

TESIS DEFENDIDA POR

Enrique Dunn Rivera

Y aprobada por el siguiente comité:

Dr. Gustavo Olague Caballero

Director del Comité

Dr. Rafael Kelly Martínez

Miembro del Comité

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Miembro del Comité

Dr. José Luis Gordillo Moscoso

Miembro del Comité

Dr. Arturo Velázquez Ventura

*Coordinador del Programa de Posgrado en
Electrónica y Telecomunicaciones*

Dr. Raúl Ramón Castro Escamilla

*Director de Estudios
de Posgrado*

08 de Septiembre del 2006

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA



POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

**Técnicas Evolutivas Multiobjetivo para el Posicionamiento de
Cámaras de un Sistema de Metrología Basado en Visión**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR

Presenta:

Enrique Dunn Rivera

Ensenada, Baja California, México. Septiembre del 2006.

RESUMEN de la tesis de **Enrique Dunn Rivera**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California. Septiembre del 2006.

Técnicas Evolutivas Multiobjetivo para el Posicionamiento de Cámaras de un Sistema de Metrología Basado en Visión

Resumen aprobado por:

Dr. Gustavo Olague Caballero

Director de Tesis

La planificación óptima de adquisición de imágenes para un sistema de metrología basado en visión es un problema no resuelto dentro de las comunidades de fotogrametría y visión robótica. La dificultad de tal planeación radica en modelar e integrar los múltiples factores ópticos, geométricos, numéricos y operacionales que están involucrados en la ejecución de la tarea de medición tridimensional. Este trabajo de tesis doctoral investiga el desarrollo de sistemas de planeación que aborden explícitamente la relación entre la calidad de una medición fotogramétrica y el costo incurrido en llevarla a cabo. Proponemos estudiar la interacción entre distintos criterios de desempeño mediante el planteamiento del problema en términos de optimización multiobjetivo. La hipótesis fundamental que soporta este trabajo es la existencia de un conflicto entre los objetivos en consideración. En consecuencia, el proceso de planeación pasa de ser una búsqueda de una solución óptima o satisfactoria, a ser un estudio de las interacciones entre los distintos criterios de desempeño aplicables a la tarea de planeación. En este trabajo, la obtención de configuraciones de observación óptimas es abordada mediante el paradigma de cómputo evolutivo desarrollando dos propuestas originales. La primera propuesta adopta una especificación *a posteriori* de las preferencias entre los objetivos y desarrolla una nueva técnica evolutiva multiobjetivo. De esta forma, la interacción entre la calidad de la medición tridimensional, la eficiencia motriz y el costo computacional de la medición tridimensional, es estudiada en términos de una aproximación al conjunto Pareto de soluciones óptimas. La segunda propuesta adopta una especificación *a priori* de las preferencias entre los objetivos y plantea el proceso de optimización en términos de un proceso de coevolución poblacional. La motivación de incorporar un modelo de coevolución es la de abordar implícitamente la reducción del costo computacional de la búsqueda evolutiva para nuestro problema.

Palabras clave: Optimización Multiobjetivo, Reconstrucción 3D, Planeación de Sensores, Cómputo Evolutivo.

ABSTRACT of the thesis presented by **Enrique Dunn Rivera**, as a partial requirement to obtain the DOCTOR degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS. Ensenada, Baja California. September 2006.

Multi-objective Evolutionary Techniques for Camera Placement in a Vision Based Metrology System

Abstract approved by:

Dr. Gustavo Olague Caballero

Thesis director

The optimal planning of sensing actions for a vision based metrology system is an open problem within the photogrammetry and robot vision communities. The difficulty of such planning consists in modeling and integrating the multiple optical, geometric and operational factors involved in the execution of three-dimensional measurement tasks. This doctoral thesis work investigates the development of planning systems that explicitly address the relationship among the quality of a photogrammetric measurement and the cost incurred in the execution of such measurement. We propose to study the interaction among different performance criteria by means of stating the camera placement problem in multi-objective terms. This proposal is based on the fundamental hypothesis of conflict between the objectives under consideration. Accordingly, the process of planning is transformed, from being a search for an optimal or satisfactory solution, into a study of the interactions among the distinct performance criteria applicable to the planning task. In this work, the attainment of optimal viewing configurations is approached through the evolutionary computation paradigm. The first proposal presented adopts *a posteriori* specification of preferences among objectives and develops a novel multi-objective evolutionary technique. In this way, the compromises between three dimensional measurement precision, motion efficiency and computational cost are studied in terms of an approximation to the Pareto set of optimal solutions. The second proposal adopts *a priori* specification of the preference among objectives and states the optimization problem in terms of a co-evolutionary process. The motivation for incorporating a co-evolutionary model is to implicitly address the reduction of the computational cost associated with the evolutionary search process for our problem.

Keywords: Multiobjective Optimization, 3D Reconstruction, Sensor Planning, Evolutionary Computing.

Dedicado a mi esposa e hija

Agradecimientos

A mi familia.

Al Dr. Gustavo Olague, por su amistad y colaboración.

A los miembros del Comité de Tesis, por su interés y aportaciones a este trabajo.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por darme las facilidades para estudiar en esta institución.

A mis compañeros del laboratorio *Evovisión*.

Ensenada, México
08 de Septiembre del 2006.

Enrique Dunn Rivera

Tabla de Contenido

Capítulo	Página
Resumen	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tablas	xiii
I Introducción	1
I.1 Planificación de Tareas Fotogramétricas	1
I.2 Una Estrategia Optima de Adquisición de Imágenes	3
I.3 Optimización Multiobjetivo	6
I.4 Objetivos de la Investigación	8
I.5 Solución Propuesta	8
I.6 Contribuciones	10
I.7 Organización del Documento	11
II Medición Tridimensional a Partir de Fotografías	13
II.1 Medición Tridimensional a Partir de Imágenes	14
II.2 Fotogrametría y Visión por Computadora	17
II.3 La Importancia de la Planificación en el Proceso de Medición	20
II.4 Sistemas de Selección de Puntos de Observación	23
II.4.1 Sistemas Basados en Información Geométrica	25
II.4.2 Sistemas Basados en la Inferencia de la Escena	30
II.5 El Método de Compensación Por Haces	31
II.5.1 Ecuaciones de Colinealidad	33
II.5.2 Ecuaciones de Control de Campo	36
II.5.3 Parámetros de Orientación Exterior	38
II.5.4 Formulación del Modelo Matemático	39
II.5.5 Estructura de la Matriz de Peso	43
II.5.6 Criterios de Convergencia	48
II.6 Análisis Basado en Fenómeno de Propagación del Error	50
II.6.1 El Modelo de Cámara Oscura	50
II.6.2 Ecuaciones de Colinealidad	55
II.6.3 Estimación del Error Tridimensional	58
II.6.4 Estimación del Error en la Imagen	61
II.6.5 Criterio de Incertidumbre Tridimensional	65
II.6.6 Visualización de la Incertidumbre	66
II.7 Integración de un Sistema Experimental	67
II.7.1 Experimentación	69
II.8 Discusión	73
III Optimización Multiobjetivo	77

Tabla de Contenido (Continuación)

Capítulo	Página
III.1 Antecedentes	77
III.2 Problemas de Optimización Multiobjetivo	78
III.3 Técnicas Clásicas de Optimización Multiobjetivo	82
III.4 Técnicas Evolutivas de Optimización MultiObjetivo	92
III.5 Discusión	95
IV Una nueva Técnica Evolutiva de Optimización Multiobjetivo	96
IV.1 Intersección Normal de Frontera.	97
IV.1.1 Interpretación Geométrica	97
IV.1.2 El Problema de Optimización	99
IV.1.3 Características de las Soluciones	101
IV.2 Acoplamiento de NBI con Técnicas Evolutivas	103
IV.2.1 Determinación de los Parámetros NBI	106
IV.2.2 Subconjuntos de Exploración	110
IV.3 Asignación de Rango NBI	113
IV.3.1 Asignación de Rango por Relaciones de Dominancia	114
IV.3.2 Asignación de Rango por Subconjuntos de Exploración	116
IV.4 Integración con un Algoritmo Evolutivo	118
IV.4.1 Operador de Selección	119
IV.4.2 Partición del Espacio de Funciones	120
IV.4.3 Elitismo Generacional	120
IV.5 Resultados Experimentales	121
IV.6 Costo computacional	129
IV.7 Discusión	130
V Un Enfoque Multiobjetivo al Posicionamiento de Cámaras	132
V.1 Los Criterios a Optimizar	132
V.1.1 Mediciones Tridimensionales Precisas	133
V.1.2 Eficiencia en el Movimiento	134
V.2 Adaptación de Técnicas Evolutivas	136
V.2.1 Representación de las Variables del Problema	136
V.2.2 Manejo de Restricciones	139
V.2.3 Operadores Genéticos	140
V.3 Experimentación	142
V.3.1 Observación de un plano tridimensional	142
V.3.2 Observación de dos planos	144
V.3.3 Observación de un objeto tridimensional	149
V.3.4 Redes de Tamaño Variable	157
V.3.5 El frente Pareto Completo	160
V.3.6 Medición Tridimensional	161

Tabla de Contenido (Continuación)

Capítulo	Página
V.4 Discusión	165
VI Un Nuevo Enfoque Coevolutivo al Posicionamiento de Cámaras	167
VI.1 Introducción	167
VI.2 Combinación Lineal de Criterios	168
VI.3 Evolución Individual: <i>Divide y Vencerás</i> Evolutivo	169
VI.4 Diseño de Redes Fotogramétricas Basado en Evolución Individual . . .	173
VI.4.1 Descomposición y Representación del Problema	174
VI.4.2 Evaluación de Aptitud Local	175
VI.4.3 Evaluación de Aptitud Global	176
VI.4.4 Redistribución de la Aptitud Global	178
VI.4.5 Preservación de la Diversidad en la Población	179
VI.4.6 Agregación de Individuos	180
VI.5 Resultados Experimentales	182
VI.5.1 Desempeño del Algoritmo	182
VI.5.2 Geometría de las Configuraciones de Sensado	184
VI.5.3 Determinación de Parámetros	185
VI.6 Discusión	188
VII Discusión y Perspectivas	189
VII.1 Aportaciones de la Investigación	189
VII.2 Alcances y Limitaciones	191
VII.3 Trabajo Futuro	192

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Un sistema de inspección automatizada. Un robot manipulador en una configuración Cámara-Mano tiene la meta de medir el objeto colocado sobre la mesa.	2
2	Diferentes Estrategias de Adquisición de Imágenes. Izquierda: Marcas de interés son colocadas en un objeto tridimensional. Centro: Dos diferentes configuraciones de observación. Derecha: Elipsoides de incertidumbre de la reconstrucción de los puntos de interés.	3
3	Imagen de una escena.	14
4	Proyección de un punto a lo largo de su línea de visión.	15
5	Reconstrucción de un punto tridimensional mediante triangulación. . .	16
6	Discrepancia conceptual entre visión por computadora y fotogrametría.	19
7	Modelo de cámara cámara oscura	51
8	Parámetros intrínsecos de una cámara.	54
9	Incertidumbre en la imagen en función del ángulo de incidencia	64
10	Patrón de calibración utilizado en los experimentos.	69
11	Las primeras dos imágenes de la secuencia fueron utilizadas para calcular los errores de incertidumbre.	71
12	La segunda y quinta imágenes de la secuencia fueron utilizadas para calcular los errores de incertidumbre.	71
13	La primera, cuarta y sexta imágenes de la secuencia fueron utilizadas para calcular los errores de incertidumbre. Note que algunos de los elipsoides de error son más grandes debido al problema de visibilidad . . .	72
14	Experimentos realizados con la infraestructura robótica. Cuatro imágenes fueron obtenidas por una configuración con convergencia débil.	73
15	La infraestructura robótica fue utilizada para probar una configuración de cuatro cámaras mejorada. Debido a problemas de auto-oclusión, algunos de los puntos de interés en el objeto no fueron muestreados apropiadamente.	74
16	Una configuración de 29 cámaras con una convergencia fuerte. Tal configuración permite obtener elipsoides de incertidumbre homogéneos y aproximadamente isotrópicos para todos los puntos de interés.	75
17	Relación entre el espacio de variables de decisión y el espacio de funciones objetivo. Una solución $\mathbf{x}$ es mapeada mediante una función vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, hacia el espacio de funciones. Los puntos resaltados en la frontera de Υ son elementos del Frente Pareto.	81

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
18 Ejemplo de un espacio de funciones criterio para un problema de dos objetivos. El espacio de criterios está definido sobre un plano y presenta un frente Pareto discontinuo.	84
19 Ejemplos de la Agregación Aditiva de Criterios. Una función lineal es aplicada a cada elemento del espacio bidimensional de funciones criterio.	86
20 Ejemplos de la Combinación No Lineal de Criterios. Una función no lineal es aplicada a cada elemento del espacio bidimensional de funciones criterio.	88
21 Ejemplos de la Combinación No Lineal de Criterios. Una función no lineal es aplicada a cada elemento del espacio bidimensional de funciones criterio.	89
22 Ejemplo del método de Restricción- ϵ . La cota máxima aplicada a uno de los criterios elimina parte del espacio de búsqueda. En el nuevo espacio de búsqueda se optimiza únicamente el criterio complementario.	89
23 Elementos geométricos involucrados en el método NBI.	100
24 Aplicación del método NBI en problema no convexos. Izquierda: El caso de un frente Pareto continuo no convexo que puede ser completamente explorado por el método NBI. Derecha: El caso de un frente Pareto discontinuo que también puede ser explorado completamente, sin embargo algunas de las soluciones encontradas no son óptimos globales.	102
25 Dependencia del método NBI sobre la estimación inicial de los mínimos individuales. El escenario muestra que aun cuando tales estimaciones no corresponden a los mínimos globales es posible explorar el frente Pareto global.	103
26 Parametrización de soluciones en el espacio de funciones. A cada solución corresponde un vector de coordenadas baricéntricas β_i y un valor de desplazamiento t_i . Estos parámetros pueden calcularse a partir del conocimiento del CCMI.	106
27 Descripción de los vectores base que definen el subespacio correspondiente al CCMI. Para el caso de tres dimensiones el CCMI es un triángulo definiendo un subespacio en dos dimensiones.	109
28 Subconjunto de Exploración. El método NBI plantea un proceso de búsqueda en el espacio de funciones a lo largo de una línea recta definida por un vector $\mathbf{n}$ y un punto dado por los parámetros β y Φ	111
29 Subconjuntos Expandidos de Exploración. Mediante la consideración de un conjunto $\mathcal{C}_{\beta_j}$ de múltiples vectores β_j , es posible definir un proceso de búsqueda a lo largo de un “volumen” contenido en el espacio de funciones	113

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
30	Diferentes mecanismos de asignación de rango en base a relaciones de dominancia. Izquierda: Segregación en frentes Pareto locales. Derecha: Rango proporcional al número de veces que una solución es dominada por el resto de la población.	115
31	Asignación de Rango eNBI. El espacio de funciones es dividido en múltiples subconjuntos expandidos de exploración $\mathcal{A}_j$. El rango poblacional de cada solución corresponde a su rango dentro de $\mathcal{A}_j$	117
32	Resultados Experimentales para el Problema ZDT1.	123
33	Resultados Experimentales para el Problema ZDT2.	124
34	Resultados Experimentales para el Problema ZDT3.	125
35	Resultados Experimentales para el Problema ZDT4.	126
36	Resultados Experimentales para el Problema ZDT6	127
37	Resultados Experimentales para el Problema TNK.	129
38	Representación genética utilizada. Se muestra una representación que permite hasta cinco cámaras. Solo cuatro de estas cámaras son decodificadas para formar una red fotogramétrica. A partir de este conjunto de puntos de observación se determina una ruta a seguir por el manipulador.	138
39	Resultados obtenidos para dos cámaras observando un plano.	145
40	Resultados obtenidos para tres cámaras observando un plano.	146
41	Resultados obtenidos para cuatro cámaras observando un plano.	147
42	Resultados obtenidos para cinco cámaras observando un plano.	148
43	Resultados obtenidos para dos cámaras observando dos planos.	150
44	Resultados obtenidos para tres cámaras observando dos planos.	151
45	Resultados obtenidos para cuatro cámaras observando dos planos.	152
46	Resultados obtenidos para cinco cámaras observando dos planos.	153
47	Resultados obtenidos para seis cámaras observando dos planos.	154
48	Ejemplos de un frente Pareto para el caso de una red de ocho cámaras.	155
49	Ejemplos de un frente Pareto obtenido mediante eNBI para el caso de una red de ocho cámaras.	156
50	Diferentes frentes Pareto obtenidos mediante NSGA-2 para redes fotogramétricas de tamaño fijo.	157
51	Diferentes frentes Pareto obtenidos mediante eNBI para redes fotogramétricas de tamaño fijo.	158
52	Frente Pareto obtenido por eNBI para redes fotogramétricas de tamaño variable.	159
53	Frente Pareto obtenido por NSGA2 para redes fotogramétricas de tamaño variable.	160

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
54	El frente Pareto completo mediante NSGA-2. Las vistas ortogonales muestran los diferentes balances entre los criterios.	162
55	El frente Pareto completo obtenido mediante eNBI. Las vistas ortogonales muestran los diferentes balances entre los criterios.	163
56	Experimentación para un objeto real. Diferentes configuraciones diseñadas por nuestro sistema fueron llevadas a la práctica. Arriba: El sistema de inspección utilizado. Centro: Imágenes adquiridas para dos configuraciones de cuatro cámaras. Abajo: Resultados de la reconstrucción utilizando un proceso fotogramétrico de compensación por haces.	164
57	Descripción algorítmica del enfoque de evolución individual. El proceso de evaluación de aptitud es modificado para considerar la contribución local y global de un individuo.	170
58	Descripción conceptual del enfoque de evolución individual. La interacción entre los distintos espacios de búsqueda se basa en ajustar los valores de aptitud de la población en función de la evaluación de aptitud global.	174
59	Objeto tridimensional bajo observación. El objeto cóncavo es particionado en regiones excluyentes para facilitar la evaluación de subredes de tamaño reducido. Una red fotogramétrica formada por 9 cámaras es mostrada a la derecha.	183
60	Comparación contra una técnica evolutiva canónica. En la izquierda, la evolución de la población de un algoritmo evolutivo canónico. A la derecha, valores de aptitud más altos son constantemente obtenidos por la metodología propuesta. Los valores ilustrados reflejan el promedio de 20 ejecuciones con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$	184
61	Diferentes geometrías de sensado obtenidas por nuestra metodología. La pertenencia a una subred se ilustra mediante el uso de colores en cada cámara.	185
62	Dependencia sobre los parámetros λ_1, λ_2 . La gráfica de la izquierda corresponde a una ejecución con los valores $[\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.2]$ y muestra un desempeño ligeramente deteriorado. La gráfica de la derecha representa una ejecución con valores $[\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.5]$, la cual ofrece un comportamiento casi aleatorio.	185
63	Configuraciones de 12 cámaras obtenidas con mediante distintos niveles de granularidad.	187

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Preguntas relacionadas con estrategias de adquisición de imágenes. .	5
II	Restricciones sobre puntos de observación	24
III	Parámetros intrínsecos de una cámara.	54
IV	Comparación de tiempos de ejecución.	130
V	Resultados después de 20 ejecuciones del algoritmo para distintos niveles de granularidad.	188

Capítulo I

Introducción

I.1 Planificación de Tareas Fotogramétricas

La medición precisa de objetos tridimensionales a partir de imágenes fotográficas es una problemática abordada en distintas disciplinas como la fotogrametría, la visión por computadora y la visión robótica (McGlone, 2004; Tarabanis *et al.*, 1995; Newman & Jain, 1995). La convergencia entre estas disciplinas, ha permitido el desarrollo de sistemas de inspección visual capaces de *ejecutar* dicha tarea de medición con un alto nivel de automatización (Atkinson, 1996). Sin embargo, la automatización de la *planeación* del proceso de medición sigue siendo un problema no resuelto, de relevancia tanto teórica como práctica (Mason, 1997; Saadatseresht *et al.*, 2004).

La planificación de tareas de percepción artificial (i.e. medición, reconstrucción, reconocimiento, localización) consiste en diseñar una estrategia de adquisición de imágenes la cual cumpla, de la manera más económica, con los niveles de desempeño impuestos a la tarea considerada (Olague, 2003). Al hablar de una estrategia de adquisición de imágenes nos referimos a la determinación de la geometría de observación junto con la especificación de la manera en que la adquisición de imágenes será llevada a cabo. La dificultad de tal planeación radica en modelar e integrar los múltiples factores ópticos, geométricos, numéricos y operacionales que están involucrados en la ejecución de la tarea. Este trabajo de tesis doctoral hace énfasis en el mecanismo de integración de estos distintos aspectos dentro de la determinación de una estrategia de adquisición de imágenes satisfactoria.



Figura 1: Un sistema de inspección automatizada. Un robot manipulador en una configuración Cámara-Mano tiene la meta de medir el objeto colocado sobre la mesa.

El proceso de medición fotogramétrica de rango corto estriba en estimar las coordenadas espaciales de un conjunto de puntos de interés en una escena a través de un proceso de triangulación óptica. La selección apropiada de puntos de observación juega un papel predominante en la calidad de las mediciones obtenidas (Fraser, 1984). En el contexto de la fotogrametría, los aspectos de precisión y confiabilidad de las mediciones son los criterios que determinan la calidad de una medición. El escenario considerado en este trabajo es el de un robot manipulador en una configuración “Cámara-Mano”, con el propósito de medir puntos de interés colocados sobre la superficie de un objeto tridimensional estático cuya localización y geometría son conocidos. En tal escenario, la ejecución de cada adquisición de imagen requiere que el sensor sea posicionado en torno al objeto mediante el uso del manipulador. De esta forma, la especificación de una estrategia de adquisición de imágenes requiere determinar la mejor secuencia posible de

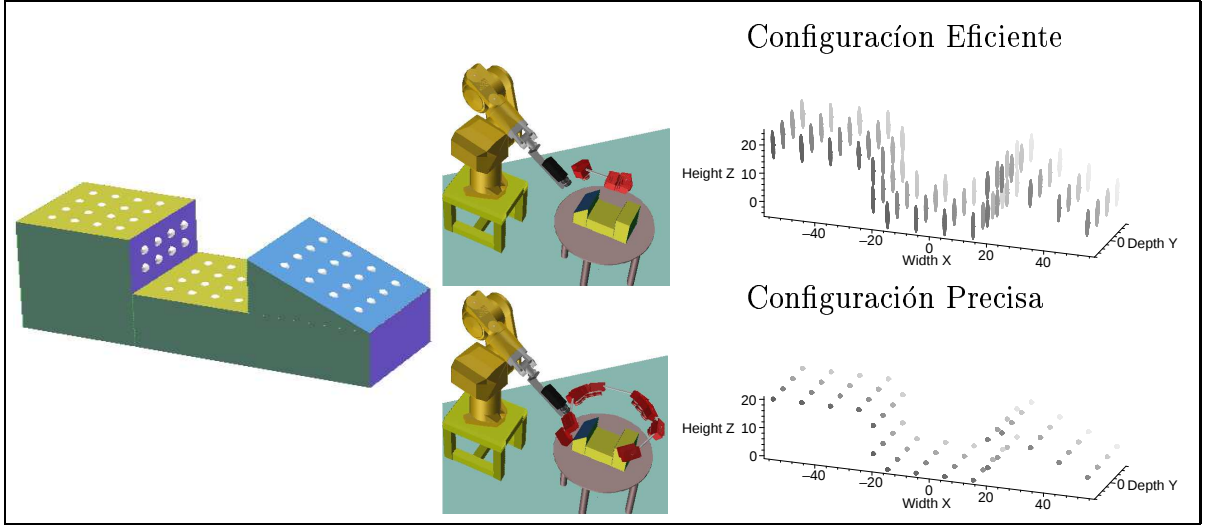


Figura 2: Diferentes Estrategias de Adquisición de Imágenes. Izquierda: Marcas de interés son colocadas en un objeto tridimensional. Centro: Dos diferentes configuraciones de observación. Derecha: Elipsoides de incertidumbre de la reconstrucción de los puntos de interés.

desplazamientos del sensor que permitan llevar a cabo la tarea de medición.

I.2 Una Estrategia Optima de Adquisición de Imágenes

La meta de la planificación de una tarea fotogramétrica es la de obtener una medición tridimensional de alta precisión y confiabilidad (Olague, 2002). Sin embargo, la integración de mecanismos automatizados de adquisición de imágenes conduce a considerar criterios operacionales dentro del proceso de planificación. Tales criterios corresponden a las distintas maneras en que puede ser evaluado el uso de la infraestructura de adquisición de imágenes. Por ejemplo, la calidad de una medición fotogramétrica se evalúa en términos del error estadístico de un método riguroso de *compensación de haces*, mientras que la eficiencia motriz de la ejecución de la adquisición de imágenes puede medirse en términos del desplazamiento requerido por el manipulador. Asimismo,

dependiendo del entorno en el cual se desarrolle la tarea de medición, pueden considerarse factores como el tiempo requerido para el movimiento, el tiempo requerido para el cómputo, el esfuerzo requerido por el manipulador, el riesgo de colisión del manipulador con su entorno, entre otros. La importancia relativa de tales criterios de desempeño depende en gran parte del escenario en consideración, pudiendo considerarse todos en su conjunto, o bien, descartar algún subconjunto de ellos. La selección y jerarquización de los criterios a considerar son aspectos primordiales en el diseño de una estrategia de adquisición de imágenes. De esta forma, la existencia de múltiples criterios ofrece el problema de caracterizar apropiadamente el nivel de desempeño del sistema de medición. La Figura ?? describe un escenario donde un conjunto de puntos de interés son colocados sobre la superficie de un objeto tridimensional. La determinación de un conjunto de puntos de observación especifica una serie de adquisición de imágenes dirigida a la medición tridimensional de tales puntos de interés. Una configuración válida es aquella que permite la medición tridimensional de todos los puntos de interés considerados. Tal escenario sirve para ilustrar los conflictos entre los criterios de precisión y eficiencia motriz.

La Figura ?? muestra la distribución geométrica de dos posibles configuraciones de observación con el correspondiente resultado del proceso de estimación de incertidumbre tridimensional. Estas dos configuraciones son ejemplos opuestos, en los que una de ellas optimiza la precisión de las mediciones realizadas, mientras que la otra optimiza el desplazamiento realizado por el manipulador en la ejecución de la tarea. Las características de una buena geometría de observación (i.e. convergencia, redundancia y ángulos de incidencia) son bien conocidas dentro del contexto de la fotogrametría (Olague, 2002). Sin embargo, aquí serán utilizadas para ejemplificar el conflicto entre los objetivos de eficiencia y precisión. La configuración eficiente minimiza el desplazamiento del manipulador y ofrece un bajo nivel de precisión en la medición. Por otro lado,

la configuración precisa obtiene resultados satisfactorios en términos de incertidumbre tridimensional mediante una geometría de observación convergente con una mayor separación. En la práctica estos ejemplos corresponden a instancias donde cada estrategia de adquisición de imágenes está influenciada solamente por un factor de desempeño, el cual tiene una preferencia total sobre el otro. Distintas soluciones intermedias entre estas dos estrategias opuestas corresponden a diferentes niveles de preferencias entre los factores de desempeño. Este trabajo estudia diferentes mecanismos mediante los cuales estas soluciones intermedias pueden ser obtenidas.

A partir de tales premisas surgen las siguientes interrogantes referentes a la naturaleza del proceso de planificación de tareas fotogramétricas:

Tabla I: *Preguntas iniciales relacionadas a la planificación de estrategias de adquisición de imágenes.*

-
1. ¿Cuáles son y cómo es posible evaluar los objetivos de la planificación ?
 2. ¿Cómo caracterizar las interacciones entre tales objetivos?
 - 2.a ¿Están en conflicto?
 - 2.b ¿Existen dependencias?
 3. ¿Cómo es posible plantear el problema de planificación?
 4. ¿Que método computacional es apropiado para abordar el problema?
-

Este trabajo busca responder las interrogantes presentadas en la Tabla ?? mediante el desarrollo de un marco genérico para el estudio de las interacciones entre los distintos criterios aplicables al proceso de medición automatizada. Particularmente, se propone estudiar tales interacciones a través del paradigma de optimización multiobjetivo.

I.3 Optimización Multiobjetivo

Los problemas de optimización del mundo real comúnmente involucran múltiples criterios a considerar para la determinación de una solución. En el paradigma de optimización multiobjetivo, la meta es encontrar soluciones que optimicen de manera concurrente los distintos criterios de evaluación definidos para un problema (Ehrgott, 2002). Cuando estos criterios están en conflicto, no es posible encontrar una solución única que corresponda al óptimo de cada uno de los criterios. En consecuencia, la solución a un problema multiobjetivo consiste en encontrar un conjunto de soluciones equivalentes, las cuales corresponden a los distintos balances entre los criterios a optimizar. Este conjunto de soluciones es conocido como el conjunto de soluciones óptimas Pareto y describe explícitamente la interacción entre los objetivos considerados.

Es posible considerar la optimización multiobjetivo como una generalización de las técnicas de optimización de un solo objetivo. Sin embargo, además de la diferencia en la cardinalidad del conjunto de soluciones óptimas, existen diferencias substanciales entre tales problemas de optimización. Particularmente, la solución de un problema multiobjetivo involucra dos aspectos complementarios: la especificación de preferencias y la búsqueda de soluciones satisfactorias. La manera en que estos aspectos sean incorporados al proceso de obtención de una solución, determina las características de la metodología utilizada para resolver el problema (Deb, 2001).

Especificación de Preferencias *A Priori*

El enfoque comúnmente utilizado consiste en especificar previamente las preferencias entre los objetivos mediante la formulación de una función criterio la cual relaciona matemáticamente los múltiples criterios considerados. Esta función criterio es subsecuentemente optimizada y la solución correspondiente al valor extremo de dicha función es la solución óptima para nuestro problema. Tal enfoque permite la utilización de

técnicas mono-objetivo en su solución, pero en realidad ofrece una simplificación del problema la cual esconde la dificultad de manejar e interpretar las interacciones entre los criterios.

La principal desventaja de tal enfoque es el sesgo incorporado al proceso de búsqueda debido a las características de la función criterio seleccionada. En términos generales, es difícil determinar un mecanismo para combinar múltiples criterios (definidos posiblemente sobre distintas unidades y escalas), el cual incorpore de manera explícita las distintas preferencias entre los objetivos. Esta dificultad es amplificada debido a que en la práctica tales preferencias son comúnmente dependientes de factores externos no incluidos en los criterios que definen el problema multiobjetivo. Adicionalmente, es posible que para ciertos problemas multiobjetivo, la descripción matemática de la función criterio adoptada reduzca el conjunto de soluciones alcanzables mediante un proceso de optimización.

Especificación de Preferencias *A Posteriori*

Un enfoque más general en la solución de problemas multiobjetivo consiste en buscar aquellas soluciones que describen explícitamente la interacción entre los criterios y entonces determinar las preferencias entre los objetivos a partir del conocimiento de estas soluciones. De esta forma, las preferencias son determinadas implícitamente por un agente externo al proceso de búsqueda. En la práctica tal agente externo es generalmente un usuario el cual se confronta con una aproximación al conjunto de soluciones óptimas Pareto, a partir de las cuales lleva a cabo un proceso de selección basado en sus preferencias individuales.

Es importante enfatizar el carácter individual de tales preferencias, dado que las soluciones óptimas obtenidas son equivalentes en términos de los criterios estudiados. Invariablemente, la especificación de estas preferencias es una tarea subjetiva. La ventaja de hacerlo bajo dicho enfoque es que las preferencias son determinadas a partir

del conocimiento de un conjunto de soluciones alternativas. La principal desventaja de tal enfoque consiste en la dificultad de desarrollar un método computacional capaz de obtener una aproximación al conjunto de soluciones óptimas Pareto.

I.4 Objetivos de la Investigación

Este trabajo de tesis doctoral investiga el desarrollo de sistemas de planeación que aborden explícitamente la relación entre la calidad de una medición fotogramétrica y el costo incurrido en llevarla a cabo. De esta forma, el proceso de planeación pasa de ser una búsqueda de una solución óptima o satisfactoria, a ser un estudio de las interacciones entre los distintos criterios de desempeño aplicables a la tarea de planeación.

Los objetivos generales de este trabajo son:

1. Plantear el problema de posicionamiento de cámaras en términos de optimización multiobjetivo y desarrollar metodologías capaces de resolverlo.
2. Estudiar las interacciones entre los distintos criterios de desempeño involucrados en la operación de un sistema de inspección visual automatizada.
3. Desarrollar un sistema funcional de inspección automatizada aplicando técnicas fotogramétricas en el proceso de reconstrucción tridimensional.

I.5 Solución Propuesta

En este trabajo la caracterización del desempeño de nuestro sistema de inspección automatizada se realiza en términos de los siguientes objetivos:

- *Minimizar la Incertidumbre de la Medición Tridimensional.* La triangulación óptica mediante un ajuste de mínimos cuadrados permite la estimación de la incertidumbre tridimensional mediante el análisis de la información de covarianza.

Tal análisis de incertidumbre es bien conocido y se utiliza en este trabajo dentro de un proceso fotogramétrico de compensación por haces, así como en un proceso de estimación de incertidumbre basado en el análisis propuesto por Olague y Mohr (2002).

- *Minimizar el Movimiento Requerido.* La ejecución de la adquisición de imágenes correspondiente a una configuración de múltiples cámaras, requerirá un costo operacional relacionado con el movimiento del manipulador.
- *Minimizar el Número de Imágenes.* El proceso de medición basado en ajustes fotogramétricos de alta precisión es computacionalmente demandante, esto puede restringir su aplicabilidad en sistemas de operación *en línea*.

La hipótesis fundamental que soporta este trabajo es la existencia de un conflicto entre los objetivos en consideración. A partir de esta hipótesis se propone estudiar la interacción entre estos distintos criterios de desempeño mediante el planteamiento del problema en términos de optimización multiobjetivo, mientras que la búsqueda de soluciones óptimas es abordada mediante el paradigma de cómputo evolutivo. Dentro de este contexto se desarrollan dos distintas metodologías para resolver el problema de optimización:

- La primera propuesta adopta una especificación *a posteriori* de las preferencias entre los objetivos y desarrolla una nueva técnica evolutiva multiobjetivo. De esta forma, los balances entre la calidad de la medición tridimensional, la eficiencia motriz y el costo computacional de la medición tridimensional, son estudiados a través de una aproximación al frente Pareto.
- La segunda propuesta adopta una especificación *a priori* de las preferencias entre los objetivos y plantea el proceso de optimización en términos de un proceso

de coevolución poblacional. Mediante la combinación de múltiples criterios en una sola función de utilidad es posible aplicar directamente técnicas estándar cómputo evolutivo en la búsqueda de una única solución óptima. La motivación de incorporar un modelo de coevolución es la de abordar implícitamente la reducción del costo computacional de la búsqueda evolutiva.

I.6 Contribuciones

Las aportaciones de este trabajo pueden considerarse en cuatro ámbitos distintos:

- Se brinda una nueva conceptualización del problema de planificación de tareas fotogramétricas en términos de la optimización multiobjetivo. Trabajos previos en el diseño de estrategias de adquisición de imágenes abordan el problema de considerar múltiples criterios mediante el uso de una combinación lineal de criterios. Al plantear el problema en términos de optimización multiobjetivo, se propone un marco genérico para el estudio de las interacciones entre los distintos objetivos involucrados en la especificación de una estrategia de adquisición de imágenes.
- Se propone una nueva metodología de optimización basada en el concepto de coevolución. Dicha propuesta estudia el desarrollo de mecanismos de optimización evolutiva que hagan uso eficiente de las propiedades de búsqueda estocástica y concurrente. La idea central consiste en obtener la solución a un problema de optimización a partir de la evolución de sus componentes. Cada componente representa una solución parcial al problema original y es mediante un proceso de coevolución que tales soluciones parciales son modificadas y finalmente agregadas para formar una solución total al problema. La principal ventaja de tal enfoque radica en la reducción en términos de costo computacional en comparación con un método canónico de optimización evolutiva.

- Se propone una nueva metodología de optimización multiobjetivo la cual incorpora el concepto de búsqueda dirigida mediante una parametrización especial del espacio de criterios. Esta parametrización es utilizada junto con los conceptos de elitismo y asignación de rango poblacional para converger de manera uniformemente distribuida hacia el conjunto de soluciones óptimas Pareto.
- Se integra un sistema experimental de medición tridimensional mediante la combinación de técnicas fotogramétricas y técnicas de visión por computadora. El sistema utiliza una infraestructura robótica consistente de un robot manipulador en una configuración Cámara-Mano y realiza un ajuste fotogramétrico riguroso basado en un método de compensación por haces (Brown, 1958).

I.7 Organización del Documento

El segundo capítulo aborda la descripción de los criterios utilizados para la tarea de medición tridimensional a partir de un enfoque fotogramétrico. En dicho capítulo se presenta inicialmente una discusión sobre el papel de la planificación dentro de los campos de la fotogrametría y la visión por computadora. Asimismo, se presentan los modelos de reconstrucción tridimensional utilizados en este trabajo. En particular, se describe el modelo utilizado dentro del método fotogramétrico de compensación por haces, así como el modelo propuesto en el trabajo de Olague y Mohr (2002) para la estimación de la incertidumbre tridimensional.

El tercer capítulo introduce antecedentes y conceptos preliminares del área de optimización multiobjetivo. La discusión trata sobre definiciones básicas y presenta algunas de las técnicas utilizadas para la solución de problemas multiobjetivo. Los conceptos aquí presentados son utilizados en el siguiente capítulo para desarrollar una nueva técnica evolutiva de optimización multiobjetivo.

El cuarto capítulo describe una técnica evolutiva multiobjetivo la cual integra conceptos de búsqueda evolutiva con los conceptos de búsqueda direccionada encontrados en el área de programación matemática. La descripción de la nueva técnica es complementada con una serie de experimentos preliminares que muestran su efectividad al comparar resultados con técnicas del estado del arte de la optimización evolutiva multiobjetivo.

El quinto capítulo presenta la aplicación de técnicas multiobjetivo a la solución del problema de posicionamiento de cámaras para tareas fotogramétricas. Inicialmente se describen los criterios a optimizar y las consideraciones involucradas en la adaptación de técnicas evolutivas a nuestro problema. A partir de estas premisas se presentan una serie de experimentos para diferentes escenarios de planificación. Los resultados obtenidos ejemplifican la utilidad de la técnica desarrollada en el capítulo anterior.

El sexto capítulo desarrolla una técnica coevolutiva para la solución del problema de posicionamiento de cámaras. La descripción de esta nueva técnica involucra la integración de conceptos bien conocidos dentro del contexto de los algoritmos genéticos, junto con nuevos mecanismos evolutivos desarrollados especialmente para hacer un uso eficiente del proceso de búsqueda evolutiva. Los resultados experimentales presentados muestran que tal técnica permite obtener soluciones óptimas utilizando solamente una fracción del costo computacional requerido por una técnica evolutiva canónica.

El séptimo y último capítulo presenta las conclusiones del trabajo de tesis, junto con una discusión de sus posibles extensiones y trabajo futuro.

Capítulo II

Medición Tridimensional a Partir de Fotografías

La reconstrucción tridimensional se entiende como la obtención de un modelo de la escena en observación. En el caso más sencillo el modelo puede ser un conjunto de puntos. Modelos más sofisticados pueden producir un modelo de la superficie tridimensional. La tarea de visión abordada en este trabajo es la medición de alta precisión de un objeto tridimensional a partir de imágenes digitales. El objetivo de la medición es obtener las coordenadas espaciales de un conjunto de puntos de interés colocados sobre la superficie del objeto en observación. Tales coordenadas espaciales son obtenidas a partir de un proceso de triangulación óptica a partir de observaciones redundantes. La estimación de la precisión de una medición consiste en obtener una caracterización de la incertidumbre de nuestros resultados. Diferentes modelos de incertidumbre pueden ser aplicados al proceso de medición. La elección de un modelo depende de los requerimientos cualitativos y computacionales de la tarea de medición. En este capítulo se presentan dos distintos modelos: uno correspondiente al área de fotogrametría (Brown, 1958) y otro perteneciente a la visión por computadora (Olague & Mohr, 2002). El primer modelo corresponde a un método riguroso de medición utilizado para llevar a cabo las mediciones en un entorno experimental. El segundo modelo ofrece una aproximación computacionalmente eficiente la cual es útil para llevar cabo un proceso de diseño de redes fotogramétricas basado en la simulación.

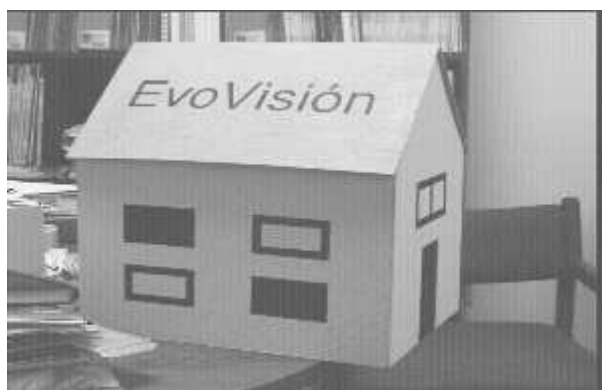


Figura 3: Imagen de una escena.

II.1 Medición Tridimensional a Partir de Imágenes

La obtención de información tridimensional de una escena a partir de imágenes es uno de los problemas más importantes dentro de la visión por computadora, existiendo diversos paradigmas para su solución. Entre los paradigmas más importantes podemos nombrar *Estructura a Partir de Movimiento* (Fermüller y Aloimonos, 1998), *Estructura a Partir de Contornos* (Blake e Isard, 1998), *Estructura a Partir de Sombreado* (Horn y Brooks, 1989), *Estructura a Partir de Textura* (Forsyth, 2002), así como el uso de sensores de rango de alcance ¹ (Pito, 1999). Uno de los paradigmas más extensamente estudiados es el de la geometría de múltiples vistas basado en un modelo de cámara proyectiva (Hartley y Zisserman, 2000; Faugeras, 1993). Dentro de este contexto se ha logrado desarrollar una teoría sólida sobre la relación existente entre una escena y sus proyecciones sobre un plano. En esta sección se presenta un bosquejo de la problemática de reconstrucción tridimensional de puntos en una escena.

Una imagen fotográfica, como la mostrada en la Figura ??, nos brinda mucha información sobre una escena. Sin embargo, no la suficiente para realizar una reconstrucción

¹del inglés Range Scanner

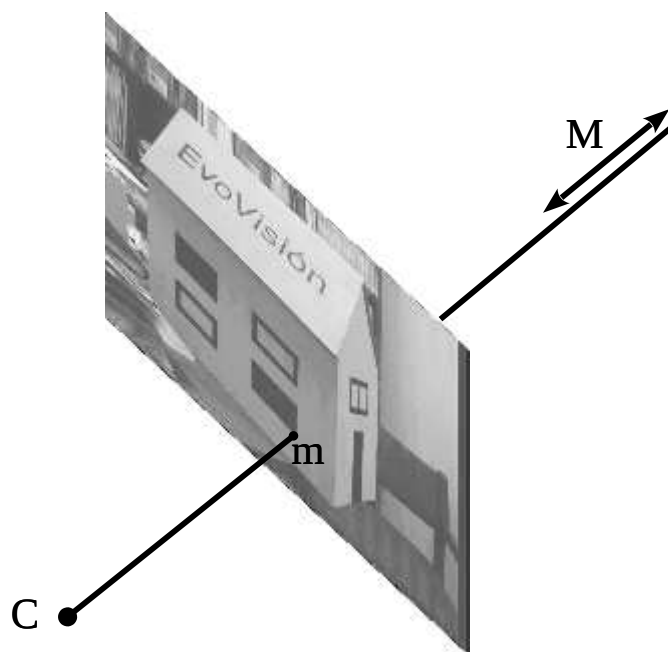


Figura 4: Proyección de un punto a lo largo de su línea de visión.

tridimensional de la misma (al menos que se realicen una considerable cantidad de suposiciones respecto a la estructura de la escena). Esto se debe a la naturaleza del proceso de formación de imágenes, el cual consiste en una proyección de una escena tridimensional hacia un plano de imagen bidimensional. Durante este proceso se pierde la información respecto a la profundidad de la escena. El punto tridimensional correspondiente a un punto específico de la imagen está restringido a su línea de visión asociada. A partir de una sola imagen no es posible determinar en que punto de esta línea se encuentra el punto tridimensional, véase la Figura ???. En el caso que dos (o más) imágenes estén disponibles, entonces el punto tridimensional puede ser obtenido en la intersección de las dos líneas de visión, véase la Figura ??. Este proceso es llamado triangulación y será la base del proceso de reconstrucción utilizado en este trabajo.

A pesar de la sencillez conceptual del proceso de triangulación su aplicación requiere

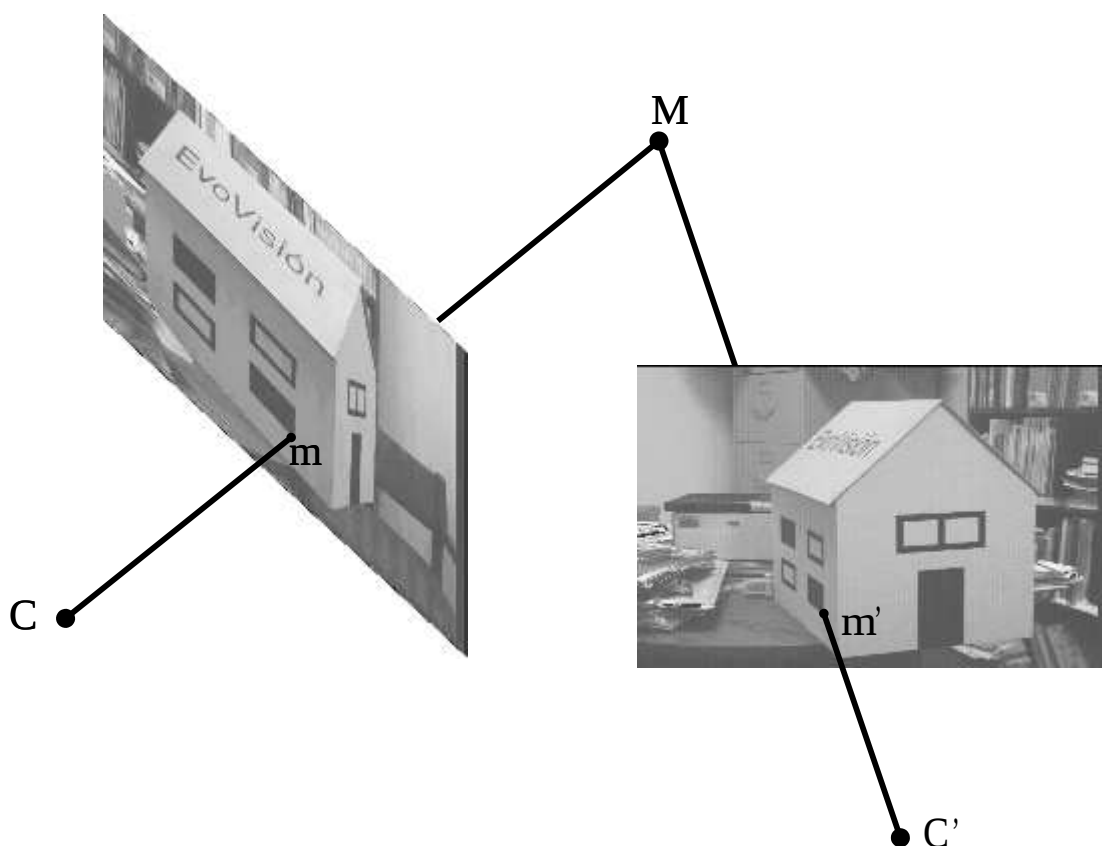


Figura 5: Reconstrucción de un punto tridimensional mediante triangulación.

ciertas consideraciones:

- Correspondencia de puntos en la imagen
- Posición relativa de la cámara para las distintas fotos
- Relación entre los puntos de la imagen y la correspondiente línea de visión

La relación entre los puntos de la imagen y su línea de visión está dada por el modelo de cámara utilizado. La comprensión de estos factores ha dado pauta a estudiar problemas como la calibración de cámaras (Tsai, 1986; Faugeras y Toscani, 1987), el registrado y empataamiento de imágenes (Shao, 1999), la detección de puntos de

interés (Schmid, [1997,2000]; Trujillo 2006), derivar distintos modelos de proyección (afín, perspectiva débil, perspectiva completa) (Faugeras, 1995). Los últimos años han presentado importantes avances en cada uno de estos aspectos. Incluso, recientes trabajos ofrecen la posibilidad de obtener modelos tridimensionales de escenas a partir de múltiples imágenes (Pollefeys *et al.*, 2000). Sin embargo, la obtención de mediciones tridimensionales de alta precisión es un problema que no ha recibido una gran importancia dentro la comunidad de visión por computadora. No es así en la Fotogrametría donde es un tema principal y sumamente difícil, el cual ha sido estudiado extensamente desde el siglo XIX.

II.2 Fotogrametría y Visión por Computadora

Desde su inicio, la fotogrametría ha usado técnicas fotográficas para obtener información métrica de objetos. Tal estudio se ha fundamentado en principios matemáticos y físicos aplicados al proceso de la interpretación precisa de imágenes fotográficas. Para medir las imágenes se construyeron instrumentos análogos de precisión mecánica. Impulsada por el rápido desarrollo de la tecnología digital, la fotogrametría también ha sido aplicada a imágenes digitales, las cuales pueden ser generadas desde un escaner, o bien, directamente de cámaras digitales. El cambio a un entorno digital ha generado un renovado interés en su investigación y en el desarrollo de tecnologías requeridas para su desempeño. Su campo de aplicación abarca desde sistemas de sensado remoto usados para mapeo (fotogrametría aérea) hasta aplicaciones de inspección industrial y arquitectónica (fotogrametría de rango corto).

Tanto la visión por computadora como la fotogrametría representan campos de investigación activos con fundamentos teóricos sólidos. La visión por computadora ha estado relacionada íntimamente con las ciencias de la computación y en consecuencia posee una fuerte influencia de la inteligencia artificial. Dicha influencia es evidente en

las metodologías utilizadas en la solución de problemas (redes neuronales, lógica difusa, etc.), así como en el dominio de aplicación (interfaz humano-computadora, inspección autónoma, navegación vehicular). Por otro lado, la fotogrametría es considerada como una actividad especializada la cual generalmente es llevada a cabo por profesionales experimentados con extensos conocimientos en el área. Incluso, debido a su alto grado de complejidad es considerada por sus practicantes como una ciencia y al mismo tiempo un arte. Sin embargo, estos campos comparten problemas comunes, los cuales generalmente son resueltos mediante enfoques muy distintos.

Tal diferencia de enfoques se origina de los distintos objetivos presentes en cada una de las disciplinas: la fotogrametría busca obtener mediciones con la mayor precisión posible, mientras que la visión persigue brindar capacidades de percepción visual a un sistema computacional. Esta discrepancia es reflejada en los requisitos de las tareas a realizar, véase la Figura ??.

Adicionalmente, la rigurosidad matemática de los procesos fotogramétricos requiere la obtención de una considerable cantidad de información respecto a la escena en observación. Tal información es obtenida mediante procesos de alta precisión, los cuales generalmente involucran intervención humana. Esta situación contrasta con el paradigma de automatización perseguido en la visión por computadora. En los sistemas de visión, dicha reducción de requerimientos generalmente se logra a expensas de la pérdida de exactitud debido a las suposiciones adoptadas. Un aspecto de índole práctico en lugar de conceptual es el alto grado de sensibilidad de los ajustes fotogramétricos respecto a la calidad de la información de entrada. Es necesario proporcionar aproximaciones tridimensionales, mediciones sobre las imágenes y datos de calibración con un alto grado de exactitud. De lo contrario, debido a la naturaleza no lineal de los procesos de compensación por haces, es posible que los métodos numéricos utilizados no converjan a un resultado útil.

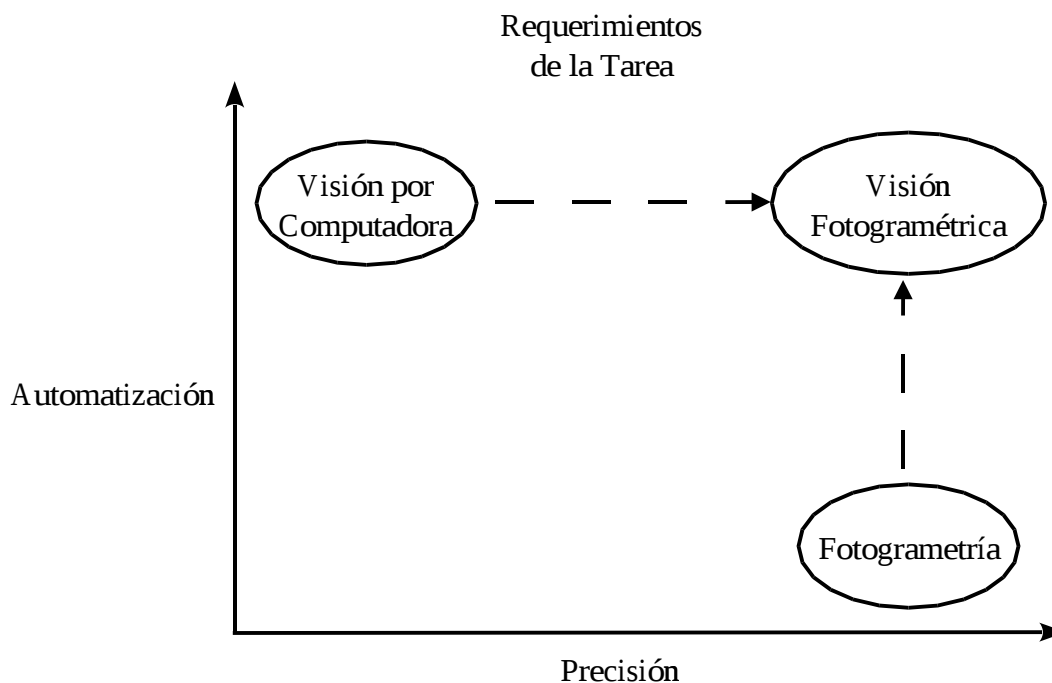


Figura 6: Discrepancia conceptual entre visión por computadora y fotogrametría.

A pesar de estas discordancias, la incorporación de sistemas de visión dentro de entornos automatizados de producción, así como la tendencia al aumento del nivel de automatización de los proyectos fotogramétricos, puede reunir estas distintas áreas de una manera complementaria. Esta concordancia origina lo que es conocido como *Visión Fotogramétrica*, véase la Figura ???. En este trabajo se estudia la posibilidad de incorporar técnicas de visión e inteligencia artificial dentro del contexto de la fotogrametría digital (Olague & Dunn, 2006). Asimismo, se abordará la automatización del proceso de sensado mediante el uso de un robot manipulador equipado con una cámara digital. El uso de tales dispositivos en sistemas de visión ha sido el tema de estudio por la *Visión Activa*. Sin embargo, su incorporación dentro de tareas de fotogrametría de rango corto no ha recibido la atención que su importancia haría suponer.

II.3 La Importancia de la Planificación en el Proceso de Medición

El nivel de automatización alcanzado en la fotogrametría de rango corto ha permitido la integración exitosa de sistemas de medición visual a ambientes industriales (Fraser, 1997; Ganci and Handley, 1998). Los avances en las tecnologías involucradas en los procesos fotogramétricos ha reducido en gran parte la necesidad de intervención humana en la etapa de medición sobre las imágenes y determinación de la orientación de las cámaras. Sin embargo, la determinación de un sistema coordinado óptimo, una geometría de observación para una configuración de cámaras, así como el mejoramiento de una configuración mediante la inclusión de puntos y/ó cámaras adicionales, siguen siendo problemas abiertos dentro del campo de la fotogrametría (Olague & Dunn, 2006). Estos aspectos son abordados dentro del *Diseño de Redes Fotogramétricas* siguiendo el ampliamente aceptado esquema de clasificación propuesto por Grafarend (1974). Dada la importancia práctica de estos problemas, la automatización de la etapa de redes fotogramétrica está recibiendo un renovado interés por la comunidad fotogramétrica (Fraser, 1996; Mason, 1995a, b; Olague, 2002b; Saadatseresht *et al.*, 2004, 2005).

El problema de diseño de redes fotogramétricas es normalmente planteado de la siguiente manera: *dados* los niveles de calidad requeridas (i.e. precisión, confiabilidad) de un conjunto de parámetros a ser estimados, *encontrar* el conjunto de mediciones que alcanzarán esto con el menor costo. Actualmente es ampliamente aceptado que el proceso de diseñar una red fotogramétrica debe realizarse a través de simulación. Una configuración ideal sería aquella que obtenga el máximo nivel de calidad con el menor costo posible. Es importante tener presente que actualmente se considera que la relación entre el costo de un diseño y el números de cámaras ha sido prácticamente eliminada (Saadatseresht *et al.*, 2004). Es decir, los avances en las capacidades de cómputo, permiten llevar a cabo el ajuste numérico de un proceso de compensación por

haces incluso en computadoras portátiles. Circunstancia muy distinta a la existente en los tiempos en que tales modelos de ajuste fotogramétrico fueron planteados por Brown (1958). Sin embargo, el costo computacional de llevar a cabo el diseño de una red fotogramétrica depende en gran parte de la estrategia utilizada para su automatización.

Desde un punto de vista práctico el diseño de redes fotogramétricas es realizado en su mayor parte por fotogrametras expertos. Se utiliza conocimiento especializado para determinar el posicionamiento de cámaras, el posicionamiento de las fuentes de iluminación y el posicionamiento de los puntos de interés. Finalmente el experto ejecuta un programa el cual realiza el ajuste numérico correspondiente a los datos de mediciones sobre las imágenes y estimaciones de los parámetros a ajustar. Los resultados son analizados para determinar si se encuentran dentro de los niveles de desempeño deseados. En caso de ser necesario, se verifica la existencia de errores y repite el proceso realizando ajustes a la configuración hasta que los niveles deseados son alcanzados. Así pues, aun cuando la fotogrametría es una técnica madura para el mapeo y medición, es válido decir que existen aún oportunidades de aumentar el nivel de automatización. De esta forma, el diseño de redes fotogramétricas sigue siendo un tema especializado y poco común el cual requiere de maestría. Por otro lado, el diseño de redes fotogramétricas para el caso de un sistema de inspección automatizado necesita considerar nuevos aspectos como pueden ser: planeación de movimientos, reconocimiento y localización de objetos, control de la cámara, entre otros. Todos estos factores pueden ser determinantes en el éxito o fracaso del proyecto fotogramétrico. De tal suerte que el diseño de una red fotogramétrica es un aspecto crucial que no debe ser menospreciado (Olague & Dunn, 2006).

