

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica
aplicada**

**Simulación numérica de la propagación de ondas en
medios viscoacústicos**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Iván César Bazaldúa Rodríguez

Ensenada, Baja California, México

2017

Tesis defendida por

Iván César Bazaldúa Rodríguez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado
Director de tesis

Dr. Pratap Narayan Sahay Sahay

Dr. Antonio González Fernández

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal



Dr. Juan García Abdeslem
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Rufina Hernández Martínez
Director de Estudios de Posgrado

Iván César Bazaldúa Rodríguez © 2017

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Iván César Bazaldúa Rodríguez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica aplicada.

Simulación numérica de la propagación de ondas en medios viscoacústicos

Resumen aprobado por:

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado
Director de tesis

La propagación de ondas sísmicas presenta características inelásticas en materiales terrestres, por ejemplo, los yacimientos de hidrocarburos muestran atenuación alta, que puede ser causada por la presencia de acumulaciones de gas, por lo tanto, la señal registrada está afectada de manera significativa en amplitud y fase, por lo que un modelado preciso debe ser capaz de tomar en cuenta estos efectos. Esto se puede lograr al introducir Q en la ecuación de onda en el dominio del tiempo. Estas aproximaciones generalmente usan superposición de elementos mecánicos (p.ej. *Maxwell* o *Sólido lineal estándar (SLS)*) o el modelo de Q constante para describir el comportamiento de Q . El principal problema de modelar en el dominio del tiempo es que en la relación esfuerzo-deformación aparece una convolución, la aproximación *SLS* utiliza *variables de memoria* para evitar esta convolución. El caso de Q constante conlleva al uso de derivadas fraccionarias cuya evaluación numérica presenta retos similares a la convolución; para superar este inconveniente se transfiere la derivada fraccionaria del tiempo al espacio usando la relación de dispersión dando lugar a una ecuación de onda con *Laplaciano fraccionario* que puede ser calculada mediante la transformada de *Fourier*. Recientemente se desarrolló la ecuación de onda Q casi constante (NCQ) con Laplacianos desacoplados. Estas metodologías no han sido comparadas anteriormente por lo que en el presente trabajo se realiza una implementación numérica de *SLS* con variables de memoria y de *NCQ* utilizando el lenguaje de programación C++, con la finalidad de comparar precisión y tiempos de cómputo bajo diferentes escenarios, encontrando que el Laplaciano fraccionario, a diferencia de variables de memoria, responde apropiadamente a valores pequeños y grandes de distancia y atenuación.

Palabras clave: variables de memoria, Laplaciano fraccionario, pseudo-espectral, diferencias finitas

Abstract of the thesis presented by Iván César Bazaldúa Rodríguez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

Numerical simulation of wave propagation in viscoacoustic media

Abstract approved by:

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado
Thesis Director

The propagation of seismic waves shows inelastic characteristics in Earth materials, for example, hydrocarbon reservoirs show high attenuation, which can be caused by the presence of gas accumulations, therefore, the recorded signal is affected significantly in amplitude and phase, so that accurate modeling should be able to take into account these effects. This can be achieved by introducing Q in the time domain wave equation. These approaches generally use superposition of mechanical elements (e.g. Maxwell or Standard Linear Solid (SLS) or the constant Q model to describe the behavior of Q . The problem of modeling in the time domain is that in the stress-strain relationship appears a convolution, the SLS approach uses memory variables to avoid this convolution. The case of constant Q involves the use of fractional derivatives numerical evaluation presents challenges similar to convolution; to overcome this inconvenience it replaces the fractional derivative in time to space using the dispersion relation resulting in the wave equation with Fractional Laplacian, the modified equation can be solved using the Fourier transform. Recently, the nearly-constant Q -wave equation (NCQ) was developed with uncoupled Laplacians. These methodologies have not been compared previously so in the present work a numerical implementation of SLS with memory variables and NCQ is performed using the C++ programming language, in order to compare accuracy and computation times under different scenarios, finding that the fractional Laplacian, unlike memory variables, responds appropriately to small and large values of distance and attenuation.

Keywords: memory variables, fractional Laplacian, finite differences, pseudo-spectral

Dedicatoria

***A mis padres. A mis hermanas Norma, Margarita, Eloina, Oralia y a mi hermano Jaime.
A mis queridos sobrinos Fabiola, Carlos, Celeste, Diana, Erika, Liliana, Osvaldo, Horacio, Maria, Hugo.***

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por permitirme realizar mis estudios posgrado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. No. de becario: 587127.

Al proyecto de formación de recursos humanos del Centro Mexicano de Innovación en Energía Geotérmica (CeMIEGeo) por el apoyo económico brindado durante los últimos meses de mis estudios.

Al Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado por la dedicación, apoyo, paciencia y consejos otorgados durante el trabajo de tesis.

A los miembros del comite, Dr. Antonio González Fernández, Dr. Pedro Gilberto López Mariscal y al Dr. Pratap Narayan Sahay Sahay, por las aportaciones y conocimientos compartidos.

A mis amigos de antaño, que siempre me han brindado su cariño y nunca dejaron de alentarme.

A mis compañeros de generación, me siento afortunado de compartir esta parte de mi vida con ustedes, increíbles historias y grandes amistades, a todos gracias.

Al posgrado de Ciencias de la Tierra y todo su personal, siempre atentos y dispuestos a ayudar.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	ix
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Antecedentes	2
1.2. Hipótesis	6
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivos generales	6
1.4. Organización de la tesis	6
Capítulo 2. Modelos reológicos para Q aproximadamente constante	
2.1. Respuesta típica de materiales terrestres	8
2.2. Modelos reológicos viscoelásticos	10
2.2.1. Modelos de Maxwell y Kelvin-Voigt	10
2.2.2. Sólido lineal estándar	11
2.2.3. Modelo de Maxwell Generalizado	15
2.3. Funciones inelásticas	17
2.3.1. Coeficientes inelásticos	19
2.4. Relación esfuerzo-deformación en 2D	20
2.4.1. Esquema numérico	22
Capítulo 3. Q constante	
3.1. Relación esfuerzo-deformación	27
3.2. Velocidad de fase	29
3.3. De la derivada fraccionaria temporal a espacial	31
3.4. Ecuación de onda usando <i>Laplaciano fraccionario</i>	32
3.5. Esquema numérico	34
3.5.1. Método pseudo-espectral	34
3.5.2. Implementación	35
Capítulo 4. Comparación de los métodos	
4.1. Acústico vs. Viscoacústico	37

Tabla de contenido (continuación)

4.2. Precisión con diferentes valores de Q	39
4.3. Precisión y tiempos de ejecución con diferentes incrementos espaciales	40
4.4. Medio heterogéneo	42
Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones	
5.1. Conclusiones	50
5.2. Recomendaciones	50
Literatura citada	51
Anexos	56

Lista de figuras

Figura	Página
1. Sólido de Maxwell Generalizado	4
2. Sólido de Zener Generalizado	5
3. Respuesta viscoelástica de materiales terrestres	9
4. Modelos reológicos simples	11
5. Sólido de Maxwell	12
6. Sólido de Kelvin-Voigt	13
7. Fluencia y relajación del Sólido de Zener	14
8. Esquema de Sólido de Zener	15
9. Relación entre el orden de la derivada fraccionaria y la atenuación.	29
10. Sismograma acústico vs viscoacústico	38
11. Sismograma viscoacústico analítico Vs. calculado ($Q= 100$)	41
12. Error RMS vs offset para $Q = 100$	42
13. Sismograma viscoacústico analítico Vs. calculado ($Q= 50$)	43
14. Error RMS vs offset para $Q= 50$	44
15. Sismograma viscoacústico analítico Vs. calculado ($Q= 10$)	45
16. Error RMS vs offset para $Q = 10$	46
17. Error RMS vs Δx para $Q= 100$	46
18. Comparación con Q variable en el espacio	48
19. Sismogramas para un medio heterogéneo	49

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Tiempos de ejecución normalizados	47

Capítulo 1. Introducción

El mecanismo de atenuación de ondas sísmicas ha sido un tema de interés entre sismólogos y físicos de rocas por muchos años y se han propuesto varios mecanismos físicos para tratar de explicarlo. Es conocido que la *transmisión y reflexión* de ondas sísmicas en interfaces discretas reduce su amplitud, aunque existen otros procesos tales como: *dispersión geométrica, esparcimiento (scattering) y anelasticidad*. Los primeros son descritos por la teoría de elasticidad y pueden incrementar o decrementar la amplitud redireccionando la energía dentro del medio (*la energía se conserva*). Por el contrario, la *anelasticidad*, algunas veces llamada *atenuación intrínseca*, reduce la amplitud porque involucra la conversión de energía sísmica en calor (*pérdida de energía*) (Stein y Wysession, 2003). De ahora en adelante, cuando se hable de atenuación, nos referiremos específicamente a la *atenuación intrínseca* que se denota generalmente como Q^{-1} .

La *atenuación* es considerada un parámetro importante para caracterizar rocas sedimentarias en la exploración petrolera. Las propiedades viscoelásticas de las formaciones en el subsuelo tienen una profunda influencia en la propagación de ondas y procesamiento sísmico ya que inducen pérdida de amplitud y dispersión de velocidad que pueden causar distorsión en el análisis de la variación de la amplitud con el *offset (AVO)*, también puede proveer información valiosa acerca de la litología y fluidos que son necesarios para la caracterización de yacimientos. Un modelo viscoelástico eficiente es un prerrequisito para el análisis y estimación precisa de la *atenuación* (Bai y Tsvankin, 2016).

Varias técnicas para el modelado de ondas sísmicas en medios reales han sido desarrolladas. Tales métodos incluyen, por ejemplo, *trazado de rayos* (Červený et al., 1977), *elementos finitos* (Chen, 1984), el método de *Fourier o Pseudo-espectral* (Kosloff y Baysal, 1982) y *diferencias finitas* (Alford et al., 1974; Kelly et al., 1985).

Sin embargo, es inútil desarrollar algoritmos de modelado muy precisos o inge-

nuamente usar la información de la amplitud en procesos de inversión si la relación esfuerzo-deformación está basada en reologías simplificadas. Por lo tanto, una descripción precisa de la propagación de ondas requiere una reología que tenga en cuenta la anisotropía y el comportamiento anelástico de las rocas (Carcione, 1995). En el presente trabajo se considera la incorporación del comportamiento anelástico en la propagación de ondas.

Existen varios métodos para incorporar la atenuación en el dominio del tiempo, 2 de los principales y de los cuales se hablará en capítulos siguientes son: *i).*— *Variables de memoria*, que está basado en la superposición de elementos mecánicos (Day y Minster, 1984; Emmerich y Korn, 1987; Carcione *et al.*, 1988a,b; Moczo *et al.*, 2014) y *ii).*— *Laplaciano fraccionario* que se basa en el modelo de Q constante propuesto por Kjartansson (1979) y adaptado por Zhu y Harris (2014). El primer método utiliza *diferencias finitas* para discretizar las derivadas tanto espaciales como temporales, mientras que el segundo utiliza *Fourier pseudo-espectral* para calcular las derivadas espaciales, y *diferencias finitas* para las derivadas temporales.

1.1. Antecedentes

Existen dos puntos clave que determinan la incorporación de la *atenuación* en el dominio del tiempo:

1. La relación esfuerzo-deformación depende del tiempo (*tiene memoria*), lo cual lleva a la utilización de modelos viscoelásticos lineales.
2. Q^{-1} , que caracteriza la atenuación, es esencialmente constante sobre el rango de frecuencias sísmicas (Liu *et al.*, 1976; Dvorkin y Mavko, 2006).

Antes de resolver y modelar la ecuación de movimiento para un medio viscoelástico lineal es necesario especificar cómo el esfuerzo se relaciona con la deformación (*ley constitutiva*), se puede derivar usando una aproximación por fenomenología, en la cual la física observada es incorporada en un modelo matemático que no viole las leyes de la física. El comportamiento constitutivo es determinado mediante experimentos, y los modelos matemáticos (reológicos) son desarrollados para simular esta respuesta,

los cuales son necesarios para determinar numérica o analíticamente la respuesta del sistema (Moczo *et al.*, 2007).

Los modelos reológicos elementales (*Ley de Hooke y Fluido viscoso Newtoniano*) se combinan para dar lugar a los llamados modelos *reológicos viscoelásticos*, que son un marco general para el mecanismo de atenuación lineal observado en los materiales terrestres. Debido a la presencia del amortiguador (*fluido viscoso*) en los modelos viscoelásticos, su respuesta no es instantánea, por lo que existe una función que depende del tiempo que caracteriza la respuesta del material (Moczo *et al.*, 2014).

El análisis matemático de la respuesta de modelos reológicos es realizado con mayor facilidad en el dominio de la frecuencia. Una vez encontrado un modelo con las características deseadas, es relativamente fácil incorporar su respuesta a la relación esfuerzo-deformación debido al principio de correspondencia, en el cual el módulo elástico independiente de la frecuencia es reemplazado por el módulo viscoelástico complejo dependiente de la frecuencia $M(\omega)$ de la siguiente forma:

$$\sigma(\omega) = M(\omega) \varepsilon(\omega), \quad (1)$$

donde σ es el esfuerzo, ε es la deformación y $M(\omega)$ es el módulo viscoelástico complejo.

Sin embargo, en el dominio del tiempo esta ecuación se convierte en una convolución, lo que causa problemas para los métodos numéricos ya que es impráctico mantener en memoria la historia completa de la deformación y evaluar la integral de convolución en cada punto de la malla y para cada nivel de tiempo. La solución es convertir la relación esfuerzo-deformación a una forma diferencial, esto es, encontrar una ecuación diferencial adicional equivalente a la ecuación del movimiento y aplicarle el método numérico deseado a ese conjunto de ecuaciones.

Emmerich y Korn (1987) notaron que una función de relajación aceptable correspondía a la reología de lo que ellos definieron como sólido de *Maxwell* generalizado (*n* sólidos de *Maxwell* en paralelo con el modelo de *Hooke*, GMB, Figura 1).

Independientemente, Carcione *et al.* (1988b,a) siguiendo la aproximación de Liu *et al.* (1976) utilizaron el sólido de Zener generalizado (*GZB*, *n* sólidos de Zener conectados en paralelo, Figura 2), donde desarrollaron la teoría de *GZB* e introdujeron el término *variables de memoria* para las variables adicionales obtenidas.

Durante años se realizaron investigaciones paralelas y algoritmos basándose en ambos modelos, hasta que Moczo y Kristek (2005) demostraron que *GZB* y *GMB* son equivalentes.

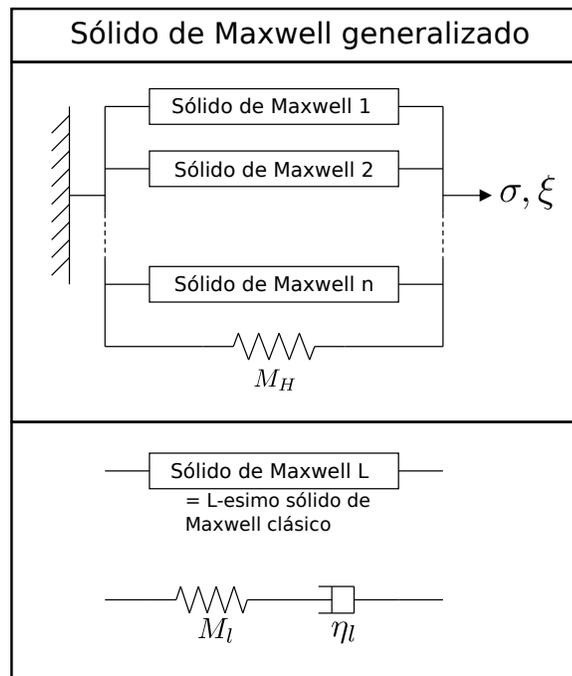


Figura 1. Sólido de Maxwell Generalizado, *GMB*, modificada de Moczo *et al.* (2014)

Las aproximaciones en el dominio del tiempo que utilizan superposición de elementos mecánicos (*GMB* ó *GZB*) para describir el comportamiento aproximadamente constante de *Q* requieren memoria y tiempos de cómputo grandes. En lugar de dichos modelos, Kjartansson (1979) propuso el modelo de *Q* constante para la ecuación de onda en el dominio del tiempo. Sin embargo, el uso riguroso de este modelo introduce derivadas fraccionarias en el tiempo (Caputo y Mainardi, 1971). Es de notar que la derivada fraccionaria en el tiempo de una sola variable depende de todos los valores previos de esta variable, propiedad que requiere mucha memoria para la historia esfuerzo-deformación desde el tiempo inicial.

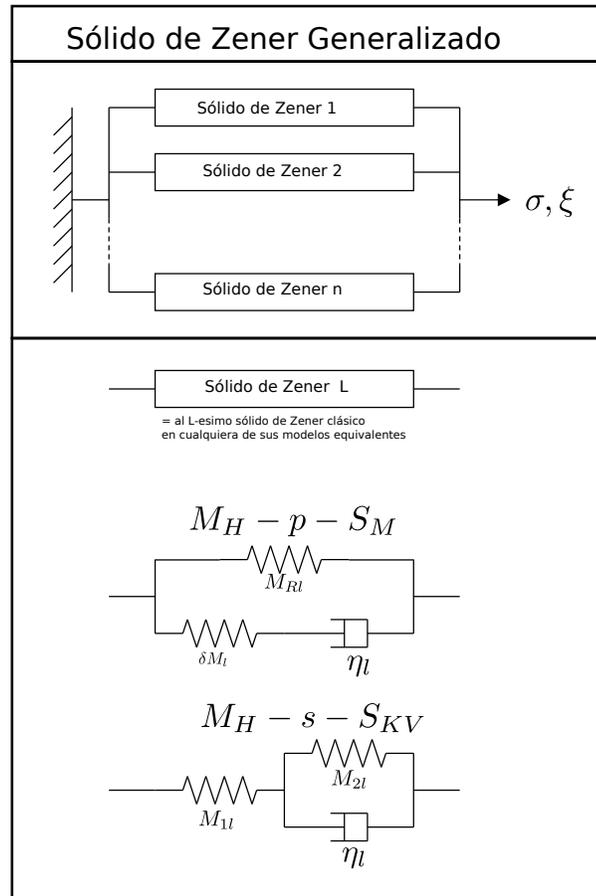


Figura 2. Sólido de Zener Generalizado, GZB, modificada de Moczo *et al.* (2014)

Para superar este gasto de memoria, Chen y Holm (2004) propusieron el operador *Laplaciano* fraccionario para modelar el comportamiento de la atenuación conforme a la ley de potencias en lugar de la derivada fraccionaria en el tiempo. En este caso, el *Laplaciano* fraccionario, calculado en el dominio espacial, evita almacenar el campo de ondas de pasos previos en el tiempo, al incorporarlo con el esquema numérico pseudo-espectral se puede obtener una implementación numérica eficiente.

