Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada

CONTROL VISUAL DE MANIPULADORES EN AMBIENTE CON OBJETO MOVIL

TESIS
MAESTRIA EN CIENCIAS

ANA MARIA HERNANDEZ CAMPOS

ENSENADA, B. C., OCTUBRE DEL 2000.

TESIS DEFENDIDA POR

ANA MARÍA HERNÁNDEZ CAMPOS

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director del Comité

Dr. Iouri Orlov

Miembro del Comité

Dr. César Cruz Hernández

Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnón

Miembro del Comité

Dr. José Luis Medina Monroy

Jefe del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones

Dr. Federico Graef Ziehl

Director de Estudios de Posgrado

12 de octubre de 2000

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES

CONTROL VISUAL DE MANIPULADORES EN AMBIENTE CON OBJETO MÓVIL

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

Ana María Hernández Campos

Ensenada, Baja California, México, Octubre de 2000.

RESUMEN de la Tesis de Ana María Hernández Campos, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California, México.

CONTROL VISUAL DE MANIPULADORES EN AMBIENTE CON OBJETO MÓVIL

Resumen aprobado por:

Dr. Rafael Kelly Martínez
Director de tesis

En esta tesis se propone un control servo visual para un robot manipulador planar de 2 g.d.l., en configuración de cámara fija y siguiendo un objeto que recorre una trayectoria de forma conocida pero con parámetros desconocidos; por ello se dirá que sigue una trayectoria semi-estructurada.

Una cámara de video sensa el objeto móvil y el extremo operativo del robot; una etapa de procesamiento de imágenes obtiene los centroides del extremo operativo del manipulador y del objeto móvil. La diferencia de posición entre ambos centroides se le denomina error en coordenadas de pantalla o de imagen.

El problema de control consiste en lograr que el error en coordenadas de imagen presente convergencia a cero. La solución propuesta a este problema de control se basa en un sistema de doble lazo de control. El lazo interno es un controlador de velocidad articular y el lazo externo un controlador basado en coordenadas de imagen.

Debido a que se han supuesto desconocidos los valores de los parámetros que describen la trayectoria del objeto móvil, la solución adoptada en esta tesis se inspira en técnicas de control adaptable.

En este documento se presenta el controlador, un análisis de estabilidad del sistema propuesto y se comprueba la convergencia a cero del error en coordenadas de pantalla.

También, se muestran resultados de las simulaciones del sistema; se supone que el objeto móvil recorre una trayectoria circular en la pantalla de un monitor, desconociéndose el valor del radio y la ubicación del centro del círculo.

Palabras claves: Robot, control servo visual, doble lazo de control, control adaptable, controlador de velocidad articular, cámara fija.

ABSTRACT of the Thesis of Ana María Hernández Campos, presented as a partial requirement for obtaining the degree of MASTER OF SCIENCE. Ensenada, Baja California, Mexico. September 2000.

VISUAL SERVOING OF ROBOT MANIPULATORS TRACKING A MOVING TARGET

In the present dissertation a law control is proposed for visual servoing of a 2 DOF planar robot manipulator whose end-effector must track a moving target under fixed camera configuration.

The moving target covers a trayectory with a known form but its description parameters are unknown; because of this, the path is denominated as a semi-structured path.

A video camera senses both, end-effector and the moving target; an image processing system calculates their centroids. The difference between the end-effector and moving target centroids is referenced as image feature error.

The control problem objective is to ensure that the image error converges to zero. To achieve this goal, a two-loop control system is proposed. The inner loop consists of a joint velocity controller and the outer loop is comprised of an image-based controller.

Due to the unknown path parameters, the solution proposed in this thesis is inspired in the adaptive control techniques.

In this document we addressed the controller, a stability analysis for the proposed system is performed, and image feature error convergence to zero is demonstrated. Also, simulations results are presented, under the assumption that the moving target does a circular path on the screen but its radio and center location are unknown.

Keywords: Robot, visual servoing, two-loop controller, adaptive control, joint velocity controller, fixed camera.

DEDICATORIA

A quienes disfrutaron el logro de este objetivo.

Gracias.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme este logro.

Al Dr. Rafael Kelly por su invaluable dirección de tesis.

A los miembros de mi comité de tesis: Dr. Negrete, Dr. Cruz y Dr. Orlov; por sus comentarios y sugerencias.

A mi siempre compañera Araceli Esparza, por estar en todo momento atenta a mis necesidades.

A mi mamá y hermanos por entender esta ausencia. A mi papá, q.e.p.d., quien siempre deseo la mejor educación para sus hijos. A mis queridísimos sobrinos por no olvidarme.

A Martha Reyes y Pedro Mayorga, por brindarme su amistad y apoyo incondicional.

A Javier Moreno por sus sugerencias en la tesis; ni que decir de su paciencia y colaboración para dar buen fin a esta empresa.

A Francisco Domínguez por compartir conmigo tantos momentos. A Javier Gutiérrez por su positivismo y entender mis histerias.

A mis compañeros del Tec. de Mexicali: Dr. Reséndiz y Claudina; quienes siempre estuvieron al pendiente de los requerimientos administrativos. A César Corrales, por contribuir a que el proceso administrativo central tomara su curso.

A Citlali y Margarita Jauregui, por su paciencia y prontitud en cada documento que llegué a solicitar en CICESE.

A Alejandro Vega, una vez más gracias. Tan lejos y sin embargo siempre cerca.

A mis maestros en CICESE: Dr. Joaquín Álvarez, M.C. Moisés Castro, M.C. Ricardo Núñez, Dr. Mitrani, incluídos Miembros y Director de mi comité de tesis; aportaron lo mejor de ellos en cada curso.

Al ex-Director del Tec. de Mexicali: Arq. Rubén Castro B. y al ex-Subdirector Académico: Ing. Fco. Ortiz quienes respaldaron mi propuesta de realizar estudios de maestría en Cicese, Ensenada. Al Director: Ing. Josué Vargas L. y al Subdirector Académico: Arnoldo Díaz por favorecer la continuidad a esta tarea.

A la Secretaría de Educación Pública, por promover la superación de los docentes.

A CONACyT por el apoyo brindado a mí, a los investigadores y a la Institución.

A CICESE por permitirme ingresar en sus filas y su constante preocupación en mejorar los servicios prestados a sus estudiantes.

A los compañeros de Cicese, con los que llegué a cruzar una sonrisa o una frase amable.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FIGURAS (continuación)

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura Página

LISTA DE FIGURAS (continuación)

CONTENIDO

CONTENIDO (continuación)

CONTENIDO (continuación)

Página

CONTENIDO (continuación)

CONTENIDO (continuación)

LISTA DE TABLAS

I Introducción.

I.1 Motivación

Los sistemas de visión artificial en robótica imitan al sentido humano y permiten medir sin contacto la posición y oritentación del extremo final de manipuladores robóticos, así como la de cualquier otro objeto visible dentro de su espacio de trabajo. Además incrementan el potencial de los robots manipuladores para responder de manera versátil a un espectro de aplicaciones cada vez más amplio. Algunas aplicaciones para robots guiados por visión incluyen manipulación y transportación de objetos.

En la actualidad se busca que los robots manipuladores se puedan controlar en ambientes no estructurados, por ejemplo en el caso de robots manipuladores que hacen seguimiento de un objeto en movimiento. Lo ideal sería que el manipulador logre su objetivo de control sin importar si se encuentra en un entorno al aire libre o cerrado, el grado de luminosidad, ni tampoco debería de importar el tamaño, color o forma del objeto.

El incluir cámaras de video en el lazo de retroalimentación ha favorecido en gran manera la reducción de requerimientos en la estructuración del ambiente pues en el caso que nos ocupa, seguimiento de un objeto en movimiento, permite que el objeto pueda realizar su movimiento en forma libre sin necesidad de conectarle cables para sensar su posición. Muchas veces es suficiente la obtención del centroide del objeto y no hay necesidad de considerar su forma o tamaño para que el manipulador realice su tarea.

Este trabajo de tesis aborda la problemática del control de movimiento de robots manipuladores, donde se desea que el extremo operativo siga la trayectoria de un objeto en movimiento. Para su solución, se toma ventaja de la retroalimentación visual para sensar la posición del extremo operativo y del objeto móvil, formando un lazo externo de control. Se utiliza el error de posición en coordenadas de pantalla, para generar la acción de control correspondiente y se logre el seguimiento del objeto móvil. Puesto que solo se conoce de antemano la forma de la trayectoria que recorre el objeto móvil, pero no los parámetros que la definen, se resuelve aquí proponiendo un controlador adaptable. Debido a que nuestro sistema es basado en modelo, no podemos prescindir del monitoreo de las coordenadas articulares del robot, integrando un lazo interno de control.

I.2 Estado del arte de sistemas con visión

El término *control servo-visual* se aplica a los sistemas donde una cámara de video proporciona un control de posición de lazo cerrado al extremo operativo del manipulador mécanico. El control servo-visual involucra el uso de una o más cámaras y un sistema de visión por computadora para controlar la posición del extremo operativo del brazo de robot para la ejecución de la tarea requerida [Corke, 1997].

Debido a la amplia cantidad de sistemas experimentales propuestos sobre el control servo visual los sistemas se han clasificado de acuerdo a alguna propiedad descritas a continuación, según Hager [1997].

- Primer criterio. Depende de la retroalimentación. Si la retroalimentación visual se convierte directamente a pares articulares, se le denomina *servo visual directo.* En el arreglo denominado *mirar-mover* se utiliza el codificador interno como retroalimentación, para implementar un sistema de servo velocidad.

- Segundo criterio. De acuerdo al número de cámaras. Están aquellos sistemas servo-visuales que utilizan una sola cámara y los que se implementan con dos cámaras (*estereo*).

- Tercer criterio. Este depende del marco coordenado utilizado para la generación de la señal de error. Si el error se define en función de las posiciones del extremo operativo y del objeto en el marco cartesiano del espacio de trabajo se denomina *basado en posición*. Si el error se calcula directamente de la imagen en pantalla entonces se le conoce como *basado en imagen*.

- Cuarto criterio. La cámara puede estar estacionaria (*configuración de cámara fija*) o sostenida en la "mano" del robot, *configuración de cámara en mano*, [Corke, 1997].

Se han reportado una amplia variedad de trabajos de investigación en torno al control de manipuladores en ambiente de visión buscando darle mayor autonomía a los manipuladores.

Muchas de estas publicaciones no presentan una demostración formal de estabilidad asintótica global como Jang y Bien [1991] y en algunos otros trabajos omiten incluir la dinámica del manipulador empleando el enfoque de control cinemático donde el manipulador es tratado como un dispositivo ideal de posicionamiento y las acciones de control son las velocidades articulares o cartesianas, por ejemplo Hager, *et al.* [1995] y Hashimoto y Noritsugu [1999]. Este último es uno de los antecentes más directos de la presente tesis, así como Kelly *et al.* [1999] donde se considera un objeto moviéndose con una trayectoria previamente definida.

I.3 Contribución de la tesis

En este trabajo de tesis se aborda el control de manipuladores mediante retroalimentación visual en la configuración denominada cámara fija, basado en imagen y considerando el modelo dinámico de los robots; por lo que se puede permitir un mejor manejo de las velocidades con respecto a aquellos que no lo incluyen. Una aportación adicional es considerar un objeto con movimiento semi-estructurado (algunos parámetros son desconocidos). Se propondrá un algoritmo de control, se analizará su estabilidad y se acompañará de simulaciones.

I.4 Organización de la tesis

Esta tesis se encuentra organizada en 5 capítulos y un apéndice de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se describen los términos, el sistema y sus componentes, se especifícan los marcos coordenados y se presentan los modelos de los componenetes del sistema.
- En el capítulo 3 se formula el problema de control y se presenta el controlador propuesto.
- En el capítulo 4 se desarrolla el análisis de estabilidad y prueba de convergencia.
- En el capítulo 5 se presentan las gráficas resultantes de las simulaciones, se consideran diferentes casos, como sistemas continuos sin fricción, con fricción, con muestreo en cámara y controlador, etc.
- En el capítulo 6 se presentan las conclusiones que se infieren de las simulaciones y comentarios sobre los temas abiertos a futuros trabajos de investigación.
- En el capítulo 7 se presenta el listado de referencias en que se basan los temas desarrollados en la presente tesis.
- En el apéndice A se presenta el modelo dinámico del robot de 2 g.d.l. del CICESE y las tablas de los parámetros que lo caracterizan. En el apéndice B se listan los programas utilizados para simulación con el paquete de programación SIMNON.

II Descripción del sistema robótico y su modelado.

II.1 Sistema robótico

En esta sección se describen los bloques que conforman a un sistema robótico, también los términos y conceptos relacionados al tema.

Además del brazo mecánico, un sistema robótico necesita de elementos sensores internos y externos, computadora, tarjetas de interfaz, actuadores y naturalmente el software para su operación. En la figura 1, se muestra el sistema robótico con retroalimentación visual a considerar dadas las características del equipo con que cuenta el laboratorio de robótica del CICESE. La figura 2 es el diagrama de bloques correspondiente.

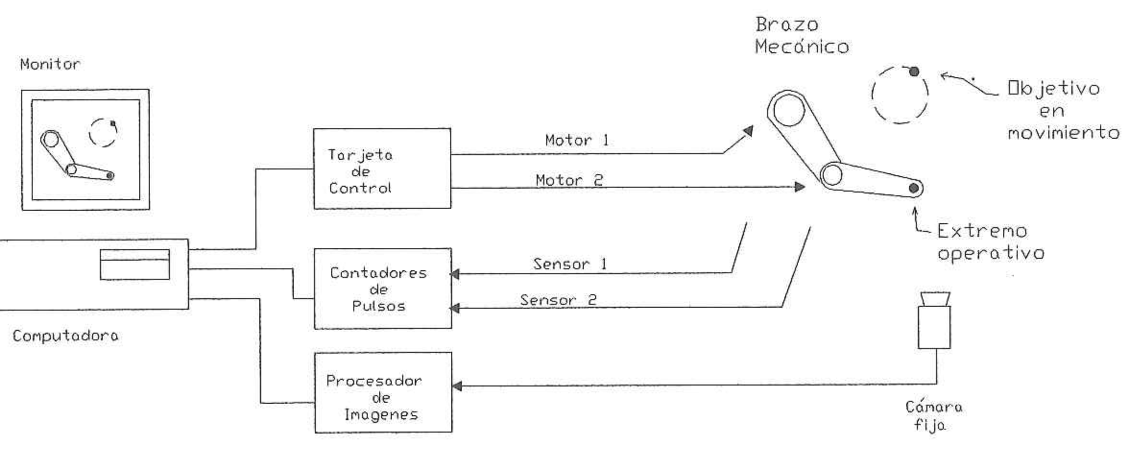

Figura 1: Sistema robótico con retroalimentación visual

II.1.1 Brazo mecánico

El brazo mecánico es una estructura formada de una serie de barras metálicas, *eslabones*, conectadas entre sí mediante uniones o *articulaciones*. El extremo del último eslabón de esta cadena cinemática es el encargado de desarrollar la tarea, por ello, generalmente se le denomina *extremo operativo*. En la figura 3a se muestra la estructura de un brazo

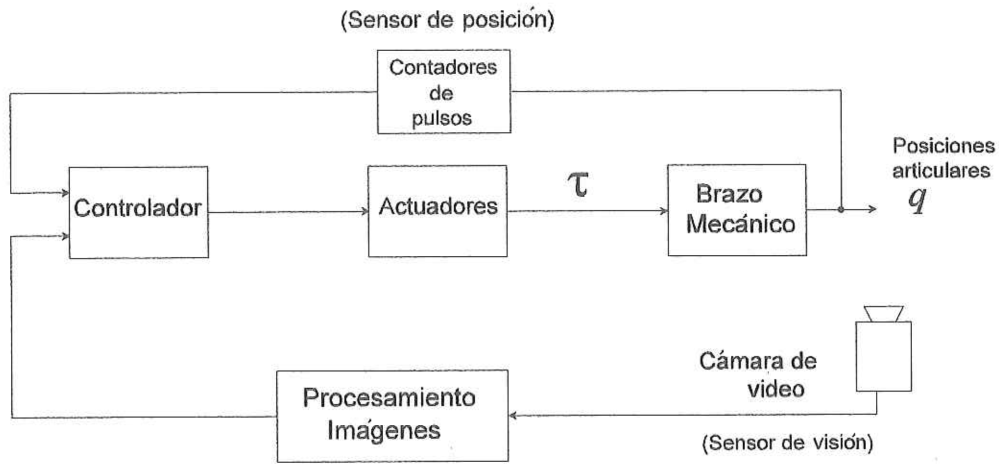

Figura 2: Diagrama de bloques de un sistema robótico con retroalimentación visual

mecánico.

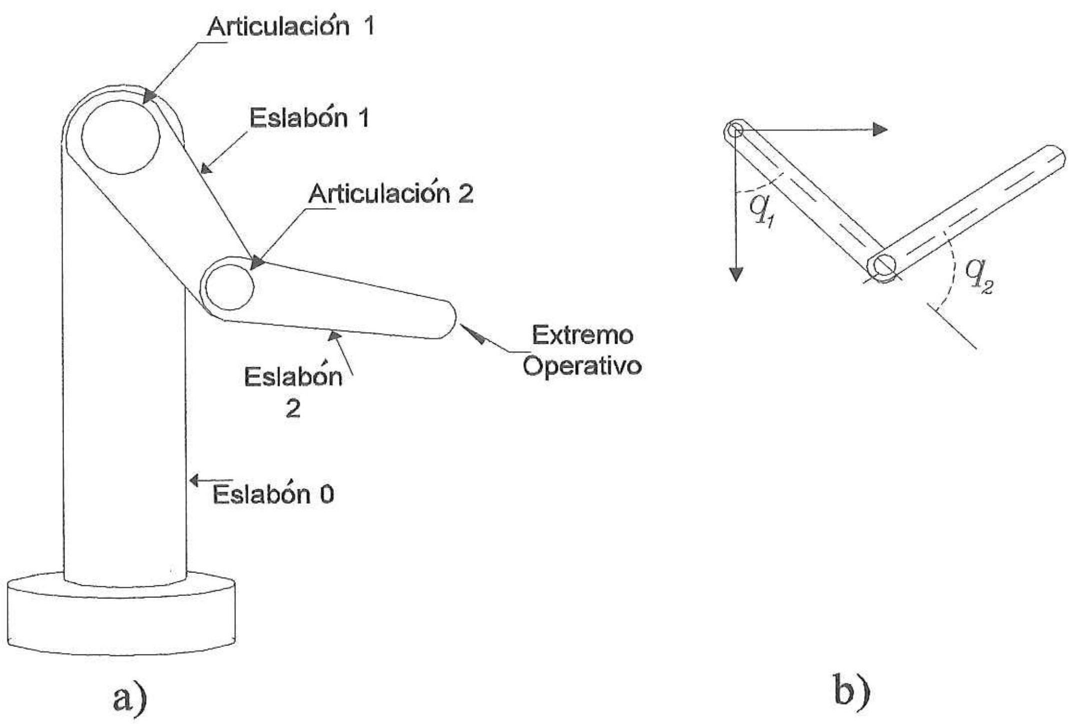

Figura 3: Brazo manipulador

Las articulaciones permiten el movimiento relativo entre eslabones vecinos, el número de uniones identifica el *grado de libertad, g.d.l.,* del robot. Según el tipo de articulación, el movimiento permitido entre eslabones vecinos puede ser rotacional o traslacional asignándose las coordenadas generalizadas q_i, por lo tanto al vector de posiciones articulares se denota $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \cdots, q_n]^T$, donde n es el número de grados de libertad. En nuestro caso analizaremos un manipulador de 2 g.d.l. con articulaciones rotacionales, ver figura 3*b*.

Se denomina *espacio articular* al espacio en el cual está definido el vector de variables articulares $\boldsymbol{q}$ de $n \times 1$.

II.1.2 Sistema de control

El sistema de control debe suministrar a los actuadores los pares necesarios para que el manipulador recorra la trayectoria deseada. El sistema de control es el responsable de que las articulaciones del brazo mecánico ejecuten correctamente el movimiento deseado y se obtenga la posición deseada en el extremo operativo.

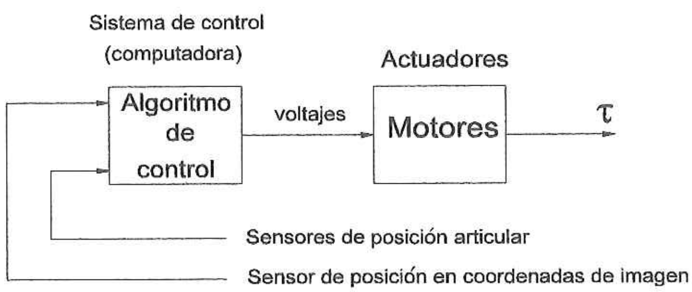

Figura 4: Sistema de control

El sistema de control consta del equipo de cómputo y actuadores, ver figura 4. La computadora tiene como entradas la información proveniente de los sensores (de posición articular y visión). De manera autónoma y de acuerdo al programa introducido por el usuario, se calcula el error entre la posición del objeto móvil (*posición deseada*) y la posición actual del extremo operativo; se aplica el algoritmos de control propuesto por el usuario y del resultado de este proceso se enviará la acción de control hacia cada actuador o motor, mediante una excitación de voltaje. Los *actuadores*, son los motores encargados de proporcionar los pares a cada una de las articulaciones a fin de lograr la posición o recorrido deseado para el extremo operativo.

Se considera que en las articulaciones del brazo mecánico se tiene motores de *transmisión directa*, donde el rotor está directamente acoplado al eslabón. Este tipo de motores proporcionan grandes pares a los eslabones, presentan baja fricción y eliminan el uso de engranes, [Asada y Slotine, 1986]. Cada uno de estos motores actúan como una fuente ideal de par, es decir que el par de salida es proporcional al voltaje de entrada al motor sin importar las características de los eslabones a manejar.

II.1.3 Sensores

De acuerdo a la información que se retroalimenta, un sistema robótico cuenta con dos tipos de sensores [Asada y Slotine, 1986]. Los *sensores internos* son aquellos que proporcionan el estado interno del manipulador, es decir las variables mecánicas; por ejemplo los sensores de posición, velocidad o fuerza. Los *sensores externos* suministran información del entorno del manipulador, por ejemplo la cámara de video.

Es de uso común colocar un sensor de posición directamente en el eje del actuador, el *codificador óptico de incremento rotacional* donde a medida que gira el eje del codificador se generan dos trenes de pulso de onda cuadrada con un desfazamiento de 90 grados. El ángulo del eje se determina mediante el conteo de los pulsos, la dirección de rotación la determina la fase relativa de las dos ondas cuadradas.

La cámara de video es un sensor de enorme interés en robótica pues permite obtener la ubicación del extremo operativo del manipulador y del objeto en movimiento sin necesidad de que medie un contacto físico que obstruya el desplazamiento de cualquiera de ellos. Se asigna una sección a la función de la cámara de video debido al aspecto crucial que tiene en el desempeño de los sistemas manipuladores.

II.1.4 Retroalimentación visual

Por *retroalimentación visual* se entiende el controlar la posición y orientación del extremo operativo mediante el uso de determinadas características de imagen para guiar al manipulador.

El *control servovisual basado en imagen* usa la posición de las características de imagen directamente para retroalimentación [Corke, 1997], por lo tanto la tarea se especifica en el plano de imagen y no en el espacio de referencia o el mundo.

Para la retroalimentación visual se pueden considerar dos subelementos: la cámara de video y el módulo que procesa la imagen.

- *Cámara.* La cámara contiene una lente que forma una proyección de 2D de una escena tridimensional.

  La cámara puede estar fija o montada en el extremo operativo del brazo. Las ventajas de una cámara móvil es que se pueden evitar oclusiones e incrementar la exactitud pues siempre está dirigida su atención al objeto. Las ventajas de una cámara fija es que puede mostrar en pantalla al extremo operativo y al objeto de interés, obteniéndose el error en coordenadas de pantalla.

  Generalmente para sensar características tridimensionales, se utilizan dos cámaras quienes regularmente están fijas por consideraciones prácticas, ya que si se colocaran en el extremo operativo habría problemas de sobrepeso o pérdida de robustez del sistema.

  Puesto que en nuestro sistema no hay obstáculos que evadir y además tanto el brazo manipulador como el objeto a ser seguido se desplazan en un plano y no se requiere detectar profundidad, se considera la utilización de una cámara fija.

- *Procesamiento de la imagen.* El uso de la visión es inconveniente cuando se requieren altas velocidades de medición debido a la enorme cantidad de datos producido por los sensores de visión y las limitaciones en procesar los datos rápidamente.

Para no trabajar con la imagen completa del brazo de robot y reducir el tiempo de procesamiento de la información, es conveniente obtener las *características de imagen* o puntos claves de una imagen. En nuestro caso sólo nos interesa las coordenadas en pantalla del extremo operativo y del objeto móvil.

A fin de que los puntos de interés sean distinguibles, se acondiciona la escena para que sea fácil de interpretar. Se supone que el brazo robótico y el fondo de la escena son de color claro, se colocan discos de color negro mate sobre el extremo operativo y el objeto móvil. De esta manera, al filtrar la imagen sólo quedarán los objetos obscuros, bloqueándose los de color claro. Se denomina *binarización* a este proceso en el cual una imagen en tonos de gris se convierte a blanco-negro. Para ello, se requiere de especificar previamente el *umbral* de binarización; es decir, el nivel de gris de la escena que se representará en color blanco en el monitor de la computadora y cuales tonos se representan en pantalla como pixeles de color negro, ver figura 5.

El trabajar con una imagen blanco-negro reduce el tiempo de procesamiento de la imagen, que consiste en obtener los valores en *coordenadas de imagen* (pixeles) de los centroides o características de imagen de los puntos de interés, discos negros.

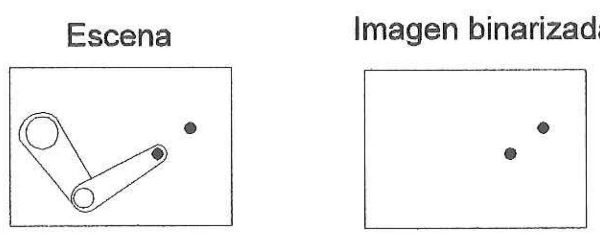

Figura 5: Proceso de binarización

El sistema bajo estudio supone una cámara de video monocromática del tipo CCD y una tarjeta digitalizadora instalada en una computadora personal la cual despliega la imagen sobre la pantalla del monitor (512×400) pixeles.

II.2 Modelado del sistema robótico

El modelado del robot manipulador es una premisa necesaria para diseñar las estrategias del control de movimiento del extremo operativo. Esto, demanda un análisis exacto de las características que definen a las componentes del brazo mecánico [Sciavicco y Siciliano, 1996].

II.2.1 La dinámica del robot

El robot manipulador es básicamente un dispositivo de posicionamiento. El movimiento deseado de los eslabones se controla mediante el par aplicado a los motores ubicados en las articulaciones del brazo mecánico. En la figura 6 se muestra el modelo del robot como un bloque. Si los motores aplican un par demasiado pequeño, el manipulador

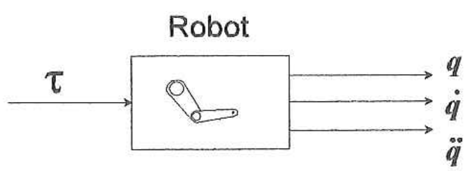

Figura 6: Bloque del robot

reaccionará en forma muy lenta y si el par es demasiado grande, pueden presentarse oscilaciones alrededor de la posición deseada e inclusive se podría dañar la estructura del manipulador, [Spong y Vidyasagar, 1989].

