

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**MODELADO Y CONTROL DE ROBOTS MÓVILES CON RUEDAS
OMNIDIRECCIONALES**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

LUIS GUERRERO BONILLA

Ensenada, Baja California, México, marzo de 2012

TESIS DEFENDIDA POR

Luis Guerrero Bonilla

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director del Comité



Dra. María del Carmen Monroy Lara

Miembro del Comité



Dr. César Cruz Hernández

Miembro del Comité



Dr. Vasily Spirin

Miembro del Comité



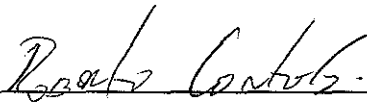
M. C. Enrique Pacheco Cabrera

Miembro del Comité



Dr. Gustavo Olague Caballero

Miembro del Comité



Dr. Roberto Conte Galván

*Coordinador del programa de
posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones*



Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

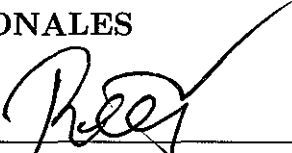
Director de Estudios de Posgrado

8 de marzo de 2012

RESUMEN de la tesis de **LUIS GUERRERO BONILLA**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **MAESTRO EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES** con orientación en **INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL**. Ensenada, Baja California, marzo de 2012.

**MODELADO Y CONTROL DE ROBOTS MÓVILES CON RUEDAS
OMNIDIRECCIONALES**

Resumen aprobado por:



Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Director de Tesis

Esta tesis trata del estudio teórico de un tipo de robot móvil con ruedas omnidireccionales. Se presenta un modelo general de estos robots móviles, y después se explica cómo se relacionan sus características de omnidireccionalidad de movimiento en el plano con el uso de ruedas omnidireccionales. Posteriormente se presentan controladores para cumplir diversos objetivos de control como regulación y trazado de curvas paramétricas.

Palabras Clave: Robot, móvil, omnidireccional, modelado, control.

ABSTRACT of the thesis presented by **LUIS GUERRERO BONILLA**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of **MASTER OF SCIENCE** in **ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS** with orientation in **INSTRUMENTATION AND CONTROL**. Ensenada, Baja California, March 2012.

MODELLING AND CONTROL OF MOBILE ROBOTS WITH OMNIDIRECTIONAL WHEELS

This thesis deals with the theoretical study of a type of mobile robots with mecanum or omnidirectional-type wheels. A general model for this type of mobile robots is presented, and the relationship between the omnidirectionality and the omnidirectional wheels is explained. Afterwards, some control algorithms are presented in order to achieve diverse control objectives.

Keywords: Mobile, robot, omnidirectional, modelling, control.

A mi mamá.

Agradecimientos

A la Dra. Monroy y Dann de la Torre, pues sin su apoyo esta tesis no hubiera sido posible.

Al Dr. Olague y al Dr. Conte, por haberme escuchado y aconsejado cada vez que lo necesité.

Al Dr. Kelly, por haberme enseñado el camino de cómo pensar mejor.

Al CONACyT.

Contenido

| | Página |
|---|------------|
| Resumen en español | i |
| Resumen en inglés | ii |
| Dedicatoria | iii |
| Agradecimientos | iv |
| Contenido | v |
| Lista de Figuras | vii |
| Lista de Tablas | ix |
| I. Introducción | 1 |
| II. Modelo Cinemático General del Robot Omnidireccional | 4 |
| III. Modelo Cinemático con Ruedas Omnidireccionales | 7 |
| III.1 Ruedas Convencionales | 7 |
| III.2 Ruedas omnidireccionales | 9 |
| III.3 Dirección de Tracción | 11 |
| III.4 Plataforma Omnidireccional | 13 |
| IV. Modelo Cinemático Extendido | 20 |
| V. Controladores sin Medición de la Postura | 22 |
| V.1 Trazado de líneas rectas con pendiente deseada | 22 |
| V.2 Trazado de círculos en el plano a rapidez constante | 27 |
| VI. Controladores con Medición Completa del Estado | 32 |
| VI.1 Medición del estado mediante cámaras | 32 |
| VI.2 Controlador lineal por retroalimentación de estado | 35 |
| VI.3 Linealización mediante retroalimentación | 42 |
| VI.4 Regulación | 42 |
| VI.5 Seguimiento de trayectorias descritas por curvas paramétricas | 45 |
| VI.6 Seguimiento de trayectorias mediante controladores codificados en las coordenadas del plano | 56 |
| VI.7 Seguimiento de trayectoria con control de orientación | 60 |

Contenido (continuación)

| | Página |
|------------------------|-----------|
| VII. Conclusión | 64 |
| REFERENCIAS | 65 |

Lista de Figuras

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 1 | La plataforma en el plano | 4 |
| 2 | Vista superior de la plataforma en el plano | 5 |
| 3 | Rueda sobre el plano | 7 |
| 4 | Configuración de la rueda | 8 |
| 5 | Rueda omnidireccional, modificada de Gfrerrer (2008) | 9 |
| 6 | Ángulo del barril | 10 |
| 7 | Configuración de la rueda omnidireccional | 10 |
| 8 | Plataforma con 3 ruedas | 14 |
| 9 | Plataforma con 3 ruedas, $\theta = 0$ | 14 |
| 10 | x vs y ; $x_0 = 1, y_0 = 2, v_0 = 1, \theta_0 = 0^\circ, a_d = 45^\circ$ | 25 |
| 11 | $\{y(t) - \tan(a_d)x(t) - [y_0 - \tan(a_d)x_0]\}$ vs t | 25 |
| 12 | x vs y ; $x_0 = -1, y_0 = -2, v_0 = -1, \theta_0 = 0^\circ, a_d = 45^\circ$ | 25 |
| 13 | x vs y ; $x_0 = -1, y_0 = 2, v_0 = -1, \theta_0 = 45^\circ, a_d = -45^\circ$ | 26 |
| 14 | x vs y ; $x_0 = 1, y_0 = -2, v_0 = 1, \theta_0 = 90^\circ, a_d = -45^\circ$ | 26 |
| 15 | x vs y , $x_0 = 0, y_0 = 1, \theta_0 = 0^\circ, r = 1, \omega = 1$ | 30 |
| 16 | $[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2]$ vs t | 30 |
| 17 | x vs y , $x_0 = 2, y_0 = 2, \theta_0 = 45^\circ, r = 2, \omega = 2$ | 30 |
| 18 | x vs y , $x_0 = -3, y_0 = -3, \theta_0 = -45^\circ, r = 2, \omega = -2$ | 31 |
| 19 | Cámara para medición de la postura | 33 |
| 20 | $x(t) - x_d$ vs t | 40 |
| 21 | $y(t) - y_d$ vs t | 40 |
| 22 | $\theta(t) - \theta_d$ vs t | 40 |
| 23 | $\ \xi(t) - \xi_d\ $ vs t | 41 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | | Página |
|--------|---|-----------|
| 24 | $\ \xi(t) - \xi_d\ $ vs t | 44 |
| 25 | $\ e\ $ vs t | 52 |
| 26 | $s - \dot{s}_d $ vs t | 53 |
| 27 | x vs y | 53 |
| 28 | $\ e\ $ vs t | 54 |
| 29 | $s - \dot{s}_d $ vs t | 54 |
| 30 | x vs y | 55 |
| 31 | e vs t | 58 |
| 32 | $s - \dot{s}_d $ vs t | 59 |
| 33 | x vs y | 59 |
| 34 | Plataforma trazando un círculo orientada hacia el centro del mismo | 61 |

Capítulo I

Introducción

En esta tesis se estudiará el modelo de una plataforma móvil con ruedas, con capacidades de movimiento en el plano tal que puede desplazarse en cualquier dirección sin necesitar orientarse de alguna manera particular. Nos referiremos a esta plataforma como plataforma omnidireccional o robot omnidireccional. Estudiaremos cómo esta capacidad de omnidireccionalidad puede lograrse a partir del uso de un tipo de ruedas especiales distribuidas de cierta manera alrededor de la plataforma. Posteriormente, se propondrán algunos controladores para cumplir con ciertos objetivos de control usando dicha plataforma.

El estudio de este tipo de robots con llantas especiales no es nuevo, aunque, a juicio del autor de esta tesis, no hay una referencia que uniformice de manera general los conceptos y los exponga claramente desde el punto de vista mecánico y matemático. Hay diferencias en la literatura desde el nombre de las ruedas que se usan generalmente para construir plataformas omnidireccionales. Los autores las nombran *Mecanum*, *ruedas deslizantes direccionales*, *ruedas omnidireccionales* o *ruedas universales* según Bräunl (2006), Agulló *et al.* (1987), Rojas (2006) o Cuellar (2006) respectivamente, citando sólo algunos. En esta tesis llamaremos a estas ruedas *omnidireccionales*, como se explicará y justificará en el capítulo 2.

En cuanto a los modelos, la literatura muestra el uso de modelos cinemáticos y dinámicos. El modelo cinemático comunmente es aquel donde se relacionan variables de posición y velocidad de algún punto sobre la plataforma, generalmente el centro,

con las variables de velocidades angulares de las ruedas, como visto en Kumar *et al.* (1995), Kalmár-Nagy y Ganguly (2004), Aghaebrahimi *et al.* (2004), Cuellar (2006) y Agulló *et al.* (1987). Se presenta en Muir (1988) una propuesta de esquema general para modelado de robots móviles con ruedas. El modelo dinámico relaciona variables como posición, velocidad y aceleración, con fuerzas o pares ejercidos sobre la plataforma a través de las ruedas. Algunos autores también integran a este modelo la dinámica de los motores en las ruedas, relacionando entonces las variables cinemáticas con voltajes en los motores, como se puede ver en Rojas (2006), Wu y Williams (2006), Watanabe *et al.* (1998), Vázquez y Velasco-Villa (2007) y Liu *et al.* (2007). Aún cuando los modelos cinemáticos y dinámicos coinciden entre los diversos autores, no hay una teoría general aceptada para obtenerlos, como podría ser el caso de robots manipuladores. A juicio del autor, Campion *et al.* (1996) presenta un modelado y clasificación de robots móviles que intenta estructurar el tema. A partir de los modelos obtenidos, los autores proponen controladores para realizar diversos objetivos de control, algunos inspirados en robots de servicio doméstico o para competencias deportivas de fútbol como en Aghaebrahimi *et al.* (2004).

El primer objetivo de esa tesis es presentar el modelado de una estructura de robot móvil omnidireccional, exponiendo la dependencia de esta estructura con las características de las ruedas que se usen, así como intentando ordenar las ideas en cuanto al modelado de este tipo de robots. El segundo objetivo es, una vez estudiado el modelo, presentar controladores para cumplir con algunos objetivos de control.

La tesis esta organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se hace la descripción de una plataforma móvil en el plano y se plantea el modelo genérico de una plataforma móvil omnidireccional, así como la representación matemática con entradas de control.

El capítulo 3 explora dos distintos tipos de ruedas para usar en la plataforma móvil. A partir del modelado matemático de ellas, se analizan las propiedades cinemáticas que le confiere un arreglo de ruedas a la plataforma con el objetivo de explicarnos la propiedad de omnidireccionalidad que resulta de usar ruedas de un tipo particular. Se obtiene un modelo que relaciona la derivada de la postura con respecto al tiempo con la velocidad angular de las ruedas de la plataforma.

El capítulo 4 trata de un modelo adicional, el cual no sólo presenta los elementos de la postura sino también la rapidez lineal resultante de la plataforma móvil.

Los dos últimos capítulos estudian controladores para cumplir distintos objetivos de control: En el capítulo 5 se presentan dos controladores que no requieren medición de la postura de la plataforma. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan controladores con uso completo de la medición de la postura de la plataforma, lo cual permite plantear objetivos de control más elaborados. Se estudian controladores para cumplir con objetivos de regulación y trazado de trayectorias.

