaje de entrada V_{in} es una ganancia, la función $f(\sigma)$ representa la acción del interruptor que en general es una función discontinua (la función exacta será descrita con detalle en el siguiente capítulo), y $G(s)$ representa la dinámica del convertidor, en este caso un sistema lineal de segundo orden.

Alvarez y Curiel (1997) muestran que el sistema de la figura 1 presenta una dinámica compleja ante variaciones de la ganancia, este resultado no puede ser utilizado directamente en el convertidor buck retroalimentado. Sin embargo, nos da una guía acerca de los requisitos necesarios para la presencia de dinámica compleja en este convertidor. En este estudio no se incluyen los elementos de protección que se utilizan normalmente en la práctica, pues la mayoría son elementos no lineales que aumentan la complejidad del controlador, lo cual se aleja de la búsqueda del mecanismo más sencillo que permita generar una dinámica compleja.

Uno de los primeros pasos para estudiar un sistema dinámico es elegir un modelo matemático que represente su comportamiento. En el capítulo 2 presentaremos un estudio breve del modelo discontinuo del convertidor buck, así como el modelo promedio. Se hará un breve estudio del punto de equilibrio que presenta este convertidor, y finalmente se mostrará el modelo normalizado, el cual cuenta con un solo parámetro, lo que simplifica el estudio de la dinámica.

En el capítulo 3 se estudia el convertidor buck como un sistema con un control por modos deslizante Utkin (1992), esto ha sido estudiado por otros autores (Sira-Ramirez y Ilic (1988); Sira-Ramirez (1989b, 2003); Tan *et al.* (2005); Fossas y Ras (2002)). En estos trabajos previos se busca diseñar un control por modos deslizantes de primer orden (Perruquetti y Barbot (2002)), por lo que siempre se considera la corriente del inductor o la derivada del voltaje del capacitor. Sin embargo, en este trabajo analizaremos la estabilidad del controlador por modos deslizantes de segundo orden, que resulta cuando en un controlador PWM se considera que la señal de modulación $h(t)$ es igual a 0. Además, se darán algunas condiciones para la señal de modulación tal que el controlador por modos deslizantes permita a la salida del convertidor exhibir el comportamiento deseado.

En la práctica se desea que en estado estacionario el convertidor buck exhiba una oscilación periódica, por lo que se espera que el control PWM garantice este comportamiento. En el capítulo 4 se dan condiciones suficientes para que el convertidor buck, con un control PWM, exhiba la oscilación periódica deseada.

El estudio de la dinámica compleja que presenta el convertidor buck es abordado en el capítulo 5. En este capítulo se analiza el efecto de variaciones en algunos de los parámetros del lazo de control del convertidor. Se consideran variaciones en la ganancia k_p , el voltaje de entrada V_{in} y el periodo T de la señal de modulación. En este capítulo se muestra una dinámica compleja en el convertidor buck que no ha sido reportada en la literatura. Uno de los puntos más interesantes es que al considerar variaciones en la ganancia k_p o el periodo T no se presenta la pérdida de conmutación en el interruptor por ciclo de la señal de modulación, que en la literatura se considera necesaria para la existencia de comportamiento caótico. Además, se incluye como elemento de análisis el promedio del voltaje del capacitor por varios ciclos de la señal de modulación, lo cual sirve para comparar el rendimiento del control PWM cuando se encuentra en diferentes escenarios dinámicos.

En el capítulo 6 se estudian las condiciones para que el convertidor buck pueda ser estudiado por el método de Melnikov/Smale. Se muestra que bajo ciertas condiciones el convertidor presenta caos homoclínico. Además, se consideran un conjunto de parámetros en el control PWM para los cuales el convertidor puede exhibir un comportamiento similar al caos homoclínico.

Finalmente, en el último capítulo se dan las conclusiones y se discuten algunos trabajos futuros posibles.

Capítulo II

Modelos del convertidor buck

II.1. Introducción

Uno de los primeros pasos para estudiar un sistema dinámico es elegir un modelo matemático que represente su comportamiento. En este capítulo se discuten varias representaciones del circuito buck que serán utilizadas a lo largo de este trabajo. En general, los convertidores conmutados son representados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias lo cual, en teoría, permite que dada una condición inicial se conozca exactamente su evolución en el tiempo. Por diversas razones en la obtención de un modelo es común realizar aproximaciones para simplificarlo, algunas de estas razones son que no es posible representar la dinámica exacta de los elementos del sistema a estudiar, que el modelo exacto resulta demasiado complicado, que no es posible modelar las perturbaciones externas. Esto ocasiona que, de acuerdo a las simplificaciones que se realicen, el modelo sea solamente una aproximación que representa una parte de la dinámica del sistema. Puesto que un sistema pueda ser representado de diversas maneras, la elección del modelo a utilizar es un punto importante en el estudio de cualquier sistema dinámico.

En el caso de los convertidores conmutados, el uso de interruptores genera modelos discontinuos o de estructura variable, ya que el interruptor es modelado como un dispositivo que pasa de una posición a otra diferente de manera instantánea. El análisis de sistemas dinámicos discontinuos no resulta trivial; en el caso de los convertidores conmutados es común estudiar su dinámica utilizando el modelo promedio, propuesto de manera heurística por Wester y Middlebrook (1972), el cual permite representar a estos dispositivos como sistemas diferenciales. En la sección II.3 se muestra el modelo promedio del convertidor buck en lazo abierto, el cual resulta ser un sistema lineal de segundo orden que presenta un único punto de equilibrio¹. Al considerar un control retroalimentado el modelo se vuelve discontinuo en el estado, por lo que el modelo promedio no representa

¹Considerando el convertidor en lazo abierto y la señal u como un tren de pulsos de amplitud unitaria, frecuencia constante y ciclo de trabajo constante, el modelo promedio se puede obtener de manera analítica utilizando la teoría de modelo promedio presentada en Khalil (2002).

adecuadamente la dinámica del convertidor. Sin embargo, en la literatura es común seguir considerando el modelo promedio para el diseño de controladores retroalimentados (Agrawal (2001); Mohan *et al.* (2002)), lo cual obliga a considerar elementos de “protección” para compensar la dinámica no modelada.

El comportamiento deseado en estado estacionario del buck es una señal periódica de pequeña amplitud $g_i(t)$, más una señal constante $\hat{z}_i$. Este comportamiento se presenta si la posición del interruptor es controlada por un tren de pulsos de frecuencia constante. Al considerar el modelo promedio se tiene un único punto de equilibrio, que depende del valor de los parámetros (Agrawal (2001); Mohan *et al.* (2002)). Sin embargo, al considerar el modelo discontinuo los puntos de equilibrio dependen de la estrategia de conmutación utilizada. En la sección II.4 se analizan brevemente los puntos de equilibrio de este convertidor.

En el análisis de circuitos eléctricos es común que los modelos utilizados presenten parámetros de diferentes órdenes de magnitud. El convertidor buck en lazo abierto presenta cuatro parámetros con diferencia en sus valores de órdenes de magnitud. Por ello en la sección II.5 se presenta una transformación que genera un modelo normalizado que cuenta con un único parámetro, lo cual facilita su análisis y ofrece una representación estándar con ventajas numéricas evidentes.

Finalmente, se dan algunas conclusiones en la última sección de este capítulo.

II.2. Modelo Discontinuo

El circuito en lazo abierto del convertidor buck se muestra en la figura 2. En este convertidor, el interruptor constituye un elemento no lineal, que representa una discontinuidad ideal, ya que pasa de un estado a otro de manera instantánea.

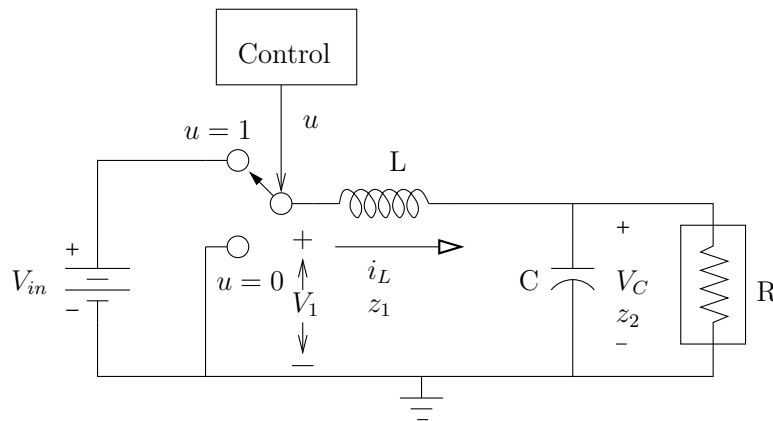


Figura 2: Convertidor Buck en lazo abierto.

El modelo discontinuo del convertidor buck es dado por la expresión:

$$\dot{z}_1 = \frac{-z_2 + uV_{in}}{L}, \quad (1a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\frac{-z_2}{R} + z_1}{C}, \quad (1b)$$

donde z_1 es la corriente en el inductor, z_2 es el voltaje en el capacitor y u representa la posición del interruptor definida como (véase la figura 2):

$$u = \begin{cases} 1, & \text{si } V_1 = V_{in} \\ 0, & \text{si } V_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

La señal u puede presentar diversos comportamientos dependiendo de la salida deseada, así como de la estrategia de control utilizada. Por otra parte, dado que solamente puede adquirir dos valores (0 y 1), esta señal es, en general, una secuencia de pulsos de diversa duración (véase la figura 3). Para describir los diversos escenarios que puede presentar esta señal u , se consideran dos parámetros: el tiempo entre dos flancos de subida consecutivos, que corresponden a los instantes de tiempo t_k y t_{k+1} , denotado como T_k ; y el ciclo de trabajo (D_k) dado por la expresión:

$$D_k = \frac{\tau_{s_k}}{T_k}, \quad (3)$$

donde τ_{s_k} es el tiempo que la fuente V_{in} está conectada ($u = 1$).

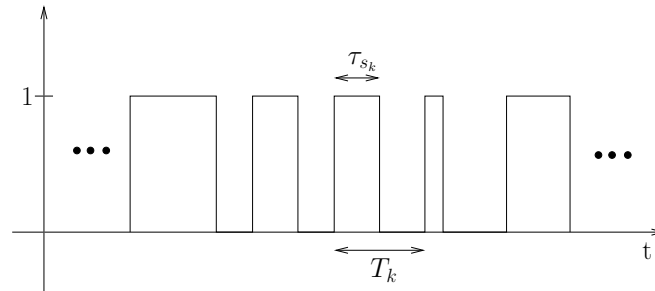


Figura 3: Posición del interruptor u

Para analizar en lazo abierto al convertidor buck comúnmente se considera la señal u como un tren de pulsos de frecuencia constante, y con un ciclo de trabajo constante; por lo que T_k y D_k son también constantes. Cuando el dispositivo es controlado en lazo cerrado, estos parámetros son determinados por la estrategia de control. De acuerdo a cómo afectan a los parámetros (T_k , D_k), los controladores se clasifican en:

- Controladores de frecuencia fija, donde la estrategia de control determina la duración del pulso τ_{s_k} , y el parámetro T_k es igual a una constante T .

- Controladores de frecuencia variable, en los cuales la estrategia de control determina tanto el valor de τ_{s_k} como el de T_k .

En este trabajo modelaremos el interruptor con la expresión (Sira-Ramirez y Ilic (1988)):

$$u = \frac{1 + \text{sign}(\sigma)}{2}, \quad (4)$$

donde σ describe la estrategia de conmutación. En este caso σ es definida por el controlador utilizado. Si esta variable depende únicamente del tiempo se tiene un circuito en lazo abierto, si depende además del estado z describe un circuito con un control en lazo cerrado. La función $\text{sign}(\cdot)$ es la función signo definida en el sentido de Filippov (1988):

$$\text{sign}(v) = \begin{cases} -1, & v < 0; \\ \varepsilon, & v = 0; \\ 1, & v > 0; \end{cases} \quad (5)$$

donde $\varepsilon \in [-1, 1]$.

Note que en el circuito de la Figura 2, la impedancia de carga R es una idealización para representar los elementos que alimenta el convertidor buck. Es común en el diseño considerar R como una impedancia real con un valor nominal. Sin embargo, en la práctica el valor de R es desconocido y en muchos casos es variante en el tiempo, por lo que genera un sistema con incertidumbres paramétricas. Al igual que con la impedancia de carga R , los valores de los demás elementos del convertidor buck presentan incertidumbres, lo cual obliga al uso de un controlador para garantizar que el voltaje de salida presente un comportamiento robusto a estas perturbaciones.

II.3. Modelo Promedio

En la literatura de electrónica de potencia se propone el estudio del convertidor buck a través del modelo promedio, propuesto de manera heurística por Wester y Middlebrook (1972)². En este caso, el modelo en lazo abierto resulta ser lineal. Es común utilizar el modelo promedio para el diseño de controladores de este dispositivo (Agrawal (2001); Mohan *et al.* (2002)).

El modelo promedio describe el comportamiento en estado estacionario del convertidor buck, considerando que la señal u es un tren de pulsos de frecuencia y ciclo de trabajo constante, y que los estados del sistema pueden representarse como la suma de dos señales variantes en el tiempo,

$$z_i = \hat{z}_i(t) + g_i(t), \quad (6)$$

²Se puede demostrar de manera analítica la validez del modelo promedio utilizando la teoría de sistemas perturbados presentada por Khalil (2002)

donde $g_i(t)$ es una señal periódica con media cero y con periodo T , que corresponde al periodo del tren de pulsos u . La señal $\hat{z}_i(t)$ se considera que tiene un periodo mucho más grande que T , por lo que es común que se suponga constante,

$$\hat{z}_i(t) \approx \hat{z}_i. \quad (7)$$

Para obtener el modelo promedio se supone que la variación en el tiempo de los estados entre dos ciclos cercanos de u es despreciable, proponiendo que la dinámica del convertidor buck puede ser modelada por el promedio de los estados durante un ciclo del tren de pulsos, definiéndose el promedio en el k -ésimo ciclo como:

$$\bar{z}_i = \frac{1}{T} \int_0^T [\hat{z}_i(t) + g_i(t)] dt. \quad (8)$$

Dado que se considera que $g_i(t)$ es una señal periódica con media cero y que $\hat{z}_i(t)$ es constante, la expresión (8) se reduce a:

$$\bar{z}_i \approx \hat{z}_i. \quad (9)$$

De una manera similar, el comportamiento promedio de la señal u es:

$$d = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (10)$$

Puesto que si la señal u es un tren de pulsos periódicos, de frecuencia constante, el valor promedio es el mismo para cualquier ciclo y la expresión (10) se transforma en:

$$d = \frac{\tau_s}{T}. \quad (11)$$

La expresión (11) corresponde al ciclo de trabajo D dado por la expresión (3). Se dice entonces que en estado estacionario y en lazo abierto el comportamiento promedio de u es dado por el ciclo de trabajo D .

Las expresiones (7)-(11) se han obtenido considerando que $\hat{z}_i$ es constante. En la práctica, debido a las incertidumbres paramétricas y perturbaciones presentes en el convertidor, $\hat{z}_i(t)$ es una señal variante. Si la frecuencia de $\hat{z}_i(t)$ es tal que $\hat{z}_i(t_k) \approx \hat{z}_i(t_k + T)$, donde t_k es el instante donde ocurre el k -ésimo flanco de subida de u y T su periodo, entonces se puede construir un modelo que describa la dinámica promedio del buck a partir de las expresiones (9)-(11) dado por Mohan *et al.*

(2002):

$$\dot{\bar{z}}_1 = \frac{DV_{in} - \bar{z}_2}{L}, \quad (12a)$$

$$\dot{\bar{z}}_2 = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2/R}{C}. \quad (12b)$$

La expresión (12) es un modelo lineal de segundo orden, el cual ha sido estudiado ampliamente. Del estudio del convertidor buck a través del modelo promedio se obtienen las siguientes expresiones para los valores mínimos de L y C (Agrawal (2001)), usadas ampliamente en el diseño de este convertidor:

$$L > \frac{D'T}{\Delta z_1} \hat{k}_2 \quad (13a)$$

$$C > \frac{D'^2 T^2}{2L \Delta z_2} \hat{k}_2 \quad (13b)$$

donde $D' = 1 - D$, D es el ciclo de trabajo de u , T es el periodo de u , $\hat{k}_2$ es el valor promedio del voltaje de salida esperado y $\Delta z_i, i \in \{1, 2\}$ es el valor del rizo máximo esperado en los estados del sistema.

El modelo promedio, siendo un modelo diferenciable, es utilizado para el diseño de muchos convertidores y, en el caso particular del convertidor buck, es un sistema lineal de segundo orden. Sin embargo, al incluir un lazo de control se cambia la dinámica del convertidor y se pueden presentar fenómenos no lineales que se han reportado desde hace tiempo. Por ejemplo Baillieul *et al.* (1980) y Brockett y Wood (1984) describen resultados experimentales que muestran una dinámica compleja para este circuito. El modelo promedio del circuito buck, al ser lineal, no puede modelar dichos fenómenos no lineales presentes en este convertidor con una ley de control convencional.

II.4. Puntos de equilibrio

Las soluciones de equilibrio de un sistema autónomo dado por la expresión

$$\dot{x} = f(x) \quad (14)$$

se obtienen de las raíces reales del campo vectorial f , es decir, los valores del estado x^* que satisfacen la expresión (Khalil (2002)):

$$f(x^*) = 0. \quad (15)$$

En la literatura se menciona que el convertidor buck presenta un punto de equilibrio, obtenido

mediante la aplicación de (15) al modelo promedio (12), obteniendo el punto de equilibrio

$$(z_1^p, z_2^p) = \left(\frac{DV_{in}}{R}, DV_{in} \right), \quad (16)$$

donde $D \in [0, 1]$. El punto de equilibrio dado por (16) no considera la naturaleza discontinua del convertidor buck, sólo representa el comportamiento promedio en estado estacionario de este convertidor.

En lazo abierto y con la operación de una estrategia de conmutación $u(t)$ representada en forma de un tren de pulsos, como se mencionó anteriormente, el circuito buck resulta en realidad un sistema forzado, por lo que estrictamente la existencia de soluciones de equilibrio se da cuando se satisface la expresión

$$f(t, x^*) = 0 \quad \forall t, \quad (17)$$

situación que en la operación clásica de este dispositivo no se satisface.

Para obtener los puntos de equilibrio del convertidor buck con un esquema de control, considerando el modelo del interruptor dado por la expresión (4), es necesario definir una estrategia de conmutación σ , que en este caso dependerá del estado (corriente y/o voltaje). Para considerar al convertidor buck como un sistema autónomo, es necesario que $\sigma(z)$ no dependa del tiempo de manera explícita. Los puntos de equilibrio del convertidor, considerándolo un sistema autónomo, se obtienen al aplicar la condición (15) al modelo definido por las expresiones (1) y (4), por lo que los puntos de equilibrio deben satisfacer:

$$z_2^p = \left(\frac{1 + \text{sign}(\sigma(z^p))}{2} \right) V_{in}, \quad (18a)$$

$$z_1^p = \frac{z_2^p}{R}. \quad (18b)$$

De la expresión (18b) se observa que el voltaje del capacitor z_2 y la corriente del inductor z_1 se relacionan a través de la resistencia de carga R . A partir de la expresión (18a) se observa que el voltaje en el capacitor z_2 es determinado de manera directa por la estrategia de conmutación.

En esta sección proponemos una ley de control proporcional, que es uno de los esquemas de control más sencillos, por lo que la estrategia de conmutación se define como:

$$\sigma = k_p (\bar{z}_i - z_i), \quad (19)$$

donde la ganancia k_p se propone con valor unitario, $\bar{z}_i$ es una constante convenientemente definida y z_i es alguno de los estados del sistema.

En el caso del convertidor buck se puede proponer una estrategia de conmutación que dependa de cualquiera de los estados. En general, el estado que se desea controlar es el voltaje en el capacitor

z_2 . De la expresión (18b) se observa que al controlar el valor de la corriente z_1 se puede obtener un valor deseado del voltaje z_2 . Es interesante intentar controlar z_1 , dado que la acción de control actúa directamente sobre la dinámica de este estado (véase la expresión (1a)). En este caso, en un esquema de control proporcional con ganancia unitaria que dependa de z_1 se tiene:

$$\sigma = \bar{z}_1 - z_1, \quad \bar{z}_1 = \frac{\bar{z}_2}{R^*}, \quad (20)$$

donde $\bar{z}_2$ es el voltaje de salida deseado y R^* el valor nominal de la resistencia de carga.

Al considerar (20) en (18) el convertidor buck presenta un único punto de equilibrio

$$(z_1^p, z_2^p) = \begin{cases} (0, 0), & \bar{z}_1 \leq 0; \\ \bar{z}_1, \bar{z}_1 R, & 0 < \bar{z}_1 < V_{in}/R; \\ \frac{V_i}{R}, V_i, & V_{in}/R < \bar{z}_1. \end{cases} \quad (21)$$

De (20) y (21) se observa que si $R \neq R^*$, el voltaje de salida no será el deseado. Por lo tanto, para que el voltaje de salida sea el deseado, es necesario conocer el valor exacto de la resistencia de carga. Como ya se mencionó anteriormente, la resistencia de carga en general es desconocida y variante en el tiempo. En consecuencia, utilizar un control que dependa únicamente de la corriente del inductor conduce generalmente a tener un error en estado estacionario, dependiente de la incertidumbre en la carga.

Si la estrategia de conmutación es función del voltaje z_2 se tiene entonces

$$\sigma = \bar{z}_2 - z_2. \quad (22)$$

Considerando (22) en (18) se tiene nuevamente que el convertidor buck presenta un único punto de equilibrio definido como:

$$(z_1^p, z_2^p) = \begin{cases} (0, 0), & \bar{z}_2 \leq 0; \\ \bar{z}_2 \left(\frac{1}{R}, 1\right), & 0 < \bar{z}_2 < V_{in}; \\ V_{in} \left(\frac{1}{R}, 1\right), & \bar{z}_2 \geq V_{in}. \end{cases} \quad (23)$$

A partir de (23) se observa que, cuando se utiliza la estrategia de conmutación dada por la expresión (22), el punto de equilibrio es equivalente al que se obtiene a través del modelo promedio (16). La diferencia es que en la expresión (16) se parte de la hipótesis que la frecuencia de conmutación en el interruptor es constante. En el punto de equilibrio (23) el esquema de conmutación (22) aplicado al modelo del convertidor buck dado por (1)-(4) genera un sistema con un control por modos deslizantes, donde la frecuencia de conmutación no está acotada (Utkin (1992)). Sin embargo, dada la equivalencia del punto de equilibrio (23) con el punto de equilibrio deseado, el esquema de conmutación (22) es utilizado frecuentemente como base de muchos esquemas de control.

Si el esquema de control no contempla alguna restricción para la frecuencia de conmutación del interruptor, es posible que se presente el fenómeno dinámico llamado “modo deslizantes”. Este fenómeno restringe el comportamiento del convertidor, forzándolo a moverse hacia la llamada superficie de discontinuidad en el espacio de estado, caracterizada por la expresión $\sigma(z) = 0$. Una vez en la superficie de discontinuidad, el sistema se desliza hacia el punto de equilibrio. En general, un algoritmo de control por modos deslizantes presenta una gran robustez ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Sin embargo, la señal de control u se caracteriza por tener una frecuencia muy alta, teóricamente infinita, lo cual en el caso real no es deseable, y en el caso de circuitos electrónicos aumenta la potencia disipada de los componentes, la interferencia electromagnética y reduce su vida útil.

Las estrategias dadas por las expresiones (20) y (22), al no incluir ninguna restricción con respecto a la frecuencia de conmutación, inducen en el circuito el fenómeno de modos deslizantes. Con el fin de aprovechar las propiedades de la estrategia de conmutación (22), ésta sirve de base para algunos controladores considerados básicos dentro de los convertidores conmutados. Por ejemplo, el control por histéresis utiliza este esquema de conmutación como argumento de una función histéresis, la cual limita la frecuencia de conmutación. El control por histéresis es considerado un control de frecuencia variable (Mohan *et al.* (2002)).

Una forma alterna para limitar la frecuencia de conmutación es utilizar una señal de modulación $m(t)$, siendo la estrategia de conmutación definida como:

$$\sigma(z, t) = k_p (\bar{z}_2 - z_2) - m(t), \quad (24)$$

donde la ganancia k_p y la señal $m(t)$ se seleccionan de manera adecuada para que el comportamiento en estado estacionario sea el deseado.

Si la señal $m(t)$ se define como un diente de sierra con una frecuencia muy alta, el esquema de conmutación (24) en la literatura se le llama controlador por modulación de ancho de pulso, o PWM por sus siglas en inglés. Algunos autores consideran al bloque PWM como un sistema para adecuar la señal de control y no se presente el fenómeno de modos deslizantes (Navarro-López *et al.* (2008); Angulo *et al.* (2008); Morel *et al.* (2002); Tan *et al.* (2005)). En estos trabajos la estrategia de conmutación se define como:

$$\sigma = u^* \pm m(t) \quad (25)$$

donde u^* es la señal generada por el algoritmo de control. Se puede considerar la estrategia de conmutación (24) como el controlador PWM más sencillo.

El controlador PWM se analiza en detalle en el capítulo 4. Es utilizado como el esquema de control básico para el análisis de la dinámica del convertidor buck en este trabajo de tesis, porque

es el controlador más sencillo con el cual el convertidor buck exhibe una escenario dinámico muy diverso (Hamill y Deane (1992)).

II.5. Modelo Normalizado

En las expresiones (1a) y (1b) se presentan los parámetros C , L , R y V_{in} , los cuales tienen diferencias en sus valores de varios órdenes de magnitud. Así, por ejemplo en un circuito práctico típico la magnitud de C es $47 \times 10^{-6}F$, mientras que L es de $20 \times 10^{-3}H$, R tiene una magnitud de 50Ω y V_{in} tiene una magnitud de $20V$. Para un estudio más sencillo del convertidor buck se propone un modelo normalizado; esta normalización se obtiene a través de la siguiente transformación (Sira-Ramirez (1989a)):

$$x_1 = \frac{z_1}{V_{in} \sqrt{\frac{C}{L}}}, \quad (26a)$$

$$x_2 = \frac{z_2}{V_{in}}. \quad (26b)$$

Al igual que los estados, se transforma el tiempo a través de la expresión:

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}. \quad (27)$$

Aplicando las transformaciones dadas por (26) y (27) al modelo discontinuo dado por la expresión (1) se obtiene el modelo normalizado

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u, \quad (28a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_n} + x_1, \quad (28b)$$

donde

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{d\tau}. \quad (29)$$

El parámetro R_n se calcula por la expresión:

$$R_n = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (30)$$

Al término R_n se le llama factor de calidad; está relacionado con el factor de amortiguamiento del circuito. La corriente de rizo considerando el modelo normalizado es

$$\Delta x_1 = DT \bar{x}_2, \quad (31)$$

y el voltaje de rizo es

$$\Delta x_2 = \frac{(DT)^2}{2} \bar{x}_2. \quad (32)$$

Las expresiones (31) y (32) se obtienen considerando la dinámica seccionalmente lineal del convertidor y que se presenta una sola interrupción por periodo, por lo que, si se usa el ciclo de trabajo D obtenido a través del modelo promedio es posible que se presente un error con respecto a los valores reales.

En este modelo normalizado el voltaje de entrada V_{in} no aparece de manera explícita, pero puede afectar directamente a la estrategia de conmutación. Para ilustrar la presencia de V_{in} considérese el esquema de conmutación (22). Aplicando (26) se tiene que:

$$\sigma = V_{in} k_p (\bar{x}_2 - x_2), \quad (33)$$

donde $\bar{x}_2 = \bar{z}_2 / V_{in}$.

Al utilizar el modelo normalizado del convertidor buck (1), (4) y el esquema de conmutación (22), se puede considerar al voltaje de entrada V_{in} como un factor de ganancia del esquema de control.

Considerando el modelo normalizado (28) y el esquema de conmutación (33), el punto de equilibrio del circuito buck es

$$(x_1^p, x_2^p) = \begin{cases} (0, 0), & \bar{x}_2 \leq 0; \\ \bar{x}_2 \left(\frac{1}{R_n}, 1 \right), & 0 < \bar{x}_2 < 1; \\ \left(\frac{1}{R_n}, 1 \right), & \bar{x}_2 \geq 1. \end{cases} \quad (34)$$

A partir de este punto, en este trabajo la mayor parte del estudio del convertidor se realizará con el modelo normalizado; cuando no sea así se indicará adecuadamente.

II.6. Conclusiones

Al considerar que el modelo promedio dado por la expresión (12) es un sistema lineal de segundo orden, sería deseable poder estudiar la dinámica del convertidor buck con este modelo. Sin embargo, al tener en cuenta que la dinámica reportada en el convertidor buck es más compleja que la que presenta un modelo lineal de segundo orden, ya no es posible considerar el modelo promedio.

Es importante notar que la estrategia de conmutación dada por la expresión (22) genera un punto de equilibrio equivalente al que se obtiene con el modelo promedio (16). Sin embargo, las condiciones de la frecuencia de la señal u son diferentes, siendo la condición de una frecuencia no acotada, por lo que no se utiliza en la práctica. Sin embargo, sirve de base para diseñar diversos controladores utilizados en convertidores conmutados.

Se puede considerar una familia de controladores PWM a todos aquéllos que consideran la estrategia de conmutación (25); esta familia de controladores es utilizada ampliamente en la práctica. Sin embargo, el convertidor buck puede presentar una dinámica muy diversa, incluso con los controladores PWM más sencillos (Hamill y Deane (1992)).

El modelo normalizado se presenta como una herramienta que permitirá simplificar el análisis del circuito buck, al contar con un solo parámetro. Un aportación más del modelo normalizado es que permite considerar al voltaje V_{in} como parte del algoritmo de control como una ganancia, y además que muestra que la señal de referencia $\bar{x}_2$ es afectada por variaciones en el mismo.

Capítulo III

Control por modos deslizantes

III.1. Introducción

La dinámica discontinua del convertidor buck ocasiona que a la salida presente una señal de oscilación, aunque cuando se utiliza como un convertidor CD-CD se desea que el voltaje de salida sea constante. Sin embargo, en la práctica el comportamiento esperado en estado estacionario de los estados del sistema es dado por la expresión:

$$x_i = \hat{x}_i + g_i(t), \quad (35)$$

donde $\hat{x}_i$ es un valor constante, y $g_i(t)$ es una señal periódica, con un valor promedio cero, con una amplitud y una frecuencia determinadas por diseño. A esta señal se le llama señal de rizo.

Del modelo (1) se observa que la dinámica del convertidor buck es controlada por la señal u . En lazo abierto, cuando la señal u es un tren de pulsos con un periodo T constante y un ciclo de trabajo D constante, $\hat{x}_i$ es función del ciclo de trabajo D , y la amplitud de $g_i(t)$ depende del valor de R_n (ver la expresión (28)) y del periodo T . En un escenario libre de perturbaciones y con parámetros constantes, con una selección adecuada de la señal u y del valor de R_n , el comportamiento en estado estacionario se puede determinar exactamente. Sin embargo, como se mencionó en la sección II.1, el convertidor buck es un sistema con incertidumbres paramétricas y variante en el tiempo, por lo que es necesario el uso de un esquema de control para lograr el comportamiento deseado.