La falta de un uso extenso del diseño de redes fotogramétricas dentro de la comunidad de la fotogrametría puede ser atribuido a la complejidad inherente al diseño y a sus altos costos computacionales. Tal diseño requiere un razonamiento espacial que

considere las características geométricas del objeto y el modelo matemático de la triangulación óptica. Tal razonamiento no es trivial y ha sido el tema de investigaciones muy diversas. Por ejemplo, el trabajo de Mason (1997), soluciona el problema del posicionamiento de cámaras incorporando considerable conocimiento *a priori* dentro de un sistema experto. De esta manera, un conjunto de heurísticas basadas en la teoría de las *redes genéricas* es utilizada para modelar el proceso de toma de decisiones. Por otro lado, el trabajo de Olague y Mohr (Olague & Mohr, 2002a) utiliza un enfoque de cómputo evolutivo, desarrollando un criterio basado en el fenómeno de propagación de error, el cual fue posteriormente extendido para considerar el método de compensación por haces (Olague, 2002b). De esta forma, el razonamiento espacial requerido es llevado a cabo mediante un sistema adaptivo basado en meta-heurísticas estocásticas que brindan resultados competitivos con los obtenidos por expertos humanos. Recientemente, el trabajo de Saadatseresht *et al.* (2004) aborda el problema de mejorar una red fotogramétrica ya existente mediante el posicionamiento de estaciones de sensado adicionales, basándose en lo que los autores denominan “modelado de predicción de incertidumbre de visibilidad”. Este nuevo modelado está basado en el concepto de esferas de incertidumbre de la visibilidad. Este concepto es utilizado para predecir los puntos en el espacio de sensado que brindan una mejora en términos de precisión. Todos los trabajos anteriormente mencionados dan atención especial a la utilidad de enfoques rigurosos como el método de compensación por haces en la caracterización de la calidad de una red fotogramétrica. Particularmente, los trabajos de Fraser (1987) y de Olague & Mohr (2002a) han abordado la simplificación del modelo matemático con el propósito de simplificar el diseño de la red.

Los trabajos mencionados se enfocan a resolver diferentes aspectos del problema de medición tridimensional dentro del contexto de la fotogrametría. Sin embargo, el estudio de sistemas de planificación para tareas generales de percepción artificial es

llevado a cabo en diversas disciplinas. En las áreas de visión robótica y visión por computadora, el problema es abordado bajo el término de *planificación de sensores*. Un bosquejo de la investigación en esta área se presenta en la siguiente sección.

II.4 Sistemas de Selección de Puntos de Observación

La planeación de sensores es un campo de investigación emergente el cual estudia el desarrollo de estrategias de adquisición de imágenes para tareas de visión por computadora (Tarabanis *et al.*, 1995). El propósito de tal planeación es determinar, de la manera más autónoma posible, un grupo de acciones de sensado las cuales lleven al cumplimiento de los objetivos de la tarea de visión. Esto es importante porque hay entornos (i.e. ambientes dinámicos con restricciones físicas y temporales) y tareas (i.e. exploración de una escena, reconstrucción de alta precisión) donde la especificación de una estrategia de sensado adecuada no es evidente. En particular, un planificador debe hacer consideraciones que requieren complejos razonamientos espaciales y temporales, basándose en un conjunto de modelos matemáticos dependientes de los objetivos de la tarea de visión (Miura e Ikeuchi, 1998). Consecuentemente, surgen problemas numéricos y combinatorios, los cuales presentan a su vez diversas oportunidades de investigación. Este trabajo propone plantear tales problemas en términos de optimización y aplicar metodologías de Cómputo Evolutivo en su solución.

El problema de la inspección visual de un objeto tridimensional requiere de la obtención de múltiples imágenes desde diferentes puntos de observación (máxime si el interés es obtener una reconstrucción de alta precisión). Este requisito exige al planeador tomar en cuenta las restricciones asociadas a un sistema de múltiples vistas, véase la Tabla ???. Al considerar la incorporación de un manipulador el cual controle el

Tabla II: *Restricciones sobre puntos de observación.*

Restricción	Descripción
Visibilidad	Características de interés se encuentran libres de oclusión por algún objeto en la escena.
Resolución	El tamaño de la representación de una característica en la imagen es adecuada para la tarea de visión.
Enfoque	La característica aparece con nitidez apropiada para la tarea de visión.
Campo de observación	Las características aparecen dentro de los límites de visibilidad del sensor.

movimiento del sensor, se deben respetar las restricciones operacionales del manipulador, así como las impuestas por la celda de trabajo. Esto debe realizarse mientras se persigue la satisfacción de los requisitos de la tarea de visión, los cuales aportan restricciones adicionales.

El enfoque adoptado en el diseño de un conjunto de puntos de observación para un objeto, depende en gran parte de la información previa que se tenga respecto al entorno de trabajo. En base a esta información pueden identificarse dos diferentes escenarios:

1. Determinar un conjunto de puntos de observación antes de empezar la tarea de visión.
2. Plantear la planeación como un proceso interactivo de sensado y análisis.

Nuestro interés es obtener medidas de alta precisión, para lo cual generalmente se cuenta de antemano con descripciones geométricas de la escena. En la siguiente sección se presentan distintos trabajos que contemplan la integración de un robot manipulador, categorizando los trabajos en base al escenario de la tarea a realizar. Esta descripción no pretende ser exhaustiva, en vez de eso se presentan trabajos de investigación relevantes en el área de planeación de sensores.

II.4.1 Sistemas Basados en Información Geométrica

El desarrollo de sistemas de visión para la inspección y verificación automatizada, debe considerar el problema de planificación de puntos de observación de acuerdo a las características de la celda de trabajo. La mayoría de los enfoques proponen plantear el problema en términos de optimización o satisfacción de restricciones. Los trabajos presentados a continuación abordan estos aspectos de manera distinta.

El sistema EPOCA desarrollado por Olague (Olague, 1998) resuelve el problema de la colocación óptima de cámaras, con el objetivo de obtener mediciones tridimensionales de alta precisión. La metodología propuesta divide el problema en dos partes principales. La primera es dedicada a un modelo analítico de error a partir del cual se deriva un criterio, esto se explicó en la Sección II.4. El criterio elegido es el *elemento mayor de la diagonal* extraída de la matriz de covariancia, la cual se basa en el fenómeno de propagación de error. La segunda parte consiste en el desarrollo de un método de optimización global, el cual minimiza el criterio. Debido a la oclusión de puntos, causada por diferentes restricciones, el problema presenta discontinuidades, lo cual lleva a aspectos combinatorios en el proceso de optimización. Estas restricciones son incorporadas naturalmente a la metodología de algoritmos genéticos. El sistema es un proceso dinámico donde el estado global *emerge* mediante coevolución a través del comportamiento e interacción de las “células” que están relacionadas por coadaptación. De esta forma el sistema EPOCA produce exitosamente diseños de redes fotogramétricas semejantes a los utilizados por los fotogrametas para el caso de varios planos adyacentes y objetos complejos.

El sistema CONSENS desarrollado por Mason (Mason y Grün, 1995) propone un enfoque de sistemas expertos para automatizar el diseño configuraciones de múltiples sensores. Bajo esta metodología se utilizan las estrategias, modelos matemáticos y

consideraciones heurísticas utilizadas por fotogrametristas experimentados. Tal trabajo está fundamentado en la teoría de redes genéricas desarrollada en el área de fotogrametría. De esta forma, al basarse en el método de compensación por haces para el proceso de triangulación, el énfasis reside en obtener una alta precisión en la reconstrucción tridimensional del objeto en observación. En consecuencia, tal sistema es capaz de diseñar configuraciones para tareas de inspección basándose en un modelo CAD del objeto y de su ambiente de trabajo.

El sistema HEAVEN desarrollado por Sakane *et al.*, (1992) es un ejemplo en el cual se estudia la colocación de una cámara montada en el extremo de un robot, así como el posicionamiento de fuentes de iluminación. El espacio de búsqueda de la colocación de las cámaras es discretizado y reducido a la superficie de una esfera circundante al objeto. Dicha superficie es segmentada en celdas triangulares de manera recursiva. El conjunto de puntos de observación obtenido por el sistema se encuentra en las celdas que estén dentro del espacio de trabajo del robot manipulador y brinden la mejor visibilidad del objeto. Aspectos como la colocación de fuentes de iluminación y oclusión visual del objeto, son considerados en la determinación de puntos de observación. Este sistema se basa en la estrategia de *generar y probar*, desarrollando criterios para la confiabilidad de la configuración, así como consideraciones de ángulo de incidencia. Estos criterios son combinados en un criterio global y la configuración que maximice tal criterio es seleccionada. Este trabajo incorpora tanto restricciones de la tarea visual como las correspondientes a la operación del robot manipulador.

El sistema MVP desarrollado por Tarabanis *et al.*, (1995) considera la planificación de puntos de observación de un manipulador para llevar a cabo tareas de inspección o monitoreo (i.e. controlar remotamente un segundo robot manipulador). El planificador determina automáticamente los parámetros de un sensor, de manera que cumplan con

restricciones de visibilidad, resolución, distorsión perspectiva y enfoque. En este trabajo, en lugar de discretizar el espacio de búsqueda, las restricciones son expresadas como funciones analíticas y el problema es planteado en términos de optimización. Para ello, se define el concepto de *punto de observación generalizado*, el cual involucra ocho parámetros que describen la posición y orientación del sensor, su distancia al objeto, su distancia focal y apertura del lente. Este trabajo fue extendido por Abrahms *et al.*, (1993) para trabajar en ambientes dinámicos.

El trabajo desarrollado por Triggs y Laugier (1995) considera restricciones del espacio de trabajo de un robot equipado con una cámara. El objetivo es realizar tareas de inspección automática dentro de ambientes de trabajo complejos. El sistema es capaz de encontrar puntos de observación cercanos al óptimo de manera heurística, así como de ordenar y planear la ruta a seguir por el manipulador. La calidad de cada punto de observación es analizada y se le asigna un valor numérico. Este valor consiste en la suma de valores ponderados, obtenidos a partir de la evaluación de aspectos como accesibilidad del manipulador, visibilidad de la escena en general y del objeto en particular, movilidad del manipulador e interferencia del entorno con el robot. De esta forma, la determinación de puntos de observación apropiados es planteada en términos de optimización, deseándose un método de búsqueda global con el fin de buscar un mínimo en el espacio de búsqueda completo. Los autores desarrollan una técnica de optimización global, la cual llaman *máxima ganancia esperada*. Dicha técnica está basada en una descomposición recursiva del espacio de búsqueda y utiliza teoría de decisiones y modelos probabilísticos del comportamiento de funciones, para escoger una posición óptima para cada muestreo de la función a optimizar.

En el trabajo de Roberts y Marshall (1997) también se utiliza un sistema de visión de un solo robot; su enfoque fue hacia reconocimiento de objetos tridimensionales. Los autores presentan una metodología para seleccionar una cantidad mínima de puntos de

observación, los cuales brinden visibilidad adecuada a cada una de las caras de objetos poliédricos. El sistema toma como entrada una descripción geométrica del entorno y del objeto, así como una descripción de la configuración de la celda de trabajo. El planificador primero agrupa caras pertenecientes al objeto que compartan una región de visibilidad, es decir, que puedan ser observadas desde un mismo punto. Se adopta una heurística voraz, la cual forma grupos excluyentes del mayor tamaño posible, hasta que todas las caras del objeto sean consideradas. Dentro de cada región de visibilidad se selecciona el punto de observación que minimiza el ángulo de incidencia respecto a todas las rectas normales de las caras observadas desde ese punto. Esta metodología permite incorporar restricciones de visibilidad dentro de un ambiente complejo, mediante una representación eficiente del espacio de búsqueda. En este trabajo se hace la suposición fundamental de que el manipulador cuenta con la suficiente movilidad para alcanzar cualquier postura de observación respecto al objeto. Sin embargo, la consideración de restricciones operacionales de un manipulador, es un aspecto de primordial importancia dentro de la planeación, el cual debe ser considerado.

Recientemente, Yang *et al.* (2001) presentan un sistema para la planeación de sensores para la inspección visual activa tridimensional dentro de ambientes de manufactura. Tal planificación considera los errores de cuantización (discretización producida por el CCD) y los errores de desplazamiento de un sistema de visión activa. La combinación de las funciones de densidad de estos errores es utilizada como criterio dentro de un proceso de optimización. Los aspectos de resolución, enfoque, visibilidad y campo de observación son incorporadas dentro de la optimización como restricciones. Se utiliza un algoritmo genético para tal optimización, de forma que la configuración de los sensores producirá la menor magnitud de error al mismo tiempo que cumple con las restricciones de los sensores. Este trabajo identificó las ventajas del uso de técnicas

evolutivas en el proceso de planificación de sensores. En tal trabajo se propone y desarrolla un nuevo modelo de incertidumbre tridimensional. En contraste, en nuestro trabajo se aplican modelos bien conocidos y ampliamente aceptados para llevar a cabo la tarea de medición.

El trabajo de Sheng (2002) aborda el problema de automatizar el proceso de inspección dentro de un entorno de manufactura automatizada. El autor desarrolla un sistema de planeación de sensores basado en información geométrica y un planificador de movimientos óptimos para un robot manipulador con una configuración “cámara en mano”. Las superficies complejas son descompuestas en múltiples parches que satisfacen ciertas características geométricas. A partir de esta discretización el problema de planeación de sensores se plantea como un problema de partición de conjuntos. Restricciones cinemáticas del manipulador son incorporadas a la planeación de forma que los puntos generados son “bien comportados” desde un punto de vista cinemático. Adicionalmente el autor presenta el concepto de “Caja Delimitante”, mediante el cual representa las restricciones como visibilidad y enfoque, con el propósito de simplificar el proceso de búsqueda de puntos de observación.

El trabajo de Chen *et al.* (2004) aborda explícitamente la obtención de un posicionamiento óptimo de cámara junto con la determinación de la ruta más corta a ejecutar por un manipulador en una configuración cámara en mano. La optimización es llevada a cabo con un algoritmo evolutivo el cual trabaja con un criterio “min-max” con el propósito de obtener una medición precisa del objeto en observación. Los autores desarrollan un ambiente de simulación y llevan a cabo experimentación real. Dicho trabajo aborda una problemática muy semejante a la nuestra y adopta una técnica evolutiva para su solución. Sin embargo, adopta simplificaciones considerables en el proceso de evaluación de la precisión de las mediciones y no estudia explícitamente la relación entre los objetivos de precisión y costo operacional.

II.4.2 Sistemas Basados en la Inferencia de la Escena

Este tipo de sistemas abordan el problema de reconstruir una escena previamente desconocida. Trabajos como el de Pito (1999) y el de Ye y Tsotsos (1999), estudian la planificación del siguiente punto de observación en base a la información actual sobre el entorno. El interés se dirige hacia el desarrollo de estrategias de exploración (Maver y Bajcsy, 1993), en lugar de llevar a cabo tareas de restitución con una alta precisión. Si bien, éste no es el problema que tratamos en este trabajo, los enfoques y problemáticas abordadas en estos sistemas son útiles para entender la problemática general de sistemas de visión.

Whaite y Ferrie (1997) plantean una metodología para desarrollar sistemas de visión automatizados, denominada *exploración autónoma*. Su trabajo se basa en modelos de incertidumbre aplicados a la inferencia de modelos tridimensionales de una escena. Por lo tanto, el sistema no posee información particular sobre la geometría de los objetos presentes en la escena. El conjunto de puntos de observación determinados por el sistema reducen la incertidumbre total del modelo matemático. Este modelo incorpora una matriz de covariancia de las estimaciones realizadas de la escena a partir de una sucesión de observaciones. El sensado es realizado por un robot manipulador con un sensor de rastreo de alcance, en lugar de una cámara digital. En este trabajo el énfasis es en la precisión de los modelos geométricos inferidos de una escena. Tal inferencia es obtenida a partir de una secuencia puntos de observación, óptima con respecto a la cantidad de muestreos. El enfoque de reducción de incertidumbre es de primordial importancia, ya que éste es el criterio que dirige la búsqueda de puntos de observación.

Recientemente, Marchand y Chaumette (1999) estudiaron los movimientos óptimos de cámaras en un sistema de visión activa para reconstrucción tridimensional y exploración. El trabajo aborda el problema de recuperar la estructura tridimensional de escenas compuestas por cilindros y objetos poliédricos, sin ningún conocimiento de sus

dimensiones y su localización dentro de una región acotada. El sistema tiene tres niveles principales. En el nivel de *Exploración* se ataca el problema de determinar puntos de observación que brinden la mayor información respecto a la escena, con el fin de obtener una reconstrucción completa. En el segundo nivel, *Movimientos de cámara para la reconstrucción de primitivas*, el sistema reconstruye secuencialmente cada una de las primitivas encontradas en la escena y planea movimientos óptimos para su reconstrucción individual. Finalmente, el nivel de *Reconstrucción incremental de la escena* determina la secuencia de primitivas a reconstruir, hasta lograr una reconstrucción completa de la escena. En este trabajo los diferentes criterios son expresados mediante funciones de costo y el problema es planteado en términos de optimización. Los autores desarrollan su propio método de optimización global.

II.5 El Método de Compensación Por Haces

Enfoques fotogramétricos para la triangulación óptica están basados en el método de “compensación por haces”, el cual simultáneamente refina datos de estructura de la escena y parámetros de observación para redes de múltiples cámaras (McGlone, 2004). Bajo este procedimiento de optimización no lineal, el proceso de formación de imágenes está descrito por un modelo funcional y un modelo estocástico.

El modelo funcional está basado en las ecuaciones proyectivas o de colinealidad, las cuales relacionan las coordenadas tridimensionales (X_j, Y_j, Z_j) de un punto j con sus correspondientes coordenadas (x_{ij}, y_{ij}) en la imagen i . Tales ecuaciones están basadas en las suposiciones de la colinealidad entre un punto en la escena, su proyección en la imagen y el centro óptico de la cámara. (Brown, 1980):

$$F_x = x_{ij} - x_p + f \left[\frac{m_{11}(X_j - X_i^c) + m_{12}(Y_j - Y_i^c) + m_{13}(Z_j - Z_i^c)}{m_{31}(X_j - X_i^c) + m_{32}(Y_j - Y_i^c) + m_{33}(Z_j - Z_i^c)} \right] = 0$$

$$F_y = y_{ij} - y_p + f \left[\frac{m_{21}(X_j - X_i^c) + m_{22}(Y_j - Y_i^c) + m_{23}(Z_j - Z_i^c)}{m_{31}(X_j - X_i^c) + m_{32}(Y_j - Y_i^c) + m_{33}(Z_j - Z_i^c)} \right] = 0, \quad (1)$$

donde los valores m_{ij} son los coeficientes de la matriz ortonormal que expresa la orientación de la cámara respecto a un sistema coordenado arbitrario en términos de tres ángulos de rotación ω, ϕ, κ ; la posición del centro óptico de la cámara está dada por las coordenadas (X_i^c, Y_i^c, Z_i^c) ; la distancia focal de la cámara es expresada por f ; x_p y y_p representan las coordenadas del punto principal sobre la imagen.

En este caso, el ajuste de mínimos cuadrados tiene como propósito determinar la solución más probable para las coordenadas de campo (o tridimensionales) de algunos puntos y de los parámetros de orientación exterior asociados a las fotografías. Para formular el modelo del problema se hacen las siguientes suposiciones:

1. La cámara está calibrada, por ello los parámetros de orientación interior son conocidos.
2. Se tienen las mediciones en las imágenes de la posición de los puntos de interés.
3. Se tienen aproximaciones a los valores de los parámetros que se quieren ajustar.
4. Se conocen las coordenadas tridimensionales de al menos dos puntos y una coordenada de un tercer punto, llamados puntos de control.
5. Se cuenta con información auxiliar sobre los parámetros de orientación exterior de las imágenes.

Al medir n puntos visibles sobre un conjunto de m fotografías, es posible escribir el modelo completo a través de $2mn$ ecuaciones, a partir de las cuales se quieren calcular $6m + 3n$ parámetros desconocidos (6 parámetros de orientación exterior para cada fotografía y 3 coordenadas para cada punto). Para hacer un ajuste de mínimos cuadrados

se requiere que $2mn > 6m + 3n$, es decir, que se tenga un número mayor de ecuaciones que de incógnitas.

II.5.1 Ecuaciones de Colinealidad

Como puede observarse de las ecuaciones de colinealidad (??), éstas no son lineales respecto a los parámetros que se quieren ajustar ($X_j, Y_j, Z_j, \omega, \phi, \kappa, X_i^c, Y_i^c, Z_i^c$). Entonces, antes de utilizar las ecuaciones de colinealidad para formular el modelo y hacer un ajuste de mínimos cuadrados, deben ser linearizadas y los errores o residuales asociados a las mediciones en las fotografías deben también ser agregados al modelo.

Entonces, si x_{ij} y y_{ij} son las coordenadas de un punto j en la fotografía i y se hacen mediciones de las mismas, se cumple que

$$x_{ij} = x_{ij}^{\circ\circ} + V_{x_{ij}} \quad \text{y} \quad y_{ij} = y_{ij}^{\circ\circ} + V_{y_{ij}}$$

donde $x_{ij}^{\circ\circ}$ y $y_{ij}^{\circ\circ}$ son las coordenadas (x, y) de un punto j medidas en la fotografía i y, $V_{x_{ij}}$ y $V_{y_{ij}}$ son los residuales asociados a las mediciones, ya que existe un error aleatorio de tipo Gaussiano en las mismas que debe ser considerado.

Ahora, se cuenta también con aproximaciones a los valores de los parámetros que se quieren ajustar, y la relación que existe entre los valores verdaderos y las aproximaciones es la siguiente

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_i^{\circ} + \Delta\omega_i, & X_i^c &= (X_i^c)^{\circ} + \Delta X_i, & X_j &= X_j^{\circ} + \Delta X_j \\ \phi_i &= \phi_i^{\circ} + \Delta\phi_i, & Y_i^c &= (Y_i^c)^{\circ} + \Delta Y_i, & Y_j &= Y_j^{\circ} + \Delta Y_j \\ \kappa_i &= \kappa_i^{\circ} + \Delta\kappa_i, & Z_i^c &= (Z_i^c)^{\circ} + \Delta Z_i, & Z_j &= Z_j^{\circ} + \Delta Z_j \end{aligned} \quad (2)$$

donde

- $\omega_i^{\circ}, \phi_i^{\circ}, \kappa_i^{\circ}, (X_i^c)^{\circ}, (Y_i^c)^{\circ}, (Z_i^c)^{\circ}, X_j^{\circ}, Y_j^{\circ}, Z_j^{\circ}$ son las aproximaciones a los parámetros desconocidos (parámetros de orientación exterior y coordenadas tridimensionales de los puntos) y

- $\Delta\omega_i, \Delta\phi_i, \Delta\kappa_i, \Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i, \Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j$ son las correcciones correspondientes a dichas aproximaciones.

El superíndice $^{\circ\circ}$ se usa para denotar mediciones mientras que el superíndice $^{\circ}$ se usa para denotar aproximaciones. Se supone que las correcciones en el sistema (??) son pequeñas y que las ecuaciones de colinelidad son lineales en un intervalo entre los valores verdaderos de los parámetros y sus aproximaciones. Antes de hacer el ajuste de mínimos cuadrados, las ecuaciones de colinelidad deben ser linearizadas. Una forma de expresar las ecuaciones de colinelidad como un polinomio de primer grado, usando una aproximación de Newton de grado uno es

$$\begin{aligned}
 V_{x_{ij}} + & \left(\frac{\partial F_x}{\partial \omega_i} \right)^{\circ} \Delta\omega_i + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \phi_i} \right)^{\circ} \Delta\phi_i + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \kappa_i} \right)^{\circ} \Delta\kappa_i + \\
 & \left(\frac{\partial F_x}{\partial X_i^c} \right)^{\circ} \Delta X_i^c + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y_i^c} \right)^{\circ} \Delta Y_i^c + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z_i^c} \right)^{\circ} \Delta Z_i^c + \\
 & \left(\frac{\partial F_x}{\partial X_j} \right)^{\circ} \Delta X_j + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y_j} \right)^{\circ} \Delta Y_j + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z_j} \right)^{\circ} \Delta Z_j + F_x^{\circ} = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 V_{y_{ij}} + & \left(\frac{\partial F_y}{\partial \omega_i} \right)^{\circ} \Delta\omega_i + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \phi_i} \right)^{\circ} \Delta\phi_i + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \kappa_i} \right)^{\circ} \Delta\kappa_i + \\
 & \left(\frac{\partial F_y}{\partial X_i^c} \right)^{\circ} \Delta X_i^c + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y_i^c} \right)^{\circ} \Delta Y_i^c + Y_i^c \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z_i^c} \right)^{\circ} \Delta Z_i^c + \\
 & \left(\frac{\partial F_y}{\partial X_j} \right)^{\circ} \Delta X_j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y_j} \right)^{\circ} \Delta Y_j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z_j} \right)^{\circ} \Delta Z_j + F_y^{\circ} = 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

donde F_x° y F_y° son las funciones F_x y F_y evaluadas en $\omega_i^{\circ}, \phi_i^{\circ}, \dots, Z_j^{\circ}$, y las derivadas con superíndice $^{\circ}$ representan el valor de las derivadas evaluadas en las aproximaciones. Para poder escribir las ecuaciones (??) y (??) de manera compacta en notación matricial, se definen las siguientes variables

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial \omega_i} \right)^\circ & b_{21} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial \omega_i} \right)^\circ \\
b_{12} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial \phi_i} \right)^\circ & b_{22} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial \phi_i} \right)^\circ \\
b_{13} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial \kappa_i} \right)^\circ & b_{23} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial \kappa_i} \right)^\circ \\
b_{14} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial X_i^c} \right)^\circ & b_{24} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial X_i^c} \right)^\circ \\
b_{15} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y_i^c} \right)^\circ & b_{25} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y_i^c} \right)^\circ \\
b_{16} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z_i^c} \right)^\circ & b_{26} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z_i^c} \right)^\circ \\
b_{17} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial X_j} \right)^\circ & b_{27} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial X_j} \right)^\circ \\
b_{18} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y_j} \right)^\circ & b_{28} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y_j} \right)^\circ \\
b_{19} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z_j} \right)^\circ & b_{29} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z_j} \right)^\circ.
\end{aligned}$$

De esta forma, es posible escribir las ecuaciones (??) y (??) en notación matricial

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_{x_{ij}} \\ V_{y_{ij}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega_i \\ \Delta \phi_i \\ \Delta \kappa_i \\ \Delta X_i^c \\ \Delta Y_i^c \\ \Delta Z_i^c \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_j \\ \Delta Y_j \\ \Delta Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x^\circ \\ -F_y^\circ \end{bmatrix}, \tag{5}
\end{aligned}$$

o escrito en forma compacta

$$\mathbf{V}_{ij} + \dot{\mathbf{B}}_{ij} \dot{\mathbf{\Delta}}_i + \ddot{\mathbf{B}}_{ij} \ddot{\mathbf{\Delta}}_j = \epsilon_{ij}.$$

Un punto como superíndice es usado para denotar las derivadas y correcciones correspondientes a los parámetros de orientación exterior. De igual forma, dos puntos son

usados para denotar las derivadas y correcciones correspondientes a las coordenadas tridimensionales o de campo de los puntos.

Uno de los objetivos de hacer el ajuste de mínimos cuadrados es determinar las coordenadas tridimensionales de los puntos. Para lograrlo es necesario también considerar lo siguiente: Cuando se quiere posicionar un punto en el espacio 3D, es necesario definir 7 elementos: uno para la escala, tres para la traslación (al origen) y tres para la rotación (respecto a cada uno de los ejes). En una configuración puramente fotogramétrica o, lo que es lo mismo, al usar sólo ecuaciones de observación (mediciones de los puntos en las imágenes), si no se tiene información numérica a priori acerca de la posición de los puntos o de las cámaras, se tendrá una deficiencia de rango de 7 en el sistema de ecuaciones normales resultante con motivo del ajuste de mínimos cuadrados usando sólo ecuaciones de observación. De esta forma, si se incluyen ecuaciones adicionales (llamadas restricciones) que contengan información adicional sobre algunos puntos y/o cámaras, puede ser removida la deficiencia de rango (Atkinson, 1996).

Las restricciones agregadas al modelo, en este trabajo, son las mediciones de las coordenadas X, Y, Z de dos puntos y la coordenada X de un tercer punto, así como mediciones o valores conocidos de las posiciones y orientaciones de las cámaras ($\omega, \phi, \kappa, X^c, Y^c, Z^c$). La estructura de las ecuaciones formadas por estas restricciones se muestra en las siguientes subsecciones.

II.5.2 Ecuaciones de Control de Campo

Estas ecuaciones de restricción son las relacionadas con las mediciones que se tienen de algunos puntos, llamados de control. Dado que se tienen mediciones de tales puntos, las coordenadas tridimensionales o de campo de un punto j pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned}
X_j &= X_j^{\circ\circ} + V_{X_j} \\
Y_j &= Y_j^{\circ\circ} + V_{Y_j} \\
Z_j &= Z_j^{\circ\circ} + V_{Z_j},
\end{aligned}$$

! donde, $X_j^{\circ\circ}, Y_j^{\circ\circ}, Z_j^{\circ\circ}$ son las mediciones de las coordenadas tridimensionales del punto j y $V_{X_j}, V_{Y_j}, V_{Z_j}$ son los residuales asociados con dichas mediciones. Pero además, en la Ecuación (??) el punto j fue definido por una aproximación de la forma

$$\begin{aligned}
X_j &= X_j^{\circ} + \Delta X_j \\
Y_j &= Y_j^{\circ} + \Delta Y_j \\
Z_j &= Z_j^{\circ} + \Delta Z_j,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
X_j^{\circ\circ} + V_{X_j} &= X_j^{\circ} + \Delta X_j \\
Y_j^{\circ\circ} + V_{Y_j} &= Y_j^{\circ} + \Delta Y_j \\
Z_j^{\circ\circ} + V_{Z_j} &= Z_j^{\circ} + \Delta Z_j.
\end{aligned}$$

Ordenando términos y poniendo las ecuaciones en forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} V_{X_j} \\ V_{Y_j} \\ V_{Z_j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X_j \\ \Delta Y_j \\ \Delta Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_j^{\circ} - X_j^{\circ\circ} \\ Y_j^{\circ} - Y_j^{\circ\circ} \\ Z_j^{\circ} - Z_j^{\circ\circ} \end{bmatrix},$$

lo cual se puede escribir en forma compacta como

$$\begin{array}{ccc}
\ddot{\mathbf{V}}_j & - & \ddot{\mathbf{\Delta}}_j & = & \ddot{\mathbf{C}}_j. \\
(3, 1) & & (3, 1) & & (3, 1)
\end{array} \tag{6}$$

Este sistema es llamado “restricción para las coordenadas de campo conocidas del punto j ”. Si para alguna de las coordenadas del punto j (X, Y o Z) no existiera medición, el lugar correspondiente a dicha coordenada en $\ddot{\mathbf{C}}_j$ es llenado con un 0, en lugar de hacer la resta.

II.5.3 Parámetros de Orientación Exterior

Se pueden establecer como restricción algunas ecuaciones relacionadas con los parámetros de orientación exterior de una manera análoga a las restricciones establecidas para las coordenadas tridimensionales de los puntos. Esto es, sean $\omega_i^{\circ\circ}, \phi_i^{\circ\circ}, \kappa_i^{\circ\circ}, (X_i^c)^{\circ\circ}, (Y_i^c)^{\circ\circ}$ y $(Z_i^c)^{\circ\circ}$ algunas mediciones de los parámetros de orientación exterior para la fotografía i , y sean $V_{\omega_i}, V_{\phi_i}, V_{\kappa_i}, V_{X_i^c}, V_{Y_i^c}$ y $V_{Z_i^c}$ sus correspondientes residuales desconocidos. Así, los verdaderos valores de los seis parámetros de orientación exterior pueden ser escritos como

$$\begin{aligned}\omega_i &= \omega_i^{\circ\circ} + V_{\omega_i} \\ \phi_i &= \phi_i^{\circ\circ} + V_{\phi_i} \\ \kappa_i &= \kappa_i^{\circ\circ} + V_{\kappa_i} \\ X_i^c &= (X_i^c)^{\circ\circ} + V_{X_i^c} \\ Y_i^c &= (Y_i^c)^{\circ\circ} + V_{Y_i^c} \\ Z_i^c &= (Z_i^c)^{\circ\circ} + V_{Z_i^c}.\end{aligned}$$

Sin embargo, en la Ecuación (??) los parámetros de orientación exterior para la fotografía i fueron definidos por sus aproximaciones como sigue

$$\begin{aligned}\omega_i &= \omega_i^{\circ} + \Delta_{\omega_i} \\ \phi_i &= \phi_i^{\circ} + \Delta_{\phi_i} \\ \kappa_i &= \kappa_i^{\circ} + \Delta_{\kappa_i} \\ X_i^c &= (X_i^c)^{\circ} + \Delta_{X_i^c} \\ Y_i^c &= (Y_i^c)^{\circ} + \Delta_{Y_i^c} \\ Z_i^c &= (Z_i^c)^{\circ} + \Delta_{Z_i^c}.\end{aligned}$$

Por lo tanto igualando los dos conjuntos de ecuaciones y expresando el resultado en forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} V_{\omega_i} \\ V_{\phi_i} \\ V_{\kappa_i} \\ V_{X_i^c} \\ V_{Y_i^c} \\ V_{Z_i^c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_{\omega_i} \\ \Delta_{\phi_i} \\ \Delta_{\kappa_i} \\ \Delta_{X_i^c} \\ \Delta_{Y_i^c} \\ \Delta_{Z_i^c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i^\circ - \omega_i^{\circ\circ} \\ \phi_i^\circ - \phi_i^{\circ\circ} \\ \kappa_i^\circ - \kappa_i^{\circ\circ} \\ (X_i^c)^\circ - (X_i^c)^{\circ\circ} \\ (Y_i^c)^\circ - (Y_i^c)^{\circ\circ} \\ (Z_i^c)^\circ - (Z_i^c)^{\circ\circ} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{matrix} \dot{\mathbf{V}}_i & - & \dot{\mathbf{\Delta}}_i & = & \dot{\mathbf{C}}_i. \\ (6, 1) & & (6, 1) & & (6, 1) \end{matrix} \quad (8)$$

Esta ecuación es llamada “restricción para los parámetros de orientación exterior de la fotografía i ”. La Ecuación (??) contiene las mediciones de los seis parámetros de orientación exterior sin embargo, la ecuación de restricción puede formarse sólo con las mediciones de algunos de los parámetros. Si no se tiene medición de alguno de los parámetros $(\omega_i, \phi_i, \kappa_i, X_i^c, Y_i^c, Z_i^c)$, se pone un 0 en el lugar correspondiente al mismo en $\dot{\mathbf{C}}_i$, en lugar de la resta.

II.5.4 Formulación del Modelo Matemático

Consideremos un bloque de m fotografías cubriendo un área en la cual se tienen n puntos o marcas de interés. Para no perder generalidad y para evitar, por el momento, el problema de tener que especificar en el modelo cuáles puntos aparecen en cada una de las fotografías, se asume que los n puntos aparecen en las m fotografías aunque en realidad, es posible que sólo un porcentaje de éstos se encuentran en todas las fotos. Es importante considerar también que para poder estimar las coordenadas tridimensionales de un punto, es necesario que este punto aparezca en al menos 2 fotografías. De esta forma, por cada punto en una fotografía habrá un par de ecuaciones de observación, en este caso se trata de las ecuaciones de colineldad. Entonces, si se quieren ajustar las

coordenadas X, Y, Z de un punto utilizando mínimos cuadrados se necesitan al menos 4 ecuaciones de observación, las cuales se obtendrán si el punto aparece en 2 fotografías separadas al menos por una traslación.

Hay que recordar que el par de ecuaciones de colinealidad asociado al punto j que aparece en la fotografía i , es el mostrado en la Ecuación (??), la cual se puede escribir en forma compacta como

$$\mathbf{V}_{ij} + \dot{\mathbf{B}}_{ij} \dot{\Delta}_i + \ddot{\mathbf{B}}_{ij} \ddot{\Delta}_j = \epsilon_{ij}. \quad (9)$$

Con objeto de formular el modelo matemático completo, incluyendo todas las ecuaciones de observación para todos los puntos en todas las imágenes, a continuación se explica como se deben de agrupar u organizar las ecuaciones. Suponiendo que el punto j aparece en las m fotografías, el conjunto de ecuaciones de colinealidad generado por sus mediciones en las m fotografías es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1j} \\ \mathbf{V}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{B}}_{1j} & & & \\ & \dot{\mathbf{B}}_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dot{\mathbf{B}}_{mj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Delta}_1 \\ \dot{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\Delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{B}}_{1j} \\ \ddot{\mathbf{B}}_{2j} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{B}}_{mj} \end{bmatrix} \ddot{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \epsilon_{1j} \\ \epsilon_{2j} \\ \vdots \\ \epsilon_{mj} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

lo cual puede ser simplemente expresado como

$$\underset{(2m, 1)}{\mathbf{V}_j} + \underset{(2m, 6m)(6m, 1)}{\dot{\mathbf{B}}_j \dot{\Delta}} + \underset{(2m, 3)(3, 1)}{\ddot{\mathbf{B}}_j \ddot{\Delta}} = \underset{(2m, 1)}{\epsilon_j}. \quad (11)$$

Ahora, ya que se supone que cada punto j está en las m fotografías, cada punto da origen a un conjunto de ecuaciones de colinealidad dado por (??). Entonces, el conjunto completo de ecuaciones de colinealidad para los n puntos es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{B}}_1 \\ \dot{\mathbf{B}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{B}}_n \end{bmatrix} \dot{\Delta} + \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{B}}_1 & & & \\ & \ddot{\mathbf{B}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddot{\mathbf{B}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\Delta}_1 \\ \ddot{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\Delta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}, \quad (12)$$

lo cual puede ser simplemente expresado como

$$\begin{matrix} \mathbf{V} & + & \dot{\mathbf{B}}\dot{\Delta} & + & \ddot{\mathbf{B}}\ddot{\Delta} & = & \epsilon, \\ (2mn, 1) & & (2mn, 6m)(6m, 1) & & (2mn, 3n)(3n, 1) & & (2mn, 1) \end{matrix} \quad (13)$$

Esto denota el conjunto de ecuaciones de observación completo. Una vez que el conjunto de ecuaciones de observación está completo, las restricciones para las coordenadas de campo y los parámetros de orientación exterior conocidos son agregadas al modelo, con el fin de eliminar la deficiencia de rango 7.

Primero se describe como se forman las ecuaciones de restricción para los parámetros de orientación exterior. Para no perder generalidad, se supone que los valores medidos existen para los parámetros de orientación exterior de todas las fotografías, así como para las coordenadas de campo de todos los puntos. Entonces, el conjunto de ecuaciones para los parámetros de orientación exterior, considerando la Ecuación (??), es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_1 \\ \dot{\mathbf{V}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{V}}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\Delta}_1 \\ \dot{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\Delta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{C}}_1 \\ \dot{\mathbf{C}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{C}}_m \end{bmatrix}, \quad (14)$$

o lo que es lo mismo, pero en forma compacta

$$\begin{matrix} \dot{\mathbf{V}} & - & \dot{\Delta} & = & \dot{\mathbf{C}}. \\ (6m, 1) & & (6m, 1) & & (6m, 1) \end{matrix} \quad (15)$$

Hay que recordar que si no se tiene información (mediciones) para los parámetros de orientación exterior de la fotografía i , el lugar correspondiente a $\dot{\mathbf{C}}_i$ en la Ecuación (??) es llenado con ceros.

De manera análoga, el conjunto de ecuaciones de restricción para las coordenadas de campo para los n puntos, tomando en cuenta la Ecuación (??), es

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{V}}_1 \\ \ddot{\mathbf{V}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{V}}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\Delta}_1 \\ \ddot{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\Delta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{C}}_1 \\ \ddot{\mathbf{C}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{C}}_n \end{bmatrix}, \quad (16)$$

lo cual también se puede escribir como

$$\begin{matrix} \ddot{\mathbf{V}} & - & \ddot{\Delta} & = & \ddot{\mathbf{C}}. \\ (3n, 1) & & (3n, 1) & & (3n, 1) \end{matrix} \quad (17)$$

De igual forma que como se hizo para las restricciones de los parámetros de orientación exterior, se hace para el caso de las restricciones en los puntos, esto es, si no se tienen mediciones para el punto j , en la Ecuación (??) $\ddot{\mathbf{C}}_j$ es llenado con ceros. Cabe aclarar que en caso de no contar con información adicional sobre los parámetros de orientación exterior (mediciones), el vector $\dot{\mathbf{C}}$ de la Ecuación (??) es nulo, esto es, todos sus elementos son 0 lo cual es equivalente a no considerar tales restricciones.

Ahora, es posible presentar el modelo matemático completo, formado por las ecuaciones de observación (??) y las restricciones (??) y (??)

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &+ \dot{\mathbf{B}}\dot{\Delta} + \ddot{\mathbf{B}}\ddot{\Delta} = \epsilon \\ \dot{\mathbf{V}} &- \dot{\Delta} = \dot{\mathbf{C}} \\ \ddot{\mathbf{V}} &+ \quad - \ddot{\Delta} = \ddot{\mathbf{C}}, \end{aligned} \quad (18)$$

expresándolo en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{B}} & \ddot{\mathbf{B}} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Delta} \\ \ddot{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dot{\mathbf{C}} \\ \ddot{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

lo cual puede ser expresado simplemente como

$$\overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{B}}\Delta = \overline{\mathbf{C}}. \quad (20)$$

La solución de mínimos cuadrados de la Ecuación (??) es

$$(\overline{\mathbf{B}}^T \overline{\mathbf{W}} \overline{\mathbf{B}})\Delta = (\overline{\mathbf{B}}^T \overline{\mathbf{W}} \overline{\mathbf{C}}) \quad (21)$$

o explícitamente

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{K},$$

recordando que

$$\mathbf{N} = (\overline{\mathbf{B}}^T \overline{\mathbf{W}} \overline{\mathbf{B}}) \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = (\overline{\mathbf{B}}^T \overline{\mathbf{W}} \overline{\mathbf{C}}).$$

N se conoce como las ecuaciones normales resultantes de hacer el ajuste de mínimos cuadrados. Una vez que ha sido calculado el valor de Δ , el valor de $\overline{\mathbf{V}}$ se puede calcular usando la Ecuación (??) y despejando $\overline{\mathbf{V}}$ como a continuación se muestra

$$\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{B}}\Delta.$$

En la Ecuación (??), $\overline{\mathbf{W}}$ es una matriz de peso usada para el ajuste de mínimos cuadrados. La estructura de la matriz de peso será detallada a continuación.

II.5.5 Estructura de la Matriz de Peso

La matriz $\overline{\mathbf{W}}$ en la Ecuación (??) juega describe el nivel de confianza correspondiente a una estimación. Esta matriz está formada por un conjunto de submatrices, las cuales

sirven como matrices de peso asignadas a los parámetros observados. Dichas matrices deben ser apiladas y organizadas exactamente en la misma forma que el vector de residuales $\overline{\mathbf{V}}$, en este sentido es provechoso reexaminar la estructura del vector $\overline{\mathbf{V}}$.

$$\overline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{mn} \\ \dot{\mathbf{V}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{V}}_m \\ \ddot{\mathbf{V}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{V}}_n \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{V}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1j} \\ \mathbf{V}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{mj} \end{bmatrix} \quad \text{son los residuales de las mediciones en las imágenes para cada punto } j.$$

$$\dot{\mathbf{V}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\omega_i} \\ \mathbf{V}_{\phi_i} \\ \mathbf{V}_{\kappa_i} \\ \mathbf{V}_{X_i^c} \\ \mathbf{V}_{Y_i^c} \\ \mathbf{V}_{Z_i^c} \end{bmatrix} \quad \text{son los residuales de las mediciones de los parámetros de orientación exterior de la imagen } i \text{ y}$$

$$\ddot{\mathbf{V}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{X_j} \\ \mathbf{V}_{Y_j} \\ \mathbf{V}_{Z_j} \end{bmatrix} \quad \text{son los residuales de las mediciones de las coordenadas de campo del punto } j.$$

El peso de una observación es inversamente proporcional a la varianza de las mediciones.

De esta forma w_i el peso de la medición i , está dado por

$$w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2},$$

donde σ_0^2 es un factor de escala constante llamado varianza de peso unitario, al cual se le puede asignar un valor arbitrario para un problema dado. Sin embargo, una vez definido, el mismo valor debe ser usado para escalar los pesos de todas las demás observaciones durante el ajuste.

A continuación, se describe cómo se forman las submatrices de peso correspondientes a las mediciones en las imágenes, las correspondientes a las mediciones a algunos de los parámetros de orientación exterior y las correspondientes a las mediciones de las coordenadas tridimensionales de los puntos.

En el caso de las mediciones en las imágenes, se define la matriz de varianza-covarianza para un par de coordenadas (x_{ij}, y_{ij}) como sigue

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_{ij}}^2 & \sigma_{x_{ij}y_{ij}} \\ \sigma_{x_{ij}y_{ij}} & \sigma_{y_{ij}}^2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

donde $\sigma_{x_{ij}}^2$ y $\sigma_{y_{ij}}^2$ son las varianzas de las mediciones de x_{ij} y y_{ij} respectivamente y, $\sigma_{x_{ij}y_{ij}}$ es la covarianza entre las dos mediciones. A partir de la matriz de varianza-covarianza se define la matriz de peso correspondiente a estas dos mediciones como sigue

$$\mathbf{W}_{ij} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \sigma_{x_{ij}}^2 & \sigma_{x_{ij}y_{ij}} \\ \sigma_{x_{ij}y_{ij}} & \sigma_{y_{ij}}^2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Una vez que se tienen todas las matrices de peso para un punto j en cada una de las imágenes, se procede a apilarlas en una sola matriz obteniendo como resultado

$$\mathbf{W}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1j} & & & \\ & \mathbf{W}_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{W}_{mj} \end{bmatrix}.$$

De igual forma, si se juntan las matrices de peso para todos los puntos se obtiene

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & & & \\ & \mathbf{W}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{W}_n \end{bmatrix}. \quad (23)$$

$\mathbf{W}_j$ y $\mathbf{W}$ son matrices diagonales porque se supone que las mediciones de los puntos en imágenes individuales son independientes. Por otro lado, para definir la matriz de pesos correspondiente a las mediciones de los parámetros de orientación exterior de la fotografía i , primero se define la matriz de varianza-covarianza de dichos parámetros

$$\dot{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{\omega_i}^2 & \sigma_{\omega_i\phi_i} & \sigma_{\omega_i\kappa_i} & \sigma_{\omega_iX_i^c} & \sigma_{\omega_iY_i^c} & \sigma_{\omega_iZ_i^c} \\ \sigma_{\phi_i\omega_i} & \sigma_{\phi_i}^2 & \sigma_{\phi_i\kappa_i} & \sigma_{\phi_iX_i^c} & \sigma_{\phi_iY_i^c} & \sigma_{\phi_iZ_i^c} \\ \sigma_{\kappa_i\omega_i} & \sigma_{\kappa_i\phi_i} & \sigma_{\kappa_i}^2 & \sigma_{\kappa_iX_i^c} & \sigma_{\kappa_iY_i^c} & \sigma_{\kappa_iZ_i^c} \\ \sigma_{X_i^c\omega_i} & \sigma_{X_i^c\phi_i} & \sigma_{X_i^c\kappa_i} & \sigma_{X_i^c}^2 & \sigma_{X_i^cY_i^c} & \sigma_{X_i^cZ_i^c} \\ \sigma_{Y_i^c\omega_i} & \sigma_{Y_i^c\phi_i} & \sigma_{Y_i^c\kappa_i} & \sigma_{Y_i^cX_i^c} & \sigma_{Y_i^c}^2 & \sigma_{Y_i^cZ_i^c} \\ \sigma_{Z_i^c\omega_i} & \sigma_{Z_i^c\phi_i} & \sigma_{Z_i^c\kappa_i} & \sigma_{Z_i^cX_i^c} & \sigma_{Z_i^cY_i^c} & \sigma_{Z_i^c}^2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

donde, como antes, $\sigma_{\omega_i}^2, \sigma_{\phi_i}^2, \dots, \sigma_{Z_i^c}^2$ son las varianzas de las mediciones de $\omega, \phi, \dots, Z_i^c$ respectivamente y los demás elementos de la matriz fuera de la diagonal son las covarianzas. Es importante recordar que es necesario completar con ceros las posiciones sobre las que no se dispone de una medición. Entonces, la matriz de peso asociada a los parámetros de orientación exterior de la fotografía i es

$$\dot{\mathbf{W}}_i = \sigma_0^2 \dot{\sigma}_i^{-1}.$$

Y la matriz de peso completa para los parámetros de orientación exterior de las m fotografías de los que se tienen mediciones es la siguiente

$$\dot{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{W}}_1 & & & \\ & \dot{\mathbf{W}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dot{\mathbf{W}}_m \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Es importante recordar que sólo se tendrán mediciones para los parámetros de orientación exterior de algunas fotografías. A pesar de ello, las matrices tienen que estar completas, como si se tuvieran las mediciones para todos ellos. Esto se hace con el fin de que al realizar las operaciones entre matrices no se tengan problemas con las dimensiones. Entonces, para la matriz de la Ecuación (??), si se cuenta con la medición del parámetro de orientación exterior, se pone un 1 en el lugar correspondiente al mismo (esto es, en el lugar correspondiente a $\omega, \phi, \dots, Y_i^c$ y/o Z_i^c) si no, se pone un 0. Otra suposición es que no existe correlación entre los parámetros de orientación exterior de diferentes fotografías, razón por la cual los elementos fuera de la diagonal de la matriz expresada por la Ecuación (??) son cero. Entonces, en caso de que no se cuente con mediciones de los parámetros de orientación exterior, la matriz $\dot{\mathbf{W}}$ será nula.

De forma muy parecida se construye la matriz de pesos correspondiente a las mediciones de las coordenadas tridimensionales de los puntos, la matriz de varianza-covarianza de las coordenadas de campo del punto j puede ser expresada como sigue

$$\ddot{\sigma}_j = \begin{bmatrix} \sigma_{X_j}^2 & \sigma_{X_j Y_j} & \sigma_{X_j Z_j} \\ \sigma_{Y_j X_j} & \sigma_{Y_j}^2 & \sigma_{Y_j Z_j} \\ \sigma_{Z_j X_j} & \sigma_{Z_j Y_j} & \sigma_{Z_j}^2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

donde $\sigma_{X_j}^2, \sigma_{Y_j}^2$ y $\sigma_{Z_j}^2$ son las varianzas de las mediciones de las coordenadas X_j, Y_j y Z_j respectivamente y los demás términos corresponden a las covarianzas entre las

mediciones. La matriz de peso correspondiente a estas mediciones es

$$\ddot{\mathbf{W}}_j = \sigma_0^2 \ddot{\sigma}_j^{-1}.$$

Nuevamente se supone que no hay correlación entre las mediciones de las coordenadas de los diferentes puntos. Así la matriz de peso completa para los n puntos es

$$\ddot{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{W}}_1 & & & \\ & \ddot{\mathbf{W}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddot{\mathbf{W}}_n \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Se debe tener en cuenta que no se tienen mediciones para todos los puntos, sólo para los llamados puntos de control. En nuestro caso, se piden como mínimo 2 y 1/3 pero, por la misma razón que se dió para las matrices de peso de los parámetros de orientación exterior, la matriz de peso para las mediciones de las coordenadas tridimensionales de los puntos expresados en la Ecuación (??) deben estar completas, como si se contara con mediciones de todos los puntos. Entonces, si se cuenta con la medición de la coordenada (X, Y o Z), en la Ecuación (??) se pone un 1 en el lugar correspondiente a la coordenada, si no, se pone un 0. Una vez que se ha formado cada una de las submatrices (??), (??) y (??), se apilan en una sola y se obtiene la matriz de peso total $\overline{\mathbf{W}}$

$$\overline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & & \\ & \dot{\mathbf{W}} & \\ & & \ddot{\mathbf{W}} \end{bmatrix}.$$

II.5.6 Criterios de Convergencia

Pueden ser utilizados diferentes criterios de convergencia para el proceso iterativo, algunos de los cuales se mencionan a continuación

1. *Límites de convergencia para $\Delta\omega_i$, $\Delta\phi_i$ y $\Delta\kappa_i$.* Con este criterio, el proceso iterativo se detiene si $\Delta\omega_i$, $\Delta\phi_i$ y $\Delta\kappa_i$ ($i = 1, \dots, m$) son menores o iguales a un valor predefinido λ , el cual depende de la precisión deseada para la solución. Este no es un buen criterio porque el proceso podría no detenerse si una sola corrección (por ejemplo $\Delta\omega_i$) excede el valor de λ . Es posible también que para la i -ésima fotografía los valores de las correcciones $\Delta\omega_i$, $\Delta\phi_i$ y $\Delta\kappa_i$ sean mayores a λ , en cuyo caso tampoco se detendrá el proceso aunque las correcciones en las demás fotografías sean menores que λ .
2. *Número fijo de iteraciones.* En este criterio debe indicarse cuál es el número de veces que se desea repetir el proceso. Este tampoco es un buen criterio debido a que es difícil predecir el número requerido de iteraciones para encontrar la solución a un problema en particular. Sin embargo, este criterio puede ser usado en combinación con otros para establecer un número máximo de iteraciones.
3. *Diferencia de m_0 entre iteraciones sucesivas.* El proceso iterativo del cálculo de correcciones se detiene si la diferencia entre el *error estándar de peso unitario* calculado de dos iteraciones sucesivas es menor que algún valor dado k . El *error estándar de peso unitario* m_0 , puede ser calculado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
m_0 &= \pm \sqrt{\frac{\mathbf{\bar{V}}^T \mathbf{\bar{W}} \mathbf{\bar{V}}}{n - u}} \\
&= \pm \left(\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_{ij}^T \mathbf{W}_{ij} \mathbf{V}_{ij} + \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{V}}_i^T \dot{\mathbf{W}}_i \dot{\mathbf{V}}_i + \sum_{j=1}^n \ddot{\mathbf{V}}_j^T \ddot{\mathbf{W}}_j \ddot{\mathbf{V}}_j}{n - u} \right)^{1/2} \quad (28)
\end{aligned}$$

donde n es el número de ecuaciones de observación y u es el número de incógnitas. La cantidad $(n - u)$ es llamada número de grados de libertad en la solución. Los

errores residuales pueden ser calculados al final de cada iteración, sin embargo, se pueden ahorrar muchos cálculos si se reconoce el hecho de que la solución converge, esto es, las correcciones (Δ) se aproximan a cero y entonces, $\mathbf{V}_{ij} \approx \epsilon_{ij}$, $\dot{\mathbf{V}}_i \approx \dot{\mathbf{C}}_i$ y $\ddot{\mathbf{V}}_j \approx \ddot{\mathbf{C}}_j$. Por lo tanto, la Ecuación (??) puede ser aproximada por la siguiente expresión

$$m_0 = \pm \left(\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \epsilon_{ij}^T \mathbf{W}_{ij} \epsilon_{ij} + \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{C}}_i^T \dot{\mathbf{W}}_i \dot{\mathbf{C}}_i + \sum_{j=1}^n \ddot{\mathbf{C}}_j^T \ddot{\mathbf{W}}_j \ddot{\mathbf{C}}_j}{n - u} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

El límite de convergencia que puede ser establecido es $k = 0.1$ ó $k = 0.01$. Este es un buen criterio de convergencia ya que m_0 siempre se estabiliza en una solución.

El criterio usado para realizar los ajustes fue el tercero en combinación con el segundo. En el caso del segundo criterio se establece 10 como el número máximo de iteraciones, mientras que en el caso del tercer criterio, se utiliza la Ecuación (??) para calcular m_0 al final de cada iteración, estableciendo un valor de $k = 0.01$.

II.6 Análisis Basado en Fenómeno de Propagación del Error

II.6.1 El Modelo de Cámara Oscura

La formación de una imagen mediante una cámara fotográfica puede ser representada por un esquema semejante al de la Figura ???. Este modelo es conocido como cámara oscura. Este modelo está basado en la suposición fundamental de que el centro de proyección $\mathbf{C}$, el punto de observación $\mathbf{P}$, así como su correspondiente punto $\mathbf{p}$ en la imagen, se encuentran sobre una misma recta. El punto en la imagen es proyectado en un plano ortogonal al eje óptico, dicho plano se encuentra a una distancia $-f$ del centro de exposición. El punto de intersección del eje óptico con el plano de la imagen

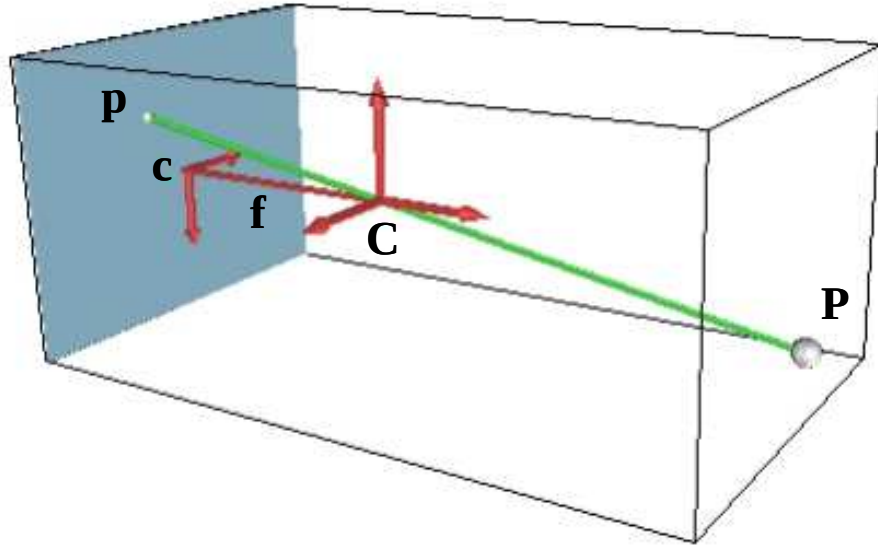


Figura 7: Modelo de cámara oscura .

es dado por $\mathbf{c}$, y es llamado punto principal. Bajo este modelo, cada punto en la escena es proyectado hacia la imagen a través de $\mathbf{C}$, mediante una línea recta.

La transformación $W \rightarrow I$ de la escena a la imagen es dividida en dos transformaciones consecutivas; una transformación del marco referencia de la escena al de la cámara, $W \rightarrow C$ y una transformación $C \rightarrow I$ del marco de referencia de la cámara al de la imagen. Veamos cada una de estas transformaciones por separado.

Transformación Mundo-Cámara

La proyección de un punto $\mathbf{P}$ en el espacio hacia el plano de la imagen depende de la posición de ese punto con respecto a la cámara. La posición y orientación de una cámara se conocen como sus *parámetros extrínsecos*. La posición del punto $\mathbf{P}$, respecto a un marco de referencia arbitrario, está dada por sus coordenadas homogéneas $(X, Y, Z, 1)^T$. Por otro lado, la posición de $\mathbf{P}$ respecto al marco de referencia propio de la cámara, cuyo origen es el centro de proyección $\mathbf{C}$, está dado por $(X_C, Y_C, Z_C, 1)^T$.