Capítulo II

Modelo Cinemático General del Robot Omnidireccional

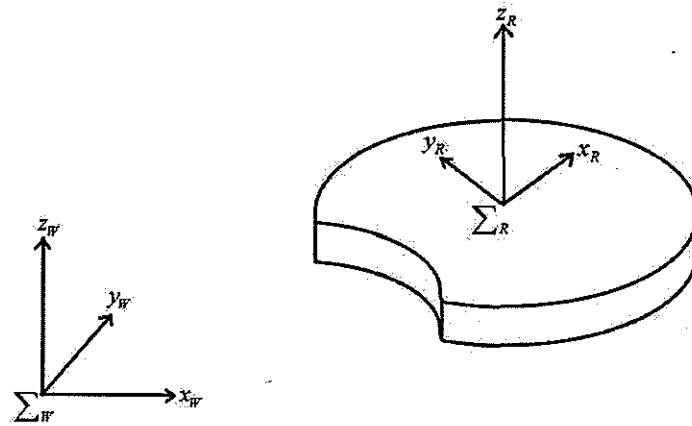


Figura 1. La plataforma en el plano

Denotemos como Σ_W el sistema coordenado fijo solidario al plano sobre el cual se desplazará una plataforma móvil, como se aprecia en la Figura 1. Sobre esta plataforma, coloquemos un sistema coordenado Σ_R . El vector $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ denotará la posición del origen de Σ_R con respecto a Σ_W y lo llamaremos la *posición* de la plataforma. El ángulo medido del eje x_W al eje x_R será denotado por θ y se llamará la *orientación* de la plataforma. El conjunto de variables de posición y orientación de la plataforma será llamado la *postura* de la plataforma, y la denotaremos como

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dotemos a la plataforma con la capacidad de desplazarse con rapidez v_x en la dirección del eje x_R y rapidez v_y en la dirección del eje y_R , además de poder rotar alrededor de z_R con rapidez angular ω , como se ilustra en la Figura 2. Agruparemos v_x , v_y y ω en un vector $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ \omega]^T$ que llamaremos *vector de velocidad de la plataforma*.

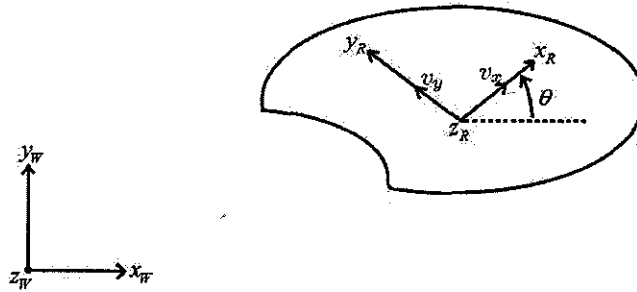


Figura 2. **Vista superior de la plataforma en el plano**

Podemos relacionar \mathbf{v} con la derivada con respecto al tiempo de la postura, $\dot{\xi}$, mediante la matriz de rotación que relaciona los sistemas coordenados Σ_W y Σ_R

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

con lo que obtenemos la siguiente ecuación:

$$\dot{\xi} = R_z(\theta)\mathbf{v} \quad (3)$$

Note que la matriz que relaciona las velocidades de la plataforma con la derivada de la postura es de rango completo, como podemos verificar calculando su determinante:

$$\det \left| \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 1 \quad (4)$$

Esto implica que para cualquier valor de $\dot{\xi}$ existirá un valor de \mathbf{v} . La plataforma no necesita ser orientada de alguna manera particular para tener algún valor deseado de la derivada de la postura en el plano. Dada esta característica, decimos que dicha plataforma es *omnidireccional en el plano*.

Para efectos de proponer objetivos de control y sus correspondientes propuestas de controlador, el vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & \omega \end{bmatrix}^T$ será nuestro vector de entradas de control $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$, por lo que la ecuación (3) queda reescrita como

$$\dot{\xi} = R_z(\theta)\mathbf{u} \quad (5)$$

Esta descripción matemática expresada en la ecuación (5) que se refiere a la derivada de la postura relacionada con el vector de velocidad de la plataforma, es lo que usaremos como *modelo cinemático general* de la plataforma o robot omnidireccional.

Capítulo III

Modelo Cinemático con Ruedas Omnidireccionales

El modelo presentado en el capítulo anterior describe una plataforma con propiedades de movimiento omnidireccional en el plano. Estudiaremos en este capítulo cómo es posible lograr estas propiedades mediante un arreglo de ruedas especiales llamadas *omnidireccionales* convenientemente distribuidas en la plataforma. Seguiremos la nomenclatura usada en *Campion et al.* (1996).

III.1 Ruedas Convencionales

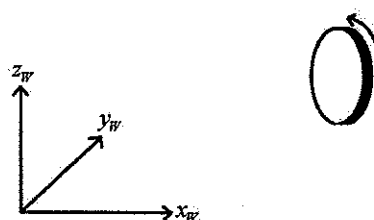


Figura 3. Rueda sobre el plano

Coloquemos una rueda de radio r_{rc} sobre la superficie del plano $x_W y_W$ como se muestra en la Figura 3, con su centro geométrico en posición $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$, a una distancia l del origen de Σ_W , orientada a α radianes con respecto a x_W , y una orientación con respecto a l representada por β , como mostrado en la Figura 4.

Consideraremos que esta rueda tiene un desplazamiento lineal s sobre el plano tal

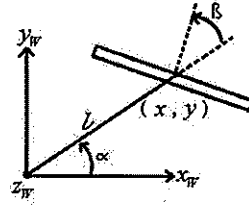


Figura 4. **Configuración de la rueda**

que la relación entre este desplazamiento y el movimiento rotacional $\varphi = \varphi(t)$ alrededor de su eje de giro puede ser descrito adecuadamente con la ecuación

$$s = r_{rc}\varphi \quad (6)$$

Con esta consideración, podemos describir la razón de cambio con respecto al tiempo de la posición del centro geométrico de la rueda en el plano como función de su rapidez angular $\dot{\varphi}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} r_{rc}\dot{\varphi} \quad (7)$$

Cabe recordar que la rueda convencional no tiene actuada su orientación angular, es decir, α y β son constantes. La ecuación (7) implica que la rueda convencional con posición inicial $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}^T$ esta confinada a desplazarse sobre la recta descrita por

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2})} = \tan(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}) \quad (8)$$

$$y = \tan(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2})x + y_0 - \tan(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2})x_0 \quad (9)$$

Esto puede también describirse planteando la siguiente ecuación de restricción para

la rueda convencional

$$\dot{x} \sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) - \dot{y} \cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (10)$$

III.2 Ruedas omnidireccionales

Consideremos ahora un tipo de ruedas que tienen elementos en forma de barril distribuidos en su alrededor, con radio máximo r_b , como mostrados en la Figura 5 modificada de Gferrer (2008).

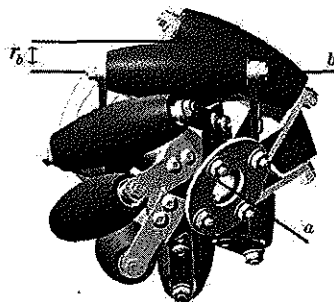


Figura 5. Rueda omnidireccional, modificada de Gferrer (2008)

Llamaremos al ángulo positivo más pequeño entre el eje de giro de la rueda y el eje de giro de cada barril (a y b respectivamente en la figura 5) el *ángulo del barril*, y lo denotaremos con la letra griega γ . Cada barril es libre de girar alrededor de su eje, pero comúnmente no tendrá rapidez angular actuada, es decir, no podemos manipular la rapidez del barril como en el caso de la rapidez angular $\dot{\phi}$ de la rueda. La rapidez angular con la que gire el barril será denotada como $\dot{\phi}$, y podrá ser causada por fuerzas externas, como alguna fuerza empujando en alguna dirección a la rueda.

Así como lo hicimos con la rueda convencional, colocaremos una rueda omnidireccional de radio r_{ro} medido desde su centro geométrico hasta el punto más lejano sobre

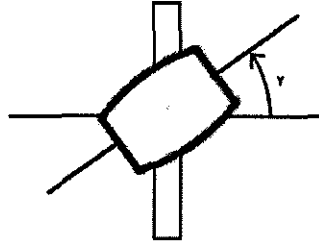


Figura 6. **Ángulo del barril**

los barriles, con barriles de radio máximo r_b y ángulo de barril γ , mostrado en la Figura 6, sobre la superficie del plano $x_W y_W$ con su centro geométrico en posición $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}^T$, a una distancia l del origen de Σ_W , orientada a α radianes con respecto a x_W , y una orientación con respecto a l representada por β , como se muestra en la Figura 7.

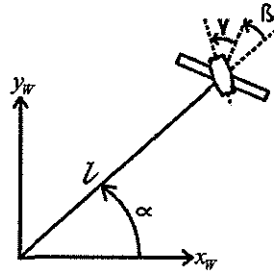


Figura 7. **Configuración de la rueda omnidireccional**

Modelaremos la velocidad resultante de la rueda omnidireccional como una combinación de las velocidades angulares de la rueda y sus barriles como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r_b \sin(\gamma) \\ r_{ro} & -r_b \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{ro} \sin(\alpha + \beta) & r_b \sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ r_{ro} \cos(\alpha + \beta) & -r_b \cos(\alpha + \beta + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Este modelo es válido bajo las siguientes hipótesis. Primero, suponemos que la única

forma en que la rueda puede cambiar de posición (x, y) es debida a un cambio en la posición angular φ o ϕ , es decir, suponemos que no hay deslizamiento entre ella y el piso. El segundo supuesto es que podemos considerar que el centro geométrico de la rueda esta siempre a una distancia r_{ro} del piso. En la práctica esto no sucede, pues la separación entre los barriles hace que el centro de la rueda se acerque más al piso en ciertas posiciones angulares. Este supuesto es más realista conforme los barriles son más pequeños y el espacio entre ellos es menor.

A diferencia de las ruedas convencionales, las ruedas omnidireccionales pueden tener velocidad y desplazamiento en cualquier dirección del plano siempre y cuando γ se seleccione adecuadamente. Esto podemos observarlo al calcular el determinante de la matriz que relaciona las velocidades angulares de la rueda y sus barriles con la velocidad lineal resultante:

$$\det \begin{vmatrix} -r_{ro} \sin(\alpha + \beta) & r_b \sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ r_{ro} \cos(\alpha + \beta) & -r_b \cos(\alpha + \beta + \gamma) \end{vmatrix} = -r_{ro} r_b \sin(\gamma) \quad (13)$$

La matriz tendrá rango completo para valores de γ diferentes de múltiplos de π . Bajo esta condición, existirá siempre un $\begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T$ para todo $\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^T$. Así, este tipo de ruedas pueden desplazarse en cualquier dirección dada la combinación adecuada de las velocidades $\dot{\varphi}$ y $\dot{\phi}$ dándoles la propiedad de omnidireccionalidad en el plano, justificando de esta manera su adjetivo de *omnidireccionales*.

III.3 Dirección de Tracción

Definamos la *dirección de tracción* de una rueda como la dirección en la cual su rapidez sólo depende de la rapidez angular actuada, que en nuestro caso es $\dot{\varphi}$. Sea θ_t el ángulo

de tracción, definido como el ángulo más pequeño medido desde un vector sobre el eje x_W hasta el vector de la dirección de tracción. Entonces, el vector de dirección de tracción se simbolizará como

$$\hat{\mathbf{v}}_t = \begin{bmatrix} \cos(\theta_t) \\ \sin(\theta_t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

La dirección de tracción puede ser usada para representar el vector de velocidad de una rueda en ésta dirección como el producto de la rapidez únicamente dependiente de la velocidad actuada y la dirección de tracción:

$$\mathbf{v}_t = v_t(\dot{\varphi})\hat{\mathbf{v}}_t \quad (15)$$

Para la rueda convencional, la dirección de tracción es

$$\hat{\mathbf{v}}_{tc} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Note que, en este caso, $v_t(\dot{\varphi}) = r_{rc}\dot{\varphi}$.