La *dinámica* permite calcular el movimiento $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ y $\ddot{\boldsymbol{q}}$ de la estructura (eslabones), en respuesta a los pares articulares generados por los actuadores (motores), una vez que las posiciones iniciales $\boldsymbol{q}(t_0)$ y velocidades $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ son conocidas. Al conjunto de ecuaciones diferenciales que la describen se le denomina *ecuaciones de movimiento*. El problema de la dinámica directa es útil para la simulación del manipulador [Asada y Slotine, 1986].

Generalmente los controladores de movimiento se basan en el modelo dinámico del robot. Basándose en las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange en ausencia de la fricción y alguna otra perturbación, la dinámica de un robot rígido formado de una cadena abierta de n eslabones queda como [Spong y Vidyasagar, 1989]:

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ y $\ddot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$ representan vectores de posición, velocidad y aceleración articular, respectivamente, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados a las articulaciones del robot, $M(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de inercia del manipulador y que además tiene la propiedad de ser simétrica y definida positiva, $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz centrípeta y de Coriolis y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales.

Considerando el brazo manipulador experimental de 2 g.d.l. que se encuentra en el laboratorio de robótica del CICESE y de acuerdo a los trabajos experimentales reportados por [Reyes y Kelly, 1997], en el apéndice A se muestran las ecuaciones que describen a la matriz de inercia, la matriz de fuerza centrípeta y de Coriolis y el vector de fuerzas y pares gravitacionales.

II.2.2 Coeficientes de fricción.

La fricción es un fenómeno natural, inevitable y complejo de modelar, pues su naturaleza es difícil de estimar con la exactitud requerida como para producir una cancelación. Generalmente conduce a errores en estado estacionario y a retardos en el seguimiento. Los modelos de fricción mas empleados son: la *fricción viscosa* y *fricción Coulomb*. Estos modelos tienen la propiedad de linealidad en los coeficientes de fricción [Reyes, 1997].

Los pares de fricción viscosa están dados por $\boldsymbol{\tau}_{f_v}$ en la ecuación (2). Los pares de fricción estática o de Coulomb $\boldsymbol{\tau}_{f_c}$ está representado mediante su modelo simplificado en la ecuación (3)

$$\boldsymbol{\tau}_{f_v} = F_v\,\dot{\boldsymbol{q}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{f_c} = F_c\,\mathbf{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{3}$$

donde F_v es una matriz diagonal $(n \times n)$ de coeficientes de fricción viscosa, F_c denota a una matriz diagonal $(n \times n)$ de coeficientes de fricción de Coulomb y $\mathbf{sgn}(\dot{\boldsymbol{q}})$ denota al vector $(n \times 1)$ cuyas componentes están dadas por las funciones signo de la velocidad de cada articulación [Sciavicco y Siciliano, 1996].

Si agregamos el término de fricción a la ecuación del robot (1), obtenemos

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_f \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{\tau}_f$ representa al conjunto de estas fuerzas no conservativas presentes en las articulaciones, su representación en bloques se muestra en la figura 7 y queda descrita como:

$$\boldsymbol{\tau}_f = \boldsymbol{\tau}_{f_v} + \boldsymbol{\tau}_{f_c} \tag{5}$$

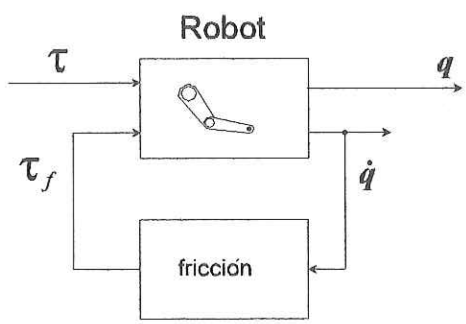

Figura 7: Modelo del robot con fricción en articulaciones

Para un robot de 2 g.d.l. las matrices F_v y F_c correspondientes a las ecuaciones de los pares de fricción (2) y (3), respectivamente, quedan expresadas como

$$F_v = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$F_c = \begin{bmatrix} f_{c_1} & 0 \\ 0 & f_{c_2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Considerando el robot de 2 g.d.l. del CICESE, en el apéndice A se muestran los parámetros correspondientes a las matrices (6) y (7).

II.3 Cinemática del manipulador

Las coordenadas articulares $\boldsymbol{q}$ son muy convenientes para efectos de aplicar el modelo dinámico del robot. Pero si al extremo operativo se le especifica una tarea, entonces es necesario asignarle una posición y orientación; previo a esto, es necesario establecer un sistema coordenado fijo al cual se referencíen todos los objetos, incluso el propio manipulador y se le denota por *marco coordenado del mundo.* Una vez que se ha establecido un sistema de coordenadas de referencia, podemos localizar cualquier punto en el espacio mediante un vector de posición de 3×1 [Craig, 1989].

II.3.1 Marco coordenado del mundo

Se define el *marco coordenado del robot* como un marco cartesiano $\Sigma_R = \{R_1, R_2, R_3\}$, con origen en la articulación 1 del brazo de robot, ver figura 8. Σ_R representa al marco coordenado del mundo. Si el extremo operativo requiere de manipular alguna herramienta, sería necesario especificar su posición y orientación. Para ello se asignaría otro marco coordenado en el extremo operativo, que describa la orientación de la herramienta.

La posición y orientación de un objeto ubicado en este espacio está descrito por el vector $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ y donde $m \leq n$. Para el caso de un robot planar de 2 g.d.l. sin requerimientos de orientación, m=2 y su extremo final queda descrito por $\boldsymbol{x}_R = [x_{R_1} \;\; x_{R_2}]^T \in \mathbb{R}^2$.

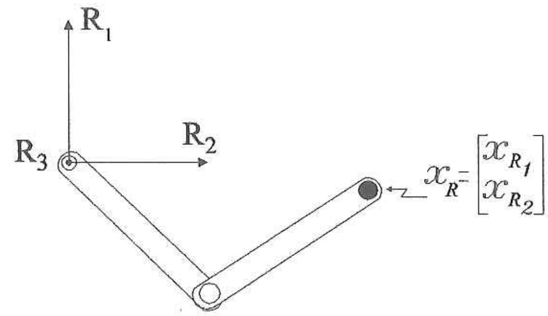

Figura 8: Marco cartesiano Σ_R

II.3.2 Cinemática directa

La *cinemática directa* proporciona las coordenadas cartesianas del extremo operativo del robot, $\boldsymbol{x}_R$ partiendo de sus correspondientes coordenadas articulares $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{x}_R(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \tag{8}$$

mediante trigonometría puede obtenerse $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

En la figura 9 se observa la relación de coordenadas articulares de los eslabones a las coordenadas cartesianas del extremo operativo para el manipulador planar de 2 g.d.l.

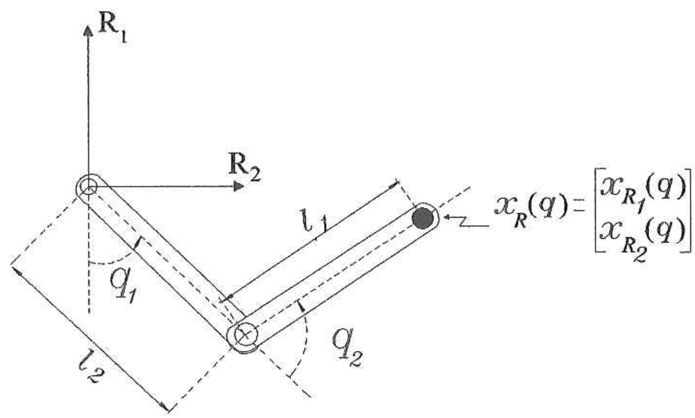

Figura 9: Coordenadas articulares y cartesiana correspondiente

La ecuación cinemática correspondiente a la figura 9 es

$$\boldsymbol{x}_R(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} x_{R_1}(\boldsymbol{q}) \\ x_{R_2}\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

El *espacio de trabajo* es el volumen recorrido por el extremo operativo cuando el manipulador ejecuta todos los movimientos posibles. El espacio de trabajo está limitado por la geometría del manipulador y limitaciones mecánicas de las articulaciones, por ejemplo, una articulación rotacional puede estar limitada a un movimiento menor a los 360 grados [Spong y Vidyasagar, 1989].

Para nuestro sistema planar de 2 g.d.l consideramos que los motores pueden girar libremente y en la figura 10 se muestra el espacio de trabajo, también denominado *espacio alcanzable.*

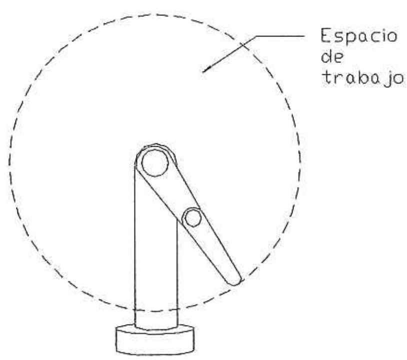

Figura 10: Espacio de trabajo

Considerando los parámetros del robot de 2 g.d.l. del CICESE, en el apéndice A se presenta la ecuación cinemática correspondiente.

II.4 Velocidad del extremo operativo

El problema a resolver en esta tesis es sobre control de movimiento, por lo tanto interesa la velocidad a la que se mueve el extremo operativo.

II.4.1 Jacobiano y jacobiano inverso del robot

Partiendo de la ecuación (8) podemos obtener una expresión que relacione la velocidad $\dot{\boldsymbol{x}}_R(\boldsymbol{q})$ del extremo operativo del manipulador con las velocidades articulares $\dot{\boldsymbol{q}}$ de sus eslabones

$$\dot{\boldsymbol{x}}_R(\boldsymbol{q}) = J_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{10}$$

donde la matriz $J_A(\boldsymbol{q})$ se le denomina el jacobiano analítico del robot y se obtiene mediante

$$J_A(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}_R(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}. \tag{11}$$

Muchos de los algoritmos de control se basan en la dinámica directa para generar el par necesario en los actuadores, por ésto es importante resolver el problema inverso a la ecuación (10), dada la velocidad del extremo operativo obtener las velocidades articulares correspondientes:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = J_A^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{x}}_R. \tag{12}$$

II.4.2 Singularidades

El jacobiano del manipulador varía con la configuración $\boldsymbol{q}$ del brazo; si la matriz $J_A(\boldsymbol{q})$ es cuadrada pero pierde rango entonces el jacobiano no tiene inversa y no habría solución válida para la ecuación (12); se denominan *singularidades* a aquellas configuraciones $\boldsymbol{q}$ en las que el determinante de $J_A(\boldsymbol{q})$ sea cero.

A continuación se enuncian las razones por las cuales es importante determinar las configuraciones singulares del manipulador, [Sciavicco y Siciliano, 1996]:

- Las singularidades representan configuraciones en que la movilidad de la estructura se reduce, es decir no es posible imponer movimientos arbitrarios al manipulador porque no se pueden lograr ciertas direcciones de movimiento.

- En las singularidades, las velocidades del extremo operativo pueden corresponder a velocidades articulares no acotadas.
- En las singularidades los pares correspondientes pueden no estar acotados, [Spong y Vidyasagar, 1989].
- Cercano a las singularidades no hay solución única al problema de la cinemática inversa, de hecho, puede no haber solución o puede haber un número infinito de ellas.

Las singularidades se pueden clasificar en [Sciavicco y Siciliano, 1996]:

- *De frontera.* Estas singularidades ocurren cuando el manipulador está extendido o retraído, generalmente corresponden a puntos en la frontera del espacio de trabajo del manipulador, es decir, al máximo alcance del manipulador y por lo tanto pueden no ser obtenibles ante la presencia de pequeñas perturbaciones de los parámetros de los eslabones, tales como errores en la longitud. Estos estados se pueden evitar bajo la condición de que el manipulador no sea llevado hacia las fronteras de su espacio de trabajo.
- *Internas.* Estas singularidades ocurren dentro del espacio de trabajo y generalmente son ocasionadas por la alineación de dos o mas eslabones. Estas singularidades constituyen un serio problema ya que se presentan dentro del espacio alcanzable.

II.4.3 Jacobiano y singularidades de un robot de 2 g.d.l

Aplicando la ecuación (11) en la expresión cinemática (9) resulta

$$J_A(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2) & l_2 \cos(q_1+q_2) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) & l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Para analizar las singularidades de un sistema de 2 g.d.l. considere el determinante de la ecuación (13)

$$\begin{aligned} det[J_A(\boldsymbol{q})] &= (l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2)) \cdot l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2) \\ &\quad - (l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2)) \cdot l_2 \cos(q_1+q_2) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Las singularidades ocurren en $q_2 = 0$ o $q_2 = \pi$. Es decir, las singularidades ocurren cuando el extremo operativo del brazo está en la frontera exterior del espacio de trabajo ($q_2 = 0$) o en la interior ($q_2 = \pi$), siendo irrelevante la posición articular q_1, ver figura 11.

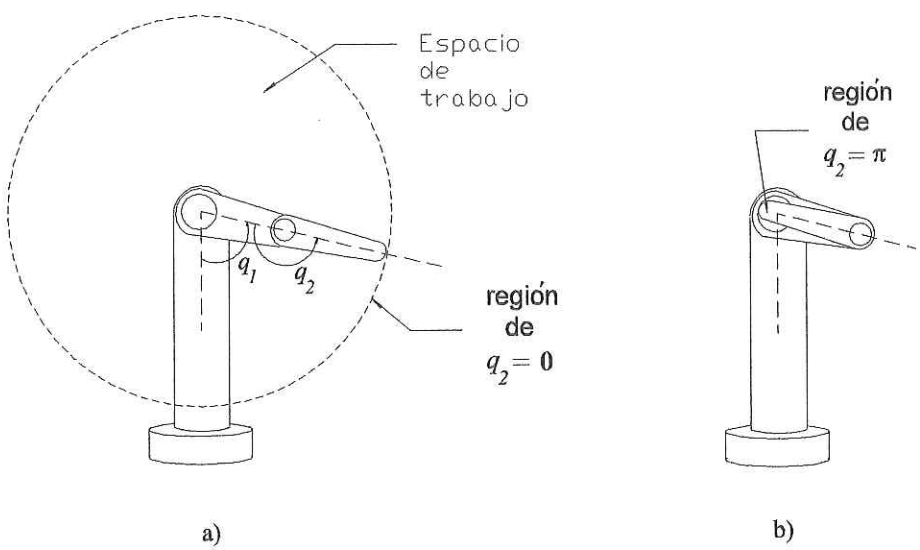

Figura 11: Singularidades en un robot planar de 2 g.d.l

II.5 Asignación de marcos de referencia

La posición del extremo operativo es visualizado a través de una cámara fija ubicada en el lazo de retroalimentación. Por lo tanto, para efectos de modelación es necesario considerar marcos cartesianos en cada etapa del sistema de visión; así, mediante un proceso de transformación de coordenadas, se obtiene una ecuación que relacione un punto en el espacio de trabajo del robot con las coordenadas de pantalla (pixeles) proporcionadas por una tarjeta procesadora de imágenes.

El material mostrado en el resto de esta sección II ha sido tomado de [Kelly, 1997]. Los marcos de referencia asociados a los elementos del sistema del robot siguen la regla de la mano derecha de tal manera que un marco de referencia A se denotará por $\Sigma_A = \{A_1, A_2, A_3\}$. La notación $\boldsymbol{o}_A^B$ representará al origen del marco Σ_A referenciado al marco Σ_B.

La cámara de video necesitará de dos sistemas coordenados para su descripción Σ_C y Σ_I.

En la figura 12 se muestran los marcos de referencia utilizados y a continuación se describe cada uno.

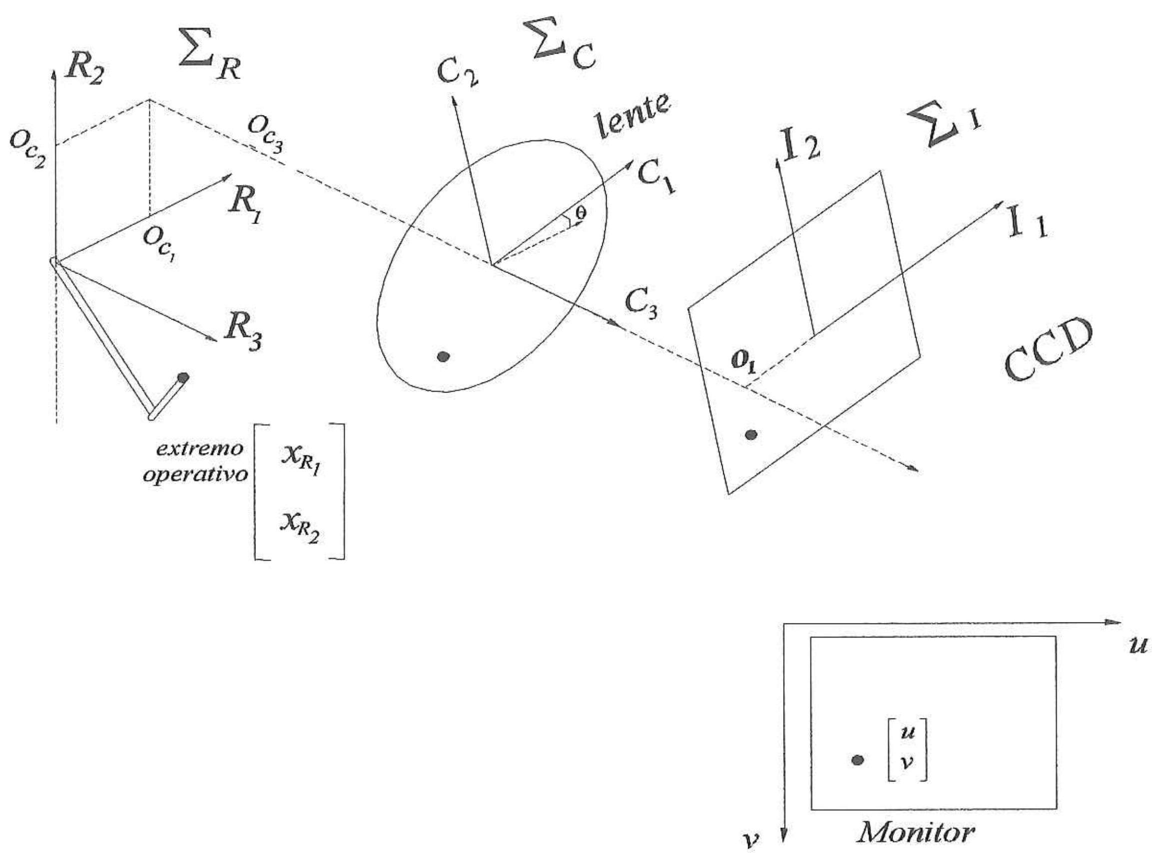

Figura 12: Marcos coordenados involucrados

II.5.1 Marco de referencia del robot

Sea $\Sigma_R = \{R_1, R_2, R_3\}$ el marco de referencia del robot y asociado al espacio de trabajo del manipulador mecánico, también se le conoce como *marco del mundo*, su origen se ubica en la articulación 1 (hombro del manipulador). Un punto descrito en esta coordenadas se representa por $\boldsymbol{x}_R = [x_{R_1} \; x_{R_2} \; x_{R_3}]^T$.

La orientación de los ejes de Σ_R se selecciona de tal manera que el movimiento del extremo operativo de un robot de 2 g.d.l. está confinado al plano $R_1 - R_2$; un punto desplazándose exclusivamente en el plano $R_1 - R_2$ se denota por $\boldsymbol{x}_R = [x_{R_1} \; x_{R_2}]^T$.

II.5.2 Marco de referencia del lente

Sea $\Sigma_C = \{C_1, C_2, C_3\}$ el marco de referencia de la cámara, su origen se ubica en el centro de la lente. La orientación de los ejes se selecciona de tal manera que el eje C_3 esté alineado con el eje óptico y el plano formado por los ejes $C_1 - C_2$ sea paralelo al plano de trabajo del robot. Un punto desplazándose exclusivamente en el plano $C_1 - C_2$ se denota por $\boldsymbol{x}_C = [x_{C_1} \; x_{C_2}]^T$.

La posición del marco coordenado de la cámara con respecto a Σ_R, se le denota mediante el vector $\boldsymbol{o}_C = [o_{C_1} \; o_{C_2} \; o_{C_3}]^T$. Por tanto, el plano $C_1 - C_2$ está a una distancia o_{C_3} del plano $R_1 - R_2$ y el par coordenado $[o_{C_1} \; o_{C_2}]^T$ representa la intersección del origen del sistema Σ_C sobre el plano $R_1 - R_2$. Además, Σ_C puede estar rotado un ángulo θ respecto al marco Σ_R alrededor de R_3 como se muestra en la figura 12.

II.5.3 Marco de referencia del CCD

Al arreglo discreto de fotosensores CCD de la cámara de video se le asigna un sistema de referencia de sólo dos dimensiones $\Sigma_I = \{I_1, I_2\}$. Su origen se ubica en el centro geométrico del CCD y sus ejes son paralelos a C_1 y C_2. Se denota por $\boldsymbol{o}_I$ al punto en el plano CCD donde intersecta el eje óptico del marco Σ_C. En general, un punto $\boldsymbol{x}$ en este marco se denota como $\boldsymbol{x}_I = [x_{I_1} \quad x_{I_2}]^T$.

II.5.4 Marco de referencia de la pantalla

La imagen sensada por los elementos del CCD se almacena en forma digital en la memoria de la computadora para su despliegue en el monitor. Sea $\Sigma_D = \{u, v\}$ un marco de referencia de dos dimensiones asignado a la pantalla. El origen de Σ_D se ubica en la esquina superior izquierda de la pantalla. El eje u se considera paralelo a las filas de la pantalla y el eje v se coloca paralelo a las columnas.

II.6 Modelo de sistema de visión

Para esta tesis se considera un robot con 2 g.d.l. cuyo extremo operativo tiene movimiento únicamente en el plano $R_1 - R_2$. Por lo tanto sólo se requieren de un par coordenado para especificar la posición en el espacio de trabajo del robot, $\boldsymbol{x}_R = [x_{R_1} \ x_{R_2}]^T$.

El planteamiento de un *modelo de visión* permitirá relacionar cualquier punto $\boldsymbol{x}_R = [x_{R_1} \ x_{R_2}]^T$ en el espacio de trabajo del robot a un punto $\boldsymbol{x}_D = [u \quad v]^T$ en la pantalla de la computadora y visceversa.

A continuación se desarrollan las transformaciones de coordenadas; en ellas se desprecian las aberraciones de la lente de la cámara y se utilizan los sistemas coordenados con sus características descritas en la sección anterior.

II.6.1 Transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas del lente.

Un punto $\boldsymbol{x}_R$ en el plano $R_1 - R_2$ del sistema Σ_R tendrá su proyección $\boldsymbol{x}_C$ en el plano $C_1 - C_2$ del sistema Σ_C ubicado en el lente dada por la ecuación

$$\boldsymbol{x}_C = \boldsymbol{x}_R - \begin{bmatrix} o_{C_1} \\ o_{C_2} \end{bmatrix}$$

recordando que $[o_{C_1} \ o_{C_2}]^T$ representa la proyección del origen del sistema Σ_C sobre el plano $R_1 - R_2$. Además, en la figura 12 se muestra que Σ_C puede estar rotado un ángulo θ respecto al marco Σ_R alrededor de R_3. La matriz de rotación involucrada es

$$R_R^C(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{15}$$

entonces un punto $\boldsymbol{x}_R$ ubicado en el marco coordenado del robot y visto desde el marco coordenado del lente, Σ_C, se puede expresar finalmente como:

$$\boldsymbol{x}_C = \begin{bmatrix} R_R^C(\theta)^T & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{x}_R - \begin{bmatrix} o_{C_1} \\ o_{C_2} \end{bmatrix} \right]. \tag{16}$$

II.6.2 Transformación de coordenadas del lente a coordenadas del CCD.

Esta etapa implica el mapeo de una escena 3D (espacio cartesiano del robot) a una imagen, espacio 2D. A este proceso se le denomina transformación de perspectiva; usando el modelo de óptica geométrica para lentes delgadas [Kelly, 1996] y despreciando la distorsión radial del lente, tenemos que un punto $\boldsymbol{x}_C$ proyecta un punto $\boldsymbol{x}_I$ sobre el plano CCD, mediante la siguiente transformación de coordenadas

$$\boldsymbol{x}_I = \frac{\lambda}{\lambda - o_{C_3}} \begin{bmatrix} x_{C_1} \\ x_{C_2} \end{bmatrix} + \boldsymbol{o}_I \tag{17}$$

donde $\lambda > 0$ denota la *distancia focal* en [m] y representa un punto sobre el eje C_3 de la lente; es la distancia a la que se encuentra ubicado el foco de la lente respecto al plano $C_1 - C_2$. Como se mencionó antes, $\boldsymbol{o}_I$ representa la intersección del eje óptico con respecto al centro geométrico del plano CCD.

II.6.3 Transformación de coordenadas del CCD a coordenadas de pantalla del monitor.

Un punto ubicado en el plano del CCD, $\boldsymbol{x}_I$, queda representado en coordenadas de pantalla del monitor, $[u \quad v]^T$, mediante la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_I + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

donde $\alpha_u > 0$, $\alpha_v > 0$ son los factores de escala en [pixeles/m] y u_0, v_0 denotan la posición en pixeles del centro geométrico del plano CCD con respecto al marco coordenado de la pantalla del monitor Σ_D.

II.6.4 Modelo completo del sistema de visión.

Conjuntando las ecuaciones (16)-(18) obtenemos el modelo de nuestro sistema de visión:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\lambda - o_{C_3}} \begin{bmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} R_R^C(\theta)^T \left[\boldsymbol{x}_R - \begin{bmatrix} o_{C_1} \\ o_{C_2} \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} \boldsymbol{o}_I + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Mediante esta función de transformación, obtenemos, en coordenas de pantalla, la proyección de un punto ubicado en el plano cartesiano del robot $R_1 - R_2$, lo cual queda representado en la figura 13.

II.7 Mapeo de coordenadas articulares a coordenadas de visión

Puesto que la cinemática directa (8) permite que mediante análisis trigonométrico obtengamos un mapeo de coordenadas articulares del robot a coordenadas cartesianas de su extremo operativo, entonces la ecuación (19) queda de la forma

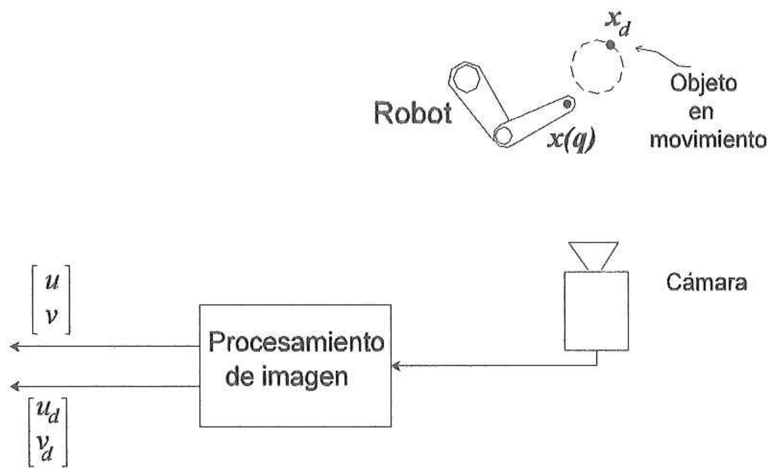

Figura 13: Obtención de posición en coordenadas de pantalla.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\lambda - o_{C_3}} \begin{bmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} R_R^C(\theta)^T \left[\boldsymbol{x}_R(\boldsymbol{q}) - \begin{bmatrix} o_{C_1} \\ o_{C_2} \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} \boldsymbol{o}_I + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Es decir, dadas las coordenadas articulares $\boldsymbol{q}$ del brazo mecánico, podemos obtener la proyección de su extremo operativo en coordenadas de pantalla $[u \quad v]^T$.

