

Tesis defendida por
Juan Antonio Zacarias Mena

y aprobada por el siguiente comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Director del Comité

M.C. Moisés Castro Delgado
Miembro del Comité

M.C. Ricardo Francisco Núñez Pérez
Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon
Miembro del Comité

Dr. César Cruz Hernández
Coordinador del programa de
Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Estudios de Posgrado

7 de Diciembre del 2012

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones**

**Estudio experimental del comportamiento complejo de circuitos
conmutados**

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

Juan Antonio Zacarias Mena

Ensenada, Baja California, México

2012

RESUMEN de la tesis de Juan Antonio Zacarias Mena, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones. Ensenada, Baja California, Diciembre de 2012.

Estudio experimental del comportamiento complejo de circuitos conmutados

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Director de Tesis

En la actualidad el campo de la electrónica de potencia tiene una importancia cada vez mayor: se estima que durante el siglo XXI, el 90 % de la energía eléctrica generada en los países desarrollados será procesada por la electrónica de potencia antes de su consumo final. En estos países, alrededor del 60 % de la electricidad producida se utiliza para motores de potencia, y otro 20 % es consumido por la iluminación. Dado que los circuitos electrónicos de potencia son una parte esencial en estas áreas, un número cada vez mayor de convertidores de potencia son conectados a la alimentación de corriente alterna. La naturaleza discontinua de estos convertidores genera un comportamiento dinámico muy variado, desde puntos de equilibrios hasta oscilaciones caóticas.

En este trabajo de tesis se presenta el estudio del comportamiento dinámico de tres convertidores básicos (buck, buck-boost y de Ćuk), con una ley de retroalimentación de modulación de anchura de pulso. Mediante un estudio analítico, numérico y experimental se mostró que los circuitos pueden efectivamente presentar comportamientos dinámicos tales como bifurcaciones deslizantes, puntos de equilibrios, órbitas periódicas, órbitas cuasiperiódicas y caóticas cuando ocurren variaciones en la tensión de entrada V_{in} y el periodo T de la señal de modulación. Se utiliza la teoría de sistemas dinámicos discontinuos como herramienta analítica para determinar las condiciones del sistema para que éste presente un comportamiento caótico. Resultados numéricos y experimentales ilustran el análisis presentado.

Palabras Clave: **convetidores de potencia, sistemas dinámicos discontinuos, bifurcaciones, caos**

ABSTRACT of the thesis presented by Juan Antonio Zacarias Mena, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Sciences in Electronics and Telecommunications Instrumentation and Control. Ensenada, Baja California, December 2012.

Experimental study of complex behavior of switching circuit

The field of power electronics has a growing importance: it is estimated that during the XXI century, 90 % of the electrical energy generated in developed countries will be processed by power electronics before its final consumption. In these countries, about 60 % of the electricity generated is used to drive power motors, and a further 20 % is consumed by lighting. Because as power electronic circuits are fundamental to areas, more and more power converters will be connected to the ac supply. The discontinuous nature of these converters make them display a wide range of dynamical behaviors, from stable equilibrium points to chaotic oscillations.

This thesis presents the study of dynamical behaviors of three basic converters (buck, buck-boost and Ćuk), using a control pulse width modulation. Analytical, numerical and experimental studies showed the presence of sliding bifurcations, bifurcations of equilibria, as well as periodic, quasi-periodic and chaotic orbits when the input voltage V_{in} and period T modulation signal are varied. We use the piecewise-smooth dynamical systems theory as analytical tool to determine the system conditions to present a chaotic behavior. Numerical and experimental results illustrate the presented analysis.

Keywords: power converters, piecewisw-smooth dynamical systems, bifurcations, chaos

A mi familia y amigos.

*A la mujer que me robo
el corazón y que amo.*

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

Al CONACyT por su apoyo económico durante mis estudios de maestría.

Un agradecimiento muy especial a mi director de tesis, el Dr. Joaquín Álvarez Gallagos, por haberme aceptado como su estudiante y por su atinada dirección en este trabajo de tesis

A los miembros de mi comité de tesis M.C. Moisés Castro Delgado, M.C. Ricardo Francisco Núñez Pérez y Dr. Pedro Negrete Regagnon, por sus atinadas observaciones, su apoyo y sus comentarios respecto a mi trabajo.

A mis amigos y compañeros de maestría: Lilia, Montaña, Nayeli, Claudia, Adrián, Angel, Fausto, Angulo, Miriam, Martha, Manuel, Rodrigo, Raúl, Ricardo, Amparo, Fernando, Shiro, Manuel (Mañe), Enrique, Arturo, Héctor, Alberto, Armando, Julio, Javier, Samuel. También a Oriol, Topazio y demás compañeros que conocí el tiempo que estuve en el cicese.

A Yasmín, con 'Y' y con 's', una gran mujer y amiga, que no pense que existía. Que me permitió compartir un poco de mi vida y que compartió conmigo un pedacito de su vida, su pasado, su presente, su futuro y sus sueños. Quien me enseñó muchas cosas en poco tiempo y de quien aprendí mucho, y porque su mente brillante y personalidad luchadora, son una inspiración para muchas personas. Gracias.

Contenido

	Página
Resumen en español	2
Resumen en inglés	3
Dedicatoria	4
Agradecimientos	5
Lista de Figuras	9
Lista de Tablas	14
Capítulo 1. Introducción	17
1.1. Motivación	17
1.2. Antecedentes	18
1.3. Objetivo	23
1.4. Organización	24
Capítulo 2. Sistemas dinámicos discontinuos	26
2.1. Introducción	26
2.1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos discontinuos	27
2.1.2. Sistemas diferenciables por partes	31
2.1.2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias diferenciables por partes	32
2.1.2.2. Sistemas de Filippov	35
2.1.3. Sistemas complementarios	39
2.1.3.1. Existencia y unicidad	42
2.2. Estabilidad de los sistemas discontinuos	43
2.3. Resumen del capítulo	46
Capítulo 3. Bifurcaciones de los sistemas discontinuos	47
3.1. Introducción	47
3.2. Colisión de borde en mapas continuos lineales por partes	57
3.2.1. Forma normal del mapa de colisión de frontera	62
3.2.2. Mapas de dos dimensiones lineales por partes de la forma normal	69
3.2.2.1. Caos robusto	72
3.3. Bifurcación deslizante en sistemas de Filippov	75
3.3.1. Condiciones analíticas	80
3.3.1.1. Caso I: Bifurcación de deslizamiento tipo I	81
3.3.1.2. Caso II: Bifurcación roce-deslizamiento	82

Contenido

	Página
3.3.1.3. Caso III: Bifurcación deslizante tipo II (o conmutación-deslizante)	82
3.3.1.4. Caso IV: Bifurcación multideslizante	82
3.4. Método numérico para simulación	84
3.5. Resumen del capítulo	87
Capítulo 4. Dinámica compleja del convertidor “buck”	88
4.1. Introducción	88
4.1.0.5. Modelo del convertidor “buck” con sistemas de Filippov . . .	92
4.1.0.6. Modelo del convertidor “buck” con sistemas complementarios	93
4.1.0.7. Control por modulación de anchura de pulso	94
4.1.1. Variaciones en la tensión de entrada V_{in}	96
4.1.1.1. Resultados numéricos	96
4.1.1.2. Resultados experimentales	104
4.1.2. Variación del periodo T de la señal de modulación V_r	110
4.1.2.1. Resultados numéricos	111
4.1.2.2. Resultados experimentales	117
4.2. Bifurcación deslizante en el convertidor “buck”.	122
4.3. Parametros de rendimiento o perfil de armónicas	124
4.4. Resumen del capítulo	127
Capítulo 5. Dinámica compleja del convertidor de Ćuk	128
5.1. Introducción	128
5.1.0.3. Modelado del convertidor de Ćuk con sistema de Filippov .	131
5.1.0.4. Modelado del convertidor de Ćuk con sistemas complementarios	132
5.1.1. Variación del periodo T de la señal de modulación V_r	134
5.1.1.1. Resultados numéricos	134
5.1.1.2. Resultados experimentales	142
5.2. Resumen del capítulo	148
Capítulo 6. Dinámica compleja del convertidor “buck-boost”	150
6.1. Introducción	150
6.1.0.3. Modelado del convertidor “buck-boost” con sistemas de Filippov	152
6.1.0.4. Modelado del convertidor “buck-boost” con sistemas comple-	153
mentarios	
6.1.1. Variaciones en la tensión de entrada V_{in}	154
6.1.1.1. Resultados numéricos	154
6.1.1.2. Resultados experimentales	161
6.2. Resumen del capítulo	168

Contenido

	Página
Capítulo 7. Conclusiones	170
Conclusiones	172
Referencias bibliográficas	173

Lista de Figuras

Figura	Página
1.	Representación esquemática de la trayectoria de un sistema que cruza la frontera Σ entre regiones adyacentes de dinámicas diferenciables. 28
2.	Sistema dinámico discontinuo tipo I. 29
3.	Sistema dinámico discontinuo tipo II. 30
4.	Sistema dinámico discontinuo tipo III. 31
5.	Bosquejo del espacio de estados de las dos clases de sistemas que se consideran; (a) SDP sin deslizamiento (b) Sistemas de Filippov. 32
6.	Sistema de Filippov: (a) Región deslizante atractora; (b) Región deslizante repulsora. 36
7.	Definición equivalente del flujo deslizante F_S : (a) Método de Utkin, (b) Método de Filippov. En (c) la variable u esta en la dirección de ∇H ortogonal a Σ 38
8.	Dos retratos de fase que son topológicamente equivalentes pero no topológicamente equivalentes por partes acordes a la definición 2.30. 45
9.	Ejemplos de bifurcaciones inducidas: a) Colisión de frontera de puntos de equilibrio; b) Bifurcaciones discontinuas de puntos de equilibrio; c) Bifurcaciones de roce (grazing) de ciclos límite; d) Bifurcaciones deslizantes de ciclos límite; e) Bifurcaciones de colisión de esquina. 56
10.	Diagrama del espacio de estados de una colisión de frontera que origina persistencia de un punto fijo de cruce de frontera. 60
11.	Diagrama del espacio de estados de una colisión de frontera que origina doblez no suave. 61
12.	Diagrama del espacio de estados de una colisión de frontera que origina duplicación de periodo no suave. 61
13.	Árbol de bifurcación de colisión de frontera. 68
14.	Ejemplo de un conjunto límite de (73) después de la bifurcación de colisión de frontera de un punto fijo estable a un punto silla de montar. . . 74

Figura	Página
15. Ejemplo de un conjunto límite de (73) después de la bifurcación de colisión de frontera de un punto fijo estable a un punto silla de montar. . .	75
16. Geometría de bifurcación deslizante: (a) cruce-deslizamiento, (b) roce-deslizamiento, (c) conmutación-deslizamiento, (d) adición-deslizamiento.	80
17. Esquema básico del convertidor “buck”.	91
18. Esquema del convertidor “buck” y del control MAP.	95
19. Diagrama de bifurcación que considera la tensión de entrada V_{in} como parámetro de bifurcación.	97
20. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 15V$, (b) $V_{in} = 22V$, (c) $V_{in} = 35V$	98
21. Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódica ($V_{in} = 15V$), (b) 2-periódica ($V_{in} = 22V$) y (c) caos ($V_{in} = 35V$).	99
22. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 con: a) $V_{in} = 15V$, b) $V_{in} = 22V$ y c) $V_{in} = 35V$	100
23. Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor “buck” para $V_{in} = 35V$	101
24. Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_2	102
25. a) Circuito y b) fotografía del convertidor “buck” implementado en tablilla de prueba.	105
26. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 15V$, (b) $V_{in} = 25V$, (c) $V_{in} = 35V$	106
27. Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($V_{in} = 15V$), (b) 2-periódicas ($V_{in} = 25V$) y (c) caóticas ($V_{in} = 35V$).	107
28. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $V_{in} = 15V$, b) $V_{in} = 25V$ y c) $V_{in} = 35V$	108
29. Colisión de esquina en el convertidor “buck” para $V_{in} = 35V$	109
30. Diagrama de bifurcación que considera el periodo T de la señal de modulación V_r como parámetro de bifurcación.	111

Figura	Página
31. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 250\mu s$, (b) $T = 450\mu s$, (c) $T = 500\mu s$	112
32. Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($T = 250\mu s$), (b) 2-periódicas ($T = 450\mu s$) y (c) caóticas ($T = 500\mu s$).	113
33. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $T = 250\mu s$, b) $T = 450\mu s$ y c) $T = 500\mu s$	114
34. Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor “buck” para $T = 500\mu s$	115
35. Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_2	115
36. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 199.2\mu s$, (b) $T = 235.7\mu s$, (c) $T = 398\mu s$	118
37. Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($T = 199.2\mu s$), (b) 2-periódicas ($T = 235.7\mu s$) y (c) caóticas ($T = 398\mu s$).	119
38. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $T = 199.2\mu s$, b) $T = 235.7\mu s$ y c) $T = 398\mu s$	120
39. Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor “buck” para $T = 398\mu s$	121
40. Esquema básico del convertidor de Ćuk.	129
41. Diagrama de bifurcación que considera el periodo T como parámetro de bifurcación.	135
42. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 200\mu s$, (b) $T = 240\mu s$ y (c) $T = 260\mu s$	136
43. Retrato de fase del convertidor de Ćuk que muestra órbitas: (a) 1-periódica ($T = 200\mu$), (b) 2-periódica ($T = 240\mu$) y (c) caótica ($T = 260\mu$).	137
44. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_4 , con: a) $T = 200\mu s$, b) $T = 260\mu s$ y c) $T = 260\mu s$	138
45. Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor de Ćuk para $T = 260\mu$	139
46. Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_4	139

Figura	Página
47. a) Fotografía del convertidor Ćuk implementado en tablilla de prueba y b) circuito.	143
48. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 231\mu s$, (b) $T = 262.5\mu s$ y (c) $T = 399.7\mu s$	144
49. Retrato de fase del convertidor de Ćuk que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($T = 231\mu s$); (b) 2-periódicas ($T = 262.5\mu s$) y (c) caóticas ($T = 399.7\mu s$).	145
50. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_4 , con: a) $T = 231\mu s$, b) $T = 262.5\mu s$ y c) $T = 399.7\mu s$	146
51. Comportamiento caótico del convertidor de Ćuk para $T = 399.7\mu s$	147
52. Esquema básico del convertidor “buck-boost”.	151
53. Diagrama de bifurcación que considera la tensión de entrada V_{in} como parámetro de bifurcación.	155
54. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 12V$, (b) $V_{in} = 15.3V$, (c) $V_{in} = 18V$	156
55. Retrato de fase del convertidor “buck-boost” que muestra órbitas: (a) 1-periódica ($V_{in} = 12V$), (b) 2-periódica ($V_{in} = 15.3V$) y (c) caos ($V_{in} = 18V$).	157
56. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $V_{in} = 12V$, b) $V_{in} = 15.3V$ y c) $V_{in} = 18V$	158
57. Colisión de esquina en el convertidor “buck-boost” para $V_{in} = 18V$	159
58. Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_2	159
59. a) Circuito y b) fotografía del convertidor “buck-boost” implementado en tablilla de prueba.	163
60. Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 15$, (b) $V_{in} = 25$, (c) $V_{in} = 35$	164
61. Retrato de fase del convertidor “buck-boost” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($V_{in} = 15V$), (b) 2-periódicas ($V_{in} = 25V$) y (c) caóticas ($V_{in} = 35V$).	165
62. Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $V_{in} = 15V$, b) $V_{in} = 25V$ y c) $V_{in} = 35V$	166

63. Colisión de esquina en el convertidor “buck-boost” para $V_{in} = 35V$. . . 167

Lista de Tablas

Tabla	Página
1. Condiciones analíticas para bifurcaciones deslizantes de ciclos límite. . .	84
3. Parámetros usados para la simulación del convertidor “buck”.	96
4. Parámetros de bifurcación.	97
5. Parámetros usados para la simulación del convertidor de Ćuk.	134
6. Parámetros usados para la simulación del convertidor “buck-boost”. . .	155

Nomenclatura

IEM Interferencia electromagnética.

cd Corriente directa.

ca Corriente alterna.

cd/cd Corriente continua a corriente continua.

MAP Modulación de anchura de pulso.

EDO Ecuación diferencial ordinaria.

EDOs Ecuaciones diferenciables ordinarias.

SDP Sistemas diferenciable por partes.

PLC Problema lineal complementario.

SCL Sistema lineal complementario.

CC Condiciones complementarias.

BDI Bifurcación discontinua inducida.

s.p.d.g Sin pérdida de generalidad.

SPICE Simulador de programas con énfasis en circuitos integrados.

DEs Dispositivos electrónicos.

MCC Modo de conducción continuo.

MCD Modo de conducción discontinuo.

SCC Sistema complementario cónico.

DAT Distorsión armónica total.

FP Factor de potencia.

FC Factor de cresta.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Desde hace años ha existido la necesidad de controlar la potencia eléctrica de los sistemas de tracción y de los controles industriales impulsados por motores, lo cual ha llevado a la electrónica de potencia a revolucionar la idea del control para la conversión de potencia y el control de motores eléctricos. La electrónica de potencia es un campo multidisciplinario cuyas principales materias son: los dispositivos electrónicos y magnéticos, la teoría de circuitos y el control. Mediante la electrónica de potencia se puede convertir la tensión de corriente directa (cd) de una batería en una tensión de corriente alterna (ca); reducir o elevar una tensión de cd; rectificar una tensión de ca o variar su frecuencia; hacer que una carga con dinámica fuertemente no lineal sea vista por la fuente como una carga resistiva simple, o producir una tensión de ca con amplitud y frecuencia variable. Todo esto en un tamaño reducido, con un costo mínimo y una alta eficiencia en la conversión.

Una gran parte de los circuitos electrónicos de potencia se basa, en primer término, en la conmutación de dispositivos de potencia. Con el desarrollo de la tecnología de los semiconductores de potencia o también llamados diodos de cuatro capas, las capacidades del manejo de la energía y la velocidad de conmutación de los dispositivos de potencia se han mejorado tremendamente. La electrónica de potencia ha alcanzado ya un lugar importante en la tecnología moderna y se utiliza ahora en una gran diversidad de productos en la industria (o fábricas), que incluyen controles de temperatura, de

iluminación, de motores, fuentes variables de alimentación, sistemas de propulsión de vehículos y sistemas de alta tensión de corriente continua. Debido a que los circuitos electrónicos de potencia convierten la energía eléctrica de una forma a otra, se les conoce también como convertidores electrónicos de potencia o simplemente convertidores.

La principal dificultad en el diseño de esquemas de control para los sistemas y circuitos conmutados radica en su característica de conmutación. En el caso de los convertidores, la transferencia de energía de la fuente hacia la carga se realiza mediante conmutaciones, esto le confiere al circuito un carácter discontinuo (Miranda y Alvarez, 2009). Aunque éstos pueden estar compuestos de elementos lineales y pasivos, generan una dinámica global no lineal que puede exhibir una amplia variedad de comportamientos no tradicionales como intervalos de equilibrios, variedades deslizantes, ciclos límite, bifurcaciones típicas y no típicas como de colisión (Banerjee y Verghese, 2001), roces (grazing en inglés) (Di Bernardo *et al.*, 2008), deslizantes (Di Bernardo y Iannelli, 2002), etc., así como atractores caóticos (Aroudi *et al.*, 2005).

Comprender mejor la dinámica compleja que presentan los sistemas conmutados permitiría un diseño óptimo de controladores, o utilizar más eficientemente los ya existentes que se ven limitados por los sistemas de protección y seguridad que se agregan para evitar comportamientos no modelados.

1.2. Antecedentes

Los fenómenos dinámicos son continuos en el tiempo. Las discontinuidades pueden aparecer cuando en la representación dinámica se incluyen elementos con dinámicas muy diferentes. Una de las representaciones comunes de la dinámica de sistemas conmutados utiliza modelos discontinuos.

Por otra parte dada la complejidad de estos modelos en ocasiones los sistemas conmutados se puede considerar de estructura variable (Tse, 2004; Miranda y Alvarez, 2009). En la literatura se recurre a modelos menos complejos, pero, al utilizar modelos más sencillos no se representa toda la dinámica de los sistemas conmutados. Por ejemplo, en el caso de los convertidores conmutados se necesita agregar elementos de protección para evitar que la dinámica no modelada del convertidor afecte su funcionamiento (Mohan *et al.*, 2003).

En años recientes, se ha dedicado un gran esfuerzo al análisis de fenómenos no lineales en electrónica de potencia. En particular, varios resultados numéricos y experimentales han mostrado que la modulación de anchura de pulso de alta frecuencia en las topologías de convertidores cd/cd puede exhibir evoluciones no lineales y también caóticas (Aroudi *et al.*, 2005). El comportamiento complejo en electrónica de potencia comenzó a tener un tratamiento formal a fines de los 80's, y muchos de los trabajos reportados se han enfocado en la conmutación de los convertidores de potencia. En 1984, Brockett y Wood presentaron un artículo que describe caos en un convertidor buck. Hamill y Jefferies en 1988 analizaron detalladamente el comportamiento caótico en electrónica de potencia. La investigación inicial en esta línea fue realizada con el modelo de ecuaciones diferenciales exactas de los convertidores. Con esta clase de descripción de sistemas, fue difícil ir más allá de las observaciones empíricas de los fenómenos no lineales (Banerjee y Verghese, 2001). Después de que fue demostrado a conciencia que todos los circuitos conmutados controlados por retroalimentación son inherentemente no lineales y que muchos fenómenos no lineales ocurren en ellos, los esfuerzos fueron dirigidos hacia el desarrollo de modelos de sistemas con los que se podría investigar teóricamente tales fenómenos. Usando la descripción de los sistemas dinámicos no lineales, Hamill y Dean propusieron un nuevo modelo basado en mapas

no lineales en (Hamill *et al.*, 1992). El modelo de la técnica de muestreo de datos en los circuitos de electrónica de potencia presentado en el libro de Kassakian, Schlecth, y Vergheses (Kassakian *et al.*, 1991) ayudó en este desarrollo. En este método, se observan las variables de estado en un instante de tiempo específico. Es claro que la selección del instante de muestreo no es único. Por ejemplo, en el convertidor buck se puede muestrear las variables de estado de tres formas diferentes:

- Al comienzo de cada ciclo de la rampa.
- En aquellos instantes de tiempo que resultan en un evento de conmutación (i.e., los saltos de ciclos son ignorados).
- En cada instante de evento de conmutación (i.e., cuando $v_{con} = v_r$).

Dean y Hamill propusieron el segundo en (Hamill *et al.*, 1992) y más tarde aplicaron este método para analizar el convertidor boost. Di Bernardo usa el tercer método en el análisis del convertidor buck (Di Bernardo *et al.*, 1998a,b, 2001, 2002a). Por otra parte, Banerjee y Chakrabarty (Banerjee y Chakrabarty, 1998), Chan and Tse (Chan y Tse, 1997) y Marrero (Marrero *et al.*, 1996) aplicaron el primer método. Con las herramientas que ellos propusieron, las investigaciones se enfocaron en el estudio de los fenómenos no lineales que ocurren en convertidores específicos y en esquemas de modulación de anchura de pulso (MAP). El convertidor buck controlado por tensión y el convertidor boost controlado por corriente han recibido una gran atención en las investigaciones. El primero, porque exhibe una rica variedad de fenómenos no lineales y el segundo por ser fácil de obtener una forma cerrada de la expresión de mapeo, que facilita su tratamiento analítico. También han sido investigados comportamientos no lineales en otras configuraciones de convertidores. Tse (Tse, 2004) ha mostrado fenómenos de bifurcación en

convertidores boost y de Ćuk. También se han hecho algunos esfuerzos en la investigación de fenómenos no lineales en otros sistemas de alta potencia. Nagy en (Nagy *et al.*, 1989) investigó el control de corriente de un manejador de motor de inducción; Magauer y Banerjee en (Magauer y Banerjee, 2000) reportaron cuasiperiodicidad, duplicación de periodo, caos en sistemas controlados por técnicas de MAP; Kuroe y Hayashi en (Kuroe y Hayashi, 1989) observaron y analizaron muchos fenómenos de bifurcación interesantes en sistemas de accionamiento de máquinas de inducción en electrónica de potencia.

En todos estos estudios, el método esencial ha sido la obtención de un modelo de tiempo discreto del sistema bajo estudio y se analiza el fenómeno observado en términos de la teoría de bifurcaciones desarrollada por matemáticos y físicos. En muchos de los casos éste enfoque trabaja bien. En algunos casos, sin embargo, fueron observados fenómenos de bifurcación muy atípicos. Por ejemplo, fueron observadas transiciones directas de una órbita periódica a una órbita caótica en (Di Bernardo *et al.*, 1998b, 2002a; Tse, 2003, 2004) y fue reportada duplicación de periodo no suave en (Di Bernardo *et al.*, 2008, 2001). Estos fenómenos no pueden ser explicados en términos de la teoría de bifurcación estándar desarrollada para mapeos suaves. Banerjee en (Banerjee y Verghese, 2001) y Di Bernardo en (Di Bernardo *et al.*, 2001) mostraron que en muchos de estos sistemas las bifurcaciones atípicas observadas pertenecen a una nueva clase llamada bifurcación de colisión de esquina. Di Bernardo en (Di Bernardo *et al.*, 1998a; Di Bernardo y Iannelli, 2002) muestran que hay movimiento de deslizamiento en el convertidor buck. Esto crea un nuevo interés en el análisis teórico de sistemas diferenciables por partes (SDP); el trabajo conceptual para el entendimiento y caracterización de tales bifurcaciones ha sido recientemente desarrollado por Banerjee en (Banerjee y Verghese, 2001) y Di Bernardo en (Di Bernardo *et al.*, 2008), y algunos trabajos anteriores hechos por Feigin en (Di Bernardo *et al.*, 1999). Con este conjunto

de conocimientos, muchos fenómenos de bifurcación empíricos observados ahora pueden ser explicados teóricamente. Ahora es conocido que los tres tipos de mapeos ocurren en electrónica de potencia:

- Mapeos suaves.
- Mapeos diferenciables por partes.
- Mapeos discontinuos.

La teoría de bifurcación desarrollada, para estas clases de mapeos, es relevante en electrónica de potencia puesto que nos ayuda a entender porqué en ocasiones un tipo de comportamiento de los sistemas cambia a otro mientras se varía un parámetro.

Por otra parte, un área importante de investigación es la simulación numérica eficiente de sistemas con interruptores, dado que estos sistemas son a menudo muy difíciles de investigar por los métodos analíticos y de simular por las técnicas numéricas tradicionales. Por lo tanto, se necesita un mayor entendimiento acerca de la dinámica de los sistemas con interruptores. Varios fenómenos, los cuales no están presentes en el área de sistemas diferenciables, pueden ocurrir en sistemas con interruptores. Estos incluyen modos deslizantes y conmutaciones rápidas arbitrarias (Di Bernardo *et al.*, 2008). Muchos de los modelos de sistemas híbridos propuestos en la literatura tienen restricciones para prevenir conmutaciones de muy alta frecuencia entre los modos discretos. Si tales restricciones no son impuestas sobre el diseño del sistema de control, es común tener cambios rápidos en el modo de operación. Este tipo de dinámicas no siempre son bien definidas y esto acarrea que el modelo deba ser reformulado. Las conmutaciones de alta frecuencia son siempre difíciles de trabajar en herramientas de simulación (Bernhardsson *et al.*, 1999).

Herramientas numéricas confiables para la simulación de sistemas mecánicos (e.g., engranes y frenos) y eléctricos (e.g., sistemas de relevadores y convertidores cd/cd) juegan un papel importante en el análisis y desarrollo de tales sistemas. Estos son modelados a menudo por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) que pueden ser muy complejas. Existe una amplia variedad de métodos numéricos para resolver las EDOs y muchos de ellos son rutinas usadas en programas establecidos, por ejemplo, Matlab. Sin embargo, muchos de estos algoritmos requieren que las EDOs sean suficientemente diferenciables, mientras que los modelos como los mencionados anteriormente incluyen típicamente alguna clase de discontinuidad. Los sistemas con discontinuidades son a menudo referidos como sistemas diferenciables por partes, en las cuales las discontinuidades pueden aparecer ya sea en el estado (i.e., discontinuo con respecto al tiempo) o en el lado derecho del modelo de estado (i.e., en el vector de campo o sus derivadas) (viz, (Filippov, 1988)). La simulación de esta clase de sistemas requieren un tratamiento numérico especial. Existe una diferencia obvia en el tratamiento de sistemas con saltos en el estado (e.g., debido a sistemas con impacto mecánico) con los de vector de campo discontinuo (e.g., debido a interruptores en electrónica), este último llamado sistema de Filippov. La característica más importante de los sistemas de Filippov es la posibilidad de movimientos limitados para algún subconjunto del espacio de estados. Tal movimiento limitado es a menudo referido como deslizamiento (Di Bernardo *et al.*, 2002b; Piiroinen y Kuznetsov, 2008).

1.3. Objetivo

El objetivo es realizar un estudio experimental sobre el comportamiento de una clase de circuitos conmutados, en particular sobre ciertas topologías y algoritmos de control sencillos como los analizados en (Miranda y Alvarez, 2009). Se analizará la presencia

de bifurcaciones deslizantes, de colisión de borde y el comportamiento caótico, así como el efecto que tienen, sobre los estados estacionarios, la variación de diversos parámetros, como el periodo de la señal de modulación utilizada para limitar la frecuencia de operación y la alimentación general del circuito. En particular se analizará e ilustrará experimentalmente la existencia de bifurcaciones deslizantes de diversos tipos y el comportamiento caótico en circuitos electrónicos conmutados, de baja dimensión.

Las topologías de convertidores básicos que se estudiarán son el buck, buck-boost y de Ćuk. El convertidor buck es un circuito que obtiene a su salida una tensión continua menor que su entrada, es por eso que también es llamado convertidor reductor. El convertidor buck-boost es un circuito en el que la tensión de salida es mayor o menor que la tensión de entrada, y además sus polaridades resultan opuestas, este convertidor es llamado reductor-elevador. El convertidor de Ćuk es un circuito que ofrece una tensión de salida negativa con respecto a la tensión de entrada, y además, esta tensión de salida puede ser mayor o menor que la de entrada.

1.4. Organización

En el capítulo 2 se presenta una introducción a los sistemas dinámicos discontinuos y a las herramientas matemáticas como los son los sistemas diferenciables por partes, los sistemas de Filippov y los sistemas complementarios que se utilizan para trabajar con los sistemas dinámicos discontinuos.

En el capítulo 3 se da una introducción a la teoría de bifurcaciones de los sistemas discontinuos. Se revisan los métodos que se utilizan para el análisis de bifurcaciones en sistemas discontinuos, en particular para las bifurcaciones de colisión de borde y bifurcaciones deslizantes en sistemas de Filippov. Al final se da una introducción al método numérico que será utilizado en la parte de simulación de los convertidores.

El capítulo 4 está dedicado a presentar el comportamiento complejo del convertidor buck. Se plantea el modelo del convertidor buck que será utilizado en la parte numérica. Se presentan los resultados numéricos y experimentales que ilustran el comportamiento complejo de este circuito.

El capítulo 5 está dedicado a presentar el comportamiento complejo del convertidor de $\dot{C}uk$. Se plantea el modelo del convertidor de $\dot{C}uk$ que será utilizado en la parte numérica. Se presentan los resultados numéricos y experimentales que ilustran el comportamiento complejo de este circuito.

En el capítulo 6 se presenta el comportamiento complejo del convertidor buck-boost. Se plantea el modelo de éste convertidor, el cual será utilizado en la parte numérica. Se presentan los resultados numéricos y experimentales que ilustran el comportamiento complejo de este circuito.

Finalmente, se muestran las conclusiones generales.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos discontinuos

2.1. Introducción

Los sistemas físicos pueden operar en diferentes modos; generalmente cada modo presenta una dinámica diferente, y a veces es frecuente que ocurran transiciones entre los modos de operación de un sistema. Estas transiciones pueden considerarse instantáneas, siempre y cuando la escala de tiempo de la transición sea mucho menor que la escala de tiempo de las dinámicas de los modos individuales. Entre los sistemas mecánicos que poseen esta característica se encuentran: los sistemas con fricción seca, con impacto y con holgura mecánica. Otros ejemplos se pueden encontrar en circuitos electrónicos que tengan diodos y/o transistores, como por ejemplo las fuentes conmutadas. El modelo matemático de los sistemas físicos (v.g., los mecánicos, electrónicos, etc.) puede llevar a sistemas dinámicos discontinuos, los cuales cambian entre diferentes modos, en donde la dinámica de cada uno de ellos está asociada a un conjunto diferente de ecuaciones diferenciales (Di Bernardo *et al.*, 1998a).

Desde el punto de vista matemático, los sistemas dinámicos discontinuos no son fáciles de analizar, ya que los modelos resultantes son sistemas dinámicos cuyo lado derecho es no-continuo o no-diferenciable (Filippov, 1988). Más aún, en muchos de los casos en las soluciones se observan restricciones adicionales que frecuentemente aparecen en la forma de restricciones de desigualdad. Esto significa que una extensión del concepto de ecuación diferencial se necesita para describir el comportamiento discontinuo.

Se ha dedicado mucho trabajo para introducir las bases matemáticas de los sistemas dinámicos discontinuos. Hay, al menos, tres diferentes enfoques para tratar con esta clase de sistemas: el de inclusión diferencial, el de formalismo complementario y el de sistema híbrido. Los diferentes enfoques han mostrado ser adecuados para algunos propósitos, aunque todos ellos tienen algún inconveniente, lo cual los hace más apropiados para ciertas tareas que para otras (Mehrizi-Sani *et al.*, 2007).

2.1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos discontinuos

Los sistemas dinámicos discontinuos pueden ser descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias diferenciables por tramos. Estos son diferenciables en regiones G_i del espacio de estados con diferenciables que se pierde al cruzar las fronteras $\Sigma_{i,j}$ entre regiones adyacentes, *viz* figura 1. Nos referimos a estas fronteras como conjuntos o variedades de conmutación. Específicamente tenemos el modelo de discontinuidad

$$\dot{x} = F(x, t, \mu), \tag{1}$$

donde $F : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable por partes, t es la variable de tiempo, $\mu \in \mathbb{R}^m$ un vector de parámetros y $x \in \mathbb{R}^n$ el vector de estados. En cada región G_i del espacio de estados, la dinámica del sistema es descrita por una forma diferente, f_i , del vector de campo del sistema.

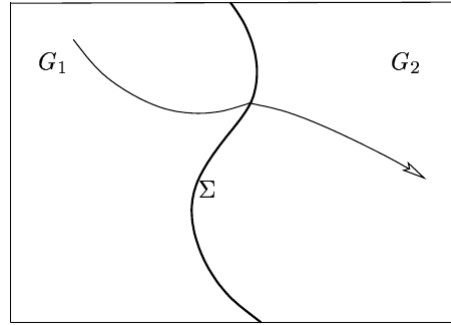


Figura 1: **Representación esquemática de la trayectoria de un sistema que cruza la frontera Σ entre regiones adyacentes de dinámicas diferenciables.** (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, de Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

Los sistemas dinámicos discontinuos de interés se pueden dividir en tres categorías, dependientes del tipo de no diferenciableidad de sus órbitas y campos vectoriales (Leine, 2006).

1. Sistemas continuos y no diferenciables: Son sistemas no diferenciables cuyas órbitas y campos vectoriales son continuos en todas partes, o sistemas continuos diferenciables por tramos. Estos sistemas tienen órbitas continuas diferenciables pero discontinuidades en la primera derivada o en las superiores de f , i.e. $f_i(x_0, \mu) = f_j(x_0, \mu)$, pero $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\partial^n f_i}{\partial x^n}(x_0, \mu) \neq \frac{\partial^n f_j}{\partial x^n}(x_0, \mu)$, $\forall x_0 \in \Sigma_{ij}$. Algunos ejemplos incluyen sistemas mecánicos con soporte elástico bi-lineal, viz figura 2, cuyo modelo matemático que describe el comportamiento del sistema está dado por

$$m\ddot{x} + kx = f_0 \cos \omega t - f(x),$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ k_f x & x > 0. \end{cases}$$

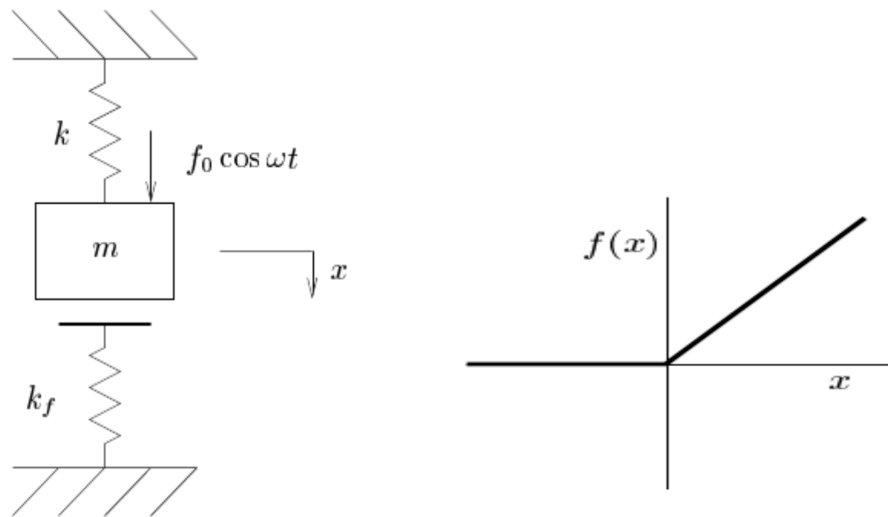


Figura 2: **Sistema dinámico discontinuo tipo I.** (Fuente: “Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems”, Leine, R. I., 2006, *Physica D*, páginas 121–137)

2. Sistemas con campo vectorial discontinuo, i.e., $f_i(x_0, \mu) \neq f_j(x_0, \mu)$, $\forall x_0 \in \Sigma_{ij}$.

Estos sistemas son también llamados sistemas de Filippov. Como ejemplos podemos mencionar los sistemas con soporte elástico viscoso, con fricción seca, y los modelos de convertidores de electrónica de potencia, viz figura 3. El modelo matemático de un sistema masa-resorte con fricción seca está dado por

$$m\ddot{x} + kx = f_0 \cos \omega t - f(\dot{x}),$$

$$f(\dot{x}) \in \begin{cases} -\mu & \dot{x} < 0, \\ [-\mu, \mu] & \dot{x} = 0, \\ \mu & \dot{x} > 0. \end{cases}$$

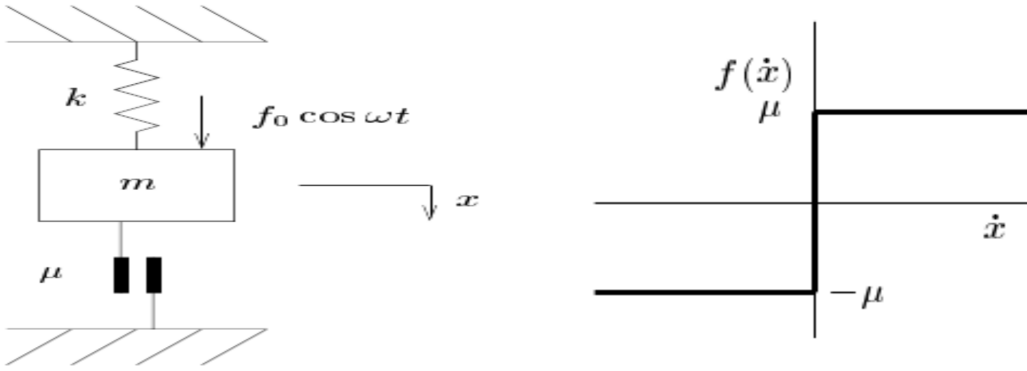


Figura 3: **Sistema dinámico discontinuo tipo II.** (Fuente: “Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems”, Leine, R. I., 2006, *Physica D*, páginas 121–137)

3. Sistemas que presentan discontinuidades (ó saltos) en el estado o sistemas con impacto. Como ejemplos podemos mencionar los sistemas de impacto con velocidad reversible o máquinas de vibro-impacto. Estos sistemas son comúnmente formulados como un sistema híbrido con saltos discontinuos (i.e., como leyes de restitución) descritos por mapeos auxiliares, viz figura 4. Por ejemplo el modelo matemático de una esfera que se deja caer e impacta con el suelo está dado por

$$m\ddot{x} = -g + mf(x),$$

$$x(t_k) = 0,$$

$$\dot{x}_+(t_k) = -e\dot{x}_-(t_k),$$

$$f(x) = (\dot{x}_+(t_k) - \dot{x}_-(t_k)) \delta_{t_k},$$

$$x(t) \geq 0, \quad f(x) \geq 0,$$

$$xf(x) = 0.$$

en donde t_k es el tiempo en el que $x = 0$, y $\dot{x}_-(t_k)$ y $\dot{x}_+(t_k)$ son el valor justo antes y después de \dot{x} en el instante de tiempo t_k , respectivamente.

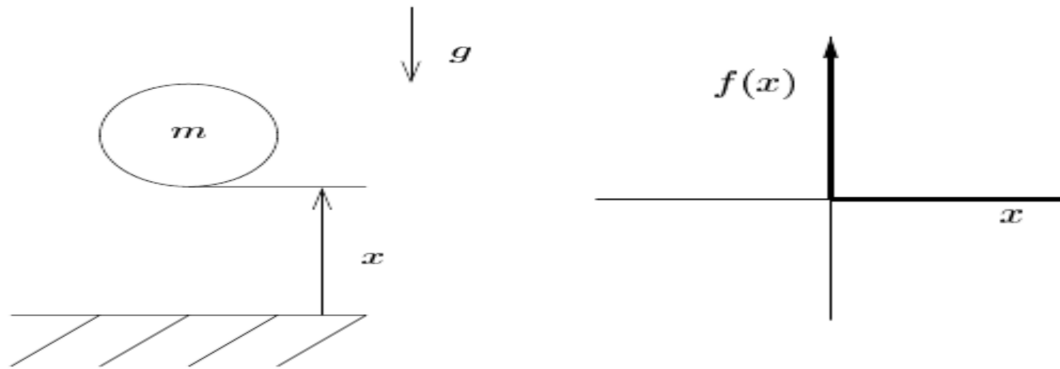


Figura 4: **Sistema dinámico discontinuo tipo III.** (Fuente: “Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems”, Leine, R. I., 2006, *Physica D*, páginas 121–137)

4.

