

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Oceanografía Física**

**Circulación forzada por el viento en una cuenca cerrada
con topografía**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Flor Karyna Venegas Vega

Ensenada, Baja California, México

2017

Tesis defendida por

Flor Karyna Venegas Vega

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Zavala Sansón

Director del Comité

Dr. Julio Sheinbaum Pardo

Dr. Pedro Negrete Regagnon



Dr. Cuauhtémoc Turrent Thompson

Coordinador del Programa de Posgrado en
Oceanografía Física

Dra. Rufina Hernández Martínez

Director de Estudios de Posgrado

Flor Karyna Venegas Vega © 2017

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y el director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta **Flor Karyna Venegas Vega** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física.

Circulación forzada por el viento en una cuenca cerrada con topografía

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón

Director de tesis

En esta tesis se estudia la circulación oceánica de gran escala forzada por el viento en una cuenca cerrada con topografía. Para ello se realizaron simulaciones numéricas que resuelven la ecuación de vorticidad en el modelo de aguas someras con fondo variable. Este problema ha sido ampliamente estudiado cuando la cuenca tiene el fondo plano (modelo de Stommel). En dicha formulación se considera el balance entre el efecto β (asociado con las variaciones latitudinales del parámetro de Coriolis), el forzamiento del viento y un término de fricción del fondo. Como resultado se obtiene una circulación anticiclónica estacionaria que se intensifica en la frontera oeste. Por otro lado, el estado de equilibrio de un fluido en rotación sobre un fondo en forma de cuenca es una circulación ciclónica con agua somera a la derecha (en el Hemisferio Norte), es decir, en sentido contrario al de la solución de Stommel. El objetivo de las simulaciones numéricas es analizar la circulación inducida por el viento que resulta debido a una topografía en forma de paraboloide, y determinar si el giro de Stommel persiste, o si puede ser modificado o incluso revertido por efectos topográficos.

Se encontró que el giro anticiclónico inducido por el viento se desplaza hacia el suroeste hasta alcanzar un estado estacionario cerca de la frontera sur. Este movimiento se debe al llamado efecto β topográfico, el cual se debe a la pendiente del fondo en la frontera oeste. Estas soluciones estacionarias son sumamente robustas y persistentes, lo cual se comprobó mediante simulaciones con diferentes tipos de condiciones iniciales y forzamientos que llevaron a resultados similares. Otro resultado relevante es la generación de ondas topográficas que viajan hacia el sur a lo largo de la frontera oeste, siguiendo los contornos de la topografía. Sin embargo, cuando dichos contornos se orientan en la dirección zonal las ondas son disipadas, por lo que quedan confinadas en la parte oeste de la cuenca. Se discute que la dinámica de estos fenómenos se relaciona con la competencia entre el efecto β planetario y el efecto β topográfico. Dicha competencia se establece en la frontera sur, donde el efecto planetario induce la propagación de ondas y remolinos hacia el oeste, mientras que el efecto topográfico local los induce al este. Como resultado, se inhibe el movimiento de los giros y la propagación de las ondas. Se discuten algunos casos oceanográficos en los que estas situaciones pueden presentarse, como en la región sur del Golfo de México.

Palabras Clave: **Circulación forzada por el viento, modelo de Stommel, efecto β , efecto β topográfico.**

Abstract of the thesis presented by **Flor Karyna Venegas Vega** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Physical Oceanography.

Wind-driven circulation in a closed basin with variable topography

Abstract approved by:

Dr. Luis Zavala Sansón
Thesis director

In this thesis we study the large-scale oceanic circulation forced by the wind in a closed basin with topography. For this purpose, numerical simulations were performed that solve the vorticity equation in the shallow water model with variable bottom topography. This problem has been widely studied when the basin has a flat bottom (Stommel model). In this formulation the balance between the β effect (associated with the latitudinal variations of the Coriolis parameter), wind forcing and a linear friction term is considered. As a result, a steady anticyclonic circulation is obtained that intensifies in the western boundary. On the other hand, the equilibrium state of a rotating fluid on a basin-shaped bottom is a cyclonic circulation with shallow water to the right (in the Northern Hemisphere), that is, in the opposite direction to the Stommel solution. The aim of the numerical simulations is to analyze the wind-induced circulation resulting from a paraboloid topography, and to determine if the Stommel gyre continues or if it can be modified or even reversed by topographic effects.

It was found that the wind-induced anticyclonic gyre drifts southwestward to a steady state near the southern boundary. This movement is associated to the so-called topographic β effect, which is due to the bottom slope near the western boundary. These stationary solutions are extremely robust and persistent, which was verified by performing simulations with different types of initial conditions and forcing that led to similar results. Another relevant result is the generation of topographic waves that travel south along the western boundary, following the contours of the topography. However, when these contours are oriented in the zonal direction the waves are dissipated, so they remain confined in the western part of the basin. It is argued that the dynamics of these phenomena is related to the competition between the planetary β effect and the topographic β effect. This competition is established in the southern boundary, where the planetary effect induces the propagation of waves and eddies towards the west, while the local topographic effect induces their propagation to the east. As a result, the movement of eddies and waves is inhibited. Some oceanographic cases are discussed in which these situations may arise, as in the southern region of the Gulf of Mexico.

Keywords: **Wind-driven circulation, Stommel model, β effect, topographic β effect.**

Dedicatoria

A mis padres y hermano

Agradecimientos

Al CICESE por aceptarme y permitirme terminar mis estudios de posgrado. Al CONACYT por el apoyo económico que recibí durante mis estudios.

Al Dr. Luis Zavala Sansón, por su enorme paciencia, tiempo y dedicación en la realización de este trabajo. Por su interés en que pensara y razonara como científico; sus enseñanzas y consejos se quedarán en mi formación profesional y los tendré presente por siempre.

A los miembros del comité de tesis: el Dr. Julio Sheinbaum y el Dr. Pedro Negrete, por sus aportaciones en la realización de este proyecto y que fueron de valiosa importancia.

Al Departamento de Oceanografía Física, al personal académico por enriquecer mi conocimiento durante las clases y al personal administrativo por su apoyo y amabilidad cuando necesité ayuda.

A mis amigos y compañeros de CICESE, por la ayuda que amablemente me brindaron y sobre todo por su amistad que espero continúe por siempre. En especial, a Nadia, Raúl, Nemo y Sandy; el tiempo de diversión/frustración que pasamos en el 341 – 1 es de mis partes favoritas de mi estancia en el posgrado.

A mis familiares y amigos fuera de CICESE: Julio, mis Tías, Laura, Mayra, Christopher, Amaury, Moni, por mencionar algunos de las muchas personas que me han apoyado y se interesan por mi y todo lo que hago.

Finalmente, a mis papás y hermano. A Quilina y Alfredo, por su cariño y constante apoyo en mi formación académica, sin ustedes no sería posible. A Alfredito, por ser mi primer maestro de matemáticas e influencia científica y que me ha llevado por este camino. Mi agradecimiento hacia ustedes es infinito.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria.	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	vii
Lista de tablas	x
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Circulación forzada por el viento	1
1.2. Flujo sobre topografía	3
1.3. Ondas topográficas	6
1.4. Motivación	7
1.5. Objetivos	7
Capítulo 2. Teoría y métodos	9
2.1. Dinámica 2D con fondo variable	9
2.2. Modelo de Stommel	12
2.3. Efecto β topográfico	17
2.4. Modelo numérico	18
Capítulo 3. Resultados	19
3.1. Números adimensionales y parámetros del problema	19
3.2. Simulaciones con fondo plano	22
3.3. Problema de Stommel en una cuenca paraboloidal	26
3.4. Evolución libre sobre topografía variable	40
3.5. Cuenca de mesoescala	46
Capítulo 4. Discusión y conclusiones.	54
Literatura citada	58

Lista de figuras

Figura	Página
1. Esquema de las principales corrientes marinas superficiales. Pidwirny (2007) Fuente: http://blue.utb.edu/paullgj/geog3333/lectures/physgeog.html	2
2. Esquema de la Corriente del Golfo en el Atlántico Norte. NASA/SVS (2012) Perpetual Ocean. Fuente: https://www.nasa.gov/topics/earth/features/perpetual-ocean.html	2
3. Esquema de la circulación de equilibrio en libre decaimiento en una cuenca.	4
4. Circulación superficial en experimentos de laboratorio con dos cuencas adyacentes en un sistema en rotación. La cuenca derecha es forzada: (a) ciclónicamente, (b) anticiclónicamente con forzamiento débil, (c) anticiclónicamente con forzamiento intenso. Tomado de Nost et al. (2008).	5
5. Esquema de una capa de fluido homogéneo en rotación con un fondo variable.	9
6. Dimensiones de la cuenca oceánica y sistema de coordenadas.	13
7. Perfil meridional del forzamiento del viento en el modelo de Stommel.	15
8. Solución analítica del campo de función corriente y velocidad en el problema de Stommel. La flecha más larga representa 0.18 m/s	16
9. Campos de función corriente y de velocidad en la simulación numérica $S1$ con fondo plano al día 1 (panel izquierdo) y al día 30 (panel derecho). El vector con mayor longitud representa 0.13 m/s	23
10. Perfil zonal de la función corriente en la mitad del dominio ($y = 0 \text{ km}$). La línea sólida corresponde a la solución analítica de Stommel y los asteriscos a la obtenida en la simulación numérica al tiempo 30 días.	24
11. Energía total en función del tiempo para la simulación con fondo plano.	25
12. Campos de función corriente y de velocidad en la simulación $S2$ con fondo plano y forzamiento (a) anticiclónico y (b) ciclónico, a tres tiempos: 1 día, 10 días y 90 días. El vector con mayor longitud representa 0.01 m/s	26
13. Fondo variable en forma de una cuenca paraboloidal con $H = 4000 \text{ m}$ y $C = 7.16 \times 10^6 \text{ m}$. Panel izquierdo: representación tridimensional. Panel derecho: contornos y superficies de profundidad; el primer contorno representa 3500 m	27
14. Campos de función transporte y de velocidad en la simulación $S3$ con fondo paraboloidal y forzamiento intenso (a) anticiclónico y (b) ciclónico, a los días 5 y 90. Las líneas blancas son contornos de topografía; el contorno central es de 3500 m y hay una separación de 500 m entre cada contorno. La longitud máxima del vector representa 0.72 m/s para (a) y 0.73 m/s para (b).	28

Figura	Página
15. Igual que la Figura 14 pero para la simulación $S4$ con forzamiento débil. La longitud máxima del vector representa 0.069 m/s para (a) y 0.07 m/s para (b).	29
16. Trayectoria del valor mínimo (máximo) del anticiclón (cyclón) durante 90 días en las simulaciones con (a) forzamiento intenso, y (b) forzamiento débil. Los contornos representan a la topografía.	30
17. Energía total en función del tiempo en las simulaciones con fondo paraboloides y forzamiento ciclónico y anticiclónico. (a) Forzamiento intenso y (b) forzamiento débil.	31
18. Acercamiento de los campos de función transporte y de velocidad en el suroeste del (a) anticiclón y (b) cyclón de la Figura 14. Los contornos blancos representan la topografía.	32
19. Acercamiento de los campos de función transporte y de velocidad en el suroeste del (a) anticiclón y (b) cyclón de la Figura 15. Los contornos blancos representan la topografía.	32
20. Sección transversal de la topografía de cuatro cuencas paraboloides en la frontera sur, $y = -L/2$ (línea punteada) y en el centro del dominio, $y = 0$ (línea sólida). La profundidad máxima en todos los casos es $H = 4000\text{ m}$, y las profundidades en la esquina son $h_e = 100, 1000, 2000,$ y 3000 m .	33
21. Campos de función transporte y velocidad para las simulaciones $S5 - S8$ con la topografía definida por los paraboloides mostrados en la Figura 20. (a) $S5$: $h_e = 3000\text{ m}$ (pendiente menos abrupta), (b) $S6$: $h_e = 2000\text{ m}$, (c) $S7$: $h_e = 1000\text{ m}$ y (d) $S8$: $h_e = 100\text{ m}$ (pendiente más abrupta). El contorno de mayor profundidad es de 3700 m en todos los casos y hay una diferencia de 300 m entre cada contorno.	34
22. Energía total en función del tiempo para los casos vistos en la Figura 21.	35
23. Campos de función transporte y velocidad en la simulación $S9$ con forzamiento anticiclónico sobre la cuenca paraboloides y condición inicial aleatoria. El vector con longitud máxima representa 0.72 m/s .	36
24. Energía total en función del tiempo para las simulaciones con condición inicial aleatoria ($S9$ azul), condición aleatoria débil ($S10$ roja) y condición de reposo ($S8$ amarilla).	37
25. Campos de función transporte y velocidad en la simulación $S11$ con forzamiento periódico sobre una cuenca paraboloides.	38
26. Energía en función del tiempo para el forzamiento periódico.	39
27. Campos de función transporte y de velocidad del (a) anticiclón y (b) cyclón de la Figura 15 (simulación $S4$). Los contornos blancos representan f/h .	40

Figura	Página
28. Evolución libre de los campos de función corriente y de velocidad para distintos tiempos sobre un fondo plano (simulación <i>S12</i>). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.	41
29. Evolución libre de los campos de función transporte y de velocidad para distintos tiempos sobre una cuenca paraboloides (simulación <i>S13</i>). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.	43
30. Evolución libre de los campos de función transporte y de velocidad para distintos tiempos sobre una cuenca paraboloides en plano f (simulación <i>S14</i>). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.	45
31. Perfil meridional del forzamiento del viento en las simulaciones con la cuenca de mesoescala. Este perfil es una aproximación simplificada de los vientos alisios en el Golfo de México.	46
32. Campos de función corriente y de velocidad para la simulación <i>S15</i> con forzamiento de vientos del este, fondo plano y condición inicial de reposo en la cuenca de mesoescala. Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.	47
33. Campos de función transporte y de velocidad para la simulación <i>S16</i> con la cuenca de mesoescala, vientos del este y condición inicial de reposo. El vector con mayor longitud representa 0.03 m/s	48
34. Energía total en función del tiempo para la simulación de la Figura 33.	49
35. Campos de función transporte y de velocidad para la simulación <i>S17</i> con la cuenca de mesoescala, vientos del este y condición inicial aleatoria. Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.	50
36. Campo de función transporte y de velocidad para la simulación <i>S16</i> con contornos de f/H . El vector con mayor longitud representa 0.03 m/s	51
37. Evolución libre de los campos de función transporte y de velocidad para distintos tiempos sobre la cuenca de mesoescala (simulación <i>S18</i>). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.	52

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Parámetros utilizados en las simulaciones numéricas. En todos los casos $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$ y $A_H = 100 m^2 s^{-1}$. En los casos con topografía $H = 4000 m$. La fricción de fondo es $r = 10^{-6} s^{-1}$ excepto en $S1$ donde $r = 10^{-5} s^{-1}$. En todos los casos $\beta = 2 \times 10^{-11} (ms)^{-1}$ excepto en la simulación $S14$ en plano f . Las condiciones iniciales (CI) son: Reposo (R), Aleatorio (A), Stommel (S), Doble giro (D).	22

Capítulo 1. Introducción

El océano es un sistema esencial en la dinámica del planeta debido a que en su interior y en su superficie ocurren diversos procesos físicos, químicos, geológicos y biológicos de relevancia global. Sin embargo, el comportamiento de los flujos oceánicos es muy complejo a causa de que muchos factores están involucrados en su circulación. Uno de los aspectos más importantes es el forzamiento del viento (intensidad, dirección, persistencia) ya que influye en el movimiento de las capas superficiales del océano en diversas escalas espaciales y temporales. En la circulación de gran escala (miles de km), otro aspecto a tomar en cuenta son los efectos de la rotación de la Tierra. En particular, las variaciones del parámetro de Coriolis con la latitud son de especial importancia en el comportamiento de los fluidos geofísicos.

En esta tesis se estudia la dinámica oceánica de gran escala debida al viento y a efectos asociados a la rotación de la Tierra mediante modelos físicos básicos que contienen estos mecanismos. Adicionalmente, se considera una cuenca cerrada con fondo variable con la finalidad de analizar los efectos de la forma de la topografía en la circulación.

1.1. Circulación forzada por el viento

La circulación en el océano tiene un patrón persistente de flujo cuya escala de movimiento es del mismo orden que el de la cuenca que lo contiene (Pedlosky, 1996). Las características de dicha circulación están fuertemente influenciadas por la magnitud y dirección del viento. Esto sucede tanto para cuencas de gran escala con dimensiones de miles de km (como las grandes cuencas oceánicas del Pacífico y del Atlántico) como de mesoescala, con cientos de km de longitud (como el Golfo de México).

En todas las grandes cuencas oceánicas de gran escala existen giros permanentes, los cuales tienen una dinámica característica fuertemente asociada con el patrón de vientos dominante. En el Atlántico Norte, por ejemplo, el giro subtropical es anticiclónico (sentido horario). En esta zona del océano predominan los vientos alisios en la mitad sur de la cuenca y los vientos del oeste en la región del norte. Este comportamiento se aprecia en el resto de los giros oceánicos del Hemisferio Norte, mientras que en el Hemisferio Sur los giros son también anticiclónicos (sentido antihorario), como se ilustra en la Figura 1.

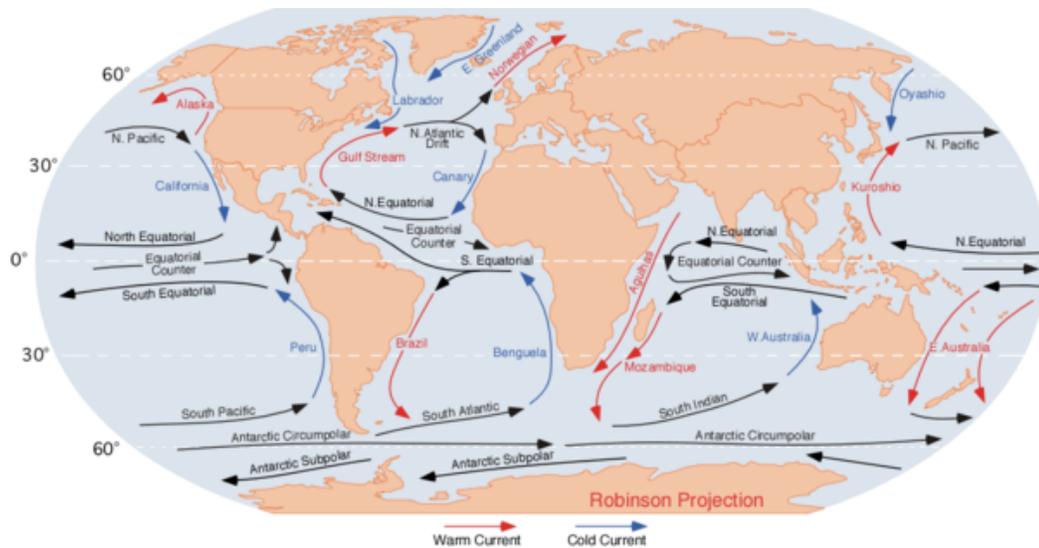


Figura 1. Esquema de las principales corrientes marinas superficiales. Pidwirny (2007) Fuente: <http://blue.utb.edu/paullgj/geog3333/lectures/physgeog.html>.

Otra característica que se observa en los giros oceánicos de gran escala es la intensificación de la corriente en la frontera oeste de la cuenca. En el caso del giro subtropical en el Atlántico Norte, esta es la Corriente del Golfo. En la Figura 2 se muestra un esquema de la circulación superficial en una zona del Atlántico Norte en la que se representa la intensificación de dicha corriente.

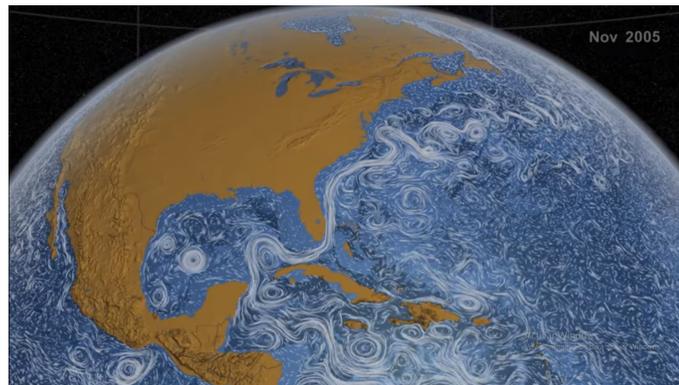


Figura 2. Esquema de la Corriente del Golfo en el Atlántico Norte. NASA/SVS (2012) Perpetual Ocean. Fuente: <https://www.nasa.gov/topics/earth/features/perpetual-ocean.html>.

Existen varios análisis teóricos que tratan de explicar la dinámica que ocurre en la circulación oceánica de gran escala. Sverdrup (1947) fue pionero en el desarrollo de modelos de circulación del océano mediante argumentos físicos simples. Su teoría consiste en dos partes: primero, la derivación de la ecuación simplificada de balance de vorticidad, y segundo, el promedio vertical de este balance (Pedlosky, 1996).

La dinámica de los modelos verticalmente integrados es fundamentalmente bidimensional. En la gran escala, el movimiento del océano y la atmósfera está caracterizado por un balance entre el gradiente de presión y la gravedad en la dirección vertical, y el balance aproximado entre el gradiente de presión horizontal y la aceleración de Coriolis en la dirección horizontal (Vallis, 2006). De aquí se deriva que la escala de movimiento horizontal es mucho mayor que la vertical, por lo que se puede pensar en un sistema en dos dimensiones.

En 1948, Henry Stommel publicó su artículo “The Western Intensification of Wind-driven Ocean Currents” en el que propuso un modelo simple para la corriente del Golfo basado en las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos en dos dimensiones. En su formulación se considera un fluido homogéneo contenido en un océano rectangular con fondo plano. Además las únicas fuerzas presentes son las debidas al efecto de las variaciones latitudinales del parámetro de Coriolis (efecto β), al forzamiento del viento y a la fricción lineal del fondo. Como resultado, obtuvo una solución que representa lo que sucede en el Atlántico Norte: un giro anticiclónico intensificado en la frontera oeste.

