

TESIS DEFENDIDA POR

Francisco Antonio Domínguez Serna

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Fernando Rojas Íñiguez

Director del Comité

Dr. Roberto Romo Martínez

Miembro del Comité

Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez

Miembro del Comité

Dra. Catalina López Bastidas

Miembro del Comité

Dr. Armando Reyes Serrato

Miembro del Comité

Dra. Laura Cecilia Viana Castrillón

*Coordinador del programa de
posgrado en Física de Materiales*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

24 de noviembre de 2011

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN FÍSICA DE MATERIALES**

**ESTUDIO DE ESQUEMAS DE CONTROL CON ALGORITMOS
GENÉTICOS EN LA COMUNICACIÓN DE INFORMACIÓN
CUÁNTICA**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

FRANCISCO ANTONIO DOMÍNGUEZ SERNA

Ensenada, Baja California, México, noviembre de 2011

RESUMEN de la tesis de **FRANCISCO ANTONIO DOMÍNGUEZ SERNA**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en FÍSICA DE MATERIALES. Ensenada, Baja California, noviembre de 2011.

ESTUDIO DE ESQUEMAS DE CONTROL CON ALGORITMOS GENÉTICOS EN LA COMUNICACIÓN DE INFORMACIÓN CUÁNTICA

Resumen aprobado por:

Dr. Fernando Rojas Íñiguez

Director de Tesis

En este trabajo estudiamos esquemas de control aplicados en la optimización de transferencia de información en los protocolos de comunicación cuántica: teleportación y código súper denso, los cuales requieren un estado de máximo entrelazamiento. Asimismo se caracterizaron los estados de entrelazamiento máximo que se presentan en un sistema híbrido de carga y espín de 2×3 grados de libertad. Los protocolos fueron modelados en arreglos de puntos cuánticos, con tuneleo, energías de sitio e interacciones dependientes del tiempo, que son optimizadas utilizando algoritmos genéticos para maximizar entrelazamiento y fidelidad de transmisión.

Los diferentes modelos que se estudiaron están compuestos por un Hamiltoniano del sistema que es constante, y otro dependiente del tiempo. En el primero se incluye la interacción espín-órbita tipo Dresselhaus para generar estados híbridos, y en el segundo se incluyen las energías de sitio y transiciones entre sitios dependientes del tiempo como pulsos modelados mediante formas de onda gaussianas, cuyos parámetros (altura, dispersión y desplazamiento respecto a $t = 0$) forman el control que nos permite llevar al sistema al estado final buscado.

Como primer modelo, caracterizamos el entrelazamiento de un sistema de 2×3 grados de libertad modelado en un triple punto cuántico lateral con interacción espín-órbita en el que se coloca un electrón, con los coeficientes de la función de onda como parámetros de control. Esto nos permite encontrar todas las funciones de onda posibles de máximo entrelazamiento, las que se grafican utilizando un mapa auto organizado. Modelamos también el sistema de forma dinámica partiendo de una condición inicial y buscamos los estados de máximo entrelazamiento que se generan con el tuneleo de espín constante únicamente como parámetro de control. En particular se encontró que el sistema adquiere un comportamiento cíclico entre grados de entrelazamiento nulo y entrelazamiento máximo desde una localización bien definida del electrón hasta una distribución espacial de máxima simetría.

Como segundo modelo, estudiamos el protocolo de teleportación cuántica utilizando un doble punto cuántico con un electrón para establecer el sistema de máximo entrelazamiento híbrido de carga y espín compartido entre Alice y Bob. Se generó dicho estado,

empleando la optimización mediante algoritmos genéticos de la misma forma que para el caso del entrelazamiento. Alice posee además otro punto cuántico de espín que representa el qubit que desea transmitir, el cual puede interactuar electrostáticamente con el electrón que forma parte del estado compartido con Bob. Se demostró que el control de la interacción de intercambio de espín $J(t)$ permite la transferencia de información. Se describe una serie de etapas que permiten implementar el protocolo de teleportación en el sistema propuesto, las cuales son: generación de un estado de máximo entrelazamiento híbrido, transferencia de información mediante la interacción de intercambio, control de tuneo para realizar rotaciones de espín y control de energías de sitio para maximizar la fidelidad. El modelo propuesto se puede implementar para cualquier superposición de espín que se desee transferir con una fidelidad del 99.27%.

Finalmente, como tercer modelo, estudiamos el protocolo código súper denso en un doble punto cuántico híbrido de carga y espín. Partimos del estado de máximo entrelazamiento generado para el protocolo de teleportación, sobre el que se realizaron las transformaciones unitarias de Pauli con las energías de sitio y tuneos dependientes del tiempo. Obtuvimos la forma de los pulsos a aplicar que permite realizar las operaciones de Pauli llevando al sistema a los cuatro estados de la base de Bell híbrida.

Palabras Clave: Control cuántico, algoritmos genéticos, teleportación, código super denso.

ABSTRACT of the thesis presented by **FRANCISCO ANTONIO DOMÍNGUEZ SERNA**, as a partial requirements of the **MASTER IN SCIENCES** degree in **PHYSICS OF MATERIALS**. Ensenada, Baja California, november 2011.

STUDY OF QUANTUM CONTROL SCHEMES WITH GENETIC ALGORITHMS APPLIED TO QUANTUM COMMUNICATION PROTOCOLS

In this work we studied control schemes applied to the optimization of information transference in quantum communication protocols: teleportation and super dense coding, which requires a maximum entangled state. We also characterized the maximum entangled states of a hybrid spin-charge system of 2 by 3 degrees of freedom. The protocols were modeled in quantum dot arrays, with time-dependent tunneling, site energy and interactions. All of them were optimized using genetic algorithms for maximizing entanglement and transmission fidelity.

In all the studied models the Hamiltonian has a constant and a time-dependent behavior. The former included the Dresselhaus spin orbit interaction and the latter involved site energies and inter-site transitions as Gaussian shaped pulses considering the parameters of height, dispersion and offset, which act as the system control that allows to reach the desired final state.

In the first model, we characterized the entanglement of a 2 by 3 quantum system, modeled with a triple quantum dot with spin orbit interaction where we placed an electron. The expansion coefficients of the wave function were the control parameters. This allowed us to find all the possible wave functions with maximum entanglement, which are illustrated using a self-organized map. We also modeled the same system dynamically with a given initial condition searching for the maximum entangled states that are generated with the constant spin tunneling control only. Particularly, we found that the system acquires a cyclic behavior between null and maximum entanglement from a well-defined localization of the electron to a maximum spatial symmetry distribution.

As a second model, we studied the quantum teleportation protocol. A double quantum dot with an electron was used to establish the maximum hybrid spin-charge entangled state of the shared system between Alice and Bob. Such state was generated using an optimization genetic algorithm in the same way as for the entanglement generation model. Alice additionally has another quantum dot of spin, representing the qubit she wants to send to Bob, this one could interact electrostatically with the electron of the quantum dot in the shared state she has with Bob. The exchange interaction $J(t)$ allowed the information transference. A sequence of steps that we can follow implement the teleportation protocol to any spin superposition that we wish to transmit is presently described. These steps are the entanglement state generation, information transference by exchange interaction, tunneling control to generate spin rotations

and site energies control to maximize fidelity. With this model a 99.27% fidelity was achieved.

Finally, as a third model we studied the super dense coding in its hybrid representation, with a double quantum dot. The initial point was the maximum entangled state obtained in the teleportation protocol, over which we operated the Pauli unitary transformations by using time-dependent site energies and tunneling. The shape of the control pulses needed to accomplish these Pauli's operations in order to achieve the four hybrid Bell basis states were obtained.

Keywords: Quantum control, genetic algorithms, teleportation, superdense coding.

A mi madre

Agradecimientos

Primeramente agradezco al Dr. Fernando Rojas por su dirección y soporte en la realización de esta tesis

Agradezco especialmente a la doctora Catalina López Bastidas, a los doctores Armando Reyes Serrato, Francisco Javier Mendieta Jiménez y Roberto Romo Martínez por su participación como miembros del comité y por su invaluable ayuda en el desarrollo de este trabajo.

A la bióloga María Isabel Pérez Montfort, por su ayuda en la mejora de la redacción de esta tesis.

A todos los investigadores, estudiantes y personal del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, y del Centro de Nanociencias y Nanotecnología de la UNAM por su enseñanza académica.

Finalmente agradezco a CONACyT por el apoyo económico brindado para la realización de este trabajo.

Contenido

| | Página |
|---|-----------|
| Resumen en español | i |
| Resumen en inglés | iii |
| Dedicatoria | v |
| Agradecimientos | vi |
| Contenido | vii |
| Lista de Figuras | ix |
| Lista de Tablas | xv |
| I. INTRODUCCIÓN | 1 |
| I.1 Información cuántica | 2 |
| I.2 Objetivos | 14 |
| I.3 Estructura de la tesis | 16 |
| II. Conceptos Básicos | 18 |
| II.1 Computación cuántica | 19 |
| II.2 El qubit | 20 |
| II.3 Compuertas cuánticas | 22 |
| II.3.1 Compuertas de un qubit | 22 |
| II.3.2 Base computacional y compuertas de dos qubits | 24 |
| II.4 Entrelazamiento y base de Bell | 27 |
| II.4.1 Entrelazamiento | 27 |
| II.4.2 Estados de Bell | 28 |
| II.4.3 Base de Bell híbrida | 29 |
| II.4.4 Circuito generador de entrelazamiento | 30 |
| II.4.5 Caracterización del entrelazamiento: Concurrencia | 31 |
| II.4.6 Caracterización del entrelazamiento: descomposición y número de Schmidt | 32 |
| II.5 Protocolos de comunicación cuántica | 34 |
| II.5.1 Teleportación cuántica | 34 |
| II.5.2 Código super denso | 37 |
| II.6 Interacción espín-órbita | 38 |
| II.7 Algoritmos Genéticos | 40 |

Contenido (continuación)

| | Página |
|--|------------|
| II.8 Solución de sistemas dinámicos por integración numérica | 46 |
| II.8.1 Ecuación de onda de Schrödinger | 46 |
| II.8.2 Integración numérica mediante el método Runge Kutta de orden 4 | 48 |
| II.9 Control Cuántico | 52 |
| II.9.1 Determinación de la función objetivo | 54 |
| II.9.2 Ejemplo de aplicación del esquema de control por algoritmos genéticos | 54 |
| III. Entrelazamiento y su cuantificación | 61 |
| III.1 Estados de entrelazamiento máximo. | |
| Caso estático | 62 |
| III.2 Modelo del sistema con carga y espín. Caso dinámico. | 71 |
| IV. Modelado del protocolo de teleportación cuántica con estados híbridos de espín y carga | 78 |
| IV.1 Preparación del estado entrelazado híbrido | 82 |
| IV.2 Optimización en la transferencia del estado de $ \Phi_I\rangle$ a $ \Phi_D\rangle$ | 89 |
| IV.2.1 Definición de la base del problema | 91 |
| IV.2.2 Planteamiento del problema de control | 93 |
| V. Modelado del protocolo código super denso con estados híbridos entrelazados de carga y espín | 108 |
| V.1 Control para enviar el dato 00 | 112 |
| V.2 Control para enviar el dato 01 | 114 |
| V.3 Control para enviar el dato 10 | 116 |
| V.4 Control para enviar el dato 11 | 118 |
| VI. Conclusiones y trabajo futuro | 123 |
| REFERENCIAS | 127 |
| A. Teleportación cuántica implementada en puntos cuánticos | 131 |