Pasar $\mathbf{P}$ de un marco de referencia a otro equivale a hacer coincidir ambos marcos de referencia, es decir, trasladar y girar uno de los ejes de tal manera en que sus orígenes y sus ejes se encuentren en la misma posición y orientación. Esto se logra mediante una transformación rígida de la forma:

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{WC} & \mathbf{T}_{WC} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

donde la matriz de rotación R_{WC} está en función de tres parámetros de rotación (α, β, γ) y junto con el vector de translación T_{WC} , también de tres grados de libertad, caracterizan la orientación y posición de la cámara respecto al marco de coordenadas de referencia de la escena.

Transformación Cámara-Imagen

La transformación cámara-imagen $C \rightarrow I$, es dividida en dos transformaciones:

1. Una transformación perspectiva del espacio tridimensional al plano de la imagen.
2. Una transformación afín que escala y orienta la imagen proyectada en el sistema de coordenadas de la imagen.

a) Transformación perspectiva.

Esta transformación elimina una de las dimensiones de la escena, haciendo que a cada punto de la imagen correspondan todos los puntos en el espacio que se proyectan en éste. El plano de formación de la imagen puede considerarse enfrente del centro de proyección de la imagen sin cambiar la geometría del modelo. A partir de esto, se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{f}{Z}. \quad (31)$$

La relación entre las coordenadas tridimensionales y las coordenadas de la imagen expresadas en (??) pueden ser expresadas como:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde $x = U/S$, $y = V/S$ si $S \neq 0$.

El caso cuando la distancia focal $f=1$, es conocido como proyección normalizada y su matriz de transformación está dada por :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Transformación afín.

Esta transformación depende de las características propias de la cámara, las cuales son conocidas como *parámetros intrínsecos*. Considera la manera en que la información expresada en el plano de la imagen está relacionada con el marco de referencia de la cámara. La consideración de estos factores es importante porque:

1. El origen del plano de la imagen (u_0, v_0) no es conocido de antemano y generalmente no coincide con la intersección del eje óptico y el plano.
2. Las unidades de los ejes de coordenadas de la imagen no son necesariamente iguales, siendo éstas determinadas por la características del dispositivo de sensado.
3. Los dos ejes de la imagen real pueden no formar un ángulo recto.

El significado geométrico de los parámetros intrínsecos puede observarse en la Figura ???. Las unidades a lo largo de los ejes u , v son k_u , k_v con respecto a las unidades

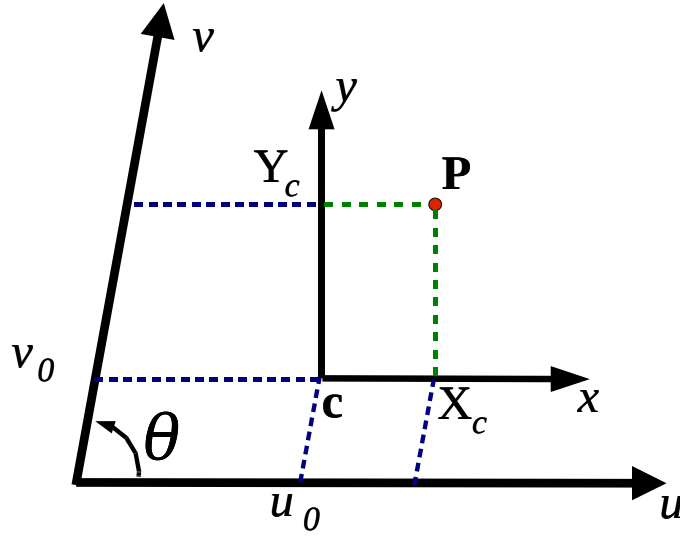


Figura 8: Parámetros intrínsecos de una cámara.

Tabla III: Parámetros intrínsecos de una cámara.

Parámetro	Descripción
f	: Distancia focal de la cámara
k_u	: Tamaño horizontal de los píxeles en el plano de la imagen
k_v	: Tamaño vertical de los píxeles en el plano de la imagen
θ	: Angulo formado por los ejes u y v

utilizadas en los ejes x , y . De esta forma, adoptando las definiciones de la Tabla ??, la matriz que incorpora estos parámetros está dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f k_u & f k_v \cot \theta & u_0 \\ 0 & f k_v / \sin \theta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, una cámara puede ser considerada como un sistema que realiza una transformación proyectiva no lineal desde el espacio proyectivo $\mathbf{P}^3$ hacia el plano

proyectivo $\mathbf{P}^2$. Las transformaciones perspectiva y afín son aplicadas sobre la información expresada en el sistema de coordenadas de la cámara y la convierten, dado un factor de escala, al sistema de coordenadas de la imagen, de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} su \\ sv \\ s \end{bmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} \\ 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

II.6.2 Ecuaciones de Colinealidad

A partir de las ecuaciones (??) y (??), la relación entre un punto en la escena y un punto en la imagen, puede expresarse de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} su \\ sv \\ s \end{bmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} & \mathbf{D} \\ 3 \times 3 & 3 \times 4 & 4 \times 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{M} \\ 3 \times 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

De esta forma, la transformación Mundo-Imagen es expresada mediante una matriz $\mathbf{M}$ de dimensiones 3×4 , que relaciona un punto $\mathbf{P}$ en la escena con un punto $\mathbf{p}$ en la imagen. Ambos puntos son representados en coordenadas homogéneas y la expresión resultante es de la forma

$$\begin{matrix} \mathbf{p} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{M} \\ 3 \times 4 \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{P} \\ 4 \times 1 \end{matrix}.$$

Tal expresión resume el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} su \\ sv \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

o en forma algebraica

$$su = m_{11}X + m_{12}Y + m_{13}Z + m_{14}$$

$$sv = m_{21}X + m_{22}Y + m_{23}Z + m_{24}$$

$$s = m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}Z + m_{34}.$$

Dado que se desea obtener estimaciones que no estén ligadas a un factor de escala, se realizan manipulaciones algebraicas sobre este conjunto de ecuaciones. Dividiendo los primeros dos renglones entre el tercero se obtienen dos expresiones, una para cada coordenada de la imagen, donde se elimina el factor de escala:

$$\begin{aligned} u &= \frac{m_{11}X + m_{12}Y + m_{13}Z + m_{14}}{m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}Z + m_{34}} \\ v &= \frac{m_{21}X + m_{22}Y + m_{23}Z + m_{24}}{m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}Z + m_{34}} \end{aligned} \quad (35)$$

Estas dos expresiones expresan la relación entre un punto en la escena y un punto en la imagen, a través de una matriz de transformación perspectiva. En esta relación se basa nuestro proceso de reconstrucción tridimensional y sirve como punto de partida del desarrollo de un criterio de optimización para el diseño de redes fotogramétricas.

Sistemas Multiestación

En un sistema multiestación se trabaja con múltiples vistas de una misma escena. Un punto en la escena, $\mathbf{P}_j$, $j = 1, \dots, n$, de coordenadas homogéneas $(X_j, Y_j, Z_j, 1)^T$ es proyectado en $\mathbf{p}_{ij}$ puntos de coordenadas de imagen $(u_{ij}, v_{ij})^T$, a través de una matriz de proyección $\mathbf{M}_i$, $i = 1, \dots, m$, de tamaño 3×4 correspondiente a la i -ésima imagen. El proceso de restitución tridimensional a partir de varias imágenes comprende un sistema de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{M}_i \mathbf{P}_j,$$

donde cada matriz M representa un mapeo perspectivo como el mostrado en la Ecuación (??). Sean u_{ij} y v_{ij} las coordenadas fotográficas de un punto j en la fotografía i . Para cada par de coordenadas de imagen $(u_{ij}, v_{ij})^T$, observado en cada imagen, existe la siguiente relación:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \frac{m_{11}^i X_j + m_{12}^i Y_j + m_{13}^i Z_j + m_{14}^i}{m_{31}^i X_j + m_{32}^i Y_j + m_{33}^i Z_j + m_{34}^i} \\ v_{ij} &= \frac{m_{21}^i X_j + m_{22}^i Y_j + m_{23}^i Z_j + m_{24}^i}{m_{31}^i X_j + m_{32}^i Y_j + m_{33}^i Z_j + m_{34}^i} \end{aligned} \quad (36)$$

Considerando como conocidos la matriz de proyección perspectiva de cada cámara así como los puntos en la imagen, podemos desarrollar un estudio de propagación de error utilizando las Ecuaciones (??), las cuales pueden ser escritas como sigue:

$$\begin{bmatrix} (u_{ij}m_{31}^i - m_{11}^i) & (u_{ij}m_{32}^i - m_{12}^i) & (u_{ij}m_{33}^i - m_{13}^i) \\ (v_{ij}m_{31}^i - m_{21}^i) & (v_{ij}m_{32}^i - m_{22}^i) & (v_{ij}m_{33}^i - m_{23}^i) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (m_{14}^i - u_{ij}m_{34}^i) \\ (m_{24}^i - v_{ij}m_{34}^i) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

o en notación matricial, considerando un punto en la escena,

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}_i, \mathbf{M}_i)\mathbf{P} = \mathbf{b}(\mathbf{p}_i, \mathbf{M}_i), \quad (38)$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz $2i \times 3$ y $\mathbf{b}$ es un vector $2i \times 1$. Dado que la inversa de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ puede ser calculada, podemos encontrar la solución de mínimos cuadrados

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (39)$$

la cual minimiza $\|\mathbf{AP} - \mathbf{b}\|^2$. Esta ecuación expresa la relación lineal entre los puntos $\mathbf{p}_{ij}$ en la imagen y los puntos tridimensionales $\mathbf{P}_j$ a través de las matrices proyectivas $\mathbf{M}_i$. El problema involucra un conjunto de cámaras observando P puntos colocados sobre S superficies. Deseamos conocer la red de cámaras que mejor nos permita reducir la incertidumbre de los puntos reconstruidos. La manera de resolver el sistema es

similar al concepto de *Propagación Limitada del Error* en fotogrametría. Se supone que los parámetros extrínsecos están libres de error y que las variancias en las coordenadas de los puntos pertenecientes al objeto, surgen solamente de la propagación de errores aleatorios en la mediciones de las coordenadas de la imagen.

II.6.3 Estimación del Error Tridimensional

Hasta ahora, hemos estudiado la función para transformar un punto en la imagen en un punto en el espacio

$$\mathbf{P} = f(\mathbf{p}) , \quad (40)$$

dada por la Ecuación (??), la cual es útil para desarrollar un análisis de propagación de error. La clave para manipular incertidumbre geométrica es ser capaz de transformar la información o función de densidad de probabilidad correspondiente a una forma en particular (punto en la imagen), hacia otra forma de interés (punto en el espacio). Esta transformación puede ser agrupada en una familia de transformaciones que aproximamos a la transformación exacta mediante una relación de primer orden utilizando una serie de Taylor. Momentos sucesivos pueden ser encontrados calculando términos de orden mayor; pero utilizar términos de mayor orden no es viable ni deseable, dado que toda simplicidad computacional sería perdida. De esta manera, una aproximación lineal es utilizada, en la cual se supone una distribución Gaussiana. Entonces la media $E[P]$ y covariancia ΛP representan información suficiente para definir completamente la función de densidad de la característica en observación. Todo esto es obtenido por la siguiente proposición:

Proposición 1. *Dada una variable aleatoria $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, de distribución Gaussiana, media $E[\mathbf{p}]$, y covariancia $\Lambda \mathbf{p}$, y sea $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$, el vector aleatorio dado por $\mathbf{P} = f(\mathbf{p})$, donde f es una función de la clase C^1 , la media de $\mathbf{P}$ puede ser aproximada a un*

desarrollo de Taylor de primer orden mediante $f(E[\mathbf{p}])$ y su covariancia mediante :

$$\Lambda P \simeq \frac{\partial f(E[p])}{\partial p} \Lambda p \frac{\partial f(E[p])^T}{\partial p} . \quad (41)$$

Comprobación: Un desarrollo de Taylor de primer orden f en los límites de $E[\mathbf{p}]$ se presenta como:

$$f(\mathbf{p}) = f(E[p]) + \frac{\partial f(E[p])}{\partial p} (\mathbf{p} - E[p]) + \Theta(\mathbf{p}) . \quad (42)$$

El término $\frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial \mathbf{p}}$, representa una matriz Jacobiana de $f(\mathbf{p})$ en $E[\mathbf{p}]$ y $\Theta(\mathbf{p})$ es una función acotada en cada coordenada dada por $\varepsilon(\|\mathbf{p} - E[\mathbf{p}]\|^2)$, donde la función $\varepsilon : t \rightarrow \varepsilon(t)$ desde $\mathbb{R}$ hacia $\mathbb{R}$ es tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Suponiendo ahora que cualquier muestra de $\mathbf{p}$ es suficientemente cercana a $E[\mathbf{p}]$, podemos aproximar f al primer orden usando la Ecuación (??), la cual brinda:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{P}] &\simeq f(E[\mathbf{p}]) , \\ f(\mathbf{p}) - f(E[\mathbf{p}]) &\simeq \frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial p} (\mathbf{p} - E[\mathbf{p}]) . \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} &E[(f(\mathbf{p}) - f(E[\mathbf{p}]))(f(\mathbf{p}) - f(E[\mathbf{p}]))^T] \\ &\simeq E\left[\frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{p} - E[\mathbf{p}]) (\mathbf{p} - E[\mathbf{p}])^T \left(\frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial p}\right)^T\right] \\ &= \frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial \mathbf{p}} E[(p - E[\mathbf{p}]) (\mathbf{p} - E[\mathbf{p}])^T] \left(\frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial p}\right)^T , \end{aligned}$$

lo cual nos da una aproximación de primer orden de la matriz de covariancia de $\mathbf{P}$ como una función de la matriz de covariancia de p dada por la Ecuación (??).

Por lo tanto, ΛP es una matriz simétrica positiva, la cual describe los límites de

$\mathbf{P} = f(\mathbf{p})$ en la frontera de $E[\mathbf{P}] = f(E[\mathbf{p}])$, dados los de p en la cercanía de $E[\mathbf{p}]$.

Esta proposición nos permite calcular la incertidumbre de los límites de puntos tridimensionales a partir de conocer la incertidumbre de los puntos en la imagen. La matriz ΛP consiste en

$$\Lambda P_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial u_i} & \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial u_i} & \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial u_i} & \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial v_i} \end{bmatrix} [\Lambda p_{i \times i}] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial v_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial v_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial v_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial u_i} & \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial u_i} & \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial u_i} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial v_i} & \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial v_i} & \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial v_i} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

El término diferencial del valor esperado es obtenido de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial p} = J(\mathbf{P});$$

recordemos que

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (u_{ij}m_{31}^i - m_{11}^i) & (u_{ij}m_{32}^i - m_{12}^i) & (u_{ij}m_{33}^i - m_{13}^i) \\ (v_{ij}m_{31}^i - m_{21}^i) & (v_{ij}m_{32}^i - m_{22}^i) & (v_{ij}m_{33}^i - m_{23}^i) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} (m_{14}^i - u_{ij}m_{34}^i) \\ (m_{24}^i - v_{ij}m_{34}^i) \end{bmatrix}.$$

La obtención del vector $\mathbf{P}$ es descompuesta de la forma: $\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{S}$, donde

$$\mathbf{R}_{3 \times 3} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_{3 \times 1} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

La matriz $\mathbf{R}$ es la inversa de una matriz simétrica $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ de la forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}^{-1},$$

donde los elementos de la matriz están dados por

$$\begin{aligned}
a &= (u_{ij}m_{31}^i - m_{11}^i)^2 + (v_{ij}m_{31}^i - m_{21}^i)^2 \\
b &= (u_{ij}m_{32}^i - m_{12}^i)(u_{ij}m_{31}^i - m_{11}^i) + (v_{ij}m_{32}^i - m_{22}^i)(v_{ij}m_{31}^i - m_{21}^i) \\
c &= (u_{ij}m_{33}^i - m_{13}^i)(u_{ij}m_{31}^i - m_{11}^i) + (v_{ij}m_{33}^i - m_{23}^i)(v_{ij}m_{31}^i - m_{21}^i) \\
d &= (u_{ij}m_{32}^i - m_{12}^i)^2 + (v_{ij}m_{32}^i - m_{22}^i)^2 \\
e &= (u_{ij}m_{33}^i - m_{13}^i)(u_{ij}m_{32}^i - m_{12}^i) + (v_{ij}m_{33}^i - m_{23}^i)(v_{ij}m_{32}^i - m_{22}^i) \\
f &= (u_{ij}m_{33}^i - m_{13}^i)^2 + (v_{ij}m_{33}^i - m_{23}^i)^2.
\end{aligned}$$

Consecuentemente los valores para $\mathbf{R}$ son

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{df-e^2}{G} & \frac{bf-ce}{G} & \frac{be-cd}{G} \\ \frac{bf-ce}{G} & \frac{af-c^2}{G} & \frac{ae-bc}{G} \\ \frac{be-cd}{G} & \frac{ae-bc}{G} & \frac{ad-b^2}{G} \end{bmatrix},$$

donde $G = adf - ae^2 - b^2f + 2bce - c^2d$. Por otro lado, los valores de la matriz $\mathbf{S}$ son

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} (u_{ij}m_{31}^i - m_{11}^i)(m_{14}^i - u_{ij}m_{34}^i) + (v_{ij}m_{31}^i - m_{21}^i)(m_{24}^i - v_{ij}m_{34}^i) \\ (u_{ij}m_{32}^i - m_{12}^i)(m_{14}^i - u_{ij}m_{34}^i) + (v_{ij}m_{32}^i - m_{22}^i)(m_{24}^i - v_{ij}m_{34}^i) \\ (u_{ij}m_{33}^i - m_{13}^i)(m_{14}^i - u_{ij}m_{34}^i) + (v_{ij}m_{33}^i - m_{23}^i)(m_{24}^i - v_{ij}m_{34}^i) \end{bmatrix}.$$

De esta manera, el Jacobiano es obtenido como sigue:

$$J(\mathbf{P}) = \mathbf{R}'\mathbf{S} + \mathbf{R}\mathbf{S}'.$$

Mediante este modelo es posible estimar el error de la reconstrucción en función del error en la imágenes. De esta forma, otro modelo es necesario para dar una interpretación a la matriz Λp , la cual describe los límites en los valores posibles de las coordenadas de p . Esto implica la necesidad de un modelo del error en la imagen.

II.6.4 Estimación del Error en la Imagen

Para completar el análisis de incertidumbre, se debe realizar un estudio concerniente a los puntos de la imagen (Olague, 1998). Para estimar la matriz de covariancia Λp de nuestras mediciones sobre puntos bidimensionales, utilizaremos la Proposición 1. Por

lo tanto, debemos tener una función para relacionar errores de puntos en las imágenes tomadas en varias fotografías en diferentes ángulos. La relación será establecida utilizando la razón de cruce:

$$f(k) = k(a, b, c, d) = \frac{(c - a)(d - b)}{(d - a)(c - b)} , \quad (44)$$

la cual es una invariante proyectiva. Un estudio detallado de la relación de cruce puede se encuentra en (Mohr, 1993). Esto permite calcular la incertidumbre de la razón de cruce en función de la incertidumbre de los puntos de la imagen. En el caso de configuraciones afines de 4 puntos, la incertidumbre varía de manera inversamente proporcional a la distancia entre los puntos (Morin, 1993). De esta manera, considerando la incertidumbre de los puntos de la imagen como idénticas, podemos seleccionar una configuración de 4 puntos, $f(k) = [0, 3, 2, 1] = 4$, usando las marcas retro-reflejantes de una mira de calibración para producir configuraciones estables. La razón de cruce puede ser linealizada localmente con respecto a la configuración $f(k) = [0, 3, 2, 1]$. La relación entre la desviación estándar de la razón de cruce y la incertidumbre de los puntos de la imagen pueden ser obtenidas por un desarrollo de Taylor de primer orden de la Ecuación (??):

$$\Lambda k = \partial f(k) \Lambda p \partial f(k)^T , \quad (45)$$

donde Λk de tamaño 1×1 , es equivalente a la variancia σ_k^2 de la razón de cruce. Este valor es calculado considerando todos las razones de cruce, $f(k_i)$, de 4 marcas alineadas y equidistantes, utilizando el método estadístico

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f(k_i) - \bar{f}(k))^2.$$

$\partial f(k)$ es el Jacobiano de $f(k)$, donde las derivadas parciales con respecto cada punto

son calculadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_k = \left[\frac{(b-d)(c-d)}{(a-d)^2(b-c)}, \frac{(a-c)(d-c)}{(a-d)(b-c)^2}, \frac{(b-d)(b-a)}{(a-d)(b-c)^2}, \frac{(a-c)(b-a)}{(a-d)^2(b-c)} \right] .$$

Considerando que bajo una transformación afín

$$\mathbf{J}_k(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{J}_k(a, b, c, d),$$

obtenemos $\|\mathbf{J}_k(0, 3, 2, 1)\|^2 = 80$. Λp es la matriz de covariancia de los cuatro puntos alineados utilizados para calcular la razón de cruce $f(k)$. Dado que las marcas son identificadas sin errores sistemáticos,

$$\Lambda p = \sigma_p^2 \mathbf{I}_{4 \times 4},$$

donde σ_p representa la desviación estándar de la extracción de marcas, e $\mathbf{I}$ representa la matriz identidad. De esta manera, la Ecuación (??), puede ser expresada como

$$\sigma_k^2 = \sigma_p^2 \|\mathbf{J}_k(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)\|^2 \longrightarrow \sigma_p = \sigma_k \frac{\lambda}{\|\mathbf{J}_k(a, b, c, d)\|^2}, \quad (46)$$

donde σ_k representa la desviación estándar de la razón de cruce, λ es la distancia promedio entre las marcas, y $\mathbf{J}_k$ es el Jacobiano de $f(k)$.

Se supuso que los errores en la imagen son Gaussianos e idénticos (marcas similares) a lo largo de la dirección de alineamiento y constantes durante el experimento (distancia y ángulo de observación similares). Se utiliza un detector de marcas de resolución subpixel sobre un mira de calibración, semejante al presentado por Grün (1985). A partir de cientos de mediciones de cuatro puntos aproximadamente equidistantes a lo largo de cada dirección se calcula la incertidumbre de los puntos σ_p de la imagen, a partir de la incertidumbre σ_k medida de la razón de cruce, utilizando la Ecuación (??). σ_k es una función del ángulo de observación α a lo largo de una dirección de alineamiento. Dado que las marcas son circulares pero son vistas como una elipse, se

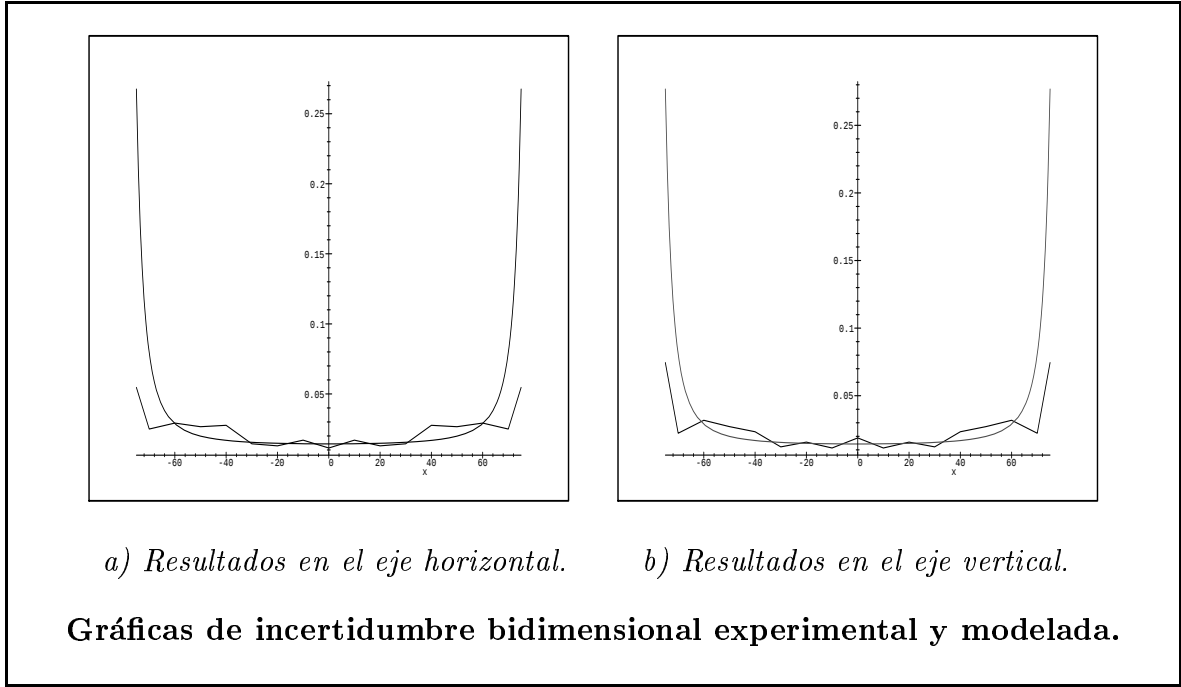


Figura 9: Las gráficas muestran los valores experimentales de incertidumbre en cada uno de los ejes X, Y de la imagen. Estos valores son aproximados por una función mediante el método Levenberg-Marquardt (Olague, 1998).

puede suponer que la covariancia de su posición bidimensional puede ser considerada como una matriz diagonal. Las gráficas en la Figura ?? muestran los resultados finales de los experimentos a lo largo de las direcciones x y y . Consecuentemente, los marcos de referencia de la elipse representada por dos ejes, tienen cada uno una variancia asociada correspondiente al ángulo de observación en las dos direcciones correspondientes. Estos resultados fueron aproximados a un modelo utilizando el método Levenberg-Marquardt y la función de mérito

$$y = \rho(e^{\frac{\nu}{90-x}} + e^{\frac{\nu}{90+x}}) + \vartheta, \quad (47)$$

brindando los parámetros de mejor ajuste: $\nu = 79.74$, $\rho = 1.31 \times 10^{-3}$ y $\vartheta = 8 \times 10^{-3}$, para ambos experimentos. Este modelo corresponde a las restricciones de ángulo de

incidencia en el diseño de redes fotogramétricas. Nótese que para un ángulo mayor de 80 grados, ya no tenemos mediciones y acercarnos a este valor lleva a una incertidumbre infinita. El modelo Λp es útil para calcular la matriz de covariancia ΛP de los puntos tridimensionales.

II.6.5 Criterio de Incertidumbre Tridimensional

Una vez que se ha calculado la matriz de covariancia $\Lambda \mathbf{P}$, es necesario escoger un criterio útil para el proceso de optimización. De esta manera, es necesario seleccionar una métrica para comparar matrices simétricas positivas definidas. La *comparación* de matrices de covariancia es interpretada como la desviación estándar requerida de la función $\mathbf{P} = f(\mathbf{p})$ para que sea mejor cuando se calcule con la matriz $\Lambda \mathbf{P}_1$ que con $\Lambda \mathbf{P}_2$:

$$\Lambda \mathbf{P}_1 \leq \Lambda \mathbf{P}_2 \quad , \quad \sigma_f^{\Lambda \mathbf{P}_1} \leq \sigma_f^{\Lambda \mathbf{P}_2} . \quad (48)$$

De esta manera, una medida útil es el valor propio mayor λ_{max} , que se define por

$$\Lambda \mathbf{P} q = \lambda q . \quad (49)$$

Además, la raíz cuadrada $\sqrt{\lambda_{max}}$ se relaciona a la máxima desviación estándar.

Otra métrica para comparar las matrices de covariancia $\Lambda \mathbf{P}$ y ΛQ (una matriz ideal) puede obtenerse utilizando la suma de los logaritmos elevados al cuadrado de los valores propios (Förstner, 1995):

$$d(\Lambda \mathbf{P}, \Lambda Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \ln^2 \lambda_i(\Lambda \mathbf{P}, \Lambda Q)} . \quad (50)$$

Tal métrica requiere una matriz criterio, pero ésta no puede ser establecida porque no se conoce previamente la respuesta. De esta manera, el valor propio mayor de $\Lambda \mathbf{P}$ puede ser remplazado por un criterio menos estricto con el fin de evitar la determinación

rigurosa del valor propio mayor , e.g. la traza

$$tr(\Lambda \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^3 \Lambda \mathbf{P}_{ii} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\Lambda \mathbf{P}); \quad (51)$$

dado que el valor propio mayor está relacionado a la máxima desviación estándar. En lugar de la traza de ΛP proponemos utilizar como medida el *elemento mayor de la diagonal de ΛP* , el cual corresponde a la peor variancia entre las componentes individuales, esto es,

$$\mu(\mathbf{p}) = \max_{j=1..3} \Lambda \mathbf{P}_{jj} . \quad (52)$$

Esta medida es fácil de calcular y brinda una buena uniformidad de la precisión de la red de cámaras en cada eje de coordenadas del elipsoide de error representado por $\Lambda \mathbf{P}$ (Olague, 1998).

II.6.6 Visualización de la Incertidumbre

El hiper-elipsoide de incertidumbre no es un criterio por sí mismo, pero es útil para visualizar la incertidumbre de las mediciones tridimensionales. Se definió el vector aleatorio χ mediante

$$\chi = \Lambda \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{P} - E[\mathbf{P}]) ,$$

y considerando que $\mathbf{P}$ sigue una distribución Gaussiana, entonces χ sigue una distribución estándar de media cero y covariancia

$$E[\chi \chi^T] = E[\Lambda \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{P} - E[\mathbf{P}]) (\mathbf{P} - E[\mathbf{P}])^T \Lambda \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}}] =$$

$$\Lambda P^{-\frac{1}{2}} \Lambda \mathbf{P} \Lambda P^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I} .$$

Consecuentemente, la variable aleatoria δP , definida por

$$\delta P = \chi^T \chi = (\mathbf{P} - E[\mathbf{P}])^T \Lambda \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{P} - E[\mathbf{P}]) ,$$

sigue una distribución χ^2 de $t = \text{rango}(\Lambda P)$ grados de libertad. Dado un escalar s , y conociendo la probabilidad igual a $\mathbf{P}_{\chi^2}(s, t)$, donde δP aparece entre 0 y s , tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2. *Si consideramos que $\mathbf{P}$ sigue una distribución Gaussiana, la probabilidad de que $\mathbf{P}$ se encuentre dentro del s -hiperelipsoide definido por la ecuación*

$$(\mathbf{P} - E[\mathbf{P}])^T \Lambda P^{-1} (\mathbf{P} - E[\mathbf{P}]) = s^2, \quad (53)$$

es igual a $\mathbf{P}_{\chi^2}(s, t)$, donde s es cualquier escalar y t es el rango de $\Lambda \mathbf{P}$.

El s -hiperelipsoide hace posible representar gráficamente la incertidumbre relacionada con $\Lambda \mathbf{P}$. Obviamente, esto puede ser logrado sólo en el caso de $t \leq 3$. Para un t dado, podemos calcular los medios ejes del hiperelipsoide mediante

$$a_i = \sqrt{\frac{s^2}{w_i}}, \quad (54)$$

donde w_i son los valores propios de la matriz $\Lambda \mathbf{P}^{-1}$ y las direcciones de los ejes principales del hiper-elipsoide corresponden a los vectores propios.

II.7 Integración de un Sistema Experimental

La transformación proyectiva realizada durante el proceso de formación de imagen es modelada mediante parámetros muy similares en los campos de fotogrametría y visión por computadora. El modelo de visión por computadora ofrece la ventaja de describir el proceso de formación de imágenes en términos de una transformación lineal. Este enfoque permite realizar un análisis distinto de este proceso a partir de técnicas del área del álgebra, al mismo tiempo que ofrece una aproximación lineal computacionalmente eficiente. Para poder utilizar técnicas de calibración basadas en el modelo proyectivo dentro del método de compensación por haces es necesario empatar ambos modelos. La

correspondencia entre el sistema de coordenadas del entorno y el sistema de coordenadas de la cámara con origen en el centro óptico es representada por el modelo de visión por computadora mediante la siguiente transformación tridimensional conformal.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

donde $(X, Y, Z, 1)^t$ representan las coordenadas tridimensionales homogéneas del objeto y $(x, y, z, 1)^t$ son los puntos tridimensionales en el sistema coordenado de la cámara. Por otro lado, la misma transformación conformal es expresada dentro de la fotogrametría de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix},$$

donde X_0, Y_0, Z_0 representan las coordenadas del centro óptico de la cámara. Al reescribir esta última expresión en coordenadas homogéneas tenemos

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}\mathbf{P}_{3 \times 1}^0 \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

donde $\mathbf{P}^0 = (X_0, Y_0, Z_0)$. Al comprar las expresiones (??) y (??) obtenemos la igualdad $\mathbf{t} = -\mathbf{R}\mathbf{P}^0$, la cual a su vez brinda $\mathbf{P}^0 = -\mathbf{R}^t \mathbf{t}$. Esta relación nos permite determinar los valores del centro óptico de una cámara en base a los resultados obtenidos por el método de calibración. Esto es indispensable debido a que el método de compensación por haces necesita tal información como parámetros de entrada.

II.7.1 Experimentación

Distintos experimentos fueron realizados sobre el patrón de calibración mostrado en la Figura ?? . Estos resultados han sido reportados por Olague & Dunn (2006). El propósito de esta experimentación fue demostrar como varía la precisión de las estimaciones de los puntos tridimensionales, en términos de la orientación y tamaño de los elipsoides de incertidumbre, a partir de cambios en la geometría de observación. La Figura ?? muestra 6 de las 20 imágenes que fueron utilizadas en los experimentos. El patrón de calibración está compuesto por 160 blancos retro-reflejantes contenidos dentro de un volumen de $33.7 \times 26.2 \times 26.2$ cm. Las imágenes fueron obtenidas con una cámara Pulnix TM-6EX y una lente Kinoptik de distancia focal de 12.5 mm. La tarjeta de captura es una “Imaging Technology 150”.

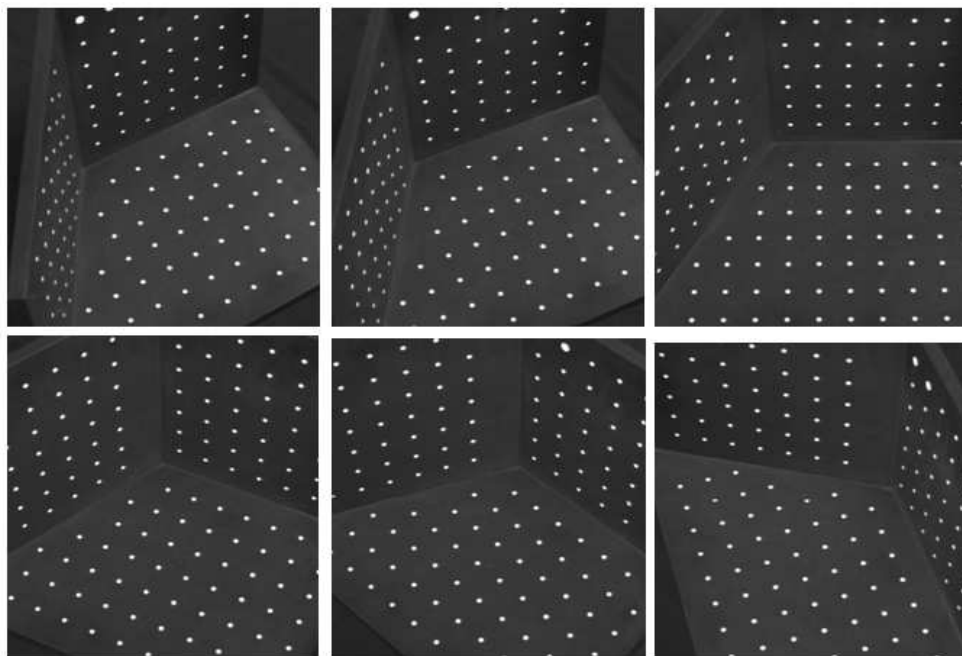


Figura 10: Patrón de calibración utilizado en los experimentos.

Cada blanco retro-reflejante fue medido a precisión subpixel utilizando un enfoque similar al propuesto por Gruen (1985). La idea principal consiste en proponer un modelo paramétrico para después ajustar el modelo a la intensidad de las imágenes. Estas mediciones sobre las imágenes fueron usadas junto con aproximaciones iniciales de las posiciones tridimensionales de los puntos de interés, para llevar a cabo un proceso de calibración basado en el enfoque de Faugeras-Toscani (1987). Los resultados de la calibración fueron aplicados al proceso de compensación por haces para obtener los elipsoides de incertidumbre mostrados en la Figuras ??, ?? y ?. Es posible apreciar la relación entre la geometría de observación y el volumen de los elipsoides de incertidumbre para el caso de dos imágenes tomadas desde posiciones muy cercanas entre sí y compararlas con el caso de una configuración convergente de dos cámaras. Las variaciones en el tamaño y orientación de los elipsoides de error describen el balance requerido para la determinación de una geometría de observación. La Figura ?? muestra el problema de visibilidad, el cual produce una falta de uniformidad en los elipsoides de incertidumbre debido a que algunos puntos solo fueron observados por 2 cámaras.

Los siguientes experimentos fueron realizados sobre un objeto tridimensional utilizando la infraestructura robótica disponible en CICESE. La infraestructura robótica consiste de un manipulador Staübli RX-60B de seis grados de libertad. Este robot está equipado con una cámara digital Pulnix TM-9701d, de 768 x 484 pixeles con una lente Fujinon C-mount de 16 mm. El objeto en observación fue cubierto por patrones rectangulares cuyas esquinas fueron los puntos a medir. El uso de este tipo de patrones es motivado por su bajo costo y relativa facilidad de producirlos en una impresora laser. Las mediciones sobre las imágenes fueron obtenidas a un nivel de precisión sub-pixel utilizando un detector de esquinas propuesto en (Olague y Hernández, 2005). Este detector combina un modelo paramétrico con un proceso de búsqueda global para llevar a cabo el ajuste del modelo.

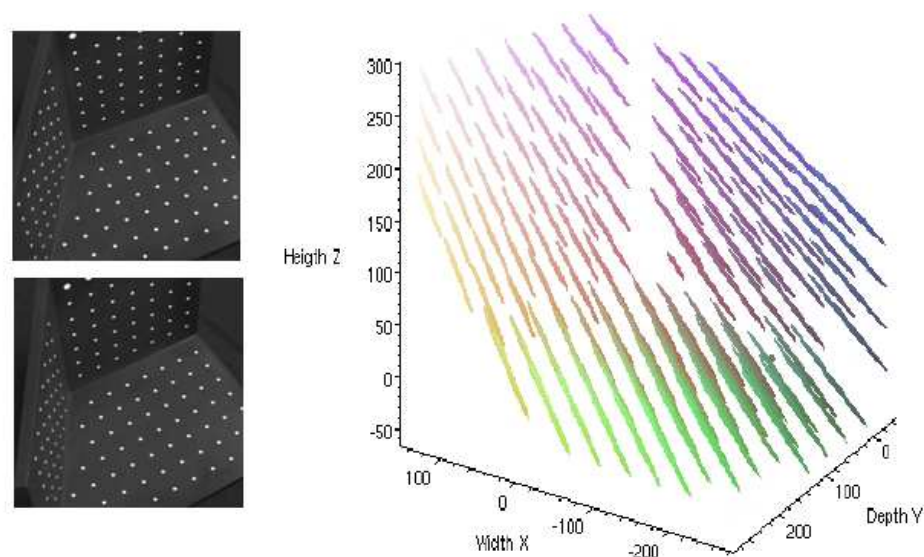


Figura 11: Las primeras dos imágenes de la secuencia fueron utilizadas para calcular los errores de incertidumbre.

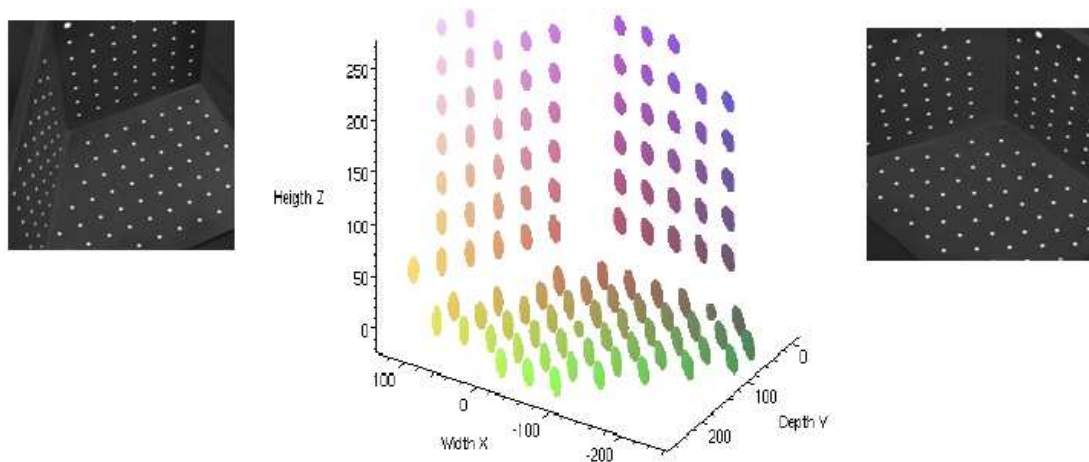


Figura 12: La segunda y quinta imágenes de la secuencia fueron utilizadas para calcular los errores de incertidumbre.

El manipulador en configuración Cámara-Mano fue utilizado para implementar múltiples configuraciones de observación. Las Figuras ??, ?? y ?? muestran los experimentos llevados a cabo con nuestro sistema. Nótese que un mínimo de cuatro

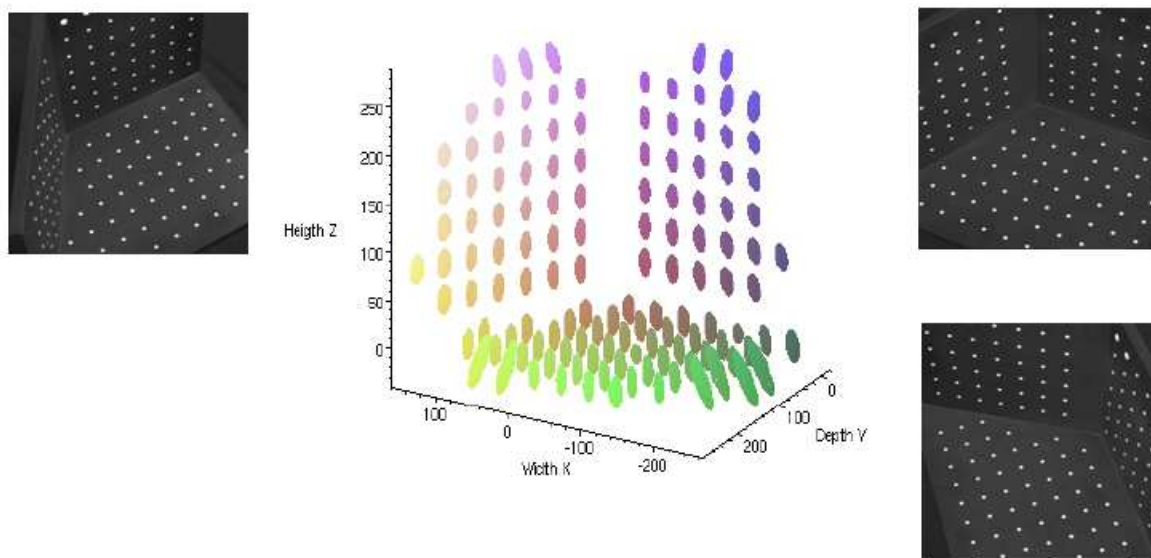


Figura 13: La primera, cuarta y sexta imágenes de la secuencia fueron utilizadas para calcular los errores de incertidumbre. Note que algunos de los elipsoides de error son más grandes debido al problema de visibilidad

imágenes es requerido para obtener observaciones redundantes para todas las superficies del objeto en consideración.

El primer escenario consiste en cuatro imágenes que presentan una convergencia débil debido a su reducida separación entre puntos de observación. Los elipsoides de incertidumbre no son homogéneos ni isotrópicos. La Figura ?? mejora esta configuración mínima en términos de precisión mediante un modificación de la geometría de observación. Esta configuración proporciona un conjunto de elipsoides de incertidumbre mejorados en términos de homogeneidad e isotropía. Sin embargo, la obtención de una geometría de observación fuertemente convergente requiere un número mayor de acciones de sensado. La Figura ?? muestra una configuración compuesta por 29 cámaras convergentes. Esta configuración fue obtenida mediante el sistema de planificación de tareas fotogramétricas que presentaremos en capítulos subsecuentes. Los elipsoides de incertidumbre presentados en la Figura ?? son considerablemente más homogéneos e

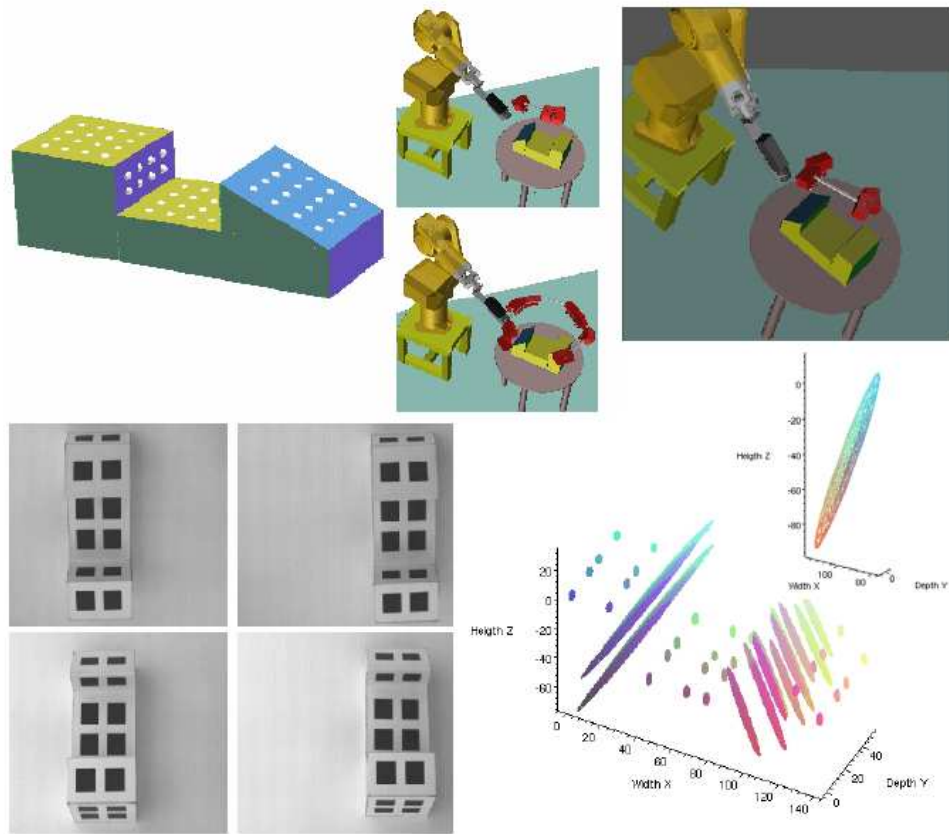


Figura 14: Experimentos realizados con la infraestructura robótica. Cuatro imágenes fueron obtenidas por una configuración con convergencia débil.

isotrópicos que los presentados para la configuración mínima anterior.

II.8 Discusión

Los resultados experimentales presentados en este capítulo corresponden a una integración de técnicas y modelado pertenecientes al campo de visión por computadora, con una metodología de compensación por haces rigurosa. Tales aspectos fueron incorporados a un sistema funcional desarrollado sobre una infraestructura robótica. Diferentes escenarios fueron considerados realizándose una estimación de los elipsoides de incertidumbre obtenidos a partir del proceso de compensación por haces.

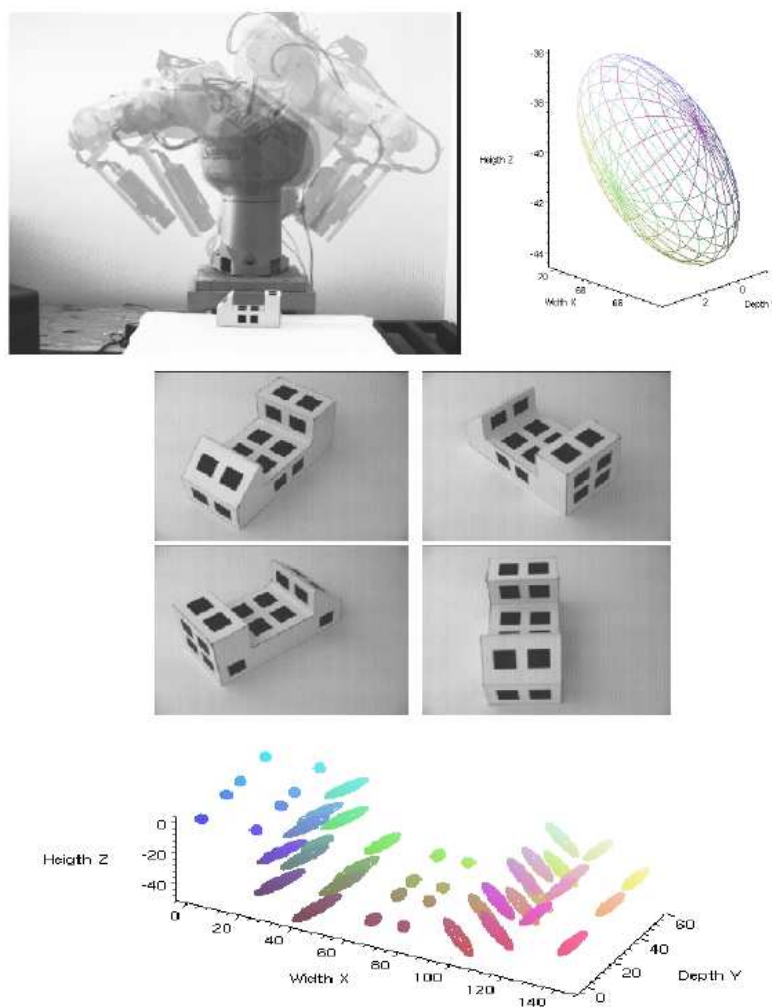


Figura 15: La infraestructura robótica fue utilizada para probar una configuración de cuatro cámaras mejorada. Debido a problemas de auto-oclusión, algunos de los puntos de interés en el objeto no fueron muestreados apropiadamente.

Adicionalmente, los resultados ponen de manifiesto la importancia de la selección de puntos de observación dentro del proceso de medición fotogramétrica. Es en este sentido en el que este trabajo hará sus aportaciones principales. En particular, se propone incorporar al proceso de planificación de tareas fotogramétricas las consideraciones respecto el costo operacional de llevar a cabo las acciones de sensado. El enfoque a adoptar en este trabajo es el de plantear la planificación en términos de optimización

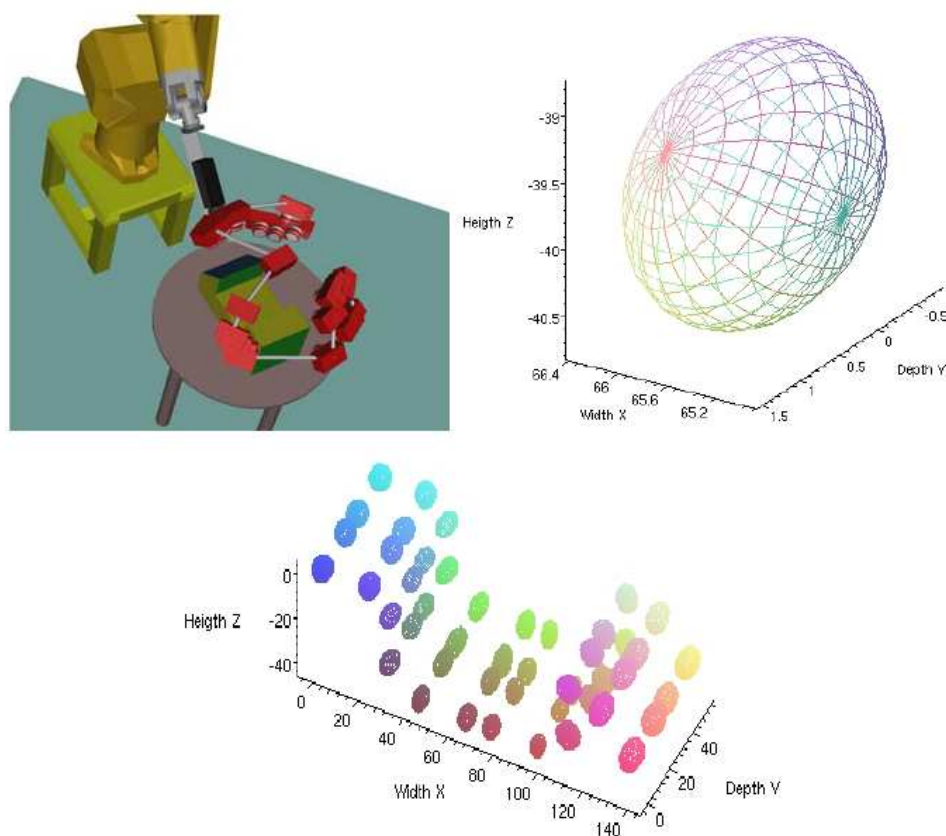


Figura 16: Una configuración de 29 cámaras con una convergencia fuerte. Tal configuración permite obtener elipsoides de incertidumbre homogéneos y aproximadamente isotrópicos para todos los puntos de interés.

multiobjetivo y estudiar de esta manera los distintos compromisos involucrados en la selección óptima de puntos de observación.

El trabajo desarrollado en esta tesis se diferencia de otras metodologías en ser la primera vez en que el problema de posicionamiento de cámaras se aborda en términos de optimización multiobjetivo. Cabe notar que la literatura muestra que tal posibilidad ya ha sido reconocida con anterioridad (Tarabanis, 1995). Sin embargo, hasta la fecha no existe ningún trabajo que aborde tal investigación. Los motivos por tal omisión

pueden atribuirse a la falta de un marco de desarrollo apropiado para incorporar tales consideraciones. Por ejemplo, los enfoques basados en iteraciones de *Generar y Evaluar* son tardados y dependen de la habilidad del usuario. Los métodos basados en una *Enumeración Completa* son por definición inadecuados para tareas complejas debido a sus requerimientos computacionales. El enfoque de *Síntesis*, basados en el uso de funciones analíticas, ofrecen un alto grado de complejidad y presentan serias dificultades para incorporar un enfoque multiobjetivo. Los *Sistemas Expertos* son un enfoque prometedor para incorporar conceptos multiobjetivo pero su dependencia en conocimiento humano puede restringir su aplicabilidad en comparación con enfoques menos heurísticos. El enfoque basado en técnicas de simulación, las cuales incorporan modelos matemáticos apropiados a la tarea a realizar, son otro enfoque prometedor para aplicar técnicas multiobjetivo. Este trabajo cae dentro de este enfoque. El siguiente capítulo aborda los conceptos principales del paradigma de optimización multiobjetivo, los cuales serán incorporados posteriormente dentro de una nueva metodología de planificación de tareas fotogramétricas.

Capítulo III

Optimización Multiobjetivo

Múltiples criterios de evaluación surgen comúnmente al resolver problemas de la vida real, especialmente cuando estos involucran decidir sobre un conjunto de acciones. A pesar de que el objetivo de una tarea en particular puede ser evidente desde un inicio, estos distintos criterios se presentan, por lo general, a partir de consideraciones de alto nivel concernientes a la ejecución de la tarea. Un enfoque multiobjetivo intenta abordar estos escenarios de una manera general, mediante el estudio de las interacciones entre los distintos criterios de desempeño. Este capítulo ofrece una descripción breve de los principios utilizados para la optimización de problemas multiobjetivo, un tratado más extenso y formal puede ser encontrado en referencias como Miettinen (1999), Hillermeier (2001) y Ehrgott & Gandibleux (2002).

III.1 Antecedentes

El estudio de la optimización concurrente de múltiples objetivos tiene sus orígenes a finales del siglo XIX, en los trabajos de Pareto (1896) y Edgeworth sobre teoría económica. Por varios años el interés por estos problemas se vio limitado a campos especializados tales como la investigación de operaciones y la economía. Desde un punto de vista matemático, la optimización multiobjetivo estudia la determinación de los elementos maximales dentro de conjuntos ordenados. En este sentido, los orígenes de la optimización de vectores pueden ser encontrados en los trabajos de Cantor (1895) y Hausdorff (1906). Sin embargo, no fue sino hasta la segunda mitad del siglo XX, que los trabajos de Kuhn & Tucker (1951), Koopmans y Hurwicz (1958), establecieron

los principios teóricos para el surgimiento de la optimización multiobjetivo como una disciplina matemática. Después de esto, el trabajo de Charnes & Cooper (1977) estudió los aspectos algorítmicos involucrados en la solución de problemas de maximización de vectores, iniciando así la investigación de técnicas de programación matemática para problemas multiobjetivo. Sin embargo, la incorporación de los conceptos multiobjetivo en el desarrollo de sistemas prácticos requería abordar la articulación de preferencias. En este sentido los trabajos de Keeney & Raiffa (1976) sobre teoría de utilidad, el trabajo de Roy (1985) sobre procedimientos de rango y el de Saaty (1987) sobre el proceso de análisis jerárquico, iniciaron la investigación en la toma de decisiones multicriterio.

El estudio sobre la generalización de teoría y técnicas de optimización de un solo objetivo para el caso de múltiples objetivos, ha resultado en una gran diversidad de enfoques algorítmicos para la solución de problemas MO. Sin embargo, las dificultades encontradas al enfrentar problemas reales (i.e. no linealidad, satisfacción de restricciones, mínimos aislados, aspectos combinatorios), así como la complejidad conceptual de la optimización MO ha ocasionado el desarrollo de subcampos especializados. Entre estas especializaciones encontramos programación de metas, programación MO difusa, análisis de envolvimiento de datos, optimización MO combinatoria y técnicas MO evolutivas.

III.2 Problemas de Optimización Multiobjetivo

Un problema de optimización multiobjetivo puede ser descrito como la tarea de encontrar un vector de variables de decisión el cual satisface un conjunto de restricciones y optimiza una función vectorial cuyos elementos representan funciones objetivo. Estas funciones forman una descripción matemática de criterios de desempeño que están en conflicto entre sí. Por lo tanto, el término “optimizar” significa encontrar aquella solución que provea valores aceptables para cada una de las funciones objetivos.

Este tipo de problemas también son conocidos como optimización multicriterio u optimización de vectores.

