

Tesis defendida por

Rigoberto Martínez Clark

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. César Cruz Hernández

Director del Comité

Dra. M. del Pilar Sánchez Saavedra

Miembro del Comité

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Miembro del Comité

Dr. Vassili Spirine

Miembro del Comité

Dr. César Cruz Hernández

Coordinador del posgrado
en Electrónica y Telecomunicaciones

Dr. Jesús Favela Vara

Director Estudios de Posgrado

Agosto de 2014

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA, BAJA
CALIFORNIA**



PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

**Control de comportamientos colectivos en grupos de
robots móviles**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

Rigoberto Martínez Clark

Ensenada, Baja California, México,

2014

Resumen de la tesis de **Rigoberto Martínez Clark**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles

Resumen aprobado por:

Dr. César Cruz Hernández

Director de Tesis

La asociación en grupos o colectividades se encuentra de manera natural en diferentes niveles biológicos, tal es el caso de los insectos sociales como las abejas y hormigas, y la infinidad de agrupaciones de la más diversa índole que se generan en las sociedades modernas. Esta situación se presenta por una sola razón, el agruparse con otros individuos garantiza al miembro alcanzar mayores objetivos y resolver problemas que encontrándose solo no lo podría hacer. La información intercambiada entre los miembros del grupo permite que se generen comportamientos distintos a los que suceden en situaciones de aislamiento de los individuos, es así como un grupo adquiere dinámicas más ricas e interesantes que la de un solo ser. Son algunas ciencias las que se han percatado de tal situación y se han encargado de clasificar y tipificar estos comportamientos. En especial la *ciencia de la complejidad* pone un énfasis en la generación de estos comportamientos, los cuales nombra como *comportamientos emergentes*. Gracias a esos estudios, el campo de la ingeniería se ha beneficiado y, en especial, la rama de la Inteligencia Artificial acoge los resultados derivados de estos estudios para aplicarlos en sistemas colectivos artificiales. En este trabajo de tesis se propone el estudio y aplicación de estos comportamientos colectivos a grupos de robots móviles. Se presenta el diseño de *controladores basados en la teoría de sistemas complejos* para lograr la *sincronización y formación* en grupos de robots móviles. Los controladores propuestos en el presente documento serán puestos a prueba en diferentes escenarios presentados en *forma numérica* por medio de simulaciones basadas en paquetes informáticos. Al final se presentan las *restricciones* que deben presentar los sistemas robóticos con el fin de controlar sus comportamientos colectivos por medio de la propuesta dada con el fin de ser aplicados en la solución de problemas, como el patrullaje presentado en los capítulos finales de este trabajo.

Palabras Clave: **Sistemas Complejos, Sincronización, Formación, Robots móviles, Aplicaciones de comportamientos colectivos**

Abstract of the thesis presented by **Rigoberto Martínez Clark**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Sciences in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Control of collective behaviors in groups of mobile robots

Abstract approved by:

Dr. César Cruz Hernández

Director de Tesis

The association in groups or collections is encountered in nature on different biological levels, such is the case of social insects like ants and bees, and countless groups of the most varied kind present on modern societies. This occurs for one reason, grouping with others guarantees the achievement of greater goals and solving problems that an individual will not achieve. The information shared among the members of a group allows a new set of behaviors, which do not occur on isolated member's behaviors. This is how a group acquires more rich and interesting dynamics. There are many sciences who had noticed this situation and had classified and typified this behaviors. Especially, the *science of complexity* studies the generation of this behaviors, which it names them, *collective behaviors*. Derived from this studies, the Engineering field, especially on the Artificial Intelligence branch uses the results of complex systems research for applications on groups of artificial members such as robots. This thesis work proposes the study and application of collective behaviors in groups of mobile robots, *control laws based on the theory of complex systems are presented* addressed to accomplish synchronization and formation in a group of mobile robots. The control laws presented on this document will be tested on different *numeric scenarios* using software simulations. at the end of the work some *restrictions* are presented in order that a group achieve the collective behaviors described to solve some problems, like the patrolling example on the final chapters.

Keywords: **Complex Systems, Synchronization, Formation, Mobile robots, Applications of collective behaviors**

*A mi excepcional familia
y a la más hermosa de
las musas.*

Agradecimientos

A mi señor Dios, por permitirme recorrer este camino que sin duda, se ha convertido en el mayor reto de mi vida.

A mis padres Luz Elena y Rigoberto, por todo su apoyo incondicional y por inculcarme los valores de responsabilidad y perseverancia que me fueron de tanta utilidad a lo largo de estos años.

A mis hermanos María Elena y José Carlos por apoyarme constantemente.

Al amor de mi vida, Perla, gracias por recorrer este camino a mi lado y por tus constantes palabras de aliento.

Al Dr. César Cruz, por permitirme participar de este proyecto, gracias por su paciencia y sus consejos. Sin duda, sus atinadas intervenciones me permitieron ampliar el panorama de mis estudios.

A todo el comité de tesis, pues sus apreciables comentarios e interesantes sugerencias enriquecieron este trabajo de tesis sobremanera.

A los profesores del DET, gracias por compartir un poco de su sabiduría conmigo, tanto en el plano académico como en la "escuela de la vida".

A todos mis compañeros del CICESE, gracias por su amistad sincera y por hacer más placentero este viaje.

Por último, y no menos importante, al pueblo de México, por su apoyo financiero canalizado a través del CONACyT por medio del proyecto de Grupos de Investigación en Ciencia Básica, Ref. 166654 sin el cual, nada de esto sería posible.

Contenido

Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
1. Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Sistemas complejos	2
1.3 Robótica móvil	5
1.3.1 Sistemas multi-agente	9
1.4 Sincronización	11
1.5 Formación	13
1.6 Objetivos	14
1.7 Contribuciones de este trabajo de tesis	15
1.8 Organización del manuscrito	16
2. Preliminares	18
2.1 Teoría de grafos	18
2.1.1 Matrices asociadas a un grafo	21
2.2 Topologías de conexión	27
2.2.1 Redes con topología de acoplamiento global	27
2.2.2 Redes con topología de anillo	29
2.2.3 Redes con topología de cadena	30
2.2.4 Redes con topología de estrella	31
3. Comportamientos colectivos de interés	33
3.1 Sincronización de grupos de robots móviles	34
3.1.1 Condiciones de sincronización	37
3.1.2 Ejemplo ilustrativo	38
3.2 Formación de grupos de robots móviles	44
3.2.1 Convergencia	45
3.2.2 Evasión de colisiones	47
3.2.3 Ejemplo ilustrativo	48
4. Sincronización de robots móviles en diferentes topologías	52
4.1 Red de robots móviles en topología estrella	53
4.2 Red de robots móviles en topología cadena	57
4.3 Red de robots móviles en topología anillo	60
5. Formación de redes de robots móviles en diferentes topologías	64

Contenido (continuación)

5.1	Red de robots móviles en topología estrella	65
5.2	Red de robots móviles en topología cadena	67
5.3	Red de robots móviles en topología anillo	72
6.	Aplicaciones de los comportamientos colectivos	77
6.1	Patrullaje	78
6.1.1	Diseño del controlador para la formación	79
6.1.2	Diseño del control para patrullaje	81
6.1.3	Patrullaje por medio de un grupo de robots móviles	83
7.	Conclusiones	89
7.1	Trabajo Futuro	90
	Lista de referencias	92

Lista de figuras

1	Ejemplos de grupos presentes tanto en la naturaleza como en la sociedad . . .	3
2	Diferentes Robots móviles.	8
3	Dibujo original de Christiaan Huygens que ilustra la sincronización	12
4	El acertijo de los puentes de Königsberg.	19
5	Pieza original del famoso juego de Hamilton.	20
6	Ejemplos de grafos: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido o digrafo. . . .	21
7	Red de 5 nodos con acoplamiento global.	28
8	Red de 5 nodos acoplados con topología de anillo o vecino cercano.	29
9	Red con 5 nodos acoplados en topología de cadena.	31
10	Red en topología estrella compuesta por 5 nodos.	32
11	Robots móviles que trabajan en diferentes dimensiones	35
12	Cuatro masas puntuales acopladas bidireccionalmente en topología anillo. . .	39
13	Gráficas temporales de los nodos sincronizados del ejemplo	42
14	Plano de fase de los nodos sincronizados en el ejemplo.	43
15	descripción gráfica del vector l para robots que se desenvuelven en \mathbb{R}^2	48
16	Dos masas puntuales con acoplamiento tipo maestro (N_1) y esclavo (N_2). . .	49
17	Posiciones (a) inicial y (b) final de los robots móviles para el ejemplo ilustrativo.	50
18	Evolución de las posiciones de los robots en el plano de trabajo para el ejemplo ilustrativo.	51
19	Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) en el eje Y de los robots móviles en el ejemplo.	51
20	Tres masas puntuales en topología estrella con acoplamiento unidireccional. .	53
21	(a) Posición y (b) velocidad de tres masas puntuales en una red con topología estrella y acoplamiento unidireccional.	55
22	Plano de fase de (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología estrella con acoplamiento unidireccional. La línea de 45° permite visualizar que los nodos han alcanzado la sincronización.	55
23	Error de sincronía en (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología estrella con acoplamiento unidireccional, un error de sincronía igual a cero también indica que se ha alcanzado la sincronización de los nodos. . .	56
24	Red de 3 masas puntuales en topología de cadena con acoplamiento bidireccional.	57
25	Posición (a) y velocidad (b) para las tres masas puntuales en una red con topología de cadena con acoplamiento bidireccional.	58
26	Plano de fase de (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología cadena con acoplamiento bidireccional.	59
27	Error de sincronía en (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología cadena con acoplamiento bidireccional.	59
28	Red de tres masas puntuales en topología anillo con acoplamiento bidireccional.	60
29	Gráficas temporales de (a) la posición y (b) la velocidad de tres masas pun- tuales en una red con topología anillo y acoplamiento bidireccional.	62
30	Plano de fase de (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología anillo con acoplamiento bidireccional.	62

Lista de figuras (continuación)

31	Error de sincronía en (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología anillo con acoplamiento bidireccional.	63
32	Red de tres robots móviles en topología estrella con acoplamiento unidireccional.	65
33	Simulación de una red de robots móviles en topología estrella con acoplamiento unidireccional, (a) las posiciones iniciales de los robots y (b) las posiciones deseadas al alcanzar la formación.	67
34	Trayectorias descritas en el plano por los tres robots móviles al momento de buscar la formación propuesta para la simulación.	68
35	Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) la posición en el eje Y de los tres robots formados en una red con topología estrella y acoplamiento unidireccional.	68
36	Red conformada por tres robots móviles en topología de cadena con acoplamiento bidireccional.	68
37	Escenario planteado para la simulación de una red de robots móviles en topología cadena con acoplamiento bidireccional.	70
38	En (a) se presenta la trayectoria descrita por los robots, desde su posición inicial hasta el equilibrio, mientras que en (b) se muestra un acercamiento del punto de equilibrio de los robots.	71
39	Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) la posición en el eje Y de los tres robots acoplados bidireccionalmente en una red con topología de cadena.	72
40	Red de tres robots móviles en topología anillo con acoplamiento unidireccional.	73
41	En (a) se observa que los tres robots tienen las mismas posiciones iniciales y en (b) se presenta la formación en delta deseada.	74
42	Trayectorias de los tres robots móviles desde la misma condición inicial para los tres hasta la formación en delta.	75
43	Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) la posición en el eje Y de tres robots móviles formados en una red con topología anillo con acoplamiento unidireccional.	76
44	Red de tres robots móviles acoplados unidireccionalmente con topología de cadena.	79
45	Tres robots móviles en la formación tipo delta utilizada para el ejemplo de patrullaje.	81
46	Área de patrullaje para el ejemplo.	82
47	Posiciones iniciales de los robots correspondientes a $t = 0$ para la simulación propuesta.	84
48	Situación de los robots en $t = 0.19$ unidades de tiempo.	85
49	Situación de los robots en $t = 0.39$ unidades de tiempo.	85
50	Posiciones de los robots en patrullaje para $t = 0.69$ unidades de tiempo.	86
51	Posición del grupo de robots en patrullaje para $t = 0.94$ unidades de tiempo.	87
52	Recorrido de la arista DA por parte del robot maestro.	87

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

La mayoría de los organismos viven, obedecen la reglas y cosechan los beneficios de una sociedad a la que pertenecen. Las sociedades varían en cuanto a tamaño y complejidad, pero comparten una misma propiedad clave: ellas proveen y mantienen una misma cultura compartida, Matarić (1993). Es posible encontrar este tipo de organización en diferentes estratos. Por ejemplo en la naturaleza, la mayoría de las especies busca asociarse a un grupo de individuos iguales a ellos, es así como nacen las manadas, bancos, parvadas y otros más. En el caso de las sociedades existen colectividades de la más diversa índole, como son: los grupos de autoayuda, políticos, religiosos, de trabajo, asistentes a un concierto, por mencionar algunos Forsyth (2009). La figura 1 muestra ejemplos de colectividades presentes en la naturaleza. Según Stone y Veloso (2000), la asociación de los miembros al grupo genera dos tipos de comunicación, a) directa: en la que los individuos del grupo intercambian información que puede ser relevante y b) indirecta: la modificación del entorno por parte de los individuos crea pautas de seguimiento para los otros miembros del grupo. Este flujo de información permite que la agrupación presente dinámicas distintas a las que presenta un individuo aislado, por ejemplo, se conoce bastante sobre la eficiencia, no así de los mecanismos, alcanzada por las colonias de insectos, las cuales logran comportamientos complejos en completa ausencia de un control centralizado, modelos globales o comunicación directa. Matarić (1992). De igual forma, los seres humanos tienden a congregarse con el fin de alcanzar objetivos imposibles para un solo individuo. Diversas ramas de la ciencia estudian estos *comportamientos colectivos* desde su campo de acción, por ejemplo la biología utiliza la etología para estudiar el comportamiento de los animales. Matarić (1993), de igual forma

la sociología trata de explicar este fenómeno bastante común entre los grupos humanos. El campo de la ingeniería también se ve inmerso en el estudio de las interacciones entre diversos grupos ya sea de *software*, o *hardware*.

Los comportamientos colectivos, como lo demuestran los insectos sociales, son una forma de control descentralizado que pueden ser útiles en el control de sistemas con múltiples robots Kube y Zhang (1993). Es por esto, que la comunidad científica se ha dado a la tarea de diseñar sistemas que emulen las tareas de diferentes comunidades, con el fin de aprovechar las ventajas creadas por las interacciones, tal es el caso de Dorigo *et al.* (2013), en el que se ha diseñado diferentes esquemas de trabajo colectivo para grupos de robots, los cuales, permiten dividir el trabajo de cada uno de los agentes con el fin de reducir el gasto total de energía o el tiempo que tarden en realizar el trabajo. Otros ejemplos se dan en Olfati-Saber (2006), quien presenta tres algoritmos para la congregación de grupos con múltiples sistemas dinámicos, tal como lo hacen las bandadas de aves para su desplazamiento.

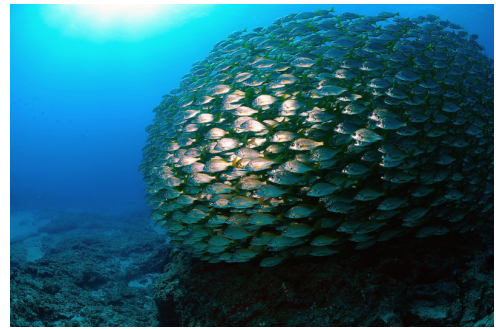
En el presente trabajo de tesis se propone diseñar controladores para grupos de robots móviles, utilizando un enfoque basado en las interacciones de los miembros. El estudio de sistemas de este tipo se aborda desde la óptica de la *teoría de sistemas complejos*, ciencia enfocada en analizar los diferentes comportamientos emergentes en las sociedades, tal es el caso de un grupo de robots móviles Wang (2002). Se pretende hacer uso de las diferentes herramientas existentes en la ciencia de la complejidad, las cuales analizan los sistemas desde una perspectiva global, centrándose en cómo las interacciones entre los individuos modifican el comportamiento final del grupo, el cual es considerado como un todo Bar-Yam (1997).

1.2 Sistemas complejos

La ciencia convencional se apoya en la filosofía del reduccionismo para explicar los diferentes fenómenos de la naturaleza, esto es, busca reducir los sistemas hasta los elementos más



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1. Ejemplos de grupos presentes tanto en la naturaleza como en la sociedad: (a) Un enjambre de abejas trabajando en conjunto para crear una colmena. Fuente: <http://bit.ly/BeesGroup>. (b) Un banco de peces formado para hacer frente a los depredadores. Fuente: <http://bit.ly/marinos1> (c) Personas en un concierto aplaudiendo, después de un momento, todos aplauden al unísono. Fuente: <http://www.reconoce.mx> (d) Un equipo de trabajo que se divide las tareas para alcanzar un objetivo común. Fuente: <http://www.copsctenerife.org>

básicos que lo constituyen, pues supone que, estudiando a fondo las partes que conforman dicho fenómeno éste puede ser descrito completamente. Esta forma de analizar a los sistemas se puede reducir en la siguiente frase *el todo no es nada más que la suma de sus partes*. Esta teoría es muy útil para describir sistemas pequeños o simples, en los que los elementos que lo conforman no se encuentran relacionados entre sí (*i.e.*, no existe comunicación entre las partes que lo componen), pero cuando se presentan interacciones entre los mismos, es difícil describir el comportamiento del sistema completo basado solamente en el completo estudio de sus componentes, pues dichas interacciones permiten que *el todo sea más que la suma de sus partes*, pues por medio del intercambio de información entre los individuos, se forman estructuras, se generan variedades, se produce complejidad, etc. En fin, la composición final o el *todo* presenta dinámicas más ricas que los que suceden en cada uno de los individuos Auyang (1999).

No existe una definición precisa (o universalmente aceptada) de sistema complejo, pero en el presente trabajo, se utilizará el término para describir *sistemas formados por varios componentes, cuyo comportamiento global* no puede ser inferido solamente por el comportamiento de sus componentes Bar-Yam (1997). De acuerdo con Matarić (1993) el *comportamiento global de los sistemas complejos*, como los grupos de agentes sociales, es determinado por las interacciones locales de las partes que los constituyen. Como ejemplos clásicos de sistemas complejos se tienen: al cerebro humano, pues, mediante la interacción de las neuronas o sinapsis generan los movimientos del cuerpo, se activa la memoria, el ingenio etc. También se puede mencionar a algún ecosistema, en el cual la biodiversidad presente coexiste y las interacciones de los miembros mantiene un equilibrio que permite caracterizar al ecosistema. Se encuentran también las redes de colaboración en investigación, en donde científicos con líneas de investigación similares o complementarias, enriquecen el campo al apoyar su investigación en los avances reportados en los artículos de sus colegas, Newman (2001). En la ingeniería se tiene por ejemplo el internet, la red global de servidores y computadoras por la

que se transfiere infinidad de información día a día, Wang (2002).

En los últimos años el concepto de comportamiento se ha vuelto popular entre las comunidades de inteligencia artificial (IA), control y aprendizaje. Desde la perspectiva de la salida de un sistema, se entiende el comportamiento como la dinámica de interacción entre el agente y su entorno, mientras que visto como una estructura de control, se define el comportamiento como la ley de control para alcanzar/mantener un objetivo en particular, Mataric (1995). Es por esto, que un área de la ciencia de la complejidad con bastante auge en la actualidad es la del control de grupos de robots, pues se supone que un sistema de múltiples robots debe ser más eficiente y tener mayor tolerancia a fallas debido al número de sus componentes así como más rentable, a raíz de la simplicidad de los individuos y más flexible en su configuración de trabajo debido a su redundancia que un solo robot. Kube y Zhang (1993). Por tanto, en este trabajo de tesis se analizarán las propiedades emergentes de un sistema formado por un grupo de robots móviles, en donde entendemos a las *propiedades emergentes* como los efectos a gran escala (*i.e.*, que afectan al grupo completo) producidos por las interacciones locales entre los agentes Axelrod (1997).

1.3 Robótica móvil

En nuestro siglo, el desarrollo de las máquinas ha estado fuertemente influido por el progreso tecnológico. De esta forma se pasa de máquinas que tienen como objetivo exclusivo la amplificación de las capacidades físicas del hombre a instrumentos capaces de procesar información, complementando y, en algunos casos, sustituyendo al hombre en algunas actividades intelectuales, Baturone (2001). La fascinación del hombre por la creación de estos autómatas derivó en el extenso uso de lo que hoy conocemos como *robots*. Esta palabra fue utilizada por primera vez en el año 1921, cuando el escritor checo Karel Capek (1890-1938) estrena en el teatro nacional su obra *Rossum's Universal Robot* (R.U.R.). El origen de la palabra proviene del eslavo *robotá*, que se refiere al trabajo realizado de manera forzada, Barrientos *et al.*

(2007). En la actualidad, la Real Academia de la Lengua Española define la palabra robot como: “Máquina o ingenio electrónico programable, capaz de manipular objetos y realizar operaciones antes reservadas solo a las personas”.

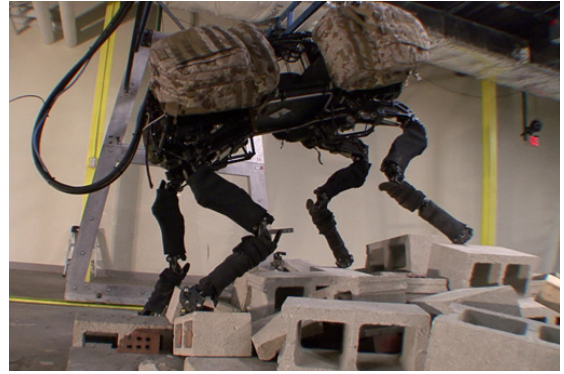
Existe infinidad de robots, los cuales responden a la gran cantidad de diferentes tareas para los que fueron creados, en este trabajo se presta especial atención a una categoría que tiene franco crecimiento en los últimos años, la *robótica móvil*. El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica, restringido inicialmente al alcance de una estructura mecánica anclada en uno de sus extremos. Se trata también de incrementar la autonomía, limitando todo lo posible la intervención humana, Baturone (2001).

Dentro de la robótica móvil se presentan varias clasificaciones, Baturone (2001) propone la siguiente clasificación basada en el tipo de locomoción de los robots:

- *Vehículos con ruedas*, de implementación relativamente sencilla, los cuales se desplazan por diferentes terrenos, a su vez se clasifican dependiendo de la configuración de sus ruedas, en esta categoría se encuentran los robots tipo Ackerman, triciclo, robot con direccionamiento diferencial, tipo *skid steer*, etc.
- *Robots con patas*, las cuales permiten aislar el cuerpo del terreno empleando únicamente puntos discretos de soporte. La configuración mas común es la de seis patas. En los últimos años, la búsqueda de robots humanoides (*i.e.*, con morfología similar a la del ser humano) ha desencadenado un conjunto de esfuerzos para diseñar sistemas de locomoción eficientes con solo dos patas.
- *Configuraciones articuladas*, este tipo de robots es de interés para su empleo en terrenos difíciles en los que debe adaptarse el cuerpo del robot. La solución más simple consiste en articular dos o más módulos con locomoción mediante ruedas, sin embargo, en años recientes, el uso de sistemas de locomoción basados en la naturaleza ha permeado este tipo de robots.
- *Robots Submarinos y aéreos*. Generalmente son el resultado de la evolución de vehículos pilotados por el hombre, los cuales se desplazan en estos medios. Entre sus aplicaciones más comunes se encuentran la inspección, recolección de datos y el mantenimiento de instalaciones en entornos naturales en los que el hombre tiene acceso limitado.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2. Diferentes Robots móviles. (a) Un grupo de robots diferenciales Khepera III utilizados para investigación en robótica colectiva. Fuente: Laboratorio AREA de la Universidad Basilicata, en Potenza, Italia (<http://bit.ly/AREA-Lab>). (b) Robot BigDog desarrollado para aplicaciones militares de transporte por parte de la empresa Boston Dynamics. Fuente: Boston Dynamics (<http://bit.ly/BostonDy>). (c) Robot ACM-R5H de la empresa nipona HiBot, cuenta con locomoción inspirada en las serpientes con la cual puede desplazarse tanto en tierra como dentro del agua. Fuente: HiBot (<http://www.hibot.co.jp>). (d) AR Drone 2.0 de Parrot, cadricóptero que incluye gps para localización y cámara para transmitir video en tiempo real, en los próximos años se planea utilizarlos para entrega de paquetería. Fuente: Parrot (<http://bit.ly/dParrot>)

1.3.1 Sistemas multi-agente

El hecho de que el hombre aún debe inventar un robot altamente autónomo capaz de funcionar en un ambiente cambiante ha llevado a los investigadores a proponer organizaciones de varios robots más simples en poblaciones orientadas a lograr objetivos Kube y Zhang (1993). Estas organizaciones son conocidas como Sistemas Multi-Agente (SMA). Los cuales son posibles gracias al avance de la inteligencia artificial, quien estudia estos fenómenos dentro de la denominada Inteligencia Artificial Distribuida (IAD), Stone y Veloso (2000). Típicamente, los SMA son complejos, ya sea por que estan formados por un gran número de elementos, o por que las interacciones entre los elementos no son simples. Mataric (1995). Algunas aplicaciones en torno a los SMA incluyen, Alexandres (2007):

- Control en tráfico aéreo.
- Educación.
- Asistencia personal.
- Minería de datos.
- Comercio electrónico.
- Recuperación de la información.
- Sistemas de control.
- Administración de redes para computadoras.
- Análisis de imágenes.
- Robótica.
- Monitorización domiciliaria de pacientes con patologías cardiovasculares.
- En la bolsa de valores.

- Subasta electrónica.
- Industria de fabricación.

Según Alexandres (2007), un SMA tiene las siguientes características:

- Cada agente tiene información o capacidad incompleta para resolver el problema.
- Cada agente tiene un comportamiento concurrente. Por ejemplo, el agente puede realizar varias tareas e interactuar con varios agentes simultáneamente.
- No hay un control global del sistema.
- Los datos son descentralizados.