Munk (1950) propuso un modelo alternativo al propuesto por Stommel. El enfoque de su teoría está en los efectos viscosos del fluido (viscosidad lateral o Laplaciana) en lugar de la fricción del fondo. Los resultados son similares a los obtenidos con la teoría de Stommel. La diferencia más notable es en la corriente de la frontera oeste debido a las condiciones de frontera, ya que en el modelo de Stommel la condición es de libre deslizamiento mientras que en el de Munk es de no deslizamiento.

1.2. Flujo sobre topografía

Si consideramos un fluido en un sistema en rotación sobre un fondo variable, su movimiento se verá afectado por la forma de la topografía. Bajo la aproximación de tapa rígida este sistema sigue siendo bidimensional, ya que los efectos topográficos están dados por la divergencia horizontal del transporte en la ecuación de vorticidad. La forma de la topografía de mayor interés en este trabajo es una cuenca con profundidad máxima en el centro del dominio y somera cerca de las fronteras.

Un flujo en libre decaimiento sobre fondo variable tiende a un estado de equilibrio siguien-

do los contornos topográficos, con agua somera a la derecha (cuando el parámetro de Coriolis es positivo, Bretherton y Haidvogel, 1976). Por lo tanto, en un fondo en forma de cuenca el estado de equilibrio es una circulación ciclónica, como se ilustra en la Figura 3, donde los círculos representan contornos de topografía (con profundidad máxima en el centro) y las flechas indican la circulación de equilibrio del flujo. Cuando la topografía es aleatoria, la circulación es ciclónica alrededor de los valles y anticiclónica alrededor de las montañas, lo cual se observa tanto en la dinámica cuasi-geostrófica (Bretherton y Haidvogel, 1976) como en la dinámica de aguas someras (Zavala Sansón, 2007; Zavala Sansón et al. 2010).

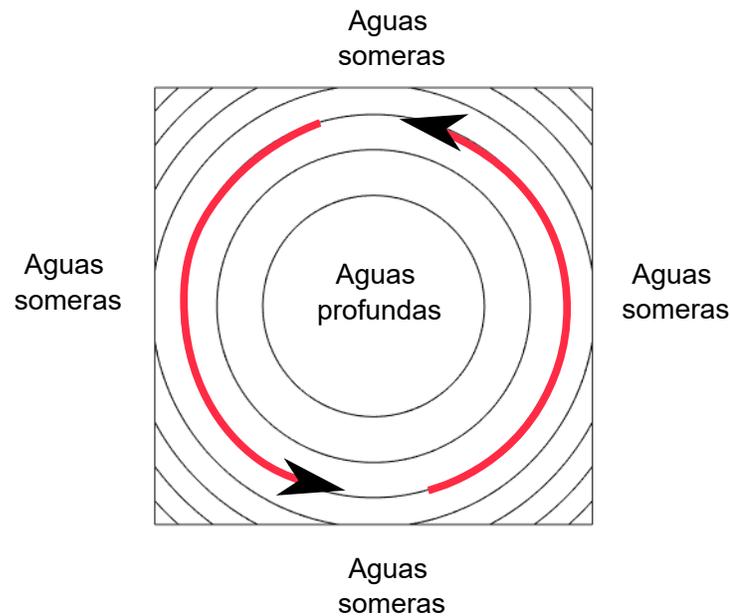


Figura 3. Esquema de la circulación de equilibrio en libre decaimiento en una cuenca.

La preferencia por la circulación ciclónica en una cuenca también se ha estudiado para casos con forzamiento. Nost et al. (2008) realizaron experimentos numéricos y de laboratorio para un fluido homogéneo en dos cuencas conectadas, una de ellas forzada ciclónica o anticiclónicamente. Los resultados para el forzamiento ciclónico en una de las cuencas muestran que el flujo en la cuenca adyacente también es ciclónico, sin importar la magnitud del forzamiento (Figura 4a). Análogamente, para un forzamiento anticiclónico débil la circulación en la cuenca no forzada también es anticiclónica (Figura 4b). Sin embargo, al aumentar la magnitud del forzamiento, el patrón de flujo cambia y se vuelve ciclónico (Figura 4c). Este comportamiento se asocia a la linealidad del problema: cuando el forzamiento es débil, el patrón de flujo en ambas cuencas es similar, ya sea ciclónico o anticiclónico (páneles a y b). Por otro lado, la teoría no lineal indica que los flujos dirigidos ciclónicamente son siempre

estables y corresponden a un estado de mínima energía (Nost et al. 2008). Sin embargo, en el caso anticiclónico es posible que no exista una solución estacionaria, y si existe, es probable que sea inestable. Los términos no lineales son importantes cuando el forzamiento es intenso, y su consecuencia principal es que el flujo anticiclónico en la cuenca forzada se revierta a ciclónico en la cuenca no forzada (pánel c).

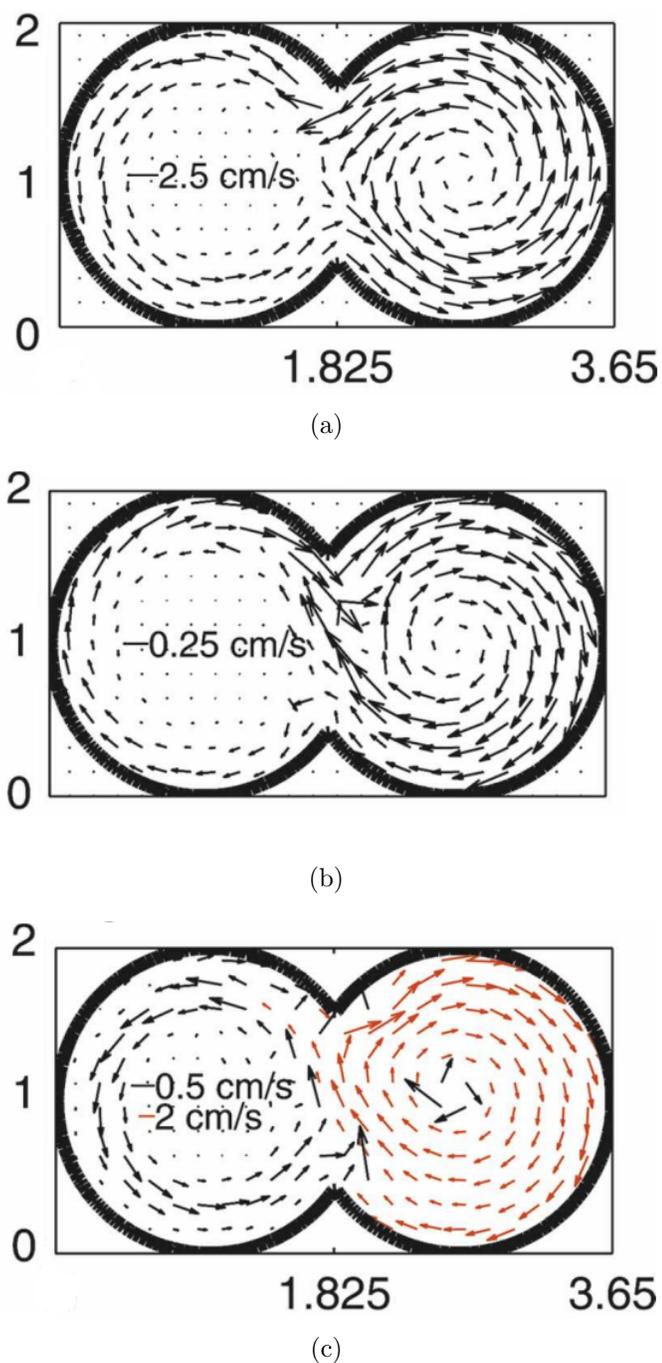


Figura 4. Circulación superficial en experimentos de laboratorio con dos cuencas adyacentes en un sistema en rotación. La cuenca derecha es forzada: (a) ciclónicamente, (b) anticiclónicamente con forzamiento débil, (c) anticiclónicamente con forzamiento intenso. Tomado de Nost et al. (2008).

En modelos oceánicos de gran escala también se han observado efectos debidos a la forma del fondo. Holland (1967) investigó numérica y analíticamente la circulación debida al viento utilizando una topografía tipo escalón en la frontera oeste y encontró que la respuesta del océano puede estar fuertemente controlada por la forma del fondo oceánico. A su vez, Salmon (1998) estudió los efectos de una cuenca con topografía abrupta en la circulación debida al viento considerando un forzamiento de doble giro. Como resultado obtuvo que las celdas de circulación en la parte oeste, donde la pendiente es muy pronunciada, tienen una tendencia a moverse al sur por efectos topográficos. Jackson et al. (2006) han encontrado resultados similares en sistemas de dos o más capas usando cuencas con topografías simples. Salmon (1998) asocia este comportamiento con la preferencia del flujo a seguir los contornos de f/H , donde f es el parámetro de Coriolis y H es la profundidad (variable en el espacio). Dicha tendencia se deriva de los términos no lineales de las ecuaciones de movimiento, y será un fenómeno por examinar en este trabajo.

1.3. Ondas topográficas

En el límite lineal, las perturbaciones impuestas en un fluido sobre fondo variable generan ondas topográficas. Su formación y propagación están asociadas con la conservación de vorticidad potencial conforme las columnas de fluido se estiran y comprimen al cambiar de profundidad. En el Hemisferio Norte estas ondas viajan con agua somera a la derecha, y suelen encontrarse en diversas regiones costeras o sobre plataformas continentales. Su rapidez de fase puede ser del orden de 0.3 m/s (Flores-Vidal et al. 2014).

En este trabajo se discutirá la formación de ondas topográficas, o bien, las condiciones bajo las cuales se inhibe su propagación. La motivación para estudiar este problema es el registro de dichas oscilaciones en el Golfo de México (Kolodziejczyk et al. 2011). Estos autores han encontrado que existen ondas topográficas que se propagan de norte a sur a lo largo del margen oeste del Golfo de México, y que al llegar al sur de la Bahía de Campeche las ondas dejan de propagarse. En esta tesis se estudia un problema similar, pero utilizando un campo de profundidad y patrones de forzamiento idealizados. A pesar de las simplificaciones se discutirán casos en los que la dinámica planetaria (efecto β) y los efectos topográficos se combinan para favorecer o suprimir la propagación de ondas topográficas.

1.4. Motivación

A partir de los antecedentes discutidos anteriormente surgen las siguientes preguntas que se abordan en esta tesis:

- En la circulación debida al viento en gran escala (por ejemplo, en el giro subtropical del Atlántico Norte) la circulación es anticiclónica. Sin embargo, el estado de equilibrio en un fondo variable con forma de cuenca es una circulación ciclónica. Entonces ¿cuál de los dos efectos domina y bajo qué condiciones?
- Las variaciones latitudinales del parámetro de Coriolis (efecto β) tiene consecuencias en la circulación de gran escala. Por otro lado, los efectos topográficos también afectan a la circulación (efecto β topográfico). En ausencia de forzamientos ¿cuál de los dos efectos predomina?
- En una cuenca ¿bajo qué condiciones la dinámica del plano β y los efectos topográficos se combinan para favorecer o inhibir la propagación de ondas topográficas?

Estas cuestiones se analizan en la presente tesis mediante simulaciones numéricas que resuelven la ecuación de vorticidad, en las que se puede predeterminedar la presencia o ausencia de los mecanismos descritos arriba, así como la forma de la topografía del fondo.

1.5. Objetivos

Objetivo general

Estudiar el comportamiento de un flujo bidimensional forzado por el viento sobre una topografía en forma de cuenca.

Objetivos particulares

- Analizar el problema de la circulación de gran escala debida al viento en una topografía con forma de cuenca.
- Estudiar numéricamente el estado del sistema en presencia de diferentes tipos de forzamiento y condiciones iniciales.

- Examinar la generación y persistencia del flujo resultante en relación con la forma y el tamaño de la cuenca oceánica.
- Comparar los efectos de las variaciones latitudinales del parámetro de Coriolis (efecto β) con los efectos de la topografía en la evolución del fluido.
- Estudiar la posible formación de ondas topográficas y su importancia en la circulación sobre la cuenca.

La siguiente tesis está dividida en cuatro capítulos. En el Capítulo 2 se plantean las ecuaciones que gobiernan la dinámica del problema, los principales mecanismos físicos y la descripción del método numérico. En el Capítulo 3 se presenta un análisis de las ecuaciones dinámicas y los principales resultados obtenidos mediante las simulaciones numéricas. En el Capítulo 4 se desarrolla la discusión de los resultados más importantes.

Capítulo 2. Teoría y métodos

2.1. Dinámica 2D con fondo variable

Se considera un fluido homogéneo en un sistema en rotación cuyo movimiento se describe en un plano cartesiano (x, y, z) , donde x y y son las componentes horizontales y z es la coordenada vertical. Las componentes de la velocidad del flujo son (u, v, w) . El fluido está limitado por una topografía arbitraria $z = h_f(x, y)$ y la superficie libre $z = H + \eta(x, y, t)$, donde H es la profundidad en estado de reposo. El espesor de la capa de fluido se define como $h(x, y, t) = H - h_f + \eta(x, y, t)$. El eje de rotación es perpendicular al movimiento.

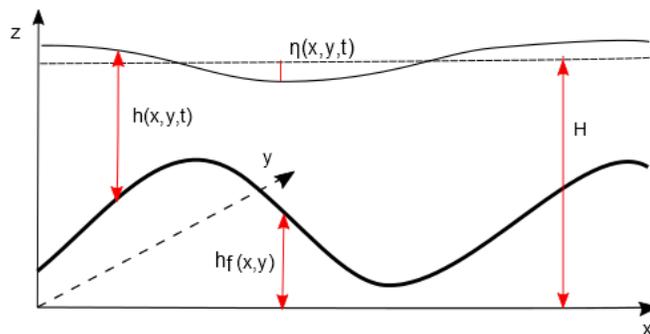


Figura 5. Esquema de una capa de fluido homogéneo en rotación con un fondo variable.

En la dinámica 2D se considera que las componentes horizontales de la velocidad son independientes de la profundidad y se cumple el balance hidrostático. Las ecuaciones que gobiernan el sistema son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + F_1 + R_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + F_2 + R_2, \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

donde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, P es la presión, g la gravedad, ρ la densidad, ν la viscosidad cinemática, y f el parámetro de Coriolis. El vector (F_1, F_2) es un forzamiento y (R_1, R_2) es

la disipación debida al fondo. Las ecuaciones (1) , (2) y (3) son las ecuaciones de momento y la (4) la de continuidad.

Integrando en z la ecuación (3) y tomando en cuenta la condición de que en la superficie $P(x, y, H + \eta) = p_0$, donde p_0 es la presión atmosférica constante, se tiene

$$P(x, y, t) = \rho g[H + \eta(x, y, t) - z] + p_0. \quad (5)$$

Derivando la presión P con respecto a x y y se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (7)$$

Las velocidades horizontales (u, v) pueden ser consideradas independientes de la profundidad (teorema de Taylor-Proudman). Sustituyendo (6) y (7) en las ecuaciones de momento horizontales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + F_1 + R_1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + F_2 + R_2. \quad (9)$$

Integrando verticalmente la ecuación (4) y suponiendo que en la superficie se cumple la condición cinemática

$$w|_{z=H+\eta} = \frac{D\eta}{Dt}, \quad (10)$$

y la condición de impermeabilidad en el fondo

$$w|_{x=h_f} = u \frac{\partial h_f}{\partial x} + v \frac{\partial h_f}{\partial y}, \quad (11)$$

resulta una nueva forma para la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h} \frac{Dh}{Dt}, \quad (12)$$

donde la derivada material se define como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}. \quad (13)$$

Ahora se tiene un conjunto de tres ecuaciones: (8), (9) y (12) cuyas variables son (u, v, η) . Tomando la resta de las derivadas cruzadas de las ecuaciones de momento horizontales (8) y (9) se obtiene una ecuación para la componente vertical de la vorticidad relativa ω

$$\frac{D\omega}{Dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\omega + f) = \nu \nabla^2 \omega + \hat{F} + \hat{R}, \quad (14)$$

donde

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\hat{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ y } \hat{R} = \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y}.$$

Para obtener el sistema bidimensional se desprecian las variaciones temporales de h , es decir, se aplica la aproximación de tapa rígida en (12)

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

de donde se puede definir una función transporte de la forma

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (17)$$

$$v = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (18)$$

La ecuación (14) se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(q, \psi) = \nu \nabla^2 \omega + \hat{F} + \hat{R}, \quad (19)$$

donde J es el operador Jacobiano $J(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$, y q es la vorticidad potencial

$$q = \frac{\omega + f}{h}. \quad (20)$$

La función transporte se relaciona con la vorticidad de la siguiente manera

$$\omega = -\frac{1}{h}\nabla^2\psi + \frac{1}{h^2}\nabla h \cdot \nabla\psi. \quad (21)$$

Si se considera el caso de fondo plano, es decir $h = H$ constante, se puede construir una función corriente $\psi^* = \psi/H$ tal que

$$u = \frac{\partial\psi^*}{\partial y} \quad (22)$$

$$v = -\frac{\partial\psi^*}{\partial x}. \quad (23)$$

La ecuación de vorticidad en este caso es

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\omega, \psi^*) = \nu\nabla^2\omega + \hat{F} + \hat{R}, \quad (24)$$

y la relación entre vorticidad y función corriente es la ecuación de Poisson

$$\omega = -\nabla^2\psi^*. \quad (25)$$

2.2. Modelo de Stommel

Stommel (1948) utilizó las ecuaciones de movimiento para describir el comportamiento de la circulación de gran escala debida al viento, en particular, la intensificación de la corriente en la frontera oeste que se observa en la corriente del Golfo. En la formulación de Stommel se considera al océano como una capa de fluido homogéneo con profundidad constante en un dominio rectangular como el que se muestra en la Figura 6.

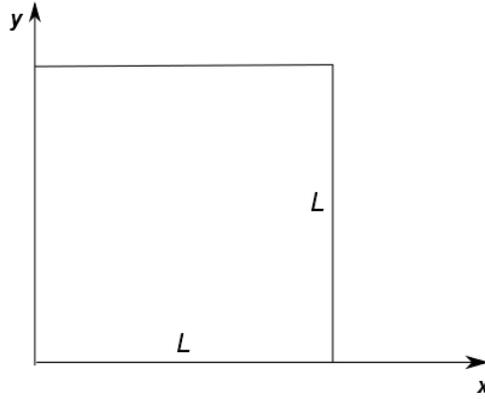


Figura 6. Dimensiones de la cuenca oceánica y sistema de coordenadas.

En el modelo se toma en cuenta tres mecanismos principales: el efecto β , el forzamiento debido al viento y la fricción del fondo. A continuación se explica en qué consisten estos mecanismos y cómo se representan en las ecuaciones de movimiento.

Efecto β

En la gran escala, las variaciones latitudinales de la posición de una parcela de fluido son importantes debido a la curvatura de la Tierra. Para tomar en cuenta estas variaciones se utiliza la aproximación del plano β , en el cual el parámetro de Coriolis f varía linealmente con la latitud

$$f = f_0 + \beta y, \quad (26)$$

donde f_0 es el parámetro de Coriolis a una latitud de referencia, β es el gradiente meridional de f y y la dirección norte-sur.

En un fluido bidimensional, inviscido y con fondo plano, la conservación material de la vorticidad potencial $q = \omega + \beta y$ rige el comportamiento del flujo

$$\frac{D}{Dt}(\omega + \beta y) = 0. \quad (27)$$

Esto tiene implicaciones importantes en la manera en que el fluido se comporta. Variaciones en la latitud de una parcela de fluido implican variaciones en su vorticidad relativa de manera que la vorticidad potencial se conserva. Por ejemplo, un desplazamiento al norte (sur) implica una disminución (aumento) de la vorticidad relativa.

Una consecuencia relevante del efecto β es que induce el desplazamiento de remolinos oceánicos y atmosféricos de mesoescala debido a la redistribución de vorticidad asociada con su sentido de rotación. Los vórtices ciclónicos en el plano β tienden a moverse hacia el noroeste mientras que los anticiclónicos se desplazan hacia el suroeste (Zavala Sansón, 2000).

Otra consecuencia importante en el límite lineal es la generación de ondas de Rossby, las cuales son una manifestación oscilatoria de la conservación de la vorticidad potencial. Los cambios en la vorticidad relativa dan lugar a un campo de velocidades que provoca desplazamientos en las parcelas vecinas y de esa forma las ondas se propagan hacia el oeste (Vallis, 2006).

Forzamiento del viento

En el Atlántico Norte, los vientos tienen un comportamiento característico que consiste en la predominancia de los vientos alisios hacia el oeste en la parte sur de la cuenca, mientras que los vientos del oeste predominan en la parte norte. El forzamiento que genera este patrón de vientos se puede modelar como

$$F_1 = -q_0 \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad F_2 = 0, \quad (28)$$

donde q_0 es la magnitud del viento por unidad de masa con unidades de m/s^2 , y L es el tamaño de la cuenca en la dirección meridional. En la Figura 7 se observa un esquema de este forzamiento.

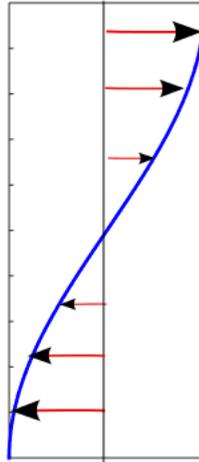


Figura 7. Perfil meridional del forzamiento del viento en el modelo de Stommel.

En la ecuación de vorticidad la componente vertical del rotacional del viento tiene la forma

$$\hat{F} = -\frac{q_0\pi}{L} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right). \quad (29)$$

Nótese que la magnitud del viento es del orden $q_0 \sim \tau/(\rho H)$, donde τ es el esfuerzo del viento y H una escala de profundidad. Un valor representativo de τ en la superficie del océano es 0.1 N/m^2 (1 dyn/cm^2) (Stommel, 1948).