Las funciones objetivo son designadas como $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})$, donde k es el número de funciones objetivo del problema a resolver. A partir de este punto se considerará que las funciones $f_i(\mathbf{x})$ son funciones reales. Por lo tanto, las funciones objetivo forman un función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ que se define como sigue:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

El conjunto de todas las n -tuplas de números reales denotado por $\mathbb{R}^n$ es llamado el espacio Euclideo n -dimensional. Es necesario considerar dos espacios Euclideos:

- El espacio n -dimensional de las variables de decisión donde cada eje de coordenadas corresponde a un componente del vector $\mathbf{x}$.
- El espacio k -dimensional de las funciones objetivo donde cada eje de coordenadas corresponde a un componente del vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Definición 1. Problema de optimización Multiobjetivo: *Encontrar el vector de solución $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ que satisface las m restricciones operacionales: $g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$; respeta los intervalos de restricción de las variables $x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}$ y optimiza la función vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^T$.*

Bajo la definición anterior, las restricciones operacionales $g_i(\mathbf{x})$ y los intervalos de restricción de las variables definen una región válida $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ dentro del espacio de variables de decisión. Así, cada solución en Ω define una solución válida a nuestro problema. La función vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ realiza un mapeo del conjunto Ω hacia un conjunto $\Upsilon = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k\}$, el cual representa los correspondientes valores tomados por las funciones

objetivo para cada solución válida.

A lo largo de este capítulo consideraremos, sin pérdida de generalidad, el caso de un problema de minimización. Esto es posible debido a la correspondencia entre instancias de minimización y maximización dada por $\min f(x) = \max -f(x)$. El concepto de optimalidad en el contexto de la optimización multiobjetivo es comúnmente manejado a través de la relación de dominancia entre las soluciones candidatas. La relación de dominancia entre dos soluciones se define como sigue:

Definición 2. Relación de Dominancia. *Un vector $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_k]^T$ domina a otro vector $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_k]^T$ (denotado $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$) si y sólo si $\mathbf{a}$ es parcialmente menor que $\mathbf{b}$, i.e. $\forall i \in 1, \dots, k, a_i \leq b_i \wedge \exists i \in 1, \dots, k : a_i < b_i$*

La relación binaria de dominancia no es reflexiva, no es simétrica y es transitiva. Por lo tanto se dice que es una relación de orden parcial estricto sobre el conjunto de soluciones.

El conjunto de soluciones óptimas consiste en todas aquellas soluciones cuyos vectores de evaluación no pueden ser mejorados en ninguna dimensión sin la degradación de otra dimensión. Matemáticamente, el concepto puede ser expresado como sigue:

Definición 3. Optimalidad Pareto: *Un vector de solución $\mathbf{x}^* \in \Omega$ es óptimo si para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ y $I = \{1, 2, \dots, k\}$ se cumple alternativamente, $\forall i \in I (f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^*))$ ó, existe al menos un $i \in I$ tal que $f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}^*)$.*

Los vectores que cumplen con tal definición también son conocidos como “no dominados”, “no inferiores” o “eficientes”. El conjunto de vectores óptimos es conocido como conjunto óptimo Pareto P^* . Su definición es

Definición 4. Conjunto de soluciones óptimas Pareto: *Para un problema multiobjetivo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, el conjunto de soluciones óptimas $\mathcal{P}^*$ se define como*

$$\mathcal{P}^* := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \nexists \mathbf{x}' \in \Omega \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}') \preceq \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

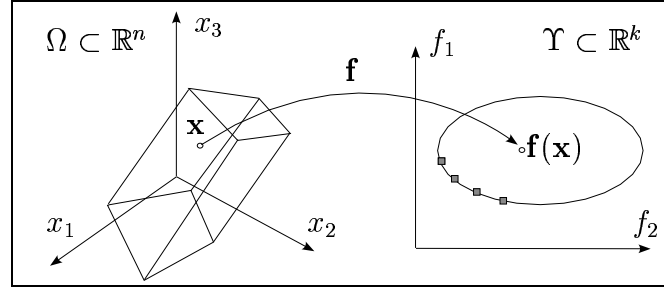


Figura 17: Relación entre el espacio de variables de decisión y el espacio de funciones objetivo. Una solución $\mathbf{x}$ es mapeada mediante una función vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, hacia el espacio de funciones. Los puntos resaltados en la frontera de Υ son elementos del Frente Pareto.

Estos vectores son mapeados mediante $\mathbf{f}(\cdot)$ a un subconjunto en la frontera de Φ . Tales vectores en el espacio de funciones son denominados el frente Pareto $\mathcal{PF}^*$.

Definición 5. Frente Pareto: Para un problema multiobjetivo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y un conjunto de soluciones óptimas $\mathcal{P}^*$, el frente Pareto se define como

$$\mathcal{PF}^* := \{\mathbf{u} = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) | \mathbf{x} \in \mathcal{P}^*\}$$

La optimización de múltiples objetivos es considerablemente más elaborada que el caso de un solo criterio. La principal discrepancia radica en el concepto de optimalidad bajo múltiples criterios. En este caso, la optimalidad está basada en relaciones de dominancia entre distintas soluciones en un espacio multidimensional de funciones objetivo. Esto contrasta con el caso de optimización para un solo objetivo en el que la solución es mapeada mediante una función criterio a un punto a lo largo de la recta de los números reales, donde la selección de un punto óptimo es trivial. Por lo tanto, la solución de un problema MO involucra dos espacios distintos: uno para las variables de decisión y otro para la evaluación de sus funciones objetivo. Una dificultad adicional es que dichas funciones pueden ser altamente no lineales, ser de escalas arbitrarias o incluso pueden ser no conmensurables.

Una consecuencia directa de evaluar la calidad de las soluciones en el espacio multi-dimensional de funciones objetivo, es que en tal espacio no hay un orden total general. Cuando los criterios a considerar se encuentran en conflicto no puede haber una sola solución óptima. En tal caso, existe un conjunto de múltiples soluciones que son todas óptimas. En el caso típico de que una solución analítica a nuestro problema no está disponible, es necesario utilizar un método computacional para obtener una aproximación al conjunto óptimo Pareto. En general, esta aproximación debe cumplir con las siguientes características:

1. *Converger al Frente Pareto.* Esto es semejante a encontrar al óptimo global de una función. Esto puede ser difícil para problemas discontinuos donde un método de búsqueda puede quedarse atrapado en óptimos locales. Si adicionalmente, los objetivos considerados tienen una interacción compleja, esto puede dificultar el proceso de optimización.
2. *Muestrear representativamente el Frente Pareto.* Esto requiere la diversificación del conjunto de soluciones a lo largo de todo el Frente Pareto. Dependiendo de la “forma” del espacio de funciones objetivo (i.e. convexa o cóncava), así como de la técnica de optimización utilizada, algunas regiones del Frente Pareto pueden ser inaccesibles.

III.3 Técnicas Clásicas de Optimización Multiobjetivo

El proceso de determinar la solución de un problema multiobjetivo implica imponer una estructura de preferencias entre los criterios considerados. Esta estructura de preferencias es la que permite evaluar el mérito de cada alternativa de solución. En la práctica, tales preferencias corresponden a las decisiones de un agente evaluador del proceso de

optimización. Es posible clasificar las diferentes técnicas de optimización multiobjetivo en base a la manera en que dicha estructura de preferencias es incorporada al proceso de búsqueda de la solución óptima.

- Integración previa de preferencias. El modelo de interacción deseada entre los criterios es especificada antes de llevar a cabo el proceso de búsqueda. De esta forma, la optimización es dirigida hacia una solución que satisface una estructura de preferencias explícita. Ejemplos de este enfoque incluyen la agregación aditiva, combinaciones no lineales, ordenamiento lexicográfico, teoría de utilidad y programación de metas.
- Integración progresiva de preferencias. El modelo de interacción deseada entre los criterios es construido de manera incremental durante el proceso de búsqueda. De esta forma, la optimización es dirigida hacia una solución que satisface una estructura de preferencias inducida a partir de un proceso interactivo con el usuario. Ejemplos de este enfoque incluyen el desarrollo de balances probabilísticos PRO-TRADE (Goicochea *et al.*, 1976), el método STEM (Benayoun *et al.*, 1971) y el método de solución secuencial SEMOPS (Monarchi *et al.*, 1973).
- Integración posterior de preferencias. No se realiza ninguna suposición sobre modelo de interacción deseada entre los criterios durante el proceso de búsqueda. De esta forma, la optimización es dirigida hacia un conjunto de soluciones a partir de las cuales el usuario podrá elegir en base a su estructura de preferencias.

Una vez que se determine un modelo correspondiente a la estructura de preferencias, es necesario llevar a cabo un proceso de búsqueda para encontrar aquellas soluciones que sean “mejores” en términos de ese modelo. El proceso de búsqueda considera un espacio de criterios cuya geometría está definida por las características de las funciones

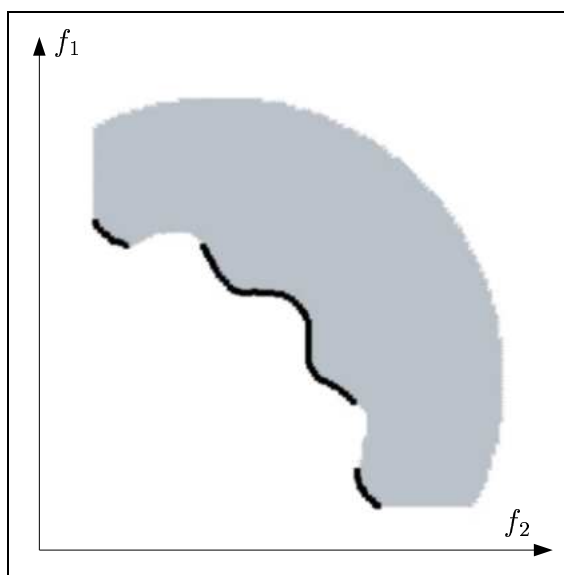


Figura 18: Ejemplo de un espacio de funciones criterio para un problema de dos objetivos. El espacio de criterios está definido sobre un plano y presenta un frente Pareto discontinuo.

criterio a optimizar. La Figura ?? muestra un espacio definido por dos funciones criterio. Distintas técnicas basadas en la integración previa de preferencias definen modelos matemáticos que incluyen dentro de su parametrización a elementos definidos sobre el espacio de funciones. Los parámetros que representan una solución en el espacio de parámetros son modificados a partir de la evaluación del estado del modelo utilizado para describir la estructura de preferencias. Esta compleja interacción entre dos distintos espacios de búsqueda ha llevado a desarrollar distintos modelos que simplifican el proceso de búsqueda de una solución “óptima”. Sin embargo, dependiendo de las características del modelo utilizado, las simplificaciones adoptadas pueden diverger del concepto de optimalidad en términos de dominancia Pareto. Algunos de estos modelos son mencionados a continuación.

Agregación Aditiva de Criterios

La simplificación de un problema multiobjetivo mediante una combinación lineal de los criterios de optimización permite optimizar una sola función objetivo. De esta manera, es posible aplicar técnicas de optimización mono-objetivo directamente para solucionar el problema. En general, la agregación de los criterios es representada por una función de la forma

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

donde los valores de peso w_i describen en su conjunto la importancia relativa de cada uno de los criterios $f_i(\mathbf{x})$. Así pues, la estructura de preferencias está aproximada mediante una expresión lineal. Tal enfoque requiere criterios conmensurables y debidamente escalados. La optimización de tal función criterio ofrece una solución Pareto óptima para el caso en que $w_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Adicionalmente, dado un problema de optimización multiobjetivo convexo es posible encontrar un vector de pesos $\mathbf{w}$ correspondiente a cada punto en el frente Pareto. La Figura ?? ejemplifica la forma en que el espacio de funciones puede interpretarse como el dominio de una nueva función a optimizar, donde $f_1(\mathbf{x})$ y $f_2(\mathbf{x})$ son las variables sobre las cuales se define un nuevo criterio. Las curvas de nivel mostradas son líneas rectas determinadas por los valores de los pesos. En la parte superior de la figura ?? se muestra un ejemplo donde ambas funciones tienen el mismo valor de peso w_i . Distintas combinaciones de pesos se ilustran en la parte central y en la parte inferior de la figura. Al variar estos valores de peso se modifica el relieve de la función junto con la ubicación del elemento mínimo dentro del espacio de funciones.

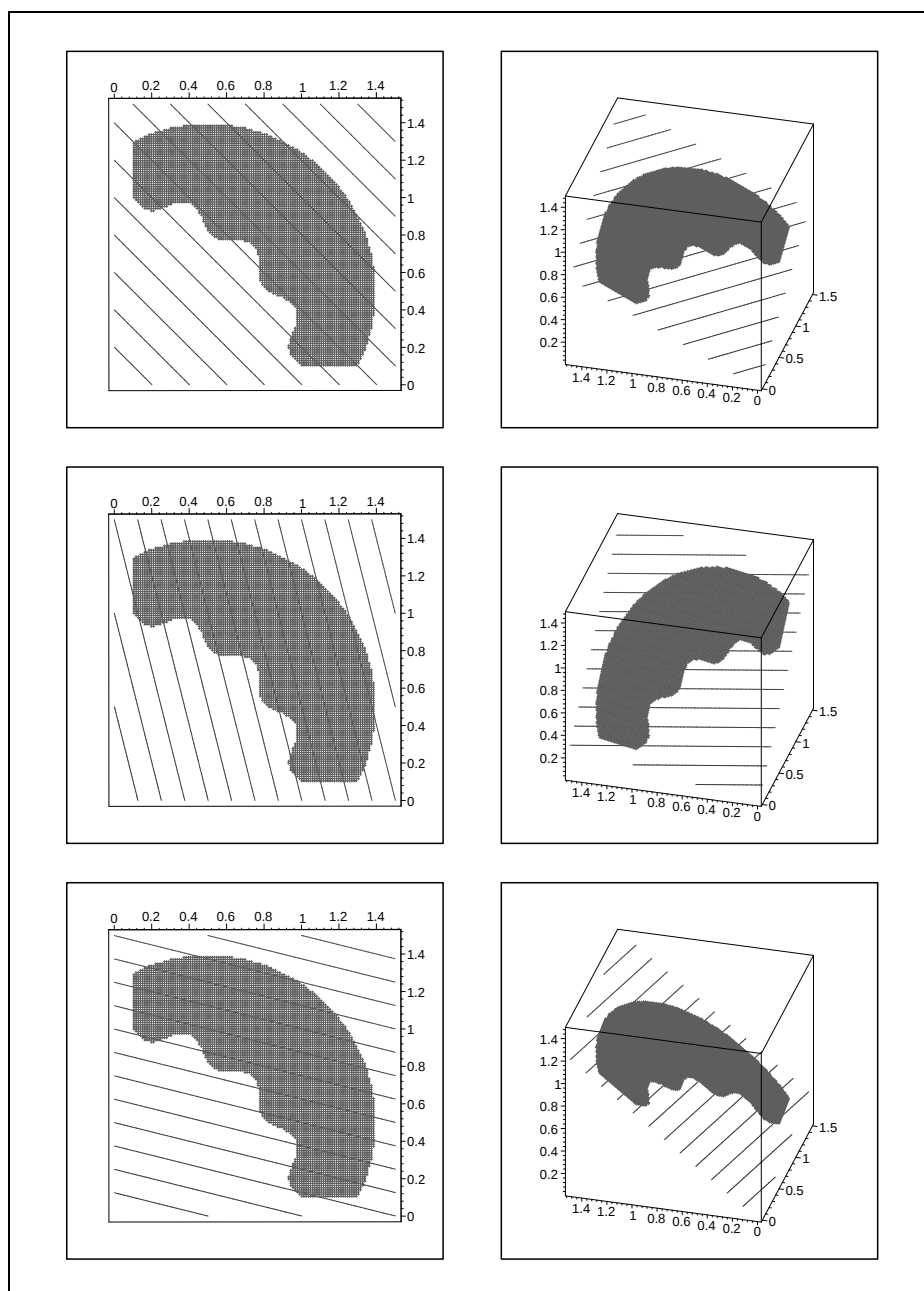


Figura 19: Ejemplos de la Agregación Aditiva de Criterios. Una función lineal es aplicada a cada elemento del espacio bidimensional de funciones criterio.

Combinación no lineal de Criterios

La combinación no lineal representa una generalización de la agregación aditiva de criterios. En esta generalización el problema también es simplificado mediante la determinación de un criterio global. Sin embargo, la estructura de preferencias está definida

por la métrica utilizada para evaluar las desviaciones respecto a un vector ideal $\mathbf{f}^0$. En general, la combinación no lineal de criterios es representada por una función de la forma

$$F(\mathbf{x}) = L_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^k w_i \left| \frac{f_i^0 - f_i(\mathbf{x})}{f_i^0} \right|^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Este planteamiento reduce el problema a encontrar un punto que minimice su distancia respecto a un vector referencia. El valor de p indica el tipo de métrica considerada. Para $p = 1$, todas las desviaciones son consideradas de manera proporcional a su magnitud. Para $p = 2$, se maneja una distancia euclídeana respecto al vector ideal, ver Figura ?? donde las curvas de nivel mostradas corresponden a parábolas concéntricas alrededor de un punto definido en el plano que contiene al espacio de funciones criterio. Para valores grandes de p la métrica describe la máxima desviación entre los componentes de una solución y los de un vector ideal, ver Figura ?? donde las curvas de nivel mostradas corresponden al criterio min-max. De manera semejante a la Figura ??, distintas combinaciones de peso son utilizadas en las Figuras ?? y ??,

Restricción- ϵ

El método de Restricción- ϵ simplifica el problema de optimizar k criterios simultáneamente mediante la optimización de solo uno de ellos, i.e. $f_m(\mathbf{x})$, y la interpretación del resto de los criterios, i.e. $f_i(\mathbf{x})$ donde $i \neq m$, como restricciones a un problema mono-objetivo. Esto requiere asignar una cota máxima ϵ_i a cada uno de los objetivos a considerar como restricciones, ver Figura ?? . De tal forma se obtiene

$$F(\mathbf{x}) = f_m(\mathbf{x}) : f_i(\mathbf{x}) \leq \epsilon_i \quad i \neq m.$$

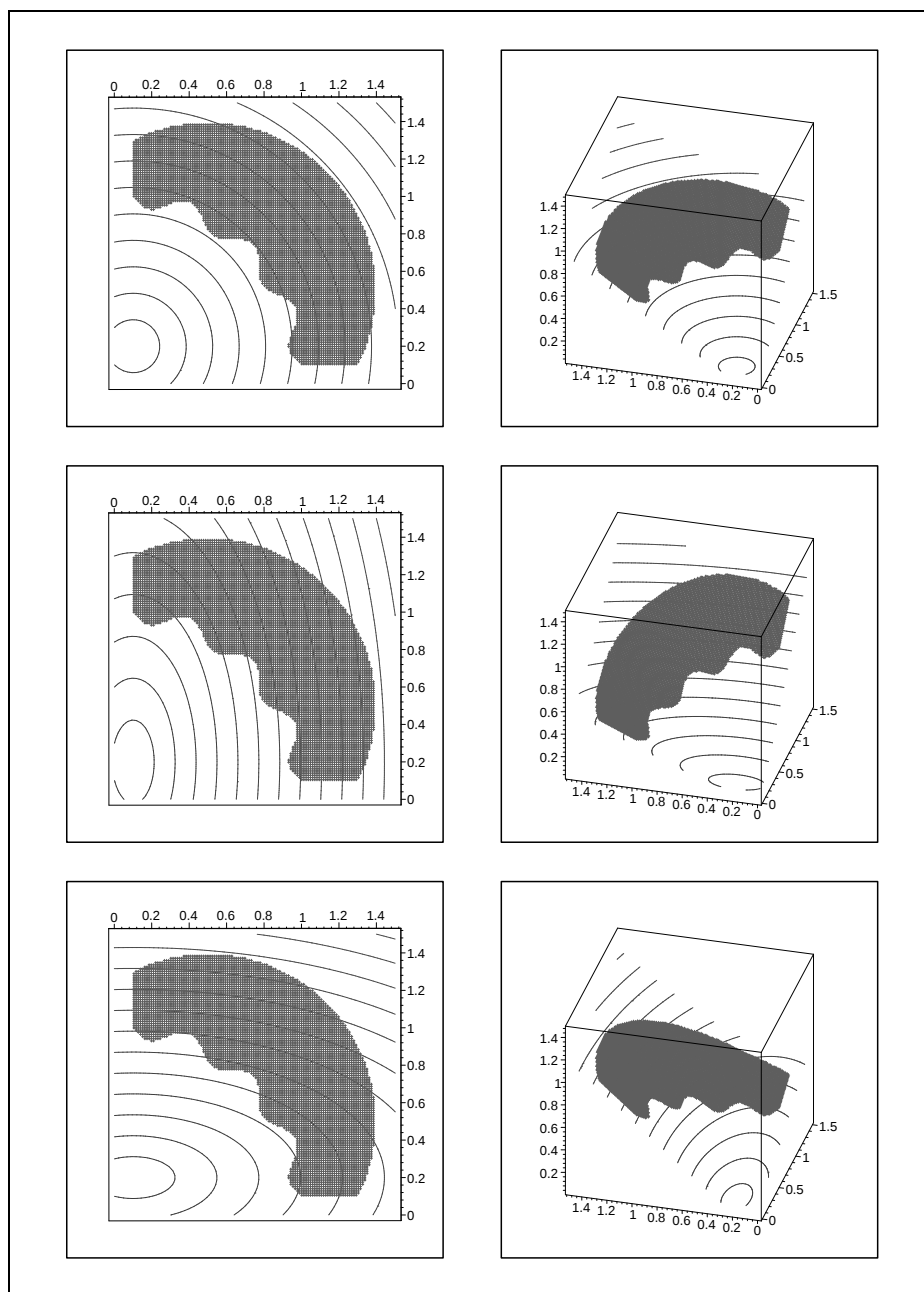


Figura 20: Ejemplos de la Combinación No Lineal de Criterios. Una función no lineal es aplicada a cada elemento del espacio bidimensional de funciones criterio.

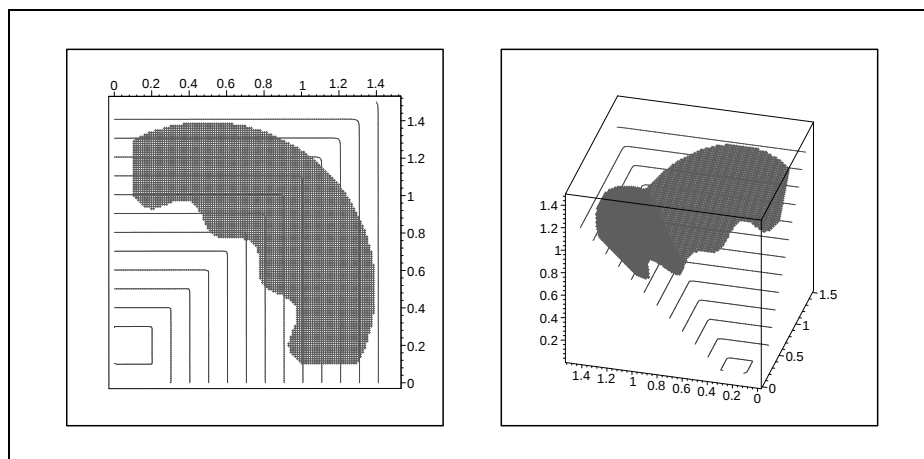


Figura 21: Ejemplos de la Combinación No Lineal de Criterios. Una función no lineal es aplicada a cada elemento del espacio bidimensional de funciones criterio.

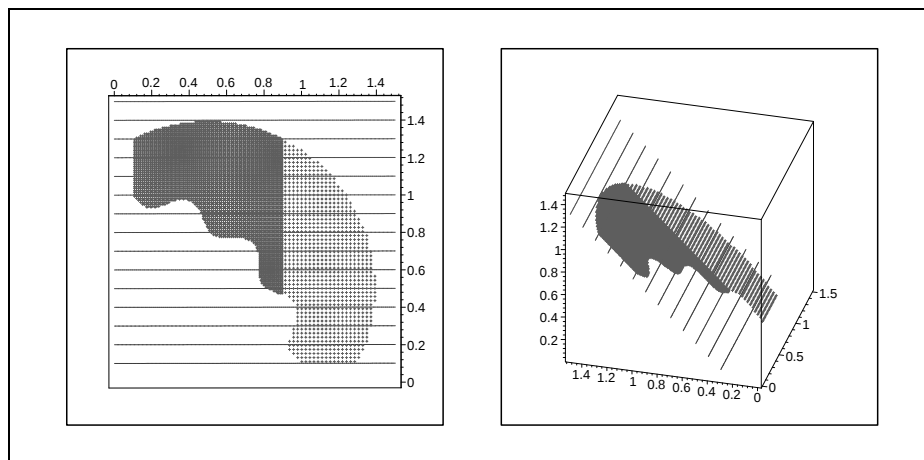


Figura 22: Ejemplo del método de Restricción- ϵ . La cota máxima aplicada a uno de los criterios elimina parte del espacio de búsqueda. En el nuevo espacio de búsqueda se optimiza únicamente el criterio complementario.

Optimización Lexicográfica

La optimización lexicográfica jerarquiza los múltiples criterios a optimizar en términos de su importancia. Tal jerarquización es utilizada para llevar a cabo una secuencia de procesos de optimización para cada grupo jerárquico de criterios. De esta forma

la agregación de criterios es no escalar. Generalmente, cada grupo jerárquico está formado por un sólo criterio. El proceso de optimización inicial se realiza considerando exclusivamente los criterios de mayor jerarquía. En caso de existir múltiples soluciones a dicho problema los valores de las soluciones obtenidas son usadas como restricciones para un subsecuente proceso de optimización que considere el siguiente grupo jerárquico de criterios. Este proceso se repite hasta que todos los criterios han sido evaluados ó no existen soluciones múltiples.

Funciones de Utilidad

El método de funciones de utilidad trata de modelar matemáticamente las preferencias de un individuo en base a sus decisiones dado un conjunto de alternativas. Esto puede considerarse como una generalización de los enfoques basados en la descripción explícita de la estructura de preferencia en términos de relaciones matemáticas entre distintas funciones criterio. El método de funciones de utilidad supone que el individuo decide entre alternativas maximizando la satisfacción obtenida de cada elección. Por lo tanto, el proceso de formación del modelo matemático requiere necesariamente la intervención del usuario y la selección previa de un conjunto de soluciones alternativas. Sin embargo, una vez que la estructura de preferencia ha sido modelada es posible aplicar el modelo resultante como la función criterio del proceso de optimización. Para una función $U : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ fuertemente decreciente el mínimo de $U(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ es Pareto-óptimo.

Programación de Metas

El enfoque de programación de metas busca soluciones que obtengan un nivel predefinido de rendimiento T_i para un conjunto de objetivos. En caso de que tal solución no exista, la tarea es encontrar la solución que minimice la desviación respecto a los valores de rendimiento deseados. En este sentido no se busca una solución óptima solo una solución satisfactoria en términos de los valores predefinidos para cada criterio. El

problema puede ser resuelto mediante programación lineal planteándolo de la siguiente forma:

$$F(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^k (d_i^+ + d_i^-) : f_i(\mathbf{x}) - d_i^+ + d_i^- = T_i,$$

donde las variables d_i^+ , d_i^- se definen como

$$d_i^+ = \frac{1}{2} \{ |f_i(\mathbf{x}) - T_i| + [f_i(\mathbf{x}) - T_i] \}$$

$$d_i^- = \frac{1}{2} \{ |f_i(\mathbf{x}) - T_i| - [f_i(\mathbf{x}) - T_i] \}$$

Es posible especificar preferencias sobre el sentido de las desviaciones respecto a las metas T_i , asignando a cada una de las variables d_i^+ , d_i^- un valor de peso, i.e. w_i^+ , w_i^- . Tales valores de peso permiten la consideración de desigualdades del tipo $f_i \leq T_i$, $f_i > T_i$,

Especificación Progresiva de Preferencias

Los métodos de especificación progresiva de preferencias construyen de manera incremental el modelo de estructura de preferencias al mismo tiempo que se lleva a cabo el proceso de optimización. De esta manera, la búsqueda de una solución es un proceso interactivo donde la información proporcionada por el usuario determina las características de la solución obtenida. Sin embargo, la información requerida del usuario respecto a sus preferencias es de índole local. La operación de estos métodos normalmente consta de tres etapas: 1) encontrar una solución no-dominada, 2) evaluar la actitud del usuario respecto a la solución obtenida para modificar la estructura de preferencias, y 3) repetir los dos pasos anteriores hasta que el usuario esté satisfecho o no sea posible mejorar la solución. La ventaja principal de este tipo de enfoques es que permiten un mejor entendimiento, por parte del usuario, de las interacciones entre los criterios que forman el problema de optimización.

III.4 Técnicas Evolutivas de Optimización Multi-Objetivo

Las técnicas de optimización basadas en cómputo evolutivo abordan el proceso de buscar el óptimo de una función criterio mediante una simulación simplificada de los procesos de evolución natural. Particularmente, son procesos iterativos que manipulan un conjunto de soluciones tentativas mediante la aplicación de operadores estocásticos. Tales operadores modifican las soluciones tentativas con el propósito de encontrar soluciones óptimas respecto a un criterio definido por el usuario. De esta forma el desarrollo de este tipo de técnicas requiere especificar la función de mérito que será utilizada para discernir entre distintas soluciones, especificar el modelo de representación utilizado para cada solución y definir la funcionalidad de los operadores aplicados a tales soluciones. La relativa simplicidad de su implementación, junto con sus características estocásticas y paralelas, han propiciado que estas técnicas sean aplicadas exitosamente en la solución de problemas complejos de optimización global.

Recientemente, ha surgido un creciente interés por aplicar las técnicas de cómputo evolutivo a problemas multiobjetivo. La motivación radica en la posibilidad de diseñar algoritmos evolutivos que dirijan la población hacia el conjunto de soluciones óptimas Pareto. De esta forma, al final de una ejecución del algoritmo es posible obtener varias soluciones óptimas que aproximen el frente Pareto. Este conjunto de soluciones representa los diferentes compromisos encontrados entre los distintos criterios a optimizar. Sin embargo, no impone ninguna estructura de preferencia. La selección de la solución óptima corresponde al usuario en una etapa posterior al proceso de optimización. Este tipo de enfoque cae dentro de la categoría de especificación *a posteriori* de preferencias. Este tipo de enfoque es deseable debido a que permite especificar las preferencias basándose en el conocimiento de las interacciones de los criterios y la manera en que estos compromisos repercuten en las características de la solución. Es decir la estructura

de preferencia del usuario ahora puede considerar no solo los niveles de desempeño sino también la especificación de cada una de las soluciones. De esta forma, permite la integración de consideraciones de alto nivel las cuales no fueron integradas al planteamiento original del problema de optimización multiobjetivo. Adicionalmente, el conocimiento explícito de las interacciones entre los criterios favorece un mejor entendimiento de la problemática a resolver.

El primer estudio en considerar la optimización de múltiples criterios mediante técnicas evolutivas fue realizado por Schaffer (1984) en su tesis doctoral. El algoritmo crea una subpoblación por cada uno de los criterios a optimizar. Los individuos son evaluados mediante el criterio correspondiente a la sub-población a la que pertenece. De esta forma el operador de selección favorece las soluciones que optimizan un criterio en particular. Sin embargo, la recombinación entre individuos pertenecientes a distintas sub-poblaciones da lugar al surgimiento de soluciones intermedias.

El trabajo de Hajela y Lin (1993) propuso incorporar los pesos asignados a cada función dentro de la codificación de las soluciones. De esta forma, se asoció a cada individuo una estructura de preferencia, y la obtención de un conjunto de soluciones diversas depende de la capacidad del algoritmo de mantener la diversidad entre los pesos de los individuos en la población.

El concepto de asignar un valor de aptitud en base a los conceptos de dominancia fue el trabajo de Fonseca y Fleming (1993). En dicho trabajo los autores asignaban a cada solución un rango en base a la cantidad de soluciones que la dominaban. El valor de aptitud de cada individuo fue proporcional a su rango, permitiendo así el uso de operadores genéticos canónicos. Se proponen dos esquemas para preservar la diversidad de las soluciones: uno basado en la compartición de aptitud y otro basado en la segregación de la población en subpoblaciones.

El trabajo de Srinivas y Deb (1994) jerarquizó la población en subconjuntos excluyentes en términos de los conceptos de dominancia. La población fue segregada en distintos frentes Pareto locales. El conjunto de soluciones no dominadas de una población es asignado el rango más alto. A continuación, tales individuos son descartados de consideración y se vuelve a determinar el conjunto no dominado de la población restante. El proceso se repite hasta que todas las soluciones de la población han sido asignadas un rango a partir del cual se asigna su valor de aptitud. Adicionalmente, dentro de cada rango se realiza penalización de las soluciones aglomeradas, con el propósito de obtener una buena distribución de individuos.

El trabajo de Horn *et al.* (1994) propone integrar los conceptos de selección basada en nichos al contexto de la optimización multiobjetivo. De esta forma la verificación de dominancia es incorporada a un operador de selección mediante torneo binario. Este enfoque tiene la ventaja de que no es necesario asignar un valor de aptitud a los individuos, pues el operador de selección por torneo favorece de manera estocástica a las soluciones no dominadas respecto a un muestreo de la población. En caso que las comparaciones de dominancia no brinden una resolución sobre el ganador del torneo, entonces la solución con menos aglomeración es seleccionada.

El trabajo de Zitzler y Thiele (1998) incorporó el concepto de elitismo al proceso de optimización MO evolutiva. Esto es logrado mediante el manejo explícito de una población externa de tamaño fijo, la cual sirve como un repositorio de soluciones no dominadas. Esta modificación favoreció la convergencia del algoritmo hacia el frente Pareto. Adicionalmente, la diversidad es mantenida mediante un sofisticado proceso de agrupamiento de soluciones el cual reduce el tamaño de la población externa; permitiendo así la inclusión de nuevas soluciones al repositorio externo de soluciones no dominadas.

Knowles & Corne (2000) propusieron un algoritmo evolutivo basado en estrategias

de evolución. En ese trabajo también se utilizó una población externa de tamaño fijo. Cada nueva solución “hijo” generada mediante una mutación es comparada contra la solución padre en términos de dominancia Pareto. En caso de dominar a la solución padre, la nueva solución es comparada contra el repositorio de soluciones no dominadas y remplace todas aquellas soluciones que domine. Para los casos en que esta última comparación sea insuficiente (que no domine ni sea dominada por ninguna solución) se realiza un análisis de aglomeración entre padre e hijo para determinar cual sobrevivirá a la siguiente generación.

III.5 Discusión

Los problemas de optimización multiobjetivo presentan un mayor nivel de complejidad conceptual que los problemas de optimización de un solo criterio. Diferentes investigadores han estudiado la adaptación de las técnicas de cómputo evolutivo para la solución de problemas multiobjetivo. Las capacidad de realizar una búsqueda estocástica de manera concurrente a lo largo del espacio de búsqueda permite a las técnicas evolutivas cubrir varias de las limitantes inherentes a técnicas tradicionales de optimización bajo múltiples criterios; i.e. ver el trabajo de Shukla & Deb (2005). Particularmente, los algoritmos evolutivos tratan de conducir un conjunto de soluciones tentativas hacia el frente Pareto mediante la operación de un conjunto de operadores genéticos. Dicho proceso de búsqueda persigue dos metas complementarias: *convergencia* y *diversidad*. En el siguiente capítulo se presenta una aportación dentro del contexto de la optimización multiobjetivo, la cual propone una modificación a uno de los operadores genéticos más importantes en la operación de algoritmos evolutivos multiobjetivo.

Capítulo IV

Una nueva Técnica Evolutiva de Optimización Multiobjetivo

Las técnicas de optimización multiobjetivo basadas en cómputo evolutivo obtienen una aproximación al conjunto de soluciones óptimas Pareto mediante la manipulación de un conjunto de posibles soluciones. El proceso de búsqueda evolutiva realizado por dichas técnicas persigue dos metas complementarias. La primera es obtener una convergencia hacia el frente Pareto global. La segunda es obtener un muestreo representativo del frente Pareto. Entre los distintos mecanismos propuestos para el diseño de algoritmos evolutivos capaces de cumplir dichas metas, uno de los más exitosos y ampliamente utilizado es el de la asignación de aptitud de un individuo en base a su rango de dominancia dentro de la población. La integración de dicho mecanismo junto con técnicas de elitismo generacional y de penalización de soluciones aglomeradas ha permitido desarrollar algoritmos evolutivos robustos y de uso general como SPEA-II y NSGA-2.

Este capítulo propone una técnica evolutiva de optimización multiobjetivo desarrollada a partir de un nuevo concepto de asignación de rango poblacional. La propuesta está basada en una parametrización geométrica del conjunto de soluciones Pareto inspirada por el método de optimización multiobjetivo de Intersección Normal de Frontera (Das & Dennis, 1998) . El algoritmo desarrollado en esta tesis, utiliza tal parametrización para obtener una aproximación uniformemente distribuida del frente Pareto sin necesidad de llevar a cabo explícitamente un proceso de penalización de soluciones aglomeradas. Adicionalmente, el algoritmo opera directamente sobre los valores de la parametrización adoptada, eliminando el proceso de comparaciones de dominancia

Pareto entre soluciones. El algoritmo desarrollado fue probado en distintos problemas modelo propuestos en la literatura obteniéndose resultados comparables con los proporcionados por técnicas evolutivas del estado del arte en optimización multiobjetivo.

IV.1 Intersección Normal de Frontera.

La parametrización utilizada en este trabajo es semejante a la propuesta por Das (1998) para el método de *intersección normal de frontera*, el cual denominaremos de aquí en adelante por sus siglas en inglés (NBI¹). El método NBI es un enfoque sistemático de *programación matemática* que permite encontrar un conjunto de soluciones en la frontera del espacio de soluciones de un problema multiobjetivo. El proceso de optimización consiste en realizar una búsqueda direccionada de soluciones óptimas basándose en una parametrización geométrica del espacio de funciones. Su motivación fue la de desarrollar un mecanismo capaz de obtener un muestreo uniformemente distribuido del frente Pareto.

El método NBI está estrechamente relacionado con métodos de programación por metas y comparte una interpretación geométrica encontrada en distintos trabajos de dicha área de investigación; i.e., Gembicki (1974), Schy & Giesy (1988). La propuesta original de Das (1998) ha sido ampliada por los trabajos de Kim & Kim (2006) y de Lim *et al.* (2001). El trabajo de Messac *et al.* (2003) sobre el método de Restricción Normal desarrolla un método de ϵ -restricción con una interpretación geométrica muy semejante a la del NBI.

IV.1.1 Interpretación Geométrica

Las premisas geométricas utilizadas en el método NBI son relativamente sencillas. Inicialmente se define un punto de “referencia” en el espacio de funciones objetivo, junto

¹Del inglés *Normal Boundary Intersection*

con un vector de “dirección” de búsqueda. Estos elementos geométricos son utilizados, junto con las restricciones y funciones criterio del problema multiobjetivo, para plantear un nuevo problema de optimización donde el único criterio a optimizar es un valor de desplazamiento a lo largo de la dirección del búsqueda. El nuevo problema de optimización puede ser resuelto mediante un optimizador no lineal apropiado a las características de las funciones criterio del problema multiobjetivo a resolver.

Geométricamente, la máxima magnitud del vector de búsqueda corresponde a la intersección entre dicho vector y la frontera del espacio de funciones. El método NBI parametriza el punto de referencia inicial en términos de dos elementos: 1) un conjunto de valores de peso asignados a las funciones criterio; 2) un objeto geométrico denominado el *Casco Convexo de Mínimos Individuales*. Por otro lado, la dirección de búsqueda se especifica mediante un vector “normal” al casco convexo de mínimos individuales. A continuación se describen los distintos elementos geométricos involucrados en la parametrización NBI. Tales elementos son representados en la Figura ??.

- **Definición 1. Mínimo Individual.** Dado un problema de optimización multiobjetivo definido por una función vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^t$ existen distintas soluciones $\mathbf{x}_i^*$ encontradas en los extremos del frente Pareto las cuales corresponden al óptimo global de cada uno de los criterios, i.e. $f_i(\mathbf{x}_i^*) \mid \forall \mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}_i^*) \leq f_i(\mathbf{x})$ donde $i \in \{1, \dots, k\}$. Por simplicidad de notación el valor de cada óptimo individual es denotado por f_i^* . Sin pérdida de generalidad se considerará que se trabaja con un problema de minimización.
- **Definición 2. Casco Convexo de Mínimos Individuales (CCMI).** A partir del vector utópico $\mathbf{F}^* = [f_1^*, \dots, f_k^*]$ y el conjunto de mínimos individuales $\mathbf{x}_i^*$, es posible definir una matriz Φ de tamaño $k \times k$, donde cada columna está dada por un vector $\mathbf{F}^* - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*)$. El casco convexo de mínimos individuales está formado por

el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^k$ que son combinaciones convexas de $\mathbf{f}^* - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*)$, i.e., $\{\Phi\beta : \beta \in \mathbb{R}^k, \sum_{i=1}^k \beta_i = 1, \beta_i \geq 0\}$. Geométricamente, dicho conjunto forma un simplex de $k - 1$ dimensiones, mientras que el vector β expresa las coordenadas baricéntricas de un punto perteneciente a dicho simplex.

- **Definición 3. Vector Normal al Casco Convexo de Mínimos Individuales.** Para un problema convexo, la intersección entre la frontera del espacio de funciones y un vector normal, dirigido hacia el origen, proveniente de cualquier punto en el CCMI, ofrece una solución Pareto óptima. Sin embargo, no es necesario que dicho vector sea estrictamente ortogonal al CCMI; es suficiente con especificar un vector que contenga componentes negativos. Esto permite definir un vector pseudo-normal al casco convexo mediante $\mathbf{n} = -\Phi \cdot \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$.

IV.1.2 El Problema de Optimización

La parametrización NBI es utilizada para plantear el siguiente problema de optimización,

$$NBI_\beta : \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ t \end{bmatrix} \right\} = \max_{\mathbf{x}, t} t : \Phi\beta + t\mathbf{n} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (57)$$

donde se busca maximizar el parámetro t el cual representa la distancia a lo largo del vector $\mathbf{n}$ entre un punto $\Phi\beta$ perteneciente al CCMI y una solución $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

La implementación de dicho método requiere la determinación previa de los valores de mínimos individuales, a partir de los cuales es posible especificar la matriz Φ . Adicionalmente, para obtener un conjunto de múltiples soluciones óptimas es necesario resolver el problema de optimización varias veces, especificando distintos vectores de peso β . De esta forma, la obtención de una aproximación al conjunto de soluciones óptimas es un proceso secuencial que depende de las características del método de optimización utilizado y de los diferentes valores asignados a los parámetros de operación

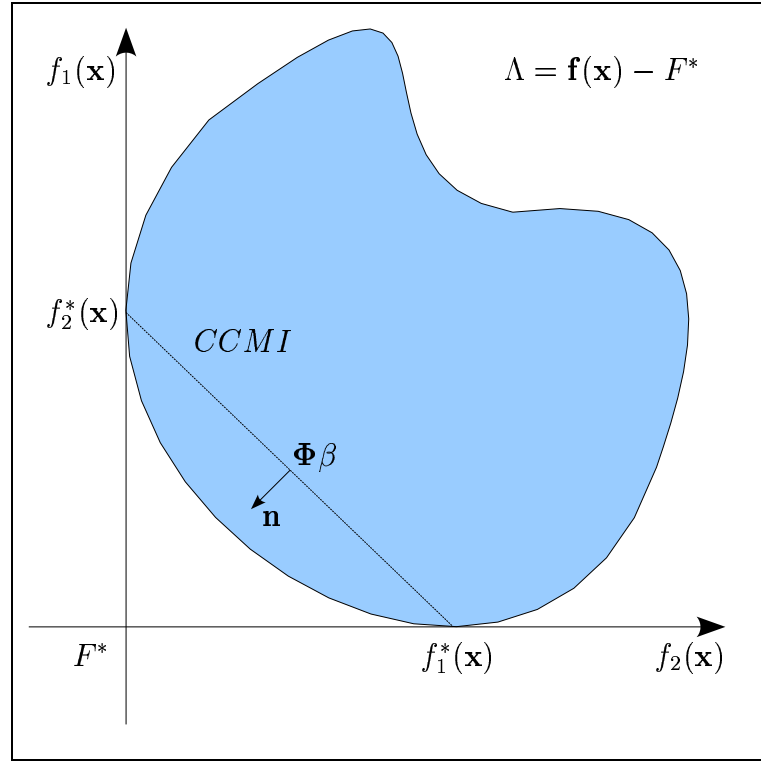


Figura 23: Elementos geométricos involucrados en el método NBI.

del método.

La parametrización propuesta en el método NBI no está ligada a una técnica de optimización en particular. Sin embargo, los trabajos reportados en la literatura resuelven el problema de optimización mediante técnicas de Programación No Lineal. Por otro lado, Das (1998) propone en su trabajo original una metodología jerárquica para generar un conjunto de vectores β uniformemente distribuidos los cuales pueden ser usados para obtener una distribución uniforme de soluciones sobre el frente Pareto.

IV.1.3 Caraterísticas de las Soluciones

Aun cuando el desempeño del método NBI estriba en las características de la técnica de optimización utilizada, existen aspectos teóricos importantes a considerar. Las soluciones obtenidas al resolver el problema planteado en la Ecuación (??) son localmente óptimas en el contexto de dominancia Pareto para problemas convexos. Para el caso en que el problema es convexo y los mínimos individuales f_i^* corresponden a los mínimos globales de cada función criterio, estas condiciones son suficientes para la obtención de soluciones Pareto óptimas globales.

El método NBI tiene la capacidad de encontrar soluciones en regiones no-convexas de la frontera del espacio de funciones. Esta es una ventaja substancial sobre técnicas de agregación lineal de las funciones criterio. Sin embargo, es posible que soluciones encontradas por el método NBI en regiones no convexas de la frontera del espacio de funciones no sean globalmente óptimas. Esto corresponde al hecho de que, debido a discontinuidades en el frente Pareto, no todos los puntos en la frontera del espacio de funciones pueden necesariamente representar óptimos globales. Por lo tanto, es posible que mediante la selección de un punto de referencia en particular, la búsqueda a lo largo de la dirección normal al CCMI intersecte la frontera del espacio de funciones en una de tales regiones que no forman parte del frente Pareto.

La distribución de soluciones encontradas por el método NBI en la frontera del espacio de funciones es independiente a cambios de escala en las funciones criterio optimizadas. Esto permite obtener un conjunto de soluciones cuya dispersión a lo largo del frente pareto corresponde a la dispersión encontrada entre los distintos valores de peso utilizados. La importancia de dicha propiedad se manifiesta al estudiar problemas multiobjetivo formados por funciones criterio no lineales. Aquellos métodos que realicen una escalarización de los múltiples criterios a partir de una distribución uniforme de valores de peso, al ser aplicados a problemas multiobjetivo no lineales, no producirán

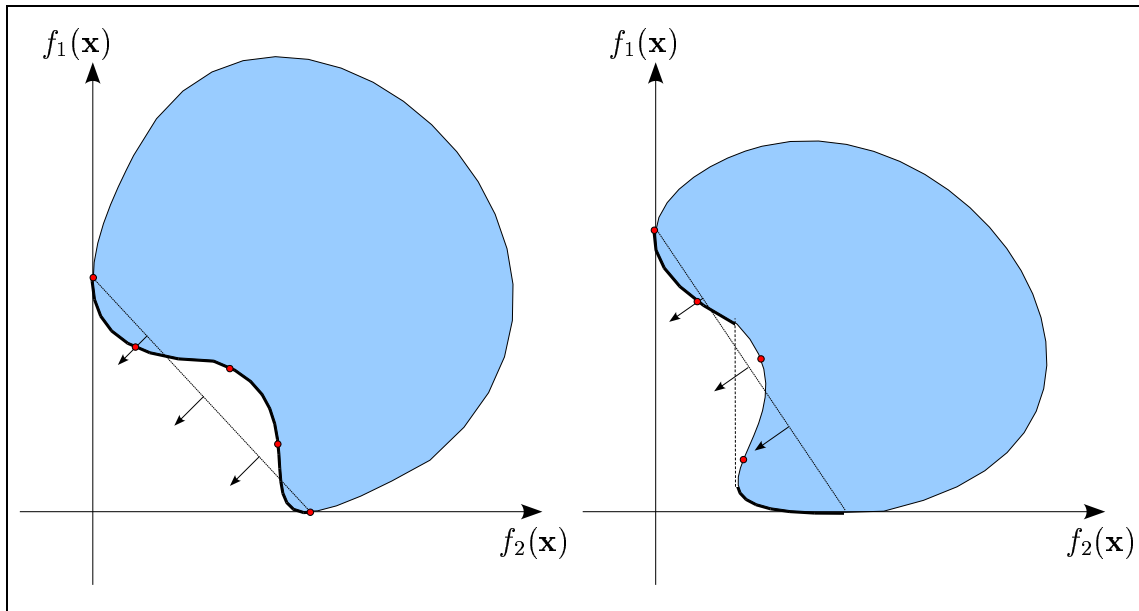


Figura 24: Aplicación del método NBI en problema no convexos. Izquierda: El caso de un frente Pareto continuo no convexo que puede ser completamente explorado por el método NBI. Derecha: El caso de un frente Pareto discontinuo que también puede ser explorado completamente, sin embargo algunas de las soluciones encontradas no son óptimos globales.

necesariamente una distribución uniforme de soluciones óptimas.

La calidad de las estimaciones de los mínimos individuales limita el desempeño del método solo en casos extremos donde estos valores son demasiado lejanos al valor del mínimo global. Cuando tales estimaciones están fuera de los valores alcanzables para las funciones criterio, se puede ocasionar una búsqueda totalmente fuera de la región válida del espacio de funciones. Si por el contrario, las estimaciones corresponden a un valor válido muy lejano del óptimo global, la búsqueda estará limitada a una región restringida del frente Pareto. Por estas razones es recomendable (Das 1998) ejecutar previamente un proceso de optimización para cada uno de los criterios a optimizar con el propósito de tener un conjunto de aproximaciones aceptable.

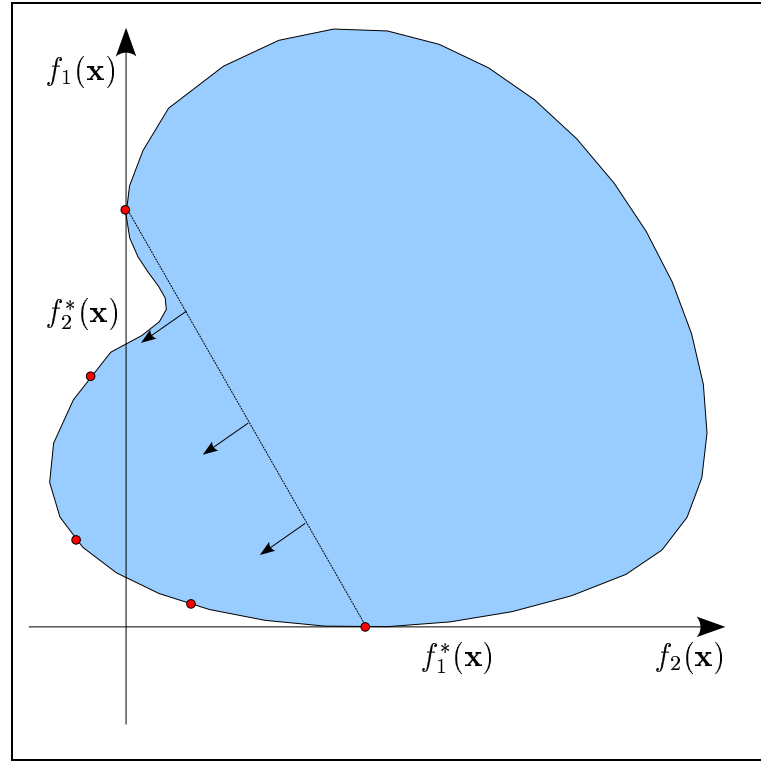


Figura 25: Dependencia del método NBI sobre la estimación inicial de los mínimos individuales. El escenario muestra que aun cuando tales estimaciones no corresponden a los mínimos globales es posible explorar el frente Pareto global.

IV.2 Acoplamiento de NBI con Técnicas Evolutivas

El método NBI plantea un proceso secuencial de búsqueda dirigida dentro del espacio de funciones. Sin embargo, corresponde al usuario definir el proceso mediante el cual se lleva a cabo dicha búsqueda. Es decir, distintas técnicas de optimización pueden ser utilizadas para resolver el problema NBI_β , como lo veremos a continuación. Actualmente, el estudio de la posible relación entre técnicas de computo evolutivo y métodos de búsqueda direccionada como el NBI, ha despertado el interés de algunos investigadores.

El reciente trabajo de Rigoni & Poles (2005) investiga un mecanismo de cooperación entre un algoritmo evolutivo multiobjetivo y una implementación específica del método

NBI. El método NBI en consideración acopla la parametrización NBI con un optimizador basado en Programación Cuadrática Secuencial (SQP) (Schittkowski, 2001). Los autores proponen un esquema bajo en el cual la ejecución de un algoritmo evolutivo (MOGA-II) es intercalada con la operación de un método NBI, mediante un proceso de “partición” del frente Pareto. La propuesta consiste en ejecutar MOGA-II para obtener una aproximación inicial del frente Pareto. Este conjunto de soluciones es utilizado para identificar y aislar distintas regiones del frente Pareto. Cada una de estas regiones es utilizada para plantear problemas independientes que son resueltos posteriormente mediante la implementación NBI. Este enfoque permite solventar limitaciones inherentes al optimizador SQP, especialmente la sensibilidad del optimizador a discontinuidades en el espacio de funciones. Sin embargo no presenta una integración real entre las técnicas evolutivas y el método NBI, ya que solo utiliza un algoritmo evolutivo para estudiar el espacio de funciones con el propósito de determinar manualmente los valores de operación de una instancia NBI.

El trabajo de Shukla & Deb (2005) incluye una comparación cualitativa entre el algoritmo NSGA-II y distintos métodos secuenciales de búsqueda direccionada como el NBI. Tales métodos fueron aplicados a diversos problemas de prueba que consisten de dos y tres objetivos. Los resultados obtenidos por los autores demuestran la efectividad del método NBI en obtener un conjunto de soluciones bien distribuidas para los problemas de menor complejidad. Sin embargo, su efectividad disminuyó al aumentar la complejidad de las interacciones entre los criterios a optimizar. Consecuentemente, el NSGA-II brinda mejores resultados que NBI al considerar problemas que presentan discontinuidad, multimodalidad ó una densidad de soluciones no uniforme a lo largo del frente Pareto.

A partir de estos trabajos, se identifican distintas alternativas para acoplar la parametrización NBI con técnicas evolutivas:

1. Utilizar técnicas evolutivas para optimizar cada caso del problema NBI_β definido por la Ecuación (??).
2. Utilizar NBI como un proceso de búsqueda local dentro de un algoritmo evolutivo.
3. Desarrollar operadores genéticos basados directamente en la parametrización NBI ó en su interpretación geométrica.

Este trabajo propone combinar la parametrización NBI con el proceso de búsqueda poblacional de un algoritmo evolutivo mediante el desarrollo de operadores genéticos especializados. Tal enfoque transforma el proceso secuencial de búsqueda local utilizado en NBI por un proceso distribuido de búsqueda global.

La propuesta se basa en la interpretación geométrica de los parámetros NBI, la cual permite considerar de manera separada los aspectos de *distribución* espacial y nivel de *optimalidad* de un conjunto de soluciones. El posicionamiento de una solución dentro del espacio de funciones es parametrizado por el vector de valores de peso β . Asimismo, es posible comparar el nivel de optimalidad de múltiples soluciones en términos de su parámetro de desplazamiento t a lo largo de la dirección normal al CCMI. Bajo tales premisas, las metas de nuestro algoritmo evolutivo de optimización multiobjetivo son planteadas de la siguiente manera:

1. La convergencia hacia el frente Pareto estriba en promover el surgimiento de nuevas soluciones con mayores valores de desplazamiento t .
2. Una distribución uniforme de la población estriba en promover una distribución uniforme de vectores de peso β correspondientes a cada solución.

El algoritmo evolutivo propuesto en este trabajo impone una estructura geométrica al proceso de optimización, con el propósito de promover ambas metas de manera

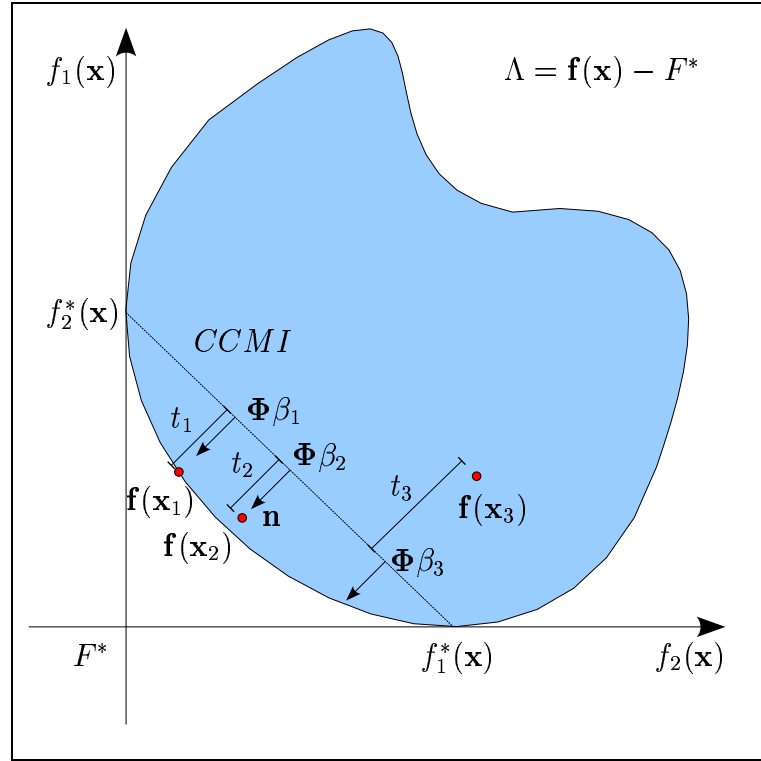


Figura 26: Parametrización de soluciones en el espacio de funciones. A cada solución corresponde un vector de coordenadas baricéntricas β_i y un valor de desplazamiento t_i . Estos parámetros pueden calcularse a partir del conocimiento del CCMi.

simultánea. Esto es logrado mediante un nuevo mecanismo de asignación de rango poblacional el cual opera directamente sobre la parametrización NBI.

IV.2.1 Determinación de los Parámetros NBI

Dentro del método NBI original, el vector β y la matriz Φ son parámetros proporcionados por el usuario, a partir de los cuales el sistema realiza una búsqueda para determinar el valor del parámetro t correspondiente a una solución óptima $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Dado que el método evolutivo aquí propuesto manipula la población a través de la parametrización NBI, la determinación de un mecanismo para la obtención de los valores de los parámetros NBI es el primer aspecto a considerar en el desarrollo de nuestro algoritmo.