De acuerdo a éstas características, *modelar los sistemas complejos como un SMA* tiene las siguientes ventajas:

- Se evitan problemas de limitación de recursos o el riesgo de fallos de manera natural en situaciones críticas que se podrían tener al encomendar un problema complejo a un solo agente.
- Se permite la interconexión e interoperabilidad de sistemas existentes.
- Se obtiene una solución flexible a un problema en una sociedad de agentes interactuando.
- Se tienen soluciones eficientes a problemas en los que se requiere el uso de información que está espacialmente distribuida.
- Se permite la extensibilidad ya que el número y la capacidad de los agentes trabajando en el sistema puede cambiar dinámicamente.

Como se puede observar, los SMA abarcan distintas áreas de la ingeniería, pues, en todos estos casos el uso de agentes es válido. Este término podría causar controversia, pues diversas ciencias lo utilizan para describir a los actores bajo su estudio, Russell y Norvig (2010) definen a un *agente* como “cualquier cosa capaz de percibir su medio ambiente con la ayuda de sensores y actuar en ese medio utilizando actuadores”. Esta definición permite englobar a un sin fin de individuos, entre los cuales se encuentran los sistemas robóticos. Por tanto, a lo largo de este trabajo *se* utilizarán indistintamente los términos agente y robot, para describir a los elementos de un sistema robótico sinérgico (en el cual sus capacidades son mayores a la suma de las individuales), Kube y Zhang (1993).

1.4 Sincronización

La palabra *síncrono* a menudo se encuentra tanto en el argot científico como en el lenguaje cotidiano. Dicha palabra proviene de los vocablos griegos $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ (chronos, que significa tiempo) y $\sigma\acute{\upsilon}\nu$ (syn, que significa común, lo mismo). En una traducción literal la palabra *síncrono* significa “que tiene el mismo tiempo” mientras que el Diccionario de la Real Academia Española lo define como “proceso o efecto que ocurre en completa correspondencia temporal con otro proceso u otra causa.” Por tanto, la sincronización se entiende como el *ajuste de ritmos de oscilación de los objetos debido a su interacción débil*. Este término, al igual que *síncronia* y *sincronización*, se refiere a una variedad de fenómenos presentes en la mayoría de las ciencias naturales, la ingeniería y la vida en sociedad, tal es el caso de la sincronización del canto de los grillos, o la iluminación de las luciérnagas, también encontramos ejemplos en la sociedad, como la sincronización en los aplausos de una audiencia, o el fenómeno presente en los estadios de fútbol conocido como “la ola”. Pikovsky *et al.* (2001).

La sincronización fue descrita por primera vez alrededor del año 1665 por el investigador holandés Christiaan Huygens. Quien, postrado en su cama por una enfermedad, observó que los dos relojes de péndulo que tenía en su pared se movían con la misma frecuencia, pero en

diferente dirección; cuando uno estaba en la parte más alta a la izquierda del recorrido, el otro se encontraba a la derecha. Después de una serie de observaciones, llegó a la conclusión de que las vibraciones imperceptibles de cada reloj se transmitían al otro por medio de la pared. Para demostrar este fenómeno propuso su famoso experimento (figura 3) en el cual montó dos relojes de péndulo sobre una viga de madera sostenida en el aire por un par de sillas, con el cual demostró que por medio de un buen medio acoplante los péndulos alcanzaron a sincronizar sus ritmos *Pikovsky et al.* (2001).

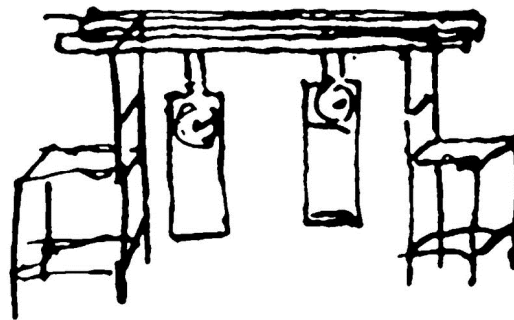


Figura 3. Dibujo original de Christiaan Huygens que ilustra su experimento con dos relojes de péndulo colocados en un soporte común. *Pikovsky et al.* (2001)

A mediados del siglo XIX, en su famoso tratado sobre la teoría del sonido, William Strutt (Lord Rayleigh) describió el interesante fenómeno de sincronización en sistemas acústicos, observado en los órganos de tubos, él postuló que si dos tubos del mismo tono se colocan juntos, las vibraciones producidas por cada uno pueden disminuir el sonido del otro, casi hasta el silencio, *Pikovsky et al.* (2001). Una nueva etapa de la investigación en sincronización se debe al desarrollo del campo de la ingeniería eléctrica. El 17 de febrero de 1920, W.H. Eccles y J.H. Vincent aplicaron para una patente en el Reino Unido concerniente a su descubrimiento de la propiedad de sincronización de un generador de triodo (*i.e.*, un dispositivo eléctrico simple basado en un tubo de vacío que produce una corriente alterna periódica). Años más tarde, Edward Appleton y Balthasar Van der Pol replicaron y extendieron el experimento de Eccles y Vincent; gracias a esto se dieron los primeros pasos en el estudio teórico de la

sincronización. Derivado de sus aportaciones, las radio comunicaciones obtuvieron un gran impulso, Pikovsky *et al.* (2001).

En Pecora y Carroll (1990) se presenta uno de los primeros intentos por sincronizar redes de circuitos caóticos, lo cual desencadenó el uso de estos sistemas para las comunicaciones encriptadas. A partir de esto, se han encaminado esfuerzos para lograr la sincronización en diferentes sistemas caóticos, tal es el caso de osciladores (Posadas-Castillo *et al.* (2009)), aplicaciones en redes neuronales (Posadas-Castillo *et al.* (2008a), Serrano-Guerrero *et al.* (2013)), en comunicaciones por medio de láseres (Posadas-Castillo *et al.* (2008b)), aplicaciones que involucran transmisión de información por fibra óptica (Arellano-Delgado *et al.* (2013)). En años recientes el interés por la sincronización de sistemas complejos ha captado la atención de la comunidad científica, por ejemplo en Wu y Chua (1995b), Wang y Chen (2002) se describen procedimientos para lograrlo. También en Wang (2002) se analiza la relación entre la topología de conexión de las redes y el fenómeno de sincronización. Recientemente, en Martínez-Clark *et al.* (2013) se reporta la sincronización de robots móviles en redes complejas, generadas por un algoritmo de mundo pequeño determinista.

1.5 Formación

En la naturaleza, la formación beneficia a los animales en diferentes maneras, por ejemplo la congregación de aves les permite recorrer mayores distancias al optimizar el flujo de aire entre sus alas. Las manadas de cebras se mantienen juntas y en formación para repeler los ataques de sus depredadores naturales, Balch y Arkin (1998). Debido a que los grupos de robots móviles pueden beneficiarse con estas técnicas, investigadores en el campo de la robótica y de la inteligencia artificial se han dado a la tarea de trasladar estas dinámicas biológicas para producir comportamientos colectivos en agentes, tanto físicos como simulados.

Por formación en un grupo de robots móviles entendemos a la *distancia que guardan en-*

tre los mismos con el fin de alcanzar ciertas configuraciones predefinidas Stanoev y Smilkov (2013). Éstas pueden ser fijas o variantes en tiempo. Esta estrategia de control ha tomado fuerza en años recientes, pues cada vez son más las tareas que pueden realizar un grupo de robots móviles, entre ellas podemos mencionar: exploración y vigilancia, mapeo, construcción y transportación en grupo, formación de satélites para comunicación, formación de aviones de guerra, etc. Yamaguchi *et al.* (2001). Un beneficio directo de la formación es que permite a los robots concentrar sus sensores en ciertas porciones del entorno mientras que las demás son cubiertas por los otros miembros del grupo, Balch y Arkin (1998). Esta propiedad es altamente aprovechada por los robots exploradores. Una de las aplicaciones en formación de agentes mas concurridas es la congregación, la cual se presenta entre un gran número de agentes que interactúan entre sí y tienen un objetivo grupal común. Olfati-Saber (2006). En Mataric (1995) se propone el siguiente conjunto, obtenido empíricamente, de comportamientos básicos para robots móviles que interactúan entre sí: evasión, seguimiento, congregación, dispersión, búsqueda de un punto de destino (*homing*) y movimiento errante. La combinación de algunos de estos comportamientos da lugar a formaciones con distintos objetivos. Algunos resultados recientes en cuanto a formación y aplicaciones de la misma, incluyen a Yamaguchi *et al.* (2001), Qu *et al.* (2007), Portugal y Rocha (2013).

1.6 Objetivos

Derivado del gran interés en el estudio de sistemas complejos aplicados a la robótica, con la realización de este trabajo de investigación se propone alcanzar el siguiente objetivo general:

Aplicar la teoría de sistemas complejos para el control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles.

por medio del cumplimiento de los siguientes objetivos particulares:

- *Sincronizar grupos de robots móviles.*
- *Formar redes de robots móviles.*
- *Formar y sincronizar redes de robots móviles en diferentes topologías.*
- *Aplicar los comportamientos colectivos de redes de robots móviles en labores de exploración, reconocimiento, patrullaje, etc.*

Cabe destacar, que los alcances de este trabajo de tesis abarcan la obtención de resultados téricos mediante rigurosas pruebas analíticas y expresados de manera formal acompañados de resultados numéricos obtenidos mediante el uso de paquetes de cómputo como Matlab.

1.7 Contribuciones de este trabajo de tesis

Algunas de las contribuciones mas importantes derivadas de este trabajo de tesis de maestría, son:

La sincronización de redes de robots móviles representados por masas puntuales acopladas en redes complejas deterministas en mundo pequeño generadas por un algoritmo de crecimiento, recientemente reportado en la literatura. La sincronización en todos los casos de crecimiento de la red, se plantea alcanzar invocando resultados de sincronización de sistemas complejos descritos en este documento.

El diseño de un controlador basado en la teoría de sistemas complejos para la formación de grupos de robots móviles, los cuales, son representados por el modelo matemático de masas puntuales. Se propone un controlador proporcional basado en la posición de cada uno de los robots y se presentan las condiciones necesarias para alcanzar el objetivo de formación.

Contribuciones que se recopilan en los siguientes artículos en extenso en congreso:

- Martínez-Clark, R., Reyes-De la Cruz, D., Cruz-Hernández, C., López-Gutiérrez, R. M., y Pinedo-lomelí, L. (2013). *Sincronización de robots móviles en redes complejas deterministas de mundo pequeño*. En Memorias del Congreso Internacional COMPUMAT 2013. Del 27 al 29 de noviembre del 2013, La Habana, Cuba . ISBN 978-959-286-022-3.
- Martínez-Clark, R., Cruz-Hernández, C., Reyes-De la Cruz, D. y Pinedo-lomelí, L. (2013). *Diseño de un controlador para la formación de grupos de robots móviles*. Sometido al XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA 2014. Del 14 al 17 de octubre del 2014, Cancún, México.

1.8 Organización del manuscrito

Este trabajo de tesis para la obtención del grado de maestría se encuentra dividido en 7 capítulos, después de la introducción y presentación de objetivos del capítulo 1, el resto del trabajo se distribuye de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se describen conceptos preliminares, los cuales serán de ayuda para comprender la teoría de los capítulos siguientes. Se presenta una breve historia sobre los inicios de la teoría de grafos, así como la descripción de los tipos de acoplamientos que existen y las matrices involucradas en la representación numérica de los grafos. Estas descripciones están acompañadas de ejemplos que permiten visualizar los conceptos presentados. En la segunda parte del capítulo se presentan diferentes topologías de conexión, esto es, la geometría que se forma por el acoplamiento de los nodos. Se realiza una descripción gráfica y se plantean ventajas y desventajas sobre algunas topologías regulares.

En el capítulo 3 se presentan formalmente los comportamientos colectivos de interés para este trabajo de investigación, este capítulo se divide en dos partes, la sincronización de redes

y la formación de las mismas. En cada una de las partes se dan las condiciones necesarias para que un grupo de sistemas dinámicos exhiban dichos comportamientos. Se presentan propuestas de leyes de control para producir dichos fenómenos en redes de robots móviles. Además se incluyen ejemplos para ilustrar los conceptos expuestos.

El capítulo 4 contiene los resultados numéricos obtenidos de la sincronización de redes de robots móviles en diferentes topologías. Invocando las técnicas de control descritas en el capítulo anterior, se proponen diferentes escenarios para evaluar la efectividad del control mediante la sincronización de redes de tres robots móviles, representados por un modelo matemático reportado en la literatura.

En el capítulo 5 se analiza la formación de grupos de robots móviles, mediante la obtención de resultados numéricos a través de simulaciones realizadas en torno a la formación de redes de tres robots móviles acoplados en diferentes topologías, en este capítulo se observan los efectos de los diferentes acoplamientos para la generación del comportamiento emergente bajo estudio.

El capítulo 6 contiene las aplicaciones de los comportamientos colectivos estudiados, en especial, se analiza el caso de patrullaje de áreas por medio de grupos de robots móviles en formación. Se presentan las técnicas de control seleccionadas para lograr el patrullaje y los resultados numéricos obtenidos mediante simulación, con esto se pretende dar un panorama de las posibles líneas de investigación derivables de este trabajo de tesis.

Por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones más relevantes sobre el trabajo reportado a través de los capítulos anteriores y se mencionan los posibles trabajos futuros acordes al tema en cuestión.

Capítulo 2

Preliminares

En el presente capítulo se abordan algunos conceptos necesarios para apoyar la comprensión de los temas desarrollados en capítulos posteriores. El análisis matemático de las interacciones entre los elementos de un sistema complejo, se basa principalmente en el uso de la *teoría de grafos* y en el estudio de las *topologías de conexión* de las redes complejas. A lo largo de este trabajo de tesis se consideran redes complejas formadas por *nodos idénticos*, los cuales representan a robots móviles.

2.1 Teoría de grafos

El inicio del estudio sistemático de problemas empleando grafos (conjunto de puntos y líneas que los unen, Foulds (1992)) se atribuye al gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) el cual resolvió matemáticamente el famoso acertijo de los puentes de Königsberg en 1736. A través de la ciudad de Königsberg Prusia (actualmente Kaliningrado, Rusia), fluía el río Pregel, el cual rodeaba a la isla de Kneiphof, como se ve en la figura 4 (a). El acertijo consistía en encontrar una trayectoria que iniciando en cualquier sección de tierra cruce cada uno de los siete puentes una sola vez para terminar en el punto de inicio. Euler, representó la situación mediante un grafo, asignando a cada pieza de tierra un punto y a los puentes líneas que unen esos puntos (figura 4 (b)) y probó que esto era imposible, puesto que se requiere que todos los puntos tengan una incidencia (*i.e.*, líneas que llegan a él) par. Este enfoque resultó innovador pues, el problema de realizar los intentos de solución recorriendo los puentes se transformó en encontrar una secuencia de puntos y líneas que cumpliera con las condiciones propuestas, Foulds (1992).

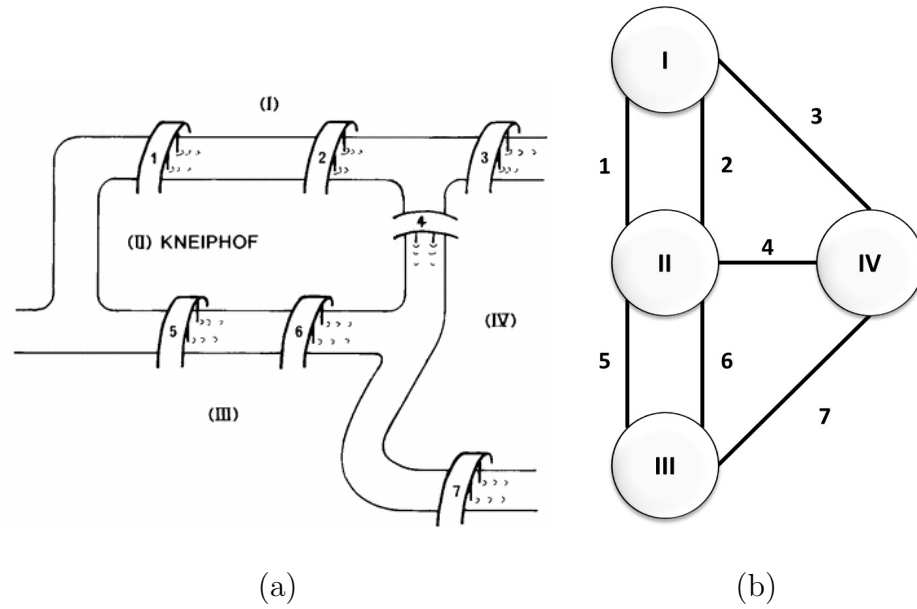


Figura 4. El acertijo de los puentes de Königsberg, (a) ciudad de Königsberg, Prusia en el siglo XVIII, fuente: Foulds (1992) y (b) grafo asociado a la situación, las piezas de tierra se representan mediante puntos y los puentes como líneas que los unen.

Posteriormente, en 1856 el astrónomo real de Irlanda, W.R. Hamilton presentó al mundo el siguiente acertijo. Jugando sobre el grafo de un dodecaedro, una persona debía encontrar un camino que pasara por las líneas indicadas, visitando cada punto una sola vez, y regresando al punto de inicio. Hamilton vendió el juego a una empresa de juegos inglesa y una nueva versión apareció, en la cual los puntos adquirieron nombres de ciudades reales y el juego consistía en "dar la vuelta al mundo". Este juego dio paso a lo que hoy se conoce como caminos hamiltonianos (ciclos que pasan una sola vez por cada punto dentro de él) en teoría de grafos. La figura 5 muestra una tabla original del juego de Hamilton.

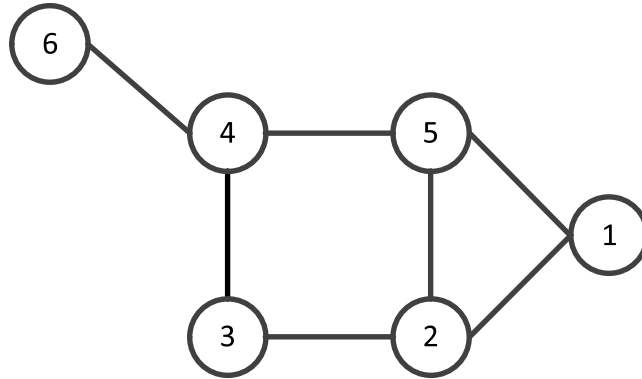


Figura 5. Pieza original del famoso juego de Hamilton inventado en 1857, solo se conservan tres ejemplares en el mundo. Fuente: www.puzzlemuseum.com

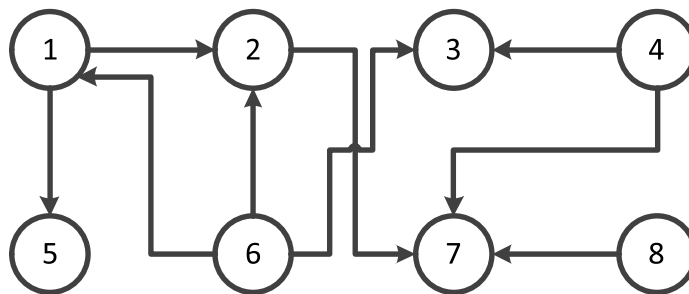
Formalmente, la teoría de grafos es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los grafos Foulds (1992). Un grafo es una representación gráfica de un sistema compuesto en el que solo se mantienen las características de conectividad entre los diferentes componentes conocidos como *nodos o vértices*. Matemáticamente se define a un grafo $G = (V, E)$ como el par formado por un conjunto finito y no vacío V de *vértices* y un conjunto E de *aristas* que conectan ciertos vértices Berge (2001). En la figura 6 se muestra dos ejemplos de grafos.

En la figura 6 se observa una propiedad importante de los grafos, la cual tiene que ver con el acoplamiento entre los nodos (*i.e.*, el flujo de información). Mientras que en la figura 6 (a) las aristas entre los nodos no indican el sentido del flujo de información, en la figura 6 (b) claramente lo hacen. Típicamente se utiliza la notación de la figura 6 (a) para representar grafos con *acoplamiento bidireccional* (*i.e.*, ambos nodos en los extremos de la arista pueden enviar y recibir información el uno del otro) mientras que los grafos de la forma de la figura 6 (b) cuentan con *acoplamiento unidireccional*. Este tipo de grafos también se conoce como *grafos dirigidos o digrafos* (las aristas dirigidas reciben el nombre de arcos). La flecha del arco denota el sentido del flujo de información, en este caso, un nodo solamente envía información

y el otro la recibe. Existe la posibilidad de una tercer categoría, la cual contiene aristas tanto bidireccionales como unidireccionales, este tipo de grafos son conocidos como grafos mixtos Berge (2001).



(a)



(b)

Figura 6. Ejemplos de grafos: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido o digrafo.

2.1.1 Matrices asociadas a un grafo

El uso de la teoría de grafos para el análisis y descripción de las interacciones entre los miembros de un grupo resulta bastante útil, pues al ser una representación gráfica de las conexiones, rápidamente se tiene una idea del flujo de información entre los nodos, pero para realizar cálculos y simulaciones numéricas, esta representación gráfica representa un reto para la programación, es por esto que es necesario encontrar una estructura que permita una fácil implementación en los paquetes informáticos de cálculo. Por esta razón, un grafo puede

definirse mediante álgebra lineal, así como algunas medidas que permiten definir cuantitativamente a un grafo, tales como el coeficiente de agrupamiento o el número cromático. Para el desarrollo de este trabajo, se utilizarán las siguientes cuatro matrices, *la matriz de adyacencia, la de grado, laplaciana y la matriz de acoplamiento*, para representar perfectamente a un grafo, Wang (2002).

Matriz de adyacencia $\Gamma(G)$

es una matriz cuadrada de dimensión $N \times N$, en donde N representa el número de nodos en la red. Esta es una matriz que se compone de 1 y 0, que *representa las conexiones entre los diferentes nodos*, en donde sus elementos γ_{ij} están dados por, Berge (2001)

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ 0, & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (1)$$

en donde $(i, j) \in E(G)$ significa que existe una arista que une a los nodos i y j . En el caso de los digrafos, se tiene que $\gamma_{ij} = 1$ si existe un arco que va del nodo j al nodo i . A manera de ejemplo, a continuación se presenta la matriz de adyacencia correspondiente al grafo G de la figura 6 (a)

$$\mathbf{\Gamma}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

mientras que la matriz de adyacencia para el digrafo G_d de la figura 6 (b) es,

$$\mathbf{\Gamma}(G_d) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Matriz de Grado $D(G)$

es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$ que representa el *número de vecinos que tiene cada nodo*. Los elementos d_{ij} de dicha matriz están dados por, Wang (2002)

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (4)$$

en donde se conoce al coeficiente d_i como el *grado del nodo i* , el cual se calcula como la suma de los elementos de la fila i de la matriz de adyacencia $\mathbf{\Gamma}(G)$, esto es

$$d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N (i, j) \in E(G), \quad (5)$$

en el caso de los digrafos podemos distinguir entre el grado de entrada d_i^- y el grado de salida d_i^+ , en donde el primero es la suma de todos los arcos que tienen al nodo i como final (la flecha del arco apunta hacia ellos) y el segundo es la suma de los que lo tienen como inicio (la punta de la flecha del arco apunta desde ellos). Para el presente documento, *se utilizará el grado de entrada para representar el grado de un digrafo*. A continuación se presenta la matriz de grado para el grafo G de la figura 6 (a)

$$\mathbf{D}(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

y la matriz de grado para el grafo G_d de la figura 6 (b) tiene la siguiente forma,

$$\mathbf{D}(G_d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Matriz laplaciana $L(G)$

Es una representación matricial de un grafo. Tiene dimensión $N \times N$ y se forma con la diferencia entre la matriz de grado $D(G)$ y la matriz de adyacencia $\Gamma(G)$ Wu y Chua (1995a), esto es,

$$L(G) = D(G) - \Gamma(G), \quad (8)$$

por lo tanto es posible calcular cada uno de sus elementos l_{ij} de la siguiente manera

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } i = j, \\ -1, & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ 0, & \text{para otro caso,} \end{cases} \quad (9)$$

para el caso de grafos no dirigidos (*i.e.*, acoplamiento bidireccional de sus nodos, figura 6 (a)) la matriz laplaciana posee las siguientes características Stanoev y Smilkov (2013):

- Las filas de $L(G)$ suman 0, lo que significa que se tiene una matriz singular con espacio nulo (o *kernel*) formado por puros unos (*i.e.*, $Ker [L(G)] = (11\dots 1)^T$). Por tanto, existe un valor propio igual a cero, (*i.e.*, $\lambda_1 = 0$).
- Todos sus valores propios son reales y no negativos (*i.e.*, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$).
- Si además, el grafo G está fuertemente conectado (*i.e.*, existe un camino desde cada uno de los nodos hacia cualquiera de los otros) el valor propio igual a cero de la matriz laplaciana es simple, es decir, tiene multiplicidad igual a uno.

Como ejemplo, se presenta la matriz laplaciana del grafo de la figura 6 (a)

$$\mathbf{L}(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

mientras que el digrafo G_d de la figura 6 (b) tiene la siguiente matriz laplaciana,

$$\mathbf{L}(G_d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

El uso de esta matriz se remonta hasta el famoso teorema sobre árboles de expansión en un grafo, enunciado por Gustav Kirchhoff. Esta matriz recibe el nombre de matriz laplaciana de un grafo gracias a que su aparición en la descripción de redes dinámicas tiene la misma forma que la fórmula de difusión simple de los gases (segunda ley de Fick), en donde el operador laplaciano (∇^2) es reemplazado por la matriz \mathbf{L} , Stanoev y Smilkov (2013).

Matriz de acoplamiento $A(G)$

Para el desarrollo de los métodos de control de comportamientos colectivos descritos en los siguientes capítulos, se utilizará la matriz de acoplamiento, que se define como la matriz laplaciana negativa Wang (2002), esto es,

$$A(G) = -L(G), \quad (12)$$

La característica más importante de esta matriz es que, *todos sus valores propios son negativos excepto uno*, que es igual a cero en el caso de grafos fuertemente conectados Posadas-Castillo *et al.* (2008a).