Lista de Figuras

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 1 | Esfera de Bloch | 21 |
| 2 | Circuito de la compuerta X , de la ecuación (8). | 24 |
| 3 | Circuito de la compuerta C_{NOT} , de la ecuación (16). | 27 |
| 4 | Modelo híbrido de dos puntos cuánticos acoplados con un electrón con espín. La localización del electrón representa el grado de libertad de carga, independientemente al sitio de ocupación, el electrón puede tener espín $ \uparrow\rangle$ o $ \downarrow\rangle$ | 29 |
| 5 | Circuito cuántico que genera estados entrelazados a partir de estados puros aplicados en las entradas a y b . Compuesto por las compuertas <i>Hadamard</i> y <i>CNot</i> . Las respuestas obtenidas se muestran en la tabla (I). | 31 |
| 6 | Circuito para implementar el protocolo de teleportación cuántica. Las dos líneas superiores representan los qubits que Alice posee, mientras que la línea inferior representa el qubit de Bob. Alice está en posesión del estado φ , y comparte con Bob un estado entrelazado, a y b son los bits clásicos que envía a Bob, sobre los cuales, Bob realiza las operaciones X o Z para recuperar el estado original. En esta figura las líneas a y b representan el canal clásico que Alice envía a Bob para indicarle la transformación unitaria que debe realizar. | 36 |
| 7 | Circuito para realizar una medición en la Base de Bell, con su equivalencia simplificada | 37 |
| 8 | Circuito para implementar el protocolo del código súper denso. Inicialmente Alice y Bob comparten un estado entrelazado, Alice realiza las operaciones X , Z dependiendo de los bits a, b que desee enviar a Bob, luego Alice envía su qubit a Bob, y éste, mide en la base de Bell para recuperar los bits a, b que Alice deseaba enviarle. | 38 |
| 9 | Métodos evolutivos. Esquema general del algoritmo genético utilizado | 42 |
| 10 | Método de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias Runge Kutta de orden 4. En cada paso, la derivada se evalúa cuatro veces: una en el punto inicial, dos en puntos centrales de prueba, y otra en el punto final. Utilizando estas derivadas, se calcula la función mostrada en la línea punteada. | 49 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | | Página |
|--------|---|--------|
| 11 | Modelo de tres puntos cuánticos acoplados, izquierda, centro y derecha, con una probabilidad de tunelaje t_0 , donde colocamos inicialmente un electrón sin espín en el sitio izquierda. | 50 |
| 12 | Comparación del módulo de los coeficientes de expansión de la función de onda descrita en la ecuación (58), en negro, rojo y azul se muestran los resultados de la solución numérica de la ecuación (59), mientras que en rosa, verde y azul fuerte se muestran los correspondientes a la solución analítica de la ecuación (63). | 52 |
| 13 | Modelo de un triple punto cuántico, con los sitios $ \Phi_I, \Phi_C\rangle, \Phi_D\rangle$, izquierda, centro y derecha, respectivamente. Una probabilidad de tunelaje t_0 , determinada por la altura de las barreras. En a) el sistema en su estado inicial, en b) el objetivo al que busca llevarse. Consideramos una partícula sin espín. | 55 |
| 14 | Pulsos de control del tunelaje que conforman los parámetros de control. Altura, dispersión y posición en el tiempo de las barreras se muestra en las figuras para pulsos entre sitios izquierda-centro y centro-derecha. . . | 57 |
| 15 | Módulo de los coeficientes de expansión como función del tiempo, correspondientes a los sitios izquierda, centro y derecha de la función de onda (74), a_1, a_2, a_3 representan el módulo de los coeficientes de los estados $ \Phi_I\rangle, \Phi_C\rangle, \Phi_D\rangle$, vemos que inicialmente la partícula se encuentra en el sitio $ \Phi_I\rangle$, evoluciona en el tiempo y pasa al sitio derecha $ \Phi_D\rangle$, el tiempo se encuentra normalizado. | 59 |
| 16 | Pulsos de control de tunelaje que optimizan la función (75) y maximizan la probabilidad de encontrar la partícula que inicialmente se encontraba en el sitio $ \Phi_I\rangle$, en el sitio $ \Phi_D\rangle$, es decir realizan el transporte de una partícula sin espín entre sitios como se muestra en la figura 13 donde se plantea el problema. | 59 |
| 17 | Modelo de triple punto cuántico con un electrón. Parámetros de control: altura, dispersión y retraso temporal de las barreras dependientes del tiempo. | 62 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | Página | |
|--------|---|----|
| 18 | Mapa auto-organizado de entrelazamiento máximo del sistema de la figura 17, restringido a dos grados de libertad. Se muestra la matriz U de aprendizaje <i>U-matrix</i> y los módulos de los coeficientes de la función de onda de la ecuación (78). La intensidad de color representa los valores posibles que pueden tomar los coeficientes para maximizar el entrelazamiento en un sistema de 3×2 grados de libertad, restringido a 2 estados, o coeficientes. | 68 |
| 19 | Mapa auto-organizado de entrelazamiento máximo del sistema de la figura 17, con todos los grados de libertad disponibles. Se muestra la matriz U de aprendizaje <i>U-matrix</i> y los módulos de los coeficientes de la función de onda de la ecuación (78). La intensidad de color representa los valores posibles que pueden tomar los módulos de los coeficientes para maximizar el entrelazamiento en un sistema de 3×2 grados de libertad, con todos los estados con probabilidad no nula. | 69 |
| 20 | Modelo de triple punto cuántico con un electrón. Parámetros de control: altura y dispersión de las barreras dependientes del tiempo. | 72 |
| 21 | Probabilidades de ocupación de la ecuación como función del tiempo de la ecuación de onda (91) del sistema dinámico. Se muestra la probabilidad de estar en (a) $ \Phi_I \uparrow\rangle, \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) $ \Phi_D \uparrow\rangle, \Phi_I \downarrow\rangle$, (c) $ \Phi_C \downarrow\rangle, \Phi_D \downarrow\rangle$. (d) La función objetivo (79), (e) El tuneleo entre sitios izquierda-centro t_{12} y centro derecha t_{23} | 77 |
| 22 | Modelo de puntos cuánticos para el protocolo de teleportación, con interacción tipo espín-espín (de intercambio) $J(t)$ controlable. | 79 |
| 23 | Etapas del modelo de teleportación cuántica: (a) preparación del estado de entrelazamiento híbrido, (b) interacción electrostática entre sitios, (c) Rotación R_x aplicada en los sitios $ \Phi_C\rangle$ y $ \Phi_D\rangle$, (d) Aumento en la energía de sitio E_C , (e) partícula en el sitio derecha con el estado de espín que se buscaba transmitir, con un máximo de probabilidad. | 81 |
| 24 | Evolución temporal de los coeficientes de la función de onda (100), en la preparación del estado entrelazado híbrido. En la figura se aprecian las partes real e imaginaria de los coeficientes de los estados: (a) $ \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) $ \Phi_D \uparrow\rangle$, (c) $ \Phi_C \downarrow\rangle$, (d) $ \Phi_D \downarrow\rangle$, (e) Función objetivo (110), (f) Pulsos de control t_{CD} y σ_{CD} . Las flechas numeradas marcando posiciones en el tiempo, muestran las operaciones de la ecuación (114). | 89 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | Página |
|--------|--|
| 25 | Circuito cuántico equivalente para generar el estado de entrelazamiento híbrido $ \Phi_{CD}^+\rangle$, partiendo de la condición inicial $ \Psi(0)\rangle = \Phi_C \uparrow\rangle$ 90 |
| 26 | Probabilidades de ocupación como función del tiempo, para la función de onda (117) en el protocolo de teleportación del estado de espín del sitio $ \Phi_I\rangle$ al sitio $ \Phi_D\rangle$, únicamente con la interacción electrostática $J(t)$ y la energía de sitio E_C como parte del control. Se obtiene el estado invertido en el sitio derecha: $ \Phi_D\rangle = \alpha \downarrow\rangle + \beta \uparrow\rangle$. Probabilidades de ocupación de: (a) $ \uparrow \Phi_C \uparrow\rangle, \downarrow \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) $ \uparrow \Phi_C \downarrow\rangle, \downarrow \Phi_C \downarrow\rangle$, (c) $ \uparrow \Phi_D \uparrow\rangle, \downarrow \Phi_D \uparrow\rangle$, (d) $ \uparrow \Phi_D \downarrow\rangle, \downarrow \Phi_D \downarrow\rangle$, (e) función objetivo (121), (f) Interacción electrostática $J(t)$ y energía de sitio $E_C(t)$ 98 |
| 27 | Probabilidades de ocupación como función del tiempo para la función de onda (117) en el protocolo de teleportación del estado de espín del sitio $ \Phi_I\rangle$ al sitio $ \Phi_D\rangle$, con la interacción electrostática $J(t)$, el tuneleo t_{23} , y la energía de sitio E_C como parte del control. Se obtiene el estado teleportado en el sitio derecha, con una probabilidad del 99.27%: $ \Phi_D\rangle = \alpha \uparrow\rangle + \beta \downarrow\rangle$. Probabilidades de ocupación de: (a) $ \uparrow \Phi_C \uparrow\rangle, \downarrow \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) $ \uparrow \Phi_C \downarrow\rangle, \downarrow \Phi_C \downarrow\rangle$, (c) $ \uparrow \Phi_D \uparrow\rangle, \downarrow \Phi_D \uparrow\rangle$, (d) $ \uparrow \Phi_D \downarrow\rangle, \downarrow \Phi_D \downarrow\rangle$, (e) función objetivo (121), (f) Interacción electrostática $J(t)$, tuneleo t_{23} y energía de sitio E_C . Las flechas numeradas marcando posiciones en el tiempo, muestran las operaciones de la ecuación (135). 103 |
| 28 | Circuito equivalente del protocolo de Teleportación cuántica efectivo para el modelo propuesto. El estado compartido es $ \Phi_{CD}^+\rangle$, el estado a teleportar $ \Phi_I\rangle$, que es recibido como $ \Phi_D\rangle$ 104 |
| 29 | Modelo propuesto para la implementación del protocolo de código super denso. Consta de 2 puntos cuánticos laterales acoplados. Inicialmente colocamos un electrón en el sitio izquierda, obtenemos el estado $ \Phi^+\rangle$, que utilizaremos para generar los estados $ \Phi^-\rangle, \Psi^+\rangle, \Psi^-\rangle$ 109 |
| 30 | Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $ \Phi_{CD}^+\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \uparrow\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \downarrow\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \downarrow\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (141), (f) pulsos de control. 113 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | | Página |
|--------|---|--------|
| 31 | Representación con compuertas de la operación para transmitir el estado 00 utilizando el código súper denso. La aplicación de la identidad mantiene el estado original compartido, el cual es $ \Phi_{CD}^+\rangle$ | 114 |
| 32 | Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $ \Psi_{CD}^+\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \uparrow\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \downarrow\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \downarrow\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (142), (f) pulsos de control: tuneleo con espín constante en azul, $t_{CD}(t)$. | 115 |
| 33 | Pulso de control t_{CD} , que lleva al sistema del estado $ \Phi_{CD}^+\rangle$ a estado $ \Psi_{CD}^+\rangle$ | 116 |
| 34 | Representación con compuerta de la operación para transmitir el estado 01 utilizando el código súper denso. La aplicación de la compuerta $X \otimes I$, conduce al estado $ \Psi_{CD}^+\rangle$ | 116 |
| 35 | Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $ \Psi_{CD}^-\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \uparrow\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \downarrow\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \downarrow\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (144), (f) pulsos de control: tuneleo con espín constante en azul, $t_{CD}(t)$ y energía del sitio centro $E^+(t)$, que es antisimétrica con la energía del sitio derecha, y forman la compuerta Z | 117 |
| 36 | Pulsos de control t_{CD} y E^+ , que lleva al sistema del estado $ \Phi_{CD}^+\rangle$ a estado $ \Psi_{CD}^-\rangle$ | 118 |
| 37 | Representación con compuerta de la operaciones para transmitir el estado 10 utilizando el código súper denso. La aplicación de las compuertas $ZX \otimes I$, permite alcanzar el estado $ \Psi_{CD}^-\rangle$ | 118 |

Lista de Figuras (continuación)

| Figura | | Página |
|--------|--|--------|
| 38 | Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $ \Phi_{CD}^-\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \uparrow\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \uparrow\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_C \downarrow\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $ \Phi_D \downarrow\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (146), (f) pulsos de control: tuneo con espín constante en azul, $t_{CD}(t)$ y energía del sitio centro $E/+(t)$, que es antisimétrica con la energía del sitio derecha, y forman la compuerta Z. | 119 |
| 39 | Pulsos de control t_{CD} y E^+ , que lleva al sistema del estado $ \Phi_{CD}^+\rangle$ a estado $ \Phi_{CD}^-\rangle$ | 120 |
| 40 | Representación con compuerta de la operaciones para transmitir el estado 11 utilizando el código súper denso. La aplicación de las compuertas $Z \otimes I$, permite alcanzar el estado $ \Phi_{CD}^-\rangle$ | 120 |
| 41 | Resumen de pulsos de control y circuitos cuánticos del protocolo del código súper denso aplicado al modelo propuesto | 121 |
| 42 | Circuito general del código súper denso | 122 |

Lista de Tablas

| Tabla | | Página |
|-------|---|--------|
| I | Estados entrelazados generados por el circuito cuántico de la figura 5, para un sistema de dos qubits | 30 |
| II | Posibles mediciones conjuntas que puede realizar Alice al implementar el protocolo del código súper denso. | 91 |
| III | Funciones objetivo para generar los estados de la base de Bell híbrida en el protocolo de código super denso. | 112 |
| IV | Transformaciones unitarias dependientes de los qubits de entrada del circuito cuántico para el protocolo del código super denso mostrado en la figura 42. | 122 |

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

La teoría cuántica ha revolucionado el entendimiento de diversos fenómenos físicos que tienen lugar en el mundo subatómico. Es el entendimiento de estos fenómenos a escala atómica lo que conduce a su posible manipulación, y es entonces, donde surge la información cuántica, y los dispositivos capaces de procesarla son las computadoras cuánticas. De forma general la computación cuántica utiliza las propiedades inherentes a los sistemas cuánticos como es el paralelismo y el entrelazamiento para realizar operaciones computacionales. Se ha demostrado que son estas propiedades las que brindan un gran potencial en cuanto a velocidades de operación. Es evidente que si realizamos operaciones de cualquier índole sobre estados cuánticos, será eventualmente necesaria su transferencia a otras entidades, o en otras palabras, la comunicación ya sea de resultados de alguna operación o simplemente de información que se desee transferir. La comunicación cuántica aparece de forma natural, como una serie de protocolos inherentes en la computación cuántica y por ende en la comunicación de información cuántica. Resulta de mayor importancia para nuestro trabajo el planteamiento de la posible implementación de los protocolos de comunicación cuántica ya conocidos: teleportación y código súper denso, bajo un sistema híbrido de carga y espín en puntos cuánticos, en el que la interacción espín-órbita del material es la que nos podría permitir establecer un estado entrelazado híbrido. La propiedad de entrelazamiento, es necesaria en todo protocolo de comunicación cuántica. Desde este punto buscamos generar un esquema de control basado en el control dinámico del tuneo entre sitios, energías de sitio, e

interacciones electrónicas de carga que permita implementar los protocolos de comunicación cuántica. Son estos conceptos los que conforman la base de nuestro trabajo. En las secciones siguientes comenzamos con una introducción a los aspectos fundamentales de la computación y comunicación cuántica. Asimismo, estamos interesados en cuantificar el entrelazamiento en sistemas híbridos de carga y espín.

I.1 Información cuántica

La idea de la computación cuántica fue introducida por Feynman (1982, 1985), Deutsch (1985) y posteriormente Landauer (1994). El elemento básico de la información cuántica es el qubit, el cual a diferencia del bit clásico es una superposición de ambos estados binarios posibles, es decir, que es una combinación lineal de los estados cero y uno. La computación cuántica también se considera una herramienta con eficiencia potencial en la solución de algunos problemas de información cuántica.

La aplicación mayormente difundida es la criptografía cuántica, que tiene su origen el algoritmo de Shor (1994) y consiste en la factorización de enteros largos en números primos. Este algoritmo es útil para el rompimiento de códigos de seguridad en informática y encriptación de datos, y demuestra que el tiempo de decodificación en un sistema cuántico es de orden polinomial en lugar de exponencial como sería en un sistema clásico.

Una aplicación importante de la computación cuántica está en las comunicaciones y códigos de seguridad. Se basa en el teorema de que los estados cuánticos no pueden copiarse, pues copiarlos implica medirlos, lo cual produce un colapso de las funciones de onda, sustentado por el teorema de no clonación (Wooters y Zurek, 1982). Esto conlleva a que las comunicaciones cuánticas sean completamente seguras, pues no se

puede interferir con un canal de información, sin que el transmisor o receptor se den cuenta. Adicionalmente, los estados entrelazados pueden utilizarse para distribuir las claves de comunicación.

De forma análoga a la computación clásica, donde las operaciones realizadas sobre bits se hacen en arreglos de compuertas; de la misma manera, para la computación cuántica se hace uso de compuertas cuánticas que operan sobre los qubits. Las compuertas cuánticas pueden verse como transformaciones unitarias aplicadas a los vectores de estado. Por lo mismo, las compuertas son reversibles y se pueden ver como la rotación del vector complejo en el espacio de Hilbert, que representa la entrada a las compuertas.

De manera general, los protocolos de comunicación cuántica cumplen con lo siguiente:

1. No se pueden medir los estados para distinguirlos.
2. Los estados no pueden copiarse o clonarse.
3. Cualquier medición modifica el estado original.

Los protocolos de comunicación cuántica se pueden utilizar para establecer una clave de comunicación que servirá para realizar la codificación, o bien, en la transferencia de información misma ya sea con el código súper denso que permite transmitir dos bits clásicos en un ebit (bit entrelazado) o a través de la teleportación que permite enviar un estado cuántico. Ambos protocolos hacen uso de los estados entrelazados.

El entrelazamiento es una propiedad de especial importancia en la información cuántica. En el espacio de Hilbert los estados puros se describen mediante vectores de estado $|\Psi\rangle$, los cuales son una combinación lineal de todos los estados físicamente válidos del sistema. Existen ciertos estados que no pueden describirse en términos de

cada uno de sus componentes individuales, en otras palabras, el producto tensorial de los estados individuales no dará como resultado a dichos estados. Estos estados se denominan entrelazados. Son útiles en los esquemas de comunicación cuántica para transmitir dos bits clásicos o teleportar un estado cuántico.

El estado puro de un par de sistemas cuánticos se denomina entrelazado si no puede factorizarse en estados independientes de cada subsistema. Un estado mixto está entrelazado si no puede representarse como una mezcla de estados puros que a su vez puedan factorizarse (Wooters y Zurek, 1982) .

El sistema entrelazado formado por un par de espines o fotones polarizados son de mayor aplicación en las ramas de computación cuántica. De forma general, para cualquier sistema bipartito que se encuentra en estado puro, se ha demostrado, que el entrelazamiento se puede definir como la entropía de von Neumann (Bennett *et al.*, 1993) .

La mayor diferencia entre los sistemas entrelazados y los no entrelazados radica en que los primeros sólo pueden representarse utilizando 2^d amplitudes, donde d es la dimensión del estado, y los no entrelazados sólo con un número lineal $2d$ de amplitudes. Gracias al hecho de que los estados entrelazados tienen un número exponencial de amplitudes sus potencialidades en la computación cuántica han llamado la atención, pues las computadoras clásicas no pueden trabajar con números exponenciales de amplitudes. Por esto mismo la esperanza en la computación cuántica radica en que se podrá trabajar la aceleración exponencial y contrastarla con la aplicación de algoritmos clásicos.

La habilidad de los sistemas cuánticos de estar en muchos estados al mismo tiempo (superposición) conduce a la idea de una gran eficiencia en el procesamiento de información, pues el paralelismo cuántico podría realizar un número exponencial de operaciones en un mismo tiempo.

Generalmente el entrelazamiento es una propiedad que se estudia entre dos sistemas con el mismo grado de libertad, sea espín-espín, órbita-órbita, fotón-fotón (Ochoa, 2009). En nuestra propuesta, utilizaremos estados híbridos entrelazados de dos grados de libertad diferente, espín y órbita. Los estados híbridos entrelazados ya han sido utilizados anteriormente en el transporte de bits entrelazados en la manipulación de protocolos de información cuántica, han demostrado ser un recurso valioso en la teleportación y computación cuántica Chen *et al.* (2002). Asimismo, en el trabajo con sistemas entrelazados, se vuelve necesaria su cuantificación. La medida del entrelazamiento para sistemas de dos qubits se denomina *conurrencia*. Para sistemas de más de dos qubits medir el entrelazamiento se vuelve una tarea más compleja. Particularmente emplearemos el número de Schmidt, el cual permite cuantificar el entrelazamiento entre un sistema de dos grados de libertad, por ejemplo espín; y otro con n grados de libertad, por ejemplo carga. Resulta convenientemente útil en sistemas como el de nuestra propuesta, pues permite cuantificar el entrelazamiento en sistemas híbridos de carga y espín.

El entrelazamiento produce efectos interesantes; por ejemplo, que un sistema entrelazado compuesto por dos partículas dé la impresión de estar en dos lugares al mismo tiempo. Es decir, que si perturbamos a una de estas partículas, dicha perturbación de algún modo se propagará a la otra afectando también su estado.

Si bien se tienen grandes esperanzas en la implementación de la computación cuántica, existen hasta ahora muchas limitantes al respecto, sobre todo la cantidad de qubits que se han alcanzado en un sistema. Las dificultades de escalabilidad vienen precisamente por factores de decoherencia, ya que el ambiente introduce errores que pueden rebasar la capacidad de corrección.