Mínimos Individuales

Los valores de los mínimos individuales $f_i(\mathbf{x}_i^*)$ son parámetros comunes a todas las soluciones y son calculados a partir de las características colectivas de la población. Estos parámetros son obtenidos mediante un muestreo de las distintas soluciones generadas a lo largo del proceso evolutivo. Es decir, se determinan los valores correspondientes a los mínimos individuales encontrados en la población actual y estos son comparados con las aproximaciones ya existentes de estos valores. De esta forma, se busca que tales aproximaciones converjan progresivamente hacia los valores mínimos globales. El hecho de basar tales aproximaciones en la información generada durante proceso de búsqueda, elimina la necesidad de determinar dichos valores *a priori*. Cabe mencionar que en caso de contar con tal información previa, tales valores pueden ser tomados como valores iniciales que serían subsecuentemente remplazados en caso de encontrarse mejores aproximaciones. Así pues, los mínimos individuales son calculados en cada generación afín de actualizar los valores de la matriz Φ . Consecuentemente, tanto la geometría del CCMI como la dirección del vector $\mathbf{n}$ son actualizadas de manera dinámica durante la ejecución del algoritmo.

Parámetros β y t .

Los parámetros β y t son individuales a cada solución y están en función de la especificación del CCMI. De esta forma, es necesario determinar los parámetros β_i y t_i para cada solución $\mathbf{x}_i$ perteneciente a la población actual donde $i = 1, \dots, P$. Geométricamente, la estimación de estos parámetros requiere determinar la intersección entre el vector de dirección de búsqueda y el simplex definido por el CCMI. Para el caso de 2 y 3 dimensiones, tales cálculos son relativamente sencillos y pueden realizarse mediante geometría analítica básica. Sin embargo, la solución del caso general involucra resolver un sistema

lineal de ecuaciones correspondiente al modelo

$$\Phi \beta_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - t_i \mathbf{n}.$$

En este trabajo se propone un procedimiento geométrico el cual descompone el problema de la siguiente manera:

1. Determinar la proyección de un punto en el espacio de funciones hacia el subespacio definido por el CCMI.
2. Transformar las coordenadas de un punto en ese subespacio a coordenadas baricéntricas expresadas en términos de los k mínimos locales que definen el CCMI.

Proyección sobre el CCMI.

En primera instancia se define un subespacio de $k-1$ dimensiones a partir de los valores de los k mínimos individuales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. El origen de este subespacio corresponde a uno de los mínimos individuales f_b^* donde $b \in \{1, \dots, k\}$; mientras que cada uno de los $k-1$ vectores base $\sigma_i \in \mathbb{R}^k$ está definido por $(f_r^* - f_b^*)/\|f_r^* - f_b^*\|$ para $r \in \{1, \dots, k\} \setminus \{b\}$, ver Figura ??.

Cada vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - f_b^*$ es proyectado hacia el subespacio formado por los vectores σ_i mediante una transformación lineal Ψ de la forma

$$\begin{matrix} \psi_i & = & \Psi & [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - f_b^*], \\ (k-1,1) & & (k-1,k) & (k,1) \end{matrix}$$

donde Ψ es una matriz de tamaño $[k-1] \times k$ construida a partir de los vectores σ_i ,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{k-1} \end{bmatrix}.$$

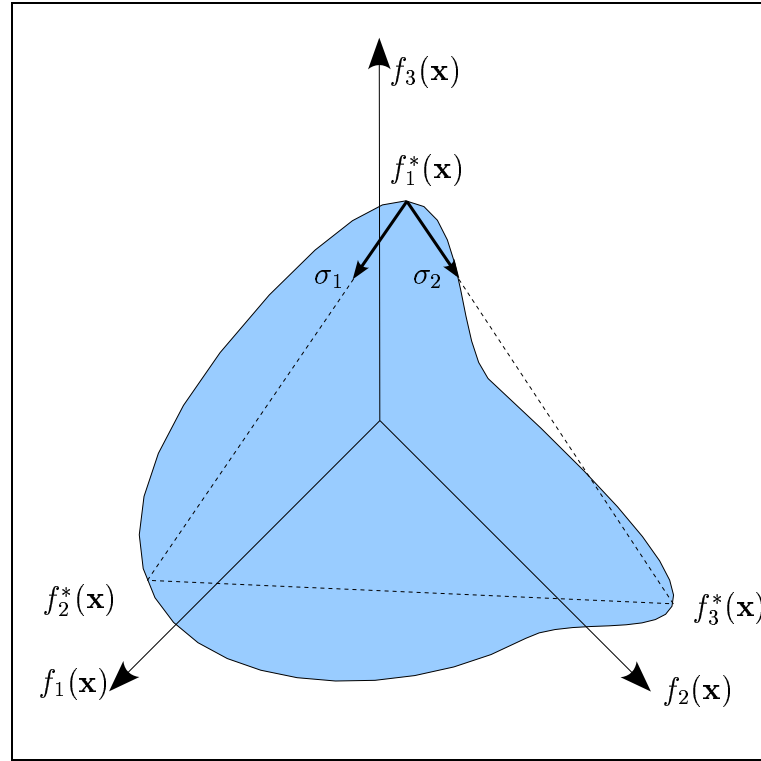


Figura 27: Descripción de los vectores base que definen el subespacio correspondiente al CCMI. Para el caso de tres dimensiones el CCMI es un triángulo definiendo un subespacio en dos dimensiones.

Obtención de Coordenadas Baricéntricas.

Al transformar el vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - f_b^*$ mediante la matriz Ψ se obtiene un vector ψ_i el cual expresa la proyección hacia el CCMI en términos de un sistema de referencia con origen en el mínimo local f_b^* . Es posible convertir el vector ψ_i a coordenadas baricéntricas β_i mediante una transformación Λ aplicada de la forma

$$\beta_i = \Lambda \psi_i.$$

$$(k,1) \quad (k,k-1) \quad (k-1,1)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto usando como datos los valores $\psi_{f_i^*}$ y $\beta_{f_i^*}$ correspondientes a los mínimos individuales conocidos. De esta forma es posible

generar una matriz compuesta $\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Psi}$ la cual es capaz de obtener las coordenadas β_i de cualquier solución.

A partir del conocimiento de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ y $\Phi\beta_i$, la determinación del vector $t\mathbf{n}$ es obtenido con la expresión $t\mathbf{n} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \Phi\beta_i$. De esta forma, la magnitud del desplazamiento a lo largo de un vector normal al CCMI está dada por

$$t = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \Phi\beta_i\|$$

IV.2.2 Subconjuntos de Exploración

El uso de la parametrización NBI permite imponer una interpretación geométrica a la estructura del espacio de funciones. A partir de esta parametrización es posible definir un nuevo nivel de abstracción sobre la estructura del espacio de funciones. Esta nueva abstracción se define en términos de la relación entre el mecanismo de búsqueda y el espacio funciones a ser explorado. Más adelante en este capítulo, esta abstracción será utilizada como el concepto principal en el desarrollo de una nueva técnica de optimización.

Bajo la parametrización NBI, un vector de pesos β especifica un punto dentro del CCMI a partir del cual es posible encontrar múltiples soluciones colocadas a lo largo de la dirección del vector de búsqueda $\mathbf{n}$. La posición de una solución a lo largo del vector $\mathbf{n}$ está dada por el parámetro de desplazamiento t , siendo la solución óptima en términos de dominancia Pareto aquella que maximice dicho parámetro. Esto permite presentar la siguiente definición

Definición 4. Subconjuntos de Exploración NBI. El subconjunto del espacio de funciones definido por $\mathcal{A}(\beta, \Phi, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k \mid \exists t \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \Phi\beta + t\mathbf{n}\}$ corresponde a las soluciones alcanzables al realizar una búsqueda a lo largo de la dirección $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^k$, iniciando desde una posición especificada por las coordenadas baricéntricas expresadas por el vector $\beta \in \mathbb{R}^k$ y una matriz de ganancia Φ de tamaño $k \times k$. La Figura ??

representa gráficamente un subconjunto de exploración.

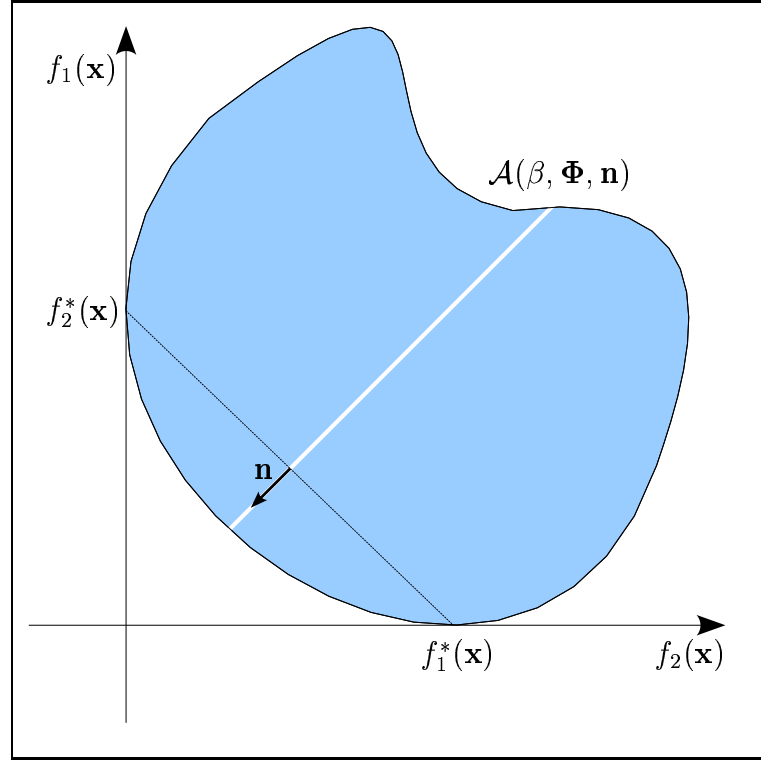


Figura 28: Subconjunto de Exploración. El método NBI plantea un proceso de búsqueda en el espacio de funciones a lo largo de una línea recta definida por un vector $\mathbf{n}$ y un punto dado por los parámetros β y Φ .

Dadas dos soluciones, $\mathbf{x}_m$ y $\mathbf{x}_n$, contenidas en un mismo subconjunto $\mathcal{A}(\beta, \Phi, \mathbf{n})$ (i.e. $\beta_m = \beta_n$ para $m \neq n$), la comparación de sus parámetros escalares, t_m y t_n , permite discernir el nivel de optimalidad entre tales soluciones. La solución Pareto óptima de $\mathcal{A}(\beta, \Phi, \mathbf{n})$ es aquella con el mayor valor en su parámetro t . De esta forma, existe un elemento no dominado para todo conjunto cerrado $\mathcal{A}(\beta, \Phi, \mathbf{n})$. Por lo tanto, es posible obtener una aproximación al frente Pareto mediante el análisis de múltiples subconjuntos $\mathcal{A}_j(\beta_j, \Phi, \mathbf{n})$ donde $j = 1, \dots, J$. De esta forma, las variaciones en el vector de peso β_j determinan la región explorada del frente Pareto. Mientras que la

cantidad J de subconjuntos a considerar corresponde al nivel de granularidad deseado en la aproximación al frente Pareto.

Debido a que la comparación del parámetro t no es directamente aplicable entre soluciones pertenecientes a distintos conjuntos $\mathcal{A}_j$, se propone expandir la definición de dichos conjuntos para agrupar múltiples vectores β_j encontrados dentro de un mismo vecindario. Esto permite definir subconjuntos de exploración $\bar{\mathcal{A}}$ correspondientes a un volumen del espacio de funciones.

Definición 5. Subconjuntos Expandidos de Exploración NBI. Un subconjunto definido en el espacio de funciones mediante $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_{\beta_j}, \Phi, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k \mid \exists t \in \mathbb{R}, \beta \in \mathcal{C}_{\beta_j} : \mathbf{a} = \Phi\beta + t\mathbf{n}\}$ corresponde a un hyper-volumen de soluciones alcanzables al realizar una búsqueda a lo largo de una dirección $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^k$, iniciando desde una posición dentro de la región especificada por $\beta \in \mathcal{C}_{\beta_j} \subset \mathbb{R}^k$ y una matriz de ganancia Φ de tamaño $k \times k$; donde $\mathcal{C}_{\beta_j}$ denota un conjunto de vectores en la proximidad de $\beta_j \in \mathbb{R}^k$. La Figura ?? representa gráficamente un subconjunto expandido de exploración.

La interpretación de un conjunto $\bar{\mathcal{A}}_j$ como un “volumen” supone que $\mathcal{C}_{\beta_j}$ es un conjunto conectado. La definición de $\mathcal{C}_{\beta_j}$ puede hacerse en términos de restricciones sobre sus elementos, e.g. $\mathcal{C}_{\beta_j} = \{\beta \mid \|\beta - \beta_j\| \leq \epsilon \in \mathbb{R}\}$. En este trabajo los conjuntos $\mathcal{C}_{\beta_j}$ son obtenidos a partir de una partición del espacio $\mathbb{R}^n$, de tal forma que $\mathcal{C}_{\beta_i} \cap \mathcal{C}_{\beta_j} = \emptyset$.

El concepto de subconjuntos de exploración es la base del mecanismo de asignación de rango propuesto en este trabajo. Tales subconjuntos facilitan la comparación de soluciones dentro del contexto de búsqueda evolutiva, al mismo tiempo que permiten dividir el espacio de búsqueda con el propósito de controlar la exploración del espacio de búsqueda. Particularmente, se propone un nuevo mecanismo de asignación de rango poblacional el cual, en lugar de realizar comparaciones de dominancia entre soluciones, incorpora los conceptos de subconjuntos de exploración definidos en la parametrización NBI.

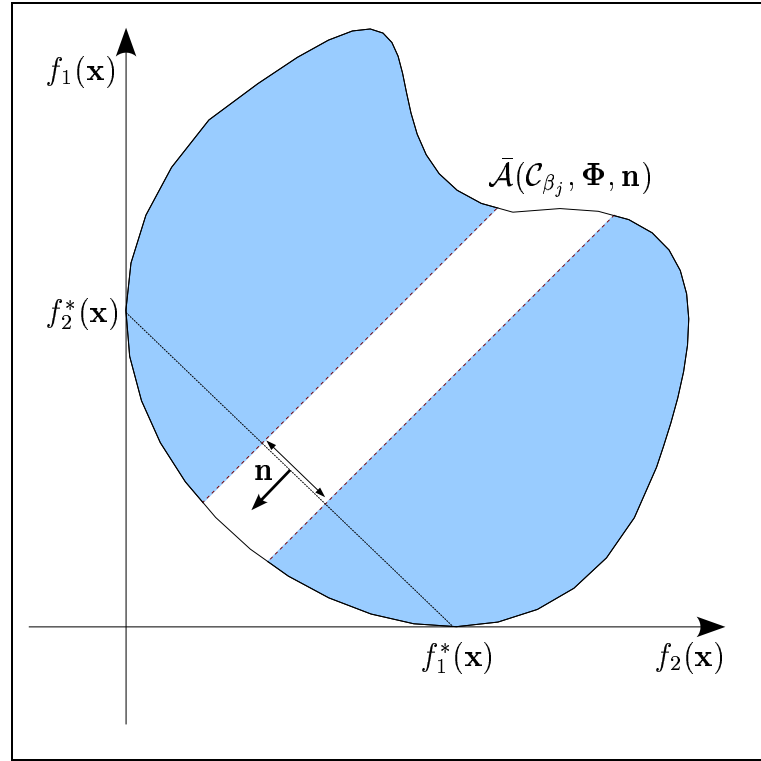


Figura 29: Subconjuntos Expandidos de Exploración. Mediante la consideración de un conjunto $\mathcal{C}_{\beta_j}$ de múltiples vectores β_j , es posible definir un proceso de búsqueda a lo largo de un “volumen” contenido en el espacio de funciones

IV.3 Asignación de Rango NBI

Los algoritmos evolutivos operan iterativamente sobre un conjunto de soluciones tentativas mediante un conjunto de funciones estocásticas. El proceso de búsqueda evolutiva favorece el surgimiento de nuevas soluciones que mejoren el nivel de “aptitud” del conjunto de soluciones tentativas. Este nivel de “aptitud” corresponde al valor de la función criterio del problema de optimización a resolver. Para el caso de problemas con múltiples objetivos, es útil asignar un valor escalar de aptitud para cada solución a partir de los valores obtenidos por las distintas funciones criterio que se consideran.

El mecanismo de asignación de rango poblacional permite asignar un valor de aptitud proporcional a la “jerarquía” de una solución respecto al resto de la población actual. De esta forma el rango poblacional es una descripción relativa del mérito de una solución. El propósito de este tipo de evaluación es el de facilitar la aplicación de operadores genéticos de selección sobre la población de soluciones. En el caso de un solo objetivo, la ventaja de un operador de selección basado en tal mecanismo es la de ser independiente de la escala de la función de aptitud. En el caso de múltiples objetivos la asignación de rango permite comparar múltiples criterios en términos de un concepto común de preferencia entre soluciones. El uso explícito de las relaciones de dominancia como un concepto de preferencia dentro de la asignación de rango fue originalmente sugerido por Goldberg (1989). A continuación se mencionarán algunas características generales de tal mecanismo las cuales servirán como motivación para proponer un nuevo mecanismo de asignación de rango.

IV.3.1 Asignación de Rango por Relaciones de Dominancia

La asignación de rango poblacional trata de cuantificar el mérito relativo de una solución respecto al resto de la población y brinda un mecanismo para jerarquizar directamente la población en términos de la calidad de las soluciones. Los mecanismos de asignación de “rango” basados en dominancia Pareto aprovechan las características poblacionales de los algoritmos evolutivos y asignan el valor de aptitud de un individuo en términos de sus relaciones de dominancia respecto al resto de la población. Esta valoración segrega la población en subconjuntos formados por soluciones no dominadas entre sí, para después asignar un valor de rango común a todos los miembros de cada conjunto. Alternativamente, es posible contabilizar el número de soluciones dominadas por cada solución en la población y asignar el rango a partir de dicha cantidad, ver la Figura ???. Independientemente de la implementación, el propósito de dicho mecanismo es el

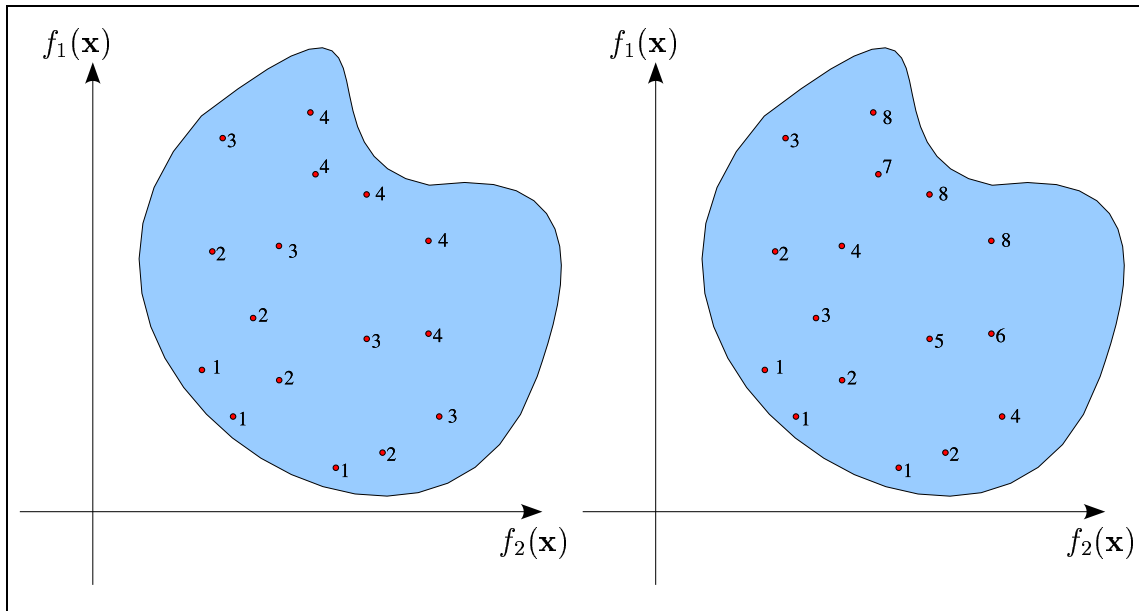


Figura 30: Diferentes mecanismos de asignación de rango en base a relaciones de dominancia. Izquierda: Segregación en frentes Pareto locales. Derecha: Rango proporcional al número de veces que una solución es dominada por el resto de la población.

de ejercer presión de selección sobre aquellas soluciones cercanas al frente Pareto, al mismo tiempo que se establece una equivalencia entre soluciones no dominadas entre sí.

La principal ventaja de la asignación de rango mediante la evaluación directa de relaciones de dominancia entre soluciones, es que dicho mecanismo es independiente de la naturaleza de los distintos criterios a considerar. De esta forma, las relaciones de dominancia integran fácilmente criterios de diferentes escalas o incluso criterios no conmensurables entre sí. Adicionalmente, las validaciones de dominancia no imponen ninguna estructura geométrica al frente Pareto, de tal forma que permiten la identificación de frentes no convexos e incluso discontinuos. Debido a estas características, la dominancia Pareto puede considerarse como la manera más general y robusta de evaluar el mérito relativo de un conjunto de distintas soluciones.

A pesar de estas ventajas conceptuales, existen ciertas desventajas prácticas en el uso de las comparaciones de dominancia Pareto

1. La complejidad computacional de llevar a cabo las validaciones entre todos los miembros de la población ocasiona que el desempeño del algoritmo se degrade al aumentar ya sea el número de miembros de la población y/ó el número de objetivos a considerar.
2. El uso exclusivo de asignación de rango Pareto, no es suficiente para mantener una población diversa. Por consecuencia, es necesario incorporar algún mecanismo de preservación de diversidad para lograr una cobertura extensa del frente Pareto. Dicho requerimiento aumenta la complejidad computacional del algoritmo, pues requiere el cálculo de una “distancia” entre las distintas soluciones para identificar soluciones aglomeradas.
3. Una preferencia excesiva hacia las soluciones no dominadas de una población tiende a eliminar las soluciones extremas del frente Pareto.

El mecanismo de asignación de rango propuesto en este trabajo busca solventar tales desventajas operando directamente sobre los valores de la parametrización NBI. Tal mecanismo se basa en el concepto de *subconjuntos de exploración* presentado en la sección anterior.

IV.3.2 Asignación de Rango por Subconjuntos de Exploración

El objetivo de un mecanismo de asignación de rango es el de segregar un conjunto finito de soluciones en múltiples subconjuntos con diferente nivel de prioridad dentro del proceso evolutivo. La prioridad de cada subconjunto está asociada con su valor de *rango* poblacional, siendo este valor utilizado posteriormente por una estrategia de asignación del valor de aptitud. El mecanismo propuesto en este trabajo opera directamente sobre

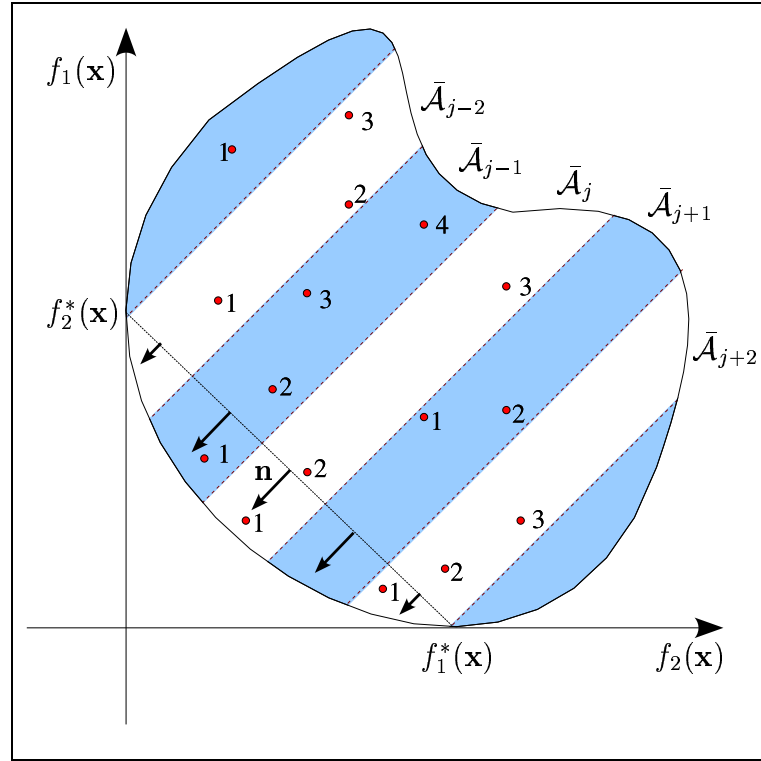


Figura 31: Asignación de Rango eNBI. El espacio de funciones es dividido en múltiples subconjuntos expandidos de exploración $\bar{\mathcal{A}}_j$. El rango poblacional de cada solución corresponde a su rango dentro de $\bar{\mathcal{A}}_j$.

el conjunto de parámetros β_i , t_i , obtenidos a partir de una población de P soluciones $\mathbf{x}_i$ donde $i = 1, \dots, P$. La estrategia consiste en:

1. Agrupar la población en J subconjuntos $\bar{\mathcal{A}}_j$, mediante un mecanismo de partición basado en los parámetros β_i correspondientes a cada solución.
2. Ordenar descendientemente cada subconjunto $\bar{\mathcal{A}}_j$ respecto al valor del parámetro t_i de cada solución.
3. Asignar a cada solución $\mathbf{x}_i$ un rango correspondiente a su orden dentro del subconjunto $\bar{\mathcal{A}}_j$ al que pertenece.

El proceso de agrupar la población en J subconjuntos excluyentes consiste en particionar la población. Para lograr esto, se propone especificar *a priori* un conjunto de vectores de referencia β_j^{ref} , a partir de los cuales se definen distintos conjuntos expandidos de exploración $\bar{\mathcal{A}}_j$. Cada solución $\mathbf{x}_i$ es asignada al conjunto $\bar{\mathcal{A}}_j$ definido por el vector β_j^{ref} más cercano al vector β_i correspondiente a esa solución. La comparación directa contra un conjunto fijo de vectores β_j^{ref} ofrece un método de partición eficiente en términos de costo computacional. Alternativamente, es posible aplicar un método no supervisado de partición (i.e. *k-medias*), eliminando así el requerimiento de especificar previamente múltiples vectores de referencia β_j . Sin embargo, el uso de un método no supervisado el cual realice la partición en base a la distribución de la población ofrece un mayor costo computacional.

La partición del estado de funciones en distintos conjuntos de exploración $\bar{\mathcal{A}}_j$ facilita que el proceso evolutivo realice una búsqueda concurrente a lo largo de múltiples regiones. El realizar dicha partición a partir de un conjunto previo de vectores de referencia β_j^{ref} permite especificar directamente la distribución deseada del conjunto obtenido de soluciones óptimas. Aun cuando en este trabajo se ha buscado obtener una distribución uniforme de soluciones, es posible incorporar sesgo hacia distintas regiones del espacio de búsqueda a partir de una selección apropiada de los vectores de referencia.

IV.4 Integración con un Algoritmo Evolutivo

El nuevo mecanismo de asignación de rango poblacional recién descrito será denominado eNBI. En lugar de desarrollar un nuevo algoritmo evolutivo se decidió integrar eNBI a un algoritmo evolutivo ya existente. El algoritmo elegido fue el NSGA-2 (Deb *et al.* 2002) debido a su simplicidad algorítmica. El acoplamiento de eNBI con NSGA-2 requiere considerar los siguientes aspectos:

1. Remplazar el operador de asignación de rango.
2. Eliminar el mecanismo de diversidad poblacional.
3. Modificar el operador de selección.

La manera en que estos aspectos son abordados en este trabajo, junto con aspectos específicos a eNBI se presentan a continuación.

IV.4.1 Operador de Selección

La selección basada en rango poblacional fue inicialmente sugerida por Baker (1985) con el propósito de eliminar desventajas en operadores de selección proporcional. En el operador de selección por rango los individuos de la población son ordenados de mejor a peor y su orden determina su rango r . La probabilidad de selección para un individuo con rango r puede obtenerse mediante una asignación lineal de la forma

$$p_i = \frac{1}{N} \left(\eta^- + (\eta^+ - \eta^-) \frac{r-1}{N-1} \right) \quad \text{donde } \eta^+ = 2 - \eta^-, \quad \eta^- \geq 0$$

donde N es el número de individuos en la población, mientras que $\frac{\eta^-}{N}$ y $\frac{\eta^+}{N}$ representan las probabilidades asignadas a los elementos de la población de menor y mayor rango respectivamente. Para el caso en que múltiples individuos compartan el mismo rango, estas probabilidades son aplicadas a toda la población para después promediar las probabilidades de los individuos pertenecientes al mismo rango.

A partir de estas probabilidades se aplica directamente un operador de selección proporcional. La estructura geométrica impuesta al proceso de asignación de rango elimina la necesidad de ajustar la probabilidad de selección con el propósito de obtener una diversidad entre los elementos del mismo rango. En este sentido, la distribución entre soluciones es controlada por el mecanismo de partición del espacio de funciones impuesto por la parametrización NBI.

IV.4.2 Partición del Espacio de Funciones

La partición del espacio de funciones mediante la definición de distintos subconjuntos de exploración permite controlar la distribución de las soluciones obtenidas. Estos subconjuntos están definidos en términos de distintos vectores de referencia β_j^{ref} y de la estructura del CCMI contenida en la matriz Ψ . Cada vector β_j^{ref} corresponde a una combinación de pesos entre los criterios a considerar. Estos vectores de peso son determinados *a priori* y se mantienen fijos a lo largo de la ejecución del algoritmo. La distribución de estos vectores determina las regiones a ser exploradas por el algoritmo. Asimismo, la cantidad J de subconjuntos de exploración es el parámetro principal que determina la granularidad del frente Pareto obtenido.

La estructura del CMMI es calculada periódicamente a lo largo de la ejecución. La periodicidad de tales cálculos es también un parámetro a especificar dentro de nuestro algoritmo. Es decir, la actualización de la estructura Ψ puede realizarse en cada generación, o con una frecuencia determinada por el usuario. Dado que en el transcurso de varias generaciones los valores de los mínimos individuales se aproximan cada vez más al mínimo global, es razonable mantener tales valores a lo largo de múltiples generaciones. El realizar estos cálculos de manera esporádica permitiría llevar a cabo procesos más elaborados de partición no supervisada del espacio de funciones.

IV.4.3 Elitismo Generacional

La convergencia hacia el frente Pareto es una meta primordial de los algoritmos evolutivos multiobjetivo. El uso de elitismo facilita dicha convergencia al mantener (explícita ó implícitamente) dentro del proceso evolutivo aquellas soluciones favorables al proceso de búsqueda. Una manera directa de incorporar un mecanismo de elitismo es el de mantener un registro externo de las mejores soluciones encontradas a lo largo de la

ejecución del algoritmo y diseñar heurísticas mediante las cuales estas soluciones interactúen con la población en evolución. En este sentido el mecanismo de elitismo utilizado es de ámbito global dado que mantiene un registro histórico que considera todas las soluciones encontradas durante la búsqueda.

En este trabajo se adopta un mecanismo de elitismo de ámbito local, semejante al propuesto por Deb para el algoritmo NSGA-II. Tal mecanismo consiste en crear durante cada generación una población compuesta por padres e hijos, para posteriormente seleccionar de esta población los mejores individuos hasta completar una población del mismo tamaño de la población original. De esta forma se promueve la retención de las mejores soluciones a lo largo de generaciones sucesivas.

IV.5 Resultados Experimentales

El método propuesto fue aplicado a distintos problemas prueba propuestos en la literatura y los resultados comparados contra los obtenidos mediante los algoritmos NSGA2 y SPEA2. Una especificación de estos algoritmos puede encontrarse en Deb *et al.* (2002) y Zitzler *et al.* (2001) La instancia de SPEA se ejecuto a partir de un ejecutable libremente disponible desarrollado en la plataforma PISA (Bleuler, 2003). La instancias de NSGA-2 fue implementada a partir de una versiones de código hecho pública por el autor. La implementación de eNBI fue desarrollada realizando modificaciones sobre algoritmo NSGA-2. Las modificaciones consistieron en remplazar el operador de asignación de rango basado en relaciones de dominancia por uno basado en la técnica presentada en este capítulo. Adicionalmente, se eliminó el proceso de aglomeración de soluciones y se utilizó un operador de selección proporcional.

Los experimentos presentados a continuación fueron propuestos por Zitzler *et al.* (2000). Cada uno de estos problemas explora características del espacio de funciones que pueden dificultar el proceso de búsqueda de un algoritmo de optimización multiobjetivo.

Para los todos los experimentos una población de 200 individuos fue evolucionada a lo largo de 100 generaciones. El algoritmo eNBI utilizó un total de 80 subconjuntos de exploración.

ZDT1. Este problema involucra 30 variables ($n=30$) de punto flotante y minimiza dos funciones criterio especificadas por

$$ZDT1 : \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \left(1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(\mathbf{x})}} \right), \\ g(\mathbf{x}) &= 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i^2. \end{cases}$$

donde todas las variables x_i están definidas en el rango $[0, 1]$. El frente Pareto correspondiente a este problema es convexo, continuo y posee una distribución uniforme de soluciones. La única dificultad que este problema de optimización puede ofrecer es la cantidad de variables a considerar.

La Figura ?? muestra que para este problema los tres algoritmos convergen al mismo frente Pareto que corresponde a la solución óptima global. Es posible distinguir que mientras que NSGA-2 y SPEA2 “extienden” las soluciones a lo largo del frente Pareto, el algoritmo eNBI hace un muestreo “discretizado” y uniformemente distribuido del frente Pareto. Esto se debe a que cada una de estas soluciones corresponde al elemento de mayor rango en cada uno de los subconjuntos de exploración definidos en el mecanismo de asignación de rango.

ZDT2. Este problema involucra 30 variables ($n=30$) de punto flotante y minimiza dos funciones criterio especificadas por

$$ZDT2 : \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \left(1 - \left(\frac{x_1}{g(\mathbf{x})} \right)^2 \right), \\ g(\mathbf{x}) &= 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i^2. \end{cases}$$

todas las variables x_i están definidas en el rango $[0, 1]$. El frente Pareto correspondiente a

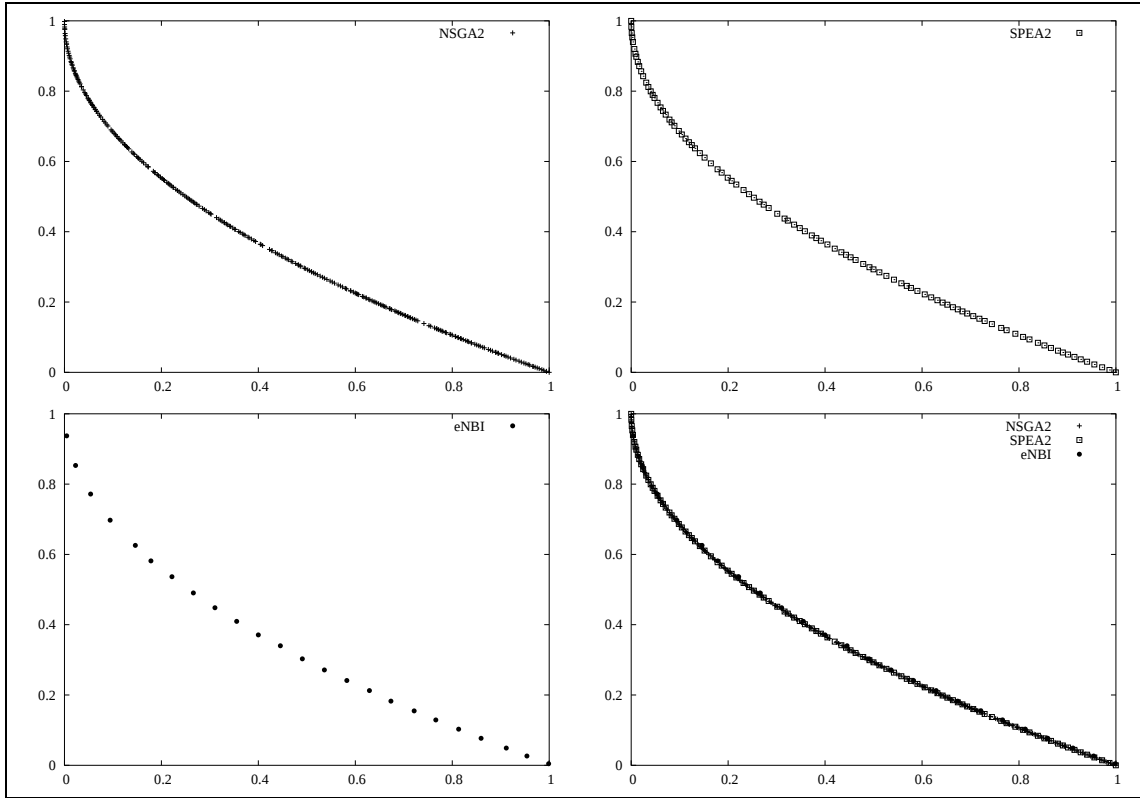


Figura 32: Resultados Experimentales para el Problema ZDT1.

este problema es no-convexo, continuo y posee una distribución uniforme de soluciones. La no convexidad del frente pareto puede presentar problemas para métodos que utilizan una combinación lineal de las funciones criterio.

La Figura ?? muestra resultados equiparables con los obtenidos para el experimento anterior. De nuevo los tres algoritmos convergen hacia el frente Pareto global observándose que eNBI logra un muestreo uniforme del frente Pareto.

ZDT3. Este problema involucra 30 variables ($n=30$) de punto flotante y minimiza

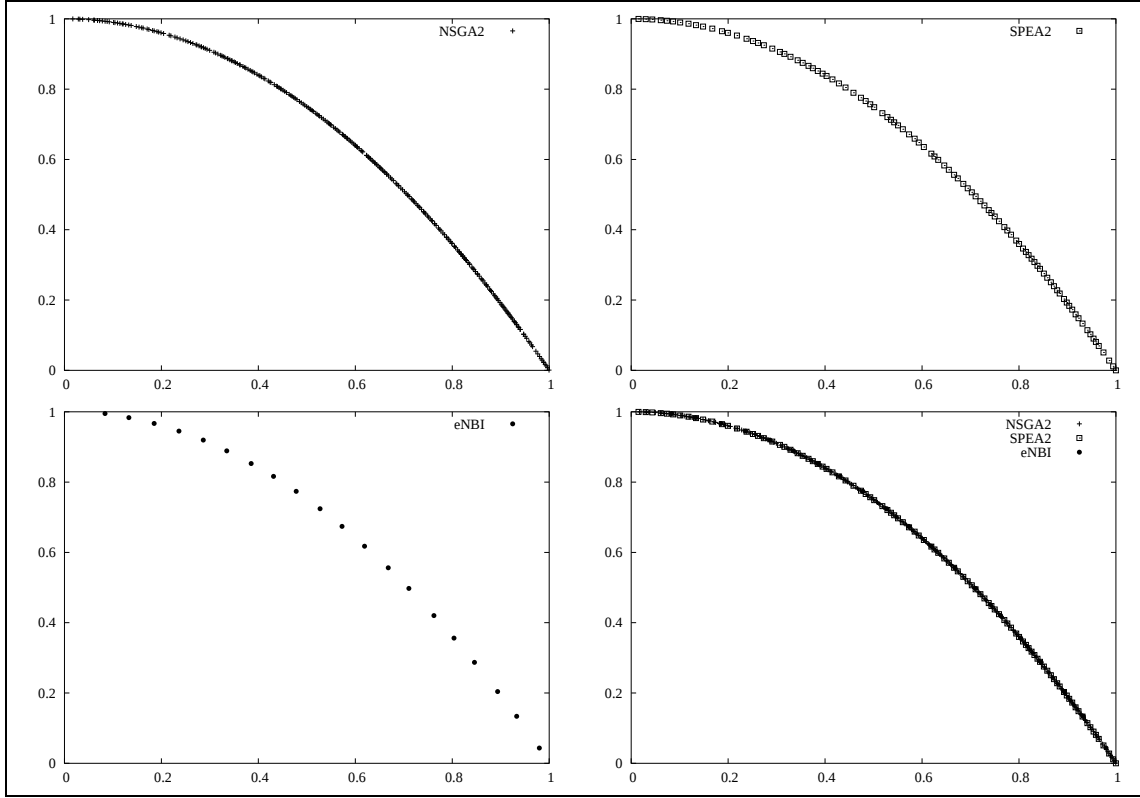


Figura 33: Resultados Experimentales para el Problema ZDT2.

dos funciones criterio especificadas por

$$ZDT3 : \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \left(1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(\mathbf{x})}} - \frac{x_1}{g(\mathbf{x})} \sin(10\pi x_1) \right), \\ g(\mathbf{x}) &= 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i^2. \end{cases}$$

todas las variables x_i están definidas en el rango $[0, 1]$. El frente Pareto correspondiente a este problema está formado por distintas regiones desconectadas. La discontinuidad del frente Pareto es la mayor dificultad de tal problema.

En este experimento se obtiene un frente Pareto discontinuo y se puede observar una diferencia cualitativa entre los resultados de los tres algoritmos. Particularmente, en la parte inferior derecha de la Figura ??, se observa que NSGA-2 no logra tener cobertura

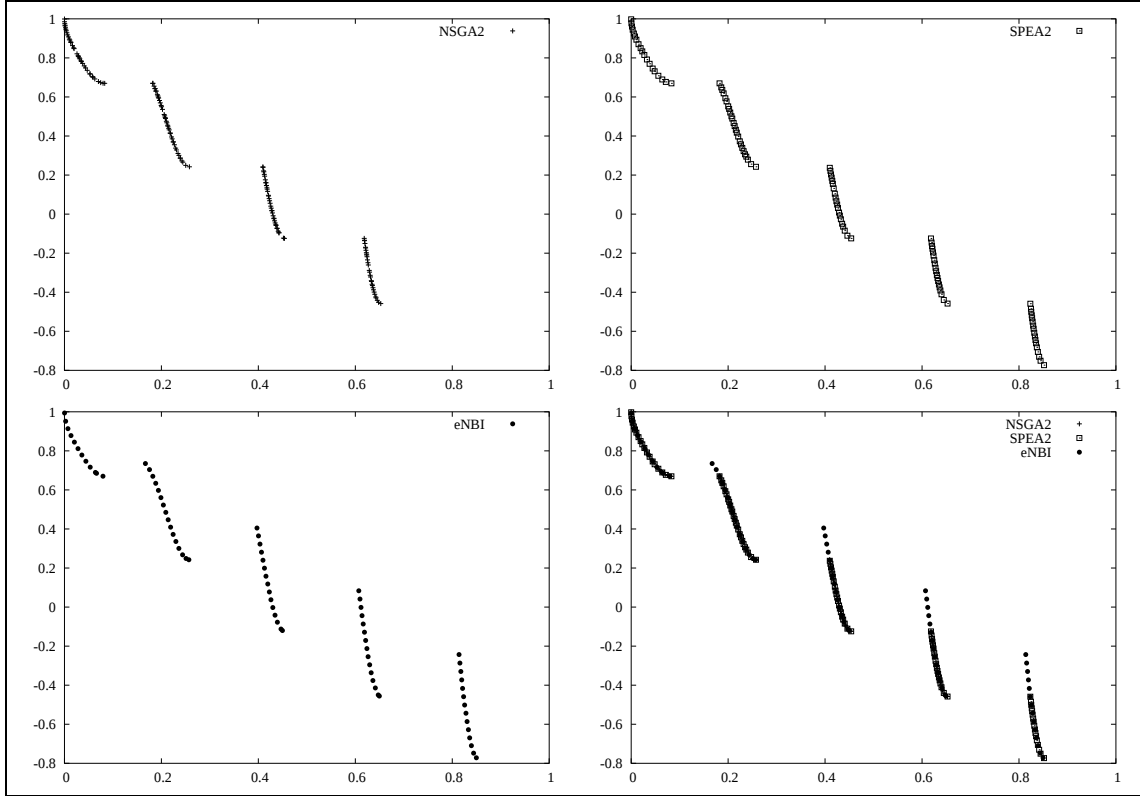


Figura 34: Resultados Experimentales para el Problema ZDT3.

en una región aislada del frente Pareto. Asimismo, se observa que en esa región SPEA2 obtiene un muestreo denso mientras que eNBI obtiene solo un muestreo parcial para esa región.

ZDT4. Este problema involucra 10 variables ($n=30$) de punto flotante y minimiza dos funciones criterio especificadas por

$$ZDT4 : \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i)), \\ g(\mathbf{x}) &= 1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(\mathbf{x})}} \end{cases}$$

todas las variables x_i están definidas en el rango $[0, 1]$. Este problema presenta un patrón multimodal en el espacio de funciones. Es decir, existen múltiples frentes Pareto locales

los cuales pueden “atrapar” al algoritmo y ocasionar una convergencia prematura del proceso evolutivo.

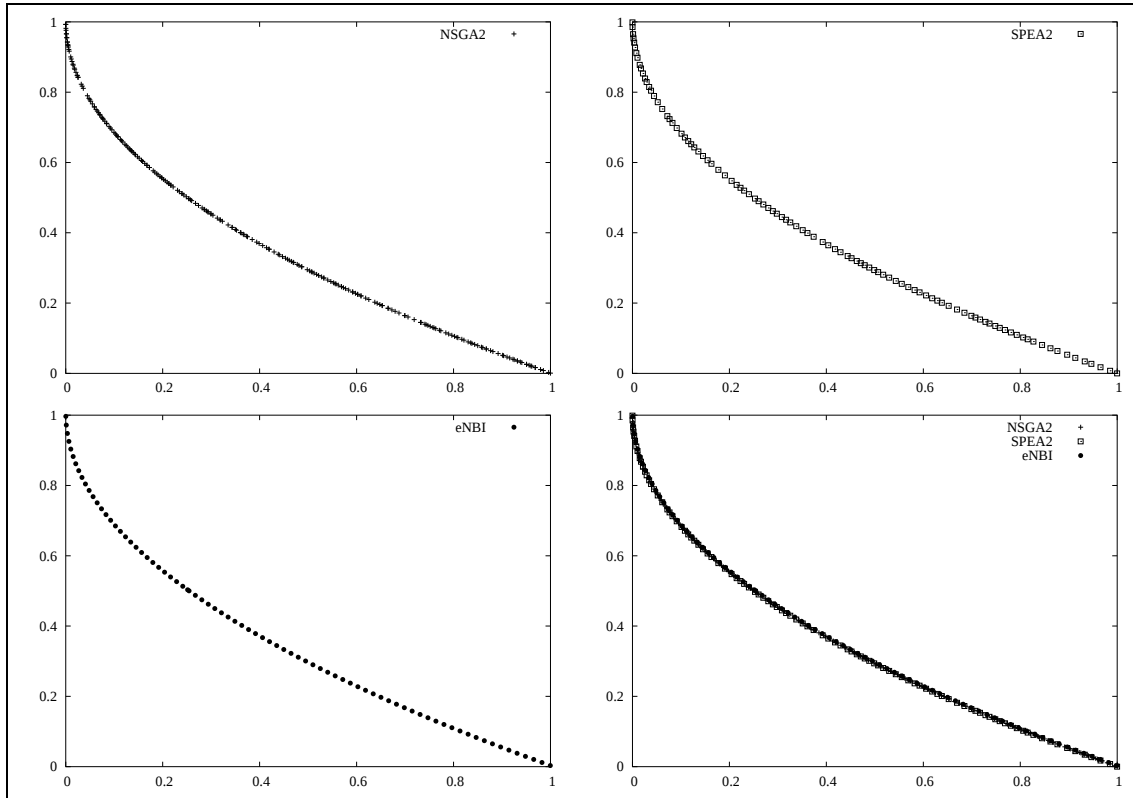


Figura 35: Resultados Experimentales para el Problema ZDT4.

La Figura ?? muestra que los tres algoritmos alcanzaron exitosamente su llegada al frente Pareto global. Sin embargo, la distribución de NSGA-2 es deficiente dado que hay regiones del frente donde no logra obtener un muestreo adecuado. Nuevamente eNBI distribuye soluciones a lo largo del frente Pareto manteniendo las soluciones extremas del mismo.

ZDT6. Este problema involucra 10 variables ($n=30$) de punto flotante y minimiza

dos funciones criterio especificadas por

$$ZDT6 : \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) &= 1 - e^{(-4x_1)\sin^6(6\pi x_1)} \\ f_2(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \left(1 - \left(\frac{x_1}{g(\mathbf{x})} \right)^2 \right), \\ g(\mathbf{x}) &= 1 + 9 \left(\frac{\sum_{i=2}^n x_i}{9} \right)^{0.25}, \end{cases}$$

donde la variable x_1 está definida en el rango $[0, 1]$, mientras que el resto de las variable x_i tiene valores en el rango $[-1, 1]$. Este problema ofrece una distribución no uniforme de soluciones a lo largo de un frente Pareto no convexo.

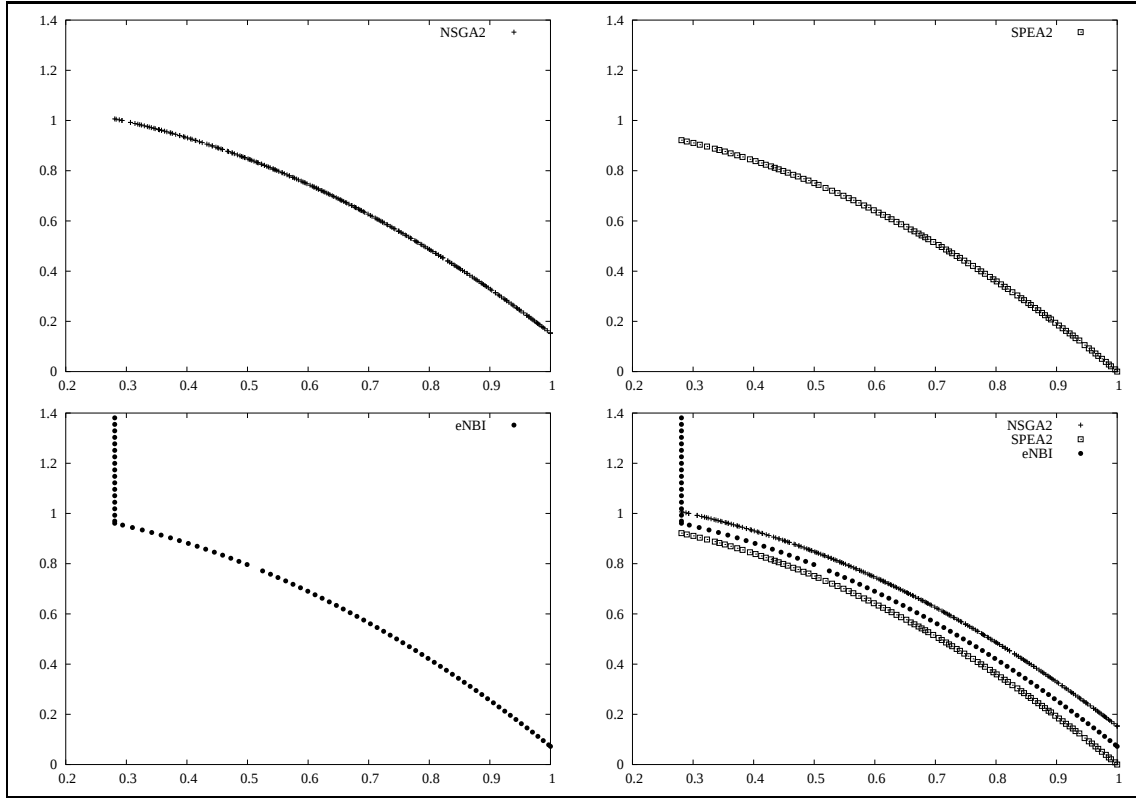


Figura 36: Resultados Experimentales para el Problema ZDT6

La Figura ?? muestra un caso donde NSGA-2 y eNBI se quedan atrapados en un frente Pareto local, mientras que SPEA2 logra encontrar el frente Pareto global.

Esta discrepancia se puede atribuir a los parámetros de distribución de los operadores cruzamiento y mutación utilizados tanto por eNBI como NSGA-2. Los resultados corresponden a los obtenidos en (Shukla & Deb, 2005) , donde al controlar los valores de dichos parámetros es posible alcanzar el óptimo global. Sin embargo, es posible observar la uniformidad del muestreo obtenido mediante eNBI. Adicionalmente, se observa que en la parte superior izquierda se presenta un conjunto de soluciones que parecen ser débilmente dominadas. Dichas soluciones corresponden a los elementos de mayor rango en un subconjunto de exploración. Sin embargo, no corresponden al concepto de dominancia Pareto. La capacidad de eNBI de obtener tales soluciones mostrará su utilidad al considerar el problema de posicionamiento de cámaras en el siguiente capítulo.

TNK. Este es un problema de optimización el cual considera 2 variables de punto flotante sujetas a 2 restricciones. La definición del problema de minimización es la siguiente

$$TNK : \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = x_1 \\ f_2(\mathbf{x}) = x_2 \\ \text{sueto a } C_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 - 0.1\cos(16\tan^{-1}\frac{x_1}{x_2}) \geq 0, \\ C_2(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \leq 0.5, \end{cases}$$

donde ambas variables x_i están definidas en el rango $[0, \pi]$. Este problema presenta un frente no convexo con discontinuidades.

Para este experimento no contamos con la instancia de SPEA2 y nuestra comparación se reducirá de aquí en adelante al algoritmo NSGA-2. La Figura ?? ejemplifica las propiedades de eNBI de obtener un muestreo de la frontera del espacio de funciones. En primera instancia muestra como eNBI obtiene una mejor distribución a lo largo del frente Pareto, especialmente en la parte superior izquierda. Adicionalmente, se puede observar que eNBI ofrece soluciones que no cumplen con el concepto de dominancia

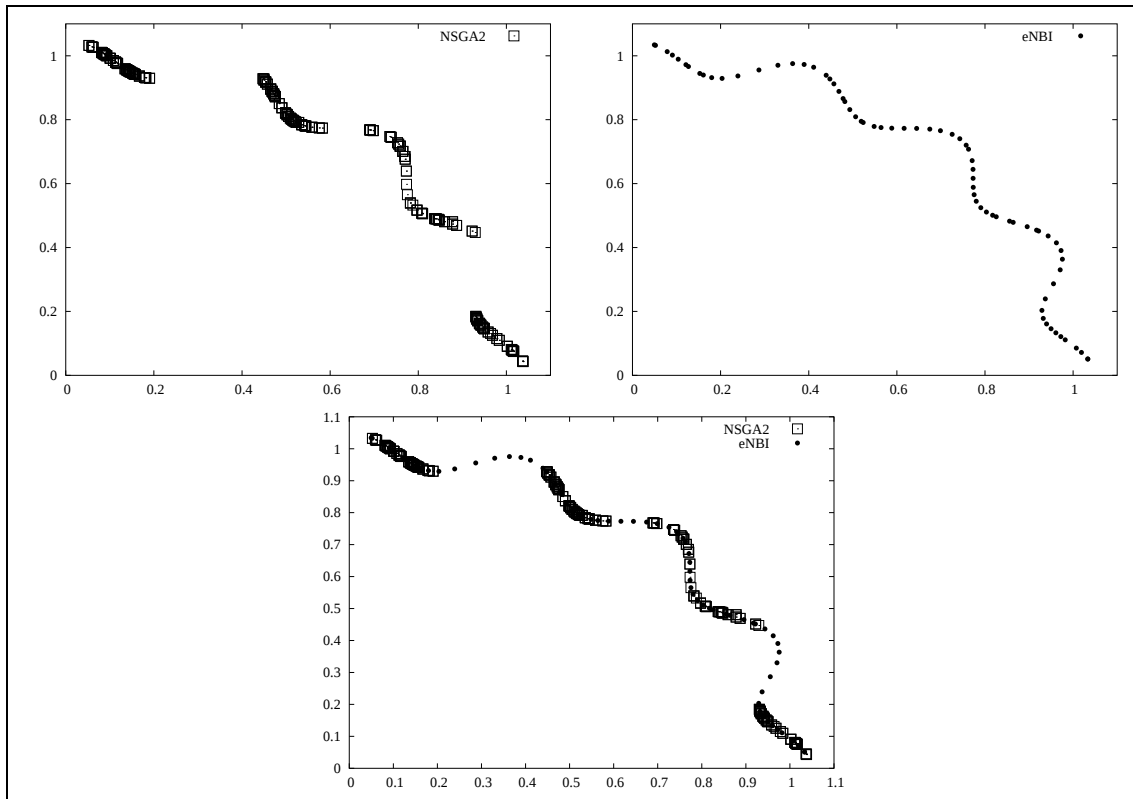


Figura 37: Resultados Experimentales para el Problema TNK.

Pareto pero que nos brindan una mejor descripción del espacio de soluciones. Es posible retener estas soluciones debido a que la asignación de rango no está basada en tales relaciones de dominancia.

IV.6 Costo computacional

La reducción de la complejidad computacional fue una de las principales motivaciones para la investigación de un método alternativo de asignación de rango poblacional. Para ejemplificar el beneficio en términos de rendimiento computacional se realizaron comparaciones de tiempo de ejecución entre el algoritmo NSGA y el algoritmo eNBI para poblaciones de distinto tamaño. La comparación excluye al algoritmo SPEA2

Población	NSGA2	eNBI
100	8.2 seg.	7 seg.
250	24.4 seg.	17.2 seg.
500	64.8 seg.	34.8 seg.
1000	197.8 seg.	70.6 seg.
2000	807.4 seg.	141.8 seg.

Tabla IV: Comparación de tiempos de ejecución.

debido a que el desarrollo de eNBI consiste en una modificación de NSGA-2 y son por lo tanto más semejantes. La comparación consiste en ejecutar ambos algoritmos durante 500 generaciones y medir el tiempo de ejecución. Para dichos experimentos se utilizó una computadora con procesador Pentium 4 con una velocidad de 2.4 GHz. corriendo Red Hat Linux 9.2. La tabla ?? muestra los tiempos promedios después de 5 ejecuciones utilizando los mismos parámetros operacionales para cada algoritmo. Es importante hacer notar que el tiempo de ejecución incluye todo el tiempo de vida del algoritmo y no sólo el tiempo de ejecución del método de asignación de rango. Los datos presentados muestran una tendencia notoria en favor de la eficiencia computacional del método eNBI propuesto.

IV.7 Discusión

En este capítulo se presentó una técnica de optimización multiobjetivo basada en un nuevo mecanismo de asignación de rango poblacional. Tal investigación consiste en incorporar los conceptos búsqueda dirigida a los procesos de búsqueda evolutiva. Los resultados experimentales en problemas modelo muestran que los frentes Pareto encontrados por la técnica propuesta (eNBI), tienen una convergencia uniforme a lo largo de toda su extensión. La convergencia hacia el frente Pareto global es lograda tanto por

eNBI como por los algoritmos NSGA2 y SPEA2, en la mayoría de los casos estudiados, con la excepción del problema ZDT6, donde sólo SPEA2 logró alcanzar el frente óptimo global. La semejanza en el desempeño de eNBI con NSGA2 puede atribuirse a que comparten los mismo operadores de reproducción y de elitismo generacional. La experimentación permite argumentar que la uniformidad del muestreo y la cobertura del frente Pareto proporcionada por eNBI supera a la de NSGA-2. Sin embargo, es necesario realizar un estudio estadístico comparativo del desempeño de estos algoritmos para poder caracterizar de mejor manera sus propiedades. Trabajos que consideran dicho tipo de comparaciones incluyen Bleuler *et al.* (2003), Zitzler (2000) y Fonseca & Flemming (1996).