2.2 Topologías de conexión

Otro aspecto a considerar en un grafo es la topología de conexión, es decir, la geometría que adopta la red por la conexión entre sus nodos. Estas configuraciones de acoplamiento en las redes pueden dividirse en dos grandes grupos: a) redes con topologías regulares, en las cuales el acoplamiento entre los nodos tiene una estructura estrictamente definida, entre ellas se encuentran las topologías de *acoplamiento global, anillo o vecino cercano, cadena y estrella*, Posadas-Castillo (2008); y b) redes con topologías irregulares, en este tipo de topologías el acoplamiento de los nodos no tiene un patrón definido, pero estas redes presentan características muy particulares las cuales permiten clasificarlas, entre estas se encuentran las *redes de mundo pequeño, de libre escala, redes aleatorias, red de árbol, etc.* Wang (2002). Para el desarrollo de este trabajo de tesis sólo se consideran redes de robots móviles con topologías regulares.

2.2.1 Redes con topología de acoplamiento global

Esta topología se caracteriza porque cada nodo se encuentra conectado con todos los demás Wu y Chua (1996). Esta topología permite una rápida comunicación entre los nodos,

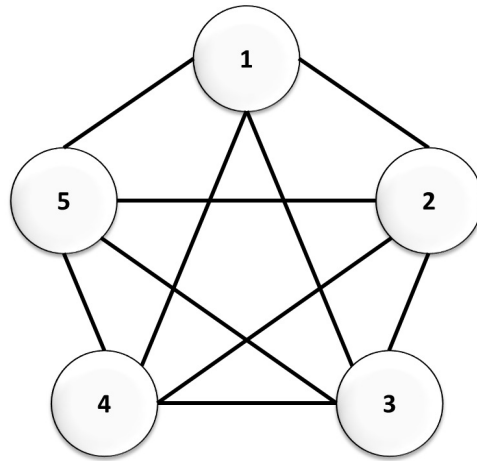


Figura 7. Red de 5 nodos con acoplamiento global.

pues la longitud de camino promedio (*i.e.*, el número de aristas que se deben recorrer para llegar de un nodo a cualquier otro) es igual a 1, Wang (2002). La desventaja de la misma se da sobre todo en la implementación, pues el número de acoplamientos en la red es alto, lo cual se traduce en altos costos de cableado, terminales de ruteo, etc. En la figura 7 se muestra un ejemplo de una red con acoplamiento global formada por 5 nodos

La matriz de acoplamiento para esta topología con acoplamiento bidireccional tiene la siguiente estructura,

$$\mathbf{A}_{gc} = \begin{bmatrix} -N+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -N+1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -N+1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -N+1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

con valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_N = -N$. Obsérvese que los valores propios de esta matriz tienden a infinito mientras el número de nodos en la red tiende a infinito. Resulta importante hacer incapié en esta propiedad pues la metodología de sincronización propuesta en Wang (2002) y utilizada en este trabajo de tesis se basa en el cálculo de estos valores propios.

2.2.2 Redes con topología de anillo

En esta topología, el nodo i se acopla con el nodo $i - 1$ y con el nodo $i + 1, i = 1, 2, \dots, N$. Esto es, cada nodo se conecta con el nodo anterior y el siguiente, y en el caso particular del último nodo, éste se acopla con el primer nodo de la red, formando una trayectoria cerrada Wu y Chua (1996). Como cada nodo se conecta con los nodos más cercanos a él, comúnmente esta topología recibe el nombre de *vecino cercano*, Wang (2002). La figura 8 muestra un ejemplo de acoplamiento en anillo para una red de 5 nodos.

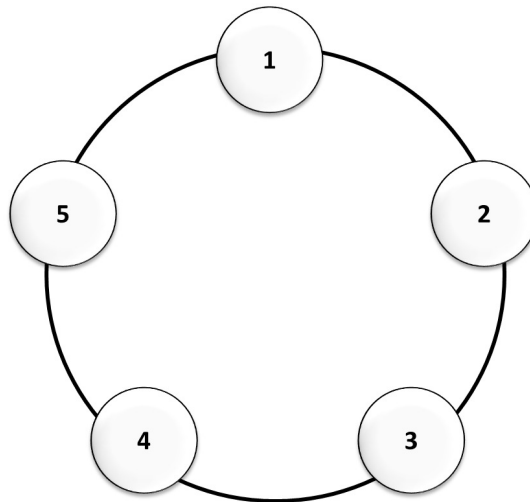


Figura 8. Red de 5 nodos acoplados con topología de anillo o vecino cercano.

La matriz de acoplamiento asociada a esta topología es,

$$\mathbf{A}_{nc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

En Wang y Chen (2002) se propone calcular el k -ésimo valor propio de (69) mediante,

$$\lambda_k = -4sen^2 \left(\frac{(k-1)\pi}{N} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

Nótese que a medida que N aumenta, los valores propios de (69) tienden a cero Posadas-Castillo (2008).

2.2.3 Redes con topología de cadena

Esta topología, también conocida como topología de camino Wu y Chua (1996) tiene un acoplamiento similar al acoplamiento en anillo, la diferencia es que, en este caso, *el primer nodo no se encuentra acoplado con el último*, generando un camino abierto. Al igual que el caso de la topología de anillo, en esta configuración se tiene una longitud de camino promedio muy alta si el número de nodos en la red es grande. Además es poco tolerante a fallos pues, si algún acoplamiento sufre algún percance o presenta un funcionamiento erróneo, todos los nodos que siguen después de esta arista dañada se aislarán de los anteriores a ella, pues solo existe un camino por el que puede fluir la información. La figura 9 muestra un ejemplo de acoplamiento en cadena para una red de 5 nodos.

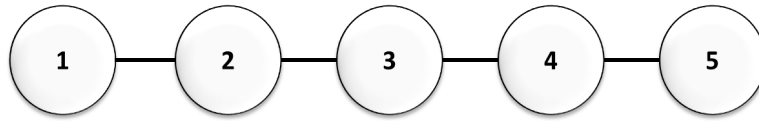


Figura 9. Red con 5 nodos acoplados en topología de cadena.

la matriz de acoplamiento correspondiente a esta topología tiene la siguiente forma,

$$\mathbf{A}_{cc} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

en Wu y Chua (1996) se propone calcular el k -ésimo valor propio de (69) mediante,

$$\lambda_k = -4sen^2 \left(\frac{(k-1)\pi}{2N} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

2.2.4 Redes con topología de estrella

Esta arquitectura de conexión se caracteriza por poseer un nodo central o concentrador que se acopla con todos los demás, los cuales se acoplan solamente con el nodo central, Wu y Chua (1996). La figura 10 muestra un ejemplo de acoplamiento en esta topología para una red con 5 nodos, mientras que la matriz de acoplamiento correspondiente a esta topología es,

$$\mathbf{A}_{sc} = \begin{bmatrix} -N+1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde los valores propios de esta matriz son: $\lambda = \{0, -N, -1, \dots, -1\}$.

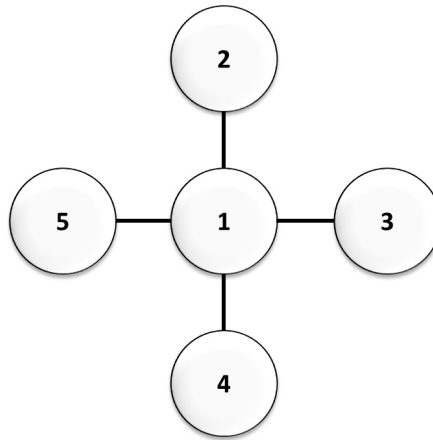


Figura 10. Red en topología estrella compuesta por 5 nodos.

En este capítulo se describieron algunas herramientas que serán utilizadas a lo largo de este documento para el diseño de controladores de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles. Primeramente se describieron los grafos, dentro de los cuales existen tres categorías: *grafos no dirigidos*, *grafos dirigidos o digrafos* y *grafos mixtos*. Esta categorización se realiza en base a los tipos de acoplamiento existentes en las redes, *acoplamiento bidireccional* en el caso de los grafos no dirigidos, *unidireccional* en el caso de digrafos y una combinación de ambos en los grafos mixtos. También se presentaron *la matriz de adyacencia*, *la matriz de grado*, *la matriz laplaciana* y *la matriz de acoplamiento*, con las cuales se representan a los grafos para realizar los cálculos pertinentes sobre ellos. Por último, se presentó el término *topología de conexión*, el cual corresponde a la geometría que se forma por el acoplamiento de los nodos. Se mostraron algunos tipos de topologías, los cuales pueden clasificarse en *topologías regulares e irregulares*. Puesto que en este trabajo de tesis solo se emplean redes con topologías regulares, se describieron las más representativas, las cuales incluyen al *acoplamiento global*, *acoplamiento en anillo o vecino cercano*, *acoplamiento en cadena o camino* y *acoplamiento de estrella*.

Capítulo 3

Comportamientos colectivos de interés

En el siguiente capítulo se describen tanto los conceptos teóricos como los controladores propuestos referentes a los comportamientos colectivos seleccionados para el desarrollo de este trabajo de tesis. Es necesario establecer que los conceptos aquí presentados son válidos para *grupos homogéneos de N robots móviles* (*i.e.*, todos los robots son del mismo tipo), cada uno representado por el modelo matemático de un *sistema dinámico continuo, diferenciable y autónomo* Khalil y Grizzle (2002), los cuales no presenten restricciones de movimiento, dichos robots pueden desenvolverse en alguno de los siguientes escenarios: sobre un eje (una dimensión, *v.g.*, un vehículo guiado automáticamente, figura 11 (a)), en el plano (dos dimensiones, *v.g.*, un robot con llantas, figura 11 (b)) o en el espacio (tres dimensiones, *v.g.*, un cuadricóptero, figura 11 (c)) en todos los casos, el modelo del robot puede dividirse en *subsistemas que representen el desplazamiento, velocidad y aceleración en cada uno de las dimensiones de movimiento*, pues las componentes de cada dimensión son independientes entre sí Yamaguchi *et al.* (2001). Por tanto, cada una de las componentes del robot i -ésimo presenta la siguiente estructura,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i^x = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^x) + \mathbf{u}_i^x \\ \dot{\mathbf{x}}_i^y = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^y) + \mathbf{u}_i^y \\ \dot{\mathbf{x}}_i^z = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^z) + \mathbf{u}_i^z \end{cases} \quad (19)$$

en donde $\mathbf{x}_i^x \in \mathbb{R}^n$ representa al vector de estados del robot i -ésimo, el superíndice del estado denota el eje sobre el que se mueve el robot (*v.g.* los ejes x, y, z), en el caso de omitir el superíndice se entiende que el robot se mueve en una sola dimensión; cada una de las funciones dinámicas $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{ij}^x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $j = 1, 2 \dots n$ y $\mathbf{u}_i^x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entradas de control,

en este caso se propone el uso de controladores que afecten solamente el primer estado de cada dimensión del robot (el cual se asocia a la posición), por tanto, en todos los casos se tiene que $\mathbf{u}_i^x = \begin{bmatrix} u_{i1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$.

3.1 Sincronización de grupos de robots móviles

Como se establece en Wang (2002), desde el punto de vista del control moderno, se dice que un grupo de N nodos sincroniza completa y asintóticamente si,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (20)$$

donde $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ representa al vector de estados del primer nodo. Ahora, si se define el error de sincronía entre los nodos 1 y 2 como $\mathbf{e}_{12}(t) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ diremos que los nodos 1 y 2 sincronizan completamente y de manera asintótica si,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{12}(t)\| = 0, \quad (21)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 11. Robots móviles que trabajan en diferentes dimensiones (a) Vehículo guiado automáticamente (AGV) para aplicaciones industriales, el cual se desplaza en una sola dimensión, fuente: www.ending.es, (b) robot Nomad HD para escenarios de trabajo en dos dimensiones, fuente: crustcrawler.com y (c) un cuadricóptero que puede desplazarse en tres dimensiones. Fuente: photographyisnotacrime.com.

Para lograr la sincronización entre los nodos se siguió el siguiente procedimiento propuesto en Wang y Chen (2002). Se consideran sistemas formados por redes de N nodos idénticos, con acoplamiento lineal y difusivo a través de la *primer variable de estado* de cada nodo, donde cada uno de ellos es un subsistema dinámico n -dimensional, las ecuaciones de estado de un nodo i son,

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = f_1(\mathbf{x}_i) + u_{i1}, \\ \dot{x}_{i2} = f_2(\mathbf{x}_i), \\ \vdots \\ \dot{x}_{in} = f_n(\mathbf{x}_i), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

donde $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del nodo i , la ley de control u_{i1} tiene la siguiente estructura,

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad (23)$$

donde $c > 0$ representa la fuerza de acoplamiento y $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz constante de conexiones que indica cuáles variables de estado de los nodos están acoplados. Suponga que $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ es una matriz diagonal con $r_i = 1$ para una i en particular y $r_j = 0$ para $j \neq i$. Esto significa que dos nodos se encuentran acoplados a través de su i -ésimo estado. Mientras que, $A = (a_{ij})_{N \times N}$ es la matriz de acoplamiento que representa la configuración en la que se encuentran acoplados los nodos de la red. La condición de difusión (dada por las propiedades de la matriz de acoplamiento A en \mathbf{u}_i) de (22) garantiza que la sincronización de los estados de los nodos en la red corresponden a la solución $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^n$, de un nodo aislado, es decir, éstos satisfacen que

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = f(\mathbf{s}(t)), \quad (24)$$

donde la solución $\mathbf{s}(t)$ es un punto de equilibrio. Esto implica que, la estabilidad de la sincronización de los estados de todos los nodos, es decir,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{s}(t), \quad (25)$$

De la red dinámica (22)-(23), es determinada por la dinámica de un nodo aislado, *i.e.*, la función no lineal $f(\mathbf{x}_i)$ (así como su solución $\mathbf{s}(t)$), la fuerza de acoplamiento c , la matriz de conexiones $\mathbf{\Gamma}$, y la matriz de acoplamiento \mathbf{A} . En este caso se selecciona $\mathbf{\Gamma} = [1, 0, \dots, 0]$ como la matriz de conexiones, lo cual tiene como resultado que el acoplamiento se presente en los primeros estados de los nodos, tal como se describe en Wang y Chen (2002).

3.1.1 Condiciones de sincronización

Theorem 1 Wang y Chen (2002) considere la red dinámica descrita en (22), y sean

$$0 = \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N \quad (26)$$

los valores propios de la matriz de acoplamiento \mathbf{A} . Suponiendo que existe una matriz $\mathbf{D} > 0$, diagonal y de dimensión $N \times N$; además de dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$, tal que,

$$[\mathbf{D}f(\mathbf{s}(t)) + d\mathbf{\Gamma}]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[\mathbf{D}f(\mathbf{s}(t)) + d\mathbf{\Gamma}] = \tau \mathbf{I}_N \quad (27)$$

para toda $d \leq \bar{d}$, donde $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad y \bar{d} es una constante tal que cero es un punto de equilibrio estable del siguiente sistema n -dimensional

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(\mathbf{z}) + \bar{d}z_1, \\ \dot{z}_2 = f_2(\mathbf{z}), \\ \vdots \\ \dot{z}_n = f_n(\mathbf{z}), \end{cases} \quad (28)$$

la sincronización de los estados tal como se ve en (25) es exponencialmente estable si se cumple que,

$$c\lambda_2 \leq \bar{d}, \quad (29)$$

ya que $\lambda_2 < 0$ y $\bar{d} < 0$, la desigualdad (29) es equivalente a

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|. \quad (30)$$

Obsérvese que el sistema (28) corresponde al modelo de un nodo aislado con retroalimentación de la primer variable de estado ($\bar{d}z_1$), por tanto, como se establece en Posadas-Castillo *et al.* (2008a), es posible *determinar la fuerza de acoplamiento* mínima que garantice la sincronización en una red con una topología específica de acoplamiento, mediante el *segundo valor propio más grande* (*i.e.*, λ_2) de la matriz de acoplamiento A y por la dinámica de un nodo aislado retroalimentado como en (28).

3.1.2 Ejemplo ilustrativo

A manera de ejemplo, se presenta el caso de un sistema compuesto por 4 masas puntuales en topología anillo con acoplamiento bidireccional como se muestra en la figura 12. En Qu *et al.* (2007) se presenta el siguiente modelo matemático para describir el comportamiento de una masa puntual,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad (31)$$

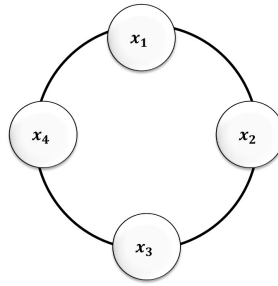


Figura 12. Cuatro masas puntuales acopladas bidireccionalmente en topología anillo.

en donde x_1 representa la posición de la masa puntual y x_2 la velocidad de la misma. Como establece el teorema 1, es necesario determinar el valor de \bar{d} y encontrar los valores propios de la matriz de acoplamiento para obtener la fuerza de acoplamiento mínima que garantice la sincronización de las masas. Primeramente se determinará el valor de la constante $\bar{d} < 0$, por lo tanto, retroalimentando a la masa puntual (31) como se muestra en (28) se tiene,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \bar{d}x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2, \end{aligned} \quad (32)$$

expresado en su forma matricial se tiene,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{d} & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad (33)$$

en donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estados. Para que cero sea un punto de equilibrio estable, basta con que todos los valores propios de la matriz del campo vectorial tengan partes reales negativas Ogata (1997). Si denotamos a la matriz del campo vectorial de (33) como F , es posible calcular sus valores propios como las soluciones de,

$$|\lambda I - F| = 0, \quad (34)$$

donde I es la matriz identidad y $|\cdot|$ representa el determinante. Para el caso de (33) se tiene,

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{d} & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} \lambda - \bar{d} & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{array} \right| \quad (35)$$

$$= (\lambda - \bar{d})(\lambda + 2) + 1 = 0 \quad (36)$$

$$= \lambda^2 + (2 - \bar{d}) \lambda + (1 - 2\bar{d}) = 0, \quad (37)$$

a (37) se le conoce como el polinomio característico de la matriz Ogata (1997). Para encontrar las restricciones en \bar{d} que permiten a cero ser un equilibrio estable se utilizará el criterio de Routh Hurwitz, el cual dice que el número de cambios de signo en la primer columna de su arreglo equivale a los valores propios con parte real positiva. en Ogata (1997) se muestran las reglas para construir el arreglo, a continuación se presenta para el caso,

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 - 2\bar{d} \\ 2 - \bar{d} & 0 \\ \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}, \quad (38)$$

donde,

$$\alpha_1 = \frac{(2 - \bar{d})(1 - 2\bar{d}) - (1)(0)}{(2 - \bar{d})}, \quad (39)$$

para que no existan cambios de signo en los elementos de la primer columna, el parámetro \bar{d} debe de cumplir,

$$\begin{aligned} 2 - \bar{d} > 0, & \quad 1 - 2\bar{d} > 0, \\ \bar{d} < 2, & \quad \bar{d} < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (40)$$

de (40) se observa que cero será un punto de equilibrio estable si $\bar{d} < \frac{1}{2}$. Como se estableció anteriormente, se debe cumplir que $\bar{d} < 0$, así que para este ejemplo se selecciona $\bar{d} = -1$, con lo cual se satisface (40). El siguiente paso es obtener los valores propios de \mathbf{A} . La matriz de acoplamiento correspondiente al sistema de la figura 12 es,

$$A_{anillo} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

con valores propios: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4$. Por tanto, según (30), se tiene que la fuerza mínima para mantener la condición de sincronía en este caso es,

$$c \geq \left| \frac{-1}{-2} \right|, \quad (42)$$

mientras que las ecuaciones dinámicas de cada nodo (incluyendo su ley de control) son,

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} + c(-2x_{11} + x_{21} + x_{41}), \\ \dot{x}_{12} = -x_{11} - 2x_{12}, \\ \dot{x}_{21} = x_{22} + c(-2x_{21} + x_{11} + x_{31}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{21} - 2x_{22}, \\ \dot{x}_{31} = x_{32} + c(-2x_{31} + x_{21} + x_{41}), \\ \dot{x}_{32} = -x_{31} - 2x_{32}, \\ \dot{x}_{41} = x_{42} + c(-2x_{41} + x_{11} + x_{31}), \\ \dot{x}_{42} = -x_{41} - 2x_{42}, \end{cases} \quad (43)$$

Mediante el uso de Matlab se realizaron simulaciones numéricas para comprobar la eficacia del método, a continuación se presentan los resultados para la simulación con condiciones iniciales $\mathbf{x}_{11}(0) = 10, \mathbf{x}_{12}(0) = 10, \mathbf{x}_{21}(0) = -5, \mathbf{x}_{22}(0) = -5, \mathbf{x}_{31}(0) = 2, \mathbf{x}_{32}(0) = 2, \mathbf{x}_{41}(0) = -15, \mathbf{x}_{42}(0) = -15$, seleccionadas arbitrariamente, y fuerza de acoplamiento $c = \frac{1}{2}$. En la figura 13 se observa como alrededor de las 4.05 unidades de tiempo los cuatro nodos tienen la misma posición y velocidad.

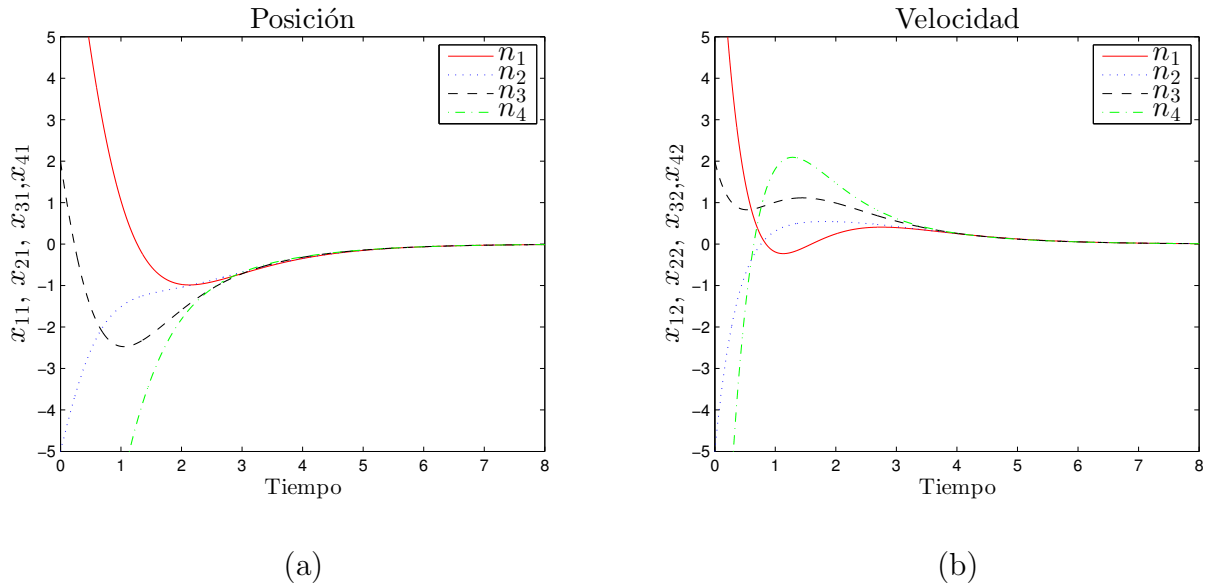


Figura 13. Gráficas temporales de (a) la posición y (b) la velocidad de los nodos sincronizados en red de anillo con acoplamiento bidireccional del ejemplo.

Típicamente se utiliza *el plano de fase* entre dos estados (*v.g.*, gráfica x_{11} vs. x_{21}) para comprobar si han alcanzado la sincronización pues, como se establece en (20), los estados deben coincidir en tiempo. La comparación punto a punto en el plano de fase de los nodos sincronizados refleja una línea de 45° , por lo tanto esta línea permite vislumbrar un escenario de sincronización entre los nodos. La figura 14 muestra el plano de fase entre todos los primeros estados de cada nodo (*i.e.*, x_{11} , x_{21} , x_{31} y x_{41}) para comprobar si alcanzaron la condición de sincronía.

Es importante resaltar la sencillez del controlador propuesto, sin embargo, este escenario de sincronización no es aplicable para un grupo de robots que se desenvuelven en el mismo plano de trabajo pues, en ningún momento se considera alguna restricción sobre colisiones entre los robots, además de que la sincronía supone que todos los robots se encuentren en el mismo lugar al mismo tiempo (algo físicamente imposible de lograr), es por esto que este controlador aplica para situaciones en donde cada robot tiene su propio plano de trabajo y se quiere que todos realicen la misma tarea al unísono.