2.1.2. Sistemas diferenciables por partes

Existen diferentes formalismos para tratar con los sistemas continuos no diferenciables, que incluyen sistemas híbridos, problemas complementarios y ecuaciones diferenciales ordinarias multivaluadas. La noción clave es la de una inclusión diferencial que permite que el lado derecho de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) $\dot{x} = f(x)$ no sea estrictamente una función, sino una función multivaluada. Por ejemplo, los mecanismos con fricción seca de Coulomb. Un sistema diferenciable por partes es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en \mathbb{R}^n , donde el espacio de estados es partido en varios conjuntos abiertos S_i , en cada uno de los cuales el sistema es diferenciable:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p, \quad (2)$$

en donde

$$f(x, \mu) = F_i(x, \mu) \quad \forall x \in S_i \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n$$

y cada función F_i es diferenciable. También se supone que cada frontera Σ_{ij} entre regiones S_i y S_j es una variedad diferenciable $(n - 1)$ -dimensional, aunque también, se interesa en las esquinas de la intersección de dos Σ_{ij} diferenciables. La evolución de la dinámica de tales sistemas durante el tiempo T desde una condición inicial x_0 define un flujo $\Phi(x_0, \mu)$, el cual puede ser descompuesto en flujos Φ_i definidos en cada región S_i , como se muestra en la figura 5.

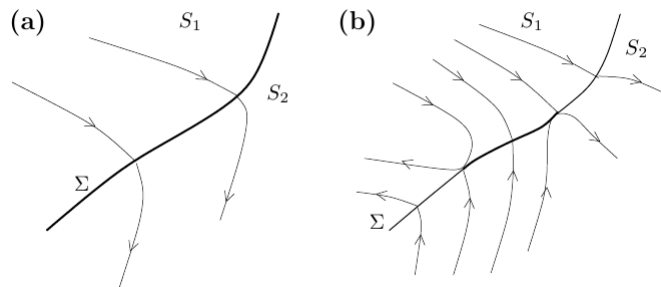


Figura 5: **Bosquejo del espacio de estados de las dos clases de sistemas que se consideran; (a) SDP sin deslizamiento (b) Sistemas de Filippov. (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)**

En general, diferentes clases de SDP pueden clasificarse acordes con lo que se permita que ocurra cuando el flujo global Φ interseca la frontera Σ_{ij} .

2.1.2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias diferenciables por partes

Definición 2.20. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Un flujo diferenciable por partes está dado por un conjunto finito de EDOs

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad \text{para } x \in S_i, \quad (3)$$

en donde $\cup_i S_i = D \subset \mathbb{R}^n$ y cada S_i tiene un interior no vacío. La intersección $\Sigma_{ij} := \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$ es ya sea una variedad $(n - 1) - \text{dimensional}$ incluida en las fronteras S_j y S_i , denotadas como ∂S_j y ∂S_i , o es el conjunto vacío. Cada vector de campo F_i es diferenciable tanto en el estado x como en el parámetro μ y define un flujo diferenciable $\Phi_i(x, t)$ dentro de cualquier conjunto abierto $U \supset S_i$. En particular, cada flujo Φ_i está bien definido en ambos lados de la frontera ∂S_j .

Definición 2.21. (Di Bernardo *et al.*, 2008) El grado de diferenciability en un punto x_0 en un conjunto conmutado Σ_{ij} de una EDO diferenciable por partes es el más alto orden r tal que la expansión en series de Taylor de $\Phi_i(x_0, t)$ y $\Phi_j(x_0, t)$ con respecto a t , evaluada en $t = 0$, corresponda a los términos de $\mathcal{O}(t^{r-1})$. Esto es, la primera derivada parcial diferente de cero con respecto a t de la diferencia $[\Phi_i(x_0, t) - \Phi_j(x_0, t)]|_{t=0}$ sea de orden r .

Ahora, si se considera una EDO local con un conjunto simple discontinuo Σ_{12} que puede ser escrito como

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{si } x \in S_1 \\ F_2(x, \mu), & \text{si } x \in S_2, \end{cases} \quad (4)$$

donde F_1 genera un flujo Φ_1 , F_2 un flujo Φ_2 . Se tiene que

$$\frac{\partial \Phi_i(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = F_i(x), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial F_i}{\partial t} = \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = F_{i,x} F_i(x), \quad (6)$$

en donde el segundo subíndice x significa derivada parcial con respecto a x .

Similarmente

$$\frac{\partial^3 \Phi_i(x, t)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} = F_{i,xx} F_i^2 + F_{i,x}^2 F_i, \quad (7)$$

etc., Si F_1 y F_2 difieren en una $m - \text{ésima}$ derivada parcial con respecto al estado x , se tiene que los flujos Φ_1 y Φ_2 difieren en su $(m + 1) - \text{ésima}$ derivada parcial con respecto a t .

Por lo tanto, si $F_1(x) \neq F_2(x)$ en un punto $x \in \Sigma_{12}$, entonces se tiene un grado de diferenciabilidad-uno ahí. Sistemas con grado uno se dice que son de tipo de Filippov. Alternativamente, si $F_1(x) = F_2(x)$ pero hay una diferencia en el jacobiano derivado $F_{1,x}(x) \neq F_{2,x}(x)$ en x , entonces el grado de la diferenciabilidad se dice que es 2. Una diferencia en la segunda derivada $F_{1,xx}(x) \neq F_{2,xx}(x)$ da un grado de diferenciabilidad de tres, etc. Sistemas con grado de diferenciabilidad de dos o mayor pueden ser llamados sistemas continuos diferenciables por partes.

Definición 2.22. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Una frontera de discontinuidad Σ_{ij} se dice que es uniformemente discontinua en algún dominio D si el grado de diferenciabilidad del sistema es el mismo para todos los puntos $x \in \Sigma_{ij} \subset D$. Se dice que la discontinuidad es uniforme con grado m si la primera derivada parcial diferente de cero de $F_i - F_j$ evaluada sobre Σ_{ij} es de orden $m - 1$. Más aún, el grado de diferenciabilidad es uno si $F_i(x) - F_j(x) \neq 0$ para $x \in \Sigma_{ij} \cap D$.

2.1.2.2. Sistemas de Filippov

El caso de sistemas con grado de diferenciabilidad uniforme se debe tratar con detenimiento ya que permite la posibilidad de movimiento deslizante. Para definir el deslizamiento, es útil pensar en un sistema local

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & H(x) > 0, \\ F_2(x), & H(x) < 0, \end{cases} \quad (8)$$

con $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar que depende de los estados del sistema y con una frontera de discontinuidad entre dos regiones definida por el conjunto cero de la función diferenciable $H(x) = 0$, viz figura 6.

Definición 2.23 (Di Bernardo *et al.*, 2008) La región de deslizamiento de un conjunto discontinuo de un sistema de la forma (8) con grado de diferenciabilidad uniforme uno, está dada por la porción de las fronteras de $H(x)$ para el cual

$$(\nabla H * F_1) (\nabla H * F_2) < 0. \quad (9)$$

Esto es, $\nabla H * F_1$ (la componente de F_1 normal a H) tiene el signo opuesto a $\nabla H * F_2$. Así, la frontera es atractora (o repeledora) simultáneamente por ambos lados.

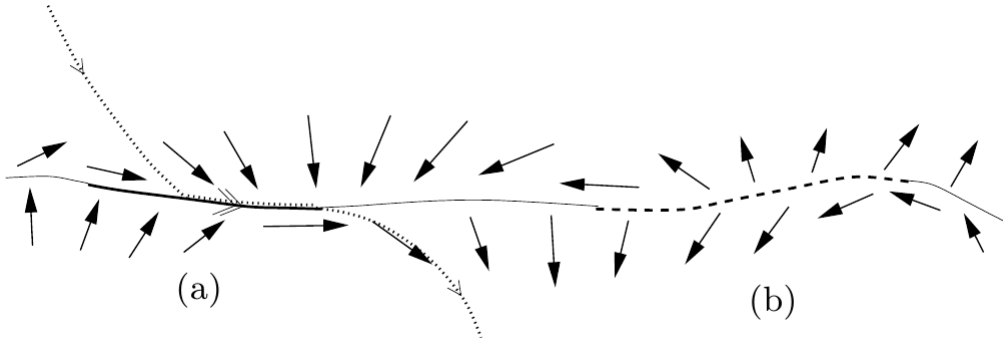


Figura 6: **Sistema de Filippov: (a) Región deslizante atractora; (b) Región deslizante repulsora.** (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, de Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

Existen dos enfoques en la literatura para la formulación de las ecuaciones para los flujos que tienen deslizamiento cuando se escriben en la forma general (8). Estos son el método de control equivalente de Utkin y el método convexo de Filippov. En el método de Utkin, se supone que el sistema fluye acorde al vector de deslizamiento F_{12} , el cual es el promedio de los dos vectores de campo F_1 (en la región S_1) y F_2 (en la región S_2) más un control $\beta(x) \in [-1, 1]$ en la dirección de la diferencia entre los dos vectores

$$F_{12} = \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 - F_1}{2}\beta(x). \quad (10)$$

Específicamente el control equivalente es

$$\beta(x) = -\frac{\nabla H * F_1 + \nabla H * F_2}{\nabla H * F_2 - \nabla H * F_1}. \quad (11)$$

El método de Filippov, en contraste, toma una combinación simple convexa de los dos vectores de campo

$$F_{12} = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2, \quad (12)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$, donde

$$\alpha(x) = \frac{\nabla H * F_1}{\nabla H * (F_1 - F_2)}. \quad (13)$$

Algunas veces, sin pérdida de generalidad, se escribe

$$F_{ij} := F_s, \quad (14)$$

para representar el vector de campo de deslizamiento. Los dos métodos mostrados arriba son algebraicamente equivalentes con $\beta = 2\alpha - 1$.

En ambos casos es sencillo demostrar que el vector de campo F_s es ortogonal a la dirección del gradiente de H y tangente a Σ . El método de Utkin tiene la interpretación de que β es precisamente el control que se necesita para poner el flujo en la dirección que sea tangente a Σ ; viz figura 7a. Otra interpretación, la del método de Filippov, es que sólo la combinación convexa de los vectores de campo es necesaria para obtener que el campo resultante F_s caiga en Σ ; viz figura 7b. Una interpretación final se puede obtener separando ligeramente la frontera de las dos regiones S_1 y S_2 , dentro de un lazo de histéresis; viz figura 7c. Esto es, una condición inicial en S_1 evoluciona bajo el flujo de F_1 hasta que penetra una pequeña distancia ε en S_2 , entonces evoluciona bajo el flujo de F_2 hasta pasar de nuevo a través de Σ a una distancia ε del otro lado. Entonces se puede considerar α proporcional al tiempo que la trayectoria permanece en la región S_1 , en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$.

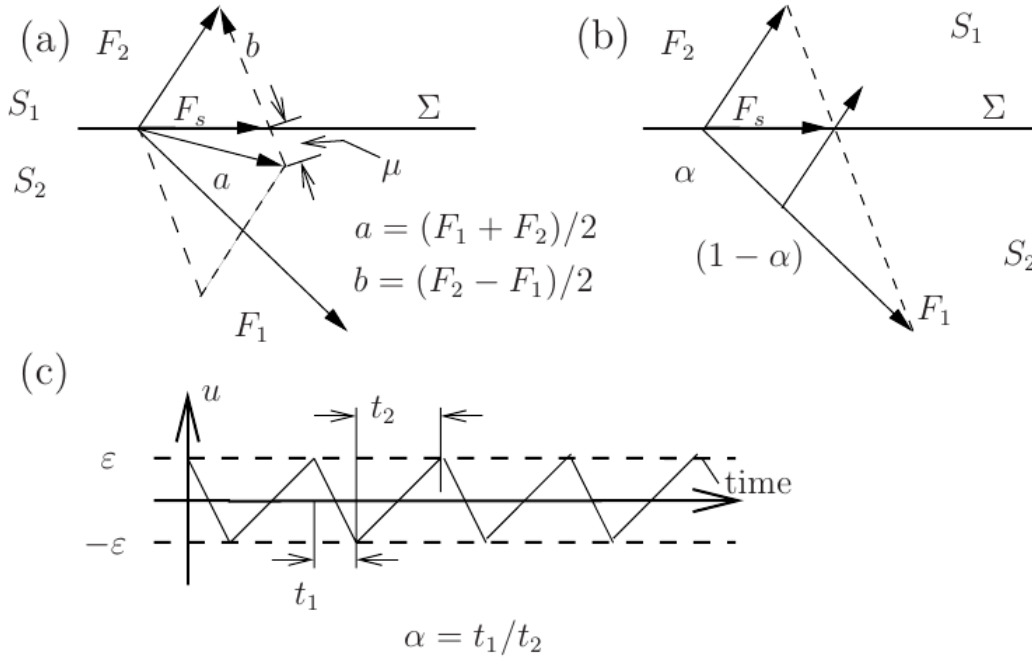


Figura 7: Definición equivalente del flujo deslizando F_S : (a) Método de Utkin, (b) Método de Filippov. En (c) la variable u está en la dirección de ∇H ortogonal a Σ . (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, de Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

Regresemos al caso de deslizamiento perfecto, si el control $\beta(x) = -1$ (equivalente a $\alpha = 0$), entonces el flujo debe ser gobernado solo por F_1 , el cual debe ser por definición tangente a Σ en un punto dado. Similarmente, $\beta = 1$ ($\alpha = 1$) representa una tangencia del flujo F_2 con Σ . En esencia se puede definir la región de deslizamiento como

$$\hat{\Sigma} := \{x \in \Sigma : -1 \leq \beta \leq 1\}, \quad (15)$$

y las fronteras de la región de deslizamiento como

$$\partial \hat{\Sigma}^\pm := \{x \in \Sigma : \beta = \pm 1\}, \quad (16)$$

con tangencia de uno de los vectores de campo o el otro que ocurre en los dos diferentes tipos de frontera.

2.1.3. Sistemas complementarios

En muchas situaciones parece razonable estudiar los sistemas junto con desigualdades y por lo tanto se introduce el concepto de problema lineal complementario (PLC). Básicamente, el PLC consiste en buscar un vector en un espacio vectorial real de dimensión finita que satisfaga cierto sistema de desigualdades. Algunas redes dinámicas con diodos se pueden modelar como un sistema lineal complementario (SLC). El SLC se obtiene como sigue: se toma el sistema lineal base, se selecciona un número de pares de entrada/salida (u_i, y_i) y se impone a estas parejas que en cada tiempo t tanto u_i como y_i deban ser no negativas y por lo menos una de ellas deba ser cero (i.e., no negativa + ortogonalidad).

$$u_i(t) \geq 0, \quad (17)$$

$$y_i(t) \geq 0, \quad (18)$$

$$u_i(t)y_i(t) = 0, \quad \forall i, \forall t. \quad (19)$$

Las parejas (u_i, y_i) son llamadas variables complementarias. Las ecuaciones (17),(18) y (19) son llamadas condiciones complementarias (CC) y son denotadas colectivamente como

$$0 \leq u \perp y \geq 0. \quad (20)$$

En el contexto de circuitos eléctricos imponer condiciones complementarias simplemente significa que algún puerto es modelado por un diodo ideal, con la corriente i_D y la tensión v_D como variables complementarias. Existen dos condiciones generales permitidas por las CC asociadas a cada pareja (u_i, y_i) : ya sea que $u_i = 0$ y $y_i \geq 0$ o que $y_i = 0$ y $u_i \geq 0$. En terminos de ingeniería eléctrica, los diodos pueden estar bloqueados o conduciendo. Si existen p diodos, uno tiene 2^p de estas opciones binarias y el sistema puede estar en cualesquier 2^p modos. En los convertidores de potencia uno tiene además del diodo ideal, algunos interruptores ideales los cuales arbitrariamente se están abriendo o cerrando por alguna ley de control.

Específicamente, dado un vector $q \in \mathbb{R}^k$ y una matriz $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$, el PLC busca un vector $u \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$u \geq 0, \quad (21)$$

$$y = q + Mu \geq 0, \quad (22)$$

$$u^T y = 0, \quad (23)$$

o mostrar que tal vector no existe. Se denota PLC al par (q, M) . En forma general los sistemas complementarios están descritos por ecuaciones diferenciales y algebraicas.

$$F(\dot{x}(t), x(t)) = 0, \quad (24)$$

$$y(t) = g(x(t)) \in \mathbb{R}^k, \quad (25)$$

$$u(t) = h(x(t)). \quad (26)$$

Si el sistema entrada/estado/salida se considera lineal, se obtiene un SLC

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \quad (27)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Fw(t), \quad (28)$$

en donde A, B, C, D, E y F son matrices y vector (constantes) de dimensión adecuada, y $w(t)$ es una función de entrada.

Teorema 1. Si $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ es definida positiva, entonces el PLC(q, M) tiene una única solución para toda $q \in \mathbb{R}^k$. En general, el PLC con matriz semidefinida positiva puede tener múltiples soluciones. Por ejemplo, el PLC con

$$q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tiene soluciones

$$u^{(1)} = (1, 0), \quad u^{(2)} = (0, 1), \quad u^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Definición 1. Una matriz $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ se dice ser una matriz P si todos sus menores principales son positivos.

Teorema 2. Una matriz $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ es una matriz P si y sólo si el PLC(q, M) tiene una solución única para todos los vectores $q \in \mathbb{R}^k$.

Para establecer la existencia y unicidad de las soluciones para sistemas complementarios, específicamente para circuitos eléctricos, se ha de mostrado que la pasividad de los sistemas dinámicos juega un papel importante. En efecto, la existencia y unicidad de las soluciones se demuestra para redes pasivas con diodos ideales y entradas externas bajo algún supuesto.

2.1.3.1. Existencia y unicidad

De la teoría de circuitos la matriz cuádruple (A, B, C, D) no es arbitraria, si no que tiene cierta estructura. En efecto, los circuitos deben satisfacer la propiedad de pasividad cuando no está presente una entrada externa.

Definición 1. Un sistema lineal $\Sigma(A, B, C, D)$ dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (29)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (30)$$

es llamado pasivo, o disipativo con respecto a $u^T y$, si existe una función no negativa $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para todo $t_0 \leq t_1$ y todas las trayectorias (x, u, y) del sistema satisface la desigualdad

$$V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t)dt \geq V(x(t_1)), \quad (31)$$

si existe la función V , ésta es llamada función de almacenamiento. La siguiente proposición es uno de los resultados clásicos de los sistemas y teoría de control.

Proposición 1. Considérese un sistema $\Sigma(A, B, C, D)$ en el cual (A, B, C) es una representación mínima. Las siguientes declaraciones son equivalentes.

- $\Sigma(A, B, C, D)$ es pasiva.
- La matriz de transferencia $G(s) := D + C(sI - A)^{-1}B$ es real positiva, i.e., $x^* [G(\lambda) + G^*(\lambda)] x \geq 0$ para todo vector complejo x y toda $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\lambda) > 0$ y λ no es un valor propio de A .
- Las desigualdades de la matriz

$$\begin{pmatrix} A^T K + K A & K B - C^T \\ B^T K - C & -(D + D^T) \end{pmatrix} \geq 0 \quad (32)$$

y $K = K^T \geq 0$ tiene una solución K .

Más aún, en el caso que $\Sigma(A, B, C, D)$ sea pasiva, todas las soluciones de K para las desigualdades de la matriz (32) son definidas positivas y K es una solución de (32) si y sólo si $V(x) = \frac{1}{2}x^T K x$ define una función de almacenamiento del sistema $\Sigma(A, B, C, D)$.

2.2. Estabilidad de los sistemas discontinuos

Es una tarea especialmente complicada proporcionar las condiciones necesarias y suficientes que garanticen la estabilidad asintótica de un conjunto invariante de un sistema diferenciable por partes si ese conjunto se extiende a ambos lados de la frontera entre dos regiones S_i y S_j . Incluso el problema de evaluar la estabilidad asintótica de un equilibrio ubicado en una frontera de discontinuidad es un problema abierto en general.

En la teoría de control una técnica para probar la estabilidad es buscar una función candidata de Lyapunov, esto es, una función $V(x)$ que sea Lyapunov (i.e., definida positiva y que disminuye a lo largo de las trayectorias) para cada uno de los vectores de campo que definen la dinámica del sistema en cada una de las regiones del espacio de estados. Sin embargo, buscar tal función en la práctica es un trabajo muy difícil.

En lugar de enfocarse en la estabilidad asintótica de los estados individuales o conjuntos invariantes, nos concentraremos en cambio en estabilidad estructural y bifurcación. Ya que demostrar estabilidad por el método de Lyapunov puede ser algo difícil, se debe mejor intentar clasificar todos los mecanismos que pueden conducir a inestabilidad mientras se varía un parámetro. Junto con la clasificación se usan técnicas analíticas y numéricas para identificar cual caso ocurre en un sistema particular y para entender las dinámicas cercanas.

Definición 2.30. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Sea $\{T, \mathbb{R}^n, \Phi^t\}$ y $\{T, \mathbb{R}^n, \tilde{\Phi}^t\}$ dos sistemas dinámicos diferenciables por partes (33), (34) definidos por diferentes flujos diferenciables contables $\Phi_i(x, t)$ y $\tilde{\Phi}_i(x, t)$ en un número finito de regiones S_i y \tilde{S}_i del espacio de estados, respectivamente, $i = 1 \dots N$, con restablecimientos diferenciables R_{ij} y \tilde{R}_{ij} aplicados, respectivamente, a cada una de las fronteras de discontinuidad no vacías Σ_{ij} y $\tilde{\Sigma}_{ij}$.

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad \text{si } x \in S_i, \quad (33)$$

$$x \mapsto R_{ij}(x, \mu), \quad \text{si } x \in \Sigma_{ij} := \bar{S}_i \cap \bar{S}_j. \quad (34)$$

Estos dos sistemas diferenciables por partes son llamados topológicamente equiva-

lentes por partes si:

1. Son topológicamente equivalentes: esto es, si existe un homeomorfismo h que mapea las órbitas del primer sistema sobre las órbitas del segundo sistema, y se preserva la dirección del tiempo, es decir, $\Phi^t(x) = h^{-1}(\tilde{\Phi}^s(h(x)))$, donde el mapeo $t \rightarrow s(t)$ es continuo e invertible.
2. El homeomorfismo h puede ser seleccionado para preservar cada una de las fronteras de discontinuidad, es decir, para cada i y j , $h(\Sigma_{ij}) = \Sigma_{ij}$.

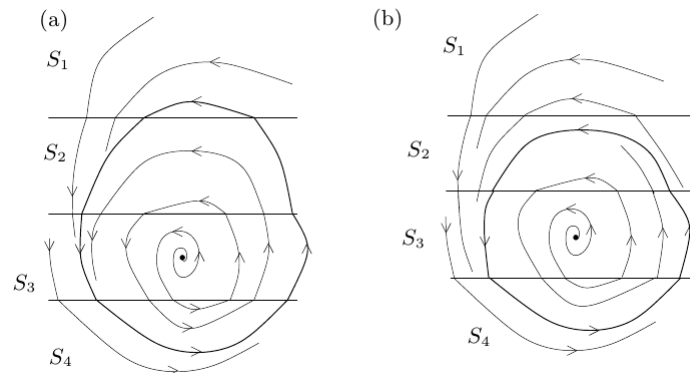


Figura 8: **Dos retratos de fase que son topológicamente equivalentes pero no topológicamente equivalentes por partes acordes a la definición 2.30. (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, de Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)**

Los dos retratos de fase ilustrados en la figura 8 son no equivalentes, debido a que en la figura 8a existe un ciclo límite que visita las cuatro regiones del espacio de estados, mientras que en la figura 8b el ciclo límite sólo visita tres.

Definición 2.31. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Un SDP es estructuralmente estable por partes si existe un $\varepsilon > 0$ tal que todas las perturbaciones C^1 de un tamaño máximo ε del vector del campo (mapa) f , dejen el número y el grado de diferenciabilidad de

las propiedades de cada uno de los límites Σ_{ij} sin cambio, llevando a un retrato de fase topológicamente equivalente por partes.

2.3. Resumen del capítulo

Se ha presentado en este capítulo una introducción a los sistemas dinámicos discontinuos. Se presentaron diferentes formalismos para tratar con los sistemas dinámicos no diferenciables, en particular se consideran los sistemas diferenciables por partes, los sistemas de Filippov y los complementarios. Estos formalismos serán de ayuda para el planteamiento del modelo de los convertidores y de su análisis en los capítulos posteriores.

Capítulo 3

Bifurcaciones de los sistemas discontinuos

3.1. Introducción

El análisis de bifurcación ha mostrado tener un éxito considerable en explicar, clasificar y representar analogías del comportamiento dinámico de los sistemas, que surge de diferentes áreas de aplicación. Existe un conjunto más o menos completo de herramientas matemáticas para describir bifurcaciones de sistemas suficientemente diferenciables. Sin embargo, muchos de los sistemas dinámicos que surgen en las aplicaciones son no diferenciables; algunos ejemplos incluyen la ocurrencia de impactos en sistemas mecánicos de movimiento, el movimiento deslizante de osciladores con fricción, las conmutaciones en los circuitos electrónicos y el control en sistemas dinámicos híbridos. En todos estos casos son violadas las suposiciones detrás de los resultados en la teoría de bifurcaciones para los sistemas diferenciables, y se observan muchos fenómenos nuevos.

Existe una literatura madura que describe diferentes enfoques para el estudio de dinámicas discontinuas como los sistemas complementarios, las inclusiones diferenciales y los sistemas de Filippov, entre otras. Los primeros resultados fueron dados por Peterka, y con referencias más recientes por Leine en (Leine y van Campen, 1999), Di Bernardo en (Di Bernardo *et al.*, 2008) y Banerjee en (Banerjee y Verghese, 2001). Se ha observado en los últimos años un progreso significativo en la identificación, la clasificación, el desarrollo y la aplicación de nuevos tipos de bifurcaciones que son únicas para los sistemas discontinuos.

Existe en esencia dos enfoques para definir las bifurcaciones en los sistemas dife-

renciables: el analítico y el topológico. En el analítico una bifurcación se define como una ramificación, un doblar o la creación de rutas adicionales de las soluciones de una clase determinada dentro de un diagrama de bifurcación. En el sentido topológico, una bifurcación es un valor de parámetro dentro de una clase de sistemas en el que el retrato de fase no es estructuralmente estable. Para sistemas no diferenciables, estos conceptos son un problema.

En lugar de hacer frente a estas cuestiones técnicas, se sugiere un enfoque diferente. Se está interesado en describir situaciones que son únicas en los sistemas no diferenciables; específicamente, cuando la dinámica del sistema se degenera con respecto a una frontera de discontinuidad. Por ejemplo, esto puede implicar un conjunto invariante que se adquirió en un primer contacto con cierta Σ_{ij} , o la aparición de deslizamiento a lo largo de la órbita de ese conjunto invariante. Se refiere este evento como bifurcación discontinua inducida (BDI) ya que, es dependiente de las circunstancias, esto puede o no llevar a una bifurcación en cualquier sentido clásico mientras se varía un parámetro. Estos eventos en el pasado han sido llamados bifurcaciones discontinuas, bifurcaciones basadas en la discontinuidad y, en la literatura rusa, bifurcaciones-C.

Definición 2.32. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Una BDI ocurre a un valor de un parámetro en el cual un sistema diferenciable por partes no es estructuralmente estable por partes. Esto es, existe una perturbación arbitrariamente pequeña que conduce a un sistema que no es topológicamente equivalente por partes.

Permitámonos enlistar algunos de los tipos más comunes de BDIs de codimensión-uno que ocurren (viz figura 9):

1. Mapas de colisión de frontera. Este es conceptualmente el más simple de los tipos de BDI y ocurre cuando, en un valor paramétrico crítico, un punto fijo de un mapa diferenciable por partes cae precisamente sobre una frontera de discontinuidad, denotada como Σ . Para mapas con singularidad de orden uno (i.e., continuos linealmente por partes), existe una teoría sólida para describir la bifurcación que puede resultar al variar un parámetro a través de un evento. Incluso en una dimensión, un atractor de periodo-1 puede saltar a un atractor de periodo- n para un n arbitrario, o a caos robusto sin ningún tipo de ventanas periódicas.

Considere un mapeo seccionalmente lineal. Además, considérese una región $D \subset \mathbb{R}^n$ del retrato de fase, la cual es elegida de tal manera que, bajo un cambio de coordenadas adecuado, el mapeo bajo estudio puede ser descrito como

$$x \rightarrow \begin{cases} g_1(x, \mu), & h(x) < 0 \\ g_2(x, \mu), & h(x) > 0, \end{cases} \quad (35)$$

en donde $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar que depende de los estados del sistema y $h(x) = 0$ define una superficie Σ la cual separa la región D en dos regiones denotadas por G_1 y G_2 .

$$\Sigma = \{x \in D | h(x) = 0\}, \quad (36)$$

$$G_1 = \{x \in D | h(x) < 0\}, \quad (37)$$

$$G_2 = \{x \in D | h(x) > 0\}, \quad (38)$$

se supone que el mapeo es diferenciable hasta un orden k en cada subregión G_1 y G_2 , y que es continuo en Σ .

Sea \hat{x} un punto de equilibrio el cual depende del parámetro $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se dice que el punto \hat{x} es un punto de cruce de frontera, si cruza Σ transversalmente cuando μ varía entre $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Sin pérdida de generalidad se supone que

$$\hat{x} \in G_1 \quad -\varepsilon < \mu < 0, \quad (39)$$

$$\hat{x} \in \Sigma \quad \mu = 0, \quad (40)$$

$$\hat{x} \in G_2 \quad 0 < \mu < \varepsilon. \quad (41)$$

Definición 5. Colisión de frontera (Nusse y Yorke, 1992). Se dice que un punto de equilibrio \hat{x} sufre una bifurcación de colisión de frontera para $\mu = 0$ si \hat{x} es un punto de cruce de frontera y se cumple que

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \Big|_{\mu=0} \neq \frac{\partial g_2}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \Big|_{\mu=0}. \quad (42)$$

La condición (42) establece que el jacobiano del mapeo es discontinuo en el punto de cruce de frontera.

2. Bifurcaciones discontinuas de puntos de equilibrio. El tipo más simple de BDI para flujos, ocurre cuando un punto de equilibrio cae precisamente sobre una frontera de discontinuidad Σ . En sistemas de Filippov e híbridos con regiones de contacto, también son posibles pseudo equilibrios, los cuales son equilibrios de flujos de desli-

zamiento o contacto pero no son equilibrios de cualesquiera de los vectores de campo del sistema original. Existe la posibilidad de que, donde el equilibrio cae precisamente entre una región de deslizamiento o de contacto, un pseudo equilibrio se convierta en un equilibrio regular. También existe la posibilidad de que un ciclo límite puede ser generado bajo la perturbación de un parámetro en la frontera del equilibrio, como en transiciones de Hopf (Di Bernardo *et al.*, 2008).

Considérese una región $D \subset \mathbb{R}^n$ del retrato de fase, donde el sistema bajo estudio puede ser descrito como

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x, \mu), & h(x) < 0 \\ f_2(x, \mu), & h(x) > 0, \end{cases} \quad (43)$$

en donde $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar que depende de los estados del sistema. De acuerdo con (43), $h(x)$ define una superficie Σ la cual separa la región D en dos regiones denotadas por G_1 y G_2 .

$$\Sigma = \{x \in D | h(x) = 0\}, \quad (44)$$

$$G_1 = \{x \in D | h(x) < 0\}, \quad (45)$$

$$G_2 = \{x \in D | h(x) > 0\}. \quad (46)$$

Se supone que los campos vectoriales f_1 y f_2 son diferenciables en G_1 y G_2 respectivamente. Ahora, supóngase que \hat{x} es un punto de equilibrio de (43), el cual se supone que depende del parámetro $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Específicamente, se dice que el punto \hat{x} es un

equilibrio de cruce de frontera, si cruza Σ transversalmente cuando μ varía entre $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sin pérdida de generalidad se supone que

$$\hat{x} \in G_1 \quad -\varepsilon < \mu < 0, \quad (47)$$

$$\hat{x} \in \Sigma \quad \mu = 0, \quad (48)$$

$$\hat{x} \in G_2 \quad 0 < \mu < \varepsilon. \quad (49)$$

Definición 6. Bifurcación discontinua (Leine, 2000). Se dice que un punto estacionario \hat{x} sufre una bifurcación discontinua para $\mu = 0$ si \hat{x} es un equilibrio de cruce de frontera y la linealización del sistema alrededor de \hat{x} en G_1 y G_2 da

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \Big|_{\mu=0} \neq \frac{\partial f_2}{\partial x}(\hat{x}, \mu) \Big|_{\mu=0}. \quad (50)$$

Esta definición extiende el escenario de las colisiones de bordes para sistemas discretos en el tiempo. Esta definición no es exactamente la reportada en (Leine,2000), ya que las bifurcaciones discontinuas son definidas en términos de los valores propios del sistema en el punto de bifurcación.

3. Bifurcaciones de roce (grazing en inglés) de ciclos límite. Una de las más comunes BDIs encontradas en las aplicaciones es causada por un ciclo límite de un flujo tangente (i.e., roza) con una frontera de discontinuidad. Uno podría pensar ingenuamente que este tipo de bifurcación podría ser completamente estudiada (tomando una apropiada sección de Poincaré que contuviera el punto de roce) como una colisión

de frontera. Sin embargo, para algunos sistemas híbridos y EDOs diferenciables por partes éste no es necesariamente el caso. En su lugar hay que analizar cuidadosamente qué le pasa al flujo en la vecindad del punto de roce. De hecho, se puede manejar un mapa asociado o de discontinuidad. La relación entre la singularidad del mapa y el grado de diferenciabilidad del flujo no es algo obvio, ya que depende de si el flujo es uniformemente discontinuo en el punto de roce.

Si una órbita periódica $\tilde{x}(t)$ de (43) toca tangencialmente la superficie Σ en un tiempo $t = t^*$ y en un punto $x^* = x(t^*)$, entonces el punto x^* es un punto de bifurcación si se cumplen las siguientes condiciones (Di Bernardo *et al.*, 2008, 2002b):

$$h(x^*) = 0,$$

$$\nabla h(x^*) \neq 0,$$

$$\langle \nabla h(x^*), f_i(x^*) \rangle = 0, \tag{51}$$

$$\left\langle \nabla h(x^*), \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x} f_i(x^*) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} f_i(x^*), f_i(x^*) \right\rangle > 0.$$

Las primeras dos condiciones establecen que $h(x)$ es una función apropiada para definir la superficie de discontinuidad Σ . La tercera condición implica que el campo vectorial es tangente a Σ en el punto x^* . La última condición asegura que la curvatura de la trayectoria en ambos lados de Σ tiene el mismo signo con respecto a $h(x)$.

Definición 7. (Rodríguez, 2009) Bifurcación de roce. Una órbita periódica $\tilde{x}(t)$ sufre una bifurcación de roce si para $\mu = 0$ se cumplen las condiciones (51) y para un $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ suficientemente pequeñas, $\tilde{x}(t)$, $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ no cruza Σ , si $\mu \in [-\varepsilon, 0]$; $\tilde{x}(t)$, $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$ cruza Σ transversalmente si $\mu \in [\varepsilon, 0]$.

Las propiedades del campo vectorial del sistema a través de la superficie de discontinuidad son esenciales para determinar los escenarios de bifurcación que siguen de una bifurcación de roce. Otro caso reportado en la literatura recibe el nombre de colisión de esquina, la cual es la intersección de una órbita periódica con una superficie de discontinuidad que es no diferenciable.

Además, es posible que el fenómeno de movimiento deslizando aparezca una vez que la trayectoria del sistema toque tangencialmente la superficie Σ , originando comportamientos más complejos. Esta clase de bifurcaciones se llaman bifurcaciones deslizantes.

4. Bifurcaciones deslizantes de contacto. Existen varias formas de que un conjunto invariante tal como un ciclo límite pueda ser estructuralmente inestable con respecto a la frontera de una región de deslizamiento en un sistema de Filippov. La transformación de Poincaré obtenida tiene la propiedad de ser típicamente no invertible en al menos una región del espacio de estados, debido a la pérdida de información en tiempo hacia atrás inherente al movimiento deslizando. Este análisis ayuda a explicar la dinámica observada en el control con relevadores y con fricción seca. Además, en sistemas de impacto, las regiones de contacto pueden ser aproximadas por secuencias de impactos infinitos de castañueo (chattering en inglés).

En general, supóngase que la dirección del campo vectorial del sistema (43) apunta simultáneamente hacia la superficie de discontinuidad Σ desde ambos lados. Entonces, cuando las trayectorias del sistema golpean la superficie Σ , su movimiento estará restringido a evolucionar a lo largo de Σ , hasta que la dirección del campo vectorial cambie. Resultados numéricos y analíticos han mostrado la existencia de cuatro tipos de bifurcaciones deslizantes (Kowalczyk y Di Bernardo, 2001).

5. Bifurcaciones de colisión de esquina. Otra posibilidad para un evento de codimensión-1 en un flujo, es donde un conjunto invariante (e.g., un ciclo límite) pasa a través de un conjunto *dimensión* $-(n - 2)$ formado por la intersección de dos diferentes variedades de discontinuidad Σ_1 y Σ_2 . También se tiene el caso donde los saltos en el vector de campo a través de Σ_1 y Σ_2 son tales que sus intersecciones pueden considerarse como una “esquina” en una superficie de discontinuidad única.

En la figura 9 se resume de manera gráfica los tipos de bifurcaciones discutidos anteriormente.

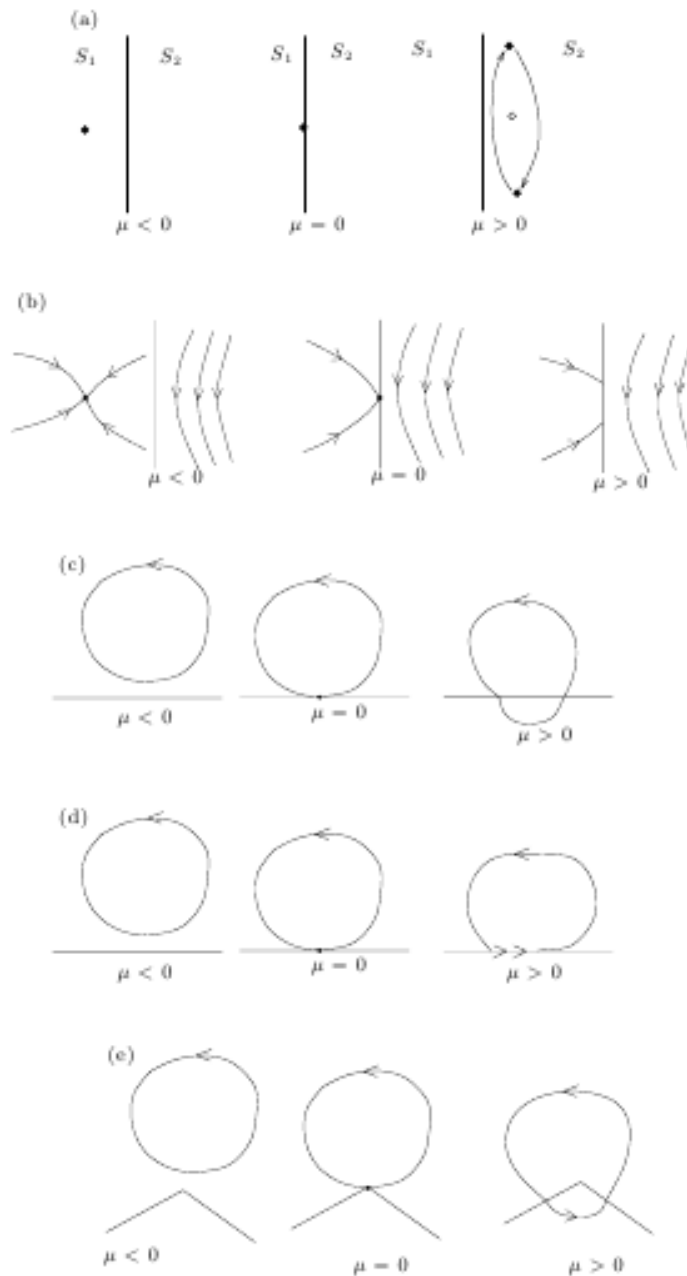


Figura 9: Ejemplos de bifurcaciones inducidas: a) Colisión de frontera de puntos de equilibrio; b) Bifurcaciones discontinuas de puntos de equilibrio; c) Bifurcaciones de roce (grazing) de ciclos límite; d) Bifurcaciones deslizantes de ciclos límite; e) Bifurcaciones de colisión de esquina. (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

3.2. Colisión de borde en mapas continuos lineales por partes

Enfoquémonos en una región local $D \subset \mathbb{R}^n$ en el espacio de estados que contiene una frontera de discontinuidad. Esto es, para una selección apropiada de coordenadas locales, el mapa bajo estudio puede ser descrito como

$$x \mapsto f(x, \mu) = \begin{cases} F_1(x, \mu), & \text{si } H(x, \mu) < 0 \\ F_2(x, \mu), & \text{si } H(x, \mu) > 0, \end{cases} \quad (52)$$

en donde $F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ son suficientemente diferenciables, y $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable de $x \in \mathbb{R}^n$. Para la condición $H(x, \mu) = 0$ se define la frontera diferenciable

$$\Sigma := \{x \in D : H(x, \mu) = 0\}, \quad (53)$$

la cual separa D en dos regiones

$$S_1 := \{x \in D : H(x, \mu) < 0\}, \quad (54)$$

$$S_2 := \{x \in D : H(x, \mu) > 0\}. \quad (55)$$

Se asume que el mapa es continuo a través de la frontera; i.e., $F_1(x, \mu) = F_2(x, \mu)$ para toda $x \in \Sigma$, en el sentido que podemos escribir

$$F_2(x, \mu) = F_1(x, \mu) + E(x, \mu)H(x, \mu), \quad (56)$$

para alguna función diferenciable $E(x, \mu)$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que existe un punto fijo en S_1 para un valor de parámetro $\mu < 0$ y que éste se aproxima a Σ mientras $\mu \rightarrow 0^-$. El objetivo es entonces clasificar las dinámicas que se inducen para $\mu > 0$. La estrategia de clasificación consiste de tres pasos:

1. Aplicar linealidad a F_1 y F_2 sobre el punto de bifurcación, y donde sea posible definir una transformación global de coordenadas que pongan a F_1 y F_2 en su forma canónica.
2. Verificar si el mapa lineal satisface un conjunto de condiciones que identifiquen la existencia y estabilidad de ciertas órbitas periódicas.
3. Combinar las condiciones identificadas en el paso 2, y describir un escenario de bifurcación de la órbita periódica más simple posible. Donde no se encuentre una órbita simple estable, ver condiciones para la existencia de más conjuntos invariantes complejos como atractor caótico robusto o toro invariante.