En este capítulo se mostrará que con un esquema de control muy simple el convertidor buck presenta el fenómeno dinámico llamado “modos deslizantes”, el cual se caracteriza por forzar al sistema a moverse a una superficie dada por

$$S = \{x \in \mathfrak{R}^n : \sigma(x, t) = 0\}$$

donde $\sigma : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, y x es el estado del sistema, S es llamada superficie de discontinuidad. Una

vez que el sistema alcanza la superficie S , el sistema se desliza por ésta hasta alcanzar el punto de equilibrio deseado. Es importante mencionar que el sistema no presentará el fenómeno de modos deslizantes para cualquier superficie de discontinua S , y que no necesariamente se presenta a lo largo de toda la superficie. En realidad, este fenómeno se presenta en el subconjunto $S' \subset S$, donde S' se caracteriza de la siguiente manera,

$$S' = \{x \in S | \sigma \dot{\sigma} < 0\}. \quad (36)$$

La mayor ventaja de los controladores por modos deslizantes es que pueden presentar una gran robustez a perturbaciones y variaciones paramétricas. Sin embargo, este tipo de controladores presentan una desventaja muy seria al exhibir “chattering”, que es el nombre en inglés que describe una oscilación de frecuencia teóricamente infinita y amplitud finita, que se presenta en muchas de las implementaciones de sistemas con control con modos deslizante. Esta oscilación es causada por la conmutación de alta frecuencia del controlador al excitar dinámicas no modeladas en lazo cerrado (Utkin (1992)).

En la sección II.4 se propuso el esquema de conmutación (22), que presenta un punto de equilibrio equivalente al del modelo promedio, por lo que este esquema de conmutación (22) sirve de base a muchos controladores prácticos. Por ello en la siguiente sección se estudia la estabilidad de este convertidor con dicho esquema, el cual se puede considerar como un caso de regulación. En la sección III.3 se estudia el caso de seguimiento que produce el esquema de conmutación (24). El objetivo de estudiar este caso es mostrar que al agregar una señal periódica $h(t)$ suave, de baja frecuencia y pequeña amplitud en el esquema de conmutación, se produce el comportamiento en estado estacionario dado por (35) y no se garantiza, por otra parte, que la frecuencia de conmutación esté acotada.

III.2. Regulación

Consideremos el esquema de control definido por:

$$\sigma = \bar{z}_2 - z_2 = V_{in} (\bar{x}_2 - x_2), \quad (37)$$

donde la señal de referencia $\bar{x}_2$ se define como:

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{z}_2}{V_{in}} \quad (38)$$

$\bar{z}_2$ es el valor deseado de voltaje de salida. La superficie de discontinuidad se define como

$$S = \{x \in \mathcal{R}^2 | x_2 = \bar{x}_2\}.$$

Considerando el modelo discontinuo (1)-(4) y la estrategia de conmutación (37), se tiene que este convertidor exhibe un modo deslizante de segundo orden. Esto puede mostrarse a partir del hecho de que la señal de control u aparece de manera explícita hasta la segunda derivada de la función σ^1 (Perruquetti y Barbot (2002)):

$$\ddot{\sigma}(x) = V_{in} \left(\frac{x_1}{R_n} + \left(1 - \frac{1}{R_n^2} \right) x_2 - u \right). \quad (39)$$

Dado que el control (39) ocasiona que el circuito buck exhiba un modos deslizante de segundo orden, se tiene que la superficie de discontinuidad no presenta el fenómeno de deslizamiento, y éste sólo se presenta cuando el sistema alcanza el punto de equilibrio. El comportamiento del sistema alrededor de S se puede conocer a través del signo de $\sigma\dot{\sigma}$, si $\sigma\dot{\sigma} > 0$ el sistema se aleja de S y si $\sigma\dot{\sigma} < 0$ el sistema se acerca a S . De (37) se tiene que $\dot{\sigma}$ es

$$\dot{\sigma}(x) = -x_1 + \frac{x_2}{R_n}. \quad (40)$$

De la expresiones (37) se tiene que el comportamiento de σ es

$$\sigma \begin{cases} > 0 & \text{si } x_2 < \bar{x}_2, \\ = 0 & \text{si } x_2 = \bar{x}_2, \\ < 0 & \text{si } x_2 > \bar{x}_2. \end{cases} \quad (41)$$

Considerando (40), el comportamiento de $\dot{\sigma}$ es

$$\dot{\sigma} \begin{cases} > 0 & \text{si } x_1 < x_2/R_n, \\ = 0 & \text{si } x_1 = x_2/R_n, \\ < 0 & \text{si } x_1 > x_2/R_n. \end{cases} \quad (42)$$

Utilizando las expresiones (41)-(42) en la figura 4 se muestra un esquema del comportamiento del sistema alrededor de la superficie de discontinuidad S . De la figura 4 se observa que la superficie S es de conmutación; es decir, en ciertas direcciones el sistema se dirige a la superficie y una vez que la alcanza la atraviesa y se aleja de ella.

En el caso del control para regulación el interés es mostrar que el sistema converge al punto de equilibrio de interés. En el caso del convertidor buck el punto de equilibrio que nos interesa analizar es el punto equivalente al que se obtiene con el modelo promedio, dado por la expresión (34).

Un primer análisis aproximado de la estabilidad del punto de equilibrio de interés, que puede incluso representar un comportamiento más realista de este circuito, se puede obtener al definir la

¹En esta sección seguiremos usando el nombre de estrategia de conmutación para σ , aunque en la literatura de sistemas con control por modos deslizantes recibe el nombre de superficie de discontinuidad.

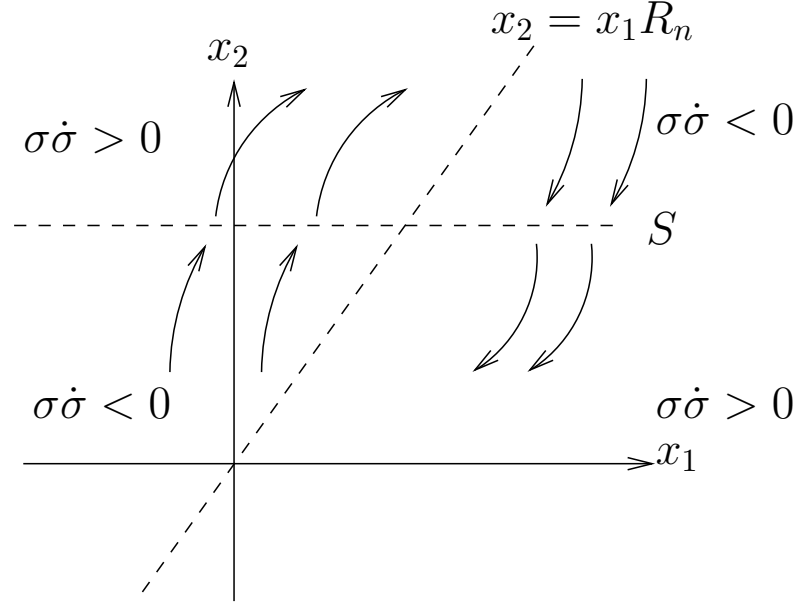


Figura 4: Esquema del comportamiento del convertidor buck alrededor de la superficie de discontinuidad S .

función $\text{sign}(\sigma)$ (5) como:

$$\text{sign}(\sigma) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} [\tanh(\delta \sigma)]. \quad (43)$$

Considerando (43), los polos de la aproximación lineal del convertidor buck alrededor del punto de equilibrio (34) son las raíces del polinomio:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{R_n} \lambda + 1 + \frac{V_{in}}{2} \delta, \quad (44)$$

que tienen parte real negativa si los parámetros R_n , V_{in} y δ son positivos, lo que sucede en la práctica. Por otra parte, al ser un sistema autónomo de segundo orden permite la aplicación del método de Bendixson (Wiggins (1990)), de donde se puede afirmar que este sistema no presenta ciclos límite. En consecuencia, al tener un único punto de equilibrio estable, éste es globalmente estable.

Un análisis más exacto de la estabilidad del punto de equilibrio (34) requiere utilizar el modelo discontinuo. El estudio de sistemas con control por modos deslizantes de segundo orden se ha realizado en general en el contexto de sistemas mecánicos (Perruquetti y Barbot (2002); Rosas Almeida *et al.* (2007)), por lo que resulta conveniente encontrar una nueva representación que permita estudiar al convertidor buck utilizando la teoría desarrollada.

Definiendo unas nuevas variables como:

$$y_1 = \sigma, \quad (45a)$$

$$y_2 = \dot{\sigma}, \quad (45b)$$

entonces, por (37) y (26) se tiene

$$y_1 = V_{in}(\bar{x}_2 - x_2), \quad (46a)$$

$$y_2 = V_{in} \left(-x_1 + \frac{x_2}{R_n} \right). \quad (46b)$$

El convertidor buck en lazo cerrado con las variables (46), es descrito por la expresión:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (47a)$$

$$\dot{y}_2 = -ay_1 - by_2 - c \operatorname{sign}(y_1) + \varepsilon, \quad (47b)$$

donde

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{R_n}, \quad c = \frac{V_{in}}{2} \quad y \quad \varepsilon = V_{in} \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{2} \right).$$

Observe que si $c = 0$ y $\varepsilon = 0$, entonces el sistema (47) es lineal y asintóticamente estable, donde la matriz del sistema está dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Sea ahora

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad (49)$$

la matriz definida positiva que es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + PA = -I$. Esto permite encontrar una función de Lyapunov que garantice la estabilidad del punto de equilibrio (Perruquetti y Barbot (2002)). Sin embargo, en la práctica la “perturbación” ε es diferente de cero por lo que, suponiendo que ε se encuentra acotada por una constante ρ_0 , $|\varepsilon| \leq \rho_0$, entonces el convertidor buck descrito por (47) tiene la misma forma propuesta en (Rosas Almeida *et al.* (2007)), donde se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1 (Rosas Almeida *et al.* (2007)) Sea el sistema (47). Si

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{a\rho_0}{\theta} \right) \quad (50)$$

para algún $0 < \theta < 1$, entonces el origen del espacio de estados es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable, en el sentido de Lyapunov.

Además, es posible demostrar que la convergencia es exponencial en una región cerca del origen, utilizando el siguiente teorema, el cual puede ser aplicado incluso cuando ε es una función variante en el tiempo, $\varepsilon(t)$.

Teorema 2 Si $c > |\varepsilon(t)|$, $c > |(2/b)d\varepsilon(t)/dt - \varepsilon(t)|$ para todo $t > 0$, entonces el origen del sistema (47) es un punto de equilibrio exponencialmente estable. Es decir, existe una vecindad Λ del origen, y las constantes positivas α^+ , α^- , L^+ , L^- tal que, para cualquier $(y_1(0), y_2(0) \in \Lambda)$, se satisface

$$L^- e^{(-\alpha^- t)} [|y_1(0)| + y_2^2(0)] < |y_1(t)| + y_2^2 < L^+ e^{(-\alpha^+ t)} [|y_1(0)| + y_2^2(0)], \quad (51)$$

para todo $t \geq 0$.

La demostración de estos teoremas se encuentra en Rosas Almeida *et al.* (2007).

En el caso del convertidor buck se tiene que los valores propios de la matriz P son los siguientes,

$$\lambda(P) = r(R_n r \pm 1/2), \quad (52)$$

donde

$$r = \sqrt{1 + 1/(4R_n^2)}.$$

Entonces, de (50), la siguiente desigualdad debe ser satisfecha para que el origen del sistema (47) sea asintóticamente estable,

$$\left| \bar{x}_2 - \frac{1}{2} \right|_{\max} < \frac{\theta}{4r(R_n r + 1/2) \sqrt{\frac{R_n r + 1/2}{R_n r - 1/2}}}, \quad (53)$$

para algún $\theta \in (0, 1)$. Es evidente que la desigualdad (53) siempre se cumple para valores de $\bar{x}_2$ cercanos a $1/2$. Dado que en este trabajo estamos considerando que $0 < \bar{x}_2 < 1$, entonces se tiene

$$c = \frac{V_{in}}{2} \geq V_{in} \left| \bar{x}_2 - \frac{1}{2} \right|_{\max}. \quad (54)$$

Por lo tanto, se tiene que para valores de $\bar{x}_2$ cercanos a $1/2$ el Teorema 1 garantiza la estabilidad global asintótica del origen, y el Teorema 2 asegura la convergencia exponencial una vez que los estados están cerca del origen.

El convertidor buck dado por (47) se puede considerar como un sistema con un control por modos deslizantes de segundo orden (Perruquetti y Barbot (2002)), por lo que no presenta el fenómeno de chattering hasta que el sistema llega al punto de equilibrio. Para ilustrar el comportamiento

del convertidor buck cuando se considera el esquema de conmutación (37), se utiliza un ejemplo numérico con los parámetros²; $R_n = 985/1393$, $V_{in} = 20$ y $\bar{x}_2 = 1/2$.

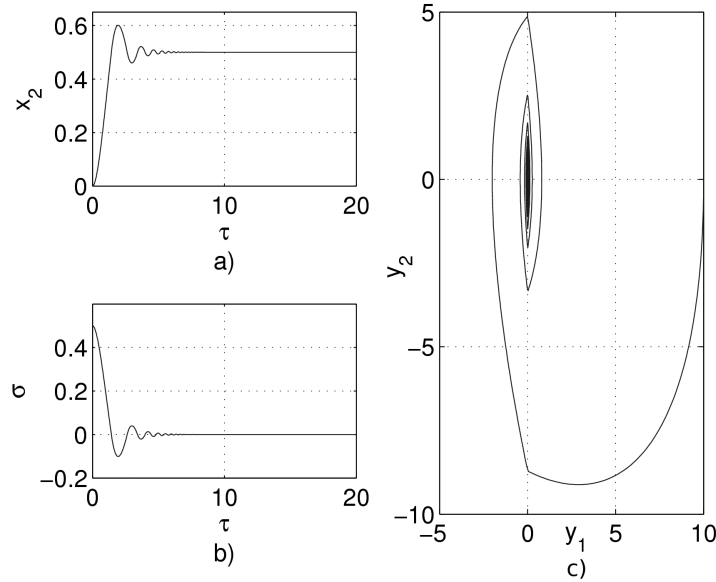


Figura 5: Convertidor buck con el esquema de control (37): a) Evolución en tiempo normalizado de x_2 , b) Evolución en tiempo normalizado de σ , c) Retrato de fase de las variables (y_1, y_2) .

En la figura 5.a se muestra la evolución en tiempo normalizado del voltaje del capacitor x_2 . Se observa que en un tiempo corto se converge a la superficie de discontinuidad definida por $\sigma = (\bar{x}_2 - x_2) = 0$. Además, en la figura 5.b se muestra que σ converge a 0. Finalmente, en la figura 5.c se muestra la evolución en el espacio de estado del convertidor buck en las variables (y_1, y_2) y se observa que el sistema converge al origen.

La desigualdad (53) sólo garantiza la convergencia al origen del sistema (47); no permite conocer el comportamiento del sistema cuando no se cumple dicha desigualdad. Para ilustrar el comportamiento cuando la desigualdad (53) no se cumple, usaremos un ejemplo numérico con los mismos valores que el anterior, sólo considerando el voltaje de referencia para el capacitor $\bar{x}_2 = 7/8$. En la figura 6.a se muestra la evolución de $\sigma = \bar{x}_2 - x_2$, que aparentemente converge a una región cercana a 0. Sin embargo, en la figura 6.b se muestra un acercamiento en el que se observa un error en estado estacionario³.

En el convertidor buck se desea que el estado converja al punto de equilibrio (34). De la gráfica de la figura 6.b se puede conjeturar que el convertidor no convergerá al punto de equilibrio deseado para valores de $\bar{x}_2$ muy diferentes a $1/2$. Para ilustrar lo anterior, se utiliza un ejemplo numérico con los mismos valores que el anterior, solo que se considera que $\bar{x}_2 \in [1/10, 9/10]$. Una vez que el

²Los parámetros del sistema sin normalizar son: $L = 10mH$, $C = 2\mu F$, $R = 50\Omega$ y $\bar{z}_2 = 10$. Los valores de L y C son calculados con (13a) y (13b), respectivamente, considerando $T = 50\mu s$.

³Las simulaciones numéricas para obtener estas gráficas se realizaron con un error relativo de 10^{-10} .

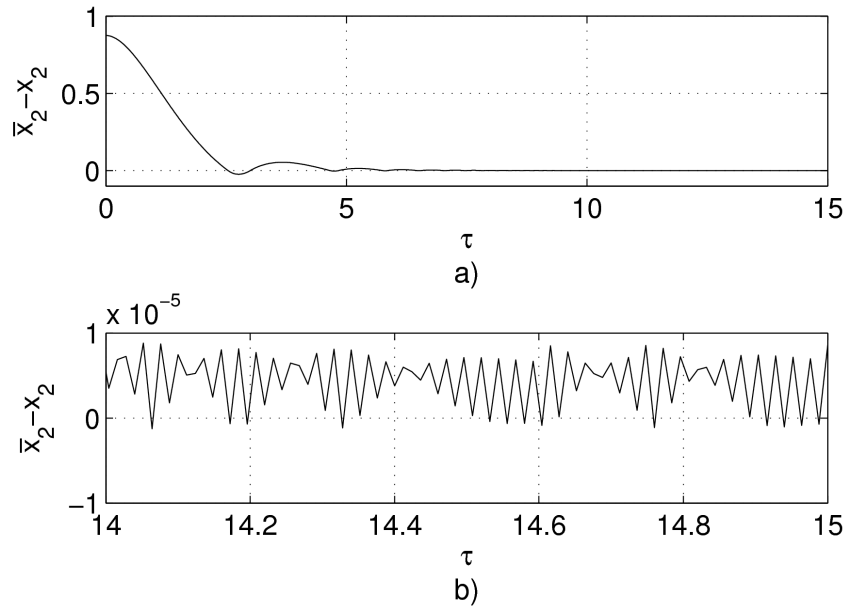


Figura 6: a) Evolución en tiempo de la diferencia $\bar{x}_2 - x_2$ con $\bar{x}_2 = 7/8$, b) Acercamiento de la evolución en tiempo de la diferencia $\bar{x}_2 - x_2$.

sistema llegó a su estado estacionario, para cada valor específico de $\bar{x}_2$ se calculó el valor promedio de x_2 , denotado $\hat{x}_2$. Entonces, si el sistema converge al punto de equilibrio deseado la diferencia $\bar{x}_2 - \hat{x}_2$ debe ser igual a cero.

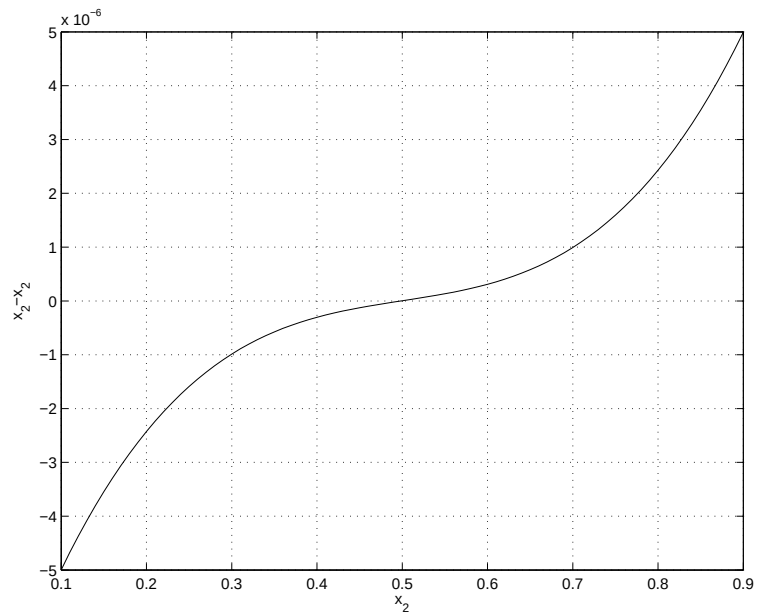


Figura 7: La diferencia $\bar{x}_2 - \hat{x}_2$

En la gráfica de la figura 7 se muestra la diferencia $\bar{x}_2 - \hat{x}_2$. Se observa que únicamente es cero

para el valor de $\bar{x}_2$ igual a $1/2$. Sin embargo, el error presente en el sistema es muy pequeño y estos resultados son obtenidos en un ambiente ideal. En la práctica, no es fácil medir este error.

III.3. Seguimiento

Es importante hacer notar que el efecto del “chattering” presente en cualquier sistema con un control por modos deslizantes no es deseable en los convertidores conmutados, ya que produce un desgaste excesivo en los componentes del mismo y un aumento en la potencia disipada en el transistor utilizado como interruptor. Por estas razones, en la práctica se busca fijar la frecuencia de conmutación de la señal de control u . Como se menciona en la sección II.4, una solución común en la práctica es agregar una señal periódica, llamada señal de modulación $h(t)$, a la estrategia de conmutación (37), generando la nueva estrategia

$$\sigma = V_{in} (x_2^* - x_2), \quad (55)$$

donde

$$x_2^* = \bar{x}_2 - h(t). \quad (56)$$

Sin embargo, (55) indica que bajo ciertas condiciones de la señal $h(t)$, el convertidor buck se puede considerar de nuevo como un sistema con un control por modos deslizantes con un objetivo de control de seguimiento, donde se desea que el estado x_2 siga la señal de referencia x_2^* , dada por (56).

Para ilustrar lo anterior obsérvese que utilizando las variables (45) con la estrategia de conmutación (55) se tiene el convertidor buck modelado por (47), donde en este caso la variable $\varepsilon(t)$ está dada por

$$\varepsilon(t) = V_{in} \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{2} - h - \frac{1}{R_n} \dot{h} - \ddot{h} \right). \quad (57)$$

Si se define $\bar{x}_2 = \delta + 0,5$ y se satisface

$$\left| h + \frac{\dot{h}}{R_n} + \ddot{h} \right| < \rho, \quad (58)$$

donde ρ es una constante positiva, entonces la aplicación del Teorema 1 conduce a afirmar que el error de seguimiento $x_2^* - x_2$ será cero en estado estacionario si se cumple

$$\alpha < \frac{\theta}{4r \left(R_n r + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{R_n r + 1/2}{R_n r - 1/2}}}, \quad (59)$$

donde $\alpha = \max \{ |\delta|, \rho \}$, para algún $\theta \in (0, 1)$. Es importante notar que (58)-(59) definen límites

para la frecuencia y la forma de la señal de modulación $h(t)$.

Por ejemplo, si consideramos que $h(t) = \beta \sin(\omega t)$, entonces

$$\varepsilon = V_{in} \left(\delta + \beta \left[(\omega^2 - 1) \sin(\omega t) - \frac{\omega}{R_n} \cos(\omega t) \right] \right). \quad (60)$$

El error de seguimiento será cero en estado estacionario si

$$|\delta| + \beta \left(|1 - \omega^2| + \frac{\omega}{R_n} \right) < \frac{\theta}{4r \left(R_n r + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{R_n r + 1/2}{R_n r - 1/2}}}, \quad (61)$$

para algún $\theta \in (0, 1)$. Obsérvese que $\delta = 0$ (que corresponde a $\bar{x}_2 = 1/2$) y $\omega = 1$ garantizan las mejores condiciones para tener un seguimiento perfecto.

Para ilustrar lo anterior, en la figura 8 se muestra la respuesta del convertidor buck (47) con la estrategia de conmutación (55)-(56) y los parámetros: $R_n = 985/1393$, $V_{in} = 20$, $\bar{x}_2 = 1/2$ y $h(t) = 0,05 \sin(t)$. Se observa en la figura 8.a que x_2 converge a la señal de referencia, en la figura 8.b se muestra que el error de seguimiento converge a cero.

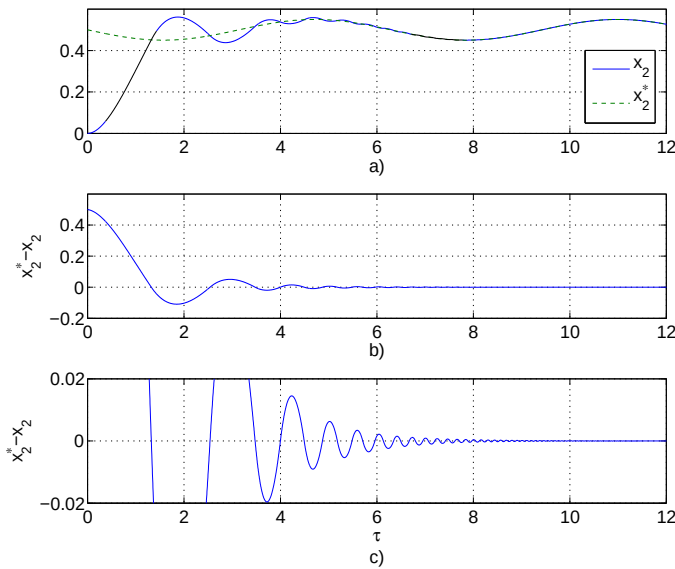


Figura 8: Evolución en tiempo de x_2 y x_2^* a), del error $x_2^* - x_2$ b), un acercamiento del error $x_2^* - x_2$ c).

Con la estrategia de conmutación (55)-(56) y $h(t) = 0,05 \sin(t)$ se logra que x_2 converja a la señal de referencia x_2^* y, como se muestra en la figura 9.a, que el sistema (47) tenga en el origen un punto de equilibrio. Sin embargo, al observar la señal de control u de la figura 9.b se observa que presenta el comportamiento esperado de un sistema con un control por modos deslizantes y que su frecuencia es muy alta. En la figura 9.c se muestra el espectro de la señal u , observándose que

realmente tiene componentes de muy alta frecuencia. Es importante recordar que en este trabajo se utiliza un tiempo normalizado, por lo que en el caso de la figura 9.c la máxima frecuencia mostrada correspondería a una frecuencia de 2,474Mhz.

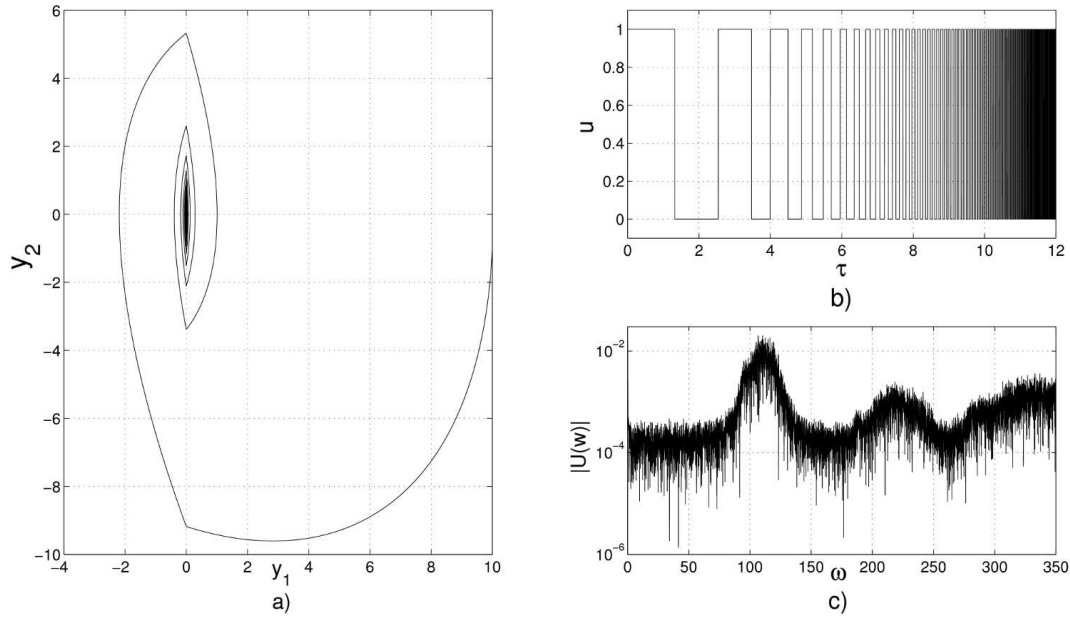


Figura 9: a) Retrato de fase del sistema (47). b) Señal de control u . c) Espectro de la señal de control u .

Es importante también hacer notar que agregar una señal de modulación no garantiza que la frecuencia de conmutación disminuya. Además, su amplitud y frecuencia cambian las condiciones de estabilidad del convertidor buck visto como un sistema con un control por modos deslizantes.

III.4. Conclusiones

En este capítulo, al analizar la estabilidad del convertidor buck cuando se utiliza un control por modos deslizantes, se observó en el caso de regulación que $\bar{x}_2 = 1/2$ garantiza la convergencia al valor deseado, y también que sólo para valores de $\bar{x}_2$ cercanos a $1/2$ se sigue garantizando la convergencia. Esto no quiere decir que el sistema no converge a algún valor, sólo que no se garantiza que x_2 converja a $\bar{x}_2$. Como todo sistema con un control por modos deslizantes, se tiene que la frecuencia de conmutación de la señal de control u no es acotada. El agregar una señal de modulación $h(t)$ como se hace en la práctica no es una condición suficiente para garantizar que la frecuencia de conmutación de la señal de control u sea acotada. En efecto, si $h(t)$ es una señal periódica suave, de baja frecuencia y pequeña amplitud, se puede tener que x_2 siga perfectamente a la señal $x_2^*(t)$, por lo que en estado en estacionario el convertidor buck presenta el comportamiento deseado, pero la señal u sigue exhibiendo una frecuencia de conmutación muy alta.

Capítulo IV

Control PWM

IV.1. Introducción

En el capítulo anterior se discutieron las condiciones para que el convertidor buck, con un control por modos deslizantes, el voltaje salida converja al voltaje de referencia. Dadas las propiedades de robustez a incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, aunado a la sencillez del algoritmo de control, el uso de un control por modos deslizante pareciera una buena opción. Sin embargo, el problema del chattering ocasiona que la frecuencia de conmutación del interruptor sea muy alta, algo no deseable, ya que degrada la vida útil de los elementos del circuito y aumenta la potencia disipada.

En la sección II.4 se comentó que en la práctica es común agregar una señal de modulación $h(t)$ para fijar la frecuencia de conmutación. En la sección III.3 se mostró que esta condición no es suficiente, ya que al agregar una señal suave de pequeña amplitud y frecuencia baja, se sigue presentando el modo deslizante y con una alta frecuencia de conmutación. En la práctica es común utilizar un bloque PWM para adecuar la señal del control y controlar la frecuencia de conmutación.

A la fecha se ha reportado la presencia de oscilaciones n-periódicas, oscilaciones cuasi periódicas y comportamiento caótico en el convertidor buck (El-Aroudi *et al.* (2005)). En estos trabajos previos es común el uso de un bloque PWM, así como, la presencia de otros dispositivos de protección para compensar dinámicas no consideradas en el diseño del algoritmo de control. En general, a todos aquellos esquemas de control que utilizan un bloque PWM se les puede clasificar como controladores PWM. El análisis realizado en algunos de estos trabajos previos, se basa en el uso de mapeos discretos obtenidos de la hipótesis que se presenta una oscilación de cierto tipo, cuando el mapeo se vuelve inestable se considera que el convertidor cambia su comportamiento dinámico. Otro análisis realizado en la literatura revisada, es considerar el modelo promedio para el diseño del controlador, sin embargo, dado que este modelo no puede representar toda la dinámica del convertidor, su uso como parte del análisis no permite considerar toda la dinámica posible.