Cabe mencionar que en la literatura no se encontró una comparación entre *SLS* con *variables de memoria* y el modelo de *Q casi constante* (NCQ) en cuanto a precisión y eficiencia computacional.

1.2. Hipótesis

Los métodos de variables de memoria y Laplaciano fraccionario arrojan resultados diferentes y las diferencias se incrementan cuando Q decrementa.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivos generales

Los objetivos propuestos son los siguientes:

1. Implementar el método de propagación de ondas viscoacústicas utilizando variables de memoria.
2. Implementar el método de *Laplaciano* fraccionario para propagación de ondas viscoacústicas.
3. Comparar la eficiencia computacional y precisión de estos métodos.

1.4. Organización de la tesis

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera, el capítulo 2 se enfoca en la descripción de *SLS* utilizando *variables de memoria*, iniciando con una sobrevista acerca de los modelos reológicos y la atenuación asociada, posteriormente se introduce el uso de las *variables de memoria* que sirven para evitar la convolución en la relación esfuerzo-deformación, finalmente se presenta el esquema numérico utilizado para resolver la ecuación de onda.

En el capítulo 3 se presenta el modelo de *Q constante* propuesto por Kjartansson (1979), y cómo el uso de este modelo conlleva al uso de derivadas fraccionarias, posteriormente se discute como Zhu y Harris (2014) llevaron estas derivadas fraccionarias del dominio del tiempo al dominio del espacio, finalizando con el esquema numérico utilizado.

El capítulo 4 consta de resultados obtenidos mediante la implementación de *variables de memoria* y *Laplaciano fraccionario* con diferentes valores de Q , distancias a la fuente y distancia entre nodos de la malla numérica, comparando la precisión y tiempos de ejecución, también se muestran resultados para un caso heterogéneo.

Finalmente, en el capítulo 5 se muestran conclusiones y recomendaciones.

Capítulo 2. Modelos reológicos para Q aproximadamente constante

En el presente capítulo se presenta una revisión general de los modelos reológicos, y cómo estos son usados para generar modelos de Q aproximadamente constante, que son la base para el método de *variables de memoria*. Aunque a lo largo del capítulo se presentan las bases de los modelos reológicos viscoelásticos, no hay que perder de vista el hecho de que este trabajo está enfocado en el caso viscoacústico, sin embargo, se realiza de esta forma ya que es más sencilla la exposición de las ideas, y al final simplificar para el caso viscoacústico.

2.1. Respuesta típica de materiales terrestres

La respuesta típica de materiales terrestres está representada en la Figura (3):

1. Al aplicar una carga, en el tiempo t_0 se produce una deformación elástica instantánea.
2. Conforme se mantiene el esfuerzo, la muestra se deforma (*fluencia lenta*) viscoelásticamente hasta el tiempo t_1 .
3. Al remover la carga, la muestra se recupera elásticamente de manera inmediata.
4. La muestra continúa recuperándose, pero ahora viscoelásticamente.

Una manera de modelar esta respuesta es mediante el uso de modelos reológicos. Los modelos reológicos básicos son el material perfectamente elástico (*Ley de Hooke*), que puede almacenar energía mecánica sin pérdida, pero no puede disiparla, y el *fluido viscoso Newtoniano* que puede disipar energía pero no puede almacenarla (Moczo *et al.*, 2014).

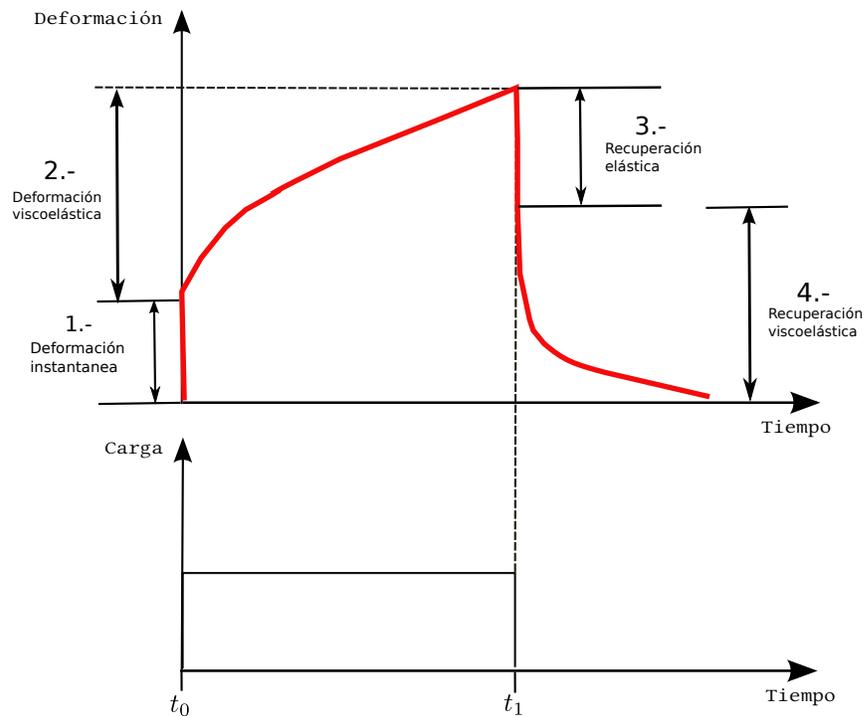


Figura 3. Respuesta viscoelástica de materiales terrestres

El esfuerzo de un cuerpo elástico lineal solo depende de una deformación instantánea. Por ejemplo, la aplicación repentina de un esfuerzo constante a un cuerpo elástico causa una deformación instantánea que permanece constante. Si un esfuerzo constante adicional es aplicado en algún tiempo en el futuro, el cuerpo elástico se deforma instantánea y proporcionalmente solo con el esfuerzo total aplicado en ese tiempo futuro, sin importar cuán grande fue el esfuerzo aplicado anteriormente. En otras palabras, el cuerpo elástico no tiene *memoria*, es decir la deformación no depende de la historia previa (Moczo *et al.*, 2007),

La aplicación repentina de un esfuerzo constante a un *fluido viscoso* no causa una deformación instantánea. En su lugar, la deformación comienza a crecer sostenidamente desde cero al momento de la aplicación del esfuerzo. Si un esfuerzo constante adicional es aplicado en algún tiempo futuro, la deformación en ese momento depende de la historia previa, ya que el fluido no es capaz de responder instantáneamente a la carga adicional de esfuerzo. Se puede decir que el *fluido viscoso* tiene *memoria absoluta* (Moczo *et al.*, 2014).

Como se observa en la Figura (3), modelos más realistas deben presentar ambas propiedades, es decir capacidad de responder inmediatamente así como tener memoria de la historia previa de la relación esfuerzo-deformación. Los modelos *viscoelásticos* combinan las propiedades de los modelos *elásticos* y *viscosos*.

2.2. Modelos reológicos viscoelásticos

Modelos que aproximan las propiedades reológicas y comportamiento de materiales terrestres se pueden construir conectando elementos reológicos simples (*Hooke* o *fluido viscoso Newtoniano*) en serie o en paralelo. La respuesta viscoelástica característica de un material se determina a menudo usando las siguientes pruebas (Reddy, 2007):

1. *Fluencia lenta (Creep)* .- involucra determinar la respuesta de la deformación bajo un esfuerzo constante.
2. *Relajación de esfuerzos* .- involucra la determinación del esfuerzo bajo una deformación constante.

2.2.1. Modelos de Maxwell y Kelvin-Voigt

Dos modelos reológicos viscoelásticos simples son el sólido de *Maxwell* (Figura 4), que es un resorte elástico lineal conectado en serie con un amortiguador, y el sólido de *Kelvin-Voigt* (Figura 4), que consiste de un resorte elástico lineal en paralelo con un amortiguador.

Se sobreentiende que el resorte responde instantáneamente al esfuerzo, mientras que el amortiguador no puede responder instantáneamente (porque su respuesta depende de la razón de cambio).

Aplicando la prueba de *relajación de esfuerzos*, se observa que el sólido de *Maxwell* se relaja desde M_U (que es la respuesta elástica instantánea) hasta cero (Figura 5 b), y al aplicar la prueba de *fluencia lenta (creep)* al sólido de *Maxwell* este mantiene una *fluencia lenta* por siempre (Figura 5 a), esto es, se deforma al momento de aplicar el esfuerzo pero no se recupera totalmente al momento de retirarlo.

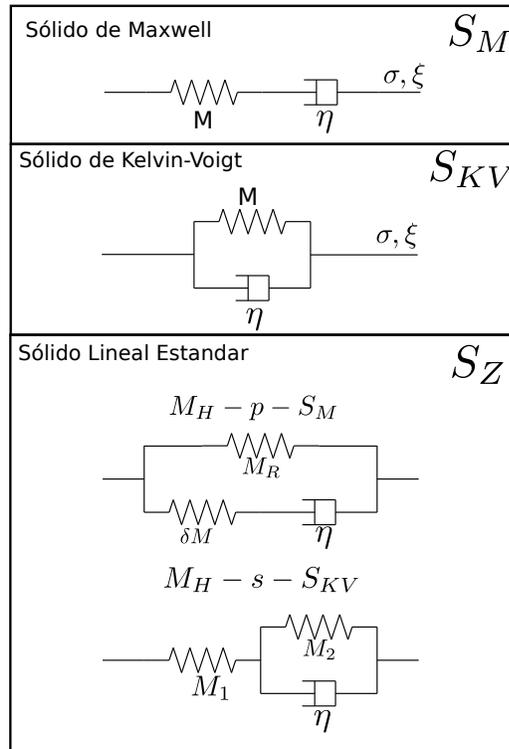


Figura 4. Modelos reológicos simples, S_M denota Sólido de Maxwell, S_{KV} denota sólido de Kelvin-Voigt y S_Z denota sólido de Zener, modificada de Moczo *et al.* (2007)

Aplicando la prueba de *fluencia lenta* al sólido de *Kelvin-Voigt* se observa que se recupera viscoelásticamente pero no reacciona instantáneamente al momento de la aplicación del esfuerzo (Figura 6a).

Una revisión más exhaustiva de estos modelos se puede encontrar en diversos textos como por ejemplo Carcione (2007); Christensen (2012); Bland y Prager (1960) y Moczo *et al.* (2007) entre otros. Lo que se busca resaltar son sus respuestas a un cambio repentino de esfuerzos, y que dichas respuestas describen solo una parte del comportamiento típico de materiales terrestres.

2.2.2. Sólido lineal estándar

Al observar las respuestas a la aplicación de un esfuerzo repentino a los modelos anteriores (Figuras 5 y 6) y compararlas con la respuesta observada para los materiales terrestres (Figura 3) se aprecia que estos modelos no dan la respuesta buscada, ya que el sólido de *Maxwell* responde instantáneamente al momento de la aplicación del esfuerzo, pero no se recupera totalmente al retirarlo, mientras que el só-

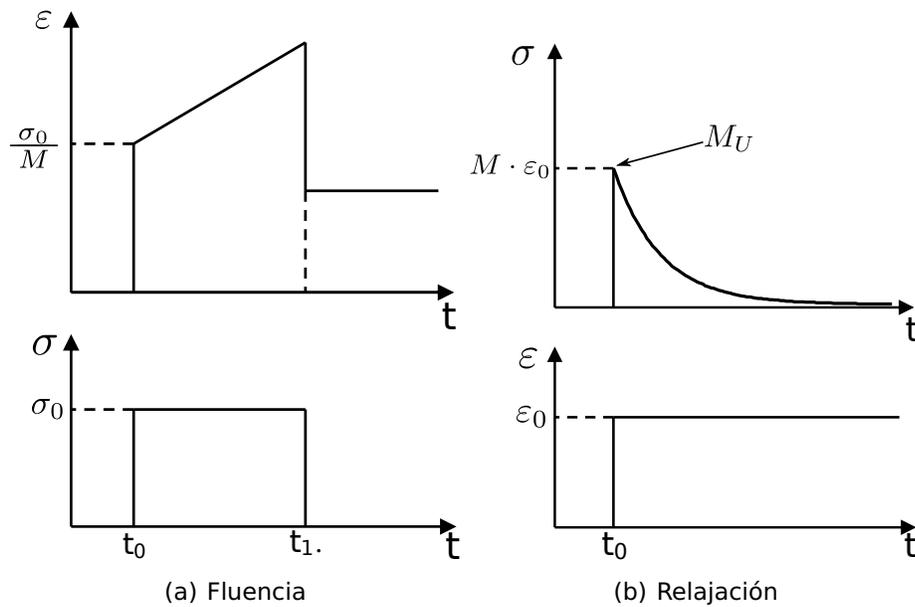


Figura 5. Sólido de Maxwell

lido de *Kelvin-Voigt* sí se recupera después de eliminar el esfuerzo, pero no reacciona instantáneamente a él.

Por tal motivo, y buscando combinar las respuestas de ambos modelos, surgieron dos aproximaciones, el sólido de *Hooke* en paralelo con el sólido de *Maxwell* (Figura 4, panel inferior) o el sólido de *Hooke* en serie con el de *Kelvin-Voigt* (Figura 4, panel inferior), cabe resaltar que la respuesta de ambos modelos es equivalente y representan lo que se conoce como *Sólido Lineal Estándar* o (*SLS*, por sus siglas en inglés), algunos autores lo llaman también sólido de *Zener*.

Considerando el modelo de *Hooke* en paralelo con el sólido de *Maxwell* (Figura 4) y recordando que sufren la misma deformación, se tiene:

$$\sigma(\omega) = \sigma_H(\omega) + \sigma_M(\omega); \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_H(\omega) = \varepsilon_M(\omega) \quad (2)$$

los subíndices *H* y *M* denotan cantidades relacionadas a los modelos de *Hooke* y *Maxwell*, respectivamente. σ_H , que está dado por la ley de *Hooke*, es igual a $M_R \varepsilon(\omega)$, mientras que $\sigma_M(\omega)$ está dado por:

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma_M(\omega)}{\delta M} + \frac{\sigma_M(\omega)}{i\omega \eta_M},$$

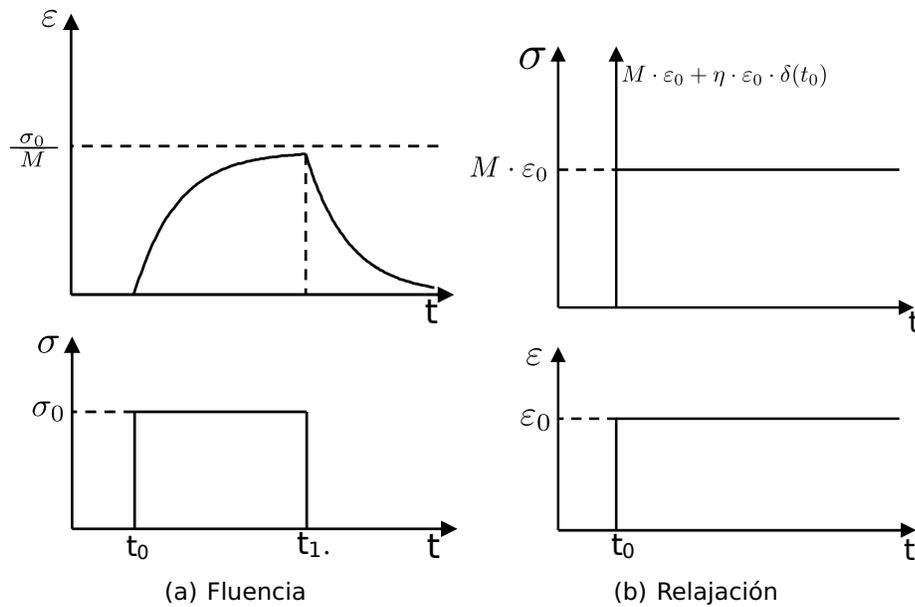


Figura 6. Sólido de Kelvin-Voigt

$$\sigma_M(\omega) = \left(\frac{i\omega \eta_M \delta_M}{\delta_M + i\omega \eta_M} \right) \varepsilon(\omega), \quad (3)$$

al sustituir $\sigma_H(\omega)$ y $\sigma_M(\omega)$ en (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= M_R \varepsilon(\omega) + \left(\frac{1}{\delta_M} + \frac{1}{i\omega \eta_M} \right)^{-1} \varepsilon(\omega) \\ &= \left(M_R + \frac{i\omega \eta_M \delta_M}{i\omega \eta_M + \delta_M} \right) \varepsilon(\omega) \\ &= M_R \left(\frac{1 + i\omega \frac{\eta_M}{\delta_M} \frac{M_U}{M_R}}{1 + i\omega \frac{\eta_M}{\delta_M}} \right) \varepsilon(\omega). \end{aligned} \quad (4)$$

Definiendo

$$\tau_\sigma \equiv \frac{\eta_M}{\delta_M}, \quad \tau_\varepsilon \equiv \frac{\eta_M}{\delta_M} \frac{M_U}{M_R}, \quad (5)$$

donde (M_U , *unrelaxed*) es el módulo no relajado y (M_R , *relaxed*) es el módulo relajado. La relación esfuerzo-deformación en el dominio de la frecuencia y el módulo viscoelástico son (Moczo *et al.*, 2014):

$$\sigma(\omega) = M(\omega) \varepsilon(\omega), \quad M(\omega) = M_R \frac{1 + i\omega \tau_\varepsilon}{1 + i\omega \tau_\sigma}. \quad (6)$$

Aplicando la prueba de *Creep* y *fluencia lenta* al sólido de Zener (Figura 7) y comparando el resultado con la respuesta típica de materiales terrestres (Figura 3) se observa que su respuesta se aproxima a la observada en materiales terrestres, por lo que es de interés conocer su factor de calidad utilizando la relación $1/Q = M_{Im}(\omega)/M_{Re}(\omega)$.