Definición 3.1. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Decimos que un punto $x = x^*$ es un punto fijo admisible de (52) si, para $i = 1$ o $i = 2$, $x^* = F_i(x^*, \mu)$ y $x^* \in S_j$ con $j = i$. Se dice en cambio que $x = x^*$ es un punto fijo virtual de (52) si $\tilde{x} = F_i(\tilde{x}, \mu)$ y $\tilde{x} \in S_j$ con $j \neq i$.

Definición 3.2. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Un punto fijo $x = x^*$ es un punto fijo de frontera $x \in \Sigma$; i.e., $F_1(x^*, \mu) = F_2(x^*, \mu)$ y $H(x^*, \mu) = 0$

Definición 3.3. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Un punto fijo x^* es llamado un punto fijo de cruce de frontera si la bifurcación $x^*(\mu)$ cruza Σ transversalmente mientras μ

pasa por cero. Al hacerlo, el punto fijo será admisible para un y sólo un signo de μ , sin pérdida de generalidad $\mu < 0$. Específicamente, requerimos que ($i = 1$ o $i = 2$):

1. $x^* = F_i(x^*, \mu) \in S_i$ para $-\varepsilon < \mu < 0$;
2. $x^* \in \Sigma$ para $\mu = 0$;
3. $x^* = F_i(x^*, \mu) := \in S_j$, donde $j \neq i$ para $0 < \mu < \varepsilon$;
4. $\nabla H * F_{i,\mu} \neq 0$ cuando $\mu = 0$.

Definición 3.4. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Decimos que un punto fijo x^* que se somete a una bifurcación de colisión de frontera para $\mu = 0$ si $x^*(\mu)$, es un punto fijo de cruce de frontera y el mapa lineal alrededor de $x^*(0)$ en S_1 y S_2 da

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x^*, \mu) \Big|_{\mu=0} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}(x^*, \mu) \Big|_{\mu=0} \quad (57)$$

o equivalentemente

$$E(x^*, \mu) \frac{\partial H}{\partial x}(x^*) \Big|_{\mu=0} \neq 0. \quad (58)$$

Definición 3.5. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Un punto de periodo-2 $(x_1^*(\mu), x_2^*(\mu))$ de (52) caracterizado por $F_1(x_1^*) = x_2$ y $F_2(x_2^*) = x_1$ se denomina admisible si y sólo si $H(x_1^*, \mu) < 0$ y $H(x_2^*, \mu) > 0$. El punto se llama un punto de frontera de periodo-2 si al menos una de estas condiciones es remplazada con la igualdad, de otra manera, se denominará un punto virtual de periodo-2.

Los tres escenarios básicos posibles de un punto fijo y de periodo-2 para mapas generales de *dimensión* n de la forma (52) son:

Persistencia: Un punto fijo admisible $x^* \in S_1$ y un punto fijo virtual $\tilde{y} \in S_1$ que tocan la frontera en el punto de colisión de frontera, se convierten en un punto fijo virtual $\tilde{x} \in S_2$ y un punto fijo admisible $y^* \in S_2$ respectivamente al pasar el punto de bifurcación, viz figura 10.

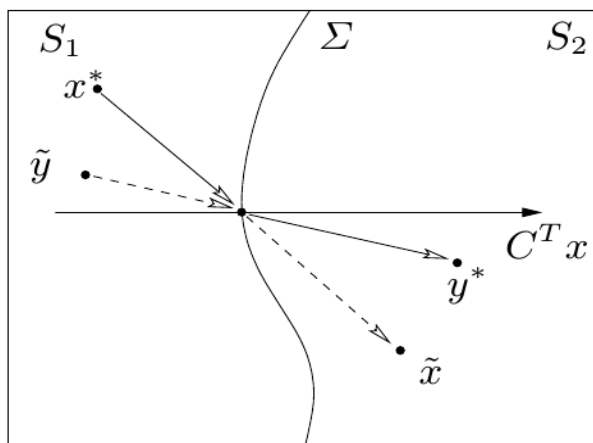


Figura 10: **Diagrama del espacio de estados de una colisión de frontera que origina persistencia de un punto fijo de cruce de frontera.** (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

Doblez no suave: Dos puntos fijos admisibles de cruce de frontera que coexisten, $x^* \in S_1$ y $y^* \in S_2$, tocan la frontera y cambian continuamente a dos puntos fijos virtuales $\tilde{x} \in S_2$ y $\tilde{y} \in S_1$. Por lo tanto, no existe punto fijo admisible al pasar el punto de bifurcación, viz figura 11.

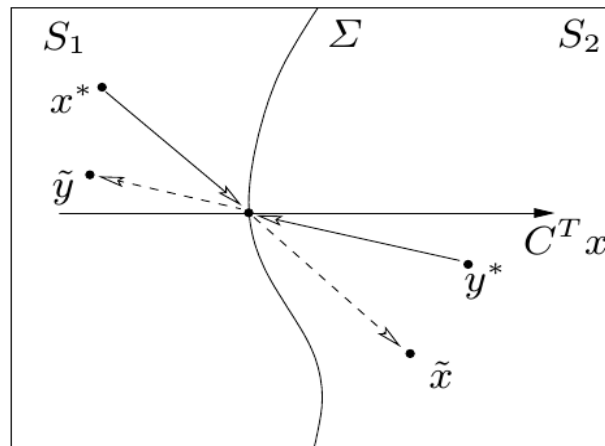


Figura 11: Diagrama del espacio de estados de una colisión de frontera que origina doblez no suave. (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

Duplicación de periodo no suave: Una órbita de periodo-2 (x_1^*, x_2^*) caracterizado por tener una interacción en cada lado de la frontera (e.g., $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$) se ramifica a partir del punto fijo de frontera en la colisión de frontera, viz figura 12.

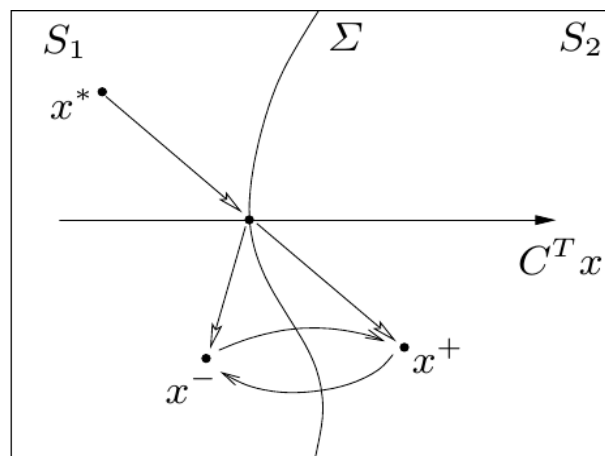


Figura 12: Diagrama del espacio de estados de una colisión de frontera que origina duplicación de periodo no suave. (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

Multiplicación de periodo no suave: Un punto de periodo- m para $m > 1$ se ramifica a partir del punto fijo de frontera. Típicamente, para ser admisible, tal órbita

tiene interacción sobre un lado de la frontera, y $n-1$ sobre el otro (e.g. $x_1 = F_2(x_n) \in S_1$, $x_2 = F_1(x_2) \in S_2$ y $x_j = F_2(x_{j-1}) \in S_2$ para $j = 3 \dots n$).

3.2.1. Forma normal del mapa de colisión de frontera

Supóngase que una colisión de frontera ocurre para $\mu = \mu^*$ en $x = x^* \in \Sigma$. Para obtener una forma normal apropiada de mapeo, considérese una vecindad suficientemente pequeña del punto de colisión de frontera tanto en el espacio de estados como en el de parámetros. Haciendo un cambio de coordenadas $\tilde{x} = x^* - x$, $\tilde{\mu} = \mu^* - \mu$, la colisión de frontera ocurre en el punto $x = 0$, cuando $\mu = 0$. Al expresar el mapa (52) alrededor del punto de bifurcación $(x, \mu) = (0, 0)$, se obtiene

$$x \mapsto \begin{cases} N_1 x + M\mu, & \text{si } C^T x < 0 \\ N_2 x + M\mu, & \text{si } C^T x > 0, \end{cases} \quad (59)$$

en donde $N_{1,2}$ satisface que $N_1 - N_2 = EC^T$ y $M := M_1 = M_2$

$$N_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad N_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

$$M_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mu}, \quad M_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \mu},$$

$$C^T = \frac{\partial H}{\partial x},$$

todos evaluados en $x = 0$, $\mu = 0$.

Teorema 3.1. (Di Bernardo *et al.*, 2008) Sea $p_1(\lambda)$ el polinomio característico de la matriz N_1 y $p_2(\lambda)$ el polinomio característico de N_2 en (59). Por otra parte, se definen

$\sigma_1^+ :=$ número de valores propios reales de $N_1(\alpha_i)$ mayor que 1;

$\sigma_2^+ :=$ número de valores propios reales de $N_2(\beta_i)$ mayor que 1;

$\sigma_1^- :=$ número de valores propios reales de N_1 menor que -1 ;

$\sigma_2^- :=$ número de valores propios reales de N_2 menor que -1 ;

$A :=$ punto fijo estable admisible en S_1 ;

$a :=$ punto fijo inestable admisible en S_1 ;

$B :=$ punto fijo estable admisible en S_2 ;

$b :=$ punto fijo inestable admisible en S_2 ;

$AB :=$ Órbita de periodo -2 estable;

$ab := \text{Órbita de periodo } -2 \text{ inestable};$

$A/b := \text{indica que la estabilidad debe analizarse.}$

Suponer que son satisfechas las siguientes condiciones no degeneradas

$$\det(I - N_1) \neq 0,$$

$$\det(I + N_1) \neq 0,$$

$$C^T(I - N_2)^{-1}M \neq 0,$$

$$1 - C^T(I - N_1)^{-1}E \neq 0,$$

$$1 - C^T(I + N_1)^{-1}E \neq 0.$$

Entonces, en una colisión de frontera, tendremos los siguientes escenarios:

Persistencia Si

$$1 - C^T(I - N_1)^{-1}E > 0; \tag{60}$$

o, equivalentemente

$$p_1(1)p_2(1) > 0; \quad (61)$$

o

$$\sigma_1^+ + \sigma_2^+ \text{ es par.} \quad (62)$$

Doblez no suave Si

$$1 - C^T(I - N_1)^{-1}E < 0; \quad (63)$$

o, equivalentemente

$$p_1(1)p_2(1) < 0; \quad (64)$$

o

$$\sigma_1^+ + \sigma_2^+ \text{ es impar.} \quad (65)$$

Duplicación de periodo no suave Si

$$1 + C^T(I + N_1)^{-1}E < 0; \quad (66)$$

o, equivalentemente

$$p_1(-1)p_2(-1) < 0; \quad (67)$$

$$\sigma_1^- + \sigma_2^- \text{ es impar.} \quad (68)$$

Veamos con más detalle algunas ramificaciones del árbol de la figura 13, supongamos por ejemplo que:

- $\sigma_1^- + \sigma_2^-$ es par (i.e., no duplicación de periodo)

En la colisión de frontera no ocurre duplicación de periodo y los siguientes casos son posibles de acuerdo con los valores propios de N_1 y N_2 .

1. Si $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par, entonces se tiene persistencia del punto fijo en la colisión de frontera; i.e.

$$A/a \leftrightarrow B/b.$$

1. Si $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es impar, entonces se tiene un doblez no suave; i.e.

$$A/a, B/b \leftrightarrow \emptyset.$$

- $\sigma_1^- + \sigma_2^-$ es impar (i.e., ocurre duplicación de periodo)

Existe una duplicación de periodo y una nueva órbita estable (AB) o inestable (ab) de periodo-2 puede estar involucrada en la colisión de frontera y para determinarlo se observa la cantidad $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$,

1. Si $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par (i.e., persistencia de punto fijo en la colisión de frontera)
 - a) $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es par (i.e., transición continua de un punto fijo y una órbita periodo-2)

$$A \leftrightarrow b, AB,$$

$$A \leftrightarrow b, ab,$$

$$a \leftrightarrow B, ab,$$

$$a \leftrightarrow b, AB,$$

$$a \leftrightarrow b, ab.$$

Para determinar cual escenario ocurre para un mapa particular los valores propios de N_1 , N_2 y N_1N_2 deben ser calculados para verificar la estabilidad del punto fijo y la órbita de periodo-2.

b) $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar (i.e., órbita de periodo-2 desaparece)

$$A, ab \leftrightarrow b,$$

$$A, ab \leftrightarrow B,$$

$$a, AB \leftrightarrow b,$$

$$a, AB \leftrightarrow B.$$

2. $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es impar (i.e., doblez no suave del punto fijo en el cruce de frontera)

a) $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es par (i.e., transición continua de órbita de periodo-2)

$$A, b \leftrightarrow AB,$$

$$A, b \leftrightarrow ab,$$

$$a, b \leftrightarrow AB,$$

$$a, b \leftrightarrow ab.$$

b) $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar (i.e., órbita de periodo-2 desaparece)

$$A, b, ab \leftrightarrow \emptyset,$$

$$a, b, ab \leftrightarrow \emptyset,$$

$$a, b, AB \leftrightarrow \emptyset.$$

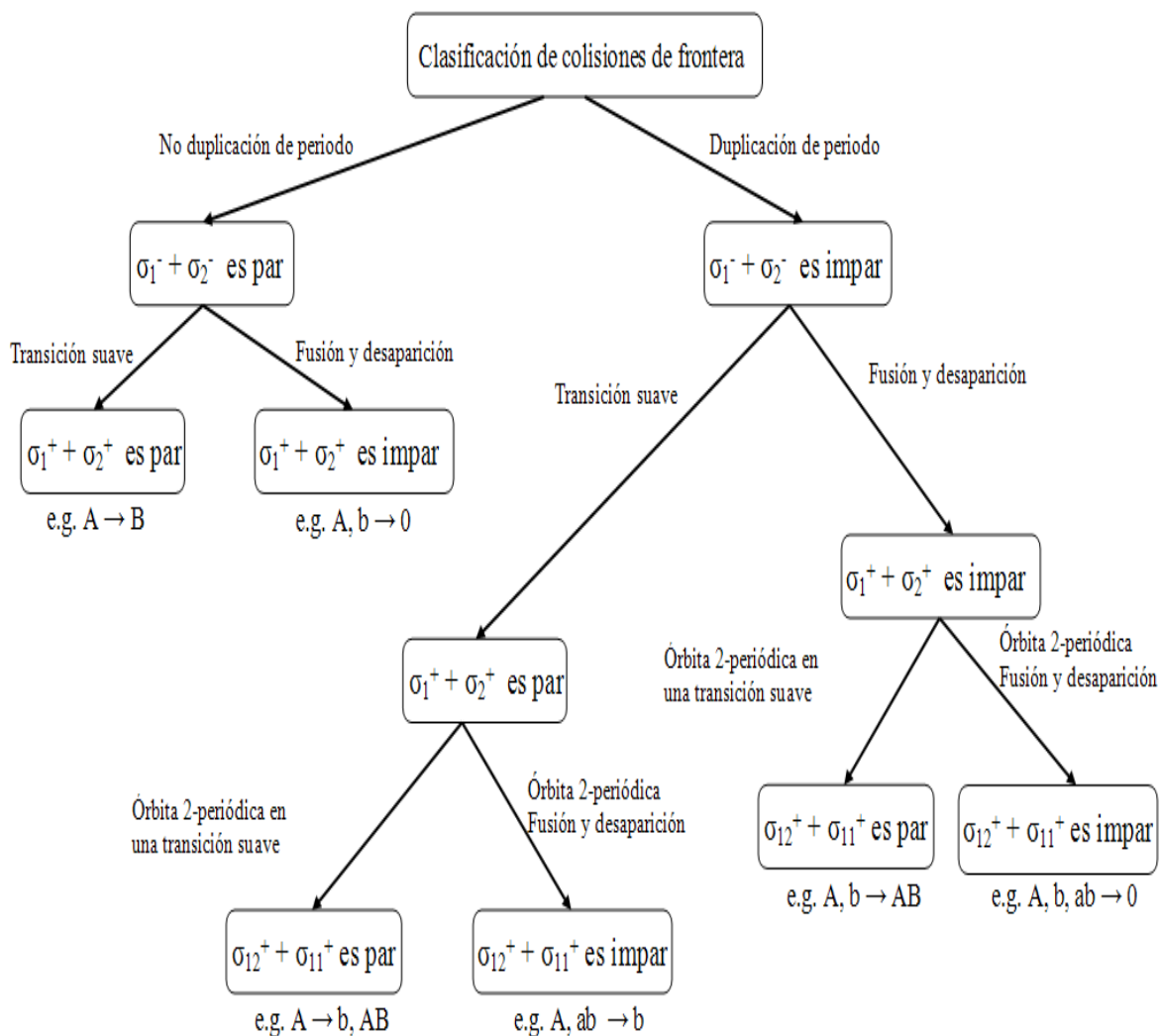


Figura 13: **Árbol de bifurcación de colisión de frontera.**

3.2.2. Mapas de dos dimensiones lineales por partes de la forma normal

Bajo suposiciones apropiadas no degeneradas, cualquier mapa local continuo lineal por partes puede ser transformado al usar cambios lineales de coordenadas en una forma normal. En el caso planar, esta forma normal puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \mu, & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \mu & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (69)$$

en donde τ_i es la traza (suma de los términos de la diagonal) de la matriz N_i , y δ_i es su determinante. En particular si $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 - m_2\mu$ y $\tilde{\mu} = \mu(m_1 + m_2)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (70)$$

y los puntos fijos del mapa son

$$A/a = \left[\frac{\mu}{1 - \tau_1 + \delta_1}, \frac{\delta_1 \mu}{1 - \tau_1 + \delta_1} \right],$$

$$B/b = \left[\frac{\mu}{1 - \tau_2 + \delta_2}, \frac{\delta_2 \mu}{1 - \tau_2 + \delta_2} \right], \quad \text{para } \frac{\mu}{1 - \tau_2 + \delta_2} > 0.$$

Del teorema 3.1. se tiene $p_1(\lambda) = \lambda^2 - \tau_1\lambda + \delta_1$ y $p_2(\lambda) = \lambda^2 - \tau_2\lambda + \delta_2$, así

$$p_1(1)p_2(1) = (1 - \tau_1 + \delta_1)(1 - \tau_2 + \delta_2), \quad (71)$$

$$p_1(-1)p_2(-1) = (1 + \tau_1 + \delta_1)(1 + \tau_2 + \delta_2), \quad (72)$$

por lo tanto y de acuerdo con las condiciones (61), (64) y (67) se tienen los siguientes escenarios

1. Persistencia Si

$$\tau_1 > 1 + \delta_1 \quad y \quad \tau_2 > 1 + \delta_2$$

o

$$\tau_1 < 1 + \delta_1 \quad y \quad \tau_2 < 1 + \delta_2.$$

2. Doblez no suave Si

$$\tau_1 > 1 + \delta_1 \quad y \quad \tau_2 < 1 + \delta_2$$

o

$$\tau_1 < 1 + \delta_1 \quad y \quad \tau_2 > 1 + \delta_2.$$

3. Duplicación de periodo no suave

$$\tau_1 > -(1 + \delta_1) \quad y \quad \tau_2 < -(1 + \delta_2),$$

$$\tau_1 < -(1 + \delta_1) \quad y \quad \tau_2 > -(1 + \delta_2).$$

Para completar la clasificación se debe tener acceso a la estabilidad de los puntos fijos y de periodo-2 de las ramificaciones en la colisión de frontera. Los valores propios de N_1 pueden ser escritos como

$$\lambda_{11,12} = \frac{1}{2} \left(\tau_1 \pm \sqrt{\tau_1^2 - 4\delta_1} \right)$$

y los de N_2 como

$$\lambda_{21,22} = \frac{1}{2} \left(\tau_2 \pm \sqrt{\tau_2^2 - 4\delta_2} \right)$$

Caso 1: $\tau^2 - 4\delta < 0$ los valores propios del punto fijo w_i , $i = 1$ o 2 son complejos conjugados; i.e.,

$$\lambda_{i1,i2} = \frac{1}{2} \left(\tau_i \pm j\sqrt{4\delta_i - \tau_i^2} \right)$$

y se tiene $|\lambda_{i1,i2}| = \sqrt{\delta_i}$, el cual es menor a la unidad. En esencia ambos puntos fijos son estables.

Caso 2: $\tau^2 - 4\delta > 0$ los valores propios son reales. En particular,

$$|\lambda_{i1}| = \frac{1}{2} \left(\tau_i - \sqrt{\tau_i^2 - 4\delta_i} \right),$$

$$|\lambda_{i2}| = \frac{1}{2} \left(\tau_i + \sqrt{\tau_i^2 - 4\delta_i} \right),$$

se tiene que cada equilibrio w_i es estable si $|\tau_i| < 1 + \delta_i$ e inestable si $|\tau_i| > 1 + \delta_i$.

Ambos equilibrios A y B son estables cuando

$$-1 - \delta_i < \tau_i < 1 + \delta_i.$$

La estabilidad del punto de periodo-2 se determina con los valores propios de la matriz $N_1 N_2$, así los valores propios de un punto de periodo-2 son

$$\frac{1}{2} \left[\tau_1 \tau_2 - \delta_1 - \delta_2 \pm \sqrt{(\tau_1 \tau_2 - \delta_1 - \delta_2)^2 - 4\delta_1 \delta_2} \right].$$

Si $(\tau_1 \tau_2 - \delta_1 - \delta_2)^2 - 4\delta_1 \delta_2 < 0$, los valores propios son complejos conjugados y caen dentro del círculo unitario si $\delta_1 \delta_2 < 1$. Si de lo contrario, $(\tau_1 \tau_2 - \delta_1 - \delta_2)^2 - 4\delta_1 \delta_2 > 0$ entonces los valores propios son reales y están dentro del círculo unitario si

$$1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2 - \tau_1 \tau_2 < 0,$$

$$1 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_1 \delta_2 + \tau_1 \tau_2 > 0.$$

3.2.2.1. Caos robusto

Enfocándose en el atractor caótico creado por el mapa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu & \text{si } x_1 \geq 0, \end{cases} \quad (73)$$

en la región del parámetro

$$\tau_1 > -1 - \delta_1, \quad \tau_2 < -1, \quad |\tau_1| < 2.$$

Teorema 3.4 (atractor caótico de dos partes) Si la bifurcación de colisión de esquina de un atractor punto fijo admisible a un punto admisible silla de montar es mostrado por el mapa (73) bajo la variación de μ y las condiciones adicionales

$$\tau_1 < -\frac{1}{1 + \tau_2}, \quad (74)$$

$$\tau_1 (\tau_2 + 1) - \delta_1 \left(1 + \frac{1}{\tau_2}\right) < 0, \quad (75)$$

$$\tau_1 (\tau_2 + 1) - \delta_1 \left(1 + \frac{1}{\tau_2}\right) + 1 > 0, \quad (76)$$

se mantienen, entonces existe un atractor para $\mu > 0$ que cae dentro del segmento invariante continuo lineal por partes KLC (viz figura 14), donde $K = [(\tau_2 + 1)\mu, 0]$, $L = [\mu, 0]$ y $C = [(\tau_1\tau_2 + \tau_1 + 1)\mu, -\delta_1(\tau_2 + 1)\mu]$, y si adicionalmente

$$|\tau_1\tau_2 - \delta| > 1, \quad (77)$$

entonces este atractor es caótico y robusto (Di Bernardo *et al.*, 2008).

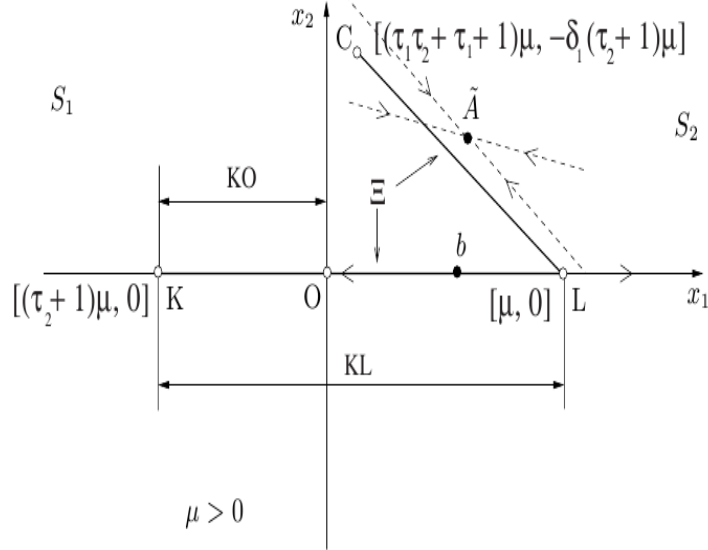


Figura 14: **Ejemplo de un conjunto límite de (73) después de la bifurcación de colisión de frontera de un punto fijo estable a un punto silla de montar. (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)**

Teorema 3.5 (atractor caótico de tres partes) Si la bifurcación de colisión de frontera de un atractor punto fijo admisible a un punto admisible silla de montar se muestra por el mapa (73) bajo la variación de μ y sí las condiciones adicionales

$$\tau_1 > -\frac{1}{1 + \tau_2}, \quad (78)$$

$$\tau_1^3 (\tau_2 + 1) + \tau_1 + 1 - \delta_1 \left(1 + \frac{2}{\tau_2}\right) > 0, \quad (79)$$

$$\tau_1^3 (\tau_2 + 1) + \tau_1^2 (1 + \tau_2 \delta_1) - \delta_1 \tau_1 \left(1 + \frac{1}{\tau_2}\right) - \frac{\delta_1}{\tau_2} + 1 > 0, \quad (80)$$

se mantienen, entonces existe un atractor que nace en la bifurcación de colisión de frontera, y necesariamente cae en un conjunto invariante continuo lineal por partes construido por los segmentos GEI y LH (viz figura 15) (Di Bernardo *et al.*, 2008).

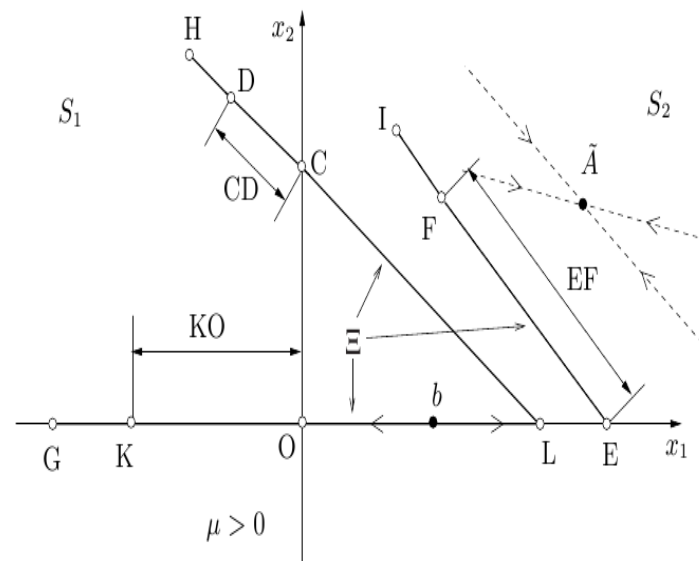


Figura 15: Ejemplo de un conjunto límite de (73) después de la bifurcación de colisión de frontera de un punto fijo estable a un punto silla de montar. (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

3.3. Bifurcación deslizante en sistemas de Filippov

En esta subsección nos enfocaremos en las bifurcaciones discontinuas inducidas causadas por la interacción de una trayectoria con una frontera de una región de deslizamiento. Si se considera un sistema autónomo continuo diferenciable por partes de EDOs y una región suficientemente pequeña $D \subset \mathbb{R}^n$ del espacio de estados donde se supone que el sistemas de dimensión- n $\dot{x} = F(x, t, \mu)$ puede ser descrito por

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{si } H(x) < 0, \end{cases} \quad (81)$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$, $F_1, F_2: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ son suficientemente diferenciables en D y

$H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es una función escalar suficientemente diferenciable (al menos C^4) del sistema de estados. Etiquetando Σ como el hiperplano definido por

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}, \quad (82)$$

al cual se llama variedad de conmutación. Σ divide D en dos regiones

$$G_1 := \{x \in D : H(x) > 0\}, \quad (83)$$

$$G_2 := \{x \in D : H(x) < 0\}. \quad (84)$$

Más aún, se asume que existe un subconjunto de la variedad de conmutación $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$, llamada región deslizante, la cual es simultáneamente atractora para ambos lados en las regiones G_1 y G_2 . En toda la vecindad de esta región se asume:

$$\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle > 0. \quad (85)$$

Bajo este supuesto, si la trayectoria del sistema cruza la región de deslizamiento $\hat{\Sigma}$, entonces es forzada a evolucionar dentro de $\hat{\Sigma}$ hasta que eventualmente alcanza su frontera. Esto es el llamado movimiento deslizante, el cual puede ser descrito al considerar un vector de campo F_s apropiado, que cae dentro de la parte convexa de F_1

y F_2 , y que es tangente a Σ para $x \in \hat{\Sigma}$ (Filippov, 1988; Utkin, 1992). De acuerdo al control equivalente de Utkin (Utkin, 1992), tal vector de campo está dado por

$$F_s = \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 - F_1}{2} H_u(x), \quad (86)$$

en donde $H_u(x) \in [-1, 1]$ es alguna función escalar del sistema de estados. $H_u(x)$ puede ser obtenida en términos de F_1 y F_2 al considerar que F_s debe ser tangencial a la variedad de conmutación, i.e. $\langle \nabla H, F_s \rangle = 0$, al usar esta condición, se tiene que

$$H_u(x) = -\frac{\langle \nabla H, F_1 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle}. \quad (87)$$

Ahora se puede definir la región de deslizamiento como

$$\hat{\Sigma} := \{x \in \Sigma : -1 \leq H_u(x) \leq 1\} \quad (88)$$

y de (85) y (88) se tiene que

$$\langle \nabla H, F_2 \rangle > 0 > \langle \nabla H, F_1 \rangle, \quad (89)$$

en toda la región de interés. Adicionalmente, se definen las fronteras de la región deslizante como $\partial \hat{\Sigma} = \partial \hat{\Sigma}^+ \cup \partial \hat{\Sigma}^-$, donde

$$\partial \hat{\Sigma}^\pm := \{x \in \Sigma : H_u(x) = \pm 1\}. \quad (90)$$

Se observa que si $x \in \partial \hat{\Sigma}^+$ de (86) se obtiene $F_s = F_2$, mientras que, si $x \in \partial \hat{\Sigma}^-$, $F_s = F_1$.

∇H_u es el vector normal a $\partial\hat{\Sigma}^\pm$, el cual puede ser expresado por

$$\nabla H_u(x) = \frac{-\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial x} F_2 - \frac{\partial H}{\partial x} F_1\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial x} F_2 + \frac{\partial H}{\partial x} F_1\right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial x} F_2 - \frac{\partial H}{\partial x} F_1\right)}. \quad (91)$$

En los sistema de Filippov con bifurcación deslizante se tienen cuatro casos, una representación esquemática tridimensional se muestra en la figura 16. Se supone que estas bifurcaciones locales involucran secciones de trayectorias que pertenecen a alguna órbita periódica del sistema. La figura 16a representa el escenario llamado bifurcación deslizante de tipo I. Aquí, bajo la variación de un parámetro una parte de la trayectoria del sistema cruza transversalmente la frontera de la franja deslizante en el punto de bifurcación (i.e., trayectoria etiquetada “b” en la figura 16a). Algunas variaciones adicionales del parámetro causan que la trayectoria entre a la región de deslizamiento $\hat{\Sigma}$, dando lugar a la aparición de movimiento deslizante. Se observa que la trayectoria deslizante se mueve localmente hacia la frontera de $\hat{\Sigma}$, ya que en la frontera $F_s = F_1$ la trayectoria deja tangencialmente la variedad de conmutación.

En el caso que se presenta en la figura 16b, una sección de la trayectoria cae en la región G_1 o G_2 y roza la frontera de la región deslizante desde arriba (o abajo). Otra vez, esto causa la formación de una sección de movimiento deslizante, la cual localmente dejará $\hat{\Sigma}$. Esta transición se llama bifurcación de roce-deslizamiento. Se observa que esta transición es una generalización inmediata de lo que se conoce como bifurcación de roce de los sistemas dinámicos con deslizamiento.

Un evento de bifurcación diferente, el cual es llamado bifurcación de deslizamiento tipo II o conmutación-deslizamiento, se muestra en la figura 16c. Este escenario es similar al de la bifurcación deslizante tipo I que se muestra en la figura 16a. Se ve una sección de la trayectoria que cruza transversalmente la frontera de la región deslizante. Ahora, sin embargo, la trayectoria se mantiene localmente dentro de la región de deslizamiento en vez de salir rápidamente de la variedad de conmutación Σ .

El cuarto y último caso es llamado bifurcación de múltiple deslizamiento, que se muestra en la figura 16d. Este difiere de los escenarios presentados arriba ya que el segmento de la trayectoria, la cual se somete a bifurcación, cae enteramente dentro de la región de deslizamiento $\hat{\Sigma}$. Es decir, mientras los parámetros son variados, una sección de deslizamiento de la trayectoria del sistema golpea tangencialmente (o roza) la frontera de la región deslizante. Variaciones adicionales del parámetro causa la formación de un segmento adicional de la trayectoria que cae por arriba o por debajo de la variedad de conmutación, i.e. en región G_1 o G_2 .

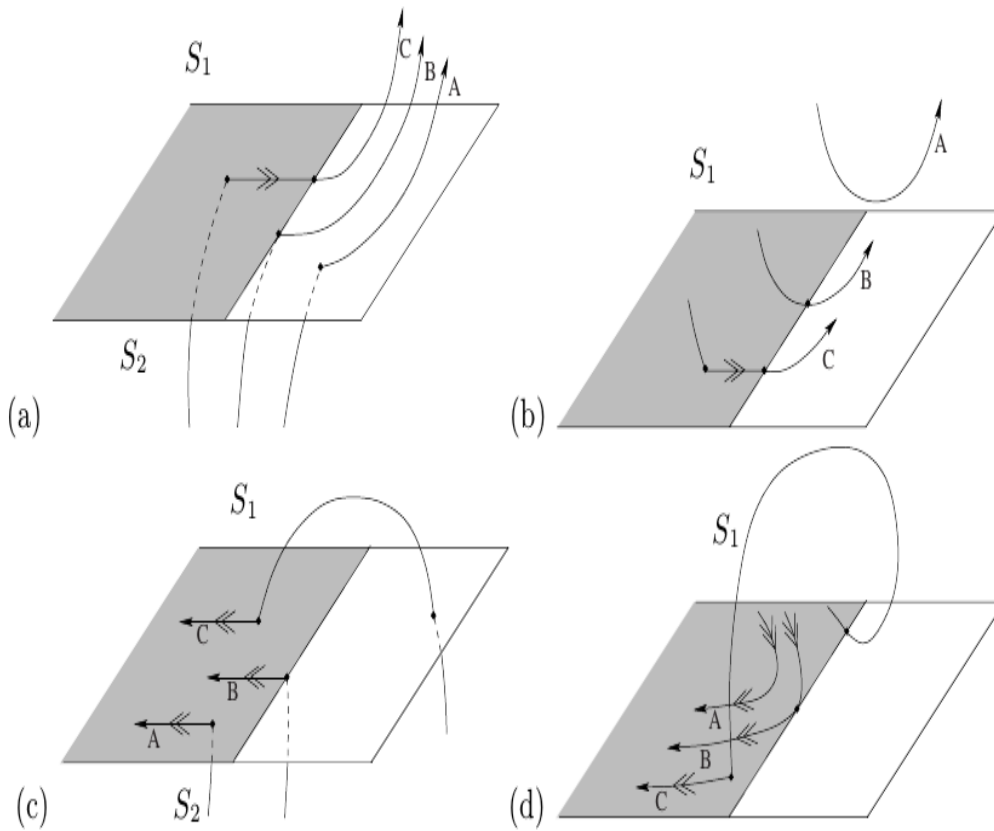


Figura 16: **Geometría de bifurcación deslizante: (a) cruce-deslizamiento, (b) roce-deslizamiento, (c) conmutación-deslizamiento, (d) adición-deslizamiento.** (Fuente: “Piece-smooth Dynamical systems Theory and Applications”, di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., 2008, Springer)

3.3.1. Condiciones analíticas

En todos los casos presentados anteriormente, los eventos de bifurcación implican que una parte de la trayectoria del sistema cruce la frontera de la región de deslizamiento $\partial\hat{\Sigma}$. En el punto de bifurcación, $x = x^*$, $t = t^*$, para todos los casos las siguientes condiciones generales deben ser cumplidas. Específicamente se tiene

1. $H(x^*) = 0$, $\nabla H(x^*) \neq 0$;
2. $H_u(x^*) = -1 \Leftrightarrow F_s = F_1 \Leftrightarrow \langle \nabla H, F_1 \rangle = 0$ en x^* .

Estas condiciones dicen que el punto de bifurcación: (1) pertenece a la variedad de conmutación, la cual está bien definida; (2) está localizado sobre la frontera de la región de deslizamiento (s.p.d.g. se supone que pertenece a $\partial\hat{\Sigma}^-$). En lo que sigue, sin pérdida de generalidad, se supone que el punto de bifurcación está localizado en el origen, i.e. $x^* = 0, t^* = 0$. A menos que se indique lo contrario, se asume que todas las cantidades de las ecuaciones abajo son evaluadas en el origen.

Al usar (91) y las condiciones generales para bifurcaciones deslizantes, se puede expresar ∇H_u^* en terminos de $\nabla H, F_1, F_2$ como

$$\nabla H_u^* = -\frac{2}{\langle \nabla H^*, F_2^* \rangle} \nabla H^* \frac{\partial F_1^*}{\partial x}, \quad (92)$$

en donde, el superíndice * denota cantidades evaluadas en el punto de bifurcación x^* .

3.3.1.1. Caso I: Bifurcación de deslizamiento tipo I

Como se muestra en la figura 16a, en este caso, el flujo deslizante se mueve localmente hacia la frontera de la región deslizante, cuando se perturba desde el punto de bifurcación. Así, en el punto de bifurcación, se tiene que

$$\left. \frac{dH_u(\Phi_1(0, t))}{dt} \right|_{t=0} < 0, \quad (93)$$

que produce la condición adicional

$$\langle \nabla H_u, F_1 \rangle < 0. \quad (94)$$

Después de sustituir (92) por ∇H_u en (94) se tiene que

$$\left. \frac{d^2 H(\Phi_1(0, t))}{dt^2} \right|_{t=0} = \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right\rangle > 0. \quad (95)$$

3.3.1.2. Caso II: Bifurcación roce-deslizamiento

Este escenario es equivalente al caso I (viz figura 16b). Cuando el roce-deslizante ocurre, el flujo deslizante también se mueve hacia la frontera de la franja deslizante. Así, la condición (95) también se mantiene en este caso.

3.3.1.3. Caso III: Bifurcación deslizante tipo II (o conmutación-deslizante)

En este caso, al contrario de lo que se supuso para el caso I y II (viz figura 16c), el vector de campo F_s debe alejarse de la frontera de la región deslizante en el punto de bifurcación. Así, a lo largo $\partial\hat{\Sigma}$, $F_s = F_1$, se requiere la condición extra

$$\frac{dH_u(\Phi_1(0, t))}{dt} \Big|_{t=0} = \langle \nabla H_u, F_1 \rangle > 0 \Rightarrow \frac{d^2 H(\Phi_1(0, t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \left\langle \nabla H_u, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right\rangle < 0. \quad (96)$$

3.3.1.4. Caso IV: Bifurcación multideslizante

Cuando ocurre bifurcación multideslizamiento, (viz figura 16d) el flujo deslizante es tangencial a la frontera de la franja deslizante en el punto de bifurcación. En esencia, tenemos

$$\frac{dH_u(\Phi_s(0, t))}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (97)$$

y ya que $F_s = F_1$ a lo largo de $\partial\hat{\Sigma}^-$, entonces se tiene que:

$$\langle \nabla H_u, F_s \rangle = \langle \nabla H_u, F_1 \rangle = 0. \quad (98)$$

Al aplicar (92) para ∇H_u en (98) se tiene que

$$\frac{d^2 H(\Phi_1(0, t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right\rangle = 0. \quad (99)$$

Más aún, al suponer s.p.d.g que el flujo deslizante tiene un mínimo local en el punto de bifurcación, también se requiere que

$$\frac{d^2 H_u(\Phi_s(0, t))}{dt^2} \Big|_{t=0} > 0, \quad (100)$$

i.e.,

$$\frac{d^2 H_u(\Phi_s(0, t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial H_u}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 + \frac{\partial^2 H_u}{\partial x^2} F_1 = \left\langle \nabla H_u, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 H_u}{\partial x^2}, F_1 \right\rangle > 0. \quad (101)$$

Bajo la suposición que $\partial \hat{\Sigma}^-$ es plana (101) se tiene que:

$$\frac{d^2 H_u(\Phi_s(0, t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \left\langle \nabla H_u, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right\rangle > 0. \quad (102)$$

Al usar (92) para ∇H_u , se obtiene que

$$\frac{d^3 H(\Phi_1(0, t))}{dt^3} \Big|_{t=0} = \left\langle \nabla H, \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 F_1 \right\rangle < 0. \quad (103)$$

Las condiciones analíticas que definen las bifurcaciones deslizantes para cada caso se resumen en la tabla 1.