A pesar de esto se han desarrollado diversos experimentos que han puesto en práctica

los principios de la computación cuántica. Entre otros están los realizados con iones atrapados (Pellizzari *et al.*, 1995) y resonancia magnética nuclear (NMR) (Garshenfeld y Chuang, 1997). En el primero, se confinan iones por campos eléctricos que representan qubits y, en el segundo se obtiene una aproximación de una computadora cuántica utilizando NMR, entre otros.

Los elementos físicos utilizados para la información cuántica están sujetos a perturbaciones del medio ambiente como decoherencia y autodestrucción de las interacciones naturales que existen entre las partes físicas del sistema. En el mundo clásico controlar las interacciones de los sistemas con su ambiente es una tarea sencilla, desde el entendido que dichas interacciones se traducen como ruido y por lo tanto para corregirlo basta con realizar mediciones y eliminar aquellas partes que se alejan de las deseadas. Por otro lado en el mundo cuántico realizar dichas mediciones no está más permitido, al menos no el mismo sentido que se realiza en los sistemas clásicos, ya que las mediciones producen alteraciones en el sistema. Si bien algunos métodos de control utilizan las mediciones proyectivas para controlar el sistema y llevarlo a otros estados deseados y eliminar aquellos efectos de interacciones con el ambiente, también existen las mediciones no proyectivas o indirectas que son las que se realizan aplicando compuertas cuánticas que permiten llevar el sistema a los estados deseados dándole básicamente vuelta al problema de la medición.

La computación y el procesamiento de información cuántica requiere manipular estados cuánticos individuales. En base a esto, se requieren esquemas de control que permitan llevar al sistema a un estado deseado para mantener las coherencias de fase.

Existen diferentes esquemas de control clásico de probada efectividad, basados en la corrección de errores a través de sus gradientes; dichos esquemas pueden aplicarse a los sistemas cuánticos como ejemplo está el control retroalimentado. La retroalimentación

cuántica se basa en retroalimentar los resultados de la medición para alterar la dinámica futura del sistema y puede usarse para controlar la degradación de la decoherencia y entrelazamiento. Sin embargo, en los sistemas cuánticos suelen presentarse variaciones muy marcadas, en donde los algoritmos de control clásicos no tiene una gran efectividad, pues pueden divergir de la respuesta óptima. En este punto, entran los algoritmos genéticos, los cuales siempre encuentran una solución óptima aún en condiciones de extremas variaciones pues actúan como lo hace la selección natural.

Los algoritmos genéticos fueron introducidos por John Holland en 1975 (Holland, 1975). Consta de una analogía con la evolución y los organismos vivientes. A grandes rasgos, la analogía consiste en formar cromosomas como las diferentes soluciones posibles, y sus genes como los valores de las variables que conforman la solución. De esta forma los cromosomas formarán un individuo que puede evolucionar en la búsqueda de alguna función óptima.

En la solución de un problema por algoritmos genéticos iniciamos con una serie de soluciones representadas por cromosomas que denominaremos población. Las soluciones de una población son tomadas para formar una nueva población. Esto es motivado en la esperanza de que las nuevas poblaciones serán mejores que las anteriores. Las soluciones que serán seleccionadas para formar nuevas soluciones se denominan descendientes, y se seleccionan de acuerdo a su ajuste. Las más convenientes, aptas, tienen mayores probabilidades de reproducirse. Esto se repite hasta que alguna condición se satisface.

El control, es básicamente la corrección de la diferencia entre la salida obtenida y la salida deseada, lo cual puede hacerse de maneras convencionales con una retroalimentación basada en la corrección del error, sustentado en un control de gradientes. Por otro lado en los sistemas cuánticos las abruptas variaciones conllevan a que el control basado en gradientes pueda ser insuficiente y diverja del resultado óptimo. Los

algoritmos genéticos, brindan mayor robustez al respecto, pues son insensibles a dichos cambios abruptos al no basar su funcionamiento en gradientes.

Se ha tratado el problema de la computación cuántica desde diferentes enfoques, inicialmente se ha propuesto llevarla a cabo mediante la aplicación de puntos cuánticos, sin embargo, el control de la decoherencia es un factor determinante. La decoherencia es la influencia que ejerce el ambiente en el sistema y que lo hace perder sus estados. En nuestra propuesta modelaremos los esquemas de comunicación en puntos cuánticos híbridos de carga y espín.

Un punto cuántico es una nanoestructura que tiene todas sus dimensiones confinadas. De manera que el movimiento de electrones o huecos se encuentra también confinado. Sus energías están discretizadas. Los qubits pueden ser modelados mediante puntos cuánticos, si son puntos cuánticos de carga mediante puntos dobles, donde la ocupación de un electrón en un punto y en el otro puede representar el $|0\rangle$ y el $|1\rangle$ respectivamente. En el caso de puntos cuánticos de espín, un punto cuántico tendrá toda la información del $|0\rangle$ y el $|1\rangle$ necesarias. A continuación se presentan algunos trabajos donde se ha utilizado el modelado de puntos cuánticos para el tratamiento de qubits.

En el trabajo de Loss (Loss y DiVincenzo, 1998) se realizó una propuesta universal para la implementación de compuertas de dos qubits utilizando estados de espín acoplados de un solo electrón en puntos cuánticos. El modelo consta de distintos puntos cuánticos, sobre uno de los cuales se realizará una operación de un solo qubit. El punto cuántico a controlar es de spin, se utiliza un modelo de interacción de intercambio con otro punto cuántico regido bajo el esquema de acoplamiento transitorio de Heisenberg tipo espín-espín, con la aplicación de un voltaje se puede controlar el nivel de interacción de los puntos cuánticos, de tal manera que en un momento la interacción es

lo suficiente fuerte para tener suficiente probabilidad de tuneo entre el punto cuántico en el que se realiza la operación y el otro. Un punto cuántico ferromagnético realizará las operaciones de un bit sobre el punto cuántico de spin. Para leer los estados se puede hacer mediante un punto ferromagnético o un electrómetro a través de una válvula de espín que dejará pasar el electrón a otro punto cuántico sólo cuando el espín de éste concuerde con un valor preestablecido, de manera que sabiendo el estado antes de la operación *swap* aplicada, si detectamos un electrón con el electrómetro significará que la operación se ha o no llevado a cabo según la configuración de la válvula. En este modelo se utilizaron dos puntos cuánticos cuyos espines se encontraban uno polarizado y otro no polarizado, lo cual se logró aplicando una excitación óptica selectiva o un campo magnético de fuerte gradiente espacial. Posteriormente para aplicar la compuerta swap (not), se aplicó un pulso en el acoplamiento de intercambio, donde el spin no polarizado ahora se polariza después de transcurrido un tiempo de estabilización y el polarizado de despolariza. Lo que se prueba con este trabajo es que se puede realizar computación cuántica con qubits en arreglos de puntos cuánticos.

En el trabajo de Delgado (Delgado, 2010), se emplea un esquema de control aplicado sobre pares de estados de partículas entrelazadas, con el fin de distinguirlos después de que han interactuado con el medio ambiente, y así reconstruir los estados originales. Se hace uso del modelo de Ising para interacción espín-espín. Las interacciones de Ising (Issing, 1925) pueden generar distorsiones en pares entrelazados que fueron generados con propósitos de ingeniería cuántica. Las distorsiones analizadas se basan en la interacción de dos partículas bajo un acoplamiento transitorio $E = -J\vec{S}_1 \bullet \vec{S}_2$, donde podemos ver que existe una constante de interacción J entre los estados cuánticos de los dos puntos, que identifica la forma en los estados pueden pasar de un estado al siguiente. El sistema genera pares entrelazados desconocidos con la misma probabilidad, y

a su vez una distorsión es agregada al estado generada por la presencia de un campo magnético parásito no homogéneo. Una vez que las partículas fueron sometidas a las perturbaciones del medio, algunas mediciones pueden realizarse para identificar cuál era su estado original con cierta probabilidad, (Branczyk *et al.*, 2007) y (Xi y Jin, 2007). Las mediciones no locales pueden reconstruir el estado original más fácilmente, ya que las propiedades de entrelazamiento son preservadas de forma parcialmente posterior a ellas.

Así es posible obtener una buena fidelidad y discriminación utilizando mediciones no locales para controlar campos magnéticos externos que permitan preparar los estados iniciales, pues permiten obtener un operador de evolución que sirve para calcular los estados iniciales. Este trabajo nos permite entender como es la interacción electrostática entre dos partículas, que será una de las maneras en que se busca establecer el esquema de control del protocolo de teleportación cuántica

En el trabajo de Dong (Xue *et al.*, 2010) se utiliza un modelo de un átomo de dos niveles, separados en cavidades amortiguadas. Cuyo control se realiza con retroalimentación basada en saltos cuánticos comunes para generar un estado estacionario entrelazado entre ambos que no se afecte por la decoherencia. El control se basa en la medida de un fotón común emitido por las cavidades. Lo que se hace es preparar un operador de medición conjunto que involucra a los dos sistemas como si un fotón fuera mutuo. Y así se puede realizar la retroalimentación, que tendrá parámetros como las frecuencias de los láseres utilizados y longitud de onda de los fotones emitidos, estos datos a su vez sirven para el cálculo de la concurrencia. Se probó que la concurrencia puede llevarse a valores cercanos a 1.

En otro contexto, se han realizado trabajos utilizando algoritmos genéticos para la optimización o control cuántico, con en el trabajo de Krause y colaboradores (Krause

et al., 1998) donde se realizaron cálculos para el control cuántico de paquetes de onda en movimiento, así como de radiación de terahertz (THz) en estructuras de doble barrera de potencial asimétrico mediante un pulso láser cuyos parámetros optimizados mueven el paquete de onda al objetivo deseado.

En el trabajo de Navarro-Muñoz (Navarro-Muñoz *et al.*, 2006), se presenta una aplicación de algoritmos genéticos como método computacional para la optimización de la medida de la concurrencia del entrelazamiento para casos de cadenas unidimensionales, redes triangulares y cuadradas en una aproximación de amarre fuerte (tight binding), en donde los saltos electrónicos predominan sobre la disipación fonónica. Se basa en la medida de la concurrencia. Se aplica en diferentes sistemas de redes condensadas con el objetivo de maximizar el entrelazamiento utilizando algoritmos genéticos. Se utilizan las formulas de O'Connor y Wooters (O'Connor y Wooters, 2001). En este estudio los qubits se utilizan como sitios dentro la red cristalina. Y las bases computaciones 0 y 1 representan estados ocupados y desocupados, así la concurrencia es una medida del llenado de los estados. El resultado que se obtiene es que se puede mejorar la concurrencia con la utilización de algoritmos genéticos obteniendo la fase o configuración del material más adecuada. La concurrencia para la configuración optimizada aleatoriamente desordenada en el caso unidimensional resulta ser mejor que para sistemas ordenados.

También se ha probado la utilidad de los algoritmos genéticos en el control de la decoherencia en sistemas de partículas multinivel como núcleos atómicos de spin $\frac{1}{2}$ o electrones o átomos de dos niveles (Grace *et al.*, 2007). El objetivo es producir compuertas cuánticas de alta fidelidad y al mismo tiempo reducir los efectos de decoherencia.

La transferencia de información entre los elementos requiere interacción de estados cuánticos entrelazados. Para dos qubits existen 4 estados característicos de máximo en-

entrelazamiento que son la combinación lineal de dos de los estados posibles de los qubits, conocidos como base de Bell (Bell, 1964). El ambiente puede hacer perder también dicho entrelazamiento. Una vez construida la compuerta, la información transferida generalmente deberá ser corregida con el uso de algoritmos de corrección de errores cuánticos.

Los fundamentos de la computación cuántica, así como su aplicación física, que hemos abordado hasta ahora nos conducen a los protocolos de comunicación cuántica, pues la búsqueda de un esquema de control aplicado a éstos es el objetivo fundamental de este trabajo.

Existen dos protocolos fundamentales de comunicación cuántica, el código superdenso (Bennett y Wiesner, 1992) y la teleportación cuántica (Bennett *et al.*, 1993). El código súper denso permite la transmisión de dos bits clásicos a través de un solo qubit cuántico. Esto se logra compartiendo primero un par entrelazado en una base de Bell, luego un transmisor, “Alice“ realiza una transformación en la base de Bell con uno de los operadores de Pauli con lo que puede obtener 4 estados posibles, luego el receptor, “Bob“ puede aplicar la operación inversa y recuperar la información que es equivalente a dos bits clásicos pues son cuatro las operaciones unitarias que Alice puede realizar.

Es posible teleportar estados cuánticos desconocidos mediante canales dobles Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) y clásicos, demostrado en el trabajo de Bennett y colaboradores (Bennett *et al.*, 1993) donde se trasfiere un estado cuántico de un origen, “Alice“, a un receptor, “Bob“, para lo cual se hace uso de un par EPR, o entrelazado, que es un par de partículas correlacionadas que comparten Alice y Bob, generalmente un estado de Bell. Para hacerlo la partícula que contiene la información, que posee Alice es medida a la vez que es medida su partícula compartida con Bob, luego Alice envía a Bob por canales clásicos el resultado de sus mediciones y de esta manera Bob puede reconstruir

el estado desconocido en su partícula EPR aplicando una conversión unitaria con uno de los operadores de Pauli dependiendo de la medición de Alice.

Los protocolos de teleportación y código súper denso fueron primeramente demostrados experimentalmente con láseres. Se generaron pares de fotones entrelazados en polarización que permitieron demostrar experimentalmente la utilidad de los dos protocolos (Bouwmeester *et al.*, 1997; Klaus *et al.*, 1996). Se ha realizado satisfactoriamente la teleportación de información contenida en partículas masivas con los experimentos de Riebe y colaboradores (Riebe *et al.*, 2004) con iones de Ca, en donde se utilizó una adaptación exacta de la propuesta de Bennet y colaboradores simplemente adaptada a los átomos obteniendo una fidelidad del 75%.

Asimismo se ha demostrado que se pueden generar estados de Bell en un sistema de dos puntos cuánticos dobles tanto estacionarios como dinámico (Contreras-Pulido y Aguado, 2004) conducidos por la aplicación de una diferencia de potencial. Se demostró que partiendo de un sistema no entrelazado se puede alcanzar cada uno de los estados de Bell con la aplicación adecuada de un campo eléctrico externo dependiente del tiempo. Los resultados muestran que es posible controlar las interacciones de los qubits utilizados en el procesamiento de información, a través de compuertas cuánticas con el ambiente. Así que el uso de algoritmos de lazo cerrado de aprendizaje junto con técnicas de corrección de errores permite producir compuertas cuánticas de altas fidelidades.

Hemos visto que los estudios se centran en la implementación de esquemas de comunicación en arreglos de puntos cuánticos pero no se realiza un control que maximice las posibilidades de comunicación. La relevancia de los protocolos de transmisión de información cuántica es innegable, de tal manera que un esquema de control puede mejorar de manera sustancial dicha transferencia de datos, aplicable al código superdenso y la teleportación cuántica. Además en nuestra propuesta empleamos estados entrelazados

híbridos de carga y espín, de tal forma que las propiedades de acoplamiento espín - órbita tipo Dresselhaus (Dresselhaus, 1955) son de vital importancia en la implementación del protocolo.

I.2 Objetivos

En este trabajo se propone la utilización de puntos cuánticos para la implementación de los protocolos de comunicación cuántica: teleportación y código súper denso. Siendo nuestro objetivo desarrollar esquemas de control para estos protocolos. Dichos esquemas se basarán en técnicas de optimización dinámica por algoritmos genéticos.

Para ambos protocolos se propone un estado entrelazado compartido híbrido de carga y espín, conformado por dos puntos cuánticos con un electrón. El acoplamiento entre los puntos cuánticos se permite mediante el tuneo, el cual es un parámetro de control externo, modelado como un pulso eléctrico que modifica la probabilidad de transición electrónica con espín constante. También se permiten modificaciones en las energías de sitio, para generar cambios de fase en el espín electrónico. Calculamos las formas óptimas del tuneo y las energías de sitio dependientes del tiempo que favorecen la formación de un estado entrelazado híbrido compartido. Partiendo de tener el electrón inicialmente en uno de los sitios con un espín predeterminado. Por lo tanto, resolvemos la ecuación de onda de Schrödinger dependiente del tiempo, bajo diferentes configuraciones iniciales de los electrones. Observamos los efectos de la evolución temporal del tuneo y las energías de sitio en la cuantificación del entrelazamiento, y fidelidad de transmisión de información.