En este capítulo se discuten condiciones para que el convertidor presente una oscilación 1-periódica en el voltaje del capacitor, así como, una frecuencia de conmutación fija. Las condiciones que se proponen se obtienen utilizando la naturaleza discontinua del convertidor (véase sección II.2). El análisis se divide en dos partes; en la primera se estudian las condiciones necesarias para que el convertidor con un control ideal presente una órbita 1-periódica, en la segunda se considera el control PWM y las condiciones necesarias para que siga presentándose la órbita 1-periódica.

En este trabajo no se consideran los elementos de protección normalmente utilizados en la práctica, pues dichos elementos, tales como “flip-flops”, bloques de saturación, histéresis, entre otros, son elementos no lineales que aumentan la complejidad del controlador. Por otra parte, aunque estos elementos no lineales pueden inducir fenómenos dinámicos complejos, el comportamiento caótico puede generarse por mecanismos todavía más simples, que no requieren de ellos.

En la sección IV.2 se exploran las condiciones que garantizan la existencia del comportamiento en estado estacionario dado por (35), al agregar una señal periódica $h(t)$ al esquema de conmutación, donde la frecuencia y la amplitud de la señal de rizo $g_i(t)$ se calculan a partir de ciertos parámetros de diseño. Se utiliza un diente de sierra como la señal de modulación $h(t)$, normalmente usada en los controles PWM, se considera el esquema de conmutación conocido como “control por voltaje”, uno de los más simple. El análisis realizado considera que el sistema es seccionalmente lineal, y se apoya en la teoría de control por modos deslizantes para mostrar que no se presenta el fenómenos de modos deslizantes y garantizar que solo existe una conmutación del interruptor por ciclo de la señal de modulación. Las condiciones presentadas en esta sección no son reportadas en la literatura revisada.

En la sección IV.3, se realiza una comparación entre el ciclo de trabajo necesario para que un control ideal garantice la existencia de una órbita 1-periódica a la salida del convertidor y las condiciones utilizadas en el diseño clásico dadas en la literatura. Se considera el valor promedio del voltaje de salida por varios ciclos, para mostrar que el control PWM sigue cumpliendo su objetivo si se considera más de un ciclo.

Finalmente, se dan algunas conclusiones en la última sección de este capítulo.

IV.2. Órbita 1-periódica

Cuando se utiliza el circuito buck como un convertidor de CD-CD, un esquema de control utilizado ampliamente es el controlador PWM. Existen diferentes implementaciones de este controlador; en este trabajo se considera al controlador PWM como un controlador de frecuencia fija, por lo que se espera que en estado estacionario exista un cambio en la posición del interruptor en los instantes $t_k = kT$, donde $k = 0, 1, 2, \dots$, y que se dé otro cambio de posición en el interruptor en el intervalo $(t_k, t_k + T)$ (Mohan *et al.* (2002)). En estado estacionario se espera que los estados del

convertidor buck presenten una órbita 1-periódica¹ con un periodo T .

El período T es considerado uno de los parámetros de diseño. Este debe ser lo suficientemente pequeño para que la amplitud de la señal de rizo $g_i(t)$ sea pequeña y lo suficientemente grande para no producir un desgaste importante en los componentes del convertidor y un bajo nivel de interferencia electromagnética (EMI) (Agrawal (2001)).

Cuando se diseña un controlador PWM con el modelo promedio, se considera un controlador de frecuencia fija y que en estado estacionario se cumpla la condición:

$$D = \bar{x}_2. \quad (62)$$

El periodo T , el rizo Δz_i y la impedancia de carga R dependen de la aplicación. Los valores de la inductancia L y del capacitor C son calculados a partir de la expresión (13). Sin embargo, en la práctica ha sido demostrado que bajo ciertas condiciones no se presenta el comportamiento en estado estacionario dado por (35) (Baillieul *et al.* (1980); Brockett y Wood (1984); Deane y Hamill (1990)), por lo que el control PWM no garantiza el comportamiento deseado en estado estacionario para cualquier conjunto de parámetros. En esta sección estudiaremos las condiciones bajo las cuales el convertidor buck con un control PWM presenta el comportamiento deseado en estado estacionario.

La estrategia de conmutación del controlador PWM es

$$\sigma = V_{in} (k_p (\bar{x}_2 - x_2) - h(t)) \quad (63)$$

donde $\bar{x}_2$ es el voltaje promedio deseado en el capacitor, k_p es una ganancia², y la señal de modulación $h(t)$ se define como:

$$h(t) = F \Delta h [t - \text{int}(t)] + V_l, \quad (64)$$

donde $\Delta h = (V_u - V_l)/V_{in}$, $V_u > V_l$ son los valores inferior y superior, respectivamente, de la señal h , $F = 1/T$, T es el período, e $\text{int}(t)$ es una función que regresa la parte entera de t . En la figura 10 se muestra el comportamiento deseado en un controlador PWM, para las señales $\bar{x}_2 - x_2$, h y $u(t)$. Se observa que para que se presente el comportamiento deseado en el convertidor buck, es necesario que la señal de rizo $g_2(t)$ sea periódica, con periodo T .

Aunque, en la práctica es común que la señal $h(t)$ no tenga una media cero, dándose la condición $V_u > V_l > 0$, si la señal de modulación $h(t)$ tiene una media cero esto permite considerar que $V_l = -V_u$. Esto no invalida a la estrategia de conmutación (63) y permite simplificar el análisis. En

¹Una órbita periódica corresponde a una curva cerrada en el espacio de estado que describe la evolución de un sistema dinámico en estado estacionario. El periodo de una órbita es el tiempo que tarda en regresar el estado a un mismo punto sobre la trayectoria. En el caso de sistemas en el plano, se dice que una órbita es k -periódica cuando la curva rodea k veces algún subconjunto de puntos encerrados por la órbita.

²Si se considera $k_p = 1$ se tiene el esquema de conmutación presentado en capítulo anterior.

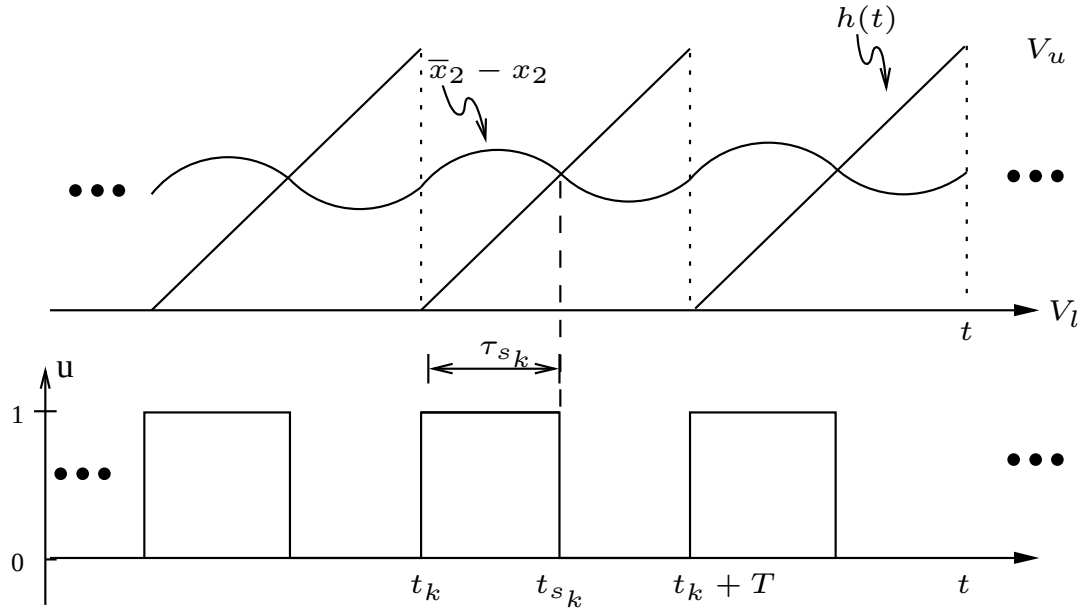


Figura 10: Evolución en tiempo de las señales en el control PWM.

caso que la media de la señal de modulación $h(t)$ sea diferente de 0, basta considerarla como un error constante en estado estacionario que se suma a la señal referencia $\bar{x}_2$.

La prueba de estabilidad presentada en la sección anterior no puede ser utilizada con este control PWM, ya que la señal de modulación (64) no es derivable, y en general con este control no se pretende que la señal de rizo $g_2(t)$ siga la forma de onda de $h(t)$, sino solamente que tenga la misma frecuencia.

La idea básica del control PWM surge del comportamiento en lazo abierto del convertidor buck, y sólo trata de garantizar que se cumpla que el promedio del voltaje del capacitor $\hat{x}_2$ sea igual al voltaje de referencia $\bar{x}_2$, a través de controlar el ciclo de trabajo D , tratando de acotar la amplitud de $|g_2(t)|_{\max} \leq \delta$, donde δ es determinado mediante una selección adecuada de la frecuencia de $h(t)$. Además se busca que la frecuencia de las diversas señales presentes en el circuito sean iguales a la frecuencia de la señal $h(t)$.

En la práctica, al ser el convertidor buck un sistema con incertidumbres paramétricas y variable en el tiempo, la estrategia de conmutación (55)-(56) no garantiza que las frecuencias sean iguales, por lo que es común utilizar un circuito balanza “flip-flop” para forzar el cambio del estado en los instantes t_k . Como demuestran Myles y Di Bernardo (2000), este flip-flop introduce una dinámica no lineal complicada, dado que su modelo corresponde a una función de histéresis variante en el tiempo y en el estado. El no incluir el flip-flop permite considerar únicamente la naturaleza básica del circuito, siendo el esquema del convertidor buck, mostrado en la figura 11, el que analizaremos enseguida.

A continuación analizaremos las condiciones que se deben satisfacer para que, en estado esta-

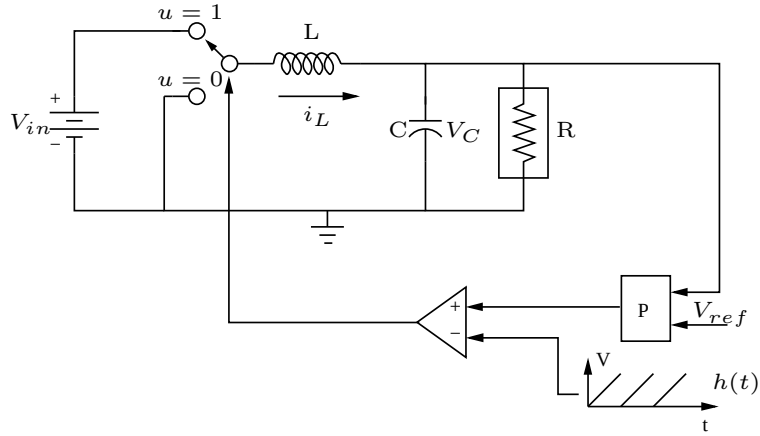


Figura 11: Esquema del convertidor buck con un control PWM

cionario, el convertidor buck con un control ideal presente el comportamiento deseado; es decir, que $g_2(t)$ sea una señal periódica con periodo T . El comportamiento del convertidor puede ser modelado por la expresión:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + B_1 u, & \sigma(x, t) > 0; \\ Ax + B_2 u, & \sigma(x, t) \leq 0; \end{cases} \quad (65)$$

donde $\sigma(x, t)$ es definido por (55), (56) y (64), y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{R_n} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En el k -ésimo intervalo, el sistema (65) toma la forma

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + B_1, & t_k \leq t < t_{s_k}; \\ Ax, & t_{s_k} \leq t < t_k + T; \end{cases} \quad (66)$$

donde $t_{s_k} = t_k + \tau_{s_k}$, $\tau_{s_k} \in (0, T)$ corresponde al instante de conmutación (véase la figura 10).

La acción del lazo de retroalimentación determina el instante de conmutación t_{s_k} , en el cual se cumple la condición

$$\sigma(x, t_{s_k}) = V_{in} (k_p (\bar{x}_2 - x_2(t_{s_k})) - h(t_{s_k})) = 0. \quad (67)$$

Si en estado estacionario el convertidor buck presenta una órbita 1-periódica, el sistema (65) debe satisfacer

$$x(t_k + T) = x(t_k). \quad (68)$$

El sistema (66) es seccionalmente lineal, por lo que al instante de conmutación t_{s_k} el estado es

dado por

$$x(t_{s_k}) = e^{A(t_{s_k}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{s_k}} e^{A(t_{s_k}-\xi)}B_1d\xi, \quad (69)$$

mientras que en el instante $t_k + T$ el estado está dado por

$$x(t_k + T) = e^{A(t_k+T-t_{s_k})}x(t_{s_k}). \quad (70)$$

Considerando (69) en (70), se tiene que el estado en el instante $t_k + T$ es

$$\begin{aligned} x(t_k + T) &= e^{AT}x(t_k) + e^{A(t_k+T)} \int_{t_k}^{t_{s_k}} e^{-A\xi}d\xi B_1 \\ &= e^{AT}x(t_k) + e^{AT} \int_0^{\tau_{s_k}} e^{-A\phi}d\phi B_1, \end{aligned} \quad (71)$$

donde $\phi = \xi - t_k$. Si se considera que $x(t_k) = x_k$, $x(t_k + T) = x_{k+1}$ y observando que la matriz A es no singular, el estado en el instante $t_k + T$ es dado por

$$x_{k+1} = e^{AT} \left[x_k - \left(e^{-A\tau_{s_k}} - I \right) A^{-1}B_1 \right], \quad (72)$$

donde I es la matriz identidad.

En estado estacionario, sin considerar perturbaciones e incertidumbres paramétricas, si el estado exhibe una órbita 1-periódica se tiene que τ_{s_k} es una constante (denotada como τ_s) y la condición (68) se debe cumplir. Entonces se tiene que el estado en el instante t_k es

$$x_k = -M(A, T, \tau_s)e^{A(T-\tau_s)}A^{-1}B_1, \quad (73)$$

donde

$$M(A, T, \tau_s) = \left(I - e^{AT} \right)^{-1} \left(I - e^{A\tau_s} \right). \quad (74)$$

Dada alguna matriz constante A , y los parámetros T , τ_s , la expresión (73) da los valores en estado estacionario, en el instante t_k , del estado del convertidor buck en lazo abierto cuando presenta una órbita 1-periódica con un periodo T . Al ser el comportamiento en lazo abierto y estado estacionario, se tiene que $x_2(t_k) \in (0, 1)$.

El controlador PWM conmuta la posición del interruptor en el instante τ_k , cuando la condición (67) es satisfecha. Entonces, si consideramos (67), (69) y (73) se llega a la expresión

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + \tau_s) \\ \bar{x}_2 - (h(kT + \tau_s)/k_p) \end{bmatrix} = -M(A, T, \tau_s)A^{-1}B_1. \quad (75)$$

En general, $M(A, T, \tau_s)$ es una matriz que contiene términos no lineales dependientes de T y τ_s . Sin embargo, dada una matriz constante A y un periodo T entonces (75) se vuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, τ_s y $x_1(\tau_s)$. Encontrando la solución de (75) se obtienen los

valores de τ_s y $x_1(\tau_s)$, y utilizando estos valores en (67) se obtiene el valor de $x_2(\tau_s)$. Remplazando los valores obtenidos de τ_s , $x_1(\tau_s)$ y $x_2(\tau_s)$ en (73) se obtienen los valores de $x_1(t_k)$ y $x_2(t_k)$ que corresponden al estado estacionario del convertidor buck cuando exhibe una órbita 1-periódica con periodo T , cumpliéndose la condición (67).

Es importante notar que la expresión (73) es una ecuación trascendental, por lo que no existe una solución analítica. Sin embargo, es posible encontrar un conjunto de parámetros R_n , V_{in} , un voltaje de salida deseado $\bar{x}_2 \in (0, 1)$, una señal de modulación $h(t)$ con algunos valores V_l y V_u obtenidos por diseño, y T , tal que es posible calcular una solución numérica para (73) y encontrar un $\tau_s \in (0, T)$, que satisfagan la condición (67), con una amplitud de $|g_2(t)|_{max} < \delta$, y $x_1(t) > 0$. Sin embargo, lo anterior es posible cuando se considera el sistema (66), el cual no está bajo la acción del control PWM. En otras palabras, que se cumpla la condición (67) no permite garantizar la existencia de una órbita 1-periódica en el circuito buck con un control PWM.

El conjunto de parámetros que se obtengan con el procedimiento descrito anteriormente sólo permite garantizar que, bajo la acción de un control ideal en estado estacionario, la estrategia de conmutación tiene el comportamiento

$$\sigma = \begin{cases} > 0, & t_k < t < t_k + \tau_s; \\ = 0, & t = \tau_s; \\ < 0, & t_k + \tau_s < t < t_k + T. \end{cases} \quad (76)$$

Considérese nuevamente que el circuito está en estado estacionario, y que se está analizando únicamente el intervalo $t \in (t_k, t_k + T)$. Se tiene que, para que exista una sola conmutación en el interruptor, la estrategia de conmutación debe representar a una superficie discontinua de conmutación; es decir, que una vez que la órbita del sistema llega a la superficie de discontinuidad, debe atravesar ésta.

La condición necesaria para que la estrategia de conmutación atraviese la superficie discontinua de conmutación solamente una vez en un periodo es:

$$\sigma \dot{\sigma} = \begin{cases} < 0, & t_k < t < t_k + \tau_s; \\ > 0, & t_k + \tau_s < t < t_k + T. \end{cases} \quad (77)$$

Considerando la condición (76), se tiene que la expresión (77) es valida sólo si

$$\dot{\sigma} < 0, t_k < t < t_k + T. \quad (78)$$

En el caso de la estrategia de conmutación (63), la condición anterior se satisface cuando

$$\dot{x}_2 > -\frac{\dot{h}(t)}{k_p}. \quad (79)$$

Como el análisis sólo se realiza en el intervalo $(t_k, t_k + T)$, se tiene que

$$\dot{h}(t) = \frac{V_u - V_l}{V_{in}T}, \forall t \in (t_k, t_k + T). \quad (80)$$

Sustituyendo (80) en (79)

$$\dot{x}_2 > -\frac{V_u - V_l}{V_{in}k_pT}. \quad (81)$$

Considerando las expresiones (28b),(13a) y (13b) se tiene que

$$\min(\dot{x}_2) = \min\left(\left(-1 + \frac{DT}{R_n}\right) \frac{\Delta x_1}{2}\right) < -\frac{\Delta x_1}{2} \quad (82)$$

sustituyendo (82) en (81)

$$\frac{\Delta x_1}{2} < \frac{V_u - V_l}{V_{in}k_pT}, \quad (83)$$

sustituyendo la corriente de rizo dada por la expresión (31) en la expresión (83) se tiene la siguiente desigualdad

$$0 < \frac{2(V_u - V_l)}{V_{in}k_pT} + \tau_s - T. \quad (84)$$

Si los parámetros del circuito buck satisfacen la expresión (75), tal que se encuentra un tiempo de conmutación τ_s que permite el comportamiento deseado en estado estacionario del circuito y se cumple la condición (84), se puede garantizar que el circuito buck en estado estacionario presenta una órbita 1-periódica.

La expresión (84) permite seleccionar los parámetros del control, tal que se presente una órbita 1-periódica a la salida del circuito. Se observa que el periodo T y la amplitud $(V_u - V_l)$ de la señal de modulación juegan un papel importante. Un punto no tan evidente, es que τ_s depende del valor de la señal de referencia $\bar{x}_2$, por lo que un conjunto de parámetros que sirvan para una $\bar{x}_2$ específica, no necesariamente garantizará el comportamiento de la salida para otro valor de $\bar{x}_2$.

Para ilustrar lo anterior, se considera el ejemplo dado en la sección (III.2)³, incluyendo la señal de modulación $h(t)$ dada por la expresión (64), con los valores $V_u = 0,4$ y $V_l = -0,4$. Utilizando la expresión (69) para calcular τ_s , y evaluando la condición (83) se obtiene

$$0 < 0,2757$$

³Lo valores de dicho ejemplo son del diseño de un convertidor buck con una frecuencia de operación normalizada de 1189/3363 (de 20KHz en el sistema sin normalizar) y un voltaje de rizo de 10 % del voltaje de salida

lo cual es válido, por lo que el sistema presenta una órbita 1-periódica. En la figura 12, se muestra la evolución en tiempo de x_1 y x_2 .

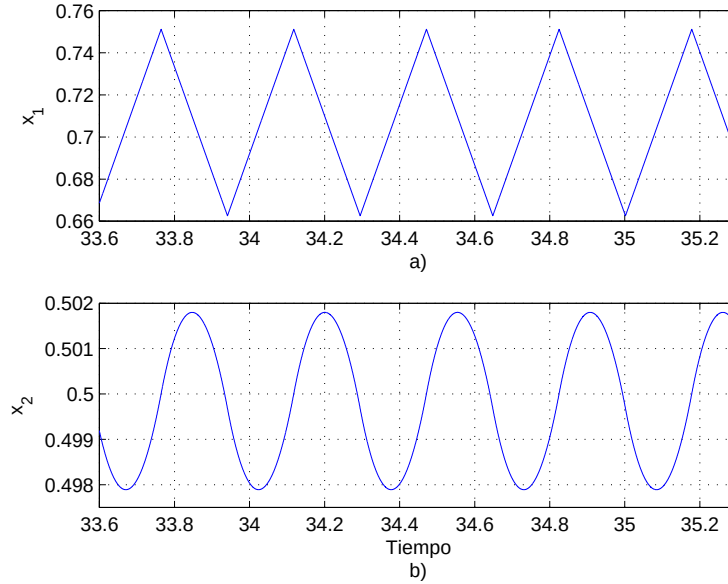


Figura 12: Evolución en tiempo exhibiendo una órbita 1-periódica de: a) x_1 , b) x_2

IV.3. Comparación con el diseño clásico PWM

En el diseño del controlador PWM, en la literatura de electrónica de potencia se considera que en estado estacionario se cumple la condición (Agrawal (2001); Mohan *et al.* (2002))

$$D_i = \bar{x}_2 = \frac{\tau_s^*}{T}. \quad (85)$$

Bajo esta condición el instante de conmutación τ_s se define como:

$$\tau_s^* = \bar{x}_2 T. \quad (86)$$

Sin embargo, por el efecto de carga/descarga del capacitor en el convertidor buck, el tiempo de carga y descarga no es simétrico, por lo que existe un error entre el instante de conmutación esperado τ_s^* y el instante de conmutación en el sistema, τ_s , el cual se define como:

$$\Delta_\tau \triangleq |\tau_s^* - \tau_s|. \quad (87)$$

Es interesante señalar que la diferencia Δ_τ varía de acuerdo a los valores de los parámetros del convertidor buck. Si se considera que R_n y V_{in} son constantes, entonces Δ_τ sólo puede presentar

variaciones ante cambios en los valores de $\bar{x}_2$ y la señal $h(t)$.

Es importante recordar que lo que se desea es que el voltaje promedio de salida (denotado como D_x) sea igual a $\bar{x}_2$, considerando que el instante de conmutación que garantiza la existencia de una órbita 1-periódica se obtiene de (75). Se puede definir entonces el ciclo de trabajo D_s de la siguiente manera

$$D_s = \frac{\tau_s}{T}, \quad (88)$$

que es el ciclo de trabajo que garantiza la existencia de una órbita 1-periódica. Entonces, es posible suponer que la pérdida de estabilidad de la órbita 1-periódica ocurre cuando la diferencia $\Delta\tau$ es muy grande, o que la diferencia $|D_s - D_i|$ es muy grande. Para ilustrar el cambio en el comportamiento del convertidor buck y la pérdida de estabilidad de la órbita 1-periódica, se considera un ejemplo numérico con los valores $R_n = 985/1393$, $V_{in} = 20$, $k_p = 1$, $T = 1189/3363$ y $\bar{x}_2 \in [0,05,0,95]$. En la figura 13 se muestra el valor de D_i , D_s y D_x para diferentes valores de $\bar{x}_2$. Se observa que para $\bar{x}_2 \in (0,18,0,76)$ el voltaje promedio de salida D_x sigue al ciclo de trabajo D_s que garantiza la existencia de la órbita 1-periódica, y se tiene que la diferencia $|D_s - D_i|$ es acotada. Sin embargo, cuando $\bar{x}_2 < 0,18$ o $\bar{x}_2 > 0,76$, el voltaje promedio de salida D_x deja de seguir al ciclo de trabajo D_s y el convertidor buck ya no exhibe una órbita 1-periódica. Sin embargo, nótese que, aunque la órbita 1-periódica se pierde, el voltaje de salida promedio se acerca al ciclo de trabajo D_i .

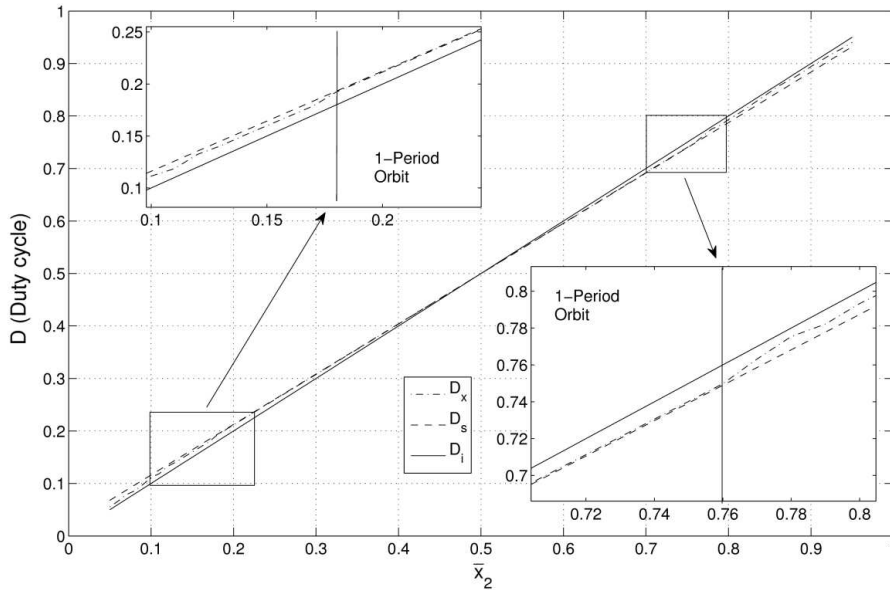


Figura 13: D_i , D_s y D_x para diferentes valores $\bar{x}_2$

Si se considera la condición dada por la expresión (84) para este ejemplo, se tiene que, para que se conserve la órbita 1-periódica la señal de referencia $\bar{x}_2$ debe de satisfacer $\bar{x}_2 \in (0,3606,0,69)$, lo cual está dentro del intervalo en que el error $\Delta\tau$ es pequeño.

En la figura 13 el parámetro que varía es $\bar{x}_2$, equivalente a variar el voltaje de salida deseado. Sin

embargo, de (75) también se observa que la diferencia Δ_τ cambia si varían los parámetros de $h(t)$; en general el parámetro propenso a variar es el periodo T . En la figura 14 se muestra la diferencia $|D_s - D_x|$ ante variaciones de $\bar{x}_2$ y T . Se observa que si la diferencia se encuentra acotada y en la región plana de la gráfica, el sistema presenta una órbita 1-periódica, y la cota para la diferencia $|D_s - D_x|$ que define el momento que se pierde la órbita 1-periódica depende de ambos parámetros.

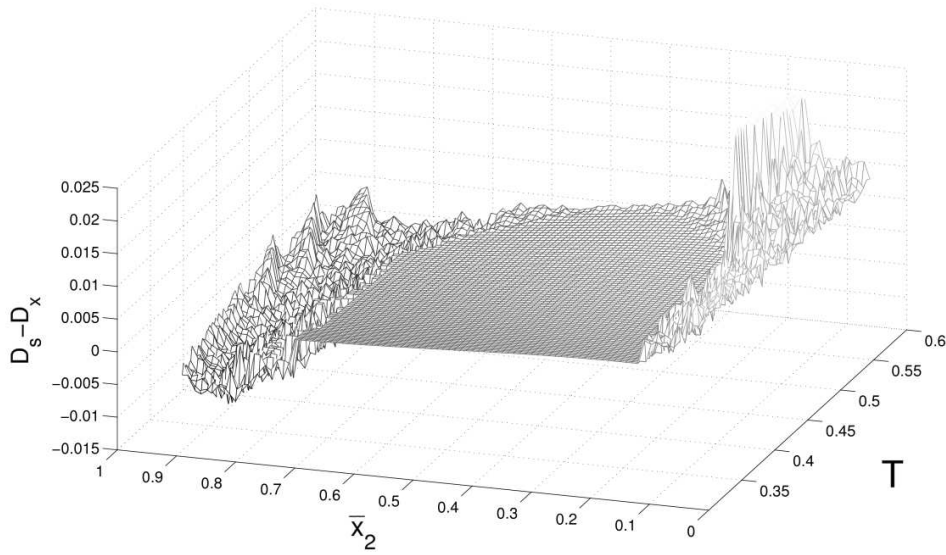


Figura 14: $|D_s - D_x|$ para $T \in (0,35,0,6)$ y $\bar{x}_2 \in (0,05,0,95)$.

En lazo abierto la órbita 1-periódica existe aunque la diferencia $|D_s - D_x|$ deja la región plana de la gráfica en la figura 14, el problema es que el voltaje promedio de salida D_x se aleja de $\bar{x}_2$. Al utilizar el controlador PWM se pierde la órbita 1-periódica, pero el voltaje promedio de salida D_x se acerca al voltaje de salida esperado $\bar{x}_2$, aunque para lograrlo se pierda la estabilidad de la órbita 1-periódica, que es el comportamiento en estado estacionario en lazo abierto del convertidor buck.

IV.4. Conclusiones

Al considerar el controlador PWM, se tiene que su esquema de conmutación es el mismo que un control por modos deslizantes con un objetivo de seguimiento, siendo la única diferencia la señal de modulación $h(t)$. Dada las características de $h(t)$, el controlador PWM no puede ser analizado bajo la teoría de sistemas con un control por modos deslizantes, por lo que se considera al comportamiento en estado estacionario y en el k -ésimo intervalo del convertidor buck, lo cual permite considerar a este convertidor como un sistema seccionalmente lineal, para el cual es posible encontrar las condiciones que garantizan la existencia de una órbita 1-periódica bajo la acción del controlador PWM. La condición (84) permite concluir que si los parámetros del control, incluida

la frecuencia y la amplitud de la señal de modulación $h(t)$ varían, es posible que se pierda la órbita 1-periódica. Es importante resaltar este resultado que relaciona la variación de los parámetros de control, que antes se consideraban independientes, de tal manera que la variación de cualquiera de los parámetros del control fuera de los valores de diseño, deja de garantizar el comportamiento deseado, dando lugar al problema de investigar lo que sucede cuando se deja de cumplir la condición (84). Este problema será discutido en el siguiente capítulo.

Es importante notar que la variación de los parámetros del sistema no lo afectan de la misma manera. Puede ser posible entonces que se presenten diversas bifurcaciones al variar de diferente manera cada parámetro del sistema.

Diseñar el convertidor buck con un control PWM a través de técnicas convencionales produce errores, ya que estas técnicas no consideran la naturaleza discontinua de este convertidor. Sin embargo, si se considera el valor promedio de varios ciclos del voltaje de salida D_x y el error con la señal de referencia, se observa que el control PWM no se aleja demasiado de su objetivo de control aunque la órbita del sistema ya no sea 1-periódica.