Posibles trabajos de investigación en este sentido pueden incluir realizar una distribución dinámica de los subconjuntos de exploración. Tal modificación, en primera instancia, eliminaría la necesidad de especificar un conjunto de predeterminado de subconjuntos de exploración. Pero su ventaja principal es que permitiría adaptar dinámicamente el proceso búsqueda evolutiva de acuerdo a las características del espacio de búsqueda.

Capítulo V

Un Enfoque Multiobjetivo al Posicionamiento de Cámaras

En este capítulo el problema de posicionamiento de cámaras es planteado dentro del paradigma de la optimización multiobjetivo. Se presentan distintos aspectos involucrados en la solución de tal problema mediante el uso de técnicas evolutivas de optimización multiobjetivo. Los resultados experimentales obtenidos mediante este enfoque describen el conflicto entre los criterios de precisión, desplazamiento y costo computacional.

V.1 Los Criterios a Optimizar

La motivación para plantear el problema de posicionamiento de cámaras como un problema multiobjetivo está basada en la caracterización de una “buena” configuración de cámaras. El cumplimiento de las metas de la tarea de medición es un requisito evidente. Sin embargo, identificamos dos aspectos generales involucrados en la evaluación de un plan de sensado: la calidad de la solución y la eficiencia del proceso. Para el problema de medición tridimensional de alta precisión, la calidad de la solución involucra minimizar el nivel de incertidumbre del proceso de triangulación. La eficiencia del proceso está definida en términos de los recursos adjudicados para llevar a cabo la tarea. En el contexto de nuestro sistema de inspección automatizada se considera el costo operacional incurrido en el uso del manipulador.

V.1.1 Mediciones Tridimensionales Precisas

El modelo estimación de incertidumbre basado en el fenómeno de propagación de error propuesto en (Olague, 1998) fue descrito a detalle en el capítulo 2. En esta sección retomamos brevemente esos conceptos para definir una de nuestras funciones criterio.

Dados un vector de parámetros de observación $\mathbf{x}$, un vector correspondiente a la posición 3D de un conjunto de puntos $\mathbf{P}$ y el conocimiento del modelo $\mathbf{P} = f(\mathbf{p})$ que relaciona dichos puntos con sus múltiples proyecciones sobre imágenes 2D, es posible estimar la incertidumbre del proceso de medición mediante una aproximación de primer orden dada por

$$\Lambda \mathbf{P} = \frac{\partial f(E[\mathbf{p}])}{\partial \mathbf{p}} \Lambda \mathbf{p} \frac{\partial f(E[\mathbf{p}])^t}{\partial \mathbf{p}}, \quad (58)$$

donde $\Lambda \mathbf{P}$ es una matriz de covarianza de dimensiones 3×3 . A partir de esta matriz es posible definir un criterio para comparar entre distintas posibles configuraciones de observación:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = \max_{i=1 \dots 3} \Lambda \mathbf{P}_{ii}. \quad (59)$$

El criterio de precisión presentado anteriormente ofrece un espacio de búsqueda discontinuo para la selección de una geometría de observación, debido principalmente a los problemas de oclusión. Adicionalmente, el método de optimización debe considerar varias restricciones ópticas como la visibilidad, el ángulo de convergencia, la resolución y la escala de la imagen. En este trabajo las cámaras son colocadas de acuerdo al modelo de esfera de observación, donde la distancia respecto al objeto y los parámetros intrínsecos de la cámara pueden ser seleccionados *a priori* para satisfacer las restricciones ópticas recién mencionadas. Por otro lado, la complejidad del problema de diseño también se debe a la naturaleza estocástica del proceso de estimación de la incertidumbre, el cual requiere múltiples mediciones redundantes (Firoozfam & Negahdaripour,

2004). Asimismo, la dimensionalidad de nuestro problema optimización incrementa con el número de estaciones de sensado. Adicionalmente, el relieve de nuestra función criterio es multi-modal, existiendo múltiples soluciones geométricamente distintas con un nivel de desempeño muy semejante (Olague, 1998). Todos los aspectos anteriormente mencionados soportan la necesidad de una técnica de optimización global. El sistema EPOCA es una instancia en la que técnicas de cómputo evolutivo han abordado exitosamente este problema (Olague, 2002).

V.1.2 Eficiencia en el Movimiento

En un sistema visión utilizando una configuración Cámara-Mano, el posicionamiento de la cámara es controlado por un servo-mecanismo. Dado que la ejecución de acciones de sensado requiere el movimiento del manipulador, es deseable que tales acciones hagan uso eficiente de la infraestructura robótica. Esto requiere considerar las características cinemáticas y/o dinámicas del manipulador al momento de especificar una serie acciones de sensado. Entre los posibles aspectos se incluyen: la *distancia* requerida por el manipulador, el *esfuerzo* requerido para realizar el movimiento, el *tiempo* requerido para ejecutar movimiento o inclusive el *riesgo* de colisión del manipulador con su entorno.

El problema de planificación de movimientos para tales dispositivos consiste en determinar un conjunto de movimiento válidos los cuales satisfagan una meta predeterminada. La viabilidad de una planificación de movimientos puede verse limitada por colisiones, limitaciones cinemáticas o dinámicas del robot o restricciones operacionales relacionadas con la tarea a realizar. En este trabajo las consideraciones cinemáticas son las únicas restricciones consideradas para el movimiento del manipulador.

En el escenario bajo estudio, el manipulador ejecuta una trayectoria de movimiento $\mathbf{Q}(t)$, realizando acciones de sensado en n distintos puntos de observación O_i . Es necesario determinar un criterio para evaluar y comparar los diferentes movimientos

posibles. El trabajo reciente de Solteiro *et al.* (2004), estudia la incorporación de técnicas MO en la planeación de trayectorias para robots manipuladores. En términos generales, el movimiento a realizar está en función del orden en que el manipulador visita los distintos puntos de observación O_i en el transcurso de su trayectoria. Por lo tanto, la solución al problema de planear la trayectoria del manipulador consiste en resolver una instancia tridimensional del problema del agente viajero. Las distancias entre los nodos del grafo obtenido pueden ser determinadas en términos del espacio de trabajo o el espacio operacional. En la primera alternativa, la distancia Euclideana puede ser aplicada directamente al posicionamiento tridimensional de los puntos de observación. En el espacio operacional, los valores de cada articulación pueden ser escalados para reflejar de manera más fidedigna el costo operacional del movimiento del robot. De esta forma, nuestra función de distancia puede ser descrito por

$$D(O_i, O_j) = \|O_i - O_j\|^2 \quad \text{donde } O_i, O_j \in \mathbf{R}^3$$

para el espacio de trabajo, ó alternativamente

$$D(O_i, O_j) = \|\text{diag}(\lambda)[Q(O_i) - Q(O_j)]\|^2$$

para el espacio de configuración, donde $Q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^r$ es la solución al problema de cinemática inversa para un manipulador de r grados de libertad, mientras que λ es un vector de pesos que describe los costos del desplazamiento de cada una de las articulaciones. Estas funciones de costo pueden ser más elaboradas dependiendo de los requerimientos de la tarea, i.e. incluyendo aspectos dinámicos de la operación de robot o considerando evasión de obstáculos. Una vez que la distancia $D(O_i, O_j)$ entre puntos de observación sea definida, es posible especificar el costo total del movimiento como

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} D(O_i, O_{i+1}). \quad (60)$$

Un ruta óptima será aquella permutación de puntos de observación que minimice la longitud total del movimiento. Una aproximación de esta solución óptima es obtenida mediante una heurística voraz. Este procedimiento heurístico podría mejorarse adoptando un algoritmo como el utilizado en el trabajo de Cheng & Li, (2004).

V.2 Adaptación de Técnicas Evolutivas

V.2.1 Representación de las Variables del Problema

En este trabajo el posicionamiento de las cámaras se restringe a la superficie de una esfera de observación, la cual envuelve al objeto a medir. Esto simplifica la especificación de los puntos de observación pues la dirección del eje óptico de la cámara corresponde invariablemente hacia el centro de tal esfera. De esta manera, mediante una selección apropiada de la distancia de las cámaras respecto al objeto, es posible satisfacer las restricciones ópticas de enfoque, resolución y campo de visibilidad. Debido al modelo de esfera de observación, un punto de observación puede ser expresado por sus coordenadas polares $[\alpha, \beta]$. Es decir, mediante el uso de una distancia de radio constante, la posición tridimensional de una cámara puede ser especificada mediante un vector bidimensional de valores reales. Dado un número n de imágenes deseadas, el vector de representación de longitud constante utilizado para especificar la geometría de un conjunto de cámaras se denota de la siguiente manera

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{donde} \quad \alpha_i = x_{2i-1}, \beta_i = x_{2i} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n. \quad (61)$$

Dado que es difícil determinar el tamaño apropiado de una red de cámaras, se adopta una representación que permite la consideración de redes con distinto número de cámaras durante un mismo proceso de evolución. Esto es logrado mediante la aplicación de los principios presentados por Dasgupta (1993) para el algoritmo genético

estructurado. En tal propuesta se considera una decodificación condicionada de los parámetros almacenados dentro de una solución. Así pues, la decodificación de un conjunto de parámetros depende del valor asignado a otro parámetro contenido dentro de la misma representación. Para nuestro problema, se agrega un vector binario adicional a nuestra representación

$$\mathbf{x}^b \in \mathbb{B}^n \quad \text{donde} \quad x_i^b \in [0, 1] \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n. \quad (62)$$

Bajo este esquema, la inclusión de una cámara especificada en el vector $\mathbf{x}$ depende del valor de su correspondiente bit de “control” x_i^b en el vector binario. De esta manera, nuestra representación genética es de la forma $X = \langle \mathbf{x}^b, \mathbf{x} \rangle$.

En la representación adoptada en este trabajo, cada cámara V_i se describe mediante un conjunto de valores $[x_i^b, x_{2i-1}, x_{2i}]$. Tal representación describe un conjunto de *elementos* homogéneos (i.e. las cámaras), cada uno codificado por múltiples *parámetros*, los cuales en su conjunto forman una solución al problema. Este enfoque está basado en el algoritmo genético multi-celular presentado en Olague (2002a). Internamente podemos representar nuestro genotipo como una estructura de árbol con las siguientes características:

1. El nodo raíz almacena los valores las funciones de evaluación.
2. Existen n nodos intermedios que describen cada elemento de la solución, en este caso la especificación de un punto de observación.
3. Finalmente, cada nodo intermedio genera nodos “hoja” donde se almacenan los valores de parametrización de las cámaras, en este caso sus coordenadas polares.

Esta estructura, ver Figura ??, permite el uso de operadores de recombinación ya sea en el nivel de *elementos* o en el nivel de *parámetros*. La consideración de un bit de “control” x_i^b en la parametrización de una cámara permite el uso de una estructura de

árbol de tamaño fijo. De este modo, se evita la necesidad de controlar el tamaño de los árboles, el cual es un problema común en los enfoques de programación genética.

El conjunto de valores contenidos en cada individuo es decodificado para obtener la posición de cada cámara. Este conjunto no ordenado de posiciones es dado como entrada a un procedimiento heurístico de planeación de rutas el cual determina cual es la permutación óptima de posiciones a visitar por manipulador. La Figura ?? muestra el proceso de decodificación de nuestra representación.

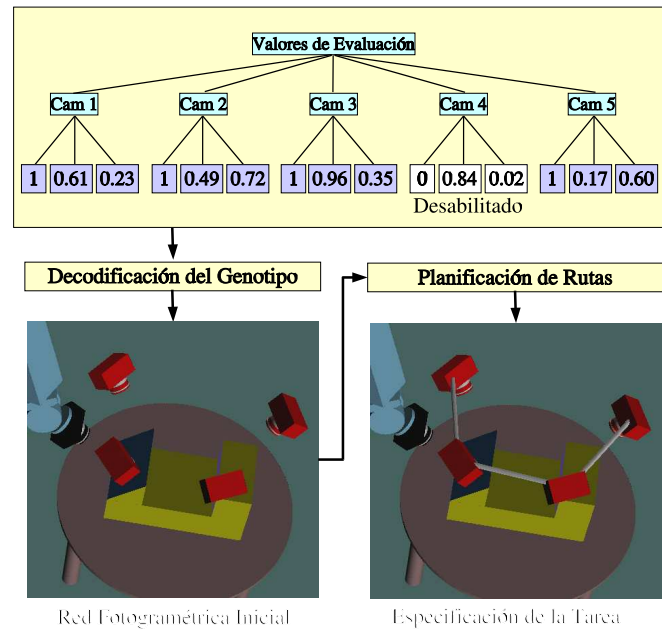


Figura 38: Representación genética utilizada. Se muestra una representación que permite hasta cinco cámaras. Solo cuatro de estas cámaras son decodificadas para formar una red fotogramétrica. A partir de este conjunto de puntos de observación se determina una ruta a seguir por el manipulador.

V.2.2 Manejo de Restricciones

Es importante tener en cuenta que no todos los puntos en la superficie de la esfera de observación son válidos, ni todas las posibles combinaciones de puntos de observación forman una configuración de red válida. Esto se debe a las restricciones locales y globales involucradas en nuestro problema.

Las restricciones locales son impuestas a la selección de puntos de observación y dependen del objeto en observación y/o del entorno de trabajo. El problema de auto-oclusión es común para el caso de objetos tridimensionales complejos. Esta restricción limita la visibilidad de un punto en la superficie del objeto a un subconjunto de puntos en la superficie de la esfera de observación. Incluso, es posible que un punto de observación en particular no sea capaz de observar ninguno de los puntos de interés del objeto. Adicionalmente, cuando se considera utilizar un robot manipulador para llevar a cabo las acciones de sensado, es necesario tomar en cuenta sus restricciones cinemáticas. Por ejemplo, un punto de observación puede estar fuera del alcance del manipulador.

Las restricciones globales son impuestas a la especificación final de una tarea. En el caso de la medición fotogramétrica esto se traduce a requerimientos de suficiencia de datos. Para que una red de cámaras sea efectiva, se requiere de un nivel suficiente de redundancia en las observaciones. Por lo tanto, es posible que una configuración de cámaras formada por puntos de observación válidos, no brinde la redundancia necesaria para llevar a cabo el proceso de triangulación para un punto en particular. Esta inconsistencia de datos lleva a resultados no favorables en términos del error global de la medición del objeto debido al método de mínimos cuadrados utilizado. Otro tipo de restricciones globales son aquellas impuestas mediante la especificación de requisitos de desempeño para la tarea final. Por ejemplo, acotar el máximo desplazamiento permitido o especificar el nivel mínimo de precisión deseado.

Para incorporar estas restricciones se adoptaron distintos enfoques. Las restricciones

sobre los puntos de observación (restricciones locales) se aplicaron utilizando un mecanismo determinístico de reparación. Es decir, los valores de puntos de observación no válidos se modifican de tal forma que representen un punto válido. Esto permite que el algoritmo evolutivo trabaje solo con información valida durante el proceso de optimización, restringiendo así el espacio de búsqueda. Por otro lado, los requerimientos de datos para la medición tridimensional (restricciones globales) se incorporan mediante la penalización del valor de aptitud de las soluciones. Este valor se elige de tal manera que estos individuos aun tengan oportunidad de participar en el proceso de evolución. Ambas de estas políticas de manejo de restricciones se llevan a cabo durante la etapa de evaluación de las funciones objetivo, lo cual permite una independencia de la elección del algoritmo genético utilizado para la optimización.

V.2.3 Operadores Genéticos

En este trabajo se utiliza la recombinación al nivel de parámetros. Por lo tanto, cada uno de los valores de las coordenadas polares se recombina con el mismo parámetro perteneciente a otro individuo. Para las variables de control binarias, codificadas en $\mathbf{x}^b$, se utiliza un operador de cruzamiento uniforme junto con una mutación de bits. Para las variables de posicionamiento de las cámaras, codificadas en un vector de números reales $\mathbf{x}$, se utiliza el operador de cruzamiento SBX (Deb, 2001). Este operador simula el comportamiento de un operador de cruzamiento de cadenas binarias con un solo punto de cruce. A partir de dos soluciones “padres” P_1 y P_2 , se generan dos soluciones “hijo” C_1 y C_2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.5[(1 + \beta)P_1 + (1 - \beta)P_2] \\ C_2 &= 0.5[(1 - \beta)P_1 + (1 + \beta)P_2] \end{aligned} \quad \text{con } \beta = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{\eta_x+1}} & \text{si } u < 0.5 \\ \left(\frac{1}{2(1-u)}\right)^{\frac{1}{\eta_x+1}} & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

El factor de dispersión β depende de una variable aleatoria $u \in [0, 1]$ y de un valor η_x no negativo definido por el usuario, el cual caracteriza la distribución de los hijos con respecto a sus padres.

La mutación es aplicada a cada una de las variables utilizando una perturbación de distribución polinomial. Esta mutación modifica una solución padre P a una solución hijo C utilizando los rangos asignados a cada una de las variables de forma que

$$C = P + (P^{UP} - P^{LOW})\delta \quad \text{con } \delta = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{\eta_m+1}} - 1 & \text{si } u < 0.5 \\ 1 - [2(1-u)]^{\frac{1}{\eta_m+1}} & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

La representación propuesta en (Olague *et al.*, 2003) es utilizada para los operadores genéticos aplicados a las variables de números reales. Esta consiste en encapsular tanto el cruzamiento como la mutación en una sola transformación afín. Dado que dos variables representan un punto en el plano afín, una transformación de la forma

$$\begin{aligned} Y'_1 &= b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + M_1 \\ Y'_2 &= b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + M_2 \end{aligned}$$

es aplicada, donde los coeficientes son valores reales sujetos a la restricción $|b_{rs}| \neq 0$. Esta transformación puede ser extendida para incluir múltiples soluciones. De esta forma, la generación de nuevas soluciones dentro del algoritmo genético puede plantearse como sigue:

$$\begin{pmatrix} Y'_{1_1} & Y'_{1_2} & \dots & Y'_{1_n} \\ Y'_{2_1} & Y'_{2_2} & \dots & Y'_{2_n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & M_1 \\ \underbrace{b_{21} & b_{22}}_{\text{Cruzamiento}} & \underbrace{M_2}_{\text{Mutación}} \end{bmatrix}_n \begin{pmatrix} Y_{1_1} & Y_{1_2} & \dots & Y_{1_n} \\ Y_{2_1} & Y_{2_2} & \dots & Y_{2_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Las ventajas de esta encapsulación son:

1. Un tratamiento estandarizado de todas las transformaciones.
2. Las transformaciones complejas están compuestas de transformaciones simples

mediante multiplicación de matrices.

3. La inversión de las transformaciones se obtiene mediante la inversión de matrices.
4. Las operaciones de matrices pueden realizarse con alta rapidez haciendo uso del soporte por hardware en estaciones de trabajo de alto rendimiento.

V.3 Experimentación

Varios experimentos fueron realizados para el caso de un objeto tridimensional observado por un robot manipulador. Para todos los experimentos una población de 150 individuos fué utilizada. Las probabilidades de cruzamiento y mutación fueron 0.99 y 0.03 respectivamente. Asimismo, los parámetros que controlan la variación de los operadores de cruzamiento y mutación fueron $\eta_x = 2.0$ y $\eta_m = 1.0$ respectivamente. Estos valores fueron obtenidos de manera empírica después de múltiples pruebas. A continuación se presentan escenarios experimentales donde se estudian diversas combinaciones de objetos en observación, representaciones y criterios a optimizar.

V.3.1 Observación de un plano tridimensional

El trabajo de Olague (2002a) presenta distintos ejemplos de configuraciones favorables para la medición de puntos colocados sobre uno, dos y tres planos tridimensionales, así como el de un objeto complejo. La Figura ?? presenta los resultados obtenidos para un par de cámaras observando un plano tridimensional. La geometría de observación de las soluciones encontradas corresponde a pares estereoscópicos convergentes hacia el plano en observación. Se puede observar la diferencia de escalas entre los distintos criterios, así como su comportamiento no lineal. Estos factores dificultan la obtención de estas configuraciones mediante técnicas de optimización canónicas. Es importante notar que el frente Pareto obtenido es no convexo, lo cual limitaría la obtención de

múltiples soluciones mediante la optimización de una función formada por la combinación lineal de los criterios considerados (Das, 1997). De esta forma el uso de una técnica evolutiva de optimización multiobjetivo es justificada para el estudio del problema de posicionamiento de cámaras multiobjetivo. Las diferencias en la disposición geométrica de los puntos de observación coincide con la hipótesis sobre conflicto entre la precisión de la medición y el movimiento del manipulador. Por un lado, la obtención de una precisión óptima requiere una buena distribución espacial que favorezca la triangulación óptica, ver Figura ??-A. Por otro lado, un conjunto de puntos de observación muy próximos entre sí, no ofrecerá resultados satisfactorios en términos de precisión, ver Figura ??-B. Esta característica se puede observar para redes fotogramétricas con mayor número de cámaras.

Para el caso de una red fotogramétrica formada por tres cámaras, ver Figura ??, se puede observar que se presenta también un frente no convexo donde la geometría de algunas de las soluciones óptimas corresponde a un par estereoscópico en el cual la cámara ortogonal al plano es reforzada. Es decir, esa misma posición es utilizada por dos cámaras, lo cual equivale a un diseño de segundo orden realizado sobre una red de dos cámaras. Sin embargo, al aproximarse a la cota mínima en términos de precisión (ver Figura ??-D), surge el problema combinatorio característico del diseño de redes fotogramétricas. Este problema combinatorio consiste en la existencia de múltiples configuraciones de observación con geometría muy distinta pero con valores de precisión equivalentes (Olague & Mohr, 2002; Olague, 1998). Estas soluciones son encontradas en la frontera del espacio de funciones y son, en su mayoría, soluciones débilmente dominadas por la configuración (D) en la Figura ?. Sin embargo la configuración ??-B corresponde a una solución no dominada. La técnica de optimización multiobjetivo presentada en el capítulo anterior permite encontrar esta solución aun cuando se encuentra aislada del frente Pareto local. Asimismo, note que la mayor diversidad

de soluciones encontradas por la técnica propuesta en comparación con las obtenidas mediante NSGA-II. La forma de la frontera del espacio de funciones y particularmente la configuración ??-A ejemplifica que existe un valor de desplazamiento a partir del cual la precisión obtenida se degrada. En otras palabras un mayor desplazamiento no garantiza una mejor precisión e incluso una configuración regular como la presentada en la Figura ??-A puede estar substancialmente separada del óptimo global en términos de precisión. Los siguientes experimentos muestran como el problema combinatorio se vuelve más evidente al seguir aumentando el número de cámaras.

El frente Pareto obtenido para el caso de una red fotogramétrica formada por cuatro cámaras es mostrado en la Figura ?. En este escenario, al igual que en los anteriores, la parte inferior del frente Pareto corresponde a variaciones de diseño de segundo orden para un par estereoscópico, ver figuras ??-E y ??-F. Sin embargo, las configuraciones (B),(C),(D) son soluciones no dominadas las cuales poseen distintas geometrías de observación. Cabe resaltar la importancia del posicionamiento de una cámara ortogonal al plano en observación. La configuración ??-A corresponde a una distribución “regular” de cámaras la cual es equivalente a la configuración ??-E. Finalmente, la Figura ? muestra los resultados para redes fotogramétricas de cinco cámaras.

V.3.2 Observación de dos planos

El caso de dos planos ortogonales entre sí fue considerado para configuraciones de distinto número de cámaras. Los resultados presentados en la Figura ? muestran que el conjunto de soluciones óptimas Pareto encontradas corresponde a una transición desde un par estereoscópico con una separación mínima, hasta un par de cámaras convergentes cuyo ángulo de separación se aproxima a los 90 grados. Nótese, que a diferencia de los resultados presentados en la Figura ?, el frente Pareto encontrado es convexo. En el caso de configuraciones de 3 cámaras, ver Figura ?, se observa que las soluciones óptimas

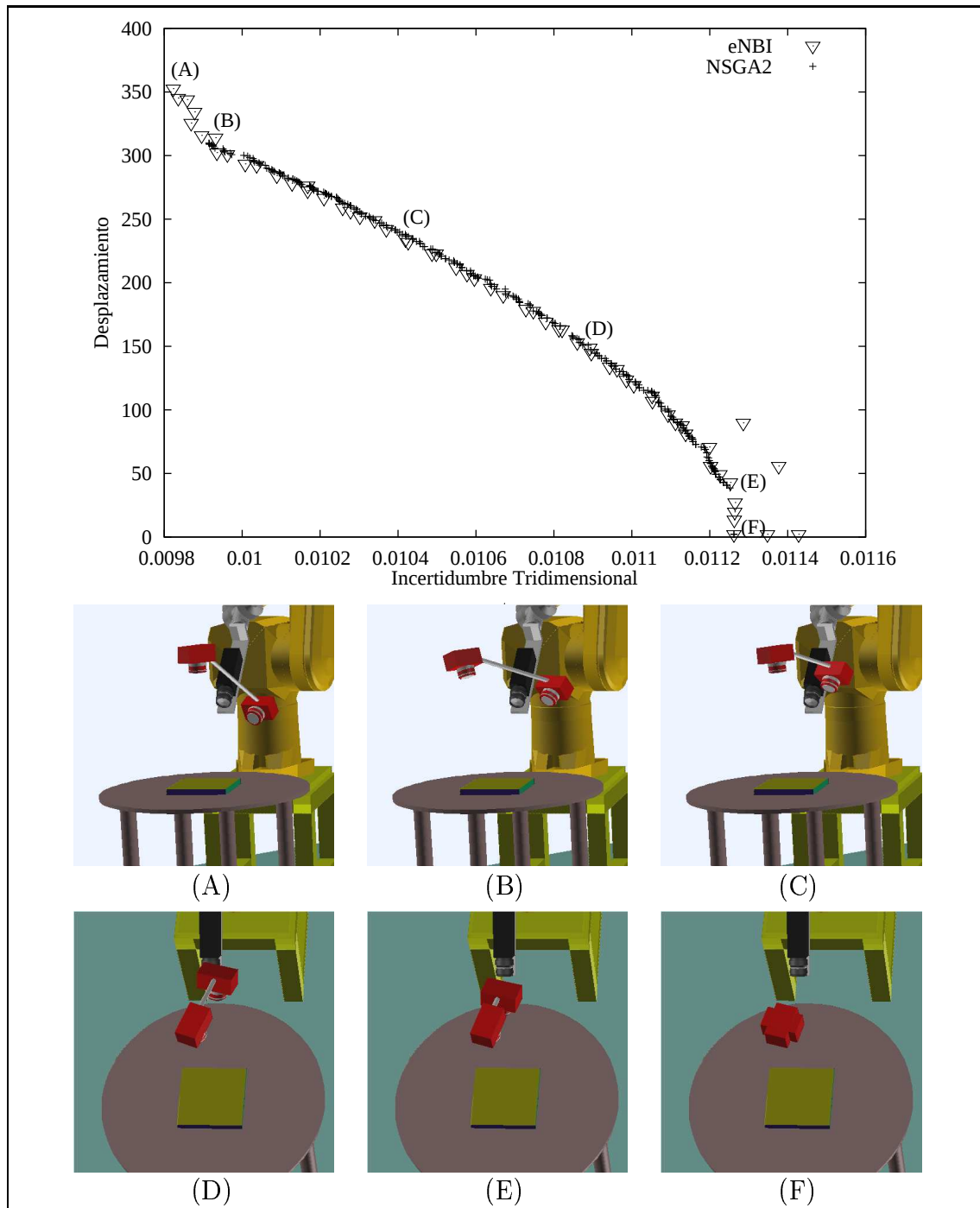


Figura 39: Resultados obtenidos para dos cámaras observando un plano.

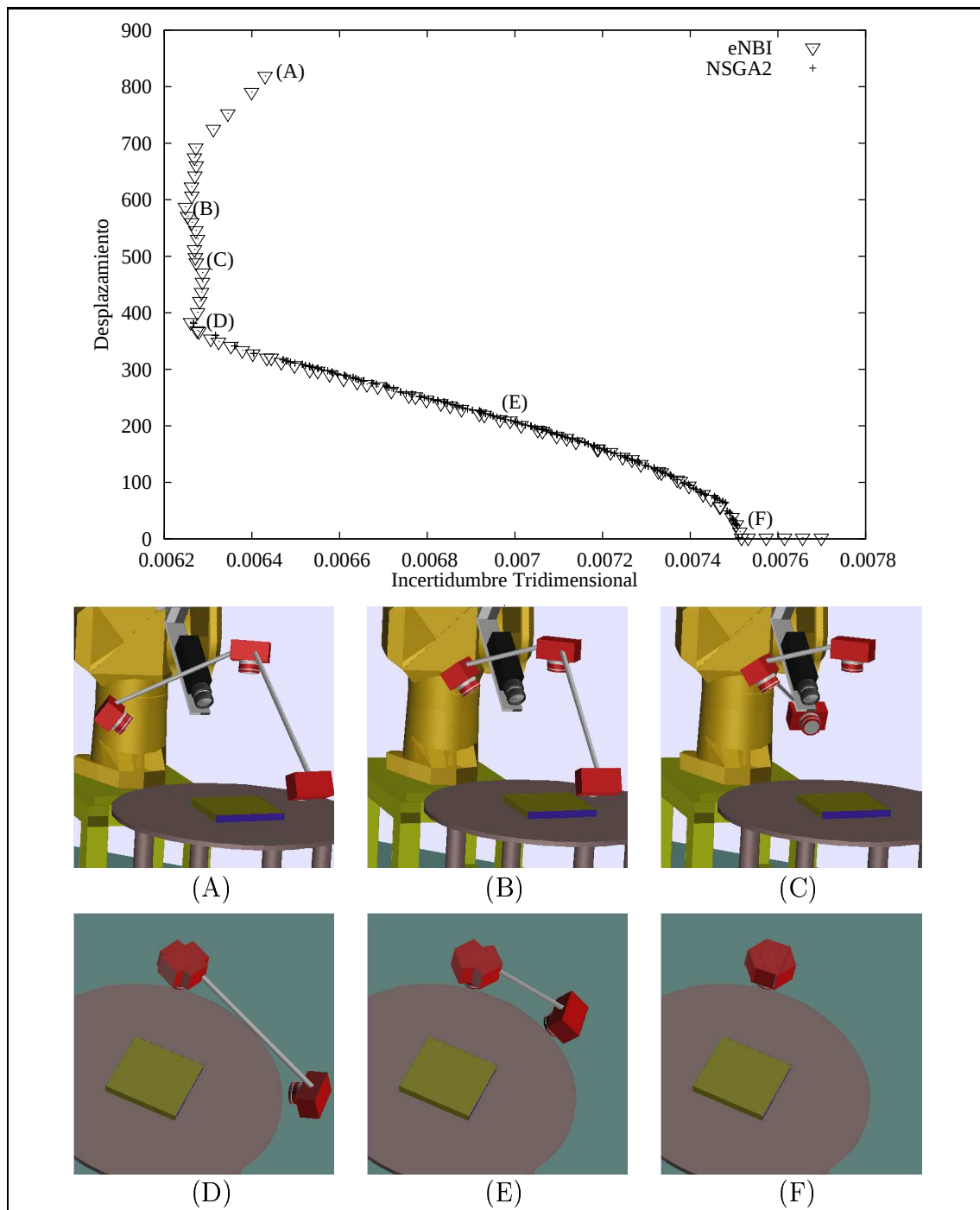


Figura 40: Resultados obtenidos para tres cámaras observando un plano.

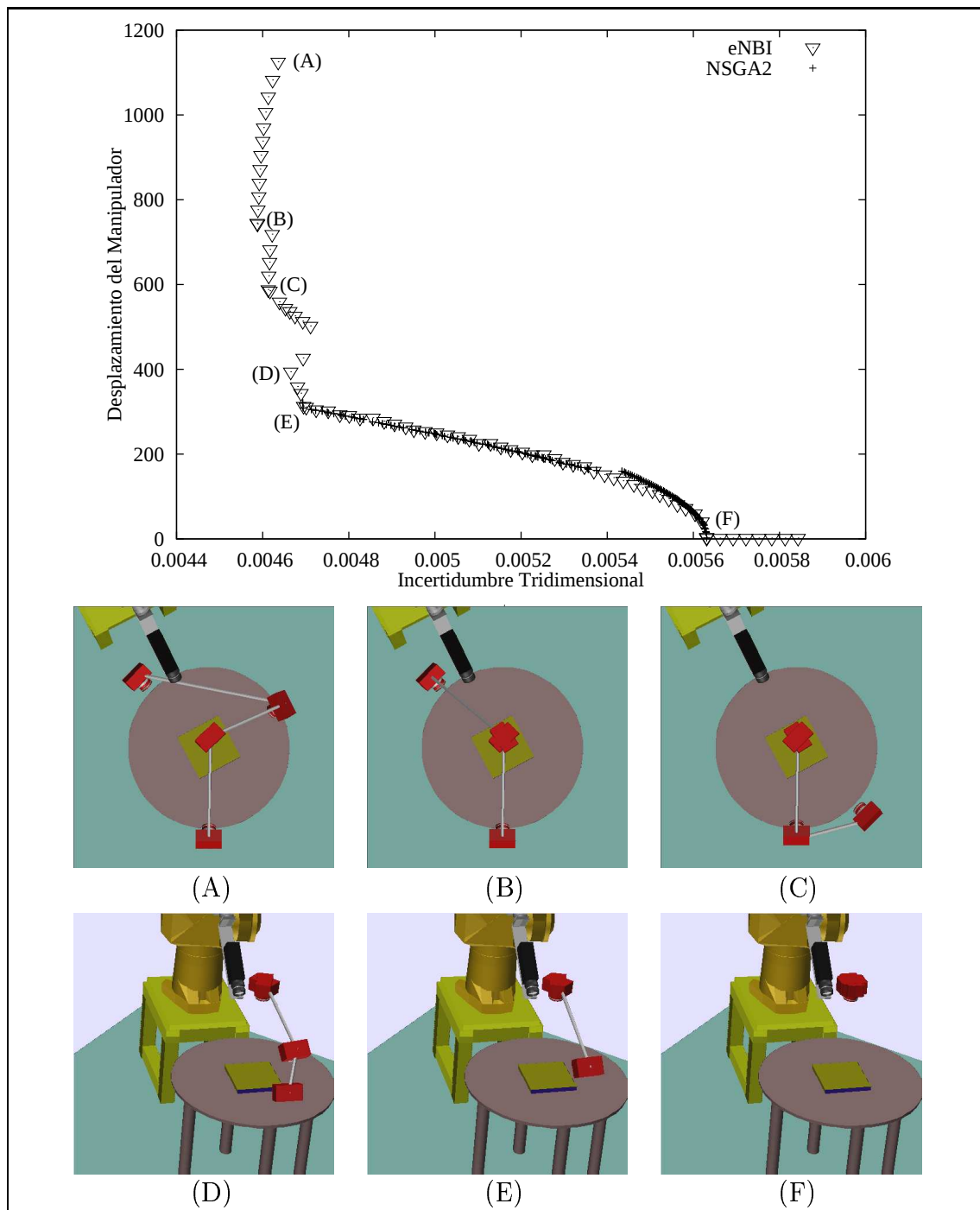


Figura 41: Resultados obtenidos para cuatro cámaras observando un plano.

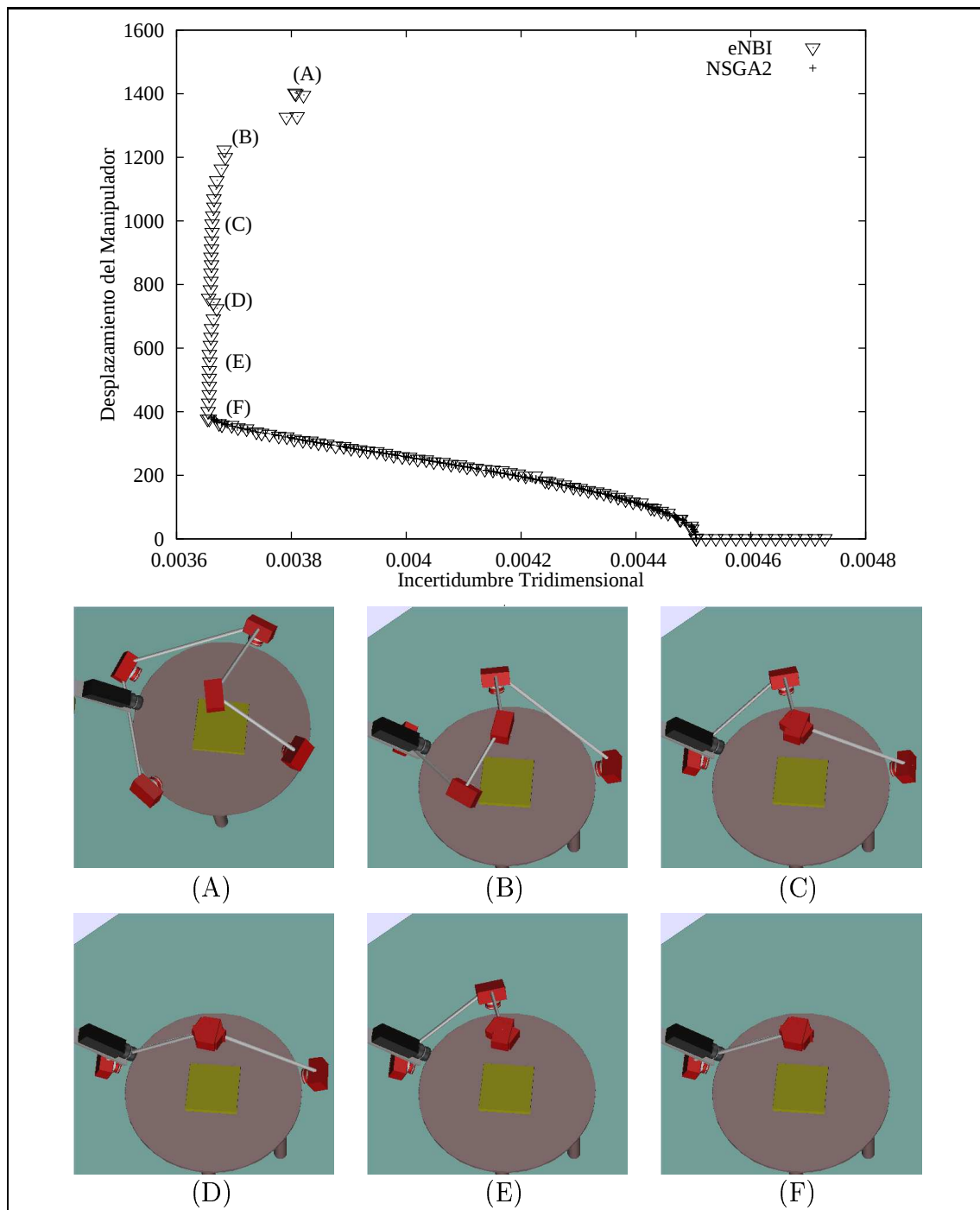


Figura 42: Resultados obtenidos para cinco cámaras observando un plano.

corresponden a una geometría de observación semejante a las presentadas para el caso de dos cámaras. Las soluciones óptimas en términos de precisión corresponden a un par estereoscópico donde una de los puntos de observación es reforzado mediante cámaras redundantes. Un aspecto de primordial importancia es el de las restricciones impuestas sobre el posicionamiento de cámaras a partir de la geometría del objeto. Debido a estas restricciones implícitas, existen regiones privilegiadas para el posicionamiento de cámaras, las cuales corresponden a las regiones de la esfera de observación donde las cámaras pueden fotografiar ambos planos. Esta característica se observa de manera más evidente para los casos de 4,5 y 6 cámaras, ver figuras ??,??,??, donde aún utilizando un mayor número de cámaras la geometría de observación se mantiene prácticamente invariante.

V.3.3 Observación de un objeto tridimensional

El siguiente escenario a considerar es el de un objeto tridimensional complejo observado por una red fotogramétrica. La dificultad de este escenario radica en la satisfacción de las restricciones de visibilidad causadas por los problemas de auto-oclusión del objeto. Los resultados obtenidos después de ejecutar el algoritmo durante 150 generaciones se ilustran en la Figura ?. Las configuraciones (A) y (D) representan soluciones en extremos opuestos del frente Pareto obtenido.

Para las soluciones óptimas encontradas, existe una cota mínima de desplazamiento necesario para realizar la medición, así como una cota mínima al nivel de error que puede obtenerse. Es decir, ambos ejes del plano del espacio de funciones objetivo presentan un comportamiento asintótico. Las soluciones (B) y (C) representan soluciones compromiso a nuestro problema de optimización. La proximidad de las cámaras en estas configuraciones dificulta distinguir visualmente los distintos puntos de observación. Sin embargo ambas configuraciones consisten de ocho cámaras.

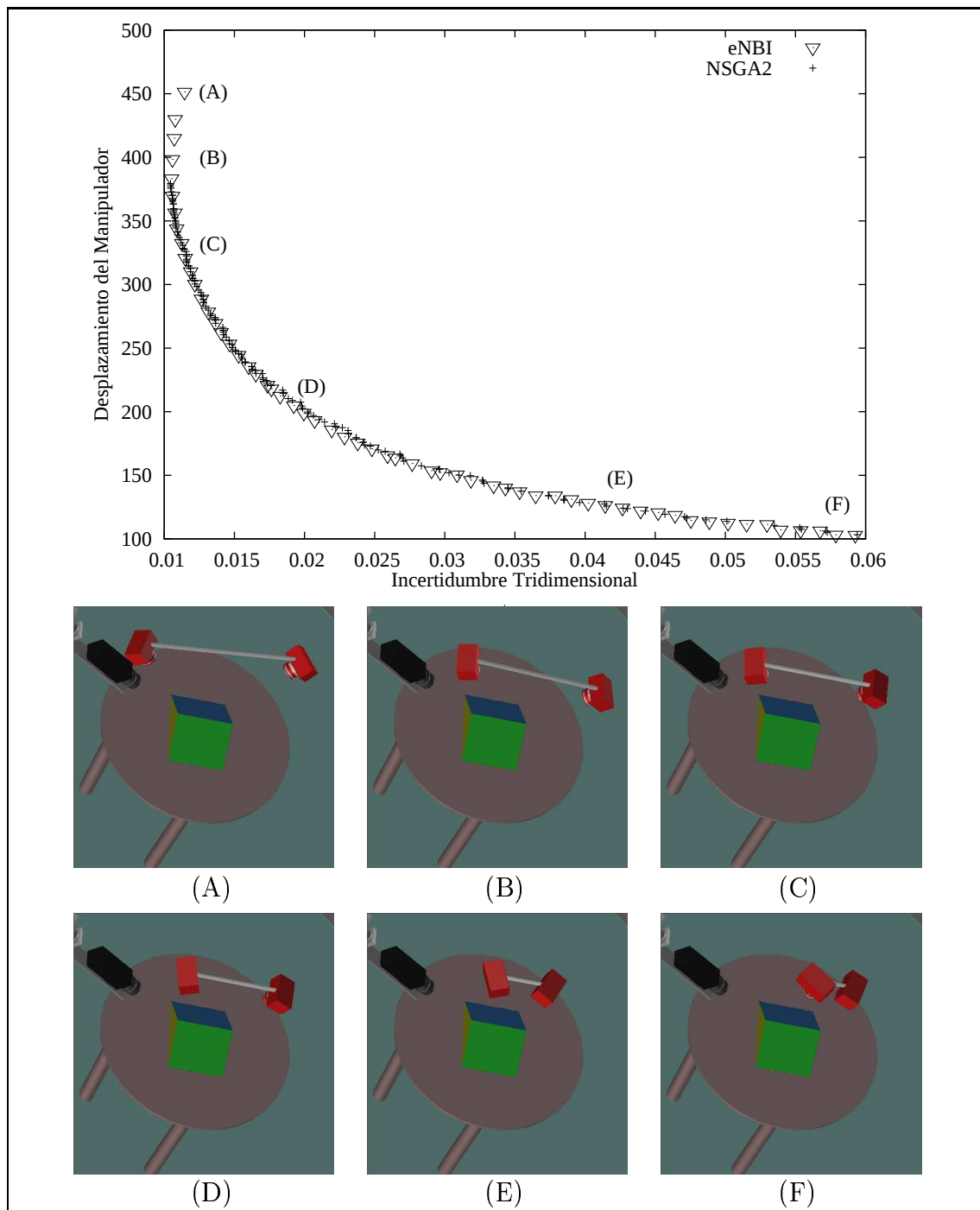


Figura 43: Resultados obtenidos para dos cámaras observando dos planos.

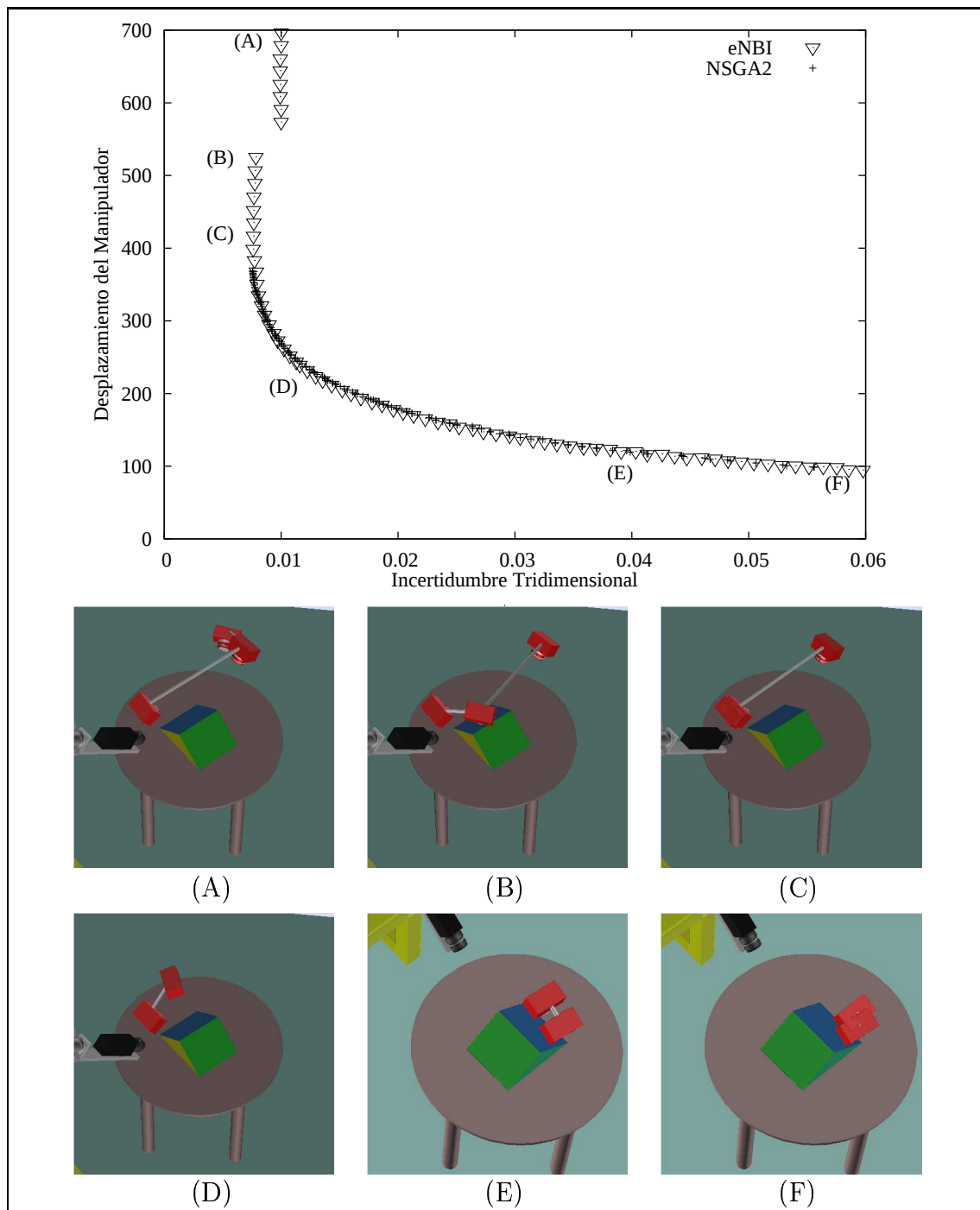


Figura 44: Resultados obtenidos para tres cámaras observando dos planos.

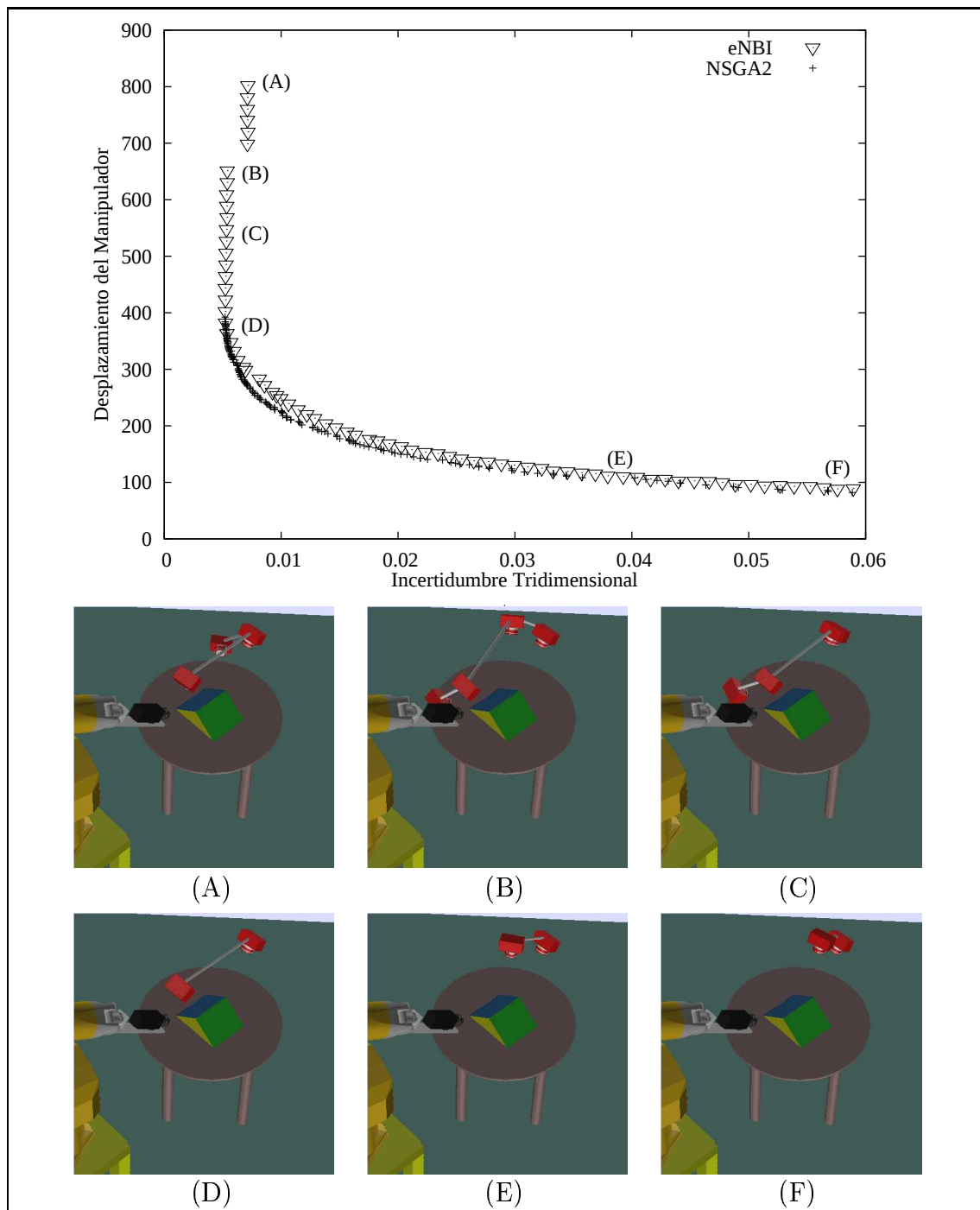


Figura 45: Resultados obtenidos para cuatro cámaras observando dos planos.

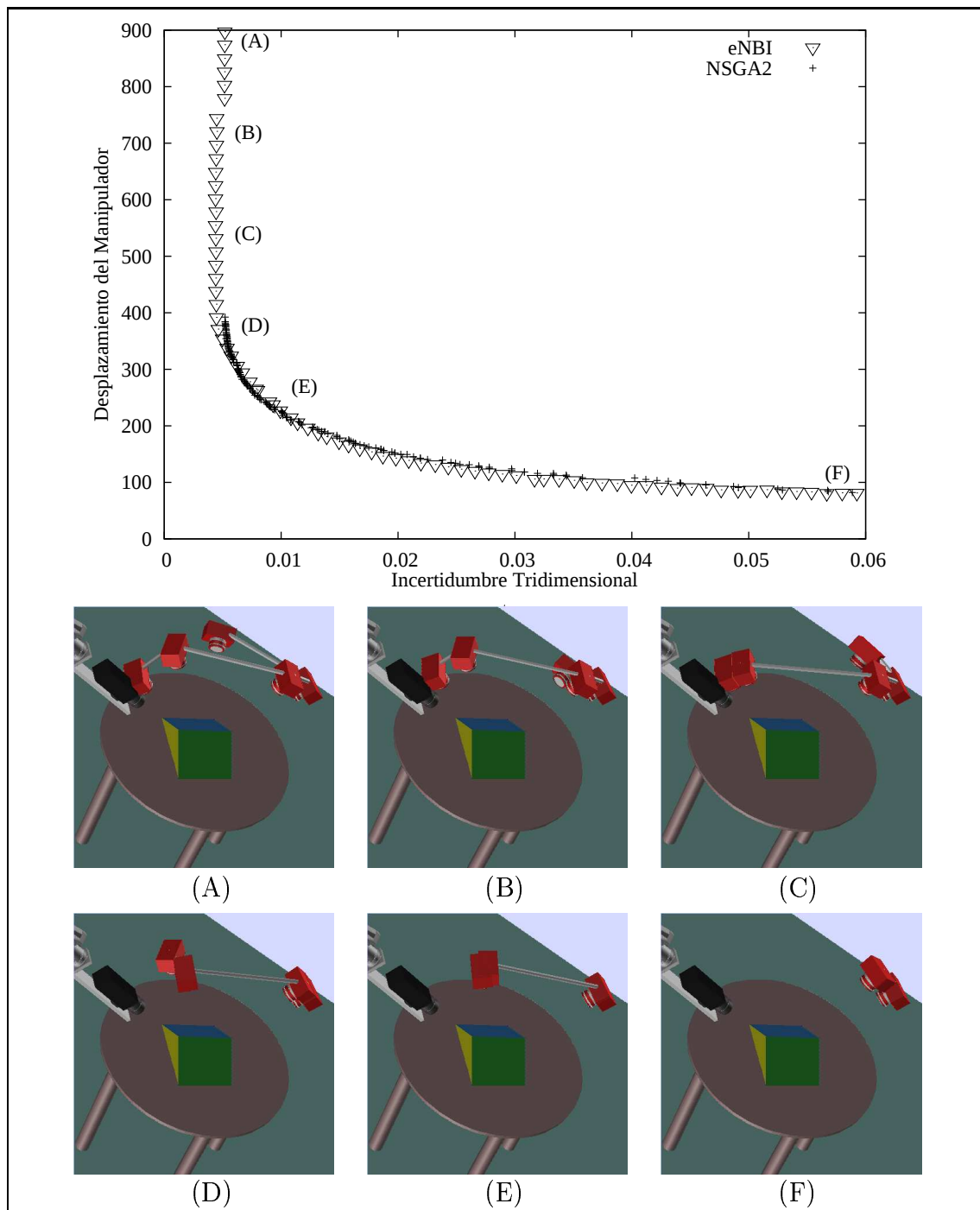


Figura 46: Resultados obtenidos para cinco cámaras observando dos planos.

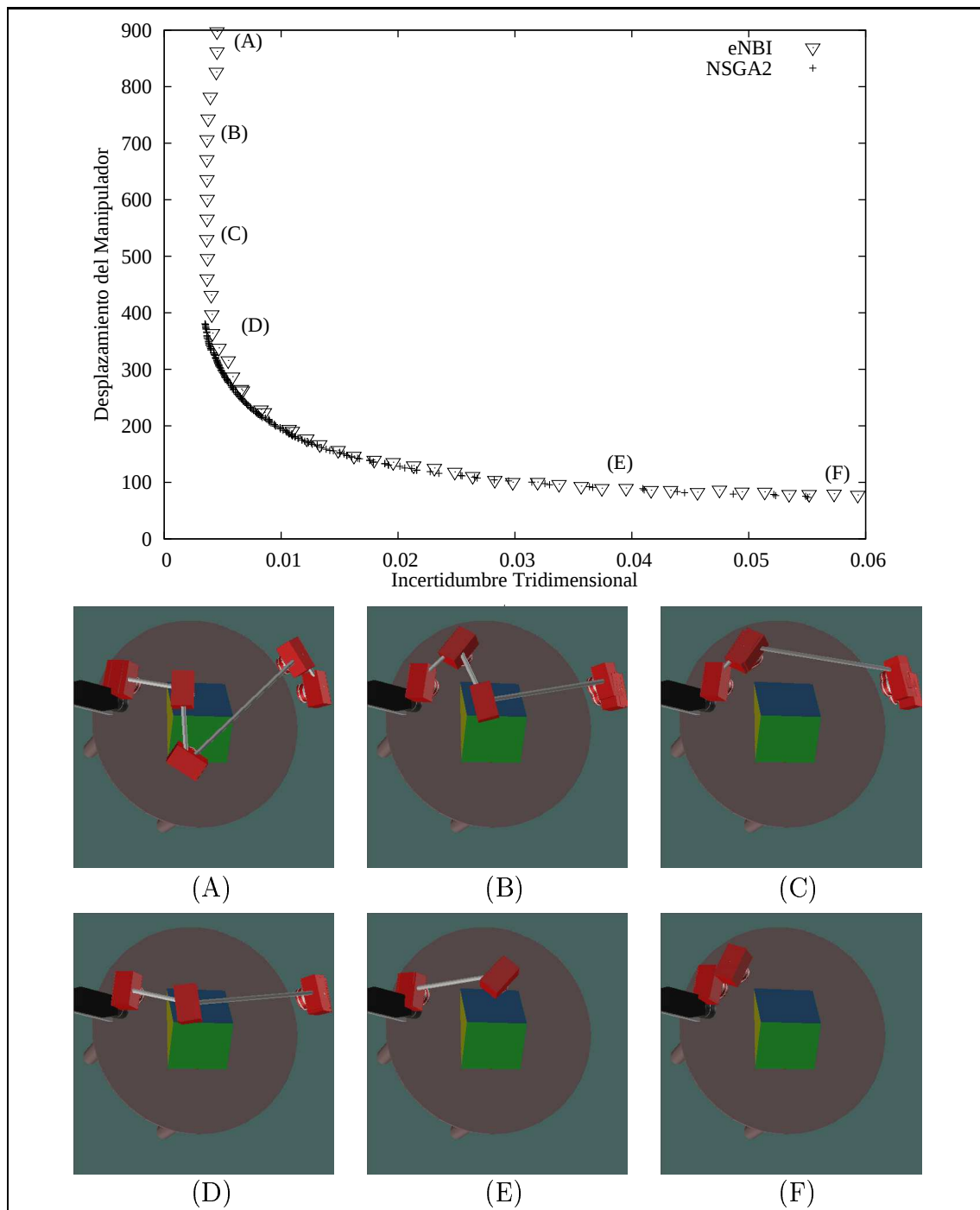


Figura 47: Resultados obtenidos para seis cámaras observando dos planos.