Fricción lineal del fondo

La fricción del fondo está asociada con un arrastre lineal con coeficiente r (con unidades de s^{-1})

$$R_1 = -ru, \quad R_2 = rv. \quad (30)$$

Por lo tanto la componente vertical de su rotacional en la ecuación de vorticidad es

$$\hat{R} = r\omega. \quad (31)$$

La escala de tiempo $1/r$ representa el periodo en el que los efectos disipativos del fondo son apreciables.

Solución analítica

En el modelo de Stommel los mecanismos descritos anteriormente están balanceados en la ecuación de vorticidad para fondo plano

$$r\nabla\psi^* + \beta\frac{\partial\psi^*}{\partial x} = \frac{q_0\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right).$$

Dividiendo entre r se tiene

$$\nabla\psi^* + \sigma\frac{\partial\psi^*}{\partial x} = A\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad (32)$$

donde $\sigma = \beta/r$, $A = q_0\pi/rL$. La solución analítica de esta ecuación es

$$\psi^* = \frac{AL^2}{\pi} [-1 + ke^{(m_1x)} + (1-k)e^{(m_2x)}] \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad (33)$$

donde $\mu = \pi/L$, y

$$k = \frac{(1 - e^{m_1a})}{(e^{m_1a} - e^{m_2a})} \quad m_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\mu^2}}{2}.$$

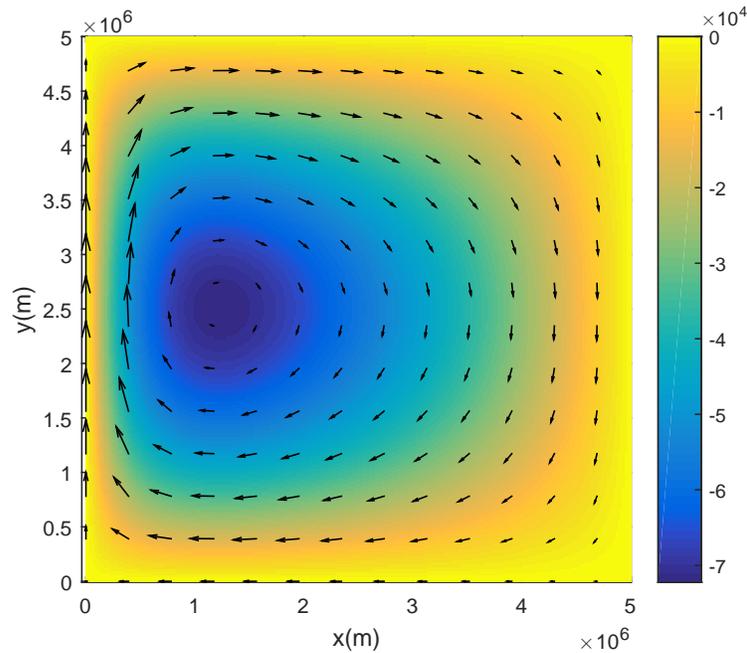


Figura 8. Solución analítica del campo de función corriente y velocidad en el problema de Stommel. La flecha más larga representa 0.18 m/s .

En la Figura 8 se presenta la solución del campo de función corriente y de velocidad en

el modelo de Stommel. Los parámetros son:

$$q_0 = 1 \times 10^{-6} m/s^2 \quad r = 1 \times 10^{-5} s^{-1} \quad L = 5000 km \quad \beta = 2 \times 10^{-11} (ms)^{-1}.$$

Se observan las características principales de la circulación de gran escala debida al viento: un giro anticiclónico que cubre todo el dominio y que se intensifica en la frontera oeste. La forma del forzamiento le da el carácter anticiclónico al giro dominante, el efecto β lo desvía hacia el oeste y la fricción lineal es la responsable de la existencia de la capa límite en la frontera oeste en donde se balancea con el efecto β (Vallis, 2006).

2.3. Efecto β topográfico

Un fluido en el plano β y con fondo plano es dinámicamente similar a otro en plano f con fondo variable (van Heijst, 1994). En el primer caso la ecuación de vorticidad es la (27). Por otro lado, en el plano f y con fondo variable la vorticidad potencial es

$$q = \frac{f_0 + \omega}{h(x, y)}. \quad (34)$$

Se supone $h(x, y)$ de la forma

$$h(x, y) = D - \eta_B(x, y), \quad (35)$$

donde D es una profundidad de referencia y η_B es la elevación del fondo. Bajo la suposición de que $\frac{\eta_B}{D} \ll 1$ se puede hacer una expansión de Taylor de $1/h$; además, con la restricción de $\omega/f_0 \ll 1$ se llega a una expresión para la ecuación que describe la conservación de vorticidad potencial

$$\frac{D}{Dt} \left(\omega + \frac{\eta_B f_0}{D} \right) = 0. \quad (36)$$

Si se considera al fondo como una pendiente s constante, $\eta_B = sy$, se llega a una relación equivalente a la ecuación (27)

$$\frac{D}{Dt} (\omega + \beta^* y) = 0, \quad (37)$$

donde $\beta^* = \frac{s f_0}{D}$ es el parámetro β topográfico. Por lo tanto las variaciones en la profundidad

del fluido generan cambios en la vorticidad relativa de la misma manera que las variaciones de f en el plano β : los desplazamientos hacia aguas someras (profundas) corresponden al norte (sur) geográfico.

De forma análoga al plano β , en el límite lineal se pueden generar movimientos ondulatorios que se denominan ondas topográficas de Rossby. Dichas ondas deben su existencia a las variaciones de vorticidad potencial debidas a cambios topográficos del fondo oceánico, es decir, al incremento o reducción de la altura de las columnas de agua conforme fluyen a través de los contornos del fondo variable (Cushman-Roisin, 2009).

2.4. Modelo numérico

La ecuación de vorticidad es discretizada y resuelta por medio de un código de diferencias finitas que desarrollaron inicialmente Roberto Verzicco y Paolo Orlandi en 1990, en el cual se resuelve la dinámica en dos dimensiones. Más tarde Jos van Geffen agregó efectos de rotación. Actualmente el modelo fue modificado por Zavala Sansón y es posible agregar efectos de topografía variable, forzamiento arbitrario y modelos biológicos. Los términos viscosos son discretizados por un esquema Cranck-Nicholson de segundo orden y los términos no lineales por un esquema de Arakawa. La ecuación de evolución se resuelve por medio de un esquema Runge-Kutta de tercer orden (ver detalles generales en van Geffen, 1998).

El esquema numérico se basa en los siguientes pasos:

1. Se prescribe un campo de profundidad arbitrario $h(x, y)$, y se define un forzamiento también arbitrario $F(x, y, t)$.
2. Se propone un campo de vorticidad inicial $\omega(x, y, t = 0)$.
3. Se obtiene la función transporte $\psi(x, y, t = 0)$ del campo de vorticidad inicial a partir de la ecuación diferencial (21) que relaciona ambos campos.
4. Se resuelve la ecuación de evolución de vorticidad (19) por el método de diferencias finitas.
5. Se utiliza el nuevo campo de vorticidad para repetir el proceso desde el punto 2.

Capítulo 3. Resultados

3.1. Números adimensionales y parámetros del problema

A continuación se presenta un análisis dimensional de las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido y que son resueltas con el modelo numérico. El objetivo es mostrar cuales son los términos dominantes bajo diferentes condiciones físicas.

Recordemos que el fluido es homogéneo y se encuentra confinado en un dominio cuadrado de longitud L , en el plano β , con topografía del fondo $h(x, y)$, donde y es la componente meridional y x es la componente zonal. La ecuación de vorticidad que gobierna el sistema con disipación lineal (31) y forzamiento (29) es

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(q, \psi) = A_H \nabla^2 \omega - r\omega - \frac{q_0 \pi}{L} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad (38)$$

donde

$$\omega = -\frac{1}{h} \nabla^2 \psi + \frac{1}{h^2} \nabla h \cdot \nabla \psi. \quad (39)$$

Los términos no lineales se representan con el Jacobiano

$$J(q, \psi) = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (40)$$

es decir

$$J(q, \psi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega + f_0 + \beta y}{h} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\omega + f_0 + \beta y}{h} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (41)$$

Desarrollando las derivadas y sustituyendo los gradientes de ψ con las componentes de la velocidad, ecuaciones (17) y (18):

$$\begin{aligned} J(q, \psi) &= \frac{uh}{h^2} \left(h \frac{\partial}{\partial x} (\omega + f_0 + \beta y) - (\omega + f_0 + \beta y) \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{vh}{h^2} \left(h \frac{\partial}{\partial y} (\omega + f_0 + \beta y) - (\omega + f_0 + \beta y) \frac{\partial h}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Reacomodando los términos se obtiene

$$J(q, \psi) = u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \beta v - \frac{u}{h} (\omega + f_0 + \beta y) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{v}{h} (\omega + f_0 + \beta y) \frac{\partial h}{\partial y},$$

que se puede expresar vectorialmente de la forma

$$J(q, \psi) = \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - (\mathbf{u} \cdot \nabla h) \left(\frac{\omega + f_0 + \beta y}{h} \right) + \beta v.$$

Entonces la ecuación de vorticidad (38) queda como

$$\underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial t}}_A + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \omega}_B - \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla h \left(\frac{\omega + f_0 + \beta y}{h} \right)}_C - \underbrace{\beta v}_D = \underbrace{A_H \nabla^2 \omega}_E - \underbrace{r\omega}_F - \underbrace{\frac{q_0 \pi}{L} \sin \left(\frac{\pi y}{L} \right)}_G. \quad (42)$$

El significado de estos términos es el siguiente:

- A=Cambio temporal local
- B=Términos advectivos
- C=Efectos topográficos
- D=Efecto β
- E=Viscosidad lateral turbulenta
- F=Fricción del fondo
- G=Forzamiento del viento

Se adimensionaliza las ecuaciones con la finalidad de evaluar la contribución de cada uno de los términos. Para esto se definen nuevas variables utilizando la escala horizontal L , la escala vertical H (que representa la profundidad característica del océano) y la escala de velocidad del flujo U :

$$x = Lx', \quad y = Ly', \quad t = \frac{L}{U}t',$$

$$\omega = \frac{U}{L}\omega', \quad \psi = UHL\psi', \quad h = Hh'.$$

Sustituyendo en (42) se obtiene

$$\frac{U^2}{L^2} \frac{\partial \omega'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L^2} \mathbf{u}' \cdot \nabla \omega' - U \frac{H}{L} \mathbf{u}' \cdot \nabla h' \left(\frac{\frac{U}{L} \omega' + f_0 + \beta L y'}{H h'} \right) - \beta U v' = A_H \frac{U}{L^3} \nabla^2 \omega' - r \frac{U}{L} \omega' - \frac{q_0 \pi}{L} \text{sen}(\pi y').$$

Multiplicando por $\frac{L}{f_0 U}$ y omitiendo las primas

$$Ro \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \right) - \mathbf{u} \cdot \nabla h (Ro \omega + 1 + B y) + B v = \frac{Ro}{Re} \nabla^2 \omega - R \omega - F \text{sen}(\pi y), \quad (43)$$

donde

$$Ro = \frac{U}{L f_0}, \quad B = \frac{\beta L}{f_0},$$

$$Re = \frac{UL}{A_H}, \quad R = \frac{r}{f_0}, \quad F = \frac{q_0 \pi}{f_0 U}.$$

Ro es el número de Rossby, el cual representa la razón entre los términos no lineales y la fuerza de Coriolis. B es el número adimensional relacionado con el efecto β . Re es el número de Reynolds, que es la razón entre los términos inerciales y los términos viscosos. R y F representan a la fricción de fondo y el forzamiento, respectivamente. La adimensionalización de la ecuación (39) es

$$\frac{U}{L} \omega' = -\frac{1}{H h'} \frac{U H L}{L^2} \nabla^2 \psi' + \frac{1}{H^2 h'^2} \frac{H^2 U L}{L^2} \nabla h' \cdot \nabla \psi'.$$

Omitiendo las primas y multiplicando por L/U se obtiene la misma expresión

$$\omega = -\frac{1}{h} \nabla^2 \psi + \frac{1}{h^2} \nabla h \cdot \nabla \psi.$$

En las simulaciones que se verán posteriormente, se analizará la influencia de los términos dominantes en la ecuación de vorticidad bajo diferentes números adimensionales. Los parámetros que se utilizan están descritos en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros utilizados en las simulaciones numéricas. En todos los casos $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$ y $A_H = 100 m^2 s^{-1}$. En los casos con topografía $H = 4000 m$. La fricción de fondo es $r = 10^{-6} s^{-1}$ excepto en $S1$ donde $r = 10^{-5} s^{-1}$. En todos los casos $\beta = 2 \times 10^{-11} (ms)^{-1}$ excepto en la simulación $S14$ en plano f . Las condiciones iniciales (CI) son: Reposo (R), Aleatorio (A), Stommel (S), Doble giro (D).

	Descripción	$q_0 (m s^{-2})$	$L (m)$	$C (m)$	CI
$S1$	Fondo plano, intenso	10^{-6}	5×10^6	NA	R
$S2$	Fondo plano, débil	$\pm 10^{-7}$	5×10^6	NA	R
$S3$	Paraboloide, intenso	$\pm 10^{-6}$	5×10^6	3.6×10^6	R
$S4$	Paraboloide, débil	$\pm 10^{-7}$	5×10^6	3.6×10^6	R
$S5$	Paraboloide, menos abrupto	10^{-6}	5×10^6	7×10^6	R
$S6$	Paraboloide	10^{-6}	5×10^6	5×10^6	R
$S7$	Paraboloide	10^{-6}	5×10^6	4.1×10^6	R
$S8$	Paraboloide, más abrupto	10^{-6}	5×10^6	3.6×10^6	R
$S9$	Paraboloide, aleatorio intenso	10^{-6}	5×10^6	3.6×10^6	A
$S10$	Paraboloide, aleatorio débil	10^{-6}	5×10^6	3.6×10^6	A
$S11$	Paraboloide, periódico	10^{-6}	5×10^6	3.6×10^6	R
$S12$	Fondo plano, libre	0	5×10^6	NA	S
$S13$	Paraboloide, libre	0	5×10^6	3.6×10^6	S
$S14$	Paraboloide, libre, plano f	0	5×10^6	3.6×10^6	S
$S15$	Fondo plano, mesoescala	10^{-7}	10^6	NA	R
$S16$	Paraboloide, mesoescala	10^{-7}	10^6	7.2×10^5	R
$S17$	Paraboloide, mesoescala, aleatorio	10^{-7}	10^6	7.2×10^5	A
$S18$	Paraboloide, mesoescala, libre	0	10^6	7.2×10^5	D

3.2. Simulaciones con fondo plano

Antes de analizar los efectos topográficos vamos a resolver primero el problema de fondo plano, $h = H$. El objetivo es verificar que la solución de Stommel se puede reproducir numéricamente, y examinar algunos casos adicionales que serán de utilidad más adelante (por ejemplo, invertir el sentido del forzamiento). Cuando el fondo es plano el término que incluye las variaciones de h se excluye, por lo que la ecuación (43) se reduce a

$$Ro \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \right) + Bv = \frac{Ro}{Re} \nabla^2 \omega - R\omega - F \sin(\pi y). \quad (44)$$

Los números adimensionales de la primera simulación $S1$ (Tabla 1) resultan

$$Ro = 3.7 \times 10^{-4}, \quad B = 1, \quad \frac{Ro}{Re} = 4 \times 10^{-8}, \quad R = 0.1, \quad F = 0.16.$$

Como escala de velocidad se utilizó la representativa de la corriente en la frontera oeste. Nótese que $Ro \ll 1$ y $Ro/Re \ll 1$, por lo que los términos dominantes son

$$Bv \approx R\nabla^2\psi + Fsen(\pi y), \quad (45)$$

que es la ecuación conocida para el problema de Stommel (Vallis, 2006).

La Figura 9 presenta la solución numérica del campo de función corriente y de la velocidad (u, v) a dos tiempos, partiendo de una condición inicial de reposo. Al tiempo $t = 1$ día se forma un vórtice anticiclónico desplazado al oeste. Al día 30 el giro se intensifica y presenta una fuerte corriente al norte en la frontera oeste. La velocidad máxima es 0.18 m/s en la frontera, pero se omite para poder apreciar los vectores en el interior. Para días posteriores esta configuración permanece estacionaria.

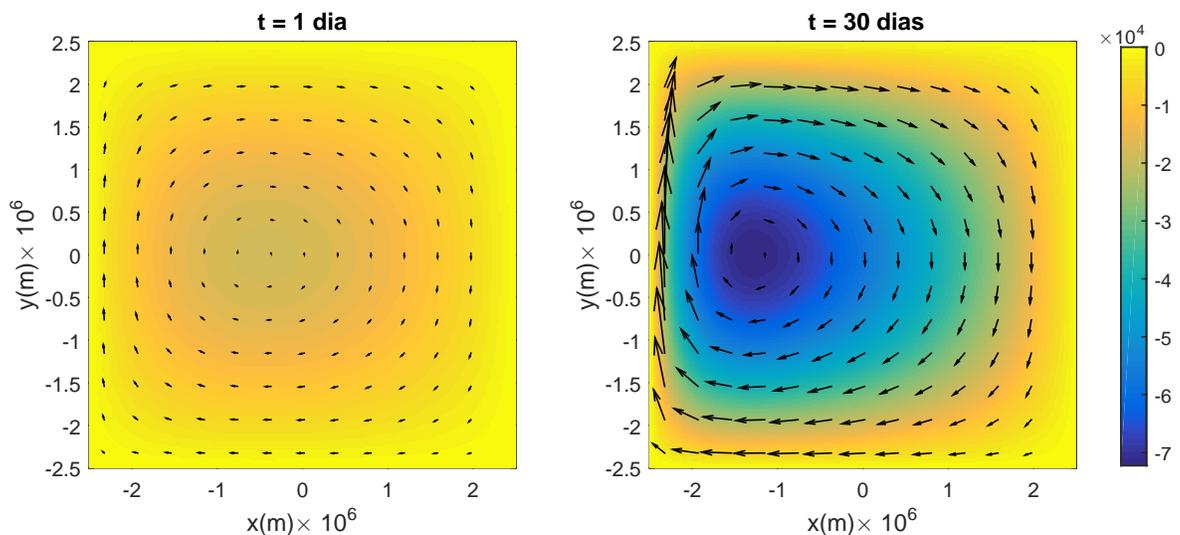


Figura 9. Campos de función corriente y de velocidad en la simulación numérica *S1* con fondo plano al día 1 (panel izquierdo) y al día 30 (panel derecho). El vector con mayor longitud representa 0.13 m/s .

La solución numérica es muy similar a la solución analítica de Stommel vista en el capítulo anterior. Para mostrarlo, en la Figura 10 se presenta una comparación entre los perfiles zonales de ψ en $y = 0$: la solución numérica al tiempo 30 días se simboliza con asteriscos, y la línea sólida representa la solución analítica calculada con los mismos parámetros. El patrón de las soluciones es prácticamente igual, por lo que se puede decir que la simulación representa bien la solución analítica de Stommel.

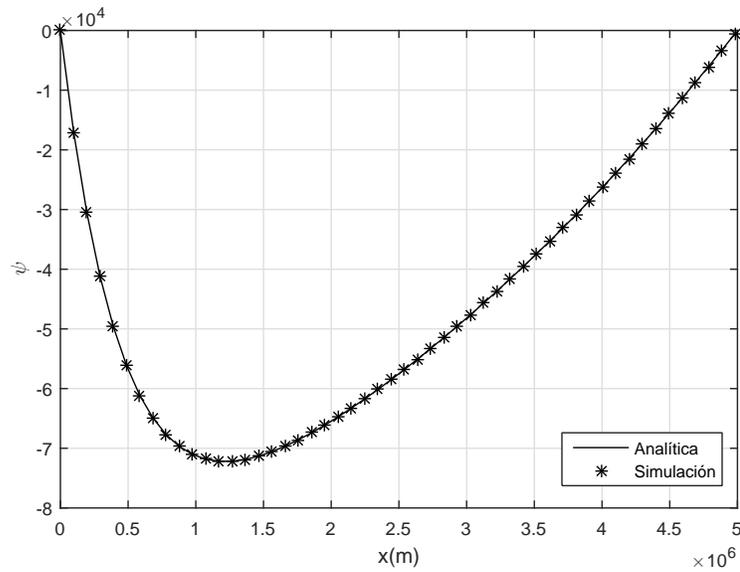


Figura 10. Perfil zonal de la función corriente en la mitad del dominio ($y = 0 \text{ km}$). La línea sólida corresponde a la solución analítica de Stommel y los asteriscos a la obtenida en la simulación numérica al tiempo 30 días.

Para demostrar que el flujo evoluciona a un estado estacionario, se calcula la energía cinética en todo el dominio como función del tiempo. La energía se define de la siguiente manera

$$E(t) = \frac{1}{2A} \int (u^2 + v^2) dA, \quad (46)$$

donde A es el área del dominio. La Figura 11 muestra la energía del sistema en un periodo de 90 días. En los primeros 10 días de la simulación hay un aumento en la energía hasta que se llega a un valor constante.

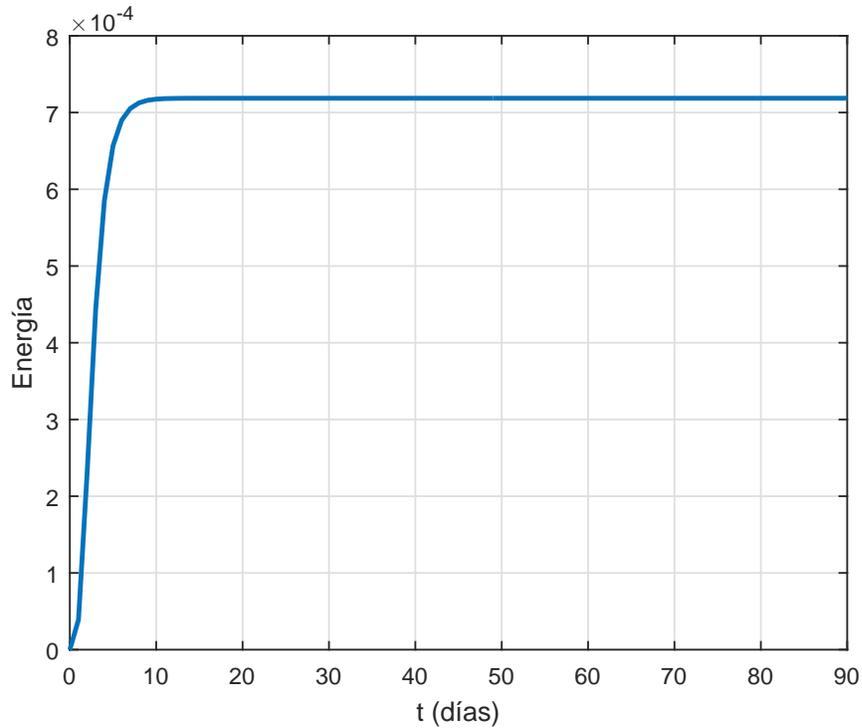


Figura 11. Energía total en función del tiempo para la simulación con fondo plano.