Capítulo V

Dinámica compleja en el convertidor buck

V.1. Introducción

En el capítulo anterior se dieron condiciones suficientes para la existencia de una órbita 1-periódica en el convertidor buck con un control PWM. Al ser estas condiciones sólo suficientes, el estudiar la dinámica del convertidor cuando no se cumplen es un problema de interés. Además, los resultados de la sección IV.3 muestran que al variar algunos de los parámetros del control se pierde la órbita 1-periódica, aún cuando el controlador permite que el voltaje promedio de salida se encuentre cerca del valor deseado.

En este capítulo se estudia con más detalle la dinámica del convertidor buck ante variaciones paramétricas. Trabajos previos de diversos autores han mostrado la existencia de una dinámica compleja en el convertidor que incluye la existencia de órbitas k -periódicas, donde k es un entero, cuasi periódicas y caóticas. Una revisión de estos trabajos con respecto a la dinámica compleja en convertidores conmutados es presentado por El-Aroudi *et al.* (2005). En estos trabajos previos es común el uso de mapeos discretos para estudiar la dinámica del convertidor. La mayoría de estos mapeos discretos se obtienen de la expresión (72), por lo que es necesario el uso de algoritmos numéricos para obtener el valor de los instantes de conmutación. Por ello es común considerar constantes los parámetros de la señal de modulación $h(t)$, considerando solamente variaciones en el voltaje de entrada V_{in} , el cual puede ser visto como la ganancia del control, para estudiar los cambios en la dinámica del convertidor. Sin embargo, no hemos encontrado hasta el momento un estudio que aborde los cambios en la dinámica ante variaciones del resto de los parámetros del convertidor, cuando éste se encuentra en el modo de conducción continua, problema que analizaremos en este capítulo.

De la expresión (72) se observa que sólo si ocurre un cambio de signo en el factor de calidad R_n se presentara un cambio en la dinámica a partir de los elementos pasivos del convertidor buck, lo cual no sucede en la práctica. Al considerar las expresiones (75) y (84) se tiene que sólo variaciones

en los parámetros del controlador permitirán un cambio en la dinámica. En la siguiente sección se estudia el cambio en la dinámica del convertidor ante variaciones paramétricas en el lazo de control.

Finalmente, se dan algunas conclusiones en la última sección de este capítulo.

V.2. Incertidumbres paramétricas en el lazo de control.

En la sección IV.3 se mostró que el convertidor buck, con un control PWM, deja de exhibir el comportamiento deseado en estado estacionario, es decir, una órbita 1-periódica de periodo T , y el voltaje del capacitor x_2 un valor promedio cercano a la señal de referencia, $\bar{x}_2$, cuando el periodo T de la señal de modulación $h(t)$ adquiere valores fuera de un cierto rango o ante variaciones de la señal de referencia $\bar{x}_2$. En esta sección se estudia con más detalle los cambios que sufre la dinámica del convertidor cuando se varían los parámetros del lazo de control.

El esquema de conmutación (63) utilizado por el control PWM contiene 5 parámetros. De las condiciones (75) y (84) se observa que la variación de cualquier parámetro del control podría llevar a dejar de garantizar la órbita 1-periódica deseada a la salida. Dado el número de parámetros, el estudio del efecto que produce la variación de cada uno de éstos en el convertidor buck no es un problema trivial.

En las siguientes subsecciones se realiza un estudio del cambio en la dinámica del circuito al variar la ganancia k_p , el voltaje de entrada V_{in} o el periodo T . Se han seleccionado estos parámetros del control debido a que son los que aparecen de manera explícita en las condiciones presentadas en la sección IV.2. No se estudia el efecto de variaciones en la amplitud de la señal de modulación, ya que bajo ciertas condiciones es un problema similar al caso que se estudia en la sección III.2, en particular cuando este parámetro tiene valores pequeños.

V.2.1. Variaciones en la ganancia k_p

En el trabajo de Alvarez y Curiel (1997) se demuestra que un sistema de segundo orden lineal con un control proporcional, una perturbación periódica y un bloque no lineal correspondiente a una función saturación en la entrada del sistema, presenta un escenario dinámico muy complejo ante variaciones de la ganancia del controlador. El convertidor buck se puede representar de una manera similar, si bien el bloque no lineal es una función signo, y en el caso de un control PWM se tiene que la perturbación periódica no es diferenciable (véase la expresión (64)). Por ello es posible que este convertidor presente un cambio en su dinámica ante variaciones de la ganancia del control k_p .

Considerando el convertidor buck con el esquema de conmutación

$$\sigma = V_{in}(k_p(\bar{x}_2 - x_2) - h(t)), \quad (89)$$

si la señal de modulación $h(t)$ es igual a cero y la señal de referencia $\bar{x}_2$ puede tomar cualquier valor entre cero y uno, se tiene que si k_p es positivo el sistema presenta el punto de equilibrio

$$(x_1^p, x_2^p) = \left(\frac{\bar{x}_2}{R_n}, \bar{x}_2 \right), \quad (90)$$

el cual se demostró en la sección III.2 es estable. En operación normal se desea que el convertidor converja a este punto. En el caso en que k_p sea negativo el sistema tiene los siguientes tres puntos de equilibrio

$$(x_1^p, x_2^p) = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\bar{x}_2}{R_n}, \bar{x}_2 \right), \left(\frac{1}{R_n}, 1 \right) \right\}. \quad (91)$$

De la expresión (91) se tiene que el punto de equilibrio de interés $(\bar{x}_2/R_n, \bar{x}_2)$ sigue existiendo para este caso. Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio se considera la siguiente aproximación de la función $\text{sign}(\sigma)$

$$\text{sign}(\sigma) \cong \tanh(\delta\sigma), \quad \delta \gg 1.$$

Considerando la expresión anterior, los polos de la aproximación lineal del sistema alrededor del punto de equilibrio de interés son las raíces del polinomio

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{R_n}\lambda + 1 + \frac{V_{in}}{2}k_p\delta, \quad (92)$$

que tienen un polo con parte real positiva si los parámetros R_n , V_{in} y δ son positivos y la ganancia k_p es negativa.

Como el objetivo en este capítulo es analizar la dinámica del convertidor buck con un control PWM para el caso de conversión CD-CD, el caso $k_p < 0$ no será estudiado con mayor profundidad en esta sección. Sin embargo, como los puntos de equilibrio dados en (91) son un primer indicador de un posible comportamiento homoclínico, lo que puede conducir a un comportamiento caótico, este caso será estudiado en el siguiente capítulo.

Considerando el caso $k_p > 0$, $h(t) = 0$ y $0 < \bar{x}_2 < 1$, se tiene el sistema utilizado en la sección III.2, con $c = k_p V_{in}$ y $\varepsilon = k_p V_{in} (\bar{x}_2 - 1/2)$. Utilizando el Teorema 1 se tiene que, si se cumple la desigualdad

$$c = \frac{k_p V_{in}}{2} \geq k_p V_{in} \left| \bar{x}_2 - \frac{1}{2} \right|_{\max}$$

el punto de equilibrio de interés es global y asintóticamente estable.

Como se mostró en la sección IV.2, al considerar la señal de modulación $h(t)$ dada por la expresión (64), se tiene que k_p debe satisfacer las condiciones (75) y (84) para garantizar la existencia de una órbita 1-periódica en estado estacionario. Se tiene que existen valores de k_p para los que no se puede garantizar la existencia de una órbita 1-periódica en estado estacionario. De la expresión (75)

se observa que un aumento en el valor de k_p cambia el valor de τ_s , lo cual hace que la diferencia $|D_s - D_i|$ aumente. Considerando los resultados dados en la sección IV.3, si la diferencia $|D_s - D_i|$ crece lo suficiente, es posible que se pierda la órbita 1-periódica en el voltaje del capacitor x_2 .

El establecer la existencia de órbitas periódicas o cuasi periódicas resulta ser un problema no trivial en sistemas autónomos diferenciables. En el caso del convertidor buck, con un control PWM, que es un sistema no diferenciable y variante en el tiempo, resulta mucho más complicado. En el caso de comportamiento caótico se tiene un número muy reducido de herramientas analíticas, establecidas en general para sistemas diferenciables no autónomos, de segundo orden y autónomos de tercer orden (Wiggins (1990)). Las condiciones para aplicar estas herramientas no se satisfacen para los convertidores conmutados, por ello se ha recurrido a la obtención de modelos discretos lo que por un lado complica el análisis al obtenerse modelos de alta complejidad, y por otro lado restringe las condiciones de operación del dispositivo para garantizar que la discretización sea suficientemente exacta.

Otras técnicas de análisis consisten en aproximar los bloques discontinuos por funciones diferenciables; aún así, no siempre se satisfacen las condiciones para aplicar métodos analíticos, por lo que se reduce a experimentos numéricos intensivos para complementar el análisis.

Dada la dificultad para establecer las condiciones que garanticen la existencia del complejo escenario dinámico, que ha sido reportado en el convertidor buck de manera experimental (Baillieul *et al.* (1980); Brockett y Wood (1984)), en lo subsiguiente se utilizarán herramientas numéricas para mostrar las diferentes propiedades dinámicas del convertidor.

La primera de las herramientas que se utiliza es el llamado “diagrama de bifurcación¹”, originalmente desarrollado para sistemas discretos de primer orden y un parámetro. Este diagrama representa los puntos fijos del sistema en estado estacionario para diferentes valores del parámetro. De esta manera, cuando ocurre un cambio cualitativo en la dinámica del sistema se tiene que, ante pequeñas variaciones del parámetro alrededor de cierto valor en el diagrama, cambia el número de puntos fijos. A este cambio en la dinámica se le llama “bifurcación”.

En el caso de sistemas definidos de la manera siguiente

$$\dot{x} = f(x, t, \theta)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y $\theta \in \mathbb{R}^m$ representa los parámetros, el diagrama de bifurcación se obtiene aplicando un “mapeo”² al sistema ante variaciones de un parámetro del sistema, denominado “parámetro de bifurcación”. La dinámica que puede ser representada en el diagrama de bifurcación depende de la selección del parámetro de bifurcación, el rango de variación del mismo y el mapeo

¹Algunos autores consideran que un diagrama de bifurcaciones representa las órbitas estables e inestables que presenta el sistema (Parker y Chua (1989)), en este trabajo solo se consideran las órbitas estables.

²Este “mapeo” consiste realmente en una discretización en el tiempo obtenida a partir de un muestreo de las órbitas del sistema.

que se aplique al sistema.

Para construir el diagrama de bifurcación en esta sección se utilizará un mapeo que toma los máximos de las oscilaciones presentes en el voltaje del capacitor x_2 en estado estacionario. Se considera que el parámetro de bifurcación es la ganancia k_p con un rango de variación de $[1, 5]$. Los valores de los demás parámetros son los del ejemplo dado en la sección IV. El diagrama de bifurcación que resulta se muestra en la figura 15.

De la figura 15, se puede observar que para diferentes valores de k_p el diagrama muestra órbitas k -periódicas con $k = \{1, 2, 4\}$, así como regiones donde se llena densamente, lo cual puede ser un indicador de la presencia de órbitas cuasi periódicas o caóticas. Además, se observa que las bifurcaciones que presenta el convertidor se pueden clasificar en dos tipos; por duplicación de periodo y por transición de una órbita periódica a una órbita cuasi periódica o caótica.

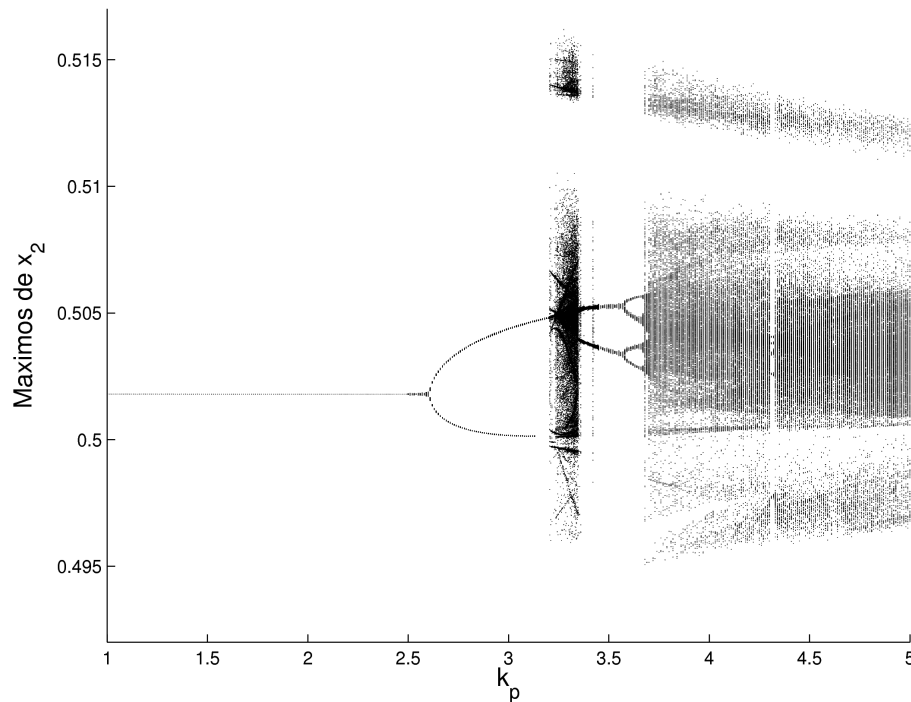


Figura 15: Diagrama de bifurcación cuando se considera k_p como parámetro de bifurcación

El primer cambio en la dinámica del convertidor que muestra el diagrama de bifurcación de la figura 15 ocurre cuando la ganancia k_p tiene un valor aproximado de 2.61. La bifurcación que se presenta es conocida como duplicación de periodo. Como su nombre lo indica, ocurre una transición de una órbita 1-periódica a una órbita 2-periódica.

Es interesante señalar que si se considera al convertidor con el control para regulación mostrado en la sección III.2, se tiene que presenta un punto de equilibrio estable si la ganancia k_p es positiva. Al incluir la señal de modulación $h(t)$ el convertidor presenta la dinámica tan diversa mostrada en el diagrama de la figura 15.

En la figura 16.a se muestra una comparación entre $k_p(\bar{x}_2 - x_2(t))$, considerando la ganancia k_p con los valores de 1 y 2,59, y la señal de modulación $h(t)$. Se observa que existe una diferencia entre los instantes en que se da la intersección de las curvas, por lo tanto el instante de conmutación τ_s es diferente para cada valor de la ganancia k_p . Para ilustrar mejor la diferencia en la intersección de las curvas, en la figura 16.b se muestra un acercamiento de la figura 16.a, donde se observa con más claridad que la intersección de las curvas para diferentes valores de k_p no se da en el mismo instante.

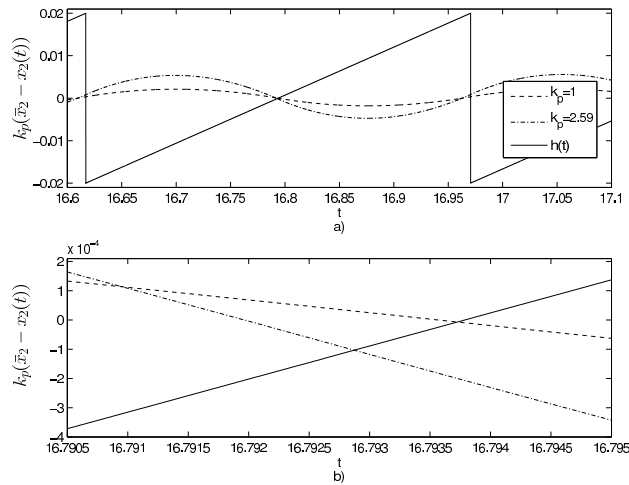


Figura 16: a) Evolución de $k_p(\bar{x}_2 - x_2(t))$ para $k_p = \{1, 2.59\}$ y $h(t)$. b) Acercamiento de 16.a

Si la señal x_2 fuera una oscilación sinusoidal no tendría que suceder el comportamiento observado en la figura 16. Sin embargo, la oscilación que se presenta en x_2 se construye del proceso de carga/descarga del circuito buck, el cual no es simétrico, ocasionando una diferencia en la duración entre el proceso de carga y descarga. Por lo tanto, al incrementarse el valor de la ganancia k_p se ocasiona que el error en el instante de conmutación τ_s aumente hasta que el controlador no puede compensarlo y se pierde la oscilación 1-periódica.

En una bifurcación por duplicación de periodo en un sistema diferenciable, se tiene que después de un valor crítico llamado “valor de bifurcación” el sistema presenta una órbita 2-periódica estable. En el caso del convertidor buck esto no sucede y antes de que exista la órbita 2-periódica estable, ésta se presenta de manera intermitente. Para ilustrar lo anterior, en la figura 17 se muestra el espectro del voltaje del capacitor considerando a la ganancia k_p con los valores de 1, 2.59 y 3.1.

En la figura 17.a se muestra el espectro del voltaje en el capacitor x_2 cuando la ganancia k_p tiene el valor de 1. Se observa que se presenta un solo armónico, a la frecuencia de 2.8284Hz. El espectro del voltaje en el capacitor x_2 considerando la ganancia k_p con el valor de 2.59, se muestra en la figura 17.b. Se observa el mismo armónico a la frecuencia de 2.8284Hz, así como un nuevo armónico a la frecuencia de 1.4142Hz. El nuevo armónico no aparece con una gran amplitud

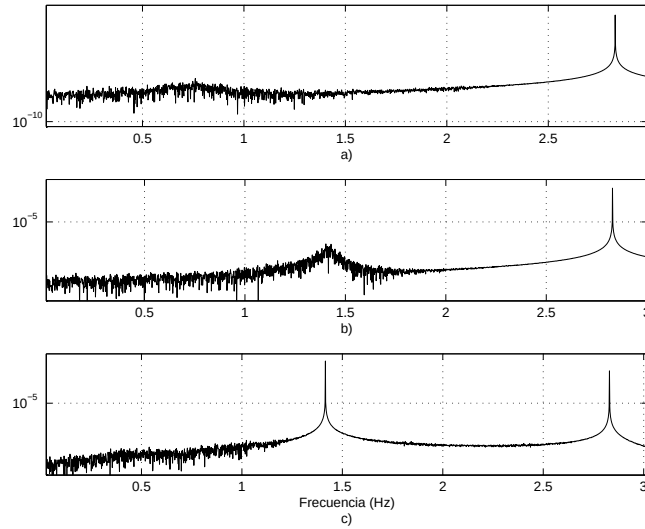


Figura 17: Espectro de x_2 para: $k_p = 1$ a), $k_p = 2,59$ b) y $k_p = 3,1$ c).

debido a que la órbita 2-periódica solo aparece intermitentemente. Finalmente en la figura 17.c se muestra el espectro del voltaje en el capacitor x_2 cuando la ganancia k_p tiene un valor de 3.1. En este espectro se observa claramente la presencia del armónico a la frecuencia de 1.4142Hz.

El siguiente cambio en la dinámica del convertidor se da cuando la ganancia k_p tiene un valor aproximado de 3.1. Considerando solamente la información de la figura 15 se puede suponer que se pasa de una órbita 2-periódica a una órbita 1-periódica. Sin embargo, cuando la ganancia k_p se encuentra en el intervalo (3,1,3,2) se tiene que las oscilaciones en x_1 y x_2 presentan un sólo máximo y dos mínimos, por lo que el mapeo utilizado para generar el diagrama de la figura 15 no permite su representación. Para ilustrar esta situación en la figura 18 se muestra la evolución de x_1 .

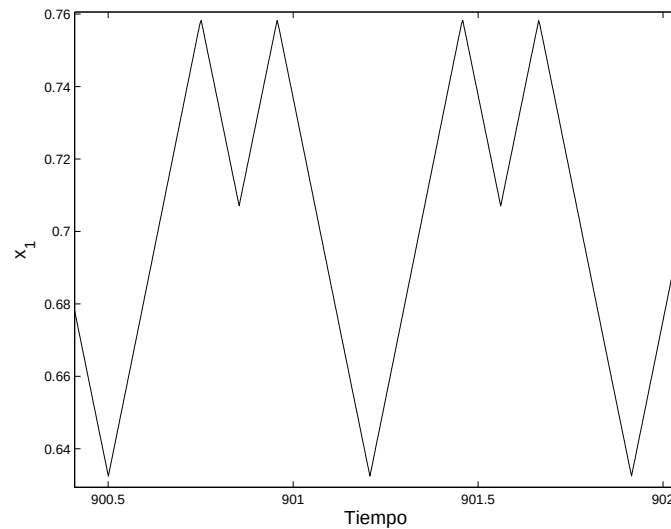


Figura 18: Evolución en tiempo de x_1 con $k_p = 3,15$

Dado que se pueden presentar diferencias en la dinámica que representa un diagrama de bifurcación en función del mapeo que se utilice para su obtención, en este trabajo se realizaron varios diagramas con diversos mapeos. Se encontró que en el intervalo de 3.1 a 3.2 de la ganancia k_p es donde el diagrama de la figura 15 no representa la dinámica del convertidor. La dinámica del convertidor en este intervalo se representa mejor con un diagrama de bifurcación construido a partir de un mapeo que considere los mínimos de las oscilaciones de la corriente en el inductor x_1 , el cual se muestra en la figura 19.

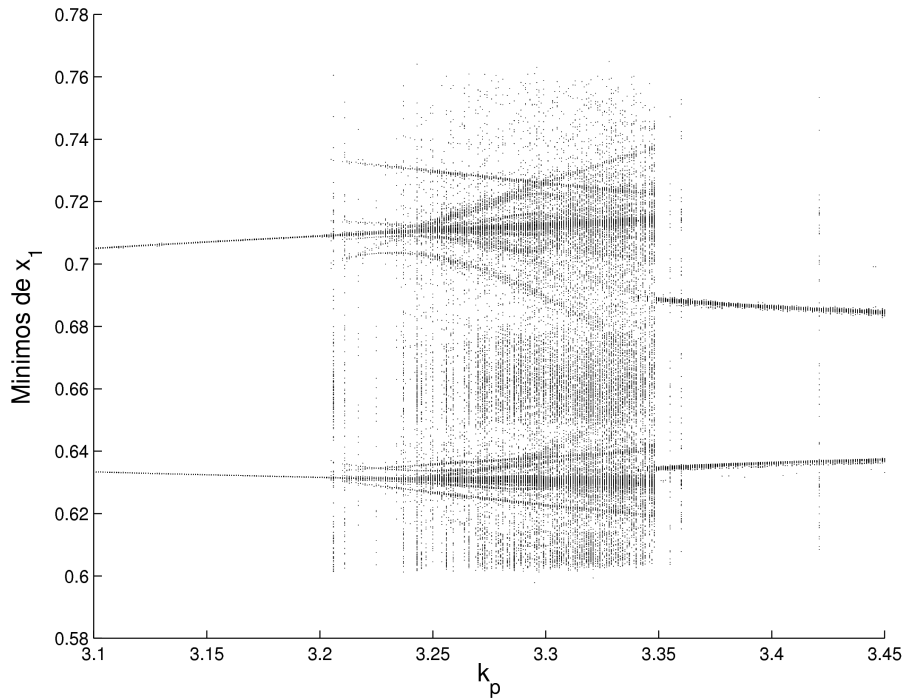


Figura 19: Diagrama de bifurcación utilizando los mínimos de x_1 en el intervalo $k_p \in (3.1, 3.45)$.

A partir de las figuras 15 y 19 se observa que el convertidor buck exhibe una órbita 2-periódica cuando la ganancia k_p toma cualquier valor entre 3.1 y 3.2 o 3.348 y 3.57. La diferencia principal entre ambos intervalos es que para el primero se presenta una conmutación en cada instante t_k , mientras que para el segundo intervalo las conmutaciones ocurren en diferentes instantes, dependiendo del valor de k_p .

Una dinámica muy interesante se presenta cuando la ganancia k_p toma valores entre 3.2 y 3.348. En este intervalo se tiene una órbita 2-periódica con la presencia intermitente de oscilaciones de diferentes frecuencias. Mientras no hay intermitencia la órbita es similar a la que ocurre en el intervalo $k_p \in (2.61, 3.2)$, y por periodos de tiempo irregulares se presentan oscilaciones periódicas de diversas frecuencias, así como oscilaciones irregulares. El diagrama de bifurcación presenta dentro de este intervalo una zona donde se observa la órbita 2-periódica y también la presencia de las otras oscilaciones periódicas, así como las oscilaciones irregulares que se presentan como una nube de

puntos sin forma. Es interesante señalar que en este intervalo siempre se tiene una conmutación en el interruptor en cada instante t_k . Para ilustrar el comportamiento de estas oscilaciones, en la figura 20 se muestra la evolución de la corriente en el inductor x_1 cuando la ganancia k_p tiene el valor de 3.3. El comportamiento intermitente que se observa no se puede considerar periódico o cuasi periódico.

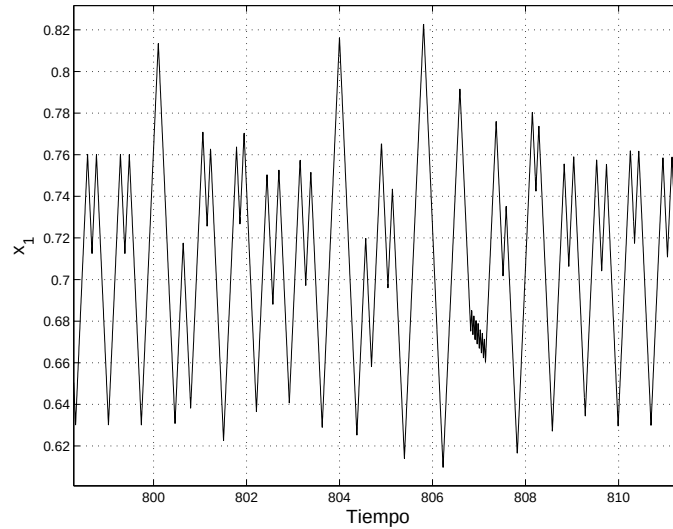


Figura 20: Evolución de x_1 con $k_p = 3,3$.

Finalmente, cuando la ganancia k_p tiene un valor aproximado de 3.348, se presenta una bifurcación a una órbita 2-periódica. Es importante notar que esta clase de dinámica no se presenta en sistemas diferenciables.

Continuando el análisis de la dinámica del convertidor a través del diagrama de bifurcación de la figura 15, se observa una bifurcación por duplicación de periodo cuando la ganancia k_p tiene un valor aproximado de 3.57, presentándose una órbita 4-periódica. El convertidor exhibe este comportamiento cuando la ganancia k_p toma cualquier valor entre 3.57 y 3.67.

Para valores de la ganancia k_p mayores a 3.68 el convertidor exhibe oscilaciones irregulares que no representan órbitas k -periódicas o cuasi periódicas, así como pequeñas regiones de valores de k_p donde se observan oscilaciones periódicas. Este comportamiento se puede tomar como un indicador de que las oscilaciones irregulares son caóticas.

Una oscilación irregular no necesariamente implica que se trate de una oscilación caótica; es recomendable utilizar otra herramienta para verificar la clase de comportamiento que presenta el convertidor buck. La siguiente herramienta que se utiliza es el máximo exponente de Lyapunov (Wiggins (1990)), el cual si es positivo es un indicador de la posible presencia de una órbita caótica. Excepto en los casos triviales, los exponentes de Lyapunov no se pueden obtener de manera analítica. En el caso del convertidor buck, dada su naturaleza discontinua y variante en el tiempo, se utilizará el algoritmo numérico propuesto por Sprott (2006).

La figura 21 muestra el primer exponente de Lyapunov cuando la ganancia k_p toma valores entre 1 y 5, que es el mismo intervalo que se utiliza en el diagrama de bifurcación de la figura 15.

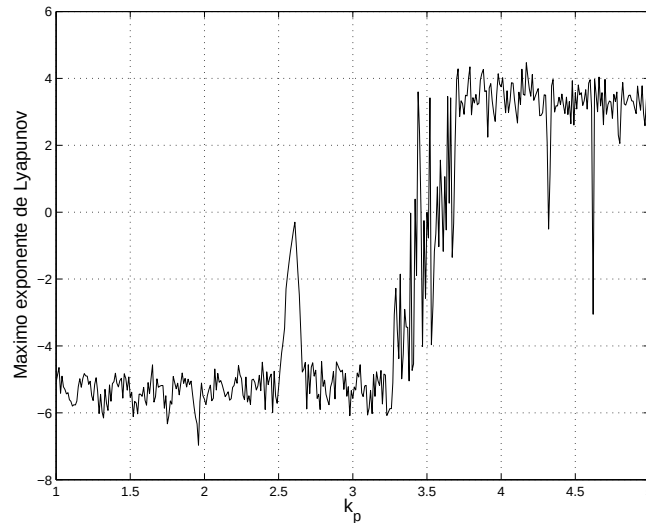


Figura 21: Exponente de Lyapunov para $k_p \in [1, 5]$.

De la figura 21, se observa que el comportamiento de las diversas órbitas k -periódicas corresponde a valores negativos del primer exponente de Lyapunov³, mientras que las oscilaciones irregulares que se comentaron que existen en la dinámica del convertidor corresponde a exponentes positivos, por lo cual se puede decir que estas oscilaciones corresponden muy posiblemente a órbitas caóticas. En la figura 21 también se observan unas pequeñas ventanas de órbitas periódicas presentes en medio de órbitas caóticas.

En la figura 22 se muestra la curva $k_p(\bar{x}_2 - x_2)$ y la señal de modulación $h(t)$ para el valor 4.8 de la ganancia k_p . Se observa que en cada ciclo de la señal de modulación existe una intersección entre ambas curvas, lo cual indica que siempre ocurre por lo menos una conmutación en la posición del interruptor por ciclo de la señal de modulación $h(t)$. Este fenómeno se repite en todo el intervalo de valores de la ganancia k_p que se estudió, lo que contrasta con algunos de los resultados presentados por diversos autores que consideran que a la pérdida de interrupciones como un mecanismo necesario para la existencia de órbitas caóticas (Angulo *et al.* (2008); Banerjee *et al.* (2004); Myles y Di Bernardo (2000); Hamill y Deane (1992)).

³Si el primer exponente se obtuviera de una manera analítica, su valor debería ser de 0 para las órbitas periódicas o cuasi periódicas.

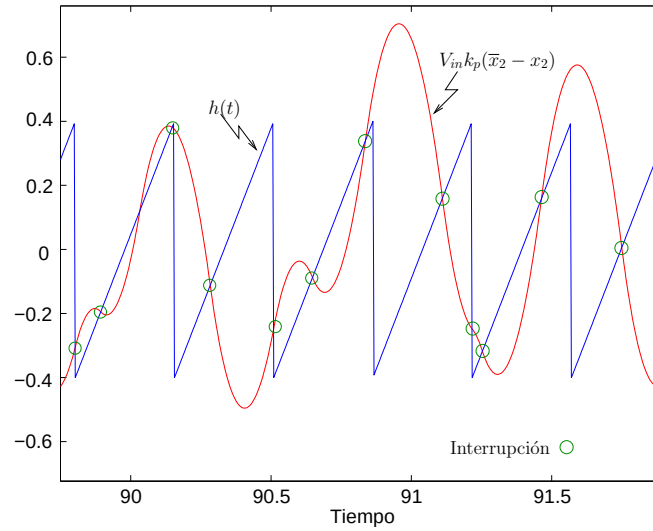


Figura 22: Evolución de la curva $k_p(\bar{x}_2 - x_2)$ y la señal de modulación $h(t)$, considerando la ganancia k_p ; a) con un valor de 3 y b) con un valor de 4.8.