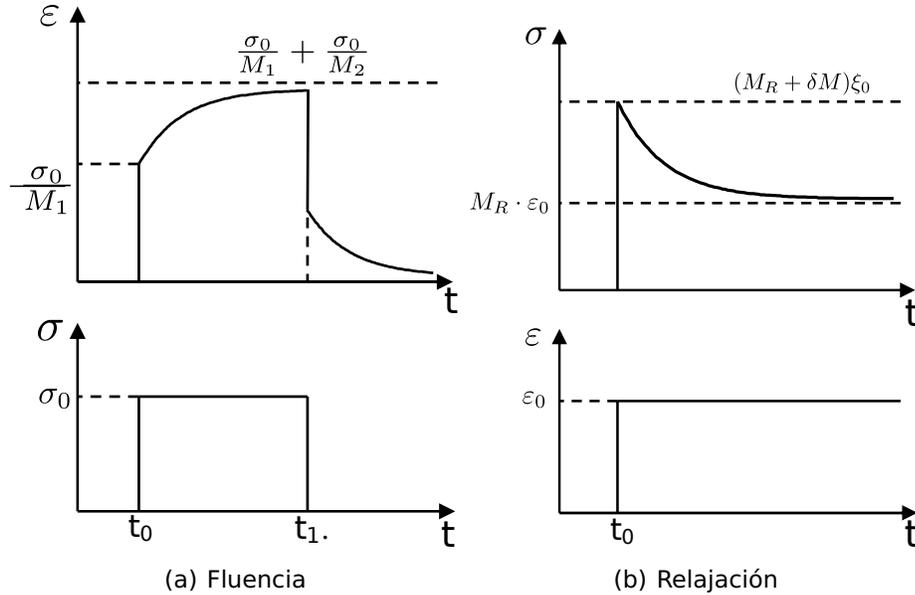


Figura 7. Sólido de Zener

Separando la parte real e imaginaria del módulo (6) :

$$M(\omega) = M_R \frac{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon + i\omega(\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2}, \quad (7)$$

lo que implica que:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{M_{imag}(\omega)}{M_{real}(\omega)} = \frac{\omega(\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon}. \quad (8)$$

Recordando que la atenuación es prácticamente constante para el rango de frecuencias sísmicas, y observando la curva de atenuación Q^{-1} del sólido de Zener (Figura 8a) sugiere que la superposición de varios sólidos de Zener con frecuencias de relajación distribuidas apropiadamente podría generar un modelo viscoelástico que se ajuste a la atenuación casi constante sobre el rango de frecuencias deseado (Figura 8b).

Es importante recordar la equivalencia antes mencionada del modelo de *Zener Generalizado* con el modelo de *Maxwell Generalizado*, esto quiere decir que es posible utilizar cualquiera de los dos y obtener la misma respuesta. En el presente trabajo se utilizará el modelo de *Maxwell Generalizado*.

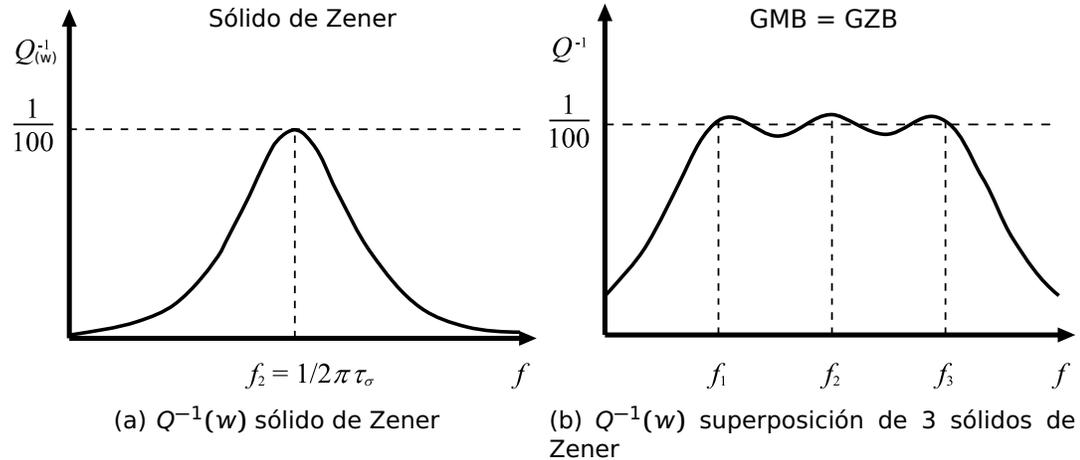


Figura 8. Sólido de Zener, modificada de Moczo et al. (2014).

2.2.3. Modelo de Maxwell Generalizado

En el modelo *GMB* (Figura 1), el l -ésimo sólido de *Maxwell* es caracterizado por el módulo elástico M_l y viscosidad η_l . El resorte adicional es caracterizado por el módulo elástico M_H . El subíndice l indica el l -ésimo sólido de *Maxwell* mientras que el subíndice H indica el modelo de *Hooke*, entonces:

$$\sigma(w) = \sigma_H(w) + \sum_{l=1}^n \sigma_l(w), \quad \varepsilon(w) = \varepsilon_H(w) = \varepsilon_l(w), \quad l = 1, \dots, n, \quad (9)$$

donde $\sigma_H(w) = M_H \cdot \varepsilon(w)$ y $\varepsilon(w) = \varepsilon_l(w) = \frac{\sigma_l(w)}{M_l} + \frac{\sigma_l(w)}{i\omega\eta_l}$,

lo que implica que

$$\sigma_l(w) = \frac{i\eta_l M_l \omega}{M_l + i\eta_l \omega} \cdot \varepsilon(w). \quad (10)$$

Definiendo una frecuencia de relajación característica $\omega_l = M_l/\eta_l$, la relación esfuerzo-

deformación y el módulo complejo son:

$$\sigma(w) = M(w) \cdot \varepsilon(w); \quad M(w) = M_H + \sum_{l=1}^n \frac{iM_l w}{w_l + iw}. \quad (11)$$

El módulo no relajado y relajado (ver 5) son:

$$M_U = \lim_{w \rightarrow \infty} M(w) = M_H + \sum_{l=1}^n M_l, \quad M_R = \lim_{w \rightarrow 0} M(w) = M_H. \quad (12)$$

Como $M_U = M_R + \delta M$ entonces:

$$\delta M = \sum_{l=1}^n M_l. \quad (13)$$

Al aplicar la función paso unitario a la deformación, la respuesta elástica instantánea, cuantificada por M_U , es debida a la superposición de todos los resortes en el modelo. Bajo una deformación constante el módulo eventualmente se relaja hasta el esfuerzo del resorte adicional M_H .

Algunas veces es conveniente reescribir el módulo viscoelástico complejo $M(w)$ de la ecuación (11) utilizando el módulo no relajado M_U , como M_H es igual a M_R (ver ecuación 12) y $M_R = M_U - \delta M$, utilizando la ecuación (13), se obtiene:

$$M_R = M_U - \sum_{l=1}^n M_l. \quad (14)$$

Reemplazando M_H en la ecuación (11) por lo obtenido en (14) se tiene el módulo viscoelástico complejo en términos de M_U :

$$\begin{aligned}
M(\omega) &= M_U - \sum_{l=1}^n M_l + \sum_{l=1}^n \frac{i\omega M_l}{\omega_l + i\omega} \\
&= M_U - \sum_{l=1}^n M_l \left(1 - \frac{i\omega}{\omega_l + i\omega} \right) \\
&= M_U - \sum_{l=1}^n M_l \left(\frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \right) \\
&= M_U - \sum_{l=1}^n \frac{M_l \cdot \omega_l}{\omega_l + i\omega}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Usando las ecuaciones (11), (12) y la relación

$$\psi(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{M(\omega)}{i\omega} \right\}, \tag{16}$$

se obtiene la función *relajación* (Moczo et al., 2014):

$$\Psi(t) = \left[M_U - \sum_{l=1}^n M_l (1 - e^{-\omega_l t}) \right] \cdot H(t). \tag{17}$$

donde $H(t)$ es la función *Heaviside*.

2.3. Funciones inelásticas

Una vez obtenida la relación para el módulo viscoelástico y una medida de la *atenuación*, se está listo para finalizar la incorporación de la *atenuación* en el dominio de la frecuencia. Utilizando el llamado *principio de correspondencia* en la teoría de viscoelasticidad lineal, el módulo real independiente de la frecuencia es reemplazado por un módulo complejo dependiente de la frecuencia (*p.ej.* ecuación 11).

Incluir la atenuación en el dominio de la frecuencia es relativamente fácil, pero como la mayoría de los fenómenos de onda encontrados en sismología son de naturaleza transitoria, una descripción en el dominio del tiempo de la propagación de ondas es a menudo más útil para modelar o comparar con datos. La relación esfuerzo-deformación en el dominio del tiempo está dada por (Moczo et al., 2014):

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial t} d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \psi(t-\tau)}{\partial t} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Para poder resolver la relación constitutiva (18) en el dominio del tiempo es necesario derivar la función *relajación* $\psi(t)$ (ecuación 17), con respecto al tiempo y el resultado sustituirlo en la ecuación (18) para obtener:

$$\sigma(t) = M_U \varepsilon(t) - \sum_{l=1}^n M_l w_l \int_{-\infty}^t e^{-w_l(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Ahora es posible reemplazar la integral de convolución por funciones *inelásticas* o *variables de memoria*. Kristek y Moczo (2003) definieron sus funciones *inelásticas* como independientes de las propiedades de material, las cuales son muy similares a las funciones inelásticas definidas por Emmerich y Korn (1987) para el *GMB*, solo que los parámetros relacionados al material (δM y M_U) no forman parte de la definición de las variables de atenuación, por lo tanto:

$$\zeta_l = w_l \int_{-\infty}^t e^{-w_l(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau; \quad l = 1, \dots, n, \quad (20)$$

por lo que la relación (19) se puede reescribir como:

$$\sigma(t) = M_U \varepsilon(t) - \sum_{l=1}^n M_l \zeta_l(t). \quad (21)$$

La relación esfuerzo-deformación ahora es fácil de evaluar si se conocen las funciones *inelásticas*. Diferenciando (20) con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \zeta_l(t)}{\partial t} + w_l \zeta_l = w_l \varepsilon(t); \quad l = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Las ecuaciones (21) y (22) representan la relación esfuerzo-deformación en el dominio del tiempo para un medio viscoelástico continuo con reología *GMB* o *GZB*. La

necesidad de conocer la historia completa de la deformación en cada posición espacial y evaluar la integral de convolución en cada tiempo es reemplazada por variables funcionales adicionales que pueden ser obtenidas resolviendo la ecuación diferencial (22).

Tener la relación para el esfuerzo es suficiente para la formulación desplazamiento-esfuerzo, pero si se considera la formulación velocidad-esfuerzo hay que diferenciar con respecto al tiempo las ecuaciones (21 y 22):

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = M_U \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} - \sum_{l=1}^n M_l \frac{\partial \zeta_l(t)}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 \zeta_l(t)}{\partial t^2} + w_l \frac{\partial \zeta_l(t)}{\partial t} = w_l \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}. \quad (23)$$

Definiendo $\xi_l(t) = \frac{\partial \zeta_l(t)}{\partial t}$ se reescribe (23) :

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = M_U \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} - \sum_{l=1}^n M_l \xi_l(t); \quad \frac{\partial \xi_l(t)}{\partial t} + w_l \xi_l(t) = w_l \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}. \quad (24)$$

2.3.1. Coeficientes inelásticos

Definiendo los coeficientes inelásticos como:

$$Y_l = \frac{M_l}{M_U}; \quad l = 1, \dots, n, \quad (25)$$

la relación esfuerzo-deformación (24) y el módulo complejo (15) se reescriben como:

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = M_U \left[\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} - \sum_{l=1}^n Y_l \xi_l(t) \right], \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M(\omega) &= M_U - M_U \sum_{l=1}^n \frac{M_l}{M_U} \frac{w_l}{w_l + i\omega} \\ &= M_U \left[1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{w_l}{w_l + i\omega} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

La *atenuación* correspondiente a (27) está dada por:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{M_{imag}(\omega)}{M_{real}(\omega)} = \frac{\sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2}}{1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2}}, \quad (28)$$

se puede reescribir como:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \omega + \omega_l^2 Q^{-1}(\omega)}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l. \quad (29)$$

Es claro que el esfuerzo o su derivada temporal, la ecuación (24) se puede calcular si el módulo no relajado M_U y los *coeficientes inelásticos* se conocen. M_U está directamente relacionado con la velocidad elástica de la propagación de la onda, y los *coeficientes inelásticos* se determinan usando (29), la cual se puede usar para ajustar numéricamente cualquier $Q(\omega)$. Emmerich y Korn (1987) demostraron que una aproximación lo suficiente precisa a $Q(\omega)$ casi constante se obtiene si las frecuencias de relajación ω_l cubren el rango de frecuencias de interés de una manera logarítmicamente equidistante.

Si se asume que los valores de $Q(\omega)$ en un rango de frecuencias de interés son conocidos, ya sea que fueran medidos o estimados, se puede escoger el número y valores de las frecuencias características ω_l para poder cubrir razonablemente el rango de frecuencias de interés. Considerando, *p.ej.*, valores de Q en las frecuencias $\tilde{\omega}_K$, se obtiene un sistema de ecuaciones (29), una para cada valor de $Q(\tilde{\omega}_K)$, el cual puede resolverse para los *coeficientes inelásticos* Y_l usando mínimos cuadrados.

2.4. Relación esfuerzo-deformación en 2D

En un elástico continuo 3D, son necesarios 2 módulos elásticos independientes para poder describir la propagación de las ondas P y S . Recordando la relación esfuerzo-deformación para un medio elástico perfecto isotrópico, la ley de *Hooke*:

$$\sigma_{ij} = \kappa \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} \right). \quad (30)$$

Si asumimos un medio viscoelástico en 3D con reología *GMB* o *GZB* en lugar del medio elástico perfecto descrito por la ecuación (30), se necesitan 2 cuerpos *GMB* o *GZB* independientes, uno para el módulo de *Bulk* (κ) y otro para el módulo de *cizalla* (μ). Utilizando la formulación velocidad-desplazamiento se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \delta_{ij} \right) - \sum_{l=1}^n \left[Y_l^\kappa \cdot \kappa \cdot \xi_l^{kk} \cdot \delta_{ij} + 2Y_l^\mu \cdot \mu \left(\xi_l^{ij} - \frac{1}{3} \xi_l^{kk} \delta_{ij} \right) \right] \quad (31)$$

Las funciones *inelásticas* son soluciones de las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \xi_l^{ij}(t)}{\partial t} + w_l \xi_l^{ij}(t) = w_l \frac{\partial \varepsilon_{ij}(t)}{\partial t}; \quad l = 1, \dots, n. \quad (32)$$

La convención de sumatoria para índices repetidos aplica para el índice espacial k pero no aplica para el subíndice l , el cual está relacionado con el número de *SLS* a superponer.

Como en el presente trabajo se realiza la incorporación para un medio viscoacústico, la ecuación (31) se simplifica ya que $\mu = 0$ quedando de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \delta_{ij} - \sum_{l=1}^n Y_l^\kappa \cdot \kappa \cdot \xi_l^{kk} \quad (33)$$

Como la simulación numérica se realizará en 2D, y recordado que la presión en el caso acústico está definida como $-\frac{1}{3}\sigma_{ij}$, se puede reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \sum_{l=1}^n Y_l \cdot \kappa \cdot \xi_l^{kk}, \quad (34)$$

donde ε_{kk} es la traza de la deformación, ξ_l^{kk} son las variables de memoria asociadas

a ε_{kk} , y l está relacionado al número de SLS.

2.4.1. Esquema numérico

Las funciones *inelásticas* y sus derivadas temporales pueden ser aproximadas con una precisión de segundo orden

$$\xi_l^{ij}(t_{m-1/2}) \doteq \frac{1}{2} [\xi_l^{ij}(t_m) + \xi_l^{ij}(t_{m-1})]; \quad l = 1, \dots, n, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \xi_l^{ij}}{\partial t}(t_{m-1/2}) \doteq \frac{1}{\Delta t} [\xi_l^{ij}(t_m) - \xi_l^{ij}(t_{m-1})]; \quad l = 1, \dots, n. \quad (36)$$

Usando las aproximaciones (35) y (36) en (32) se obtiene un esquema para actualizar las funciones *inelásticas*:

$$\xi_l^{ij}(t_m) \doteq \frac{2 w_l \Delta t}{2 + w_l \Delta t} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}(t_{m-1/2}) + \frac{2 - w_l \Delta t}{2 + w_l \Delta t} \cdot \xi_l^{ij}(t_{m-1}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (37)$$

El valor $\xi_l(t_m)$ que se necesita en la relación esfuerzo-deformación (34) se puede obtener de (35), sin embargo, de acuerdo a (35), ambos valores $\xi_l^{ij}(t_m)$ y $\xi_l^{ij}(t_{m-1})$ se tienen que mantener en memoria para cada posición espacial al actualizar $\xi_l^{ij}(t_{m-1/2})$. Kristek y Moczo (2003) modificaron este procedimiento, sustituyendo (35) en (37) se elimina $\xi_l^{ij}(t_{m-1})$ para obtener:

$$\xi_l^{ij}(t_{m-1/2}) \doteq -\frac{w_l \Delta t}{2 - w_l \Delta t} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}(t_{m-1/2}) + \frac{2}{2 - w_l \Delta t} \cdot \xi_l^{ij}(t_m); \quad l = 1, \dots, n. \quad (38)$$

Usando (38) en la relación esfuerzo-deformación (34) se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t_{m-1/2}) = \check{\kappa} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t}(t_{m-1/2}) + \sum_{l=1}^n \check{\gamma}_l \xi_l^{kk}(t_m) \quad (39)$$

donde

$$\tilde{\kappa} = -\kappa \left(1 + \sum_{l=1}^n Y_l \frac{w_l \Delta t}{2 - w_l \Delta t} \right), \quad \tilde{Y}_l = Y_l \kappa \frac{2}{2 - w_l \Delta t}. \quad (40)$$

las relaciones derivadas se evalúan iterativamente en este orden: primero se calcula $\xi_l^{kk}(t_m)$ usando la relación (37) para después aplicar los valores obtenidos en la relación (39).