El sistema alcanza un estado estacionario aún para variaciones considerables de la intensidad del viento y de la fricción del fondo. Por ejemplo, vamos a considerar un segundo caso en el que $r = 1 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ y $q_0 = 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$, es decir, una fricción del fondo menor y un forzamiento menos intenso (simulación *S2*, ver Tabla 1). Los números adimensionales son:

$$Ro = 2 \times 10^{-5}, \quad B = 1, \quad \frac{Ro}{Re} = 4 \times 10^{-8}, \quad R = 0.01 \quad F = 0.031.$$

Además, se realizó el experimento con forzamiento anticiclónico ($q_0 > 0$) y ciclónico ($q_0 < 0$) (ver ecuación (28)). En la Figura 12 se observa la evolución del fluido a tres tiempos. A los 10 días se forma una estructura similar a la solución de Munk (1950), pero con el paso del tiempo evoluciona a un solo giro de gran escala. Por lo tanto, el comportamiento con ambos forzamientos es muy parecido: en las dos simulaciones se llega a un estado estacionario intensificado al oeste.

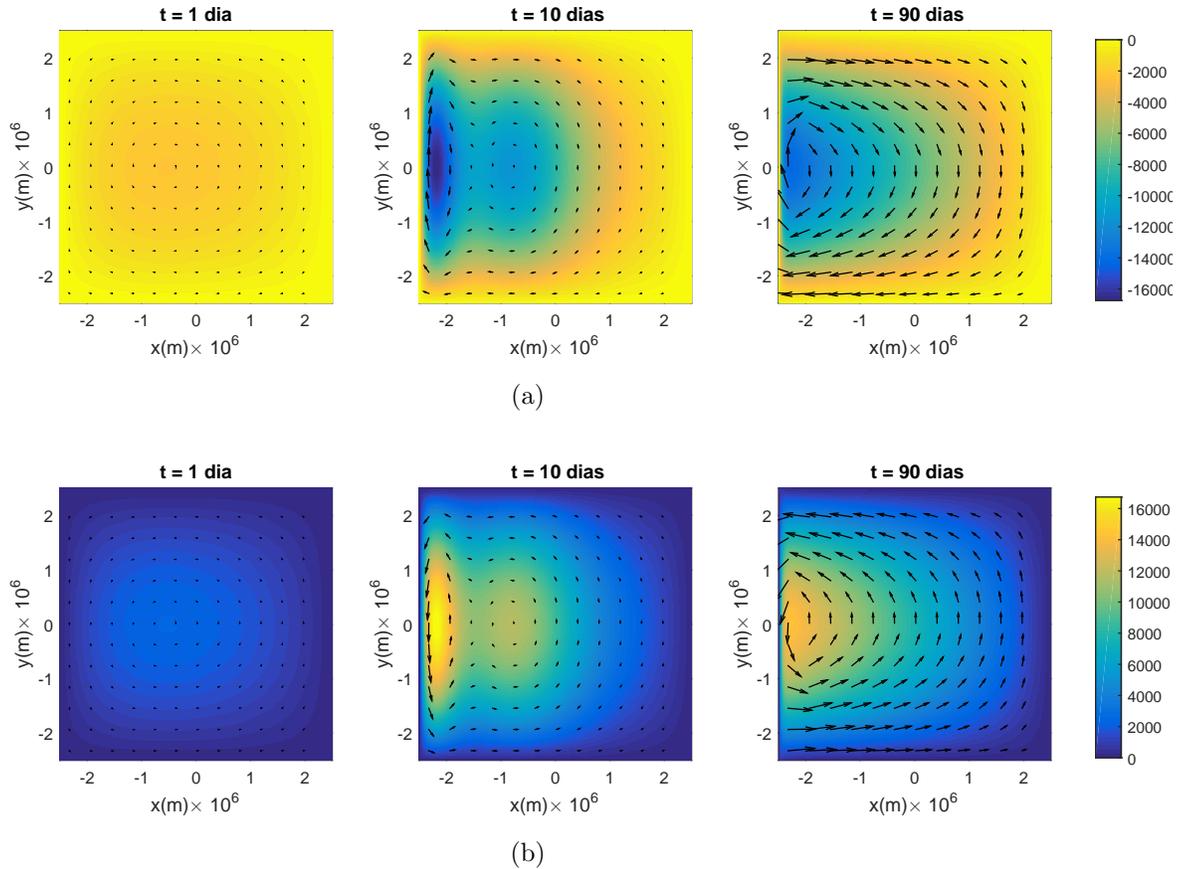


Figura 12. Campos de función corriente y de velocidad en la simulación *S2* con fondo plano y forzamiento (a) anticiclónico y (b) ciclónico, a tres tiempos: 1 día, 10 días y 90 días. El vector con mayor longitud representa 0.01 m/s .

3.3. Problema de Stommel en una cuenca paraboloidal

Ahora que se ha resuelto numéricamente la dinámica del flujo en el fondo plano, se considera a continuación un fondo variable. El principal objetivo es analizar el comportamiento de la circulación de Stommel en presencia de efectos topográficos. La ecuación a resolver es la (38).

En las simulaciones de esta sección se utilizó una topografía en forma de paraboloidal como el que se muestra en la Figura 13. El campo de profundidad se define por la ecuación

$$h(x, y) = H \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{C^2} \right), \quad (47)$$

donde H es la profundidad máxima y $C > \sqrt{x^2 + y^2}$ es una distancia que determina la

pendiente del fondo.

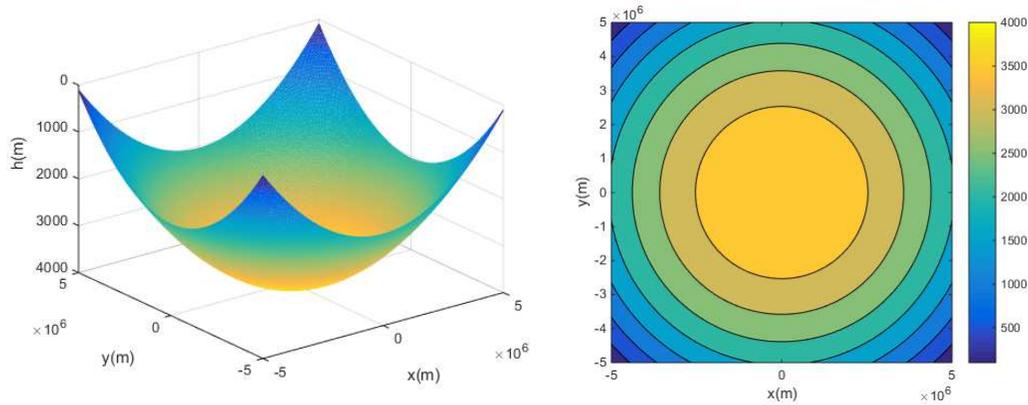


Figura 13. Fondo variable en forma de una cuenca paraboloide con $H = 4000 \text{ m}$ y $C = 7.16 \times 10^6 \text{ m}$. Panel izquierdo: representación tridimensional. Panel derecho: contornos y superficies de profundidad; el primer contorno representa 3500 m .

Siguiendo los resultados de Nost et al. (2008) vamos a analizar el flujo resultante al aplicar un forzamiento intenso ($q_0 = 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$) y uno débil ($q_0 = 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$). La intención es contrastar el caso no lineal con el lineal. El forzamiento puede ser ciclónico o anticiclónico ya que es importante analizar las posibles diferencias entre ambos debidas a la forma del fondo.

Se realizaron simulaciones numéricas con condiciones iniciales de reposo y parámetros que se muestran en la Tabla 1. Para el caso de forzamiento intenso (simulación *S3*), los números adimensionales en la ecuación (43) quedan de la siguiente manera para el forzamiento anticiclónico y ciclónico, respectivamente:

$$Ro = 0.0014, \quad B = 1, \quad Re = 3.62 \times 10^4, \quad R = 0.01 \quad F = 0.044.$$

$$Ro = 0.0015, \quad B = 1, \quad Re = 3.69 \times 10^4, \quad R = 0.01 \quad F = 0.042.$$

En la Figura 14 se muestra el flujo que resulta sobre la cuenca paraboloide. Los pánels superiores corresponden al forzamiento de Stommel y los inferiores a su inverso. En ambos casos se induce la formación de un vórtice ($t = 5$ días). El vórtice tanto ciclónico como anticiclónico tiene un desplazamiento hacia el suroeste debido a la topografía. Al tiempo $t = 90$ días el giro se detiene en la parte sur y permanece estacionario el resto de la simulación. Las diferencias entre el forzamiento ciclónico y anticiclónico son más notables que en el caso

del fondo plano, ya que ahora la topografía juega un papel importante en la circulación.

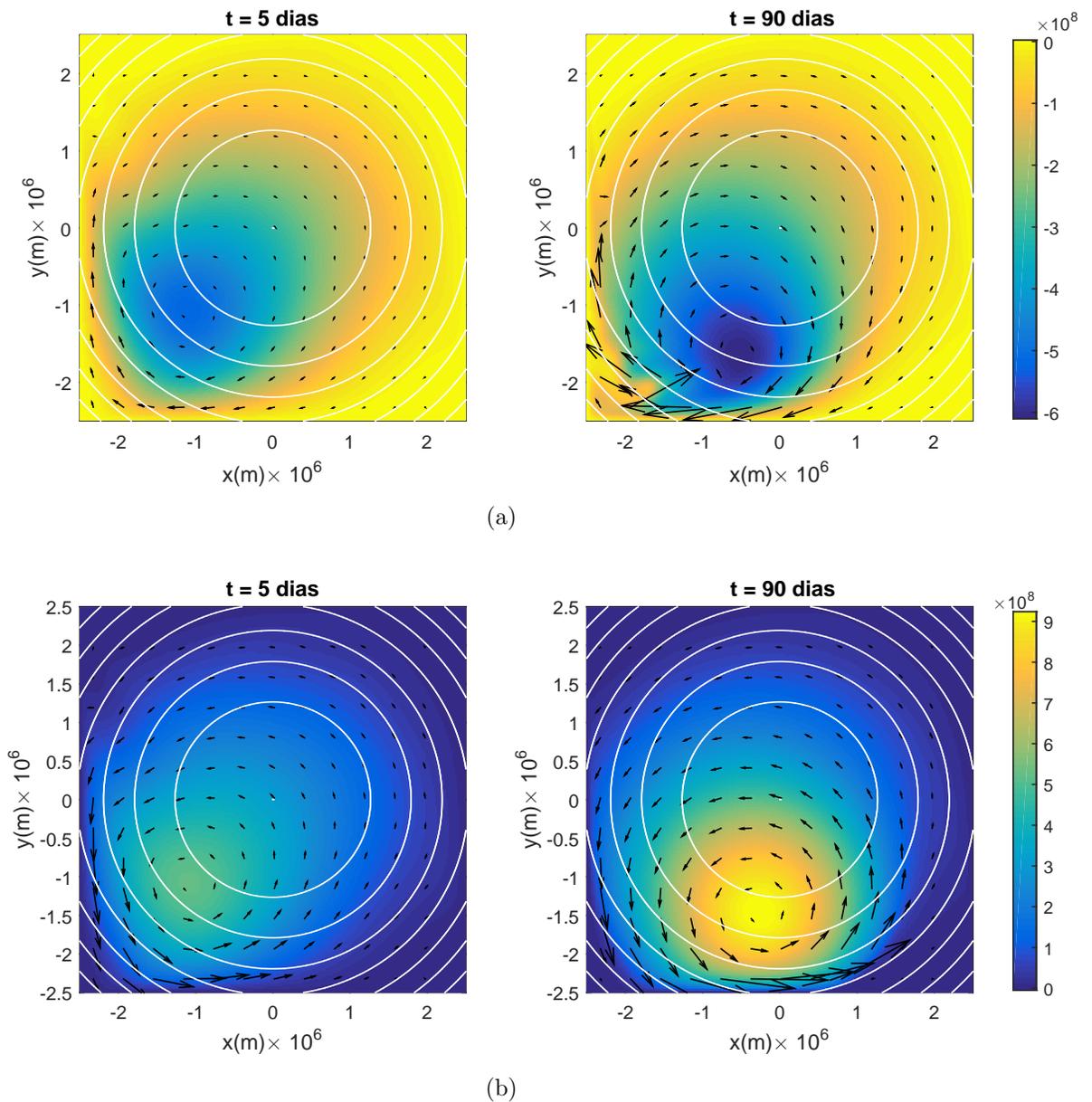


Figura 14. Campos de función transporte y de velocidad en la simulación *S3* con fondo paraboloide y forzamiento intenso (a) anticiclónico y (b) ciclónico, a los días 5 y 90. Las líneas blancas son contornos de topografía; el contorno central es de 3500 m y hay una separación de 500 m entre cada contorno. La longitud máxima del vector representa 0.72 m/s para (a) y 0.73 m/s para (b).

Para el caso de forzamiento débil (simulación *S4*), los números adimensionales en la ecuación (43) quedan de la siguiente manera:

$$Ro = 1.4 \times 10^{-4}, \quad B = 1, \quad Re = 3.48 \times 10^3, \quad R = 0.01 \quad F = 0.05.$$

$$Ro = 1.4 \times 10^{-4}, \quad B = 1, \quad Re = 3.5 \times 10^3, \quad R = 0.01 \quad F = 0.045.$$

Los resultados correspondientes se muestran en la Figura 15. Lo primero que se debe observar es que el estado final que alcanza el flujo es muy similar al del forzamiento intenso: ambos giros se trasladan al sur y alcanzan un estado estacionario en esa región. Las mayores diferencias se registran en la esquina suroeste del dominio, las cuales se discuten más abajo. Por otro lado, también se puede apreciar que el giro ciclónico y anticiclónico son más similares entre sí que cuando el forzamiento es intenso.

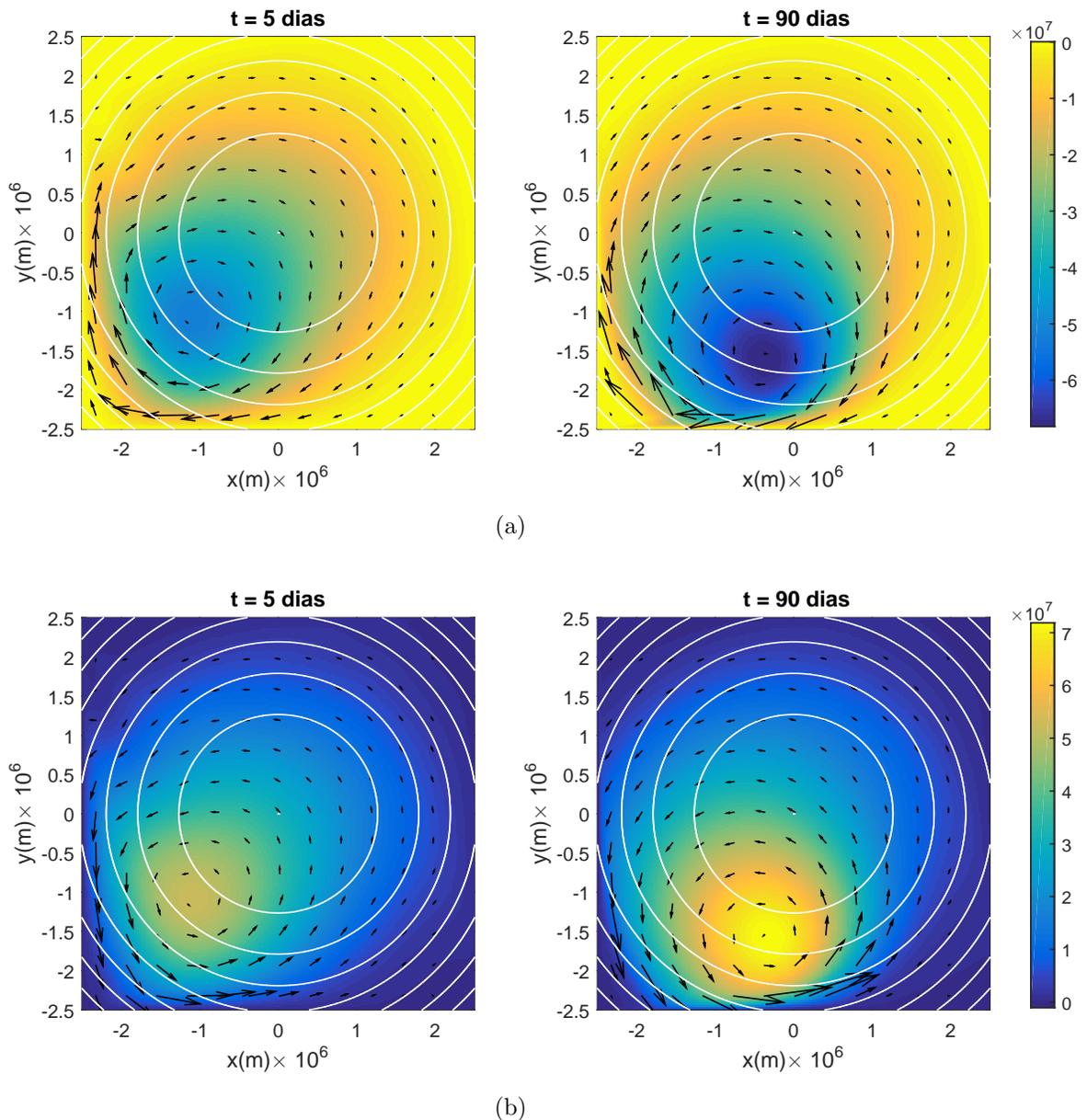


Figura 15. Igual que la Figura 14 pero para la simulación *S4* con forzamiento débil. La longitud máxima del vector representa 0.069 m/s para (a) y 0.07 m/s para (b).

La trayectoria del valor mínimo (máximo) de función transporte del anticiclón (ciclón) se presenta en la Figura 16 para el forzamiento intenso y débil. Los círculos representan la posición diaria durante 90 días. En los primeros días todos los giros presentan el mismo trayecto hacia el suroeste, después se desplazan hacia el este y lentamente alcanzan el estado estacionario en la parte sur del dominio, aunque en diferentes posiciones finales. En el caso del forzamiento intenso (Figura 16a) se observan diferencias en las trayectorias de ambos giros: el anticiclón se queda estacionado en una zona más occidental y el ciclón en una posición más al centro. En cambio, cuando actúa el forzamiento débil (Figura 16b) tanto el giro ciclónico como el anticiclónico se comportan de manera muy similar.

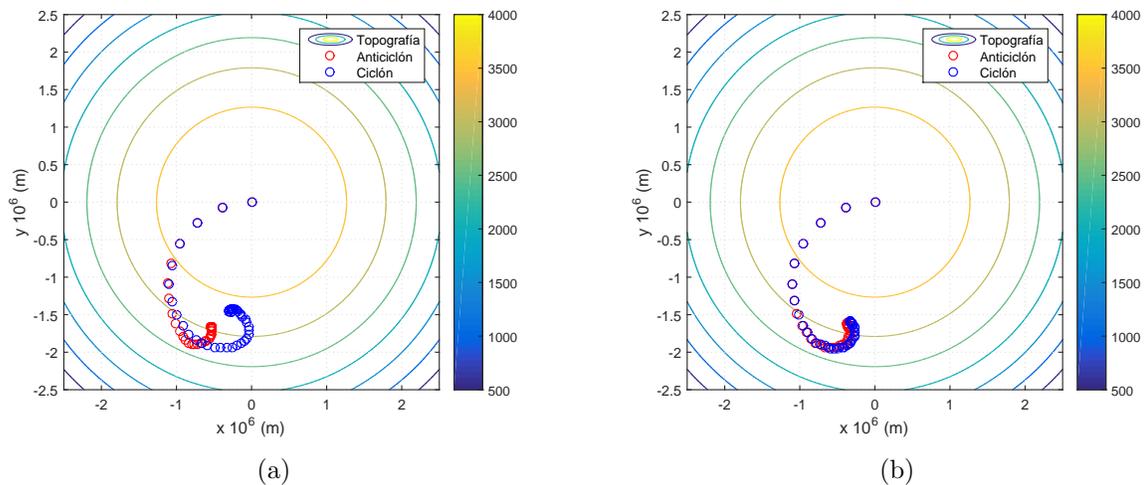


Figura 16. Trayectoria del valor mínimo (máximo) del anticiclón (ciclón) durante 90 días en las simulaciones con (a) forzamiento intenso, y (b) forzamiento débil. Los contornos representan a la topografía.

El movimiento inicial de los giros se puede asociar con el efecto β topográfico (van Heijst, 1994). Por su orientación, la pendiente al oeste del dominio implica que el oeste topográfico es hacia el sur geográfico. Por lo tanto, los giros que se encuentran en la parte oeste de la cuenca se trasladan hacia el sur. También es importante recordar que en el plano β los giros ciclónicos y anticiclónicos siguen una trayectoria distinta (ciclones al noroeste, anticiclones al suroeste); sin embargo este comportamiento no es visible en las presentes simulaciones debido a que el parámetro β^* topográfico es mayor que el parámetro β planetario. Considerando una pendiente $s \approx 10^{-3}$, se tiene $\beta^* \approx \frac{sf_0}{H} \approx 2 \times 10^{-10} (ms)^{-1}$, el cual es mayor que $\beta = 2 \times 10^{-11} (ms)^{-1}$. Como resultado, ambos giros tienen la tendencia a moverse hacia el oeste topográfico, es decir, siguiendo los contornos de la profundidad en sentido antihorario.