Expresando esta ecuación en una forma más compacta tendremos

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}) \tag{21}$$

donde $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})$ representa el mapeo de un punto en el sistema Σ_R a un punto en coordenadas de pantalla $[u \ \ v]^T$.

Al derivar con respecto al tiempo la ecuación (21) obtenemos una ecuación que relaciona las velocidades articulares del brazo mecánico con las velocidades de las coordenadas de pantalla del extremo operativo

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}} \tag{22}$$

donde $\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}$ representa una *matriz jacobiana* $J(\boldsymbol{q})$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{23}$$

Derivando con respecto a $\boldsymbol{q}$ la ecuación de transformación de coordenas articulares del robot a coordenadas de imagen (20), la descripción de la velocidad en coordenadas de imagen (23) y utilizando la ecuación del jacobiano analítico (11), entonces esta matriz jacobiana queda descrita por

$$J(\boldsymbol{q}) = \frac{\lambda}{\lambda - o_{C_3}} \begin{bmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} R_R^C(\theta)^T \; J_A(\boldsymbol{q}). \tag{24}$$

III Control servovisual para seguir un objeto que describe una trayectoria semi-estructurada.

Para este trabajo de tesis, se supone la presencia de un objeto móvil desplazándose en el espacio de trabajo del robot con el propósito de ser alcanzado y perseguido por el extremo operativo del robot. En este capítulo se plantea el control de un robot planar de n g.d.l. utilizando retroalimentación visual con configuración de una cámara fija y donde el error de posición entre el extremo operativo y el objeto a seguir se mide tomando las coordenadas en pantalla (sistema basado en imagen).

III.1 Error en coordenadas de pantalla

Sean $\boldsymbol{x}_d(t)$ y $\boldsymbol{x}_R(t)$ las posiciones en el sistema Σ_R del objeto móvil y del extremo operativo del robot respectivamente. Entonces sus correspondientes proyecciones en el monitor después de binarizar y obtener centroides estarán dadas por $[u_d(t) \;\; v_d(t)]^T$ y $[u(t) \;\; v(t)]^T$ en unidades de [pixeles], ver figura 14. El *error de posición en características de imagen* $[\tilde{u}(t) \;\; \tilde{v}(t)]^T$ se define como la diferencia de ambos pares coordenados

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d - u \\ v_d - v \end{bmatrix}. \tag{25}$$

III.2 Trayectoria del objeto móvil

Para este trabajo consideramos que la trayectoria $[u_d \;\; v_d]^T$ seguida por el objeto móvil es de la forma:

$$\begin{bmatrix} u_d(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}_1 + f(t)^T \boldsymbol{\theta}_2 \tag{26}$$

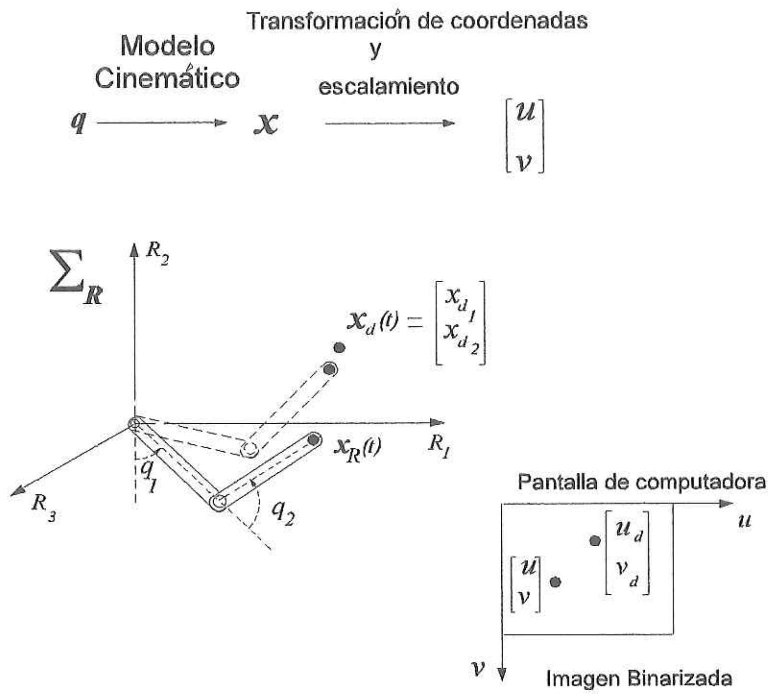

Figura 14: Transformación de coordenadas de robot a coordenadas de pantalla.

donde $\boldsymbol{\theta}_1 \in \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\theta}_2 \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ son desconocidas pero constantes y $f(t) \in \mathbb{R}^{2\times\mathrm{m}}$ especifica la variación en el tiempo de la trayectoria. Al recorrido descrito por la ecuación (26) se le denotará *trayectoria semi-estructurada*, pues se conoce su forma pero se ignoran los valores de los vectores $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_2$.

Por ejemplo, supongamos que un objeto móvil de coordenadas en pantalla $[u_d \quad v_d]^T$ recorre una trayectoria determinada por la ecuación de una circunferencia:

$$\begin{bmatrix} u_d(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 + r_0 \operatorname{sen}(\omega t) \\ v_0 + r_0 \cos(\omega t) \end{bmatrix},$$

por lo tanto, $\boldsymbol{\theta}_1 = [u_0 \; v_0]^T$ representa el centro de la circunferencia, $\boldsymbol{\theta}_2 = r_0$ es el radio de la circunferencia y $\boldsymbol{f}(t) = [\operatorname{sen}(\omega t) \;\; \cos(\omega t)]^T$ es la parte de la trayectoria que depende del tiempo. Es decir, si la trayectoria que realiza el objeto es circular, el robot manipulador deberá ser capaz de seguir ese movimiento, aún sin tener información de la magnitud del radio ni la ubicación del centro de la circunferencia.

III.3 Controlador propuesto

Puesto que se desea controlar el movimiento del extremo operativo del brazo manipulador para que coincida asintóticamente con el objeto móvil, vistos ambos en la pantalla, y en base a la propuesta presentada en [Kelly, *et al.* 1999], se propone el sistema representado por medio del diagrama de bloques mostrado en la figura 15.

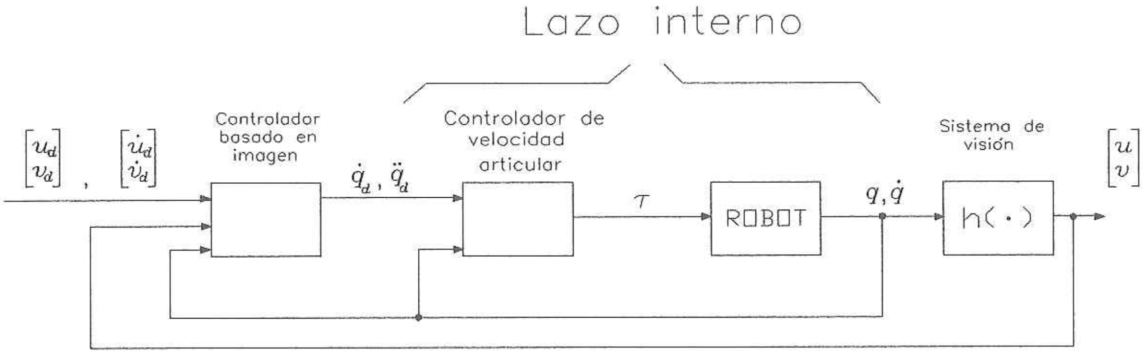

Figura 15: Diagrama de bloques del sistema

III.3.1 Formulación del problema de control

En la figura 15 se pueden identificar dos lazos. El lazo interno está formado por un controlador de velocidad articular y el brazo manipulador; el lazo externo consta de la retroalimentación visual. Ambos subsistemas fueron analizados en [Kelly, *et al.* 1999] para objetos con movimiento conocido.

El problema de control, para esta configuración de cámara fija y error en coordenadas de imagen, consiste en diseñar un controlador que calcule los pares $\boldsymbol{\tau}$ necesarios quienes, al ser aplicados a las articulaciones del robot manipulador, desplacen al extremo operativo de tal forma que la proyección de un objeto, moviéndose en el plano de imagen, sea alcanzada y seguida por la correspondiente proyección en coordenadas de pantalla del extremo operativo del brazo [Reyes, 1997]. Es decir, que las características de imagen $[u \ v]^T$ del extremo operativo tiendan a igualarse con las coordenadas en pantalla $[u_d \ v_d]^T$ del objeto móvil que se desea alcanzar y seguir.

En términos del error en características de imagen $[\tilde{u}\ \tilde{v}]^T$, el objetivo de control es asegurar que $\lim_{t\to\infty}[\tilde{u}(t)\ \ \tilde{v}(t)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, por lo menos para condiciones iniciales $[\tilde{u}(0)\ \ \tilde{v}(0)]^T$ y $\dot{\boldsymbol{q}}(0)$ suficientemente pequeños [Kelly, *et al.* 1999].

III.3.2 Suposiciones sobre el sistema

Se trabajará sobre el sistema mencionado bajo las siguientes suposiciones:

- Los marcos coordenados del robot, lente, plano CCD y pantalla del monitor se asignan con los nombres y características mencionadas en el capítulo anterior y mostradas en la figura 12.
- El extremo operativo del robot y el objeto móvil tienen confinado sus desplazamientos al plano $R_1 - R_2$ del marco coordenado del robot Σ_R.
- El objeto móvil realiza un movimiento descrito por la ecuación (26), siendo $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_2$ desconocidos pero constantes.
- Una cámara de video está colocada en forma fija y de frente al plano $R_1 - R_2$; la cámara está libre de aberraciones ópticas y está ubicada a una distancia tal que se puede capturar la imagen del extremo operativo del robot y del objeto móvil como se muestra en la figura 14.
- En las articulaciones del brazo mecánico se suponen colocados sensores de posición que proporcionan las coordenadas articulares, $\boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2]^T$.

III.3.3 Lazo interno

El objetivo del controlador de velocidad es que el brazo mueva sus articulaciones a una velocidad $\dot{\boldsymbol{q}}$ tendientes asintóticamente a la velocidad articular deseada, $\dot{\boldsymbol{q}}_d$. Es decir tiene como objetivo de control que $lim_{t\to\infty}\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \dot{\boldsymbol{q}}_d(t)$. La ley de control propuesta, inspirada en la estructura del controlador de movimiento *"par-calculado"*, es:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\left[\ddot{\boldsymbol{q}}_d + K_v\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_p\boldsymbol{z}\right] + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}), \tag{27}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \tag{28}$$

donde $\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} = \dot{\boldsymbol{q}}_d - \dot{\boldsymbol{q}}$ representa el error de velocidad articular y tanto K_p como K_v son matrices simétricas y definidas positivas de dimensión n.

En la figura 15, se muestra que las velocidades y acelaraciones articulares deseadas $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ y $\ddot{\boldsymbol{q}}_d$ respectivamente, son generadas por el lazo externo. En la figura 16 se muestra el diagrama de bloques de los elementos que componen al controlador del subsistema de lazo interno

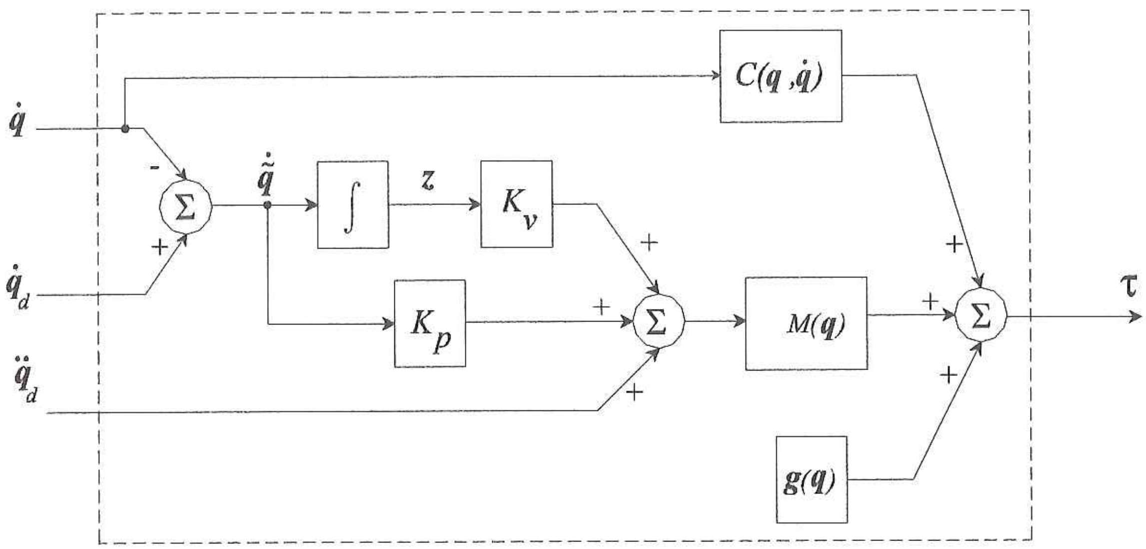

Figura 16: Diagrama a bloques del controlador de lazo interno

III.3.4 Lazo externo

El propósito del controlador externo basado en imagen es generar las velocidades $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ y aceleraciones $\ddot{\boldsymbol{q}}_d$ articulares deseadas en el robot. La ley de control para este lazo proporcionará una expresión para $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ de la cual podemos obtener, derivando, una expresión para $\ddot{\boldsymbol{q}}_d$.

Recordando que $[\tilde{u} \;\; \tilde{v}]^T$ es la diferencia en coordenadas de pantalla entre la ubicación del extremo operativo del brazo y el objeto móvil y además $[u_d \;\; v_d]^T$ son las coordenadas de este último, podría proponerse la siguiente ley de control para el lazo externo:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J(\boldsymbol{q})^{-1} \left[\begin{bmatrix} \dot{u}_d \\ \dot{v}_d \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \right] \tag{29}$$

donde $K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz simétrica y definida positiva. Sin embargo, debido a que $[u_d \;\; v_d]^T$ no es conocida del todo, ya que aunque posee la estructura (26), los parámetros incluídos en $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_2$ son desconocidos, se procederá a diseñar un controlador adaptable.

III.4 Parámetros adaptables

La trayectoria del objeto en movimiento está descrito por la ecuación (26), entonces la velocidad del extremo operativo en coordenadas de imagen es

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_d \\ \dot{v}_d \end{bmatrix} = \dot{f}(t)\boldsymbol{\theta}_2 \tag{30}$$

y la ley de control basada en imagen (29) para este tipo de trayectorias queda como

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J(\boldsymbol{q})^{-1} \left[\dot{f}(t)\boldsymbol{\theta}_2 + K \left[\boldsymbol{\theta}_1 + f(t)\boldsymbol{\theta}_2 - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right] \right]. \tag{31}$$

Sólo tenemos conocimiento previo de la forma de la trayectoria que recorre el objeto móvil (26), pero desconocemos los valores de los parámetros $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_2$. Se proponen las siguientes leyes de adaptación

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \Gamma_1 \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2 = \Gamma_2 \left[\dot{f}(t) + K\, f(t) \right]^T \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \tag{33}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \in \mathbb{R}^2$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ son los vectores de parámetros adaptables y $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}$ representan las ganancias de adaptación, ambas son matrices simétricas y definidas positivas.

Mientras la adaptación se efectúa se presentan *errores paramétricos* $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2$, definidos como:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_1, \tag{34}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2. \tag{35}$$

Recordando que $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_2$ fueron definidas constantes, entonces al derivar las expresiones (34) y (35) obtenemos que $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1$ y $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_2 = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2$. Por lo tanto las derivadas de los errores paramétricos también cumplen con las ecuaciones (32) y (33), quedando

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \Gamma_1 \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_2 = \Gamma_2 \left[\dot{f} + K \cdot f\right]^T \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

III.5 Ley de control adaptable

La ley de control adaptable para el lazo externo se expresa en función de los parámetros adaptables como:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J(\boldsymbol{q})^{-1} \left[\dot{f}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 + K \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 + f(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right]\right]. \tag{38}$$

Derivamos la ecuación anterior para obtener la aceleración articular deseada $\ddot{\boldsymbol{q}}_d$:

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{q}}_d &= \frac{d}{dt}\left[J(\boldsymbol{q})^{-1}\right] \left[\dot{f}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 + K \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 + f(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right]\right] \\ &+ J(\boldsymbol{q})^{-1} \left[\ddot{f}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 + \dot{f}(t)\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2 + K \left[\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 + \dot{f}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 + f(t)\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_2 - \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}\right]\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

En la figura 17 se muestra el diagrama de bloques del lazo basado en imagen y con implementación de las leyes de adaptación para $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$. Los bloques G_{10} y G_{11} representan a las ecuaciones (38) y (39) respectivamente.

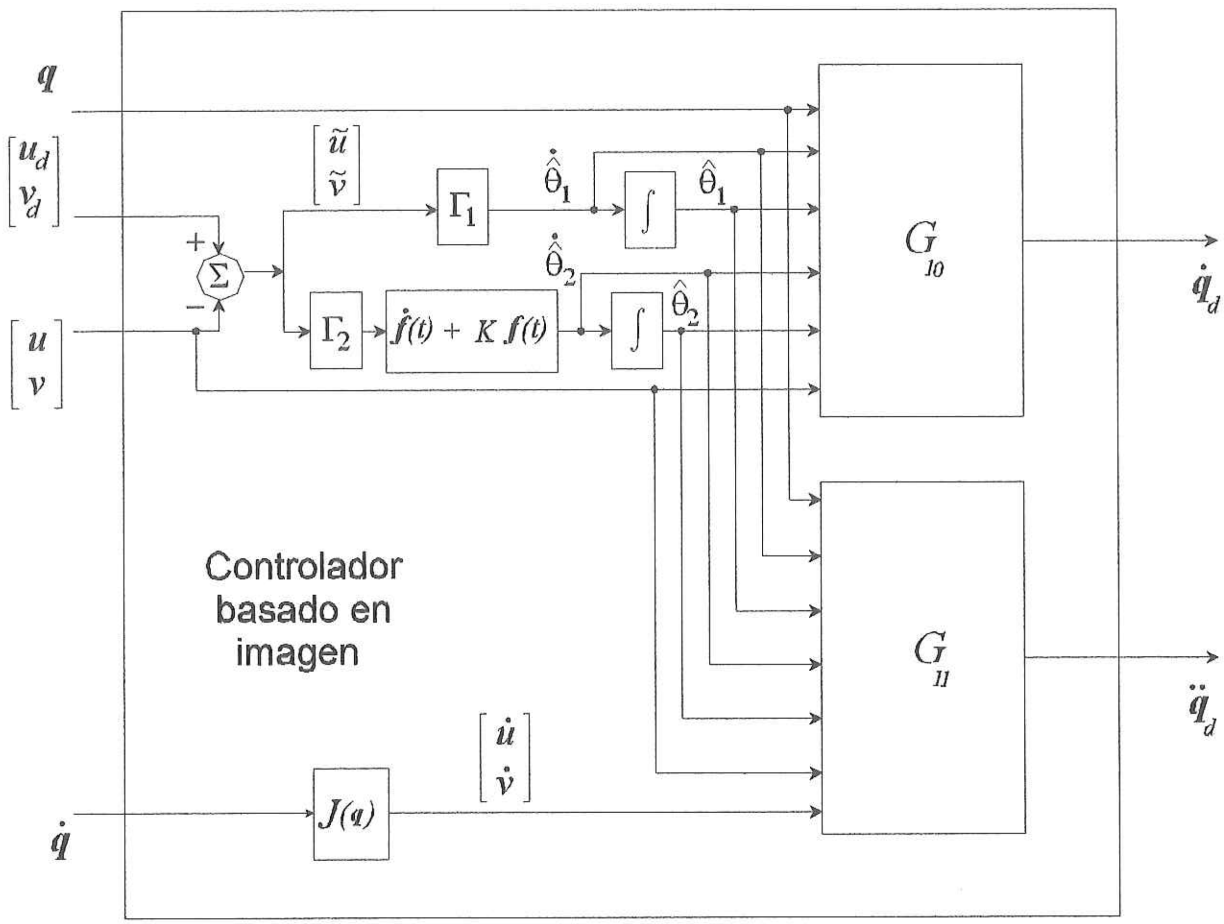

Figura 17: Lazo externo: algoritmo de control adaptable basado en coordenadas de imagen.

IV Análisis de estabilidad.

En esta sección se presenta la demostración de convergencia a cero del error en coordenadas de imagen.

Con el propósito de obtener una expresión de malla cerrada para el sistema propuesto, mediante las ecuaciones de los errores paramétricos (34), (35) y la ley de control para el lazo externo (38) obtenemos

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J(q)^{-1}\left[\dot{f}(t)(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 + \boldsymbol{\theta}_2) + K\left[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 + \boldsymbol{\theta}_1 + f(t)(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 + \boldsymbol{\theta}_2) - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right]\right].$$

Al sustituir en esta última expresión las ecuaciones del error de posición en coordenadas de imagen (25), la trayectoria del objeto móvil (26), su derivada (30) y reagrupar obtendremos una expresión para $\dot{\boldsymbol{q}}_d$ en función de las características de imagen y errores paramétricos:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J(\boldsymbol{q})^{-1}\left[\begin{bmatrix} \dot{u}_d \\ \dot{v}_d \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} + \left[\dot{f} + K \cdot f\right]\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 + K \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1\right] \tag{40}$$

la cual será de utilidad al obtener la ecuación de malla cerrada del sistema completo.

IV.1 Error de velocidad en coordenadas de imagen

Multiplicando ambos lados de la ecuación (40) por $J(q)$ y efectuando una resta término a término respecto a la ecuación (23) obtenemos

$$J(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} = \left[\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} + \left[\dot{f} + K \cdot f\right]\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 + K \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1\right]. \tag{41}$$

Y despejando la velocidad del error en coordenadas de imagen, tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} = -K\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} - K\,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 - \left[\dot{f} + K\,f\right]\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 + J(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}. \tag{42}$$

IV.2 Ecuación de malla cerrada

En la obtención de la ecuación de malla cerrada se conjuntaron las ecuaciones del modelo del robot (1), del controlador de velocidad (27) y (28), del error de velocidad en coordenadas de imagen (42) y las leyes de adaptación (32), resultando en

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -K_p & -K_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & -K & -G \\ 0 & 0 & \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 \cdot G^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

donde se utilizó $G = \dot{f}(t) + K \cdot f(t) \ \in \mathbb{R}^{2\times \mathrm{m}}$ con el objeto de hacer más compacta la representación matricial.

IV.3 Hipótesis

Además de las características previamente especificadas para los elementos que conforman el sistema mostrado en la figura 15 se consideran las siguientes hipótesis para que el problema de control tenga solución:

- H.1. El determinante del jacobiano analítico del robot, descrito en la ecuación (14), es en todo momento diferente de cero. Esto implica que los eslabones 1 y 2 del robot nunca están alineados, por lo tanto la posición articular q_2 siempre es diferente de cero ó π radianes.

- H.2. La posición del extremo operativo del manipulador y el objeto en móvil, $\boldsymbol{x}_R$ y $\boldsymbol{x}_d$ respectivamente, siempre tienen una proyección en coordenadas de pantalla $[\tilde{u}(t)\ \ \tilde{v}(t)]^T$ y $[\tilde{u}_d(t)\ \ \tilde{v}_d(t)]^T$. Es decir, se mantendrán en todo momento dentro del cuadro de imagen de la pantalla.

- H.3. Se supone una cierta estructura sobre la trayectoria recorrida por el objeto móvil descrita por

$$\begin{bmatrix} u_d(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}_1 + f(t)\boldsymbol{\theta}_2$$

donde $\boldsymbol{\theta}_1 \in \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\theta}_2 \in \mathbb{R}^m$ son desconocidas pero constantes; $f(t) \in \mathbb{R}^{2\times m}$ y $\frac{df(t)}{dt}$ son conocidas y acotadas.

IV.4 Estabilidad del lazo interno

De la ecuación de malla cerrada (43) se observa que $\boldsymbol{z}$ y $\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$ se desempenãn en forma independiente respecto a $[\tilde{u}\ \ \tilde{v}]^T$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2$. Quedando la expresión

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \end{bmatrix} \tag{44}$$

que tiene la forma $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, donde tanto K_v como K_p fueron matrices definidas positivas previamente, entonces los valores propios de este subsistema tiene parte real negativa demostrándose que el comportamiento es asintóticamente estable en forma global y por lo tanto este controlador de velocidad garantiza que el error de velocidad $\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$ tiende a cero, i.e.,

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(t) = 0. \tag{45}$$

IV.5 Función candidata de Lyapunov y su derivada

Para el análisis de estabilidad considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{z},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2) &= \frac{1}{2}\left[\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}+\varepsilon\boldsymbol{z}\right]^T\left[\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}+\varepsilon\boldsymbol{z}\right] + \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^T\left[K_p+\varepsilon K_v-\varepsilon^2\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{z} \\ &+ \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T\,K\,\Gamma_1{}^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ &+ \frac{\alpha}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T\,\Gamma_2{}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2. \end{aligned} \tag{46}$$

Para un posterior estudio, que demuestre que $V(\boldsymbol{z},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)$ es una función candidata de Lyapunov, primeramente se define la existencia de constantes K_v, K, ε, α, Γ_1 y Γ_2 tales que

- K_p, K, Γ_1 y Γ_2 son matrices diagonales definidas positivas,
- $\lambda_m\{K_v\} > \varepsilon > 0$,
- $\frac{4(\lambda_m\{K_v\}-\varepsilon)\,\lambda_m\{K\}}{\|J(\boldsymbol{q})\|^2} > \alpha > 0$, para todo vector $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ y considerando no singularidades en el jacobiano

denotando por $\lambda_{min}\{\cdot\}$ al valor propio mínimo de la matriz en cuestión.

Si obtenemos la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (46) y posteriormente simplificamos, toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{z},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2) &= \left[\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}+\varepsilon\boldsymbol{z}\right]^T\left[\ddot{\tilde{\boldsymbol{q}}}+\varepsilon\dot{\boldsymbol{z}}\right] + \boldsymbol{z}^T\left[K_p+\varepsilon K_v-\varepsilon^2\boldsymbol{I}\right]\dot{\boldsymbol{z}} \\ &+ \alpha\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\dot{\tilde{u}}\\ \dot{\tilde{v}}\end{bmatrix} + \alpha\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T\,K\,\Gamma_1^{-1}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_1 + \frac{\alpha}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T\,\Gamma_2^{-1}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_2. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación de malla cerrada (43) para despejar $\dot{\boldsymbol{z}}, \ddot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, [\dot{\tilde{u}} \quad \dot{\tilde{v}}]^T, \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_1, \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_2$ y eliminando algunos términos finalmente se llega a

$$\dot{V}(\boldsymbol{z},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2) = -\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T[K_v-\varepsilon\boldsymbol{I}]\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} - \varepsilon\boldsymbol{z}^T K_p\boldsymbol{z}$$

$$-\alpha\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}^T K\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}^T J(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \tag{47}$$

Representando $\dot{V}(\boldsymbol{z},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)$ en forma matricial, tenemos:

$$\dot{V}(\boldsymbol{z},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\\ \begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}\\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1\\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\varepsilon K_p & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_v-\varepsilon\boldsymbol{I} & -\frac{\alpha}{2}J(\boldsymbol{q}) & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\alpha}{2}J(\boldsymbol{q}) & -\alpha K & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\\ \begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{bmatrix}\\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1\\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2\end{bmatrix} \tag{48}$$

Como $\dot{V}(\boldsymbol{z},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)$ no es definida negativa, entonces aún no es posible concluir sobre si el equilibrio es asintóticamente estable. Además, tampoco puede ser empleado el teorema de LaSalle para una demostración de estabilidad asintótica ya que la ecuación de malla cerrada (43) es no autónoma.