Tabla 1: Condiciones analíticas para bifurcaciones deslizantes de ciclos límite.

Bifurcación	Deslizamiento I	Roce-Deslizamiento	Deslizamiento II	Multideslizamiento
Condición 1	$H(x^*) = 0, \nabla H(x^*) \neq 0$			
Condición 2	$H_u(x^*) = -1,$	$\Leftrightarrow F_s = F_1 \Leftrightarrow$	$\langle \nabla H, F_1 \rangle = 0, \text{ en } x^*$	
Condición 3	$\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle > 0$		$\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle < 0$	$\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle = 0$
Condición 4	Condición no definida			$\langle \nabla H, \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 F_1 \rangle < 0$

3.4. Método numérico para simulación

Es bien conocido que las herramientas de precisión de simulación numérica, las cuales son basadas en el método no-lineal de Newton-Raphson, pueden tener serias desventajas o inconvenientes cuando son usadas para la integración de circuitos discontinuos que contienen interruptores (v.g., como diodos ideales y transistores). Esto es especialmente cierto cuando el número de eventos llega a hacer demasiado grande, o cuando existe modos deslizantes, los cuales son común en la práctica. Entonces, las herramientas de simulación (v.g., como el SPICE) pueden llegar a ser consumidoras de tiempo, o proporcionar resultados pobres con castañueo (chattering, en inglés), o incluso fallar. Lo mismo aplica a los integradores híbridos con una enumeración exhaustiva de todos los modos del sistema, los cuales tienen un alcance muy limitado de aplicaciones debido al crecimiento exponencial del número de modos que tienen que ser simulados separadamente. En la misma línea, los esquemas orientados a eventos (event-driven, en inglés) pueden difícilmente simular sistemas con un gran número de eventos, ya que ellos pronto llegan a ser consumidores de tiempo y no permiten acumulación de eventos.

Es por lo tanto claro que otro tipo de esquemas numéricos tienen que ser aplicados a circuitos conmutados con alta discontinuidad. Ya que un método numérico siempre

se basa en un enfoque específico de modelado, un camino lógico es primero considerar los modelos de componentes discontinuos (v.g., diodos, interruptores, transistores, etc.) para que un método numérico eficiente pueda ser aplicado. El enfoque de sistemas dinámicos discontinuos puede tomar ventaja de los importantes trabajos que han sido dirigidos por la comunidad de Programación No-lineal con referencia al desarrollo de métodos eficientes para problemas complementarios y herramientas de optimización, y también por la comunidad de Contacto Mecánico, donde Moreau y Jean desarrollaron el método llamado contacto dinámico discontinuo dentro del marco teórico de los procesos de barrido de Moreau (Acary *et al.*, 2010).

El enfoque de modelado lineal por tramos en circuitos eléctricos discontinuos ha sido promovido por Chua (Chua y Kang, 1978) y los problemas complementarios han sido introducidos por varios autores, seguidos por los trabajos de Leenaerts y van Bokhoven (Leenaerts, 1999; Leenaerts y Bokhoven, 1998), Vlach (Vlach y Opal, 1997), Camlibel (Camlibel *et al.*, 2008, 2002)(Camlibel *et al.*, 2008, 2002), en el estudio de la convergencia del método de Euler hacia atrás. Como se muestra en (Camlibel, 2001) el método de integración de Euler hacia atrás es un algoritmo con rendimiento estable cuando condiciones complementarias están presentes. Para un SLC de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu + E,$$

$$y = Cx + Du + F,$$

el esquema del método de Euler hacia atrás es

$$x_{k+1} = x_k + h(Ax_{k+1} + Bu_{k+1} + E), \quad (104)$$

$$y_{k+1} = Cx_{k+1} + Du_{k+1} + F, \quad (105)$$

en donde h es el tamaño de paso. A cada paso se debe de resolver el PLC

$$y_{k+1} = (hC(I - hA)^{-1}B + D)u_{k+1} + C(I - hA)^{-1}x_k + hC(I - hA)^{-1}E + F, \quad (106)$$

$$0 \leq y_{k+1} \perp u_{k+1} \geq 0. \quad (107)$$

Para un x_k dado, y entonces se calcula

$$x_{k+1} = (I - hA)^{-1}(x_k + h(Bu_{k+1} + E)). \quad (108)$$

En general, un PLC debe resolverse usando un algoritmo especializado (v.g., como el de Lemke's (Billups y Murty, 2000)). Sin embargo, para un simple par de variables complementarias, un cálculo explícito puede ser usado. Primero, (106) puede ser escrita como $y_{k+1} = Mu_{k+1} + q_k$. Asumiendo que $M > 0$ (lo cual es el caso para cualquier configuración de interruptores de los convertidores de potencia). Entonces el PLC se resuelve como sigue

- Si $q_k > 0$, entonces $u_{k+1} = 0$ y $y_{k+1} = q_k$,
- Si $q_k < 0$, entonces $u_{k+1} = \frac{-q_k}{M}$ y $y_{k+1} = 0$,
- Si $q_k = 0$, entonces $u_{k+1} = 0$ y $y_{k+1} = 0$.

3.5. Resumen del capítulo

Se presentó en este capítulo la teoría de bifurcaciones para sistemas discontinuos. Se mostraron los diferentes tipos de bifurcación que pueden ocurrir en sistemas dinámicos discontinuos y en particular se abordaron las bifurcaciones de colisión de borde de esquina y las deslizantes. También se presentó el método a seguir para el análisis de estos tipos de bifurcaciones, ya que éstas son las que se encuentran comúnmente en los convertidores. Además, se mostró el algoritmo de Euler hacia atrás como herramienta numérica para la parte de simulación.

Capítulo 4

Dinámica compleja del convertidor “buck”

4.1. Introducción

La mayoría de los convertidores de potencia están constituidos por elementos lineales (i.e., resistores, inductores, capacitores), fuentes de tensión y corriente, y dispositivos electrónicos no lineales (DEs)(i.e., diodos, interruptores, tiristores, transistores, Mosfets, etc.). Una forma típica para modelar convertidores de potencia es mediante diodos e interruptores ideales, para discriminar entre los diferentes modos del convertidor, y entonces construir para cada modo un modelo dinámico. La condición para la conmutación entre los diferentes modos dependerá del estado (i.e., típicamente la tensión en el capacitor y la corriente a través del inductor), de una señal externa y de la técnica de control. Sin embargo, este enfoque de modelado, el cual representa también un paso preliminar necesario para la construcción de los modelos promedios, necesita algún conocimiento sobre la manera de cómo el convertidor opera, e.g., modo de conducción continua o discontinua, y esta construcción puede llegar a ser aburrida y tediosa cuando el número de diodos y/o interruptores se incrementa.

Un enfoque alternativo de modelado tal como mapeo o modelos de conmutación MAP, también requieren modificaciones en la estructura del modelo dependiendo de las condiciones de operación del convertidor. Una nueva propuesta para el modelado de convertidores de potencia es el uso del formalismo complementario. Los modelos complementarios son caracterizados por una parte dinámica lineal y un conjunto de variables complementarias (i.e., interpretadas como entradas y salidas de la parte dinámica

del modelo), las cuales son restringidas al no ser cero al mismo tiempo. Los sistemas complementarios han sido propuestos como un marco para el modelado (estático) de circuitos con fuentes-diodos-resistores, los cuales incluyen solamente resistores lineales, fuentes de tensión y corriente independientes, y diodos ideales. Recientemente, algunos sistemas de conmutación complementarios han sido usados para modelar redes eléctricas conmutadas que contienen diodos ideales e interruptores ideales.

Los convertidores de potencia pueden ser modelados al usar el formalismo complementario desde una perspectiva diferente con respecto al enfoque clásico de electrónica de potencia. Los DEs son considerados como elementos externos y modelados por separado, entonces el modelo entero del convertidor se obtiene integrando la representación de DEs con las ecuaciones dinámicas del circuito, al suponer que el comportamiento tensión/corriente de cada dispositivo electrónico en cada estado de conducción, es decir activado o apagado, puede ser representado por medio de una característica de tensión/corriente lineal por partes. Al incluir tal representación en el modelo dinámico de los convertidores, el modelo de conmutación complementaria de todo el convertidor puede ser construido. El modelado complementario es simple de construir y captura en una simple forma todos los modos del convertidor, y permite la idealización de las características de los DEs en el nivel deseado de abstracción. Con el fin de obtener una simulación eficiente en tiempo, el modelo propuesto puede ser integrado numéricamente al explotar los algoritmos ya disponibles. Más aún, desde un punto de vista analítico, los modelos complementarios pueden ser usados para probar, al usar el concepto de pasividad, la existencia de soluciones del modelo del convertidor de potencia.

Recientemente los modelos de los convertidores cd/cd buck, boost, buck-boost y de Ćuk se presentan en formalismo complementario. Para modelar estos sistemas se introducen las variables de entrada (v_D, i_D) y (v_S, i_S) para el diodo y el interruptor.

Se consideran interruptores de 2 cuadrantes tal que $i_S \geq 0$ pero v_S no es restringida. En esencia, el modelo para una configuración arbitraria de interruptores puede ser un SLC. Una vez que la configuración de los interruptores es especificada (S abierto, i.e., $i_S = 0$ o S cerrado, i.e., $v_S = 0$), las variables del interruptor pueden ser eliminadas y se dejan unas con SLC estándar con las variables del diodo.

El convertidor buck es uno de los más simples, pero más usado en los convertidores de potencia: es un circuito que convierte una entrada de corriente directa (cd) a una salida de cd a una tensión baja. Muchas de las fuentes de alimentación de potencia emplean circuitos estrechamente relacionados con él. Una aplicación de importancia actual es la conversión del estándar de 5V cd, usado en computadoras, a los 3.3V o menos que necesita el procesador, tales como los de la familia Pentium. Un convertidor buck puede lograr en la práctica una eficiencia del 92%, mientras que en un regulador lineal la eficiencia sería solo del 66%, y produce 4 veces más pérdida de calor (Banerjee y Verghese, 2001).

El esquema básico en lazo abierto del convertidor buck se muestra en la figura 17. El interruptor S se abre y se cierra a una frecuencia de conmutación f_s con un ciclo de trabajo d (i.e., la fracción de tiempo que el interruptor está cerrado). Cuando S está cerrado, el voltaje de entrada V_{in} es transferido al filtro paso bajo LC. Cuando S está abierto, el inductor mantiene su flujo de corriente, fuerza al diodo D a conducir y aterriza la entrada del filtro LC, ya que el filtro ve una señal cuadrada entre 0 y V_{in} . La frecuencia de corte del filtro es mucho menor que f_s y remueve gran parte del rizado de conmutación y entrega una tensión de salida v relativamente constante hacia la resistencia de carga R . La tensión de salida puede ser variada al cambiar el ciclo de trabajo d (i.e., al usar una modulación de anchura de pulso).

La operación descrita arriba es conocida como modo de conducción continuo (MCC),

ya que la corriente del inductor nunca llega a ser cero. Sin embargo, si la salida es ligeramente cargada, la corriente del inductor puede llegar a cero en una parte del ciclo mientras D está conduciendo. Esta situación se llama modo de conducción discontinuo¹ (MCD).

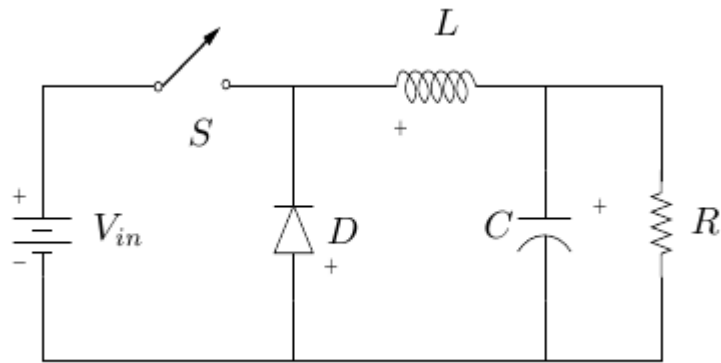


Figura 17: **Esquema básico del convertidor “buck”.**

Si el interruptor está encendido o apagado, el convertidor buck puede ser siempre descrito como un sistema lineal de segundo orden, cuyos estados son la tensión v a través del capacitor, y la corriente i a través del inductor. Las ecuaciones diferenciales que modelan el convertidor buck toman la forma

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v, \\ \dot{i} &= -\frac{1}{L}v + \frac{V_{in}}{L}u(t), \end{aligned} \tag{109}$$

en forma de ecuaciones de estado y matricial queda como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \tag{110}$$

¹Los términos continuo y discontinuo son usados en un sentido no matemático aquí.

en donde $x_1 = i$, $x_2 = v$ y la entrada de control $u(t)$ es

$$u(t) = H(\sigma(x, t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(x, t) > 0, \\ 1 & \text{si } \sigma(x, t) \leq 0, \end{cases} \quad (111)$$

$$\sigma(x, t) = V_c - V_r, \quad V_c = g_i x_1 + g_v x_2, \quad V_r = V_l + \gamma * \text{mod}\left(\frac{t}{T}, 1\right), \quad \gamma = V_u - V_l. \quad (112)$$

En las siguientes dos subsecciones presentaremos el modelo del convertidor buck visto como sistema de Filippov y como sistema complementario.

4.1.0.5. Modelo del convertidor “buck” con sistemas de Filippov

Al usar el concepto de sistemas de Filippov descrito en la sección 2.1.2.2 y al tomar como variable de estado $x_3 = t$, en donde t es la variable de tiempo, entonces la ecuación (110) la podemos reescribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (113)$$

la ecuación (113) podemos expresarla como

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, t) & H(x) \leq 0, \\ F_2(x, t) & H(x) > 0, \end{cases} \quad (114)$$

en donde

$$F_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (115)$$

$$F_1(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (116)$$

para este sistema tenemos que la superficie de discontinuidad es

$$\Sigma := \{H(x) = 0\} = \{V_c - V_r\}, \quad (117)$$

$$\nabla H(x) = \begin{bmatrix} g_i & g_v & \gamma \end{bmatrix}. \quad (118)$$

4.1.0.6. Modelo del convertidor “buck” con sistemas complementarios

Para modelar el convertidor buck con sistemas complementarios se usan como variables de estado la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor, i.e., $x_1 = i_L$ y $x_2 = v_C$, las ecuaciones en el espacio de estados son

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L}x_2 - \frac{1}{L}v_D, \quad (119)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2. \quad (120)$$

Se puede formular como un SCC con

$$u_1 = -v_D \rightarrow y_1 = i_D = x_1 - u_2,$$

$$u_2 = i_S \rightarrow y_2 = v_S = V_{in} - u_1.$$

En notación de matriz

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + EV_{in}, \\ y = Cx + Du + FV_{in}, \\ 0 \leq y_1 \perp u_1 \geq 0, \\ y_2 \perp u_2 \geq 0, \end{cases} \quad (121)$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.1.0.7. Control por modulación de anchura de pulso

En la práctica, es necesario regular la tensión de salida v debido a cambios en la tensión de entrada y la corriente de la carga. Esta regulación se logra al agregar un lazo de control de retroalimentación, como se muestra en la figura 18. La acción del interruptor es usualmente implementada a través de una ley de retroalimentación de modulación de anchura de pulso. Al tener la combinación lineal de los dos estados del

sistema, $v_c(t) = g_1 i(t) + g_2 v(t)$, se compara con una señal diente de sierra simétrica V_r (rampa) de un periodo T asignado como se muestra en la figura 18. El interruptor S es encendido cuando la señal rampa llega a ser mayor que la combinación de los dos estados y es apagado cuando la señal rampa cae por debajo de esta combinación.

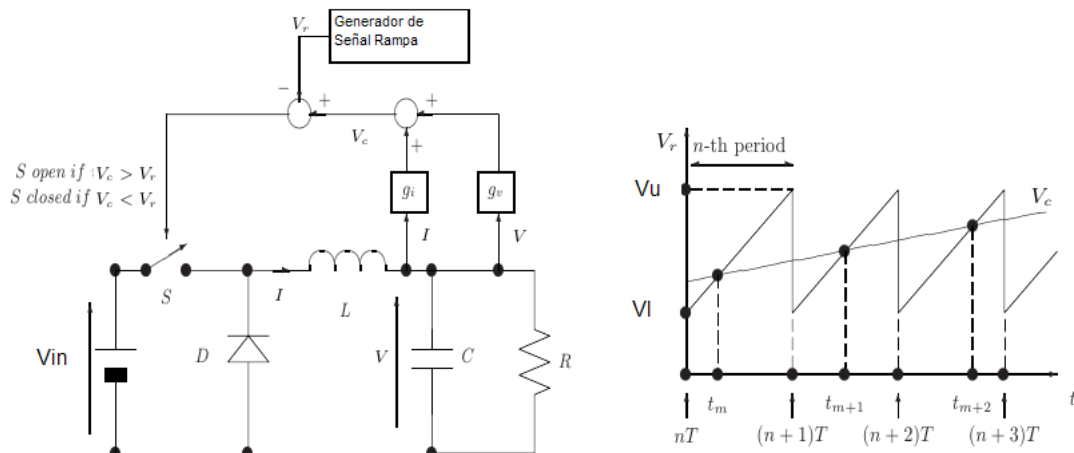


Figura 18: Esquema del convertidor “buck” y del control MAP.

En el diseño práctico del convertidor buck es común el uso de un bloque MAP para adecuar la señal de control y controlar la frecuencia de conmutación. A la fecha se ha reportado la presencia de oscilaciones n-periódicas, oscilaciones cuasiperiódicas y comportamiento caótico en el convertidor buck (Banerjee y Verghese, 2001; Di Bernardo *et al.*, 1998b, 2002a). En la práctica, además del uso del bloque de MAP, es común usar dispositivos de protección, como biestables y redes de circuitos compensadores y filtros, para compensar dinámicas no consideradas en el diseño del algoritmo de control. En general a todos aquellos esquemas de control que utilizan un bloque de MAP se les puede clasificar como controladores por modulación de anchura de pulso.

En las siguientes subsecciones se muestran los resultados numéricos y experimentales de la dinámica del convertidor buck. En este trabajo no se consideran los elementos de protección normalmente utilizados en la práctica, pues dichos elementos, tales como

biestables, bloques de saturación, histéresis, redes de circuitos compensadores y filtros, entre otros, son elementos no lineales que aumentan la complejidad del controlador. Por otra parte, aunque estos elementos no lineales pueden inducir fenómenos dinámicos complejos, el comportamiento caótico puede generarse por mecanismos todavía más simples, que no requieren de ellos (Miranda y Alvarez, 2009).

4.1.1. Variaciones en la tensión de entrada V_{in}

En esta subsección se estudia el cambio en la dinámica del convertidor buck cuando se considera la variación en el valor de la tensión de entrada V_{in} . En la literatura revisada es común considerar variaciones en la tensión de entrada V_{in} para estudiar los cambios en la dinámica del convertidor. Esta selección se da por dos razones: una es que se puede controlar su valor de manera sencilla y la otra por que se puede considerar como una ganancia del control.

4.1.1.1. Resultados numéricos

El convertidor buck se simula con los parámetros mostrados en la tabla (3). Tanto en la parte numérica como en la experimental se usaron dos parámetros de bifurcación, la tensión de entrada V_{in} y el periodo T . V_{in} es variado entre 15 y 35 V y T entre 100 y 1000 μ s. La forma de trabajar con los dos parámetros es la que se muestra en la tabla 4. Se dejó fijo uno de los dos parámetros y se varió el segundo. Las simulaciones se realizan usando el formalismo de sistemas complementarios. Es importante mencionar que se usa el modo de control por tensión, esto es de la ecuación (20) $g_i = 0$ y $g_v = 1$.

Tabla 3: Parámetros usados para la simulación del convertidor “buck”.

$R(\Omega)$	$L(mH)$	$C(\mu F)$	$V_u(V)$	$V_l(V)$	$T(\mu s)$	$V_{in}(V)$
22	5	47	1-12	0-11	100-1000	15-35

Tabla 4: Parámetros de bifurcación.

Parámetro fijo	Parámetro variado
V_{in}	T
T	V_{in}

En la figura 19 se puede observar el diagrama de bifurcación cuando V_{in} se usa como parámetro de bifurcación. Este diagrama se construyó con un mapeo llamado A-conmutaciones, en el cual se toma la tensión del capacitor, estado x_2 , cada vez que éste es igual a la rampa V_r . De la figura 19 se observa que para diferentes valores de V_{in} el diagrama muestra órbitas n -periódicas, con $n = 1, 2$, así como regiones donde se llena densamente, lo cual puede ser un indicador de la presencia de órbitas cuasiperiódicas o caóticas. Además, se observa que las bifurcaciones que presenta el convertidor se dan primero por duplicación de periodo y después a una órbita cuasiperiódica o caótica.

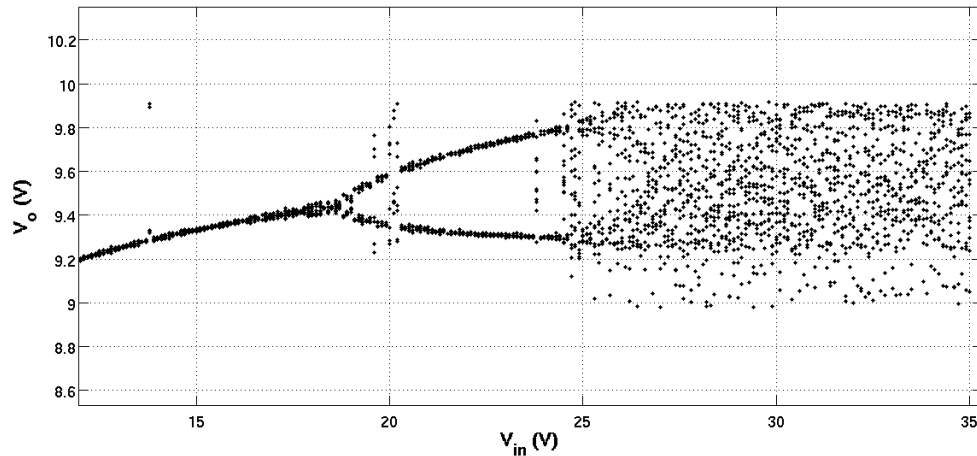


Figura 19: **Diagrama de bifurcación que considera la tensión de entrada V_{in} como parámetro de bifurcación.**

El primer cambio en la dinámica del convertidor que muestra el diagrama de bifurcación de la figura 19 ocurre cuando la tensión de entrada V_{in} tiene un valor aproximado de 18.5V. La bifurcación que se presenta es conocida como duplicación de periodo.

Para V_{in} igual a 15V, 22V y 35V, las gráficas del retrato de fase muestran órbitas 1- y 2-periódicas y comportamiento caótico del convertidor buck. La forma de la señal en el tiempo se muestra en la figura 20 para cada valor de V_{in} y la figura 21 su retrato de fase correspondiente.

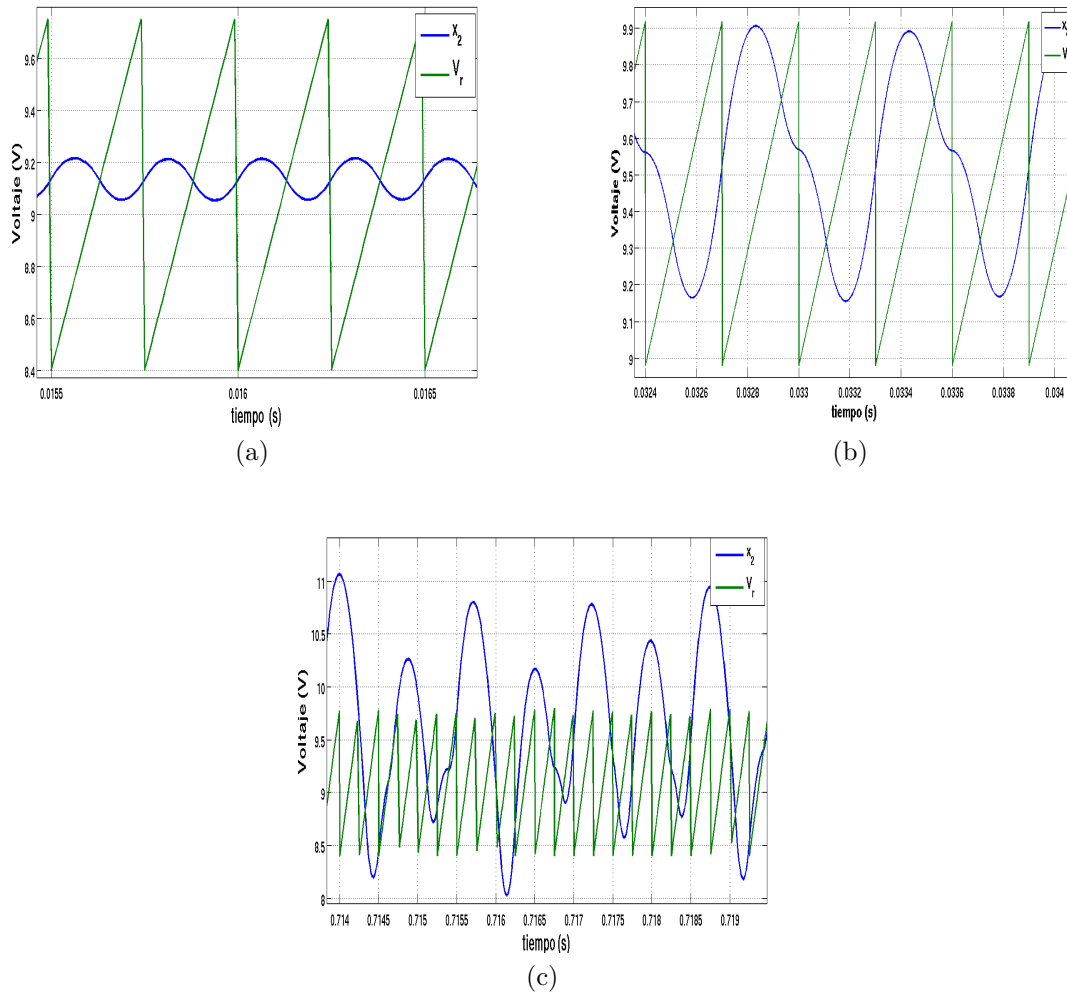


Figura 20: Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 15V$, (b) $V_{in} = 22V$, (c) $V_{in} = 35V$.

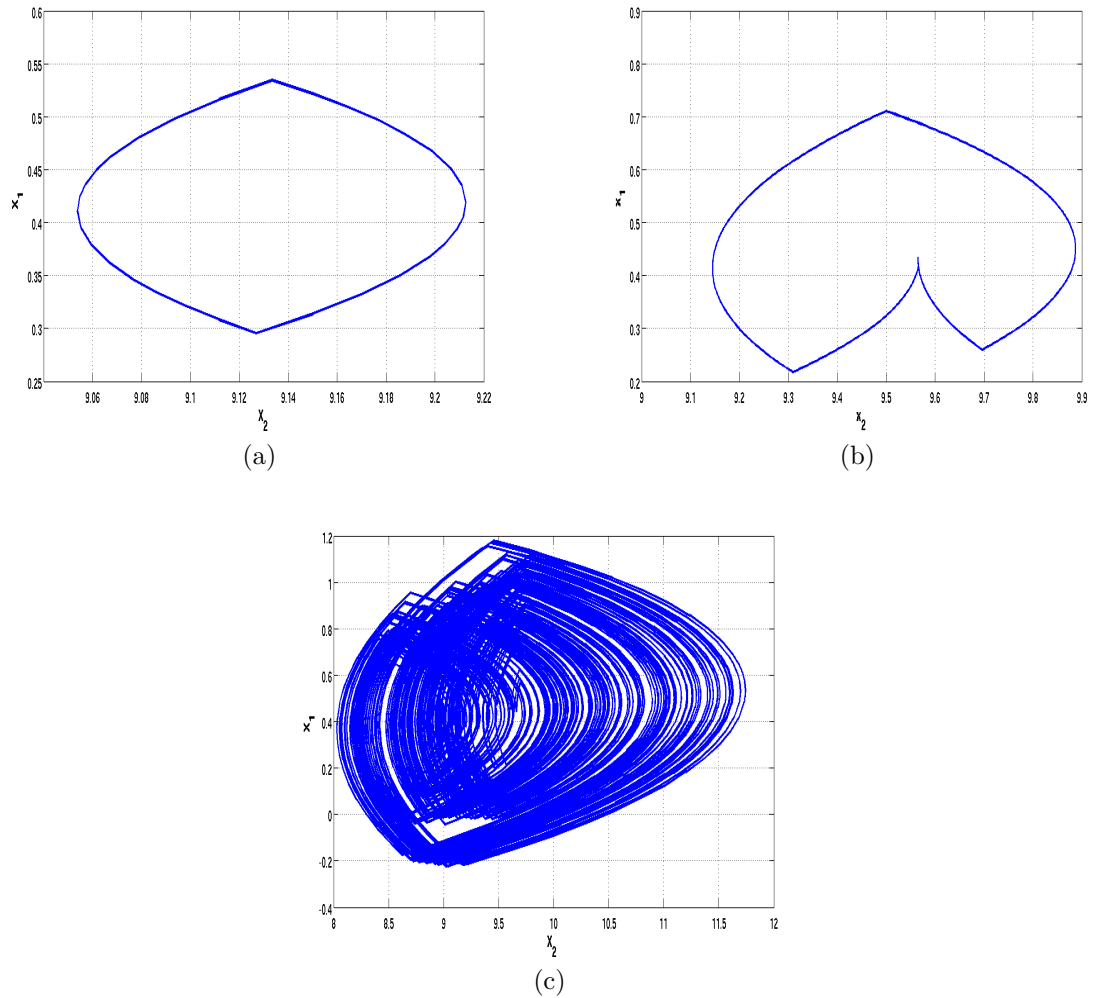


Figura 21: Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódica ($V_{in} = 15V$), (b) 2-periódica ($V_{in} = 22V$) y (c) caos ($V_{in} = 35V$).

Para ilustrar que el convertidor buck presenta órbitas 1-, 2-periódicas y comportamiento caótico, como se muestra en la figura 20, en la figura 22 se muestra el espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , que considera la tensión de entrada V_{in} con los valores de 15V, 22V y 35V. En la figura 22a se muestra el espectro de x_2 para $V_{in} = 15V$. Se observa que se presenta una sola armónica, a la frecuencia de 3.33 kHz. El espectro de x_2 para $V_{in} = 22V$, se muestra en la figura 22b, donde se observa la misma armónica a la frecuencia de 3.33 kHz, así como una nueva armónica a la frecuencia de

1.66 kHz. Finalmente en la figura 22c se muestra el espectro de x_2 cuando $V_{in} = 35V$. En este espectro se observa claramente que siguen presentes las armónicas de la órbita 2-periódica, pero el nivel de los demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que no se puede decir que se trate solamente de una órbita 2-periódica y que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

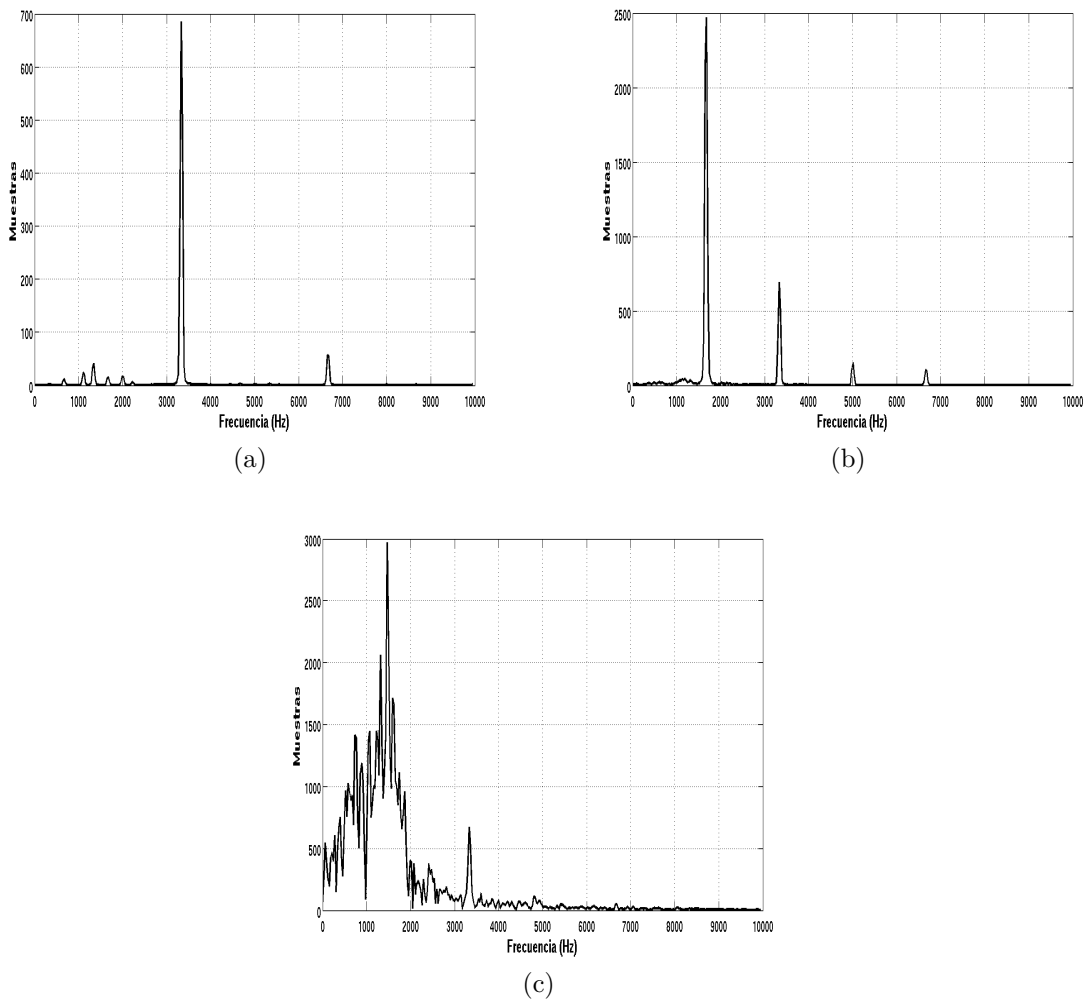


Figura 22: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 con: a) $V_{in} = 15V$, b) $V_{in} = 22V$ y c) $V_{in} = 35V$.**

Al observar el comportamiento del convertidor buck para $V_{in} = 35V$ la figura 23 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina y deslizamiento. Además se puede

observar que la tensión de salida se salta algunos ciclos (i.e., no hay conmutación en un ciclo), lo que concuerda con lo reportado en (Di Bernardo *et al.*, 1998a).

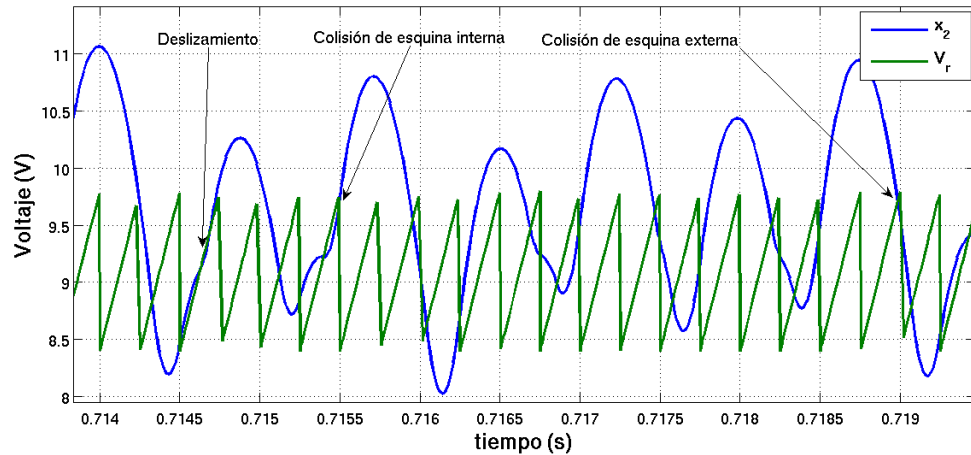


Figura 23: **Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor “buck” para $V_{in} = 35V$.**

En la figura (24) se muestra el mapeo A-conmutaciones que considera que la tensión de entrada V_{in} tiene un valor de $35V$. Se observa que la figura formada no corresponde a una curva cerrada o un conjunto de puntos aislados. La complejidad de la figura que se forma depende del atractor que describa la órbita caótica. Una propiedad que tienen los sistemas en régimen caótico, llamada transitividad topológica, se puede observar en la figura (24). Esta propiedad indica que si se selecciona un punto en el espacio de estado dentro del atractor del sistema, después de un tiempo finito la trayectoria caótica pasará arbitrariamente cerca. Esto ocasiona que si se deja evolucionar por más tiempo la trayectoria que sigue la tensión del capacitor, la curva obtenida a través del mapeo A-conmutaciones se llena densamente, pero ningún punto se repite. En la figura (24), la forma que toma el mapa A-conmutaciones es llamado también como mapa de dedos, en este mapa las líneas horizontales o dedos indican la presencia de movimiento deslizante en el convertido buck.

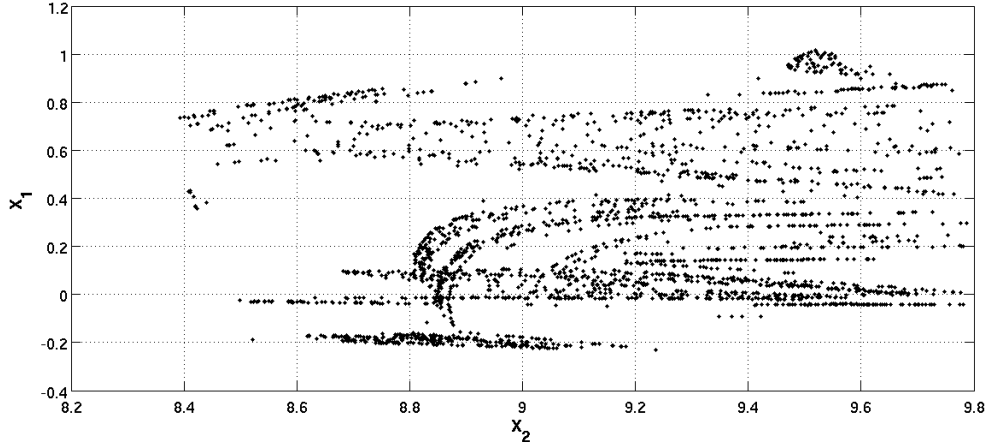


Figura 24: Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_2 .

De acuerdo con la teoría de colisión de frontera presentada en la sección 3.2, las bifurcaciones puede ser analizadas al examinar los valores propios del punto fijo de colisión de frontera antes y después de la colisión de frontera. Si τ_1 y δ_1 son la traza y determinante de la matriz jacobiana en la región S_1 inmediatamente antes de la colisión de frontera, y τ_2 y δ_2 son aquellos en la región S_2 inmediatamente después de la colisión de frontera, entonces cualquier mapa diferenciable por tramos se puede reducir a una forma normal en alguna pequeña vecindad del punto periódico del cruce de frontera. Al observar la figura 23 la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 9.783$ y $x_2 = 0.6914$. Entonces, al linealizar alrededor de este punto se tiene que

$$x \mapsto \begin{cases} N_1 x + M\mu, & \text{si } C^T x < 0, \\ N_2 x + M\mu, & \text{si } C^T x > 0, \end{cases} \quad (122)$$

en donde

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1.00000000000627 & 0.998001998661504 \\ 1.23709508447353 & 0.990375435568788 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1.00000000017178 & 0.924964426250901 \\ 4015.32006464859 & 0.685795356600938 \end{bmatrix}.$$

Al seguir el método introducido en la sección 3.2, se calculan los valores propios de N_1 y N_2 , que son los siguientes cuatro valores propios

$$\lambda_{a1} = 2.10633420898437, \quad \lambda_{a2} = -0.115958773409315,$$

$$\lambda_{b1} = 61.7859276404002, \quad \lambda_{b2} = -60.1001322836275.$$

El subíndice 'a' indica los valores propios de N_1 y 'b' los valores propios de N_2 . El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es impar ($\sigma_1^- + \sigma_2^- = 1$). Por lo tanto se espera una duplicación de periodo, y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par se tiene persistencia del punto fijo en la colisión de frontera, y $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar se tiene que la órbita de periodo-2 desaparece.