En la descripción del sistema incluimos términos de acoplamiento espín - órbita tipo Dresselhaus, que son los que nos permiten tener una dinámica con cambios de espín, y

que resultarán por lo tanto necesarios en el desarrollo del esquema de control. Incluimos dentro de nuestros objetivos el cuantificar el grado de entrelazamiento de un sistema híbrido compuesto por el grado de libertad de espín de un electrón y n niveles de carga provenientes de n sitios de ocupación en un arreglo de puntos cuánticos.

En el caso del protocolo de teleportación cuántica, modelamos la información a transmitir como un tercer punto cuántico con un electrón confinado, cuyo espín contiene la información a transferir. Estamos interesados en el efecto del control de la interacción electrostática tipo Heisenberg que puede darse entre las dos partículas. Con el propósito de encontrar un pulso $J(t)$ que permita transferir la información entre partículas. Así mismo, una vez logrado esto, buscamos maximizar la probabilidad de que uno de los puntos cuánticos tenga la mayor probabilidad de encontrar un electrón cuyo espín sea equivalente al de la partícula con el espín que se quería transmitir. Para esto, estudiamos la forma de las energías de sitio que nos permitan alcanzar dichas condiciones. Calculamos la forma óptima de estos pulsos que maximizan la fidelidad en la transferencia de información.

En el código súper denso modelamos el sistema como un doble punto cuántico con un electrón y espín. Siendo éste un sistema híbrido de carga y espín como el que sirvió para generar el estado entrelazado compartido. Se aplican transformaciones unitarias compuestas por σ_X y σ_z , las cuales son compuertas que generan rotaciones. Las modelamos con el control del tuneo y energías de sitio dependientes del tiempo. Calculamos por lo tanto, la forma de estos pulsos que permite realizar las transformaciones unitarias en la base de Bell, propias del código súper denso.

Queremos obtener estos parámetros óptimos de tuneos y energías de sitio que nos permitan implementar los protocolos de comunicación cuántica en puntos cuánticos híbridos acoplados, aplicando la técnica de optimización por algoritmos genéticos.

I.3 Estructura de la tesis

Para proporcionar una descripción detallada de los fundamentos, la metodología y los resultados obtenidos, se ha estructurado la tesis de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se presentan los conceptos básicos de la computación y la comunicación cuántica, partiendo del qubit como elemento fundamental de ambos. Se incluye la descripción de los protocolos de comunicación cuántica, código súper denso y teleportación. Asimismo, los conceptos sobre entrelazamiento, acoplamiento espín órbita y la base sobre el control cuántico, donde se detalla el funcionamiento básico de los algoritmos genéticos. Del mismo modo se propone una primera aproximación del problema.

En el capítulo 3 abordamos el problema de cuantificar el grado de entrelazamiento en sistemas híbridos de carga y espín. Se calculan los estados de máximo entrelazamiento para un sistema de dos grados de libertad de espín y tres de carga, en su forma estática y dinámica.

En el capítulo 4 presentamos un modelo de un sistema físico del protocolo de teleportación cuántica. En este modelo se mantiene un estado entrelazado híbrido compartido. La transferencia de información se modela con un Hamiltoniano de intercambio tipo Heisenberg. Comenzamos explicando la aplicabilidad del protocolo de teleportación cuántica en puntos cuánticos, la preparación del estado entrelazado necesario. Concluimos con el cálculo del esquema de control mediante algoritmos genéticos que aplicado en la teleportación cuántica maximiza la fidelidad.

En el capítulo 5 se realiza la aplicación de la optimización por algoritmos genéticos en el modelo del sistema para el código súper denso.

Finalmente en el capítulo 6, discutimos brevemente sobre los resultados obtenidos,

se presentan las conclusiones finales y el posible trabajo futuro.

Capítulo II

Conceptos Básicos

En el desarrollo del presente trabajo, proponemos un modelo basado en puntos cuánticos para la transmisión de información cuántica. Comenzaremos con una descripción general de los elementos de la computación cuántica, siendo la base fundamental el qubit, o bit cuántico. Como los protocolos de comunicación cuántica requieren un estado entrelazado compartido, proponemos un estado entrelazado híbrido de carga y espín, de tal forma que incluimos su caracterización y formas de cuantificarlo. La concurrencia nos permite cuantificar el grado de entrelazamiento entre dos sistemas de dos grados de libertad cada uno; mientras que el Número de Schmidt permite cuantificarlo entre sistemas, donde uno es de dos grados de libertad y el otro puede tener n grados de libertad. Éste último es importante ya que uno de los grados de libertad es el espín, y el otro el de carga, así que su caracterización puede realizarse tomando en cuenta los dos grados de libertad de espín y los n grados de libertad de carga. La existencia de un sistema híbrido, implica una dependencia entre el espín y la órbita, que es equivalente a una dependencia espín-ocupación. Incluimos los efectos de la interacción espín-órbita tipo Dresselhaus, que nos permitirán alcanzar los estados de entrelazamiento híbrido.

Buscamos establecer un esquema de control aplicado en el modelo propuesto que permita implementar los protocolos de comunicación. Se propone la optimización mediante algoritmos genéticos. Asimismo, aplicamos todos estos principios en la optimización de un problema sencillo de transporte de un electrón entre los sitios de los puntos cuánticos.

II.1 Computación cuántica

La idea de la implementación física de la computación cuántica trae consigo la necesidad de controlar los estados cuánticos de un sistema de forma lo suficientemente independiente como para poder manipularlos y realizar operaciones con ellos. Desde los años 70 diversas técnicas para controlar estados cuánticos independientes han tenido un auge en su desarrollo. Es aquí cuando de manera natural el interés en la computación cuántica se torna más importante.

De manera paralela la miniaturización de los sistemas electrónicos de procesamiento tiene una influencia importante sobre el aumento de interés en la computación cuántica. El transistor es el elemento básico de procesamiento de la computadora clásica. El incremento en el poder de procesamiento implica una disminución en el tamaño de los componentes que lo llevan a cabo. Este incremento sigue la ley de Moore (Moore, 1965), la cual establece que el poder computacional se duplicará a un costo constante alrededor de cada dos años. Sin embargo, se está alcanzando el límite físico debido al tamaño de los componentes que son cada vez más pequeños, donde empiezan a aparecer efectos cuánticos que interfieren con la funcionalidad de los circuitos. Es aquí donde se vislumbra necesario un cambio de enfoque si se busca seguir incrementando el poder de procesamiento.

Primeramente Deutsch propuso una noción sobre la computadora cuántica universal (Deutsch, 1985), la cual debería ser capaz de simular cualquier sistema físico arbitrario. Posteriormente los algoritmos de Shor (Shor, 1994) y Grover (Grover, 1997), demuestran el paralelismo cuántico como otra de las potencialidades de la computación cuántica, con sus algoritmos de factorización de números primos y de búsqueda, respectivamente. El paralelismo cuántico es la coexistencia de todos los estados del sistema debido a la

superposición de los mismos formando un estado cuántico. Esto permite que al aplicar una operación sobre un sistema determinado, estemos aplicando la operación sobre todos sus estados posibles al mismo tiempo; sin embargo, el acceso a los resultados está restringido por el postulado de la medición.

II.2 El qubit

El elemento básico de la computación cuántica es el quantum bit o qubit. Un bit clásico puede tomar valores de 0 o 1. De forma análoga un qubit puede tomar los estados $|0\rangle$ o $|1\rangle$. La diferencia básica entre los bits clásicos y qubits es que éstos últimos pueden estar en una combinación lineal o superposición de ambos estados,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Un sistema cuántico de dos niveles, es por lo tanto suficiente, para describir un qubit. Los coeficientes α y β son cantidades en general complejas, cuyo módulo cuadrado, $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ denota la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente.

En la figura 1, se muestra la representación geométrica de un qubit en lo que se conoce como la esfera de Bloch, de esta manera la ecuación (1) puede expresarse como,

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \tag{2}$$

en esta ecuación θ , φ y γ son números reales. La fase global $e^{i\gamma}$ puede ignorarse, ya que no tiene efectos observables, y por lo tanto, la función efectiva es,

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \tag{3}$$

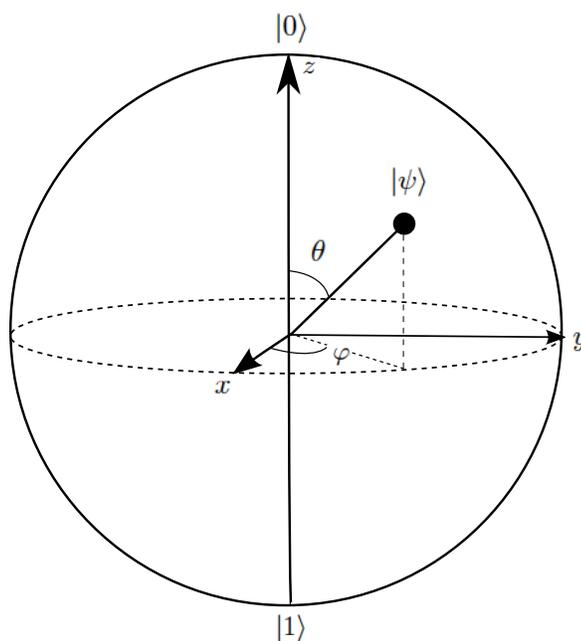


Figura 1. Esfera de Bloch

En principio, el vector del qubit puede apuntar en cualquier dirección, lo que nos lleva a que teóricamente puede almacenar infinita información. Sin embargo, el teorema de no clonación impide que podamos copiar (leer) los estados del qubit extrayendo toda la información que contiene. Una vez que realicemos una medición sobre uno de los estados, el sistema completo colapsa a ese estado, de tal forma, que de una medición sólo obtenemos el equivalente a un bit de información del estado en el que el qubit se encuentra. Los qubits pueden ser modelados por cualquier sistema con dos grados de libertad. Como grados de ocupación en sistemas de carga, el espín de un electrón, el momento magnético de un electrón, polarización de fotones. Particularmente en nuestro trabajo utilizaremos para modelar qubits híbridos con un grado de libertad de espín y otro de carga. La representación en la base computacional, nos proporciona los vectores base de dos dimensiones en el espacio de Hilbert que son distinguibles, que denotaremos con los estados en representación matricial:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

II.3 Compuertas cuánticas

La computación clásica se encuentra constituida por compuertas lógicas de forma análoga a la computación clásica, las cuales realizan las operaciones necesarias para manipular la información de los estados cuánticos (Nielsen y Chuang, 2000). En los sistemas cuánticos son denominadas compuertas cuánticas.

Las compuertas son operadores lineales de evolución temporal que mapean un estado cuántico en otro. La evolución temporal del estado de un sistema cuántico cerrado se describe por un operador unitario (Kaye *et al.*, 2007). Es decir, que para cualquier evolución de un sistema cerrado existirá un operador unitario U tal que, si el estado inicial del sistema es $|\psi_1\rangle$, entonces, después de la evolución, el estado del sistema será,

$$|\psi_2\rangle = U |\psi_1\rangle. \quad (5)$$

II.3.1 Compuertas de un qubit

En el área de la computación cuántica cuando un operador de evolución temporal, U , actúa sobre un qubit individual, la denominamos un compuerta de un qubit (unitaria). Estos operadores se pueden representar en un espacio e Hilbert de dos dimensiones como matrices de 2×2

Por ejemplo, consideremos un la compuerta cuántica *NOT*, la cual es un operador unitario que mapea el estado $|0\rangle$ en el estado $|1\rangle$ y viceversa. Como es un operador lineal, puede mapear cualquier combinación lineal de estados de entradas en una combinación

lineal de estados de salida. De esta manera la compuerta *NOT* mapea el estado general

$$\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle, \quad (6)$$

en el estado

$$\alpha_0 |1\rangle + \alpha_1 |0\rangle. \quad (7)$$

Con esta información, podemos construir la la matriz para compuerta *NOT* en la base computacional como,

$$NOT |0\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle. \quad (8)$$

La compuerta *NOT* se define como X , y forma parte de una de las 4 compuertas de Pauli:

$$\begin{aligned} I &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \sigma_X \equiv X &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_Y \equiv Y &\equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_Z \equiv Z &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

La compuerta *Hadamard* genera superposiciones de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ partiendo de cada estado individual. También se le conoce como “la raíz cuadrada de *NOT*”, puesto que $H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ y $H |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. En forma matricial, la compuerta *Hadamard* se define como,

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Otra manera de representar la operación de una compuerta, es mediante un circuito cuántico reversible, como el que se muestra en la figura 2, en donde expresamos la com-

puerta X . Las líneas representan “alambres” que conducen los qubits a la compuerta que realizará las operaciones sobre ellos.

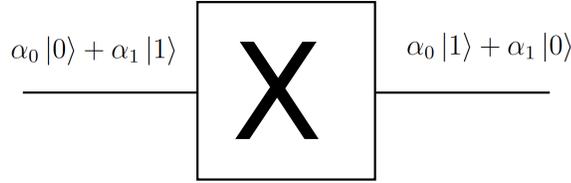


Figura 2. Circuito de la compuerta X , de la ecuación (8).

II.3.2 Base computacional y compuertas de dos qubits

Base computacional

En la computación cuántica, un estado es almacenado en un conjunto de n qubits, análogo a la computación clásica donde la información se almacena en cadenas de n bits. Llamamos base computacional al conjunto de estados independientes, formados por las combinaciones de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de cada qubit, que un sistema de n qubits puede tomar. Es decir, que los estados en la base computacional se definen como,

$$|x\rangle \equiv |x_1 \dots x_n\rangle,$$

$$\text{donde } x = \sum_j x_j 2^{n-j}, \quad (11)$$

$$x \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1}\}, x_j \in \{0, 1\}.$$

Compuertas de dos qubits

Las compuertas descritas hasta ahora involucran sistemas simples de un qubit únicamente. Sin embargo, en nuestro trabajo utilizaremos interacciones de sistemas de dos qubits (compuestos), en los protocolos del código súper denso y teleportación cuántica, por lo que resulta necesario y útil su descripción.

Cuando dos sistemas físicos son tratados como un sistema combinado, el espacio de estados del sistema físico combinado es el producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales $H_1 \otimes H_2$, de los espacios de estados H_1 y H_2 de cada uno de los sistemas que lo componen (Nielsen y Chuang, 2000). Si el primer sistema se encuentra en el estado $|\psi_1\rangle$ y el segundo en el estado $|\psi_2\rangle$, entonces el estado del sistema combinado es,

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad (12)$$

En el caso de un sistema formado por dos qubits, la base completa está compuesta por 2^2 estados, formados por las diferentes combinaciones de los estados individuales, podemos ver la formación de la base completa siguiendo la ecuación (12), sin incluir los coeficientes de las funciones de onda por simplicidad como el producto tensorial de los estados individuales del sistema,

$$(|0\rangle, |1\rangle)_1 \otimes (|0\rangle, |1\rangle)_2 = |00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle, \quad (13)$$

donde los subíndices hacen referencia al sistema 1 y al sistema 2 respectivamente, análogo a la ecuación (12). Asimismo, cada uno de los vectores columna que representan cada estado del sistema estará definido de la siguiente manera:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Por ejemplo, si tenemos un sistema de dos qubits, y aplicaremos la compuerta X al primer qubit. Implícitamente estamos aplicando el operador identidad al segundo qubit al mismo tiempo. Es decir que el dato de entrada $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ es mapeado como

$X|\psi_1\rangle \otimes I|\psi_2\rangle = (X \otimes I)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)$. En otras palabras el operador lineal que describe esta operación sobre el sistema compuesto es,

$$X \otimes I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Aunque esta compuerta actúa sobre un sistema de dos qubits, únicamente actúa de forma no trivial sobre uno de los qubits, por lo que en realidad es una compuerta de 1 qubit. Sin embargo, habrá otros casos, donde la actuación de una compuerta en un sistema no será de forma trivial como es en el ejemplo anterior. Un ejemplo importante de una compuerta de 2 qubits es la compuerta C_{NOT} . Los estados posibles de un sistema de dos qubits son $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. La compuerta C_{NOT} invierte el segundo bit cuando el primero es $|1\rangle$, y no hace nada en otro caso. La representación matricial de esta compuerta es,

$$C_{NOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

En la figura 3 se muestra el circuito equivalente de la compuerta C_{NOT} , de la ecuación (16), donde el qubit $|A\rangle$ es el qubit de control. El valor de $|B\rangle$ es determinado por el valor del bit de control, si es 0, el qubit $|B\rangle$ no sufre cambios, sin embargo, si $|A\rangle$ es 1 entonces $|B\rangle$ es negado.