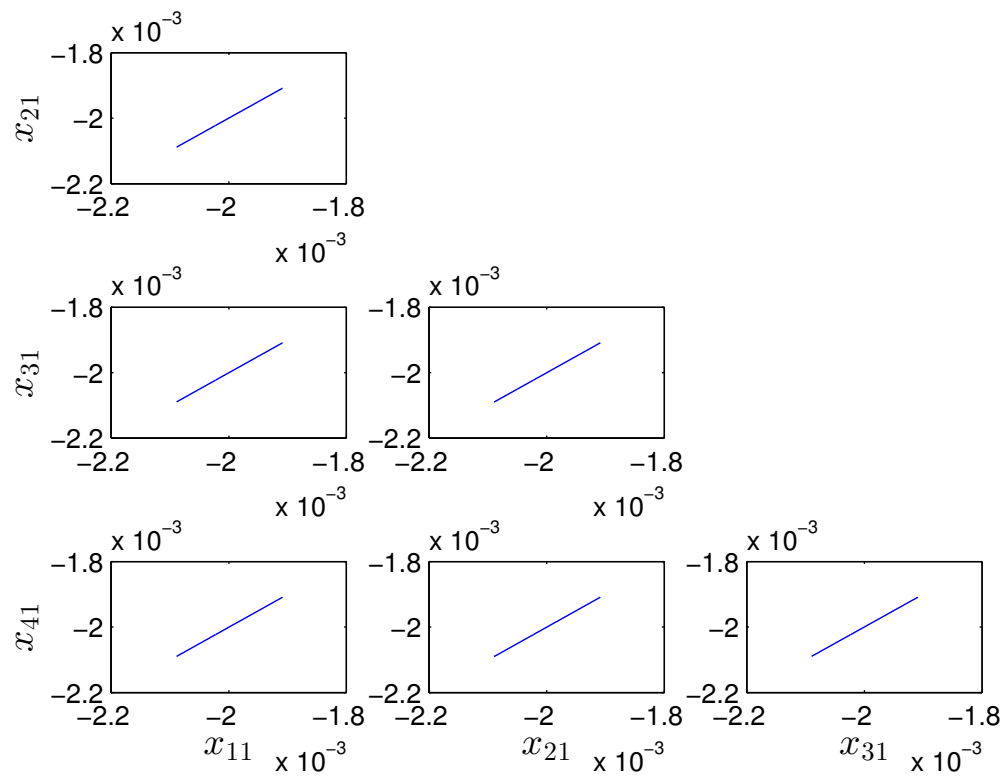


Figura 14. Plano de fase de los nodos, la línea de 45° indica que los nodos se encuentran sincronizados.

3.2 Formación de grupos de robots móviles

Es común encontrar en la literatura controladores para formación de robots diseñados desde una perspectiva distribuida (*i.e.*, cada robot cuenta con su propio controlador) tal es el caso de Yamaguchi *et al.* (2001), Qu *et al.* (2007), en este trabajo de tesis se propone el uso de una ley de control para formar un grupo de N sistemas dinámicos sin restricciones de movimiento y en donde las componentes de cada dimensión son independientes entre sí, estas componentes están representadas por modelos matemáticos de la forma,

$$\dot{\mathbf{x}}_i^x = f(\mathbf{x}_i) + \mathbf{u}_i, \quad (44)$$

en donde $\mathbf{x}_i^x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados que se desenvuelven sobre el eje x del Robot i -ésimo y $\mathbf{u}_i = (u_{i1} \ 0 \ \dots \ 0) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de entradas de control. En este caso se propone el uso de un controlador que actúa únicamente sobre la *primer variable de estado* de cada robot móvil, el cual tiene la siguiente estructura

$$u_{1j} = \sum_{i=1}^N c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij} (a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}), \quad (45)$$

en donde c_{ij} es la fuerza de acoplamiento entre los robots i y j , a_{ij} es un elemento de la matriz de acoplamiento $A = [a_{ij}]$, Δ_{ij} es la distancia esperada entre los robots i y j , δ_{ij} es el coeficiente de repulsión el cual puede tomar los siguientes valores

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si \ |x_{i1} - x_{j1}| > \Delta_{ij}, \\ \delta, & si \ |x_{i1} - x_{j1}| \leq \Delta_{ij}, \end{cases} \quad (46)$$

El controlador (45) puede dividirse en dos partes para analizar el efecto de cada una de ellas, las cuales son delimitadas por el operador suma. La primer parte del controlador trata de *sincronizar* los estados del robot j con los del robot i cuando se encuentran suficientemente

alejados entre sí (*i.e.*, llevarlos a una posición común). Cuando la diferencia entre el primer estado (normalmente asociado a la posición del robot) es más pequeña que la distancia esperada entre ellos, el coeficiente de repulsión δ_{ij} de la segunda parte del controlador, toma un valor distinto de cero con la finalidad de mantener la separación deseada Δ_{ij} .

3.2.1 Convergencia

A continuación se presentan las condiciones necesarias para que el controlador sea eficaz. Se tienen las ecuaciones de los robots aislados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2), \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_N &= \mathbf{f}_N(\mathbf{x}_N),\end{aligned}\tag{47}$$

en donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Al acoplar a los robots entre sí con una topología en específico y utilizando el controlador (45) para alcanzar la formación, se tiene que la ecuación del robot j -ésimo presenta la siguiente forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{j1} = f_{j1}(\mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^N c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij} (a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}), \\ \dot{x}_{j2} = f_{j2}(\mathbf{x}_j), \\ \vdots \\ \dot{x}_{jn} = f_{jn}(\mathbf{x}_j), \end{array} \right.\tag{48}$$

Ahora, se define el conjunto \mathcal{J} , el cual contiene a los robots acoplados al robot j -ésimo, de tal forma que,

$$x_i \in \mathcal{J} \quad |a_{ij} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (49)$$

por tanto, es posible reescribir (48) de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \dot{x}_{j1} = f_{j1}(\mathbf{x}_j) + \sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij}(x_{i1} - x_{j1}) + \delta_{ij}(x_{i1} - x_{j1} + \Delta_{ij}), \\ \dot{x}_{j2} = f_{j2}(\mathbf{x}_j), \\ \vdots \\ \dot{x}_{jn} = f_{jn}(\mathbf{x}_j), \end{cases} \quad (50)$$

Para encontrar el punto de equilibrio es necesario igualar a cero el lado izquierdo de (50), la convergencia de la posición (*i.e.*, el estado x_{j1}) esta dada por,

$$0 = f_{j1}(\mathbf{x}_j) + \sum_{i \in \mathcal{J}} [c_{ij}x_{i1} + \delta_{ij}(x_{i1} + \Delta_{ij})] - |\mathcal{J}| x_{j1} \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij} + \delta_{ij} \right), \quad (51)$$

en donde $|\mathcal{J}|$ es el cardinal (*i.e.*, número de elementos) del conjunto \mathcal{J} . Resolviendo para x_{j1} se tiene,

$$x_{j1} = \frac{f_{j1}(\mathbf{x}_j) + \sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij}x_{i1} + \sum_{i \in \mathcal{J}} \delta_{ij}(x_{i1} + \Delta_{ij})}{|\mathcal{J}| \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} c_{ij} + \delta_{ij} \right)}, \quad (52)$$

Suponiendo que es posible seleccionar el valor de $\delta \gg 1$, $\delta \gg \max(c_{ij})$ y en general $\delta \gg |\mathcal{J}|$, la posición del robot j -ésimo tiende a

$$x_{j1} = \sum_{i \in \mathcal{J}} (x_{i1} + \Delta_{ij}), \quad (53)$$

Lo cual concuerda con la definición de formación presentada, pues, cada robot tiende a la posición de los demás robots acoplados a él más una distancia seleccionada anteriormente.

De (52)y (53) se puede establecer que, mediante la *selección apropiada del coeficiente de repulsión*, es posible alcanzar el objetivo de formación de grupos de robots móviles.

3.2.2 Evasión de colisiones

El controlador propuesto en (45) es suficiente para lograr el objetivo de control de un grupo de robots móviles en una topología en específico, sin embargo, los robots sólo obtienen información de los miembros del grupo que tienen acoplamiento con ellos, mientras que no tienen conocimiento de la existencia de algún otro robot en el grupo. Esta situación puede desencadenar que los robots colisionen mientras busquen formarse según el acoplamiento dado. Debido a esto, es necesario tomar en cuenta esta situación para que los robots puedan desenvolverse en un área de trabajo común. Con tal motivo, se propone la siguiente modificación al controlador (45),

$$u_{1j} = \sum_{i=1}^N c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij} a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij} - r_{ij} \operatorname{sign}(x_{i1} - x_{j1}), \quad (54)$$

en donde r_{ij} es el coeficiente anticollisiones, el cual puede tomar los siguientes valores,

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\vec{l}_{ij}\| > m, \\ r, & \text{si } \|\vec{l}_{ij}\| < m, \end{cases} \quad (55)$$

$m > 0$ es el umbral de colisión, el cual se ajusta según las dimensiones de los robots y la distancia que se desee como protección anticollisiones (ver figura 15), y $\|\vec{l}_{ij}\|$ es la norma

euclidiana del vector formado por las posiciones (primer estado) en cada eje, esto es ,

$$\vec{l}_{ij} = \begin{bmatrix} x_{i1}^x - x_{j1}^x \\ x_{i1}^y - x_{j1}^y \\ x_{i1}^z - x_{j1}^z \end{bmatrix} \quad (56)$$

y $sign(\cdot)$ es la función signo, que para efectos de este trabajo se utiliza la definición dada en Kwakernaak *et al.* (1991),

$$sign(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0, \\ 0 & \text{si } u = 0, \\ -1 & \text{si } u < 0, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}. \quad (57)$$

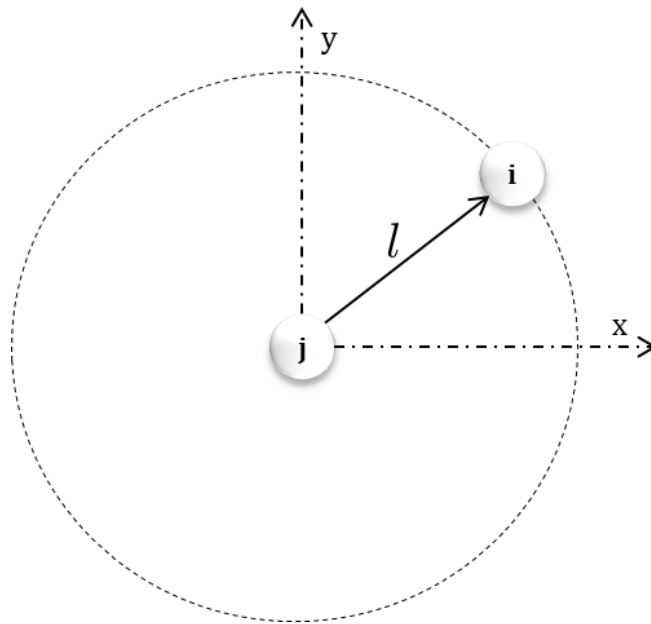


Figura 15. descripción gráfica del vector l para robots que se desenvuelven en \mathbb{R}^2 .

3.2.3 Ejemplo ilustrativo

A manera de ejemplo, se presenta la formación de dos masas puntuales descritas por (31) con acoplamiento tipo maestro (robot sin entradas de control de otros nodos) y esclavo (robot

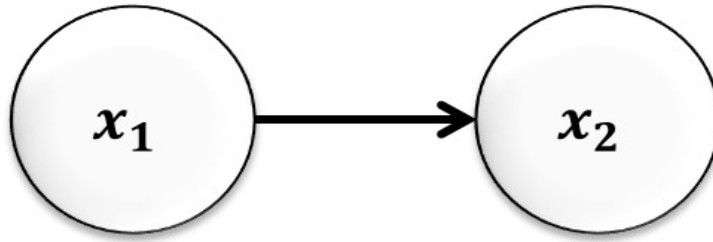


Figura 16. Dos masas puntuales con acoplamiento tipo maestro (N_1) y esclavo (N_2).

cuya dinámica es afectada por otros robots en la red), tal como se muestra en la figura 16.

En este caso, cada dimensión de los robots es descrita por la masa puntual (31), por lo tanto, las ecuaciones dinámicas del robot maestro son,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{11}^x = x_{12}^x, \\ \dot{x}_{12}^x = -x_{11}^x - 2x_{12}^x, \\ \dot{x}_{11}^y = x_{12}^y, \\ \dot{x}_{12}^y = -x_{11}^y - 2x_{12}^y, \end{array} \right. \quad (58)$$

mientras que las ecuaciones del robot esclavo son,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{21}^x = x_{22}^x + c_{12}(x_{11}^x - x_{21}^x) + \delta_{12}^x (x_{11}^x - x_{21}^x + \Delta_{12}) + r_{12}^x \text{sign}(x_{11}^x - x_{21}^x), \\ \dot{x}_{22}^x = -x_{21}^x - 2x_{22}^x, \\ \dot{x}_{21}^y = x_{22}^y + c_{12}(x_{11}^y - x_{21}^y) + \delta_{12}^y (x_{11}^y - x_{21}^y + \Delta_{12}) + r_{12}^y \text{sign}(x_{11}^y - x_{21}^y), \\ \dot{x}_{22}^y = -x_{21}^y - 2x_{22}^y, \end{array} \right. \quad (59)$$

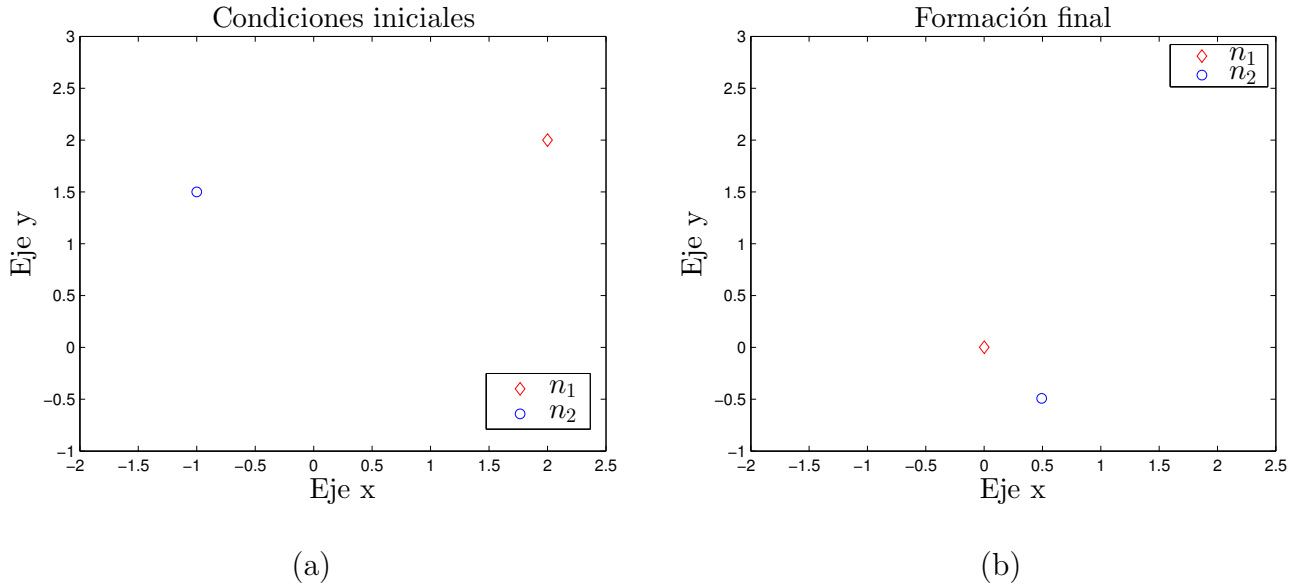


Figura 17. Posiciones (a) inicial y (b) final de los robots móviles para el ejemplo ilustrativo.

Para la simulación se seleccionó $c_{12} = 1$, $\delta = 100$, $r = 1000$, $m = 0.1$ y con las siguientes condiciones iniciales: $\mathbf{x}_{11}^x(0) = 2$, $\mathbf{x}_{12}^x(0) = 0$, $\mathbf{x}_{11}^y(0) = 2$, $\mathbf{x}_{12}^y(0) = 0$, $\mathbf{x}_{21}^x(0) = -1$, $\mathbf{x}_{22}^x(0) = 0$, $\mathbf{x}_{21}^y(0) = 1.5$, $\mathbf{x}_{22}^y(0) = 0$, las cuales fueron seleccionadas arbitrariamente. La formación final esta definida por $\Delta_{12}^x = 0.5$ y $\Delta_{12}^y = -0.5$. En la figura 17 se aprecian las posiciones (a) iniciales y (b) finales de los robots, en las que se observa que se ha alcanzado la formación deseada.

En la figura 18 se muestra la evolución de las posiciones de los robots sobre el plano de trabajo, desde su posición inicial hasta el final de la simulación, mientras que en la figura 19 muestra la posición de cada robot con respecto al tiempo. Obsérvese que mientras el maestro tiende a su posición de equilibrio ($\mathbf{x}_1^*(t) = (0, 0)^T$) el robot esclavo lo hace a la posición del maestro más la separación deseada en cada eje ($\mathbf{x}_2^*(t) = (0.5, -0.5)^T$).

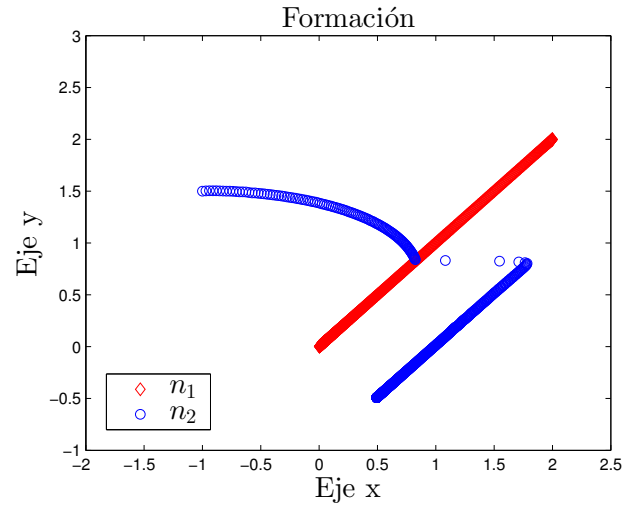


Figura 18. Evolución de las posiciones de los robots en el plano de trabajo para el ejemplo ilustrativo.

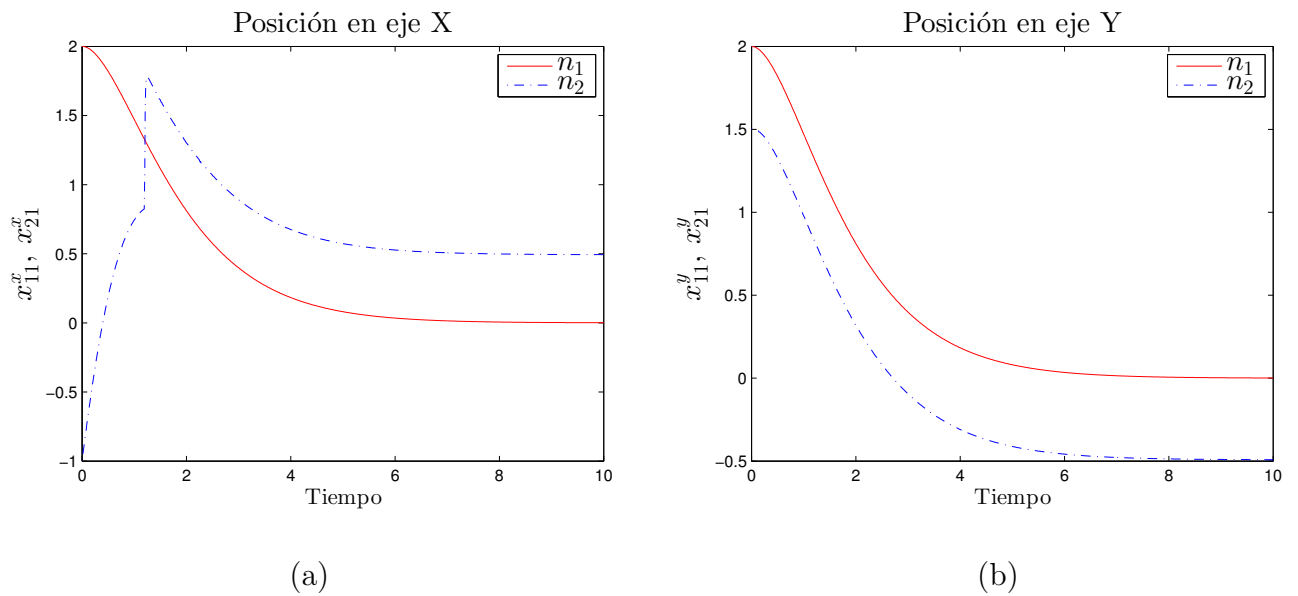


Figura 19. Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) en el eje Y de los robots móviles en el ejemplo.

Capítulo 4

Sincronización de robots móviles en diferentes topologías

A continuación se presentan algunos casos en los que se utiliza el procedimiento descrito en el capítulo 3 para la sincronización de sistemas dinámicos. Recuérdese que el método se basa en calcular la fuerza de acoplamiento mínima que garantice la condición de sincronía mediante el cálculo de la constante $\bar{d} < 0$ y el segundo valor propio menos negativo de la matriz de acoplamiento A . Para todos los casos descritos a continuación los robots móviles son representados por el siguiente modelo matemático de la masa puntual descrito en Qu *et al.* (2007),

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad (60)$$

Cabe destacar que el modelo (60) es un modelo normalizado, esto significa que carece de unidades físicas asociadas, establecer un marco de referencia que involucre unidades de ingeniería (*v.g.*, s, m, $\frac{m}{s}$) es necesario escalar el modelo para que coincida con las dimensiones requeridas, por tanto, desde este capítulo en adelante se hablará de *unidades de tiempo* para referirse a cantidades temporales, así como *unidades de velocidad o de desplazamiento* en el caso de referirse a la velocidad o el desplazamiento de un robot móvil. Todas las simulaciones son realizadas en Matlab, mediante el comando ODE45, y con un intervalo de simulación de 0 a 10 unidades de tiempo.

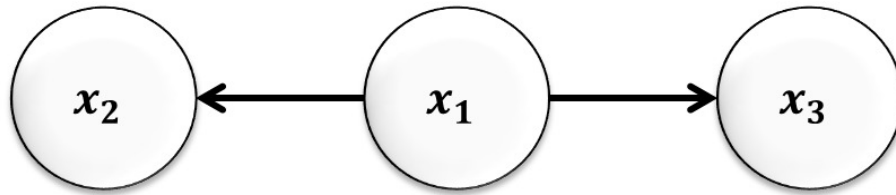


Figura 20. Tres masas puntuales en topología estrella con acoplamiento unidireccional.

En el ejemplo ilustrativo de sincronización del capítulo 3, se presentó el método para calcular la constante $\bar{d} < 0$, la cual se obtiene de la dinámica de un nodo aislado, en dicho capítulo se llegó a la conclusión de que *cero es un punto de equilibrio estable* del modelo de la masa puntual (60) si se cumple que $\bar{d} < \frac{1}{2}$. Por tanto, en *todos los casos presentados a continuación se considera el valor de la constante $\bar{d} = -1$* . Ahora, solo resta calcular los valores propios de la matriz de acoplamiento A para determinar la fuerza de acoplamiento c mínima que permita alcanzar la sincronía de los nodos, es necesario recordar que esta matriz de acoplamiento se define por la topología y el tipo de acoplamiento de los nodos en la red. A continuación se analizan algunos casos de redes con tres nodos, en los que se varía tanto la topología como el tipo de acoplamiento.

4.1 Red de robots móviles en topología estrella

Para el primer caso, se tiene una red compuesta por tres masas puntuales en topología *estrella con acoplamiento unidireccional* entre sus nodos (figura 20), la matriz de acoplamiento asociada presenta la siguiente forma,

$$A_{estrella} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

la cual tiene los siguientes valores propios: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Por tanto, según (30), se tiene que la fuerza mínima para mantener la condición de sincronía en el caso de la figura 20

es,

$$c \geq \left| \frac{-1}{-1} \right|, \quad (62)$$

y las ecuaciones dinámicas de cada nodo son,

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = -x_{11} - 2x_{12}, \\ \dot{x}_{21} = x_{22} + c(x_{11} - x_{21}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{21} - 2x_{22}, \\ \dot{x}_{31} = x_{32} + c(x_{11} - x_{31}), \\ \dot{x}_{32} = -x_{31} - 2x_{32}, \end{cases} \quad (63)$$

Para comprobar la sincronización, en la simulación numérica se selecciona $c = 1$ y las siguientes condiciones iniciales: $\mathbf{x}_1(0) = (6, 12)^T$, $\mathbf{x}_2(0) = (5, 3)^T$, $\mathbf{x}_3(0) = (-7, -1)^T$, seleccionadas arbitrariamente. En la figura 21 se observa que alrededor de las 4 unidades de tiempo, los cuatro nodos tienen la misma posición y velocidad, mientras que en el plano de fase de la figura 22 (a) se observa cómo las posiciones de los nodos forman una línea recta a 45° cuando se comparan punto a punto, lo mismo sucede al comparar las velocidades de los nodos en el plano de fase de la figura 22 (b). Estas pruebas son suficientes para determinar que claramente la fuerza de acoplamiento $c = 1$ es suficiente para sincronizar la red de la figura 20.

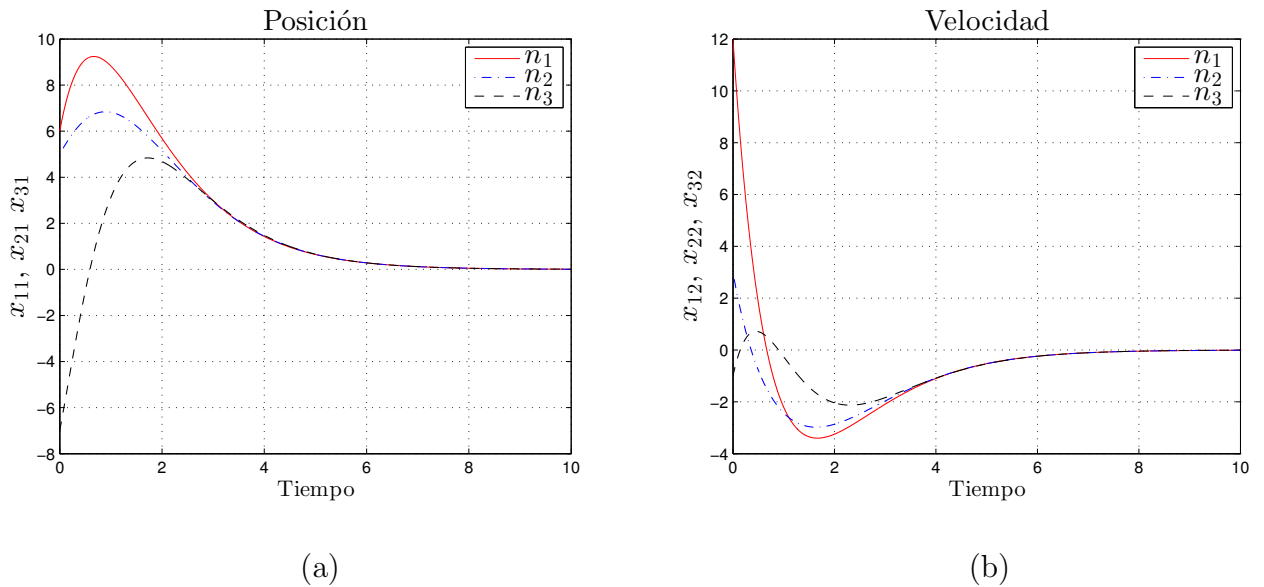


Figura 21. (a) Posición y (b) velocidad de tres masas puntuales en una red con topología estrella y acoplamiento unidireccional.