Ahora es posible realizar una implementación numérica de la ecuación (39), utilizando diferencias finitas, la primera derivada temporal se calcula usando derivada centrada, mientras que las derivadas espaciales se calculan utilizando el esquema de mallado intercalado de cuarto orden, ya que aplicado a simulaciones elásticas a demostrado tener buen balance entre precisión y tiempo de cómputo. Los datos de entrada al modelo son la velocidad de la onda P , la densidad, el factor de calidad Q , así como el tipo de fuente. Una vez definido esto, los primeros pasos dentro del programa son:

1. calcular la distancia entre nodos de acuerdo a la frecuencia máxima
2. calcular el paso del tiempo que cumpla con las condiciones de estabilidad
3. tiempo máximo que durará la simulación
4. calcular parámetros de material promediados
5. actualizar la deformación a partir de la velocidad de la partícula
6. actualizar las funciones inelásticas a partir de la deformación
7. actualizar el esfuerzo a partir de la deformación y funciones inelásticas
8. actualizar velocidades de las partículas, y guardar sismogramas o snapshots.

Como $\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}$ y $\xi^{kk} = \xi^{xx} + \xi^{zz}$ para el caso acústico 2D, a continuación se presenta el esquema numérico para actualizar la *presión*, y por cuestiones de simplicidad se presenta solo el esquema para actualizar la *velocidad* en dirección x , la *velocidad* en dirección z se define de manera similar.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \tilde{\kappa} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \sum_{l=1}^n (\xi_l^{xx} + \xi_l^{zz}) \tilde{Y}_l \quad (41)$$

donde

$$\tilde{\kappa} = -\kappa \left(1 + \sum_{l=1}^n Y_l \frac{w_l \Delta t}{2 - w_l \Delta t} \right); \quad \tilde{Y}_l = Y_l \kappa \frac{2}{2 - w_l \Delta t}. \quad (42)$$

Para actualizar la velocidad en dirección x:

$$\begin{aligned} VX_{i,j+1/2}^{m+1/2} = & VX_{i,j+1/2}^{m-1/2} + \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{9}{8} (P_{i,j+1}^m - P_{i,j}^m) - \frac{1}{24} (P_{i,j+2}^m - P_{i,j-1}^m) \right\} \right] \\ & + \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} \left[\frac{\Delta t}{\Delta z} \left\{ \frac{9}{8} (P_{i+1/2,j+1/2}^m - P_{i-1/2,j+1/2}^m) - \frac{1}{24} (P_{i+3/2,j+1/2}^m - P_{i-3/2,j+1/2}^m) \right\} \right], \end{aligned} \quad (43)$$

y la variable de memoria correspondiente:

$$\xi_l^{xx;m} = \frac{2 - w_l \Delta t}{2 + w_l \Delta t} \cdot \xi_l^{xx;m-1} + \frac{2 w_l \Delta t}{2 + w_l \Delta t} \cdot \frac{1}{h} \left\{ \frac{9}{8} (VX_{i,j+1}^{m+1/2} - VX_{i,j}^{m+1/2}) - \frac{1}{24} (VX_{i,j+2}^{m+1/2} - VX_{i,j-1}^{m+1/2}) \right\} \quad (44)$$

Para actualizar la presión, (en el caso de $l = 3$ en la sumatoria):

$$\begin{aligned} P_{i+1/2,j+1/2}^m = & P_{i+1/2,j+1/2}^{m-1} + \tilde{\kappa} dx \left\{ \frac{9}{8} (VX_{i,j+1}^{m+1/2} - VX_{i,j}^{m+1/2}) - \frac{1}{24} (VX_{i,j+2}^{m+1/2} - VX_{i,j-1}^{m+1/2}) \right\} \\ & + \tilde{\kappa} dz \left\{ \frac{9}{8} (VZ_{i+1,j}^{m+1/2} - VZ_{i,j}^{m+1/2}) - \frac{1}{24} (VZ_{i+2,j}^{m+1/2} - VZ_{i-1,j}^{m+1/2}) \right\} \\ & + \Delta t \kappa \left\{ \tilde{Y}_1 (\xi_1^{xx;m} + \xi_1^{zz;m}) + \tilde{Y}_2 (\xi_2^{xx;m} + \xi_2^{zz;m}) + \tilde{Y}_3 (\xi_3^{xx;m} + \xi_3^{zz;m}) \right\} + S(t). \end{aligned} \quad (45)$$

La fuente $S(t)$ esta definida como:

$$S(t) = -\frac{1}{\Omega \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\left\{ \left(\frac{x - X_0}{\Omega} \right)^2 + \left(\frac{z - Z_0}{\Omega} \right)^2 \right\} \right] 2(\pi F_p (t - t_0))^2 \exp \{ -(\pi F_p (t - t_0))^2 \}, \quad (46)$$

siendo F_p la frecuencia pico de la fuente, $t_0 = 0.78/F_p$ es un tiempo de desfase y Ω

es la desviación estándar de la función Gaussiana.

Capítulo 3. Q constante

Las aproximaciones en el dominio de tiempo comúnmente utilizan superposición de elementos mecánicos para describir el comportamiento de Q , las cuales se conocen como *Q aproximadamente constante (ACQ)*, por sus siglas en inglés) (Liu *et al.*, 1976; Emmerich y Korn, 1987; Carcione, 2007; Zhu *et al.*, 2013). Sin embargo, los requerimientos de memoria y tiempos de cómputo son elevados para aplicaciones 3D, lo cual podría limitar el uso masivo aplicado a inversión sísmica y migración (Zhu y Harris, 2014). En lugar de *ACQ*, el uso de *Q constante* (Kjartansson, 1979) resulta atractivo porque provee una parametrización eficiente de la atenuación sísmica en las rocas. Sin embargo la relación entre esfuerzo y deformación es expresada por un operador convolucional, el cual requiere un enorme costo computacional para su cálculo numérico (Chen *et al.*, 2016).

Muchos métodos han sido propuestos para modelar la atenuación acústica durante la propagación de las ondas (Štekl y Pratt, 1998; Carcione, 2007; Zhu *et al.*, 2013). Uno de ellos es la propagación de ondas usando *Q constante* en el dominio del tiempo (Kjartansson, 1979; Carcione *et al.*, 2002), el cual es preciso al producir el comportamiento de *Q constante* deseado en todas las frecuencias, sin embargo, requiere una derivada temporal fraccionaria para simular la ley de potencias en la relación esfuerzo-deformación (Carcione *et al.*, 2002; Carcione, 2010). Matemáticamente, la discretización de la derivada temporal fraccionaria requiere almacenar la historia completa del campo de ondas, lo cual no es práctico para el cálculo numérico. Para superar este gasto de memoria Chen y Holm (2004) propusieron el uso del operador *Laplaciano fraccionario* para modelar la atenuación (Yao *et al.*, 2016b). Basándose en esta idea, varios tipos de ecuaciones de onda que usan *Laplaciano fraccionario* se han derivado para modelar propagación de ondas con atenuación y dispersión de velocidad (Carcione, 2010; Treeby y Cox, 2010).

Usando esta idea, Zhu y Harris (2014) desarrollaron una ecuación de onda para *Q constante* con *Laplaciano fraccionario* desacoplado, su principal contribución fue

separar en dos partes el *Laplaciano fraccionario* que controla los efectos de fase y amplitud. En la ecuación de onda con *Laplaciano fraccionario*, los órdenes fraccionarios están relacionados a Q , por lo que pueden variar espacialmente, Zhu y Harris (2014) utilizaron un valor promedio para la simulación numérica, el cual solo es razonable para modelos de Q que varían suavemente (se explica en 3.4).

3.1. Relación esfuerzo-deformación

Kjartansson (1979) da explícitamente una descripción de la atenuación que exhibe las características exactas de Q constante, basándose en la premisa que es posible aproximar la función de fluencia lenta (*Creep*) mediante una ley de potencias de la forma:

$$\chi(t) \propto t^b, \quad (47)$$

donde b es un número real. Para lo cual propuso una función de fluencia lenta definida como:

$$\chi(t) = \frac{1}{M_0 \Gamma(1 + 2\gamma)} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2\gamma}; t > 0 \quad \chi(t) = 0; t < 0, \quad (48)$$

donde Γ es la función Gamma, t_0 es un tiempo arbitrario de referencia, M_0 es un valor de referencia con las unidades del módulo viscoelástico y γ es un parámetro a definir. Notar que solo es necesario una *velocidad de fase* (C_0) definida a una *frecuencia de referencia* (ω_0) y Q para describir completamente el mecanismo, en lugar de varios tiempos de relajación y el módulo complejo necesarios en los modelos *SLS* (Carcione, 2007).

Haciendo uso del principio de correspondencia, en el cual el módulo elástico independiente de la frecuencia es reemplazado por el módulo viscoelástico complejo dependiente de la frecuencia $M(\omega)$, y utilizando el módulo complejo propuesto por Kjartansson (1979):

$$M(\omega) = M_0 \left(\frac{i\omega}{\omega_0} \right)^{2\gamma} = M_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2\gamma} e^{i\pi\gamma}; \quad \omega_0 = \frac{1}{t_0}, \quad (49)$$

la relación esfuerzo-deformación del modelo Q constante se define como:

$$\sigma(\omega) = M_0 \left(\frac{i\omega}{\omega_0} \right)^{2\gamma} \cdot \varepsilon(\omega) \quad (50)$$

a partir de (49) se puede calcular el factor de atenuación Q^{-1} utilizando la definición:

$$Q^{-1} = \frac{I_m(M(\omega))}{R_e(M(\omega))} = \frac{\text{sen } \pi\gamma}{\text{cos } \pi\gamma} = \tan \pi\gamma. \quad (51)$$

de donde es posible despejar γ :

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1}{Q} \right). \quad (52)$$

Observando las ecuaciones (51) y (52) se puede decir que Q es independiente de la frecuencia, y que γ parametriza el nivel de atenuación. Para obtener valores de Q mayores que cero a partir de la ecuación (52) es necesario un γ entre 0 y 0.5 (Ver figura 9).

Como se busca modelar en el dominio del tiempo, es necesario transformar la ecuación (50) al dominio temporal aplicándole la transformada de *Fourier* inversa:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ M_0 \left(\frac{i\omega}{\omega_0} \right)^{2\gamma} \cdot \varepsilon(\omega) \right\} \\ &= \frac{M_0}{t_0^{-2\gamma}} \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ (i\omega)^{2\gamma} \cdot \varepsilon(\omega) \right\} \\ &= \left(\frac{M_0}{t_0^{-2\gamma}} \right) \frac{\partial^{2\gamma} \varepsilon(t)}{\partial t^{2\gamma}}, \end{aligned} \quad (53)$$

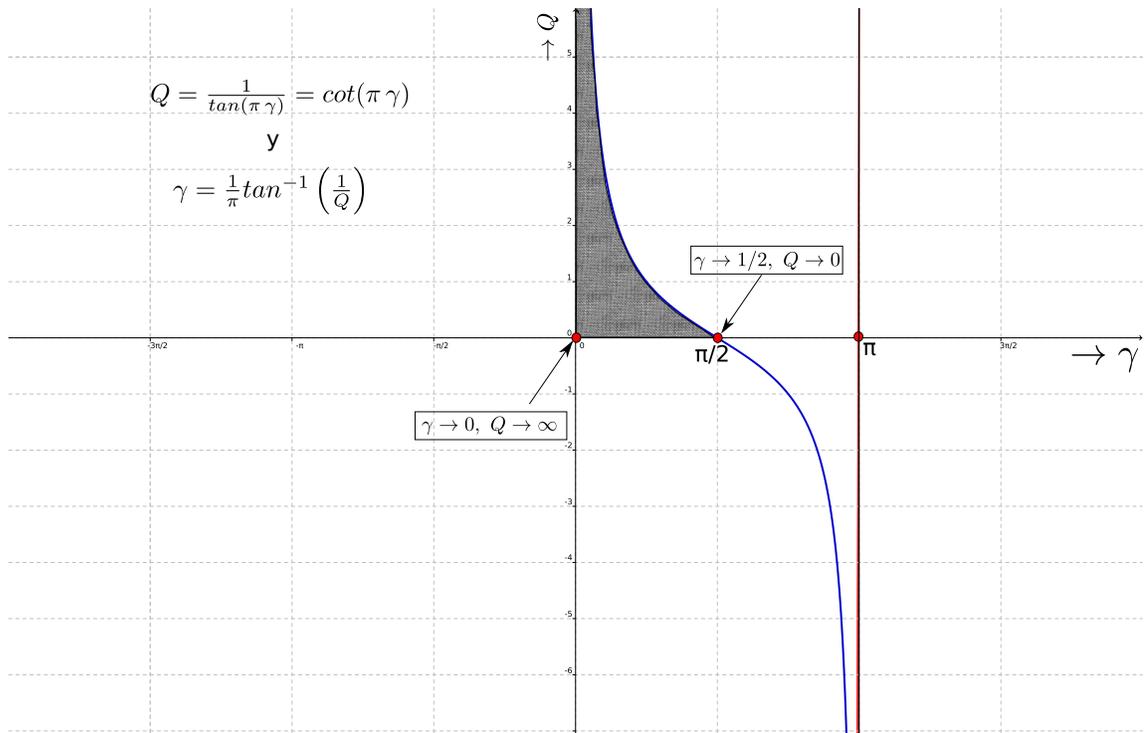


Figura 9. Relación entre el orden de la derivada fraccionaria y la atenuación.

La ecuación (53) es la relación esfuerzo-deformación para el modelo de Q constante en el dominio del tiempo, la deformación ε tiene una derivada temporal de orden fraccionario 2γ .

Observando la figura (9) se aprecia que cuando Q tiende a cero (atenuación infinita), γ tiende a $1/2$, y la derivada temporal fraccionaria $\partial^{2\gamma} \varepsilon / \partial t^{2\gamma}$ se reduce a $\partial \varepsilon / \partial t$, siendo el caso puramente viscoso. Cuando Q es infinito, γ tiende a 0 , por lo que el esfuerzo será lineal con la deformación $\sigma = M_0 \cdot \varepsilon$ (caso elástico). Cuando Q está entre cero e infinito, la derivada temporal fraccionaria depende de los estados de pasos del tiempo previos, esto es, el esfuerzo actual debe ser calculado a partir de la historia temporal de la deformación, resultando en que la evaluación numérica del operador de la derivada temporal fraccionaria requiera mucha memoria y tiempo de cómputo para almacenar y usar la historia temporal (Carcione *et al.*, 2002; Carcione, 2009).

3.2. Velocidad de fase

Como se mencionó renglones arriba, el modelo de Q constante depende únicamente de 3 parámetros, entre los cuales se encuentra la *velocidad de fase*, la cual puede

ser obtenida a partir de la definición de *velocidad compleja*:

$$V_c = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \quad (54)$$

donde ρ es la densidad. La *velocidad de fase* V_p está definida como la frecuencia w dividida por la parte real del número de onda complejo (Carcione *et al.*, 2002), por lo tanto:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{w}{k} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{V_c}\right)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re}\left(\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right)} \\ &= \left[\operatorname{Re}\left(\sqrt{\frac{\rho}{M}}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \quad (55)$$

Sustituyendo (49) en (55) y tomando solo la parte real se obtiene:

$$V_p = c_0 \cdot |w/w_0|^\gamma, \quad c_0 = \sqrt{\frac{M_0}{\rho}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right]^{-1} \quad (56)$$

de la ecuación (56) se deriva que c_0 es la velocidad de fase en la frecuencia w_0 y que

$$M_0 = \rho \cdot c_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \quad (57)$$

es el módulo de *incompresibilidad*.

3.3. De la derivada fraccionaria temporal a espacial

El uso de la derivada fraccionaria temporal en la relación esfuerzo-deformación introduce problemas computacionales desafiantes ya que su evaluación numérica requiere almacenar la historia temporal de las variables. Bajo ciertas condiciones, es posible reemplazar las derivadas fraccionarias temporales con derivadas fraccionarias espaciales, las cuales son más fáciles de evaluar.

Para ilustrar como surge este reemplazamiento se considera la transformada de *Fourier* de la derivada temporal fraccionaria de una función $g(x, t)$ (Treeby y Cox, 2014):

$$\mathcal{F}_{x,t} \left\{ \frac{\partial^\gamma g(x, t)}{\partial t^\gamma} \right\} = (-iw)^\gamma \cdot G(k, w) \quad (58)$$

w es la frecuencia temporal, k es la frecuencia espacial o número de onda, en este caso la función g en el dominio espacial depende solamente de x , para los casos donde dependa de (x, y) ó (x, y, z) , el número de onda se representa con un vector \mathbf{k} . La primera parte de la expresión se puede expandir usando :

$$(-i)^\gamma = \cos(\pi\gamma/2) - i\text{sen}(\pi\gamma/2) \quad (59)$$

por lo tanto:

$$(-iw)^\gamma = \cos(\pi\gamma/2) \cdot w^\gamma + (-iw)\text{sen}(\pi\gamma/2) \cdot w^{\gamma-1} \quad (60)$$

Para muchas aplicaciones, la absorción acústica tiene solo efecto de segundo orden en la propagación de ondas (Treeby y Cox, 2014). Esto quiere decir que el término de frecuencia temporal en la ecuación (60) (el cual corresponde a una derivada temporal) puede ser reemplazado por un término de frecuencia espacial (que corresponde a una derivada espacial) usando la relación de dispersión de la ecuación de onda $w = c_0 \cdot k$. Esto se basa en la premisa de que la sustitución de relaciones de primer orden en términos de segundo orden resultará en errores de tercer orden, los cuales

pueden despreciarse (Lighthill, 1956). La ecuación (60) se vuelve:

$$(-iw)^\gamma \approx \cos(\pi\gamma/2) \cdot k^\gamma \cdot c_0^\gamma + (-iw)\text{sen}(\pi\gamma/2) \cdot k^{\gamma-1} \cdot c_0^{\gamma-1}. \quad (61)$$

Usando la transformada de *Fourier* del *Laplaciano fraccionario* (Chen y Holm, 2004):

$$\mathcal{F}_{x,t} \{ (-\nabla^2)^{\gamma/2} g(x, t) \} = k^\gamma \cdot G(k, w), \quad (62)$$

La transformada inversa de (61) se obtiene:

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \approx c_0^\gamma \cdot \cos(\pi\gamma/2) (-\nabla^2)^{\gamma/2} + c_0^{\gamma-1} \cdot \text{sen}(\pi\gamma/2) (-\nabla^2)^{(\gamma-1)/2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \quad (63)$$

Por lo tanto, la derivada fraccionaria temporal puede ser reemplazada con una derivada fraccionaria espacial sin modificar el comportamiento de absorción original, siempre y cuando el efecto de absorción en el campo de ondas sea pequeño.