IV.6 Estabilidad y acotamiento de las soluciones

Si aplicamos el teorema IV.1 [Kelly, 1995], podemos obtener información sobre la estabilidad y acotamiento de las soluciones mediante el método directo de Lyapunov.

Teorema IV.1– Estabilidad y acotamiento de las soluciones. *El origen es un equilibrio estable, y las soluciones $\boldsymbol{x}(t)$ son acotadas para toda condición inicial $\boldsymbol{x}(0)\in\mathbb{R}^n$, si existe una función candidata de Lyapunov y además decreciente $V(t,\boldsymbol{x})$, tal que su derivada temporal satisfaga:*

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x})\leq 0 \quad \forall\ t\geq 0 \quad \forall\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.$$

$\diamond\ \diamond$

Por lo tanto si se comprueba que $\dot{V}(\boldsymbol{z}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)$ sea una función semidefinida negativa, entonces se podrá concluir que el origen del sistema es un equilibrio estable y sus soluciones $[\boldsymbol{z}^T \ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T \ [\tilde{u} \ \tilde{v}]^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T]^T$ son acotadas para toda condición inicial.

De la ecuación (46) se observa el cumplimiento de $\dot{V}(0,0,0,0,0,0) = 0$. Para demostrar que $\dot{V}(\boldsymbol{z}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2) \leq 0$ para todo vector $[\boldsymbol{z}^T \ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T \ [\tilde{u} \ \tilde{v}]^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T]^T \neq 0 \ \in \mathbb{R}^{\mathrm{n+n+2+2+m}}$ [1] será necesario encontrar condiciones adicionales sobre ε y α.

IV.6.1 Cotas máximas sobre los términos de $\dot{V}(\boldsymbol{z}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)$

Se analizará los siguientes términos de $\dot{V}$ a fin de obtener bajo que condiciones de ε y α los términos presentan cotas máximas y pueda determinarse si $\dot{V}$ es semidefinida negativa.

- $-\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T[K_v - \varepsilon \boldsymbol{I}]\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$
- $-\varepsilon \boldsymbol{z}^T K_p \boldsymbol{z}$
- $-\alpha \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}^T K \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$
- $\alpha \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}^T J(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$

Aplicando el teorema de Raleigh al término $-\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T[K_v - \varepsilon \boldsymbol{I}]\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$, se obtiene

$$\begin{aligned} -\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T[K_v - \varepsilon \boldsymbol{I}]\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &= -\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \ + \ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T \varepsilon \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ &\leq -\ \lambda_m\{K_v\} \| \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \|^2 \ + \ \varepsilon \| \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \|^2 \\ &\leq -\ [\lambda_m\{K_v\} - \varepsilon] \ \| \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \|^2. \end{aligned} \quad (49)$$

[1]donde n es el número de coordenadas articulares, m representa la cantidad de coeficientes de $\boldsymbol{\theta}_2$ necesarios para describir la trayectoria del objeto móvil.

Respecto al segundo término $-\varepsilon \boldsymbol{z}^T K_p \boldsymbol{z}$, se tiene

$$-\alpha \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}^T K \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \leq -\alpha\lambda_m\{K\} \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2 . \tag{50}$$

Para el término $-\alpha \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}^T K \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$ se obtienen las siguientes cotas máximas:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \boldsymbol{z}^T K_p \boldsymbol{z} &\leq -\varepsilon\lambda_M\{K_p\} \|\boldsymbol{z}\|^2 \\ &\leq -\lambda_M\{K_p\} \|\boldsymbol{z}\|^2 . \end{aligned} \tag{51}$$

Para el término $\alpha \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}^T J(\boldsymbol{q})\, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$, se tiene que aplicando la desigualdad de Schwarz,

$\alpha \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}^T J(\boldsymbol{q})\, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \leq \alpha \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\| \left\|J(\boldsymbol{q})\, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\|$, donde el término $\left\|J(\boldsymbol{q})\, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\|$ está acotado por:

$$\begin{aligned} \left\|J(\boldsymbol{q})\, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\| &= \sqrt{\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T J(\boldsymbol{q})^T J(\boldsymbol{q})\, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}} && \text{por definicion de norma euclidiana} \\ &\leq \sqrt{\lambda_M\{J^T J\} \left\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\|^2} && \text{por teorema de Raleigh} \\ &\leq \sqrt{\lambda_M\{J^T J\}} \left\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\| \\ &\leq \|J(\boldsymbol{q})\| \left\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\| && \text{por definicion de norma espectral} \end{aligned}$$

quedando finalmente expresado el acotamiento por:

$$\alpha \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}^T J(\boldsymbol{q})\, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \leq \alpha \|J(\boldsymbol{q})\| \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\| \left\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\| . \tag{52}$$

Retomando las expresiones matemáticas (49)-(52), $\dot{V}$ queda acotada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{z}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2) \leq\; & -[\lambda_m\{K_v\} - \varepsilon]\, \|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|^2 - \alpha\lambda_m\{K\} \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2 \\ & + \alpha \|J(\boldsymbol{q})\| \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\| \left\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\right\| - \lambda_M\{K_p\} \|\boldsymbol{z}\|^2 . \end{aligned} \tag{53}$$

La representación matricial de $\dot{V}$ en término de sus cotas máximas es:

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} \| \boldsymbol{z} \| \\ \\ \| \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \| \\ \\ \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\| \end{bmatrix}^{T} \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_p\} & 0 & 0 \\ \\ 0 & \lambda_m\{K_v\} - \varepsilon & -\frac{\alpha}{2} \| J(\boldsymbol{q}) \| \\ \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} \| J(\boldsymbol{q}) \| & \alpha \lambda_m\{K\} \end{bmatrix}}^{Q} \begin{bmatrix} \| \boldsymbol{z} \| \\ \\ \| \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \| \\ \\ \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\| \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Para que $\dot{V}(\boldsymbol{z}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)$ sea una función semi-definida negativa, primero debemos garantizar que la matriz Q sea definida positiva y esto se satisface si cumplimos con el teorema de Sylvester acerca de que los menores sucesivos principales de Q deben de ser positivos. Para esto se deben de satisfacer las siguientes condiciones:

- $\lambda_m\{K_p\} > 0$
- $\lambda_m\{K_p\}(\lambda_m\{K_v\} - \varepsilon) > 0$ por lo tanto $\lambda_m\{K_v\} > \varepsilon$
- $\lambda_m\{K_p\}(\lambda_m\{K_v\} - \varepsilon)(\alpha\lambda_m\{K\}) - \lambda_m\{K_p\}\frac{\alpha^2}{4} \left\|J(\boldsymbol{q})\right\|^2 > 0$, al dividir entre $\lambda_m\{K_p\}$ y α ambos lados de la desigualdad entonces se debe cumplir que:

  $(\lambda_m\{K_v\} - \varepsilon)(\lambda_m\{K\}) - \frac{\alpha}{4} \left\|J(\boldsymbol{q})\right\|^2 > 0$

Debido a las hipótesis establecidas al inicio de esta sección, se verifica que Q es una matriz definida positiva y por lo tanto $\dot{V}$ es una ecuación semidefinida negativa en forma global.

IV.6.2 Conclusión sobre estabilidad en el origen y acotamiento de las soluciones

Se ha demostrado que $\dot{V}(\boldsymbol{z}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2) \leq 0$ por lo tanto podemos concluir que V es una función de Lyapunov; el teorema IV.1 garantiza estabilidad del origen y las soluciones $\boldsymbol{z}(t), \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(t), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(t)$ son acotadas para toda condición inicial $\boldsymbol{z}(0)$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(0)$, $\tilde{u}(0)$, $\tilde{v}(0)$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(0)$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(0)$, i.e.,

$$\boldsymbol{z}(t) \in L_\infty^n, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(t) \in L_\infty^n, \quad \tilde{u}, \tilde{v} \in L_\infty, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 \in L_\infty^2 \;\; y \;\; \tilde{\theta}_2 \in L_\infty^m \tag{55}$$

IV.7 Análisis de convergencia

En el análisis previo se demostró que las soluciones del sistema son acotadas, pero aún falta concluir sobre el cumplimiento del objetivo de control ya enunciado anteriormente

> *En términos del error en características de imagen $[\tilde{u} \;\; \tilde{v}]^T$, el objetivo de control es asegurar que $\lim_{t\to\infty}[\tilde{u}(t) \;\; \tilde{v}(t)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, por lo menos para condiciones iniciales $[\tilde{u}(0) \;\; \tilde{v}(0)]^T$ y $\dot{\boldsymbol{q}}(0)$ suficientemente pequeños.*

El lema IV.1 [Kelly, 1995] proporciona condiciones suficientes sobre funciones pertenecientes al espacio L_2^n para que éstas tiendan asintóticamente a cero.

Lema IV.1 *Considérese una función continua $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$. Supóngase que la función f satisface las siguientes hipótesis:*

- $\boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{f} \in L_\infty^n$,
- $\boldsymbol{f} \in L_2^n$

entonces necesariamente se tiene que $lim_{t\to\infty}\boldsymbol{f}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

◇

Por lo tanto, para demostrar que $lim_{t\to\infty}[\tilde{u}(t) \quad \tilde{v}(t)]^T = \mathbf{0}$ es suficiente que $[\tilde{u} \quad \tilde{v}]^T \in L_2^2$, $[\dot{\tilde{u}} \;\; \dot{\tilde{v}}]^T \in L_\infty^2$ y $[\dot{\tilde{u}} \;\; \dot{\tilde{v}}]^T \in L_2^2$.

IV.7.1 Norma euclidiana del error en coordenadas de imagen

En la expresión (55) se muestra que $[\tilde{u}\ \tilde{v}]^T \in L_\infty^2$. Aún falta demostrar que $[\dot{\tilde{u}}\ \dot{\tilde{v}}]^T \in L_\infty^2$ y $[\tilde{u}\ \tilde{v}]^T \in L_2^2$; así aplicando el lema IV.1 podremos concluir sobre la convergencia a cero de $[\tilde{u}\ \tilde{v}]^T$.

En el siguiente desarrollo se obtendrá una cota máxima para $\left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2$. Una expresión equivalente para la desigualdad (56) se muestra a continuación

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} \| \dot{\boldsymbol{q}} \| \\ \\ \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \quad \lambda_m\{K_v\} - \varepsilon & -\frac{\alpha}{2}\| J(\boldsymbol{q}) \| \\ \\ 0 \quad -\frac{\alpha}{2}\| J(\boldsymbol{q}) \| & \alpha\lambda_m\{K\} \end{bmatrix}}^{Q} \begin{bmatrix} \| \dot{\boldsymbol{q}} \| \\ \\ \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\| \end{bmatrix}. \tag{56}$$

Debido a que Q es definida positiva, se desprende que

$$\dot{V}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{q}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2) \leq \ - \ \lambda_m\{Q\} \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2. \tag{57}$$

Integramos entre 0 y $T(\in \mathbb{R}_+)$ ambos lados de la ecuación anterior:

$$V(\boldsymbol{z}(T), \dot{\boldsymbol{q}}(T), \tilde{u}(T), \tilde{v}(T), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(T), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(T)) - V(\boldsymbol{z}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(0))$$
$$\leq - \int_0^T \lambda_m\{Q\} \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2 d\sigma$$

ó

$$\begin{aligned} -V(\boldsymbol{z}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(0)) \quad &\leq \quad -\lambda_m\{Q\} \int_0^T \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2 d\sigma \\ &- \ V(\boldsymbol{z}(T), \dot{\boldsymbol{q}}(T), \tilde{u}(T), \tilde{v}(T), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(T), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(T)). \end{aligned}$$

Debido a que $V(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{q}}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)$ es una función no negativa cuya derivada temporal es no positiva entonces

$$\mathbf{0} \ \leq \ V(\boldsymbol{z}(T), \dot{\boldsymbol{q}}(T), \tilde{u}(T), \tilde{v}(T), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(T), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(T)) \ \leq \ V(\boldsymbol{z}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(0)).$$

Por lo tanto de la desigualdad previa podemos eliminar el último término y obtener la siguiente desigualdad

$$-V(\boldsymbol{z}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(0)) \;\leq\; -\lambda_m\{Q\} \int_0^T \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2 d\sigma$$

y finalmente

$$\int_0^T \left\| \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \right\|^2 d\tau \;\leq\; \frac{V(\boldsymbol{z}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(0), \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(0))}{\lambda_m\{Q\}}.$$

El miembro derecho de la desigualdad representa a una cantidad finita, el miembro izquierdo representa la integral de la norma euclidiana al cuadrado de las características de imagen $[\tilde{u} \quad \tilde{v}]^T$ y como está acotada superiormente concluímos que

$$\tilde{u}, \tilde{v} \in L_2. \tag{58}$$

IV.7.2 Acotamiento de velocidad del error en coordenadas de imagen

En referencia a la ecuación del error de velocidad en coordenas de visión (42), tenemos que todos los término del lado derecho están acotados: previamente se estableció que K es una matriz simétrica y definida positiva; $J(\boldsymbol{q})$, $f(t)$ y $\dot{f}(t)$ se especificaron acotadas; de la expresion (55) tenemos que $\tilde{u}(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(t) \in L_\infty$ y del análisis de estabilidad del lazo interno se demostró convergencia asintótica a cero de las velocidades articulares, (45). Por lo tanto podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} \in L_\infty^2. \tag{59}$$

IV.7.3 Cumplimiento del objetivo de control

En las expresiones (55), (58), (59) se mostró que $[\tilde{u} \;\; \tilde{v}]^T \in L_\infty^2$, $[\tilde{u} \;\; \tilde{v}]^T \in L_2^2$ y $[\dot{\tilde{u}} \;\; \dot{\tilde{v}}]^T \in L_\infty^2$, respectivamente. Por lo tanto de acuerdo al lema IV.1 podemos concluir que el error de posición en características de imagen $[\tilde{u} \quad \tilde{v}]^T$ tiende asintóticamente al vector nulo

$$\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}\dot{\tilde{u}}(t)\\ \dot{\tilde{v}}(t)\end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$$

demostrándose el cumplimiento del objetivo de control.

V Simulaciones.

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones realizadas considerando un robot de 2 g.d.l. con control servo visual en configuración de cámara fija y error en coordenadas de imagen. El sistema simulado es semejante al mostrado en las figuras 1 y 2. Tomando como referencia el documento [Kelly, et al., 1999] se trataron de mantener los mismos valores iniciales, parámetros y trayectoria supuesta para el objeto móvil.

La primera simulación se realizó considerando un sistema ideal, al cual se le fueron agregando elementos en las siguientes simulaciones, acercándolo al sistema en condiciones reales.

V.1 Sistema ideal

Primeramente se simula el sistema considerándolo *ideal*, entendiendo con esto que las señales involucradas (sobre todo velocidades) son continuas, es decir, que disponemos de sus valores actualizados en cualquier instante de tiempo y se le designa como *sistema en tiempo continuo*; además, se desprecia la fricción en el modelo del robot. En la figura 18 se muestra un esquema del sistema bajo condiciones ideales.

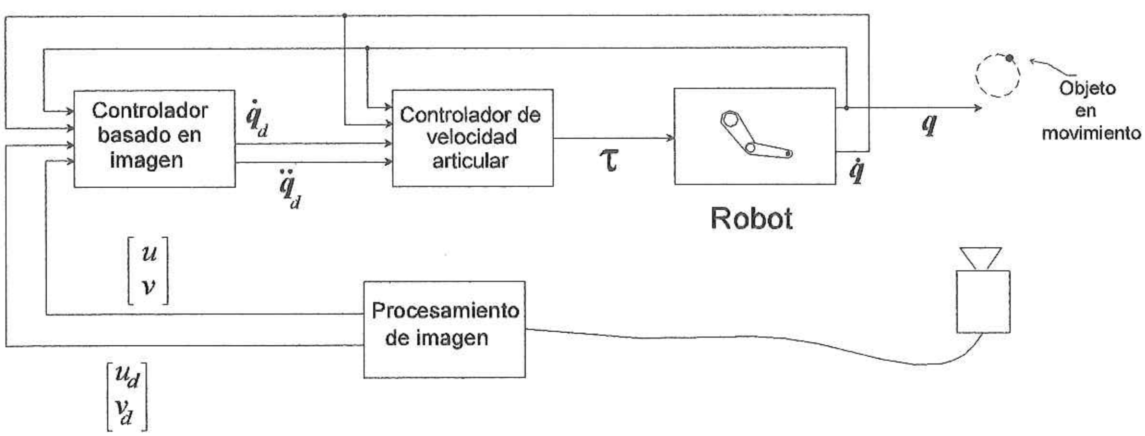

Figura 18: Diagrama de bloques para sistema considerado ideal.

V.2 Sistema en tiempo discreto

Si consideramos que $\boldsymbol{q}$, $[u(t)\ \ v(t)]^T$ y $[u_d(t)\ \ v_d(t)]^T$ se actualizan sólo en determinados instantes de tiempo, denominados *instantes de muestreo*, designaremos al sistema como *sistema en tiempo discreto*. En la figura 19 se muestra el diagrama de bloques correspondiente al sistema en tiempo discreto, donde T_1 es el período de muestreo de la posición articular y T_2 corresponde al periodo de actualización de la posición de los centroides del extremo operativo del robot y del objeto móvil.

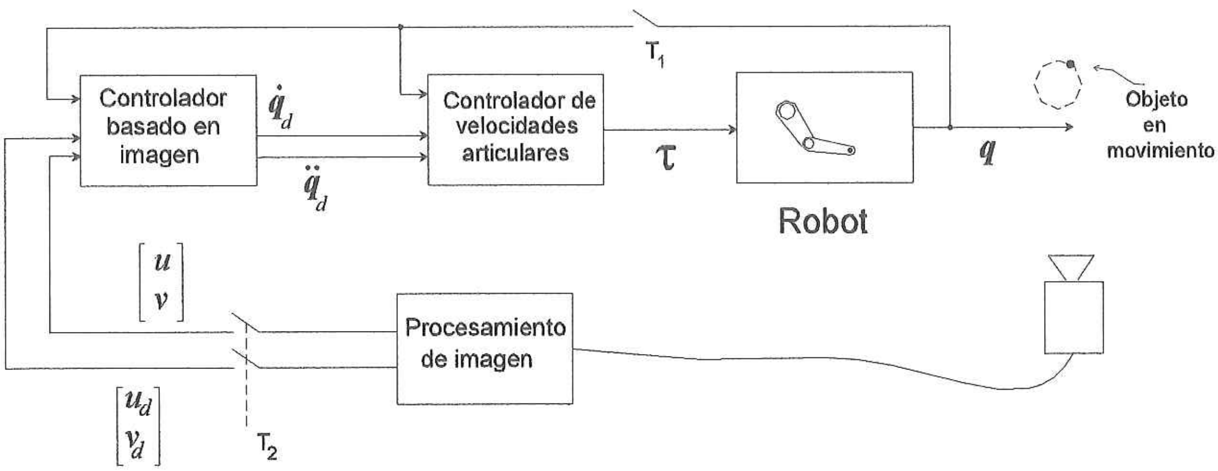

Figura 19: Diagrama de bloques para sistema en tiempo discreto y sin fricción.

V.3 Robot de 2 g.d.l. del CICESE

V.3.1 Condiciones iniciales del robot

La configuración inicial asignada al robot es la posición articular inicial de $[q_1(0)\ \ q_2(0)]^T = [10\ \ 70]^T$ [grados]. Correspondiéndole las coordenadas en características de imagen de $[u(0)\ \ v(0)]^T = [262\ \ 81]^T$ [pixeles]; con velocidad articular inicial de $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ [grados/seg].

V.3.2 Parámetros del robot

Las características del robot fueron tomadas de [Reyes, 1997]. El brazo mecánico cuenta con un motor de transmisión directa en cada una de sus articulaciones. Estos servo actuadores se comportan como fuentes ideales de par; el motor de la articulación 1 es capaz de proporcionar al eslabón 1 un par de 200 [Nm], mientras que el motor de la articulación 2 genera un par máximo de 15 [Nm]. Cada motor tiene integrado un sensor de posición midiendo los desplazamientos articulares q_1 y q_2 de cada eslabón. La longitud de cada eslabón es de 0.45 [m] por lo tanto, el espacio de trabajo del robot manipulador es de 0.98 [m] de radio.

Las parámetros dinámicos del robot manipulador se encuentran resumidos en la tabla IV del apéndice A, también en ese apéndice se muestra el modelo dinámico del robot y la ecuación cinemática correspondiente.

V.3.3 Compensación de fricción

En las simulaciones que lo señalan se incluye el efecto de fricción viscosa y de Coulomb en el modelo del robot, en esos casos se utiliza el modelo de robot descrito por (4). En el algoritmo de control del lazo interno (27) se incluye un término que compensa la fricción viscosa

$$\boldsymbol{\tau}_{f_v} = F_v\, \dot{\boldsymbol{q}}, \tag{60}$$

obteniéndose

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\left[\ddot{\boldsymbol{q}}_d + K_v\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_p\boldsymbol{z}\right] + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\tau}_{f_v}. \tag{61}$$

La matriz F_v se describe en la ecuación (6). En el apéndice A se muestran los valores numéricos de los coeficientes de fricción correspondientes al robot de 2 g.d.l. del CICESE.

V.4 Sistema de visión

Los parámetros de la cámara de video son distancia focal $\lambda = 0.008$ [m], factor de escala $\alpha_u = \alpha_v = 72727$ [pixeles/m]. La cámara se supone colocada a una distancia de $o_{C_3} = 0.64$ [m] de frente al plano de trabajo del brazo manipulador y con una rotación $\theta = 0$ [grados] respecto al eje R_3 del marco coordenado del robot Σ_R. El eje de la lente de la cámara intersecta al plano del robot en $\boldsymbol{o}_C = [0.76 \quad -0.48]^T$ [m] e intersecta al centro geométrico del plano CCD en $\boldsymbol{o}_I = \mathbf{0}$. La posición en pixeles del centro geométrico del plano CCD con respecto al marco coordenado de la pantalla del monitor Σ_D es de $u_0 = 320$ [pixeles] y $v_0 = 240$ [pixeles].

Puesto $\theta = 0$ y $\boldsymbol{o}_I = \mathbf{0}$, la ecuación (19) de nuestro sistema de visión queda reducida a

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\lambda - o_{C_3}} \begin{bmatrix} -\alpha_u & 0 \\ 0 & \alpha_v \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{x}_R(\boldsymbol{q}) - \begin{bmatrix} o_{C_1} \\ o_{C_2} \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{62}$$

V.5 Trayectoria del objeto móvil

Para las simulaciones supondremos que el objeto recorre una trayectoria en forma de circunferencia, descrita por

$$\begin{aligned} u_d &= u_c + r_0 \operatorname{sen}(t) \quad \text{[pixeles]}, \\ v_d &= v_c + r_0 \cos(t) \quad \text{[pixeles]} \end{aligned}$$

la cual cumple con ser de la forma (26):

$$\begin{bmatrix} u_d(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}_1 + f(t)\boldsymbol{\theta}_2. \tag{63}$$

Por lo tanto las coordenadas del centro, radio y la forma de la trayectoria quedarán especificadas por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_1 &= \begin{bmatrix} \theta_{1u} \\ \theta_{1v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} && \in \mathbb{R}^2, && (64)\\
\boldsymbol{\theta}_2 &= \theta_2 = r_0 && \in \mathbb{R}, && (65)\\
\boldsymbol{f}(t) &= \begin{bmatrix} f_u(t) \\ f_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} && \in \mathbb{R}^2. && (66)
\end{aligned}
$$

La posición de un punto en pantalla, representando al centroide del objeto móvil a seguir, $[u_d(t) \quad vd(t)]^T$ está dada por

$$
\begin{aligned}
u_d(t) &= 220 + 55\ \operatorname{sen}(t) \quad \text{[pixeles]}, && (67)\\
v_d(t) &= 220 + 55\ \cos(t) \quad \text{[pixeles]}. && (68)
\end{aligned}
$$

V.6 Algoritmos de control

El algoritmo de control se implementa en la computadora (controlador). Para la simulación se supone que la computadora cuenta con una tarjeta de adquisición de datos que tiene salidas hacia los motores y entradas para los sensores de posición; también dispone de una tarjeta digitalizadora de imagen que se conecta a la cámara de video.

V.6.1 Controlador de velocidad

Al controlador de velocidad (27) se le asignan ganancias K_p y K_v constantes, diagonales y definidas positivas, por lo tanto

$$
K_p = \begin{bmatrix} k_{p_1} & 0 \\ 0 & k_{p_2} \end{bmatrix}, \quad (69)
$$

$$
K_v = \begin{bmatrix} k_{v_1} & 0 \\ 0 & k_{v_2} \end{bmatrix}. \quad (70)
$$

Se tomaron las ganancias del lazo externo, $K_p = diag\{64\}$ [Nm/pixeles^2] y $K_v = diag\{16\}$ [Nm seg/rad], de pruebas realizadas con anterioridad [Kelly, *et al.*, 1999].

V.6.2 Leyes de adaptación

El controlador sólo tiene certidumbre de la forma de la trayectoria $[f_u(t) \quad f_v(t)]^T = [\mathrm{sen}(t) \quad \cos(t)]^T$.

Las leyes de adaptación descritas por las ecuaciones (32) y (33), resultan

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{1u} & 0 \\ 0 & \Gamma_{1v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}, \tag{71}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \Gamma_2 \left[\begin{bmatrix} \dot{f}_u(t) \\ \dot{f}_v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_u(t) \\ f_v(t) \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \tag{72}$$

donde las ganancias quedan descritas por

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{1u} & 0 \\ 0 & \Gamma_{1v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \tag{73}$$

$$\Gamma_2 \in \mathbb{R}, \tag{74}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{1u} & 0 \\ 0 & K_{1v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{75}$$

y sus valores se obtendrán en la etapa de sintonía como se describe más adelante.

V.6.3 Diferenciación e integración numérica

El sistema de robot diseñado en CICESE sólo tiene retroalimentación de las posiciones articulares $\boldsymbol{q}$. Por ello, las velocidades de las articulaciones $\dot{\boldsymbol{q}}$, necesarias para que se implementen los algoritmos de control propuestos, se calculan mediante una diferenciación numérica como:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_n = \frac{\boldsymbol{q}_n - \boldsymbol{q}_{n-1}}{T_1}. \tag{76}$$

El subíndice n designa al valor actual, mientras que el subíndice $n-1$ denota al valor anterior.