La energía total alcanza un valor constante en todos los casos, como se muestra en la Figura 17. Sin embargo, la energía en el vórtice ciclónico es mayor que en el anticiclónico cuando el forzamiento es intenso (panel a). Por el contrario, para el forzamiento débil, ambos giros alcanzan un valor de energía similar. La diferencia entre la energía final del ciclón y el anticiclón en el primer caso se puede deber a que el anticiclón desarrolla estructuras con escalas mas pequeñas donde tiene más efecto la viscosidad que es la responsable de la disipación (Pope, 2001). Además el ciclón es favorecido por la forma de la topografía con aguas someras a la derecha (Bretherton y Haidvogel, 1976).

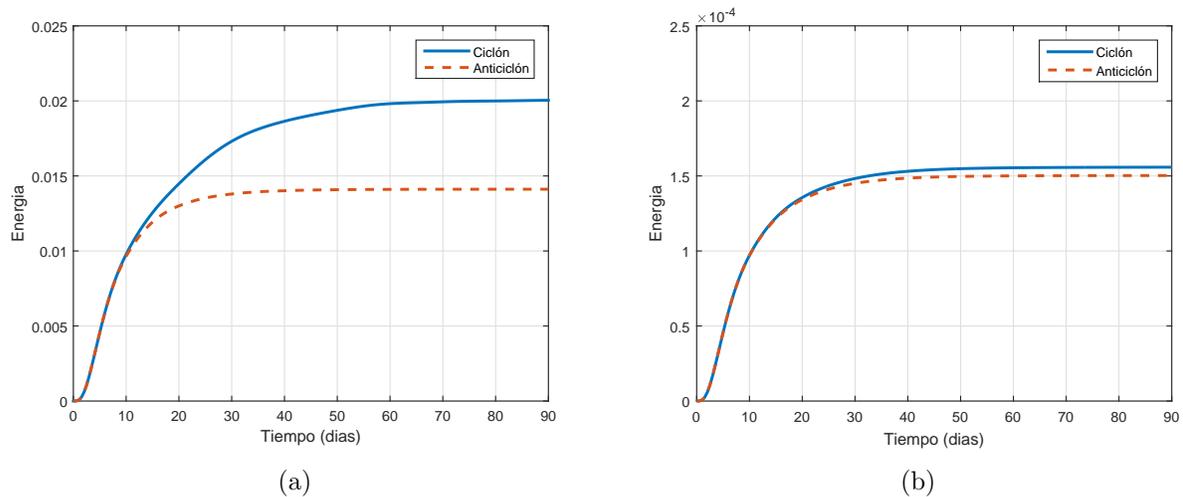


Figura 17. Energía total en función del tiempo en las simulaciones con fondo paraboloide y forzamiento ciclónico y anticiclónico. (a) Forzamiento intenso y (b) forzamiento débil.

Estas diferencias se pueden apreciar en la esquina suroeste del dominio como se muestra en la Figura 18. En el caso del anticiclón (Figura 18a) la circulación es hacia el oeste cerca de la frontera sur, por lo que h disminuye; por conservación de vorticidad potencial, ω también disminuye y el flujo retorna y se dirige hacia aguas profundas. Ahora h aumenta, por lo que ω también. Esto provoca un serpenteo de la corriente hasta que finalmente se establece el flujo al norte. El ciclón (Figura 18b) es diferente por que la circulación en la frontera sur está orientada hacia el oeste topográfico (este geográfico), con agua somera a la derecha.

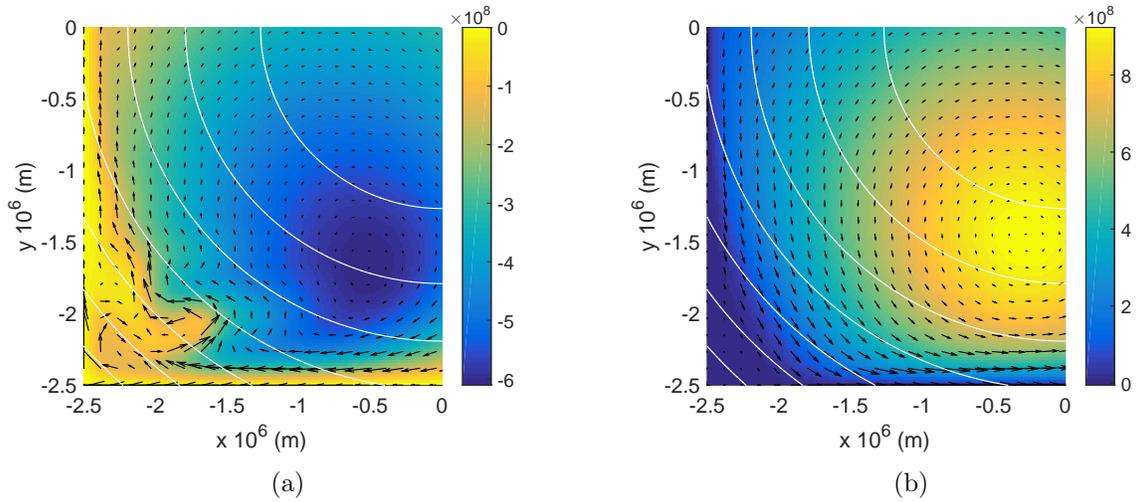


Figura 18. Acercamiento de los campos de función transporte y de velocidad en el suroeste del (a) anticiclón y (b) ciclón de la Figura 14. Los contornos blancos representan la topografía.

En contraste, cuando el forzamiento es débil el flujo en la esquina suroeste es mucho más uniforme a lo largo de los contornos topográficos, como se muestra en la Figura 19. Este resultado está de acuerdo con lo reportado por Nost et al. (2008) para forzamientos débiles ciclónicos y anticiclónicos.

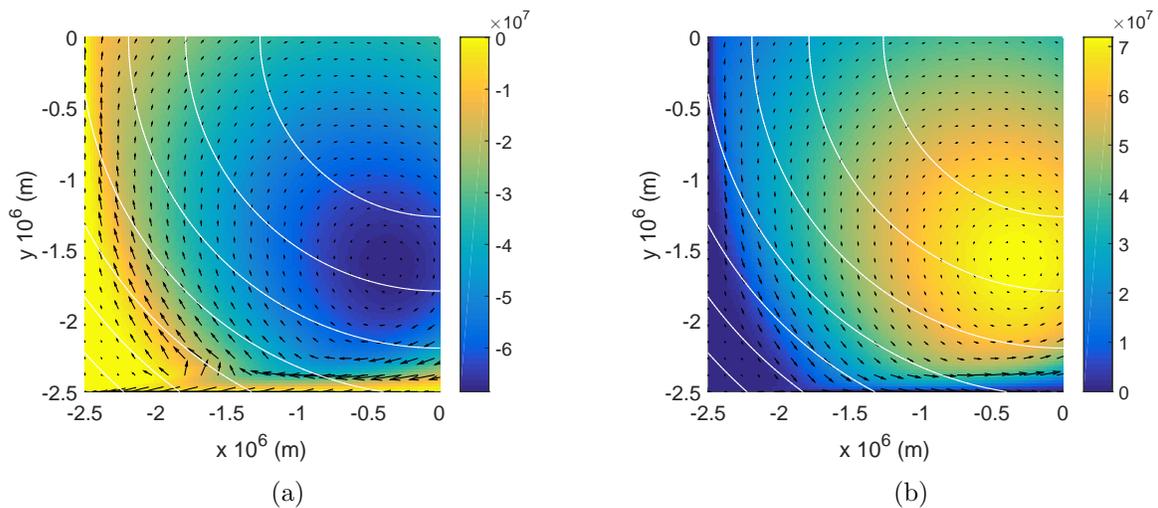


Figura 19. Acercamiento de los campos de función transporte y de velocidad en el suroeste del (a) anticiclón y (b) ciclón de la Figura 15. Los contornos blancos representan la topografía.

Varias topografías

Como se ha observado, la topografía tiene un efecto importante en la circulación del fluido, por lo que se analizará el forzamiento anticiclónico con distintos paraboloides definidos por la ecuación (47). En la Figura 20 se muestran las secciones transversales de las topografías que se utilizaron, variando la distancia C . Como referencia se usó el valor de h en la esquina del dominio, $h_e = h(-\frac{L}{2}, -\frac{L}{2})$. La distancia C se calcula como

$$C = \sqrt{\frac{HL^2}{2(H - h_e)}}. \quad (48)$$

Los casos que se escogieron son $h_e = 10 \text{ m}$, 1000 m , 2000 m , 3000 m , de donde resulta $C = 3.6 \times 10^6 \text{ m}$, $4.1 \times 10^6 \text{ m}$, $5 \times 10^6 \text{ m}$, $7 \times 10^6 \text{ m}$. Entre mayor es C la topografía tiene pendiente s menor, ya que $s \approx \sqrt{2}(H - h_e)/L \propto C^{-2}$. En los casos mencionados $s \approx 1.1 \times 10^{-3}$, 8.5×10^{-4} , 5.7×10^{-4} , 2.8×10^{-4} .

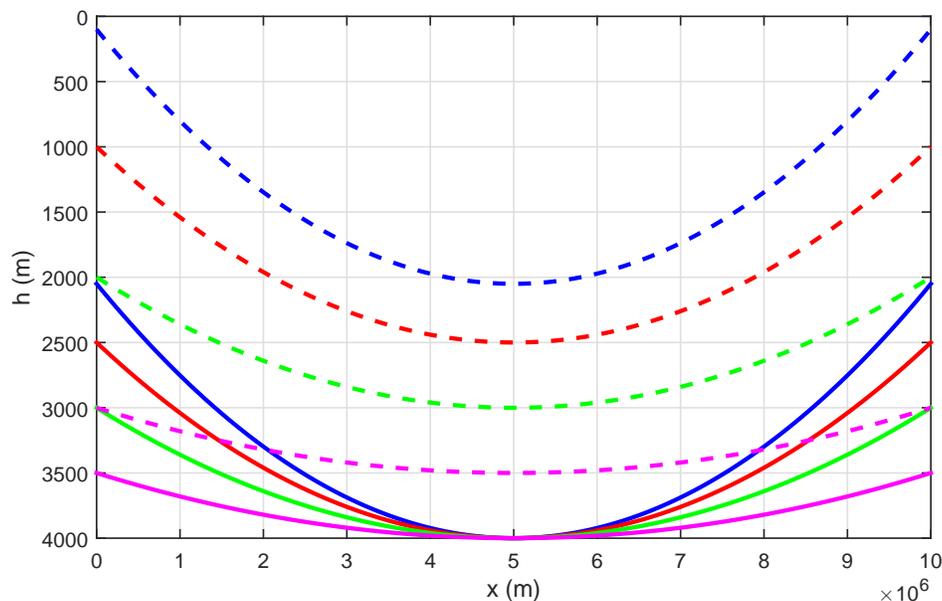


Figura 20. Sección transversal de la topografía de cuatro cuencas paraboloides en la frontera sur, $y = -L/2$ (línea punteada) y en el centro del dominio, $y = 0$ (línea sólida). La profundidad máxima en todos los casos es $H = 4000 \text{ m}$, y las profundidades en la esquina son $h_e = 100, 1000, 2000, \text{ y } 3000 \text{ m}$.

Los cuatro experimentos se denotan de $S5$ a $S8$ y se usaron los mismos parámetros de la sección anterior con el forzamiento intenso (Tabla 1). En la Figura 21 se observan los campos

de función transporte en un tiempo en el cual ya se ha alcanzado la solución estacionaria. Las figuras se ordenan de la topografía menos pronunciada a la más abrupta. En los cuatro casos la separación entre dos contornos es de $300m$. El caso en la Figura 21d es el visto en la sección pasada.

La solución más parecida a la solución de Stommel es evidentemente la de la topografía menos abrupta (Figura 21a); sin embargo, cerca de la frontera oeste se observa una recirculación hacia el sur. Esto se debe a que cerca de la frontera oeste (parte sur) el flujo va de aguas someras a más profundas (debido a la forma del paraboloides), es decir, h aumenta, y por tanto, ω también lo hace de tal manera que cambia la dirección de la corriente. Al ir aumentando la pendiente (páneos b, c y d), la topografía toma un papel más importante en la dinámica, por lo que el efecto β topográfico se acentúa.

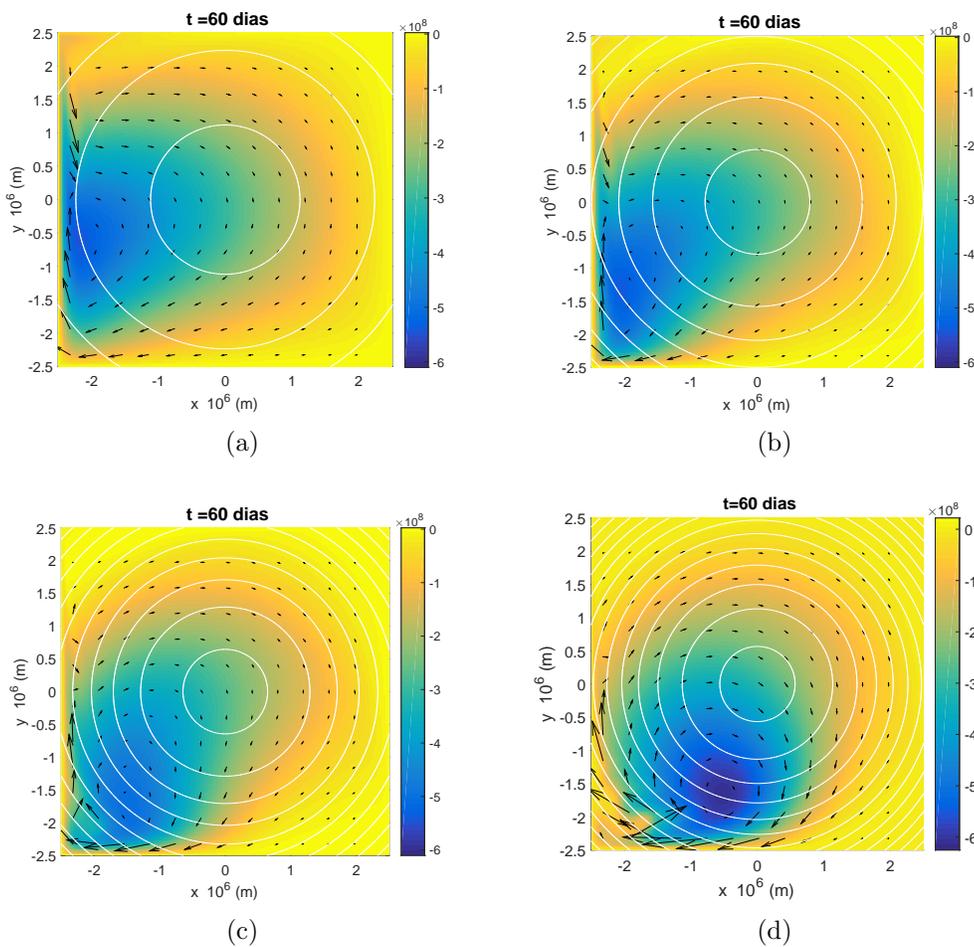


Figura 21. Campos de función transporte y velocidad para las simulaciones $S5 - S8$ con la topografía definida por los paraboloides mostrados en la Figura 20. (a) $S5$: $h_e = 3000 m$ (pendiente menos abrupta), (b) $S6$: $h_e = 2000 m$, (c) $S7$: $h_e = 1000 m$ y (d) $S8$: $h_e = 100 m$ (pendiente más abrupta). El contorno de mayor profundidad es de $3700 m$ en todos los casos y hay una diferencia de $300 m$ entre cada contorno.

La energía total calculada en estas simulaciones se muestra en la Figura 22. En todos los casos se llega a un estado estacionario aproximadamente al mismo tiempo; sin embargo, el flujo es más energético cuando la pendiente de la topografía es mayor.

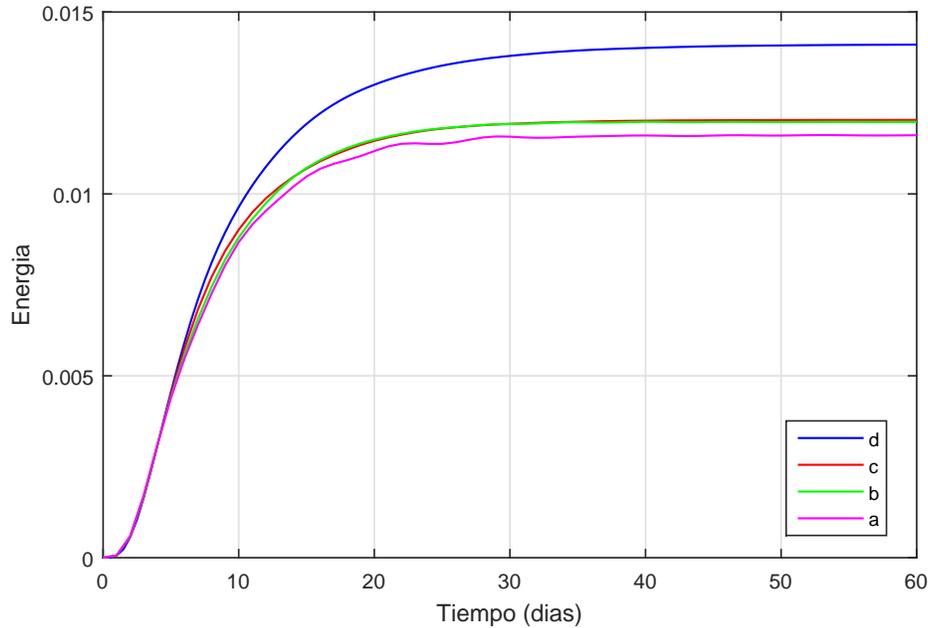


Figura 22. Energía total en función del tiempo para los casos vistos en la Figura 21.

Condición inicial aleatoria

En los casos vistos anteriormente se comienza del reposo y se llega a una solución estacionaria. Con el fin de observar si la solución es estable sin importar el estado inicial del fluido, se presenta una simulación cuya condición inicial es un campo de vorticidad aleatorio en cada punto de malla del dominio, y utilizando el forzamiento anticiclónico intenso ($S9$ en la Tabla 1). El valor máximo de la vorticidad inicial es $\omega_{max} = |5 \times 10^{-5}| = f_0/2$.

En la Figura 23 se muestra la evolución de los campos de función transporte y velocidad a cuatro tiempos. En el día cero la configuración es aleatoria, pero con el paso del tiempo la circulación se orienta de forma anticiclónica hasta que finalmente se establece un giro en la frontera sur (día 60), con las mismas características observadas con condiciones iniciales de reposo (Figura 14b). Esto indica que el anticiclón trasladado al sur del dominio por efectos topográficos es una solución muy persistente. Cuando se utiliza el forzamiento débil se obtiene un resultado análogo (no mostrado).

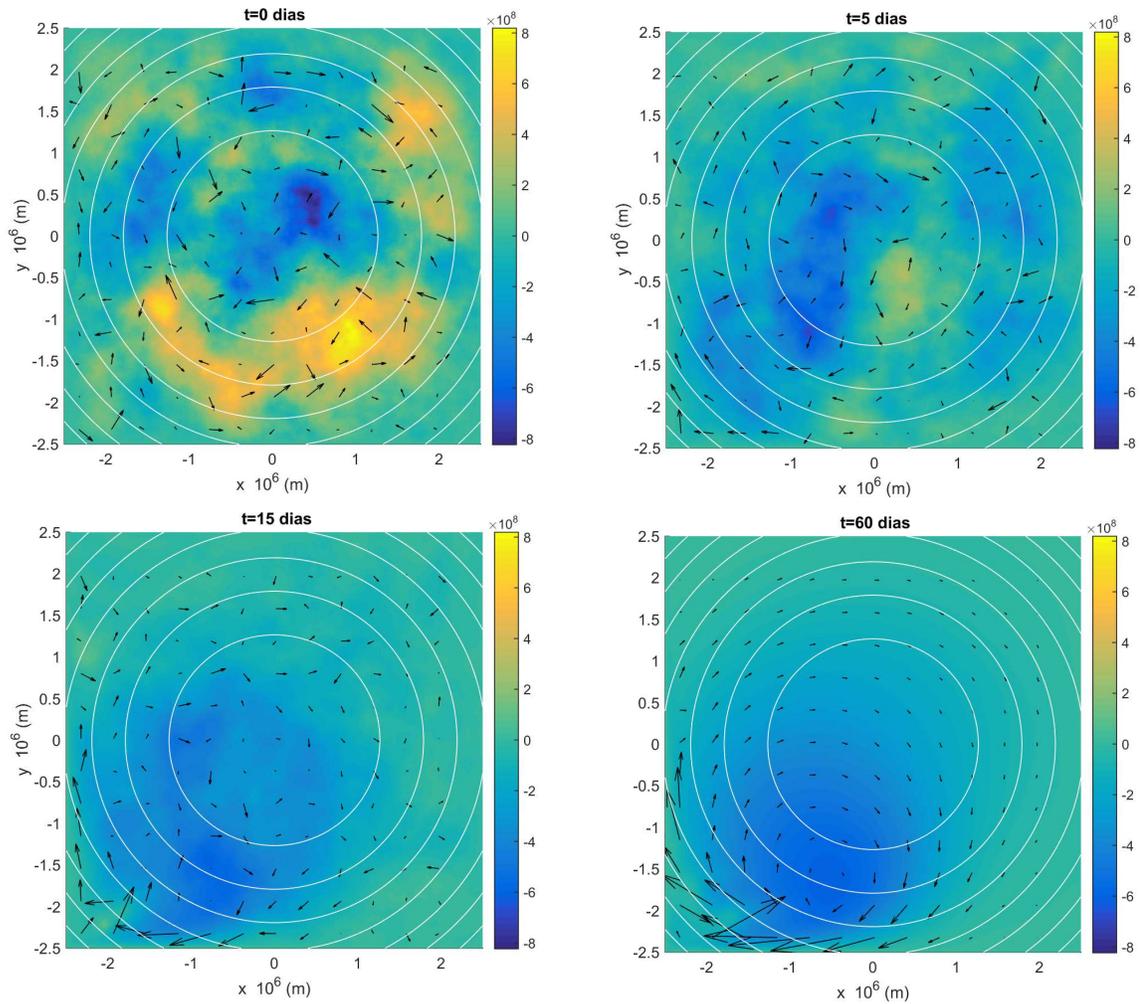


Figura 23. Campos de función transporte y velocidad en la simulación *S9* con forzamiento anticiclónico sobre la cuenca paraboloidé y condición inicial aleatoria. El vector con longitud máxima representa 0.72 m/s .