Para la rueda omnidireccional, podemos buscar la dirección de tracción mediante el uso del producto punto, tal que el escalar resultante sólo dependa de $\dot{\varphi}$:

$$\hat{\mathbf{v}}_t \cdot \mathbf{v}_t = \hat{\mathbf{v}}_t \cdot (v_t\hat{\mathbf{v}}_t) = v_t(\hat{\mathbf{v}}_t \cdot \hat{\mathbf{v}}_t) = v_t \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_{to}) \\ \sin(\theta_{to}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{to}) \\ \sin(\theta_{to}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -r_{ro} \sin(\alpha + \beta) & r_b \sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ r_{ro} \cos(\alpha + \beta) & -r_b \cos(\alpha + \beta + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$v_{to}(\dot{\varphi}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{to}) \\ \sin(\theta_{to}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -r_{ro} \sin(\alpha + \beta) & r_b \sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ r_{ro} \cos(\alpha + \beta) & -r_b \cos(\alpha + \beta + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$v_{to}(\dot{\phi}) = \dot{\phi} r_{ro} \sin(\theta_{to} - \alpha - \beta) - \dot{\phi} r_b \sin(\theta_{to} - \alpha - \beta - \gamma) \quad (20)$$

Para eliminar la dependencia con $\dot{\phi}$, el ángulo de tracción debe ser igual a

$$\theta_{to} = \alpha + \beta + \gamma + n\pi, \quad n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2\dots \quad (21)$$

Seleccionaremos por conveniencia aquel que dé una velocidad de tracción positiva para $\dot{\phi} > 0$. Obtenemos así que la dirección de tracción y la rapidez de tracción correspondiente para una rueda omnidireccional son

$$\hat{\mathbf{v}}_{to} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta + \gamma) \\ \sin(\alpha + \beta + \gamma) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$v_{to}(\dot{\phi}) = \dot{\phi} r_{ro} \sin(\gamma) \quad (23)$$

III.4 Plataforma Omnidireccional

Recordemos la plataforma de la que hablamos en el capítulo anterior, a quien le asignamos un sistema coordenado \sum_R . Colocaremos en esta plataforma 3 ruedas, cada una a una distancia l_i del origen de \sum_R , y usaremos los ángulos α_i , para denotar la orientación de la recta de longitud l_i con respecto a x_R , y β_i , para denotar la orientación de la rueda con respecto a la recta de longitud l_i , como se indica en la Figura 8.

La posición del centro geométrico de cada rueda con respecto a \sum_R esta dada por

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_i \cos(\theta + \alpha_i) \\ l_i \sin(\theta + \alpha_i) \end{bmatrix} \quad (24)$$

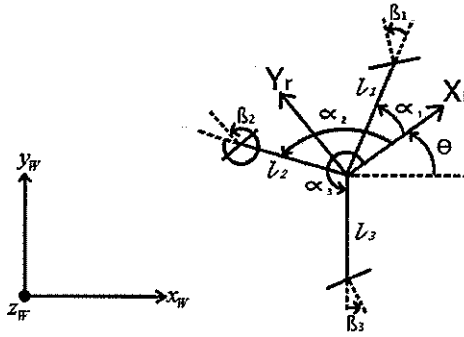


Figura 8. **Plataforma con 3 ruedas**

así como la velocidad esta dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} -l_i \sin(\theta + \alpha_i) \\ l_i \cos(\theta + \alpha_i) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Nos interesa calcular las velocidades en las direcciones de x_R y y_R , por lo que consideraremos $\theta = 0$, obteniendo la siguiente ecuación para las velocidades lineales de cada rueda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} -l_i \sin(\alpha_i) \\ l_i \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (26)$$

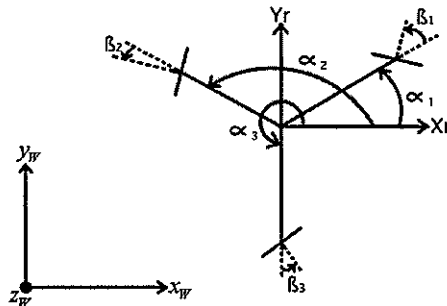


Figura 9. **Plataforma con 3 ruedas, $\theta = 0$**

Detengámonos un momento para tratar de entender la ecuación (26). Hasta el momento, no hemos dicho qué tipo de rueda estamos considerando, y sin embargo, la

ecuación anterior es válida. Ella describe la velocidad lineal del centro geométrico de la rueda en función de la velocidad lineal del origen de \sum_R así como de la contribución debida a la rapidez de rotación $\dot{\theta} = \omega$ de la plataforma. La rueda, según su tipo, podría imponer algún tipo de restricción adicional al movimiento. A pesar de esto, estamos seguros de que, para cualquier tipo de rueda, tendremos una rapidez únicamente dependiente de la rapidez angular actuada en la dirección de tracción. Usaremos este conocimiento para continuar el análisis.

Consideremos inicialmente el uso de ruedas convencionales. Como vimos en la ecuación (9), estas ruedas están restringidas a moverse en una sola dirección en el plano dada una orientación, la cual coincide con la dirección de tracción. Estudiemos entonces el comportamiento de la plataforma con ruedas convencionales a través de la proyección de las velocidades de cada rueda en la dirección de tracción:

$$\hat{\mathbf{v}}_{tci}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{v}}_{tci}^T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \omega \hat{\mathbf{v}}_{tci}^T \begin{bmatrix} -l_i \sin(\alpha_i) \\ l_i \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \\ + \omega \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -l_i \sin(\alpha_i) \\ l_i \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$r_{rc}\dot{\varphi}_i = v_x \cos\left(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}\right) + v_y \sin\left(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}\right) + \omega l_i \sin\left(\beta_i + \frac{\pi}{2}\right) \quad (29)$$

Además de la ecuación anterior, cada rueda convencional va acompañada de la ecuación de restricción de movimiento

$$v_x \sin\left(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}\right) + v_y \cos\left(\alpha_i + \beta_i + \frac{\pi}{2}\right) + \omega l_i \cos\left(\beta_i + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (30)$$

Para nuestra plataforma con 3 ruedas, obtendríamos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} r_{rc}\dot{\varphi}_1 \\ r_{rc}\dot{\varphi}_2 \\ r_{rc}\dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}) & l_1 \sin(\beta_1 + \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\pi}{2}) & l_2 \sin(\beta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\alpha_3 + \beta_3 + \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha_3 + \beta_3 + \frac{\pi}{2}) & l_3 \sin(\beta_3 + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}) & l_1 \cos(\beta_1 + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\pi}{2}) & l_2 \cos(\beta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha_3 + \beta_3 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha_3 + \beta_3 + \frac{\pi}{2}) & l_3 \cos(\beta_3 + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

De la ecuación (32), podemos ver que \mathbf{v} sólo puede tomar valores en el espacio nulo de la matriz

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\pi}{2}) & l_1 \cos(\beta_1 + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\pi}{2}) & l_2 \cos(\beta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha_3 + \beta_3 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha_3 + \beta_3 + \frac{\pi}{2}) & l_3 \cos(\beta_3 + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Sin embargo, esta matriz es de rango completo, por lo que el único valor posible del vector de velocidad de la plataforma es el vector $\mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Podría no ser muy útil una plataforma móvil con estas características.

Consideremos ahora la plataforma con ruedas omnidireccionales. Como vimos en la ecuación (13), estas ruedas pueden desplazarse en cualquier dirección en el plano según sus velocidades $\dot{\varphi}$ y $\dot{\phi}$, por lo que no presentan ecuación de restricción como las ruedas convencionales. Sin embargo, al igual que con las ruedas convencionales, sabemos que en la dirección de tracción tendrán una rapidez únicamente dependiente de la rapidez angular actuada $\dot{\varphi}$. Obteniendo la proyección de las velocidades en la dirección de tracción, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\hat{\mathbf{v}}_{\text{toi}}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{v}}_{\text{toi}}^T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \omega \hat{\mathbf{v}}_{\text{toi}}^T \begin{bmatrix} -l_i \sin(\alpha_i) \\ l_i \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \\ \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \\ \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \\ \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -l_i \sin(\alpha_i) \\ l_i \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\dot{\varphi}_i r_{ro} \sin(\gamma_i) = v_x \cos(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) + v_y \sin(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) + \omega l_i \sin(\beta_i + \gamma_i) \quad (37)$$

A partir de esta última, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para las tres ruedas:

$$\begin{bmatrix} r_{ro} \dot{\varphi}_1 \sin(\gamma_1) \\ r_{ro} \dot{\varphi}_2 \sin(\gamma_2) \\ r_{ro} \dot{\varphi}_3 \sin(\gamma_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) & \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) & l_1 \sin(\beta_1 + \gamma_1) \\ \cos(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) & \sin(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) & l_2 \sin(\beta_2 + \gamma_2) \\ \cos(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) & \sin(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) & l_3 \sin(\beta_3 + \gamma_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (38)$$

La matriz que relaciona $\begin{bmatrix} v_x & v_y & \omega \end{bmatrix}^T$ con $\begin{bmatrix} r_{ro} \dot{\varphi}_1 \sin(\gamma_1) & r_{ro} \dot{\varphi}_2 \sin(\gamma_2) & r_{ro} \dot{\varphi}_3 \sin(\gamma_3) \end{bmatrix}^T$ es de rango completo mientras $l_i \neq 0$, por lo que se puede invertir para obtener la

relación entre el vector de velocidad de la plataforma y el vector de velocidades angulares de las ruedas. Son de interés particular los valores de $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$, $l_i = L$, $\beta_i = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha_3 = -\frac{2\pi}{3}$, que describen una plataforma con tres ruedas omnidireccionales situadas todas a una distancia L del centro geométrico de la plataforma y distribuidas a ángulos iguales alrededor de la misma, y cuyos barriles tiene su eje de rotación perpendicular al eje de rotación de la rueda en la que están colocados. Con estos valores, obtenemos las ecuaciones

$$r_{ro} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & L \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{ro}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3L} & \frac{1}{3L} & \frac{1}{3L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Si utilizamos la variable ${}^v\mathcal{M}_\varphi$ tal que

$$\mathbf{v} = {}^v\mathcal{M}_\varphi \dot{\varphi} \quad (41)$$

podemos sustituir esta relación en la ecuación (3) como sigue

$$\dot{\xi} = R_z(\theta) {}^v\mathcal{M}_\varphi \dot{\varphi} \quad (42)$$

Si ahora consideramos que nuestro vector de entradas \mathbf{u} será el vector de velocidades angulares de las ruedas $\dot{\varphi}$, entonces podemos reescribir (42) como

$$\dot{\xi} = R_z(\theta) {}^v\mathcal{M}_\varphi \mathbf{u} \quad (43)$$

La ecuación (43) la conoceremos como el *modelo cinemático con ruedas omnidireccionales*.

Capítulo IV

Modelo Cinemático Extendido

Propondremos en este capítulo un modelo que relaciona las rapidezces lineales de la plataforma con su postura y además con su rapidezce lineal resultante.