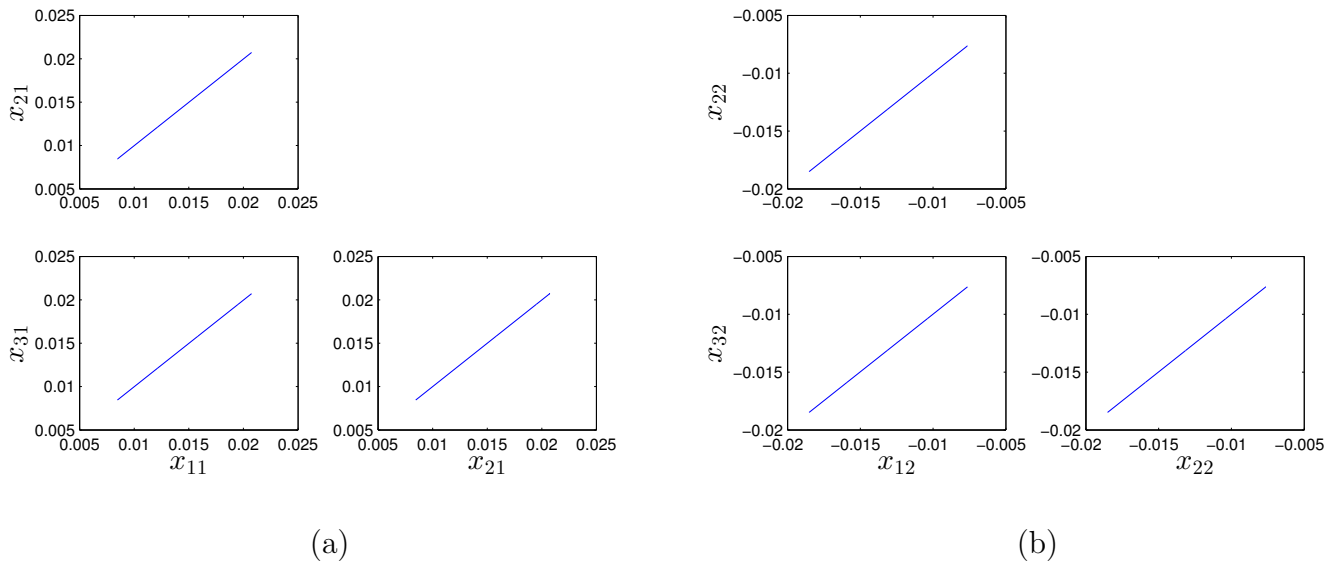


Figura 22. Plano de fase de (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología estrella con acoplamiento unidireccional. La línea de 45° permite visualizar que los nodos han alcanzado la sincronización.

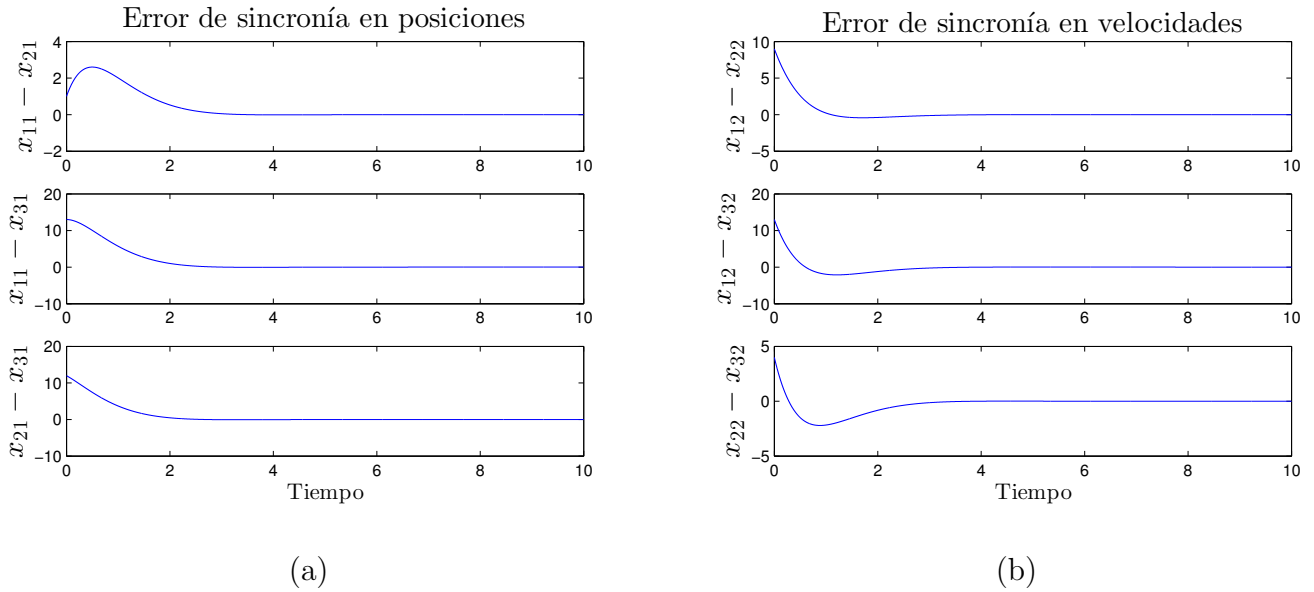


Figura 23. Error de sincronía en (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología estrella con acoplamiento unidireccional, un error de sincronía igual a cero también indica que se ha alcanzado la sincronización de los nodos.

Como se menciona en el capítulo 3, es posible verificar la condición de sincronía mediante el *error de sincronía* e_{ij} , pues, se dice que se ha alcanzado la sincronización completa de todos los nodos en la red si,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{ij}(t)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j \quad (64)$$

donde el error de sincronía entre los nodos i y j se calcula como,

$$e_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \quad (65)$$

En la figura 23 se puede observar como los errores de sincronía tienden a cero mientras el tiempo avanza.

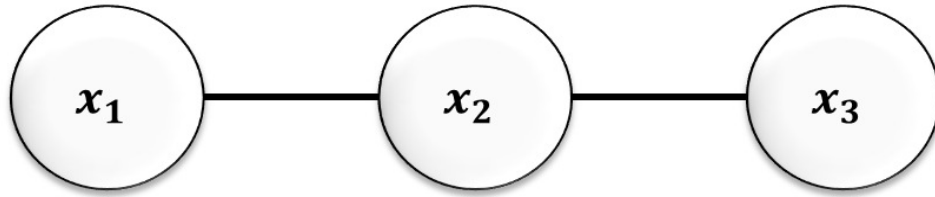


Figura 24. Red de 3 masas puntuales en topología de cadena con acoplamiento bidireccional.

4.2 Red de robots móviles en topología cadena

Para el siguiente caso se presenta la sincronización de una *red en topología de cadena con acoplamiento bidireccional* (figura 24), la matriz de acoplamiento asociada a esta configuración es,

$$A_{cadena} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

con valores propios: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3$. Por tanto, la fuerza de acoplamiento mínima para este caso es,

$$c \geq \left| \frac{-1}{-1} \right|, \quad (67)$$

de nueva cuenta, se presentan las ecuaciones dinámicas, en este caso para las 3 masas puntuales en topología cadena y acoplamiento bidireccional,

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} + c(x_{21} - x_{11}), \\ \dot{x}_{12} = -x_{11} - 2x_{12}, \\ \dot{x}_{21} = x_{22} + c(x_{11} + x_{31} - 2x_{21}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{21} - 2x_{22}, \\ \dot{x}_{31} = x_{32} + c(x_{21} - x_{31}), \\ \dot{x}_{32} = -x_{31} - 2x_{32}, \end{cases} \quad (68)$$

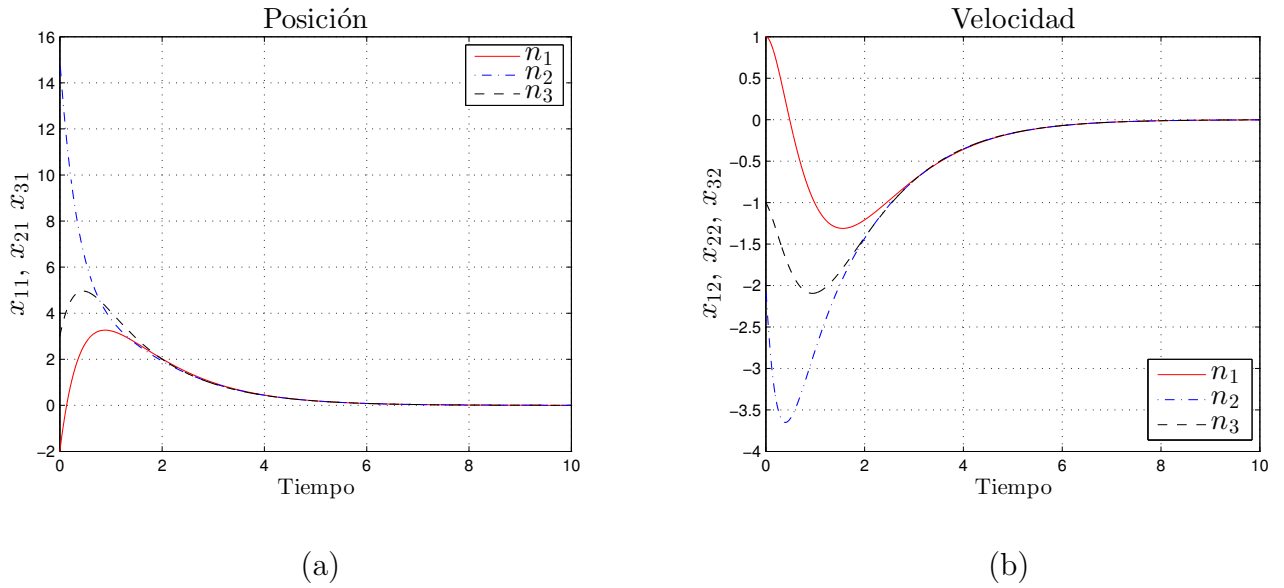


Figura 25. Posición (a) y velocidad (b) para las tres masas puntuales en una red con topología de cadena con acoplamiento bidireccional.

para la simulación, se mantiene la fuerza de acoplamiento $c = 1$ como en el caso anterior, y en esta ocasión las condiciones iniciales seleccionadas son $\mathbf{x}_1 = (-2, 1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (15, -2)^T$, $\mathbf{x}_3 = (3, -1)^T$. En la figura 25 se observa como la posición y la velocidad de los 3 nodos convergen a una misma trayectoria alrededor de las 3 unidades de tiempo, aún y cuando se tiene la misma fuerza de acoplamiento, esto se logra gracias a que existe un mayor intercambio de información entre los nodos en esta topología que en el caso de la figura 21. La figura 26 muestra el plano de fase de la comparación punto a punto tanto en las posiciones como en las velocidades de los nodos y de ellas se concluye que se ha alcanzado la condición de sincronización. Adicionalmente, la figura 27 muestra que los errores de sincronía de los nodos tienden a cero mientras el tiempo avanza, reforzando así la conclusión sobre la sincronía de los nodos en la red.

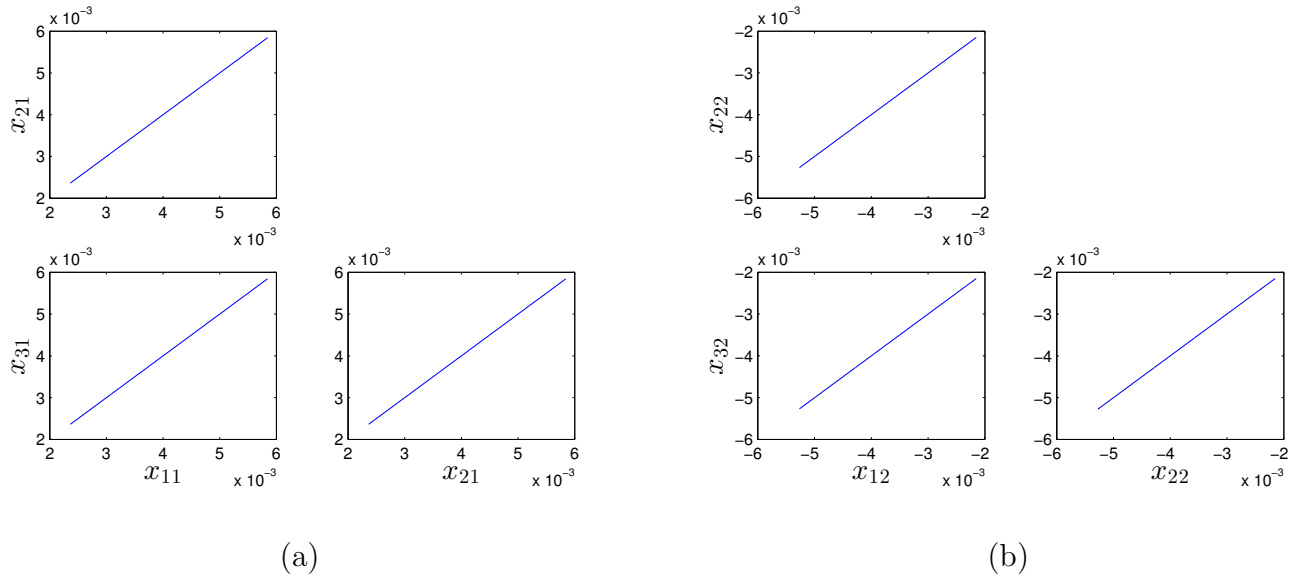


Figura 26. Plano de fase de (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología cadena con acoplamiento bidireccional.

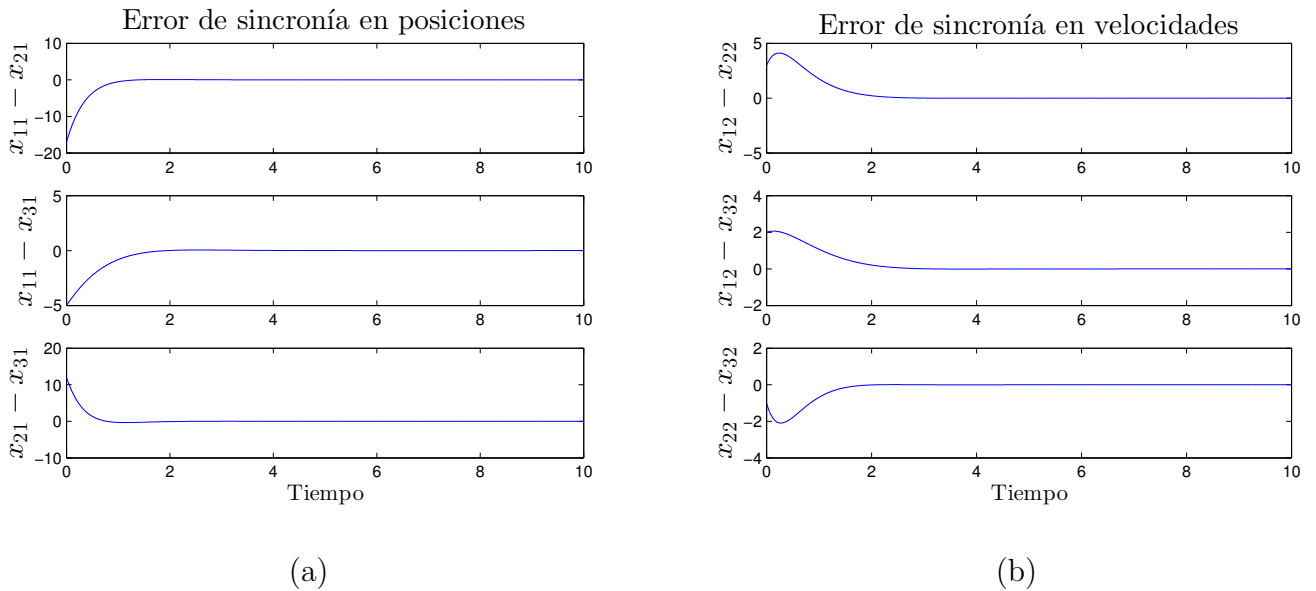


Figura 27. Error de sincronía en (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología cadena con acoplamiento bidireccional.

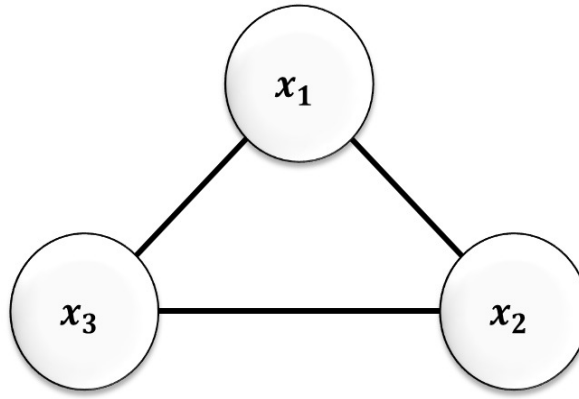


Figura 28. Red de tres masas puntuales en topología anillo con acoplamiento bidireccional.

4.3 Red de robots móviles en topología anillo

A continuación se presenta una red con *topología anillo* y *acoplamiento bidireccional* entre sus nodos (figura 28), la cual cuenta con la siguiente matriz de acoplamiento,

$$A_{anillo} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

para redes con la topología y el acoplamiento que presenta la figura 28, en Wang y Chen (2002) se propone calcular el k -ésimo valor propio de la matriz de acoplamiento A de la siguiente manera,

$$\lambda_k = -4\text{sen}^2 \left(\frac{(k-1)\pi}{N} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (70)$$

mediante (70) se tiene que $\lambda_2 = -3$. Por tanto, la fuerza de acoplamiento mínima para este caso es,

$$c \geq \left| \frac{-1}{-3} \right|, \quad (71)$$

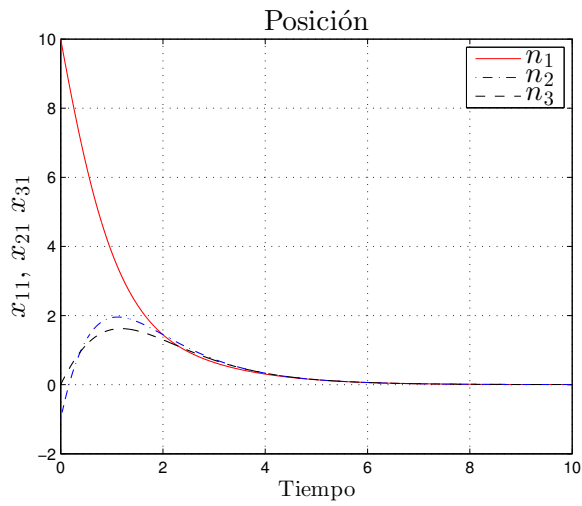
y las ecuaciones dinámicas para el caso de tres masas puntuales con topología en anillo y

acoplamiento bidireccional son,

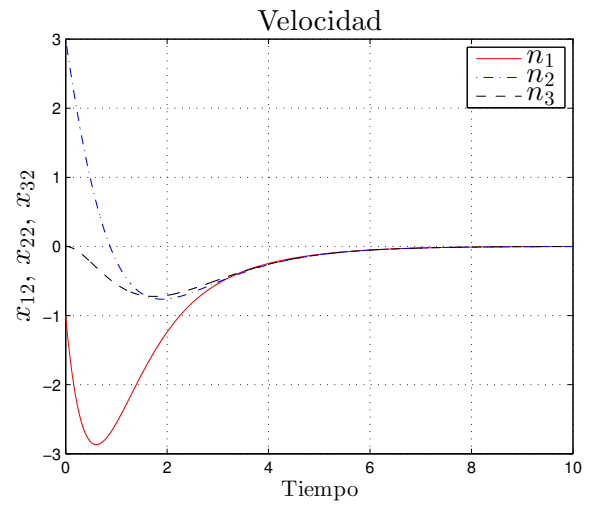
$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} + c(x_{21} + x_{31} - 2x_{11}), \\ \dot{x}_{12} = -x_{11} - 2x_{12}, \\ \dot{x}_{21} = x_{22} + c(x_{11} + x_{31} - 2x_{21}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{21} - 2x_{22}, \\ \dot{x}_{31} = x_{32} + c(x_{11} + x_{21} - 2x_{31}), \\ \dot{x}_{32} = -x_{31} - 2x_{32}, \end{cases} \quad (72)$$

en este caso, para la simulación se tiene una fuerza de acoplamiento $c = \frac{1}{3}$, las condiciones iniciales son $\mathbf{x}_1 = (10, -1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 3)^T$, $\mathbf{x}_3 = (0, 0)^T$, seleccionadas arbitrariamente como en los casos previos. En la figura 29 se observa que, tanto la posición como la velocidad sincronizan en menos de 4 unidades de tiempo aún y cuando se redujo la fuerza de acoplamiento c con respecto a los casos anteriores. La figura 30 comprueba que existe sincronización entre las masas puntuales al exhibir una línea de 45° en las comparaciones punto a punto. Si se observa la figura 31 se vuelve más evidente que la sincronización se ha logrado en menos de 4 unidades temporales.

En este capítulo se desarrollaron varios escenarios de sincronización de redes para corroborar numéricamente la teoría expuesta en el capítulo 3. Con base en los casos anteriormente expuestos, se puede observar el papel preponderante de la topología de conexión en las redes al momento de calcular la fuerza de acoplamiento c para sincronizar a los robots móviles. El uso de acoplamientos bidireccionales también ayuda a reducir la fuerza de acoplamiento mínima necesaria para alcanzar la sincronía, o en su defecto, al mantener una fuerza de acoplamiento alta, reducir el tiempo en el que se alcance la sincronía.

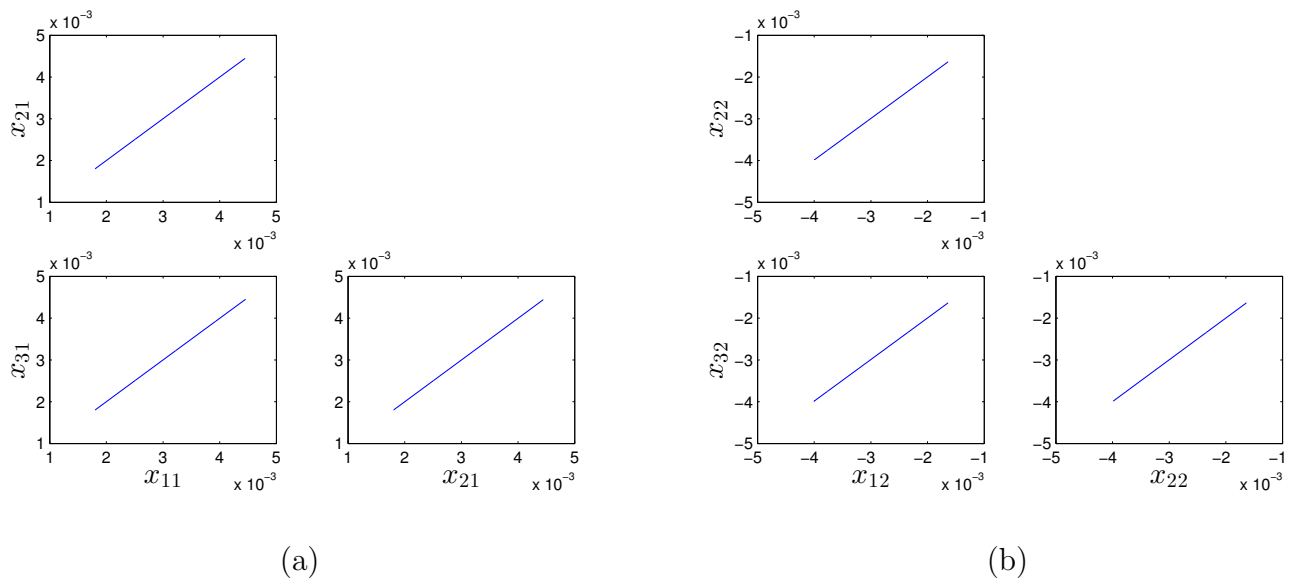


(a)



(b)

Figura 29. Gráficas temporales de (a) la posición y (b) la velocidad de tres masas puntuales en una red con topología anillo y acoplamiento bidireccional.



(a)

(b)

Figura 30. Plano de fase de (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología anillo con acoplamiento bidireccional.