Una característica presente en los sistemas caóticos es la de contracción y expansión del flujo. Para mostrar que esta propiedad se presenta en el convertidor buck en régimen caótico se realizará una experimento en el cual se tomarán tres condiciones iniciales de un conjunto que forma un círculo en el espacio de estados, dos de ellas muy cercanas y la tercera lejana a las primeras dos, dejándose evolucionar el sistema para cada una de estas condiciones iniciales. Se espera que después de cierto tiempo las trayectorias de las condiciones iniciales cercanas se alejen y la trayectoria de la condición inicial lejana se acerque a alguna de las otras dos. En la figura 23 se muestra los resultados del experimento descrito.

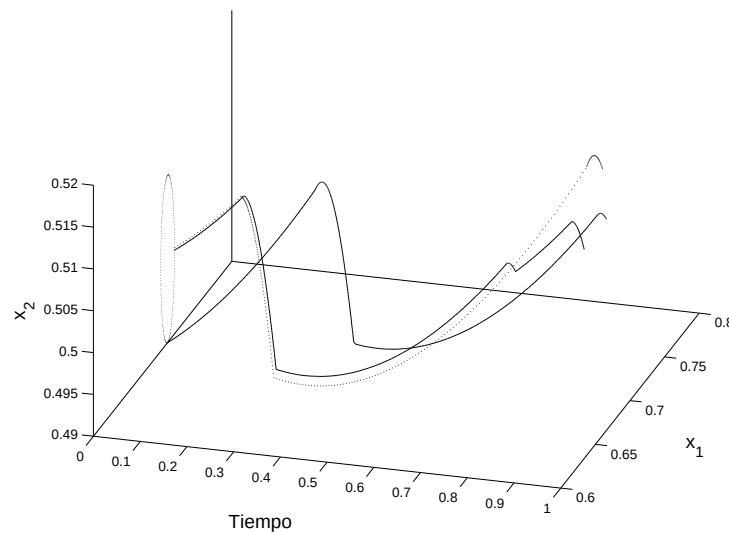


Figura 23: Evolución a partir de múltiples condiciones iniciales.

Una herramienta que permite ver la dinámica que describe una órbita en un sistema es el mapeo estroboscópico, el cual consiste en tomar muestras del sistema a una frecuencia fija y después graficar las muestras en el espacio de estados (Parker y Chua (1989)). En caso de que la órbita del sistema sea k -periódica el mapeo debe mostrar k puntos en el espacio de estado; si la señal es cuasi periódica se forma una curva cerrada, y si la órbita es caótica se forman figuras complejas que se llenan densamente. El seleccionar la frecuencia de muestro en general no es una tarea fácil. Sin embargo, en el convertidor buck esta tarea es más sencilla dado que se cuenta con la señal de modulación $h(t)$, y a partir de los espectros de la figura 17.c se sabe que las órbitas k -periódicas que se forman tienen armónicos múltiplos de la frecuencia de la señal $h(t)$.

En la figura 24 se muestra estroboscópico el mapeo considerando que la ganancia k_p tiene un valor de 4.8. Se observa que la figura formada no corresponde a una curva cerrada o un conjunto de puntos aislados. La complejidad de la figura que se forma depende del atractor que describa la órbita caótica; en este caso se puede ver que la curva se divide en dos secciones debido a que el atractor se forma alrededor de la órbita 2-periódica que se forma en la primera bifurcación del sistema.

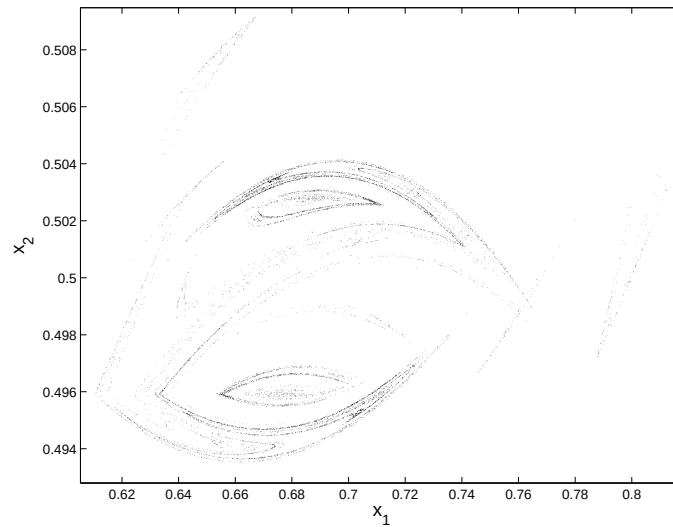


Figura 24: Mapeo estroboscópico con $k_p = 4,8$.

Se puede apreciar de la figura 24 otra propiedad que tienen los sistemas en régimen caótico, llamada transitividad topológica (Wiggins (1990)). Esta propiedad indica que si se selecciona un punto en el espacio de estado dentro del atractor del sistema, después de un tiempo finito la trayectoria caótica pasará arbitrariamente cerca⁴. Está propiedad ocasiona que si se deja evolucionar por más tiempo la trayectoria que sigue el voltaje del capacitor x_2 , la curva obtenida a través del mapeo estroboscópico se llena densamente, pero ningún punto se repite.

⁴En la práctica es común registrar que se pasó por el mismo punto. Sin embargo, esto es debido a la precisión de los instrumentos de medición.

El atractor de un sistema es una región acotada en el espacio de estado donde el sistema evoluciona. La región donde el atractor se desenvuelve se puede obtener a partir de encontrar las solución del sistema en estado estacionario, esta tarea resulta no trivial en sistema no lineales autónomos. En el caso del convertidor buck al tratarse de un sistema discontinuo y no autónomo, no tiene una solución analítica. Por lo que, es común que el atractor de un sistema se obtenga graficando la evolución de la solución del sistema en el espacio de estado. Sin embargo, si el sistema es no autónomo se presenta que la trayectoria que sigue la solución cruce sobre sí misma, y en ocasiones la información que proporciona el atractor resultante no es útil. Por lo que para obtener el atractor del convertidor se hará uso de la herramienta conocida como reconstrucción del espacio de estados.

La reconstrucción del espacio de estados consiste en estimar los estados del sistema cuando se cuenta únicamente con uno de ellos o con una medición que depende del estado. Existen varios procedimientos para reconstruir un atractor caótico a partir de mediciones en tiempo discreto. En general, la solución consiste en seleccionar un periodo de muestro apropiado T_s para la medición $x(n)$ de la señal $x(t)$. Una vez determinado T_s se procede a generar una versión retrasada de tal forma que puedan ser reproducidas las características topológicas del atractor (Sprott (2006)). La generación de una nueva coordenada se logra retrasando la señal medida $x(n)$ un intervalo de tiempo ζT_s , donde ζ lo llamaremos en adelante “factor de retraso de tiempo”. Se necesitan igual número de versiones retrasadas como dimensión tenga el atractor desdoblado, a esta dimensión se le llama “dimensión de empotramiento” y se denota con d_E . Estas versiones retrasadas se utilizan como coordenadas para la reconstrucción del espacio de estados, construyendo a partir de las mediciones vectores d_E -dimensionales de la forma

$$y(n) = [x(n), x(n + \zeta), \dots, x(n + (d_E - 1) \zeta)]$$

para trazar la órbita del sistema. La selección del valor para el factor de retraso de tiempo ζ y la dimensión de empotramiento d_E son la parte más importante de este método; para hacerlo existen diversas técnicas. En este trabajo utilizaremos para la selección del factor de retraso de tiempo ζ el primer mínimo del promedio de información mutua de la señal $x(n)$. Para la obtención de la dimensión de empotramiento d_E se utilizará el algoritmo de Cao⁵ (Cao (1997)).

En el convertidor buck, considerando el voltaje del capacitor x_2 como señal de salida, la ganancia k_p igual a 4.8, un periodo T igual a 0.3536s, y una frecuencia de muestreo de $T_s = T/100$. Se tiene el promedio de información resultante se muestra en la figura 25a. Se observa que el primer mínimo ocurre en 43, por lo que el factor de retraso de tiempo ζ es de 43. En el caso de la dimensión de empotramiento d_E , en la figura 25b se muestra el coeficiente E obtenido con el algoritmo de Cao. Se observa que cuando el coeficiente E es igual a 3 la pendiente de la curva es menor

⁵El algoritmo de Cao es una variante del algoritmo de falsos vecinos, en este algoritmo se genera un coeficiente E , la dimensión de empotramiento se dice que es igual al valor de E donde la pendiente de la curva es menor a 1.

a 1, por lo que la dimensión de empotramiento d_E es igual a 3. El atractor del espacio de estado reconstruido se muestra en la figura 26.

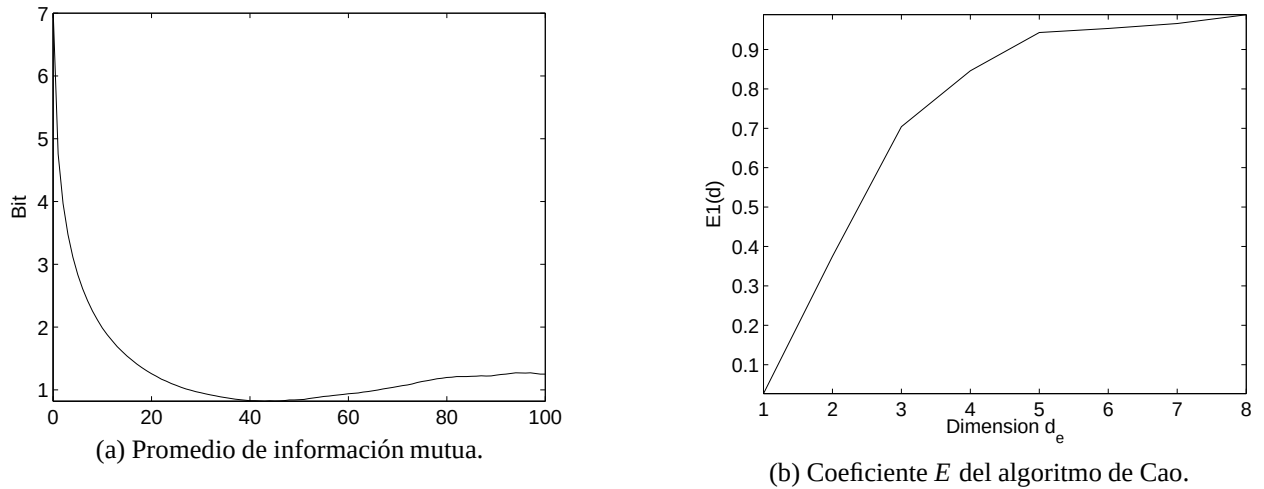


Figura 25: Elementos para la reconstrucción del espacio de estado.

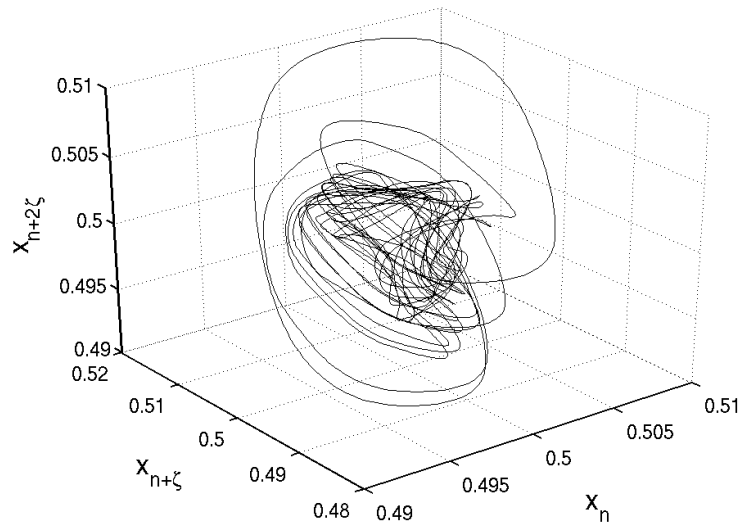


Figura 26: Atractor reconstruido considerando el voltaje del capacitor x_2 y $k_p = 4,8$.

El atractor reconstruido que se muestra en la figura 26 es de naturaleza extraña, es decir, caótico. Para la reconstrucción del atractor se ha utilizado el voltaje en el capacitor x_2 , dado que es la señal que se puede medir más fácilmente en el convertidor buck. Sin embargo, la reconstrucción del atractor también se puede realizar con la corriente del inductor x_1 .

Al considerar la corriente del inductor x_1 para la reconstrucción del estado, se tiene que el factor de retraso de tiempo ζ es de 71 y la dimensión de empotramiento d_E es igual a 3. El atractor reconstruido se muestra en la figura 27. Se observa nuevamente que su naturaleza es caótica. La

diferencia en el valor del factor de retraso de tiempo ζ se debe a que la corriente en el inductor describe líneas rectas entre cada punto de conmutación, por lo que el algoritmo del promedio de información mutua requiere una mayor retardo para que la información deje de tener una correlación alta.

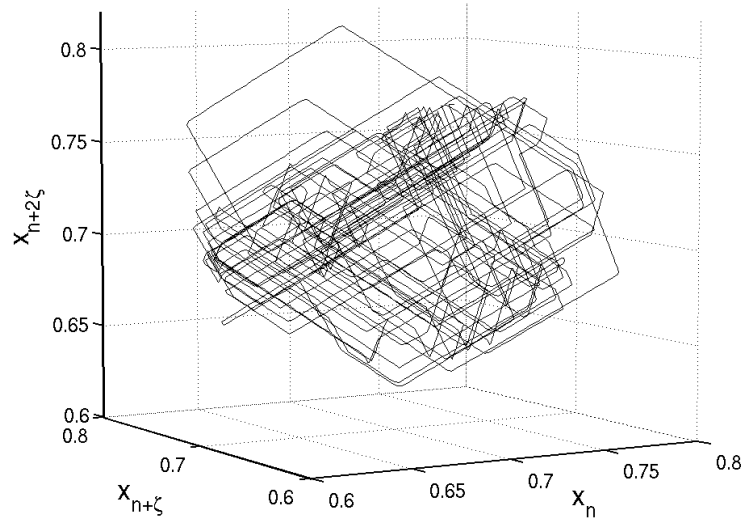


Figura 27: Atractor reconstruido considerando la corriente del inductor x_1 y la ganancia $k_p = 4,8$.

En la figura 28 se muestra el espectro del voltaje del capacitor x_2 con la ganancia $k_p = 4,8$. Se observa que siguen presentes los armónicos de la órbita 2-periódica, pero el nivel de los demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que no se puede decir que se trate de una órbita 2-periódica.

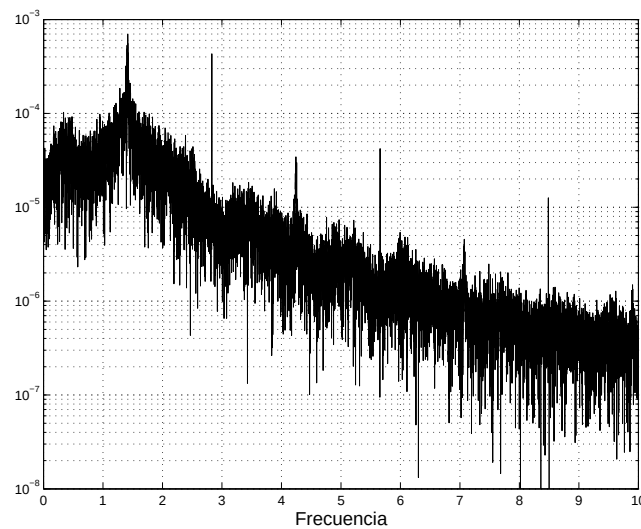


Figura 28: Magnitud del espectro del voltaje del capacitor x_2 con la ganancia $k_p = 4,8$.

Hasta este punto se ha mostrado la existencia de diversas bifurcaciones, la existencia de órbitas

k -periódicas y de órbitas caóticas. Sin embargo, no se ha establecido cómo esta dinámica afecta el rendimiento del convertidor buck. El primer parámetro a considerar es el promedio de la oscilación en el voltaje del capacitor x_2 , el cual se espera sea igual a la señal de referencia $\bar{x}_2$. En la figura 29 se muestra el promedio del voltaje del capacitor x_2 para 100 ciclos de la señal de modulación $h(t)$.

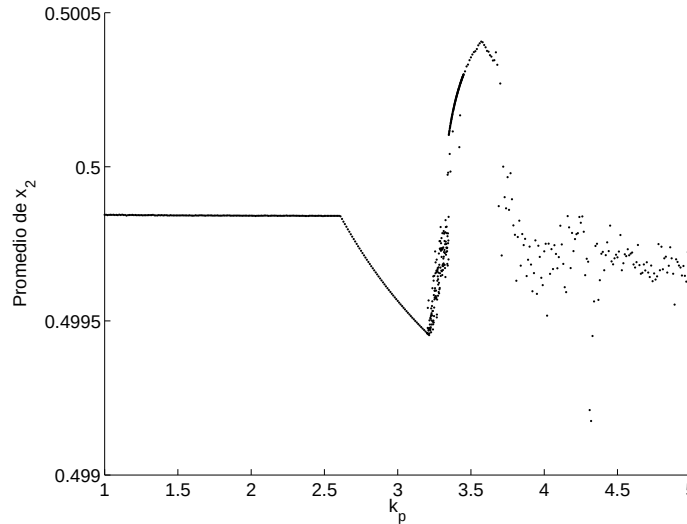


Figura 29: Promedio del voltaje del capacitor x_2 para 100 ciclos de la señal de modulación $h(t)$ para el intervalo $k_p \in [1, 5]$.

De la figura 29 se observa que, aunque el sistema presente una órbita 1-periódica, existe un error con respecto a la señal de referencia $\bar{x}_2$, aunque este error es inferior al 0.02 % del valor de la señal de referencia $\bar{x}_2$. Cuando el voltaje en el capacitor x_2 presenta un comportamiento diferente a la órbita 1-periódica deseada, el promedio del voltaje del capacitor x_2 sigue muy cercano a la señal de referencia $\bar{x}_2$. Se tiene que el error máximo entre el promedio del voltaje y la señal de referencia es apenas del 0.2 % del valor de la señal de referencia. Además, se tiene que en pocos valores de la ganancia k_p el valor máximo y mínimo del voltaje de salida x_2 excedieron los límites de diseño establecidos para el ejemplo utilizado. La única diferencia que puede disminuir la eficiencia del convertidor buck se da en el aspecto frecuencial, ya que si se compara el espectro del voltaje del capacitor x_2 cuando presenta una oscilación periódica con periodo T de la figura 17.a y el espectro del voltaje del capacitor x_2 cuando presenta una oscilación caótica de la figura 28 se observa que aumenta la amplitud de los componentes frecuenciales diferentes a la frecuencia de la señal de modulación $h(t)$. Sin embargo, se tiene que también el armónico a la frecuencia de la señal de modulación $h(t)$ disminuye su amplitud.

De todo lo anterior se puede concluir que es posible que en muchos diseños prácticos exista un comportamiento caótico sin que este sea registrado o considerado, ya que éste no altera los valores esperados en el convertidor buck.

V.2.2. Variaciones en el voltaje de entrada V_{in}

En esta subsección se estudia el cambio en la dinámica del convertidor buck cuando se considera la variación en el valor del voltaje de entrada V_{in} . En la literatura revisada es común considerar variaciones en el voltaje de entrada V_{in} para estudiar los cambios en la dinámica del convertidor. Esta selección se da por dos razones; una es que se puede controlar su valor de una manera sencilla, la otra es que se puede considera como una ganancia del control.

Al igual que en la subsección anterior el valor de los parámetros del convertidor que se utilizan son los del ejemplo dado en la sección IV.2. La selección del intervalo (12, 50) en el cual el voltaje de entrada V_{in} puede tomar cualquier valor se seleccionó por dos razones: a) el subintervalo de 12 a 20 se utiliza para poder mostrar el caso en el cual el voltaje de entrada V_{in} disminuye sobre el valor de diseño⁶, el cual es un caso que puede ocurrir en la práctica; b) el subintervalo de 20 a 50 se utiliza para obtener resultados similares a los reportados en la literatura y poder compararlos con los obtenidos en el resto del trabajo.

El diagrama de bifurcación considerando el voltaje de entrada V_{in} como el parámetro de bifurcación se muestra en la figura 30. Este diagrama se construyó con un mapeo que considera los máximos del voltaje del capacitor z_2 . El diagrama de la figura 30 se da en las variables del sistema sin normalizar para poder visualizar mejor los cambios en la dinámica del convertidor⁷. En esta subsección se considera que la señal de referencia $\bar{z}_2$ tiene un valor de 10.

⁶En el ejemplo utilizado se diseño con un voltaje de entrada V_{in} de 20V

⁷Considerando que el voltaje normalizado del capacitor x_2 se obtiene de la expresión $x_2 = z_2/V_{in}$, y que en esta subsección el valor del voltaje de entrada V_{in} aumenta, el diagrama de bifurcación en términos del modelo normalizado no resulta tan claro.

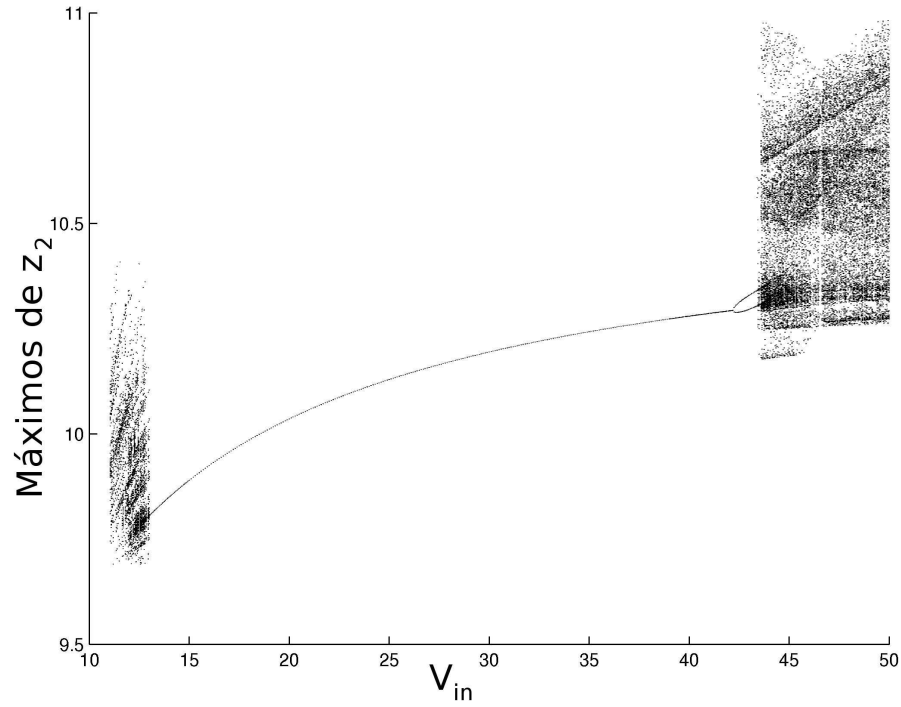


Figura 30: Diagrama de bifurcación considerando el voltaje de entrada V_{in} como parámetro de bifurcación.

Si se compara la dinámica del convertidor que se presenta en el diagrama de la figura 30 con la dinámica del convertidor presentada en el diagrama de la figura 15, donde se considera la ganancia k_p como parámetro de bifurcación, esta no resulta tan complicada.

Para comprobar si las oscilaciones irregulares que dan lugar a las zonas que se llenan densamente en el diagrama de bifurcación corresponden a oscilaciones caóticas se utiliza el máximo exponente de Lyapunov, el cual se muestra en la figura 31.

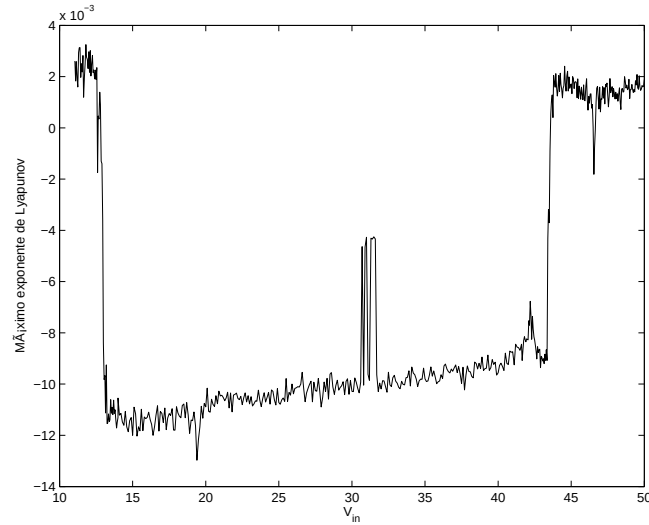


Figura 31: Exponente de Lyapunov para $V_{in} \in [12, 50]$.

El máximo exponente de Lyapunov de la figura 31, indica el convertidor se encuentra en régimen caótico cuando el voltaje de entrada V_{in} es menor a 13V, o cuando es mayor a 43.34V. En ambos caso se presenta una pequeña ventana donde existe una órbita periódica.

Del diagrama de la figura 30 se observa que el convertidor presenta una bifurcación de una órbita 1-periódica a una órbita caótica cuando el voltaje de entrada V_{in} tiene un valor aproximado de 13V. Este caso no se encontró reportado en la literatura revisada, debido a que en general siempre se considera sólo el caso en que el voltaje de entrada V_{in} aumenta su valor.

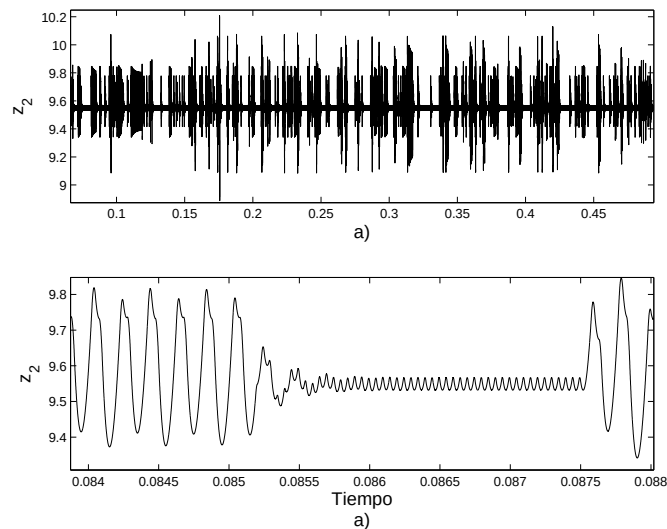


Figura 32: a) Evolución del voltaje del capacitor (z_2). b) Acercamiento de la evolución del voltaje z_2 .

La órbita caótica que tiene lugar para valores del voltaje de entrada V_{in} menores a 13V resulta

diferentes a la reportadas en la sección anterior, ya que estas órbitas se forman de la intermitencia entre órbitas periódicas con diferente periodo y diferente amplitud. Resultó interesante observar que no se encontró ningún patrón en la secuencia de aparición de cada órbita periódica ni la duración de la misma. Cuando el convertidor se encuentra en este régimen caótico, alguna de las oscilaciones excedieron los límites de diseño. Sin embargo, sólo duran poco tiempo fuera de dichos límites. Para ilustrar lo anterior, en la figura 32.a se muestra la evolución del voltaje del capacitor z_2 para un tiempo lo suficientemente largo, y en la figura 32.b se muestra un acercamiento de la evolución del voltaje del capacitor z_2 .

En la figura 33 se muestra el mapeo estroboscópico del convertidor buck, cuando el voltaje de entrada V_{in} es igual a 12.8. Se observa que no se forma ninguna curva cerrada, ni un conjunto de puntos aislados. Sin embargo, la curva que se forma no tiene similitud con la formada por el mapeo estroboscópico mostrado en la figura 24.

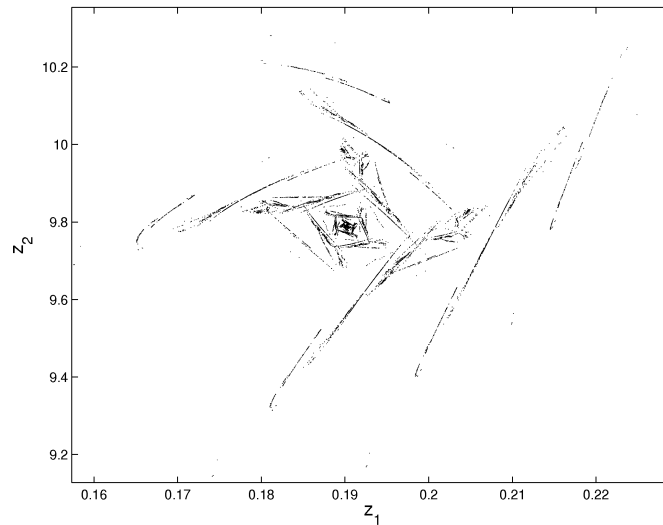


Figura 33: Mapeo estroboscópico del convertidor buck considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 12.8V.

En la figura 34 se muestran diferentes acercamientos del centro de la curva formada por el mapeo estroboscópico. Se observa que la complejidad de la curva no disminuye conforme se acerca al centro de la misma. Este comportamiento no guarda similitud con el que se ha reportado en el convertidor buck, ni con los resultados obtenidos previamente en este trabajo.

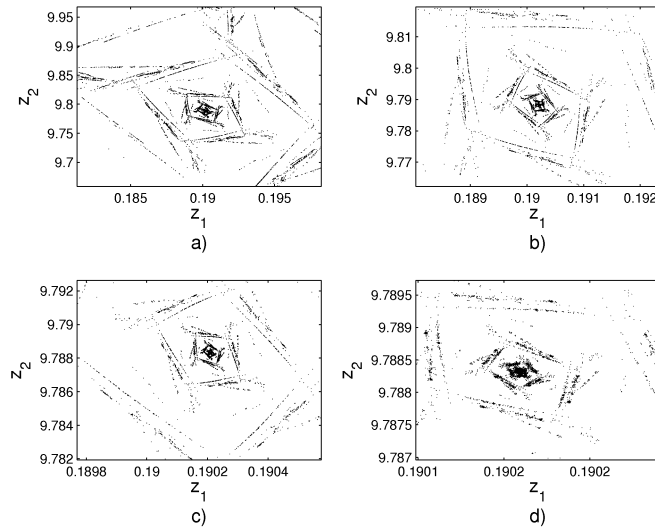


Figura 34: Múltiples acercamientos al centro de la curva formada por el mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 12.8V.

La complejidad de la curva obtenida por el mapeo estroboscópico puede ser afectada por la frecuencia de muestreo. Una herramienta que no depende de la frecuencia de muestreo es el llamado mapeo de Lorenz, el cual consiste en tomar los máximos de alguno de los estados del sistema y graficar el máximo actual x_n contra el máximo siguiente x_{n+1} . El resultado de aplicar el mapeo de Lorenz al voltaje del capacitor z_2 se muestra en la figura 35.