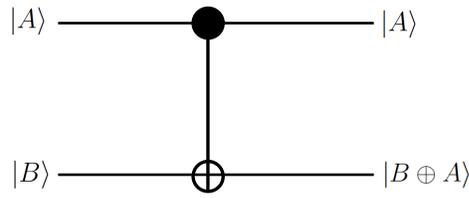


Figura 3. Circuito de la compuerta C_{NOT} , de la ecuación (16).

II.4 Entrelazamiento y base de Bell

El objetivo principal de nuestro trabajo es implementar optimizaciones sobre sistemas que modelan los protocolos de comunicación cuántica, teleportación y código super denso. Ambos protocolos utilizan estados entrelazados y resulta por lo tanto necesario su estudio, caracterización y generación, que se introducen en esta sección.

II.4.1 Entrelazamiento

El entrelazamiento es una propiedad de los sistemas cuánticos, en donde algún estado en particular se encuentra compuesto por dos o más grados de libertad. Dicho estado está conformado de tal manera, que cada uno de sus grados de libertad no pueden describirse de forma independiente de los otros, es decir, que son estados no separables. Tomemos en consideración el estado,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_10_2\rangle + |1_11_1\rangle), \quad (17)$$

donde los subíndices representan a los sistemas 1 y 2 respectivamente. En este estado podemos ver que no es posible separarlo y expresarlo de manera independiente para los subsistemas 1 y 2. Si medimos cualquiera de los dos qubits, obtendríamos de forma aleatoria $|0\rangle$ o $|1\rangle$; sin embargo, siguiendo el estado de la ecuación (17), automáticamente

queda determinado el estado en el que se encuentra el segundo qubit. Así, si medimos $|0\rangle$ en el qubit 1, automáticamente tenemos que el qubit 2 también tiene que ser $|0\rangle$, y de forma análoga para el estado $|1\rangle$.

Vemos que los estados de máximo entrelazamiento, como el de la ecuación (17), no puede expresarse como un producto tensorial, a diferencia de un estado como,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2\rangle + |0_1 1_2\rangle). \quad (18)$$

El estado de la ecuación (18) puede expresarse de forma independiente para cada uno de los subsistemas, como: $|\psi_1\rangle = |0\rangle$, y $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, de tal forma que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

El entrelazamiento es la base de la computación y comunicaciones cuánticas. Son estados cuya no localidad permite implementar operaciones y protocolos de comunicación con transporte de qubits. Esto es debido a que las mediciones en alguno de los subsistemas determinan el estado de los demás subsistemas involucrados.

II.4.2 Estados de Bell

Los estados de Bell, son aquellos estados de un sistema de dos grados de libertad que tienen entrelazamiento máximo. Estos estados no pueden expresarse como un estado independiente, y tienen información respectiva de los demás. En el espacio de dos qubits, los estados de Bell los podemos representar como las combinaciones:

$$|\Phi_{Bell}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (19a)$$

$$|\Phi_{Bell}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 - |1\rangle_1 |1\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \quad (19b)$$

$$|\Psi_{Bell}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (19c)$$

$$|\Psi_{Bell}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (19d)$$

Una propiedad interesante de estos estados es que una vez realizada una medición sobre uno de los estados se determina automáticamente el otro. Por ejemplo, si realizamos una medición en el primer qubit del estado de bel de la ecuación (19c), y obtenemos que su valor es $|0\rangle_1$, entonces el valor del segundo estado será irremediamente un $|1\rangle_2$.

II.4.3 Base de Bell híbrida

De mayor importancia para nuestro trabajo, son los estados que se generan en sistemas híbridos. Ya que proponemos un modelo con grados de libertad de carga y espín para modelar los protocolos de comunicación cuántica. La base de Bell híbrida la mostramos para un sistema, como el que se muestra en la figura 4, el cual tiene dos grados de libertad de carga y dos de espín. Consta de dos sitios para el grado de libertad de carga, $|\Phi_1\rangle$ y $|\Phi_2\rangle$, y cada uno puede tener espín $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$. La función de onda está determinada por,

$$|\varphi\rangle = |\Phi_n\rangle \otimes |s\rangle, \quad (20)$$

donde $|\Phi_n\rangle$ es el grado de libertad de carga, con $n = \{1, 2\}$, y $|s\rangle = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

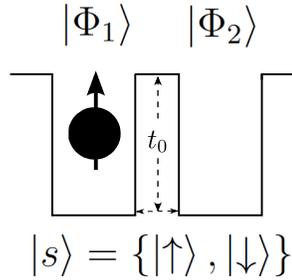


Figura 4. Modelo híbrido de dos puntos cuánticos acoplados con un electrón con espín. La localización del electrón representa el grado de libertad de carga, independientemente al sitio de ocupación, el electrón puede tener espín $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$

Podemos definir la base computacional, considerando estar en el sitio $|\Phi_1\rangle = |1\rangle$ y estar en el sitio $|\Phi_2\rangle = |0\rangle$. Asimismo, consideramos $|\uparrow\rangle = |1\rangle$, y $|\downarrow\rangle = |0\rangle$. Con lo que podemos construir la base completa de dos qubits 2^2 . La base de Bell híbrida queda representada entonces por los estados de máximo entrelazamiento:

$$|\Phi_{Hib}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_2 \downarrow\rangle \pm |\Phi_1 \uparrow\rangle), \quad (21a)$$

$$|\Psi_{Hib}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_2 \uparrow\rangle \pm |\Phi_1 \downarrow\rangle). \quad (21b)$$

II.4.4 Circuito generador de entrelazamiento

Tal como hemos visto que existen estados de máximo entrelazamiento, denominados estados de Bell para sistemas de dos qubits, se vuelve una tarea necesaria el crear dichos estados. Una forma de lograrlo es mediante un circuito cuántico compuesto por una compuerta *CNot* y una compuerta *Hadamard*, como el que se muestra en la figura 5. En el que colocamos en las entradas *a* y *b* los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. El circuito produce como salida uno de los estados de Bell mostrados en la tabla (I).

Tabla I. Estados entrelazados generados por el circuito cuántico de la figura 5, para un sistema de dos qubits

| a | b | Estado entrelazado generado |
|---|---|-----------------------------|
| 0 | 0 | $ \Phi_{Bell}^+\rangle$ |
| 0 | 1 | $ \Psi_{Bell}^+\rangle$ |
| 1 | 0 | $ \Phi_{Bell}^-\rangle$ |
| 1 | 1 | $ \Psi_{Bell}^-\rangle$ |

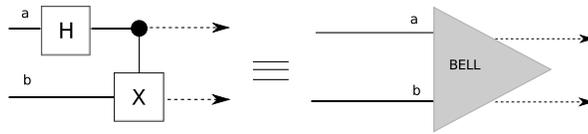


Figura 5. Circuito cuántico que genera estados entrelazados a partir de estados puros aplicados en las entradas a y b . Compuesto por las compuertas *Hadamard* y *CNot*. Las respuestas obtenidas se muestran en la tabla (I).

Por ejemplo, si aplicamos la entrada $|00\rangle$, que es equivalente a poner $|0\rangle$ en a y en b , obtenemos posterior a la Hadamard el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, teniendo el sistema el estado total $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$, posterior a la aplicación de la compuerta C_{NOT} , el estado anterior se convierte en $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, que es el estado $|\Phi_{Bell}^+\rangle$, el cual se muestra en la tabla (I). Similarmente se puede hacer el cálculo para los otros estados de Bell.

II.4.5 Caracterización del entrelazamiento: Concurrencia

Debido a la importancia del entrelazamiento en los sistemas de información cuántica. Se vuelve necesario no sólo ser capaces de crear sistemas con entrelazamiento, sino también, de cuantificar el grado de entrelazamiento de los sistemas (Grover, 2002; Vendra *et al.*, 2001). Lamentablemente no es una tarea sencilla. La primera de las medidas de entrelazamiento es la entropía de Von Neumann (Audretsch, 2007; Guerrero Moreno, 2008) o entropía de entrelazamiento, la cual emplea la matriz de densidad reducida de cualquiera de los subsistemas; si el sistema, está formado por estados separables esta medida es cero, mientras que para estados con entrelazamiento máximo es $\ln 2$.

La concurrencia es una medida auxiliar en el cálculo del entrelazamiento de formación en sistemas bipartitos (Hill y Wootters, 1997). Un grado de máximo de entrelazamiento se caracteriza por una concurrencia de 1, del mismo modo un par de sistemas sin entrelazamiento (separables) tienen un valor de concurrencia de 0. Todos los estados de la base de Bell tienen concurrencia $C = 1$, mientras que los de la base

computacional tienen concurrencia $C = 0$.

Consideramos un sistema de dos niveles como la combinación lineal de sus funciones base,

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle. \quad (22)$$

La concurrencia se define a partir de la invarianza a la transformación:

$$C(\psi) = |\langle\psi|\widehat{\psi}\rangle|, \quad (23)$$

la inversión de estado de un sistema de dos qubits se define por,

$$|\widehat{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad (24)$$

lo que simplifica la concurrencia una vez realizadas las operaciones para la base computacional como,

$$C(\psi) = 2|b^*c^* - a^*d^*|. \quad (25)$$

Por ejemplo, si realizamos el cálculo para el estado de Bell mostrado en la ecuación (19c), vemos que en la base computacional, los valores de los coeficientes son $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con $c = d = 0$. Calculando la concurrencia definida en la ecuación (25), $C(\psi) = 2|0 * 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}}| = 1$. De la misma forma los otros estados de Bell tienen concurrencia 1.

II.4.6 Caracterización del entrelazamiento: descomposición y número de Schmidt

La descomposición de Schmidt es útil en la cuantificación de entrelazamiento entre un sistema de 2 grados de libertad y otro de n grados de libertad (Audretsch, 2007; Ekert y Knight, 1995).

Para ejemplificarlo, imaginemos dos sistemas cuyos espacios son H_u y H_v . Del cual el espacio del sistema compuesto se conforma por $H_u \otimes H_v$. El número de Schmidt evalúa el número de coeficientes no nulos de la descomposición de Schmidt, que es la expansión $g_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$, como la función de onda,

$$|\psi\rangle = \sum_i g_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle. \quad (26)$$

La matriz densidad está dada por $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. El teorema de la descomposición de Schmidt establece que existirá una expansión lineal como en la ecuación (26). Se elige u_i de tal forma que la matriz de densidad reducida del sistema, $\hat{\rho}_u$ sea diagonal, al satisfacerse estas condiciones, la ecuación se puede escribir como,

$$\hat{\rho}_u = \sum_i |g_i|^2 |u_i\rangle\langle u_i|, \quad (27)$$

de esta manera, podemos cuantificar el entrelazamiento entre un sistema de dos grados de libertad y otro de n grados de libertad, con los eigenvalores de cualquiera de las matrices reducidas del sistema. Resulta evidente que éstas matrices reducidas serán de dimensiones 2×2 . La manera propuesta por Grobe y colaboradores (Grobe *et al.*, 1994), para cuantificar el grado de entrelazamiento de un sistema con estas características la podemos apreciar en la ecuación,

$$K = \frac{1}{Tr_u\{(\rho^u)^2\}} = \frac{1}{Tr_v\{(\rho^v)^2\}} = \frac{1}{\sum_i g_i^2}. \quad (28)$$

En la ecuación (28), u y v representan a los dos subsistemas, y g_i los eigenvalores de cualquiera de las matrices reducidas del sistema, mientras que Tr_u y Tr_v son las trazas parciales de la matriz de densidad de reducida sobre el subsistema u y v respectivamente.

II.5 Protocolos de comunicación cuántica

En la base de toda operación cuántica, se encuentra la necesidad de la comunicación cuántica. Los resultados de cualquier operación que se realice deberán ser transmitidos, ya sea dentro de la misma “computadora cuántica”, es decir, la serie de compuertas o circuitos que conforan las operaciones que estamos realizando; o hacia terceras entidades, como información a enviar por un canal de comunicación. Abordaremos dos protocolos de comunicación básicos: teleportación cuántica y código súper denso.

II.5.1 Teleportación cuántica

Fue propuesto por Bennett y colaboradores (Bennett *et al.*, 1993). Este protocolo permite a Alice enviar a Bob un estado cuántico haciendo uso de un sistema entrelazado compartido entre ellos y de un canal clásico. Partimos del escenario donde Alice quiere enviar la información contenida en un qubit a Bob, y únicamente cuentan con canal clásico de comunicación. Saltan dos opciones a la vista, enviar el qubit hasta Bob, tal cual; o enviar las amplitudes complejas de los estados $|0\rangle, |1\rangle$ del qubit en cuestión. Sin embargo; si comparten un estado entrelazado, esto cambia, y es posible enviar el estado exacto del qubit a transmitir mediante el canal clásico.

De esta forma, el protocolo de teleportación cuántica permite a Alice, enviar a Bob, el estado cuántico de un qubit enviando clásicamente sólo dos bits. Supongamos que Alice y Bob comparten un estado de la Base de Bell,

$$|\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (29)$$

y que Alice posee además un qubit que desea enviar a Bob, caracterizado por el estado:

$$|\varphi_C\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (30)$$

El estado total del sistema está dado por

$$|\varphi_C\rangle |\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |0_C 0_A 0_B\rangle + \alpha |0_C 1_A 1_B\rangle + \beta |1_C 0_A 0_B\rangle + \beta |1_C 1_A 1_B\rangle). \quad (31)$$

Podemos expresar cada uno de los estados de la base computacional como una combinación lineal de los estados de la base de Bell. Por ejemplo, podemos formar el estado $|00\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)) = |00\rangle$, del mismo modo podemos expresar la base computacional completa. Expresándolo para el subsistema formado por las partículas A y C , que se muestran en la ecuación (31):

$$\begin{aligned} |0_C 0_A\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Phi_{CA}^+\rangle + |\Phi_{CA}^-\rangle), \\ |0_C 1_A\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Psi_{CA}^+\rangle + |\Psi_{CA}^-\rangle), \\ |1_C 0_A\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Psi_{CA}^+\rangle - |\Psi_{CA}^-\rangle), \\ |1_C 1_A\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Phi_{CA}^+\rangle - |\Phi_{CA}^-\rangle). \end{aligned} \quad (32)$$

Sustituyendo las equivalencias de la ecuación (32) en (31), obtenemos,

$$\begin{aligned} |\varphi_C\rangle |\Phi_{AB}^+\rangle &= \frac{1}{2}(\alpha(|\Phi_{CA}^+\rangle + |\Phi_{CA}^-\rangle) |0\rangle + \alpha(|\Psi_{CA}^+\rangle + |\Psi_{CA}^-\rangle) |1\rangle \\ &+ \beta(|\Psi_{CA}^+\rangle - |\Psi_{CA}^-\rangle) |0\rangle + \beta(|\Phi_{CA}^+\rangle - |\Phi_{CA}^-\rangle) |1\rangle). \end{aligned} \quad (33)$$

Agrupando los estados entrelazados:

$$\begin{aligned} |\varphi_C\rangle |\Phi_{AB}^+\rangle &= \frac{1}{2}(|\Phi_{CA}^+\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |\Psi_{CA}^+\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) \\ &+ \frac{1}{2}(|\Psi_{CA}^-\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) + |\Phi_{CA}^-\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)). \end{aligned} \quad (34)$$

Utilizaremos $|\varphi^B\rangle$, para denotar el mismo estado que Alice quería enviar $|\phi^C\rangle$, pero en el lado de Bob. Se ve claramente que se sólo es necesario realizar algunas transformaciones unitarias en el estado que posee Bob para recuperar el estado original, que dependerán de la medición que haya realizado Alice. Son estas transformaciones

las que indicará Alice a Bob utilizando un canal clásico. Podemos representar el estado final como,

$$|\varphi_C\rangle |\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{2}(|\Phi_{CA}^+\rangle |\varphi_B\rangle + |\Psi_{CA}^+\rangle X_B |\varphi_B\rangle + |\Psi_{CA}^-\rangle (X_B Z_B) |\varphi^B\rangle + |\Phi_{CA}^-\rangle Z_B |\varphi^B\rangle), \quad (35)$$

en este resultado aparecen los operadores X, Z , que son los operadores de Pauli, lo cual nos muestra que el estado recibido por Bob deberá ser sometido a una de estas operaciones dependiendo de la medida que Alice realice sobre sus dos estados conjuntos. El resultado de la medida realizada por Alice en la base de Bell, constituye los dos bits clásicos que ésta envía a Bob, sobre los cuales, Bob, realiza la transformación unitaria correspondiente para reproducir el estado original.