Ahora, al expresar la ecuación (122) en la forma normal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & \text{si } x_1 \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (123)$$

en donde

$$\tau_1 = 1.99037543557506, \quad \delta_1 = -0.244247931263907,$$

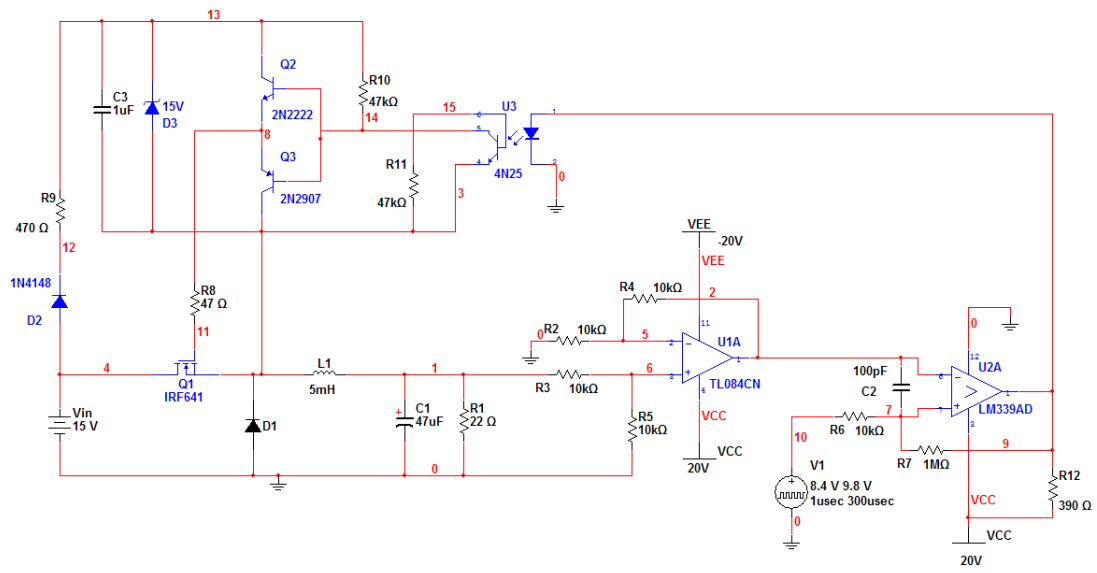
$$\tau_2 = 1.68579535677272, \quad \delta_2 = -3713.34242445469$$

y al aplicar la teoría expuesta en la sección 3.2 y en (Banerjee y Grebogi, 1999), se tienen los siguientes resultados: Los valores propios de N_1 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_1 . Los valores propios de N_2 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_2 . Al aplicar los teoremas 3.4 y 3.5 de la sección 3.2 y los resultados en (Banerjee y Grebogi, 1999) se verifica la existencia de un atractor el cual es caótico y robusto.

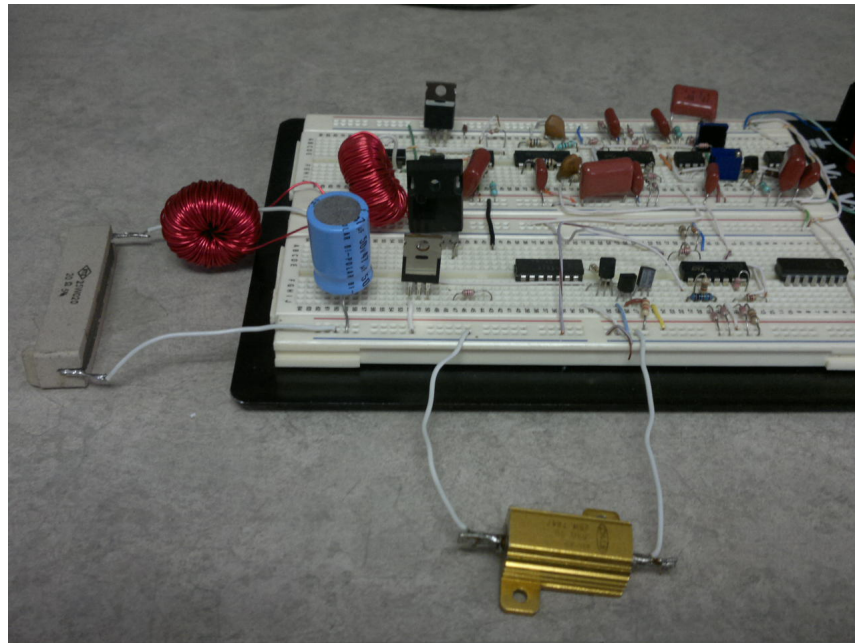
4.1.1.2. Resultados experimentales

En esta subsección se presentan resultados experimentales para verificar el comportamiento dinámico observado en la parte numérica. Se tomaron los parámetros de la tabla 3 y se implementó el convertidor buck como se muestra en la figura 25. El circuito de potencia es el convencional, que usa principalmente un transistor MOSFET de potencia IRF641 (Canal-N) y un diodo de potencia de respuesta rápida. Se utiliza un generador de señales para producir la rampa diente de sierra, con lo que se puede variar su frecuencia y amplitud. La señal diente de sierra se alimenta a un comparador rápido (LM339) con una configuración de histéresis, cuya salida es conectada a un optoacoplador (4N25) que a la vez alimenta a un circuito amplificador en contrafase conformado por los transistores 2N2222 y 2N2907 para controlar la conmutación del MOSFET. La otra entrada del comparador es alimentada por un amplificador operacional (TL084) que toma el voltaje del capacitor C_1 (v_o).

En la figura 26 se muestran la forma de onda en el dominio del tiempo para órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas, y en la figura 27 se muestra su correspondiente retrato de fase.



(a)

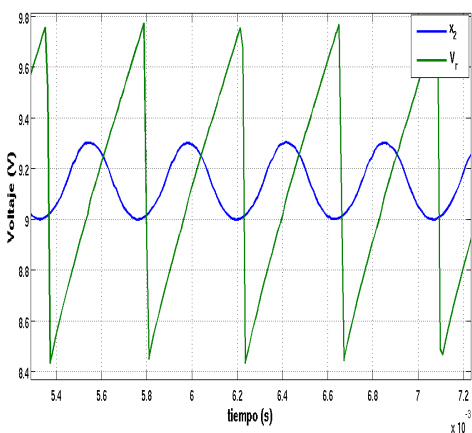


(b)

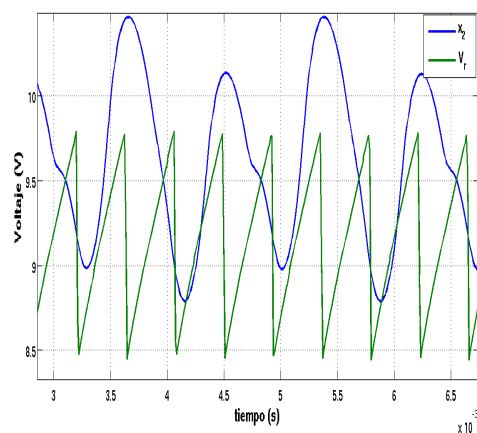
Figura 25: a) Circuito y b) fotografía del convertidor “buck” implementado en tablilla de prueba.

El parámetro de bifurcación que se usó en la figura 26 y la figura 27 es la tensión de entrada V_{in} . Aunque los comportamientos obtenidos numéricamente no son idénticos a los experimentales, debido a las consideraciones ideales en la parte numérica (i.e., por

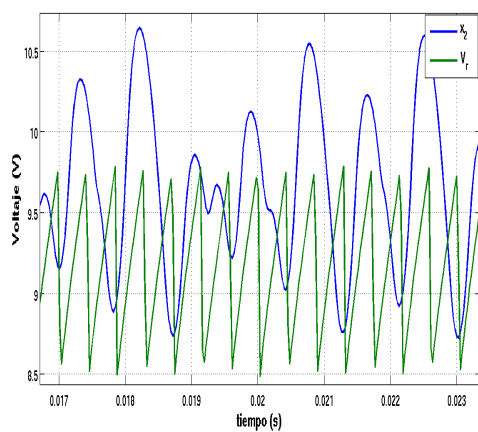
ejemplo interruptor y diodo ideales), se consiguió observar comportamientos complejos como los mostrados numéricamente y reportados en la literatura, como lo son órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas.



(a)



(b)



(c)

Figura 26: Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 15V$ (b) $V_{in} = 25V$ (c) $V_{in} = 35V$.

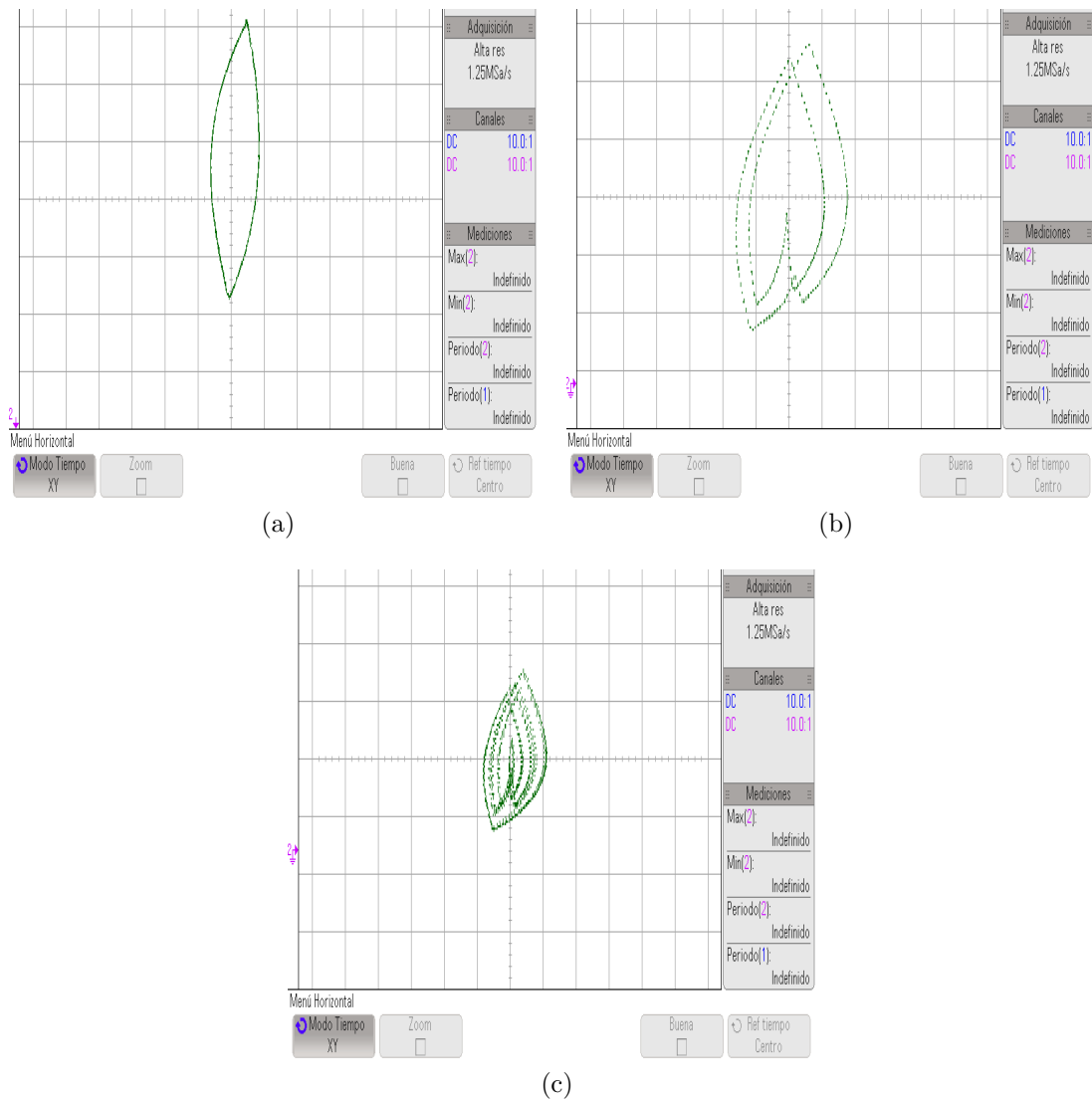


Figura 27: Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($V_{in} = 15V$), (b) 2-periódicas ($V_{in} = 25V$) y (c) caóticas ($V_{in} = 35V$).

Como en la parte numérica, para verificar que el convertidor buck presenta órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas, como se muestra en la figura 26, en la figura 28 se presenta el espectro de la tensión del capacitor que considera la tensión de entrada V_{in} con los valores de 15V, 25V y 35V. En la figura 28a se muestra el espectro de x_2 para $V_{in} = 15V$. Se observa que se presenta una sola armónica, a la frecuencia de 2.314 kHz. El espectro de x_2 para $V_{in} = 25V$, se muestra en la figura 28b, donde se observa la misma armónica

a la frecuencia de 2.314 kHz, así como una nueva armónica a la frecuencia de 1.157 kHz. Finalmente en la figura 28c se muestra el espectro de x_2 cuando $V_{in} = 35V$. En este espectro se observa claramente que siguen presentes las armónicas de la órbita 2-periódica, pero el nivel de los demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que no se puede decir que se trate solamente de una órbita 2-periódica y que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

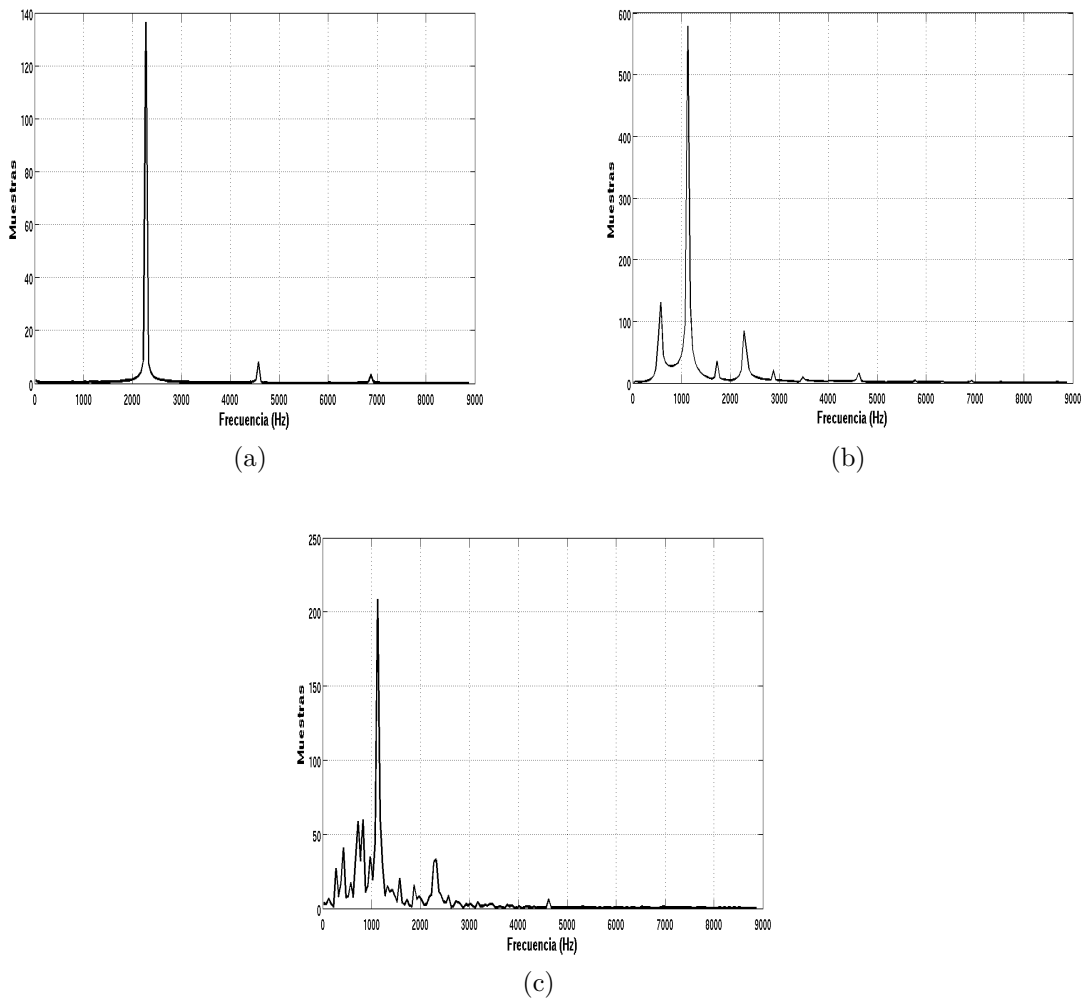


Figura 28: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $V_{in} = 15V$, b) $V_{in} = 25V$ y c) $V_{in} = 35V$.**

Al igual que en el análisis numérico nos enfocaremos en el comportamiento del

convertidor buck para $V_{in} = 35V$, donde la figura 29 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina.

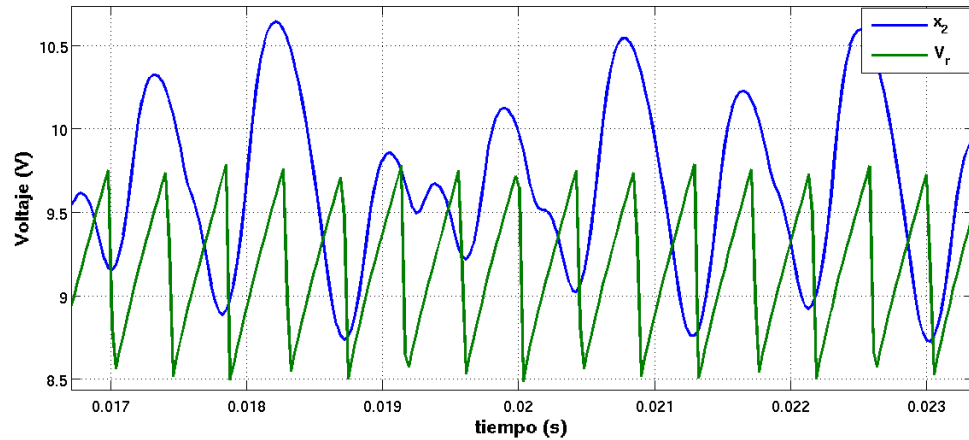


Figura 29: **Colisión de esquina en el convertidor “buck” para $V_{in} = 35V$.**

Al observar la figura 29 la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 9.753$ y $x_2 = 1.16$ y al linealizar alrededor de estos puntos se tiene que

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.999999999994196 & 0.988071712866374 \\ 3.58441666266704 & 0.943624394409 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1.00000000012003 & 0.934260473602781 \\ 1385.81342014901 & 0.719772480594177 \end{bmatrix}.$$

Al calcular los valores propios de N_1 y N_2 , se obtienen los siguientes cuatro valores propios

$$\lambda_{a1} = 2.85395333530322, \quad \lambda_{a2} = -0.910328940900023,$$

$$\lambda_{b1} = 36.8422476706353, \quad \lambda_{b2} = -35.1224751899211.$$

El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es impar ($\sigma_1^- + \sigma_2^- =$

1). Por lo tanto se espera una duplicación de periodo, y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par se tiene persistencia del punto fijo en la colisión de frontera, y $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar se tiene que la órbita de periodo-2 desaparece.

Ahora, al calcular τ_1 , δ_1 y τ_2 , δ_2 de N_1 y N_2 , respectivamente, se obtienen los siguientes valores

$$\tau_1 = 1.9436243944032, \quad \delta_1 = -2.59803631710467,$$

$$\tau_2 = 1.7197724807142, \quad \delta_2 = -1293.99092975282$$

y con ellos se tienen los siguientes resultados: Los valores propios de N_1 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_1 . Los valores propios de N_2 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_2 . Al aplicar los teoremas 3.4 y 3.5 de la sección 3.2 y los resultados en (Banerjee y Grebogi, 1999) se verifica la existencia de un atractor el cual es caótico y robusto.

4.1.2. Variación del periodo T de la señal de modulación V_r .

En esta subsección se estudia el cambio en la dinámica del convertidor buck cuando ocurren variaciones en el periodo T de la señal de modulación V_r . En el diseño clásico de un controlador MAP la selección del periodo T se basa en la aplicación en la cual el convertidor se utilizará, por lo que la selección del periodo T depende en muchos casos de la experiencia del diseñador (Mohan *et al.*, 2003). El intervalo de trabajo que se utiliza está basado en los ejemplos de la literatura revisada.

4.1.2.1. Resultados numéricos

El diagrama de bifurcación se construyó utilizando el mismo mapeo que la subsección anterior, y considerando que el periodo T toma valores entre $100\mu s$ a $500\mu s$. El diagrama que se obtuvo es parecido al diagrama de bifurcación cuando la tensión de entrada V_{in} se usa como parámetro de bifurcación. De la figura 30, se observa que cuando se consideran variaciones en el periodo T , al principio del diagrama se presenta un escenario similar al que presenta el convertidor si se considera la tensión de entrada V_{in} , ocurriendo primero una bifurcación por duplicación de periodo cuando el periodo T tiene un valor aproximado de $288\mu s$ y posteriormente una transición a una órbita cuasiperiódica o caótica cuando el periodo T tiene un valor aproximado de $360\mu s$.

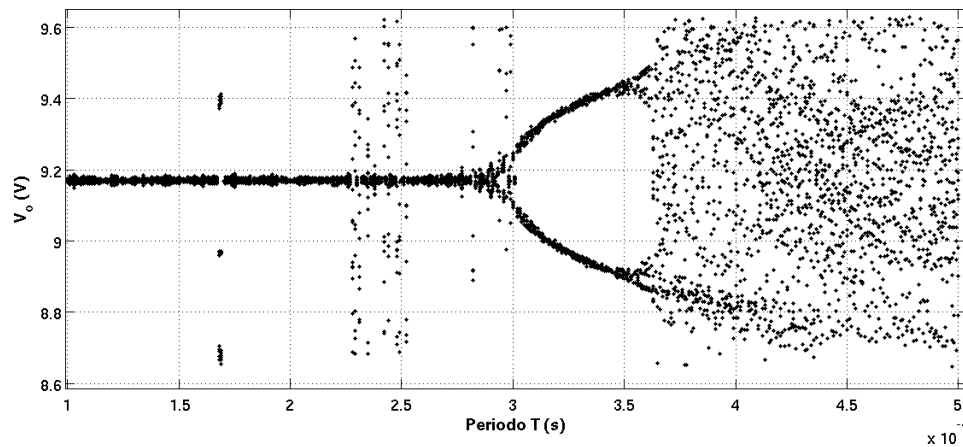
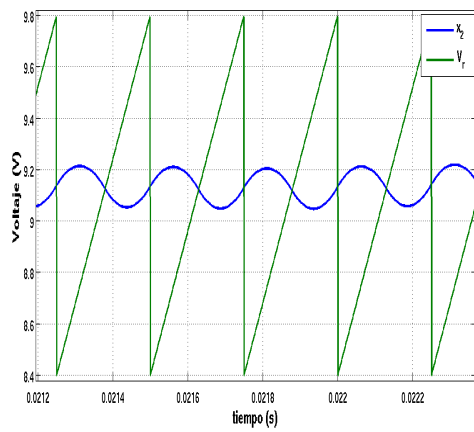
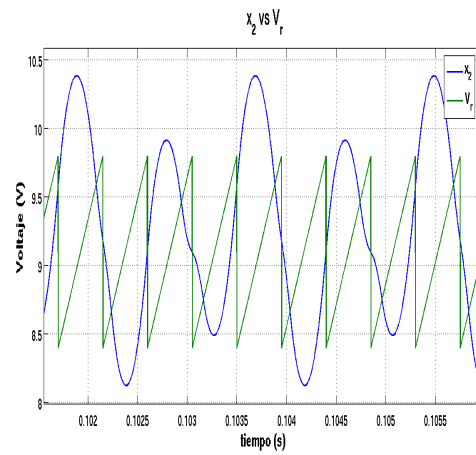


Figura 30: **Diagrama de bifurcación que considera el periodo T de la señal de modulación V_r como parámetro de bifurcación.**

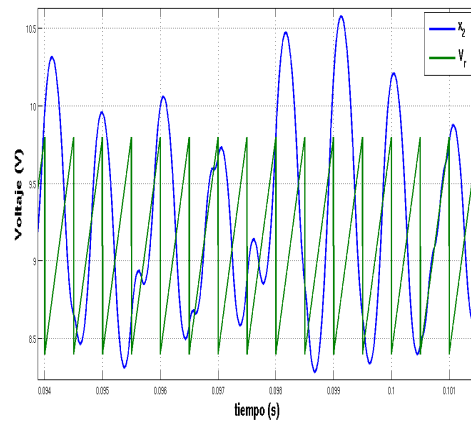
Para T igual a $250\mu s$, $450\mu s$ y $500\mu s$, las gráficas del retrato de fase muestran órbitas 1-, 2-periodicas y caóticas del convertidor buck. La forma de la señal en el tiempo se muestra en la figura 31 para cada valor de T y la figura 32 su retrato de fase correspondiente.



(a)



(b)



(c)

Figura 31: Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 250 \mu s$, (b) $T = 450 \mu s$, (c) $T = 500 \mu s$.

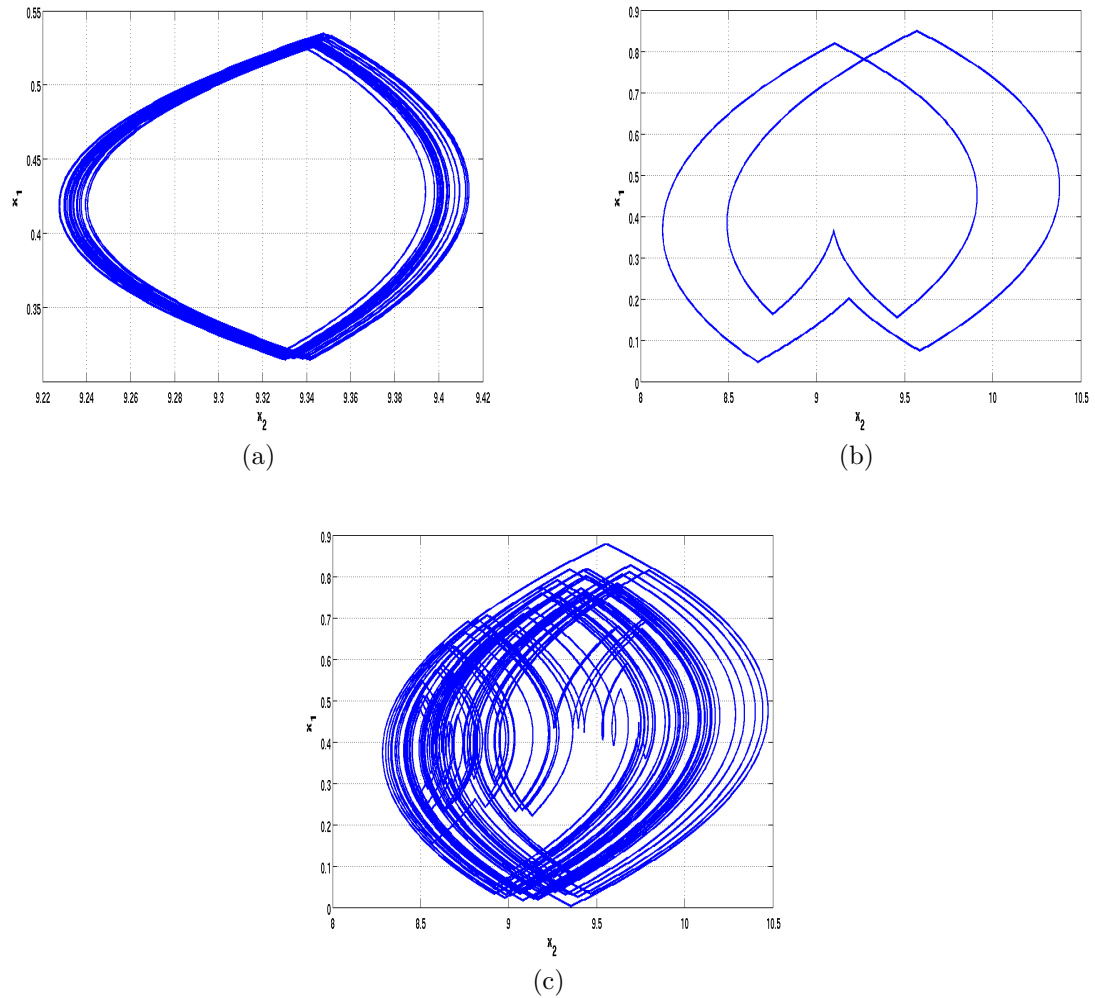


Figura 32: Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($T = 250\mu s$), (b) 2-periódicas ($T = 450\mu s$) y (c) caóticas ($T = 500\mu s$).

Para ilustrar que el convertidor buck presenta órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas, como se muestra en la figura 31, en la figura 33 se muestra el espectro de la tensión del capacitor considerando el periodo T con los valores de $250\mu s$, $450\mu s$ y $500\mu s$. En la figura 33a se muestra el espectro de x_2 para $T = 250\mu s$. Se observa que se presenta una sola armónica, a la frecuencia de 4kHz. El espectro de x_2 para $T = 450\mu s$, se muestra en la figura 33b, donde se observa la armónica a la frecuencia de 2.22kHz, así como una nueva armónica a la frecuencia de 1.11kHz. Finalmente en la figura 33c se muestra el

espectro de x_2 cuando $T = 500\mu s$. En este espectro se observa claramente que el nivel de las demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que no se puede decir que se trate de una órbita 2-periódica y que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

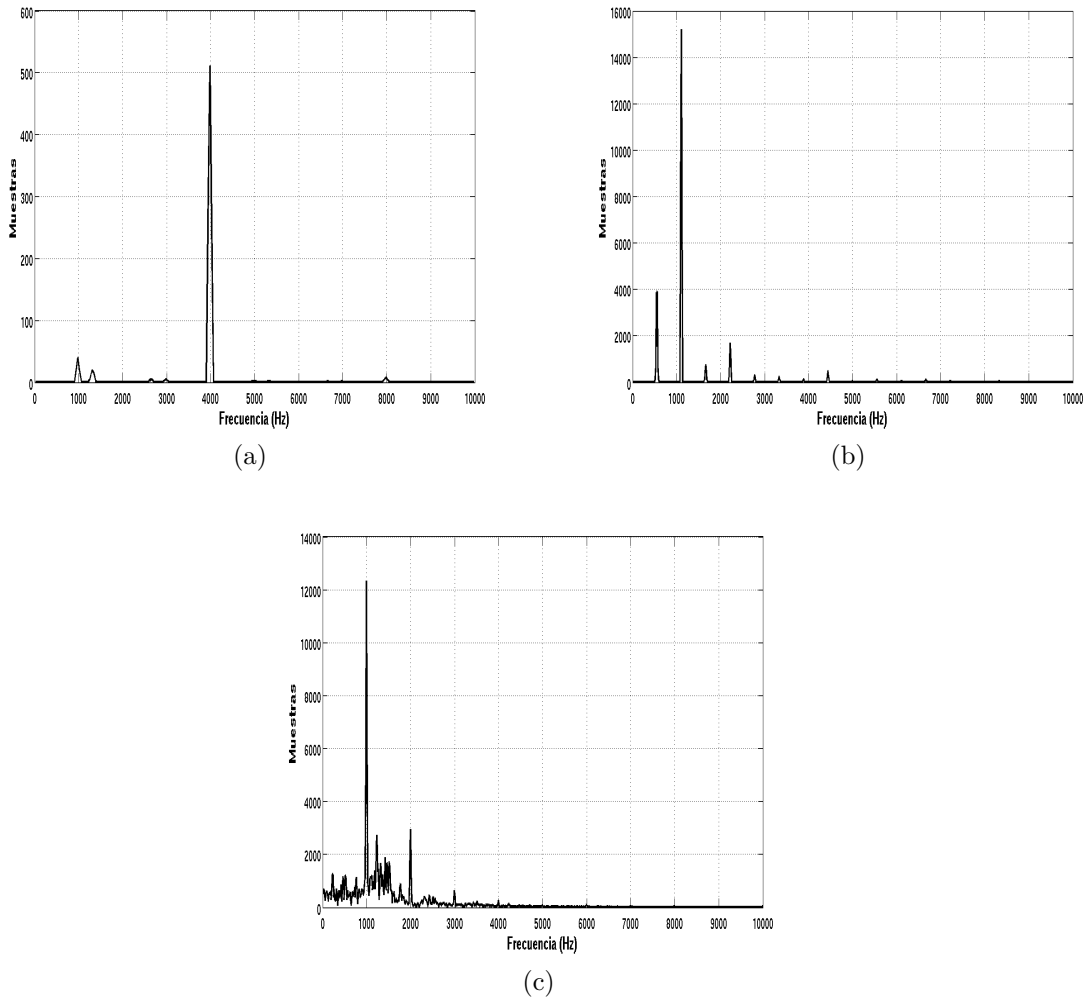


Figura 33: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $T = 250\mu s$, b) $T = 450\mu s$ y c) $T = 500\mu s$.**

Al observar el comportamiento del convertidor buck para $T = 500\mu s$ la figura 34 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina y deslizamiento.

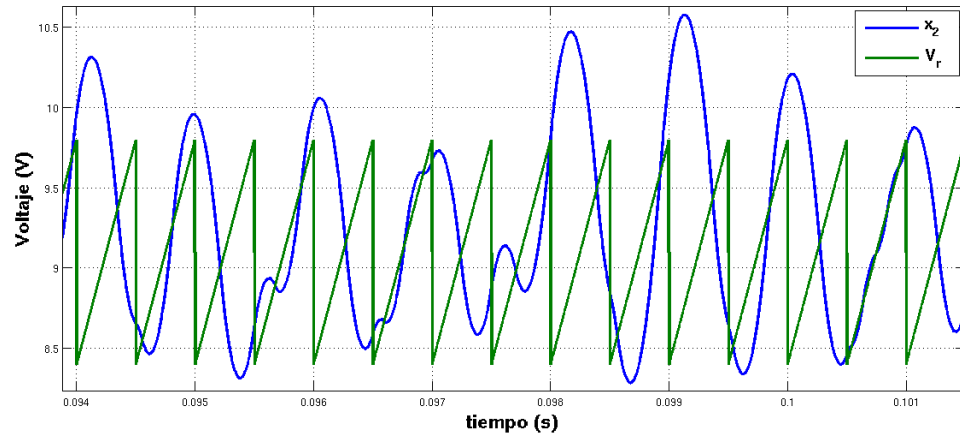


Figura 34: **Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor “buck” para $T = 500\mu s$.**

En la figura (35) para el periodo $T = 500\mu s$, se puede observar la propiedad de transitividad topológica como se observó cuando la tensión de entrada V_{in} se usó como parámetro de bifurcación, propiedad de los sistemas en régimen caótico. En la figura (35), el mapa A-conmutaciones muestra líneas horizontales, como en el caso de la tensión de entrada V_{in} usada como parámetro de bifurcación, que indica la presencia de movimiento deslizante.

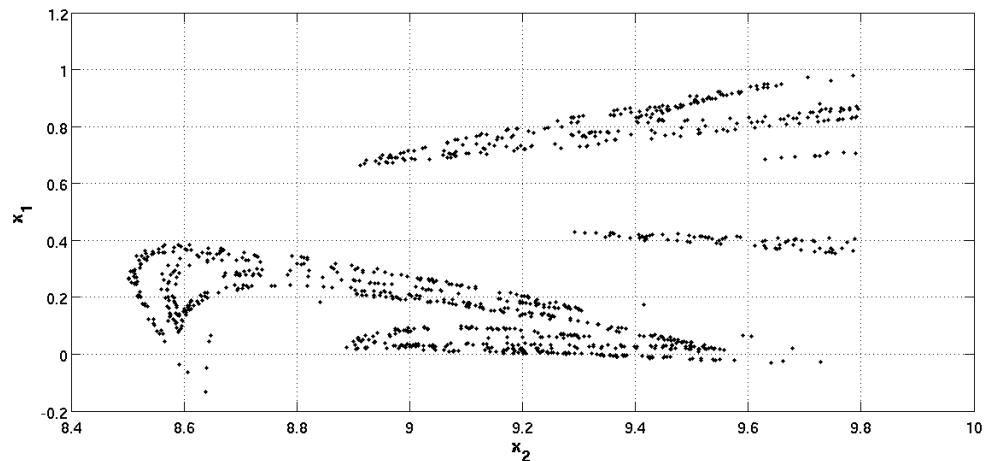


Figura 35: **Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_2 .**

Al observar la figura 34, la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 9.787$ y

$x_2 = 0.813$. Entonces, al linealizar alrededor de este punto se tiene que

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1.00000000000306 & 0.999000499842398 \\ 1.11224776217498 & 0.995176082703475 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1.00000000185066 & 0.905742709568735 \\ 37493.2011786034 & 0.619573838842011 \end{bmatrix}.$$

Al calcular los valores propios de N_1 y N_2 , se obtienen los siguientes cuatro valores propios

$$\lambda_{a1} = 2.05169519335724, \quad \lambda_{a2} = -0.0565191106507046,$$

$$\lambda_{b1} = 185.090089196337, \quad \lambda_{b2} = -183.470515355644.$$

El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es impar ($\sigma_1^- + \sigma_2^- = 1$). Por lo tanto se espera una duplicación de periodo, y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par se tiene persistencia del punto fijo en la colisión de frontera, y $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar se tiene que la órbita de periodo-2 desaparece.

Ahora, al calcular τ_1 , δ_1 y τ_2 , δ_2 de N_1 y N_2 , respectivamente, se obtienen los siguientes valores

$$\tau_1 = 1.99517608270653, \quad \delta_1 = -0.115959987654876,$$

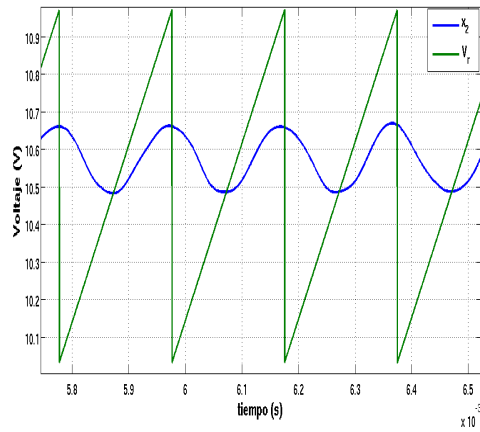
$$\tau_2 = 1.61957384069267, \quad \delta_2 = -33958.574052074$$

y con ellos se tienen los siguientes resultados: Los valores propios de N_1 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_1 . Los valores propios de N_2 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no

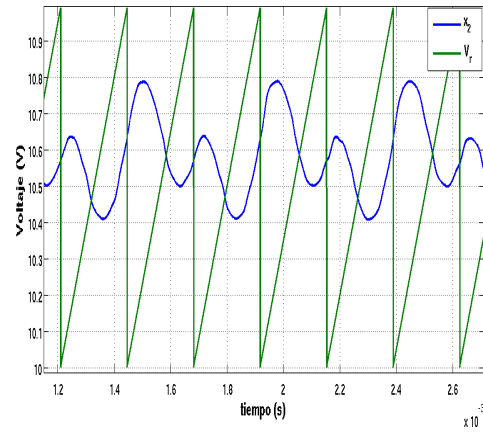
puede ser atractor o silla de montar regular en S_2 . Al aplicar los teoremas 3.4 y 3.5 de la sección 3.2 y los resultados en (Banerjee y Grebogi, 1999) se verifica la existencia de un atractor el cual es caótico y robusto.

4.1.2.2. Resultados experimentales

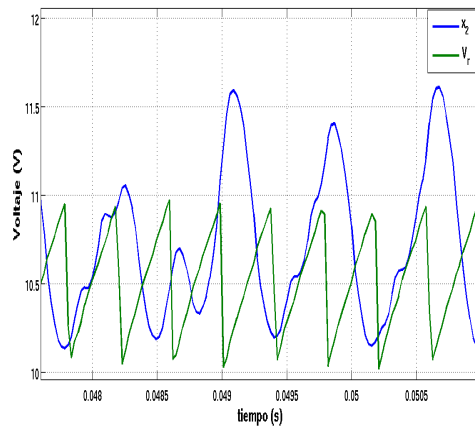
En esta subsección se presentan resultados experimentales para corroborar los comportamientos dinámicos observados en la parte numérica de la subsección anterior, donde el periodo T de la señal de modulación se usa como parámetro de bifurcación. En la figura 36 se muestran la forma de onda en el dominio del tiempo para un comportamiento de periodo-1, periodo-2 y caos, y en la figura 37 se muestra su correspondiente retrato de fase. El parámetro de bifurcación que se usó en la figura 36 y la figura 37 es el periodo T .



(a)



(b)



(c)

Figura 36: Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 199.2\mu s$, (b) $T = 235.7\mu s$, (c) $T = 398\mu s$.