La evolución de la energía total en función del tiempo se muestra en la Figura 24. Inicialmente la energía decae hasta que alcanza un valor constante ($E = 0.014 \text{ m}^2/\text{s}^2$) al día 20, aproximadamente; a partir de entonces se llega a la solución estacionaria. En la misma gráfica se muestra el comportamiento de la energía en otra simulación cuya vorticidad inicial máxima es menos intensa, $\omega_{max} = |10^{-5}| \text{ s}^{-1} = f_0/10$ (*S10* en la Tabla 1). En este caso la energía es inicialmente menor, pero con el tiempo crece y alcanza el mismo valor que en la simulación anterior. Adicionalmente se incluye la evolución de la energía para el caso cuya condición inicial es el reposo (mostrado en la Figura 17), y cuyo valor estacionario es nuevamente el mismo.

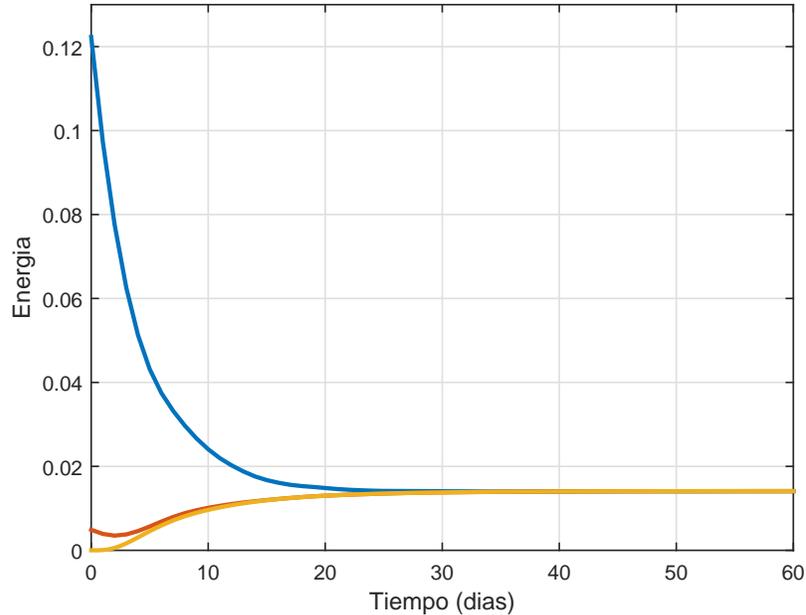


Figura 24. Energía total en función del tiempo para las simulaciones con condición inicial aleatoria (S9 azul), condición aleatoria débil (S10 roja) y condición de reposo (S8 amarilla).

Forzamiento periódico

Se ha visto que el comportamiento del fluido aplicando el forzamiento ciclónico y anticiclónico es distinto. A continuación se presenta una simulación (S11 en la Tabla 1) con un nuevo forzamiento que incluye los dos mencionados anteriormente y que se expresa de la siguiente manera

$$\hat{F} = -\frac{q_0\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \quad (49)$$

donde $T = 4$ meses es el periodo y $q_0 = 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ (viento intenso). Este es un forzamiento periódico, el cual pasa del reposo al tiempo inicial a un modo anticiclónico en el primer mes, se relaja en el segundo y al tercer mes se revierte al forzamiento ciclónico.

En la Figura 25 se observa la evolución del campo de función transporte y velocidad durante ocho meses, es decir, dos periodos completos del forzamiento periódico. El primer máximo del forzamiento es anticiclónico en el primer mes. Como resultado, se observa el giro anticiclónico en la parte sur del dominio, como en la simulación de la Figura 14. A los dos meses el forzamiento es cero y el flujo se disipa. A los tres meses el forzamiento se revierte y se forma un giro ciclónico desplazado al sur. Por último, a los cuatro meses el forzamiento

se relaja y el flujo también. En el siguiente periodo de cuatro meses estos comportamientos se repiten. Lo más relevante de esta simulación es que el patrón que se había observado anteriormente para el forzamiento ciclónico y anticiclónico se repite de manera alternada, a pesar de que el fluido no está en reposo total durante el cambio de forzamiento.

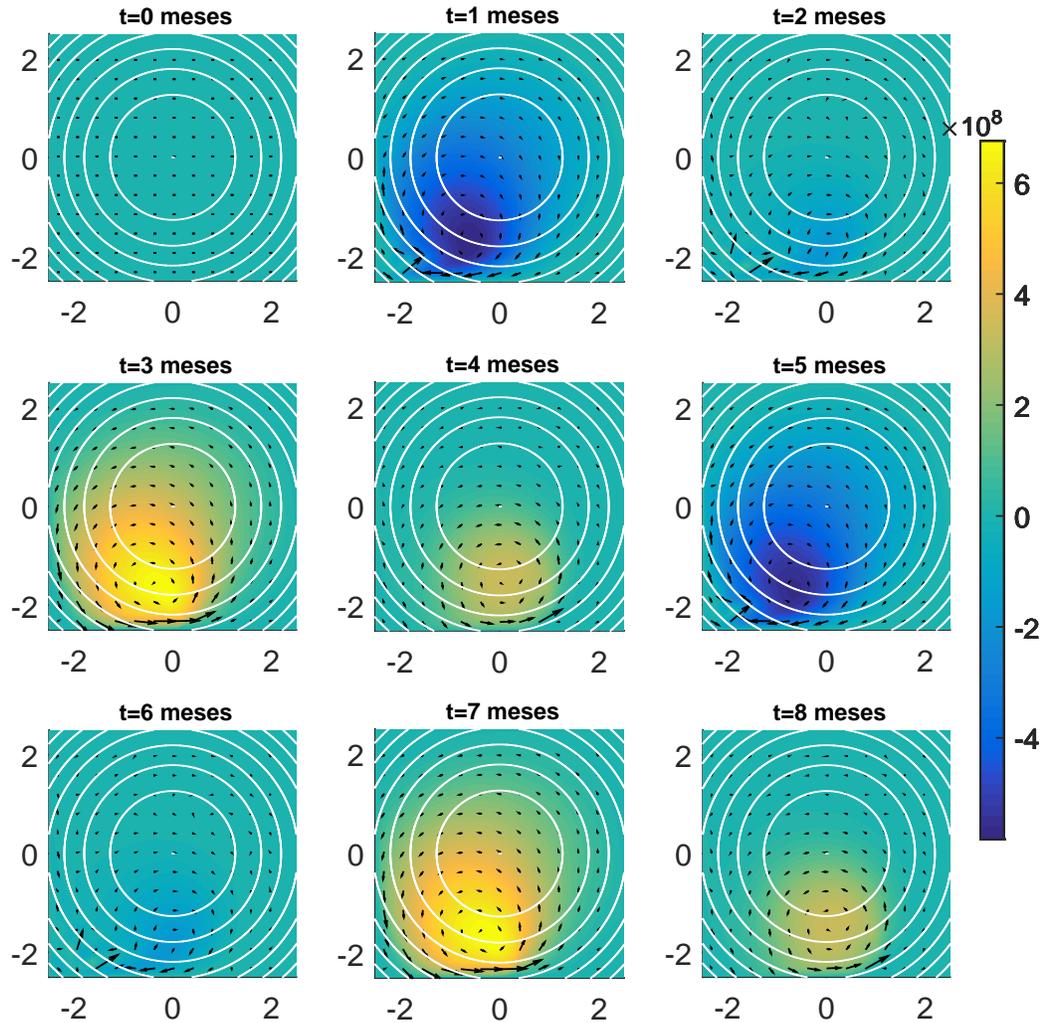


Figura 25. Campos de función transporte y velocidad en la simulación $S11$ con forzamiento periódico sobre una cuenca paraboloides.

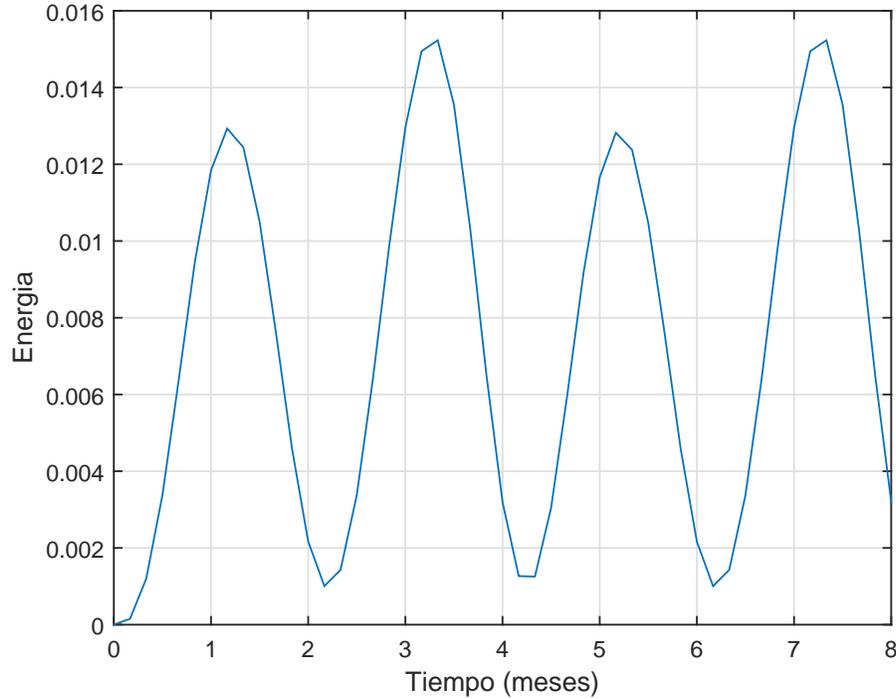


Figura 26. Energía en función del tiempo para el forzamiento periódico.

En la Figura 26 se observa la energía del flujo en función del tiempo. La energía es periódica y tiene valores extremos unos días después de que la amplitud del forzamiento es máxima o mínima. Durante el forzamiento anticiclónico la energía es menor que en el ciclónico, como ya se había visto antes para el forzamiento constante.

Análisis de la solución estacionaria

Cuando el flujo es estacionario, inviscido y sujeto a un forzamiento débil, de la ecuación de vorticidad se tiene que los términos no lineales son aproximadamente cero

$$J(q, \psi) = h\mathbf{u} \cdot \nabla q = 0. \quad (50)$$

Esto significa que ψ es una función de q , o bien, que el flujo es perpendicular a los gradientes de la vorticidad potencial; es decir, el flujo sigue los contornos de q . Si el número de Rossby y las variaciones de la profundidad son pequeños, la vorticidad potencial es aproximadamente $q \approx (f_0 + \beta y)/h$, y por lo tanto el flujo sigue los contornos de f/h (Bretherton y Haidvogel, 1976; Salmon, 1998).

Para comparar este resultado con las simulaciones numéricas, la Figura 27 presenta los campos de función transporte y velocidad para forzamientos débiles en su estado estacionario (mostrados en la Figura 15, simulación $S4$). Los círculos blancos representan ahora a los contornos de f/h . Lo que se puede observar es que tanto para el giro anticiclónico (panel a) como para el ciclónico (panel b), el flujo tiende a seguir los contornos de f/h . La posición latitudinal del centro de los contornos coincide muy bien con la posición correspondiente de los giros; no obstante, ambas estructuras están más orientadas hacia el oeste. Aunque la coincidencia entre la velocidad y el campo de f/h no es exacta, su similitud es evidente. Para el caso del forzamiento intenso, dicha similitud es menor (ver Figura 14), lo cual se podría deber a la no linealidad en ese caso.

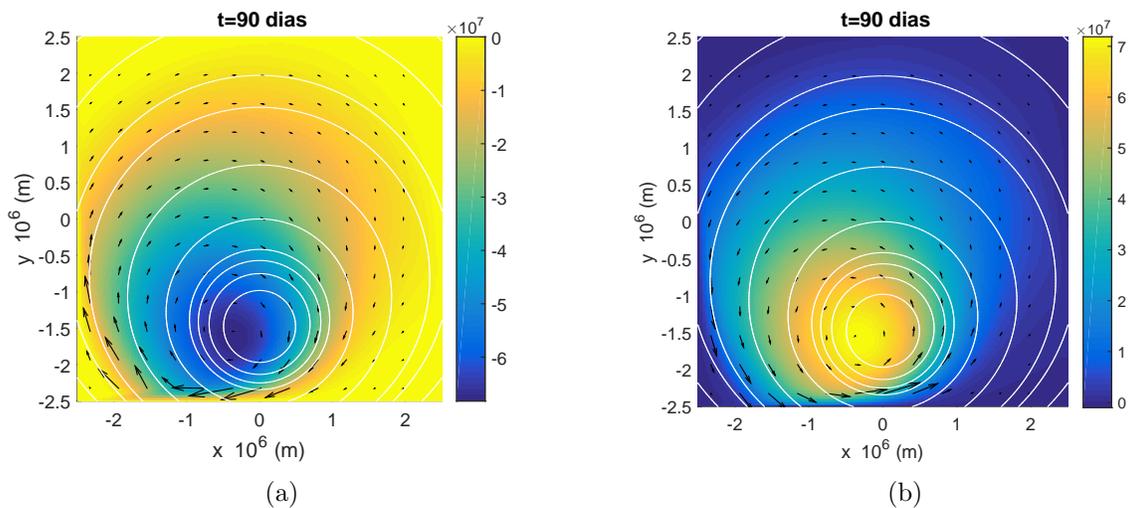


Figura 27. Campos de función transporte y de velocidad del (a) anticiclón y (b) ciclón de la Figura 15 (simulación $S4$). Los contornos blancos representan f/h .

3.4. Evolución libre sobre topografía variable

Se ha visto que la presencia de la topografía afecta a la circulación forzada por el viento utilizado en el modelo de Stommel. Con el objetivo de evaluar las contribuciones de la topografía en el comportamiento del fluido se presenta el caso de la evolución libre, es decir, sin forzamiento del viento.

Fondo plano

Primero se presenta la evolución libre en el fondo plano. Si consideramos al sistema como inviscido, la ecuación lineal de vorticidad en el plano β queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta v = 0, \quad (51)$$

la cual admite soluciones ondulatorias que son las ondas planetarias de Rossby (ver Capítulo 2).

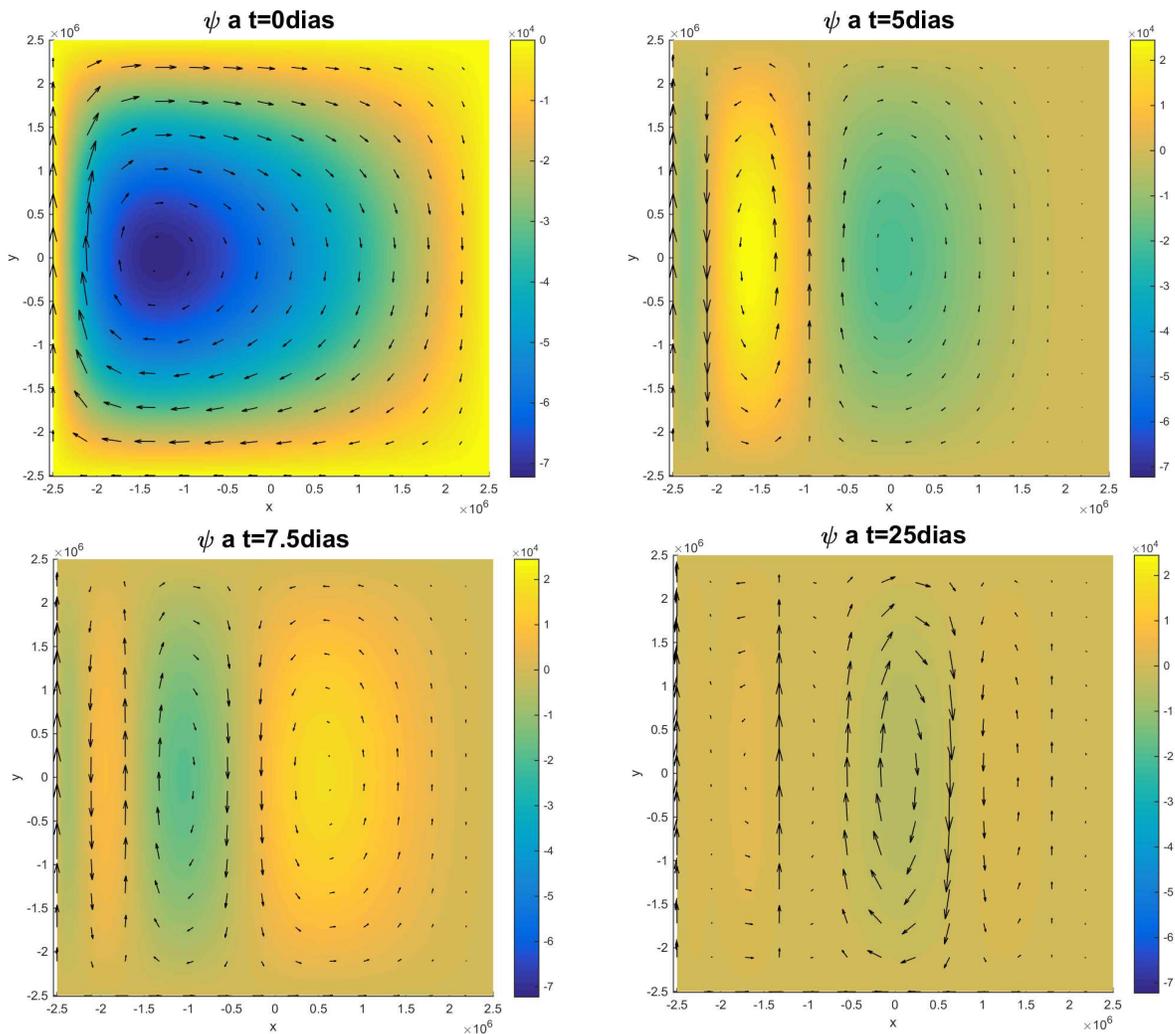


Figura 28. Evolución libre de los campos de función corriente y de velocidad para distintos tiempos sobre un fondo plano (simulación S12). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.

En la Figura 28 se observa la evolución del flujo en una simulación donde la condición inicial es la solución de Stommel y el forzamiento es cero (S12 en la Tabla 1). Este caso es

equivalente a suponer que el forzamiento en el problema de Stommel se relaja por completo. Lo que se produce en los días posteriores son ondas planetarias de Rossby. Estas consisten en celdas de vorticidad alternada que cubren toda la extensión meridional del dominio y que se propagan hacia el oeste. El flujo decae debido a que no hay forzamiento.

Fondo variable en plano β

Ahora se presenta el caso de interés: el de fondo variable en forma de cuenca. La ecuación adimensional de vorticidad queda de la forma

$$Ro \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \right) - \mathbf{u} \cdot \nabla h(Ro\omega + 1 + By) + Bv = \frac{Ro}{Re} \nabla^2 \omega - R\omega. \quad (52)$$

Los parámetros que se utilizaron se muestran en la Tabla 1 (simulación *S13*). Como condición inicial se utilizó la solución del problema de Stommel (giro anticiclónico) y se dejó evolucionar libremente.

La Figura 29 muestra la evolución del giro anticiclónico durante 30 días. Al primer día, el anticiclón se desplaza hacia el suroeste por efecto de la pendiente topográfica, como se ilustró en simulaciones anteriores. Simultáneamente se forma un giro ciclónico en la esquina noroeste. Esto se debe a que en la parte norte del giro anticiclónico el flujo se mueve hacia zonas profundas, lo que produce vorticidad relativa positiva. En días posteriores aparecen estructuras similares con signo de vorticidad alternado que se mueven hacia el sur. Este patrón ondulatorio son ondas topográficas de Rossby, las cuales se propagan hacia el oeste topográfico (ver Capítulo 2). Dada la forma de la cuenca, dicha dirección es hacia el sur geográfico. No obstante, a los días 10 y 30 se observa que las ondas se encuentran atrapadas en la zona oeste del dominio. Adicionalmente, en el día 30 se aprecia la generación de ondas topográficas que viajan al oeste en la parte norte.