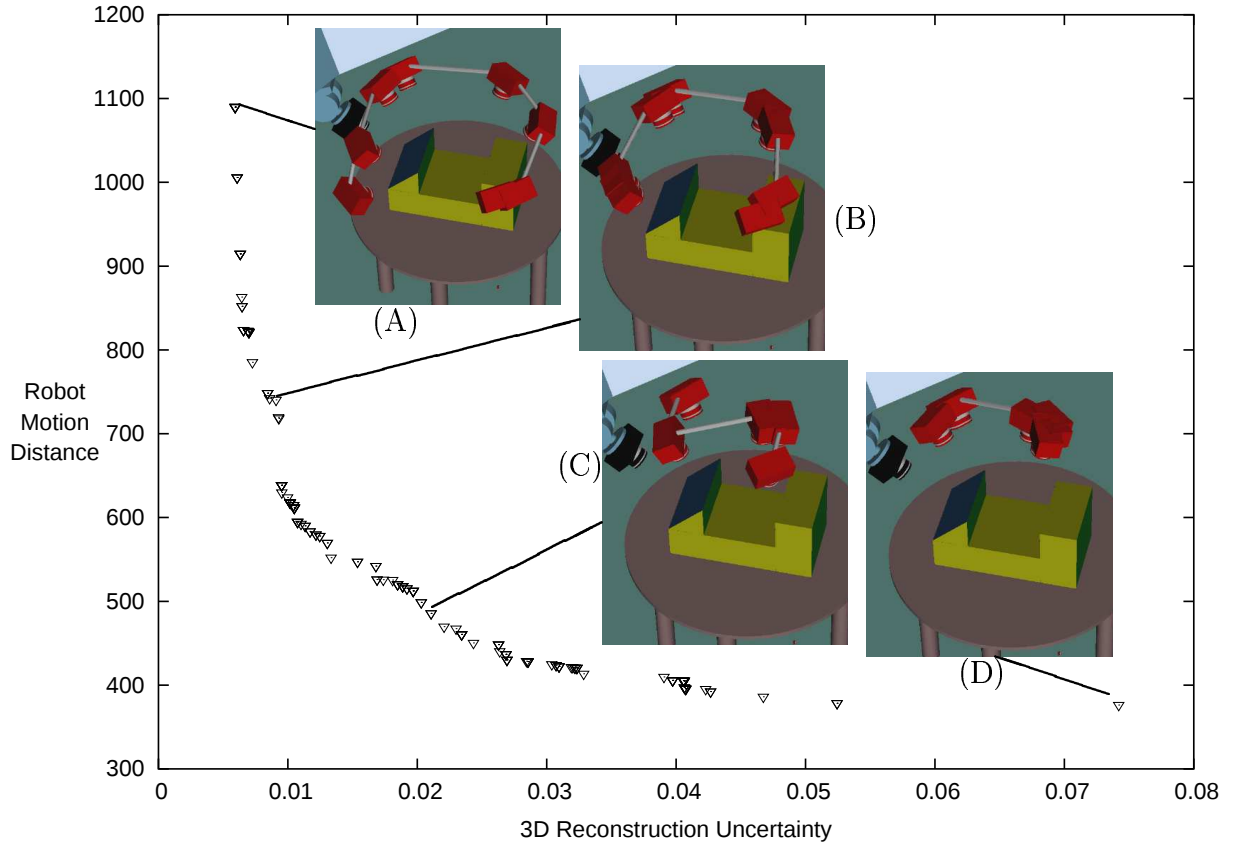


Figura 48: Ejemplos de un frente Pareto para el caso de una red de ocho cámaras.

El siguiente experimento estudia los resultados para redes con distinto número de cámaras. El algoritmo fue ejecutado varias veces, modificando en cada ocasión el tamaño de las redes a considerar. Los distintos conjuntos de soluciones no dominadas obtenidas después de ejecutar cada instancia durante un periodo de 250 generaciones se presentan en la Figura ???. Dicha figura muestra que las redes de mayor tamaño ofrecen mejor precisión y encuentran un frente Pareto de mayor extensión. Sin embargo, el conjunto de soluciones no dominadas obtenido al considerar todas las soluciones desplegadas en la Figura ??? está formado por redes de distintos tamaños. La magnitud

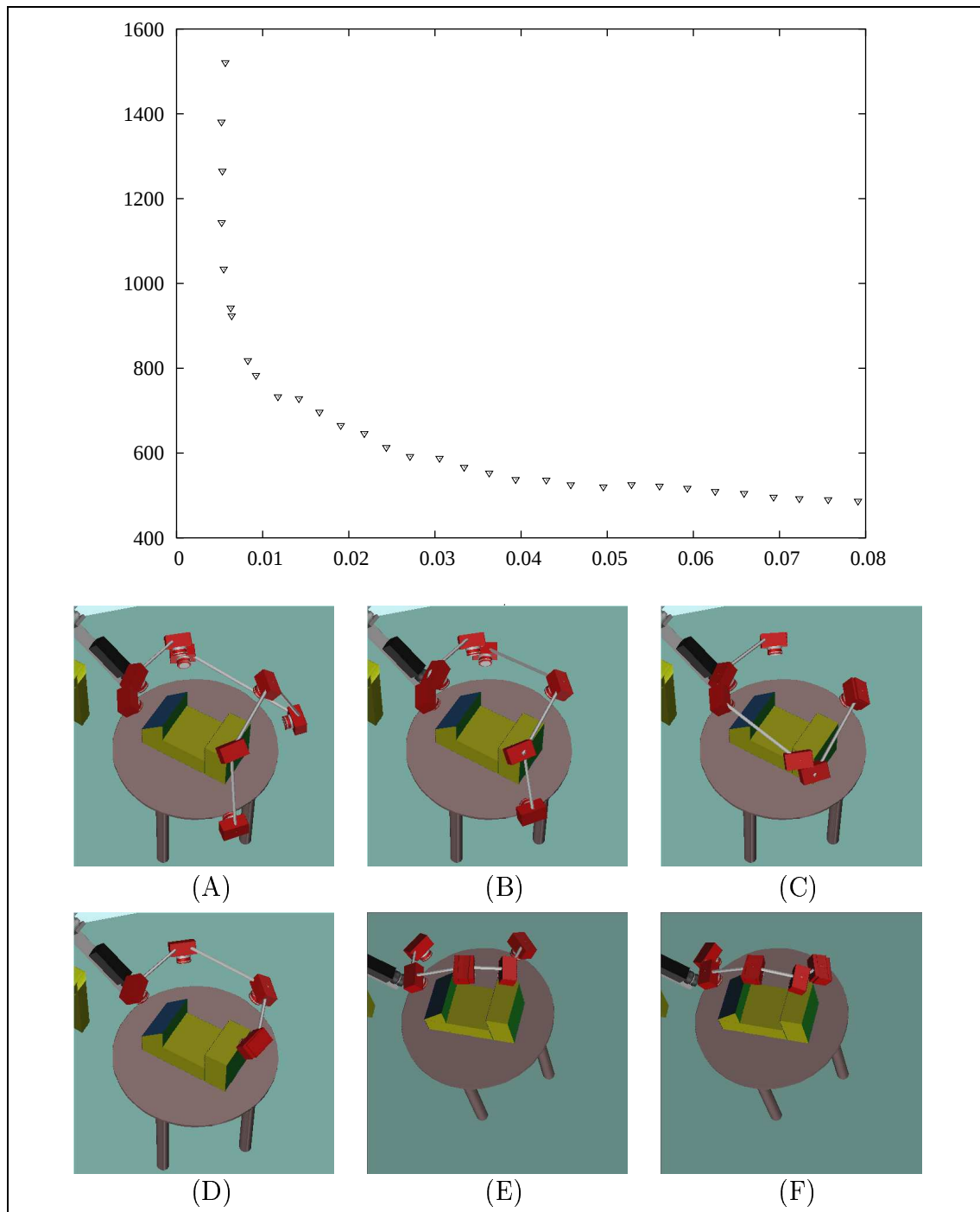


Figura 49: Ejemplos de un frente Pareto obtenido mediante eNBI para el caso de una red de ocho cámaras.

de la mejoría en términos de precisión entre frentes Pareto subsecuentes disminuye conforme aumenta el número de cámaras. Es decir, la precisión es una función no lineal del número de cámaras. En la parte inferior derecha de la figura, las discrepancias en el eje vertical, correspondiente a la eficiencia del movimiento, son despreciables para redes de tamaño muy distintos.

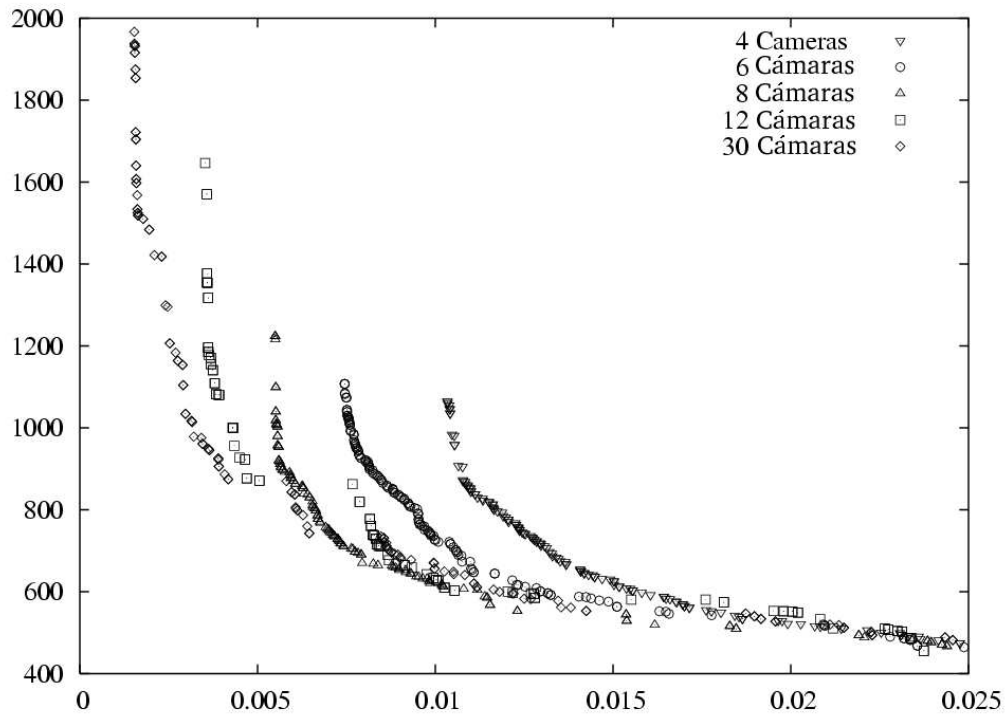


Figura 50: Diferentes frentes Pareto obtenidos mediante NSGA-2 para redes fotogramétricas de tamaño fijo.

V.3.4 Redes de Tamaño Variable

La selección de puntos de observación para tareas de medición tridimensional es más elaborada que la simple cobertura total del objeto. En este sentido, la elección del número de imágenes requeridas para llevar a cabo tal medición no es evidente. Es por

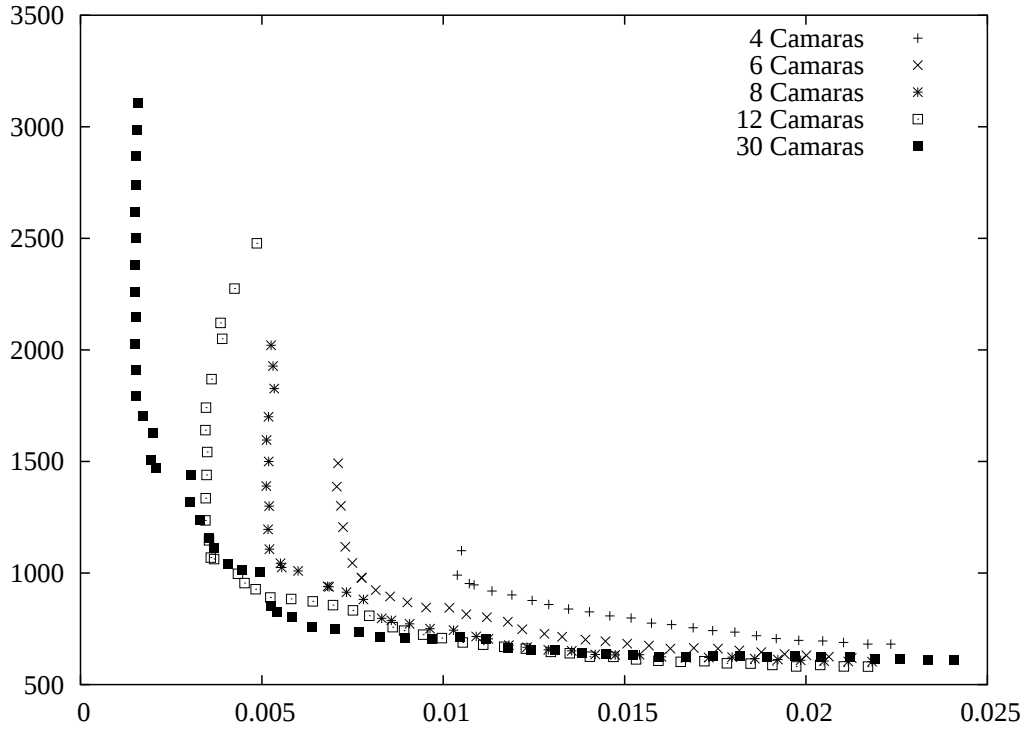


Figura 51: Diferentes frentes Pareto obtenidos mediante eNBI para redes fotogramétricas de tamaño fijo.

eso que se desarrolló la representación que permita estudiar redes de tamaño variable, véase la Figura ???. En este experimento se utiliza una codificación que incluye hasta 20 cámaras. El algoritmo fue ejecutado durante 400 generaciones. El incremento en el número de generaciones obedece a la mayor dimensionalidad del espacio de búsqueda ocasionada por la consideración del vector binario de variables de control. El tamaño de la población y demás parámetros se mantuvieron igual que en experimentos anteriores. La Figura ?? ilustra que el frente Pareto obtenido está formado por redes de distinta cantidad de cámaras. Como era esperado, las redes más grandes brindan mayor precisión y se encuentran en la parte superior izquierda del frente Pareto. De la misma manera, las redes más eficientes en términos de desplazamiento son aquellas con menor

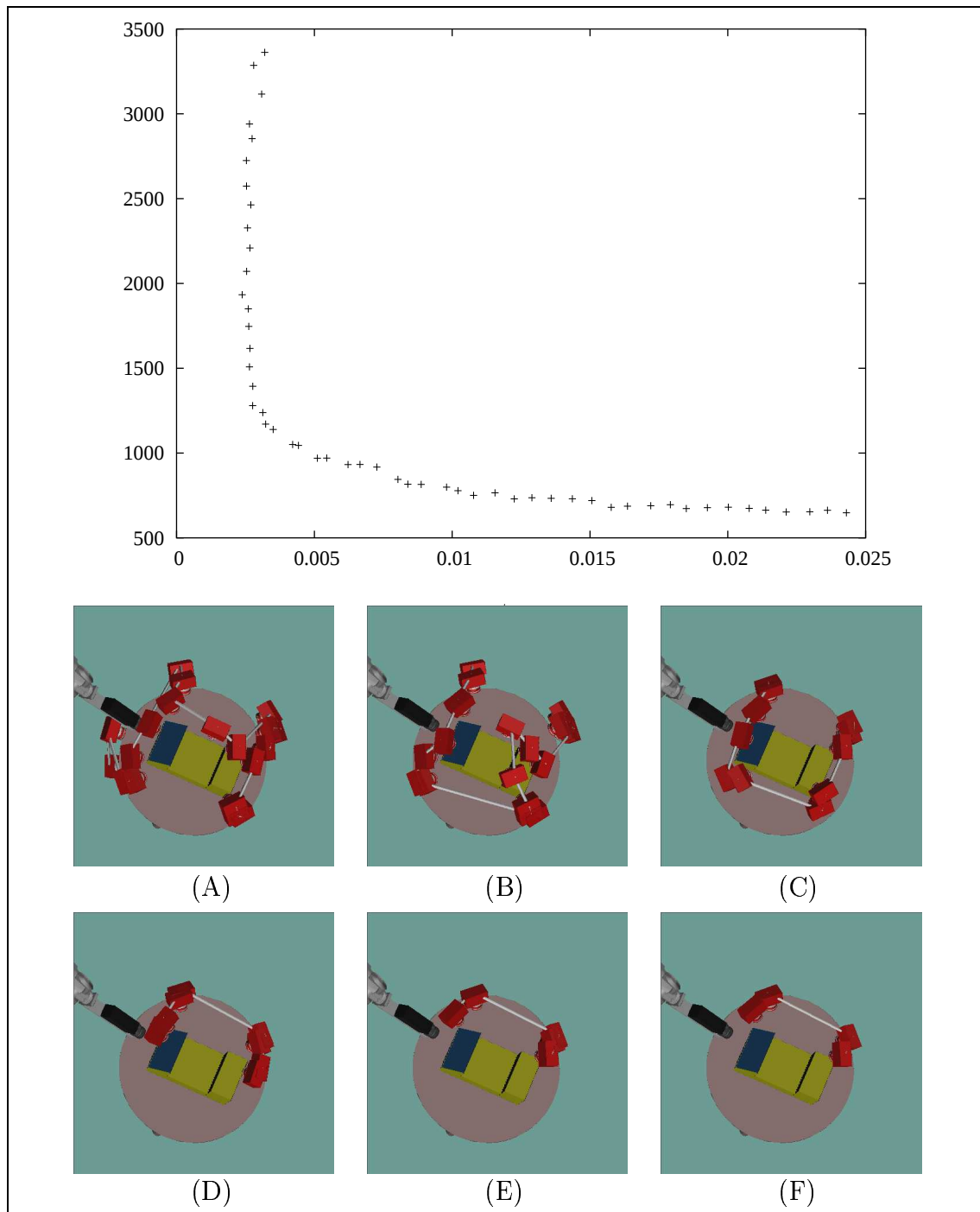


Figura 52: Frente Pareto obtenido por eNBI para redes fotogramétricas de tamaño variable.

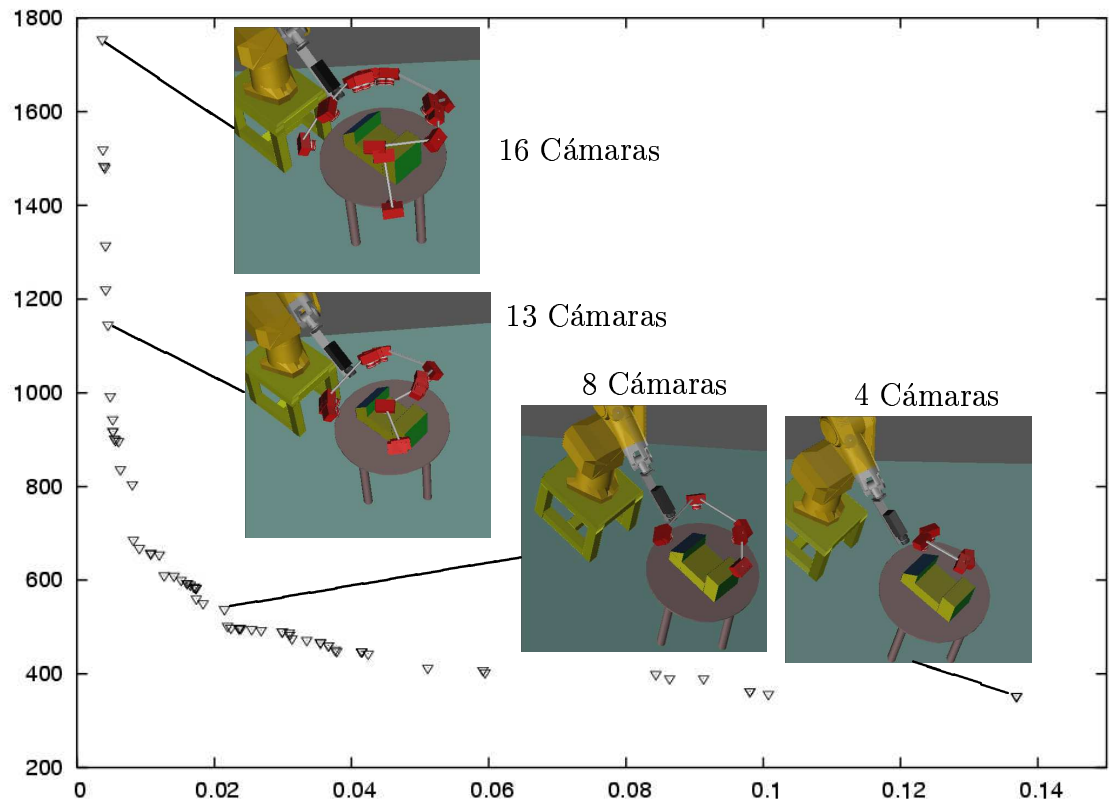


Figura 53: Frente Pareto obtenido por NSGA2 para redes fotogramétricas de tamaño variable.

número de cámaras. Una de las ventajas de utilizar la representación de tamaño variable de red, es la mayor diversidad en la geometría de las soluciones obtenidas. Esto se atribuye a la exploración concurrente en distintas regiones del espacio de búsqueda extendido.

V.3.5 El frente Pareto Completo

Las Figuras ?? y ?? muestran múltiples aproximaciones del frente Pareto para redes de distinto tamaño. Debido a que el número de cámaras es una variable discreta, se obtiene una nube de puntos dividida en distintas “capas”, que en su conjunto aproximan

una superficie tridimensional convexa. Esto ilustra el relieve MO completo para nuestro problema de optimización. Adicionalmente, se muestran proyecciones ortogonales para ilustrar los compromisos existentes entre los diferentes objetivos. El plano de “precisión vs. desplazamiento” generaliza los resultados de la Figura ??, mostrando varias curvas asintóticas. Cada una de estas curvas corresponde a los balances óptimos de desempeño para un número de cámaras dado. La proyección del plano “precisión vs. imágenes” ilustra el beneficio no lineal del incremento del número de imágenes en términos de precisión. La proyección del plano “desplazamiento vs. imágenes” muestra que, en general, menores desplazamientos pueden ser obtenidos con un número mayor de acciones de sensado. Esto se debe a las propiedades estadísticas del ajuste de mínimos cuadrados usado en la triangulación. Particularmente, un conjunto de cámaras colocadas con una gran proximidad pero con un alto nivel de redundancia pueden obtener un nivel mínimo de precisión pero no comparable contra configuraciones bien diseñadas.

V.3.6 Medición Tridimensional

Para validar los resultados propuestos en nuestro enfoque se llevaron a la práctica distintas configuraciones diseñadas por nuestro sistema. La experimentación se llevó a cabo utilizando un sistema de visión activa consistente de un robot manipulador Staubli RX-60 de seis grados de libertad, equipado con una cámara Pulnix en su extremo final. Las mediciones fueron realizadas sobre un objeto tridimensional semejante al utilizado en nuestro ambiente de simulación. Patrones cuadrangulares fueron colocados sobre la superficie de nuestro objeto. Las esquinas de estos patrones sirvieron como los puntos de interés a medir. Las mediciones de tales esquinas sobre las imágenes se realizó mediante un nuevo detector de esquinas subpixel presentado en (Olague y Hernández, 2005). Estas mediciones fueron utilizadas por un módulo de calibración de cámaras basado en el método lineal de Faugeras-Toscani (1987). De esta forma, las mediciones

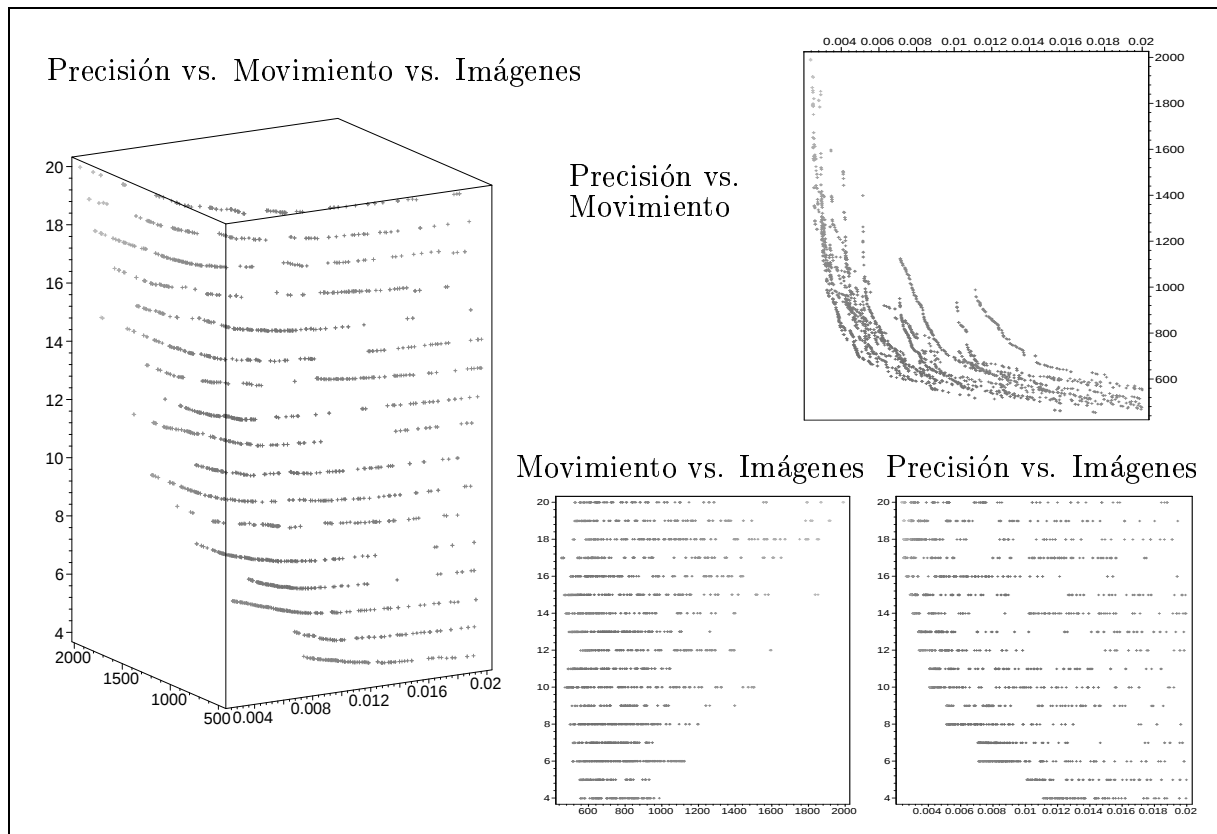


Figura 54: El frente Pareto completo mediante NSGA-2. Las vistas ortogonales muestran los diferentes balances entre los criterios.

sobre las imágenes, los parámetros de calibración, así como los datos de aproximaciones de la estructura del objeto, fueron los datos de entrada a un proceso fotogramétrico de compensación por haces basado en un modelo funcional de visión por computadora.

Por simplicidad de la ilustración, el número mínimo de imágenes requerido para la medición fue utilizado, que para el caso de nuestro objeto tridimensional consiste de cuatro imágenes. Después de ejecutar el algoritmo para este caso, dos configuraciones diferentes fueron llevadas a la práctica. Cada una de estas configuraciones corresponde a puntos extremos del frente Pareto. La Figura ?? muestra los experimentos realizados. Note la considerable mejoría resultante de elegir apropiadamente la colocación

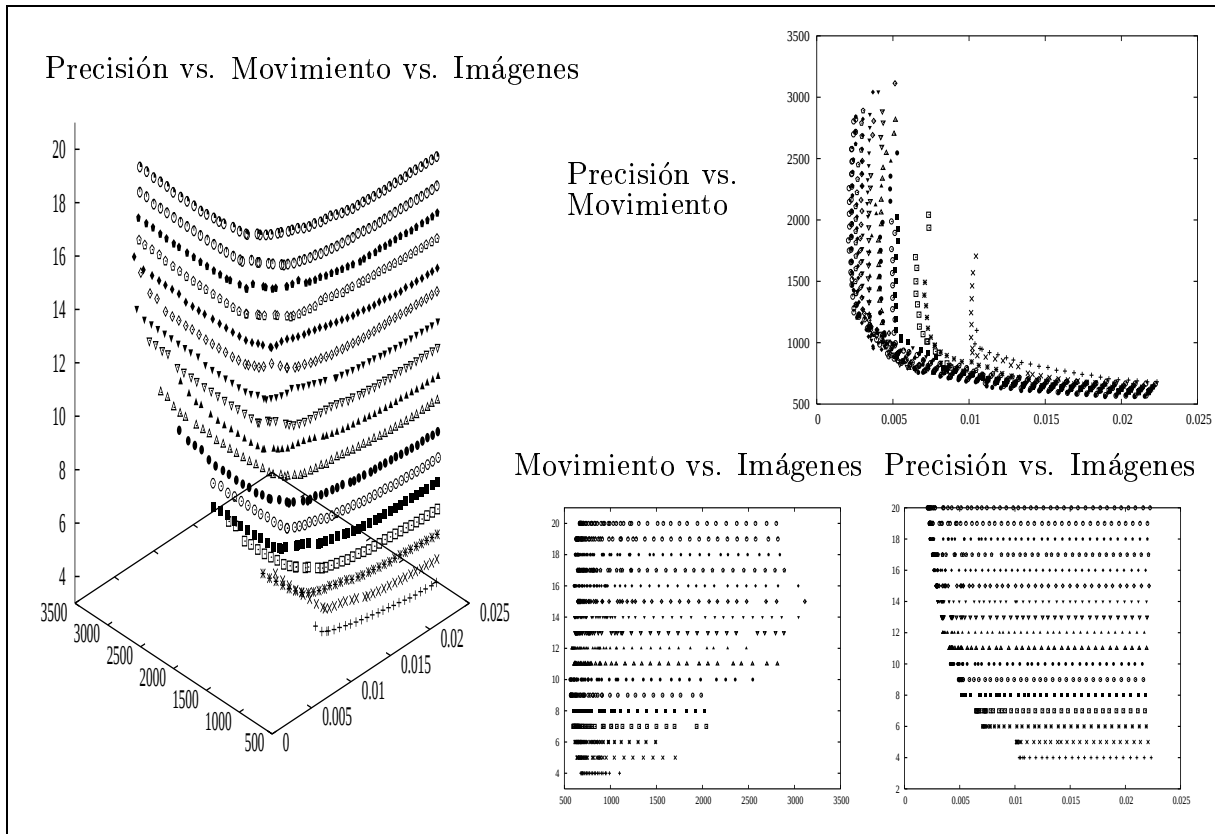


Figura 55: El frente Pareto completo obtenido mediante eNBI. Las vistas ortogonales muestran los diferentes balances entre los criterios.

y el ángulo de convergencia de cada cámara. Esto es ejemplificado en las regiones del objeto que solo son observadas por dos de las cuatro cámaras. Estas regiones son observadas prácticamente por un par estéreo, cuya combinación de ángulo de convergencia y distancia base determina la precisión de la medición tridimensional de los puntos de interés.

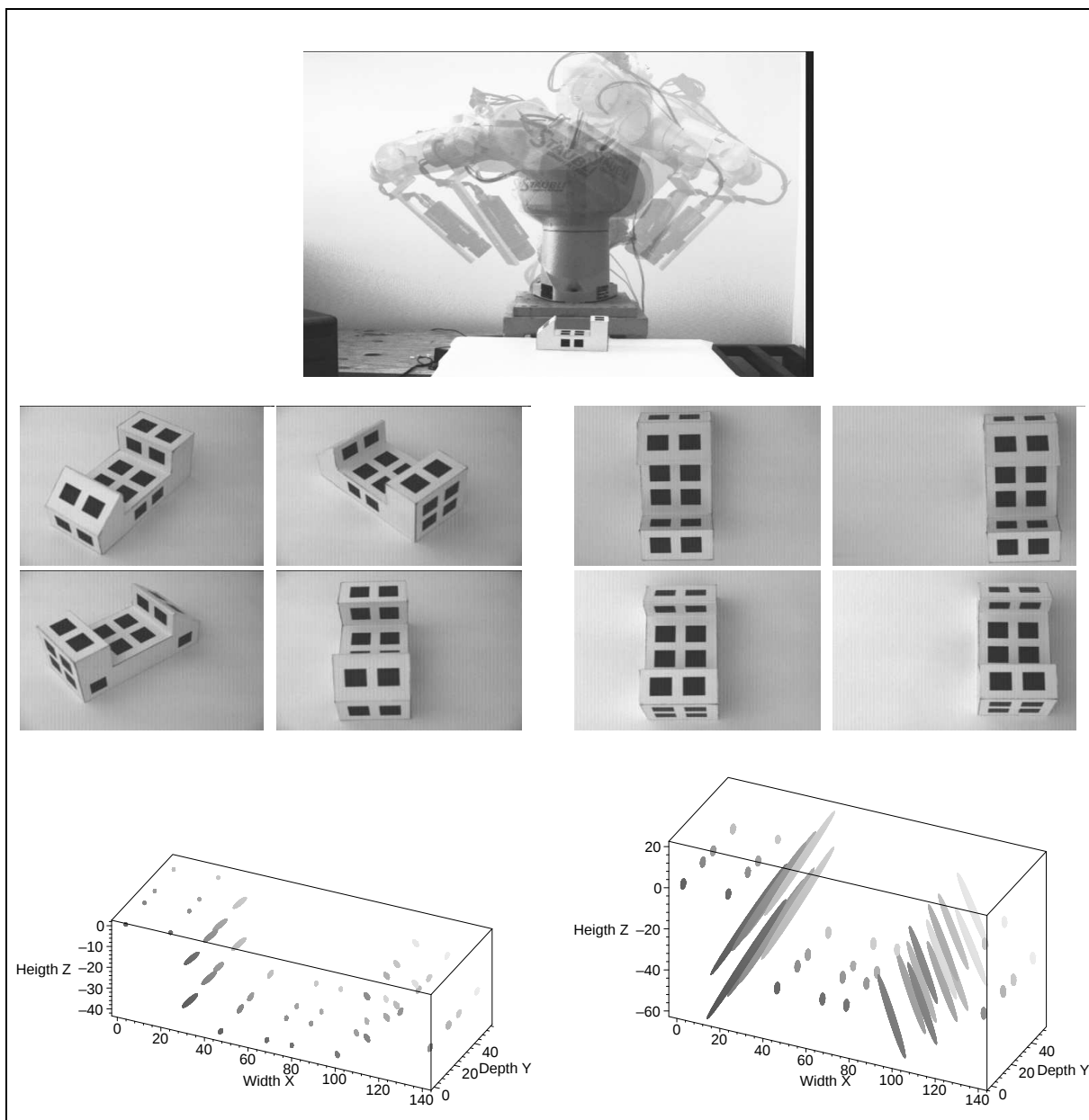


Figura 56: Experimentación para un objeto real. Diferentes configuraciones diseñadas por nuestro sistema fueron llevadas a la práctica. Arriba: El sistema de inspección utilizado. Centro: Imágenes adquiridas para dos configuraciones de cuatro cámaras. Abajo: Resultados de la reconstrucción utilizando un proceso fotogramétrico de compensación por haces.

V.4 Discusión

Se ha presentado un enfoque multi-objetivo para resolver el problema de posicionamiento de cámaras para una inspección automatizada de alta precisión. El escenario considerado es el de un manipulador trabajando en una configuración Cámara-Mano. Los objetivos considerados en este estudio fueron: 1) *Minimizar la Incertidumbre de la Medición*, 2) *Minimizar el Movimiento Requerido* y 3) *Minimizar el Número de Imágenes Requeridas*. Cada uno de estos objetivos fue incorporado a nuestro planteamiento del problema como diferentes criterios a ser optimizados de manera concurrente. Diferentes restricciones ópticas y cinemáticas fueron integradas a nuestra metodología mediante un entorno de simulación. El proceso de optimización fue llevado a cabo mediante técnicas de cómputo evolutivo. Las soluciones encontradas por nuestro sistema determinan tanto la configuración geométrica de un conjunto de cámaras, como la especificación de las acciones de sensado a ejecutar por el manipulador. La ejecución de una instancia de nuestro algoritmo ofrece un conjunto de soluciones no dominadas entre si, que representan una aproximación al conjunto óptimo Pareto para los criterios en consideración.

Los resultados experimentales concuerdan con la hipótesis inicial de la existencia de un conflicto entre los distintos objetivos involucrados en el problema de posicionamiento de cámaras. Las soluciones no dominadas encontradas por nuestro sistema forman distintos frente Pareto los cuales describen los diferentes compromisos de desempeño para un sistema de inspección automatizada. Esta es la primera vez que estos compromisos han sido tratado dentro del contexto de la optimización multi-objetivo. La flexibilidad de nuestro enfoque evolutivo permite la integración de distintos objetivos relacionados con el problema de selección de puntos de observación. Consideramos que abordar el problema en términos de optimización multi-objetivo ofrece un marco de desarrollo

apropiado para obtener un mejor entendimiento de las complejas interdependencias encontradas en un sistema de visión visual automatizada ó incluso, algunas otras tareas de automatización robótica.

Dentro de los trabajos futuros incluimos expandir el ámbito de la función de costo operacional del movimiento del robot. Esta podría incluir la evasión de obstáculos mediante la planeación de movimientos e incluso podría incorporar los aspectos dinámicos del movimiento del robot. En este trabajo se adoptó un modelo de esfera de observación, trabajos futuros podrían incorporar un posicionamiento de cámaras menos restrictivo. Esto requeriría modificar el esquema de representación utilizado por nuestro algoritmo evolutivo. Otra extensión del trabajo actual es abordar el problema de *Toma de Decisiones Multi-Criterio* que surge al momento de tener que seleccionar una de las múltiples soluciones óptimas Pareto. Esto se realizaría mediante un proceso interactivo donde las preferencias del usuario son sistemáticamente solicitadas.

Capítulo VI

Un Nuevo Enfoque Coevolutivo al Posicionamiento de Cámaras

VI.1 Introducción

El diseño de una red fotogramétrica con el propósito de obtener una reconstrucción tridimensional de alta precisión es aún un problema abierto dentro de la fotogrametría (Olague & Dunn, 2006). Tal problema de diseño ofrece una combinación intrincada de interacciones entre las restricciones físicas de los sensores, el modelo matemático del problema y los métodos numéricos utilizados para su solución (Wong & Kamel, 2004). En este capítulo se aborda el diseño de una red fotogramétrica en términos de una combinación lineal de los objetivos de precisión y eficiencia motriz. Mediante tal simplificación, el problema optimización optimiza solo una función criterio, la cual incorpora *a priori* las preferencias entre los distintos objetivos. En esta aportación se desarrolla una nueva técnica de optimización evolutiva la cual explota las características geométricas de nuestro problema para llevar a cabo un proceso de búsqueda evolutiva eficiente a partir del enfoque de *evolución individual*.

El enfoque de evolución individual considera que cada individuo en la población representa una solución parcial al problema estudiado. Por lo tanto, un proceso de agregación de múltiples individuos es necesario para llegar a una solución. Tal enfoque es incorporado al problema de diseño de redes fotogramétricas mediante la evolución de una población de subredes de cámaras. El desarrollo de este nuevo enfoque ofrece un ahorro considerable en términos del costo computacional requerido para la evaluación

de la aptitud individual debido a la reducción del tamaño del modelo matemático a resolver. La evolución individual es una técnica de optimización compleja dado que múltiples aspectos nuevos necesitan ser considerados dentro del contexto del cómputo evolutivo, tales como: partición y representación del problema, evaluación de aptitud local, evaluación y redistribución de la aptitud global, agregación de los individuos, así como la preservación de la diversidad de la población. En este trabajo, se combinan principios y técnicas ampliamente aceptadas dentro del cómputo evolutivo. Por otro lado, para el caso de conceptos radicalmente nuevos se provee una solución inicial basada en las características del problema.

El propósito de estudiar el enfoque de evolución individual dentro del contexto de las redes fotogramétricas es el de presentar una nueva simplificación basada en el enfoque de la optimización numérica. De esta manera, se pretende llevar a cabo una búsqueda eficiente del espacio de búsqueda de posibles posicionamientos de cámaras, mientras al mismo tiempo se retienen las soluciones de alta calidad en términos de un proceso de ajuste fotogramétrico.

VI.2 Combinación Lineal de Criterios

El enfoque adoptado para combinar los criterios expresados por las Ecuaciones (??) y (??), presentadas en el capítulo anterior, es el de definir una combinación lineal entre ellos. Así el criterio a optimizar es de la forma

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = w_1 f_1(\mathbf{x}, \mathbf{P}) + w_2 f_2(\mathbf{x}).$$

Tal expresión realiza una suma ponderada, donde los valores w_i representan el “peso” o importancia relativa de cada uno de los criterios. Es común imponer restricciones a los valores de peso con el propósito de reducir la redundancia entre distintas combinaciones de valores. De esta forma se tiene $\sum_{i=1}^k w_i = 1 : w_i > 0$. La primera dificultad de

utilizar una agregación aditiva de criterios es la diferencia de escalas entre los criterios de precisión y movimiento, i.e. existe una diferencia de 3 a 5 ordenes de magnitud entre los valores obtenidos para las distintas funciones. Por lo tanto, es necesario llevar a cabo un escalamiento de los valores de las funciones $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{P})$ y $f_2(\mathbf{x})$ con el propósito de compensar la influencia de cada una en el valor final del criterio. Al considerar tal escalamiento junto con las restricciones sobre los valores de peso el criterio a optimizar puede expresarse de la siguiente manera:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = w s_1 f_1(\mathbf{x}, \mathbf{P}) + (1 - w) s_2 f_2(\mathbf{x}) \quad : w \in [0, 1], \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

La especificación de las preferencias entre distintos criterios depende tanto de valores de peso como del escalamiento de las funciones criterio. Esto se debe a que dicho escalamiento impone un sesgo al proceso de optimización. En términos generales, es difícil determinar un escalamiento apropiado para funciones con comportamiento no lineal. Sin embargo, una vez determinada las escalas apropiadas para los criterios, es posible obtener distintas soluciones óptimas utilizando diferentes valores del parámetro w . Para el caso de $w = 1$ se optimizará solamente el primer criterio, mientras que para un valor de $w = 0$ solo será optimizado el segundo criterio. Mediante el uso de valores intermedios es posible obtener distintas soluciones pertenecientes al frente Pareto.

VI.3 Evolución Individual: *Divide y Vencerás* Evolutivo

El enfoque de evolución individual, difiere de enfoques típicos al cómputo evolutivo en el sentido de que un individuo en la población representa solo parte de la solución del problema. En este respecto, es similar al enfoque “Michigan” desarrollado para sistemas clasificadores (Holland, 1975), donde una solución consiste en una base de reglas obtenidas a partir de una población de sub-conjuntos de reglas evolucionadas. En el

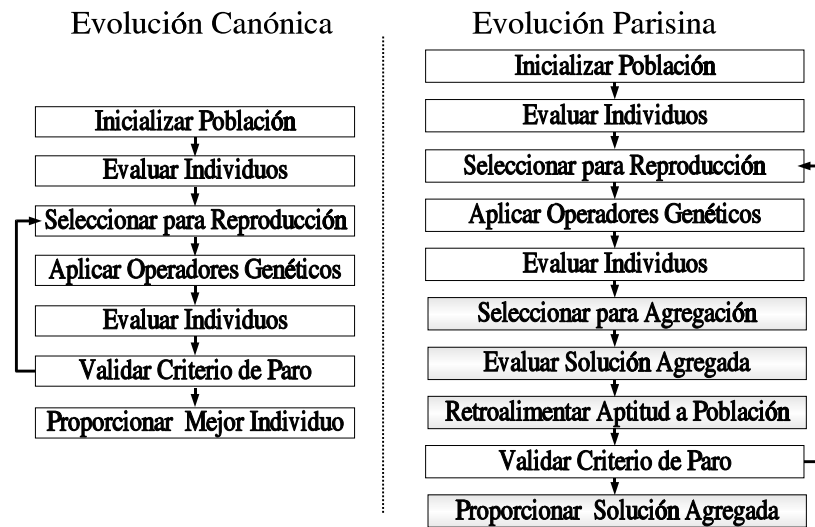


Figura 57: Descripción algorítmica del enfoque de evolución individual. El proceso de evaluación de aptitud es modificado para considerar la contribución local y global de un individuo.

enfoque de evolución individual, una agregación de múltiples individuos debe ser considerada para obtener una solución al problema bajo estudio. Por lo tanto, la evolución de la población completa es preferida en vez del surgimiento de un solo individuo dominante. La motivación para tal enfoque es hacer un uso eficiente del proceso de búsqueda evolutiva. Esto se logra desde dos perspectivas distintas. Primero, el algoritmo desperdicia menos esfuerzo computacional al final de la ejecución al considerar más de un solo individuo como producto del proceso evolutivo. Segundo, el costo computacional de la evaluación de la función de aptitud se reduce considerablemente para cada uno de los individuos.

Bajo el enfoque de evolución individual, varios de los aspectos canónicos de los algoritmos evolutivos son conservados, permitiendo así una gran flexibilidad en su aplicación. Desde un punto de vista algorítmico, la evolución individual incorpora un

conjunto de heurísticas específicas a la etapa de evaluación de aptitud dentro de un algoritmo evolutivo, ver la Figura ??). De esta forma, el valor de aptitud de un individuo depende de su desempeño en un nivel local poblacional y un nivel global de agregación. Tal enfoque puede ser adaptado para englobar diferentes paradigmas evolutivos. Sin embargo, la aplicabilidad de este enfoque está restringida a problemas donde la solución puede ser descompuesta en elementos o componentes homogéneos, cuya contribución individual puede ser evaluada. Por lo tanto, cada desarrollo es necesariamente dependiente de la aplicación, donde el diseño de una descomposición adecuada del problema es un factor determinante. Bajo tales consideraciones se identifican los siguientes aspectos de implementación:

- **Codificación Parcial.** La representación genética utilizada para un solo individuo codifica una solución parcial.
- **Agregación de Individuos.** Es necesario definir un procedimiento mediante el cual una muestra de la población es agregada para formar una solución completa del problema.
- **Aptitud Local.** Una función de mérito que describa cada solución parcial con el propósito de poder evaluar su posible contribución a una solución agregada.
- **Aptitud Global.** Una función de mérito que describa una solución completa al problema. El valor de esta solución debe ser reflejado en cada una de las soluciones parciales que la componen.
- **Algoritmo Evolutivo.** La evolución de la población en su conjunto debe promover el surgimiento de mejores soluciones agregadas. Esto requiere diseñar apropiadamente la interacción entre los valores de aptitud local y global. Adicionalmente, es necesario incluir un mecanismo de preservación de la diversidad

afín de conservar un conjunto de soluciones parciales complementarias.

Distintos ejemplos exitosos de tal enfoque pueden encontrarse en la literatura. El *algoritmo de las moscas* desarrollado por Louchet *et al.* (2002) es una herramienta de reconocimiento de patrones en tiempo real utilizada en un sistema de visión estéreo. En dicho trabajo, la población está formada por individuos que representan un punto tridimensional. El algoritmo conduce cada uno de estos individuos (denominados moscas) a un punto sobre la superficie de la escena en observación mediante un modelado simplificado del proceso de triangulación óptica. Recientemente, el trabajo de Olague y Puente (2006) retoma estos conceptos y propone una metodología inspirada en la conducta de una colmena de abejas. En dicho trabajo se logra incorporar efectivamente los conceptos de coevolución al problema de obtener una reconstrucción tridimensional quasi-densa. El trabajo de Collet *et al.* (2000) incorpora el enfoque de evolución individual a la solución del problema inverso de sistemas de funciones iterativas. En dicha instancia se adoptó una metodología de programación genética, llevando a cabo la experimentación sobre imágenes bidimensionales.

En términos generales, la evolución individual trabaja las siguientes premisas:

1. Una solución $X \in S$ puede ser descompuesta en n componentes $x_i \in S'$. De tal forma que exista un mapeo $T : S' \times \cdots \times S' \rightarrow S$.
2. Existe una función de mérito $f_{loc} : S' \rightarrow \mathbb{R}$ para evaluar cada uno de los componentes de la solución
3. Existe una función de mérito $f_{global} : S \rightarrow \mathbb{R}$ para evaluar cada solución completa.
4. El relieve de las funciones de mérito f_{loc} y f_{global} tiene la estructura suficiente para guiar el proceso de búsqueda evolutiva.

Bajo estas premisas, la búsqueda evolutiva es realizada sobre S' optimizando f_{loc} . Sin embargo, los valores de aptitud de los individuos son modificados sistemáticamente para promover el surgimiento de mejores soluciones compuestas que radican en el espacio S . Esto se logra de la siguiente manera:

1. Haciendo un muestreo periódico de la población en S para formar soluciones agregadas.
2. Evaluando las soluciones agregadas mediante f_{global}
3. Ajustar los valores de aptitud de los individuos en S basándose en la evaluación de f_{global} .

La Figura ?? describe este proceso así como la relación entre los distintos espacios de búsqueda considerados en el enfoque de evolución individual. Debido a la interacción entre f_{loc} y f_{global} es posible el surgimiento de una dinámica de población compleja.

VI.4 Diseño de Redes Fotogramétricas Basado en Evolución Individual

El posicionamiento de cámaras puede ser visto como un problema de diseño geométrico donde las variables de control son los parámetros de orientación de un conjunto finito de cámaras. Dicho problema es planteado en términos de optimización adoptando como criterio una combinación lineal de dos funciones que describen, respectivamente, la precisión de la medición y el desplazamiento del manipulador. En esta sección se discute la forma en que los distintos aspectos de implementación del enfoque de evolución individual fueron adoptados al problema de posicionamiento de cámaras.

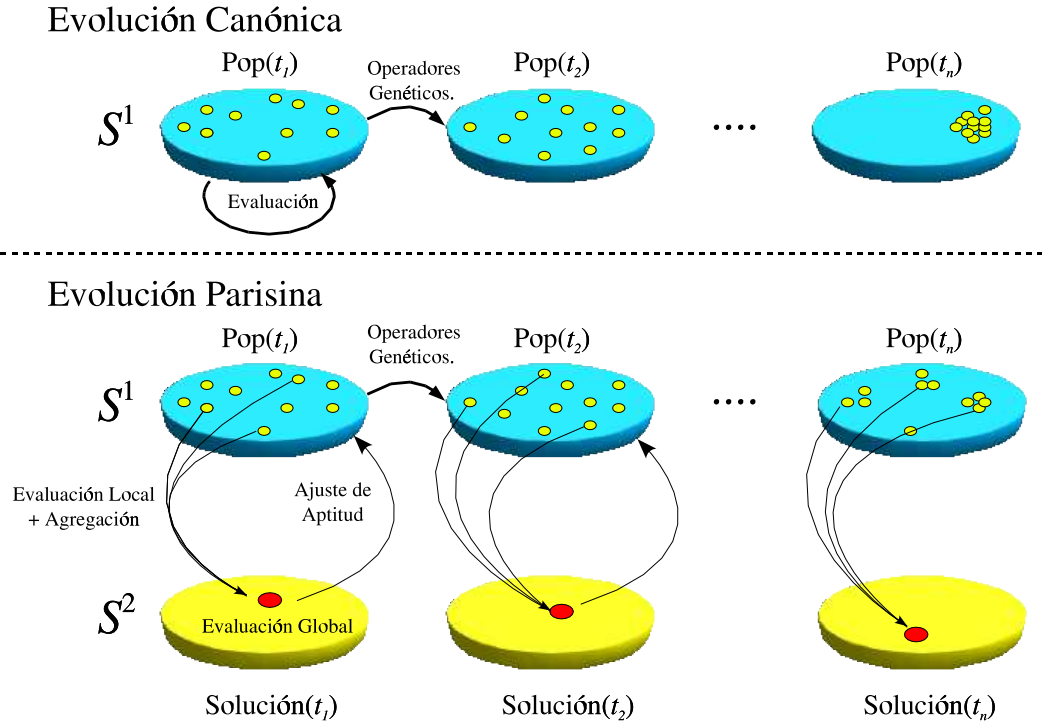


Figura 58: Descripción conceptual del enfoque de evolución individual. La interacción entre los distintos espacios de búsqueda se basa en ajustar los valores de aptitud de la población en función de la evaluación de aptitud global.

VI.4.1 Descomposición y Representación del Problema

Como se dijo anteriormente, el modelo de esfera de observación es adoptado para el posicionamiento de cámaras con el propósito de reducir la dimensionalidad del espacio de búsqueda. De esta forma, dado un radio fijo, la posición de una cámara se define por sus coordenadas polares $[\alpha_i, \beta_i]$. Una red de M cámaras está representada por un vector de valores reales

$$\Psi \in \mathbb{R}^{2M} \quad \text{donde} \quad \alpha_i = \Psi_{2i-1}, \beta_i = \Psi_{2i} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, M. \quad (63)$$

Nuestro problema de diseño permite su descomposición en elementos individuales dado que una red de cámaras está formada por un conjunto de elementos homogéneos. Sin

embargo, la elección respecto al nivel de granularidad de dicha descomposición es una decisión crucial. En este sentido, una red completa puede ser descompuesta en cámaras individuales o alternativamente en subredes. Se ha elegido la segunda opción debido a que es posible evaluar directamente la contribución de un individuo durante el proceso de triangulación óptica. Así pues, cada individuo en la población representa un conjunto de N cámaras, contenido en un vector de la forma

$$\psi^j \in \mathbb{R}^{2N} \quad \text{donde} \quad \alpha_i = \psi_{2i-1}^j, \beta_i = \psi_{2i}^j \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, N; \quad (64)$$

donde j se define como el índice de individuos en la población de subredes. Asimismo, una especificación completa de una red está dada por la agregación de J subredes

$$\Psi \in \mathbb{R}^{2M} = \bigcup_{j=1}^J \psi^j, \quad \text{donde} \quad M = J \times N \quad (65)$$

VI.4.2 Evaluación de Aptitud Local

La aptitud de una solución parcial es evaluada en términos de un criterio que combina la precisión de la reconstrucción con el desplazamiento del manipulador. El enfoque adoptado para la estimación de la incertidumbre de la reconstrucción de un punto tridimensional se basa en la obtención de mediciones redundantes. Tal metodología es aplicada generalmente al objeto completo considerando todas las imágenes disponibles. Dado que nuestra representación utiliza subredes de cámaras, es poco probable que un solo individuo observe completamente el conjunto $\mathbf{P}$ de puntos tridimensionales pertenecientes al objeto. En consecuencia, el objeto también es particionado en R regiones excluyentes o subconjuntos de puntos, de tal forma que $\mathbf{P} = \bigcup_{i=1}^R P_i$. Una región del objeto es considerada dentro de la región de visibilidad de una red si al menos dos cámaras la observan y satisfacen las restricciones de ángulo de incidencia. De esta forma, la región de visibilidad de una subred de cámaras ψ^j está limitada a un

subconjunto del objeto completo, lo cual expresamos como $\mathbf{V}(\psi^j) \subseteq \mathbf{P}$. Tales valores son calculados *a priori* y almacenados en una base de datos para ser consultados en línea durante el proceso de optimización. De esta forma definimos la restricción de visibilidad como una función Booleana

$$C_{vis}(\psi^j, P_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i \subset \mathbf{V}(\psi^j) \\ 0 & \text{de lo contrario .} \end{cases}$$

La evaluación de la aptitud local usa la idea de descomponer el problema en subredes las cuales brinden una mejor cobertura del objeto y al mismo tiempo brinden valores de precisión altos. Por lo tanto, la incertidumbre de cada uno de los subconjuntos P_i es evaluada para cada individuo ψ^j , descartando las regiones que nos son observadas por dicha subred. Para promover el surgimiento de redes que brinden mayor cobertura, el valor aptitud de un individuo es proporcional al número de regiones P_i observadas por la subred, lo cual definimos como $\#[\mathbf{V}(\psi^j)]$. De esta forma, nuestra función de aptitud local se define como

$$f_{loc}(\psi^j) = ws_1 \frac{\#[\mathbf{V}(\psi^j)]}{\max f_1(\psi^j, P_i)} + \frac{(1-w)s_2}{f_2(\psi^j)} \quad \forall P_i : C_{vis}(\psi^j, P_i) = 1, \quad (66)$$

donde s_1 y s_2 son los valores de escalamiento aplicados a cada función criterio mientras que el parámetro w controla el peso asignado a cada uno de los criterios. En dicha expresión, $f_1(\psi^j, P_i)$ representa la incertidumbre de la reconstrucción tridimensional para una región P_i , la cual es observada por una subred parametrizada por ψ^j . Note que $f_1(\psi^j, P_i) > 0$, $\forall P_i : C_{vis}(\psi^j, P_i) = 1$. En los casos en que un individuo no cubre ninguna región del objeto, el valor de aptitud asignado es $f_{loc}(\psi^j) = 0$.

VI.4.3 Evaluación de Aptitud Global

Una vez que la aptitud local ha sido evaluada, un proceso de agregación es requerido para obtener una solución a nuestro problema de diseño de redes fotogramétricas. Para

lograr esto, se lleva a cabo una selección de un conjunto de individuos de la población. De esta forma, en cada generación t una solución $\Psi(t)$ es obtenida para llevar a cabo la evaluación de aptitud global. Es posible definir una función la cual combine los valores de las funciones criterio f_1 y f_2 mediante la siguiente expresión:

$$f_{global}(\Psi(t)) = \frac{w s_1}{\max f_1(\Psi(t), P_i)} + \frac{(1-w) s_2}{f_2(\Psi(t))} \quad \forall P_i : C_{vis}(\Psi(t), P_i) = 1, \quad (67)$$

donde s_1 y s_2 son los valores de escalamiento aplicados a cada función criterio mientras que el parámetro w controla el peso asignado a cada uno de los criterios.

El valor de aptitud global describe la aptitud de la solución agregada obtenida durante la generación t . Nótese que en este caso también tenemos $f_1(\Psi(t), P_i) > 0$. Por otro lado, las redes agregadas que no brinden un cobertura del objeto completo son penalizadas mediante $f_{global}(\Psi) = 1$. De esta forma, el valor de aptitud global nos ofrece una medida cuantitativa del progreso del proceso evolutivo al nivel de agregación.