Así mismo, $\dot{z}$ anteriormente descrita por la ecuación (28) se calcula mediante integración numérica

$$z_n = (\dot{q}_d - \dot{q}) \cdot T_1 \ + \ z_{n-1}. \tag{77}$$

Debido a la discretización en tiempo del subsistema de procesamiento de imagen, los centroides del extremo operativo del robot y del objeto móvil en coordenadas de pantalla, $[u \ \ v]^T$ y $[u_d \ \ v_d]^T$, se calculan con un periodo de muestreo T_2. Por ello, las leyes de adaptación $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $\hat{\theta}_2$ referidas anteriormente por las ecuaciones (71) y (72), ahora se calculan mediante integración numérica

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1_n} = \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \cdot T_2 \ + \ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1_{n-1}}, \tag{78}$$

$$\hat{\theta}_{2_n} = \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot [\dot{\boldsymbol{f}}(t) + K \ \boldsymbol{f}(t)]^T \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \cdot T_2 \ + \ \hat{\theta}_{2_{n-1}} \tag{79}$$

V.7 Configuraciones consideradas

El sistema básico a simular es semejante al de la figura 15, pero como se señaló anteriormente, se realizaron algunas modificaciones para considerar el efecto de la fricción; del muestreo de las posiciones articulares, de la cadencia de obtención de la posición (centroide) del objeto móvil y del extremo operativo.

En la tabla I se muestran las ecuaciones del sistema que se mantienen inalterables respecto a las configuraciones consideradas en las simulaciones. En la tabla II se presentan las ecuaciones correspondientes a sistemas con y sin fricción y en la tabla III se tiene las ecuaciones de los sistemas de tiempo continuo y los de tiempo discreto.

Tabla I: Ecuaciones para todo sistema.

Concepto	Ecuación
Matriz de Inercia	(85)
Matriz de Coriolis	(86)
Pares Gravitacionales	(87)
Modelo Cinemático	(88)
Jacobiano	(13)
Determinante del jacobiano	(14)
Modelo de visión	(62)
Velocidad articular deseada	(38)
Aceleración articular deseada	(39)

Tabla II: Ecuaciones según sea considerada la fricción.

Concepto	Ecuación sin fricción	Ecuación con fricción
Modelo del robot	(1)	(4) (2) (3) (5)
Ley de control lazo interno	(27)	(60) (61)

Tabla III: Ecuaciones según tiempo continuo o discreto.

Concepto	Ecuación para tiempo continuo	Ecuación para tiempo discreto
Lazo interno	(28)	(77)
Leyes de Adaptación	(32) (33)	(78) (79)

V.8 Resultados de simulación

V.8.1 Simulación 1: Sistema ideal

Partiendo de lo más sencillo, la primera simulación fué sobre el supuesto de que el sistema es de tiempo continuo y sin fricción. Este es el caso ideal.

Se estuvieron ajustando los valores de las ganancias K, Γ_1 y Γ_2, hasta lograr que las coordenadas de imagen del extremo operativo del robot tendieran a igualarse con las coordenadas del objeto en movimento; es decir $\lim_{t\to\infty}[\tilde{u}(t) \;\; \tilde{v}(t)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. La figura 20 muestra la evolución en el tiempo del extremo operativo del robot, en ella se observa cómo finalmente el extremo operativo llega a dibujar un círculo con las características de radio y ubicación de su centro iguales a las que definen la trayectoria (67) y (68), del objeto móvil a ser seguido. En la figura 21, a los 10 seg, la norma del error en coordenadas de visión ya es menor a 1 pixel ($\approx$ 0.15 pixeles).

Se continuó con la sintonía de las ganancias K, Γ_1 y Γ_2; ahora, con el propósito de que los pares τ_1 y τ_2 no excedieran los pares máximos especificados por el fabricante para los motores que se encuentran en las articulaciones del robot. Encontrando apropiadas, la asignación de los valores $K = diag\{10\}$ [seg^{-1}], $\Gamma_1 = diag\{1\}$ [seg^{-1}] y $\Gamma_2 = 0.1$ [sin unidades]. En la figura 22 se observa que la norma del error en los parámetros de adaptación presentan convergencia a 0. En la figura 23 se pueden observar los pares aplicados por los motores, no exceden los valores máximos permitidos por el fabricante.

Una vez sintonizado el sistema completo, el resto de las simulaciones (excepto la simulación 7) se hicieron con los siguientes parámetros

$$K_p = diag\{64\} \text{ [Nm/pixeles}^2\text{]} \tag{80}$$

$$K_v = diag\{16\} \text{ [Nm seg/rad]} \tag{81}$$

$$K = diag\{10\} \text{ [seg}^{-1}\text{]} \tag{82}$$

$$\Gamma_1 = diag\{1\} \ [\mathrm{seg}^{-1}] \tag{83}$$

$$\Gamma_2 = 0.1. \tag{84}$$

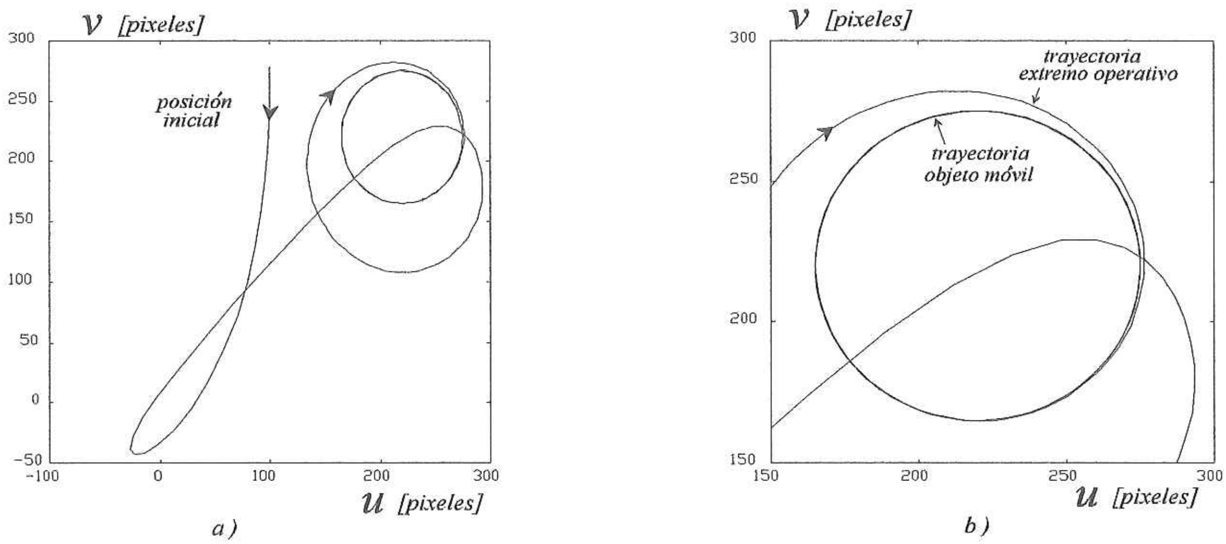

Figura 20: Trayectoria del extremo operativo del robot. Sistema en tiempo continuo, sin fricción.

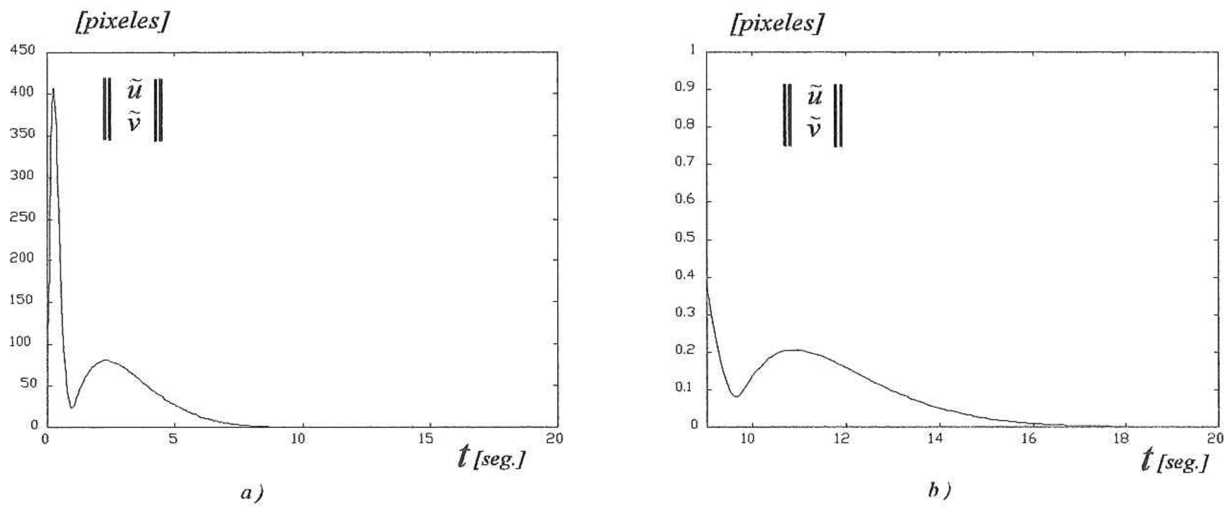

Figura 21: Norma del error en coordenadas de imagen. Sistema en tiempo continuo, sin fricción.

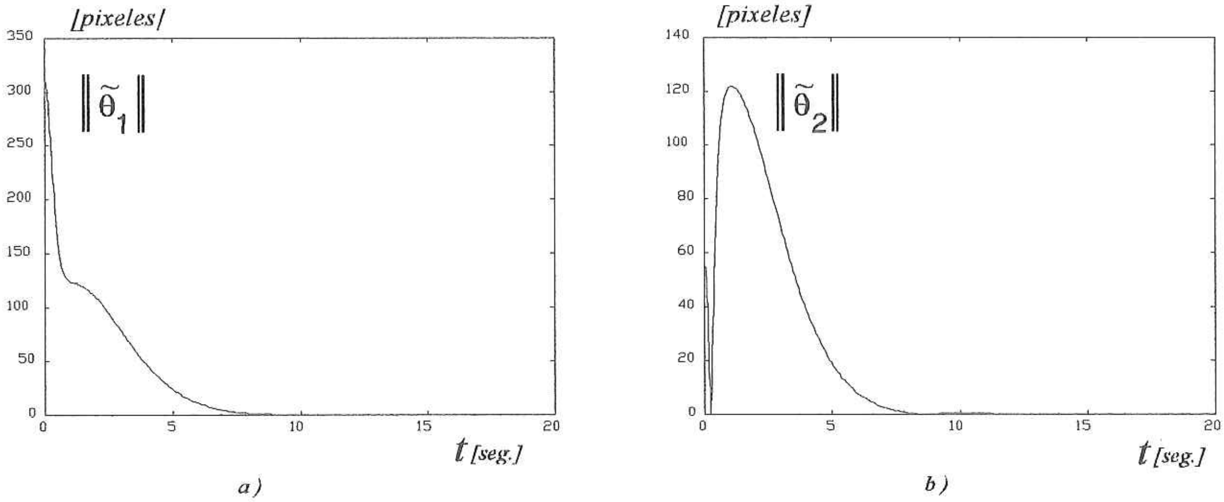

Figura 22: Norma del error paramétrico. Sistema en tiempo continuo, sin fricción.

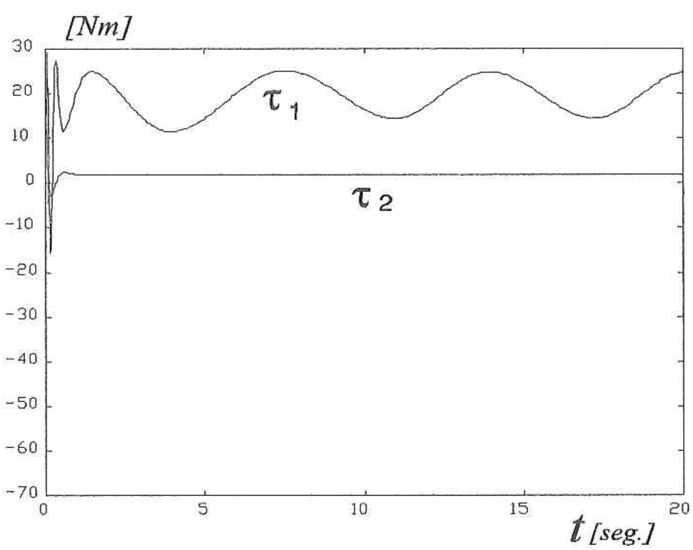

Figura 23: Pares aplicados por los motores. Sistema en tiempo continuo, sin fricción.

V.8.2 Simulación 2: Sistema en tiempo continuo, con fricción.

En esta simulación se incluye la fricción viscosa y de Coulomb en el modelo del robot, como se indica en la ecuación (4). En el controlador, se añade un término de compensación, indicado en la ecuación (61); donde el término τ_{f_v} representa la componente de compensación para la fricción viscosa. A la compensación no se agrega la fricción de Coulomb, porque si bien para efectos de simulación la fricción queda completamente compensada, para cuestiones reales produce un comportamiento indeseable en el robot. En sí, el tema de compensación de fricción es a la fecha un tema abierto de investigación.

En la figura 24, se muestra la trayectoria que recorre el extremo operativo del robot; en ella, se observa como el desempeño del sistema se ve afectado. Particularmente en la figura 24*b*, se observan zonas donde la trayectoria del extremo operativo difiere notoriamente de la trayectoria circular del objeto móvil. La norma del error mostrada en la figura 25 llega a presentar unos picos de hasta 31 pixeles y mínimos de hasta 2 pixeles.

La deformación en la trayectoria del extremo operativo mostrada y los picos presentes en la norma del error en coordenadas de imagen son debido a la componente de fricción de Coulomb que no está compensada, esto lo podemos constatar en las gráficas mostradas en la figura 26. En la figura 26*a* y 26*b* se trazan líneas referenciando a los cruces por cero de las velocidades articulares; estos cambios de dirección en las velocidades articulares provocan saltos en los pares generados en el controlador, esto se indica en las regiones marcadas por A, B, C y D en las gráficas de la figura 26*c* y 26*d*. Los cambios bruscos en los pares articulares, señalados en los puntos 1, 2, 3 y 4 traen a su vez, como consecuencia, desvíos en la trayectoria que recorre el extremo operativo, alejándose de la trayectoria del objeto móvil o trayectoria deseada y provocando picos en las gráfica de los errores en coordenadas de imagen, ver gráficas en las figuras 26*e* y 26*f*. Cabe aclarar que tanto los picos presentes en el par τ_1 como en el par τ_2 provocan incremento en los errores $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$, pero en la gráfica sólo se muestra el efecto de τ_1 en $\tilde{u}$

y τ_2 en $\tilde{v}$ para evitar saturar las gráficas con líneas de referencia.

En las gráficas de la figura 27, los errores paramétricos $\tilde{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2$ muestran una tendencia a cero, pero el efecto signo de la componente de fricción de Coulomb presente en el modelo del robot provoca saltos en las gráficas.

Los pares, figura 28, siguen conservando los márgenes de seguridad.

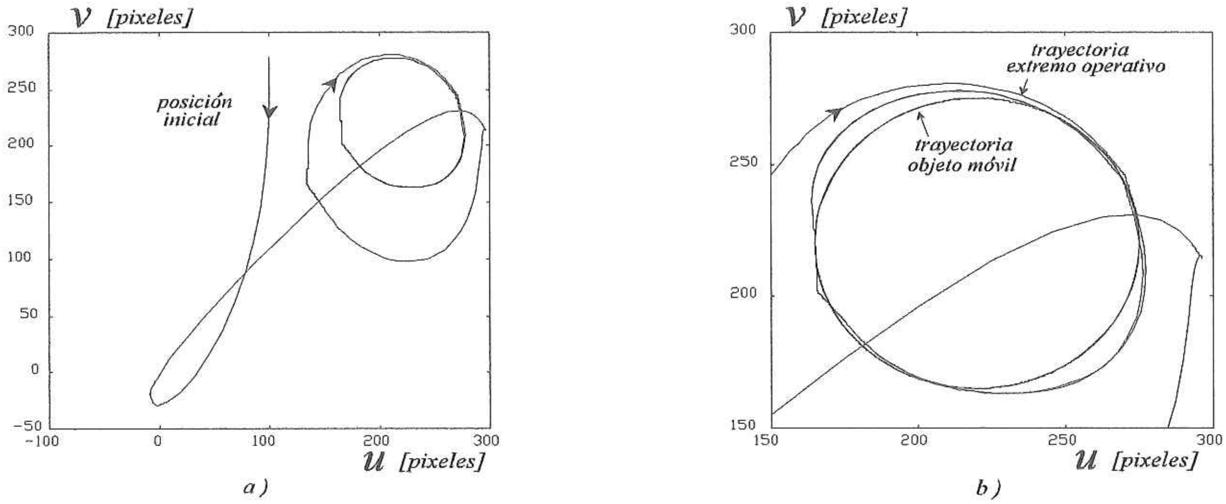

Figura 24: Trayectoria del extremo operativo del robot. Sistema en tiempo continuo, con fricción.

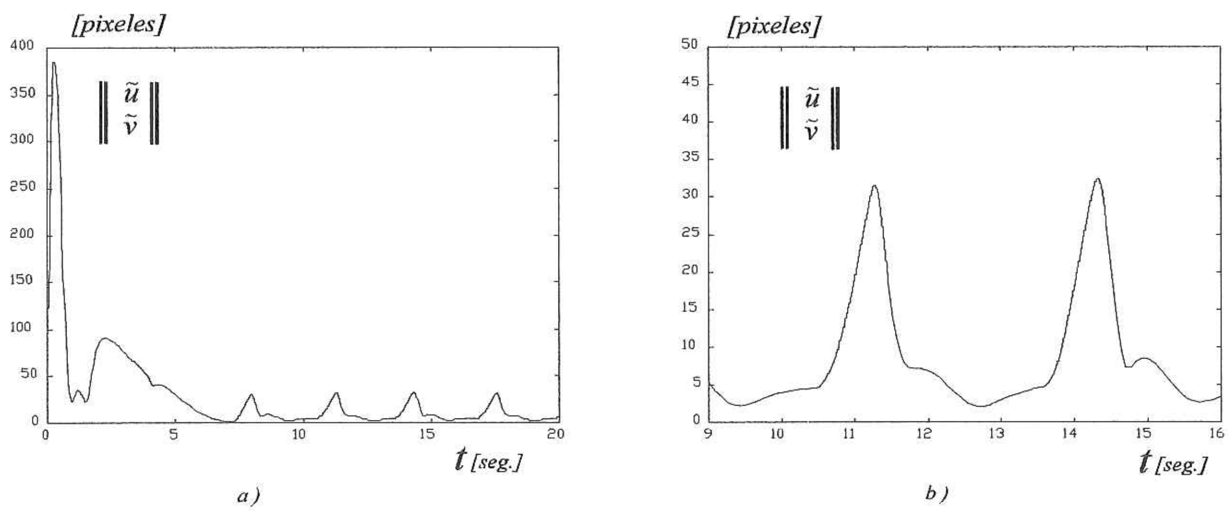

Figura 25: Norma del error en coordenadas de imagen. Sistema en tiempo continuo, con fricción.

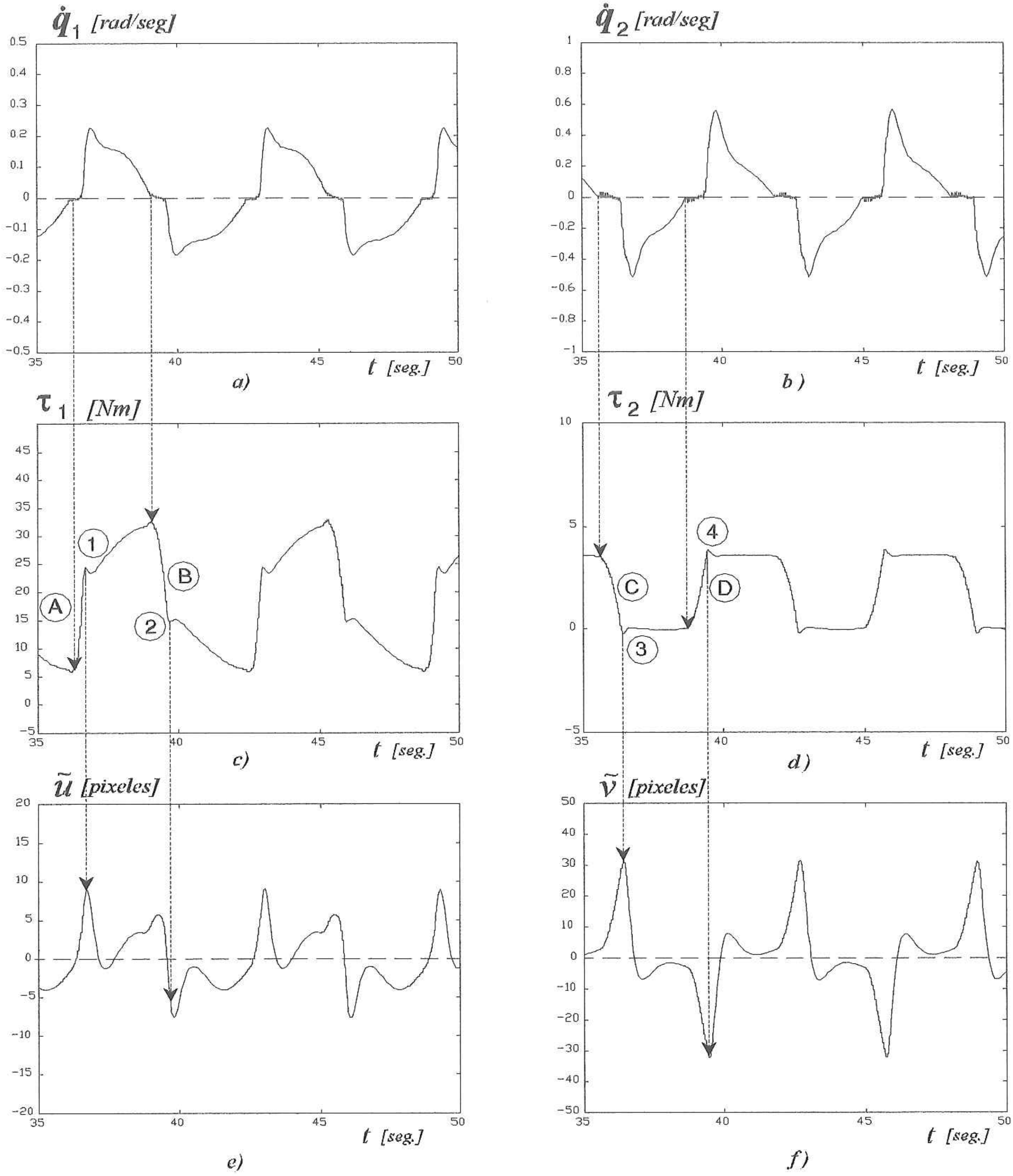

Figura 26: Efectos de la fricción de Coulomb presente en el modelo del robot.

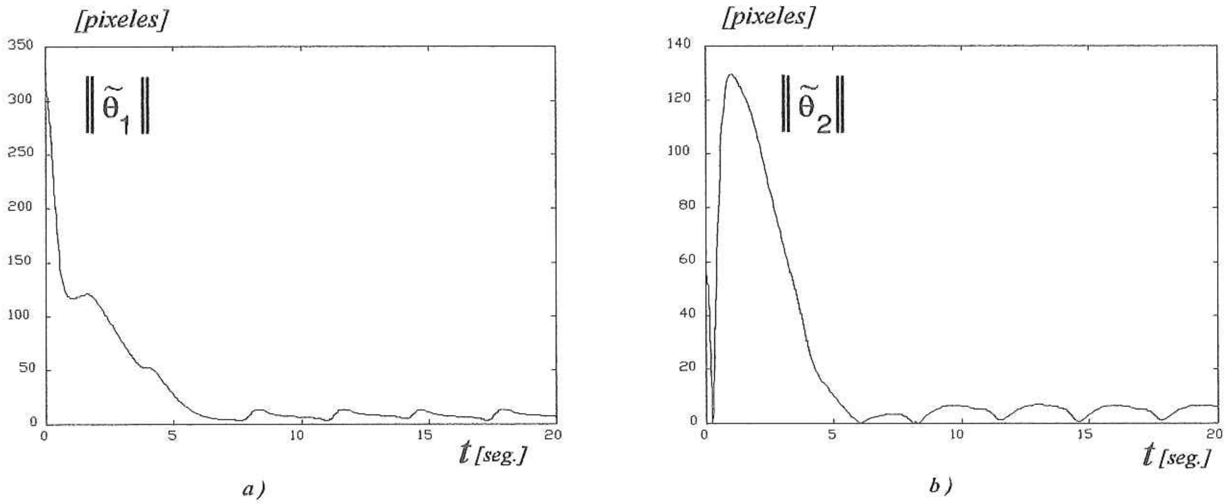

Figura 27: Norma del error paramétrico . Sistema en tiempo continuo, con fricción.

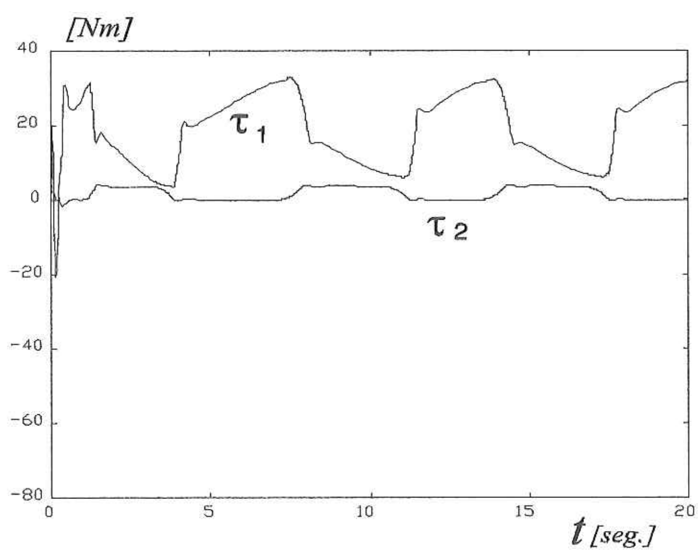

Figura 28: Pares aplicados por los motores. Sistema en tiempo continuo, con fricción.

V.8.3 Simulación 3: Sistema en tiempo discreto, sin fricción

En esta simulación se conservaron los valores de los parámetros utilizados en el caso continuo sin fricción. Se utiliza el diagrama de bloques mostrado en la figura 19, donde las posiciones articulares q_1 y q_2 se actualizan cada 2.5 mseg, $T_1 = 0.0025$ [seg]; para la cámara suponemos que al lazo de retroalimentación visual le toma 50 mseg, $T_2 = 0.050$ [seg], en la captura y procesamiento de la imagen para obtener el centroide del extremo operativo del robot y del objeto móvil.

Se observa en la figura $29a$ la tendencia al cumplimiento del objetivo de control, ya que el extremo operativo del robot recorre la circunferencia del objeto móvil; en el acercamiento de la figura $29b$ se puede observar una muy pequeña diferencia entre ambas trayectorias. En la figura $30a$ la norma del error parece seguir una tendencia a cero pixeles y si hacemos un acercamiento, ver figura $30b$, podremos darnos cuenta que el tiempo de muestreo de la cámara es quien está evitando este desvanecimiento.

En la figura 31 los errores paramétricos siguen presentando convergencia a cero, sin verse afectado en una medida notoria por los efectos del muestreo.

Nótese como el efecto de la discretización de los bloques afecta la forma de los pares en la figura 32. Las altas frecuencias agregadas son debido al muestreo de la cámara como se podrá ver en un acercamiento tomado a estos pares, figura $32b$.