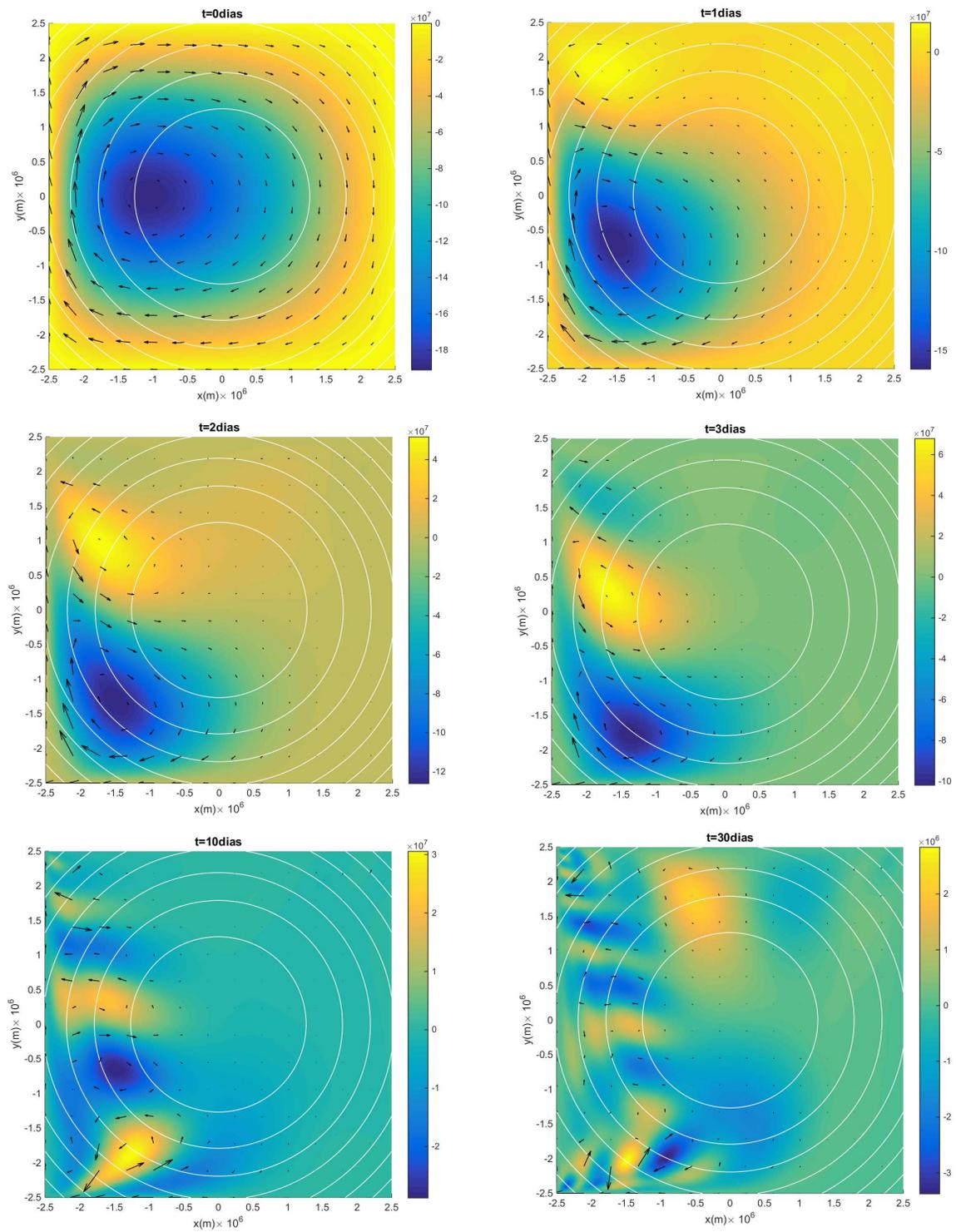


Figura 29. Evolución libre de los campos de función transporte y de velocidad para distintos tiempos sobre una cuenca paraboloide (simulación *S13*). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.

La observación más importante en esta simulación es que las ondas topográficas que se generan hacia el sur en la frontera oeste quedan confinadas en esa zona y no se propagan

hacia el este siguiendo la topografía. La razón por la que las ondas se detienen se puede deber a la competencia entre el efecto β planetario y el topográfico en esa región. Por un lado, por el efecto β topográfico las ondas se propagan hacia el oeste topográfico (con agua somera a la derecha), esto es, hacia el este. Sin embargo, el efecto β planetario hace que las ondas se propaguen hacia el oeste. Por lo tanto se inhibe la propagación de las ondas topográficas hacia el este geográfico. En la parte norte ocurre lo contrario: tanto el efecto β planetario como el topográfico inducen la propagación hacia el oeste, y por lo tanto se generan ondas en esa dirección.

Fondo variable en plano f

Con el fin de observar sólo el efecto topográfico en la evolución de las columnas de fluido en ausencia del forzamiento y el efecto β , se considera la evolución libre en el plano f (simulación S14). La ecuación que describe este problema es

$$Ro \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \right) - \mathbf{u} \cdot \nabla h(Ro\omega + 1) = \frac{Ro}{Re} \nabla^2 \omega - R\omega. \quad (53)$$

En la Figura 30 se presentan los campos de función transporte y velocidad a seis tiempos diferentes. Inicialmente (día 1), se observa un comportamiento similar al del problema en el plano β : el desvío del remolino hacia el sur y la formación de un ciclón en la esquina superior izquierda del dominio. Sin embargo, el comportamiento del anticiclón es el de desplazarse alrededor del centro del dominio en sentido antihorario durante el resto de la simulación. Esto se debe puramente a efectos topográficos que provocan que el anticiclón se mueva hacia el oeste topográfico, es decir, en forma ciclónica. La estructura del anticiclón es dominante lo cual impide la visualización de ondas topográficas.

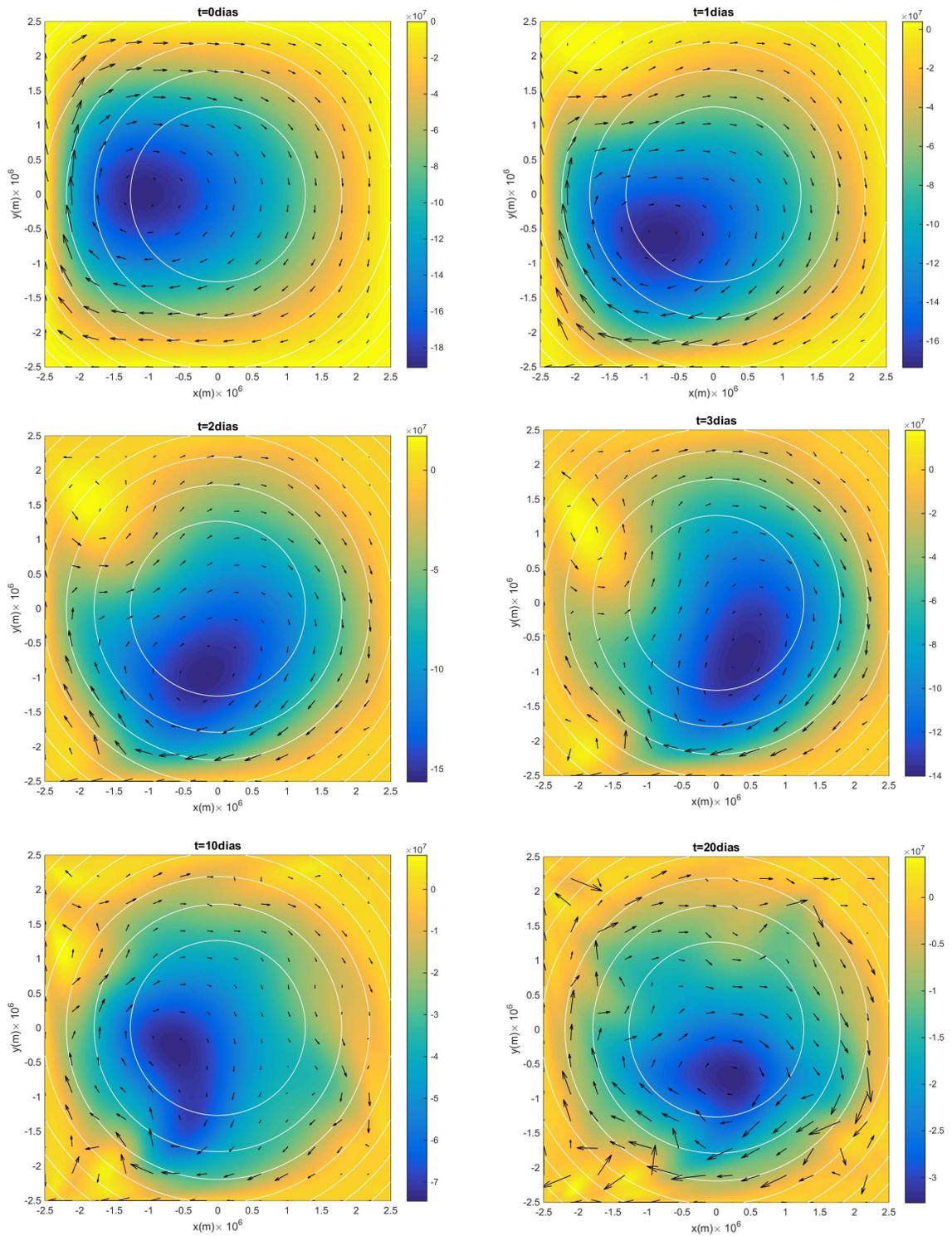


Figura 30. Evolución libre de los campos de función transporte y de velocidad para distintos tiempos sobre una cuenca paraboloides en plano f (simulación $S14$). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.

3.5. Cuenca de mesoescala

En la sección anterior se obtuvieron resultados para una cuenca de dimensiones comparables a las del Atlántico Norte ($L = 5000 \text{ km}$). Sin embargo, la dinámica del plano β con forzamiento del viento también se puede aplicar a cuencas más pequeñas como el Golfo de México ($L \approx 1000 \text{ km}$). En esta sección se estudia la circulación en una cuenca oceánica de mesoescala cuyo patrón de forzamiento son los vientos alisios (vientos del este), de manera similar a como ocurre en el Golfo de México (Zavala-Hidalgo et al. 2014). Matemáticamente este forzamiento se puede modelar como

$$F = \left(-q_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), 0 \right), \quad (54)$$

cuyo componente vertical del rotacional es

$$\hat{F} = \frac{q_0 \pi}{L} \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right). \quad (55)$$

Un esquema que representa la variación meridional promedio de los vientos alisios en el Golfo de México se muestra en la Figura 31.

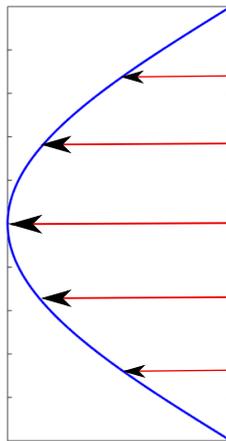


Figura 31. Perfil meridional del forzamiento del viento en las simulaciones con la cuenca de mesoescala. Este perfil es una aproximación simplificada de los vientos alisios en el Golfo de México.

Fondo plano

Primeramente, se estudia el caso con fondo plano para apreciar el efecto del viento en este problema. La condición inicial de la simulación es el reposo. La escala de longitud de esta nueva cuenca es de 1000 km ($S15$ en la Tabla 1). En la Figura 32 se presenta la solución numérica del problema a dos tiempos. Al día 1 se establece una circulación anticiclónica al norte y ciclónica en el sur de la cuenca. Al día 50 ambos giros están trasladados e intensificados en el oeste.

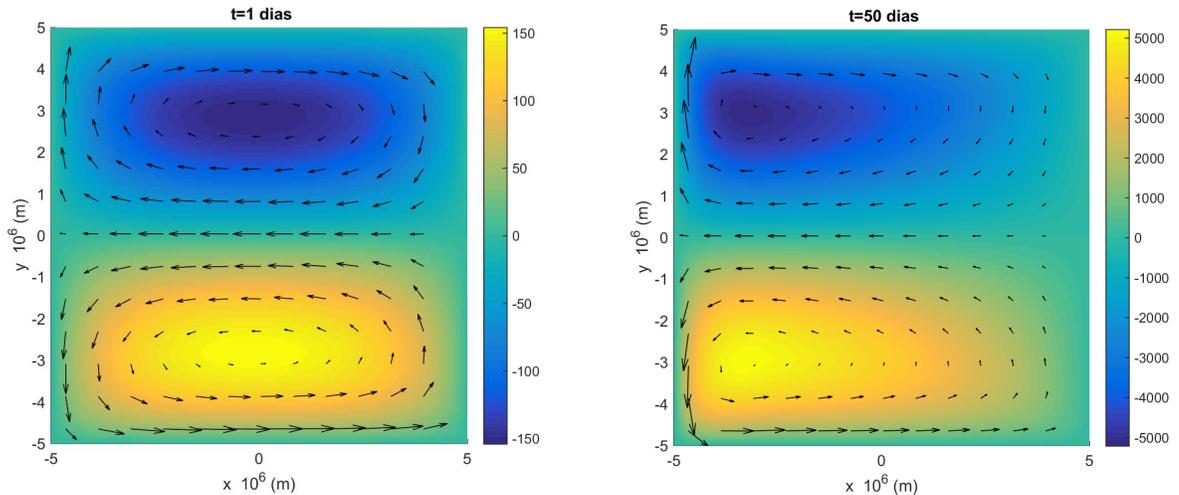


Figura 32. Campos de función corriente y de velocidad para la simulación $S15$ con forzamiento de vientos del este, fondo plano y condición inicial de reposo en la cuenca de mesoescala. Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.

Cuenca Paraboloides

Ahora se analiza el problema con fondo variable (simulación $S16$). Los resultados se presentan en la Figura 33, en donde se muestran los campos de función transporte y velocidad a cuatro tiempos diferentes. Inicialmente se aprecia el mismo patrón que en el fondo plano, pero rotado en sentido antihorario. Posteriormente, a los 4 días el doble giro continúa su rotación de manera ciclónica con el giro anticiclónico visiblemente debilitado. Al día 90, se llega a un estado estacionario en donde se observa el giro ciclónico desplazado al sureste dominando sobre casi toda la cuenca. Esta posición es estable, ya que con el paso del tiempo la energía del flujo alcanza un valor constante, como se muestra en la Figura 34. La circulación ciclónica es la que perdura, lo cual es consistente con el estado de equilibrio de un flujo sobre un fondo variable con agua somera a la derecha.

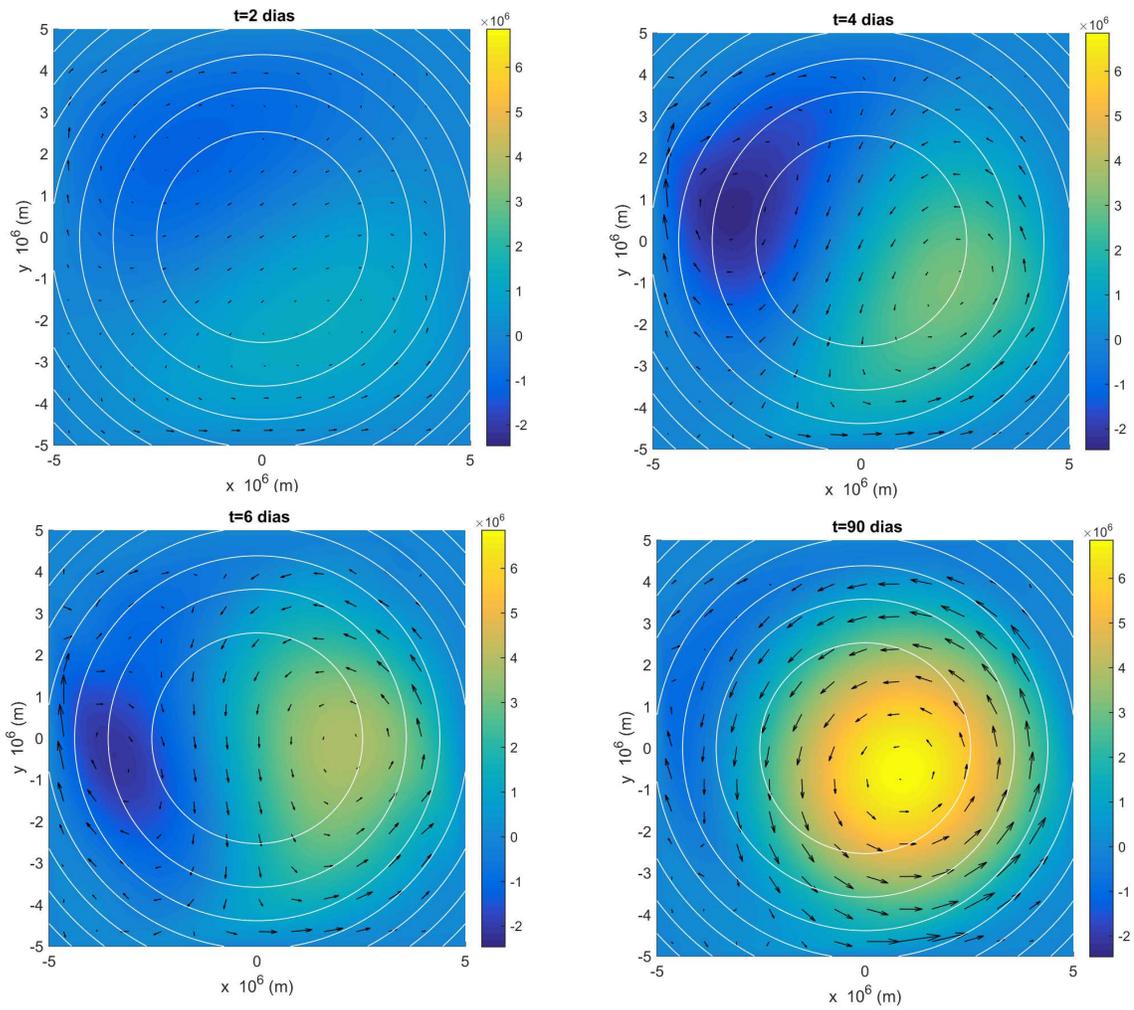


Figura 33. Campos de función transporte y de velocidad para la simulación *S16* con la cuenca de mesoescala, vientos del este y condición inicial de reposo. El vector con mayor longitud representa 0.03 m/s.

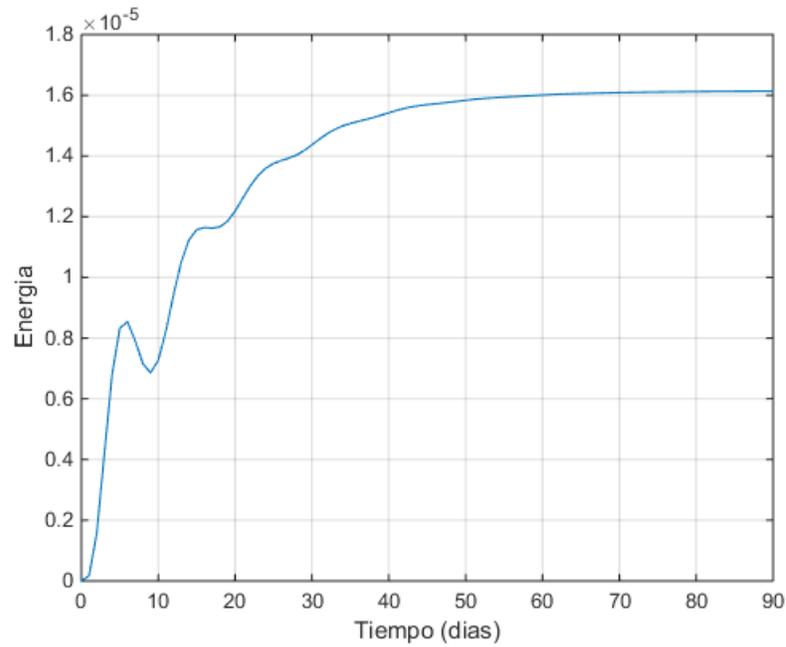


Figura 34. Energía total en función del tiempo para la simulación de la Figura 33.

Para comprobar que la solución estacionaria obtenida se repite bajo diferentes condiciones iniciales, se presenta una simulación ($S17$) que comienza con un campo de vorticidad aleatoria, como en el caso mostrado en la Figura 23. En la Figura 35 se presenta la evolución de los campos de función transporte y de velocidad a distintos tiempos. Al día 2 se observa un campo aleatorio, pero con el paso del tiempo (día 6 y 12) se empiezan a formar dos giros, ciclónico en el este y anticiclónico en el oeste. Finalmente, al día 36 se observa una estructura muy parecida a la obtenida anteriormente: el giro ciclónico recorrido al sureste y un anticiclón débil cerca de la frontera oeste. Esta configuración es estacionaria, por lo que se puede decir que la solución obtenida con los vientos del este en una cuenca paraboloidal es estable sin importar el estado inicial. Una razón por la cual el giro ciclónico es el que domina puede ser porque la circulación de equilibrio en una cuenca es la ciclónica, es decir, con agua somera a la derecha (Bretherton y Haidvogel, 1976).

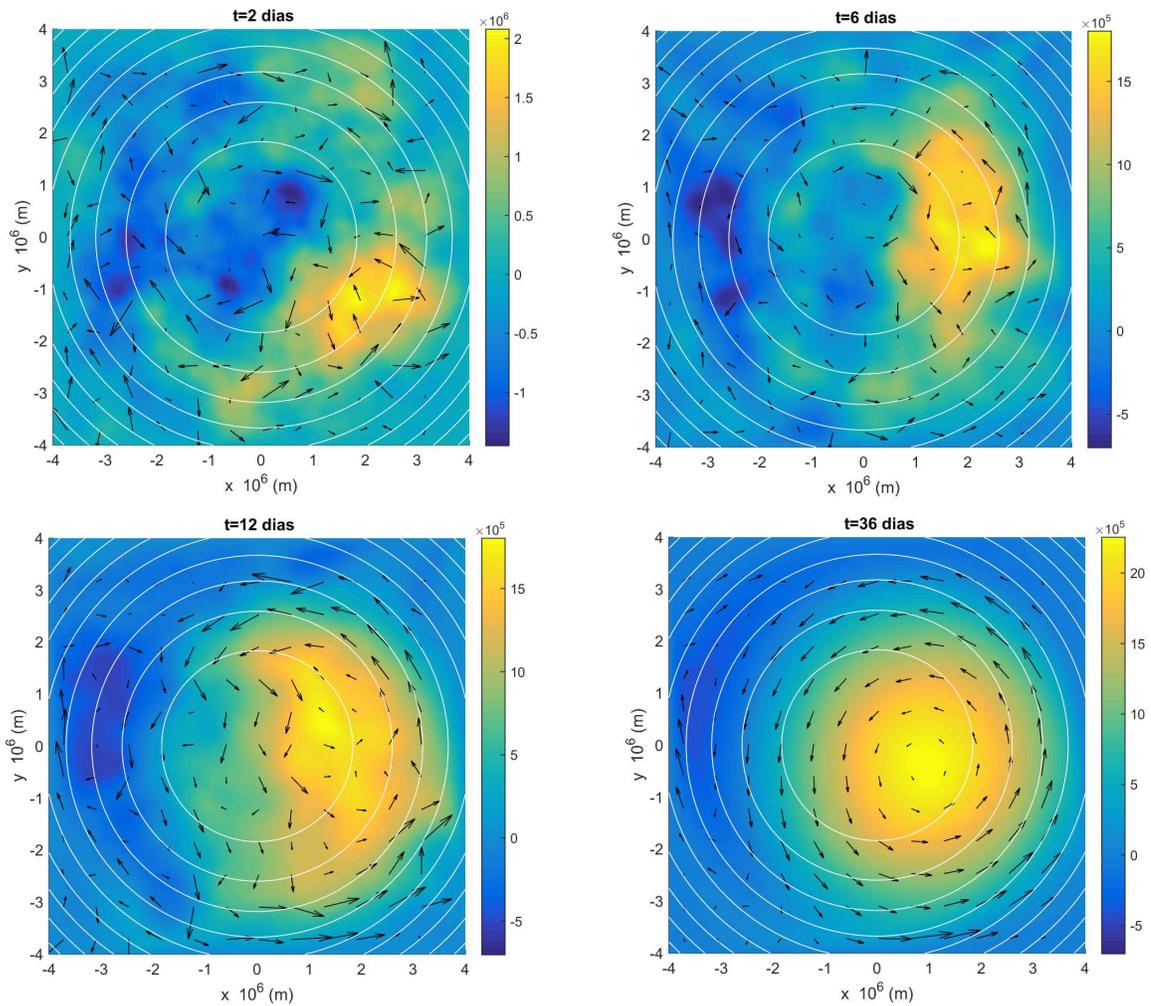


Figura 35. Campos de función transporte y de velocidad para la simulación *S17* con la cuenca de mesoescala, vientos del este y condición inicial aleatoria. Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.