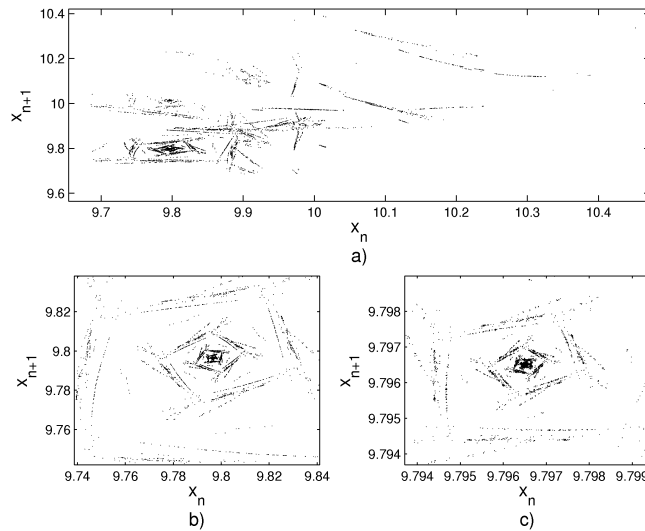


Figura 35: Mapeo de Lorenz del voltaje del capacitor z_2 considerando que el voltaje de entrada V_{in} tiene el valor de 12.8V.

Del mapeo de Lorenz que se muestra en la figura 35, se puede observar que la complejidad de la curva obtenida con el mapeo estroboscópico se mantiene y no depende del mapeo que se aplique al convertidor buck cuando exhibe esta clase de comportamiento caótico.

Por otra parte, cuando el voltaje de entrada V_{in} aumenta, alcanzando el valor de 42.2V, se presenta una bifurcación por duplicación de periodo, presentándose una nueva bifurcación que pasa de una órbita 2-periódica a una órbita caótica cuando el voltaje de entrada V_{in} es aproximadamente igual a 43.35V. Este comportamiento corresponde al que se reporta en la literatura revisada (Hamill y Deane (1992)).

La órbita caótica que exhibe el convertidor buck cuando el valor del voltaje de entrada V_{in} es mayor a 43.35V no presenta similitud con la que se tiene cuando el valor del voltaje de entrada V_{in} es menor a 13V. Para mostrar esta diferencia entre las órbitas caóticas, en la figura 36 se muestra el mapeo estroboscópico del convertidor considerando que el voltaje de entrada V_{in} es igual a 45V.

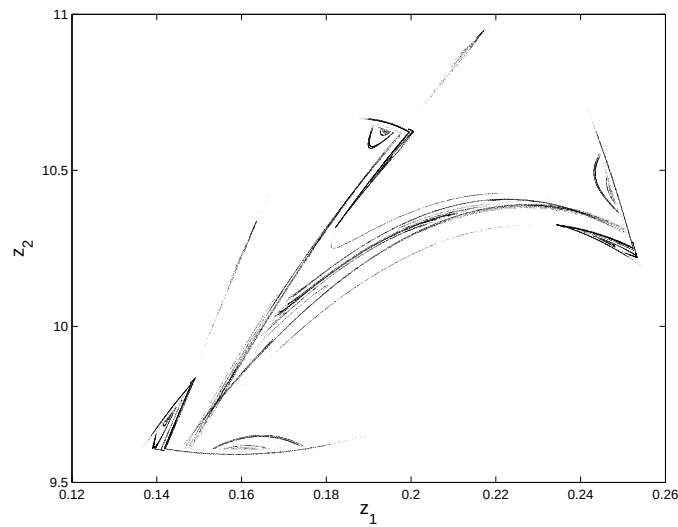


Figura 36: Mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 45V.

Comparando las curvas de las figuras 33 y 36 se observa que no existe similitud entre ellas, y que el comportamiento que se muestra en la figura 34 no lo exhibe el convertidor cuando el voltaje de entrada V_{in} es mayor a 43.35V. Para verificar la diferencia entre las órbitas caóticas que presente el convertidor, en la figura 36 se muestra el mapeo de Lorenz del voltaje del capacitor z_2 cuando el voltaje de entrada V_{in} es igual a 45V.

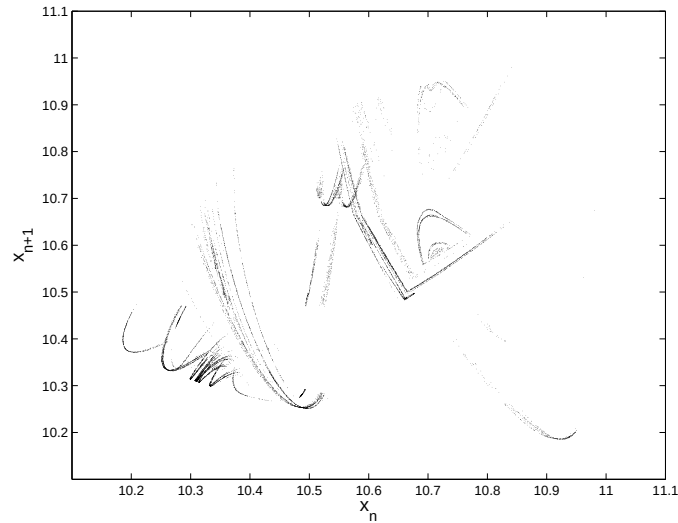


Figura 37: Mapeo de Lorenz del voltaje del capacitor z_2 , considerando el voltaje de entrada V_{in} igual a 45V.

Al comparar las curvas de las figuras 35 y 37, se observa que no tienen similitud alguna, por lo que es posible afirmar que los comportamientos caóticos que se generan en el convertidor buck son de naturaleza diferente.

El único patrón que se encontró en las diferentes órbitas caóticas, considerando el voltaje de entrada V_{in} como parámetro de bifurcación, es que en todas las órbitas existen ciclos de la señal de modulación $h(t)$ donde no se presenta una conmutación en el interruptor. Este resultado concuerda con el que se reporta en la literatura revisada (El-Aroudi *et al.* (2005)).

Utilizando el procedimiento descrito en la subsección anterior, el atractor que se obtiene de la reconstrucción de estados considerando el voltaje del capacitor z_2 se muestra en la figura 38.

De la figura 32 se observa que, si el convertidor se encuentra en régimen caótico por variaciones en el voltaje de entrada V_{in} , se tiene que la amplitud de las oscilaciones no es constante y en algunos instantes ésta supera los límites de diseño. Sin embargo, el tiempo que la oscilación está fuera de los límites de diseño es pequeño. Además, del promedio del voltaje del capacitor z_2 que se muestra en la figura 39, se observa que el error entre éste y la señal de referencia es menor al 3 %.

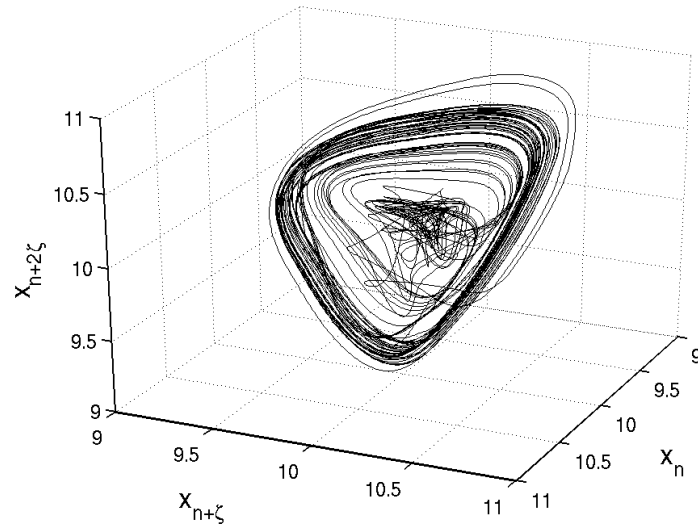


Figura 38: Atractor reconstruido utilizando el voltaje del capacitor z_2 y el voltaje de entrada V_{in} igual a 45V.

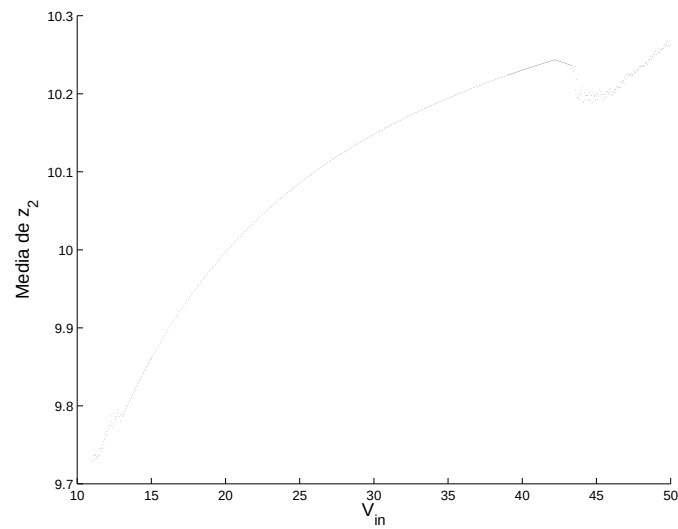


Figura 39: Promedio del voltaje del capacitor z_2 ante variaciones del voltaje de entrada V_{in} .

Finalmente, en la figura 40 se muestra el espectro del voltaje del capacitor z_2 para dos valores del voltaje de entrada V_{in} . En la figura 40.a se observa el espectro del voltaje del capacitor z_2 cuando el voltaje de entrada V_{in} tiene un valor de 12.8V, y en la figura 40.b se observa el espectro del voltaje del capacitor z_2 cuando el voltaje de entrada V_{in} tiene un valor de 45V.

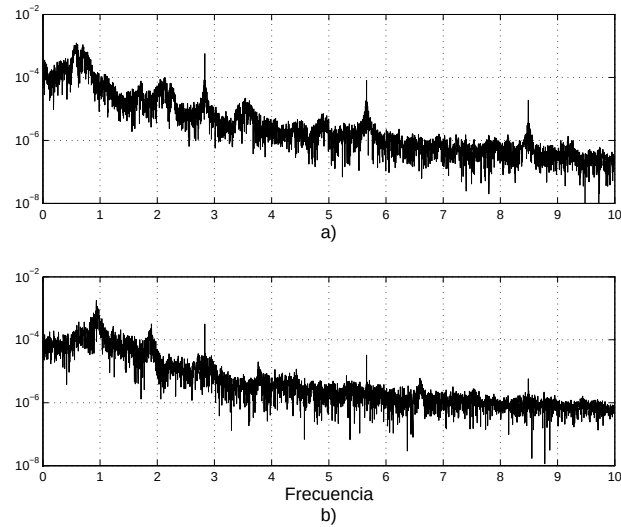


Figura 40: Magnitud del espectro del voltaje del capacitor z_2 considerando que el voltaje de entrada V_{in} tiene los valores; a) 12.8V y b) 45V.

De los espectros que se muestran en la figura 40, se observa que aumenta la amplitud de los componentes frecuenciales diferentes a la frecuencia de la señal de modulación $h(t)$. Sin embargo, se tiene que también el armónico a la frecuencia de la señal de modulación $h(t)$ disminuye su amplitud.

Al igual que cuando ocurren variaciones en la ganancia k_p , si ocurren variaciones en el voltaje de entrada V_{in} el convertidor sigue trabajando dentro de los márgenes de diseño y en la práctica resulta difícil detectar la dinámica compleja.

V.2.3. Variación en el periodo T de la señal de modulación $h(t)$.

En esta subsección se estudian los cambios en la dinámica del convertidor cuando ocurren variaciones en el periodo T de la señal de modulación $h(t)$. Este caso se considera debido a que el periodo T aparece de manera explícita en las condiciones que se presentaron en la sección IV.2. Además, no se estudia en la literatura revisada que utiliza mapeos discretos, ya que es necesario que el periodo T sea constante para la obtención de dichos mapeos (El-Aroudi *et al.* (2005)). En la literatura que no utiliza mapeos discretos para el estudio de la dinámica del convertidor buck, en general el bloque PWM se considera una etapa de adecuación para la señal de control y no se ha estudiado con mayor profundidad los efectos sobre la dinámica del convertidor (Navarro-López *et al.* (2008); Colombo (2008); Dai *et al.* (2005); Zhusubaliyev y Mosekilde (2003)).

En el diseño clásico de un controlador PWM la selección del periodo T se basa en la aplicación en la cual el convertidor se utilizará, por lo que la elección del periodo T depende en muchos casos de la experiencia del diseñador (Mohan *et al.* (2002); Agrawal (2001)). En el ejemplo que se utiliza

en este trabajo la selección del periodo T se realizó en función de un ejemplo desarrollado por Agrawal (2001), teniendo un valor de diseño de $0,3536s^8$.

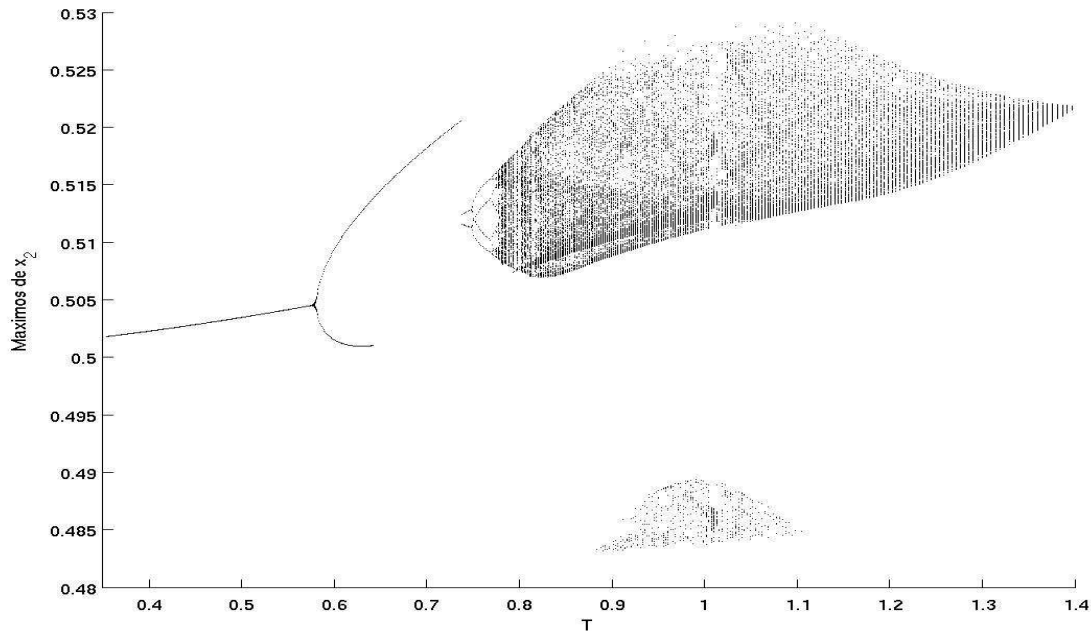


Figura 41: Diagrama de bifurcación del convertidor buck, considerando el periodo T como parámetro de bifurcación y el intervalo de $0.3536s$ a $1.4s$.

El diagrama de bifurcación se construyó utilizando el mismo mapeo que en las subsecciones anteriores, y considerando que el periodo T toma valores entre $0.3536s$ a $3.5s$. El diagrama que se obtuvo resultó tan diverso que se muestra en dos segmentos. El primer segmento abarca el intervalo de $0.3536s$ a $1.4s$ y se muestra en la figura 41, el segundo segmento abarca de $1.4s$ a $3.5s$ y se muestra en la figura 42.

De la figura 41, se observa que cuando se consideran variaciones en el periodo T , al principio del diagrama se presenta un escenario similar al que presenta el convertidor si se considera la ganancia k_p , ocurriendo primero una bifurcación por duplicación de periodo cuando el periodo T tiene un valor aproximado de $0.58s$ y posteriormente se presenta la oscilación que tiene dos mínimos y un solo máximo cuando el periodo T se encuentra en el intervalo de $0.6417s$ a $0.7367s$. A partir de que el periodo T adquiere valores mayores a $0.7367s$ la dinámica del convertidor es diferente a los otros casos que se han estudiado. Para ilustrar esto, en la figura 43 se muestra un acercamiento del diagrama de la figura 41.

Cuando el periodo T tiene un valor aproximado de $0.7367s$ se presenta un cambio en la dinámica del convertidor; se mantiene la órbita 2-periódica, sin embargo, se deja de presentar la con-

⁸En variables sin normalizar corresponde a un tiempo aproximado de $5 \times 10^{-5}s$

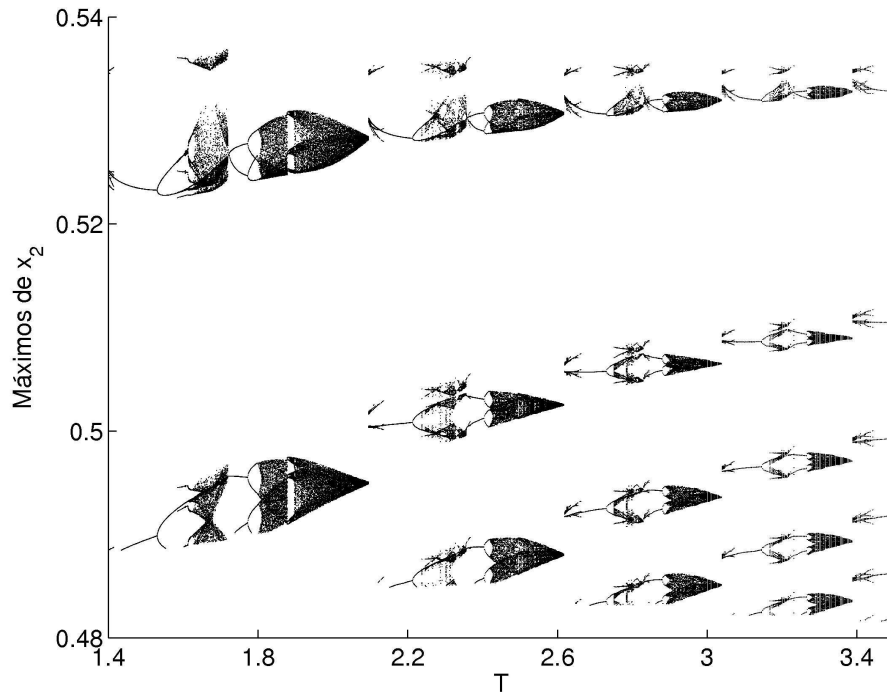


Figura 42: Diagrama de bifurcación del convertidor buck, considerando el periodo T como parámetro de bifurcación y el intervalo de 1.4s a 3.5s.

mutación en el interruptor cada t_k segundos. Cuando el periodo T tiene un valor aproximado de 0.7457s se presenta una bifurcación por duplicación de periodo, presentándose una órbita 4-periódica. Se tiene que cuando el periodo T tiene un valor aproximado de 0.7511s se presenta una órbita 3-periódica debido a que dos de las órbitas colapsan en una sola; la órbita 3-periódica sólo existe en este valor del parámetro ya que cualquier variación hace que el sistema exhiba una órbita 4-periódica. Ocurre una nueva bifurcación por duplicación de periodo cuando el periodo T tiene el valor de 0.7696s. Resulta interesante que cuando el periodo T tiene un valor aproximado de 0.774s, el sistema exhibe una órbita 6-periódica y cualquier pequeña variación del valor ocasiona que el sistema exhiba una órbita 8-periódica.

El convertidor presenta una nueva bifurcación por duplicación de periodo exhibiendo una órbita 16-periódica, cuando el periodo T alcanza el valor de 0.777s y el diagrama de la figura 43 se empieza a llenar densamente, por lo que es un indicador de que el convertidor presenta una órbita caótica.

Para definir las zonas de los diagramas de las figuras 41 y 42 donde se presentan órbitas caóticas, se utiliza el máximo exponente de Lyapunov, el cual se muestra en la figura 44.

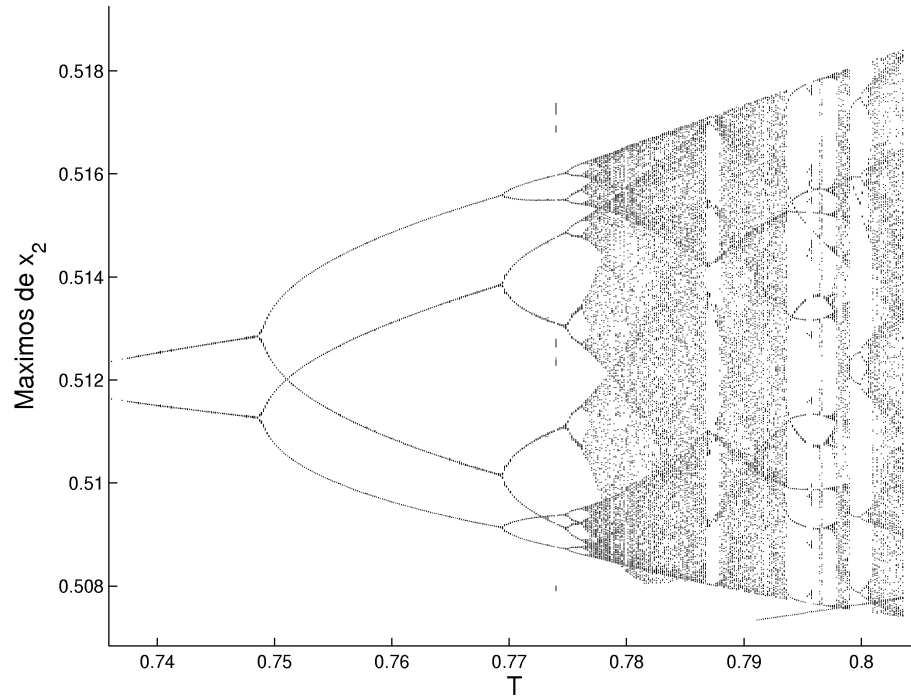


Figura 43: Acercamiento del diagrama de la figura 41.

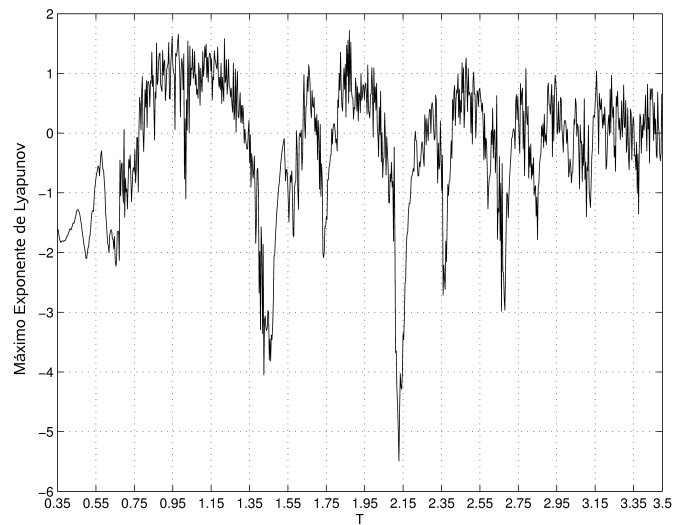


Figura 44: Máximo exponente de Lyapunov considerando variaciones en el periodo T .

El diagrama de la figura 41, muestra una región amplia donde el convertidor muestra un comportamiento caótico. Este comportamiento no es uniforme a lo largo de toda esta región, presentándose órbitas periódicas de diferentes periodos. Se encontró que el comportamiento caótico que presenta el convertidor es diferente de acuerdo al valor del periodo T , teniéndose tres diferentes comportamientos. Para mostrar la diferencia en cada uno de los comportamientos caóticos encontrados se utilizara el mapeo estroboscópico.

El primer mapeo estroboscópico se obtiene cuando el periodo T tiene el valor de 0.78s, el cual se muestra en la figura 45. Este mapeo no presenta un conjunto de puntos aislados o una curva cerrada; la curva que se forma es más sencilla que la que se presenta cuando se consideran variaciones en la ganancia k_p o el voltaje de entrada V_{in} . Sin embargo, al igual que los mapeos obtenidos anteriormente, cuando se realiza un acercamiento a la curva se observa una estructura más complicada, teniendo que se encuentran líneas más delgadas dentro de lo que en principio se aprecia como una sola línea⁹, como se puede observar en la figura 45.c.

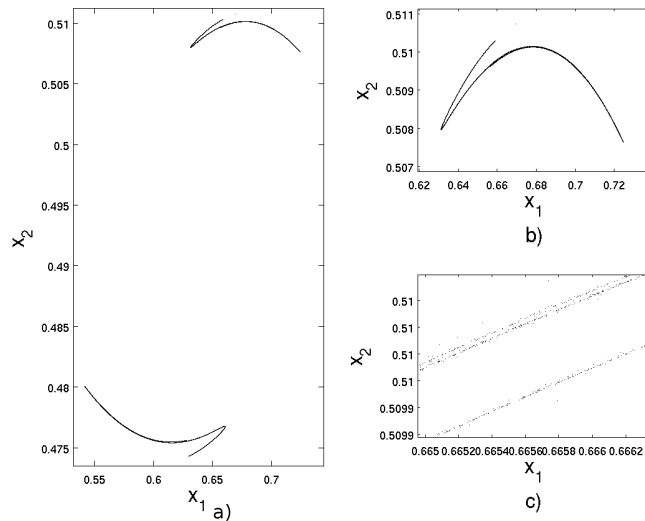


Figura 45: Mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando que el periodo T tiene el valor de 0.78s.

El mapeo estroboscópico mantiene la forma que se muestra en la figura 45.a mientras el periodo T se encuentre entre los valores de 0.777s a 0.85s. El mapeo toma una nueva forma cuando el valor del periodo T se encuentra en el intervalo 0.858s a 0.884s o en el intervalo 1.1s a 1.4s, el cual se muestra en la figura 46. Se observa que, al igual que el mapeo de la figura 45 se vuelve a presentar el mismo fenómeno de que su estructura se forma de líneas muy delgadas dobladas sobre sí mismas.

⁹Este fenómeno es conocido como pastel de mil hojas.

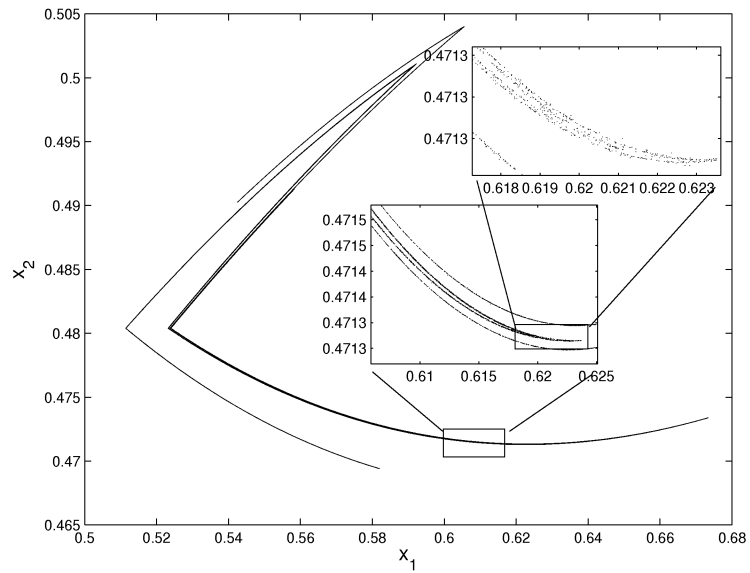


Figura 46: Mapeo estroboscópico del convertidor buck, para $T = 1,2s$.

El tercer tipo de mapeo estroboscópico que se observa cuando el convertidor exhibe un comportamiento caótico que se muestra en el diagrama de la figura 41, ocurre cuando el valor del periodo T se encuentra en el intervalo de 0.86s a 1.1s. Un mapeo correspondiente a este intervalo se muestra en la figura 47.

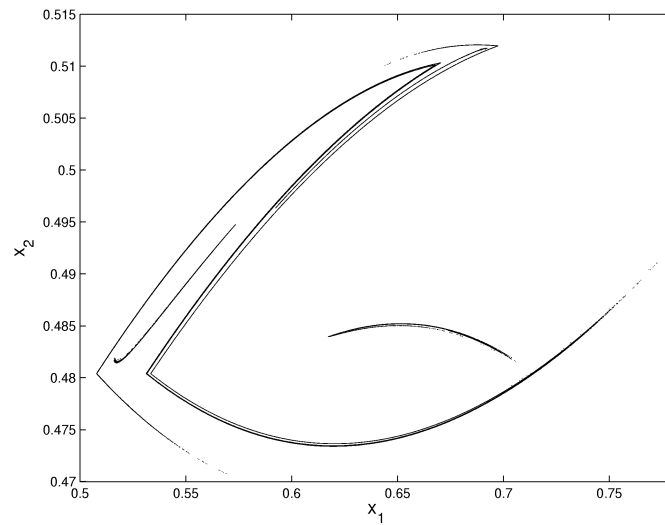


Figura 47: Mapeo estroboscópico del convertidor buck, considerando que el periodo T tiene el valor de 0.98s.

De la figura 47 se observa que este mapeo está conformado por más líneas; estas líneas representan la dinámica de la región de puntos que aparece en la parte inferior del diagrama de la figura

41. Este mapeo, al igual que los anteriores, se forma de líneas muy delgadas dobladas una sobre otra.

En la figura 48 se muestra el mapeo de Lorenz considerando el valor del periodo T igual a 1.2s. Se observa que su forma no es tan complicada como el que se obtiene cuando se considera la ganancia k_p o el voltaje de entrada V_{in} (ver figuras 24 y 33).

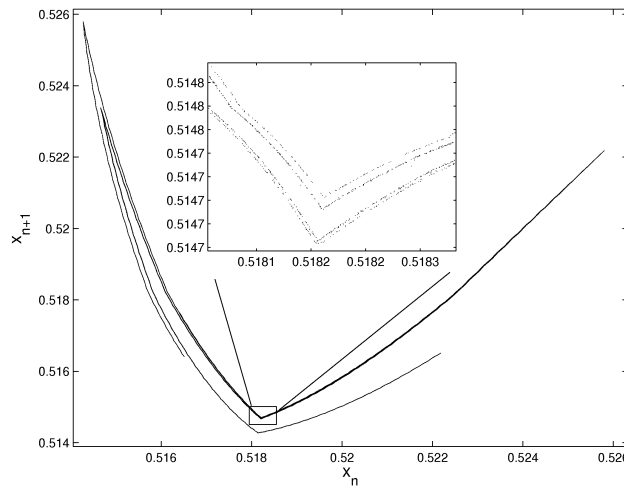


Figura 48: Mapeo de Lorenz considerando el valor del periodo T igual a 1.2s.

El atractor obtenido de la reconstrucción de los estados se muestra en la figura 49, cuando el valor del periodo T es: a) de 0.78s, b) de 0.98s y c) de 1.2s. Los tres atractores mostrados en la figura 49 muestran similitud, aunque no son iguales y los valores del factor de retardo en tiempo ζ es diferente para cada caso.