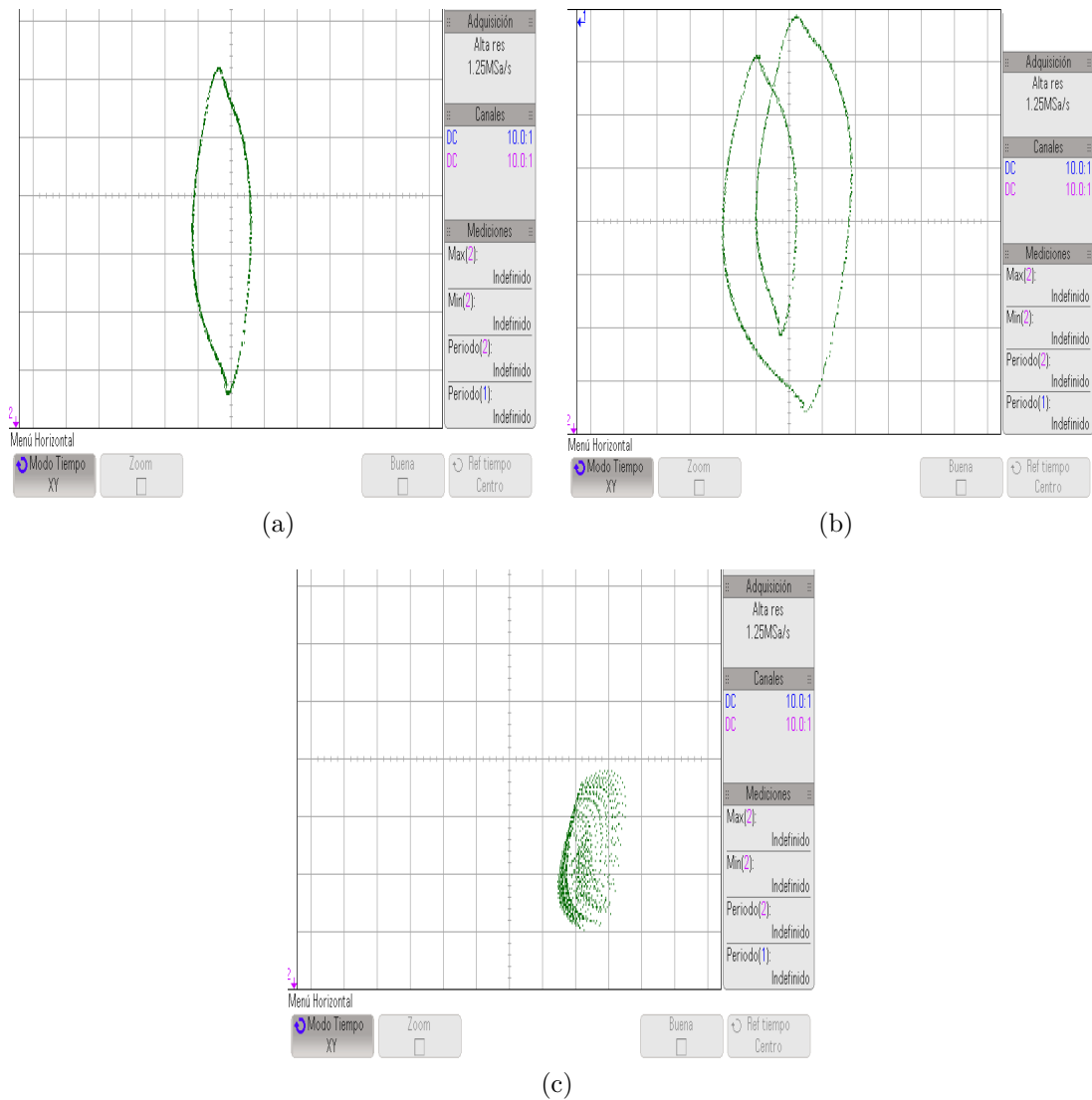


Figura 37: **Retrato de fase del convertidor “buck” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($T = 199.2\mu s$), (b) 2-periódicas ($T = 235.7\mu s$) y (c) caóticas ($T = 398\mu s$).**

Como en la parte numérica, para verificar que el convertidor buck presenta las órbitas que se muestra en la figura 36, en la figura 38 se muestra el espectro de la tensión del capacitor que considera el periodo T con los valores de $199.2\mu s$, $235.7\mu s$ y $398\mu s$. En la figura 38a se muestra el espectro de x_2 para $T = 199.2\mu s$, se observa una sola armónica, a la frecuencia de 5.02 kHz. El espectro de x_2 para $T = 235.7\mu s$, se muestra en la figura 38b, donde se observa la armónica a la frecuencia de 4.24 kHz

, así como una nueva armónica a la frecuencia de 2.12 kHz. Finalmente en la figura 38c se muestra el espectro de x_2 cuando $T = 398\mu s$. En este espectro se observa que el nivel de las demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

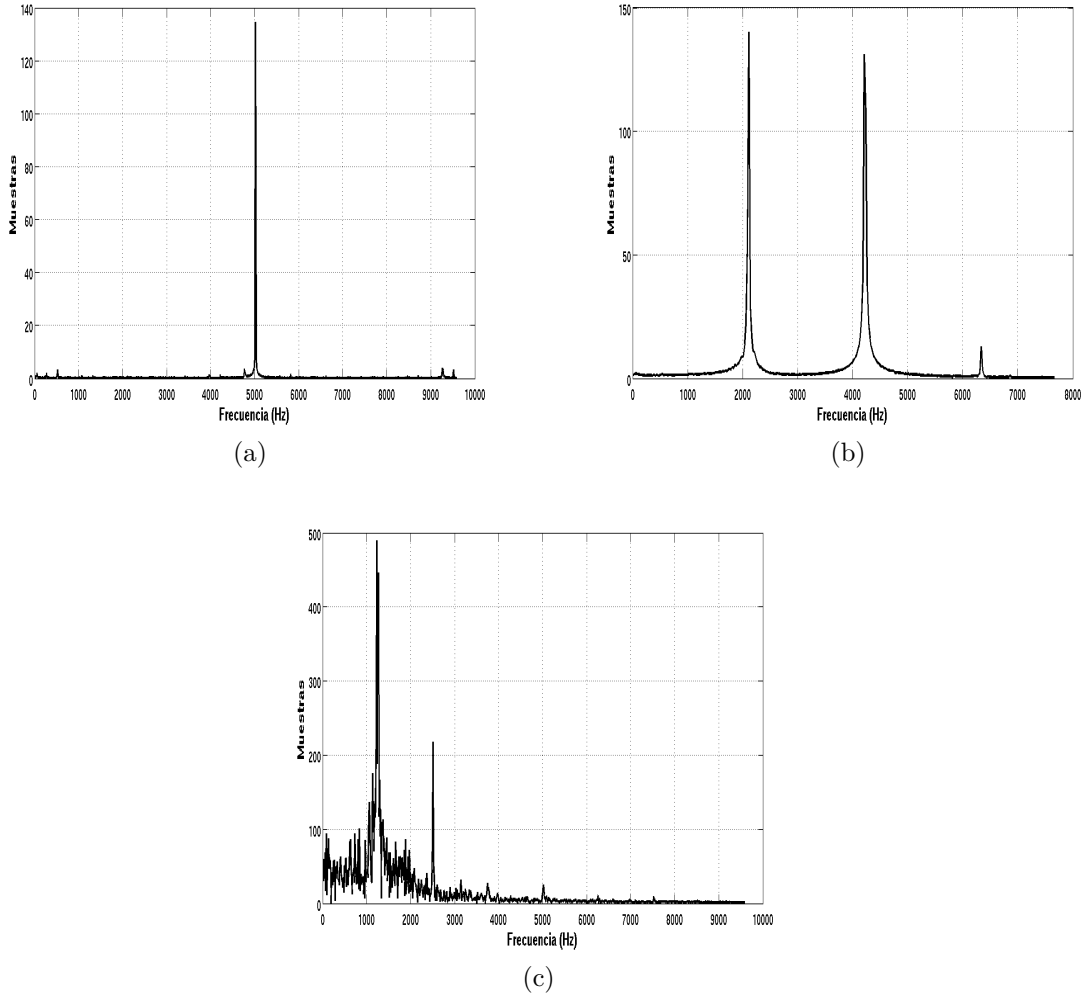


Figura 38: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $T = 199.2\mu s$, b) $T = 235.7\mu s$ y c) $T = 398\mu s$.**

Al igual que en el análisis numérico nos enfocaremos en el comportamiento del convertidor buck para $T = 398\mu s$, donde la figura 39 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina y deslizamiento.

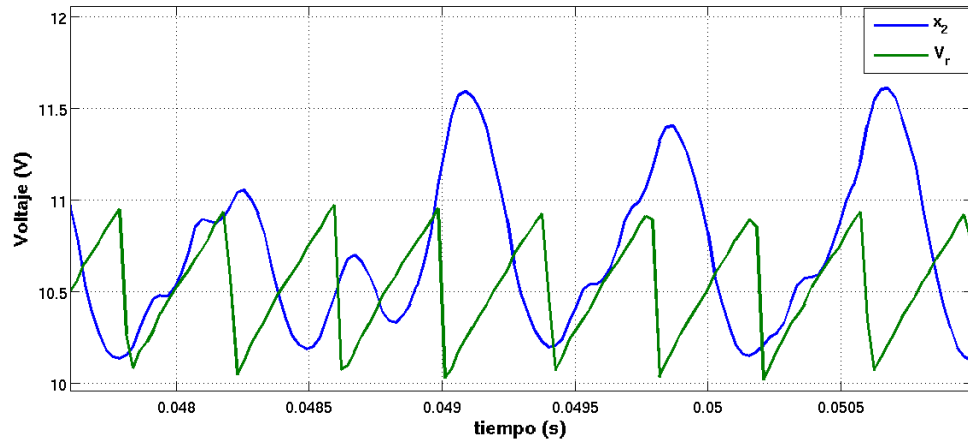


Figura 39: **Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor “buck” para $T = 398\mu s$.**

Al observar la figura 39 la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 10.91$ y $x_2 = 0.6047$, y al linealizar alrededor de estos puntos se tiene que

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1.000000000000043 & 0.994017964054269 \\ 1.89325557246521 & 0.971403311911828 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1.00000000003328 & 0.929043236750777 \\ 2514.39433898362 & 0.700543077701702 \end{bmatrix}.$$

Al calcular los valores propios de N_1 y N_2 , se obtienen los siguientes cuatro valores propios

$$\lambda_{a1} = 2.35761072445108, \quad \lambda_{a2} = -0.386207412538816,$$

$$\lambda_{b1} = 49.182491369631, \quad \lambda_{b2} = -47.481948291896.$$

El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es impar ($\sigma_1^- + \sigma_2^- = 1$). Por lo tanto se espera una duplicación de periodo, y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par se tiene persistencia del punto fijo en la colisión de frontera, y $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar se tiene que

la órbita de periodo-2 desaparece.

Ahora, al calcular τ_1 , δ_1 y τ_2 , δ_2 de N_1 y N_2 , respectivamente, se obtienen los siguientes valores

$$\tau_1 = 1.97140331191226, \quad \delta_1 = -0.910526737664013,$$

$$\tau_2 = 1.70054307773498, \quad \delta_2 = -2335.28051207944$$

y con ellos se tienen los siguientes resultados: Los valores propios de N_1 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_1 . Los valores propios de N_2 son reales, no existe órbita espiral y el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_2 . Al aplicar los teoremas 3.4 y 3.5 de la sección 3.2 y los resultados en (Banerjee y Grebogi, 1999) se verifica la existencia de un atractor el cual es caótico y robusto.

4.2. Bifurcación deslizante en el convertidor “buck”.

En la figura 39 se observa que hay movimiento deslizante en el convertidor buck. Para verificar que se da una bifurcación deslizante se verifican las condiciones de la sección 3.3 como sigue:

Primero de (115) y (116) se tiene que

$$F_1 = \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{L} \\ \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{RC} \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{L} + \frac{V_{in}}{L} \\ \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{RC} \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (124)$$

Al usar (124),(118) y (87)

$$\langle \nabla H, F_1 \rangle = -\frac{g_i x_1}{L} + \frac{g_v x_1}{C} - \frac{g_v x_2}{RC} + \gamma x_3, \quad (125)$$

$$\langle \nabla H, F_2 \rangle = -\frac{g_i x_1}{L} + \frac{g_i V_{in}}{L} + \frac{g_v x_1}{C} - \frac{g_v x_2}{RC} + \gamma x_3, \quad (126)$$

$$\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle = \frac{g_i V_{in}}{L}, \quad (127)$$

$$H_u(x) = -\left(\frac{f_1}{\frac{g_i V_{in}}{L}} + 1 \right), \quad (128)$$

$$f_1 = \frac{-2g_i x_1}{L} + \frac{2g_v x_1}{C} - \frac{2g_v x_2}{RC} + 2\gamma x_3 + \frac{g_i V_{in}}{L}. \quad (129)$$

Cuando se usa el modo de control de tensión con $g_i = 0$ las condiciones de la sección 3.3 no pueden ser aplicadas ya que la ecuación (85) no se cumple, pero si se considera $g_i > 0$ se puede aplicar el método propuesto en la sección 3.3 como sigue:

De la figura 39 se tiene que el punto de bifurcación se da en los puntos $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0.4932, 11.4, 0.05256)$ y de (128) $H_u(x) = 14.89$ con $g_i = 0.01$, con lo cual no se cumplen las condiciones para la bifurcación deslizante mostradas en la sección 3.3.

Ahora concidérese g_i con un valor tal que de la ecuación 128 se tenga que

$$\frac{g_i V_{in}}{L} \gg f_1 \rightarrow \frac{f_1}{\frac{g_i V_{in}}{L}} < 1,$$

entonces, de la ecuación 128 $H_u(x) = -1$, con lo que se cumplen las tres pimeras condiciones de la tabla 1. Ahora con los valores de la tabla 3 y $g_v = 1$ y $\gamma = 1.4$ se tiene que

$$\nabla H = \begin{bmatrix} g_i & 1 & 1.4 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -98.64 \\ -531.528 \\ 0.05256 \end{bmatrix}, \frac{\partial F_1}{\partial x} = \begin{bmatrix} -200 & 0 & 0 \\ 21276.59 & -967.11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con los valores anteriores de ∇H , F_1 y $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ se tiene que

$$\left\langle \nabla H_u, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right\rangle = g_i * 19728 - 1584676.741. \quad (130)$$

Ya que $g_i > 0$ y se supone con un valor muy grande, entonces la ecuación 130 se puede decir que

$$\left\langle \nabla H_u, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right\rangle = g_i * 19728 - 1584676.741 > 0, \quad \text{si } g_i > 80.3262.$$

Con lo que se cumplen las condiciones de la tabla 1 para que en el convertidor buck se presente una bifurcación deslizante, ya sea del tipo de deslizamiento I o de roce-deslizamiento.

4.3. Parametros de rendimiento o perfil de armónicas

La tensión y la corriente en la entrada y en la salida de las terminales de un convertidor, en general, tiene una forma no sinusoidal. El perfil de armónicas es la gráfica de la amplitud versus frecuencia para la forma de onda en ca de la tensión, corriente o potencia instantánea. Las siguientes mediciones son usadas para la generalización de la información del perfil de armónicas (#ET631, 2011):

- Promedio

- Valor eficaz
- Rizo pico-pico
- Armónica menor deseada
- Distorsión armónica total
- Factor de potencia
- Factor de cresta

De los parámetros de rendimiento mencionados arriba enfocaremos nuestra atención en los tres últimos (Mohan *et al.*, 2003; #ET631, 2011), es decir, en la distorsión armónica total (DAT), en el factor de potencia (FP) y en el factor de cresta (FC).

- La distorsión armónica total de la corriente de una fuente de tensión sinusoidal es definida como (Mohan *et al.*, 2003):

$$DAT = \sqrt{\frac{I_s}{I_{s1}} - 1}. \quad (131)$$

donde el subíndice “s” y “s1” son el valor eficaz de la forma de onda de la corriente y el valor eficaz de la corriente de la armónica fundamental, respectivamente. El DAT se usa para la forma de onda de tensión y corriente tanto en la entrada como en la salida de un convertidor. Es una medida de la distorsión de una forma de onda y donde el valor deseado debe ser cero.

- El factor de potencia es una medida muy importante del desempeño de un convertidor en electrónica de potencia. El FP es definido como la razón de la potencia

real P_1 que es entregada por la componente fundamental de la tensión y la potencia aparente S :

$$FP = \frac{P_1}{S} = \frac{V_1 I_1 \cos\phi_1}{VI} = \frac{I_{s1}}{I_s} \cos\phi_1. \quad (132)$$

donde V_1 y I_1 son los valores eficaces de la armónica fundamental de la tensión y la corriente respectivamente. Se puede notar de (131) que una distorsión elevada en la forma de onda de la corriente resultará en un pequeño valor de $\frac{I_{s1}}{I_s}$ y por lo tanto en un factor de potencia bajo. La ecuación (132) se puede escribir como

$$FP = \frac{1}{\sqrt{1 + DAT^2}} \cos\phi_1. \quad (133)$$

- A menudo resulta de interés el factor de cresta FC, que resulta una medida del pico de tensión/corriente en comparación con su valor eficaz. Un valor de FC bajo es deseable.

$$\frac{I_{(pico)}}{I_s}. \quad (134)$$

En este trabajo de tesis no se realizó un análisis de los parámetros de rendimiento del convertidor buck y los convertidores de los siguientes capítulos. Pero, de las figuras 20, 22, 26 y 28 se puede observar que cuando el convertidor buck entra en régimen caótico el DAT y el FC aumentan ocasionando que el FP disminuya, lo cual se refleja en un rendimiento pobre o una eficiencia baja del convertidor de potencia.

4.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se mostró que el convertidor buck exhibe una amplia variedad de dinámicas complejas, diferentes todas ellas, en función del parámetro de bifurcación. Resultó de gran ayuda el uso del mapeo A-conmutaciones para distinguir el movimiento deslizante que se crea en el convertidor buck bajo ciertas condiciones. Se corroboraron los resultados numéricos que se muestran en la literatura revisada y se confirmaron experimentalmente.

Debido a que se presentan órbitas periódicas con características particulares, el análisis del convertidor tiene que llevarse a cabo con varias herramientas para poder realizar un estudio completo. Se verificó que la teoría desarrollada para sistemas dinámicos discontinuos puede ser aplicada al convertidor buck, con el fin de evidenciar su comportamiento complejo y ser usada como una herramienta analítica. De los resultados importantes se puede mencionar los fenómenos discontinuos como lo son el roce y deslizamiento mostrados cuando el convertidor entra en régimen caótico. Otro resultado importante es la confirmación de la interrupción por ciclo de la señal de modulación V_r , presente en el comportamiento caótico del convertidor.

En los dos casos de estudio se observa una dinámica compleja en el convertidor buck y aunque no se realizó un análisis de los parámetros de rendimiento del convertidor es claro que al variar un parámetro de diseño, originando una dinámica caótica, su desempeño y eficiencia se verá disminuido. Sin embargo, como el comportamiento dinámico que presenta el convertidor está dentro de los límites de diseño, en la práctica resulta difícil detectar la dinámica compleja (Miranda y Alvarez, 2009).

Capítulo 5

Dinámica compleja del convertidor de Ćuk

5.1. Introducción

El convertidor de Ćuk, denominado así en honor a su inventor Slobodan Ćuk, posee diversas semejanzas con el convertidor buck-boost. Así, el convertidor de Ćuk ofrece una tensión de salida negativa con respecto a la tensión de entrada. Además, esta tensión de salida puede ser mayor o menor que el de entrada. La figura 40 muestra el esquema de un convertidor de Ćuk. El capacitor C_1 actúa como elemento almacenador y transfiere la energía desde la entrada a la salida. En el convertidor buck-boost este papel lo realiza el inductor. La tensión promedio en C_1 es mayor que la tensión promedio de entrada y de salida. Asimismo, la capacidad del capacitor C_1 se considera bastante elevada, de forma que la tensión permanece prácticamente constante, sin apenas variación respecto a su valor promedio, aunque almacene y transfiera energía desde la entrada a la salida. La principal diferencia entre este convertidor y los circuitos clásicos radica en la utilización de un capacitor en lugar de un inductor para el almacenamiento de energía durante una parte del ciclo y su posterior entrega a la carga durante el resto del mismo. El uso de un capacitor permite obtener una mejor relación entre la energía almacenada y el tamaño o peso que los circuitos convertidores básicos tradicionales (elevador/reductor, reductor o buck, y elevador o boost). Sin embargo pone muchas mayores exigencias sobre este capacitor, lo que redundará en un elemento de mayor costo debido a su fabricación.

El funcionamiento del convertidor de Ćuk es el siguiente: Cuando el interruptor S está abierto el capacitor C_1 se carga, por un lado, a través de la fuente de entrada, y

por otro, a través de la energía procedente del inductor L_1 que está sometido a una tensión negativa ($V_{C_1} > V_D$). Esta descarga origina una disminución de la corriente i_{L_1} . Asimismo, la energía almacenada en el inductor L_2 se transfiere a la carga, por lo que la corriente i_{L_2} también disminuye. Cuando el interruptor S se cierra la tensión V_{C_1} causa el apagado del diodo al quedar inversamente polarizado. Como, el capacitor C_1 se descarga a través del interruptor, transfiriendo energía a la carga y al inductor L_2 . Por tanto, la corriente i_{L_2} aumenta en esta fracción del periodo. Además, la alimentación suministra energía al inductor L_1 , es decir, i_{L_1} también aumenta.

Como pasa también en otros convertidores (v.g., en el buck, boost, buck-boost) el convertidor de Ćuk puede trabajar tanto en modo continuo como en modo discontinuo de corriente. Además, a diferencia de otros convertidores, éste también puede operar en modo de tensión discontinua (i.e., la tensión en el capacitor cae a cero durante el ciclo de conmutación).

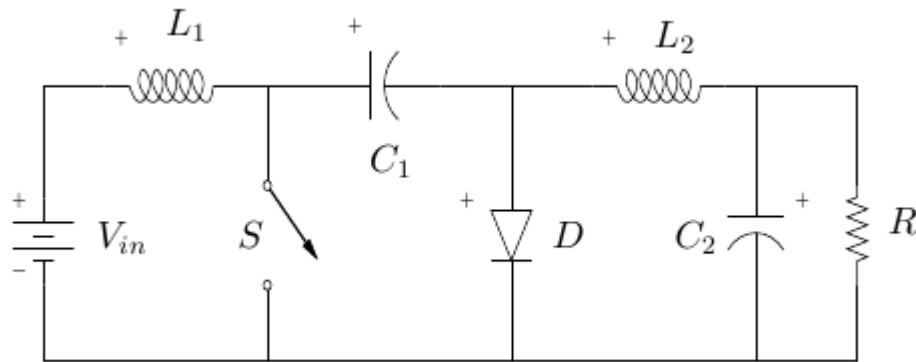


Figura 40: **Esquema básico del convertidor de Ćuk.**

Las ecuaciones diferenciales que modelan el convertidor de Ćuk son

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_{L_1} &= -\frac{1}{L_1} (1 - u(t)) v_{C_2}(t) + \frac{V_{in}}{L_1}, \\
 \dot{i}_{L_2} &= \frac{1}{L_2} v_{C_2}(t) u(t) - \frac{1}{L_2} v_{C_1}(t), \\
 \dot{v}_{C_1} &= \frac{1}{C_1} i_{L_2}(t) - \frac{1}{RC_1} v_{C_1}(t), \\
 \dot{v}_{C_2} &= \frac{1}{C_2} i_{L_1}(t) (1 - u(t)) - \frac{1}{C_2} i_{L_2} u(t).
 \end{aligned} \tag{135}$$

Al tomar como variables de estado $x_1 = i_{L_1}(t)$, $x_2 = i_{L_2}(t)$, $x_3 = v_{C_1}(t)$ y $x_4 = v_{C_2}(t)$ la ecuación (135), en forma de ecuaciones de estado y matricial, queda como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(1-u(t))}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{u(t)}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{(1-u(t))}{C_2} & -\frac{u(t)}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{136}$$

en donde la entrada de control $u(t)$ es

$$u(t) = H(\sigma(x, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(x, t) > 0, \\ 0 & \text{si } \sigma(x, t) \leq 0, \end{cases} \tag{137}$$

$$\sigma(x, t) = V_c - V_r, \quad V_c = g_i(x_1 + x_2) + g_v x_4, \quad V_r = V_l + (V_u - V_l) * \text{mod}\left(\frac{t}{T}, 1\right). \tag{138}$$

En las siguientes dos subsecciones presentaremos el modelo del convertidor de Ćuk visto como sistema de Filippov y como sistema complementario.

5.1.0.3. Modelado del convertidor de Ćuk con sistema de Filippov

Ahora si tomamos como variable de estado $x_5 = t$, donde t es la variable de tiempo, entonces la ecuación (136) la podemos reescribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(1-u(t))}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{u(t)}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{RC_1} & 0 & 0 \\ \frac{(1-u(t))}{C_2} & -\frac{u(t)}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (139)$$

La ecuación (139) podemos expresarla como

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, t) & H(x) < 0, \\ F_2(x, t) & H(x) \geq 0, \end{cases} \quad (140)$$

en donde

$$F_1(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{RC_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (141)$$

$$F_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{RC_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (142)$$

Para este sistema tenemos que la superficie de discontinuidad es

$$\Sigma := \{H(x) = 0\} = \{V_r - V_c\}, \quad (143)$$

$$H_x(x) = \begin{bmatrix} g_i & g_i & 0 & g_v & V_u - V_l \end{bmatrix}. \quad (144)$$

5.1.0.4. Modelado del convertidor de Ćuk con sistemas complementarios

Para el modelado del convertidor de Ćuk como sistema complementario se usan como variables de estado las corrientes en los inductores y las tensiones en los capacitores, i.e., $x_1 = i_{L1}$, $x_2 = i_{L2}$, $x_3 = v_{C1}$, $x_4 = v_{C2}$. Las ecuaciones en variables de estado son

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L_1}V_{in} - \frac{1}{L_1}x_3 - \frac{1}{L_1}v_D, \quad (145)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L_2}v_D - \frac{1}{L_2}x_4, \quad (146)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{C_1}x_1 - \frac{1}{C_1}i_S, \quad (147)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{C_2}x_2 - \frac{1}{C_2R}x_4. \quad (148)$$

Se puede formular como un SCC con

$$u_1 = -v_D \rightarrow y_1 = i_D = x_1 - x_2 - u_2,$$

$$u_2 = i_S \rightarrow y_2 = v_S = x_3 - u_1,$$

en notación de matriz

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + EV_{in}, \\ y = Cx + Du + FV_{in}, \\ 0 \leq y_1 \perp u_1 \geq 0, \\ y_2 \perp u_2 \geq 0, \end{cases} \quad (149)$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En las siguientes subsecciones se muestran los resultados numéricos y experimentales de la dinámica del convertidor Ćuk. Como se menciona en el capítulo anterior, no se consideran los elementos de protección normalmente utilizados en la práctica y el control que se utiliza es un control MAP.

5.1.1. Variación del periodo T de la señal de modulación V_r .

En esta subsección se estudia el cambio en la dinámica del convertidor de Ćuk cuando ocurren variaciones en el periodo T de la señal de modulación V_r . El intervalo de trabajo que se utiliza está basado en los ejemplos de la literatura revisada, como en el capítulo anterior.

5.1.1.1. Resultados numéricos

El convertidor de Ćuk es simulado con los parámetros mostrados en la tabla 5. Las simulaciones se realizan usando el formalismo complementario. Es importante mencionar que se usa el modo de control por tensión, esto es de la ecuación (138) $g_i = 0$ y $g_v = -1$.

Tabla 5: Parámetros usados para la simulación del convertidor de Ćuk.

$R(\Omega)$	$L_1(mH)$	$C_1(\mu F)$	$L_2(mH)$	$C_2(\mu F)$
22	2	47	3	47

En la figura 41 se puede observar el diagrama de bifurcación cuando el periodo T es usado como parámetro de bifurcación. Este diagrama se construyó con un mapeo

llamado estroboscópico, en el cual se toma la tensión del capacitor cada periodo T . De la figura 41 se observa que para diferentes valores de T el diagrama muestra órbitas n -periódicas, con $n = 1, 2$, así como regiones donde se llena densamente, lo cual puede ser un indicador de la presencia de órbitas cuasiperiódicas o caóticas. Además, se observa que las bifurcaciones que presenta el convertidor se dan primero por duplicación de periodo y después a una órbita cuasiperiódica o caótica.

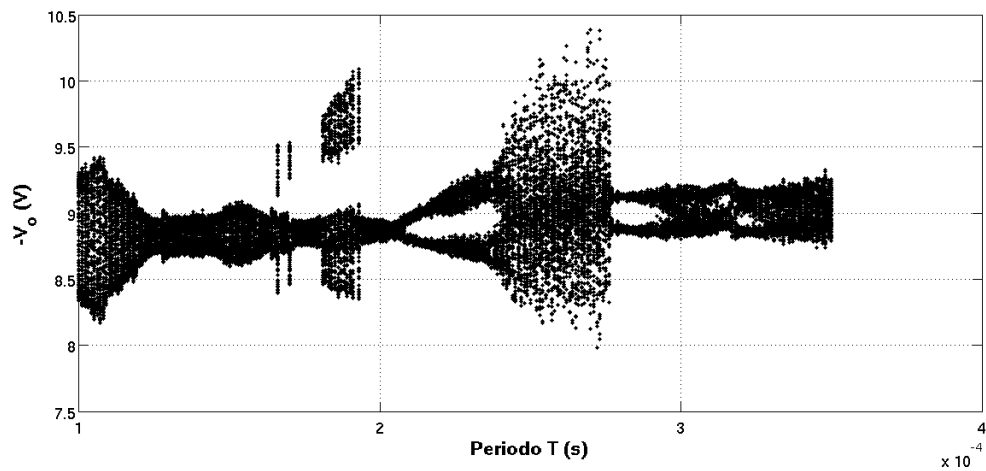
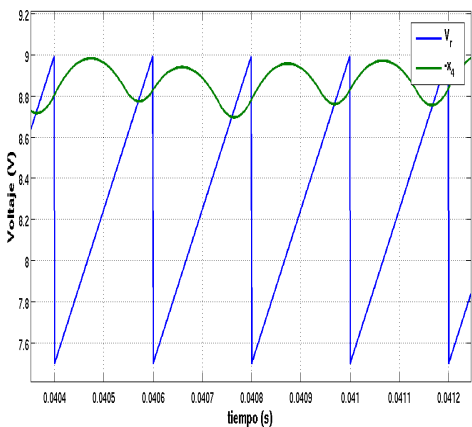


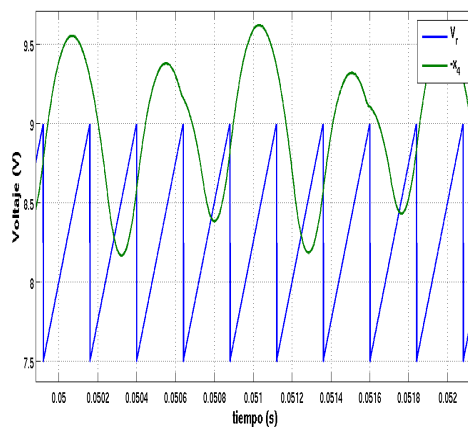
Figura 41: **Diagrama de bifurcación que considera el periodo T como parámetro de bifurcación.**

El primer cambio, conocido como duplicación de periodo, en la dinámica del convertidor que muestra el diagrama de bifurcación de la figura 41 ocurre cuando el periodo T tiene un valor aproximado de $200\mu s$. La transición de una órbita 2-periódica a una órbita caótica se da cuando el periodo T es aproximadamente igual a $250\mu s$.

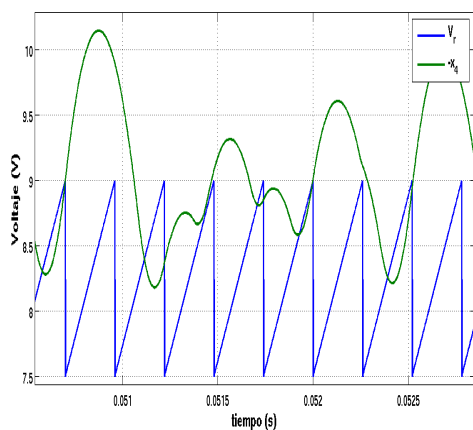
Para T igual a $200\mu s$, $240\mu s$, y $260\mu s$, las gráficas del retrato de fase muestran órbitas 1-, 2-periódicas, y comportamiento caótico del convertidor Čuk. La forma de la señal en el tiempo se muestra en la figura 42 para cada valor de T y la figura 43 su retrato de fase correspondiente.



(a)



(b)



(c)

Figura 42: Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 200 \mu s$, (b) $T = 240 \mu s$ y (c) $T = 260 \mu s$.

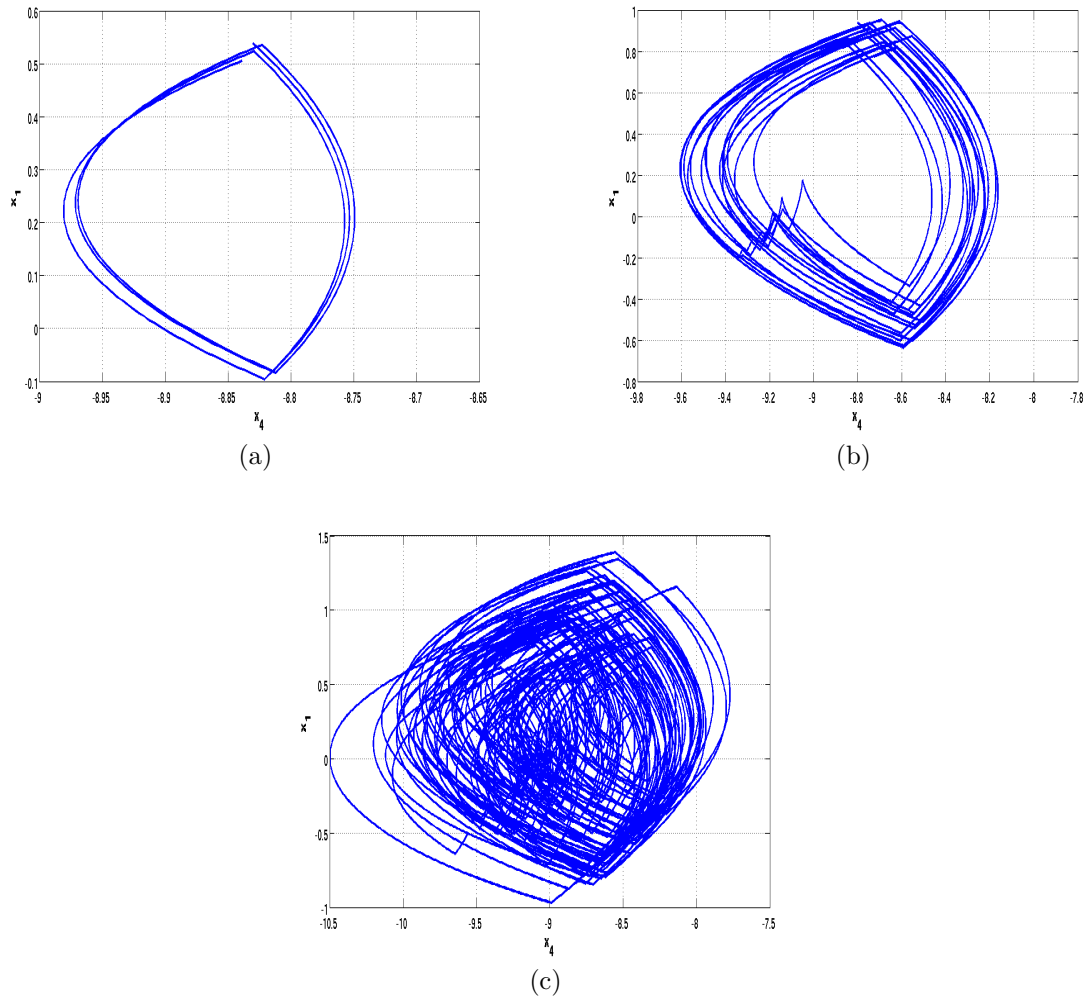


Figura 43: Retrato de fase del convertidor de Ćuk que muestra órbitas: (a) 1-periódica ($T = 200\mu$), (b) 2-periódica ($T = 240\mu$) y (c) caótica ($T = 260\mu$).

Para ilustrar que el convertidor de Ćuk presenta órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas, como se muestra en la figura 42, en la figura 44 se muestra el espectro de la tensión del capacitor C_2 , estado x_4 , que considera el periodo T con los valores de $200\mu s$, $240\mu s$ y $260\mu s$. En la figura 44a se muestra el espectro de x_4 para $T = 200\mu s$, se observa que se presenta una sola armónica, a la frecuencia de 5kHz. El espectro de x_4 para $T = 240\mu s$. Se muestra en la figura 44b, donde se observa la armónica a la frecuencia de 4.166kHz, así como una nueva armónica a la frecuencia de 2.083kHz. Finalmente

en la figura 44c se muestra el espectro de x_4 cuando $T = 260\mu s$. En este espectro se observa claramente que el nivel de las demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que no se puede decir que se traté de una órbita 2-periódica y que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

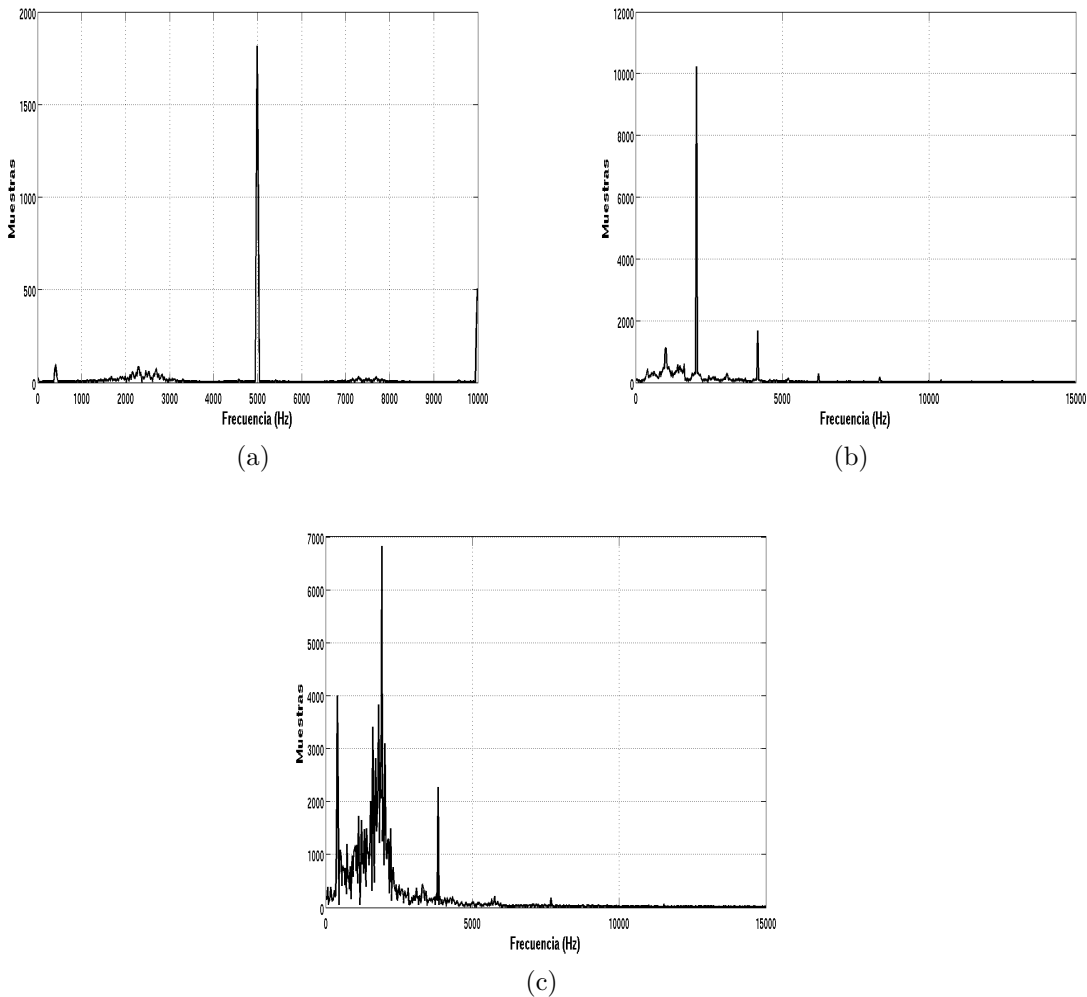


Figura 44: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_4 , con: a) $T = 200\mu s$, b) $T = 260\mu s$ y c) $T = 260\mu s$.**

Al observar con detalle el comportamiento del convertidor de \acute{C} uk para $T = 260\mu s$, la figura 45 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina y deslizamiento, también se puede observar que la tensión de salida salta algunos ciclos (i.e., no hay conmutación

en un ciclo).

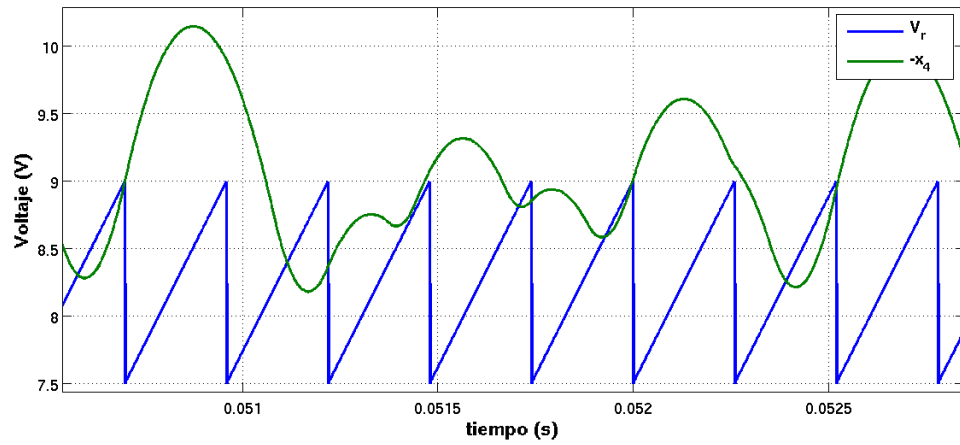


Figura 45: **Colisión de esquina y deslizamiento en el convertidor de Ćuk para $T = 260\mu$.**

En la figura 46 se muestra el mapeo A-conmutaciones que considera que el periodo T tiene un valor de $260\mu s$. Se observa que la figura formada no corresponde a una curva cerrada o un conjunto de puntos aislados. La complejidad de la figura que se forma depende del atractor que describa la órbita caótica. Una propiedad que tienen los sistemas en régimen caótico, llamada transitividad topológica, se puede observar en la figura 46.