La rapidezce lineal resultante del origen del sistema coordinado solidario a la plataforma puede calcularse como la norma 2 del vector de sus rapidezces lineales

$$\dot{s} = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (44)$$

Usando la nomeclatura $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, podemos escribir la rapidezce lineal resultante como

$$\dot{s} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (45)$$

Llamaremos *modelo cinemático extendido* al modelo que relaciona los elementos de la postura y la rapidezce lineal resultante de la plataforma con el vector de entradas \mathbf{u} como se describe a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Note que podemos también escribirlo como

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}} &= R_z(\theta)\mathbf{u} \\ \dot{s} &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\end{aligned}\tag{47}$$

Capítulo V

Controladores sin Medición de la Postura

Presentaremos ahora controladores sin medición del estado para cumplir objetivos de control de trazado de líneas y círculos. En todos los casos, la planta es (5):

$$\dot{\xi} = R_z(\theta)\mathbf{u}$$

Donde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ es el vector de entradas de control.

V.1 Trazado de líneas rectas con pendiente deseada

- Objetivo de Control

Deseamos que la posición $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ de la plataforma omnidireccional describa una recta en el plano con pendiente igual a la tangente de un ángulo deseado a_d y alguna $b \in \mathbb{R}$ arbitraria, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - \tan(a_d)x(t) - b] = 0 \quad (48)$$

- Supuestos
 - ξ no medible.
 - Orientación inicial θ_0 conocida.
- Propuesta de Controlador

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) & 0 \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \cos(a_d) \\ v_0 \sin(a_d) \\ 0 \end{bmatrix} = v_0 \begin{bmatrix} \cos(a_d - \theta_0) \\ \sin(a_d - \theta_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Donde $v_0 > 0$ es constante.

- Análisis

Sustituyendo el controlador (49) en el modelo de la planta (5), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = v_0 \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(a_d - \theta_0) \\ \sin(a_d - \theta_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \cos(a_d) \\ v_0 \sin(a_d) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Esto nos asegura que la orientación será constante en todo momento e igual a la orientación inicial θ_0 , como podemos ver integrando las ecuaciones para cada elemento de la postura:

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \quad (52)$$

$$\dot{x} = v_0 \cos(a_d) \Rightarrow x(t) = v_0 \cos(a_d)t + x_0 \quad (53)$$

$$\dot{y} = v_0 \sin(a_d) \Rightarrow y(t) = v_0 \sin(a_d)t + y_0 \quad (54)$$

Eliminando la dependencia del tiempo, obtenemos:

$$t = \frac{x(t) - x_0}{v_0 \cos(a_d)} \quad (55)$$

$$y(t) = \frac{v_0 \sin(a_d)}{v_0 \cos(a_d)} [x(t) - x_0] + y_0 \quad (56)$$

$$y(t) = \tan(a_d)x(t) + [y_0 - \tan(a_d)x_0] \quad (57)$$

Note que, a partir del instante en que se activa el controlador y empieza nuestro experimento en $t = 0$, despejando la ecuación (57) obtenemos

$$y(t) - \tan(a_d)x(t) + [y_0 - \tan(a_d)x_0] = 0 \quad (58)$$

Es claro que calculando el límite en ambos lados de la igualdad (58) llegamos a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{y(t) - \tan(a_d)x(t) - [y_0 - \tan(a_d)x_0]\} = 0 \quad (59)$$

Concluimos así que la trayectoria descrita por el robot es una recta con pendiente igual a la tangente del ángulo deseado a_d , con $b = [y_0 - \tan(a_d)x_0]$. Note que el controlador toma la información de la orientación inicial y calcula las velocidades angulares de la ruedas para que la plataforma se desplace en la recta con pendiente deseada desde el inicio en $t = 0$, por lo que la diferencia $y(t) - \tan(a_d)x(t) + [y_0 - \tan(a_d)x_0]$ siempre es igual a 0.

Se muestran en la Figura 10 y Figura 11 los resultados de la simulación del controlador anterior para cumplir el objetivo de control (48), con valores de $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $v_0 = 1$, $\theta_0 = 0$ y $a_d = 45^\circ$. Se grafican x vs y y la gráfica de $\{y(t) - \tan(a_d)x(t) - [y_0 - \tan(a_d)x_0]\}$ vs t respectivamente. En la Figura 12, Figura 13 y Figura 14 se muestran las gráficas de x vs y para distintos valores de los parámetros como indicados.

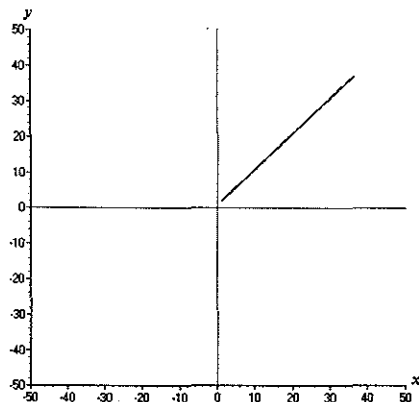


Figura 10. x vs y ; $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $v_0 = 1$, $\theta_0 = 0^\circ$, $a_d = 45^\circ$

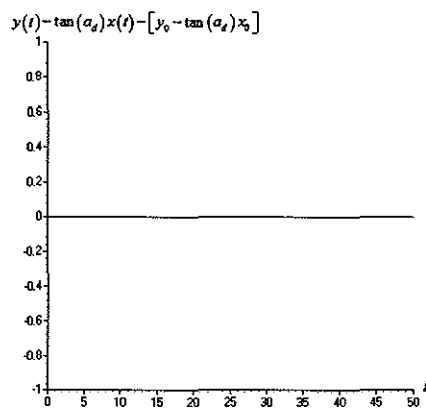


Figura 11. $\{y(t) - \tan(a_d)x(t) - [y_0 - \tan(a_d)x_0]\}$ vs t

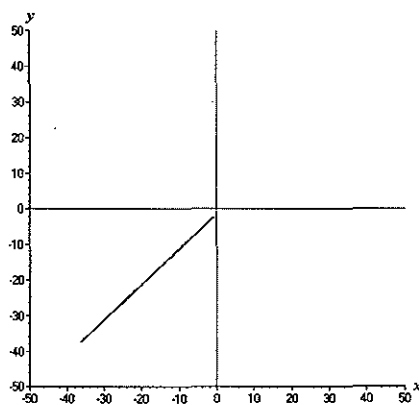


Figura 12. x vs y ; $x_0 = -1$, $y_0 = -2$, $v_0 = -1$, $\theta_0 = 0^\circ$, $a_d = 45^\circ$

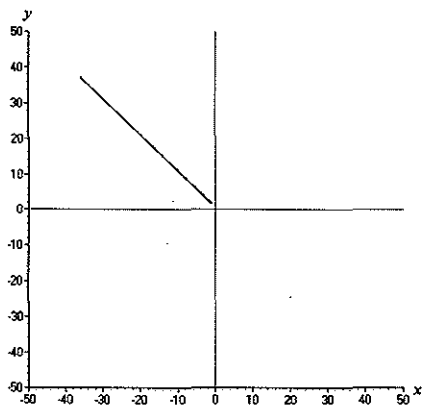


Figura 13. x vs y ; $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $v_0 = -1$, $\theta_0 = 45^\circ$, $a_d = -45^\circ$

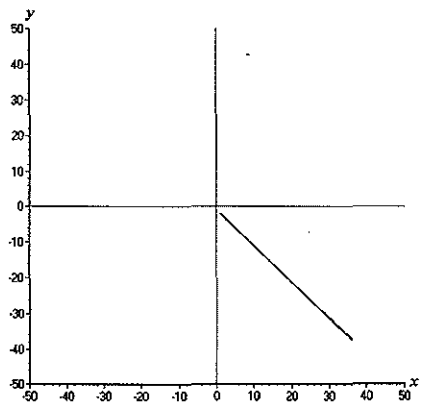


Figura 14. x vs y ; $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $v_0 = 1$, $\theta_0 = 90^\circ$, $a_d = -45^\circ$

V.2 Trazado de círculos en el plano a rapidez constante

- Objetivo de Control

Nuestro objetivo de control será ahora que la posición $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ de la plataforma describa una trayectoria circular en el plano, con radio deseado r , rapidez angular deseada ω y centro (x_c, y_c) arbitrario, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(x(t) - x_c)^2 + (y(t) - y_c)^2 - r^2] = 0 \quad (60)$$

Donde $x_c, y_c \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

- Supuestos

– ξ no medible

- Propuesta de Controlador

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (61)$$

- Análisis

Sustituyendo el controlador (61) en el modelo de la planta (5), obtenemos la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\omega \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega \cos(\theta) \\ r\omega \sin(\theta) \\ \omega \end{bmatrix} \quad (63)$$

Resolviendo para cada elemento de la postura, obtenemos:

$$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (64)$$

$$\dot{x} = r\omega \cos(\omega t + \theta_0) \Rightarrow x(t) = r \sin(\omega t + \theta_0) + C_1 \quad (65)$$

$$\dot{y} = r\omega \sin(\omega t + \theta_0) \Rightarrow y(t) = -r \cos(\omega t + \theta_0) + C_2 \quad (66)$$

Aún cuando no conocemos las condiciones iniciales de postura $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \theta_0 \end{bmatrix}^T$, las dejaremos indicadas para el análisis de la planta con el controlador propuesto (61). Note que no fueron usadas en dicho controlador. Con esta información, podemos evaluar las constantes de integración:

$$x(0) = x_0 = r \sin(\theta_0) + C_1 \Rightarrow C_1 = x_0 - r \sin(\theta_0) \quad (67)$$

$$y(0) = y_0 = -r \cos(\theta_0) + C_2 \Rightarrow C_2 = y_0 + r \cos(\theta_0) \quad (68)$$

y reemplazando en (65)-(66) se llega a

$$x(t) = r \sin(\omega t + \theta_0) + x_0 - r \sin(\theta_0) \quad (69)$$

$$y(t) = -r \cos(\omega t + \theta_0) + y_0 + r \cos(\theta_0) \quad (70)$$

Reacomodando los términos, podemos concluir que

$$\{x(t) - [x_0 - r \sin(\theta_0)]\}^2 + \{y(t) - [y_0 + r \cos(\theta_0)]\}^2 = r^2 \quad (71)$$

$$\{x(t) - [x_0 - r \sin(\theta_0)]\}^2 + \{y(t) - [y_0 + r \cos(\theta_0)]\}^2 - r^2 = 0 \quad (72)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\{x(t) - [x_0 - r \sin(\theta_0)]\}^2 + \{y(t) - [y_0 + r \cos(\theta_0)]\}^2 - r^2\} = 0 \quad (73)$$

Queda así demostrado que el controlador (61) hace a la plataforma describir un círculo, el cual tendrá de radio r y centro en $(x_0 - r \sin(\theta_0), y_0 + r \cos(\theta_0))$. De las ecuaciones (64), (65) y (66) observamos que la rapidez angular de la plataforma alrededor del centro del círculo será ω . Cabe resaltar que la ecuación (72) es válida para todo momento a partir de cuando se acciona el controlador en $t = 0$, como se muestra en la gráfica de la Figura 16.

Note que, de haber propuesto el controlador

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega \\ \omega \end{bmatrix} \quad (74)$$

se hubiera tenido resultados similares.

Se muestran en la Figura 15 los resultados de la simulación para los valores $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\theta_0 = 0$, $r = 1$ y $\omega = 1$. Se presentan los resultados de simulaciones con otros parámetros especificados en la Figura 17 y Figura 18.