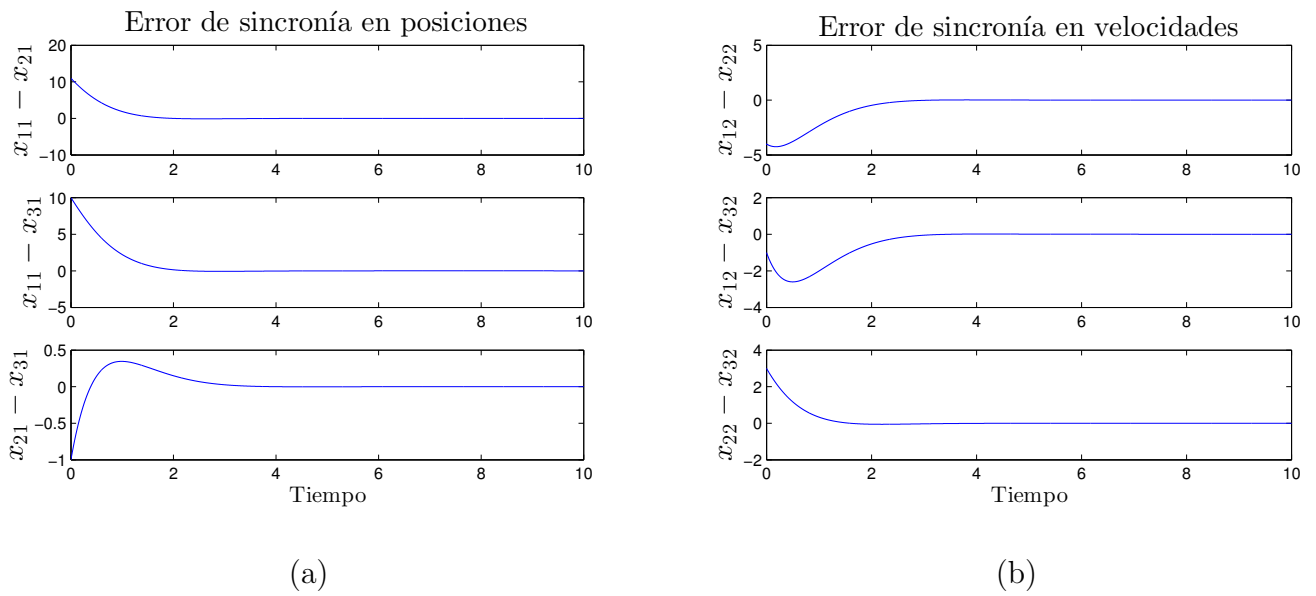


Figura 31. Error de sincronía en (a) las posiciones y (b) las velocidades de los nodos en topología anillo con acoplamiento bidireccional.

Capítulo 5

Formación de redes de robots móviles en diferentes topologías

A continuación se presentan algunos casos para la formación de grupos de robots descrita en el capítulo 3. En esta ocasión se seleccionaron redes de tres robots móviles con topologías de estrella, cadena y anillo con acoplamiento tanto unidireccional como bidireccional. Como en capítulos anteriores, se considera el uso de robots móviles sin restricciones de movimiento y con componentes independientes en dos dimensiones, en donde el movimiento en cada dimensión se rige por el modelo matemático de la masa puntual (31), presentado en Qu *et al.* (2007). Por tanto, el i -ésimo robot móvil es descrito por el siguiente modelo,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{i1}^x &= x_{i2}^x, \\
 \dot{x}_{i2}^x &= -x_{i1}^x - 2x_{i2}^x, \\
 \dot{x}_{i1}^y &= x_{i2}^y, \\
 \dot{x}_{i2}^y &= -x_{i1}^y - 2x_{i2}^y,
 \end{aligned} \tag{73}$$

recuérdese que el estado x_{i1} representa la *posición del robot móvil*, mientras el estado x_{i2} representa su *velocidad*, además de que el superíndice representa la dimensión en la que se desenvuelve el robot (eje X o eje Y). Para todos los casos aquí presentados se considera un umbral de colisión $m = 0.1$, una fuerza de acoplamiento $c = 1$, un coeficiente de repulsión $\delta = 100$ y un coeficiente anticollisiones $r = 1000$. El objetivo de este capítulo es comprobar numéricamente si el controlador propuesto es capaz de mantener la formación de los robots bajo diferentes circunstancias, por tanto, en los siguientes casos se varía, tanto la topología de conexión como las condiciones iniciales, además en todos los casos se incluyen trayectorias variantes en el tiempo a la dinámica de algún robot; esta situación permite observar la capacidad del control para adaptarse ante cambios repentinos en la dinámica de los robots,

ya que esta cualidad será explotada en un futuro para aplicar esta técnica de formación en casos de patrullaje o búsqueda y rescate. Esta trayectoria es representada por la entrada de control v en la dinámica de los robots y para todos los casos se tiene una trayectoria sinusoidal, de tal forma que $v = \text{sen}(2t)$. Todos los escenarios propuestos son evaluados mediante simulaciones numéricas realizadas en Matlab.

5.1 Red de robots móviles en topología estrella

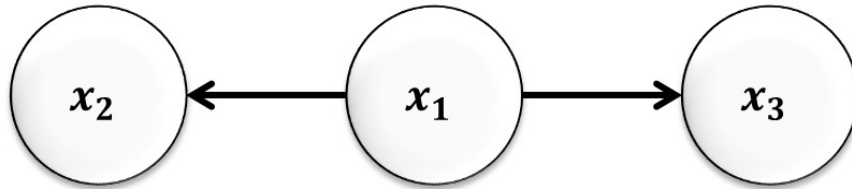


Figura 32. Red de tres robots móviles en topología estrella con acoplamiento unidireccional.

Para el caso de una *topología estrella con acoplamiento unidireccional* (figura 32) se tiene la siguiente matriz de acoplamiento A ,

$$A_{estrella} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

según el procedimiento descrito en el capítulo 3, las ecuaciones de los tres robots móviles son,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{11}^x = x_{12}^x - r_{21} \operatorname{sign}(x_{21}^x - x_{11}^x) - r_{31} \operatorname{sign}(x_{31}^x - x_{11}^x) + v, \\ \dot{x}_{12}^x = -x_{11}^x - 2x_{12}^x, \\ \dot{x}_{11}^y = x_{12}^y - r_{21} \operatorname{sign}(x_{21}^y - x_{11}^y) - r_{31} \operatorname{sign}(x_{31}^y - x_{11}^y), \\ \dot{x}_{12}^y = -x_{11}^y - 2x_{12}^y, \\ \dot{x}_{21}^x = x_{22}^x + c(x_{11}^x - x_{21}^x) + \delta_{12}^x (x_{11}^x - x_{21}^x + \Delta_{12}^x) - r_{12} \operatorname{sign}(x_{11}^x - x_{21}^x) - r_{32} \operatorname{sign}(x_{31}^x - x_{21}^x), \\ \dot{x}_{22}^x = -x_{21}^x - 2x_{22}^x, \\ \dot{x}_{21}^y = x_{22}^y + c(x_{11}^y - x_{21}^y) + \delta_{12}^y (x_{11}^y - x_{21}^y + \Delta_{12}^y) - r_{12} \operatorname{sign}(x_{11}^y - x_{21}^y) - r_{32} \operatorname{sign}(x_{31}^y - x_{21}^y), \\ \dot{x}_{22}^y = -x_{21}^y - 2x_{22}^y, \\ \dot{x}_{31}^x = x_{32}^x + c(x_{11}^x - x_{31}^x) + \delta_{13}^x (x_{11}^x - x_{31}^x + \Delta_{13}^x) - r_{13} \operatorname{sign}(x_{11}^x - x_{31}^x) - r_{23} \operatorname{sign}(x_{21}^x - x_{31}^x), \\ \dot{x}_{32}^x = -x_{31}^x - 2x_{32}^x, \\ \dot{x}_{31}^y = x_{32}^y + c(x_{11}^y - x_{31}^y) + \delta_{13}^y (x_{11}^y - x_{31}^y + \Delta_{13}^y) - r_{13} \operatorname{sign}(x_{11}^y - x_{31}^y) - r_{23} \operatorname{sign}(x_{21}^y - x_{31}^y), \\ \dot{x}_{32}^y = -x_{31}^y - 2x_{32}^y, \end{array} \right. \quad (75)$$

En esta ocasión el término variante en tiempo v es añanido a la dinámica de la posición en el eje X del primer robot (*i.e.*, x_{11}^x), por tanto, las oscilaciones sinusoidales presentes en las trayectorias de los robots se manifiestan de forma horizontal. Para la simulación de este caso, se seleccionan las siguientes distancias entre los robots: $\Delta_{12}^x = 2$, $\Delta_{12}^y = -2$, $\Delta_{13}^x = -2$ y $\Delta_{13}^y = 2$, con las cuales se desea obtener una formación en línea recta, con pendiente de -1 . Las condiciones iniciales, propuestas arbitrariamente son: $\mathbf{x}_1^x = (4, 0)^T$, $\mathbf{x}_1^y = (1, 0)^T$, $\mathbf{x}_2^x = (-10, 0)^T$, $\mathbf{x}_2^y = (5, 0)^T$, $\mathbf{x}_3^x = (10, 0)^T$, $\mathbf{x}_3^y = (-5, 0)^T$. En la figura 33 (a) se observan las posiciones iniciales de los robots, mientras que en la figura 33 (b) se presenta la formación final deseada.

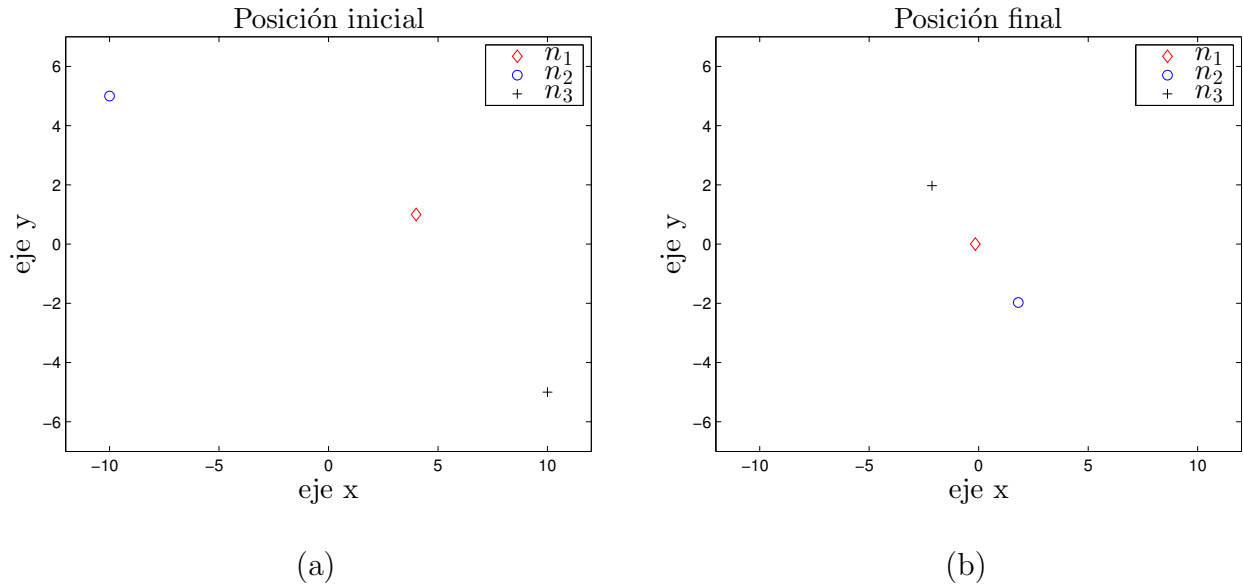


Figura 33. Simulación de una red de robots móviles en topología estrella con acoplamiento unidireccional, (a) las posiciones iniciales de los robots y (b) las posiciones deseadas al alcanzar la formación.

En la figura 34 se presenta la trayectoria descrita por cada uno de los robots hasta llegar a la posición final, mientras que en la figura 35 se muestran las gráficas temporales de las posiciones de los tres robots móviles en cada una de las componentes dimensionales. En la figura 35 se aprecia que en menos de 2 unidades de tiempo se alcanza la formación y ésta se mantiene a pesar de las constantes variaciones en la trayectoria del maestro (robot \mathbf{x}_1). Obsérvese también cómo los robots esclavos (\mathbf{x}_2 y \mathbf{x}_3) siguen al maestro en la trayectoria sinusoidal que describe, este escenario permite vislumbrar un panorama prometedor para esta formación, pues, es posible diseñar trayectorias complejas para un robot y los demás lo seguirán manteniendo la distancia propuesta por el diseñador.

5.2 Red de robots móviles en topología cadena

Para el segundo caso se presenta una red con *topología de cadena y acoplamiento bidireccional* entre los robots móviles (como en la figura 36). La matriz de acoplamiento A para

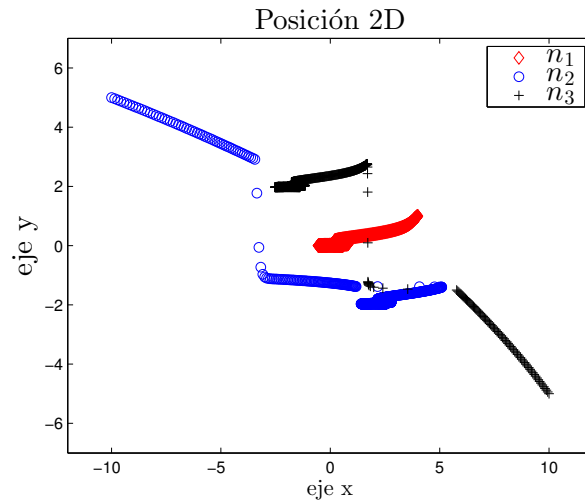


Figura 34. Trayectorias descritas en el plano por los tres robots móviles al momento de buscar la formación propuesta para la simulación.

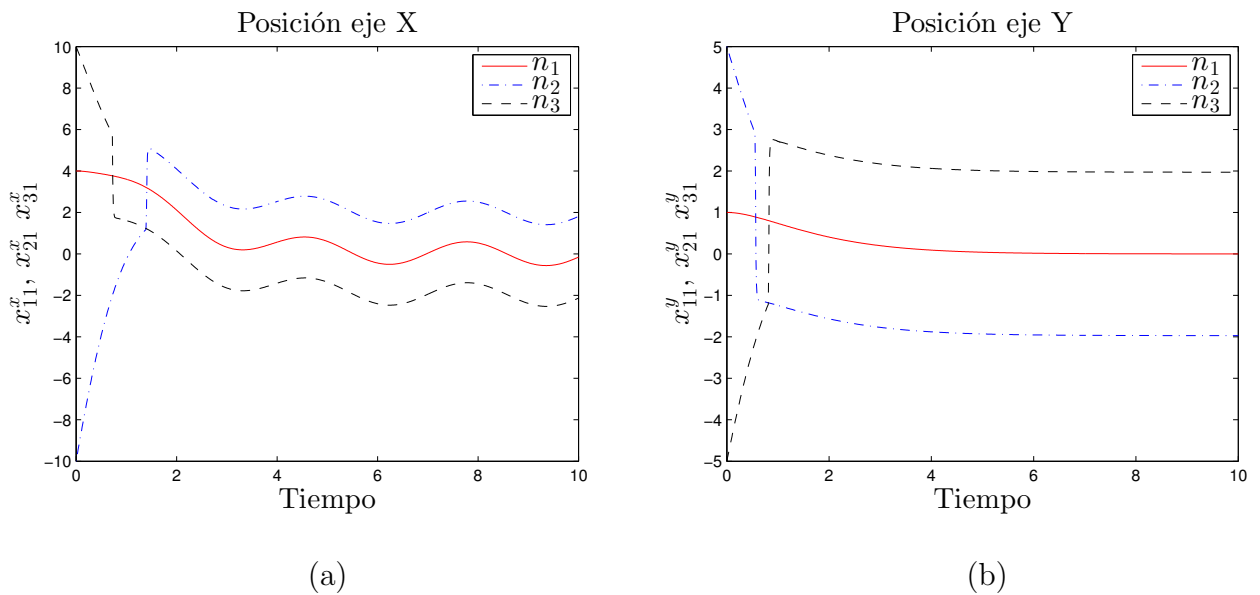


Figura 35. Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) la posición en el eje Y de los tres robots formados en una red con topología estrella y acoplamiento unidireccional.

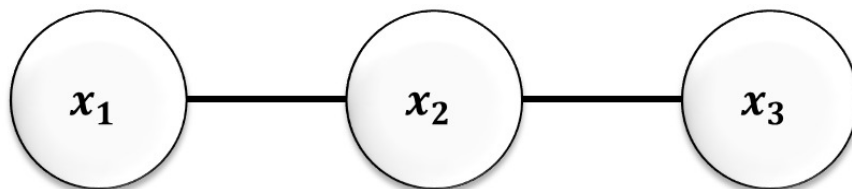


Figura 36. Red conformada por tres robots móviles en topología de cadena con acoplamiento bidireccional.

este caso tiene la siguiente forma,

$$A_{cadena} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (76)$$

por tanto, Las ecuaciones dinámicas de cada robot son,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{11}^x = x_{12}^x + c(x_{21}^x - x_{11}^x) + \delta_{12}^x (x_{21}^x - x_{11}^x - \Delta_{12}^x) - r_{21} \text{sign}(x_{21}^x - x_{11}^x) - r_{31} \text{sign}(x_{31}^x - x_{11}^x), \\ \dot{x}_{12}^x = -x_{11}^x - 2x_{12}^x, \\ \dot{x}_{11}^y = x_{12}^y + c(x_{21}^y - x_{11}^y) + \delta_{12}^y (x_{21}^y - x_{11}^y - \Delta_{12}^y) - r_{21} \text{sign}(x_{21}^y - x_{11}^y) - r_{31} \text{sign}(x_{31}^y - x_{11}^y) + v, \\ \dot{x}_{12}^y = -x_{11}^y - 2x_{12}^y, \\ \dot{x}_{21}^x = x_{22}^x + c(x_{11}^x + x_{31}^x - 2x_{21}^x) + \delta_{12}^x (x_{11}^x - x_{21}^x + \Delta_{12}^x) + \delta_{23}^x (x_{31}^x - x_{21}^x - \Delta_{23}^x) \\ - r_{12} \text{sign}(x_{11}^x - x_{21}^x) - r_{32} \text{sign}(x_{31}^x - x_{21}^x), \\ \dot{x}_{22}^x = -x_{21}^x - 2x_{22}^x, \\ \dot{x}_{21}^y = x_{22}^y + c(x_{11}^y + x_{31}^y - 2x_{21}^y) + \delta_{12}^y (x_{11}^y - x_{21}^y + \Delta_{12}^y) + \delta_{23}^y (x_{31}^y - x_{21}^y - \Delta_{23}^y) \\ - r_{12} \text{sign}(x_{11}^y - x_{21}^y) - r_{32} \text{sign}(x_{31}^y - x_{21}^y), \\ \dot{x}_{22}^y = -x_{21}^y - 2x_{22}^y, \\ \dot{x}_{31}^x = x_{32}^x + c(x_{21}^x - x_{31}^x) + \delta_{23}^x (x_{21}^x - x_{31}^x + \Delta_{23}^x) - r_{13} \text{sign}(x_{11}^x - x_{31}^x) - r_{23} \text{sign}(x_{21}^x - x_{31}^x), \\ \dot{x}_{32}^x = -x_{31}^x - 2x_{32}^x, \\ \dot{x}_{31}^y = x_{32}^y + c(x_{21}^y - x_{31}^y) + \delta_{23}^y (x_{21}^y - x_{31}^y + \Delta_{23}^y) - r_{13} \text{sign}(x_{11}^y - x_{31}^y) - r_{23} \text{sign}(x_{21}^y - x_{31}^y), \\ \dot{x}_{32}^y = -x_{31}^y - 2x_{32}^y, \end{array} \right. \quad (77)$$

Para la simulación, la formación deseada esta dada por $\Delta_{12}^x = -4, \Delta_{12}^y = 0, \Delta_{13}^x = 2$ y $\Delta_{13}^y = 0$, con estos coeficientes se espera una formación en línea horizontal (con pendiente igual a cero). Las condiciones iniciales de los robots son: $\mathbf{x}_1^x = (5, 0)^T, \mathbf{x}_1^y = (5, 0)^T, \mathbf{x}_2^x = (-100, 0)^T, \mathbf{x}_2^y = (10, 0)^T, \mathbf{x}_3^x = (100, 0)^T, \mathbf{x}_3^y = (-10, 0)^T$. En este caso se seleccionan grandes distancias iniciales entre los robots con el fin de observar si es posible alcanzar

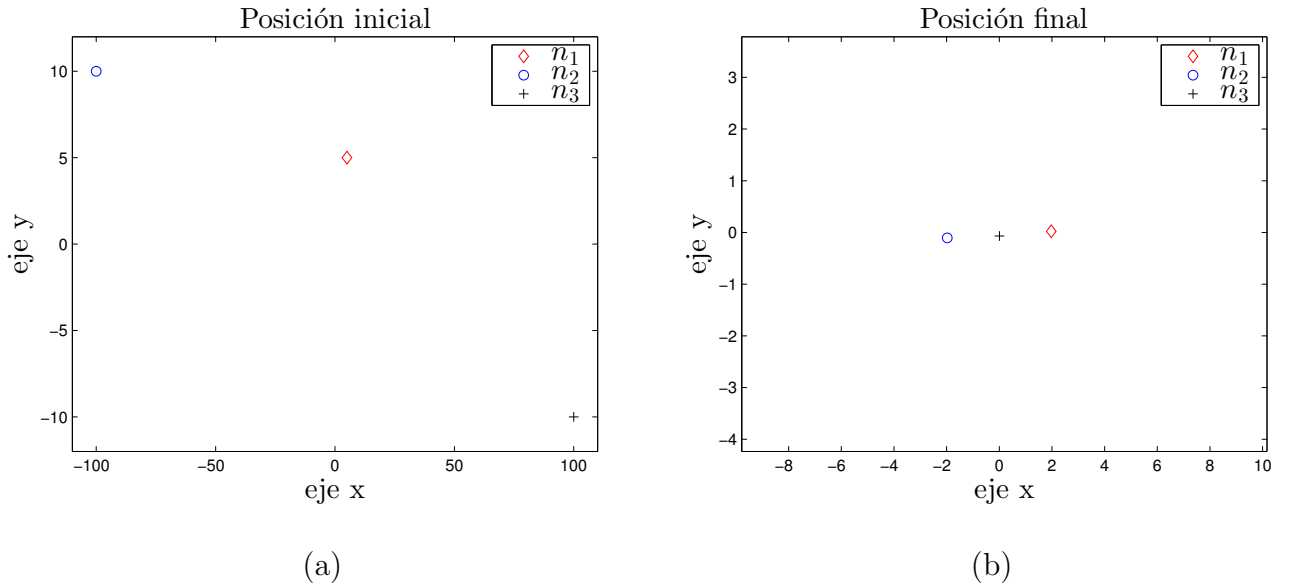


Figura 37. Escenario planteado para la simulación de una red de robots móviles en topología cadena con acoplamiento bidireccional. En (a) se presentan las posiciones iniciales de los robots y en (b) las posiciones desadas tras alcanzar la formación.

la formación aún y cuando los robots estén bastantante alejados. En la figura 37 (a) se observan las posiciones iniciales de los robots, mientras que en la figura 37 (b) se encuentra la posición final de los mismos, después de lograrse la formación. En esta ocasión, se incluye el término sinusoidal v en la dinámica de la componente Y del robot \mathbf{x}_1 , con lo que se esperan oscilaciones sobre ese eje, que para este caso, se presentan de forma vertical. En la figura 38 (a) se observa esta situación además de las trayectorias trazadas por los robots al momento de buscar la formación, mientras que en la figura 38 (b) se tiene un acercamiento de las trayectorias para observar de manera más clara el comportamiento de los robots cerca de su equilibrio.

Las gráficas temporales de la figura 39 ilustran un fenómeno bastante interesante resultado del acoplamiento bidireccional. En el caso anterior (figura 32) se presentó un esquema de maestro y esclavos, en donde la dinámica del robot maestro no fue controlada por la dinámica de los robots esclavos, por tanto, la trayectoria del robot maestro convergió al punto de

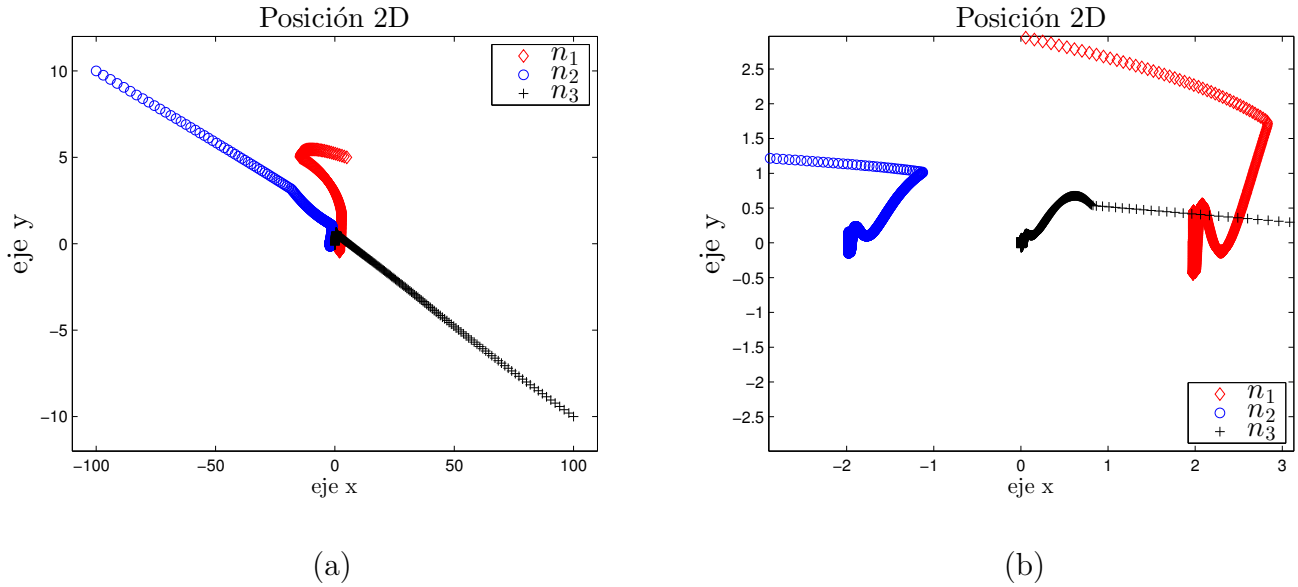


Figura 38. En (a) se presenta la trayectoria descrita por los robots, desde su posición inicial hasta el equilibrio, mientras que en (b) se muestra un acercamiento del punto de equilibrio de los robots.

equilibrio del robot aislado (en este caso $x^* (\text{sen}(2t), 0)^T$); pero en el caso de la figura 36 claramente todos los robots son controlados por la dinámica de al menos uno de los otros dos, así que el *punto de equilibrio de todos los robots es influenciado por la topología de conexión* y no solamente por la dinámica de un nodo aislado. Por esta razón, en la figura 39 (a) se observa que la posición en el eje X del robot x_1 tiende a 2, en vez de hacerlo a 0 como en el caso anterior. En la figura 39 (b) se observa otro fenómeno inducido por el acoplamiento bidireccional, recuérdese que el punto de equilibrio de los robots tiende a la formación deseada (53) si y solo si $\delta \gg 1$ pues, en estado estacionario, el coeficiente δ es el encargado de *disminuir el efecto de las contribuciones de la dinámica propia del robot* para dar paso a la formación. Es debido a esta situación que las oscilaciones de los robots disminuyen en amplitud además de que el punto de equilibrio de los otros robots ya no es más el de la formación (53), por tanto se tiene una formación con errores. Este resultado permite establecer que el procedimiento descrito en el capítulo 3 *no es recomendable para formar redes con acoplamiento bidireccional*.