Comparación con los contornos de f/h

La configuración estacionaria se compara con el campo de f/h , de manera análoga a como se hizo con la cuenca de gran escala mostrada en la Figura 27. En la Figura 36 se presenta el campo de función transporte y velocidad para la solución estacionaria vista en la Figura 33, donde los círculos blancos representan a los contornos de f/h . La posición latitudinal del centro de los contornos está ligeramente al sur del origen y coincide con la latitud del giro ciclónico. A diferencia de la cuenca de gran escala con el forzamiento de Stommel, en este problema el ciclón está más orientado hacia el este. Aunque en las dos cuencas el flujo tiende a seguir los contornos de f/h , sólo lo hace de una manera aproximada. Se debe recordar que el forzamiento y la disipación continúan activos por lo que es de esperar que la coincidencia

no sea exacta.

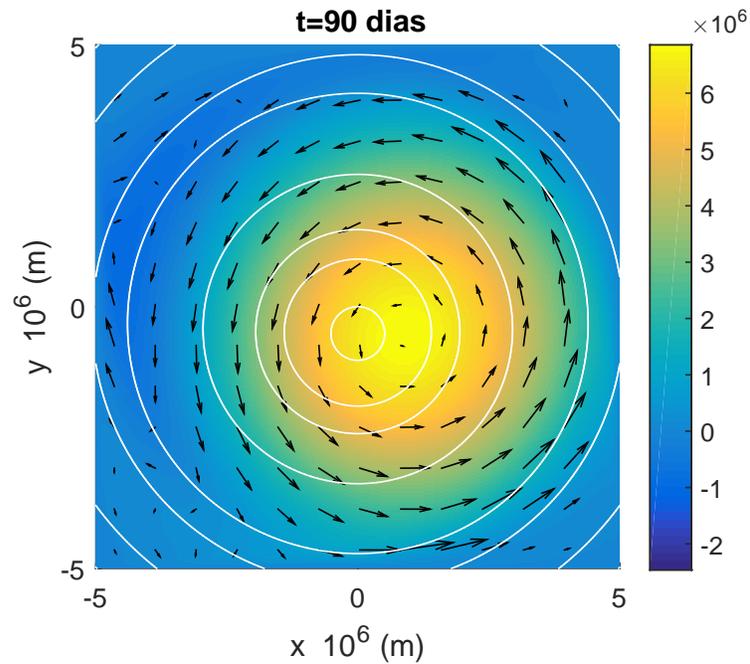


Figura 36. Campo de función transporte y de velocidad para la simulación *S16* con contornos de f/H . El vector con mayor longitud representa 0.03 m/s .

Evolución libre

Por último, se presenta la evolución del fluido en ausencia de forzamiento (*S18*). El objetivo es observar el comportamiento de las ondas topográficas que se generen, así como la competencia entre el efecto β planetario y el topográfico, como se apreció para el caso de la cuenca de gran escala. En esta simulación se utilizó como condición inicial la solución estacionaria que se obtuvo para el caso de fondo plano: dos giros, uno anticiclónico al norte y otro ciclónico al sur (ver Figura 32).

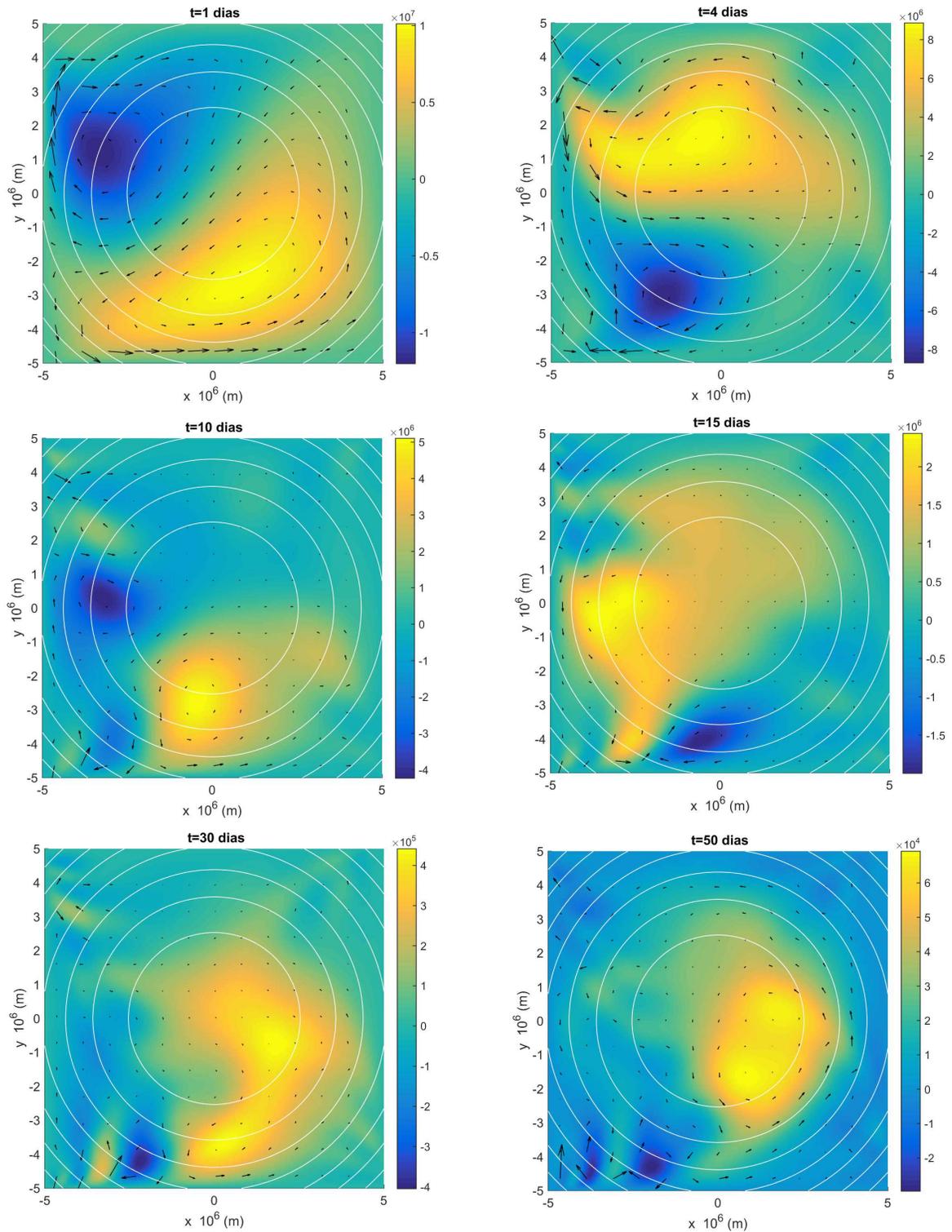


Figura 37. Evolución libre de los campos de función transporte y de velocidad para distintos tiempos sobre la cuenca de mesoescala (simulación S18). Nótese que las flechas y superficies no tienen la misma escala.

En la Figura 37 se muestran los campos de función transporte y de velocidad durante 50 días. Al día 1, se observa que los giros rotaron en sentido antihorario. El giro ciclónico

se encuentra en la parte este mientras que el anticiclónico en el oeste. En días posteriores se aprecia la generación de ondas de Rossby topográficas cerca de la frontera oeste que se mueven hacia el oeste topográfico, es decir, hacia el sur geográfico. Estas ondas tienden a continuar propagándose hacia el este (por efecto β topográfico); sin embargo, aunque se alcanzan a apreciar algunas ondas en la zona este del dominio, estas son muy débiles. Por lo tanto, al igual que en la cuenca de gran escala, las ondas topográficas se quedan atrapadas en la región oeste. Otra observación importante es que la estructura de mayor escala que persiste es el giro ciclónico prescrito en la condición inicial.

Capítulo 4. Discusión y conclusiones

En este trabajo se investigó la circulación forzada por el viento sobre un fondo variable en forma de cuenca. Para ello se realizaron simulaciones numéricas que resuelven la ecuación de vorticidad en dos dimensiones con topografía, en donde se utilizaron distintos forzamientos, parámetros físicos y condiciones iniciales. A partir de los resultados obtenidos se llegó a un mejor entendimiento de las implicaciones que tienen los efectos topográficos, el efecto β y la forma del forzamiento en la evolución de un fluido confinado en una cuenca con fondo paraboloidal.

La topografía tiene una influencia importante en la circulación de gran escala debida al viento. El caso del problema de Stommel con topografía resultó en una configuración estacionaria que consiste en un giro anticiclónico recorrido al suroeste. En contraste, la solución analítica para el problema de Stommel (1948) consiste en un giro anticiclónico, simétrico (respecto a un eje zonal) e intensificado en la frontera oeste. Se concluye que el desvío del giro hacia el sur es debido principalmente a los efectos topográficos asociados con la pendiente en la región oeste. Este comportamiento es consistente con trabajos previos en los que se estudiaron los efectos topográficos en la gran escala. Holland (1967) estudió soluciones numéricas y analíticas estacionarias para este problema usando una topografía tipo escalón en la frontera oeste. Sus simulaciones muestran la misma tendencia del flujo resultante hacia el sur. Además, Holland (1967) cuantificó la importancia de cada uno de los términos presentes en la ecuación de vorticidad del problema y encontró que el efecto de la topografía tiene un rol importante en la zona cercana a la capa límite en la frontera oeste (en su modelo no se consideró la fricción lineal del fondo). Igualmente, Salmon (1998) consideró una cuenca con pendiente pronunciada en las fronteras, con la diferencia de que el forzamiento del viento es tal que produce dos giros, uno anticiclónico al norte y otro ciclónico al sur (ver también Jackson et al. 2006). Además, en su formulación consideró a la fricción lineal del fondo y omitió efectos de viscosidad lateral. De su estudio encontró que los giros están orientados al suroeste. Zavala Sansón y van Heijst (2000) estudiaron experimental y numéricamente la interacción de vórtices barotrópicos en el plano β con una pendiente topográfica en la frontera oeste, y en sus resultados encontraron que los vórtices ciclónicos se mueven hacia el suroeste al encontrarse con la pendiente topográfica.

En nuestras simulaciones la circulación alcanza un estado estacionario al sur del dominio y no continúa moviéndose hacia el este, como sugiere la orientación de la pendiente topográfica en esa zona. Las soluciones estacionarias son muy robustas, ya que emergen aún con condiciones iniciales de vorticidad aleatoria. Esto sucede incluso si se aplica un forzamiento ciclónico, es decir, con el forzamiento del viento inverso al propuesto por Stommel. En dicho caso se obtiene un giro ciclónico recorrido al sur.

Para apreciar más claramente los efectos de la topografía y determinar las razones por las que se alcanza un estado estacionario, se consideraron dos tipos de forzamiento, uno débil y otro intenso. La teoría lineal indica que el flujo sigue los contornos de f/h cuando el forzamiento es débil (Nost et al. 2008). En nuestros resultados se encontró que, en efecto, dichos contornos están desplazados hacia la frontera sur y coinciden aproximadamente con el flujo de las soluciones estacionarias ciclónica y anticiclónica. En particular, la posición latitudinal de ambos campos es muy similar, mientras que la posición zonal tiene mayores diferencias. Un resultado análogo se encontró con una cuenca de dimensiones menores y forzamiento completamente diferente. Lo anterior sugiere que una topografía en forma de cuenca en el plano β permite soluciones estacionarias que siempre estarán desplazadas al sur. Para generalizar este resultado se requiere realizar simulaciones adicionales con distintos forzamientos y topografías en forma de cuenca (por ejemplo, una gaussiana).

Para el forzamiento intenso se encontraron resultados parecidos, aunque el flujo sobre los contornos de f/h coincide en menor medida. Sin embargo, de acuerdo a Nost et al. (2008), el problema no lineal (forzamiento intenso) implica que el flujo debería revertirse en sentido ciclónico, cosa que no se observa en nuestras simulaciones. La razón se puede asociar con la presencia constante del forzamiento y su dirección, de tal manera que sobre la cuenca se puede establecer una solución estacionaria ciclónica o anticiclónica.

Para aislar los efectos topográficos, se estudió el caso de la evolución libre del fluido, es decir, sin forzamiento del viento. A partir de una condición inicial que consiste en un giro anticiclónico intensificado en el oeste se encontraron ondas topográficas de Rossby en el noroeste del dominio, que se propagaron hacia el sur a lo largo de la frontera oeste, siguiendo a la topografía. Sin embargo, en vez de seguir su camino al este al llegar a la parte sur, quedaron atrapadas en la zona oeste de la cuenca. Este resultado se atribuye a la competencia entre los efectos β planetario y β topográfico. El primero induce una propagación hacia el oeste,

mientras que el segundo induce el mismo efecto pero hacia el este debido a la orientación de la pendiente en el sur. De esta manera, la combinación de los dos mecanismos implica la presencia de un efecto β efectivo que inhibe la propagación de las ondas topográficas. Nótese que este argumento también explica porqué en el caso forzado el giro permanece contenido en el sur del dominio. Esto sucede aún cuando el parámetro β topográfico es casi un orden de magnitud mayor al parámetro β planetario.

La competencia entre los efectos β se puede analizar con la ecuación de vorticidad inviscida y sin forzamiento

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega + f_0 + \beta y}{h(x, y)} \right) = 0. \quad (56)$$

El campo de profundidad se puede aproximar como $h(y) = H \pm sy$, donde el signo $+$ ($-$) corresponde a la pendiente s en el sur (norte). Para s pequeña se puede aproximar $1/h \approx (1 \mp sy)/H$, donde ahora el signo $+$ corresponde al norte y el $-$ al sur. Considerando, además, el número de Rossby pequeño, la ecuación se reduce a

$$\frac{D}{Dt} (\omega + \beta y \mp \beta^* y) = 0. \quad (57)$$

Por lo tanto, de esta expresión es evidente que en la parte norte (signo $+$) el efecto β topográfico y planetario se refuerzan, mientras que en la parte sur (signo $-$) se contrarrestan.

A partir de los resultados observados se consideró el problema de la cuenca de mesoescala ($L = 1000 \text{ km}$) y con un forzamiento diferente. El propósito fue estudiar un modelo de la circulación debida al viento en una cuenca cuyo tamaño, forma y forzamiento del viento son parecidos a los que predominan en el Golfo de México. Para ello se utilizó un patrón consistente con los vientos alisios en esa región (Zavala-Hidalgo et al. 2014). Inicialmente se producen dos giros, uno ciclónico en el sur y otro anticiclónico en el norte. Este arreglo se desplaza hacia el sur y después rota en sentido antihorario, hasta alcanzar un estado estacionario en el que el giro ciclónico permanece en la parte este y el anticiclónico en la parte oeste aunque muy debilitado. Al igual que la cuenca de gran escala, el estado estacionario es persistente aún con condiciones iniciales aleatorias.

Al analizar la evolución libre del fluido en la cuenca de mesoescala, se observó de nuevo la aparición de ondas topográficas en la zona oeste de la cuenca. Además, las ondas permanecieron confinadas en la región oeste sin lograr propagarse hacia el este. Una diferencia con el

caso forzado es que el giro ciclónico de la condición inicial permanece trasladándose alrededor del centro del dominio en sentido antihorario. El efecto inverso es el de un giro anticiclónico alrededor de una montaña en sentido horario (Zavala Sansón et al. 2012).

Las ondas confinadas en el oeste de la cuenca de mesoescala son consistentes con las observadas en el Golfo de México. Kolodziejczyk et al. (2011) encontraron ondas topográficas que se propagan al sur a lo largo de la costa oeste de la Bahía de Campeche, que corresponde a una zona similar en la que las ondas se observan en el presente trabajo. En el estudio de Kolodziejczyk et al. (2011) la propagación de las ondas se detiene en el sur de la cuenca, y los autores interpretan este comportamiento como consecuencia de la forma rugosa de la plataforma continental en el Banco de Campeche. Sin embargo, a pesar de que en el presente estudio se utilizó un fondo topográfico muy simple y sin rugosidad, es posible observar que la propagación de las ondas es suprimida, y relacionar este fenómeno con la competencia entre los mecanismos dinámicos dominantes: los efectos β planetario y topográfico. Con base en estos resultados, un trabajo a futuro puede ser el de ampliar esta investigación utilizando un fondo topográfico más realista del Golfo de México.

Cabe señalar que las simulaciones se realizaron en un dominio cuadrangular, por lo que los contornos topográficos de la cuenca se encuentran con las paredes. Esta situación puede tener influencia en los resultados debido a que la capa de fluido es más somera en las esquinas. Sin embargo, no es significativa para los problemas analizados ya que dichas áreas someras son muy pequeñas con respecto al tamaño del dominio. Una manera de evitar este problema es resolver el flujo en un dominio circular.

Literatura citada

- Bretherton, F. P. y Haidvogel, D. B. (1976). Two-dimensional turbulence above topography. *Journal of Fluid Mechanics*, **78**(1): 129–154.
- Cushman-Roisin, B. y Beckers, J.-M. (2009). *Introduction to geophysical fluid dynamics: physical and numerical aspects*, Vol. 101. Academic Press.
- Flores-Vidal, X., Durazo, R., Zavala-Sansón, L., Flament, P., Chavanne, C., Ocampo-Torres, F., y Reyes-Hernández, C. (2014). Evidence of inertially generated coastal-trapped waves in the eastern tropical pacific. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, **119**(5): 3121–3133.
- Holland, W. R. (1967). On the wind-driven circulation in an ocean with bottom topography. *Tellus*, **19**(4): 582–600.
- Jackson, L., Hughes, C. W., y Williams, R. G. (2006). Topographic control of basin and channel flows: The role of bottom pressure torques and friction. *Journal of physical oceanography*, **36**(9): 1786–1805.
- Kolodziejczyk, N., Ochoa, J., Candela, J., y Sheinbaum, J. (2011). Deep currents in the bay of campeche. *Journal of Physical Oceanography*, **41**(10): 1902–1920.
- Malek-Madani, R. (2012). *Physical oceanography: a mathematical introduction with MATLAB*. CRC Press.
- Munk, W. H. (1950). On the wind-driven ocean circulation. *Journal of meteorology*, **7**(2): 80–93.
- NASA/SVS (2012). Perpetual ocean. Recuperado el 08/2017 de: <https://www.nasa.gov/topics/earth/features/perpetual-ocean.html>.
- Nøst, O. A., Nilsson, J., y Nycander, J. (2008). On the asymmetry between cyclonic and anticyclonic flow in basins with sloping boundaries. *Journal of Physical Oceanography*, **38**(4): 771–787.
- Pedlosky, J. (1996). *Ocean circulation theory*. Springer Science & Business Media.
- Pidwirny, M. (2007). Corrientes oceánicas. Recuperado el 09/2017 de: <http://blue.utb.edu/paullgj/geog3333/lectures/physgeog.html>.
- Pope, S. B. (2001). *Turbulent flows*. IOP Publishing.
- Salmon, R. (1998). *Lectures on geophysical fluid dynamics*. Oxford University Press.
- Stommel, H. (1948). The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, **29**(2): 202–206.
- Sverdrup, H. U. (1947). Wind-driven currents in a baroclinic ocean; with application to the equatorial currents of the eastern pacific. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **33**(11): 318–326.
- Vallis, G. K. (2006). *Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation*. Cambridge University Press.

- van Geffen, J. H. G. M. (1998). *Documentation of the software package NSEVOL*. Reporte técnico, Technische Universiteit Eindhoven.
- van Heijst, G. (1994). Topography effects on vortices in a rotating fluid. *Meccanica*, **29**(4): 431–451.
- Zavala-Hidalgo, J., Romero-Centeno, R., Mateos-Jasso, A., Morey, S. L., y Martínez-López, B. (2014). The response of the gulf of mexico to wind and heat flux forcing: What has been learned in recent years? *Atmósfera*, **27**(3): 317–334.
- Zavala Sansón, L. (2000). *The effects of topography on rotating barotropic flows*. Tesis de doctorado, Technische Universiteit Eindhoven.
- Zavala Sansón, L. y van Heijst, G. (2000). Interaction of barotropic vortices with coastal topography: Laboratory experiments and numerical simulations. *Journal of physical oceanography*, **30**(9): 2141–2162.
- Zavala Sansón, L., González-Villanueva, A., y Flores, L. (2010). Evolution and decay of a rotating flow over random topography. *Journal of Fluid Mechanics*, **642**: 159–180.
- Zavala Sansón, L., Aguiar, A. B., y van Heijst, G. (2012). Horizontal and vertical motions of barotropic vortices over a submarine mountain. *Journal of Fluid Mechanics*, **695**: 173–198.