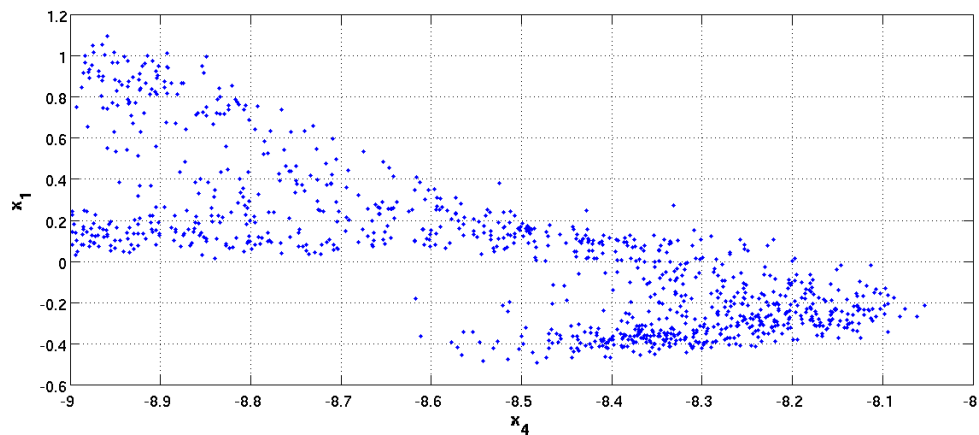


Figura 46: **Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_4 .**

De acuerdo con la teoría de colisión de frontera presentada en la sección 3.2, las bifurcaciones puede ser analizadas al examinar los valores propios del punto fijo de colisión de frontera antes y después de la colisión de frontera. Si τ_1 y δ_1 son la traza y determinante de la matriz jacobiana en la región S_1 inmediatamente antes de la colisión de frontera, y τ_2 y δ_2 son aquellos en la región S_2 inmediatamente después de la colisión de frontera, entonces cualquier mapa diferenciable por tramos se puede reducir a una forma normal en alguna pequeña vecindad del punto periódico del cruce de frontera. Al observar la figura 45 la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 0.689$, $x_2 = -0.7756$, $x_3 = 28.98$ y $x_4 = -8.987$. Entonces, al linealizar alrededor de este punto se tiene que

$$x \mapsto \begin{cases} N_1 x + M\mu, & \text{si } C^T x < 0, \\ N_2 x + M\mu, & \text{si } C^T x > 0, \end{cases} \quad (150)$$

en donde

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.878095430919981 \\ 1 & 1 & 0.916982705595648 & 1 \\ 1 & 252.627202367887 & 0.777671813785234 & 1 \\ 252.627202367887 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1.0000000000000008 & 0.9999999999999996 & 1 \\ 1 & 0.9999999999999921 & & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Al seguir el método introducido en la sección 3.2, se calculan los valores propios de N_1 y N_2 , obteniendo los siguientes valores propios

$$\lambda_{a1} = 23.8825115944751, \lambda_{a2} = -0.0542758762331941 + 5.08211953519549i,$$

$$\lambda_{a3} = -0.0542758762331941 - 5.08211953519549i, \lambda_{a4} = -19.9962880282235,$$

$$\lambda_{b1} = 4, \lambda_{b2} = -9.00684455674383e - 16 + 8.92912572611541e - 15i,$$

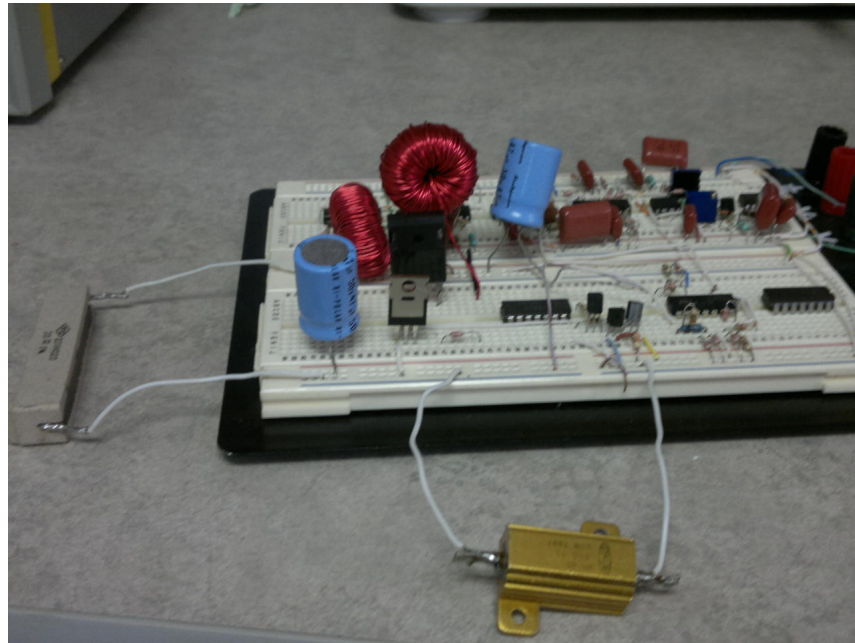
$$\lambda_{b3} = -9.00684455674383e - 16 - 8.92912572611541e - 15i, \lambda_{b4} = -1.06466678366858e - 15.$$

El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es impar ($\sigma_1^- + \sigma_2^- = 1$). Por lo tanto ocurre duplicación de periodo, y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par se tiene persistencia de punto fijo en la colisión de frontera, y $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar la órbita de periodo-2 desaparece. Existe un atractor el cual es caótico y robusto.

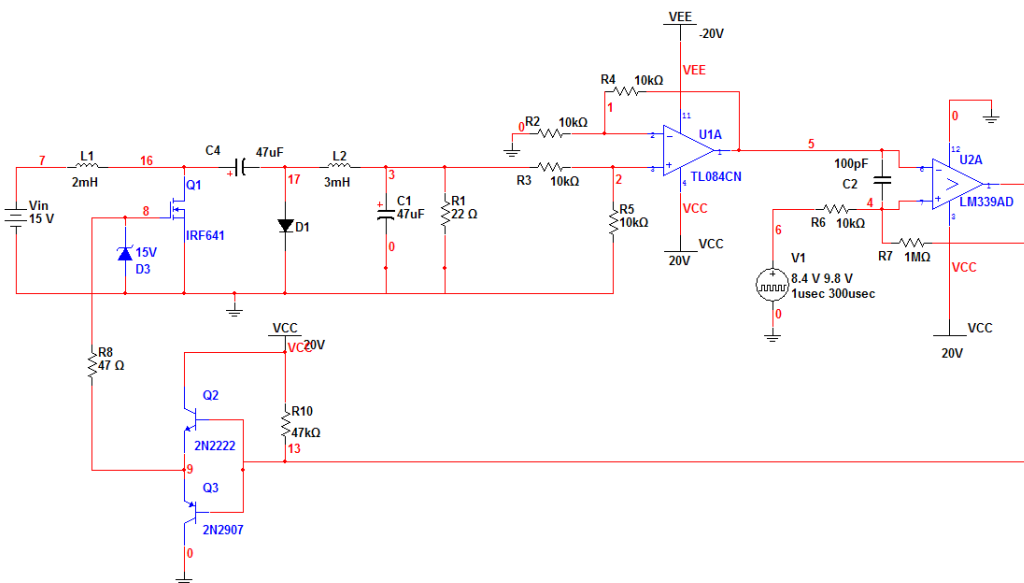
5.1.1.2. Resultados experimentales

Para la parte experimental se tomaron los parámetros de la tabla 5 y se implementó el convertidor Ćuk como se muestra en la figura 47. El circuito de potencia es el convencional, usa principalmente un transistor MOSFET de potencia IRF641 (Canal-N) y un diodo de potencia de respuesta rápida. Se utiliza un generador de señales para producir la rampa diente de sierra, con lo que se puede variar su frecuencia y amplitud. La señal diente de sierra se alimenta a un comparador rápido (LM339) con una configuración de histéresis, cuya salida es conectada a un circuito amplificador en contrafase conformado por los transistores 2N2222 y 2N2907 para controlar la conmutación del MOSFET. La otra entrada del comparador es alimentada por un amplificador operacional (TL084) que toma la tensión del capacitor C_1 (V_o).

Se usó como parámetro de bifurcación el periodo T de la señal de modulación V_r . En la figura 48 se muestran la forma de onda en el dominio del tiempo para órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas, y en la figura 49 se muestra su correspondiente retrato de fase.

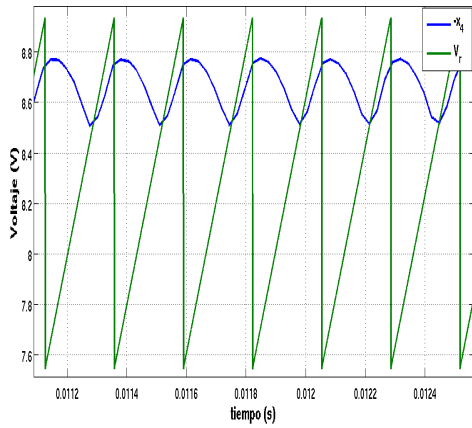


(a)

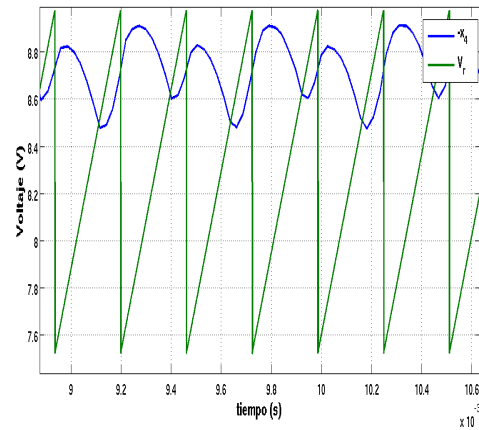


(b)

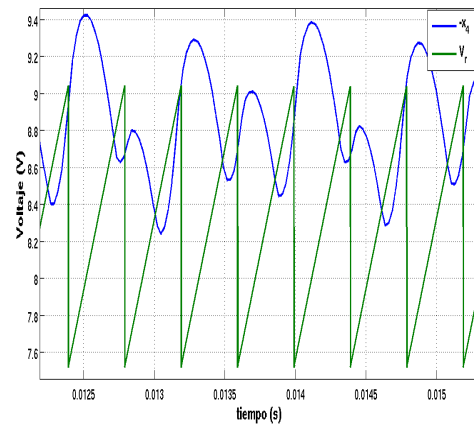
Figura 47: a) Fotografía del convertidor Ćuk implementado en tablilla de prueba y b) circuito.



(a)



(b)



(c)

Figura 48: **Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $T = 231\mu s$, (b) $T = 262.5\mu s$ y (c) $T = 399.7\mu s$.**

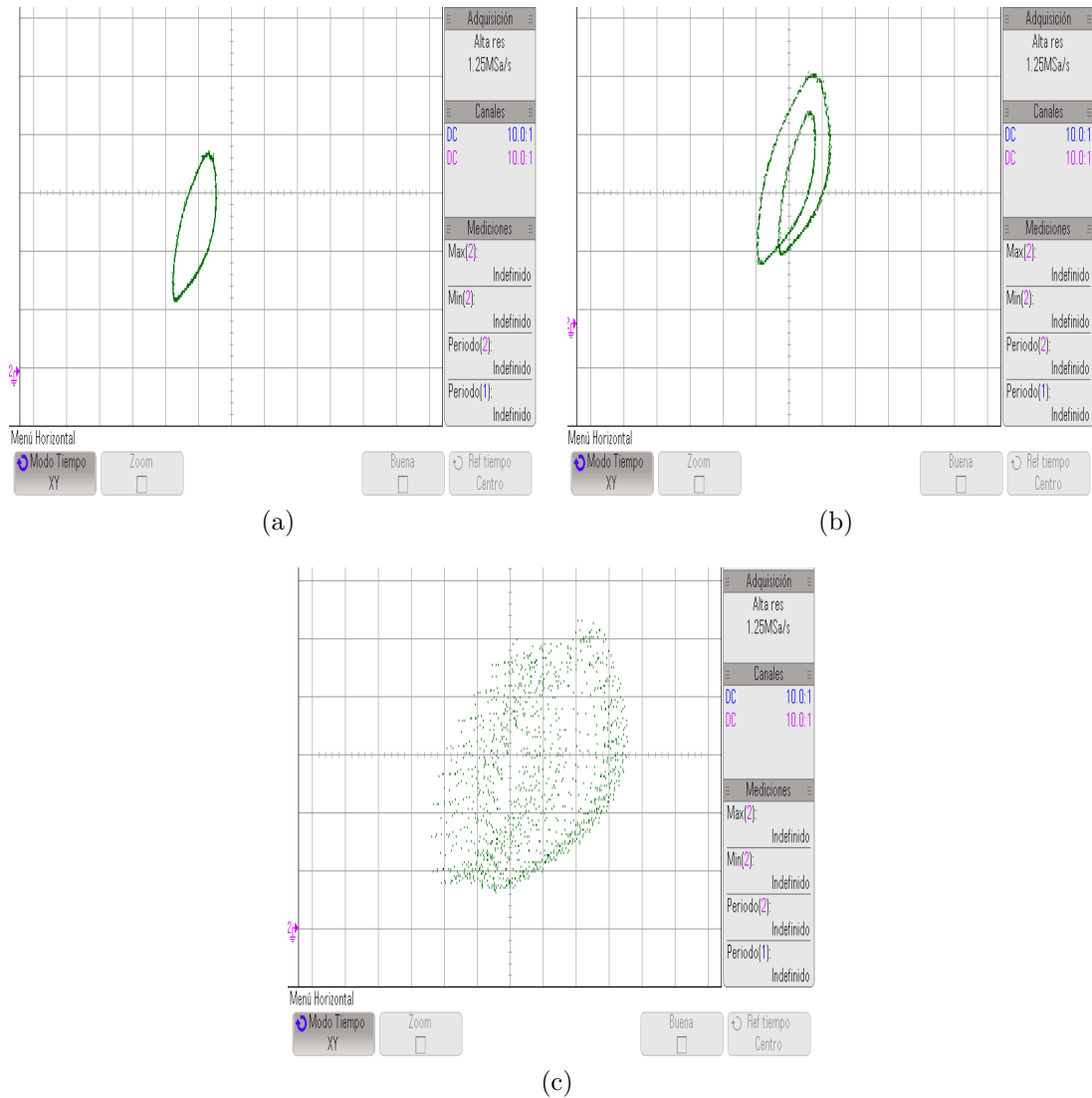


Figura 49: Retrato de fase del convertidor de Ćuk que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($T = 231\mu s$); (b) 2-periódicas ($T = 262.5\mu s$) y (c) caóticas ($T = 399.7\mu s$).

Como en la parte numérica, para verificar que el convertidor de Ćuk presenta las órbitas que se muestra en la figura 48, en la figura 50 se muestra el espectro de la tensión del capacitor C_1 , estado x_4 , considerando el periodo T con los valores de $231\mu s$, $262.5\mu s$ y $399.7\mu s$. En la figura 50a se muestra el espectro de x_4 para $T = 231\mu s$. Se observa que se presenta una sola armónica, a la frecuencia de 4.329kHz . El espectro de x_4 para $T = 262.5\mu s$, se muestra en la figura 50b, donde se observa la armónica a

la frecuencia de 3.809kHz , así como una nueva armónica a la frecuencia de 1.904kHz. Finalmente en la figura 50c se muestra el espectro de x_4 cuando $T = 399.7\mu s$. En este espectro se observa que el nivel de las demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

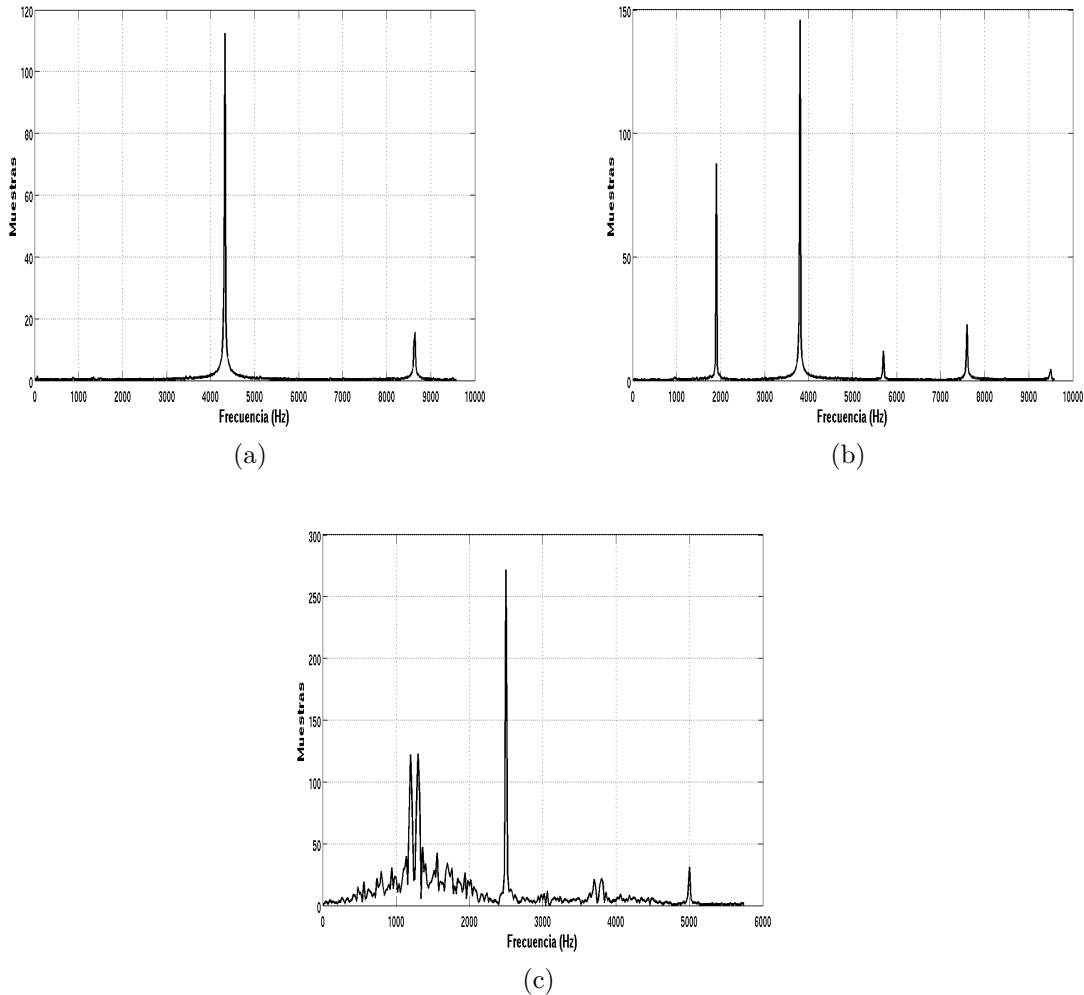


Figura 50: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_4 , con: a) $T = 231\mu s$, b) $T = 262.5\mu s$ y c) $T = 399.7\mu s$.**

Como en la parte de simulación nos enfocamos en el comportamiento del convertidor de \acute{C} uk para $T = 399.7\mu s$, la figura 51 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina.

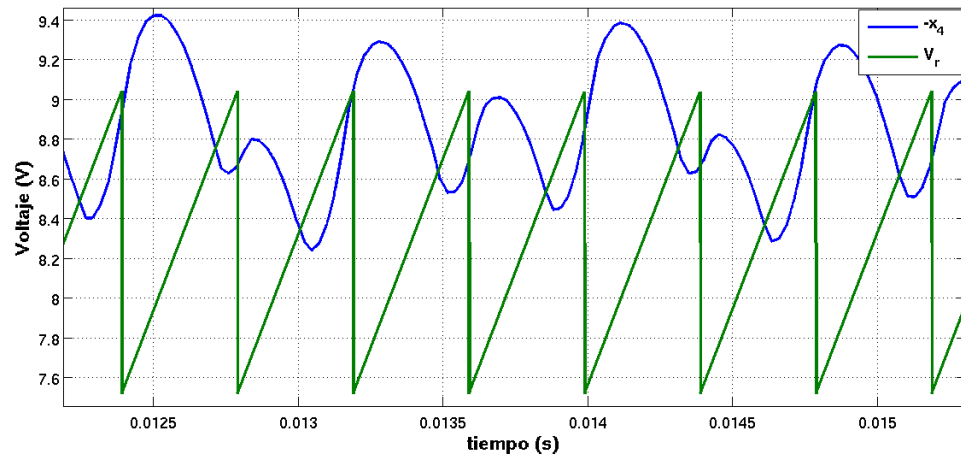


Figura 51: **Comportamiento caótico del convertidor de Ćuk para $T = 399.7\mu s$.**

Al observar la figura 51 la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 0.008$, $x_2 = -0.852$, $x_3 = 14.32$ y $x_4 = -9.2$. Entonces, al linealizar alrededor de este punto se tiene que

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.87809543092 \\ 1 & 1 & 0.916982705596455 & 1 \\ 1 & 252.627202366903 & 0.77767181378367 & 1 \\ 252.627202366903 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.9999999999999999 & 1 \\ 1 & 1.0000000000000008 & 0.9999999999999996 & 1 \\ 1 & 0.9999999999999921 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al calcular los valores propios de N_1 y N_2 , se obtienen los siguientes valores propios:

$$\lambda_{a1} = 23.8825115944346, \lambda_{a2} = -0.0542758762335536 + 5.08211953517553i,$$

$$\lambda_{a3} = -0.0542758762335536 - 5.08211953517553i, \lambda_{a4} = -19.9962880281838,$$

$$\lambda_{b1} = 4, \lambda_{b2} = -9.00684455674383e - 16 + 8.92912572611541e - 15i,$$

$$\lambda_{b3} = -9.00684455674383e - 16 - 8.92912572611541e - 15i, \lambda_{b4} = -1.06466678366858e - 15.$$

El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es impar ($\sigma_1^- + \sigma_2^- = 1$). Por lo tanto ocurre duplicación de periodo, y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par se tiene persistencia de punto fijo en la colisión de frontera, y $\sigma_{11}^+ + \sigma_{12}^+$ es impar la órbita de periodo-2 desaparece. Existe un atractor el cual es caótico y robusto.

5.2. Resumen del capítulo

En este capítulo se mostró que el convertidor de Čuk, como el convertidor buck, exhibe una amplia variedad de dinámicas complejas, diferentes todas ellas, en función del parámetro de bifurcación. Resultó de gran ayuda el uso del mapeo estroboscópico a diferencia del A-conmutaciones para distinguir el comportamiento complejo del convertidor Čuk. Se corroboraron los resultados numéricos que se muestran en la literatura revisada y se confirmaron experimentalmente.

Y como en el capítulo 4, se presentan órbitas periódicas con características particu-

lares, el análisis del convertidor tiene que llevarse a cabo con varias herramientas para poder realizar un estudio completo. Se verificó que la teoría desarrollada para sistemas dinámicos discontinuos pueden ser aplicada al convertidor de Ćuk, con el fin de evidenciar su comportamiento complejo y ser usada como una herramienta analítica. De los resultados importantes se puede mencionar que los fenómenos discontinuos como lo son el roce y la interrupción por ciclo de la señal de modulación V_r , están presentes en el comportamiento caótico del convertidor.

En la parte numérica y experimental se observa una dinámica compleja en el convertidor de Ćuk y, aunque no se realizó un análisis de los parámetros de rendimiento del convertidor, de las figuras 50, 44, 42 y 48 se puede observar que cuando el convertidor de Ćuk entra en régimen caótico el DAT y el FC aumentan lo que ocasiona que el FP disminuya, lo cual se refleja en un rendimiento pobre o una eficiencia baja del convertidor de potencia.

Capítulo 6

Dinámica compleja del convertidor “buck-boost”

6.1. Introducción

El convertidor buck-boost es el resultado de la combinación en cascada de un convertidor buck y otro boost. Así, si se suponen que el ciclo de trabajo “ d ” de estos dos convertidores básicos son idénticos, la relación entre la tensión de salida v_o y la de entrada v_{in} en modo de conducción continua viene dado por el producto de los ciclos de trabajo de cada convertidor conectado en cascada. Esta característica permite que, en función del valor que tome el ciclo de trabajo d , la tensión de salida sea mayor o menor que la tensión de entrada, y además sus polaridades resultan opuestas. Por ello, los convertidores buck-boost se emplean principalmente en las fuentes de alimentación continua conmutadas, ya que en ellas puede requerirse una tensión de salida negativa y donde la salida puede ser mayor o menor la tensión de entrada. La figura 52 muestra el esquema de un convertidor reductor-elevador (i.e., buck-boost).

Su funcionamiento es el siguiente: Cuando el interruptor S está cerrado, la alimentación proporciona energía al inductor, lo que origina un aumento en la corriente i_L . El diodo, al quedar inversamente polarizado, aísla las etapas de entrada y de salida del convertidor. Cuando el interruptor S se abre, el diodo comienza a conducir, y la energía almacenada en el inductor se transfiere a la carga, al no recibir energía alguna de la alimentación de entrada la corriente i_L disminuye.

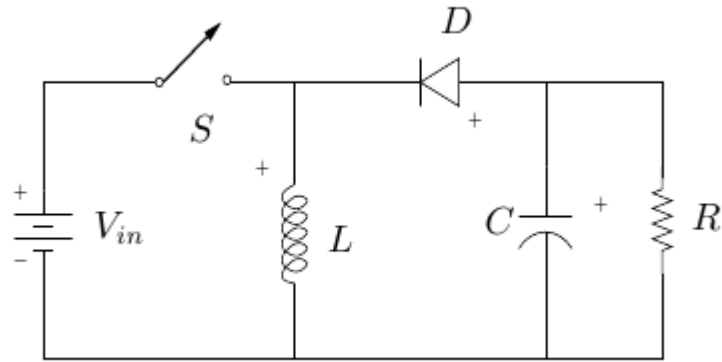


Figura 52: Esquema básico del convertidor “buck-boost”.

Las ecuaciones diferenciales que modelan el convertidor buck-boost son

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{1}{C} (1 - u(t)) i(t) - \frac{1}{RC} v(t), \\ \dot{i} &= \frac{1}{L} v(t) (1 - u(t)) + \frac{V_{in}}{L} u(t), \end{aligned} \quad (151)$$

Al tomar como variables de estado $x_1 = i(t)$ y $x_2 = v(t)$ la ecuación (151) en forma de ecuaciones de estado y matricial queda como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1-u(t))}{L} \\ -\frac{(1-u(t))}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (152)$$

en donde la entrada de control $u(t)$ es

$$u(t) = H(\sigma(x, t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(x, t) > 0, \\ 0 & \text{si } \sigma(x, t) \leq 0, \end{cases} \quad (153)$$

$$\sigma(x, t) = V_c - V_r, \quad V_c = g_i x_1 + g_v x_2, \quad V_r = V_l + (V_u - V_l) * \text{mod}\left(\frac{t}{T}, 1\right). \quad (154)$$

En las siguientes dos subsecciones presentaremos el modelo del convertidor buck-boost visto como sistema de Filippov y como sistema complementario.

6.1.0.3. Modelado del convertidor “buck-boost” con sistemas de Filippov

Ahora si tomamos como variable de estado $x_3 = t$, donde t es la variable de tiempo, entonces la ecuación (152) la podemos reescribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1-u(t))}{L} & 0 \\ -\frac{(1-u(t))}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (155)$$

La ecuación (155) podemos expresarla como

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, t) & H(x) < 0, \\ F_2(x, t) & H(x) \geq 0, \end{cases} \quad (156)$$

en donde

$$F_1(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (157)$$

$$F_2(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (158)$$

Para este sistema tenemos que la superficie de discontinuidad es

$$\Sigma := \{H(x) = 0\} = \{V_r - V_c\}, \quad (159)$$

$$H_x(x) = \begin{bmatrix} g_i & g_v & V_u - V_l \end{bmatrix}. \quad (160)$$

6.1.0.4. Modelado del convertidor “buck-boost” con sistemas complementarios

Para modelar el convertidor buck-boost como sistema complementario se usan como variables de estado la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor, i.e., $x_1 = i_L$ y $x_2 = v_C$, las ecuaciones en espacio de estados son

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}V_{in} - \frac{1}{L}v_S, \quad (161)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{RC}x_2 - \frac{1}{C}i_D. \quad (162)$$

Se puede formular como un SCC con

$$u_1 = v_S \rightarrow y_1 = i_s = x_1 - u_2,$$

$$u_2 = i_D \rightarrow y_2 = v_D = -x_2 - u_1 + V_{in},$$

en notación de matriz

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + EV_{in}, \\ y = Cx + Du + FV_{in}, \\ 0 \leq y_1 \perp u_1, \\ 0 \leq y_2 \perp u_2 \geq 0, \end{cases} \quad (163)$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En las siguientes subsecciones se muestran los resultados numéricos y experimentales de la dinámica del convertidor buck-boost. Como se menciona en los capítulos anteriores no se consideran los elementos de protección normalmente utilizados en la práctica y el control que se utiliza es un control MAP.

6.1.1. Variaciones en la tensión de entrada V_{in}

En esta subsección se estudia el cambio en la dinámica del convertidor buck-boost cuando se considera la variación en el valor de la tensión de entrada V_{in} . En la literatura revisada es común considerar variaciones en la tensión de entrada V_{in} para estudiar los cambios en la dinámica del convertidor. Esta selección se da por dos razones: una es que se puede controlar su valor de manera sencilla y la otra es que se puede considerar como una ganancia del control.

6.1.1.1. Resultados numéricos

El convertidor buck-boost es simulado con los parámetros mostrados en la tabla (6). Tanto en la parte numérica como en la experimental se usó como parámetro de bifurcación la tensión de entrada V_{in} , la cual es variada entre 10 y 35 V. Las simulaciones se realizan usando el formalismo de sistemas complementarios y el modo de control por voltaje, esto es, de la ecuación (154), $g_i = 0$ y $g_v = -1$.

Tabla 6: Parámetros usados para la simulación del convertidor “buck-boost”.

$R(\Omega)$	$L(mH)$	$C(\mu F)$	$V_u(V)$	$V_l(V)$	$V_{in}(V)$
22	5	47	1-12	0-11	15-35

En la figura 53 se puede observar el diagrama de bifurcación cuando V_{in} es usado como parámetro de bifurcación. Este diagrama se construyó usando el mapeo estroboscópico, en el cual se toma la tensión del capacitor cada periodo T . De la figura 53 se observa que, para diferentes valores de V_{in} , el diagrama muestra órbitas n -periódicas, con $n = 1, 2$, así como regiones donde se llena densamente, lo cual puede ser un indicador de la presencia de órbitas cuasiperiódicas o caóticas. Además, se observa que las bifurcaciones que presenta el convertidor se dan primero por duplicación de periodo y después a una órbita cuasiperiódica o caótica.

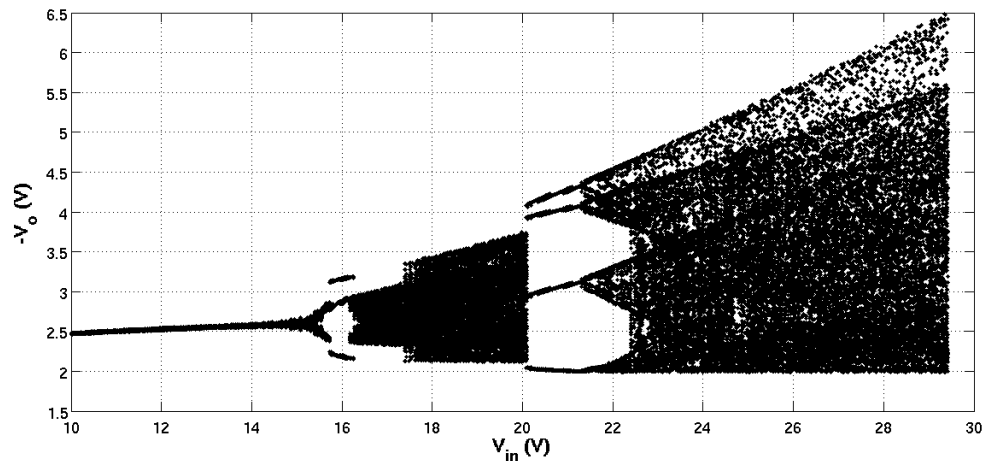


Figura 53: **Diagrama de bifurcación que considera la tensión de entrada V_{in} como parámetro de bifurcación.**

El primer cambio en la dinámica del convertidor que muestra el diagrama de bifurcación de la figura 53 ocurre cuando la tensión de entrada V_{in} tiene un valor aproximado de 15.2V. La bifurcación que se presenta es conocida como duplicación de periodo. También se presenta una bifurcación directa a una órbita caótica cuando V_{in} es aproxi-

madamente igual a 21.6V. Es interesante señalar que cuando la tensión de entrada V_{in} se encuentra en el intervalo de 15.6V a 16.3V se presenta una órbita 3-periódica debido a que dos órbitas colapsan en una sola (Miranda y Alvarez, 2009).

Para V_{in} igual a 12V, 15.3V y 18V, las gráficas del retrato de fase muestran órbitas de 1-, 2-periódicas y comportamiento caótico del convertidor buck-boost. La forma de la señal en el tiempo se muestra en la figura 54 para cada valor de V_{in} y la figura 55 muestra su retrato de fase correspondiente.

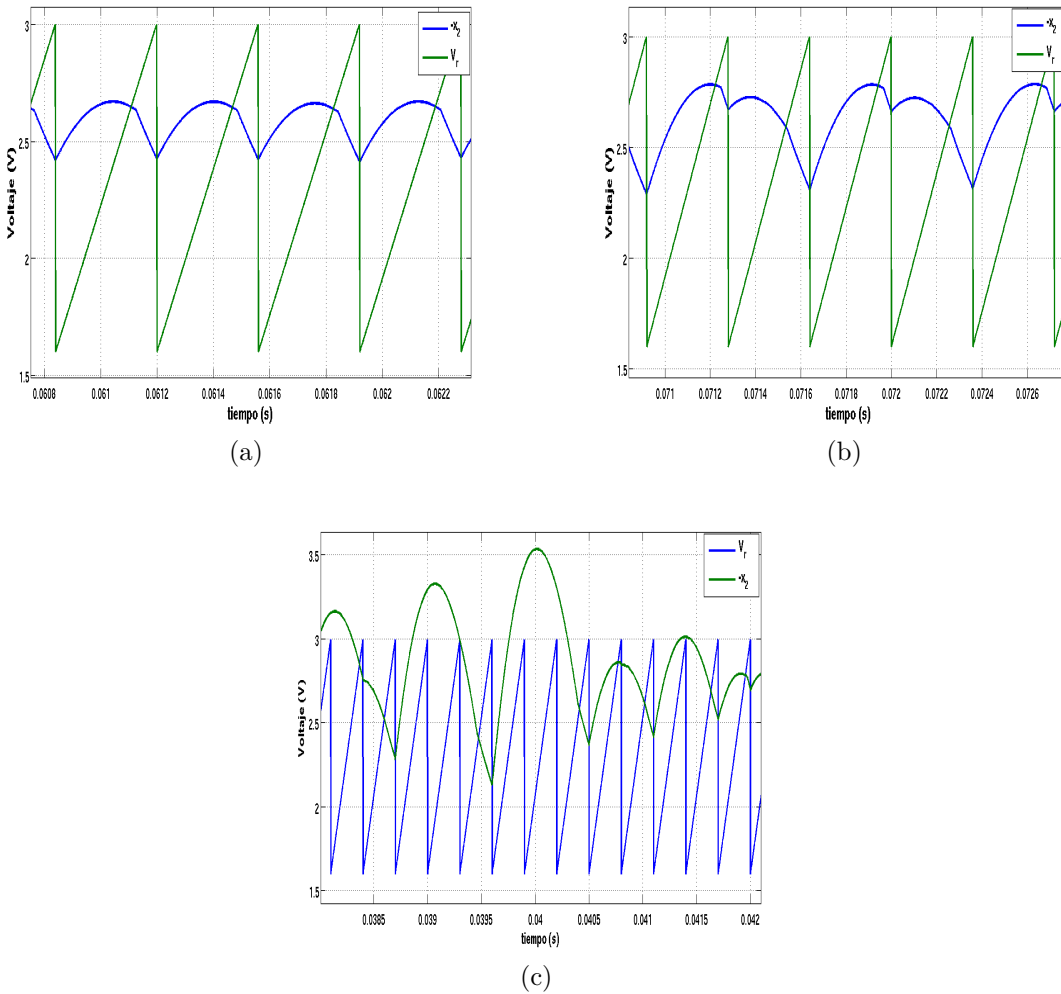


Figura 54: **Forma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 12V$, (b) $V_{in} = 15.3V$, (c) $V_{in} = 18V$.**

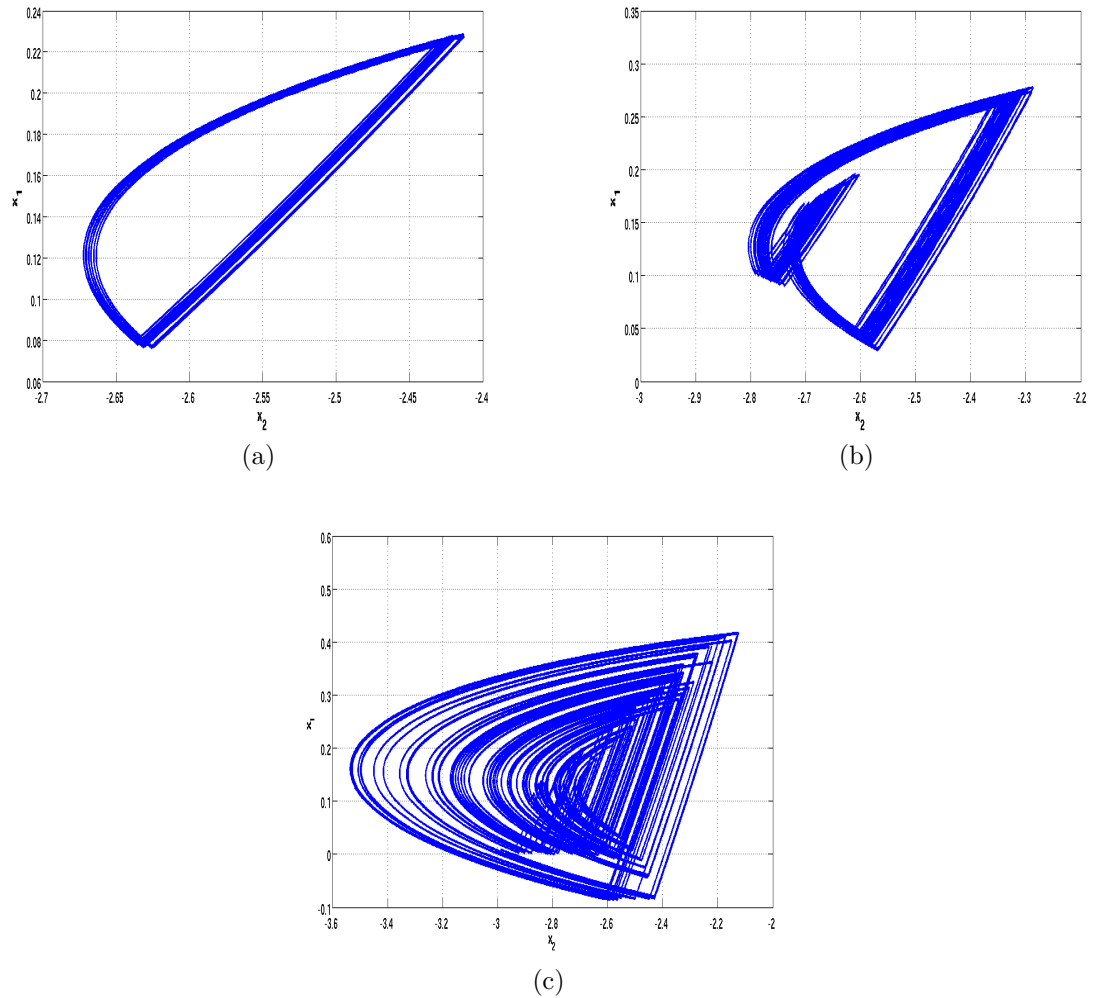


Figura 55: Retrato de fase del convertidor “buck-boost” que muestra órbitas: (a) 1-periódica ($V_{in} = 12V$), (b) 2-periódica ($V_{in} = 15.3V$) y (c) caóticas ($V_{in} = 18V$).

Para ilustrar que el convertidor buck-boost presenta órbitas 1- y 2-periódicas y comportamiento caótico, como se muestra en la figura 54, en la figura 56 se muestra el espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , considerando la tensión de entrada V_{in} con los valores de 12V, 15.3V y 18V. En la figura 56a se muestra el espectro de x_2 para $V_{in} = 12V$. Se observa que se presenta una sola armónica, a la frecuencia de 2.77 kHz. El espectro de x_2 para $V_{in} = 15.3V$ se muestra en la figura 56b, donde se observa la misma armónica a la frecuencia de 2.77 kHz, así como una nueva armónica a la frecuencia de

1.38 kHz. Finalmente, en la figura 56c se muestra el espectro de x_2 cuando $V_{in} = 18V$. En este espectro se observa claramente que siguen presentes las armónicas de la órbita 2-periódica, pero el nivel de las demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que no se puede decir que se trate solamente de una órbita 2-periódica y que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

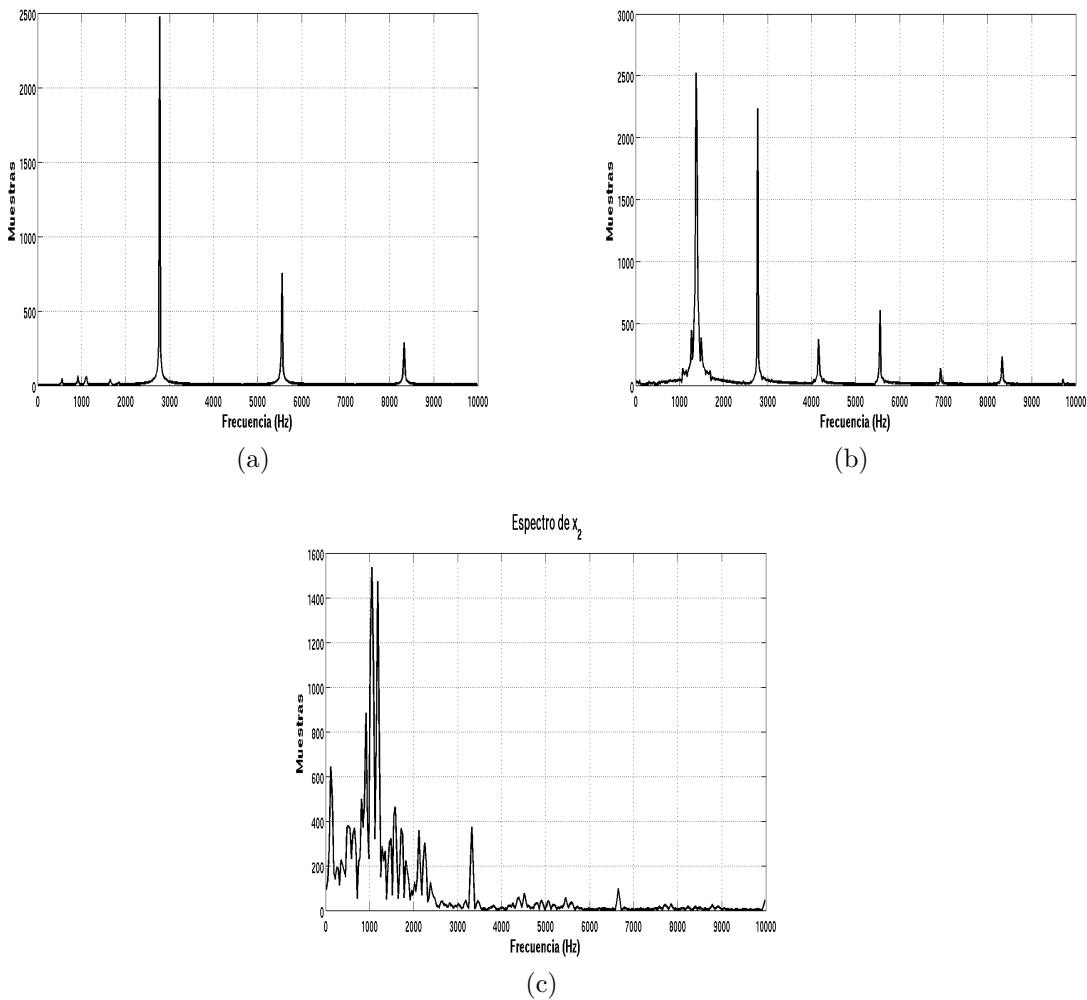


Figura 56: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $V_{in} = 12V$, b) $V_{in} = 15.3V$ y c) $V_{in} = 18V$.**

Al observar el comportamiento del convertidor buck-boost para $V_{in} = 18V$, la figura 57 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina, y además se puede observar

que la tensión de salida se salta algunos ciclos (i.e., no hay conmutación en un ciclo).