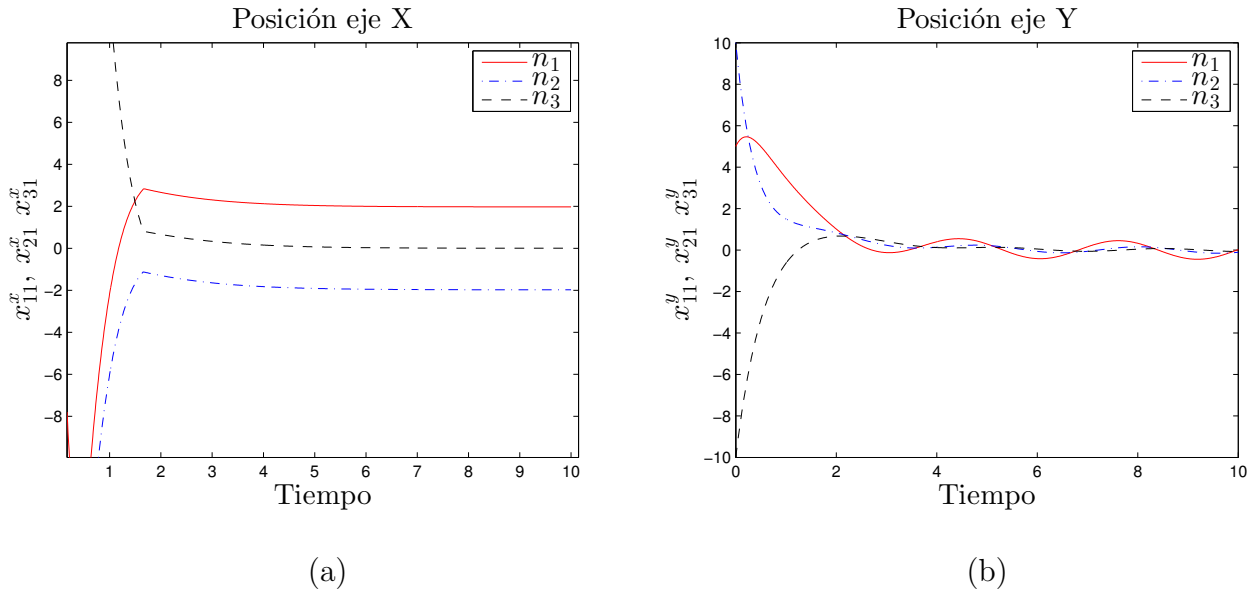


Figura 39. Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) la posición en el eje Y de los tres robots acoplados bidireccionalmente en una red con topología de cadena.

5.3 Red de robots móviles en topología anillo

En el caso de esta topología se seleccionó una *acoplamiento unidireccional* entre los robots (figura 40), de tal forma que, la matriz de acoplamiento presenta la siguiente estructura,

$$A_{anillo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (78)$$

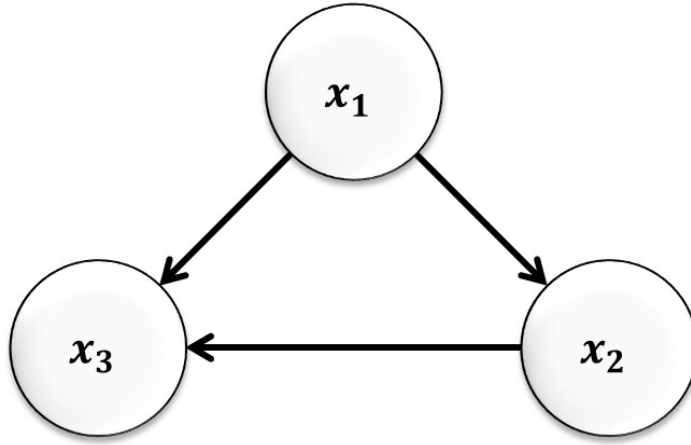


Figura 40. Red de tres robots móviles en topología anillo con acoplamiento unidireccional.

por tanto, las ecuaciones dinámicas para los tres robots son,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_{11}^x = x_{12}^x - r_{21} \text{sign}(x_{21}^x - x_{11}^x) - r_{31} \text{sign}(x_{31}^x - x_{11}^x) + v, \\
 \dot{x}_{12}^x = -x_{11}^x - 2x_{12}^x, \\
 \dot{x}_{11}^y = x_{12}^y - r_{21} \text{sign}(x_{21}^y - x_{11}^y) - r_{31} \text{sign}(x_{31}^y - x_{11}^y), \\
 \dot{x}_{12}^y = -x_{11}^y - 2x_{12}^y, \\
 \dot{x}_{21}^x = x_{22}^x + c(x_{11}^x - x_{21}^x) + \delta_{12}^x (x_{11}^x - x_{21}^x + \Delta_{12}^x) - r_{12} \text{sign}(x_{11}^x - x_{21}^x) - r_{32} \text{sign}(x_{31}^x - x_{21}^x), \\
 \dot{x}_{22}^x = -x_{21}^x - 2x_{22}^x, \\
 \dot{x}_{21}^y = x_{22}^y + c(x_{11}^y - x_{21}^y) + \delta_{12}^y (x_{11}^y - x_{21}^y + \Delta_{12}^y) - r_{12} \text{sign}(x_{11}^y - x_{21}^y) - r_{32} \text{sign}(x_{31}^y - x_{21}^y), \\
 \dot{x}_{22}^y = -x_{21}^y - 2x_{22}^y, \\
 \dot{x}_{31}^x = x_{32}^x + c(x_{21}^x + x_{21}^x - 2x_{31}^x) + \delta_{13}^x (x_{11}^x - x_{31}^x + \Delta_{13}^x) + \delta_{23}^x (x_{21}^x - x_{31}^x + \Delta_{23}^x) \\
 - r_{13} \text{sign}(x_{11}^x - x_{31}^x) - r_{23} \text{sign}(x_{21}^x - x_{31}^x), \\
 \dot{x}_{32}^x = -x_{31}^x - 2x_{32}^x, \\
 \dot{x}_{31}^y = x_{32}^y + c(x_{21}^y + x_{21}^y - 2x_{31}^y) + \delta_{13}^y (x_{11}^y - x_{31}^y + \Delta_{13}^y) + \delta_{23}^y (x_{21}^y - x_{31}^y + \Delta_{23}^y) \\
 - r_{13} \text{sign}(x_{11}^y - x_{31}^y) - r_{23} \text{sign}(x_{21}^y - x_{31}^y), \\
 \dot{x}_{32}^y = -x_{31}^y - 2x_{32}^y,
 \end{array} \right. \tag{79}$$

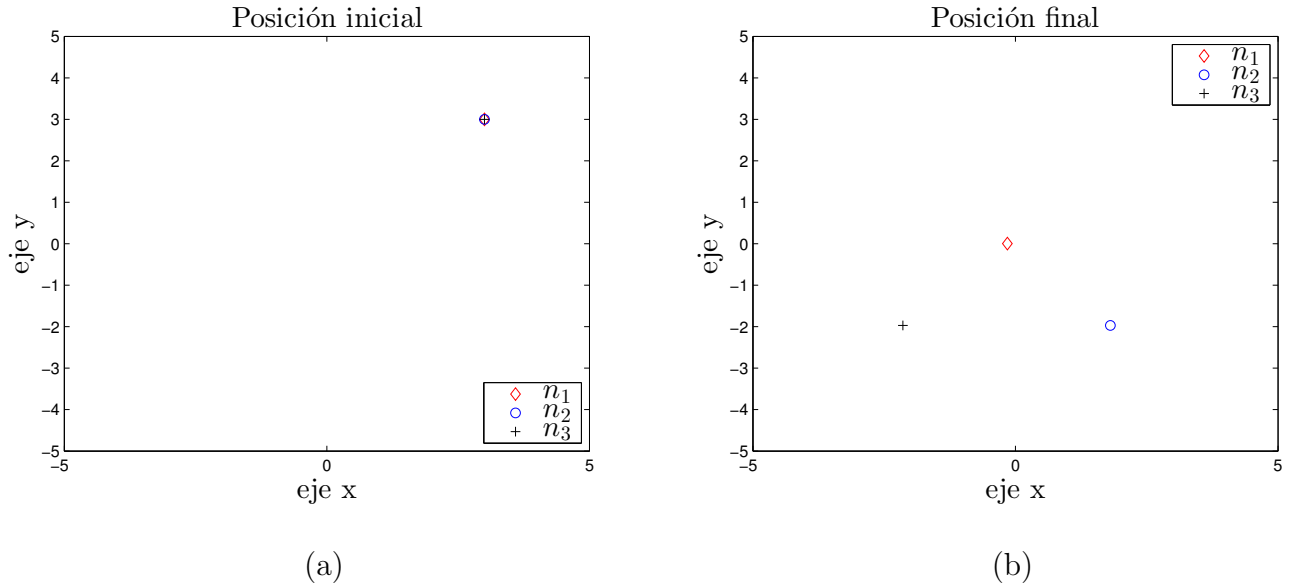


Figura 41. En (a) se observa que los tres robots tienen las mismas posiciones iniciales y en (b) se presenta la formación en delta deseada.

Se propone una formación en delta, la cual está dada por $\Delta_{12}^x = 2, \Delta_{12}^y = -2, \Delta_{13}^x = -2, \Delta_{13}^y = -2, \Delta_{23}^x = -4$ y $\Delta_{23}^y = 0$. Para este caso las condiciones iniciales son: $\mathbf{x}_1^x = (3, 0)^T, \mathbf{x}_1^y = (3, 0)^T, \mathbf{x}_2^x = (3, 0)^T, \mathbf{x}_2^y = (3, 0)^T, \mathbf{x}_3^x = (3, 0)^T, \mathbf{x}_3^y = (3, 0)^T$. La finalidad de seleccionar un escenario en el que los robots inician con una distancia menor a la distancia deseada, tiene el objetivo de observar al control de repulsión (46) en acción desde el principio de la simulación, Al proponer una posición inicial idéntica para los tres robots se somete la condición de repulsión al extremo. En la figura 41 (a) se ilustra lo dicho anteriormente, mientras que en 41 (b) se muestra la formación deseada. En este caso se agregó el término sinusoidal a la dinámica del eje X, por tanto, las oscilaciones de los robots observadas en la figura 42 se presentan en forma horizontal.

Las gráficas temporales de la figura 43 muestran que en este escenario se logró satisfactoriamente la formación de los robots, lo cual concuerda con los dos casos anteriores, pues, tanto en el caso de la figura 32 como en el de la figura 40 se alcanzó la formación deseada al presentarse acoplamiento unidireccional mientras que en el escenario de la figura 36 no fue

posible alcanzar la formación debido a su acoplamiento bidireccional.

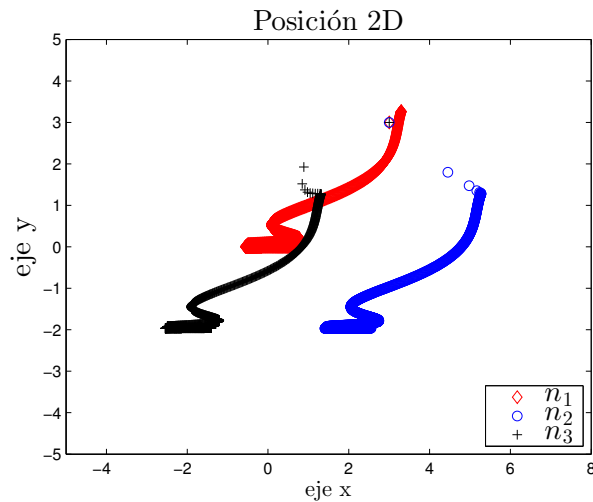


Figura 42. Trayectorias de los tres robots móviles desde la misma condición inicial para los tres hasta la formación en delta.

En este capítulo se presentaron distintos escenarios para formar grupos de robots móviles en dos dimensiones, en cada escenario se variaron diferentes aspectos para exhibir el comportamiento del controlador en diferentes situaciones, en estas variaciones se observó que las condiciones iniciales de los robots no afectan la formación, incluso si los mismos se encuentran extremadamente alejados, o sumamente cerca, se cumplió con el objetivo de formación. Al incluir en el robot maestro trayectorias variantes en el tiempo, los robots esclavos fueron capaces de mantener la formación y seguir al maestro en su trayectoria, esta capacidad será explotada en el siguiente capítulo para aplicar este comportamiento colectivo y así resolver un problema de patrullaje. Por último se comprobó que este controlador no es efectivo para redes en las que no existen robots maestros, por tanto, es una limitante que hay que considerar al tratar de formar redes de robots móviles mediante el procedimiento descrito en este trabajo de tesis.

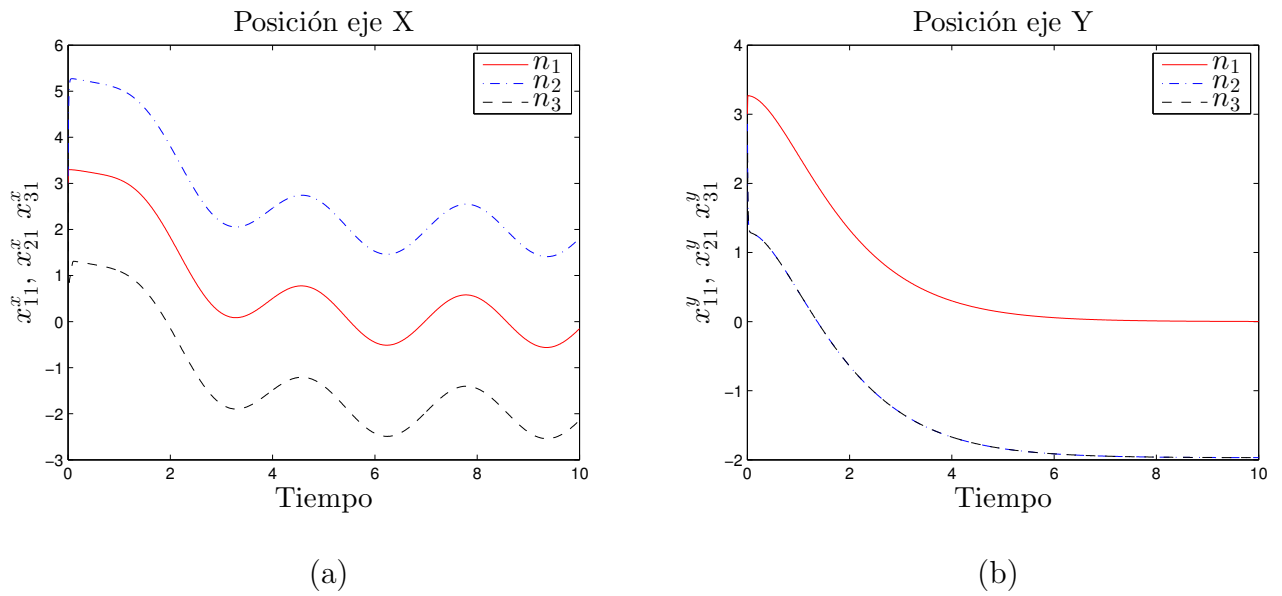


Figura 43. Gráficas temporales de (a) la posición en el eje X y (b) la posición en el eje Y de tres robots móviles formados en una red con topología anillo con acoplamiento unidireccional.

Capítulo 6

Aplicaciones de los comportamientos colectivos

El campo de la robótica móvil se encuentra en franco crecimiento desde las últimas décadas gracias al adelanto en la tecnología. La implementación de sistemas robóticos es ya una realidad, y estos han adquirido gran popularidad en algunos campos de trabajo debido a su grandes prestaciones y excelente confiabilidad. Existen situaciones y trabajos en las que un humano puede poner en riesgo su existencia o en su defecto, tareas que no exigen mucho esfuerzo por parte del individuo, estas situaciones son especiales para ser realizadas por sistemas robóticos, Portugal y Rocha (2013). Estas labores se han realizado por medio de sistemas de un solo robot, el cual debe poseer una gran cantidad de sensores y actuadores que le permitan realizar el trabajo solicitado, lo que se traduce en un agente costoso y con baja tolerancia a fallos, pues al ser un solo robot, un malfuncionamiento puede poner en riesgo la operación solicitada.

En años recientes, se ha mostrado gran interés en el uso de grupos de robots para realizar las mismas tareas, esto permite tener robots más modestos, en cuanto a construcción e instrumentación requerida, lo cual se traduce en un ahorro tanto económico como energético, y además la distribución y asignación de tareas a cada robot permite realizar el trabajo más eficientemente, también al tener más robots se aumenta la tolerancia a fallos, pues al estar realizando el mismo trabajo (*i.e.*, redundancia), el malfuncionamiento de uno de ellos no afecta la operación de todos como lo haría un sistema con un solo robot móvil, Portugal (2009). En la actualidad, labores como patrullaje, aprendizaje de mapas, navegación autónoma, auto-localización, exploración de áreas, evasión de obstáculos, inspección y vigilancia, entre otros, se han vuelto nichos populares para la aplicación de sistemas con múltiples robots móviles,

Portugal y Rocha (2010). En este capítulo se emplean las técnicas de control descritas en capítulos anteriores para *formar grupos de robots móviles* que serán empleados en aplicaciones de patrullaje autónomo.

6.1 Patrullaje

El patrullaje se define como "la actividad de ir alrededor o a través de un área en intervalos regulares con propósitos de seguridad" Portugal y Rocha (2011). El uso de grupos de robots móviles para desempeñar esta tarea se ha convertido en un área contemporánea de estudio con trabajos relevantes en las últimas décadas, (ver por ejemplo, Portugal y Rocha (2013), Guo y Qu (2004), Basilico *et al.* (2009)) ya que el auge de la tecnología permite tener robots autónomos cada vez más eficientes, lo que permite diseñar estrategias de patrullaje más efectivas, Portugal y Rocha (2010). A continuación se presenta una aplicación en *patrullaje de áreas* del control para formación de grupos de robots móviles propuesto en este trabajo de tesis. El objetivo es evaluar el método de control propuesto en escenarios en los que la implementación de un sistema basado en un grupo de robots móviles presupone una ventaja a la hora de solucionar un problema. Para el siguiente caso, se considera que los robots móviles conocen el área de trabajo a explorar y que no existen obstáculos que dificulten el patrullaje, además de conocer tanto su posición como la de los otros robots móviles del grupo.

Para el escenario propuesto se consideran robots móviles sin restricciones de movimiento y con componentes independientes en dos dimensiones, en donde el movimiento en cada dimensión se rige por el modelo matemático de la masa puntual (31), presentado en Qu *et al.* (2007). Por tanto, el i -ésimo robot móvil es descrito por el siguiente modelo,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{i1}^x &= x_{i2}^x, \\
 \dot{x}_{i2}^x &= -x_{i1}^x - 2x_{i2}^x, \\
 \dot{x}_{i1}^y &= x_{i2}^y, \\
 \dot{x}_{i2}^y &= -x_{i1}^y - 2x_{i2}^y,
 \end{aligned} \tag{80}$$

recuérdese que el estado x_{i1} representa la *posición del robot móvil*, mientras el estado x_{i2} representa su *velocidad*, además de que el superíndice simboliza la dimensión en la que se desenvuelve el robot (eje X o eje Y). Se propone el uso de una *red de tres robots móviles acoplados unidireccionalmente en topología cadena* como la que se muestra en la figura 44, en este caso el robot x_1 es considerado un maestro, por tanto, la estrategia de patrullaje afectará directamente la dinámica del robot x_1 . Los robots patrullarán un área rectangular de 7×5 unidades de longitud, mientras exhiben una *formación tipo delta*.

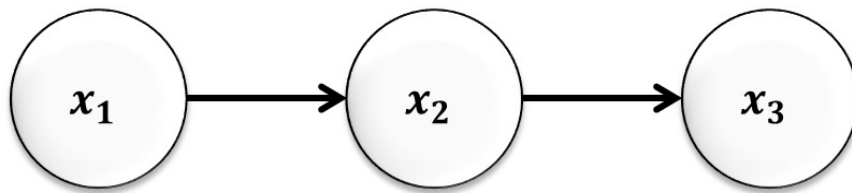


Figura 44. Red de tres robots móviles acoplados unidireccionalmente con topología de cadena. En este caso el robot x_1 cumple la función de robot maestro.

6.1.1 Diseño del controlador para la formación

Para lograr la formación del grupo de robots móviles, primeramente se obtiene la matriz de acoplamiento correspondiente a la situación, que en este caso es,

$$A_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

recuérdese que cada dimensión de los robots esclavos (x_2 y x_3) es controlada mediante la siguiente ley,

$$u_{1j} = \sum_{i=1}^N c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij} (a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}), \quad (82)$$

en donde a_{ij} es un elemento de la matriz de acoplamiento (81). Por tanto, siguiendo el procedimiento para formación descrito en el capítulo 3, las ecuaciones de los robots son,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{11}^x = x_{12}^x - r_{21} \operatorname{sign}(x_{21}^x - x_{11}^x) - r_{31} \operatorname{sign}(x_{31}^x - x_{11}^x) + v_x, \\ \dot{x}_{12}^x = -x_{11}^x - 2x_{12}^x, \\ \dot{x}_{11}^y = x_{12}^y - r_{21} \operatorname{sign}(x_{21}^y - x_{11}^y) - r_{31} \operatorname{sign}(x_{31}^y - x_{11}^y) + v_y, \\ \dot{x}_{12}^y = -x_{11}^y - 2x_{12}^y, \\ \dot{x}_{21}^x = x_{22}^x + c(x_{11}^x - x_{21}^x) + \delta_{12}^x(x_{11}^x - x_{21}^x + \Delta_{12}^x) - r_{12} \operatorname{sign}(x_{11}^x - x_{21}^x) \\ - r_{32} \operatorname{sign}(x_{31}^x - x_{21}^x), \\ \dot{x}_{22}^x = -x_{21}^x - 2x_{22}^x, \\ \dot{x}_{21}^y = x_{22}^y + c(x_{11}^y - x_{21}^y) + \delta_{12}^y(x_{11}^y - x_{21}^y + \Delta_{12}^y) - r_{12} \operatorname{sign}(x_{11}^y - x_{21}^y) \\ - r_{32} \operatorname{sign}(x_{31}^y - x_{21}^y), \\ \dot{x}_{22}^y = -x_{21}^y - 2x_{22}^y, \\ \dot{x}_{31}^x = x_{32}^x + c(x_{21}^x - x_{31}^x) + \delta_{23}^x(x_{21}^x - x_{31}^x + \Delta_{23}^x) - r_{13} \operatorname{sign}(x_{11}^x - x_{31}^x) \\ - r_{23} \operatorname{sign}(x_{21}^x - x_{31}^x), \\ \dot{x}_{32}^x = -x_{31}^x - 2x_{32}^x, \\ \dot{x}_{31}^y = x_{32}^y + c(x_{21}^y - x_{31}^y) + \delta_{23}^y(x_{21}^y - x_{31}^y + \Delta_{23}^y) - r_{13} \operatorname{sign}(x_{11}^y - x_{31}^y) \\ - r_{23} \operatorname{sign}(x_{21}^y - x_{31}^y), \\ \dot{x}_{32}^y = -x_{31}^y - 2x_{32}^y, \end{array} \right. \quad (83)$$

en donde las leyes de control v_x y v_y presentes en el robot x_1 son las pertinentes para lograr el patrullaje. Finalmente, mediante los coeficientes de separación $\Delta_{12}^x = 2, \Delta_{12}^y = -2, \Delta_{23}^x = -4$ y $\Delta_{23}^y = 0$ se logra una formación tipo delta, tal como se aprecia en la figura

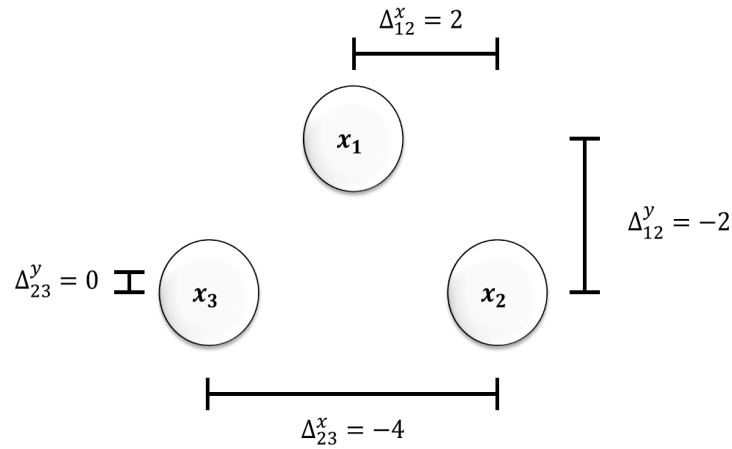


Figura 45. Tres robots móviles en la formación tipo delta utilizada para el ejemplo de patrullaje.