El circuito cuántico equivalente se muestra en la figura 6, donde podemos apreciar que Alice quiere enviar el estado $|\varphi_C\rangle$ a Bob, utilizando el estado entrelazado compartido mostrado en la ecuación (148). Alice realiza una medición a los dos qubits que posee en la base de Bell, y le envía a Bob mediante un canal clásico los dos bits equivalentes al resultado de la medición, sobre los cuales, Bob aplica las transformaciones unitarias correspondientes para recuperar el estado original, ahora llamado φ_B .

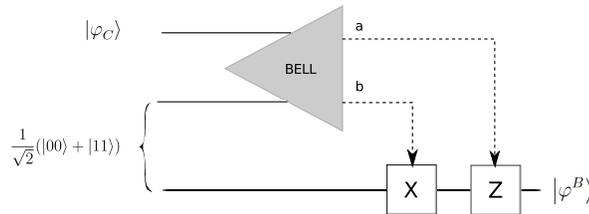


Figura 6. Circuito para implementar el protocolo de teleportación cuántica. Las dos líneas superiores representan los qubits que Alice posee, mientras que la línea inferior representa el qubit de Bob. Alice está en posesión del estado φ , y comparte con Bob un estado entrelazado, a y b son los bits clásicos que envía a Bob, sobre los cuales, Bob realiza las operaciones X o Z para recuperar el estado original. En esta figura las líneas a y b representan el canal clásico que Alice envía a Bob para indicarle la transformación unitaria que debe realizar.

En este circuito se ha incluido, la equivalencia para una medición realizada en la base de Bell, como se ilustra en la figura

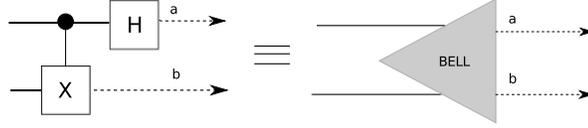


Figura 7. Circuito para realizar una medición en la Base de Bell, con su equivalencia simplificada

II.5.2 Código super denso

Fue propuesto por Bennett y colaboradores (Bennett y Wiesner, 1992). En este protocolo se busca transmitir dos bits de información clásica utilizando únicamente un qubit. El protocolo resulta sencillo. Parte de compartir un estado entrelazado entre dos sitios A (Alice) y B (Bob), que puede ser cualquiera de la base de Bell como,

$$|\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (36)$$

Suponemos que Alice está en posesión del primer qubit y que Bob tiene el segundo. Alice realiza una de las cuatro compuertas de 1 qubit descritas en la ecuación (9), dependiendo de los dos bits clásicos que desee comunicar a Bob. Como se demuestra en la ecuación siguiente, se pueden establecer las siguientes operaciones que permitan transmitir los 2 bits clásicos utilizando un qubit:

$$\begin{aligned} 00 &\rightarrow (I_A \otimes I_B) |\Phi_{AB}^+\rangle = |\Phi_{AB}^+\rangle, \\ 01 &\rightarrow (X_A \otimes I_B) |\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) = |\Psi_{AB}^+\rangle, \\ 10 &\rightarrow (Y_A \otimes I_B) |\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) = |\Psi_{AB}^-\rangle, \\ 11 &\rightarrow (Z_A \otimes I_B) |\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\Phi_{AB}^-\rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Esto se puede representar gráficamente con el circuito mostrado en la figura

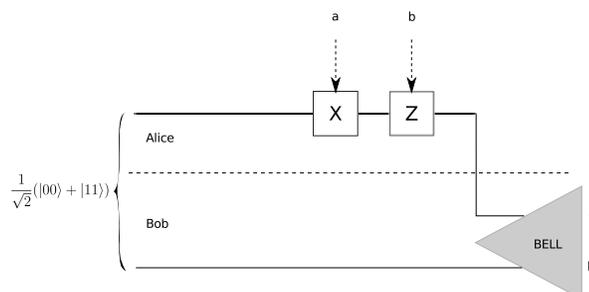


Figura 8. Circuito para implementar el protocolo del código súper denso. Inicialmente Alice y Bob comparten un estado entrelazado, Alice realiza las operaciones X, Z dependiendo de los bits a, b que desee enviar a Bob, luego Alice envía su qubit a Bob, y éste, mide en la base de Bell para recuperar los bits a, b que Alice deseaba enviarle.

De esta forma puede verse como realizando transformaciones unitarias, únicamente del lado de Alice, es posible realizar cambios en el estado compartido. Posteriormente se envía la partícula que tiene Alice a Bob, en otras palabras, se envía el qubit que posee Alice y Bob realiza una medición en la Base de Bell, para saber cuál fue la operación que realizó Alice y de esta manera decodificar el mensaje de dos bits clásicos codificados en el envío de un qubit. Nótese que aunque sólo un qubit es enviado, es necesaria la medición de los dos para obtener el mensaje que se quería transmitir.

II.6 Interacción espín-órbita

En nuestro trabajo utilizaremos sistemas híbridos entrelazados en puntos cuánticos, por lo que para generar dichos estados es necesario que exista la propiedad de tunelaje entre sitios con cambio de espín. Ésta es promovida por la interacción espín órbita. La cual es una interacción entre el grado de libertad de carga del electrón (ocupación) y el grado de libertad de espín.

El espín es una propiedad física de las partículas subatómicas, como el caso de los

electrones. Junto con la masa y la carga eléctrica, el momento angular magnético es una propiedad intrínseca de éstos. La idea fue inicialmente introducida en 1925 por George Uhlenbeck y Samuel Goudsmit (Merzbacher, 1998).

La interacción espín-órbita es la interacción magnética entre un momento magnético de espín y un momento magnético orbital. El acoplamiento espín-órbita, es el acoplamiento entre estos momentos magnéticos. En el caso de un electrón, la interacción espín órbita está dada por la interacción magnética de su espín y su movimiento alrededor del núcleo. En un marco relativista, el giro del electrón que tiene un campo eléctrico en movimiento genera campos magnéticos que interactúan con su momento magnético, produciendo pérdida de estados de espín arriba y abajo.

Estos estados de espín en un electrón los representamos como un espacio de Hilbert de dos estados, donde $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ representan la orientación de la componente z del vector de espín.

En los sistemas de estado sólido, los efectos del acoplamiento espín-órbita son denominados como campos de Dresselhaus o Rashba, dependiendo de si los campos eléctricos se originan de la asimetría de inversión del bulto o estructural, respectivamente (Meier *et al.*, 2007). En las estructuras cristalinas tipo zinc-blenda, como el GaAs, el campo eléctrico resultante de la ausencia de inversión central conduce a la asimetría de inversión de bulto (BIA, *bulk inversión asymetry*) y por lo tanto al acoplamiento tipo Dresselhaus. En las heteroestructuras, aparecen campos eléctricos adicionales correspondientes a la asimetría de inversión estructural (SIA, *structure inversion asymetry*), dando lugar al acoplamiento de Rashba.

Para el desarrollo de la interacción espín-órbita, nos basamos en el análisis introducido por Perel, *et. al.* (Perel *et al.*, 2003), que presenta una dependencia de espín a través del tunelaje. El Hamiltoniano de una barrera, considerando la masa efectiva, es

el propuesto por Dresselhaus,

$$\widehat{H}_{Dr} = \gamma[\sigma_x k_x (k_y^2 - k_z^2) + \sigma_y k_y (k_z^2 - k_x^2) + \sigma_z k_z (k_x^2 - k_y^2)], \quad (38)$$

donde σ_x , σ_y , σ_z , son las matrices de Pauli, γ es una constante del material, y las coordenadas x, y, z se asume son paralelas a los ejes cristalográficos [100], [010], [001], respectivamente. Tomando el tuneo a lo largo del eje z , podemos considerar a k_z en el Hamiltoniano como un operador $-i\partial/\partial z$. Asumimos además que la energía cinética de los electrones es mucho más pequeña que la altura de la barrera. El Hamiltoniano se simplifica como,

$$\widehat{H}_{Dr} = \gamma(\sigma_x k_x - \sigma_y k_y) \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (39)$$

en forma matricial lo podemos expresar

$$\widehat{H}_{Dr} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma(k_x + ik_y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \gamma(k_x - ik_y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

también se puede expresar como:

$$\widehat{H}_{Dr} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma|k|e^{i\phi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \gamma|k|e^{-i\phi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

donde $|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ y $\phi = \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x}$.

La ecuación (40), está en la base $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, y nos muestra las probabilidades de transición con cambio de espín.

II.7 Algoritmos Genéticos

En nuestro trabajo queremos lograr llevar un estado inicial de un sistema a otro estado final. Los estados finales que planteamos constan de estados de máximo entrelazamiento

y también la utilización de los mismos aplicados en los protocolos de teleportación y código súper denso.

En cuanto a control, se ha estudiado con técnicas de control retroalimentado recurriendo a un observable que servirá para corregir el error del estado deseado (Xue *et al.*, 2010), también se ha trabajado sobre la optimización de parámetros externos que permitan alcanzar un estado o propiedad deseado, entre cuyas técnicas destaca la utilización de algoritmos genéticos para la optimización (Krause *et al.*, 1998; Navarro-Muñoz *et al.*, 2006).

Los algoritmos genéticos, se basan en una búsqueda evolutiva de los parámetros que permitan optimizar una función. Un diagrama esquemático de esto lo tenemos en la figura 9. Tienen su origen en la selección natural (Darwin, 1859). Ésta, es el proceso en el cual los individuos mejor adaptados a su ambiente tienden a tener más descendencia y por lo tanto conformar mayor número de generaciones que aquellos competidores menos aptos. Se requieren dos ingredientes para que se logre la evolución: herencia y variabilidad. El primero implica la necesidad de que los individuos descendientes deben poseer algo de las características que hicieron que sus padres fueran aptos. El segundo requiere que en cualquier momento dado, exista un rango de adaptabilidad de los miembros de la población, para que la selección natural opere.

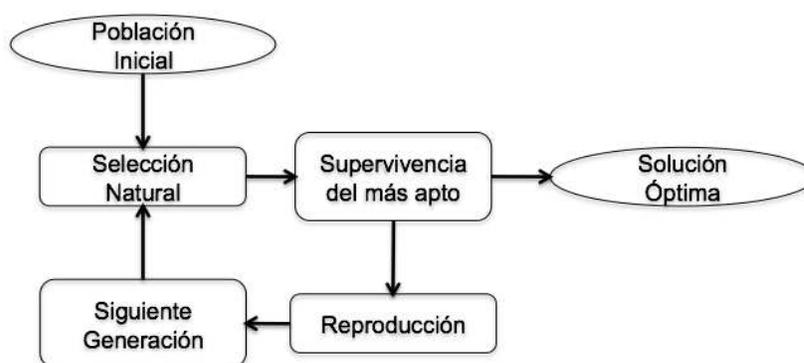


Figura 9. Métodos evolutivos. Esquema general del algoritmo genético utilizado

La herencia la podemos explicar en los individuos biológicos como el traspaso de material genético de generación en generación. El fenotipo de un individuo describe sus características físicas y probablemente su comportamiento. Estas características se encuentran codificadas en secuencias de genes provenientes de ambos padres, almacenadas en los cromosomas, los cuales constituyen el genotipo. En la producción de nuevas generaciones, dos padres se unen compartiendo su material genético, otorgando al fenotipo descendiente características de ambos.

El entrecruzamiento, es por lo tanto, la compartición de material genético de los padres al formar una nueva generación. En este proceso combinatorio, pueden ocurrir errores de copiado o transferencia de información, genes, lo que lleva a mutaciones del genotipo.

Los algoritmos genéticos introducidos por primera vez por John Holland (Holland, 1975), son una adaptación computacional del proceso biológico evolutivo. Estrictamente hablando, no realizan una optimización de forma matemática, sino que permiten que sólo los elementos aptos vayan sobreviviendo.

Mayormente difundidos se encuentran los métodos variacionales, donde una forma funcional de la solución se puede deducir, por razones de simetría, intuición, o prueba y

error. Luego los parámetros de la solución propuesta son variados con el fin de minimizar la energía del sistema, por ejemplo. Hay otros casos, en que adivinar la solución es mucho más complejo, pues más parámetros se encuentran involucrados. Por ejemplo en la solución de un potencial cuántico, mediante la expansión de la función de onda como una combinación lineal de las funciones base, la cual forma una matriz. Tomando los elementos desconocidos como parte del cálculo variacional, se vuelve complicado, ya que las dimensiones de las matrices pueden ser muy grandes.

Los métodos evolutivos, como los algoritmos genéticos, tratan los parámetros variables como genes, y la solución completa como un genoma. Se dice por lo tanto, que las posibles soluciones están sujetas a la selección natural, de tal manera que los individuos (los parámetros b) mejor adaptados a su ambiente (la función *fitness*) producirán más generaciones de individuos, conformando más soluciones potenciales.

Mostraremos la utilización de los algoritmos genéticos con un caso sencillo. Supongamos que queremos las eigenfunciones de un sistema, para un estado dado, sabemos que las soluciones serán aquellas que minimicen la energía, calculada como,

$$E = \frac{\langle \Psi^* | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi^* | \Psi \rangle}, \quad (42)$$

en este caso, los genes son los coeficientes de expansión a_j de una función de onda expresada como una combinación lineal de los mismos, y cada función de onda $|\Psi\rangle$ que los contiene como un genoma, o un individuo, como en la ecuación (52).

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^n a_j |\varphi_j\rangle \quad (43)$$

El algoritmo genético comienza generando diversas soluciones aleatorias como número de individuos tenga cada generación. Si fueran dos individuos por generación tendríamos en total dos individuos. Expresados como $|\Psi_{individuo}^{generacion}\rangle = \sum_{j=1}^n a_{individuo,j}^{generacion} |\varphi_j\rangle$, los

cuales son:

$$\begin{aligned} |\Psi_1^1\rangle &= \sum_{j=1}^n a_{1,j}^1 |\varphi_j\rangle, \\ |\Psi_2^1\rangle &= \sum_{j=1}^n a_{1,j}^2 |\varphi_j\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Para la producción de nuevas generaciones donde los padres se unen para crearlas. Las uniones suceden coeficiente por coeficiente, es decir, que el a_1^1 se apareará con el a_1^2 es decir el coeficiente 1 de la generación 1 y el coeficiente 1 de la generación 2. Supongamos que los coeficientes son

$$\begin{aligned} a_{1,1}^1 &= 1234, \\ a_{1,1}^2 &= 6789, \end{aligned} \quad (45)$$

, el entrecruzamiento generará nuevos individuos con parte del material genético de los padres como,

$$\begin{aligned} a_{2,1}^1 &= 1289, \\ a_{2,1}^2 &= 6734. \end{aligned} \quad (46)$$

A su vez en cada entrecruzamiento, existe una probabilidad de mutación que haría que cualquiera de los genes, se modificara de forma aleatoria, de tal manera que los individuos que conforman la nueva generación podrían sufrir algún cambio y mutar aleatoriamente en cualquier posición también aleatoria. Como por ejemplo $a_{2,1}^1 = 1589$, en donde la posición 2 de la cadena numérica fue mutada a 5. Así estos nuevos individuos formarán parte de la nueva generación que será,

$$|\Psi^2\rangle = \sum_{j=1}^n a_{2,j} |\varphi_j\rangle. \quad (47)$$

Como vimos en el diagrama mostrado en la figura 9, el algoritmo genético genera una familia de soluciones posibles por generación, de las cuales sólo son consideradas para

entrecruzamiento las que son más aptas, es decir, las que se acercan más a la función objetivo establecida, para el caso ejemplo de la obtención de las eigenfunciones de un sistema para un estado dado, son aquellas ecuaciones de onda cuyos coeficientes de expansión dan como resultado menores energías. El ejemplo tiene por función objetivo una optimización donde se buscan los mínimos. Los resultados que sobreviven para las siguientes generaciones son entonces, aquellos de mayor optimalidad o menor energía. Una vez seleccionadas las soluciones más aptas sucede la reproducción, que como vimos en el ejemplo, consta del entrecruzamiento de las soluciones mejor adaptadas, o aquellas que están más cerca del valor óptimo. Como consecuencia, sobreviene la siguiente generación y el proceso continúa hasta que una cantidad de generaciones preestablecida es alcanzada, o una solución cuya optimalidad está lo suficientemente cerca del valor buscado.