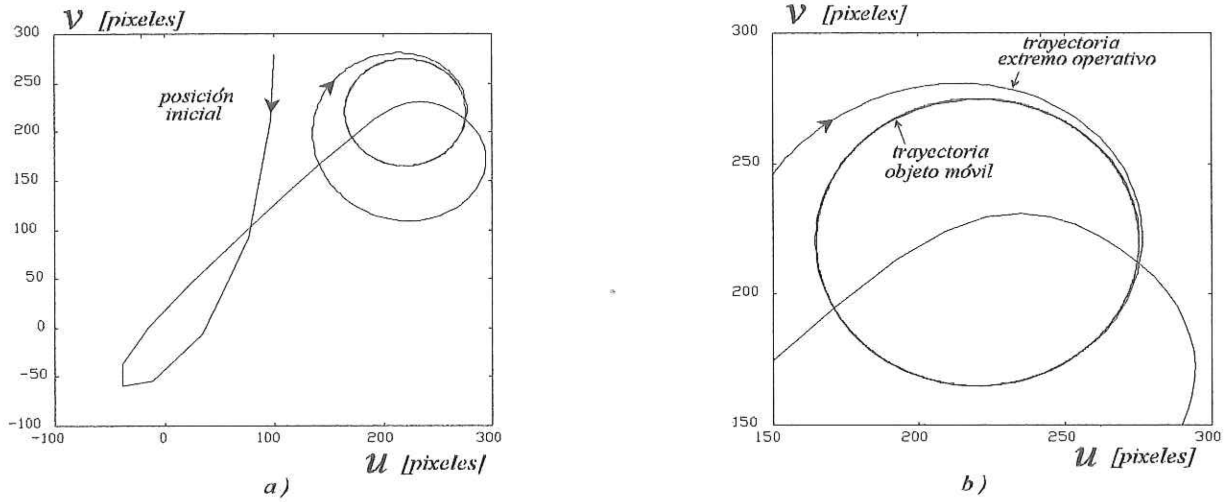

Figura 29: Trayectoria del extremo operativo del robot. Sistema en tiempo discreto, sin fricción en el modelo del robot.

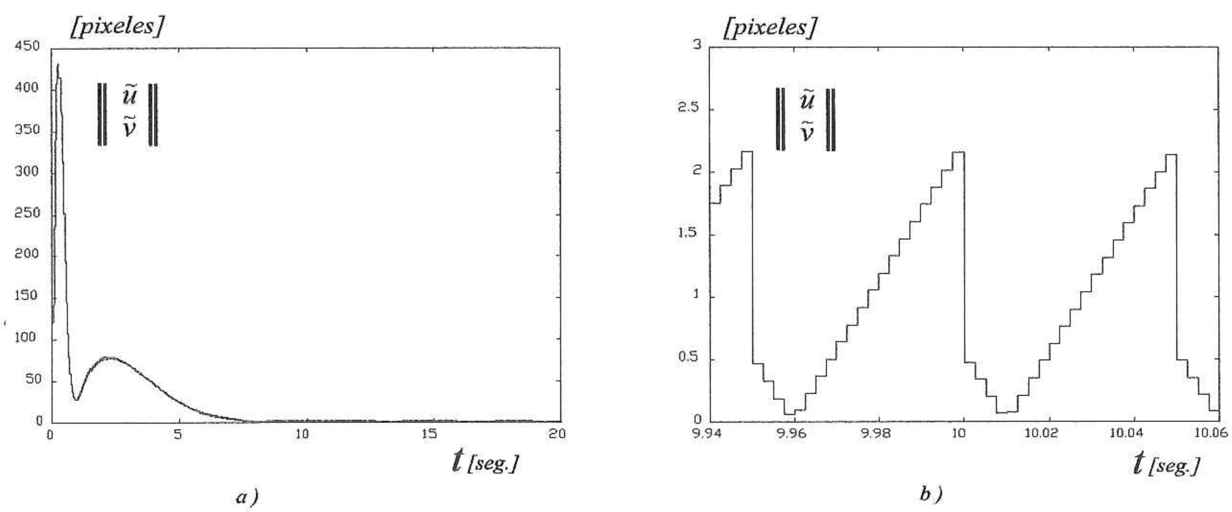

Figura 30: Norma del error en coordenadas de imagen. Sistema en tiempo discreto, sin fricción en el modelo del robot.

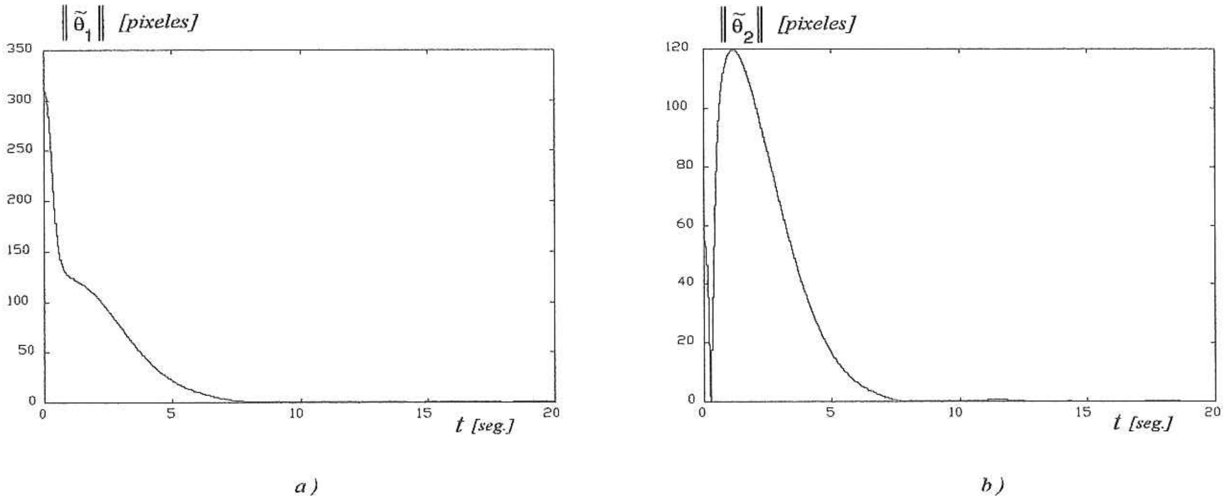

Figura 31: Errores paramétricos. Sistema en tiempo discreto, sin fricción en el modelo del robot.

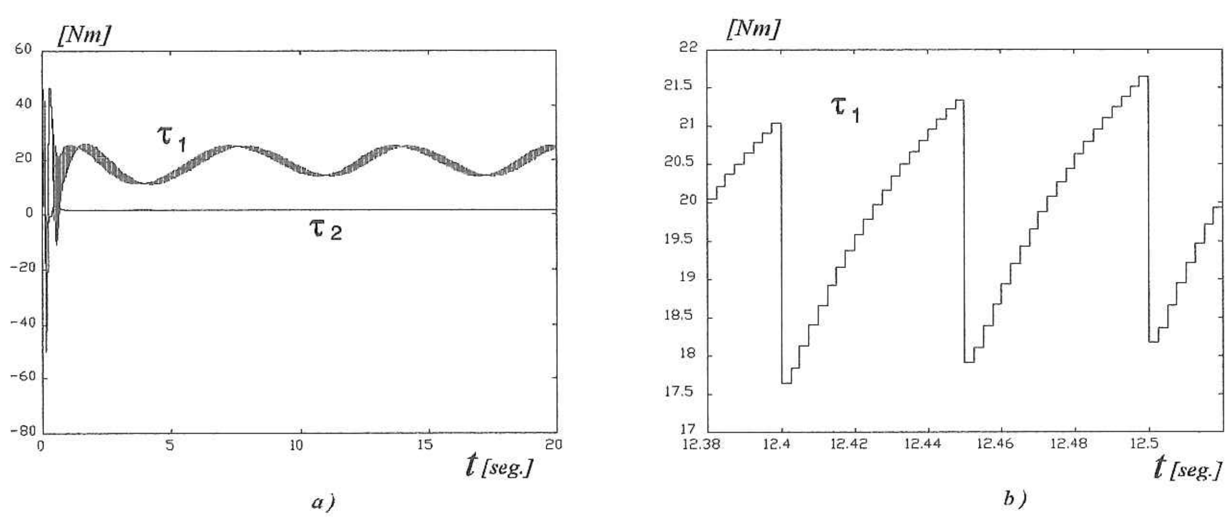

Figura 32: Pares aplicados por los motores. Sistema en tiempo discreto, sin fricción en el modelo del robot.

V.8.4 Simulación 4: Sistema en tiempo discreto, sin fricción. Menor periodo de muestreo en el sistema de visión

En esta sección se considera que el procesamiento de la imagen es de 60 marcos/seg. con un correspondiente periodo de muestreo de 17 mseg., aproximadamente. Esto se hizo con el propósito de verificar que las distorsiones, presentes en las figuras 30 y 32, tienen como origen el tiempo que tarda en actualizarse las coordenadas de los centroides del extremo operativo y del objeto móvil, $[u \;\; v]^T$ y $[u_d \;\; v_d]^T$ respectivamente.

Se observa en la figura 33*b* que el círculo de la trayectoria es más nítido que en la figura 29*b*, esto indica que la diferencia entre la trayectoria del objeto móvil y la que recorre el extremo operativo del robot se ha reducido.

En las gráficas 34*a* y 35, la convergencia a cero se hace con una mayor nitidez respecto a la mostrada en las figuras 30*a* y 31, es decir se presentan menos oscilaciones.

En el acercamiento de la norma del error en coordenadas de imagen, figuras 30*b* y 34*b*, se observa que los picos presentes tiene una amplitud menor a 1 pixel para el segundo caso, mientra que en el primero eran mayores a 2 pixeles. También en los pares generados por el controlador se puede observar una reducción en sus variaciones, comparar figuras 30 y 34.

En la figura 36*b* que muestra un acercamiento a los pares generados por el controlador, se observa que cuando se actualiza las coordenadas de imagen cada 17 mseg, el par τ_1 presenta un cambio de 1.5 [Nm]; mientras que en la figura 32*b* se observa como la actualización de coordenadas de imagen cada 50 mseg. provoca un salto negativo en el par τ_1 de 3.5 [Nm].

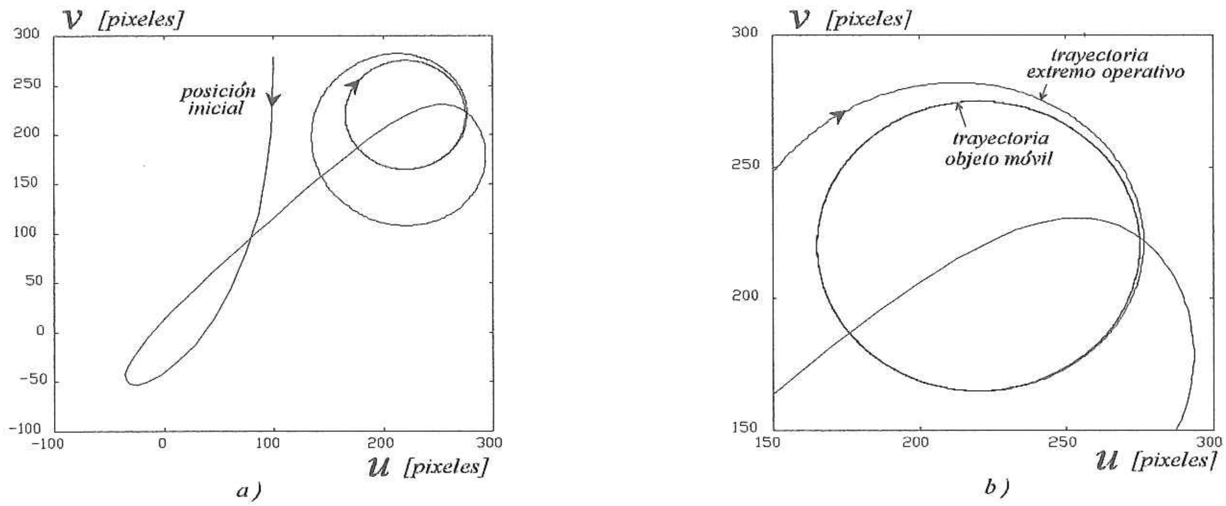

Figura 33: Trayectoria del extremo operativo del robot. Sistema en tiempo discreto, sin fricción y periodo de muestreo reducido.

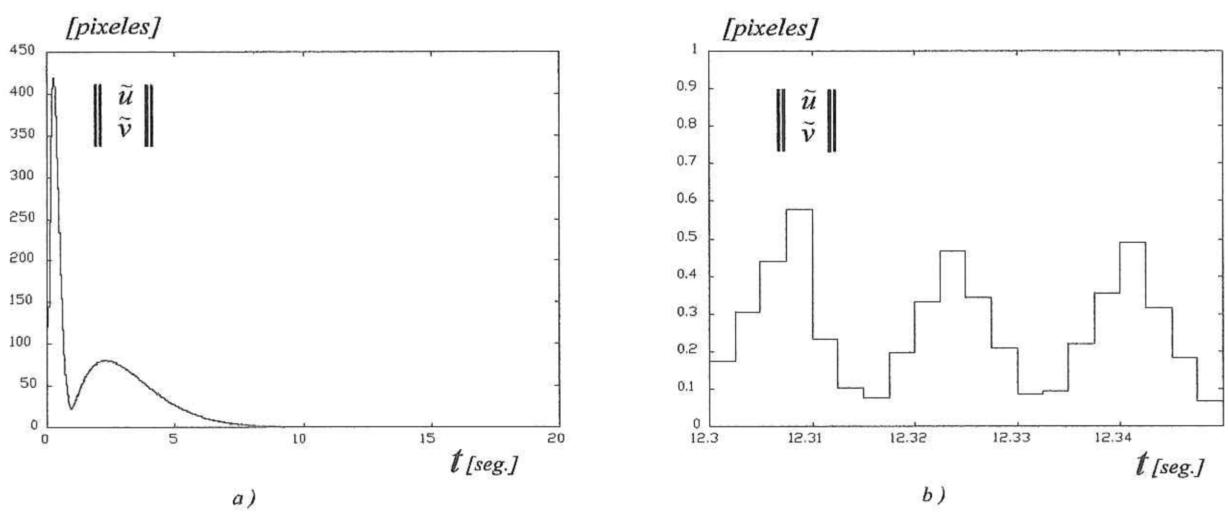

Figura 34: Norma del error en coordenadas de imagen. Sistema en tiempo discreto, sin fricción y periodo de muestreo reducido.

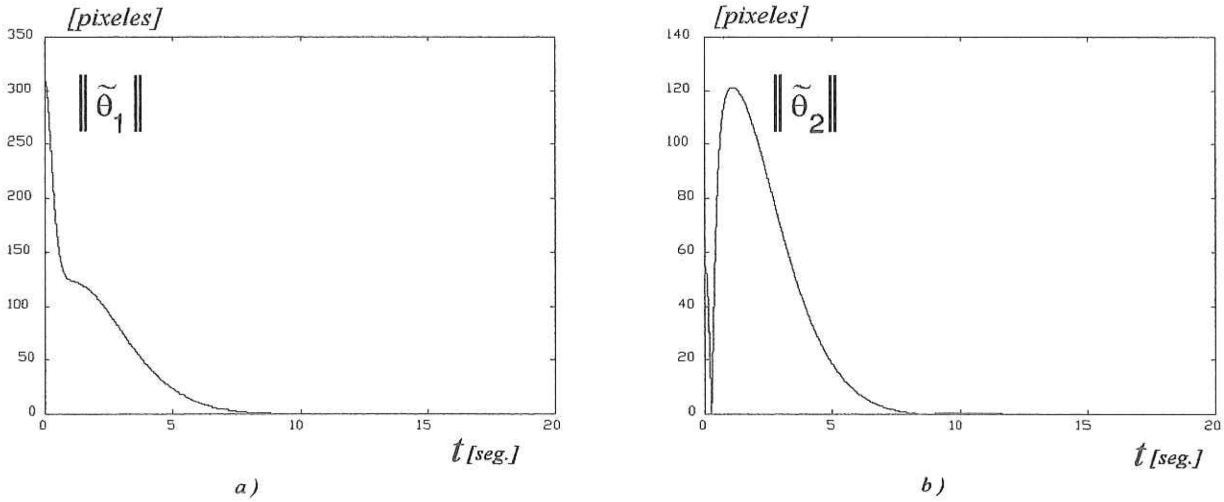

Figura 35: Errores paramétricos. Sistema en tiempo discreto, sin fricción y periodo de muestreo reducido.

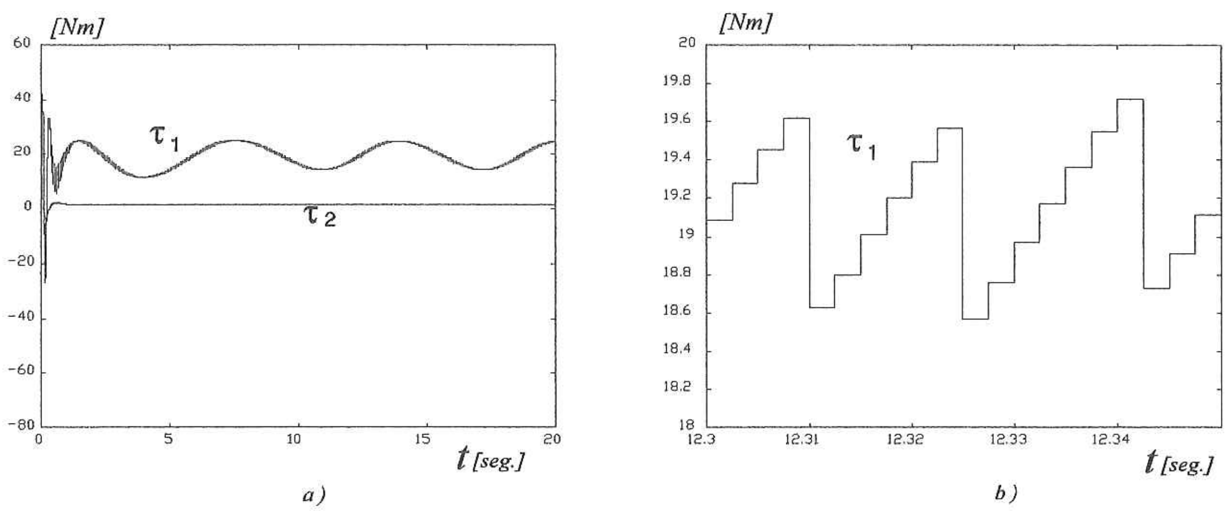

Figura 36: Pares aplicados por los motores. Sistema en tiempo discreto, sin fricción y periodo de muestreo reducido.

V.8.5 Simulación 5. Sistema en tiempo discreto, con fricción en el modelo del robot

Para apegarnos más a la situación real, en esta sección se agregó el efecto de fricción al sistema. En las figuras 37-40 podemos observar como se han conjuntado los efectos adversos de fricción y del tiempo de muestreo en la captura y procesamiento de la imagen.

En la gráfica de la figura 37 se presenta una vez más, una desviación de la trayectoria del extremo operativo con respecto al recorrido del objeto móvil; como previamente se comentó, esto se debe a la presencia de la fricción de Coulomb en el modelo del robot y no compensada en el controlador. Esto causa que en las gráficas de la norma del error y los parámetros de adaptación: figuras 38a y 39, se presenten picos; en la gráfica de pares en la figura 40a se observan saltos positivos y negativos.

En las figuras 38b y 40b se observan escalones cada 2.5 mseg. causados por el muestreo del lazo interno, con la respectiva actualización de sus valores cada 50 mseg. correspondiente al tiempo de muestreo del sistema de visión.

V.8.6 Simulación 6: Sistema en tiempo discreto, con fricción. Menor periodo de muestreo en el sistema de visión

Con el propósito de reducir los efectos adversos observados en la sección anterior, causados por la fricción de Coulomb y la cadencia lenta de muestreo en la cámara, se realizaron simulaciones considerando una cámara de video mas rápida. Las gráficas de las figuras 41-44 obtenidas suponiendo una cámara de video con una razón de muestreo de 60 marcos/segundo, no presentan mejoras notables respecto a las gráficas mostradas en las figuras 37-40 donde se simuló una cadencia de muestreo en el lazo de visión de 20 marcos/seg.

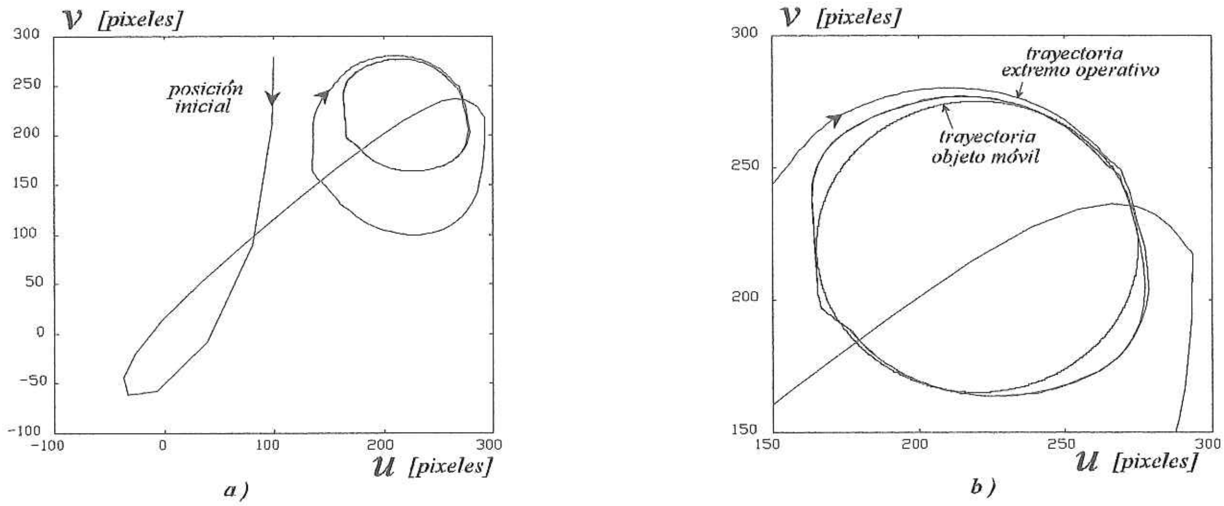

Figura 37: Trayectoria del extremo operativo del robot. Sistema en tiempo discreto, con fricción.

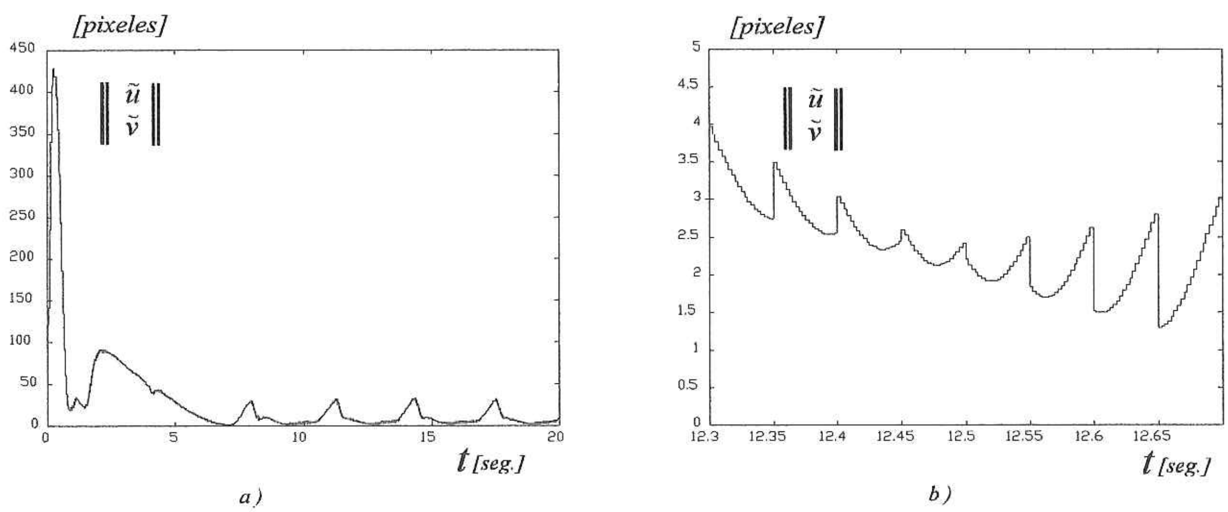

Figura 38: Norma del error en coordenadas de imagen. Sistema en tiempo discreto, con fricción.

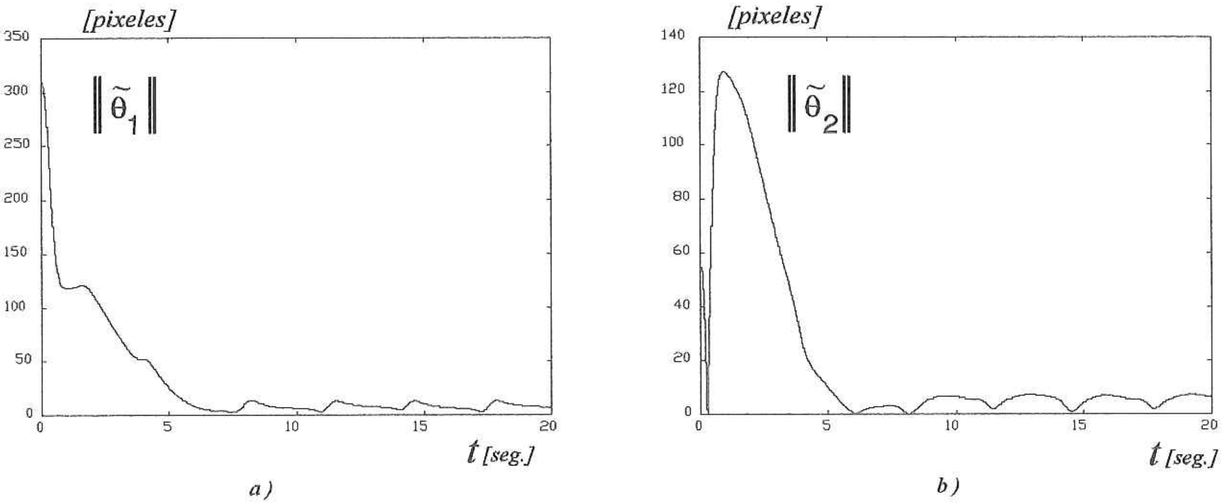

Figura 39: Errores paramétricos. Sistema en tiempo discreto, con fricción.

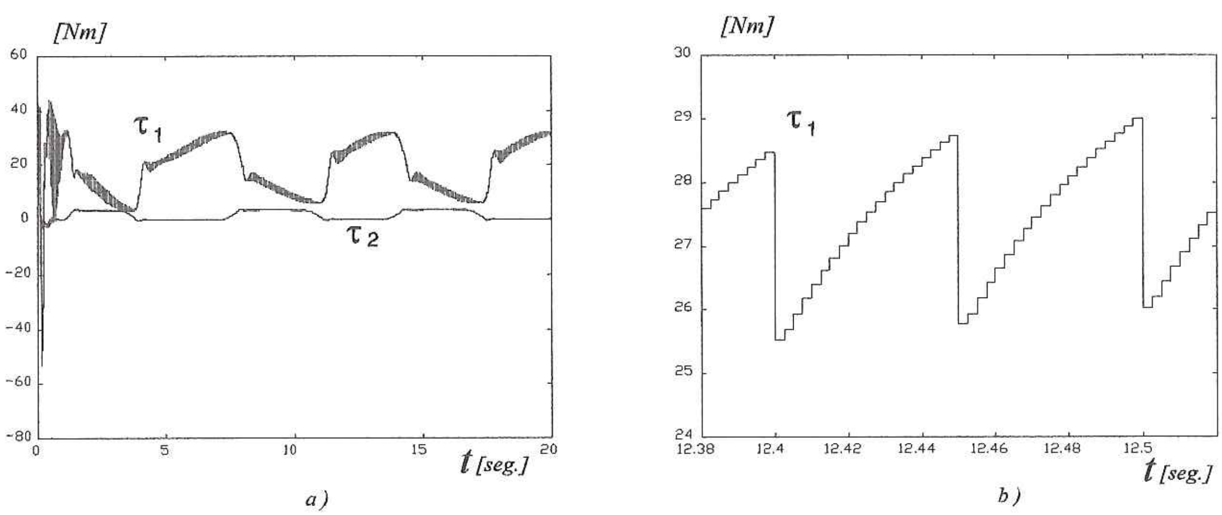

Figura 40: Pares aplicados por los motores. Sistema en tiempo discreto, con fricción.