3.4. Ecuación de onda usando *Laplaciano fraccionario*

Para un medio acústico homogéneo, la ecuación lineal de conservación de momento de primer orden se puede escribir como (Zhu y Harris, 2014):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0} \nabla \sigma, \quad (64)$$

y la ecuación velocidad-deformación está dada por (Zhu y Harris, 2014):

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (65)$$

donde σ es el campo de esfuerzos, ε es el campo de deformación, y $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es el vector de velocidad de la partícula.

Combinando la relación esfuerzo-deformación (50) , con las ecuaciones de conservación de primer orden (64) y (65) , la ecuación de onda con derivadas fraccionarias y densidad constante ρ_0 se obtiene (ver Apéndice):

$$\frac{\partial^{2-2\gamma}\sigma}{\partial t^{2-2\gamma}} = c^2 w_0^{-2\gamma} \nabla^2 \sigma, \quad (66)$$

donde ∇^2 es el operador *Laplaciano* y $c^2 = M_0/\rho_0 = c_0^2 \cos^2(\pi\gamma/2)$. El exponente $2 - 2\gamma$ es el orden fraccionario de la derivada temporal. La ecuación (66) se reduce a la ecuación de onda acústica clásica conforme $\gamma \rightarrow 0$ ($Q \rightarrow \infty$), y a la ecuación de difusión conforme $\gamma \rightarrow 1/2$ ($Q \rightarrow 0$), esta ecuación también es conocida como *ecuación de onda de Caputo* (Zhu y Harris, 2014).

La relación de dispersión de la ecuación (66) se puede obtener al sustituir la solución de ondas planas $e^{i(\omega t - \tilde{k} \cdot r)}$, donde ω es la frecuencia angular, r es el vector de coordenadas espaciales y \tilde{k} es el número de onda complejo, es decir $\tilde{k} = k_{real} + ik_{imag}$:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = (i)^{2\gamma} w_0^{-2\gamma} \omega^{2\gamma} \tilde{k}^2. \quad (67)$$

Después de algunos cálculos, Zhu y Harris (2014) obtuvieron una nueva relación de dispersión, llevando la derivada fraccionaria temporal a una derivada fraccionaria espacial, donde hacen uso de la aproximación $k = \omega/c_0$ (ver sección 3.3) y que $(i)^{2\gamma} = \cos(\pi\gamma) + i\text{sen}(\pi\gamma)$:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \approx c_0^{2\gamma} w_0^{-2\gamma} \cos(\pi\gamma) \tilde{k}^{2\gamma+2} + (i\omega) c_0^{2\gamma-1} w_0^{-2\gamma} \text{sen}(\pi\gamma) \tilde{k}^{2\gamma+1}. \quad (68)$$

La ecuación (68) aproxima la ecuación (67) , Zhu y Harris (2014) la llamaron *Q casi constante* (NCQ, por sus siglas en inglés).

En un medio homogéneo, c_0 y Q son independientes de la variable espacial, por lo que es posible aplicar una transformada de *Fourier* inversa espacial y temporal a la ecuación (68) utilizando la notación (62) resulta en el *Laplaciano fraccionario* $\tilde{k}^{2\gamma+2} \rightarrow (-\nabla^2)^{\gamma+1}$ y $\tilde{k}^{2\gamma+1} \rightarrow (-\nabla^2)^{\gamma+1/2}$, obteniendo de esta forma la ecuación de onda NCQ para un medio homogéneo (Zhu y Harris, 2014):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \eta (-\nabla^2)^{\gamma+1} \sigma + \tau (-\nabla^2)^{\gamma+1/2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma, \quad (69)$$

donde los coeficientes son:

$$\eta = -c_0^{2\gamma} w_0^{-2\gamma} \cos(\pi\gamma), \quad \tau = -c_0^{2\gamma-1} w_0^{-2\gamma} \text{sen}(\pi\gamma). \quad (70)$$

3.5. Esquema numérico

A continuación se presenta una revisión general del método pseudo-espectral que será utilizado para el cálculo de las derivadas espaciales así como del *Laplaciano fraccionario*.

3.5.1. Método pseudo-espectral

En el método pseudo-espectral se evalúan las derivadas espaciales mediante la multiplicación de números de onda en este dominio (Gottlieb y Orszag, 1977; Fornberg y Sloan, 1994; Boyd, 2001). Se considera un campo de presiones U propagándose en una distribución de velocidades 2D en un malla $C(x, z)$. Para solucionar la ecuación de onda escalar homogénea 2D (Özdenvar y McMechan, 1996):

$$\frac{1}{C^2(x, z)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (71)$$

se requiere del cálculo de las derivadas espaciales del lado derecho. Por ejemplo, la derivada $\partial U / \partial x$ del campo de ondas $U(x)$ es calculada por la solución pseudo-espectral tomando la transformada de *Fourier* de $U(x)$, multiplicando cada punto del espectro resultante por ik y aplicando transformada de *Fourier* inversa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mathcal{F}^{-1} \{ ik_x \mathcal{F} \{ U(x) \} \}, \quad (72)$$

donde \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} denotan la transformada directa e inversa de *Fourier*, k_x es el

número de onda en la dirección x .

Similarmente la segunda derivada se obtiene al multiplicar por $(ik_x)^2 = -k_x^2$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -k_x^2 \mathcal{F} \{U(x)\} \right\}. \quad (73)$$

La ventaja de esta aproximación sobre *diferencias finitas* es que la precisión teórica más alta para una diferenciación espacial (hasta el número de onda de Nyquist) es automáticamente dada por la diferenciación pseudo-espectral.

3.5.2. Implementación

Utilizando el método pseudo-espectral para calcular los *Laplacianos fraccionarios*, y diferencias finitas para el cálculo de la primera y segunda derivada temporal presente en la ecuación (69), el esquema numérico a implementar es:

$$\sigma^{n+1} = 2\sigma^n - \sigma^{n-1} + \Delta t^2 c^2 \eta (-\nabla^2)^{\gamma+1} \sigma^n + \Delta t c^2 \tau (-\nabla^2)^{\gamma+0.5} (\sigma^n - \sigma^{n-1}) + S(t), \quad (74)$$

donde:

$$(-\nabla^2)^{\gamma+1} \sigma = \mathcal{F}^{-1} \left\{ |k|^{2\gamma+2} \cdot \mathcal{F} \{ \sigma \} \right\}, \quad (75)$$

$$(-\nabla^2)^{\gamma+0.5} (\sigma^n - \sigma^{n-1}) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ |k|^{2\gamma+1} \cdot \mathcal{F} \{ \sigma^n - \sigma^{n-1} \} \right\}, \quad (76)$$

y $S(t)$ es la fuente que está definida como:

$$S(t) = -\frac{1}{\Omega\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\left\{\left(\frac{x-X_0}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{z-Z_0}{\Omega}\right)^2\right\}\right] \cdot 2(\pi F_p)^2 [1 - 2(\pi F_p(t-t_0))^2] \cdot \exp\{-(\pi F_p(t-t_0))^2\}. \quad (77)$$

siendo F_p la frecuencia pico de la fuente, $t_0 = 0.78/F_p$ es un tiempo de desfase y Ω es la desviación estándar de la función Gaussiana.

Capítulo 4. Comparación de los métodos

En el presente capítulo se presentan los resultados de la implementación de los métodos de *variables de memoria* y *Laplaciano fraccionario*, así como su comparación con el caso acústico y la solución analítica.

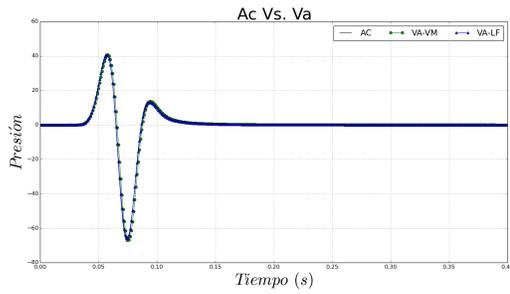
La malla utilizada en todos los casos tiene una dimensión de $5040\text{ m} \times 5040\text{ m}$, la velocidad del medio homogéneo es de 2500 m/s , $\Delta t = 0.001\text{ ms}$, la fuente se ubica en el centro de la malla ($2520\text{ m}, 2520\text{ m}$). Se utiliza una *frecuencia de referencia* de 100 Hz para el método de *Laplaciano fraccionario* y una banda de frecuencias logarítmicamente equidistantes (0.1 a 100 Hz) para el caso de *variables de memoria*.

4.1. Acústico vs. Viscoacústico

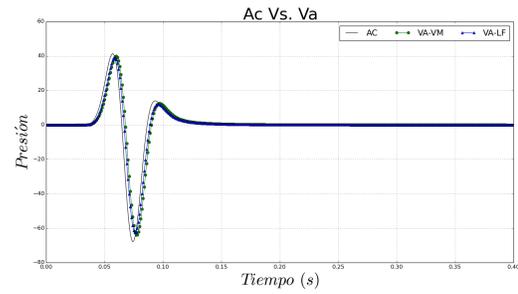
En el siguiente ejemplo se utiliza una *frecuencia pico* de 25 Hz para la fuente, y un $\Delta x = \Delta z = 10\text{ m}$.

La figura (10) muestra una comparación entre el caso puramente *acústico* y el *viscoacústico* calculado mediante *variables de memoria* y *Laplaciano fraccionario*, el caso acústico fue calculado mediante diferencias finitas de cuarto orden. Para las subfiguras (a), (c), (e), (g) Q tiene un valor de 100 y para las subfiguras (b), (d), (f), (h) el valor de Q es 50, los sismogramas se encuentran a $100, 500, 1000$ y $1, 500\text{ m}$ de la fuente.

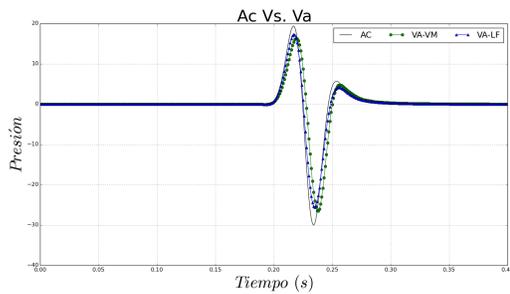
Con esta figura se busca ilustrar cómo la *atenuación intrínseca* afecta la propagación, si la atenuación es pequeña, por ejemplo $Q = 100$, la atenuación y el desfase con respecto al caso acústico son menores que para atenuaciones fuertes, por ejemplo $Q = 50$, que causa mayor atenuación y desfase. A mayores distancias de la fuente se aprecia una diferencia marcada entre los resultados de *variables de memoria* y *Laplaciano fraccionario*, más adelante se discutirá este problema.



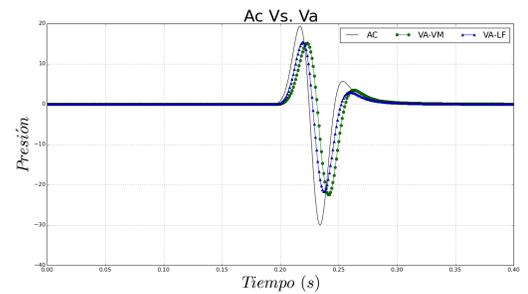
(a) A 100 m de la Fuente



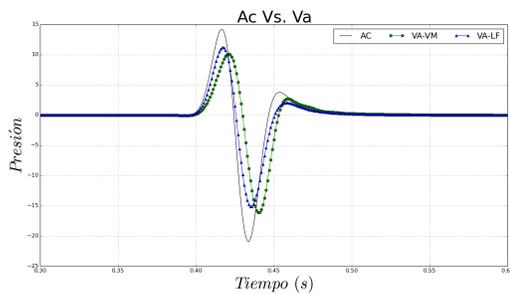
(b) A 100 m de la Fuente



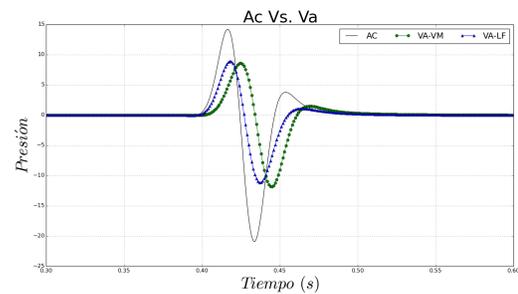
(c) A 500 m de la Fuente



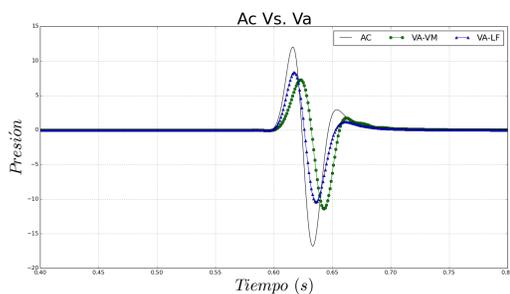
(d) A 500 m de la Fuente



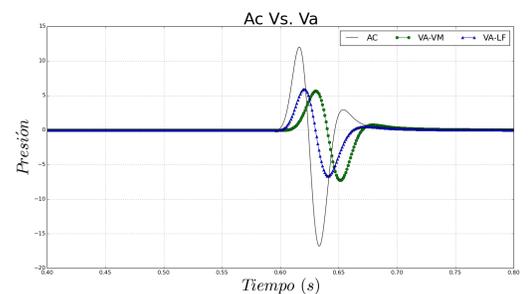
(e) A 1000 m de la Fuente



(f) A 1000 m de la Fuente



(g) A 1500 m de la Fuente



(h) A 1500 m de la Fuente

Figura 10. Conjunto de sismogramas para diferentes valores de Q y distancias: las subfiguras (a), (c), (e), (g) corresponden a $Q = 100$ y (b), (d), (f), (h) corresponden a $Q = 50$, AC = Acústico, VA = Viscoacústico, LF = Laplaciano fraccionario, VM = Variables de memoria

4.2. Precisión con diferentes valores de Q

Para conocer la precisión de cada método se realizaron diferentes pruebas variando los valores de Q , se utilizó un $\Delta x = \Delta z = 8 \text{ m}$. Se obtuvieron sismogramas a diferentes distancias de la fuente para cada caso, el resto de los parámetros son los mismos que el ejemplo anterior.

Los resultados fueron comparados con la solución analítica como la propuesta por Chen *et al.* (2016) (Ver Apéndice). La primera simulación se realizó para un valor de $Q = 100$, la figura 11 (a), muestra diferentes sismogramas a 100 m de la fuente, se grafica la respuesta viscoacústica calculada mediante la *solución analítica (VA-A)*, *Laplaciano fraccionario (VA-LF)* y *variables de memoria (VA-VM)*, la respuesta acústica se muestra como referencia, las figuras (b) y (c) muestran sismogramas a 500 m y 1700 m de la fuente, respectivamente.

Observando la figura (11) se aprecia cómo la amplitud disminuye lentamente con la distancia a la fuente tal y como se espera para un valor de $Q = 100$, la pequeña distorsión de la *fase* con la distancia también es de esperarse. Con este valor de Q , en distancias cortas (figura 11 (a)), no existe diferencia significativa entre el caso acústico y viscoacústico, la implementación *VA-VM* muestra un pequeño desfase con respecto a la solución analítica.

A distancias grandes se espera mayor atenuación y desfase con respecto al caso acústico, la figura 11 (c) muestra como *VA-LF* y *VA-VM* presentan estas características, sin embargo, se observan variaciones con respecto a *VA-A*, lo cual es de esperarse ya que el error es acumulativo. Para estimar el error *RMS* se utilizó la siguiente fórmula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{nt} (d_j^n - d_j^a)^2}{\sum_{j=1}^{nt} (d_j^a)^2}}, \quad (78)$$

donde nt es el número de muestras en la traza sísmica, d_j^n es el valor calculado de la traza simulada numéricamente en la muestra j , el superíndice a denota el valor analítico correspondiente.

La figura (12) muestra la variación de *RMSE* con la distancia a la fuente, de esta

forma es más fácil apreciar como el error de ambas implementaciones se incrementa con la distancia, siendo *VA-VM* el método que presenta un mayor aumento de error, lo cual puede ser atribuido al desfase apreciado con respecto a la solución analítica (figura 11 (c)).

En la siguiente prueba se define un valor de $Q = 50$, se espera mayor atenuación y desfase, que deberá ser más evidente a mayores distancias de propagación. La figura (13) muestra sismogramas a 100 m , 500 m y 1700 m de la fuente. Tal y como se esperaba, la atenuación y el desfase incrementan significativamente con la distancia, *VA-VM* no logra reproducir apropiadamente los valores de atenuación y desfase a distancias grandes, motivo por el cual el error *RMS* es mucho mayor que el de *VA-LF* (figura 14).

La figura (15) muestra los resultados para un valor de $Q = 10$, un valor tan bajo significa una atenuación fuerte, que se debe apreciar incluso a distancias cortas, así como mayor desfase. A una distancia de 1700 m la amplitud de la onda es casi nula.