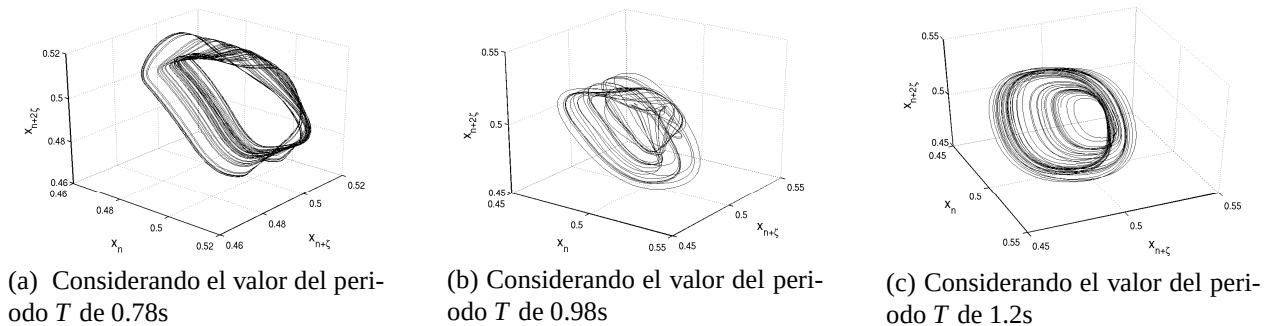


Figura 49: Reconstrucción del atractor para varios valores del periodo T

El diagrama de la figura 41 también muestra que cuando el periodo T adquiere valores mayores a 1,12s, la región del diagrama de bifurcación donde se presenta comportamiento caótico empieza a disminuir. Esta disminución continua hasta que el periodo T tiene un valor cercano a 1.4s, donde el área donde se llena densamente corresponde casi a un punto.

En el diagrama de la figura 42 se observa una nueva bifurcación en la dinámica del convertidor cuando el periodo T tiene un valor aproximado a 1.41s, ocurriendo una transición a una órbita 2-periódica. Esta órbita se mantiene hasta que el periodo T alcanza el valor de 1.52s y ocurre una nueva bifurcación por duplicación de periodo. En este punto se observa que la rama superior del diagrama presenta una ruta al caos similar a la que se presenta en la figura 43. Sin embargo, una vez que se alcanza el comportamiento caótico se vuelve a presentar una bifurcación que lleva del comportamiento caótico a una órbita 4-periódica. A partir de esta órbita la dinámica del convertidor vuelve a presentar una cascada de duplicaciones de periodo hasta llegar a una órbita caótica, que se comporta de manera similar al comportamiento que se observa cuando el periodo T se encuentra en el intervalo de 0.777s a 1.4s, sólo que restringido a una menor área. En la órbita de la rama inferior presenta un comportamiento similar.

Nótese que en la región correspondiente a $T \in [0,74s, 0,77s]$ aproximadamente, esta figura muestra dos diagramas simétricos. Cada uno de estos diagramas es similar al diagrama de bifurcación del mapeo logístico, típico ejemplo de los sistemas caóticos discretos de primer orden (ver figura 43). Esto indica que la dinámica del mapeo logístico está inmersa dentro de la dinámica de este circuito convertidor, y su sola presencia es un indicador seguro de comportamiento caótico. Este importante hecho no había sido reportado anteriormente.

Cuando el periodo T alcanza el valor de 2.1s, el sistema presenta una nueva bifurcación pasando a una órbita 2-periódica y, ante cualquier incremento pequeño se pasa a una órbita 9-periódica. En este punto se observa que la primera rama se repite así misma, mientras que la segunda rama se repite dos veces formando una tercera rama. Este proceso de repetición se repite hasta que es casi imperceptible la forma de cada uno de los componentes.

Para ilustrar que las propiedades de las pequeñas órbitas caóticas son réplicas de la primera zona que presenta un régimen caótico en el convertidor, en la figura 50 se muestra el mapeo de Lorenz considerando que el periodo T tiene el valor de 2.48s. De la figura se observa que la curva que se produce se compone de 3 secciones. En el acercamiento a una de estas zonas se observa que la figura tiene la misma forma que el mapeo que se muestra en la figura 48.

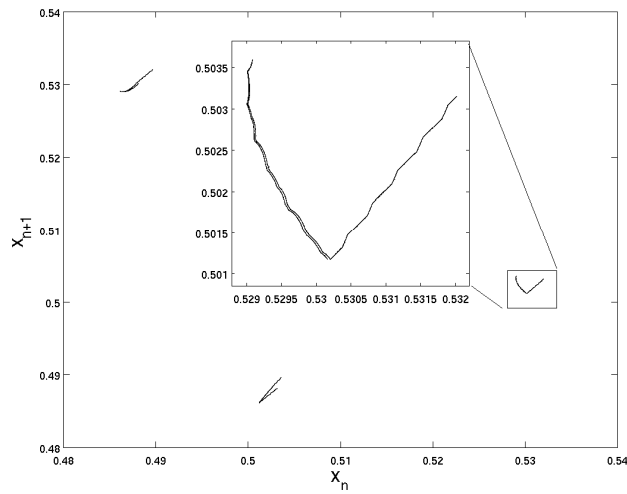


Figura 50: Mapeo de Lorenz considerando el valor del periodo T de 2.48s.

Es importante hacer notar que al considerar variaciones en el periodo T , en el convertidor ocurre por lo menos dos conmutaciones del interruptor por ciclo de la señal de modulación $h(t)$. Para ilustrar lo anterior, en la figura 51 se muestra la señal $k_p(\bar{x}_2 - x_2)$ y la señal de modulación $h(t)$ cuando el periodo T tiene el valor de 0.78s.

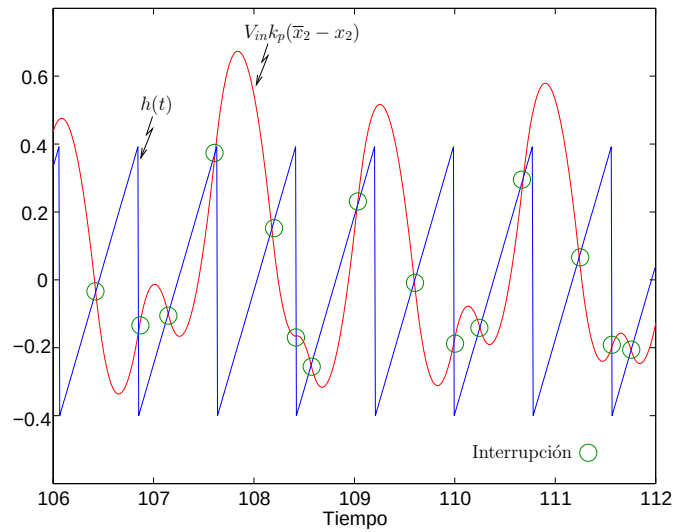


Figura 51: Evolución de $k_p(\bar{x}_2 - x_2)$ y la señal de modulación $h(t)$ cuando el periodo T adquiere los valores: a) de 0.62s y b) de 0.78s.

Al igual que en los casos anteriores, al considerar variaciones en el periodo T se tiene que las oscilaciones que presenta el convertidor buck están dentro de los límites de diseño en la mayoría de los casos. El promedio del voltaje del capacitor x_2 se muestra en la figura 52. Se observa que el error con respecto a la señal de referencia es nuevamente pequeño.

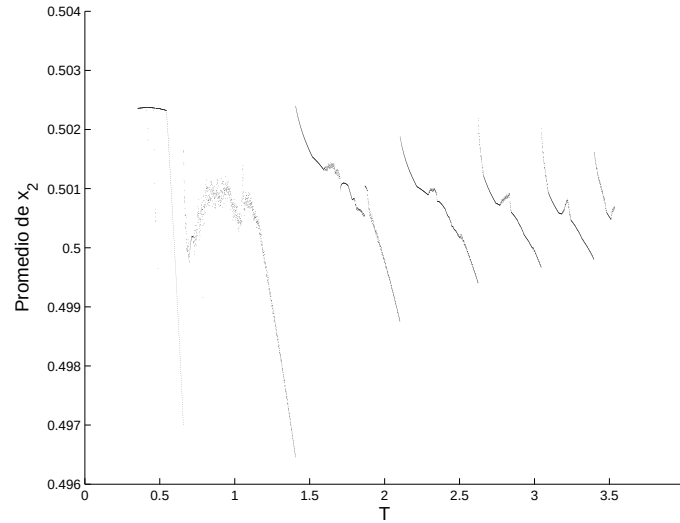


Figura 52: Promedio del voltaje del capacitor x_2 considerando variaciones en el periodo T .

Con respecto al cambio frecuencial, en la figura 53 se muestra el espectro del voltaje del capacitor x_2 cuando el periodo T tiene un valor de 1.2s. A diferencia de los casos anteriores, no se presentan armónicos de la frecuencia de la señal de modulación; en este caso el armónico más cercano corresponde a la frecuencia de 2.4Hz. Los armónicos que tienen una mayor magnitud corresponden a la oscilación 3-periódica que se presenta cuando el valor del periodo T es igual a 1.1s.

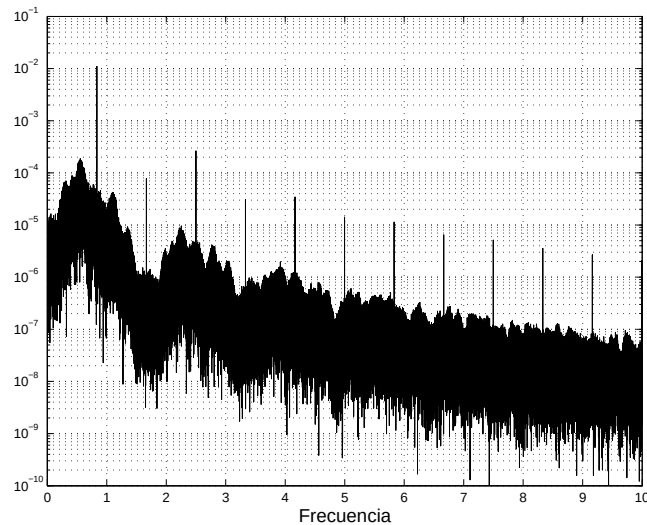


Figura 53: Magnitud del espectro del voltaje del capacitor x_2 cuando el periodo T tiene un valor de 1.2s.

V.3. Conclusiones

En este capítulo se mostró que el convertidor buck exhibe una amplia variedad de dinámicas complejas, diferentes todas ellas, en función del parámetro de bifurcación. La construcción del diagrama de bifurcación no resultó un problema trivial, debido a que se presentan órbitas periódicas con características particulares como la presencia de un solo máximo y dos mínimos. En consecuencia, el análisis de la dinámica del convertidor tiene que hacer uso de varias herramientas para poder realizar un estudio completo.

Se mostraron resultados originales al considerar variaciones en la ganancia k_p y en el periodo T . Estos resultados no se encontraron en la literatura consultada. Se corroboraron los resultados que se muestran en la literatura revisada cuando se presenta un aumento en el valor del voltaje de entrada V_{in} y se complementan estos resultados considerando el caso cuando el valor del voltaje de entrada V_{in} disminuye.

La dinámica que exhibe el convertidor buck cuando se varía la ganancia k_p resulta interesante y variada. Uno de los resultados importantes es que se presenta un comportamiento caótico existiendo siempre una interrupción por ciclo de la señal de modulación $h(t)$, contrastando con el resultado en la literatura consultada donde se considera un requisito necesario la pérdida de interrupciones para la existencia del comportamiento caótico.

Cuando se considera que el valor del voltaje de entrada disminuye, se presenta un comportamiento caótico que no ha sido reportado en la literatura. Este comportamiento caótico presenta las mismas características que el que se presenta cuando se aumenta el valor del voltaje de entrada V_{in} . Se comprobó que existen ciclos de la señal de modulación $h(t)$ que no presentan una conmutación en el interruptor, lo cual es un comportamiento diferente a los otros dos casos estudiados.

El variar el periodo T se origina que el convertidor buck exhiba una dinámica compleja muy diversa, diferente al comportamiento al considerar la ganancia k_p o el voltaje de entrada V_{in} . Como resultado de este trabajo esta dinámica es reportada en (Miranda y Alvarez (2009)), complementando las reglas de diseño clásica que sugieren que el inverso del periodo T sea mucho mayor al de la frecuencia de corte del filtro pasa bajas que forma el circuito RLC, al considerar casos en que esta restricción no se cumple.

En los tres casos de estudio se observa una dinámica compleja en el convertidor buck. Se mostró que este comportamiento se mantiene dentro de los límites de diseño, por lo que es posible que muchos diseños prácticos exhiban dinámica compleja. Sin embargo, como el comportamiento dinámico que presenta el convertidor esta dentro de los límites de diseño, en la práctica resulta difícil detectar la dinámica compleja.

Capítulo VI

Caos homoclínico en el convertidor buck

VI.1. Introducción

En el capítulo anterior se demostró que el convertidor buck, bajo la acción del esquema de conmutación

$$\sigma = V_{in} (k_p (\bar{x}_2 - x_2) - h(t)), \quad (93)$$

presenta los puntos de equilibrio

$$(x_1^p, x_2^p) \in \left\{ (0, 0), \left(\frac{\bar{x}_2}{R_n}, \bar{x}_2 \right), \left(\frac{1}{R_n}, 1 \right) \right\} \quad (94)$$

cuando la ganancia k_p es negativa, la señal de modulación $h(t)$ es igual a cero y la señal de referencia $\bar{x}_2$ toma cualquier valor en el intervalo $(0, 1)$.

En la práctica se quiere que el convertidor converja al punto de equilibrio $(\bar{x}_2/R_n, \bar{x}_2)$. Sin embargo, en la sección V.2.1 se demostró que, para estas condiciones de operación, este punto de equilibrio es inestable. Por lo anterior, en la práctica no se ha mostrado fuerte interés en el caso en que la ganancia k_p tenga un valor negativo. Sin embargo, en este caso es posible que se presente un escenario cuyo control puede ser de potencial utilidad en algunas aplicaciones. Específicamente, bajo ciertas condiciones es posible que este dispositivo, con el esquema de conmutación mencionado, exhiba el denominado caos homoclínico, para el cual se puede aplicar una de las muy escasas herramientas analíticas desarrolladas para el estudio de la dinámica caótica.

Un escenario posible para que un sistema no autónomo de segundo orden presente caos homoclínico es que pueda descomponerse en un sistema hamiltoniano perturbado, que el sistema nominal (no perturbado) tenga un punto de equilibrio hiperbólico con una órbita homoclínica y que ésta encierre un conjunto de órbitas periódicas organizadas alrededor de otro punto de equilibrio tipo centro. Se puede decir que la órbita homoclínica, en la cual coinciden la variedad estable y la inestable del equilibrio hiperbólico, separa en el espacio de estado una región de órbitas periódicas

de otras órbitas que son inestables. En la figura 54 se muestra una representación simplificada de este escenario.

Dado que el circuito buck con el esquema de conmutación anterior y una ganancia k_p negativa tiene tres puntos de equilibrio, uno hiperbólico y otros dos tipo centro, presenta un escenario donde posiblemente pueda generarse una dinámica caótica de tipo homoclínico, por lo que podría aplicarse la herramienta analítica mencionada. Una dificultad importante es, sin embargo, que esta técnica ha sido desarrollada para sistemas diferenciables y el circuito buck, al ser discontinuo, no cumple esta condición. No obstante, es posible obtener modelos aproximados que muestren una dinámica similar al circuito conmutado. Este análisis es el problema discutido en este capítulo.

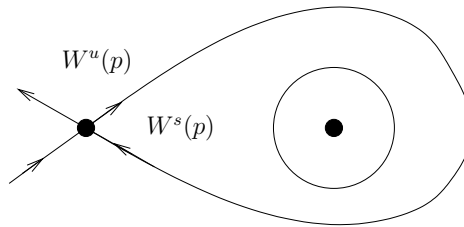


Figura 54: Esquema de una órbita homoclínica.

Son escasos los sistemas en los cuales se puede mostrar la existencia de una órbita homoclínica. En Alvarez y Curiel (1997) se demuestra que un sistema de segundo orden con un control proporcional y una función saturación en la entrada presenta una órbita homoclínica. Ya se mencionó con anterioridad en este documento que el convertidor buck, con el esquema de conmutación (93), se puede representar de una manera similar. La principal diferencia con el trabajo mencionado es que en el convertidor se tiene una función signo en la entrada y la señal de perturbación es discontinua.

En la siguiente sección se describe el método de Melnikov/Smale, el cual es necesario para poder determinar si un sistema presenta caos homoclínico. En la sección VI.3 se estudia el convertidor buck con una señal de modulación $h(t)$ sinusoidal, y se demuestra que con esta señal el convertidor puede presentar caos homoclínico. En la sección VI.4 se analiza el comportamiento cuando se considera la función diente de sierra como señal de modulación $h(t)$, utilizada normalmente en un controlador PWM. Finalmente, en la última sección se dan algunas conclusiones.

VI.2. Método de Melnikov/Smale

Para poder explicar este método es necesario dar algunas definiciones.

Variedad Estable. La variedad estable $W^s(p)$ asociada a un punto de equilibrio p , es el subconjunto máximo del espacio de estado para el cual toda trayectoria que inicie en él tiende hacia el equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$.

Variedad Inestable. La variedad inestable $W^u(p)$ asociada a un punto de equilibrio p , es el subconjunto máximo del espacio de estados para el cual toda trayectoria que inicie en él tiende al equilibrio conforme $t \rightarrow -\infty$.

En la figura 54 se ilustra la variedad estable e inestable asociadas a un punto homoclínico.

Punto Homoclínico Transversal. Es un punto donde las variedades estable e inestable asociadas a un punto de equilibrio homoclínico se intersectan de manera transversal.

Utilizando las definiciones anteriores se puede decir que el método de Melnikov/Smale consiste en la determinación de la existencia de intersecciones transversales de las variedades estables e inestables de un punto homoclínico en un sistema sometido a pequeñas perturbaciones. La existencia de este tipo de intersecciones es suficiente para que un mapeo de Poincaré del sistema sea equivalente al mapeo de Smale, el cual ya se ha demostrado que tiene una dinámica caótica (Wiggins (1990)). En consecuencia, la determinación de intersecciones transversales de las variedades mencionadas conduce al establecimiento de condiciones para que un sistema presente esta dinámica.

La base principal del método de Melnikov/Smale es el teorema de Smale-Birkhoff de órbitas homoclínicas (Parker y Chua (1989)), el cual se enuncia a continuación.

Teorema 3 Sea $P : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ un difeomorfismo con un punto fijo hiperbólico x^* . Si $W^s(x^*)$ y $W^u(x^*)$ se intersectan transversalmente en otro punto distinto a x^* , entonces P actúa como un mapeo de Smale.

El método se aplica a sistemas que se pueden descomponer en un sistema hamiltoniano perturbado de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t, \varepsilon),\end{aligned}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El sistema anterior se puede escribir también en la forma vectorial

$$\dot{q} = J \cdot DH(q) + \varepsilon g(q, t), \quad (96)$$

donde $q = (x, y)$, $DH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)$, $g = (g_1, g_2)$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Una condición necesaria es que el campo vectorial (95) es suficientemente diferenciable y g es periódica con respecto a t con periodo $T = 2\pi/\omega$. Se considera el sistema nominal de (95) cuando $\varepsilon = 0$ y es descrito por la expresión

$$\dot{q} = J \cdot DH(q). \quad (97)$$

Para poder utilizar el método es necesario que el sistema nominal presente un punto hiperbólico p_o , conectado a sí mismo mediante una órbita homoclínica

$$q_o(t) \equiv (x^h(t), y^h(t)).$$

Sea $\Gamma_{p_o} = \{q \in \mathfrak{R}^2 | q = q_o(t), t \in \mathfrak{R}\} \cup \{p_o\}$. El interior de Γ_{p_o} se compone de una familia de órbitas periódicas $q_\alpha(t)$ de periodo T_α , siendo $\alpha \in (-1, 0)$ un índice para diferenciar cada órbita periódica. Se asume que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} q_\alpha(t) = q_o(t) \quad y \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha = \infty. \quad (98)$$

Lo anterior nos indican que la familia de órbitas periódicas en el interior de Γ_{p_o} incluye órbitas periódicas de todos los periodos.

Si el sistema (97) se somete a una pequeña perturbación periódica $\varepsilon g(q, t)$, la órbita homoclínica se destruye pudiendo dar lugar a puntos homoclínicos transversales. Una función que proporciona información acerca de la forma en que la órbita se modifica, es la llamada “integral de Melnikov” definida de la siguiente manera (Wiggins (1990))

$$M(t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(q_o(t)) \cdot g(q_o(t), \omega(t + t_o)) dt. \quad (99)$$

Dado que la integral de Melnikov proporciona información acerca de las modificaciones que sufre la órbita homoclínica ante una pequeña perturbación, es posible utilizarla para mostrar la existencia de puntos homoclínicos transversales, lo cual se enuncia de manera formal en el siguiente teorema, conocido como teorema de Melnikov.

Teorema 4 *Considérese el sistema (95). Si existe un valor de t_0 , denotado por $\bar{t}_0$, tal que se cumple*

$$M(\bar{t}_0) = 0 \quad y \quad \left. \frac{\partial M(t_0)}{\partial t_0} \right|_{t_0=\bar{t}_0} \neq 0, \quad (100)$$

entonces, para un ε lo suficientemente pequeño, las variedades estable e inestable del sistema perturbado se intersectan una con otra de manera transversal y es posible la existencia de un conjunto invariante caótico. Mas aún, si

$$M(t_0) \neq 0 \quad \forall t_0,$$

donde $t_0 \in \mathfrak{R}$, entonces las dos variedades no se intersectan en ningún punto.

En virtud del teorema de Smale-Birkhoff es posible encontrar un mapeo de Poincaré del sistema que sea equivalente al mapeo de Smale, por lo que es posible utilizar el teorema de Melnikov para

determinar si un sistema presenta un comportamiento caótico.

VI.3. El convertidor buck con una señal $h(t)$ sinusoidal

En esta sección se analiza un escenario en el cual se puede utilizar el método de Melnikov/Smale al convertidor buck con el esquema de conmutación (93). Para poder utilizar el método de Melnikov/Smale es necesario calcular la órbita homoclínica asociado a un punto heteróclínico en el sistema.

Considerando las variables definidas en la sección III.2, las cuales son:

$$y_1 = \sigma, \quad (101a)$$

$$y_2 = \dot{\sigma}. \quad (101b)$$

entonces el convertidor buck con el esquema de conmutación (93) y las variables (101), es descrito por la expresión

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (102a)$$

$$\dot{y}_2 = -ay_1 - by_2 - c \operatorname{sign}(y_1) + \varepsilon(t), \quad (102b)$$

donde

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{R_n} \quad \text{y} \quad c = \frac{k_p V_{in}}{2}.$$

La variable $\varepsilon(t)$ se define como

$$\varepsilon(t) = k_p V_{in} \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{2} - h - \frac{1}{R_n} \dot{h} - \ddot{h} \right). \quad (103)$$

Si se considera $\bar{x}_2 = 1/2$ y la señal de modulación

$$h(t) = \beta \sin(\omega t), \quad (104)$$

se tiene que

$$\varepsilon(t) = \gamma \sin(\omega t + \arctan(\phi)), \quad (105)$$

donde

$$\gamma = k_p V_{in} \beta \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{1}{R_n} - 2 \right) \omega^2 + 1} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\omega}{1 - \omega^2}.$$

La expresión (101) se puede reescribir de la forma

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (106a)$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - c \operatorname{sign}(y_1) + \xi(y, t), \quad (106b)$$

donde $\xi(y, t) = -by_2 + \varepsilon(t)$. Si $\xi(y, t) = 0$ se tiene que el convertidor es descrito por la expresión

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (107a)$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - c \operatorname{sign}(y_1). \quad (107b)$$

Se puede considerar a la expresión anterior como el sistema nominal del convertidor. Si $k_p < 0$ el sistema (107) presenta los siguientes puntos de equilibrio

$$(y_1^p, y_2^p) = \{(-c, 0), (0, 0), (c, 0)\},$$

donde el origen es un punto de equilibrio hiperbólico y los otros dos puntos de equilibrio son centros.

La órbita que conecta al punto de equilibrio hiperbólico con sí mismo es

$$(y_1^h, y_2^h) = (c(1 + \cos(t)), -c \sin(t)), \quad (108)$$

para $-\pi \leq t \leq \pi$. Para ilustrar la dinámica del convertidor, en la figura 55 se muestra el retrato de fase del sistema (106) para diferentes condiciones iniciales, y considerando $\xi(x, t) = 0^1$, $a = 1$, $c = k_p V_{in}/2$, $k_p = -1$ y $V_{in} = 20$.

En el sistema (107), donde la órbita que conecta al punto hiperbólico con sí mismo tiene un periodo de 2π , contradice la hipótesis del método de Melnikov/Smale que asume que el periodo de la órbita homoclínica es $T = \infty$. Por lo tanto, el método de Melnikov/Smale no puede ser aplicado directamente al convertidor buck representado por la expresión (106).

Iván Herrera en su trabajo de tesis maestría² Herrera (2009), muestra el uso del método de Melnikov/Smale para un sistema con la forma de la expresión (102). Se considera la siguiente aproximación de la función signo

$$c \operatorname{sign}(y_1) \approx \operatorname{sat}(c, d, y_1), \quad (109)$$

¹Se considera que $R_n \rightarrow \infty$ y $\beta = 0$.

²Este trabajo se encuentra actualmente en desarrollo

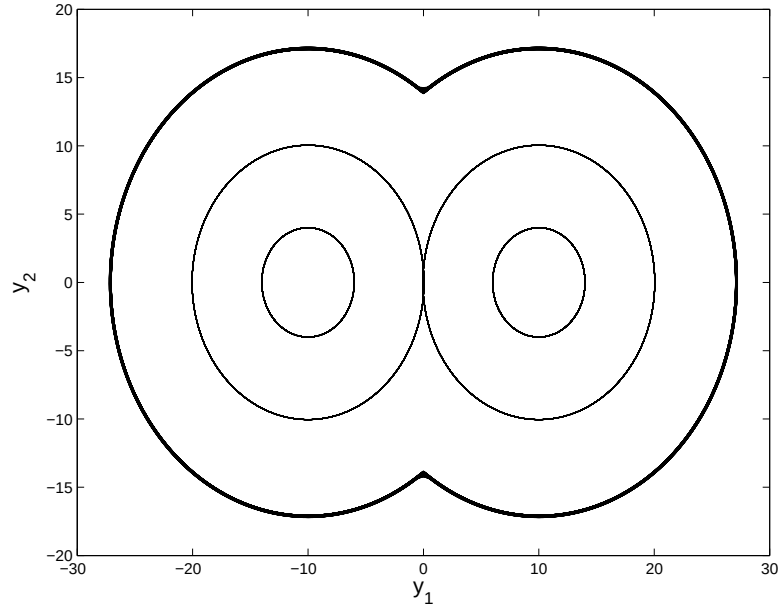


Figura 55: Retrato de fase del sistema nominal del convertidor buck.

donde $d \gg 0$ y la expresión de la función $\text{sat}(c, d, y_1)$ es

$$\text{sat}(c, d, y_1) = \frac{c}{2d} (|y_1 + d| - |y_1 - d|). \quad (110)$$

Sustituyendo la expresión (109) en (106) se tiene

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (111a)$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - \text{sat}(c, d, y_1) + \xi(y, t). \quad (111b)$$

Para poder representar la expresión anterior de la forma (95) se propone el siguiente Hamiltoniano

$$H(y) = \frac{1}{2}y_2^2 + V(y_1), \quad (112)$$

donde

$$V(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}y_1^2 + c(y_1 + \frac{d}{2}) & y_1 < -d, \\ \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{c}{2d}y_1^2 & |y_1| < d, \\ \frac{1}{2}y_1^2 - c(y_1 - \frac{d}{2}) & y_1 > d. \end{cases}$$

y la señal g

$$(g_1, g_2) = (0, \xi(y_1, t)). \quad (113)$$

Considerando la expresión (112) se tiene que la órbita homoclínica asociada al punto de equilibrio heteróclínico del sistema (111) es

$$\left(\hat{y}_1^h, \hat{y}_2^h\right) = \begin{cases} (d \exp(k(t-t_1)), dk \exp(k(t-t_1))) & t < t_1, \\ ((c+k_1 \cos(t)), -k_1 \sin(t)) & t_1 \leq t \leq t_2, \\ (d \exp(-k(t-t_1)), -dk \exp(-k(t-t_1))) & t > t_2, \end{cases} \quad (114)$$

donde $k = \sqrt{(c/d) - 1}$, $k_1 = \sqrt{c^2 - cd}$ y $t_1 = \arccos((d-c)/k_1)$. Dado que para obtener la órbita homoclínica (114) se considera la aproximación (109), cuando $d \rightarrow 0$ se tiene que

$$\lim_{d \rightarrow 0} \hat{y}^h = y^h.$$

Es importante hacer notar que la órbita (114) tiene un periodo infinito, por lo que el método de Melnikov/Smale se puede aplicar al sistema (111).

Para utilizar el teorema de Melnikov es necesario calcular la integral de Melnikov (99), en el caso del convertidor considerando las expresiones (112)-(114) se tiene que la integral de Melnikov es

$$M(t_0) = \kappa \cos(\omega t) + \rho \cos(t), \quad (115)$$

donde

$$\kappa = \frac{4c^2\beta \sqrt{\omega^4 + (b-2)\omega^2 + 1}}{(\omega^2 - 1)} \sin(\omega\pi) \quad \text{y} \quad \rho = \pi(cb)^2.$$

La derivada parcial con respecto a t_0 de la expresión (115) es

$$\frac{\partial M(t_0)}{\partial t_0} = -\kappa\omega \sin(\omega t) - \rho \sin(t). \quad (116)$$

Para mayores detalles consultar Herrera (2009), donde se ilustran resultados numéricos y experimentales.

De las expresiones (115)-(116), utilizando el teorema 4, se tiene que el convertidor buck presenta un conjunto invariante caótico para cualquier valor de los parámetros que satisfagan la condición (100).

En el caso del convertidor buck, el método de Melnikov/Smale arroja un amplio conjunto de parámetros que permiten la presencia de un conjunto invariante caótico. Además, el teorema de Melnikov sólo garantiza la existencia de un conjunto invariante caótico, pero no ofrece información sobre la estabilidad del mismo. Por lo tanto, es probable que la dinámica del convertidor ante variaciones de alguno de los parámetros exhiba una dinámica compleja.

Dados los resultados del método de Melnikov/Smale, es necesario estudiar los cambios en la dinámica del convertidor buck de una manera similar a la que se realiza en el capítulo 5, analizando la dinámica del convertidor a través de experimentos numéricos. Con la diferencia que cuando se encuentre una oscilación irregular acotada que no corresponda a una órbita cuasi periódica, se

tendrá la certeza que es un comportamiento caótico. Los experimentos se realizan con el modelo normalizado, el esquema de conmutación (93) y la señal (104).

Como es posible que un amplio conjunto de parámetros permitan al convertidor exhibir un comportamiento caótico, en este capítulo se considera que el voltaje de entrada $V_{in} = 20V$, la ganancia $k_p = -0,1$, la señal de referencia $\bar{x}_2 = 0,5$, el factor de calidad $R_n = 45,5228$ y la frecuencia $\omega = 1,244\text{rad/s}$. De acuerdo a los resultados del método de Melnikov/Smale, los parámetros fueron seleccionados para que la señal de perturbación $\xi(y, t)$ tenga una pequeña amplitud y una frecuencia cercana a la frecuencia de corte del filtro formado por el circuito RLC del convertidor.

Si se considera la amplitud β de la señal $h(t)$ como parámetro de bifurcación, el diagrama de bifurcación resulta como el mostrado en la figura 56.