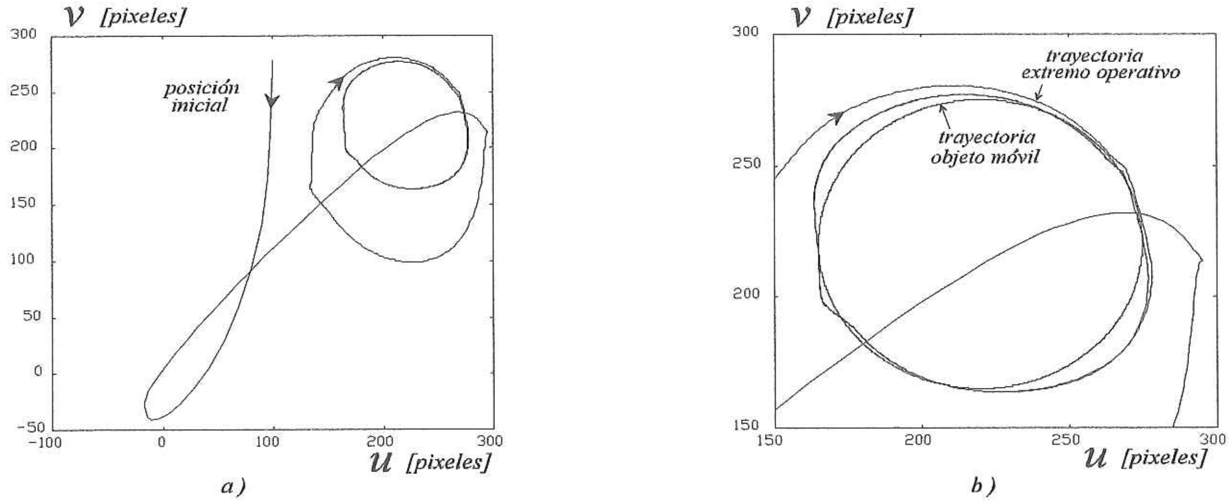

Figura 41: Trayectoria del extremo operativo del robot. Sistema en tiempo discreto, con fricción y un muestreo de 60 marcos/seg. en el lazo de visión.

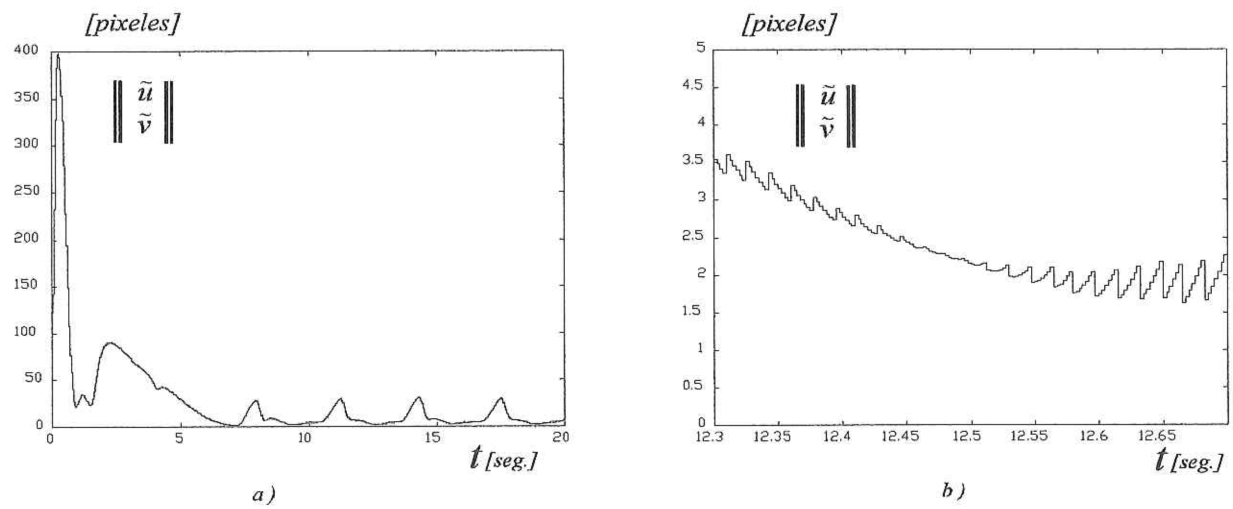

Figura 42: Norma del error en coordenadas de imagen. Sistema en tiempo discreto, con fricción y un muestreo de 60 marcos/seg. en el lazo de visión.

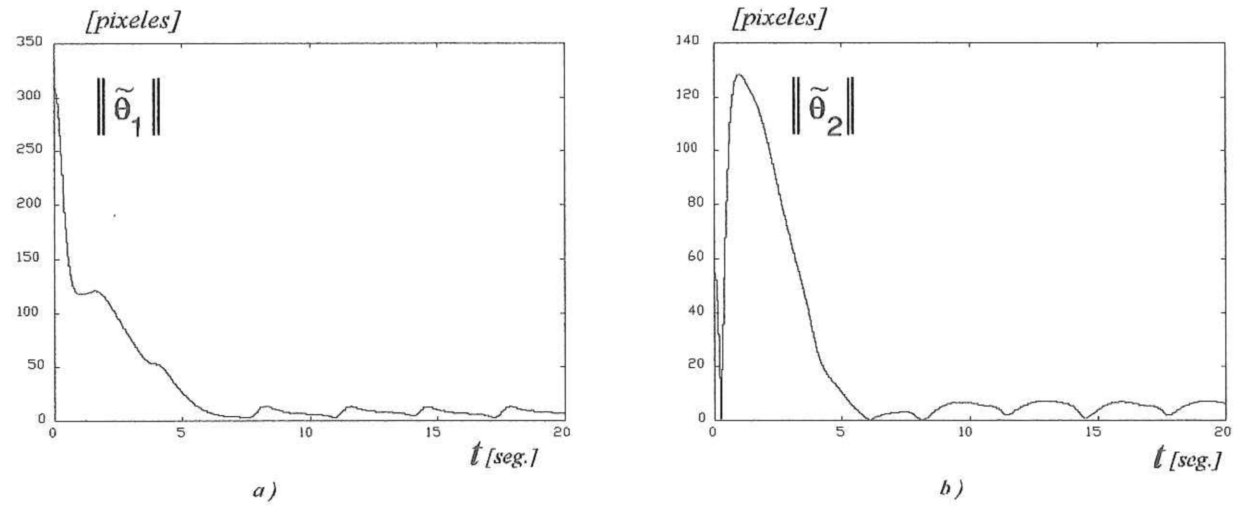

Figura 43: Errores paramétricos. Sistema en tiempo discreto, con fricción y un muestreo de 60 marcos/seg. en el lazo de visión.

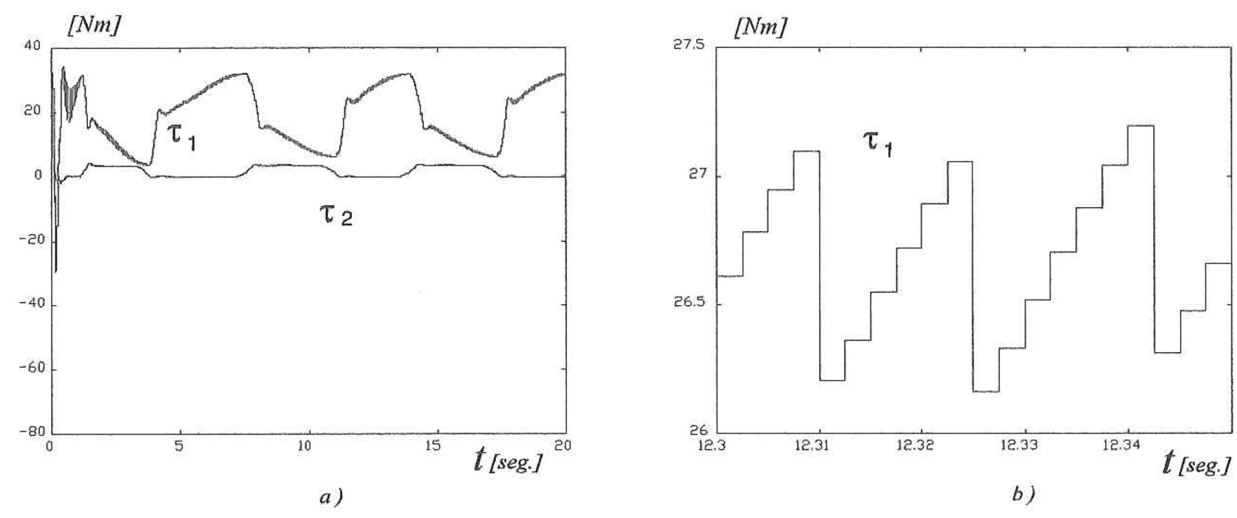

Figura 44: Pares aplicados por los motores. Sistema en tiempo discreto, con fricción y un muestreo de 60 marcos/seg. en el lazo de visión.

V.8.7 Simulación 7: Sistema en tiempo discreto, fricción y objeto móvil con $\omega = 0.1$ [rad/seg.]

Las oscilaciones inducidas en los pares, pueden resultar adversas para el manipulador robótico en una posible etapa de experimentación. Por ello se procedió a sintonizar el sistema de nuevo, ahora considerando la presencia de la componente de fricción en el modelo del robot y los tiempos de muestreo de las coordenadas articulares y de las coordenadas de imagen.

Primeramente, se efectuaron cambios en las ganancias de adaptación y aunque sí presentaron mejoras, estas no fueron muy significativas. Fué necesario bajar la velocidad angular del objeto móvil a seguir, $\omega = 0.1$ [rad/seg.]. Es decir, fué necesario reducir la rapidez del objeto móvil y además hacer un ajuste en la ganancia de adaptación Γ_1 $= 0.5$ [seg^{-1}].

Aunque sigue presente el efecto de la fricción, se observan mejoras en el comportamiento del sistema de control. En la figura 45 la trayectoria del extremo operativo es casi igual a la del objeto móvil, las desviaciones debido a la componente de fricción son menores.

La gráfica en la figura 46 de la norma del error, mejoró bastante respecto a lo mostrado en la figura 38 e incluso, en el acercamiento mostrado en 46b los picos llegan a ser de 15 pixeles y en 38b eran de hasta 30 pixeles.

En la figura 47 es notorio que la evolución de los errores paramétricos se realiza en forma mas lenta.

Respecto a la oscilación presente en los pares, en el acercamiento mostrado en la figura 48b, se observa como la magnitud de la oscilación no supera los 0.25 [Nm], cuando anteriormente en la figura 40b era cercana a los 3 [Nm].

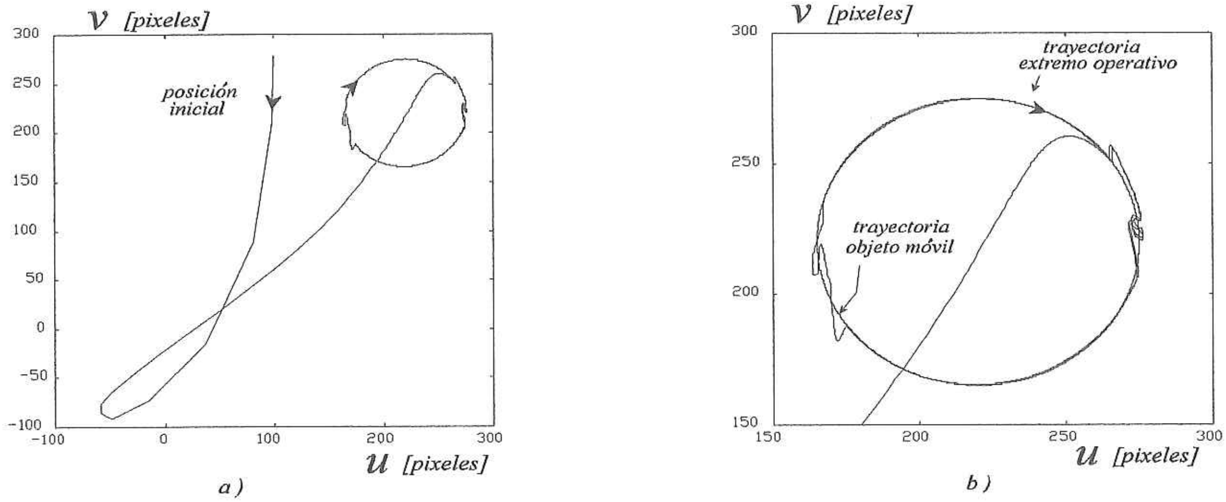

Figura 45: Trayectoria del extremo operativo del robot. Sistema en tiempo discreto, fricción y $\omega = 0.1$ [rad/seg].

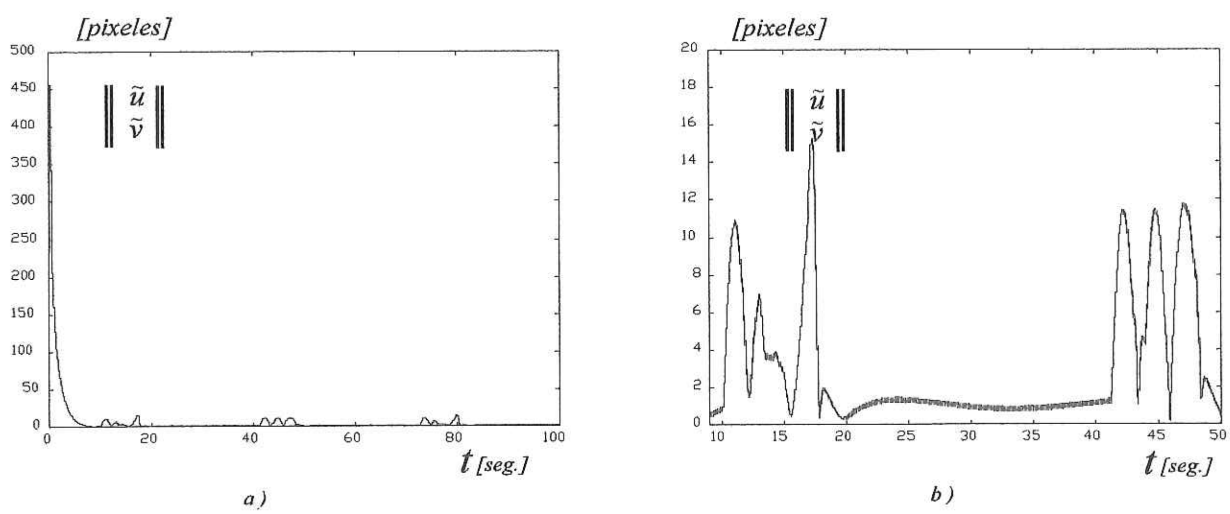

Figura 46: Norma del error en coordenadas de imagen. Sistema en tiempo discreto, fricción y $\omega = 0.1$ [rad/seg].

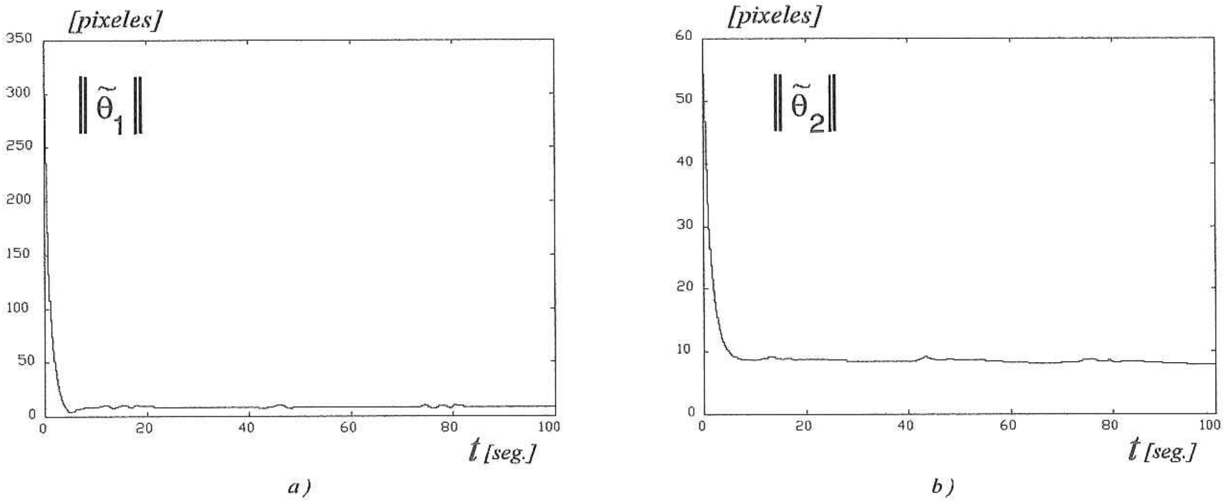

Figura 47: Errores paramétricos. Sistema en tiempo discreto, fricción y $\omega = 0.1$ [rad/seg].

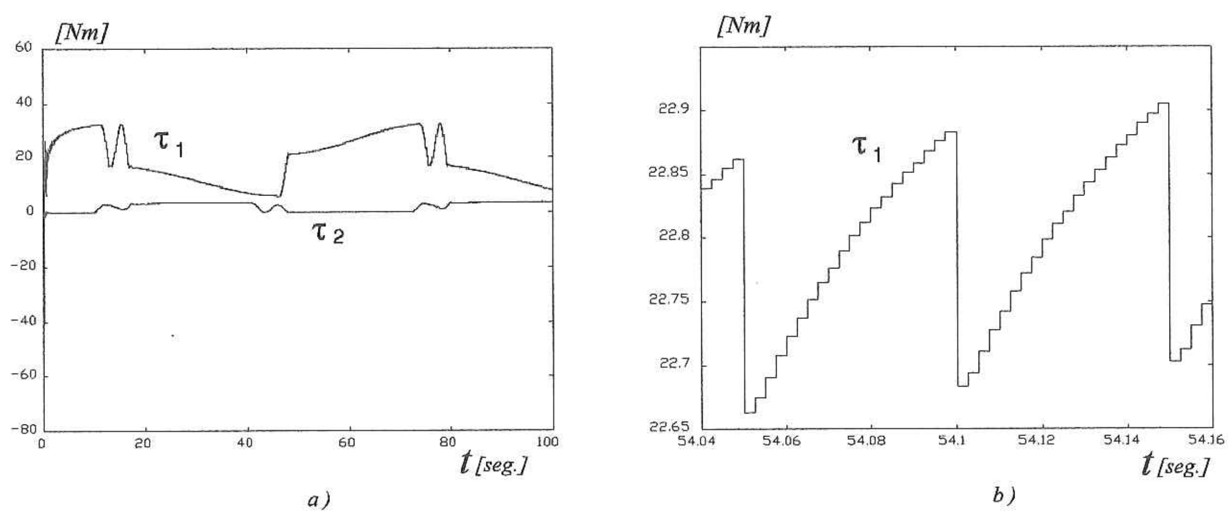

Figura 48: Pares aplicados por los motores. Sistema en tiempo discreto, fricción y $\omega = 0.1$ [rad/seg].

VI Conclusiones.

Respecto al sistema de control de doble lazo propuesto, se demostró estabilidad y convergencia a cero en los errores en coordenadas en pantalla.

De lo observado y comentado en las diferentes gráficas correspondientes a la simulaciones realizadas, se puede concluir que para un sistema "ideal", entendiéndolo como un sistema en tiempo continuo y sin fricción para el robot, se verifica el cumplimiento del objetivo de control, es decir los errores en coordenadas de imagen presentan una tendencia asintótica a cero.

Se puede observar de las gráficas de la norma del error, que los parámetros de la trayectoria de movimiento del objeto se fueron adaptando hasta obtener el valor de las constantes que describen la trayectoria del objeto móvil.

En la medida que se agregan al sistema más factores que lo aproximen a un sistema real, como el considerar el tiempo de muestreo de las posiciones articulares, de la etapa de procesamiento de imagen y la implementación de derivadas e integrales numéricas, se obtienen resultados con efectos indeseables en las variables de interés como el error en coordenadas de imagen, en los parámetros adaptables. Pero aún así, podemos concluir que el extremo operativo del robot tiende a seguir la trayectoria recorrida por el objeto móvil.

Como tema abierto, podemos considerar la implementación física del sistema, de preferencia donde se cuente con una etapa de procesamiento de imagen con una cadencia de muestreo de 60 marcos/seg. mínimo. Pues como se observó en las simulaciones, esto reduce las variacioones en los pares generados por el controlador, lo que a su vez repercute en la reducción de los picos presentados en los errores en coordenadas de imagen y los parametros de adaptables. Además, se reduce el riesgo de un comportamiento indeseable en los motores de las articulaciones y que por ello se vean afectados físicamente por estas oscilaciones.

Otro tema abierto es tratar de compensar la fricción de Coulomb, pues aun más que el periodo de muestreo del sistema de visión, este factor afecta más el desempeño del sistema en mayor grado. La función signo de la componente de fricción de Coulomb produce saltos en los pares generados, cada vez que las velocidades articulares cambian de signo; esto a su vez altera de manera indeseable las posiciones articulares del robot y sus correspondientes coordenadas en pantalla. Finalmente, se observa como la tendencia que lleva el extremo operativo del robot, para aproximarse a la posición deseada, es desviada por el efecto de fricción no compensada.

Referencias

- Asada H., J.-J.E. Slotine. 1986. *"Robot Analisis and Control"*. Addison-Wesley.
- Corke P., 1997. *"Visual control of robots: high performance visual servoing"*. Research Studies Press.
- Craig J.J. 1989. *"Introduction to robotics: Mechanics and control"*. Addison-Wesley, Segunda edición.
- Hager G., W. Chang y A. Morse. 1995. *"Robot hand-eye coordination based on stereo vision"*. IEEE Control Systems. Febrero. pp. 30-39.
- Hager Gregory. 1997. *"A modular system for robust positioning using feedback from stereo vision"*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 13, No. 4, Agosto. pp. 583.
- Hashimoto K., T. Kimoto, T. Ebine y H. Kimura. 1991. *"Manipulator control with image-based visual servo"*. Proceedings of the 1991 IEEE. International conference on robotics and automation. Sacramento, California. Abril. pp. 2267-2271.
- Hashimoto K., T. Noritsugu. 1999. *"Visual servoing with linearized observer"*. Proceedings of the 1999 IEEE. International conference on robotics and automation. Detroit, Michigan. Mayo. pp. 263-268.
- Kelly R. 1995. *"Control de movimiento de robots manipuladores"*. CICESE, México. Documento interno.
- Kelly R. 1996. *"Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots"*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 5, Octubre. pp. 759-766.

- Kelly R. 1997. *"Vision system modeling"*. Noviembre. CICESE, México. Reporte interno.

- Kelly R., F. Reyes, J. Moreno y S. Hutchinson. 1999. *"A two loop direct visual control of direct drive planar robots with moving target"*. IEEE International Conference in Robotics and Automation, Detroit, MI, Mayo. pp. 599-604.

- Reyes F. 1997. *"Control de un robot de transmisión directa de dos grados de libertad"*. Ph.D. Tesis. CICESE. Ensenada, B.C., México.

- Reyes F., R. Kelly. 1997. *"Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot"*. Robotica, Vol. 15, Parte 5, Septiembre-Octubre. pp. 563-571.

- Sciavicco L., B. Siciliano. 1996. *"Modeling and control of robot manipulators"*. McGraw-Hill.

- Spong M.W., M. Vidyasagar. 1989. *"Robot dynamics and control"*. New York, John Wiley.

- Jang W., Z. Bien. 1991. *"Feature-based visual servoing of an eye-in-hand robot with improved tracking performance"*. Proceedings of the 1991 IEEE. International conference on robotics and automation. Sacramento, California. Abril. pp. 2254-2260.

A Apéndices.

A.1 Modelo dinámico del robot de 2 g.d.l. del CICESE

Las ecuaciones y parámetros que se muestran a continuación estan basados en [Reyes, 1997] y corresponden al robot de 2 g.d.l. disenãdo en CICESE. Las ecuaciones (85), (86) y (87) muestran las respectivas matriz de inercia, matriz de fuerza centrípeta y de Coriolis y el vector de fuerzas y pares gravitacionales.

$$M(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 2.351 + 0.168\cos(q_2) & 0.102 + 0.084\cos(q_2) \\ 0.102 + 0.084\cos(q_2) & 0.102 \end{bmatrix} \text{Nm} - \text{seg}^2/\text{rad}, \quad (85)$$

$$C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -0.168\,\text{sen}(q_2)\,\dot{q}_2 & -0.084\,\text{sen}(q_2)\dot{q}_2 \\ 0.084\,\text{sen}(q_2)\,\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \text{Nm} - \text{seg/rad}, \quad (86)$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = g \begin{bmatrix} 3.921\,\text{sen}(q_1) + 0.186\,\text{sen}(q_1 + q_2) \\ 0.186\,\text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \text{Nm} \quad (87)$$

A.2 Ecuación cinemática del robot del CICESE

En la figura 49 se indican los parámetros y variables relacionadas con el brazo manipulador de 2 g.d.l. diseñado en CICESE y en la tabla IV se muestran los valores de sus parámetros.

Sustituyendo los parámetros del brazo manipulador del laboratorio de robótica en la ecuación (9), resulta el modelo cinemático:

$$\boldsymbol{x}_R(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} x_{R_1}(\boldsymbol{q}) \\ x_{R_2}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45\,\text{sen}(q_1) + 0.45\,\text{sen}(q_1 + q_2) \\ -0.45\cos(q_1) - 0.45\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (88)$$

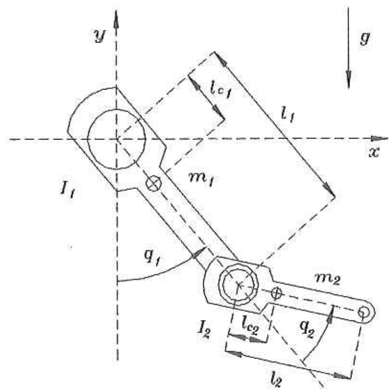

Figura 49: Brazo manipulador

Tabla IV: Parámetros del robot diseñado en CICESE

Parámetro	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.45	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.45	m
Masa eslabón 1	m_1	23.9	kg
Masa eslabón 2	m_2	3.88	kg
Centro de masa, eslabón 1	l_{c1}	0.091	m
Centro de masa, eslabón 2	l_{c2}	0.05	m
Inercia eslabón 1	I_1	1.27	kg m^2
Inercia eslabón 2	I_2	0.093	kg m^2
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/seg^2

A.3 Parámetros de fricción del robot del CICESE

En esta sección se muestran los parámetros correspondientes a las matrices (6) y (7). Cabe señalar que para el brazo manipulador del CICESE las magnitudes f_{c_1} y f_{c_2} dependen de las funciones $\mathbf{sgn}(\dot{q}_i)$

$$f_{c_1} = \begin{cases} -f_{c_{1n}} & \text{para} \quad \dot{q}_1 < 0 \\ f_{c_{1p}} & \text{para} \quad \dot{q}_1 > 0 \end{cases}$$

$$f_{c_2} = \begin{cases} -f_{c_{2n}} & \text{para} \quad \dot{q}_2 < 0 \\ f_{c_{2p}} & \text{para} \quad \dot{q}_2 > 0 \end{cases}$$

Los valores de las constantes b_1, b_2, $f_{c_{1n}}$, $f_{c_{1p}}$, $f_{c_{2p}}$ y $f_{c_{2n}}$ se presentan en la tabla V.