En nuestro trabajo utilizamos la subrutina de propósito general PIKAIA basada en un algoritmo genético, desarrollada por Carboneau y colaboradores (Carbonneau y Knapp, 1995; Carbonneau, 1995). Esta subrutina en fortran, maximiza una función especificada por el usuario, cuyo nombre es pasado como un argumento. Cuenta con dos operadores genéticos básicos: entrecruzamiento y mutación uniformes. Dispone de tres planes de reproducción: reemplazo generacional completo, en el que las generaciones nuevas no conservan individuos de la anterior; generaciones constantes con borrado aleatorio, el cual mantiene algunos elementos de la generación anterior en la nueva y borra los demás escogidos de manera aleatoria; generaciones constantes con borrado de los peores, este es el plan que utilizamos, pues permite formar las generaciones sólo con los individuos mejor adaptados. La función de elitismo está activa por defecto, brindando mayor probabilidad de entrecruzamiento a los individuos mejor adaptados. El porcentaje de mutación ofrece un control dinámico con el monitoreo de la diferencia

en la adaptabilidad entre el mejor individuo y el promedio de la población. La selección para la reproducción un proceso estocástico basado en los rangos de optimalidad de los individuos, es decir que se seleccionan aleatoriamente a los individuos para crianza, pero aquellos mejor adaptados tienen mayor probabilidad de sobrevivir.

Específicamente, utilizamos 400 generaciones con 100 individuos por generación, una probabilidad de entrecruzamiento del 85% y 15% de mutación.

II.8 Solución de sistemas dinámicos por integración numérica

En nuestro trabajo modelaremos puntos cuánticos con interacciones dependientes del tiempo, ya que buscamos manipular los pulsos que controlarán las probabilidades de tuneo entre sitios de forma dinámica. Estos pulsos son parte del Hamiltoniano del sistema, y para determinar la evolución temporal del mismo, será necesario resolver la ecuación de onda de Schrödinger dependiente del tiempo.

II.8.1 Ecuación de onda de Schrödinger

La ecuación de onda de Schrödinger, vincula la función de onda con las variables dinámicas de las partículas. Donde, la función de onda de una partícula está relacionada con la probabilidad de encontrarla en un estado a un tiempo determinado. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo tiene la expresión,

$$H\Psi = E\Psi. \quad (48)$$

Si queremos calcular la evolución temporal de este sistema independiente del tiempo, partimos de la idea de que el comportamiento dependiente del tiempo de los estados

estará determinado por el operador de evolución temporal U (Sakurai, 1993), el cual aplicado sobre los estados iniciales del sistema $|\Psi(t=0)\rangle$ nos permitirá calcular los estados posteriores de la siguiente manera,

$$|\Psi(t)\rangle = U |\Psi(t=0)\rangle, \quad (49)$$

en donde el operador de evolución temporal para el caso de un Hamiltoniano independiente del tiempo se expresa como,

$$U = e^{-iH/\hbar t}. \quad (50)$$

La ecuación de onda dependiente del tiempo se define como,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(t). \quad (51)$$

Si expresamos la función de onda como una combinación lineal de todos los estados independientes que la forman tenemos,

$$\Psi(t) = \sum_i \alpha_i(t) \psi_i, \quad (52)$$

donde $\alpha_i(t)$ son los coeficientes de expansión de la función de onda en la base $|\psi_i\rangle$ dependientes del tiempo.

Sustituyendo (52) en (51), obtenemos la expresión,

$$i\hbar \dot{\alpha}_j(t) = \sum_i H_{j,i} \alpha_i(t). \quad (53)$$

Obtenemos así, en la ecuación (53) una expresión que representa la solución de los coeficientes de expansión como un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales acopladas.

II.8.2 Integración numérica mediante el método Runge Kutta de orden 4

En la sección anterior vimos que el sistema dinámico a resolver se puede expresar como una serie de ecuaciones diferenciales lineales acopladas, ecuación (53), de tal forma que para determinar el comportamiento dinámico del sistema será necesario resolver la evolución temporal de dicho sistema. Para la solución del hamiltoniano dependiente del tiempo es necesario realizar la integración de las ecuaciones diferenciales simultáneas dependientes del tiempo que conforman un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Debido a que algunas de las funciones que proponemos en nuestro modelo no tienen una integración analítica exacta, recurrimos al método de integración Runge Kutta (Press *et al.*, 1992), el cual es un método iterativo para la aproximación de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial dado. Utilizamos el método Runge Kutta de cuarto orden (RK4). Definimos el problema de valor inicial como,

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (54)$$

Entonces, el método RK4 para este problema está dado por la ecuación,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h, \quad (55)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right), \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{aligned} \quad (56)$$

Así, el siguiente valor y_{n+1} es determinado por el presente valor y_n más el producto

del tamaño del intervalo h por una pendiente estimada, esto lo podemos apreciar en la figura 10. La pendiente es un promedio ponderado de las pendientes:

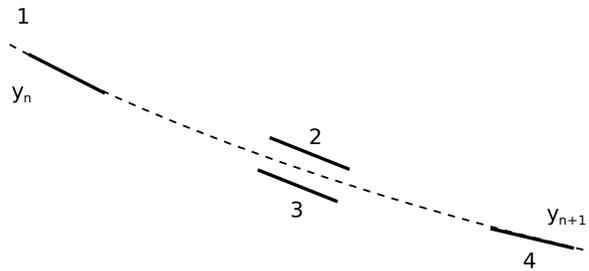


Figura 10. Método de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias Runge Kutta de orden 4. En cada paso, la derivada se evalúa cuatro veces: una en el punto inicial, dos en puntos centrales de prueba, y otra en el punto final. Utilizando estas derivadas, se calcula la función mostrada en la línea punteada.

k_1 es la pendiente al principio del intervalo, k_2 es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando k_1 para determinar el valor de y y en el punto $x_n + \frac{h}{2}$, utilizando el método de Euler, k_3 es nuevamente la pendiente del punto medio, pero ahora usando k_2 para determinar el valor de y , k_4 es la pendiente al final del intervalo, con el valor de y determinado por k_3 .

Se promedian las cuatro pendientes, asignando mayor peso a las pendientes en el punto medio como se muestra en la ecuación (55). Esta forma del método de Runge-Kutta, es un método de cuarto orden, lo que significa que el error por paso de integración es del orden de $O(h^5)$, mientras que el error total acumulado tiene el orden $O(h^4)$.

Con el objetivo de probar el algoritmo de integración numérica, se plantea el Hamiltoniano sencillo mostrado en la ecuación,

$$H = \begin{bmatrix} E & t_0 & 0 \\ t_0 & E & t_0 \\ 0 & t_0 & E \end{bmatrix}, \quad (57)$$

este Hamiltoniano describe la dinámica de un sistema como el mostrado en la figura 11, conformado por tres puntos cuánticos acoplados con energías E , que hemos denominado sitio izquierda, centro y derecha, $|\Phi_I\rangle, |\Phi_C\rangle, |\Phi_D\rangle$ respectivamente. Consideramos las energías de los sitios iguales y cero para simplicidad del cálculo, así como una probabilidad de tuneleo definida por t_0 que para propósitos particulares definiremos como $t_0 = 0.01$. La función del onda de este sistema esta dada en la ecuación (58). Suponemos que inicialmente colocamos un electrón sin espín en el sitio izquierda y dejamos que el sistema evolucione,

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_1(t) |\Phi_I\rangle + \alpha_2(t) |\Phi_C\rangle + \alpha_3(t) |\Phi_D\rangle, \quad (58)$$

donde $|\alpha_n|^2$ con $n = \{1, 2, 3\}$ representa la probabilidad de encontrarse en cada uno de los sitios izquierda, centro y derecha, respectivamente.

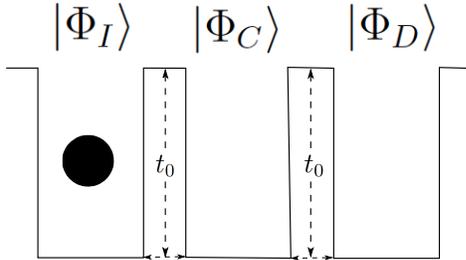


Figura 11. Modelo de tres puntos cuánticos acoplados, izquierda, centro y derecha, con una probabilidad de tuneleo t_0 , donde colocamos inicialmente un electrón sin espín en el sitio izquierda.

La solución numérica se obtiene al evaluar la integración de las ecuaciones diferenciales acopladas del Hamiltoniano del sistema que están dadas por,

$$i\hbar\dot{\alpha}_j(t) = \sum_i H_{j,i}\alpha_i(t). \quad (59)$$

La solución analítica se obtiene mediante el operador de evolución temporal,

$$U = e^{\frac{iH}{\hbar}t}, \quad (60)$$

por lo que calculamos el eigensistema del Hamiltoniano de la ecuación (57), cuyas eigenenergías son:

$$\{0, -i\sqrt{2}t_0, i\sqrt{2}t_0\}, \quad (61)$$

con los eigenvectores:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Mostramos los resultados de la evolución temporal de los coeficientes de expansión obtenidos por el método de integración Runge Kutta de orden 4, en la figura 12, comparados los obtenidos por el método analítico calculando el operador de evolución temporal. La evolución del sistema está dada entonces por,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{bmatrix} = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{c_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\sqrt{2}t_0t} + \frac{c_3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\sqrt{2}t_0t}, \quad (63)$$

sujeto a la condición inicial $\alpha_1(0) = 1, \alpha_2(0) = 0, \alpha_3(0) = 0$, que es equivalente a colocar un electrón sin espín en el sitio 1 y dejar que el sistema evolucione. Obtenemos entonces las constantes:

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2}. \quad (64)$$

En la figura 12, se muestra la evolución del sistema bajo la solución obtenida en la ecuación (63), y se compara con la solución numérica utilizando el algoritmo Runge Kutta. Se obtienen resultados con un errores del orden de 10^{-6} , el error que podemos apreciar en la gráfica en los puntos mínimos se debe al tiempo de muestreo para generar la curva del método numérico.

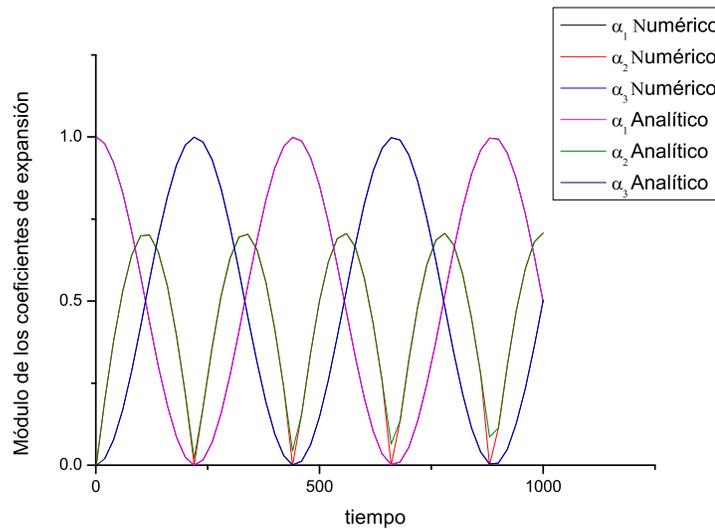


Figura 12. Comparación del módulo de los coeficientes de expansión de la función de onda descrita en la ecuación (58), en negro, rojo y azul se muestran los resultados de la solución numérica de la ecuación (59), mientras que en rosa, verde y azul fuerte se muestran los correspondientes a la solución analítica de la ecuación (63).

II.9 Control Cuántico

Lo que queremos lograr es llevar al sistema de un estado inicial a un estado final deseado mediante pulsos dependientes del tiempo, por lo que será necesario establecer un esquema de control que ayude a lograr este propósito.

El principal problema de la computación cuántica radica en la necesidad de poder obtener estados cuánticos de forma independiente. Se vuelve necesario algún método de control que permita llevar un sistema dado a un estado deseado, desde el cual se puedan realizar otras operaciones que sean útiles para el procesamiento y comunicación de información. Se propone el siguiente esquema de control:

1. Definir Hamiltoniano:

$$H(t) = H_0 + H_C(t, b), \quad (65)$$

donde H_0 representa el Hamiltoniano del sistema sin perturbar, y $H_C(t, b)$ el Hamiltoniano de control en el que se incluyen los pulsos de control dependientes del tiempo que permiten llevar al sistema a un estado final deseado.

2. Donde b son los parámetros a controlar:

$$b = b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \quad (66)$$

utilizados para optimizar la función objetivo.

3. Se define la cantidad a optimizar, como una función objetivo a un tiempo de medición dado por,

$$fitness = |\langle \psi_{objetivo} | \Psi_{sistema}(t = t_{medicion}) \rangle|^2, \quad (67)$$

donde la función objetivo, Ψ_{obj} es el estado deseado de la función de onda del sistema al tiempo de medición.

4. Solución: integración de la ecuación de onda de Schrödinger dependiente del tiempo al tiempo de medición.
5. Aplicación del algoritmo de control para determinar el espacio de parámetros b que optimizan la función *fitness*

La función *fitness* recibe ese nombre por consecuencia de la adaptabilidad de los sistemas biológicos a la supervivencia. Esto es debido a que los parámetros b que forman parte del Hamiltoniano van siendo modificados y sólo sobreviven aquellos que se “adaptan” a la función objetivo (fitness).

II.9.1 Determinación de la función objetivo

Para determinar la función objetivo, se realiza la proyección de la función del sistema al tiempo de medición sobre la función objetivo buscada. La función de onda del sistema, expresada como la combinación lineal de los coeficientes de expansión, en la base $|\phi_i\rangle$, está determinada como,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_i \alpha_i(t) |\phi_i\rangle, \quad (68)$$

y la definiremos la función objetivo en términos de la misma base, con coeficientes β_i al tiempo de medición como,

$$|\Psi_{obj}(t = t_{med})\rangle = \sum_i \beta_i |\phi_i\rangle. \quad (69)$$

La función objetivo viene dada por la proyección de la función de onda del sistema al tiempo de medición sobre la función de onda objetivo,

$$\begin{aligned} f &= |\langle \Psi_{obj} | \Psi(t = t_{med}) \rangle|^2, \\ f &= \left| \sum_i \beta_i^* \alpha_i \right|^2. \end{aligned} \quad (70)$$

II.9.2 Ejemplo de aplicación del esquema de control por algoritmos genéticos

Triple punto cuántico: Transporte de Carga

Una primer ejemplo de la aplicación del esquema de control por algoritmos genéticos se presenta en esta sección con el propósito de ilustrar de manera sencilla su aplicación que sirve como base para todo el desarrollo del presente trabajo.

Supongamos que contamos con un triple punto cuántico como se ilustra en la figura 13, donde la base $|\Phi_I\rangle, |\Phi_C\rangle, |\Phi_D\rangle$ denota los sitios de ocupación izquierda, centro y derecha respectivamente. Inicialmente colocamos una partícula sin espín en el sitio

izquierda $|\Phi_I\rangle$ y queremos moverla al sitio derecha, para esto, buscamos maximizar la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha $|\Phi_D\rangle$. Podemos además modificar las probabilidades de transición entre sitios, como el tuneleo, con un pulso con forma de onda gaussiana. Buscaremos determinar las características de este pulso que maximicen la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha después de transcurrido el tiempo de medición.

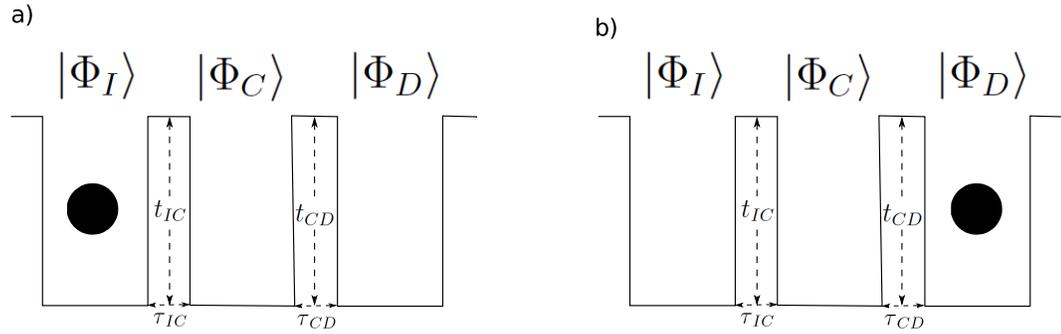


Figura 13. Modelo de un triple punto cuántico, con los sitios $|\Phi_I\rangle, |\Phi_C\rangle, |\Phi_D\rangle$, izquierda, centro y derecha, respectivamente. Una probabilidad de tunelamiento t_0 , determinada por la altura de las barreras. En a) el sistema en su estado inicial, en b) el objetivo al que busca llevarse. Consideramos una partícula sin espín.