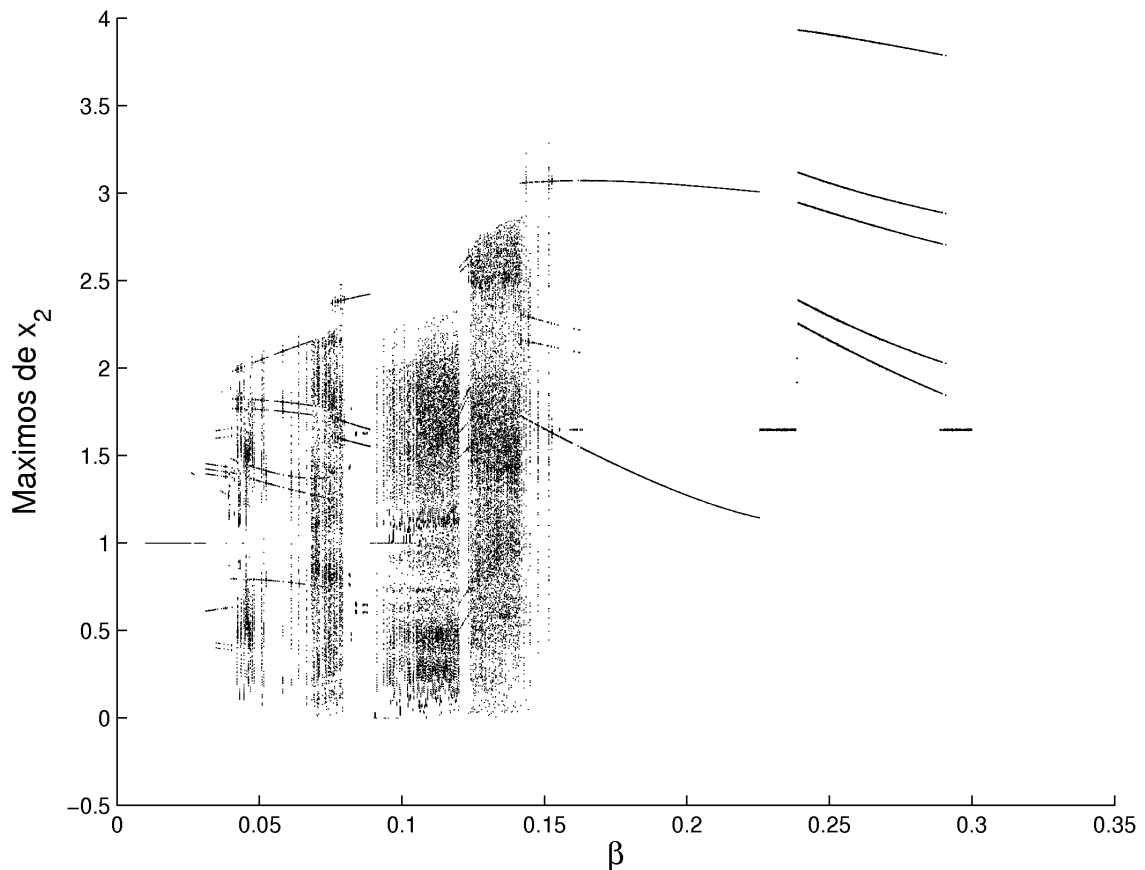


Figura 56: Diagrama de bifurcación del convertidor buck descrito por la expresión (102)

El diagrama de la figura 56 muestra que la dinámica que presenta el convertidor buck no es similar a los casos estudiados con anterioridad. Se tiene que para valores de β entre 0.15 y 0.3 la dinámica del sistema presenta la transición entre órbitas k -periódicas, donde $k \in \{1, 2, 4, 5, 3\}$. Dicha transición ocurre de manera abrupta. En la figura 57 se muestra el retrato de fase del convertidor considerando la amplitud β con un valor de 0.25.

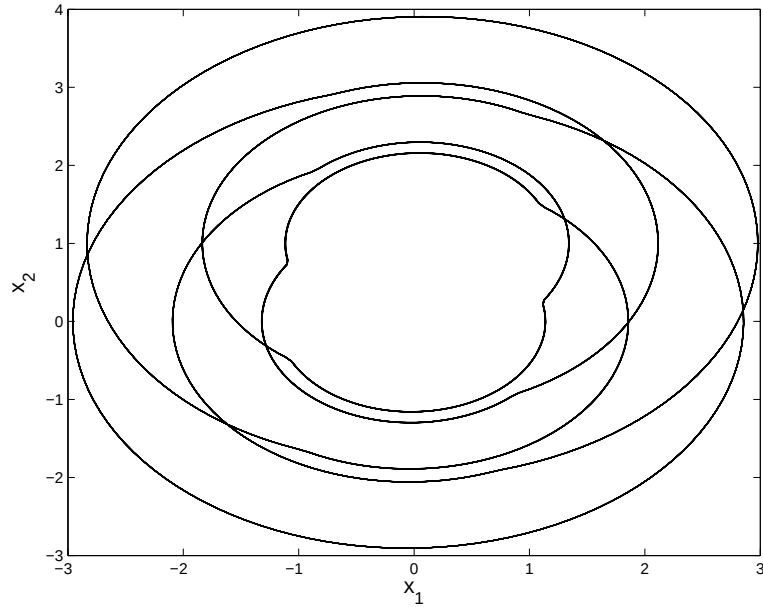


Figura 57: Retrato de fase considerando β igual a 0.25.

El retrato de fase de la figura 57, ilustra el caso cuando el sistema presenta una órbita 5-periódica, que ocurre cuando la amplitud $\beta = 0,25$. Esto difiere de lo esperado por el diagrama de bifurcación de la figura 56. La razón es que en la órbita interior del retrato de fase ocurre una inflexión, que el mapeo que genera el diagrama de bifurcación detecta como un máximo.

En la figura 58 se muestra una acercamiento del diagrama de la figura 56. Se observa que la dinámica del convertidor presenta, además de las órbitas k -periódicas también órbitas caóticas.

Nótese de la figura 58, que la dinámica del convertidor es muy diversa cuando la amplitud β disminuye su valor por debajo de 0.15. Cuando la amplitud β se encuentra entre los valores de 0.106 y 0.9 se tiene que ante cualquier variación de la amplitud β se tiene una transición de una órbita 1-periódica a una órbita caótica, o de una órbita caótica a una órbita 1-periódica.

En la figura 59 se muestra el mapeo estroboscópico considerando la amplitud β con un valor de 0.13, como se espera no se forma un conjunto de puntos aislados ni una curva cerrada.

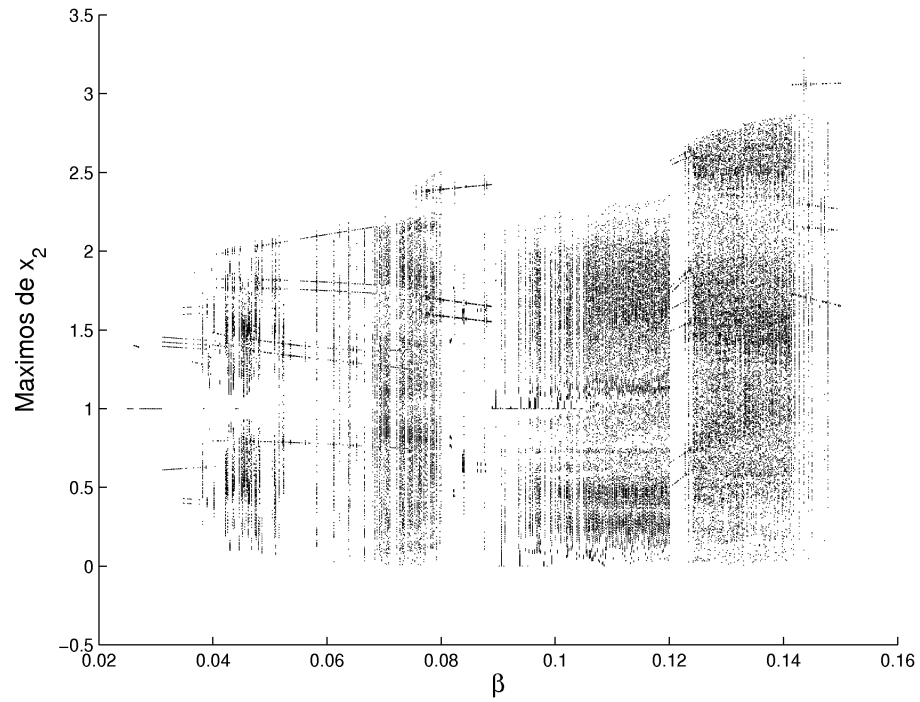


Figura 58: Acercamiento de la figura 56

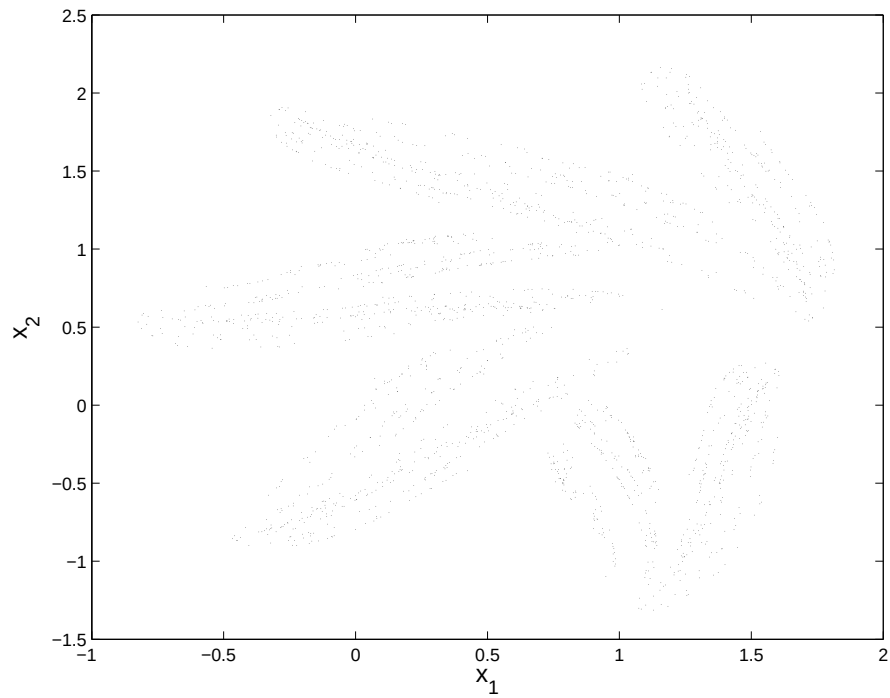


Figura 59: Mapeo estroboscópico considerando dos valores de β

En la figura 60 se muestra el atractor obtenido por la reconstrucción de los estados. Se tiene que el atractor es de naturaleza extraña, es decir, caótico. Este atractor es diferente a los presentados en

el capítulo anterior.

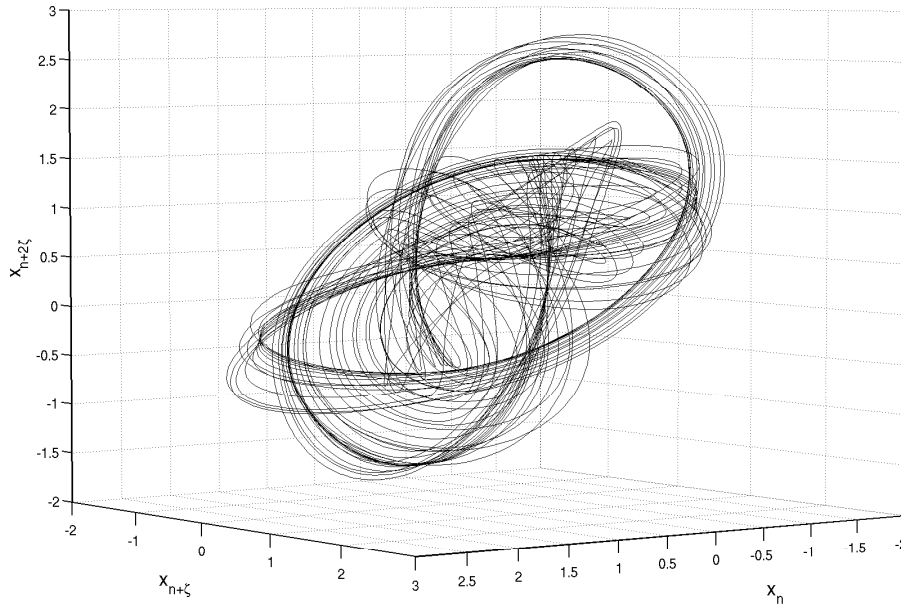


Figura 60: Atractor reconstruido, considerando la amplitud $\beta = 0,13$.

Para valores menores a 0.02 el convertidor converge al punto de equilibrio $(1/R_n, 1)$. En este caso el sistema converge a ese punto debido a las condiciones iniciales con las que se realizaron los experimentos numéricos.

VI.4. El convertidor buck con un control PWM

En esta sección se analiza el comportamiento del convertidor buck con el control PWM utilizado en los capítulos anteriores.

El control PWM difiere con la estrategia de conmutación utilizada en la sección anterior, únicamente en la señal de modulación $h(t)$, la cual se define como

$$h(t) = \frac{\Delta h}{T} [t - \text{int}(t)] + V_l, \quad (117)$$

donde $\Delta h = (V_u - V_l)/V_{in}$, $V_u > V_l$ son los valores inferior y superior respectivamente de la señal h , T es el período, e $\text{int}(t)$ es una función que regresa la parte entera de t . Dado que la señal (117) no es diferenciable con respecto a t , no se pueden utilizar las variables (101), por lo que se hará uso de las herramientas numéricas utilizadas con anterioridad para analizar la dinámica del convertidor y estudiar si presenta un comportamiento complejo, considerando que k_p es negativo.

De manera similar a la sección anterior se seleccionó la amplitud Δh de la señal $h(t)$ como parámetro de bifurcación. En la figura 61 se muestra el diagrama de bifurcación del convertidor

buck, considerando los parámetros utilizados en la sección anterior, con la diferencia de la ganancia $k_p = 0,01$ y el intervalo de la amplitud $\Delta h \in [0,05, 0,15]$

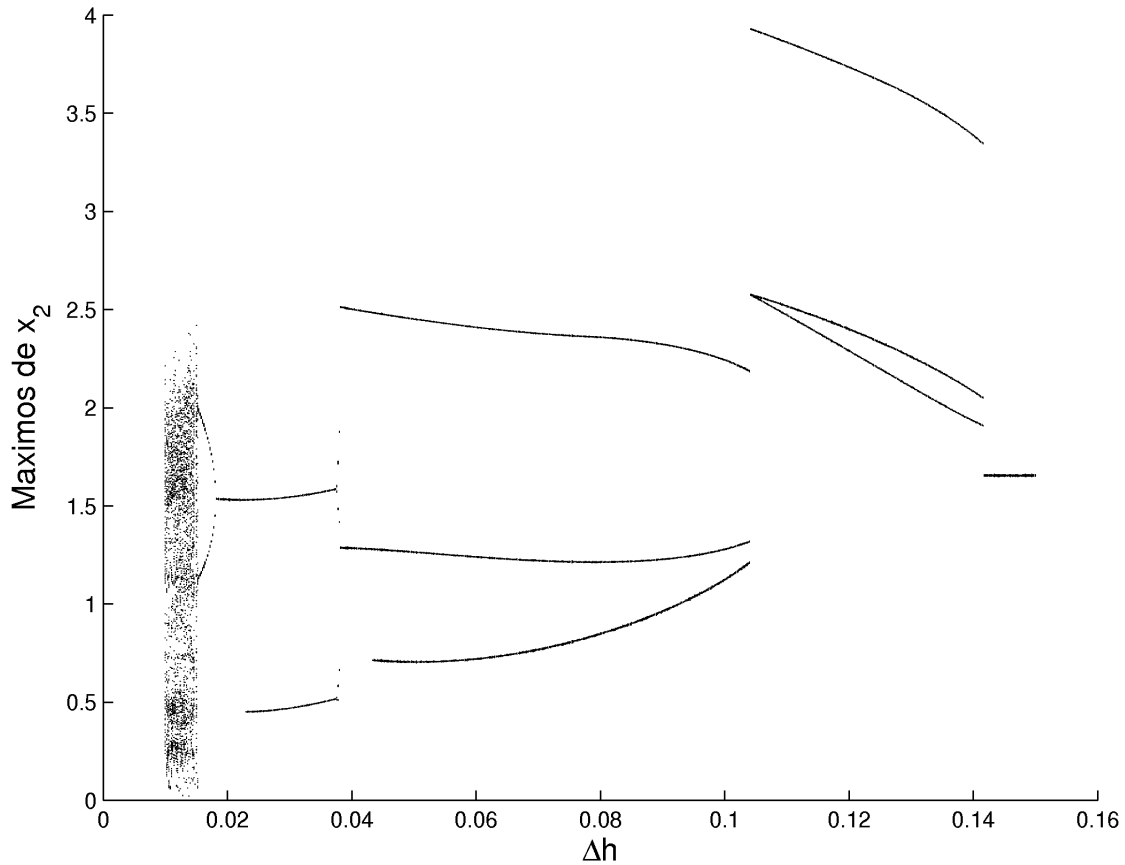


Figura 61: Diagrama de bifurcación del convertidor buck con un control PWM y una ganancia k_p negativa, considerando la amplitud de la señal de modulación Δh como parámetro de bifurcación.

Nótese del diagrama de la figura 61, que cuando se considera la señal (117) el diagrama de bifurcación presenta una estructura más simple, que la que presenta cuando se utiliza la señal (104). Sin embargo, existe una bifurcación por duplicación de periodo cuando la amplitud β es igual a 0.0182, que no se presenta en el diagrama de la figura 56.

En la figura 62 se muestra el mapeo estroboscópico considerando que la amplitud β tiene el valor de 0.011. Se tiene que nuevamente no se forma un conjunto de puntos aislados o una curva cerrada, lo cual es un indicador de que se presenta una órbita caótica. La curva que se forma presenta una de las estructuras más complejas que se observan en este trabajo.

Para mostrar la dinámica de la órbita caótica que presenta el convertidor, en la figura 63 se muestra el atractor de la reconstrucción de los estados. Note que el atractor es de naturaleza extraña, es decir, caótico. Es interesante que el atractor de la figura 63 no guarda similitud con el que se presenta en la figura 60.

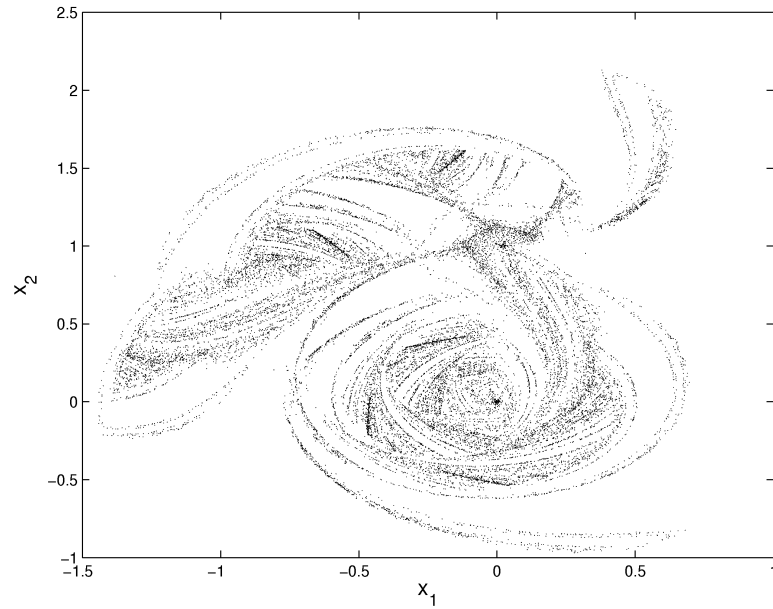


Figura 62: Mapeo estroboscópico considerando la amplitud β con un valor de 0.011.

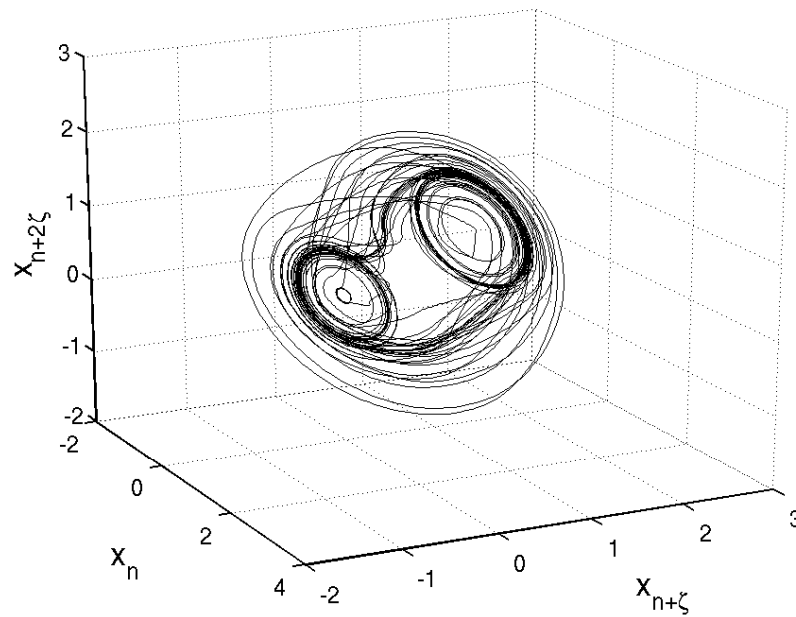


Figura 63: Atractor reconstruido, considerando la amplitud $\beta = 0,011$.

El atractor de la figura 63 se organiza alrededor de dos “órbitas”, la perturbación lo hace ir de una a otra de manera irregular. Este comportamiento no presenta una complejidad como el de la sección anterior; sin embargo, la naturaleza irregular con la que el sistema salta entre las dos órbitas es muy compleja.

VI.5. Conclusiones

En este capítulo se desarrollaron los elementos necesarios para demostrar de manera aproximada la existencia de un conjunto invariante caótico en el convertidor buck.

Cuando el convertidor buck presenta caos homoclínico ocurre un comportamiento que no es esperado en la práctica, ya que se tiene que la amplitud de la corriente en el inductor x_1 y el voltaje en el capacitor x_2 adquieren valores negativos, lo cual no se puede obtener con una implementación típica del interruptor.

La dinámica es más diversa cuando se utiliza una señal de modulación $h(t)$ diferenciable, presentándose transiciones abruptas entre las diferentes órbitas que presente el sistema. Conforme el valor de la amplitud β disminuye la dinámica presenta variaciones más rápidas, hasta que para valores muy pequeños de la amplitud β el sistema converge alguno de los dos puntos de equilibrio estables que presenta, dependiendo de las condiciones iniciales.

Al considerar la señal de modulación (117) normalmente usada en los controladores PWM, la dinámica del convertidor se vuelve más simple en cuanto a la diversidad de órbitas periódicas y caóticas que exhibe el convertidor. Sin embargo, del mapeo estroboscópico de la figura 62 y del atractor de la figura 63, se puede observar que la dinámica del convertidor cuando se encuentra en régimen caótico es bastante compleja.

Dado que el Teorema de Melnikov en el caso del convertidor buck dice que existe un conjunto amplio de parámetros que permiten la existencia de un comportamiento caótico, se considera un problema de investigación el investigar los cambios en la dinámica al variar los demás parámetros del convertidor.

Capítulo VII

Conclusiones

Los resultados de este trabajo permiten concluir que el mecanismo básico para la presencia de dinámica compleja en el convertidor buck, es la asimetría en el proceso de carga y descarga del sistema, que no es considerada en el diseño del controlador PWM. Al no ser considerada la asimetría se tiene que las condiciones ideales para que se presente el comportamiento de salida deseado no pueden ser cubiertas por el controlador, por lo que cuando la diferencia entre las condiciones ideales y lo que se solicita que realice al controlador sobrepasa cierto valor, el sistema no puede mantener el comportamiento de salida deseado.

Es importante señalar que se mostró que aunque en la salida del convertidor no se tiene la oscilación deseada, y se presenta una oscilación cuasi periódica o caótica, el promedio de esta salida se mantiene cerca del valor promedio con el cual se diseñó el controlador. También en muchos casos las oscilaciones cuasi periódica o caótica tienen una amplitud dentro de los límites de diseño, presentándose solo un aumento en la potencia disipada, por lo que es posible que en la práctica se presente esta dinámica compleja pero pase desapercibida por los ingenieros.

Finalmente es importante señalar que los resultados presentados en este trabajo solo representan una parte de los estudios realizados por su autor para poder comprender la dinámica compleja en el convertidor buck, quedando mucho trabajo por realizar para mejorar los resultados presentados y extender a otras topologías de los convertidores conmutados.

VII.1. Trabajos Futuros

Realizar un análisis más exhaustivo de algunos otros mecanismos para la generación de dinámica compleja en el convertidor buck, tal como el caos homoclínico, que permitiría la demostración formal de la dinámica compleja a través del teorema de Melnikov.

Extender y formalizar el proceso básico por el cual se da la dinámica compleja en el convertidor buck, probando que sucede de la misma manera para otros controladores en los cuales se ha

reportado la presencia de dinámica compleja, como los controladores PWM con acción integral, o incluyendo los diferentes elementos de protección utilizados en la práctica..

Extender los resultados al convertidor boost, dado que el procedimiento para diseñar el controlador PWM es el mismo que para el convertidor buck, pareciendo plausible que el fenómeno de asimetría se presente de igual manera en este convertidor.

Bibliografía

- Agrawal, J. P., 2001. *Power Electronic Systems: Theory and Design*. Prentice Hall.
- Alvarez, J. y Curiel, L. E., 1997. Bifurcations and chaos in a linear control system with saturated input. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7(8):1811–1822.
- Angulo, F., Olivar, G., y Taborda, A., 2008. Continuation of periodic orbits in a zad-strategy controlled buck converter. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38:348–363.
- Baillieul, J., Brockett, R. W., y Washbrun, R. B., 1980. Chaotic motion in nolinear feedback systems. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 27:990–997.
- Banerjee, S., Karthik, M. S., Yuan, G., y Yorke, J. A., 2000. Bifurcations in one-dimensional piecewise smooth maps-theory and applications in switching circuits. *IEEE Transaction on Circuit ans Systems-I,Fundamental,Theory and Applications*, 47(3):389–394.
- Banerjee, S., Parui, S., y Gupta, A., 2004. Dynamical effects of missed switching in current-mode controlled dc–dc converters. *IEEE Trans. on Circuits and Systems—II*, 51:649–654.
- Brockett, R. W. y Wood, J. R., 1984. Understanding power converter chaotic behavior in protective abd abnormal modes. *Powercon II*.
- Cao, L., 1997. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D*, 110:43–50.
- Colombo, A., 2008. Boundary intersection crossing bifurcation in the presence of sliding. *Physica D*, 237:2900–2912.
- Dai, D., Tse, C. K., y Ma, X., 2005. Symbolic analysis of switching systems: Application to bifurcation analysis of dc/dc switching converters. *Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Application*, 52(8):1632–1643.
- Deane, J. H. B. y Hamill, D. C., 1990. Analysis, simulation and experimental study of chaos en the buck converter. *IEEE*.

- El-Aroudi, A., Debbat, M., Giral, E., Olivar, G., Benadero, L., y Toribio, E., 2005. Bifurcations in dc-dc switching converters: Review of methods and applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(5):1549–1578.
- Elmas, C., Deperlioglu, O., y Sayan, H. H., 2009. Adaptive fuzzy logic controller for dc-dc converters. *Expert Systems with Applications*, 36:1540–1548.
- Filippov, A. F., 1988. *Differential Equations with Discontinuous Right hand Sides*. Sovietic Series.
- Fossas, E. y Ras, A., 2002. Second order sliding mode control of a buck converter. In *Proceeding of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*.
- Fujiokaa, H., Kao, C.-Y., Almér, S., y Jönsson, U., 2007. Lq optimal control for a class of pulse width modulated systems. *Automatica*, 43:1009 – 1020.
- Hamill, D. C. y Deane, J. H. B., 1992. Modeling of chaotic dc-dc converters by iterated nonlinear mappings. *IEEE Trans. on Power Electronics*, 7:25–36.
- Herrera, I., 2009. *Dinámica compleja en sistemas mecánicos controlados con técnicas de control discontinuo*. Master's thesis, Centro de Investigación Científica y de Estudios Superiore de Ensenada.
- Jain, P. y Banerjee, S., 2003. Border-collision bifurcations in one-dimensional discontinuous maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(11):3341–3351.
- Khalil, H. K., 2002. *Nonlinear Systems*. Pretince Hall, third edition.
- Miranda M. y Alvarez J. 2009 Bifurcations and chaos produced by the modulation signal in a PWM buc *Chaos, Solitons & Fractals*, doi : 10,1016/j.chaos,2009,0
- Mohan, N., Undeland, T. M., y Robbins, W. P., 2002. *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*. Wiley.
- Morel, C., Guignard, J.-C., y Guillet, M., 2002. Sliding mode control of dc to dc power converters. In *Electronics, Circuits and Systems, 2002. 9th International Conference on*. volume 3, pp. 971 – 974.
- Myles, S. y Di Bernardo, M., 2000. Preventing multiples switchings in power electronic circuits: Effects of the latch on the nonlinear dynamics of the dc dc buck converter. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(2):431–442.
- Navarro-López, E. M., Cortés, D., y Castro, C., 2008. Design of practical sliding-mode controllers with constant switching frequency for power converters. *Electric Power Systems Research*.

- Parker, T. S. y Chua, L. O., 1989. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag.
- Perruquetti, W. y Barbot, J. P., (Editors) 2002. *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker Inc.
- Rosas Almeida, D. I., Alvarez Gallegos, J., y Leonid, F., 2007. Robust observation and identification of ndof lagrangian systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17:847–861.
- Sira-Ramirez, H., 1989a. A geometric approach to pulse-width modulated control in nonlinear dynamical systems. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 34:184–187.
- Sira-Ramirez, H., 1989b. Sliding regimes in pulse-width-modulation systems design. In *Proceedings of the 28th Conference on Decrlion and Control*.
- Sira-Ramirez, H., 2003. On the generalized pi sliding-mode control of dc-to-dc power converters: a tutorial. *International Journal of Control*, 76:1018–1033.
- Sira-Ramirez, H. y Ilic, M., 1988. A geometric approach to the feedback control of switch mode dc-to-dc power supplies. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Application*, 10(10):1291–1297.
- Sprott, J. C., 2006. *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press.
- Tan, S.-C., Lai, Y. M., Tse, C. K., y Cheung, M. K. H., 2005. A fixed-frequency pulsewidth modulation based quasi-sliding-mode controller for buck converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 20(6):1379–1392.
- Tse, C. K., 2003. *Complex Behaivor of Switching Power Converters*. CRC Press.
- Utkin, V. I., 1992. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Communications and Control Engineering, Springer-Verlag.
- Wester, G. W. y Middlebrook, R. D., 1972. Low-frecuecnny characterization of switched dc-to-dc converters. *IEEE power Processing and Electronics Specialists' Conf.*
- Wiggins, S., 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag.
- Zhusubaliyev, Z. T. y Mosekilde, E., 2003. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. World Scientific.

- Zhusubaliyev, Z. T. y Soukhoterin, E. A., 2001. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11:2977–3001.
- Zhusubaliyev, Z. T., Soukhoterin, E. A., y Mosekilde, E., 2003. Quasi-periodicity and border-collision bifurcations in a dc–dc converter with pulsewidth modulation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Application*, 50:1047–1057.