El objetivo del algoritmo evolutivo es promover el mejoramiento continuo de este valor a lo largo de generaciones sucesivas. Sin embargo, el propósito principal de llevar a cabo la evaluación global es el de poder reflejar en la población de soluciones parciales el desempeño del algoritmo en términos de las soluciones agregadas que son generadas. En particular, el resultado de esta evaluación debe reflejarse directamente sobre los individuos que componen dicha solución agregada. Al mismo tiempo, aquellos individuos que potencialmente puedan mejorar la solución agregada pero que no fueron seleccionados, también deben ser tomados en consideración en etapas posteriores del proceso evolutivo. En este sentido el proceso de redistribución de aptitud global juega un papel primordial dentro del enfoque de evolución individual.

VI.4.4 Redistribución de la Aptitud Global

Una solución válida al proceso de reconstrucción fotogramétrica es aquella que reconstruye de manera precisa el objeto en su totalidad. Bajo la evolución individual esta solución está formada por la agregación de múltiples individuos provenientes de una población en evolución. Por lo tanto, individuos que contribuyen a la obtención y mejoramiento de soluciones válidas deben ser favorecidos dentro del proceso de evolución. Lograr esto requiere considerar los aspectos de la optimización de nuestra función criterio así como las satisfacción de sus restricciones. En esta sección describiremos de que manera la evaluación de aptitud global es utilizada para abordar concurrentemente estos dos aspectos.

El enfoque adoptado aquí consiste en ajustar periódicamente los valores de aptitud local de los individuos en la población en base a los resultados de las evaluaciones de la aptitud global. Específicamente, el valor de aptitud de un individuo es incrementado o disminuido tomando en cuenta el valor de aptitud de la solución agregada, el valor de aptitud de los demás individuos y el potencial de ese individuo para mejorar la solución agregada. Esto se logra mediante la definición de dos funciones que ajustan el valor de la aptitud local: una para promover la optimización de la función de aptitud global y otra para promover la satisfacción de restricciones globales.

La optimización de la función de aptitud global será abordada primero. Para reflejar la calidad de una solución agregada $\Psi(t)$ sobre cada uno de los individuos que la componen, utilizamos la razón de mejoramiento en aptitud global obtenida en generaciones sucesivas. La magnitud del ajuste a la aptitud local de un individuo es proporcional a esta razón de la siguiente manera

$$g_1(\psi^j) = f_{loc}(\psi^j) \left[\frac{f_{global}(\Psi(t))}{f_{global}(\Psi(t-1))} - 1 \right] \quad \forall \psi^j \in \Psi(t). \quad (68)$$

La satisfacción de restricciones globales también es manejada mediante ajustes a la aptitud local. Es muy probable que cada una de las subredes brinde tan solo una cobertura parcial del objeto. Asimismo, también es posible que una agregación de individuos no obtenga una cobertura total. En este sentido, cuando una solución agregada $\Psi(t)$ no cubre alguna región P_i del objeto (e.g. $C_{vis}(\Psi(t), P_i) = 0$) sería deseable favorecer aquellos individuos en la población de soluciones parciales que si cubren esa región del objeto. Esto es con el propósito de favorecer su eventual inclusión a la solución agregada. El ajuste a la aptitud local de estos individuos es proporcional a la diferencia en su aptitud respecto al mejor individuo en la población. De esta forma tenemos

$$g_2(\psi^j) = f_{loc}(\psi^{best}) - f_{loc}(\psi^j) \quad \forall \psi^j : \mathbf{V}(\psi^j) \cap \overline{\mathbf{V}(\Psi(t))} \neq \emptyset. \quad (69)$$

Note que dicho valor solo es calculado para aquellos individuos que cubren una región del objeto que no es sensada por la solución agregada obtenida en esa generación. Es decir, aquellos individuos que satisfacen restricciones globales no satisfechas por la solución agregada. Una vez que ambas funciones de ajuste han sido calculadas, el valor de aptitud global es “redistribuido” al población de la siguiente manera:

$$f_{loc}(\psi^j) = \begin{cases} f_{loc}(\psi^j) + \lambda_1 g_1(\psi^j) & \text{si } \psi^j \in \Psi(t) \\ f_{loc}(\psi^j) + \lambda_2 g_2(\psi^j) & \text{si } \mathbf{V}(\psi^j) \cap \overline{\mathbf{V}(\Psi(t))} \neq \emptyset \\ f_{loc}(\psi^j) & \text{de lo contrario .} \end{cases}$$

Aquí, λ_1 y λ_2 son parámetros definidos por el usuario que reflejan la importancia relativa asignada a los ajustes de aptitud considerados en la redistribución de la aptitud global.

VI.4.5 Preservación de la Diversidad en la Población

Mantener un conjunto diverso de soluciones parciales es un requisito para nuestra implementación del enfoque de evolución individual. Esto es necesario debido a que la búsqueda de una configuración óptima es llevada a cabo sobre un espacio multimodal.

En este trabajo se adoptó el esquema de “compartir aptitud” (Golberg, 1987). Bajo dicho esquema el valor de aptitud local de un individuo es ajustado mediante

$$f'_{loc}(\psi_j) = \frac{f_{loc}(\psi_j)}{\sum_{i=1}^K sh(\psi_i, \psi_j)}, \text{ donde } sh(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 1 - \frac{\|\psi_i, \psi_j\|}{\sigma_{sh}} & \text{si } \|\psi_i, \psi_j\| < \sigma_{sh} \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Dado que nuestros individuos representan conjuntos de cámaras espacialmente distribuidas, la métrica seleccionada fue la distancia de Hausdorf. Esta métrica se define para nuestro problema por

$$\|\psi_i, \psi_j\| = h(\psi_i, \psi_j) = \max_{a \in \psi_i} \{ \min_{b \in \psi_j} \{ d(a, b) \} \},$$

donde a, b representan las posiciones tridimensionales de cada cámara en una red dada, mientras que $d(a, b)$ es la distancia Euclideana entre dos puntos. Geométricamente, esta métrica expresa la distancia máxima entre un conjunto de puntos al punto más cercano en el otro conjunto. Basándonos en dicha interpretación geométrica, es posible definir empíricamente un radio de acción σ_{sh} para “compartir aptitud”. Un aspecto relacionado es el operador de selección utilizado por el algoritmo evolutivo. Se ha reportado que el operador de selección basado en torneos no es apropiado para enfoques basados en compartir la aptitud debido a su alta presión de selección (Oei *et al.*, 1999). Por lo tanto, se utiliza el operador de selección de residuo estocástico, el cual es un operador de selección proporcional al valor de aptitud. Esta elección se justifica también por el hecho que se utiliza un ajuste proporcional de aptitud local para llevar a cabo la distribución de aptitud local (vea sección anterior).

VI.4.6 Agregación de Individuos

En cada generación un conjunto de individuos pertenecientes a la población de soluciones parciales es seleccionado con el propósito de formar una solución agregada. La

manera en que la selección de dichos individuos es llevada a cabo determina directamente la calidad de las soluciones obtenidas por nuestro algoritmo. Tal proceso de selección puede conceptualizarse como un muestreo de la población. Un enfoque de búsqueda exhaustiva, el cual evalúa todas las posibles combinaciones de individuos, es descartado debido a su alto costo computacional. Otra alternativa podría ser el desarrollar un procedimiento mediante el cual una solución agregada es incrementalmente formada a partir de la población. Tal opción es semejante a incorporar una búsqueda local en el proceso evolutivo y es necesariamente dependiente de la aplicación. Un enfoque más general es el de utilizar los valores de aptitud de los individuos para influenciar el proceso de agregación. En tal caso tenemos la opción de procedimientos determinísticos (i.e. elitismo) o estocásticos (i.e. ruleta, torneo). La decisión sobre tales alternativas debe tomar en cuenta las características del mecanismo de preservación de la diversidad en la población. El enfoque de compartir la aptitud intenta mantener distintos cúmulos de individuos alrededor de cada uno de los valores máximos (o mínimos según sea el caso) de la función de aptitud. La cantidad de individuos en cada cúmulo debe ser proporcional a la magnitud del máximo. Por lo tanto, la selección de los mejores J individuos en la población muy probablemente producirá individuos muy semejantes (pertenecientes al mismo cúmulo), aún para una población bien distribuida. Bajo tal escenario una segregación de la población en términos de los cúmulos formados permitiría seleccionar un individuo de cada uno de los máximos locales de la función de aptitud (Collet *et al*, 2000). Para evitar llevar a cabo tales cálculos, se ha implementado el siguiente procedimiento sencillo.

```
for i=1 to J
  Selecciona el Mejor Individuo en la Poblacion
  Elimina Individuos dentro del Radio de Accion
```

Naturalmente, consideraciones especiales tienen que tomarse para el caso en el que la población no brinde la suficiente diversidad para seleccionar J individuos distintos.

Sin embargo, el procedimiento adoptado aprovecha el hecho que las distancias entre individuos ya fueron anteriormente calculadas para llevar a cabo el proceso de compartir la aptitud. Adicionalmente, es posible integrar heurísticas que garanticen la permanencia de los individuos seleccionados a lo largo de varias generaciones. Esto correspondería a la selección elitista llevada a cabo en distintos algoritmos evolutivos.

VI.5 Resultados Experimentales

Nuestra experimentación considera el diseño de una red fotogramétrica para medición de un objeto tridimensional complejo. El objetivo es determinar una configuración de puntos de observación que brinden resultados óptimos en términos de la precisión de la reconstrucción. Inicialmente, se considerará el diseño de una red de $M = 9$ estaciones de sensado, considerando que dicha red será descompuesta en subredes de tamaño $N = 3$. De esta forma, cada uno de los individuos en nuestra población consiste de un vector $\psi \in \mathbb{R}^6$. Por lo tanto un total de $J = 3$ subredes tendrán que ser agregadas para poder formar una solución completa a nuestro problema. El objeto tridimensional bajo observación es particionado en $R = 6$ regiones, ver la Figura ???. Finalmente, los parámetros definidos por el usuario para redistribución de aptitud global fueron $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$. Para todos los experimentos, el operador de cruzamiento SBX fue utilizado con una probabilidad $P_c = 0.95$ junto con el operador de mutación polinomial sujeto a una probabilidad $P_m = 0.05$. El radio de acción del operador de preservación de diversidad fue $\sigma_{sh} = 0.75$

VI.5.1 Desempeño del Algoritmo

A la par de nuestra metodología, hemos optimizado la función de aptitud local mediante un algoritmo evolutivo típico; e.g. en el que un individuo codifica una solución completa (Olague & Dunn, 2006). Esto fue hecho con el propósito de tener un punto de referencia

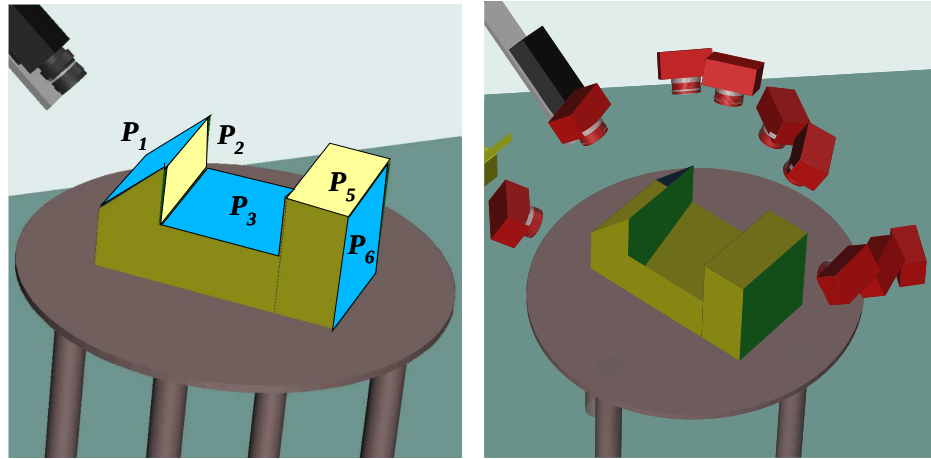


Figura 59: Objeto tridimensional bajo observación. El objeto cóncavo es particionado en regiones excluyentes para facilitar la evaluación de subredes de tamaño reducido. Una red fotogramétrica formada por 9 cámaras es mostrada a la derecha.

para evaluar el desempeño de nuestro algoritmo. Ambos algoritmos evolutivos fueron ejecutados por 100 generaciones utilizando 30 individuos.

La Figura ?? muestra las métricas de desempeño de la población (aptitudes máxima, media, mínima) para un algoritmo canónico en la izquierda y para nuestro enfoque de evolución individual a la derecha. Aun cuando estas métricas son descriptivas de la dinámica de nuestra población, la relevancia radica en la métrica de *aptitud de la solución agregada*. En este sentido, la metodología propuesta supera ligeramente a la metodología canónica en términos de calidad de la solución. Sin embargo, la importancia de estos resultados radica en el costo computacional involucrado en la evaluación de la aptitud. Para el escenario en consideración la evaluación de una red de 9 cámaras es 15 veces más costosa que la evaluación de una red de 3 cámaras. Consecuentemente, debido a la descomposición del problema, el tiempo de ejecución se redujo 10 veces. Evidentemente, se ha obtenido un beneficio considerable en términos de desempeño.

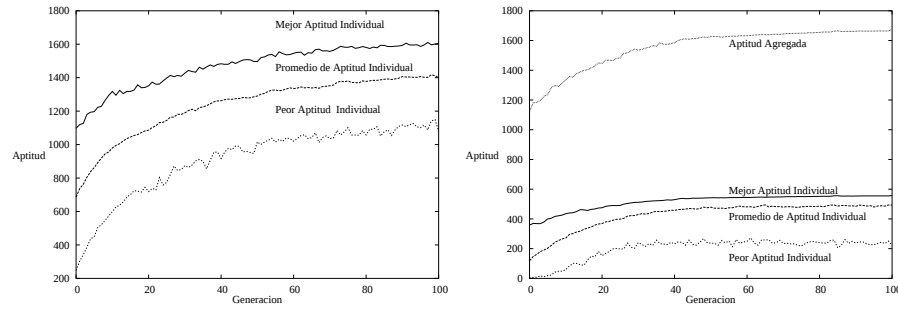


Figura 60: Comparación contra una técnica evolutiva canónica. En la izquierda, la evolución de la población de un algoritmo evolutivo canónico. A la derecha, valores de aptitud más altos son constantemente obtenidos por la metodología propuesta. Los valores ilustrados reflejan el promedio de 20 ejecuciones con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$.

VI.5.2 Geometría de las Configuraciones de Sensado

La geometría de las mejores configuraciones encontradas mediante la metodología propuesta son comparables con las configuraciones reportadas en (Olague, 2002). La figura ?? muestra las similitudes entre las dos mejores configuraciones diseñadas bajo el enfoque de evolución individual. Cada uno de estas configuraciones está compuesta por 3 subredes que a su vez están integradas por 3 cámaras cada una. La pertenencia de cada cámara a un subred se ilustra mediante la coloración del sensor. A su vez, cada una de estas subredes pertenece a un individuo de la población evolucionada. Note que en ambas configuraciones mostradas en dicha figura, algunas de estas cámaras presentan colores mixtos, indicando el posicionamiento de múltiples cámaras en la misma posición. Tales resultados corresponden al diseño de segundo orden dentro del contexto del diseño de redes fotogramétricas. Este aspecto concuerda con lo reportado por Olague & Mohr (2002). El enfoque de evolución individual es capaz de diseñar configuraciones geométricas agregadas semejantes a partir de diferentes combinaciones de subredes. Es decir, una solución agregada puede ser obtenida a partir de distintas dinámicas poblacionales, donde la formación de nichos en el espacio de búsqueda

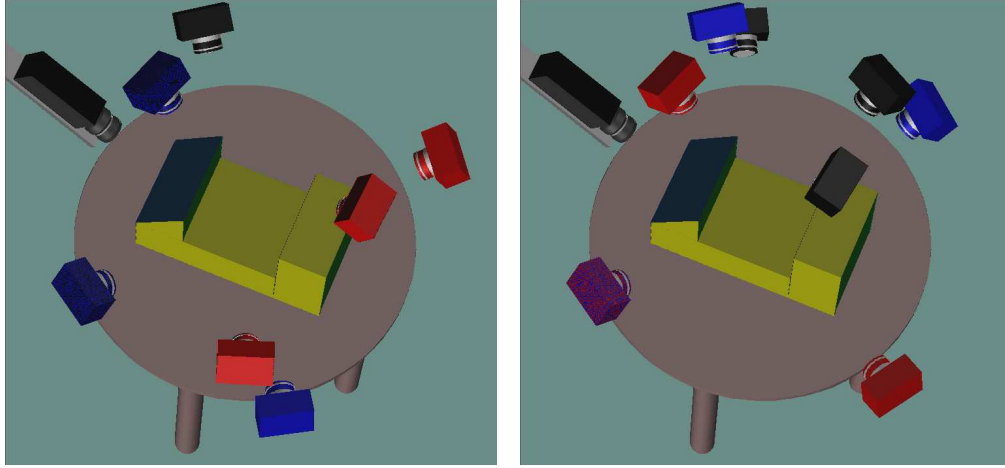


Figura 61: Diferentes geometrías de sensado obtenidas por nuestra metodología. La pertenencia a una subred se ilustra mediante el uso de colores en cada cámara.

puede variar considerablemente de una instancia del algoritmo al otro. En los ejemplos de la Figura ??, a pesar de la similitud entre la geometría de ambas configuraciones agregadas, existe una diferencia en términos del valor aptitud global del 4.2%. Tal discrepancia ilustra la naturaleza no lineal de nuestro espacio de búsqueda.

VI.5.3 Determinación de Parámetros

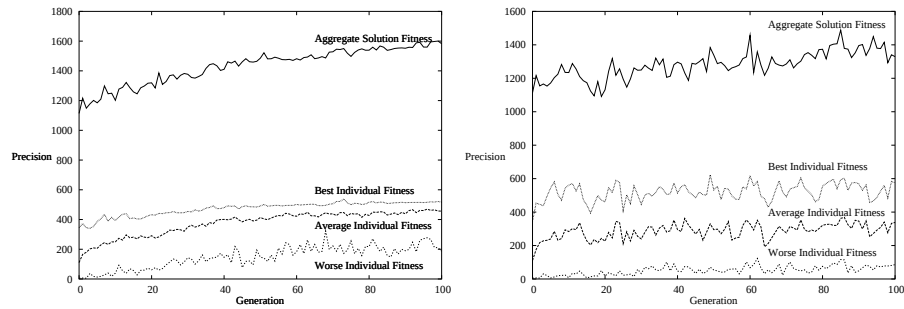
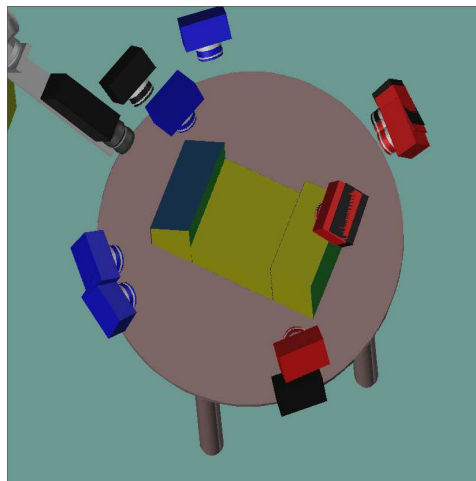


Figura 62: Dependencia sobre los parámetros λ_1, λ_2 . La gráfica de la izquierda corresponde a una ejecución con los valores $[\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.2]$ y muestra un desempeño ligeramente deteriorado. La gráfica de la derecha representa una ejecución con valores $[\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.5]$, la cual ofrece un comportamiento casi aleatorio.

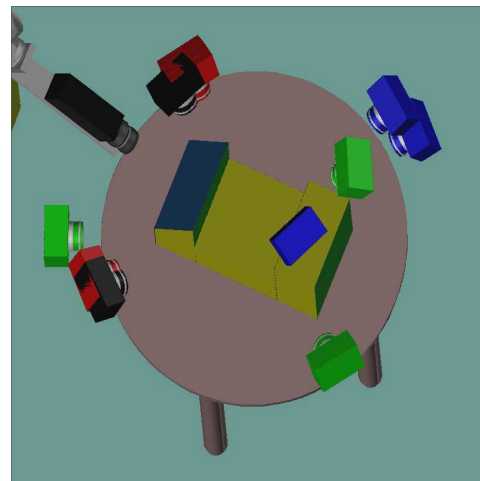
La determinación de los valores de peso λ_1, λ_2 repercute directamente en la magnitud de los ajustes al valor de aptitud local que se efectúan durante el proceso de redistribución de la aptitud global. Se llevaron a cabo múltiples experimentos variando la magnitud y la proporción entre estos parámetros, con el propósito de ejemplificar la dependencia de nuestro algoritmo sobre estos parámetros. En términos generales, el algoritmo presenta un comportamiento estable para valores semejantes entre sí menores de 1.0. Asimismo, el desempeño se deteriora al aumentar la magnitud y la diferencia entre estos valores. La gráfica a la derecha de la Figura ?? muestra el escenario donde la satisfacción de restricciones predomina sobre la optimización de la función. Esto ocasiona que el valor de aptitud de las soluciones agregadas sea reducido por subredes débiles que han sido inapropiadamente recompensadas durante el proceso de redistribución global.

Por otro lado, el nivel de granularidad de la descomposición del problema también juega un papel determinante en el desempeño del sistema. Esto se refleja tanto en la calidad de las soluciones obtenidas como en la eficiencia computacional del método de optimización. Para ilustrar este aspecto consideramos el caso de una red de 12 cámaras. Asimismo, experimentos con un nivel de descomposición de 2, 3, 4 y 6 cámaras fueron realizados. Tales resultados fueron comparados contra una instancia del algoritmo evolutivo canónico. Para todos los experimentos se utilizó una población de 50 individuos mientras que los parámetros de peso para la redistribución de aptitud global fueron $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.0$. Los resultados de desempeño después de 20 ejecuciones son presentados en la Tabla ?. Los mejores resultados en términos del valor de aptitud fueron obtenidos por el algoritmo canónico. A pesar de esto, las ventajas de aplicar el enfoque de evolución individual son evidentes al considerar el costo computacional requerido para llegar a estas soluciones. La partición del problema en subredes de tamaño reducido ofrece resultados comparables en términos de calidad de la solución.

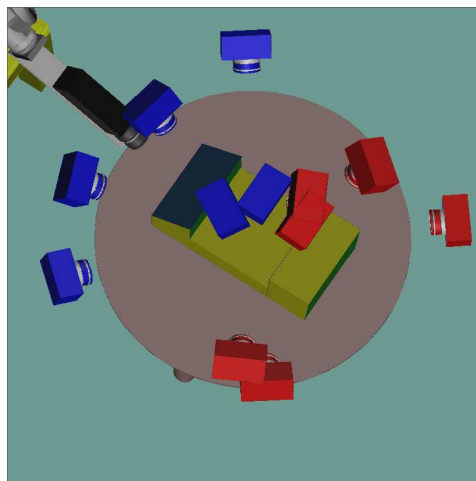
Sin embargo, para el caso de subredes de menor tamaño, la reducción del tiempo requerido para llegar a la solución llega a ser de hasta 30 veces menor. La configuración geométrica de las configuraciones obtenidas se presenta en la Figura ???. Nuevamente, un beneficio considerable en términos de desempeño es obtenido.



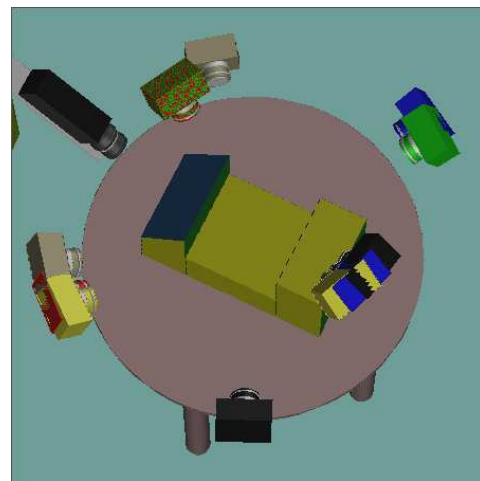
3 Subredes de 4 Cámaras



4 Subredes de 3 Cámaras



2 Subredes de 6 Cámaras



6 Subredes de 2 Cámaras

Figura 63: Configuraciones de 12 cámaras obtenidas con mediante distintos niveles de granularidad.

Tamaño de subred es	Mejor Aptitud	Ahorro Computacional
2	1666.43	29.72
3	1630.21	21.41
4	1310.84	11.48
6	1758.68	5.03
12	1702.05	1.0

Tabla V: Resultados después de 20 ejecuciones del algoritmo para distintos niveles de granularidad.

VI.6 Discusión

El enfoque de evolución individual ofrece una manera eficiente de abordar el problema de diseño de redes fotogramétricas. Mediante una descomposición adecuada del problema es posible obtener soluciones de alta calidad incurriendo en un costo computacional considerablemente reducido. Estos resultados permiten la integración de un enfoque fotogramétrico de compensación de haces al proceso de diseño de redes fotogramétricas. Sin embargo, tal integración requiere tomar en cuenta el problema de diseño de primer orden para redes fotogramétricas debido a la necesidad de un tener sistema coordinado común durante el proceso de compensación de haces.

En este capítulo se ha desarrollado una técnica eficiente de optimización basada en una interpretación original del proceso de búsqueda evolutiva. Particularmente, una nueva instancia del enfoque de evolución individual a sido presentada junto con los distintos aspectos involucrados en su desarrollo. El enfoque propuesto incorpora principios evolutivos canónicos a la tarea de evolucionar una solución en base a la evolución de sus componentes. Si bien resultados experimentales prometedores fueron obtenidos, queda aun pendiente desarrollar los principios teóricos que describan y expliquen el comportamiento del algoritmo.

Capítulo VII

Discusión y Perspectivas

VII.1 Aportaciones de la Investigación

Este trabajo de tesis abordó, mediante un enfoque de optimización multiobjetivo, el problema de planificación del posicionamiento de cámaras para obtener mediciones tridimensionales de alta precisión. La planificación incorporó criterios fotogramétricos de medición aplicando técnicas evolutivas multiobjetivo con el propósito de estudiar la interacción entre distintos objetivos involucrados en la operación de un sistema de inspección automatizada. A partir del desarrollo de distintas técnicas de optimización, así como el análisis de los resultados obtenidos, es posible presentar las siguientes conclusiones

- **Se ha presentado por primera vez un estudio de la interacción entre diferentes objetivos involucrados en la operación de un sistema de inspección automatizada dentro del contexto de la optimización multiobjetivo.** Los resultados experimentales soportan la hipótesis inicial del conflicto entre los objetivos considerados. Particularmente, se han ejemplificado la interacción entre la precisión y el costo operacional de llevar a cabo el proyecto fotogramétrico, en términos de una aproximación al conjunto de soluciones óptimas Pareto. Los resultados muestran que la relación no lineal entre los objetivos, junto con las características del objeto en observación, da lugar a encontrar frentes Pareto con diferente geometría. Incluso, se presentan instancias donde se obtienen frentes Pareto no convexos. Asimismo, la exploración del espacio de funciones de nuestro

problema multiobjetivo describe el problema combinatorio inherente al diseño de redes fotogramétricas, donde múltiples configuraciones de observación ofrecen un nivel de precisión equivalente. Tales soluciones equivalentes corresponden a soluciones débilmente dominadas en el contexto de la optimización multiobjetivo. De esta forma, el estudio del diseño de redes fotogramétricas dentro del contexto de la optimización multiobjetivo enriquece el entendimiento del problema.

- **Se desarrolló una nueva técnica de optimización multiobjetivo basada en cómputo evolutivo.** La propuesta consiste en conjugar los conceptos de búsqueda dirigida multiobjetivo con las técnicas evolutivas de optimización. Bajo este principio se desarrolló un nuevo mecanismo de asignación de rango poblacional, el cual utiliza la parametrización NBI (Das, 1998) para explorar uniformemente la frontera del espacio de funciones. Las ventajas de este nuevo mecanismo radican en la eliminación de los procesos de comparación de dominancia entre soluciones y el de penalización de soluciones aglomeradas. La efectividad de esta técnica fue comprobada por la comparación de sus resultados con aquellos obtenidos mediante técnicas del estado del arte en cómputo evolutivo.
- **Se desarrolló una nueva técnica de coevolución para resolver el problema de posicionamiento de cámaras.** La *evolución individual* es un proceso coevolutivo basado en una sola población donde cada partición del problema es asignada un valor de evaluación parcial de manera independiente. Los principios de *evolución individual*, fueron utilizados por primera vez dentro del contexto de los algoritmos genéticos. El enfoque propuesto incorpora principios evolutivos canónicos aplicados a la tarea de alcanzar una solución a un problema complejo a partir de la evolución de sus componentes. Mediante una descomposición adecuada del problema se obtienen soluciones de alta calidad incurriendo en un

costo computacional considerablemente reducido. De esta forma, el enfoque de evolución individual ofrece una manera eficiente de abordar el problema de diseño de redes fotogramétricas.

- **Se integró un sistema experimental de medición mediante un manipulador en configuración cámara en mano.** Tal sistema integró técnicas fotogramétricas de compensación por haces con un modelo de visión por computadora. El sistema utiliza una infraestructura robótica consistente de un robot manipulador en una configuración Cámara-Mano y realiza un ajuste fotogramétrico riguroso basado en un método de compensación por haces.

VII.2 Alcances y Limitaciones

Es importante tener en consideración el alcance del trabajo con el propósito de identificar futuras oportunidades de desarrollo. En este sentido se mencionan los siguientes aspectos

- **Requerimiento de información geométrica previa sobre la escena y el objeto a medir.** El escenario de medición considerado en este trabajo es el de un ambiente donde el objeto está localizado dentro del campo de visión del manipulador y se conoce la posición relativa del objeto respecto al manipulador. De esta forma, no es necesario un proceso de exploración e identificación del objeto. Adicionalmente, el método de compensación por haces utilizado requiere el conocimiento previo de ciertos puntos de interés sobre el objeto. Aún cuando este tipo de requerimientos nos son excesivos para tareas fotogramétricas, es razonable esperar que estos aspectos relativos al planteamiento del problema sean abordados en trabajos posteriores.

- **Bajo nivel de automatización en tareas de detección y etiquetado de puntos de interés sobre el objeto.** Actualmente el sistema de medición tridimensional requiere de un moderado nivel de intervención del usuario. En particular, se requiere la selección y etiquetado manual de los puntos de interés sobre el objeto. Esto es una dificultad para proyectos fotogramétricos de una gran cantidad de imágenes, en los cuales aumenta tanto el tiempo de operación manual como la posibilidad de un error humano. Sin embargo, es razonable considerar este aspecto tan solo como una limitante técnica que será resuelta posteriormente.

VII.3 Trabajo Futuro

El estudio del problema de posicionamiento de cámaras bajo el enfoque multiobjetivo, así como el mejoramiento y ampliación de las técnicas de optimización desarrolladas en este trabajo, presenta diversas oportunidades de investigación. Entre ellas figuran las siguientes:

- **Estudiar el problema de toma de decisiones para el diseño multiobjetivo de redes fotogramétricas.** En este trabajo se estudió la interacción entre los objetivos en términos del conjunto de soluciones óptimas Pareto. A partir de estas soluciones un usuario debe elegir cual es la solución deseada. Las técnicas de cómputo evolutivo ofrecen la posibilidad de automatizar este proceso de forma parcial o completa. Una posible alternativa es la incorporación progresiva de preferencias mediante un proceso de evolución interactiva. Otra posibilidad es utilizar cómputo evolutivo para sintetizar una función de utilidad correspondiente a las preferencias del usuario.
- **Estudiar distintos objetivos.** En este trabajo se presentó un enfoque general para la planificación de tareas fotogramétricas, el cual puede ser extendido a otras

tareas de percepción artificial. Esa generalidad se debe a la relativa independencia de las técnicas evolutivas sobre las características de las funciones a optimizar. Algunos ejemplos podrían incluir los modelos dinámicos y cinemáticos del manipulador, así como considerar distintas tareas de visión como el reconocimiento, seguimiento, reconstrucción densa, entre otros.

- **Considerar distintos escenarios en la planeación.** Actualmente la planeación se hace a partir del conocimiento de la estructura geométrica del objeto el cual se encuentra estático dentro de un entorno también conocido. Es posible considerar el proceso de planeación para resolver el problema de *la siguiente mejor vista*, donde la estructura del objeto sería descubierta mediante un proceso de exploración del entorno. Asimismo, la planeación podría considerar un distinto tipo de infraestructura robótica (i.e. un robot móvil), un entorno dinámico y adoptar modelos de observación distintos al modelo de esfera.
- **Investigar la aplicación de los conceptos de *evolución individual* en el contexto de la optimización multiobjetivo** La técnica coevolutiva presentada en este trabajo persigue la obtención de una sola solución. El desarrollo de técnicas basadas en la *evolución individual* que sean capaces de obtener una aproximación al frente Pareto ofrecerían un mecanismo computacional eficiente para resolver problemas de optimización multiobjetivo.

Bibliografía del Autor

Publicaciones en Revistas Internacionales Arbitradas

- Dunn E., Olague G. (2001) *Cómputo Evolutivo Aplicado a la Planificación de Tareas de Visión*. Revista DYNA, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. DYNA 133, Junio de 2001.
- Dunn E., Olague G. (2003) *Evolutionary Computation for Sensor Planning: The Task Distribution Plan*. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Special Issue on Genetic and Evolutionary Computation in Signal Processing and Image Analysis. 2003:8, pp. 748-756.
- Dunn E., Olague G., and Lutton, E. (2005) *Parisian Camera Placement for Vision Metrology*. Pattern Recognition Letters 27(2006) 1209-1219, Elsevier Science.
- Olague, G. and Dunn, E. (2006) *Development of a Practical Photogrammetric Network Design using Evolutionary Computing*. Por publicarse en The Photogrammetric Record. Blackwell Publishing Ltd.

Publicaciones en Congresos Arbitrados

- Dunn, E., Olague, G. (2000) *Multiple Robot Task Distribution for an Active Vision System*. In Advances on Artificial Perception and Robotics 2000, León Guanajuato, México.
- Dunn E., Olague G. (2003) *Photogrammetric Measurements Using Eye-On-Hand Configuration*. Proceedings of the ASPRS 2003 Annual Conference.
- Olague, G. and Dunn, E. (2001) *Multiple Robot Task Distribution: Towards an Autonomous Photogrammetric System*. Proceedings of the 2001 IEEE Systems, Man and Cybernetics Conference.

- Olague, G., Hernández, B. and Dunn, E. (2003) Accurate L-corner Measurement using USEF Functions and Evolutionary Algorithms. 5th European Workshop on Evolutionary Computation in Image Analysis and Signal Processing. Lecture Notes in Computer Science 2611. Springer-Verlag. EvoIASP2003.
- Olague, G., Hernández, B. and Dunn, E. (2003) Hybrid Evolutionary Ridge Regression Approach for High-Accurate Corner Extraction. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Madison, Wisconsin, USA, June 16-23, 2003.
- Dunn, E., Olague, G., Lutton, E., and Schoenauer, M. (2004) Pareto Optimal Sensing Strategies for an Active Vision System. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Vol. 1, pp. 457-463, Portland, Oregon, USA, June 19-23, 2004.
- Dunn, E., Olague, G. (2004) Multi-objective Sensor Planning for Efficient and Accurate Object Reconstruction. 6 th European Workshop on Evolutionary Computation in Image Analysis and Signal Processing. Lecture Notes in Computer Science 3005. Springer-Verlag. EvoIASP2004.
- Dunn, E., Olague, G., and Lutton, E. Automated Photogrammetric Network Design using the Parisian Approach. 7 th European Workshop on Evolutionary Computation in Image Analysis and Signal Processing. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag. EvoIASP2005. Nominado para “Best Paper Award”.
- Dunn, E., Olague, G. Pareto Optimal Camera Placement for Automated Visual Inspection. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. August 2-6, Alberta Canada. IROS 2005.

Bibliografía

- Al-chami O. 1994. Contribution à l'intégration robotique/vision en manipulation automatisée: modélisation de la tâche, placement d'une caméra mobile et localisation fine d'object. Tesis de Doctorado, Institut National Polytechnique de Grenoble. 136 Páginas.
- Allen W. 1988 Análisis Numérico. Prentice Hall, México. Primera edición. 534 Páginas.
- Aloimonos J. Y., Shulman D. 1989. Integration of visual models. Academic Press Inc. San Diego, CA. Primera edición. 322 Páginas.
- Aloimonos J. Y. 1993. Introduction: Active Vision Revisited in Y. Aloimonos (Ed.), Active Perception, C capítulo 0, Páginas 1-18. Lawrence Erlbaum Associate Publishers.
- Abrahms S, Allen P.K., Tarabanis K.A. 1993. Dynamic sensor planning. IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2-6 Mayo, 1993, Atlanta, GA, USA. Vol. 2. Páginas 605-610.
- Atkinson K.B. 1996. Close-range photogrammetry and machine vision. Whittles Publishing, Scotland, UK. 371 Páginas.
- Bajcsy R. 1985. Passive Perception vs. active perception. Proc. IEEE Workshop on Computer Vision. Bellait MI. October 1985. pp 55-59.
- Baker J. E. 1985. Adaptive selection methods for genetic algorithms. Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms, Pittsburgh, PA, USA, July 1985. Páginas 101-111.
- Baker J. E. 1987. Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm. Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms, 14-21.

- Benayoun R., Montgolfier J., Tergny J., Laritchev O. 1971. Linear programming with multiple objective functions: Step method (stem). *Mathematical Programming*. 1(1):366-375p.
- Beyer H. A. 1992. Geometric and radiometric analysis of a CCD-camera based photogrammetric close-range system. Tesis Doctoral. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich. Mitteilungen Nr. 51. 186 páginas.
- Bleuler S., Laumanns M., Thiele L., Zitzler E. 2003. PISA — A Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms. *Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2003)*. Páginas 494-508, En: Fonseca C. M., Fleming P. J., Zitzler E., Deb K., Thiele L. *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Springer.
- Brown D. C. 1958. A solution to the general problem of multiple station analytical stereo triangulation. RCA Technical Report No. 43 (AFMTC TR 58-8), RCA Missile Test Project, Patrick Air Force Base, Florida.
- Brown, D. C., 1980. Application of close-range photogrammetry to measurements of structures in orbit. GSI Technical Report 80-012. Geodetic Services, Inc., Florida. 131 páginas.
- Cantor G. 1895. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (en alemán). *Mathematische Annalen*, 46:481-512p.
- Charnes A., Cooper W. 1977. Goal Programming and Multiple Objective Optimization, *J. Oper. Res. Soc.*, 1:39-54p.
- Chen S. Y., Li Y. F. 2004. Automatic Sensor Placement for Model-Based Robot Vision. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 34(1):393-408p.
- Chen S.Y., Li, Y.F. 2005. Vision sensor planning for 3-D model acquisition. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*. 35(5):894-904p.

- Collet P., Lutton E., Raynal F., Schoenauer M. 1999. Individual GP: an alternative viewpoint for the resolution of complex problems, En: Banxhaf, E., Daida, J., Eiben, A.E., Garzon, M.H., Honovar, V., Jakiela, M. Smith, R.E. (Eds.), Genetic and Evolutionary Computation Conf. GECCO99. Páginas 974-981. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA.
- Collet P., Lutton E., Raynal F., Schoenauer M. 2000. Polar IFS + Parisian Genetic Programming = Efficient IFS Inverse Problem Solving, Genetic Programming and Evolvable Machines Journal, 1(4):339-361p.
- Coello C., Veldhuizen D., Lamont B. 2002. Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems. Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 233 Spring Street. NewYork, N.Y. 10013. 576 Páginas.
- Das I., Dennis J.E. 1997. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems. Structural Optimization 14:63-69. Springer-Verlag.
- Das I., Dennis J.E. 1998. Normal-Boundary Intersection: A new method for generating Pareto-optimal points in multieriteria optimization problems. SIAM J. Optimiz. 8(3):631-657p.
- Das I., Dennis J.E. 1999. An improved technique for choosing parameters for Pareto surface generation using normal-boundary intersection. Proceedings of the Third World Congress on Structutal and Multidisciplinary Optimization.
- Dasgupta D., McGregor R. 1993. sGA: A Structured Genetic Algorithm. Technical Report No. IKBS-11-93, Department of Computer Science University of Strathclyde. 38 páginas.
- Deb K. 2001. Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms John Wiley & Sons, Ltd. Baffins Lane, Chichester, West Sussex, PO19 1UD, England. 497 páginas.

- Deb K., Agrawal S., Pratab A., Meyarivan T. 2000. A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Algorithm for Multi Objective Optimization: NSGA-II. Proceedings of PPSN VI. Páginas 849-858. Paris, France. Springer. Lecture Notes in Computer Science No. 1917.
- Deb K, Agrawal S., Pratap A., Meyarivan T. 2002. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 6(2):182-197p.
- Deb K., Thiele L., Laumanns M., Zitzler E. 2005. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization. En: Abraham A., Jain L., Goldberg R. Eds., Evolutionary Multiobjective Optimization, páginas 105-145. London: Springer-Verlag.
- Dunn E., Olague G. 2003. Photogrammetric Measurements Using Eye-On-Hand Configuration. Proceedings of the ASPRS 2003 Annual Conference.
- Dunn E., Olague G. 2003. Evolutionary Computation for Sensor Planning: The Task Distribution Plan. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Special Issue on Genetic and Evolutionary Computation in Signal Processing and Image Analysis. 2003:8, Páginas 748-756p.
- Dunn E., Olague G. 2004. Multi-objective Sensor Planning for Efficient and Accurate Object Reconstruction, 6th European Workshop on Evolutionary Computation in Image Analysis and Signal Processing. Lecture Notes in Computer Science 3005. Páginas 312-321. Springer-Verlag. EvoIASP2004.
- Dunn E., Olague G., Lutton E., Schoenauer M. 2004. Pareto Optimal Sensing Strategies for an Active Vision System. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Portland, Oregon, USA, June 19-23. Vol. 1, Páginas 457-463.
- Dunn E., Olague G., Lutton E. 2005. Automated Photogrammetric Network Design Using the Parisian Approach. 7 th European Workshop on Evolutionary Computation in Image Analysis and Signal Processing. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3449, Páginas 356 - 365.

- Dunn E., Olague G., Lutton E. 2005. Parisian Camera Placement for Vision Metrology. *Pattern Recognition Letters* 27:1209-1219p. Elsevier Science.
- Ehrgott M., Gandibleux X.(Eds.) 2002. Multiple Criteria Optimization : State of the Art Annotated Bibliographic Surveys. Springer. 520 páginas.
- Ehrgott M. 2005. Multicriteria Optimization. Berlin: Springer. 323 Páginas.
- Esehnauer H., Koski J., Osyczka A. 1990. Multicriteria design optimization. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Faugeras O. D., Toscani G. 1987. Camera calibration for 3D computer vision. International Workshop on Machine Vision and Machine Intelligence, Tokyo, Japan. Páginas 240-247.
- Faugeras O. 1993. Three-dimensional computer vision: a geometric viewpoint. The MIT Pres, Cambridge, Massachusetts. Primera edición. 663 Páginas.
- Faugeras O. 1995. Stratification of 3-D vision: projective, affine, and metric representations. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(3):465-484p.
- Fonesca C. M., Fleming P.J. 1996. On the performance assessment and comparison of stochastic multiobjective optimizers. En *Proceedings of Parallel Problem Solving from Nature IV (PPSN-IV)*, páginas 584-593.
- Förstner 1995. A metric for comparing symmetric positive definite matrices. No publicado.
- Fraser C. S. 1984. Network Design Considerations for Non-topographic Photogrammetry, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 50(8):1115-1126p.
- Fraser, C. S. 1987. Limiting Error Propagation in Network Design, *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 53(5):487-493p.
- Fraser, C. S. 1996. Network Design, En: *Close Range Photogrammetry and Machine Vision* (K.B. Atkinson, editor), Whittles Publishing, Caithness, Scotland, Páginas 256-281.

- Fraser C. S., 1997. Innovations in automation for vision metrology systems, *Photogrammetric Record*, 15(90):901-911p.
- Fraser C. S., Woods A., Brizzi D. 2005. Hyper redundancy for accuracy enhancement in automated close range photogrammetry. *Photogrammetric Record*, 20(111):205-217p.
- Fogel D. B., 1995. *Evolutionary computation: toward a new philosophy of machine intelligence*. IEEE Press. Primera edición. 272 Páginas.
- Fu K. S., Gonzalez R. C., Lee C. S. G. 1989. *Robótica: control, detección, visión e inteligencia*. MacGraw-Hill, Inc. Primera edición. 599 Páginas.
- Ganci G., Handley H. B., 1998. Automation in videogrammetry, *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 32(5):53-58p.
- Gembicki W. 1974. *Performance and Sensitivity Optimization: A vector Index Approach*, PhD. Thesis, Dept. of Systems Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland , OH.
- Gembicki F., Haimes Y. 1975. Approach to performance and sensitivity multiobjective optimization: The goal attainment method. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 20(6):769-771p.
- Gen M., Cheng R. 1997. *Genetic algorithms and engineering design*. John Wiley & Sons, Inc. Primera edición. 411 Páginas.
- Goicoechea A., Duckstein L., Fogel M. 1979 Multiple Objectives Under Uncertainty: An Illustrative Application of Protrade. *Water Resources Research* 15(2):203-210p.
- Goldberg D., Richardson J. 1987. Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization, *Genetic algorithms and their applications: Proceedings of the 2nd International Conference on Genetic Algorithms*. Cambridge, Massachusetts, United States. Páginas 41-49.
- Goldberg D. 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. 372 Páginas.

- Grafarend E. W. 1974. Optimisation of geodetic networks. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 33(4):351-406p.
- Gruen A. 1985. Adaptive least squares correlation: a powerful image matching technique. *South African Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Cartography*, 14(3):175-187p.
- Grussenmeyer P., Al Khalil O. 2002. Solutions for exterior orientation in photogrammetry: a review. *Photogrammetric Record*, 17(100):615-634p.
- Hartley R., Zisserman A. 2003. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom. Second Edition, 655 páginas.
- Hattori S., Akimot K., Fraser C., Imoto H. 2002. Automated procedures with coded targets in industrial vision metrology. *Photogrammetric engineering and remote sensing*. 68(5):441-446p.
- Hausdorf F. 1906. Untersuchungen über Ordnungstypen (en alemán). *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 58:106-169p.
- Hillermeier C. 2001. Nonlinear Multiobjective Optimization: A Generalized Homotopy Approach. *International Series of Numerical Mathematics*, 135(VII). 135 p. Birkhäuser Verlag. Basel-Boston-Berlin.
- Hillermeier C. 2001. Nonlinear Multiobjective Optimization: A Generalized Homotopy Approach. Birkhauser Verlag. 135 Páginas.
- Holland, J.H. 1975. *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975. 211 Páginas.
- Hurwicz L. 1958. Programming in Linear Spaces, in *Studies in Linear and Non-linear Programming* (Eds. Arrow K.J., Hurwicz L. and Uzawa H.) Stanford University Press, Standford CA.

- Keeney R.L., Raiffa H. 1976. *Decisions with Multiple Objectives*, Wiley, New York, 1976. 600 Páginas.
- Kim J., Kim S-K. 2006. A CHIM-based interactive Tchebycheff procedure for multiple objective decision making. *Computers & Operations Research*. 33(6):1557-1574p.
- Kuhn H.W., Tucker A.W. 1951. Non-Linear Programming, in 2nd Berkley Symp. on Mathematical Statistics and Probability (Ed. Neyman), University of California Press, Berkeley.
- Lavest J.M., Viala M., Dhome M. 1998. Do We Really Need an Accurate Calibration Pattern to Achieve a Reliable Camera Calibration? *ECCV* (1): 158-174p.
- Lim Y.I., Floquet P., Joulia X. 2001. Efficient Implementation of the Normal Boundary Intersection (NBI) Method on Multiobjective Optimization Problems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 40:648-655p.
- Louchet J., Guyon M., Lesot M., Boumaza, A. 2002. Dynamic Flies: a new pattern recognition tool applied to stereo sequence processing, *Pattern Recognition Letters*, 23:335-345p.
- Marchand E., Chaumette F. 1999. Active vision for complete scene reconstruction and exploration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 21(1):65-72p.
- Marr D. 1982. *Vision*. W.H. Freeman, San Francisco.
- Mason S. O. 1997. Heuristic Reasoning Strategy for Automated Sensor Placement. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 63(9):1093-1102p.
- Mason S. O., 1994. Expert system-based design of photogrammetric networks. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich. Mitteilungen Nr. 53. 187 páginas.
- Mason S. O. 1995a. Conceptual model of the convergent multistation network configuration task. *Photogrammetric Record*, 15(86): 277-299p.

- Mason S. O. 1995b. Expert system based design of close range photogrammetric networks. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 50(5):13-24p.
- McGlone, C. (Editor) 2004. *Manual of Photogrammetry*. Published by American Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Bethesda, Maryland 20814. 1151 Páginas.
- Messac A., 1996. Physical programming: Effective Optimization for Computational Design. *AIAA Journal*. 34(1):149-158p.
- Messac A., Ismail-Yahaya A., Mattson C.A. 2003. The Normalized Normal Constraint Method for Generating the Pareto Frontier, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25(2):86-98p.
- Messac A. 1996. Physical programming: Effective Optimization for Computational Design, *AIAA Journal*, 34(1):149-158p.
- Michalewicz Z., 1994. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. Springer-Verlag. Segunda edición. 340 Páginas.
- Miettinen K. 1999. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer, Boston. 298 Páginas.
- Mikolajczyk K., Schmid C. 2004. Scale and affine invariant interest point detectors. *International Journal of Computer Vision*, 60(1):63-86p.
- Mohr R. 1993. Projective geometry and computer vision. En: *Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision*, Cheng C.H., Pau L.F., Wang S.P. World Scientific Publishers.
- Monarchi D.E., Kiesel C.C., Duckstein, L. 1973. Interactive Multiobjective Programming in Water Resources: A Case Study. *Water Resource Research*. 9(4):837-850p.
- Morin L. 1993. Quelques contributions des invariants projectifs à la vision par ordinateur. Tesis Doctoral del Institut National Polytechnique de Grenoble.

- Newman T., Jain A. 1995. A Survey of Automated Visual Inspection, Computer Vision and Image Understanding. 61(2):231-262p.
- Oei C., Goldberg D., Chang S. 1991. Tournament Selection, Niching and the Preservation of Diversity, IlliGAL Report No. 91011. Urbana, IL: university of Illinois at Urbana-Champaign.
- Olague G. 2002. Automated Photogrammetric Network Design Using Genetic Algorithms. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing, 68(5):423-431p.
- Olague G., Mohr R. 2002. Optimal Camera Placement for Accurate Reconstruction. Pattern Recognition, 35(4):927-944p.
- Olague, G., Hernández B., Dunn E. 2003. Accurate L-corner Measurement using USEF Functions and Evolutionary Algorithms. 5th European Workshop on Evolutionary Computation in Image Analysis and Signal Processing. Lecture Notes in Computer Science 2611. Páginas 410-421. Springer-Verlag. EvoIASP2003.
- Olague G., Hernández B., Dunn, E. 2003. Hybrid Evolutionary Ridge Regression Approach for High-Accurate Corner Extraction. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Madison, Wisconsin, USA, June 16-23. Vol. 1, Páginas 744-749.
- Olague G., Hernández B. 2005. A new accurate and Flexible model based multi-corner detector for measurement and recognition. Pattern Recognition Letters 26(2005):27-41p.
- Olague G., Puente C. 2006. Parisian Evolution with Honeybees for Three-dimensional Reconstruction. GECCO'06, July 8-12, 2006, Seattle, Washington, USA. Páginas 191-198.
- Olague G., Puente C. 2006. The Honeybee Search Algorithm for Three-Dimensional Reconstruction. 8 th European Workshop on Evolutionary Computation in Image Analysis and Signal Processing. Lecture Notes in Computer Science 3907. Springer-Verlag. Páginas 427-437. EvoIASP2006. Ganador del “*Best Paper Award for EvoIASP 2006*”.

- Olague G., Dunn E. 2006. Development of a Practical Photogrammetric Network Design using Evolutionary Computing. Por publicarse en *The Photogrammetric Record*. Blackwell Publishing Ltd.
- Pareto V. 1896. *Cours D'Economie Politique*, volume I and II. F. Rouge, Laussane.
- Firoozfam P., Negahdaripour S. 2004. Theoretical Accuracy Analysis of N-Ocular Vision Systems for Scene Reconstruction, Motion Estimation, and Positioning. 2nd International Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission, (3DPVT'04). September 2004. Páginas 888-895.
- Pito R. 1999. A solution to the next best view problem for automated surface acquisition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(10):1016-1030p.
- Pollefeys M., Koch R., Van Gool L. 1999. Self-Calibration and Metric Reconstruction in spite of Varying and Unknown Internal Camera Parameters, *International Journal of Computer Vision*, 32(1):7-25 p.
- Pollefeys M., Koch R., Vergauwen M., Van Gool L. 2000. Automated reconstruction of 3D scenes from sequences of images, *ISPRS Journal Of Photogrammetry And Remote Sensing* 55(4):251-267p.
- Poloni C., Pediroda V. 1997. GA coupled with computationally expensive simulations: tools to improve efficiency. En: *Genetic Algorithms and Evolution Strategies in Engineering and Computer Science*, páginas 267-288, John Wiley and Sons, England.
- Potter M.A., De Jong, K.A., 2000. Cooperative Coevolution: An Architecture for Evolving Coadapted Subcomponents. *Evolutionary Computation*, MIT Press, 8(1):1-29p.
- Rigoni E., Poles S. 2005. NBI and MOGA-II, two complementary algorithms for Multi-Objective optimizations Dagstuhl Seminar Proceedings 04461 Practical Approaches to Multi-Objective Optimization. <http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2005/272>

- Roy B., 1985. *Méthodologie Multicritère d Aide à la Décision*, Editions Economica, Paris.
- Roy B., 1990. The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods. En: Bana e Costa C.A., *Reading in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlin, Páginas 184-203.
- Saadatseresht M., Fraser C., Samadzadegan F., Azizi A. 2004. Visibility Analysis In Vision Metrology Network Design, *The Photogrammetric Record* 19(107):219-236p.
- Saadatseresht M., Samadzadegan F., Azizi, A. 2005. Automatic camera placement in vision metrology based on a fuzzy inference system. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 71(12):1375-1385p.
- Saaty 1987. The Analytic Hierarchy Process-What it is and how it is used. *Mathl. Modeling*. 9(3):161-176p.
- Saaty 1996. The Analytic hierarchy process and utility theory: Ratio scales and interval scales, *Proceedings of the Fourth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process*, Simon Fraser University, Burnaby, B. C., Canada, July 12-15, Páginas 22-27.
- Schmid C., Mohr R. 1997. Local Greyvalue Invariants for Image Retrieval. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 19(5):530-534p.
- Schmid C., Mohr R., Bauckhage C. 2000. Evaluation of Interest Point Detectors. *International Journal of Computer Vision*, 37(2):151-172p.
- Schittkowski, K. 1986. NLPQL: A fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research* 5(2):485-500p.
- Schittkowski, K. 2001. NLPQLP: A New Fortran Implementation of a Sequential Quadratic Programming Algorithm - User's Guide, *Reporte Técnico*, Department of Mathematics, University of Bayreuth.

- Schy A.A., Giesy D.P. 1988. Multicriteria Optimization Methods for design aircraft control systems, En: Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences, W. Stadler, ed., Plenum Press, New York.
- Sheng W., Ning Xi N., Song M., Chen Y. 2002. CAD-guided sensor planning for dimensional inspection in automotive manufacturing. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 8(3):372-380p.
- Shukla P., Deb K., Tiwari S. 2005. Comparing classical generating methods with an evolutionary multi-objective optimization method. *Proceedings of the Third International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO-2005)*. Guanajuato, Mexico. *Lecture Notes on Computer Science* 3410, páginas 311-325.
- Solteiro E., Tenreiro J., de Moura Oliveira. 2004. Robot Trajectory Planning Using Multi-objective Genetic Algorithm Optimization. *GECCO* (1) 2004: 615-626p.
- Tarabanis K.A., Allen P.K., Stag R.Y. 1995. A Survey of Sensor Planning in Computer Vision. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(1):86-104p.
- Tarabanis K.A., Tsai R.Y., Kaul A. 1996. Computing occlusion-free viewpoints. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(3):279-292p.
- Triggs B., Laugier C. 1995. Automatic camera placement for robot vision tasks. *IEEE Intl. Conf. on robotics & Automation. ICRA 1995*: Páginas 1732-1737.
- Triggs B., Laugier C. 1995. Automatic task planning for robot vision. *Proc. of the 7th Int. Symposium of Robotics Research*. Páginas 428-439.
- Trucco E., Umasuthan, A. Wallace. 1997. Model-Based Planning of Optimal Sensor Placements for Inspection. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 13(2):182-194p.
- Trujillo L., Olague G. 2006. Using Evolution to Learn How to Perform Interest Point Detection. *International Conference on Pattern Recognition*. August 20-24, 2006. Hong Kong, China. *ICPR 2006*. Páginas 211-214.

- Trujillo L., Olague G. 2006. Synthesis of Interest Point Detectors Through Genetic Programming. Genetic and Evolutionary Computation Conference. July 8-12. Seattle, WA, USA. GECCO-2006. Páginas 887-894.
- Whaite P., Ferrie F.P. 1997. Autonomous exploration: driven by uncertainty. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19(3):193-205p.
- Wong C., Kamel M. 2004. Comparing Viewpoint Evaluation Functions for Model-Based Inspectional Coverage. 1st Canadian Conference on Computer and Robot Vision (CRV'04). May 2004. Páginas 287-294.
- Xu G., Zhang Z. 1996. Epipolar geometry in stereo, motion and object recognition. Kluwer Academic Publishers. Primera edición. Dordrecht, Netherlands. 313 Páginas.
- Yang C., Marefat M., Ciarallo F. 1998. Error Analysis and Planning Accuracy for Dimensional Measurement in Active Vision Inspection. IEEE Trans. on Robotics & Automation, 14(3):476-487p.
- Ye Y., Tsotsos J. 1999. Sensor planning for 3D object search. Computer Vision and Image Understanding. 73(2):145-168p.
- Zinnendorf, S. 1989. Optimization of imaging configuration. Photogrammetria, 43(5):277-285p.
- Zitzler E., Deb K., Thiele L. 2000. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. Evolutionary Computation Journal, 8(2):125-148p.
- Zitzler E., Laumanns M., Thiele L. 2001. SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization. En K. C. Giannakoglou, D. T. Tsahalis, J. eriaux, K. D. Papailiou, and T. Fogarty, Eds., Evolutionary Methods for Design Optimization and Control with Applications to Industrial Problems, páginas 95-100, Athens, Greece, 2001. International Center for Numerical Methods in Engineering.