Tabla V: Coeficientes de fricción del manipulador

Parámetro	Notación	Valor	Unidades
Coeficiente de fricción viscosa, motor 1	b_1	2.288	Nm-seg/rad
Coeficiente de fricción viscosa motor 2	b_2	0.175	Nm-seg/rad
Coef. de fricción de Coulomb, motor 1	$f_{c_{1p}}$	7.17 si $\dot{q}_1 > 0$	Nm
	$f_{c_{1n}}$	8.049 si $\dot{q}_1 < 0$	
Coef. de fricción de Coulomb, motor 2	$f_{c_{2p}} = f_{c_{2n}}$	1.734	Nm

B Programas en SIMNON para simulaciones

Para las simulaciones desarrolladas en este trabajo se utilizó el paquete SIMNON version 2.04 de SSPA Systems.

En la sección V, de simulaciones, se muestra el modelo del robot y de la cámara utilizados, así como los parámetros y ganancias.

B.1 Listado del programa para la simulación de sistemas en tiempo continuo

El programa que se presenta a continuación corresponde específicamente a la simulación 2: sistema continuo, con fricción. Para efectuar la simulación 1, solo hay que quitar el término de fricción del modelo del robot y la compensación incluída en el controlador de pares articulares.

```
CONTINUOUS SYSTEM circulo
" Simulacion de un robot de 2 gdl, retro visual,
"    segumiento de un objeto movil que recorre
"    una trayectoria semiestructurada mediante
"    la adaptacion de los parametros desconocidos.
"
" CASO: Sistema continuo en tiempo, sin friccion y seguimiento
"       de una trayectoria circular.
"
" Author:        Ana Maria Hernandez C.
" Created:        11/11/98

STATE   q1  q2   q3   q4  z1  z2   hat1u  hat1v   hat2
DER    dq1 dq2 ddq1 ddq2 dz1 dz2  dhat1u dhat1v  dhat2
TIME t

"=================MODELO DEL ROBOT MANIPULADOR================="
" Matriz de inercia
  M11  = 2.351+0.168*cos(q2)
  M12  = 0.102+0.084*cos(q2)
  M21  = M12
```

```
  M22  = 0.102
  detM = M11*M22 - M12*M21
}



" Componentes de C(q,dq)dq
  Cdq1 = -0.168*sin(q2)*dq1*dq2-0.084*sin(q2)*dq2*dq2
  Cdq2 =  0.084*sin(q2)*dq1*dq1

" Pares gravitacionales
  g1  =  9.81*(3.921*sin(q1)+0.186*sin(q1+q2))
  g2  =  1.82466*sin(q1+q2)

"================== COORDENADAS DE VISION  ======================"
" ecuacion cinematica del brazo mecanico:
    xr =  0.45*sin(q1) + 0.45*sin(q1+q2)
    yr = -0.45*cos(q1) - 0.45*cos(q1+q2)
" en coordenadas de vision.  (procesadas en el bloque "camara"):        "
    u  = -val*alfau*(xr - ocr1) + uo
    v  =  val*alfav*(yr - ocr2) + vo
" derivadas con respecto al tiempo:                                      "
  "dxr =  0.45*cos(q1)*dq1+0.45*cos(q1+q2)*(dq1+dq2)
  "dyr =  0.45*sin(q1)*dq1+0.45*sin(q1+q2)*(dq1+dq2)
  "du  = -val*alfau*dxr
  "dv  =  val*alfav*dyr
   du = J11*dq1 + J12*dq2
   dv = J21*dq1 + J22*dq2

" resultando
"   du = -val*alfau*(0.45*cos(q1)*dq1 + 0.45*cos(q1+q2)*(dq1+dq2))
"   dv =  val*alfav*(0.45*sin(q1)*dq1 + 0.45*sin(q1+q2)*(dq1+dq2))


"========= TRAYECTORIA del OBJETO MOVIL en coordenadas de vision ==="
" trayectoria deseada  (trayectoria del objeto movil)
   ud= uc + radio*sin(omega*t)              "ud = theta1u + theta2*fu
   vd= vc + radio*cos(omega*t)              "vd = theta1v + theta2*fv

" funcion f(t) v sus derivadas
    fu = sin(omega*t)
    fv = cos(omega*t)
```

```
   dfu = omega*cos(omega*t)
   dfv =-omega*sin(omega*t)

  ddfu =-omega*omega*sin(omega*t)
  ddfv =-omega*omega*cos(omega*t)

" Errores de imagen: eu y ev
    eu = ud - u
    ev = vd - v

" trayectoria en funcion de los parametros de adaptacion
   ua = hat1u + fu*hat2
   va = hat1v + fv*hat2

" error en funcion de los parametros de adaptacion
  eua = ua - u
  eva = va - v

" variable auxiliar: l1 y l2:
  l1 = dfu*hat2 + K*eua
  l2 = dfv*hat2 + K*eva

"Obtencion de dqd = Jinv*{df*hat2 + K*[hat1 + f*hat2 -{u, v}]}
  dqd1 = ( J22*l1 - J12*l2)/detJ
  dqd2 = (-J21*l1 + J11*l2)/detJ

"==== JACOBIANO y DERIVADA del JACOBIANO INVERSO =================="
" elementos  de la matriz jacobiana
  J11 = -val*alfau*(0.45*cos(q1) + 0.45*cos(q1+q2))
  J12 = -val*alfau*0.45*cos(q1+q2)
  J21 =  val*alfav*(0.45*sin(q1) + 0.45*sin(q1+q2))
  J22 =  val*alfav*0.45*sin(q1+q2)
 detJ =  J11*J22 - J12*J21

" derivada de los elementos de la matriz jacobiana
  dJ11 = -val*alfau * (-0.45*sin(q1)*dq1-0.45*sin(q1+q2)*(dq1+dq2))
  dJ12 = -val*alfau * (-0.45*sin(q1+q2)*(dq1+dq2))
  dJ21 =  val*alfav * ( 0.45*cos(q1)*dq1+0.45*cos(q1+q2)*(dq1+dq2))
  dJ22 =  val*alfav * ( 0.45*cos(q1+q2)*(dq1+dq2))

" derivada del determinante de J
```

```
  ddetJ =  (J11*dJ22+J22*dJ11)  - (J12*dJ21+J21*dJ12)

" dw = d/dt(1/detJ)
  dw = -ddetJ/(detJ*detJ)

" Por lo tanto  d/dt{Jinv}:
  dJinv11 =  J22*dw + dJ22/detJ
  dJinv12 = -J12*dw - dJ12/detJ
  dJinv21 = -J21*dw - dJ21/detJ
  dJinv22 =  J11*dw + dJ11/detJ

"=============== ACELERACION ARTICULAR DESEADA====================
" derivada de las trayectorias aproximadas
  dua = dhat1u + dfu*hat2 + fu*dhat2
  dva = dhat1v + dfv*hat2 + fv*dhat2

  deua = dua - du
  deva = dva - dv

 dl1 = ddfu*hat2 + dfu*dhat2 + K*(deua)
 dl2 = ddfv*hat2 + dfv*dhat2 + K*(deva)

" aceleracion articular deseada, ddqd:
 ddqd1 = (dJinv11*l1 + dJinv12*l2) + ( J22*dl1 - J12*dl2)/detJ
 ddqd2 = (dJinv21*l1 + dJinv22*l2) + (-J21*dl1 + J11*dl2)/detJ

"==============CONTROLADOR de VELOCIDAD (lazo interno de vel.)=
" error en velocidades articulares
  deq1 = dqd1 - dq1
  deq2 = dqd2 - dq2

"Ecuaciones del controlador Par Calculado para velocidad
  laz1 = ddqd1 + Kv*deq1 + Kp*z1
  laz2 = ddqd2 + Kv*deq2 + Kp*z2

"=============== generacion de PARES DE FUERZA================
" calculo de los pares a generar
  tau1 = M11*laz1+M12*laz2 + Cdq1 + g1 + b1*dq1
  tau2 = M21*laz1+M22*laz2 + Cdq2 + g2 + b2*dq2

"============  MODELO  DEL  ROBOT ============================
" Friccion de Coulomb
```

```
"  fc1 = (if dq1<0.0 then  fc1n else fc1p)
"  fc2 = (if dq2<0.0 then -fc2a else fc2a)
"  fricc1 = (br1*dq1) + fc1
"  fricc2 = (br2*dq2) + fc2

 fc1 = if dq1<0 then -8.049 else if dq1>0 then 7.17  else 0
 fc2 = if dq2<0 then -1.734 else if dq2>0 then 1.734 else 0
 fricc1 = 2.288*dq1 + fc1
 fricc2 = 0.175*dq2 + fc2

" Calculo de la aceleracion articular
  h1 = Cdq1 + g1 + fricc1
  h2 = Cdq2 + g2 + fricc2

  pares1  = tau1 - h1
  pares2  = tau2 - h2

  ddq1 = ( M22*pares1 - M12*pares2) / detM
  ddq2 = (-M21*pares1 + M11*pares2) / detM

"=========>>>>>>>>>>>> errores y normas   <<<<<<
ehat1u = hat1u - uc
ehat1v = hat1v - vc
nehat1 = sqrt(ehat1u*ehat1u + ehat1v*ehat1v)

ehat2  = hat2  - radio
nehat2 = sqrt(ehat2*ehat2)

nehats = sqrt(ehat1u*ehat1u + ehat1v*ehat1v + ehat2*ehat2)

nevu = sqrt(eu*eu + ev*ev)


"=======Definimos ecuaciones de estado en forma numerica
dhat1u = gamma1u*eu
dhat1v = gamma1v*ev
dhat2  = gamma2* ( eu*(dfu+K*fu) + ev*(dfv+K*fv) )

dz1 = deq1
dz2 = deq2

dq1 = q3
```

```
dq2 = q4

"===================Inicializacion de parametros================
val = lamb /(lamb-ocr3)
alfau:72727
alfav:72727
lamb:0.008
uo:320
vo:240
ocr1:0.76
ocr2:-0.48
ocr3:0.64
omega: 1
gamma1u:1
gamma1v:1
gamma2:0.1" 0.007"10
gamma3:0.75
K: 10
Kv: 16
Kp: 64

q1:0.1745
q2:1.22

z1:0.1745
z2:1.22

hat1u:0
hat1v:0
hat2:0

uc:220
vc:220
radio:55

b1:2.288           "coeficientes de la friccion viscosa
b2:0.175

br1:1.8
br2:0.14
fc1n:-8.049
fc1p: 7.17
```

```
fc2a: 1.734

END
```

B.2 Listado del programa para la simulación de sistemas en tiempo discreto

Este listado en particular corresponde a la simulación 5: sistema en tiempo discreto, con fricción, tiempo de muestreo del sistema de visión de 50 [mseg]. Las simulaciones 3, 4, 6 y 7 son variantes de este programa. En la simulación 3, no se considera la fricción. En la simulación 4, no se considera fricción y se reduce el tiempo de muestreo de la cámara a 17 [mseg]. En la simulación 6 se incluye fricción en el sistema y se reduce el periodo de muestreo, 17 [mseg]. En la simulación 7, se cambia la velocidad angular del objeto móvil a $\omega = 0.1$.

B.2.1 Bloque de conecciones

```
CONNECTING SYSTEM cnn
" Description:  Este sistema conecta
"               cntrl robot camara fric

TIME t

" La conexion entre los bloques:
"   ENTRADAS[bloque1] <=== SALIDAS[bloque2]

"   FRIC  <===    ROBOT
dq1x[fric]  =  dq1x[robot]
dq2x[fric]  =  dq2x[robot]

"   ROBOT  <===  FRIC
fc1[robot] = fc1[fric]
fc2[robot] = fc2[fric]

"    ROBOT  <===   CNTRL
tau1[robot] = tau1[cntrl]
tau2[robot] = tau2[cntrl]

"   CNTRL   <===   ROBOT
q1x[cntrl]  =  q1x[robot]
q2x[cntrl]  =  q2x[robot]
```

```
" CNTRL   <==   CAMARA
u[cntrl]  =   u[camara]
v[cntrl]  =   v[camara]

"   CAMARA   <===   ROBOT
q1x[camara]  =  q1x[robot]
q2x[camara]  =  q2x[robot]

END
```

B.2.2 Bloque de control

```
DISCRETE SYSTEM cntrl

INPUT    q1x  q2x    u   v
OUTPUT   tau1 tau2

STATE    q1a  q2a    z1   z2    hat1u    hat1v    hat2"hat2u   hat2v
NEW      q1n  q2n    z1n  z2n   hat1un   hat1vn   hat2n"hat2un  hat2vn

TIME t
TSAMP ts

"=================== MODELO DEL ROBOT MANIPULADOR ============================"
" Matriz de inercia
  M11  = 2.351+0.168*cos(q2n)
  M12  = 0.102+0.084*cos(q2n)
  M21  = M12
  M22  = 0.102
  detM = M11*M22 - M12*M21

" Componentes de C(q,dq)dq
  Cdq1 = -0.168*sin(q2n)*dq1*dq2-0.084*sin(q2n)*dq2*dq2
  Cdq2 =  0.084*sin(q2n)*dq1*dq1

" Pares gravitacionales
  g1  =  9.81*(3.921*sin(q1n)+0.186*sin(q1n+q2n))
  g2  =  1.82466*sin(q1n+q2n)

"=================== JACOBIANO y DERIVADA del JACOBIANO INVERSO ============="
" elementos  de la matriz jacobiana
   J11 = -val*alfau*(0.45*cos(q1n)+0.45*cos(q1n+q2n))
   J12 = -val*alfau*0.45*cos(q1n+q2n)
   J21 =  val*alfav*(0.45*sin(q1n)+0.45*sin(q1n+q2n))
   J22 =  val*alfav*0.45*sin(q1n+q2n)
  detJ =  J11*J22-J12*J21

" derivada de los elementos de la matriz jacobiana
  dJ11 = -val*alfau * (-0.45*sin(q1n)*dq1-0.45*sin(q1n+q2n)*(dq1+ dq2))
  dJ12 = -val*alfau * (-0.45*sin(q1n+q2n)*(dq1+ dq2))
  dJ21 =  val*alfav * ( 0.45*cos(q1n)*dq1+0.45*cos(q1n+q2n)*(dq1+ dq2))
  dJ22 =  val*alfav * ( 0.45*cos(q1n+q2n)*(dq1+ dq2))
```

```
" derivada del determinante de J
  ddetJ= (J11*dJ22+J22*dJ11) - (J12*dJ21+J21*dJ12)

" dw = d/dt(1/detJ)
  dw   = -ddetJ/(detJ*detJ)

" elementos de la derivada del jacobiano inverso
  dJinv11 = J22*dw + dJ22/detJ
  dJinv12 =-J12*dw - dJ12/detJ
  dJinv21 =-J21*dw - dJ21/detJ
  dJinv22 = J11*dw + dJ11/detJ

"==================== COORDENADAS DE VISION  ========================="
  "ecuacion cinematica del brazo mecanico:                           "
  "     xr =  0.45*sin(q1n) + 0.45*sin(q1n+q2n)                      "
  "     yr = -0.45*cos(q1n) - 0.45*cos(q1n+q2n)                      "
  "
  "en coordenadas de vision.  (procesadas en el bloque "camara"):    "
  "     u  = -val*alfau*(xr - ocr1) + uo                             "
  "     v  =  val*alfav*(yr - ocr2) + vo                             "
  "                                                                  "
" derivadas con respecto al tiempo:                                  "
  dxr =  0.45*cos(q1n)*dq1+0.45*cos(q1n+q2n)*(dq1+dq2)
  dyr =  0.45*sin(q1n)*dq1+0.45*sin(q1n+q2n)*(dq1+dq2)

"derivada de la posicion en coordenadas de vision                    "
"  du  = -val*alfau*dxr
"  dv  =  val*alfav*dyr

       du = J11*dq1 + J12*dq2
       dv = J21*dq1 + J22*dq2
  "resultando:
  "    du = -val*alfau*(0.45*cos(q1n)*dq1+0.45*cos(q1n+q2n)*(dq1+dq2))  "
  "    dv =  val*alfav*(0.45*sin(q1n)*dq1+0.45*sin(q1n+q2n)*(dq1+dq2))  "


"=================== TRAYECTORIAS en coordenadas de vision ===================="
" u y v representan la posicion del extremo operativo del robot en de vision"

" trayectoria deseada  (trayectoria del objeto movil)
   ud = uc + radio*sin(omega*t)                "ud = theta1u + theta2*fu
```

```
  vd = vc + radio*cos(omega*t)                  "vd = theta1v + theta2*fv

" funcion f(t) y sus derivadas
    fu = sin(omega*t)
    fv = cos(omega*t)

   dfu = omega*cos(omega*t)
   dfv =-omega*sin(omega*t)

  ddfu =-omega*omega*sin(omega*t)
  ddfv =-omega*omega*cos(omega*t)

"================= ERROR DE POSICION  en COORDENADAS DE VISION ========"
  eu = ud - u
  ev = vd - v

"================= LAZO EXTERIOR BASADO EN IMAGEN =================="
"      ley de control propuesta para el controlador de vision   "
" adaptacion de trayectoria, [u v]^T = hat1 + hat2*f(t) "
  ua = hat1un + hat2n*fu
  va = hat1vn + hat2n*fv

" diferencia entre la trayect. real del objeto y la trayect. adaptada
  eua = ua - u
  eva = va - v

" dqd representa la velocidad articular deseada
" dqd = J(q)^-1 * (df*hat2 + K*[eua eva]^T) = J(q)^-1 * [l1 l2]^T
"
" variables auxiliares, l1 y l2:
  l1 = dfu*hat2n + K1*eua
  l2 = dfv*hat2n + K2*eva

" velocidad articular deseada: dqd1 y dqd2
"   dqd = Jinv*{df*hat2 + K*[hat1 + f*hat2 -{u, v}]}
  dqd1  = ( J22*l1 - J12*l2)/detJ
  dqd2  = (-J21*l1 + J11*l2)/detJ

"================ ACELERACION ARTICULAR DESEADA====================
" derivada de las trayectorias aproximadas
  dua = dhat1u + dfu*hat2n + fu*dhat2
  dva = dhat1v + dfv*hat2n + fv*dhat2
```

```
  deua = dua - du
  deva = dva - dv


" derivada de las variables auxiliares l1 y l2.
 dl1 = ddfu*hat2n + dfu*dhat2 + K1*(dux-du)
 dl2 = ddfv*hat2n + dfv*dhat2 + K2*(dvx-dv)

" aceleracion articular deseada
  ddqd1 = dJinv11*l1+dJinv12*l2 + ( J22*dl1-J12*dl2)/detJ
  ddqd2 = dJinv21*l1+dJinv22*l2 + (-J21*dl1+J11*dl2)/detJ

"==============CONTROLADOR de VELOCIDAD (lazo interno de vel.)=
" error en velocidades articulares
  deq1 = dqd1-dq1
  deq2 = dqd2-dq2

" ecuacion del controlador Par Calculado para velocidad
  laz1 = ddqd1 + Kv1*deq1 + Kp1*z1n
  laz2 = ddqd2 + Kv2*deq2 + Kp2*z2n

"============== generacion de PARES DE FUERZA================
" ecuacion para la friccion de Coulomb
  fric1=if dq1<0 then -8.049 else if dq1>0 then 7.17 else 0
  fric2=if dq2<0 then -1.734 else if dq2>0 then 1.734 else 0

" calculo de los pares a generar
  tau1 = M11*laz1+M12*laz2 + Cdq1 + g1 + b1*dq1 "+ fric1
  tau2 = M21*laz1+M22*laz2 + Cdq2 + g2 + b2*dq2 "+ fric2

"=================== ECUACIONES DE ESTADO   ================="
 q1n = q1x
 q2n = q2x

 z1n = deq1*h + z1
 z2n = deq2*h + z2

 hat1un = gamma1u*eu*h + hat1u
 hat1vn = gamma1v*ev*h + hat1v
 hat2n  = gamma2*(eu*(dfu+K1*fu) + ev*(dfv+K2*fv))*h + hat2
```

```
"=========>>>>>>>>>>>> errores y normas   <<<<<<
ehat1u = hat1un - uc
ehat1v = hat1vn - vc
nehat1 = sqrt(ehat1u*ehat1u + ehat1v*ehat1v)

ehat2  = hat2n  - radio
nehat2 = sqrt(ehat2*ehat2)

nehats = sqrt(ehat1u*ehat1u + ehat1v*ehat1v + ehat2*ehat2)

nevu = sqrt(eu*eu + ev*ev)

"=================== DERIVADAS NUMERICAS=======================
 dq1 = (q1n-q1a)/h
 dq2 = (q2n-q2a)/h

 dz1 = (z1n-z1)/h
 dz2 = (z2n-z2)/h

 dhat1u = (hat1un-hat1u)/h
 dhat1v = (hat1vn-hat1v)/h
 dhat2  = (hat2n-hat2)/h

"==================TIEMPO DE MUESTREO=========================
  ts = t+h

" ecuacion auxiliar
  val = lamb/(lamb-ocr3)

"================== PARAMETROS ===============================
  h:0.0025          "tiempo cosiderado para procesamiento de este
                    "   programa
  alfau:72727       "factores de escala de la camara
  alfav:72727
  lamb:0.008        "distancia focal de la camra

  uo:320            "posicion del marco ccd en la pantalla o imagen
  vo:240

  ocr1: 0.76        "origen del marco de la camara respecto al marco
  ocr2:-0.48        "   del robot
  ocr3: 0.64
```

```
  gamma1u:1.0      "ganancia de la ley de adaptacion para las
  gamma1v:0.5      "    coordenadas del centro de la circunf.
  gamma2:0.01      "ganancia de la ley de adaptacion del radio.

  uc:220            "centro de la circunferencia que sigue
  vc:220            "          el objeto movil
  radio:55          "radio de la circunferencia
  omega:0.1         "velocidad angular del objeto en movimiento

"  K: 10             "ganancia del lazo basado en imagen
"  Kv: 16            "ganancias del controlador de velocidad
"  Kp: 64

K1:10
K2:10
Kp1:64
Kp2:64
Kv1:16
kv2:16

  b1:2.288          "coeficientes de la friccion viscosa
  b2:0.175

"============INICIALIZACIONES==============================
  q1a:0.1745        "velocidades articulares.
  q2a:1.22

  z1:0.1745         " dz = dqd - dq = deq
  z2:1.22

  hat1u:0          "centro de la circunferencia representada
  hat1v:0          "   con parametros de adaptacion

  hat2:0            "radio de la circunferencia, con parametro
                   "   de adaptacion
  END
```

B.2.3 Bloque de robot

```
CONTINUOUS SYSTEM robot
" Simulacin de un robot de 2 gdl
" Author:       Ana Maria Hernandez C.

INPUT   tau1   tau2 fc1  fc2
OUTPUT  q1x   q2x  dq1x  dq2x "y1  y2

STATE  q1   q2    v1    v2
DER   dq1  dq2  ddq1  ddq2
TIME   t

" Matriz de inercia
  M11 = 2.351+0.168*cos(q2)
  M12 = 0.102+0.084*cos(q2)
  M21 = M12
  M22 = 0.102
 detM = M11*M22 - M12*M21

" Vector de pares gravitacionales g(q)
  g1 = 9.81*(3.921*sin(q1)+0.186*sin(q1+q2))
  g2 = 1.82466*sin(q1+q2)

" Componentes de C(q,dq)dq
  Cq1 = -0.168*sin(q2)*dq1*dq2 - 0.084*sin(q2)*dq2*dq2
  Cq2 =  0.084*sin(q2)*dq1*dq1

" Friccion de Coulomb  (provienen del bloque fric por eso estan desactivadas)
" fc1=(if dq1<0.0 then  fc1n else fc1p)
" fc2=(if dq2<0.0 then -fc2a else fc2a)
  fric1 = (b1*dq1) + fc1
  fric2 = (b2*dq2) + fc2

" Calculo de la aceleracion articular
  h1 = Cq1 + g1 + fric1
  h2 = Cq2 + g2 + fric2

" Variable auxiliar
  pares1  = tau1 - h1
  pares2  = tau2 - h2
```

```
" Aceleracion articular
  ddq1 = ( M22*pares1 - M12*pares2) / detM
  ddq2 = (-M21*pares1 + M11*pares2) / detM

"=== solo para verificacion
"Matriz Centrifuga y de Coriolis C(q,dq)
"c11 = -0.168*sin(q2)*dq2
"c12 = -0.084*sin(q2)*dq2
"c21 =  0.084*sin(q2)*dq1
"c22 =  0
"Vectores de pares
"pares1 = tau1-(c11*dq1+c12*dq2)-g1 "- fric1
"pares2 = tau2-(c21*dq1+c22*dq2)-g2 "- fric2

"============================================
"Asignacion de ecuaciones de estado
dq1 = v1
dq2 = v2

"Asignacion de salidas
q1x   = q1
q2x   = q2
dq1x  = v1
dq2x  = v2

"Inicializacion de estados
q1: 0.1745
q2: 1.22

"Asignacion de valores a parametros de friccion
"b1:2.288
"b2:0.175

b1:1.8
b2:0.14
fc1n:-8.049
fc1p: 7.17
fc2a: 1.734

END
```

B.2.4 Bloque de fricción

```
DISCRETE SYSTEM fric

INPUT  dq1x  dq2x
OUTPUT fc1   fc2

TIME t
TSAMP k

" dq1x y dq2x son velocidades articulares provenientes del bloque robot
  dq1 = dq1x
  dq2 = dq2x

" Modelo de friccion
  fc1=(if dq1<0.0 then  fc1n else fc1p )
  fc2=(if dq2<0.0 then -fc2a else fc2a )

" Actualizacion de tiempos
  k=t+h

" Parametros
  h:0.0025

  fc1n:-8.049
  fc1p:7.17
  fc2a:1.734

END
```

B.2.5 Bloque de cámara

```
DISCRETE SYSTEM camara
" Created:      12/4/98

" Inputs and outputs:
INPUT     q1x  q2x
OUTPUT    u    v

" States and time variables:
STATE    ua  va
NEW      un  vn
```

```
TIME      t
TSAMP     ts

"h: 0.010
h: 0.036
ts = t + h

"Ecuacion cinematica
  xr =  0.45*sin(q1x) + 0.45*sin(q1x+q2x)
  yr = -0.45*cos(q1x) - 0.45*cos(q1x+q2x)

"  en coordenadas de vision.
  un  = -val*alfau*(xr - ocr1) + uo
  vn  =  val*alfav*(yr - ocr2) + vo

"Salidas
  u=un
  v=vn

" Parametros del sistema de vision
"  val: -0.020408
  val = lamb/(lamb-ocr3)
  alfau: 72727
  alfav: 72727
  lamb:   0.008
  uo:   320
  vo:   240
  ocr1:   0.76
  ocr2:  -0.48
  ocr3:   0.64

"Inicializacion de estados
ua:100
va:278

END
```