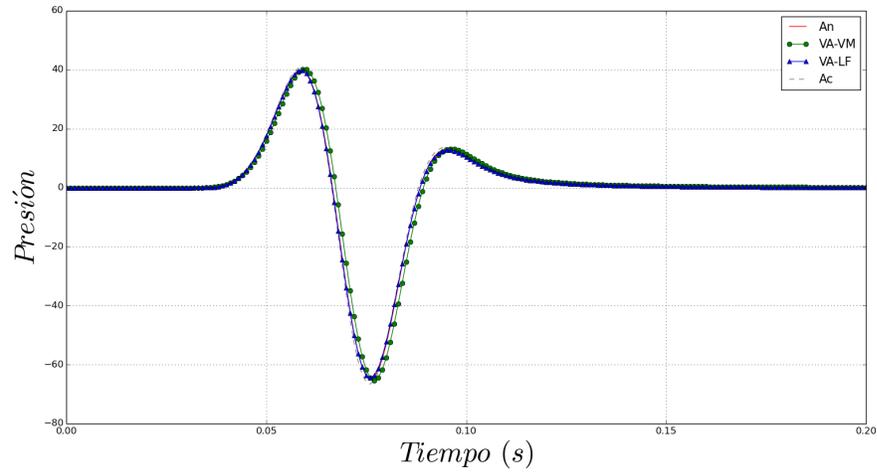
Las pruebas realizadas con los distintos valores de Q indican que para valores de atenuación bajos, por ejemplo $Q = 100$ y para distancias cortas, tanto *VA-VM* como *VA-LF* logran reproducir con buena precisión la respuesta obtenida mediante la solución analítica (figura 11(a)), sin embargo para distancias mayores *VA-VM* presenta un desfase mayor, lo cual se ve reflejado en el aumento del error *RMS*. Al aumentar la atenuación (valores de Q pequeños) *VA-VM* presenta problemas de desfase grandes, incluso a distancias cercanas a la fuente.

Se puede decir que *VA-VM* tiene buena precisión para valores típicos de Q (30 a 100) a distancias cercanas a la fuente, pero presenta mayores errores conforme disminuye el valor de Q o se incrementa la distancia a la fuente.

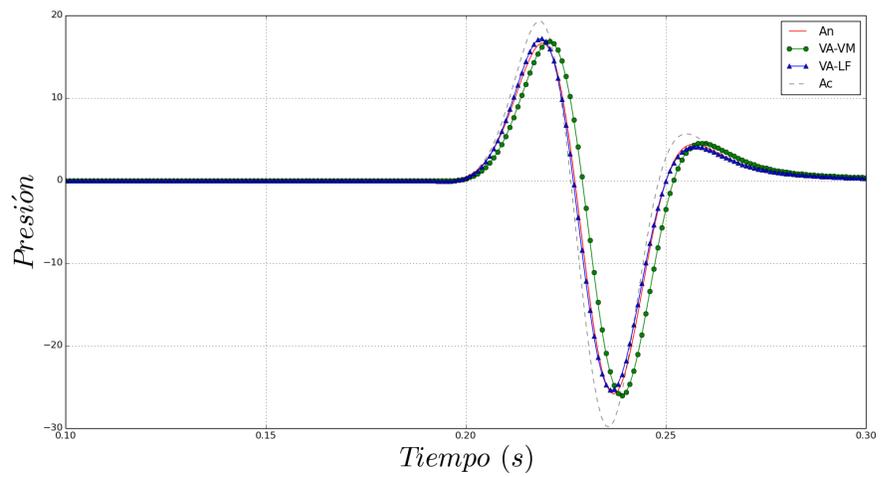
4.3. Precisión y tiempos de ejecución con diferentes incrementos espaciales

Para esta prueba se utiliza una *frecuencia pico* de 12 Hz , los valores de Δx varían de 20 m a 8 m de 2 en 2 sin incluir 16, ya que resulta en número de nodos impares lo cual ocasiona problemas en la Transformada de *Fourier*.

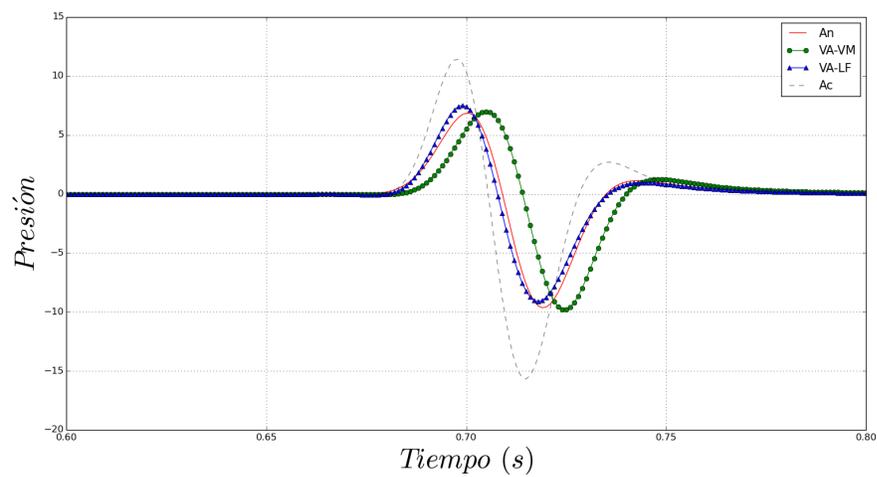
En esta prueba se utiliza un valor de $Q = 100$, la figura (17) muestra el resultado a



(a) A 100 m de la fuente



(b) A 500 m de la fuente



(c) A 1700 m de la fuente

Figura 11. Conjunto de sismogramas para un valor de $Q=100$ a diferentes distancias de la Fuente. *VM* = Variables de Memoria, *LF* = Laplaciano Fraccionario, *An* = Analítico, *Ac* = Acústico

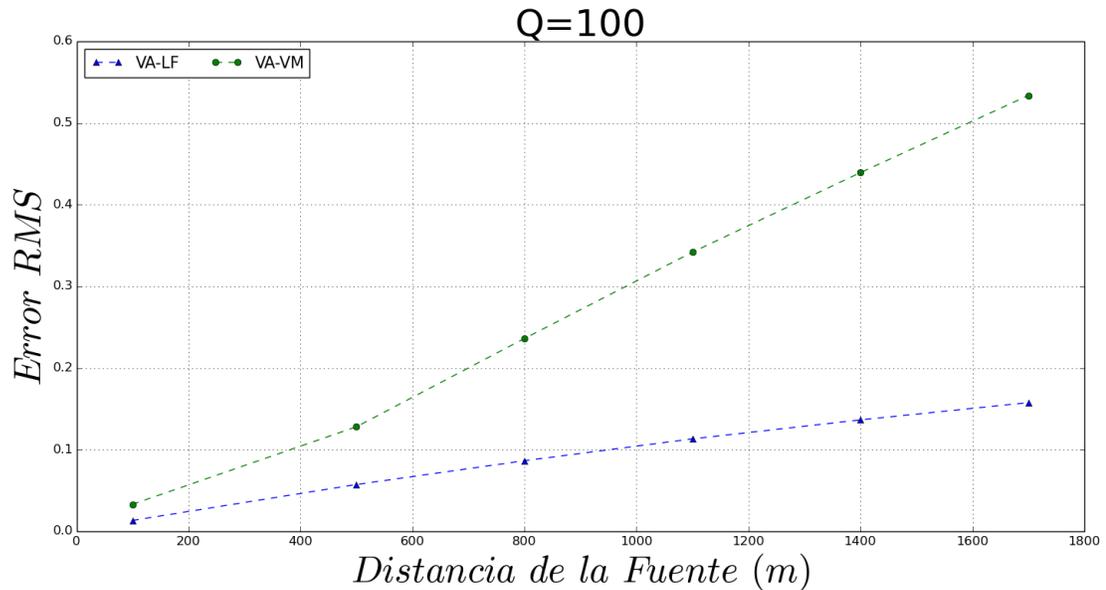


Figura 12. Variación del error RMS con la distancia para *Laplaciano Fraccionario* (VA-LF) y *Variables de Memoria* (VA-VM).

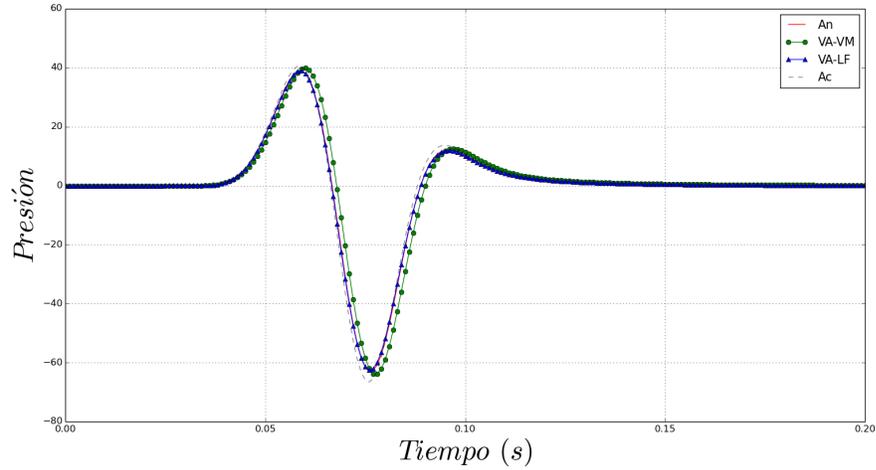
una distancia de 500 m de la fuente, conforme la distancia entre nodos (Δx) disminuye, el error RMS también tiende a disminuir, siendo evidente que para ambos métodos la tendencia es muy similar, radicando la diferencia en que el error RMS de VA-VM varía de valores mayores y no logra aproximarse a la precisión de VA-LF.

La tabla (1) muestra una relación normalizada de los tiempos de ejecución para los métodos VA-LF y VA-VM, de acuerdo a estos datos, VA-LF es aproximadamente 3 veces más rápido que VA-VM para todos los casos probados.

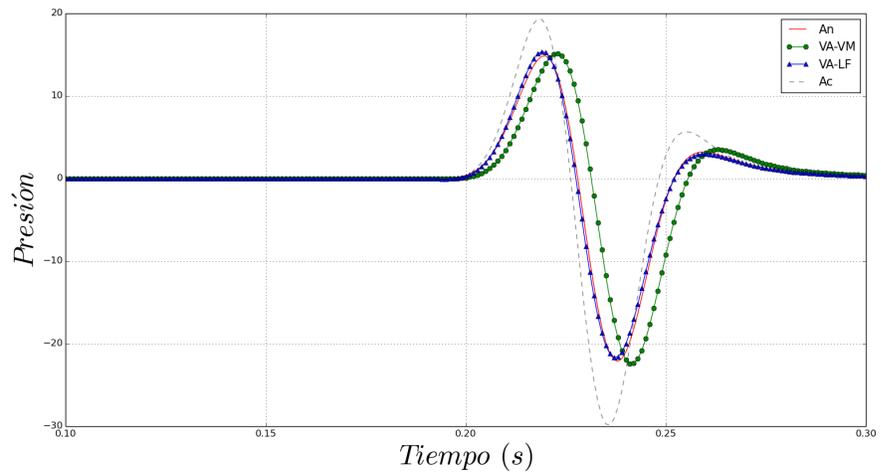
4.4. Medio heterogéneo

El método de *variables de memoria* (SLS) ha estado en la literatura por más tiempo que el método de *Laplaciano fraccionario*, por lo que cuenta con mayor investigación e incluso con una extensión a medios viscoelásticos heterogéneos (Carcione *et al.*, 1988a,b; Kristek y Moczo, 2003; Zhu *et al.*, 2013; Moczo *et al.*, 2014). Se ha demostrado que *Variables de memoria* tiene buena precisión al simular la respuesta a un modelo de Q constante en distancias cortas (Zhu *et al.*, 2013).

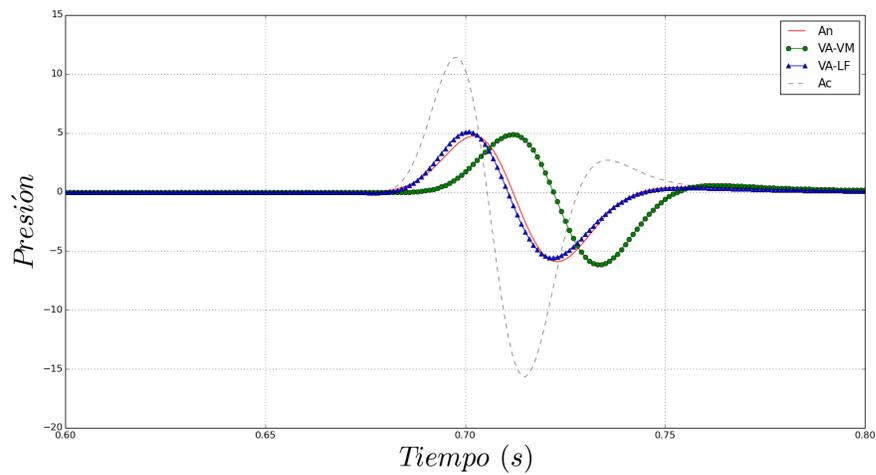
Para probar la estabilidad de las simulaciones en medios heterogéneos con grandes contrastes, se diseñó un modelo de 2 capas, el tamaño de la malla es de 5040 m x



(a) A 100 m de la fuente



(b) A 500 m de la fuente



(c) A 1700 m de la fuente

Figura 13. Conjunto de sismogramas para un valor de $Q=50$ a diferentes distancias de la Fuente. VM = Variables de Memoria, LF = Laplaciano Fraccionario, An = Analítico, Ac = Acústico

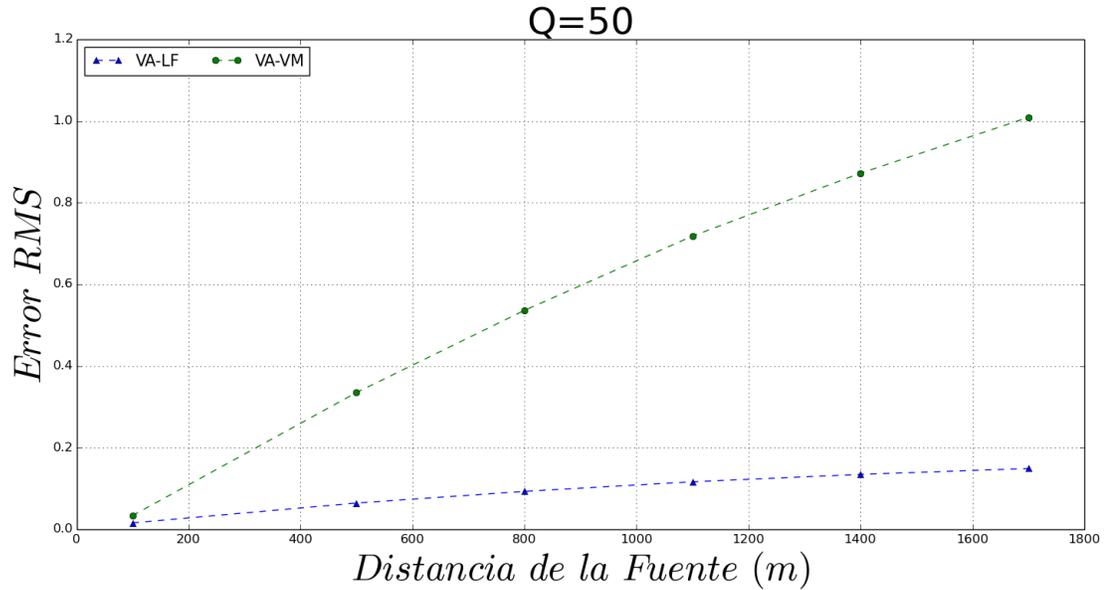


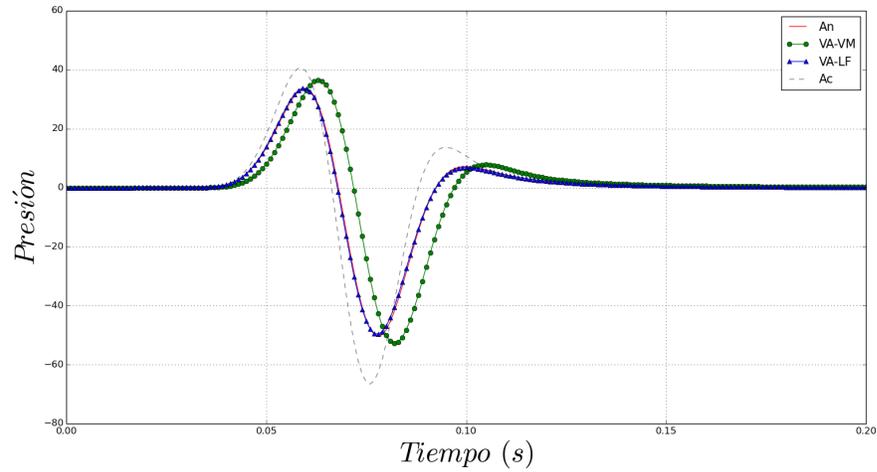
Figura 14. Variación del error RMS con la distancia para *Laplaciano Fraccionario (VA-LF)* y *Variables de Memoria (VA-VM)*.

5040 m, y $\Delta x = \Delta z = 8$ m. Para la capa superior se asigna una velocidad de onda P de 1800 m/s, un valor de $Q = 30$, para la capa inferior la velocidad de la onda P es de 3600 m/s y $Q = 100$. La fuente es la función *Ricker* con frecuencia pico de 25 Hz y se localiza en (2520 m x 2300 m), $\Delta t = 0.8 \times 10^{-2}$ s.