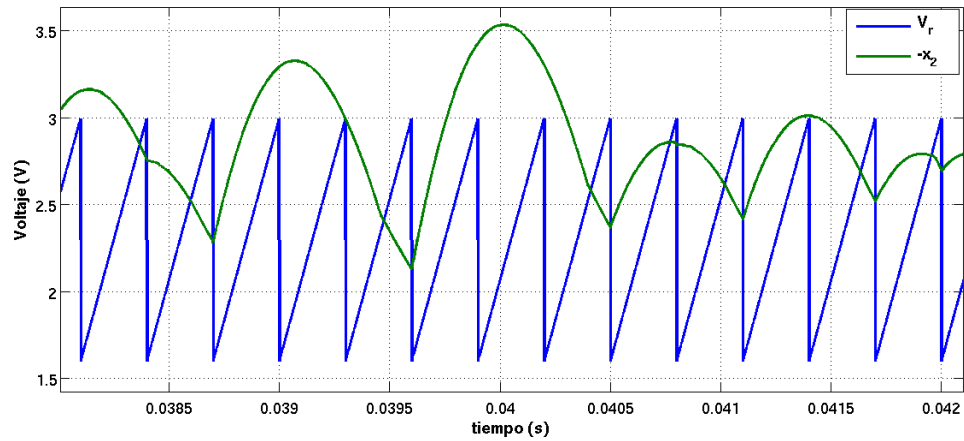


Figura 57: **Colisión de esquina en el convertidor “buck-boost” para $V_{in} = 18V$.**

En la figura (58) se muestra el mapeo A-conmutaciones que considera que la tensión de entrada V_{in} tiene un valor de 18V. Se observa que la figura formada no corresponde a una curva cerrada o un conjunto de puntos aislados. La complejidad de la figura que se forma depende del atractor que describa la órbita caótica. Una propiedad que tienen los sistemas en régimen caótico, llamada transitividad topológica, se puede observar en la figura (58).

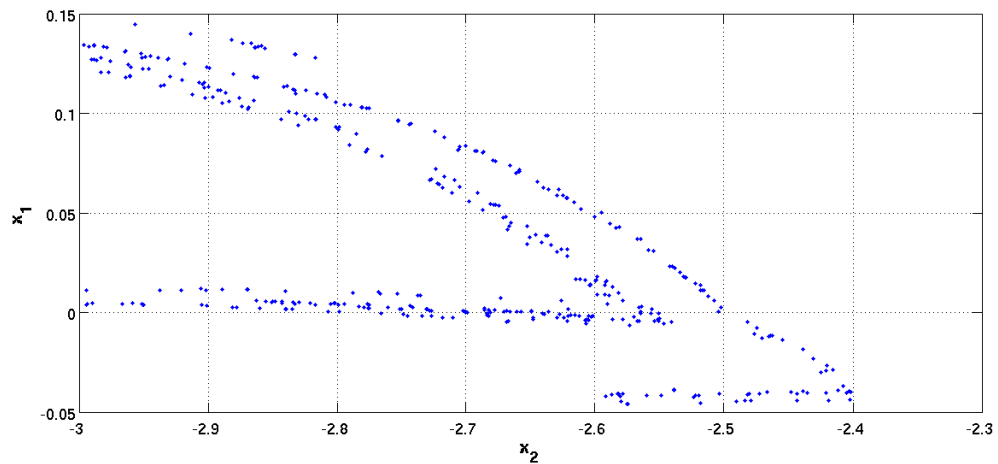


Figura 58: **Mapa A-conmutaciones x_1 vs x_2 .**

De acuerdo con la teoría de colisión de frontera presentada en la sección 3.2, y al observar la figura 57, la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 0.007294$ y $x_2 = 2.997$. Entonces, al linealizar alrededor de este punto se tiene que

$$x \mapsto \begin{cases} N_1x + M\mu, & \text{si } C^T x < 0, \\ N_2x + M\mu, & \text{si } C^T x > 0, \end{cases} \quad (164)$$

en donde

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.06183654654546 \\ 0.00169008116697658 & 0.7481622621555 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.999999999999992 \end{bmatrix}.$$

Al seguir el método introducido en la sección 3.2, se calculan los valores propios de N_1 y N_2 , y se obtienen los siguientes cuatro valores propios

$$\lambda_{a1} = 1.0069350038116, \quad \lambda_{a2} = 0.741227258343898,$$

$$\lambda_{b1} = -4.10782519111308e - 15, \quad \lambda_{b2} = 2.$$

El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es par ($\sigma_1^- + \sigma_2^- = 0$). Por lo tanto se espera una no duplicación de periodo y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par, entonces se tiene persistencia del punto fijo en la colisión de frontera.

Ahora, al expresar la ecuación (164) en la forma normal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu, & \text{si } x_1 \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (165)$$

en donde

$$\tau_1 = 1.7481622621555, \quad \delta_1 = 0.746367672205776,$$

$$\tau_2 = 1.999999999999999, \quad \delta_2 = -8.21565038222616e - 15.$$

Al aplicar la teoría expuesta en la sección 3.2 y en (Banerjee y Grebogi, 1999), se tienen los siguientes resultados: Los valores propios de N_1 son reales, el punto fijo es silla de montar regular en S_1 . Los valores propios de N_2 son reales, no existe órbita espiral, el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_2 , el punto fijo es silla de montar en S_2 . Al aplicar los teoremas 3.4 y 3.5 de la sección 3.2 y los resultados en (Banerjee y Grebogi, 1999) se verifica la existencia de un atractor el cual es caótico y robusto.

6.1.1.2. Resultados experimentales

En esta subsección se presentan resultados experimentales para verificar el comportamiento dinámico observado en la parte numérica. Se tomaron los parámetros de la tabla 6 y se implementó el convertidor buck-boost como se muestra en la figura 59. El circuito de potencia es el convencional, usa principalmente un transistor MOSFET de potencia IRF641 (Canal-N) y un diodo de potencia de respuesta rápida. Se utiliza

un generador de señales para producir la rampa diente de sierra, con lo que se puede variar su frecuencia y amplitud. La señal diente de sierra se alimenta a un comparador rápido (LM339) con una configuración de histéresis, cuya salida es conectada a un optoacoplador (4N25) y un circuito amplificador en contrafase conformado por los transistores 2N2222 y 2N2907 para controlar la conmutación del MOSFET. La otra entrada del comparador se alimenta por un amplificador operacional (TL084) que toma la tensión del capacitor C_1 (v_o).

En la figura 60 se muestra la forma de onda en el dominio del tiempo para órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas, y en la figura 61 se muestra su correspondiente retrato de fase.

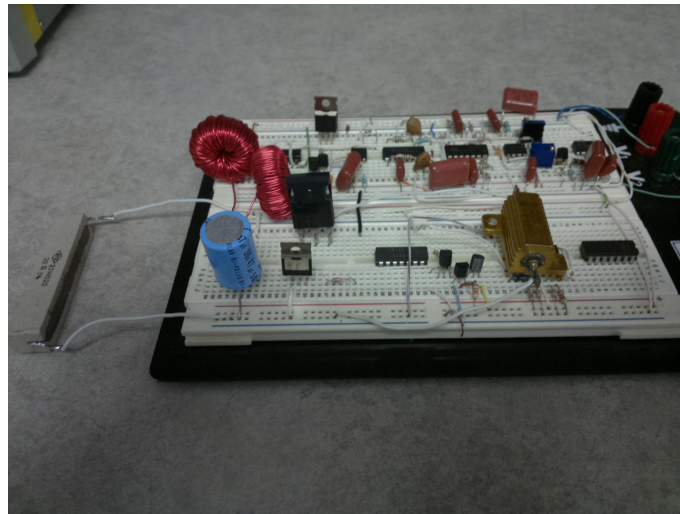
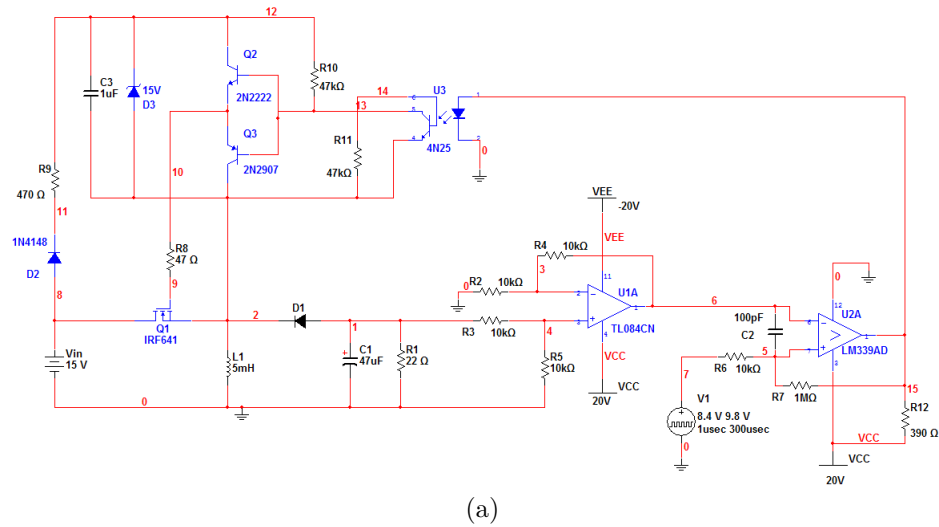
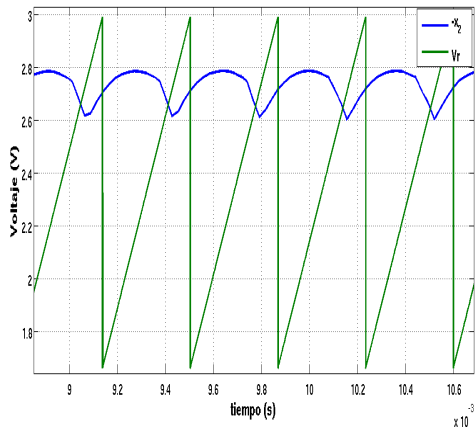
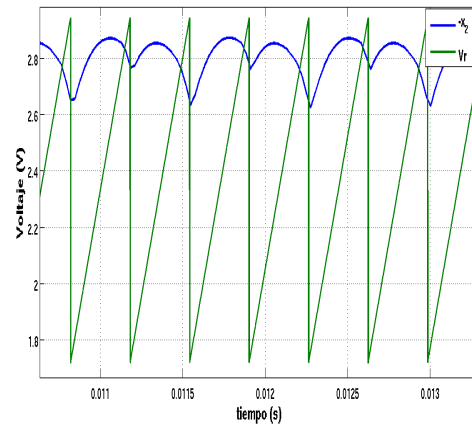


Figura 59: a) Circuito y b) fotografía del convertidor “buck-boost” implementado en tablilla de prueba.

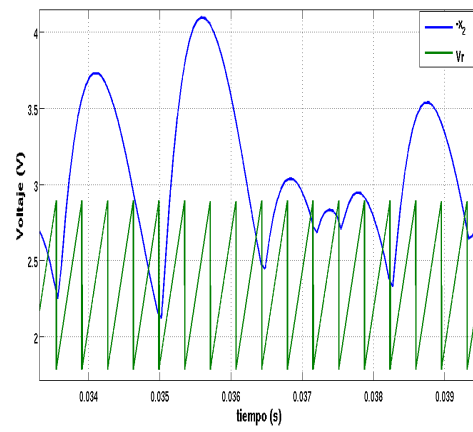
El parámetro de bifurcación que se usó en la figura 60 y la figura 61 es la tensión de entrada V_{in} . Aunque los comportamientos obtenidos numéricamente no son idénticos a los experimentales, debido a las consideraciones ideales en la parte numérica (por ejemplo, interruptor y diodo ideales), se consiguió observar comportamientos complejos como los mostrados numéricamente y reportados en la literatura, como lo son órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas.



(a)



(b)



(c)

Figura 60: bForma de onda en el dominio del tiempo para: (a) $V_{in} = 15V$, (b) $V_{in} = 25V$, (c) $V_{in} = 35V$.

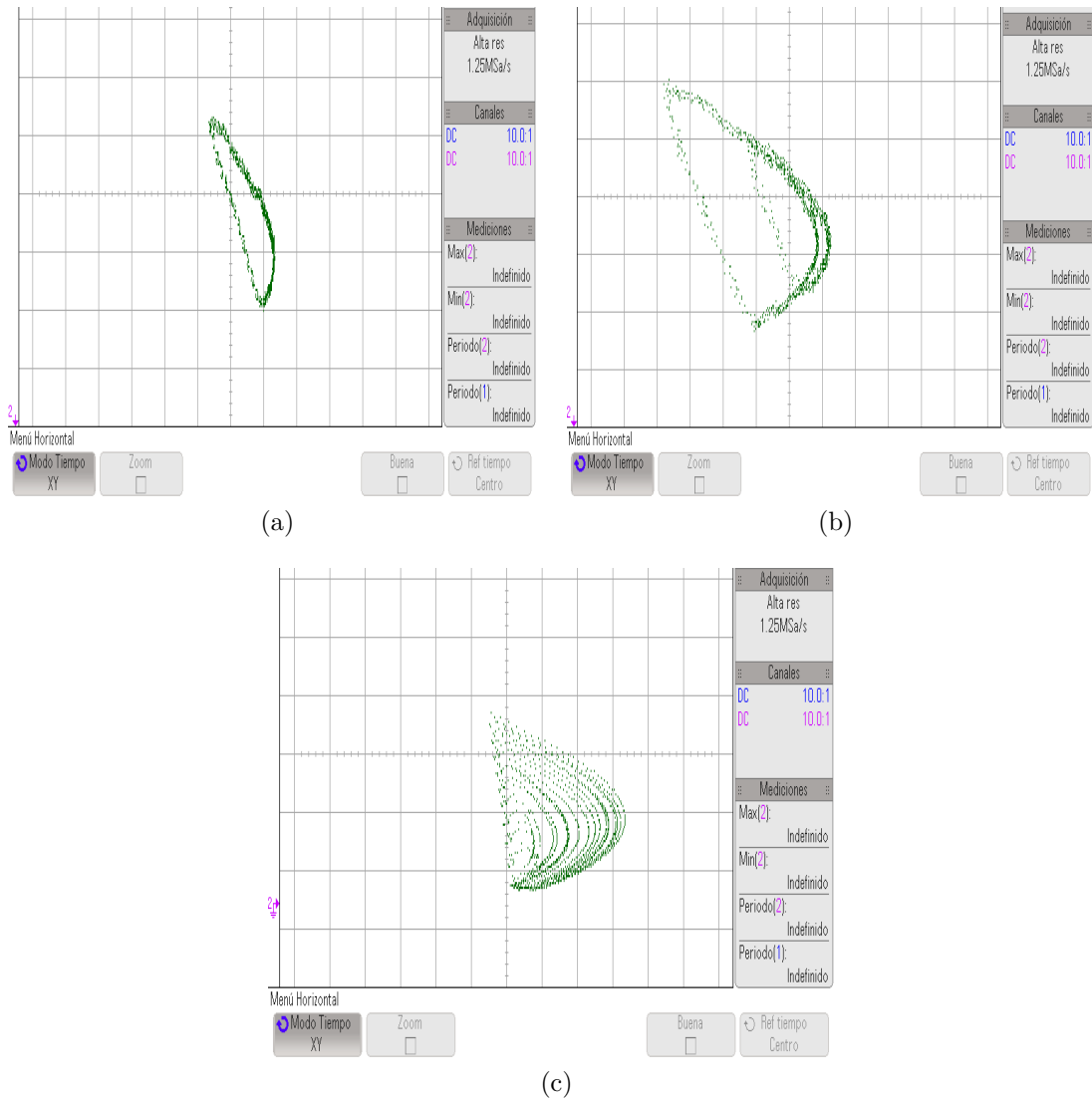


Figura 61: Retrato de fase del convertidor “buck-boost” que muestra órbitas: (a) 1-periódicas ($V_{in} = 15V$), (b) 2-periódicas ($V_{in} = 25V$) y (c) caóticas ($V_{in} = 35V$).

Como en la parte numérica, para verificar que el convertidor buck-boost presenta órbitas 1-, 2-periódicas y caóticas, como se muestra en la figura 60, en la figura 62 se muestra el espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , que considera a la tensión entrada V_{in} con los valores de 15V, 25V y 35V. En la figura 62a se muestra el espectro de x_2 para $V_{in} = 15V$. Se observa que se presenta una sola armónica, a la frecuencia de 2.762 kHz. El espectro de x_2 para $V_{in} = 25V$, se muestra en la figura 62b, donde se

observa la misma armónica a la frecuencia de 2.770 kHz, así como una nueva armónica a la frecuencia de 1.385 kHz. Finalmente en la figura 62c se muestra el espectro de x_2 cuando $V_{in} = 35V$. En este espectro se observa claramente que siguen presentes las armónicas de la órbita 2-periódica, pero el nivel de las demás componentes frecuenciales de la señal es elevado, por lo que no se puede decir que se trate solamente de una órbita 2-periódica y que tal vez se tenga comportamiento cuasiperiódico o caótico.

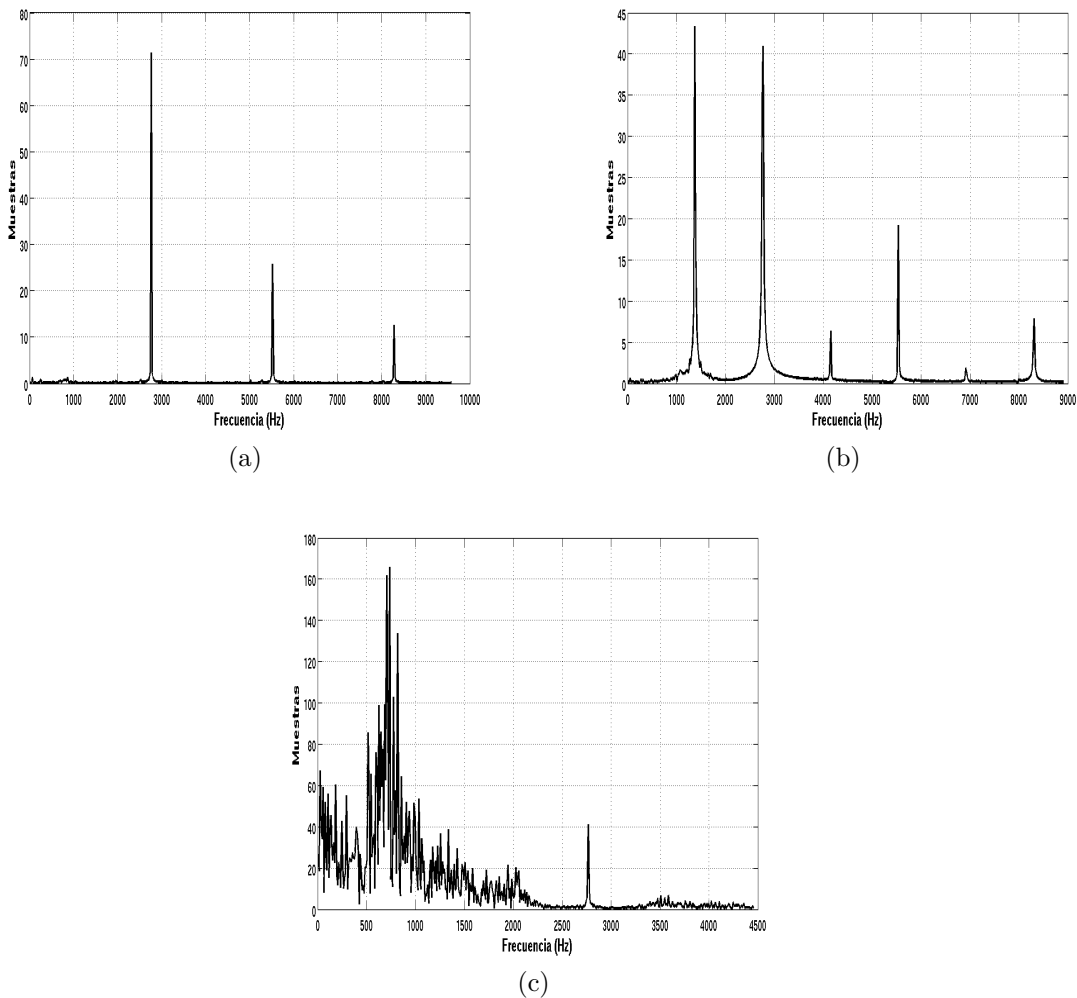


Figura 62: **Magnitud del espectro de la tensión del capacitor, estado x_2 , con: a) $V_{in} = 15V$, b) $V_{in} = 25V$ y c) $V_{in} = 35V$.**

Al igual que en el análisis numérico nos enfocaremos en el comportamiento del convertidor buck-boost para $V_{in} = 35V$, donde la figura 63 muestra los puntos donde ocurre colisión de esquina.

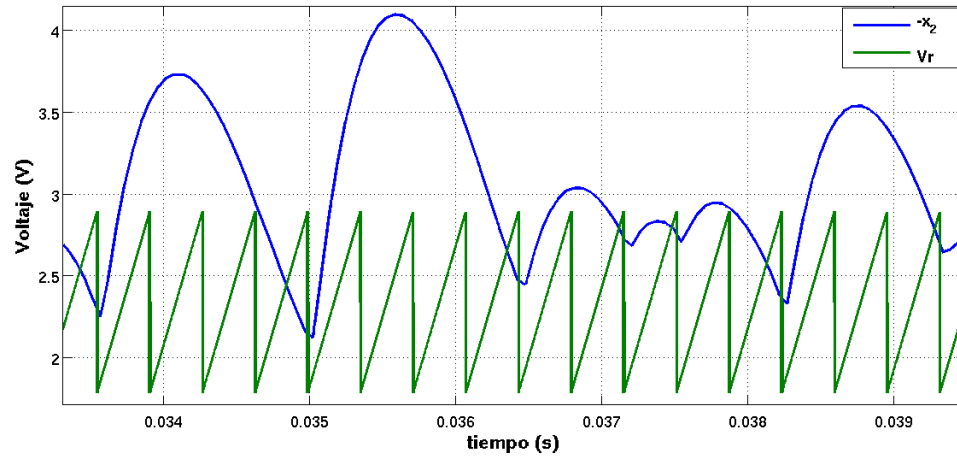


Figura 63: **Colisión de esquina en el convertidor “buck-boost” para $V_{in} = 35V$.**

Al observar la figura 63 la colisión de esquina ocurre en los puntos $x_1 = 0.7079$ y $x_2 = 2.849$ y al linealizar alrededor de estos puntos se tiene que

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.00722598232013 \\ 2.15105290776804 & 1.03542942865596 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.37064367356034 \end{bmatrix}.$$

Al calcular los valores propios de N_1 y N_2 , se obtienen los siguientes cuatro valores propios

$$\lambda_{a1} = -0.454328148211341, \quad \lambda_{a2} = 2.4897575768673,$$

$$\lambda_{b1} = 0.168294706764663, \quad \lambda_{b2} = 2.20234896679567.$$

El número de valores propios de N_1 y N_2 , con parte mayor a -1 es par ($\sigma_1^- + \sigma_2^- = 0$). Por lo tanto se espera una no duplicación de periodo y como $\sigma_1^+ + \sigma_2^+$ es par, entonces se tiene persistencia del punto fijo en la colisión de frontera.

Ahora, al calcular τ_1 , δ_1 y τ_2 , δ_2 de N_1 y N_2 , respectivamente, se obtienen los siguientes valores

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 2.03542942865596, & \delta_1 &= -1.13116694939328, \\ \tau_2 &= 2.37064367356034, & \delta_2 &= 0.370643673560337.\end{aligned}$$

Al aplicar la teoría expuesta en la sección 3.2 y en (Banerjee y Grebogi, 1999), se tienen los siguientes resultados: Los valores propios de N_1 son reales, el punto fijo es silla de montar regular en S_1 . Los valores propios de N_2 son reales, no existe órbita espiral, el punto fijo no puede ser atractor o silla de montar regular en S_2 , el punto fijo es silla de montar en S_2 . Al aplicar los teoremas 3.4 y 3.5 de la sección 3.2 y los resultados en (Banerjee y Grebogi, 1999) se verifica la existencia de un atractor el cual es caótico y robusto.

6.2. Resumen del capítulo

En este capítulo se mostró que el convertidor buck-boost, como el convertidor buck, exhibe una amplia variedad de dinámicas complejas, diferentes todas ellas, en función del parámetro de bifurcación. Resultó de gran ayuda el uso del mapeo estroboscópico, a diferencia del A-conmutaciones para distinguir el comportamiento complejo del convertidor buck-boost. Se corroboraron los resultados numéricos que se muestran en la literatura revisada y se confirmaron experimentalmente.

Y como en capítulo 4, se presentan órbitas periódicas con características particula-

res, por lo que el análisis del convertidor tiene que llevarse a cabo con varias herramientas para poder realizar un estudio completo. Se verificó que la teoría desarrollada para sistemas dinámicos discontinuos pueden ser aplicada al convertidor buck-boost, con el fin de evidenciar su comportamiento complejo y ser usada como una herramienta analítica. De los resultados importantes se pueden mencionar los fenómenos discontinuos como: el roce y la interrupción por ciclo de la señal de modulación V_r , presentes en el comportamiento caótico del convertidor.

En la parte numérica y experimental se observa una dinámica compleja en el convertidor buck-boost y, aunque no se realizó un análisis de los parámetros de rendimiento del convertidor, de las figuras 54, 60, 56 y 62 se puede observar que cuando el convertidor buck-boost entra en régimen caótico el DAT y el FC aumentan lo que ocasiona que el FP disminuya, lo cual se refleja en un rendimiento pobre o una eficiencia baja del convertidor de potencia.

Capítulo 7

Conclusiones

Los resultados en este trabajo de tesis muestran que la variedad de dinámicas complejas que exhiben los circuitos conmutados está en función de los parámetros de bifurcación. Al variar un parámetro de diseño el convertidor puede pasar instantáneamente de una órbita periódica estable a un régimen caótico. Por esta razón en los convertidores cd/cd se debe realizar un análisis de estabilidad estructural y de bifurcación, para poder observar los mecanismos que ocasionan inestabilidad mientras se varía algún parámetro. La teoría presentada en el capítulo 2 y 3, la cual está aún en desarrollo, proporciona herramientas matemáticas para el análisis de sistemas dinámicos discontinuos, de los cuales los convertidores de potencia forman parte.

En este trabajo se mostró que los circuitos de electrónica de potencia son esencialmente sistemas dinámicos no lineales variantes en tiempo. Aunque esto hace que sean difíciles de estudiar, vale la pena por que tienen muchas aplicaciones prácticas y se están volviendo cada vez más importantes en la entrega, procesamiento y acondicionamiento de la energía eléctrica. De los resultados obtenidos se puede concluir que el enfoque tradicional no siempre produce un modelo confiable y que el modelo discreto no lineal ofrece otra manera de ver al convertidor cd/cd , una en la cual sea más preciso y capaz de reproducir los efectos no lineales como subarmónicos y caos. Esto demanda un cambio de pensar por parte de los ingenieros de electrónica de potencia; alejarse del pensamiento de los sistemas lineales y abocarse al de los sistemas discontinuos con dinámicas no lineales.

Es conocido que en muchos de los sistemas caóticos existen ventanas periódicas en el espacio de parámetros, un inadvertido cambio ligero en un parámetro puede llevar al sistema a un régimen caótico. A menudo, órbitas estables coexistiendo pueden ocurrir en sistemas no lineales y un ambiente de ruido puede cambiar el sistema de una órbita a otra, con lo que no se puede asegurar una operación confiable de un convertidor bajo caos. También en muchos casos las oscilaciones cuasiperiódicas o caóticas tienen una amplitud considerable, aunque dentro de los límites de diseño, presentando un aumento en la potencia disipada y un pobre desempeño, ya que se ven afectados los parámetros de rendimiento del convertidor. En el caso del convertidor buck, se presenta el fenómeno de deslizamiento, lo cual provoca múltiples conmutaciones en un periodo, ocasionando un incremento en la potencia disipada por el transistor MOSFET.

Finalmente, los resultados experimentales presentados en este trabajo corroboraron los resultados numéricos, y éstos sólo representan una parte de los estudios realizados para poder comprender la dinámica compleja del convertidor buck, buck-boost y de Ćuk, quedando mucho trabajo por realizar.

Trabajo futuro

1. Hacer el análisis numérico y experimental, como el realizado en este trabajo de tesis, usando otro tipo de controlador como el de modos deslizantes, en los convertidores cd/cd con el fin de observar y comprender su comportamiento complejo. Y con el entendimiento de tal comportamiento de los circuitos conmutados, estudiar y aplicar técnicas nuevas de control, ya sea para mantener una órbita periódica estable o llevar a un régimen caótico el convertidor cd/cd.
2. Realizar el mismo estudio realizado en este trabajo de tesis en el convertidor boost, que por falta de tiempo no se realizó.

3. Realizar un análisis más detallado para las bifurcaciones deslizantes, y también usar otros métodos como el usado en este trabajo de tesis para este tipo de bifurcaciones.
4. Hacer un análisis de interferencia electromagnética (IEM), esto es, con mejor entendimiento de los fenómenos no lineales en electrónica de potencia para reducir la generación, conducción y radiación de señales que pueden producir interferencia, por ejemplo, en fuentes conmutadas. El problema es particularmente serio para lograr la compatibilidad electromagnética; tema donde actualmente se realizan esfuerzos para su regulación (Banerjee y Verghese, 2001; #ET631, 2011). Y finalmente, extender los resultados con cargas altamente inductivas como motores de cd y ca, y balastros electrónicos (lámparas ahorradoras).

Referencias bibliográficas

- Acary, V., Bonnefon, O., y Brogliato, B. (2010). Time-stepping numerical simulation of switched circuits within the nonsmooth dynamical systems approach. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, **29**(7), 1042–1055.
- Aroudi, A. E., Debbat, M., y Giral, R. (2005). Bifurcations in dc-dc switching converters: Review of methods and applications. *International Bifurcation and Chaos*, **15**(5), 1549–1578.
- Banerjee, S. y Chakrabarty, K. (1998). Nonlinear modeling and bifurcations in boost converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, **13**(2), 252–260.
- Banerjee, S. y Grebogi, C. (1999). Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps. *The American Physical Society*, **59**(4), 4052–4061.
- Banerjee, S. y Verghese, G. C. (2001). *Nonlinear phenomena in power electronics: attractors, bifurcations, chaos, and nonlinear control*. Wiley-IEEE Press.
- Basak, B. y Parui, S. (2009). Bifurcation and chaos in current mode controlled dc drives in continuous and discontinuous conduction mode of operation. *TENCON 2009 - 2009 IEEE Region 10 Conference*, 1–6.
- Bernhardsson, B., Johansson, K. H., y Malmberg, J. (1999). Some properties of switched systems. In *the IFAC World Congress*.
- Billups, S. y Murty, K. (2000). Complementarity problems. *J. of Computational and Appl. Math*, **124**, 303–318.

- Bonnin, M., Corinto, F., Gilli, M., y Civalieri, P. P. (2007). Harmonic balance, melnikov method and nonlinear oscillators under resonant perturbation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, **36**(3), 247–274.
- Brockett, R. W. y Wood, J. R. (1984). Understanding power converter chaotic behavior mechanisms in protective and abnormal modes. In *Proc. Powercon*, Vol. 11, 1–15.
- Camlibel, M., Frasca, R., Goknar, I., y Vasca, F. (2008). State jump rules in linear passive networks with ideal switches. In *IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS)*.
- Camlibel, M. K. (2001). *Complementarity methods in the analysis of piecewise linear dynamical systems*. Tesis de doctorado, Eindhoven University of Technology, Dept. of Electrical Engineering, Eindhoven, The Netherlands.
- Camlibel, M. K., Heemels, W., y Schumacher, J. (2002). Consistency of a time-stepping method for a class of piecewise-linear networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, **49**(3), 349–357.
- Chan, W. C. Y. y Tse, C. K. (1997). Study of bifurcations in current programmed dc/dc boost converters: from quasiperiodicity to periodo doubling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, **44**(12), 1129–1142.
- Chua, L. y Kang, S. (1978). A global representation of multidimensional piecewise-linear functions with linear partitions. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **25**(11), 938–940.
- Colombo, A. (2008). Boundary intersection crossing bifurcation in the presence of sliding. *Physica D*, **237**(22), 2900–2912.

- Cortés, D., Alvarez, J., Alvarez, J., y Fradkov, A. (2004). On the tracking control of the boost converter. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, **151**(2), 218–224.
- Cortés, J. (2008). Discontinuous dynamical systems. *Control Systems, IEEE*, **28**(3), 36–76.
- Di Bernardo, M. (2000). Controlling switching systems: A bifurcation approach. *Circuits and Systems, 2000. Proceedings. ISCAS 2000 Geneva. The 2000 IEEE International Symposium on*, **2**, 377–380.
- Di Bernardo, M. (2003). Normal forms of border collisions in high-dimensional nonsmooth maps. *Circuits and Systems, 2003. ISCAS '03. Proceedings of the 2003 International Symposium on*, **3**, III–76–III–79.
- Di Bernardo, M. y Iannelli, L. (2002). Experimental detection of bifurcations and sliding in dc-dc power converters. *Circuits and Systems, 2002. ISCAS 2002. IEEE International Symposium on*, **1**, I–385–I–388.
- Di Bernardo, M. y Kowalczyk, P. (2003). Sliding bifurcations: A novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry friction oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13**(10), 2935–2948.
- Di Bernardo, M., Budd, C. J., y Champneys, A. (1998a). Grazing, skipping and sliding: analysis of the non-smooth of the dc/dc buck converter. *Nonlinearity*, **11**(4), 859–890.
- Di Bernardo, M., Garofalo, F., Glielmo, L., y Vasca, F. (1998b). Switching, bifurcations, and chaos in dc/dc converters. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **45**(2), 133–141.

- Di Bernardo, M., Feigin, M. I., Hogan, S. J., y Homer, M. E. (1999). Local analysis of c-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, **10**(11), 1881–1908.
- Di Bernardo, M., Budd, C. J., y Champneys, A. (2001). Corner collision implies border-collision bifurcation. *Physica D*, **154**(3-4), 171–194.
- Di Bernardo, M., Garofalo, F., Glielmo, L., y Vasca, F. (2002a). Analysis of chaotic buck, boost and buck-boost converters through switching maps. *IEEE Power Electronics Specialists' Conference*, **1**, 754–760.
- Di Bernardo, M., Kowalczyk, P., y Nordmark, A. (2002b). Bifurcations of dynamical systems with sliding: derivation fo normal-form mappings. *Physica D*, **170**(3-4), 175–205.
- Di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A., Kowalczyk, P., *et al.* (2008). *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, Vol. 163. Springer.
- #ET631 (2011). Curso posgrado: Aplicaciones en instrumentación del análisis digital de señales. *Det, Cicese*.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer, Dordrecht.
- Hamill, D. C. y Jefferies, D. J. (1988). Subharminics and chaos in a controlled switched-mode power converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **35**(8), 1059–1061.
- Hamill, D. C., Deane, J. H. B., y Jefferies, D. J. (1992). Modeling of chaotic dc-dc

- converters by iterated nonlinear mappings. *IEEE Transactions on Power Electronics*, **7**(1), 25–36.
- Jeffrey, M. R. y Hogan, S. J. (2011). The geometry of generic sliding bifurcations. *SIAM review*, **53**(3), 505–525.
- Kassakian, J. G., Schlecht, M. F., y Verghese, G. C. (1991). *Principles of Power Electronics Reading*. Addison-Wesley.
- Khalil, H. K. (2001). *Nonlinear systems*, Vol. 3. Prentice hall New Jersey.
- Kukucka, P. (2006). Melnikov method for discontinuous planar systems. *Nonlinear Analysis*, **66**(12), 2698–2719.
- Kuroe, Y. y Hayashi, S. (1989). Analysis of bifurcation in power electronic induction motor drive systems. In *Power Electronics Specialists Conference, 1989. PESC'89 Record., 20th Annual IEEE*, 923–930. IEEE.
- Leenaerts, D. (1999). On linear dynamic complementarity systems. *IEEE Trans. on Circuits Systems: Fundam. Theory Applicat.*, **46**(8), 1022–1026.
- Leenaerts, D. y Bokhoven, W. V. (1998). Piecewise linear modeling and analysis. *Norwell, MA: Kluwer*.
- Leine, R. I. (2006). Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems. *Physica D*, **223**(1), 121–137.
- Leine, R. I. y van Campen, D. H. (1999). Fold bifurcations in discontinuous systems. In *Proc. of DETC*, Vol. 99.

- Ma, Y., Kawakami, H., y Tse, C. K. (2004). Bifurcation analysis of switched dynamical systems with periodically moving borders. *IEEE Transactions on Circuits and Systems: Regular Papers*, **51**(6), 1184–1193.
- Magauer, A. y Banerjee, S. (2000). Bifurcations and chaos in the tolerance band pwm technique. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, **47**, 254–259.
- Marrero, J. L. R., Font, J. M., y Verghese, G. C. (1996). Analysis of the chaotic regime for dc-dc converters under current mode control. *Power Electronics Specialists Conference, 1996. PESC '96 Record., 27th Annual IEEE*, **2**, 1477–1483.
- Mehrizi-Sani, A., Kinsner, W., y Filizadeh, S. (2007). On the chaotic behaviour of buck converters. In *Electrical and Computer Engineering, 2007. CCECE 2007. Canadian Conference on*, 1145–1149. IEEE.
- Miranda, M. y Alvarez, J. (2009). Bifurcations and chaos produced by the modulation signal in a pwm buck converter. *Chaos, Solitons & Fractals*, **42**(4), 2260–2271.
- Mohan, N., Undeland, T., y Robbins, W. (2003). *Power Electronics : Converters, Applications, and Design*, Vol. 1. Wiley.
- Nagy, I., Süto, Z., y Masada, E. (1989). Avoiding chaotic processes in current control of ac drive. *Power Electronics Specialists Conference, 1998. PESC 98 Record. 29th Annual IEEE*, **1**, 255–261.
- Niu, Q., Ju, Z., Qi, C., y Wang, H. (2009). Study on bifurcation and chaos in boost converter based on energy balance model. *Energy and Power Engineering*, **1**(1), 38–43.

- Olivar, G., Di Bernardo, M., y Angulo, F. (2003). Discontinuous bifurcations in dc converters. *Industrial Technology, 2003 IEEE International Conference on*, **2**, 842–845.
- Piironen, P. y Kuznetsov, Y. A. (2008). An event-driven method to simulate filippov systems with accurate computing of sliding motions. *ACM Transactions Mathematical software*, **34**(3), 1–24.
- R. I. Leine (2000). *Bifurcations in Discontinuous Mechanical systems of Filippov-Type*. Tesis de doctorado, Technische Univrsiteit Eindhoven, The Netherlands.
- Rakshit, B., Apratim, M., y Banerjee, S. (2010). Bifurcation phenomena in two-dimensional piecewise smooth discontinuous maps. *CHAOS*, **20**(3), 033101.1–033101.12.
- Rodríguez, I. U. H. (2009). *Dinámica Compleja en Sistemas Mecánicos Controlados con Técnicas de Control Discontinuo*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada, Ensenada, México.
- Santos, I. M. (2006). *Modeling and Numerical Study of Nonsmooth Dynamical Systems*. Tesis de doctorado, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Savi, M. A., Divenyi, S., Franca, L. F. P., y Weber, H. I. (2007). Numerical and experimental investigations of the nonlinear dynamics and chaos in non-smooth systems. *Journal of Sound and Vibration*, **301**(1-2), 59–73.
- Tse, C. K. (2003). Chaos in power electronics. *Circuits and Systems, 2003. Tutorial Guide: ISCAS 2003. The IEEE International Symposium on*, **2**, 129–156.
- Tse, C. K. (2004). *Complex behavior of switching power converters*, Vol. 2. CRC.

Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control Optimization*. Berlin: Springer-Verlag.

Vlach, J. y Opal, A. (1997). Modern cad methods for analysis of switched networks. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **44**(8), 759–762.

Yang, X.-S. y Huan, S. (2009). Existence and bifurcations of homoclinic orbits in planar piecewise linear systems. *arXiv preprint arXiv:0907.0055*.