6.1.2 Diseño del control para patrullaje

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este capítulo es el de lograr que un grupo de robots móviles patrulle una área rectangular, comenzando desde posiciones iniciales arbitrarias, desde las cuales los robots móviles deben lograr una formación tipo delta para recorrer el área seleccionada. Para lograr este cometido, a continuación se diseñan las leyes de control necesarias para recorrer dicha trayectoria. En este caso se optó por utilizar un control secuencial, dividido en 4 secciones, en donde cada una rige el movimiento sobre las aristas del rectángulo. Para realizar los cambios entre las secciones del controlador, se utilizan los vértices de un cuadrado de 3 unidades de longitud por lado sobre el que se desplaza el robot maestro. Esta situación se muestra en la figura 46.

Los puntos marcados como A,B,C y D son los encargados de cambiar las condiciones del controlador. El área circular marcada alrededor de cada punto es un umbral denominado $\phi > 0$ y seleccionado tomar en cuenta que se ha alcanzado el punto con una tolerancia de error aceptable. Cada sección del controlador tiene la estructura de un control proporcional de regulación, Ogata (1997) los cuales tienen la siguiente estructura,

$$v_x = k_p(x_d^x - x_{11}^x), \quad v_y = k_p(x_d^y - x_{11}^y), \quad (84)$$

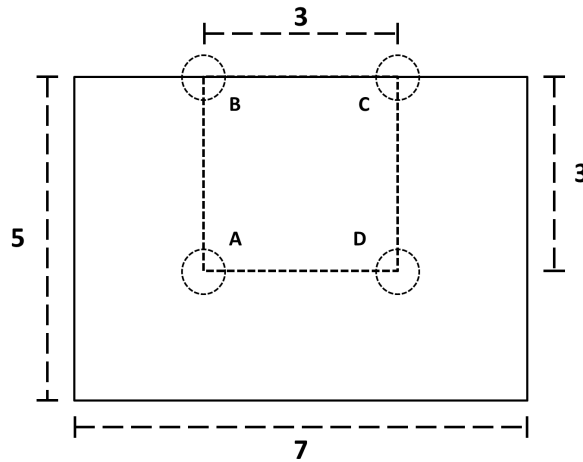


Figura 46. Área de patrullaje para el ejemplo. El cuadrado interior de 3 unidades es la referencia de movimiento del nodo maestro.

en donde $x_d = (x_d^x, x_d^y)$ es la coordenada correspondiente a cada uno de los puntos A, B, C y D, y $k_p \in \mathbb{R}$ es la ganancia del controlador proporcional. Si se toma en cuenta el origen del plano de trabajo como el punto A, las coordenadas para cada punto del cuadrilátero ABCD son,

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 0), \\
 B &= (0, 3), \\
 C &= (3, 3), \\
 D &= (3, 0),
 \end{aligned} \tag{85}$$

por tanto, las leyes de control para el patrullaje están dadas por,

$$v_x = \begin{cases} k_p(0 - x_{11}^x) & \text{si } \alpha = 1, \\ k_p(0 - x_{11}^x) & \text{si } \alpha = 2, \\ k_p(3 - x_{11}^x) & \text{si } \alpha = 3, \\ k_p(3 - x_{11}^x) & \text{si } \alpha = 4, \end{cases} \quad v_y = \begin{cases} k_p(0 - x_{11}^y) & \text{si } \alpha = 1, \\ k_p(3 - x_{11}^y) & \text{si } \alpha = 2, \\ k_p(3 - x_{11}^y) & \text{si } \alpha = 3, \\ k_p(0 - x_{11}^y) & \text{si } \alpha = 4, \end{cases} \tag{86}$$

en donde el coeficiente $\alpha = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ cambia su valor cuando el nodo maestro alcanza

la zona del umbral ϕ de cada vértice de la trayectoria. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \alpha = 1 & \quad \text{si } (\alpha = 0 \text{ o } \alpha = 4) \text{ y } |(x_{11}^x, x_{11}^y)| < \phi_D, \\
 \alpha = 2 & \quad \text{si } \alpha = 1 \text{ y } |(x_{11}^x, x_{11}^y)| < \phi_A, \\
 \alpha = 3 & \quad \text{si } \alpha = 2 \text{ y } |(x_{11}^x, x_{11}^y)| < \phi_B, \\
 \alpha = 4 & \quad \text{si } \alpha = 3 \text{ y } |(x_{11}^x, x_{11}^y)| < \phi_C,
 \end{aligned} \tag{87}$$

el valor de $\alpha = 0$ indica el inicio del patrullaje, en donde los robots apenas se encuentran buscando la formación desplazándose desde su posición inicial. La secuencia propuesta en (87) permite que los robots *realicen el patrullaje del área en sentido horario*.

6.1.3 Patrullaje por medio de un grupo de robots móviles

Para comprobar la eficacia de los controladores propuestos, se realizan simulaciones numéricas en Matlab, las cuales tienen 10 unidades de tiempo de duración. Las condiciones iniciales de los robots son: $\mathbf{x}_1^x = (4, 0)^T$, $\mathbf{x}_1^y = (1, 0)^T$, $\mathbf{x}_2^x = (-5, 0)^T$, $\mathbf{x}_2^y = (5, 0)^T$, $\mathbf{x}_3^x = (2, 0)^T$, $\mathbf{x}_3^y = (-3, 0)^T$, también se selecciona el coeficiente de acoplamiento $c = 20$, la ganancia del controlador de patrullaje (84) $k_p = 12$, el coeficiente de repulsión $\delta = 100$, el coeficiente anticollisiones $r = 1000$ y el umbral $\phi = 0.1$. En la figura 47 se muestran las posiciones iniciales de los robots para este caso. El área de patrullaje esta delimitada por la línea sólida, mientras que la línea punteada marca la trayectoria seleccionada para el recorrido del robot maestro x_1 .

Puesto que al inicio $\alpha = 0$, el robot maestro intenta alcanzar el vértice A por primera vez, mientras que los robots esclavos buscan alcanzar sus posiciones dentro de la formación deseada. La figura 48 muestra la situación de los robots en el instante $t = 0.19$ unidades de tiempo.

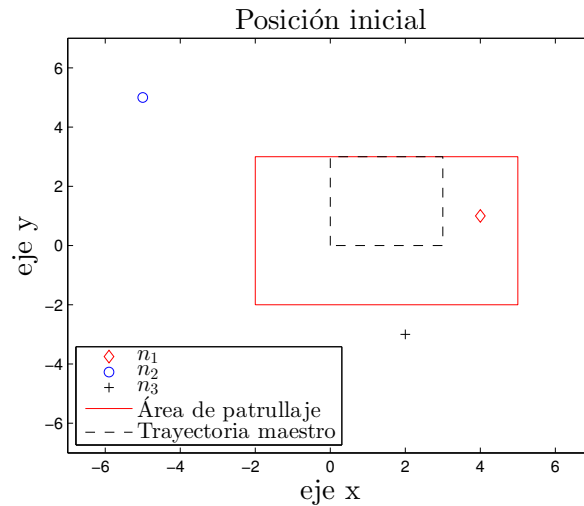


Figura 47. Posiciones iniciales de los robots correspondientes a $t = 0$ para la simulación propuesta.

Como se puede apreciar en la figura 48, los robots esclavos prácticamente han alcanzado la formación antes de que el robot maestro alcance el punto A. Recuérdese que el patrullaje comienza hasta que el robot maestro alcance el punto A por primera vez y puesto que los nodos esclavos ya se encuentran en sus distancias respectivas para la formación, el patrullaje se realizará con el grupo debidamente formado. En la figura 49 se muestra la situación de los robots para $\alpha = 1$, esto es, mientras el robot maestro intenta alcanzar el punto B de su trayectoria.

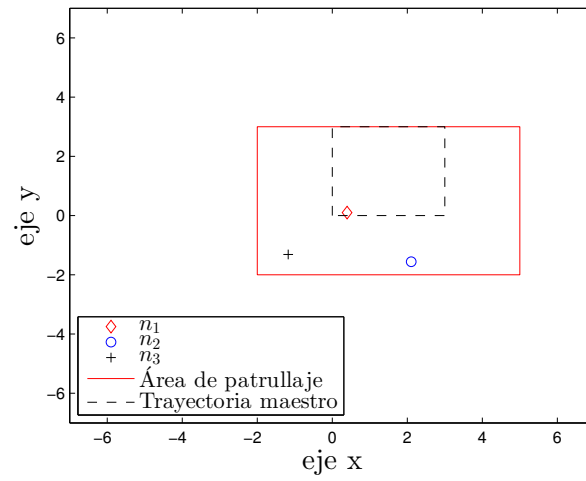


Figura 48. Situación de los robots en $t = 0.19$ unidades de tiempo. Mientras el robot maestro intenta alcanzar su posición en el vértice A, los nodos esclavos prácticamente han alcanzado la formación.

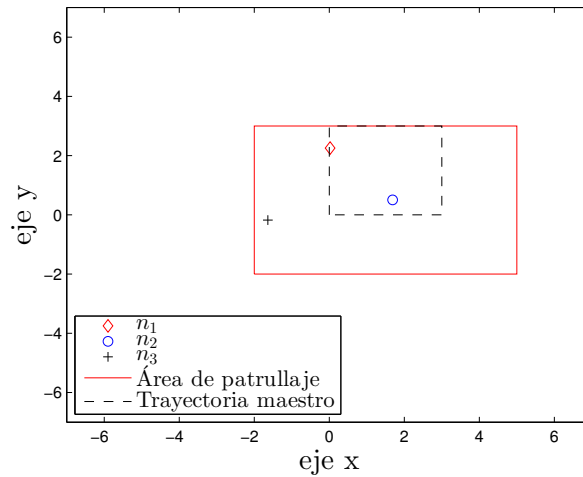


Figura 49. Situación de los robots en $t = 0.39$ unidades de tiempo. En este caso el robot maestro busca alcanzar la posición del punto B de su trayectoria.

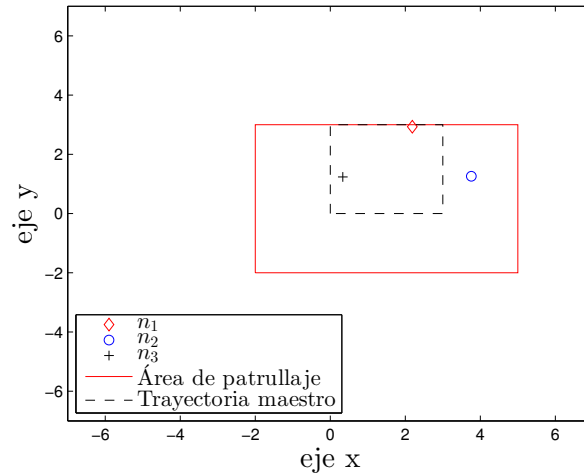


Figura 50. Posiciones de los robots en patrullaje para $t = 0.69$ unidades de tiempo. El robot maestro se encuentra cerca de alcanzar el punto C de su trayectoria, mientras que los robots esclavos mantienen la formación tipo delta.

En el caso de $\alpha = 2$, el robot maestro se dirige al punto C. En esta caso es conveniente observar que existe una sección del área a patrullar que no será visitada por los robots, esta se encuentra en las esquinas superiores y esto se debe al algoritmo seleccionado para el patrullaje. la figura 50 muestra como los robots continúan su recorrido en el instante $t = 0.69$ unidades de tiempo.

Para el siguiente cambio de trayectoria, el cual ocurre con $\alpha = 3$, el control maestro recorre la arista que une los puntos C y D. De nuevo, en esta transición se pierde una porción del área a patrullar por parte del grupo. Esta situación puede remediarse mediante algoritmos de patrullaje mas eficientes o involucrando formaciones variantes en el tiempo, también es posible susbsanar la situación con el uso de sensores que permitan a los robots cubrir el área faltante a distancia, la implementación de sistemas con múltiples agentes robóticos permite un sin fin de opciones para realizar eficientemente un trabajo. La figura 51 muestra cómo el grupo de robots continúa el patrullaje del área mientras el robot maestro se dirige a la posición del vértice D.

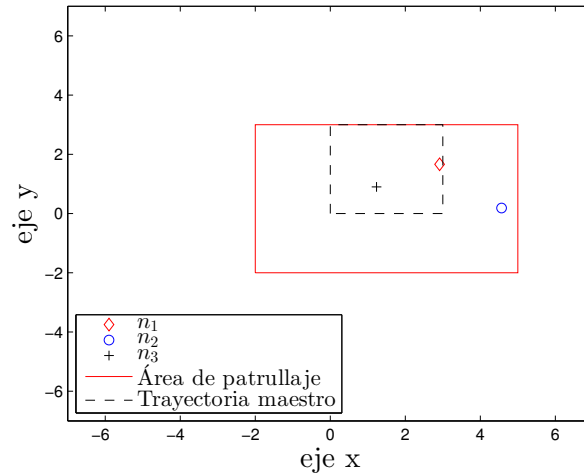


Figura 51. Posición del grupo de robots en patrullaje para $t = 0.94$ unidades de tiempo. En este caso el robot maestro se dirige al vértice D en su trayectoria.

Después de alcanzar el punto D, el maestro se dirige de nuevo al vértice A, para completar la trayectoria. En este caso, $\alpha = 4$ permite al nodo maestro recorrer la arista DA. La figura 52 muestra la posición de los robots móviles para el instante $t = 1.19$ unidades de tiempo. Al momento de alcanzar de nuevo el vértice A, comienza otra ronda de patrullaje, las cuales se extienden indefinidamente hasta el final de la simulación, que en este caso se da en $t = 10$ unidades de tiempo.

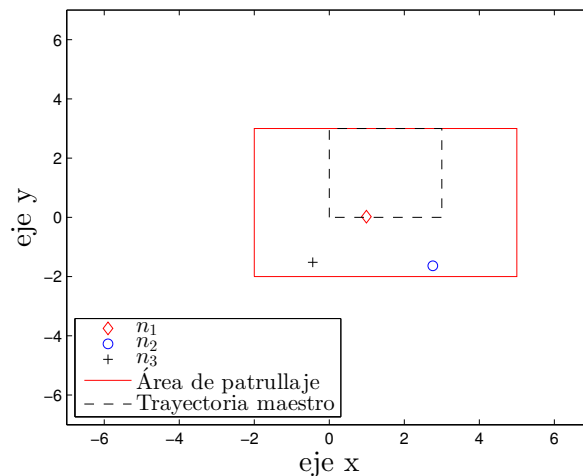


Figura 52. Recorrido de la arista DA por parte del maestro. La posición de los robots corresponde al instante $t = 1.19$ unidades de tiempo de la simulación.

La naturaleza de la trayectoria propuesta no permite que se exploren las esquinas superiores del área seleccionada, pues el algoritmo de control para el patrullaje no toma en cuenta esta situación. Debido al alcance de este trabajo de tesis, no se ahondará en el uso de estrategias de patrullaje óptimas, para mayores referencias sobre el tema véase, Guo y Qu (2004), Portugal y Rocha (2011), Portugal y Rocha (2013). Aún así, resulta evidente que el uso de una red de robots móviles permite cubrir un área mayor en una ronda de patrullaje a la que cubriría un solo robot, obteniendo una substancial ganancia en el área cubierta por unidad de tiempo. Esto permite reducir el esfuerzo necesario por cada robot en el intento de recorrer el área. Con este caso fue posible observar una aplicación de las estrategias de control de comportamientos colectivos propuestas a lo largo de este trabajo de tesis y así vislumbrar posibles líneas de investigación basados en ellas.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de tesis de maestría se realizó una revisión a dos comportamientos colectivos en particular, la sincronización y la formación. Se diseñaron leyes de control para generar estos comportamientos emergentes en grupos de robots móviles representados por un modelo reportado en la literatura. El diseño de los controladores se realizó en base a ciertas restricciones, por tanto, el control de comportamientos colectivos reportado anteriormente es válido solo para grupos de sistemas dinámicos idénticos, con una estructura en particular, presentada en el capítulo 2. En el caso particular de la formación, además de las restricciones anteriores, es necesario agregar que solamente es válida para sistemas con componentes dimensionales independientes, esto es, que el movimiento en cada eje no depende de la dinámica del movimiento en otro eje.

Los resultados numéricos de las simulaciones permiten observar la influencia de la topología en el mantenimiento del comportamiento colectivo en cuestión. También se observó que en redes con un gran número de nodos la topología juega un papel preponderante al momento de lograr la sincronización, por ejemplo una topología de conexión global sincronizará fácilmente con una red numerosa, no así lo hará una red de anillo o de cadena, en las cuales se vuelve más difícil la sincronización con el aumento de nodos en la red.

La efectividad del algoritmo de formación propuesto se ve influenciada directamente por el tipo de acoplamiento en la red. Una red que cuente con nodos maestros, se formará de una forma más eficiente que una red que posea solamente acoplamientos bidireccionales.

Adicionalmente, la precisión de la formación esta dada por la selección apropiada de los parámetros involucrados, pues un coeficiente de repulsión bajo induce errores en la formación final y un coeficiente anticollisiones pequeño puede no ser suficiente para evitar colisiones entre los robots. El éxito de la formación recae en la pericia del diseñador del sistema, pues es él quien esta encargado de asignar las distancias entre los nodos. Él tiene la responsabilidad de seleccionar distancias congruentes y que no generen conflicto entre los nodos.

Un sistema multiagente que cumpla con todas las restricciones anteriormente descritas puede utilizarse para resolver problemas como el patrullaje, presentado en el capítulo 6. El uso de estos sistemas supone una ventaja en cuanto a optimización de tiempo, dinero y energía invertidos en la solución. Este campo de trabajo se encuentra en constante desarrollo y son varias las propuestas para utilizar SMA que sustituyan las actividades del hombre en situaciones de riesgo.

El estudio de sistemas complejos es una ciencia que se encuentra en auge, y son varias campos los que se benefician de sus aportaciones, en especial, el campo de la ingeniería, por medio del estudio de la Inteligencia Artificial se encuentra desarrollando nuevas estrategias para comprender y controlar a los comportamientos emergentes, los cuales se originan por la interacción de los miembros de un grupo.

7.1 Trabajo Futuro

Las conclusiones obtenidas a partir de este trabajo de tesis abrieron paso para ciertas líneas de investigación potenciales, algunos de los problemas abiertos detectados durante la investigación realizada son:

- Aumentar el número de nodos en las redes y observar los efectos que causen en los comportamientos colectivos.

- Sincronizar y formar redes de robots en topologías irregulares, tales como mundo pequeño, libres de escala, aleatorias, etc.
- Estudiar la robustez de las redes en cuanto a perturbaciones o fallos en las comunicaciones.
- Analizar las condiciones necesarias para lograrar estos comportamientos colectivos en otros modelos de robots móviles.
- Aplicar los comportamientos colectivos descritos en otras tareas como transporte de materiales, búsqueda y rescate, *etc.*
- Estudiar comportamientos colectivos derivados de estos, tales como la coordinación, la congregación, el consenso, el problema de cita o *rendezvous*, *etc.*
- Implementar las leyes de control descritas en grupos de robots móviles comerciales.

Lista de referencias

- Alexandres, M. G. (2007). *Arquitectura tolerante a fallos mediante un sistema multiagente para el sistema de control de un robot móvil*. Tesis de doctorado, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.
- Arellano-Delgado, A., López-Gutiérrez, R., Cruz-Hernández, C., Posadas-Castillo, C., Cardoza-Avendaño, L., y Serrano-Guerrero, H. (2013). Experimental network synchronization via plastic optical fiber. *Optical Fiber Technology*, **19**(2): 93 – 108.
- Auyang, S. (1999). *Foundations of Complex-system Theories: In Economics, Evolutionary Biology, and Statistical Physics*. In Economics, Evolutionary Biology, and Statistical Physics. Cambridge University Press.
- Axelrod, R. (1997). *The Complexity of Cooperation: Agent-based Models of Competition and Collaboration*. Princeton studies in complexity. Princeton University Press.
- Balch, T. y Arkin, R. (1998). Behavior-based formation control for multirobot teams. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, **14**(6): 926–939.
- Bar-Yam, Y. (1997). *Dynamics of complex systems*, Vol. 213 de *Addison-Wesley studies in nonlinearity*. Addison-Wesley Reading, MA.
- Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., y Aracil, R. (2007). *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill, Interamericana de España.
- Basilico, N., Gatti, N., y Amigoni, F. (2009). Leader-follower strategies for robotic patrolling in environments with arbitrary topologies. En *Proceedings of The 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems - Volume 1, AAMAS '09*, páginas 57–64, Richland, SC. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems.
- Baturone, A. O. (2001). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo.
- Berge, C. (2001). *The Theory of Graphs*. Dover books on mathematics. Dover.
- Dorigo, M., Floreano, D., Gambardella, L., Mondada, F., y Nolfi, S. (2013). Swarmanoid: a novel concept for the study of heterogeneous robotic swarms. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, **20**(4): 60–71.
- Forsyth, D. (2009). *Group Dynamics*. Cengage Learning.
- Foulds, L. (1992). *Graph theory applications*. Universitext. Springer-Verlag.
- Guo, Y. y Qu, Z. (2004). Coverage control for a mobile robot patrolling a dynamic and uncertain environment. En *Intelligent Control and Automation, 2004. WCICA 2004. Fifth World Congress on*, Vol. 6, páginas 4899–4903.
- Khalil, H. y Grizzle, J. (2002). *Nonlinear Systems*, Vol. 3. Prentice hall Upper Saddle River.

- Kube, C. R. y Zhang, H. (1993). Collective robotics: From social insects to robots. *Adaptive Behavior*, **2**(2): 189–218.
- Kwakernaak, H., Sivan, R., y Strijbos, R. C. W. (1991). *Modern signals and systems*. Prentice-Hall International.
- Martínez-Clark, R., Reyes-De la Cruz, D., Cruz-Hernández, C., López-Gutiérrez, R. M., y Pinedo-lomelí, L. (2013). Sincronización de robots móviles en redes complejas deterministas de mundo pequeño. En *Memorias del Congreso Internacional COMPUMAT 2013, La Habana, Cuba del 27 al 29 de noviembre del 2013*.
- Mataric, M. (1992). Minimizing complexity in controlling a mobile robot population. En *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*, Vol. 1, páginas 830–835.
- Mataric, M. (1993). Designing emergent behaviors: From local interactions to collective intelligence. En *Proceedings of the Second International Conference on Simulation of Adaptive Behavior*, páginas 432–441.
- Mataric, M. (1995). Issues and approaches in the design of collective autonomous agents. *Robotics and Autonomous Systems*, **16**(2): 321 – 331.
- Newman, M. E. J. (2001). Scientific collaboration networks. ii. shortest paths, weighted networks, and centrality. *Phys. Rev. E*, **64**(1): 016132.
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, New York.
- Olfati-Saber, R. (2006). Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **51**(3): 401–420.
- Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, **64**(8): 821–824.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M. G., y Kurths, J. (2001). *Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Portugal, D. (2009). *RoboCops: A Study of Coordination Algorithms for Autonomous Mobile Robots in Patrolling Missions*. Tesis de maestría, University of Coimbra, Department of Electrical and Computer Engineering, Coimbra, Portugal.
- Portugal, D. y Rocha, R. (2010). Msp algorithm: Multi-robot patrolling based on territory allocation using balanced graph partitioning. En *Proceedings of the 2010 ACM Symposium on Applied Computing, SAC '10*, páginas 1271–1276.
- Portugal, D. y Rocha, R. (2011). A survey on multi-robot patrolling algorithms. En *Technological Innovation for Sustainability*, páginas 139–146.
- Portugal, D. y Rocha, R. P. (2013). Multi-robot patrolling algorithms: examining performance and scalability. *Advanced Robotics*, **27**(5): 325–336.
- Posadas-Castillo, C. (2008). *sincronización de sistemas complejos*. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Baja California, Baja California, México.

- Posadas-Castillo, C., Cruz-Hernández, C., y López-Gutiérrez, R. M. (2008a). Synchronization of chaotic neural networks with delay in irregular networks. *Applied Mathematics and Computation*, **205**(1): 487–496.
- Posadas-Castillo, C., López-Gutiérrez, R., y Cruz-Hernández, C. (2008b). Synchronization of chaotic solid-state nd:yag lasers: Application to secure communication. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **13**(8): 1655 – 1667.
- Posadas-Castillo, C., Cruz-Hernández, C., y López-Gutiérrez, R. (2009). Experimental realization of synchronization in complex networks with chua’s circuits like nodes. *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**(4): 1963 – 1975.
- Qu, Z., Wang, J., y Hull, R. (2007). Leaderless cooperative formation control of autonomous mobile robots under limited communication range constraints. En D. Grundel, R. Murphey, P. Pardalos, y O. Prokopyev, editores, *Cooperative Systems*, Vol. 588 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, páginas 79–104.
- Russell, S. y Norvig, P. (2010). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall series in artificial intelligence. Prentice Hall.
- Serrano-Guerrero, H., Cruz-Hernández, C., López-Gutiérrez, R., Cardoza-Avendaño, L., y Chávez-Pérez, R. (2013). Chaotic Synchronization in Nearest-Neighbor Coupled Networks of 3D CNNs. *Journal of Applied Research and Technology*, **11**(1): 26 – 41.
- Stanoev, A. y Smilkov, D. (2013). Consensus theory in networked systems. En L. Kocarev, editor, *Consensus and Synchronization in Complex Networks*, Understanding Complex Systems, páginas 1–22.
- Stone, P. y Veloso, M. (2000). Multiagent systems: A survey from a machine learning perspective. *Autonomous Robots*, **8**(3): 345–383.
- Wang, X. F. (2002). Complex networks: Topology, dynamics and synchronization. *I. J. Bifurcation and Chaos*, **12**(5): 885–916.
- Wang, X. F. y Chen, G. (2002). Synchronization in small-world dynamical networks. *I. J. Bifurcation and Chaos*, **12**(1): 187–192.
- Wu, C. y Chua, L. (1995a). Application of graph theory to the synchronization in an array of coupled nonlinear oscillators. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **42**(8): 494–497.
- Wu, C. y Chua, L. O. (1995b). Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans. CAS-I*, **42**(8): 430–447.
- Wu, C. y Chua, L. O. (1996). On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **43**(2): 161–165.
- Yamaguchi, H., Arai, T., y Beni, G. (2001). A distributed control scheme for multiple robotic vehicles to make group formations. *Robotics and Autonomous Systems*, **36**(4): 125–147.