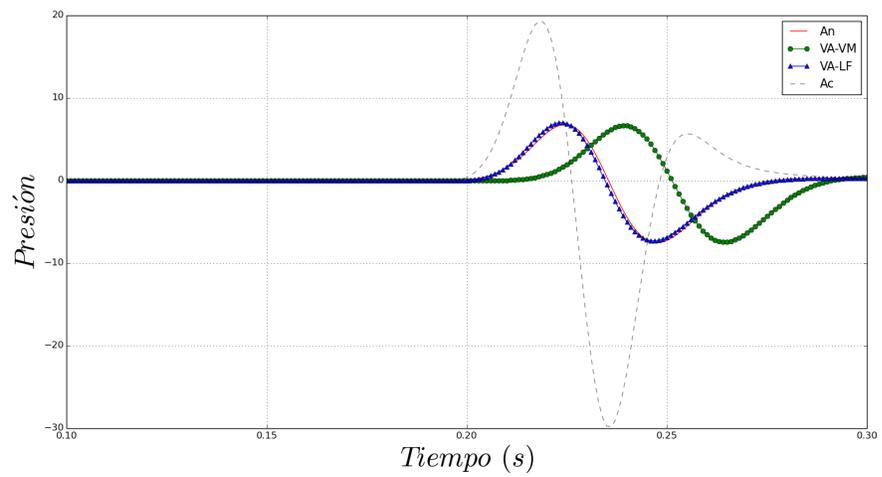
La figura (18) muestra *snapshots* a 120 ms, 200 ms y 320 ms respectivamente, del lado izquierdo se muestra la respuesta calculada mediante *VA-VM* y del lado derecho la respuesta obtenida mediante *VA-LF*, ambas respuestas aparentan ser muy similares, sin embargo, al observar la figura (19), en la cual se muestran un par de sismogramas tomados a diferentes distancias de la fuente, se observa una diferencia en los resultados numéricos, el método *VA-LF* presenta una amplitud más grande que *VA-VM*. Es interesante mencionar que la metodología propuesta por Zhu y Harris (2014) utiliza un promediado de γ para lidiar con Q variable en el espacio, definido de la siguiente forma:

$$\gamma_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma(x_i) \quad (79)$$

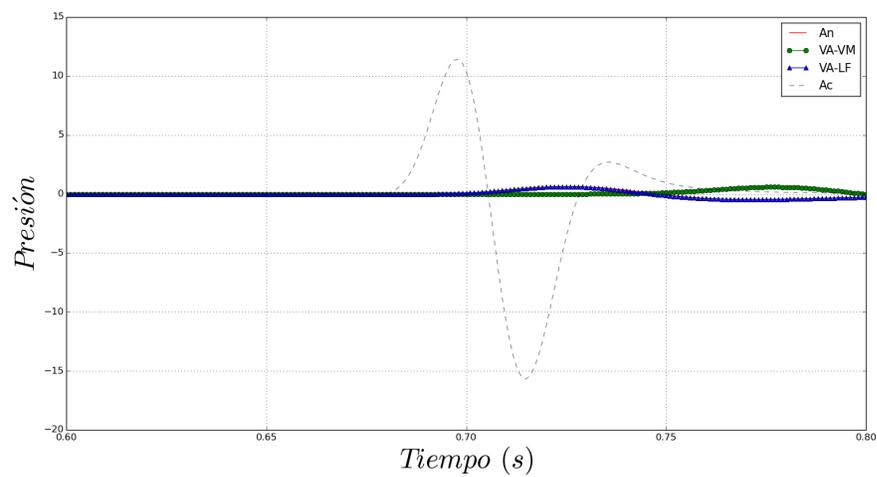
donde x_i denota el i -ésimo nodo de la malla espacial y N representa el número total de puntos en la malla. Se ha observado que $\eta(x)$ y $(-\nabla^2)^{\gamma(x)+1}$ afectan la fase



(a) A 100 m de la fuente



(b) A 500 m de la fuente



(c) A 1700 m de la fuente

Figura 15. Conjunto de sismogramas para un valor de $Q=10$ a diferentes distancias de la Fuente. VM = Variables de Memoria, LF = Laplaciano Fraccionario, An = Analítico, Ac = Acústico

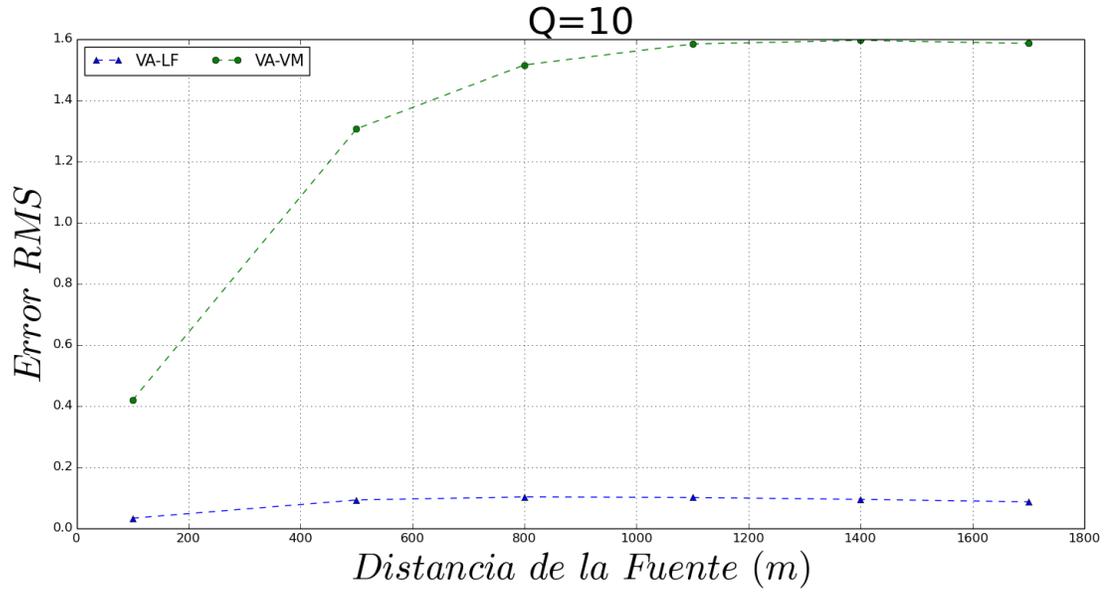
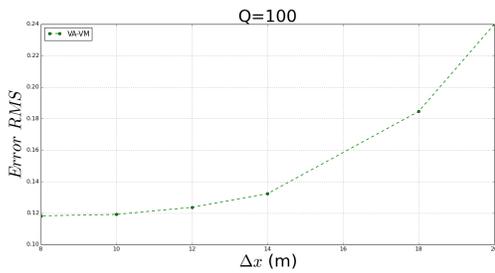
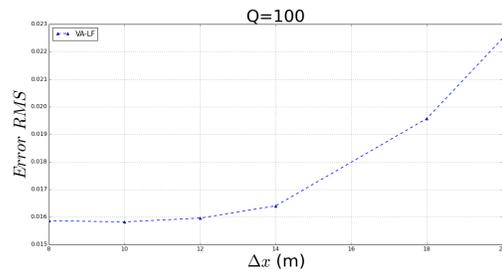


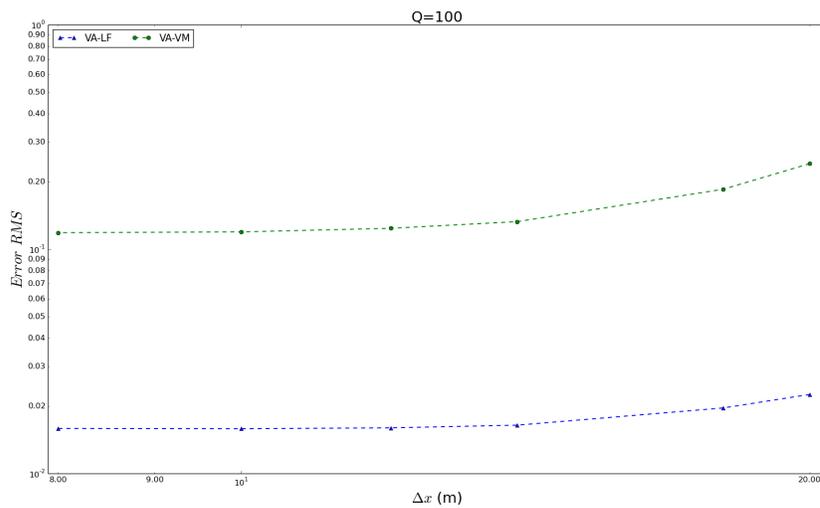
Figura 16. Variación del error RMS con la distancia para *Laplaciano Fraccionario (VA-LF)* y *Variables de Memoria (VA-VM)*.



(a) *Variables de memoria*



(b) *Laplaciano fraccionario*



(c) *Variables de memoria Vs. Laplaciano fraccionario*

Figura 17. Error RMS contra Δx para *Laplaciano Fraccionario (VA-LF)* y *Variables de Memoria (VA-VM)*.

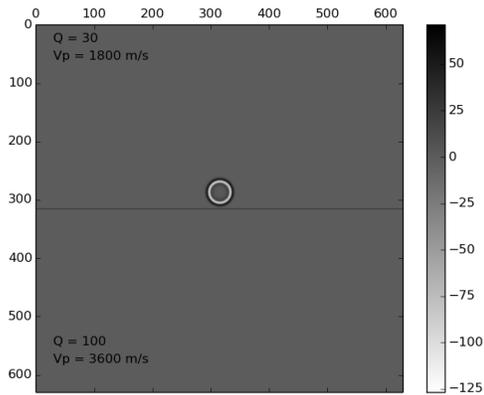
Tabla 1. Tiempos de ejecución normalizados

Δx (m)	# Nodos	VA-LF	VA-VM
20	252x252	1.00	2.98
18	280x280	1.19	3.76
14	360x360	2.03	6.17
12	420x420	2.46	8.12
10	504x504	3.78	12.19
8	630x630	6.16	18.59

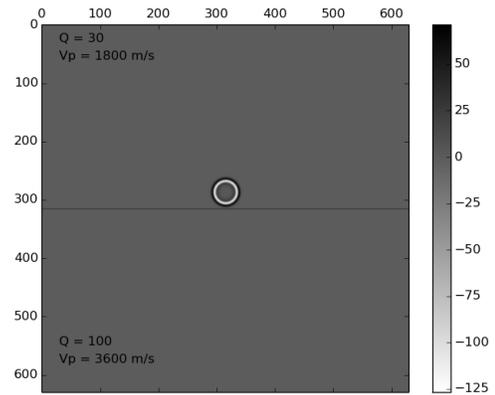
de la onda sísmica, mientras que $\tau(x)$ y $(-\nabla^2)^{\gamma(x)+1/2}$ afectan la pérdida de amplitud (Zhu y Harris, 2014). Los parámetros $\eta(x)$ y $\tau(x)$ introducen un efecto global a todas los componentes de la frecuencia (ó *números de onda*). Sin embargo, los *Laplacianos fraccionarios* producen diferentes efectos a diferentes componentes de la frecuencia, por lo que utilizar solamente el promedio γ_0 no es suficiente para describir correctamente la dispersión y atenuación de los diferentes componentes de la frecuencia en medios heterogéneos (Chen *et al.*, 2016).

Para el caso de *VA-VM* se usa un promedio como el propuesto por Moczo *et al.* (2002), en el cual para calcular K y μ utilizaron promedio armónico, mientras que para la densidad utilizaron un promedio aritmético y demostraron la precisión de este esquema para diferentes configuraciones (*medios*).

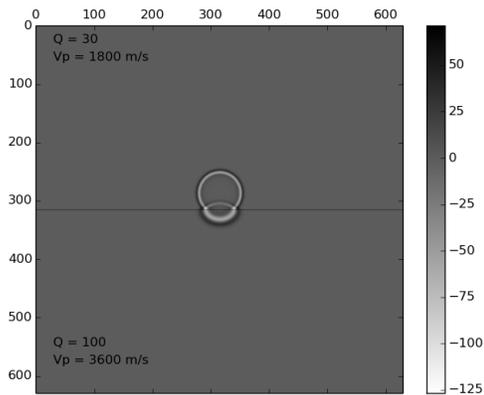
Esto podría explicar las diferencias observadas en los sismogramas, sin embargo no es posible decir cual metodología tiene una mejor precisión ya que no se cuenta con un campo de referencia para el caso de dos medios. El tiempo de cómputo normalizado con *VA-LF* muestra que *VA-VM* es 2.5 veces más lento que *VA-LF*.



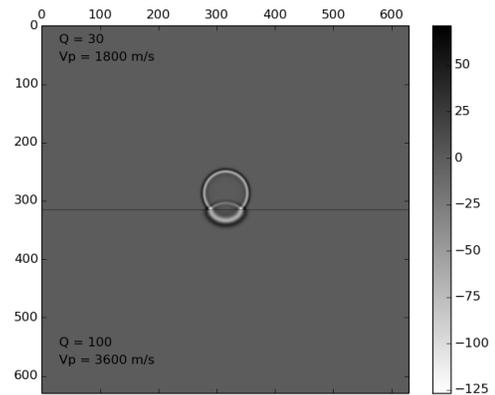
(a) 120 ms (VA-VM)



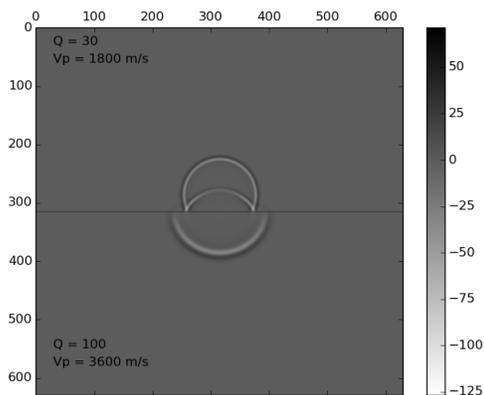
(b) 120 ms (VA-LF)



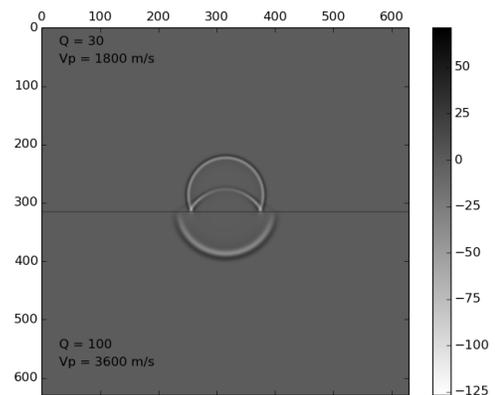
(c) 200 ms (VA-VM)



(d) 200 ms (VA-LF)

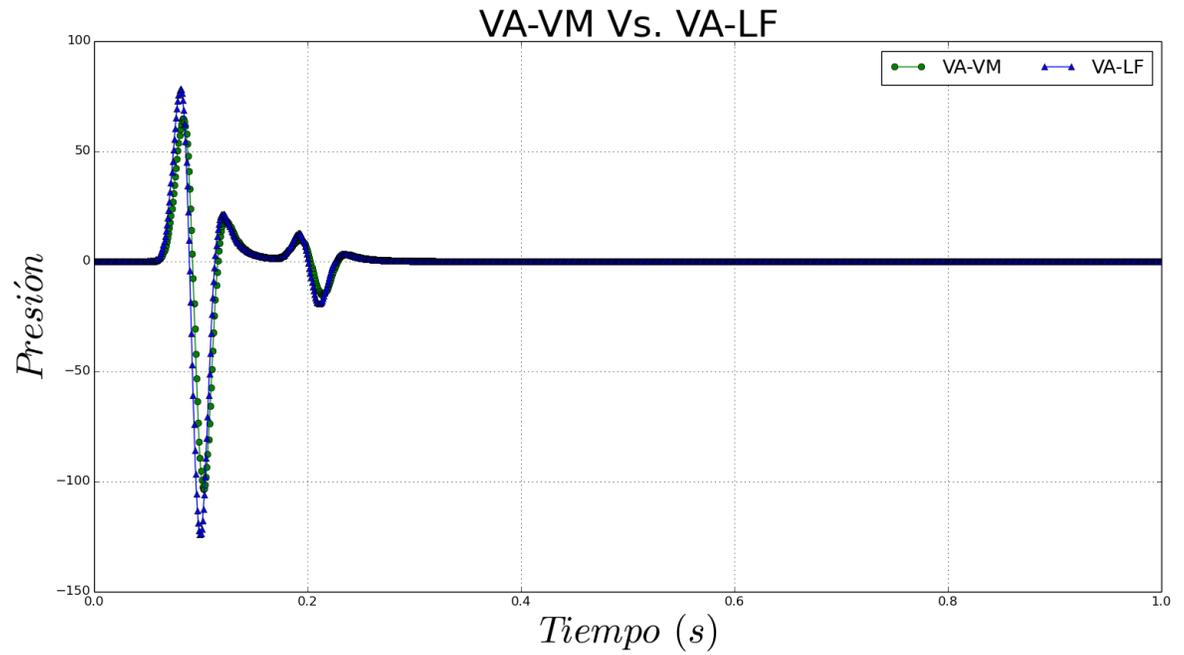


(e) 320 ms (VA-VM)

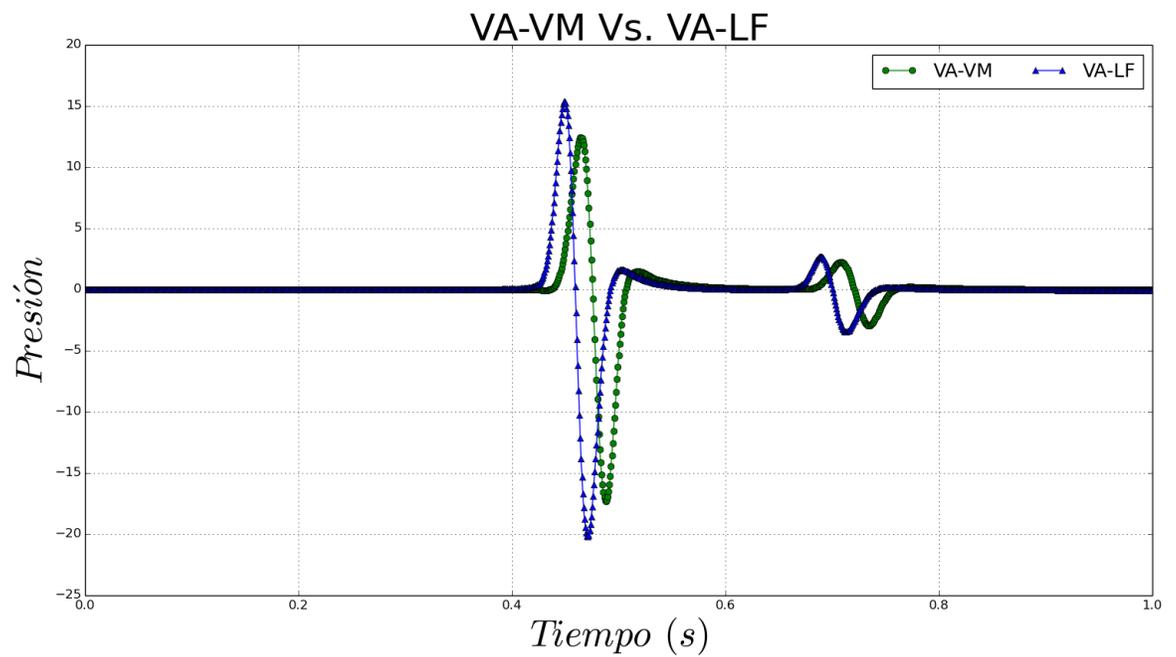


(f) 320 ms (VA-LF)

Figura 18. Comparación de la respuesta en un medio heterogéneo.