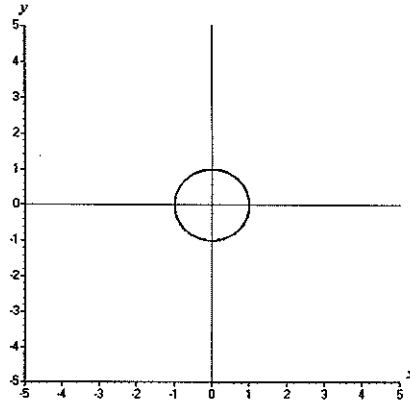


Figura 15. x vs y , $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $\theta_0 = 0^\circ$, $r = 1$, $\omega = 1$

$$\{x(t) - [x_0 - r \sin(\theta_0)]\}^2 + \{y(t) - [y_0 + r \cos(\theta_0)]\}^2 - r^2 = 0$$

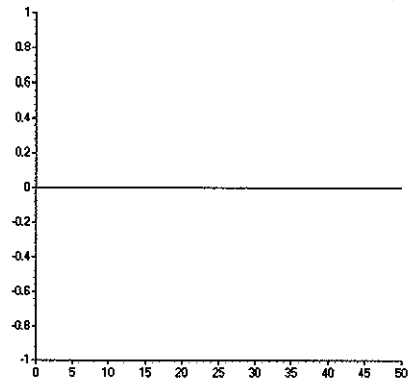


Figura 16. $[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2]$ vs t

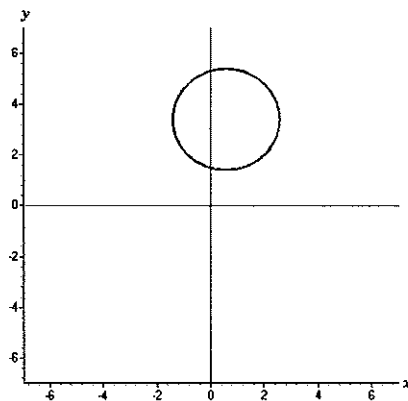


Figura 17. x vs y , $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $\theta_0 = 45^\circ$, $r = 2$, $\omega = 2$

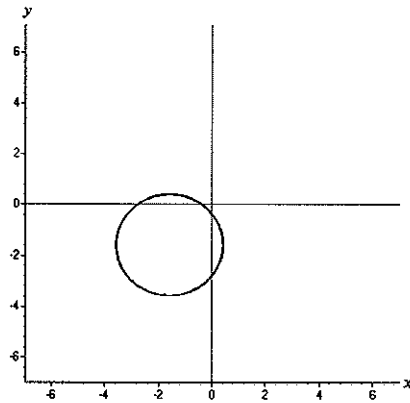


Figura 18. x vs y , $x_0 = -3$, $y_0 = -3$, $\theta_0 = -45^\circ$, $r = 2$, $\omega = -2$

Capítulo VI

Controladores con Medición Completa del Estado

VI.1 Medición del estado mediante cámaras

Se pueden usar distintos métodos para medir los elementos del estado del sistema descrito por nuestra ecuación (5), los cuales son la posición en x , la posición en y y la orientación θ de la plataforma con ruedas omnidireccionales. Ejemplos de esto es usar un arreglo de sonares o algún sistema de posicionamiento como el GPS. Sin embargo, podría ser que el más práctico de implementar sea la medición de posición y orientación a través de un sistema de visión para la captura de imágenes y el correspondiente algoritmo de procesamiento. Describiremos a continuación brevemente las ideas detrás de esta opción para la medición del estado.

Se muestra en la Figura 19 un diagrama de cómo podría colocarse una cámara para la medición de la postura de la plataforma. Coloquemos un sistema coordenado \sum_C solidario a la cámara, con el eje z_C alineado con la mira de la misma. Sería conveniente colocar la cámara tal que z_C sea perfectamente perpendicular al plano en el que se mueve la plataforma, de tal forma que podamos tomar imágenes que incluyan a la plataforma y muestren de manera conveniente su ubicación en el plano en la proporción adecuada.

Considere una imagen constituida de $m \times n$ píxeles. Supongamos que esta imagen es tratada con un proceso de binarizado tal que solo tiene píxeles de dos tipos, a los

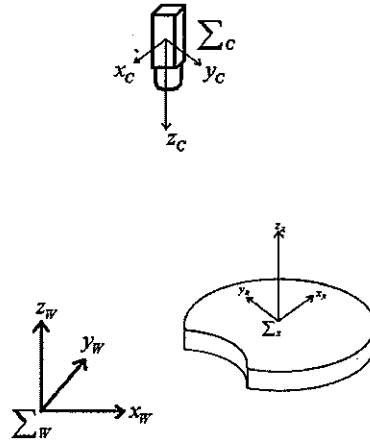


Figura 19. Cámara para medición de la postura

que les llamaremos *negros* y *blancos*. Se la función $f(u, v)$ una función que describe el color del pixel en las coordenadas de la imagen (u, v) , tal que

$$f(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si el pixel es negro} \\ 0, & \text{si el pixel es blanco} \end{cases} \quad (75)$$

Definamos $\mu_{p,q}$ como el *momento de imagen de orden $p + q$* tal que

$$\mu_{n,m} = \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^n f(u, v) u^p v^q \quad (76)$$

Note que $\mu_{0,0}$ corresponde al número de pixeles negros en la imagen, lo que podemos interpretar como un *area*. Podemos entonces calcular el *centroide* de los pixeles negros en la imagen mediante las ecuaciones

$$x_{cent} = \frac{\sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^n f(u, v) u}{\sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^n f(u, v)} = \frac{\mu_{1,0}}{\mu_{0,0}} \quad (77)$$

$$y_{cent} = \frac{\sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^n f(u, v)v}{\sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^n f(u, v)} = \frac{\mu_{0,1}}{\mu_{0,0}} \quad (78)$$

Colocando adecuadamente una marca sobre el robot omnidireccional tal que sólo ella quede en color negro después del binarizado y su centroide coincida con el centro de la plataforma, podemos obtener la posición de la misma en las coordenadas de la imagen. La orientación θ puede calcularse de diversas formas. Podríamos, por ejemplo, colocar adecuadamente dos marcas iguales en forma pero de diferentes tamaños sobre la plataforma omnidireccional, tal que calculando sus centroides y pudiendo diferenciar entre las marcas, podamos calcular la pendiente de la recta que pasa por ambos centroides, y con ello la orientación de la plataforma en las coordenadas de la imagen.

Podemos plantear objetivos de control en las coordenadas de la imagen sin ningún problema, aunque estas podrían no tener relación con las coordenadas de la posición de la plataforma con respecto a \sum_W . Además, podría ser que no pudieramos (o quisiéramos) alinear el eje z_C perpendicular al plano de movimiento de la plataforma. Si queremos encontrar la relación entre las coordenadas de imagen (u, v) y las coordenadas de (x, y) con respecto a \sum_W , debemos realizar un proceso de calibración de la cámara, que consiste en encontrar los parámetros que relacionan estas dos cantidades, entre los cuales están la posición y orientación de la cámara. El lector es referido a Hartley y Zisserman (2000) para más información sobre el tema.

VI.2 Controlador lineal por retroalimentación de estado

Iniciaremos nuestro estudio de algunos controladores con medición completa del estado con un controlador por retroalimentación de estados para cumplir el objetivo de control de regulación, con nuestra planta descrita por (5).

- Objetivo de Control

Se pretende llevar a la plataforma omnidireccional a una postura deseada, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\xi}_d) = 0 \quad (79)$$

con $\boldsymbol{\xi}_d = \begin{bmatrix} x_d & y_d & \theta_d \end{bmatrix}^T$ constante.

- Propuesta de Controlador:

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \cos(-\theta_d) & -\sin(-\theta_d) & 0 \\ \sin(-\theta_d) & -\cos(-\theta_d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(x - x_d) \\ k(y - y_d) \\ k_3(\theta - \theta_d) \end{bmatrix} \quad (80)$$

donde k y k_3 son constantes positivas mayores a 0.

- Análisis

Sustituyendo (80) en (5), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k \cos(\theta - \theta_d)(x - x_d) - k \sin(\theta - \theta_d)(y - y_d) \\ k \sin(\theta - \theta_d)(x - x_d) + k \cos(\theta - \theta_d)(y - y_d) \\ k_3(\theta - \theta_d) \end{bmatrix} \quad (81)$$

Note que la ecuación para $\dot{\theta}$ tiene la forma

$$\dot{\theta} = -k_3(\theta - \theta_d) \quad (82)$$

y es independiente a las ecuaciones de x y y . Esta ecuación diferencial tiene solución

$$\theta(t) = \theta_d + [\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t} \quad (83)$$

Calculando límites, podemos ver que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_d \quad (84)$$

Analícemos ahora qué sucede con x y y . Para ello, propongamos la ecuación (85) como una medida de la distancia entre los valores de x y y y sus valores deseados

$$d = \frac{1}{2}[(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2] \quad (85)$$

La derivada temporal de d es

$$\dot{d} = (x - x_d)\dot{x} + (y - y_d)\dot{y} \quad (86)$$

y sustituyendo (81) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{d} = & -(x - x_d)k[\cos(\theta - \theta_d)(x - x_d) - \sin(\theta - \theta_d)(y - y_d)] \\ & -(y - y_d)k[\sin(\theta - \theta_d)(x - x_d) + \cos(\theta - \theta_d)(y - y_d)] \end{aligned} \quad (87)$$

simplificando, llegamos a

$$\dot{d} = -k \cos(\theta - \theta_d)[(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2] \quad (88)$$

lo cual, dados (83) y (85), puede expresarse como

$$\dot{d} = -2k \cos([\theta(0) - \theta_a]e^{-k_3 t})d \quad (89)$$

La ecuación (89) puede resolverse mediante separación de variables, resultando en

$$d(t) = d(0)e^{-2k \int_0^t \cos([\theta(0) - \theta_a]e^{-k_3 t})dt} \quad (90)$$

De acuerdo con Slotine y Li (1991), el equilibrio $d = 0$ del sistema descrito por la ecuación de primer orden lineal variante en el tiempo (89) será asintóticamente estable si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \cos([\theta(0) - \theta_a]e^{-k_3 t})dt \rightarrow \infty \quad (91)$$

La ecuación (91) es una integral que no puede representarse con funciones elementales. A pesar de esto, podemos verificar si diverge como lo necesitamos usando la siguiente propiedad de las integrales y teorema de comparación, mencionados en libros de cálculo elemental como Stewart (2003):

- Sean a, b, m y M elementos de \mathbb{R} con $a \leq b$, tal que $m \leq f(t) \leq M$ para $a \leq t \leq b$.

Entonces, se cumple la siguiente desigualdad:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b - a) \quad (92)$$

- Teorema de Comparación: Suponga que f y g son funciones continuas con $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq a$. Si $\int_a^\infty g(t)dt$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(t)dt$ es divergente.