(a) A 100 m de la fuente



(b) A 1000 m de la Fuente

Figura 19. Comparación de sismogramas a diferentes distancias de la fuente en un medio heterogéneo.

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

De acuerdo a las diferentes pruebas realizadas, es posible llegar a las siguientes conclusiones:

1. El método de variables de memoria tiene buena precisión para modelar Q *aproximadamente constante* en distancias cortas, pero falla en distancias grandes, estos resultados concuerdan con los reportados por Zhu *et al.* (2013).
2. $VA-VM$ pierde precisión conforme la atenuación aumenta (valores de Q pequeños).
3. Los tiempos de cómputo de $VA-LF$ son aproximadamente 3 veces más rápidos que los de $VA-VM$ independientemente de la distancia entre nodos de la malla.
4. $VA-LF$ muestra buena precisión en distancias cortas y largas, así como para valores pequeños de Q .
5. $VA-LF$ converge rápidamente y logra una buena precisión para las diferentes distancias entre nodos .
6. $VA-VM$ necesita una malla fina para incrementar su precisión, sin embargo no logra igualar a $VA-LF$.

5.2. Recomendaciones

Es recomendable utilizar *Laplaciano fraccionario* para simulaciones que requieran distancia entre nodos pequeñas, ya que resulta más eficiente. Para Q variable en el espacio no es suficiente utilizar un promedio de γ , al momento de la realización del presente trabajo sigue la exploración de metodologías para afrontar este problema (Fomel *et al.*, 2013; Sun *et al.*, 2015; Chen *et al.*, 2016; Yao *et al.*, 2016b), ya que al variar Q afecta el valor de γ por lo que el *Laplaciano fraccionario* se ve afectado.

Literatura citada

- Aki, K. y Richards, P. (1980). *Quantitative Seismology: Theory and Methods*, Vol. 1. W.H. Freeman and Company, San Francisco. p. 557.
- Alford, R., Kelly, K., y Boore, D. M. (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, **39**(6): 834–842.
- Arfken, G. (1999). *Mathematical methods for physicists*. Academic Press. p. 985.
- Bai, T. y Tsvankin, I. (2016). Time-domain finite-difference modeling for attenuative anisotropic media. *Geophysics*, **81**(2): C69–C77.
- Bland, D. (1960). International series of monographs on pure and appl. math. the theory of linear viscoelasticity.
- Bland, D. y Prager, W. (1960). The theory of linear viscoelasticity (international series of monographs on pure and applied mathematics, vol. 10). *Journal of Applied Mechanics*, **27**: 760.
- Boyd, J. P. (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation.
- Buseck, P. y Hua, X. (1993). Progress in the experimental study of seismic wave attenuation. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **21**: 375–406.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, **13**(5): 529–539.
- Caputo, M. y Mainardi, F. (1971). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, **91**(1): 134–147.
- Caputo, M., Carcione, J. M., y Cavallini, F. (2011). Wave simulation in biologic media based on the kelvin-voigt fractional-derivative stress-strain relation. *Ultrasound in medicine & biology*, **37**(6): 996–1004.
- Carcione, J., Helbig, K., y Helle, H. (2003). Effects of pressure and saturating fluid on wave velocity and attenuation in anisotropic rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **40**(3): 389–403.
- Carcione, J. M. (1995). Constitutive model and wave equations for linear, viscoelastic, anisotropic media. *Geophysics*, **60**(2): 537–548.
- Carcione, J. M. (2007). *Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media*, Vol. 38. Elsevier. p. 538.
- Carcione, J. M. (2009). Theory and modeling of constant- q p-and s-waves using fractional time derivatives. *Geophysics*, **74**(1): T1–T11.
- Carcione, J. M. (2010). A generalization of the fourier pseudospectral method. *Geophysics*, **75**(6): A53–A56.
- Carcione, J. M., Kosloff, D., y Kosloff, R. (1988a). Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophysical Journal International*, **95**(3): 597–611.

- Carcione, J. M., Kosloff, D., y Kosloff, R. (1988b). Viscoacoustic wave propagation simulation in the earth. *Geophysics*, **53**(6): 769–777.
- Carcione, J. M., Cavallini, F., Mainardi, F., y Hanyga, A. (2002). Time-domain modeling of constant-q seismic waves using fractional derivatives. *Pure and Applied Geophysics*, **159**(7-8): 1719–1736.
- Carter, M., Siraki, E., y Coelho, D. (1993). Velocity interpretation and depth conversion. *GP504, IHRDC, Boston*, p. 141.
- Casula, G. y Carcione, J. (1992). Generalized mechanical model analogies of linear viscoelastic behaviour. *Bollettino di geofisica teorica ed applicata*.
- Červený, V., Molotkov, I. A., Molotkov, I. A., y Pšenčík, I. (1977). *Ray method in seismology*. Univerzita Karlova.
- Chen, H., Zhou, H., Li, Q., y Wang, Y. (2016). Two efficient modeling schemes for fractional laplacian viscoacoustic wave equation. *Geophysics*, **81**(2): T233–T249.
- Chen, K. H. (1984). Numerical modeling of elastic wave propagation in anisotropic inhomogeneous media: a finite-element approach. En: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1984*. Society of Exploration Geophysicists, pp. 631–632.
- Chen, W. y Holm, S. (2004). Fractional laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **115**(4): 1424–1430.
- Christensen, R. (2012). *Theory of viscoelasticity: an introduction*. Elsevier.
- Cormier, V. F. (2011). Seismic, viscoelastic attenuation. En: *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*. Springer, pp. 1279–1290.
- Day, S. M. y Minster, J. B. (1984). Numerical simulation of attenuated wavefields using a padé approximant method. *Geophysical Journal International*, **78**(1): 105–118.
- Dvorkin, J. P. y Mavko, G. (2006). Modeling attenuation in reservoir and nonreservoir rock. *The Leading Edge*, **25**(2): 194–197.
- Emmerich, H. y Korn, M. (1987). Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields. *Geophysics*, **52**(9): 1252–1264.
- Fomel, S., Ying, L., y Song, X. (2013). Seismic wave extrapolation using lowrank symbol approximation. *Geophysical Prospecting*, **61**(3): 526–536.
- Fornberg, B. (1975). On a fourier method for the integration of hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **12**(4): 509–528.
- Fornberg, B. (1987). The pseudospectral method: Comparisons with finite differences for the elastic wave equation. *Geophysics*, **52**(4): 483–501.
- Fornberg, B. (1996). A practical guide to pseudospectral methods, volume 1 of cambridge monographs on applied and computational mathematics.
- Fornberg, B. y Sloan, D. M. (1994). A review of pseudospectral methods for solving partial differential equations. *Acta numerica*, **3**: 203–267.

- Furumura, T., Kennett, B., y Takenaka, H. (1998). Parallel 3-d pseudospectral simulation of seismic wave propagation. *Geophysics*, **63**(1): 279–288.
- Gazdag, J. (1981). Modeling of the acoustic wave equation with transform methods. *Geophysics*, **46**(6): 854–859.
- Ginter, S. (2000). Numerical simulation of ultrasound-thermotherapy combining non-linear wave propagation with broadband soft-tissue absorption. *Ultrasonics*, **37**(10): 693–696.
- Gottlieb, D. y Orszag, S. A. (1977). *Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications*. SIAM.
- Hanyga, A. (2002). Multi-dimensional solutions of space-time-fractional diffusion equations. En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, Vol. 458, pp. 429–450.
- Jackson, I. (2007). 2.17: properties of rocks and minerals? physical origins of anelasticity and attenuation in rock. *Treatise on geophysics*, pp. 493–525.
- Kelly, K. (1983). Numerical study of love wave propagation. *Geophysics*, **48**(7): 833–853.
- Kelly, K., Ward, R., Treitel, S., y Alford, R. (1976). Synthetic seismograms: A finite-difference approach. *Geophysics*, **41**(1): 2–27.
- Kelly, K., Ward, R., Treitel, S., y Alford, R. (1985). Synthetic seismograms: a finite-difference approach. *Geophysics*, **50**(11): 2132–2157.
- Kjartansson, E. (1979). Constant q-wave propagation and attenuation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **84**(B9): 4737–4748.
- Kosloff, D. D. y Baysal, E. (1982). Forward modeling by a fourier method. *Geophysics*, **47**(10): 1402–1412.
- Kristek, J. y Moczo, P. (2003). Seismic-wave propagation in viscoelastic media with material discontinuities: A 3d fourth-order staggered-grid finite-difference modeling. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **93**(5): 2273–2280.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference p-sv seismograms. *Geophysics*, **53**: 1425–1436.
- Liao, Q. y McMechan, G. A. (1996). Multifrequency viscoacoustic modeling and inversion. *Geophysics*, **61**(5): 1371–1378.
- Lighthill, M. J. (1956). Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. *Surveys in mechanics*, **250**.
- Liu, H.-P., Anderson, D. L., y Kanamori, H. (1976). Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophysical Journal International*, **47**(1): 41–58.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**(3): 639–666.

- Mainardi, F. y Tomirotti, M. (2010). Seismic pulse propagation with constant q and stable probability distributions. *arXiv preprint arXiv:1008.1341*.
- Martinez, R. D. (1993). Wave propagation effects on amplitude variation with offset measurements: A modeling study. *Geophysics*, **58**(4): 534–543.
- McDonal, F., Angona, F., Mills, R., Sengbush, R., Van Nostrand, R., y White, J. (1958). Attenuation of shear and compressional waves in pierre shale. *Geophysics*, **23**(3): 421–439.
- Moczo, P. y Kristek, J. (2005). On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation. *Geophysical Research Letters*, **32**(1).
- Moczo, P., Kristek, J., Vavryčuk, V., Archuleta, R. J., y Halada, L. (2002). 3d heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **92**(8): 3042–3066.
- Moczo, P., Kristek, J., Galis, M., Pazak, P., y Balazovjeh, M. (2007). The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion. *Acta physica slovacica*, **57**(2).
- Moczo, P., Kristek, J., y Gális, M. (2014). *The finite-difference modelling of earthquake motions: Waves and ruptures*. Cambridge University Press.
- O'connell, R. y Budiansky, B. (1978). Measures of dissipation in viscoelastic media. *Geophysical Research Letters*, **5**(1): 5–8.
- Orszag, S. A. (1972). Comparison of pseudospectral and spectral approximation. *Studies in Applied Mathematics*, **51**(3): 253–259.
- Özdenvar, T. y McMechan, G. A. (1996). Causes and reduction of numerical artefacts in pseudo-spectral wavefield extrapolation. *Geophysical Journal International*, **126**(3): 819–828.
- Reddy, J. N. (2007). *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge university press.
- Reshef, M., Kosloff, D., Edwards, M., y Hsiung, C. (1988). Three-dimensional acoustic modeling by the fourier method. *Geophysics*, **53**(9): 1175–1183.
- Sato, H., Fehler, M. C., y Maeda, T. (2012). *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*, Vol. 496. Springer.
- Stein, S. y Wysession, M. (2003). *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. Blackwell Publishing. p. 498.
- Štekl, I. y Pratt, R. G. (1998). Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators. *Geophysics*, **63**(5): 1779–1794.
- Sun, J., Zhu, T., y Fomel, S. (2015). Viscoacoustic modeling and imaging using low-rank approximation. *Geophysics*.
- Treeby, B. E. y Cox, B. (2010). Modeling power law absorption and dispersion for acoustic propagation using the fractional laplacian. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **127**(5): 2741–2748.

- Treeby, B. E. y Cox, B. (2014). Modeling power law absorption and dispersion in viscoelastic solids using a split-field and the fractional laplacian α . *The Journal of the Acoustical Society of America*, **136**(4): 1499–1510.
- Virieux, J. (1984). Sh-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, **51**: 1933–1957.
- Virieux, J. (1986). P-sv wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, **51**: 889–901.
- Wismer, M. G. y Ludwig, R. (1995). An explicit numerical time domain formulation to simulate pulsed pressure waves in viscous fluids exhibiting arbitrary frequency power law attenuation. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, **42**(6): 1040–1049.
- Yan, J.-p. y Wang, Y.-b. (2008). Modeling seismic wave propagation in heterogeneous medium using overlap domain pseudospectral method. *Acta Seismologica Sinica*, **21**(1): 46–57.
- Yao, J., Kouri, D., Zhu, T., y Hussain, F. (2016a). Solving fractional laplacian viscoacoustic wave equation using hermite distributed approximating functional method. En: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016*. Society of Exploration Geophysicists, pp. 3966–3971.
- Yao, J., Kouri, D., Zhu, T., y Hussain, F. (2016b). Solving fractional laplacian viscoacoustic wave equation using hermite distributed approximating functional method. En: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016*. Society of Exploration Geophysicists, pp. 3966–3971.
- Yilmaz, Ö. (2001). *Seismic data analysis*, Vol. 1. Society of exploration geophysicists Tulsa.
- Zhao, Z., Xu, J., y Horiuchi, S. (2001). Differentiation operation in the wave equation for the pseudospectral method with a staggered mesh. *Earth, planets and space*, **53**(5): 327–332.
- Zhu, T. y Harris, J. M. (2014). Modeling acoustic wave propagation in heterogeneous attenuating media using decoupled fractional laplacians. *Geophysics*, **79**(3): T105–T116.
- Zhu, T., Carcione, J. M., y Harris, J. M. (2013). Approximating constant-q seismic propagation in the time domain. *Geophysical Prospecting*, **61**(5): 931–940.

Anexos

Anexo A

Con la finalidad de mantener el capítulo (3) legible, en el presente apéndice se muestran los desarrollos matemáticos necesarios para una mejor comprensión del tema.

Ecuación de onda fraccionaria de Caputo

Despejando $\varepsilon(t)$ de (53) :

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= M_0 w_0^{-2\gamma} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \varepsilon(t) \\ \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \sigma(t) &= \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \varepsilon(t),\end{aligned}\tag{A.1}$$

Aplicando *Transformada de Fourier*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \sigma(w) &= (iw)^{2\gamma} \varepsilon(w) \\ \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \cdot (iw)^{-2\gamma} \sigma(w) &= \varepsilon(w)\end{aligned}\tag{A.2}$$

Aplicando *Transformada de Fourier inversa*

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \frac{\partial^{-2\gamma}}{\partial t^{-2\gamma}} \sigma(t).$$

Aplicando derivada temporal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(t) &= \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{-2\gamma}}{\partial t^{-2\gamma}} \sigma(t) \\
&= \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \cdot \frac{\partial^{-2\gamma+1}}{\partial t^{-2\gamma+1}} \sigma(t).
\end{aligned}
\tag{A.3}$$

Sustituyendo en la ecuación (65) :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \cdot \frac{\partial^{-2\gamma+1}}{\partial t^{-2\gamma+1}} \sigma(t)$$

Aplicando derivada temporal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) &= \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial^{-2\gamma+1}}{\partial t^{-2\gamma+1}} \sigma(t) \\
\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} &= \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \frac{\partial^{-2\gamma+2}}{\partial t^{-2\gamma+2}} \sigma(t),
\end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación (64) y sabiendo que ρ_0 es constante:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 \sigma(t) &= \frac{1}{M_0 w_0^{-2\gamma}} \frac{\partial^{2-2\gamma}}{\partial t^{2-2\gamma}} \sigma(t) \\
\frac{\partial^{2-2\gamma}}{\partial t^{2-2\gamma}} \sigma(t) &= \frac{M_0}{\rho_0} w_0^{-2\gamma} \nabla^2 \sigma(t),
\end{aligned}
\tag{A.4}$$

definiendo $c^2 = M_0/\rho_0$, como $M_0 = \rho_0 c_0^2 \cos^2(\pi\gamma/2)$ se puede reescribir (A.4) como:

$$\frac{\partial^{2-2\gamma}}{\partial t^{2-2\gamma}} \sigma(t) = c^2 w_0^{-2\gamma} \nabla^2 \sigma(t).
\tag{A.5}$$

Solución analítica

La ecuación (69) representa una ecuación diferencial lineal de segundo orden con respecto al tiempo que tiene una solución analítica (Arfken, 1999):

$$\tilde{\rho}(t) = e^{\alpha t} \{A \cos(\beta t) + B \operatorname{sen}(\beta t)\},
\tag{B.1}$$

donde A y B son coeficientes indeterminados y

$$\alpha = -\frac{1}{2}c_0^{2\gamma+1} w_0^{-2\gamma} \cos^2\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \text{sen}(\pi\gamma) k^{2\gamma+1}, \quad (\text{B.2})$$

$$\beta = \frac{1}{2}c_0^{\gamma+1} w_0^{-\gamma} \cos\left(\frac{\pi\gamma}{x}\right) \left\{4 \cos(\pi\gamma) - \cos^2\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \text{sen}^2(\pi\gamma)\right\}^{1/2} k^{\gamma+1}. \quad (\text{B.3})$$

Basándose en la ecuación B.1, se puede obtener un esquema analítico de marcha en el tiempo de tres pasos (Chen *et al.*, 2016):

$$\check{p}(k, t + \Delta t) = 2e^{\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t)\check{p}(k, t) - e^{2\alpha\Delta t} \check{p}(k, t - \Delta t), \quad (\text{B.4})$$

usando *Transformada de Fourier* para resolver B.4 se obtiene:

$$p(x, t + \Delta t) = 2\mathcal{F}^{-1}\{e^{\alpha\Delta t} \cos(\beta\Delta t)\mathcal{F}[p(x, t)]\} - \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[e^{2\alpha\Delta t} p(x, t - \Delta t)]\}. \quad (\text{B.5})$$