Recordemos que la función coseno es positiva si su argumento esta entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Calculemos el tiempo para el cual el argumento de $\cos([\theta(0) - \theta_a]e^{-k_3 t})$ estará en un valor valor entre $-\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$ tal que el coseno evaluado sea mayor a $\frac{1}{2}$:

$$\cos([\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t}) \geq \frac{1}{2} \quad (93)$$

$$\frac{\pi}{3} \leq [\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t} \leq \frac{\pi}{3} \quad (94)$$

$$|[\theta(0) - \theta_d]|e^{-k_3 t} \leq \frac{\pi}{3} \quad (95)$$

$$t \geq -\frac{1}{k_3} \ln \left(\frac{\pi}{3|[\theta(0) - \theta_d]|} \right) \quad (96)$$

La ecuación (96) considera valores anteriores a $t = 0$, lo cual significa que el argumento tenía un valor entre $-\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$ antes $t = 0$. Para nuestro análisis, basta con saber que, en este caso, en $t = 0$ el argumento ya tenía algún valor en este intervalo. Definamos el tiempo t_h como el tiempo en el que el coseno alcanzará un valor igual o mayor a $\frac{1}{2}$ para todo tiempo posterior, y lo consideraremos como

$$t_h = \begin{cases} 0, & \text{si } |[\theta(0) - \theta_d]| \leq \frac{\pi}{3} \\ -\frac{1}{k_3} \ln \left(\frac{\pi}{3|[\theta(0) - \theta_d]|} \right), & \text{si } |[\theta(0) - \theta_d]| > \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (97)$$

Con esta información, podemos analizar la integral de (91) separándola como a continuación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \cos([\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t}) dt = \int_0^{t_h} \cos([\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t}) dt + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_h}^t \cos([\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t}) dt \quad (98)$$

Usando (92), ya que $-1 \leq \cos([\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t}) \leq 1$ para $0 \leq t \leq t_h$, entonces

$$-t_h \leq \int_0^{t_h} f(t) dt \leq t_h \quad (99)$$

por lo que el primer sumando del lado derecho de (98) esta acotado. Por otro lado,

$$\cos([\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t}) \geq \frac{1}{2} \geq 0 \quad (100)$$

para todo $t \geq t_h$. Usando el Teorema de Comparación, y ya que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_h}^t \frac{1}{2} dt$ diverge a $+\infty$, también lo hace el segundo sumando del lado derecho de (98). A partir de esto, llegamos a que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \cos([\theta(0) - \theta_d]e^{-k_3 t}) dt = \infty \quad (101)$$

y con ello, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0 \quad (102)$$

En vista de (84), (85) y (102), concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t) - x_d \\ y(t) - y_d \\ \theta(t) - \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Con lo que el objetivo de control (79) se cumple. Se muestran en la Figura 20, Figura 21, Figura 22 y Figura 23 los resultados de la simulación del controlador (80) aplicado a la planta (5) con $\xi(0) = [5 \ 0 \ 0]^T$ y $\xi_d = [0 \ 0 \ \pi]^T$, $k = 1$ y $k_3 = 1$:

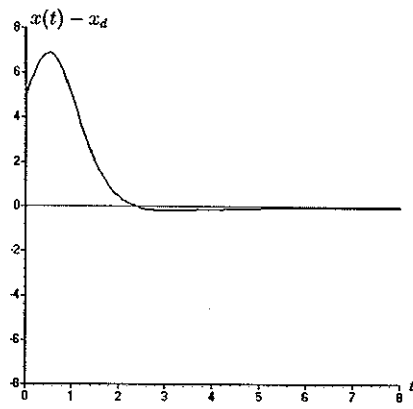


Figura 20. $x(t) - x_d$ vs t

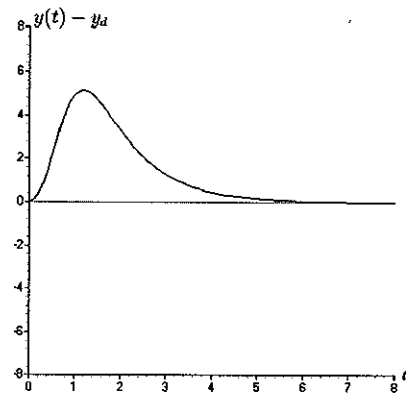


Figura 21. $y(t) - y_d$ vs t

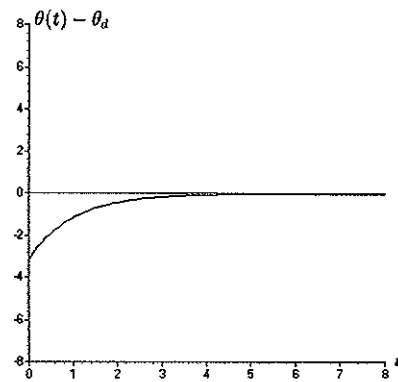


Figura 22. $\theta(t) - \theta_d$ vs t

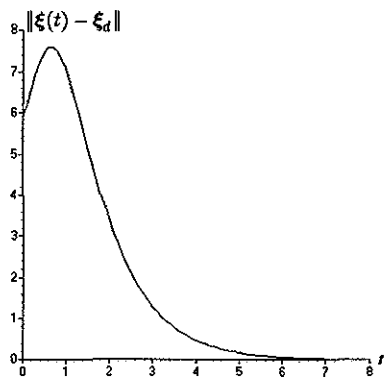


Figura 23. $\|\xi(t) - \xi_d\|$ vs t

VI.3 Linealización mediante retroalimentación

Usaremos una ley de control tal que el sistema obtenido al sustituirla en la planta sea lineal. Para el modelo cinemático general (5), podemos lograr esto observando que $R_z(\theta)$ en la ecuación (5) es una matriz invertible tal que $R_z(\theta)R_z^{-1}(\theta) = I$. Dado esto, podemos seleccionar la entrada de control como

$$\mathbf{u} = R_z^{-1}(\theta)\mathbf{u}_l \quad (104)$$

donde $\mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} u_{1l} & u_{2l} & u_{3l} \end{bmatrix}$ es una nueva entrada de control que se seleccionará según las necesidades de control. Usando (104) en (5), obtenemos

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = R_z(\theta)R_z^{-1}(\theta)\mathbf{u}_l \quad (105)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u}_l \quad (106)$$

El modelo cinemático con ruedas omnidireccionales (43) también puede ser linealizado mediante retroalimentación ya que \mathcal{M}_φ es una matriz invertible, por lo que $R_z(\theta)\mathcal{M}_\varphi$ es también invertible, y podemos seleccionar \mathbf{u} tal que

$$\mathbf{u} = {}^vM_\varphi^{-1}R_z^{-1}(\theta)\mathbf{u}_l \quad (107)$$

con lo que, al sustituir (107) en (43) obtenemos de nuevo (106).

VI.4 Regulación

- Objetivo de Control

Se pretende llevar a la plataforma omnidireccional cuyo modelo es (5) a una postura deseada, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\xi}_d) = 0 \quad (108)$$

con $\boldsymbol{\xi}_d$ constante

- Propuesta de Controlador

$$\mathbf{u} = -R_z^{-1}(\theta)K(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d) \quad (109)$$

donde K es una matriz simétrica definida positiva.

- Análisis

Sustituyendo (104) en (5), obtenemos

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -R_z(\theta)R_z^{-1}(\theta)K(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d) \quad (110)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d) \quad (111)$$

La ecuación anterior tiene como único equilibrio $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_d$. Se puede demostrar la estabilidad asintótica global de este equilibrio mediante el método directo de Lyapunov usando la siguiente función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d)^T(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d) \quad (112)$$

cuya derivada temporal es

$$\dot{V} = -(\xi - \xi_d)^T K (\xi - \xi_d) \quad (113)$$

Concluimos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi(t) - \xi_d) = 0$, cumpliéndose así con el objetivo de control. Se presenta en la Figura 24 la gráfica de $\|\xi(t) - \xi_d\|$ vs t resultado de la simulación del controlador (104) con la planta (5) usando $K = I$ con $\xi(0) = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2.6 \end{bmatrix}^T$ y $\xi_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$:

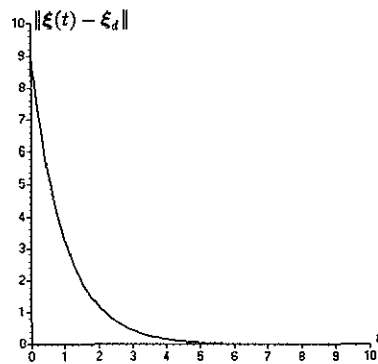


Figura 24. $\|\xi(t) - \xi_d\|$ vs t

VI.5 Seguimiento de trayectorias descritas por curvas paramétricas

Comunmente al realizar seguimiento de trayectorias se plantean trayectorias cuyo parámetro es el tiempo. En general, podemos plantear trayectorias paramétricas donde el parámetro sea un ángulo, una longitud de arco, un desplazamiento lineal, o alguna otra variable de interés. Además, si podemos seleccionar la razón de cambio con respecto al tiempo de el parámetro utilizado, podremos también tener control sobre la rapidez de desplazamiento de la plataforma. Se explicará un ejemplo a continuación para esclarecer estos conceptos y poner en contexto al lector para el objetivo de control que se propondrá posteriormente.

La ecuación de un círculo en el plano xy con centro en el origen $(0, 0)$ y radio $r \geq 0$ constante es

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{114}$$

Esta no es la única manera de describir un círculo. Podemos hacerlo también mediante ecuaciones paramétricas de x y y . Es comun encontrar en textos de cálculo básico como Stewart (2003) las ecuaciones paramétricas de un círculo usando como parámetro la variable t , usada generalmente para referirse al tiempo (aunque no necesita tener esa connotación). Estas ecuaciones son

$$x(t) = r \cos(t) \tag{115}$$

$$y(t) = r \sin(t) \tag{116}$$

Las gráficas de $x(t)$ vs. t y $y(t)$ vs. t mostrarán un coseno y un seno respectivamente, pero la gráfica de x vs y mostrará un círculo. Esto se puede verificar al notar que las ecuaciones (115) y (116) satisfacen la ecuación (114):

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t) = r^2 \quad (117)$$

Si seguimos la convención general tomar la variable t como el tiempo, nos damos cuenta a partir de las ecuaciones paramétricas que para $t \geq 0$ nos describen una trayectoria circular en sentido antihorario, trazada a una rapidez de $1 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$; la rapidez esta predefinida en esta parametrización. Podríamos también expresar las ecuaciones de un círculo parametrizadas en coordenadas polares, usando no el tiempo como parámetro sino las coordenadas radial y angular, denotando esta última sólo para este ejemplo como θ . Las ecuaciones son ahora

$$x(\theta) = r \cos(\theta) \quad (118)$$

$$y(\theta) = r \sin(\theta) \quad (119)$$

Se puede demostrar que las ecuaciones (118) y (119) describen un círculo en el plano xy de una manera prácticamente igual como en la ecuación (117), y aunque se parecen mucho a (115) y (116), son diferentes en cuanto a que no nos dan información sobre el comportamiento en el tiempo de las variables x y y . No podemos saber a qué rapidez se traza el círculo en el plano xy ni la dirección en que lo hace a menos que tengamos información sobre $\theta(t)$ o bien $\dot{\theta}(t)$. Esta información no es necesaria para saber que las ecuaciones describen un círculo, pero como se mencionó antes, si podemos de alguna manera seleccionar $\dot{\theta}(t)$, podemos tener control sobre la rapidez del trazado del círculo.

Desde luego, si seleccionamos $\theta = t$ que es equivalente a $\dot{\theta} = 1$, obtenemos el mismo comportamiento en el tiempo que con nuestra parametrización inicial.

Para concluir este ejemplo, expresaremos las ecuaciones de un círculo utilizando otro parámetro: la longitud del arco descrito por la trayectoria. Esta longitud de arco, que puede interpretarse también como la longitud total recorrida por una partícula que obedece el movimiento descrito por las ecuaciones paramétricas, será denotada con la variable s , y para nuestro caso del círculo, esta relacionada con la coordenada angular θ como se muestra en la ecuación (120).

$$s = r\theta \quad (120)$$

Suponga que queremos escribir las ecuaciones paramétricas de una partícula tal que describa un círculo en el plano xy , pero no podemos o no queremos hacerlo usando el tiempo o la coordenada angular como parámetros. Lo que queremos o tenemos para usar es la distancia total recorrida por la partícula, s . Con esta información disponible es posible generar las ecuaciones para x y y tal que la partícula describa un círculo de radio r como sigue

$$x(t) = r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \quad (121)$$

$$y(t) = r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \quad (122)$$

Se puede demostrar de manera muy similar a (117) que las ecuaciones (121) y (122) describen un círculo en el plano xy . De nueva cuenta, no nos da información sobre qué tan rápido se traza la curva, para ello necesitamos información sobre $\dot{s}(t)$. Si podemos seleccionar la rapidez del desplazamiento de la partícula como $\dot{s}(t) = r$, podemos

obtener un comportamiento igual al de las ecuaciones (115) y (116). Así, vemos que podemos representar curvas en el plano con diversos parámetros que, aunque podría convenir que tuvieran significado físico, no es necesario, y que si podemos seleccionar la razón de cambio con respecto al tiempo de este parámetro, podemos manipular la rapidez del trazado de la curva.

Inspirados en Moreno y Kelly (2002), propondremos a continuación un controlador para seguir una trayectoria en función del parámetro genérico p tal que

$$\mathbf{p}(p) = \begin{bmatrix} x(p)_d \\ y(p)_d \end{bmatrix} \quad (123)$$

Dada la posibilidad de linealizar el modelo de la plataforma omnidireccional de manera exacta para obtener la ecuación (106), replantearemos la planta a controlar de esta manera.

- Planta

Se utilizará el modelo cinemático extendido (47).

- Objetivo de Control

El objetivo de control es llevar las variables $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ y $\dot{s}(t)$ a valores deseados $x_d(p)$, $y_d(p)$ y $\theta_d(p)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t) - x_d(p) \\ y(t) - y_d(p) \\ \theta(t) - \theta_d(p) \\ \dot{s}(t) - |\dot{s}_d(p)| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (124)$$

con $\dot{s}_d(p)$ restringida a expresiones tales que la razón $\frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}}$ este definida para todo p . Por ejemplo, si escogiéramos una parametrización tal que $\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos(p)}$, la razón mencionada se indeterminaría para infinitos valores de p a menos que seleccionemos una \dot{s}_d como podría ser $\dot{s}_d = t\sqrt{1 - \cos(p)}$.

- Supuestos

$$\begin{bmatrix} x_d(p) \\ y_d(p) \\ \theta_d(p) \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} \frac{dx_d(p)}{dp} \\ \frac{dy_d(p)}{dp} \\ \frac{d\theta_d(p)}{dp} \end{bmatrix} \text{ conocidos, continuos y diferenciables para todo valor de } p.$$
 \dot{p} es manipulable (p diferente del tiempo).

- Propuesta de Controlador

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = \frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = R_z^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial p} \left(\frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} \right) + a(x_d - x) \\ \frac{\partial y_d}{\partial p} \left(\frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} \right) + a(y_d - y) \\ \frac{\partial \theta_d}{\partial p} \left(\frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} \right) + a(\theta_d - \theta) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (125)$$

con $a > 0$.

- Análisis

Sustituyendo el controlador propuesto (125) en la planta (47), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} \\ \left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right) \left\{ \frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} + a(x_d - x) \right\} \\ \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right) \left\{ \frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} + a(y_d - y) \right\} \\ \left(\frac{\partial \theta_d}{\partial p}\right) \left\{ \frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} + a(\theta_d - \theta) \right\} \\ \sqrt{a^2 [(x_d - x)^2 + (y_d - y)^2] + 2a\dot{s}_d \frac{[(x_d - x)\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right) + (y_d - y)\left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)]}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} + \dot{s}_d^2} \right\} \end{bmatrix} \quad (126)$$

Definamos las variables e y e como sigue

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$e_\theta = \theta_d - \theta \quad (128)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial p} \dot{p} - \dot{x} \\ \frac{\partial y_d}{\partial p} \dot{p} - \dot{y} \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$\dot{e}_\theta = \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \quad (130)$$

Sustituyendo (127) y (128), (129) y (130) en (126), obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{e} \\ \dot{e}_\theta \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} \\ -ae \\ -ae_\theta \\ \sqrt{e^T \left(a^2 e + \frac{2a\dot{s}_d}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_d}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_d}{\partial p}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial p} \\ \frac{\partial y_d}{\partial p} \end{bmatrix} \right) + \dot{s}_d^2} \end{bmatrix} \quad (131)$$

Procedemos ahora a demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ usando la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} e^T e \quad (132)$$

cuya derivada temporal es

$$\dot{V} = e^T \dot{e} = -ae^T e \quad (133)$$

con lo que se demuestra que $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$. La demostración para el caso escalar de e_θ es igual usando $V = \frac{1}{2} e_\theta^2$, y concluimos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = 0$. Note que de acuerdo con (131), conforme $e \rightarrow 0$, $\dot{s} \rightarrow |\dot{s}_d|$, por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} e \\ e_\theta \\ \dot{s} - |\dot{s}_d| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t) - x_d(p) \\ y(t) - y_d(p) \\ \theta(t) - \theta_d(p) \\ \dot{s}(t) - |\dot{s}_d(p)| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

con lo que el objetivo de control (124) se cumple. Se muestra la gráfica de $\|e\|$ vs t en la Figura 25 , $(\dot{s} - |\dot{s}_d|)$ vs t en la Figura 26 y x vs y en la Figura 27 para

$$\begin{bmatrix} x(p)_d \\ y(p)_d \\ \dot{s}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p) \\ \sin(p) \\ -1 \end{bmatrix} \quad (135)$$

correspondientes a un círculo con centro en el origen, radio unitario y rapidez angular de $1 \frac{rad}{sec}$ en sentido horario, con $a = 1$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4$ y $y(0) = 3$:

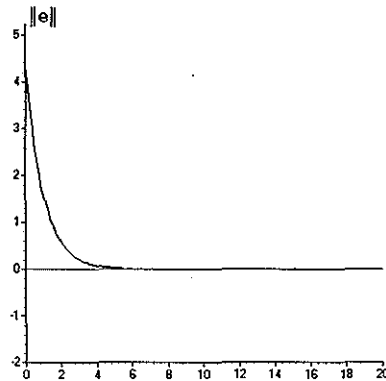


Figura 25. $\|e\|$ vs t

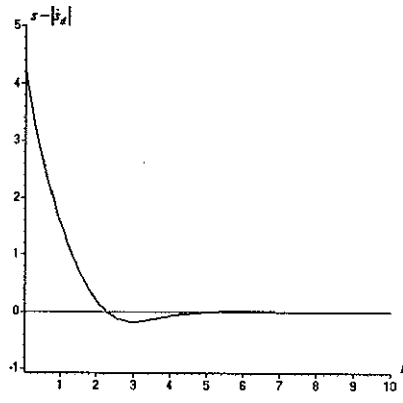


Figura 26. $s - |\dot{s}_d|$ vs t

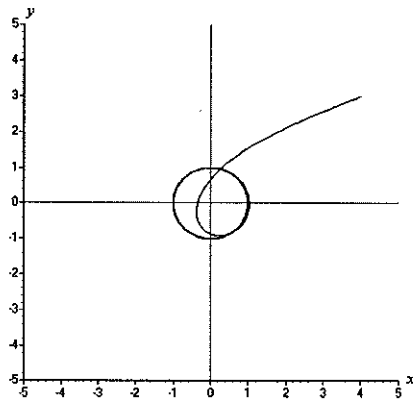


Figura 27. x vs y

Cabe resaltar que seleccionando adecuadamente $\dot{s}_d(p)$ se pueden describir curvas que no tienen recta tangente definida en algunos puntos. Presentamos en las Figura 28, Figura 29 y Figura 30 los resultados de la simulación del controlador anterior para

$$\begin{bmatrix} x(p)_d \\ y(p)_d \\ \dot{s}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p)^3 \\ \sin(p)^3 \\ -3\sqrt{\cos(p)^2 \sin(p)^2} \end{bmatrix} \quad (136)$$

con $a = 10$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4$ y $y(0) = 3$.

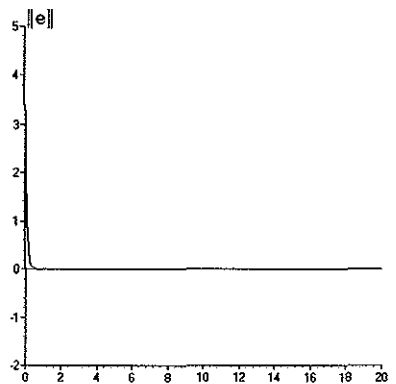


Figura 28. $\|e\|$ vs t

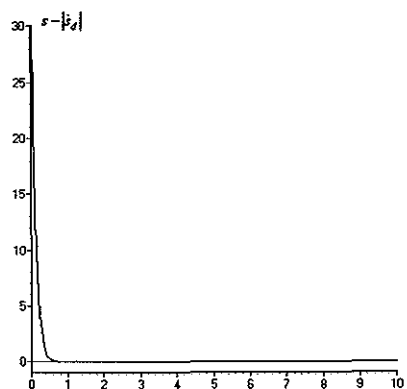


Figura 29. $s - |\dot{s}_d|$ vs t

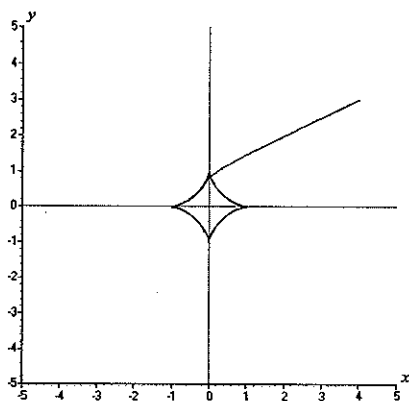


Figura 30. x vs y

VI.6 Seguimiento de trayectorias mediante controladores codificados en las coordenadas del plano

Se presenta a continuación un controlador para seguimiento de trayectorias descritas por ecuaciones del tipo $[cy - f(x)] = 0, c \geq 0$. Éste controlador siempre genera sistemas autónomos en malla cerrada. De nueva cuenta, usaremos el modelo cinemático extendido (47) como planta.

- Objetivo de Control

El objetivo de control es lograr el seguimiento de una trayectoria descrita por la ecuación $[cy - f(x)] = 0, c \geq 0$ con una rapidez lineal $|\dot{s}_d(t)|$, y llevar $\theta(t)$ a un valor θ_d constante, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} cy(t) - f(x(t)) \\ \theta(t) - \theta_d \\ \dot{s}(t) - |\dot{s}_d| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (137)$$

- Propuesta de Controlador

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \nabla [cy - f(x)]^2 + \frac{\dot{s}_d}{\|\nabla [cy - f(x)]\|} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \nabla [cy - f(x)] \\ -a(\theta - \theta_d) \end{bmatrix} \quad (138)$$

con $a > 0$.

- Análisis

Al sustituir el controlador (138) en (47) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\nabla[cy - f(x)]^2 + \frac{\dot{s}_d}{\|\nabla[cy - f(x)]\|} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \nabla[cy - f(x)] \\ -a(\theta - \theta_d) \\ \sqrt{a^2[cy - f(x)]^2 \|\nabla[cy - f(x)]\|^2 + \dot{s}_d^2} \end{bmatrix} \quad (139)$$

Definamos la variable e como

$$e = [cy - f(x)] \quad (140)$$

Esta variable nos servirá como una medida del error de posición. Su derivada con respecto del tiempo a través de las trayectorias de (139) es

$$\dot{e} = \nabla^T(e) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (141)$$

$$\dot{e} = -ae\nabla^T(e)\nabla(e) \quad (142)$$

$$\dot{e} = -ae\|\nabla(e)\|^2 \quad (143)$$

Observe que

$$\|\nabla(e)\|^2 = \|\nabla[cy - f(x)]\|^2 = \left\{ \frac{\partial[cy - f(x)]}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial[cy - f(x)]}{\partial y} \right\}^2 \quad (144)$$

$$\|\nabla[cy - f(x)]\|^2 = \left[\left\{ \frac{\partial[-f(x)]}{\partial x} \right\}^2 + c \right] > 0 \forall(x, y) \quad (145)$$

Debido a (145), (143) tiene como único equilibrio $e = 0$. Podemos demostrar la estabilidad asintótica de este equilibrio mediante el uso de la siguiente función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^2 \quad (146)$$

$$\dot{V} = e\dot{e} = -ae^2\|\nabla(e)\|^2 \quad (147)$$

Ya que $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} [cy(t) - f(x(t))] = 0$, lo cual, dado (139), implica que conforme $e \rightarrow 0$, $\dot{s} \rightarrow |\dot{s}_d|$, y así

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{s}(t) - |\dot{s}_d|) = 0 \quad (148)$$

con lo que se cumple el objetivo de control (137).

Se muestran en la Figura 31, Figura 32 y Figura 33 las gráficas e vs t , $(\dot{s} - |\dot{s}_d|)$ vs t y x vs y de la simulación para la ecuación $[y - x + 5] = 0$, con $x(0) = 2$, $y(0) = 3$, $\dot{s}_d = 1$, $a = 1$.

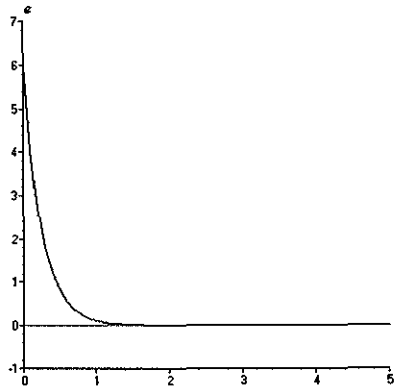


Figura 31. e vs t

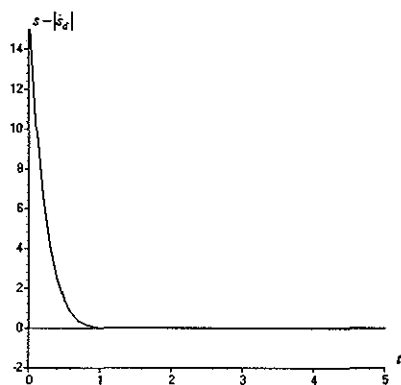


Figura 32. $s - |\dot{s}_d|$ vs t

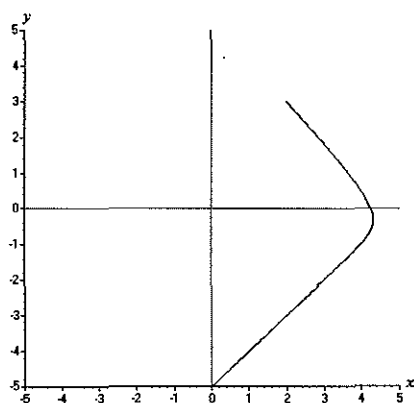


Figura 33. x vs y

VI.7 Seguimiento de trayectoria con control de orientación

Finalmente controlaremos la orientación de la plataforma. Para esto, usaremos un controlador basado en un ejemplo tomado de Hale y Kocak (1991) donde se verifica la atractividad de un ciclo límite (para otra forma de verificar esto, el lector puede referirse a Slotine y Li (1991)).

- Planta

$$\dot{\xi} = R_z(\theta)\mathbf{u} \quad (149)$$

- Objetivo de Control

Nuestro objetivo de control es que las trayectorias $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ de la plataforma omnidireccional tiendan a un círculo de centro $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ constante y radio unitario, que sobre este círculo la plataforma se desplace a una rapidez angular $\dot{\vartheta}$ igual a una constante $\dot{\vartheta}_d$ deseada, y que la plataforma siempre este orientada hacia el centro del círculo. Escrito matemáticamente, el objetivo de control es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t)^2 + y(t)^2 - 1 \\ \dot{\vartheta}(t) - \dot{\vartheta}_d \\ \theta(t) - \vartheta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} \quad (150)$$

- Supuestos

Podemos conocer exactamente ϑ en función de (x, y) como

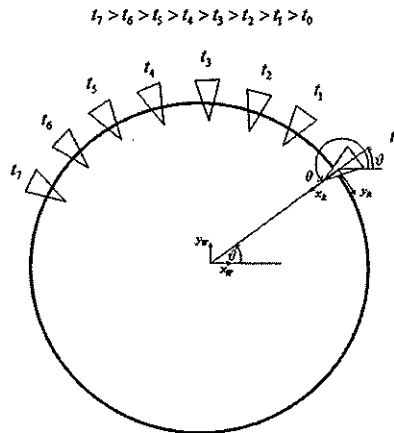


Figura 34. Plataforma trazando un círculo orientada hacia el centro del mismo

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (151)$$

por lo que la consideraremos usable para el controlador.

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Propuesta de Controlador

$$\mathbf{u} = R_z^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} -y\dot{\vartheta}_d - x(x^2 + y^2 - 1) \\ x\dot{\vartheta}_d - y(x^2 + y^2 - 1) \\ -a[\theta - (\vartheta + \pi)] + \dot{\vartheta}_d \end{bmatrix} \quad (152)$$

con a una constante real mayor a 0.

- Análisis

Sustituyendo (152) en (149), obtenemos

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} -y\dot{\vartheta}_d - x(x^2 + y^2 - 1) \\ x\dot{\vartheta}_d - y(x^2 + y^2 - 1) \\ -a[\theta - (\vartheta + \pi)] + \dot{\vartheta}_d \end{bmatrix} \quad (153)$$

Como se menciona en Hale y Kocak (1991), podemos usar coordenadas polares (r, ϑ) y usar los cambios de variable $x = r \cos(\vartheta)$, $y = r \sin(\vartheta)$ para verificar que (153) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1 - r^2) \\ \dot{\vartheta}_d \\ -a[\theta - (\vartheta + \pi)] + \dot{\vartheta}_d \end{bmatrix} \quad (154)$$

Las soluciones generales de $r(t)$ y $\vartheta(t)$ son

$$r(t) = \frac{r(0)}{\sqrt{r(0)^2 + (1 - r(0)^2)e^{-2t}}} \quad (155)$$

$$\vartheta(t) = \dot{\vartheta}_d t + \vartheta(0) \quad (156)$$

Podemos verificar que para condiciones iniciales diferentes de $r(0) = 0$, como lo marca nuestra hipótesis, las trayectorias tenderán al círculo de radio 1. Una vez que se llegue a ese círculo la plataforma lo seguirá con una rapidez angular alrededor del origen de ϑ_d . Verifiquemos ahora el comportamiento de la orientación angular, descrito por

$$\dot{\theta} = -a[\theta - (\vartheta + \pi)] + \dot{\vartheta}_d \quad (157)$$

Haciendo el cambio de variable familiar $e = \theta - \vartheta$, (157) puede reescribirse como

$$\dot{e} = -a(e - \pi) \quad (158)$$

La ecuación (158) tiene como único equilibrio $e = \pi$. Podemos demostrar estabilidad asintótica global de este equilibrio mediante la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(e - \pi)^2 \quad (159)$$

cuya derivada temporal es

$$\dot{V} = (e - \pi)\dot{e} = -a(e - \pi)^2 \quad (160)$$

De esta manera, $\lim_{t \rightarrow \infty} (e - \pi) = 0$, con lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta - \vartheta) = \pi$, logrando así que la plataforma se oriente siempre en dirección hacia el centro del círculo. Para concluir el tema del control de la orientación angular, cabe resaltar que ésta se puede controlar de manera independiente a la posición de la plataforma omnidireccional, por lo que se pueden plantear diversos objetivos sin mayor implicación en la dificultad para controlar ambos posición y orientación simultáneamente.

Capítulo VII

Conclusión

En esta tesis se propuso un modelo genérico para una plataforma móvil con ruedas omnidireccionales, y se estudió la relación entre ésta y las velocidades angulares de ruedas de tipo omnidireccional distribuidos en la misma. Para entender porqué era necesario un tipo especial de ruedas, se obtuvieron descripciones matemáticas de ruedas convencionales y ruedas omnidireccionales para posteriormente analizar una distribución de 3 ruedas de cada tipo. Se observaron diferencias en los comportamientos cinemáticos de la plataforma dependiendo el tipo de ruedas que se usaban, debido a que las convencionales presentan restricciones cinemáticas mientras que las omnidireccionales no.

Una vez estudiado el modelo, se procedió a explorar las capacidades de una plataforma omnidireccional en el plano. Primero, se estudiaron controladores que no necesitan medición de la postura de la plataforma para lograr objetivos de seguimiento de figuras geométricas. Posteriormente se estudiaron controladores que sí hacen uso de medición de la postura para cumplir con objetivos de regulación y seguimiento. Se mostró que se pueden desacoplar los elementos de la postura para ser controlados cada uno de manera independiente, dando así gran versatilidad a la plataforma en cuanto a las tareas que puede realizar.

Como trabajo futuro, se propone la especificación de requerimientos de una plataforma completa (robot-sensores-cómputo) para experimentación, la aplicación de estos controladores en una plataforma para verificar los resultados demostrados en esta tesis, así como el planteamiento de nuevos objetivos de control bajo nuevas hipótesis de trabajo.

Referencias

- Aghaebrahimi, H., Abdollahi, A., Ostadi, H., y Ziaee, S. (2004). Design and development of a comprehensive omni directional soccer player robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 1(3): 191–200.
- Agulló, J., Cardona, S., y Vivancos, J. (1987). Kinematics of vehicles with directional slinding wheels. *Mech. Mach. Theory*, 22(4): 295–301.
- Bräunl, T. (2006). *Embedded Robotics: Mobile Robot Design and Applications with Embedded Systems*. Springer-Verlag, Berlin, segunda edición. 458 pp.
- Campion, G., Bastin, G., y D'Andrea, B. (1996). Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1): 47–62.
- Cuellar, F. (2006). Analysis and design of a wheeled holonomic omnidirectional robot. *Robotics Symposium, 2006. LARS '06. IEEE 3rd Latin American. Santiago, Chile, 26 y 27 de octubre*, páginas 41 –46.
- Gfrerrer, A. (2008). Geometry and kinematics of the mecanum wheel. *Computer Aided Geometric Design*, 25(1): 784–791.
- Hale, J. y Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York Inc., New York, primera edición. 568 pp.
- Hartley, R. y Zisserman, A. (2000). *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, segunda edición. 655 pp.
- Kalmár-Nagy, T. y Ganguly, P. (2004). Near-optimal dynamic trajectory generation and control of an omnidirectional vehicle. *Robotics and Autonomous Systems*, 46(1): 47–64.
- Kumar, S., Angeles, J., y Darcovich, J. (1995). The design of kinematically isotropic rolling robots with omnidirectional wheels. *Mech. Mach. Theory*, 30(8): 1127–1137.
- Liu, Y., Jim, J., Williams, R., y Wu, J. (2007). Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization. *Robotics and Autonomous Systems*, 56(1): 461–479.
- Moreno, J. y Kelly, R. (2002). Robotic tasks using path control: Two case studies. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 35(1): 41–59.
- Muir, P. (1988). *Modeling and Control of Wheeled Mobile Robots*. PhD. Dissertation. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, USA. 343 pp.

- Rojas, R. (2006). Holonomic control of a robot with an omni-directional drive.
- Slotine, J.-J. y Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, primera edición. 461 pp.
- Stewart, J. (2003). *Calculus, Early Transcendentals*. Thomson Learning, Inc, California, USA, quinta edición. 1168 pp.
- Vázquez, J. y Velasco-Villa, M. (2007). Computed torque control of an omnidirectional mobile robot. *4th Intl. Conference on Electrical and Electronics Engineering*.
- Watanabe, K., Shiraishi, Y., Tzafestas, S., Tang, J., y Fukuda, T. (1998). Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **22**(1): 315–330.
- Wu, J. y Williams, R. (2006). Velocity and acceleration cones for kinematic and dynamic constraints on omni-directional mobile robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **128**(4): 788–799.