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección II.9:

1. Definimos el Hamiltoniano del sistema y el de control como sigue

$$H_T(t, b) = H_0 + H_C(t, b), \quad (71)$$

donde:

$$H_0 = \begin{bmatrix} E & t_0 & 0 \\ t_0 & E & t_0 \\ 0 & t_0 & E \end{bmatrix}, \quad (72)$$

$$H_C(t, b) = \begin{bmatrix} 0 & T_{IC} & 0 \\ T_{IC} & 0 & T_{CD} \\ 0 & T_{CD} & 0 \end{bmatrix},$$

donde el primer Hamiltoniano, H_0 , representa la dinámica sin perturbar de los tres puntos cuánticos con energía de sitio E , la cual consideramos constante y cero para simplicidad de los cálculos, y con un tuneleo t_0 , que define la probabilidad de transición entre sitios.

El Hamiltoniano de control, $H_C(t, b)$, está formado por los pulsos que se aplicarán al sistema, para controlar las probabilidades de transición entre sitios, en la forma de control de la altura y dispersión de las barreras en el tiempo. Esto se logra mediante un pulso gaussiano descrito por las ecuaciones (73). En estas ecuaciones los parámetros de control son $b = \{t_{IC}, t_{CD}, O_{IC}, O_{CD}, \tau_{IC}, \tau_{CD}\}$, donde t_{IC}, t_{CD} representan la altura de las barreras como un factor de t_0 , O_{IC}, O_{CD} , representan el desplazamiento temporal de los pulsos respecto a tiempo cero, y τ_{IC}, τ_{CD} la dispersión, o ancho de las barreras, como podemos apreciar en la figura 14,

$$\begin{aligned} T_{IC}(t) &= t_{IC}t_0 e^{-\frac{(t-O_{IC})^2}{2\tau_{IC}^2}} - t_0 \tanh \frac{(t-O_{IC})^2}{2\tau_{IC}^2}, \\ T_{CD}(t) &= t_{CD}t_0 e^{-\frac{(t-O_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}} - t_0 \tanh \frac{(t-O_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}, \end{aligned} \quad (73)$$

la inclusión de la \tanh se vuelve necesaria para contrarrestar el efecto del tuneleo a un tiempo dado. El sistema está descrito por una función de onda de la forma:

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_1(t) |\Phi_I\rangle + \alpha_2(t) |\Phi_C\rangle + \alpha_3 |\Phi_D\rangle \quad (74)$$

donde los α_j son los coeficientes complejos de cada uno de los estados del sistema.

2. Parámetros b a controlar, como se muestra en la ecuación (66).

La forma de los tuneleos es una función gaussiana, cuyos parámetros son: t_{IC}, τ_{IC} para la transición izquierda-centro y t_{CD}, τ_{CD} , para la transición centro-derecha. Esquemáticamente representados en la figura 14. Donde podemos ver que las transiciones

entre sitios estarán siendo promovidas por la existencia de estos pulsos, que pueden verse como voltajes aplicados. En principio, son independientes y pueden ocurrir a diferentes tiempos, determinados por un desplazamiento O_{IC} y O_{CD} , mientras que los otros parámetros representan la altura y dispersión de cada uno de los pulsos respectivamente.

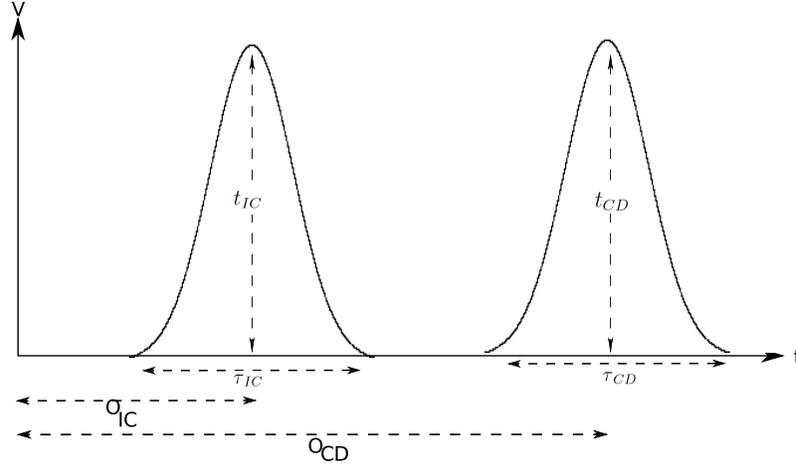


Figura 14. Pulsos de control del tuneleo que conforman los parámetros de control. Altura, dispersión y posición en el tiempo de las barreras se muestra en las figuras para pulsos entre sitios izquierda-centro y centro-derecha.

3. Se define la función a optimizar, o función de adaptabilidad. Como estamos buscando transportar la partícula al sitio derecha, $|\Phi_D\rangle$, entonces queremos maximizar la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha,

$$f = |\langle \Phi_D | \Psi(t) \rangle|^2 = |\alpha_3|^2. \quad (75)$$

4. Solucionamos la ecuación diferencial dada por,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \alpha_j(t) = \sum_j H_{ij} \alpha_j(t). \quad (76)$$

5. Aplicación del algoritmo de control para encontrar el espacio de parámetros óptimo, es decir, la forma de los pulsos que promueven el tuneleo entre sitios, representado en la figura 14. Utilizamos la suite PIKAIA (Carbonneau y Knapp, 1995).

Una vez realizado el proceso de optimización, obtenemos una maximización en la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha $|\Phi_D\rangle$. Esto lo podemos apreciar en la figura 15, en donde se grafica la evolución temporal de los módulos de los coeficientes de expansión de la función de onda de la ecuación (74). Se puede apreciar que inicialmente la partícula se encuentra en el sitio izquierda, y posteriormente su probabilidad de encontrarse en el sitio izquierda disminuye, mientras que a la par aumenta la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha. Existe además un probabilidad mínima y transitoria de encontrar la partícula en el sitio centro. Esto nos muestra que la partícula pasa del sitio izquierda al derecha, utilizando el sitio centro como un puente. Pues la probabilidad de encontrar a la partícula en el sitio centro es muy baja.

En la figura 16 se muestran la forma de los pulsos de control que promueven la transición entre sitios de la partícula antes descrita. Vemos que la probabilidad de tuneleo centro derecha T_{CD} se presenta primero y posteriormente entra la probabilidad de transición izquierda centro, T_{IC} , cuya actuación a partir del máximo de esta última se mantiene a la par y disminuyen juntas. Esto sustenta el que la partícula pase del sitio izquierda al sitio derecha sin apenas pasar por el sitio centro. Pues las probabilidad de transición se traslapan maximizando la probabilidad de transición izquierda-derecha.

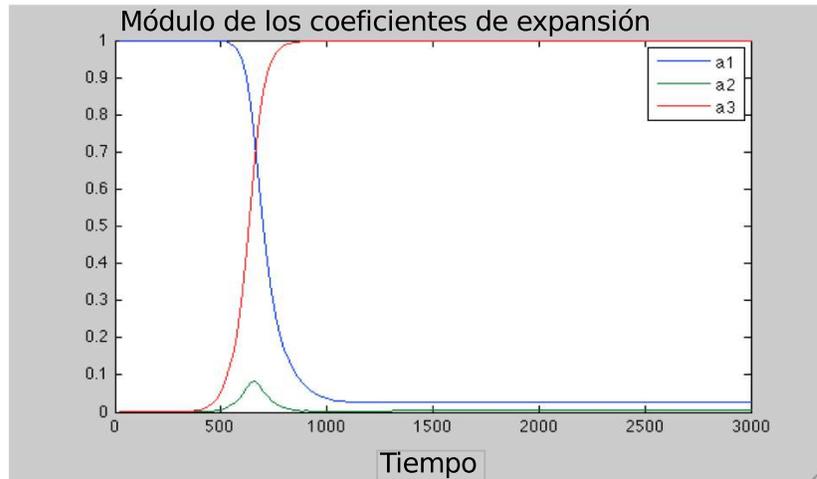


Figura 15. Módulo de los coeficientes de expansión como función del tiempo, correspondientes a los sitios izquierda, centro y derecha de la función de onda (74), a_1 , a_2 , a_3 representan el módulo de los coeficientes de los estados $|\Phi_I\rangle$, $|\Phi_C\rangle$, $|\Phi_D\rangle$, vemos que inicialmente la partícula se encuentra en el sitio $|\Phi_I\rangle$, evoluciona en el tiempo y pasa al sitio derecha $|\Phi_D\rangle$, el tiempo se encuentra normalizado.

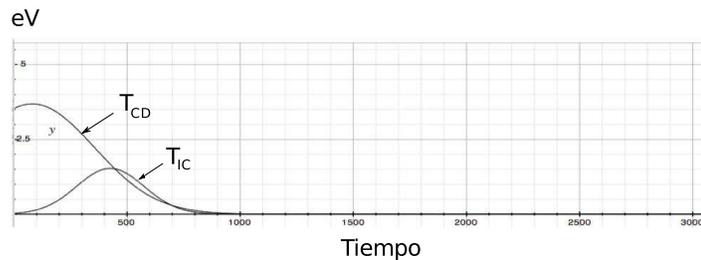


Figura 16. Pulsos de control de tuneleo que optimizan la función (75) y maximizan la probabilidad de encontrar la partícula que inicialmente se encontraba en el sitio $|\Phi_I\rangle$, en el sitio $|\Phi_D\rangle$, es decir realizan el transporte de una partícula sin espín entre sitios como se muestra en la figura 13 donde se plantea el problema.

El algoritmo genético fue calculado sobre una base de 100 individuos por generación, y 150 generaciones en total. Una probabilidad de entrecruzamiento del 85%, mutación del 15%, con el tiempo estandarizado en unidades $\hbar/eV = 6.58 \times 10^{-16} s$, es decir, que utilizaremos unidades de tiempo con $\hbar = 1$ y la energía en eV . Obteniendo como parámetros óptimos:

$$\begin{aligned}
t_{IC} &= 14.29, & t_{CD} &= 85.86, & O_{IC} &= 426, \\
O_{CD} &= 81, & \tau_{IC} &= 151, & \tau_{CD} &= 275.
\end{aligned}
\tag{77}$$

Pudimos apreciar en la figura 15, que partiendo de la condición inicial de tener la partícula en el sitio izquierda $|\Phi_I\rangle$ aplicando los pulsos de control de la figura 16 al tiempo de medición. La partícula prácticamente se transporta del sitio $|\Phi_I\rangle$ al sitio $|\Phi_D\rangle$ pasando transitoriamente por el sitio $|\Phi_C\rangle$, en donde sólo durante un periodo corto tiene una baja probabilidad de encontrarse.

Capítulo III

Entrelazamiento y su cuantificación

Nuestro trabajo está enfocado en encontrar un esquema de control que aplicado sobre un modelo de tres puntos cuánticos, como el presentado en la figura 17, que maximice la transferencia de información sobre algún protocolo de comunicación de información cuántica, como teleportación y código superdenso. Se vuelve necesario encontrar estados entrelazados, ya que ambos protocolos requerirán de la existencia de algún estado de máximo entrelazamiento.

El entrelazamiento (Audretsch, 2007), como una medida de la correlación cuántica que existe entre diferentes sistemas, no se encuentra claramente cuantificada para dimensionalidades superiores a dos, donde la concurrencia aparece como medida estándar (Wooters y Zurek, 1982). La base de la cuantificación del entrelazamiento es a través de la determinación de la entropía de Von Neumann (Bennett *et al.*, 1996). Por otro lado, el coeficiente de Schmidt, permite cuantificar el entrelazamiento entre dos sistemas de diferentes grados de libertad, por lo que resulta útil en nuestro trabajo. Dichos grados de libertad están compuestos, por la ocupación entre tres puntos cuánticos, y el espín electrónico.

III.1 Estados de entrelazamiento máximo.

Caso estático

Queremos encontrar los estados de máximo entrelazamiento para un sistema con dimensionalidad $2 \times n$, en donde, 2 representa el grado de libertad de espín, y n el grado de libertad de carga en un sistema, en nuestro caso $n = 3$. Para lo cual proponemos un modelo de tripe punto cuántico, como el que se muestra en la figura 17, en el que tenemos dos grados de libertad, el de ocupación y el de espín. La ocupación está denotada por los sitios izquierda, centro y derecha para los estados $|\Phi_I\rangle, |\Phi_C\rangle, |\Phi_D\rangle$. El espín tiene los grados arriba y abajo, $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, que juntos nos proporcionan la base completa compuesta por $|spin\rangle \otimes |sitio\rangle$, siendo el estado general,

$$|\Psi\rangle = \alpha_1 |\Phi_I \uparrow\rangle + \alpha_2 |\Phi_C \uparrow\rangle + \alpha_3 |\Phi_D \uparrow\rangle + \alpha_4 |\Phi_I \downarrow\rangle + \alpha_5 |\Phi_C \downarrow\rangle + \alpha_6 |\Phi_D \downarrow\rangle, \quad (78)$$

donde, $|\alpha_j|^2$ representa la probabilidad de encontrar al electrón en cada uno de los sitios con el espín correspondiente, bajo la restricción $\sum_j |\alpha_j|^2 = 1$.

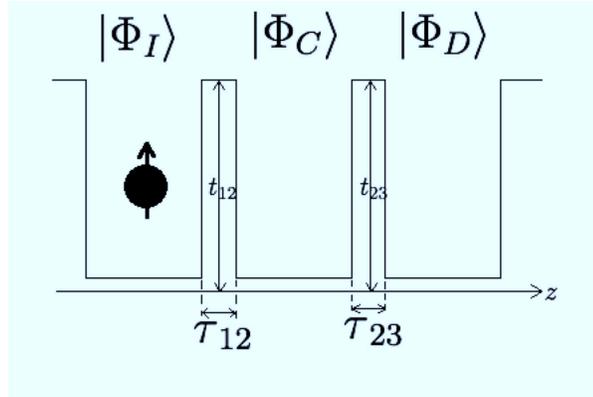


Figura 17. Modelo de triple punto cuántico con un electrón. Parámetros de control: altura, dispersión y retraso temporal de las barreras dependientes del tiempo.

El problema de optimización como se estableció en la sección II.9 se muestra en la siguiente metodología:

1. Debido a que estamos considerando un caso estático no tomamos en cuenta los Hamiltonianos del sistema ni de control, pues únicamente estamos buscando los coeficientes α_i de la función de onda (78) que maximicen el entrelazamiento.
2. Los parámetros a controlar son los coeficientes α_i de la función de onda anterior (78), los cuales son por lo general coeficientes complejos.
3. La cantidad a optimizar, o función fitness, está conformada por el número de Schmidt K (Eberly, 2005),

$$K = \frac{1}{Tr_S(\rho^S)^2} = \frac{1}{Tr_\Phi(\rho^\Phi)^2} = \frac{1}{\sum g_i^2}, \quad (79)$$

donde Tr_S y Tr_Φ representan las trazas parciales de la matriz de densidad reducida sobre el sistema de espín y carga respectivamente.

4. Calculamos la solución óptima con la aplicación de algoritmos genéticos.
5. La aplicación del algoritmo de optimización, es para este caso, el análisis de los rangos de los coeficientes de la función de onda del sistema (78) que cumplen con la maximización del número de Schmidt y por lo tanto del entrelazamiento, mediante mapas bidimensionales autoorganizados de Kohonen (Kohonen, 1984). Los resultados se muestran en las figuras 18 y 19.

Un mapa autoorganizado es una red neuronal capaz de descubrir rasgos comunes, regularidades, correlaciones o categorías en los datos de entradas, e incorporarlos a una estructura de conexiones. En esta red neuronal, las neuronas compiten unas con otras con el fin de llevar a cabo una tarea asignada. Bajo un patrón de entrada, se busca que sólo una de las neuronas de salida, o un grupo de vecinas, se active. De esta manera, las neuronas compiten por activarse, donde

una queda predominante, mientras que el resto son forzadas a sus valores de respuesta mínimos. Es así como este sistema de aprendizaje puede categorizar los datos de entrada y clasificar los similares en una misma categoría

En el que a tiempo cero colocamos un electrón con espín arriba en el sitio izquierdo $|\Psi(t=0)\rangle = |\Phi_I \uparrow\rangle$. Al igual que en las secciones anteriores permitimos que las probabilidades de transición entre sitios dependan del tiempo, y sean por lo tanto un parámetro de control, constituyendo así los tuneleos el control que realizaremos en la búsqueda de los estados de máximo entrelazamiento en un sistema híbrido del este tipo.

Debido a que tenemos un sistema de dos grados de libertad (el espín) acoplado con tres grados de libertad (carga u ocupación). Los estados de máximo entrelazamiento se caracterizarán mediante el coeficiente de Schmidt. En donde se ve claramente que únicamente debemos calcular los eigenvalores de la matriz de densidad reducida sobre cualquiera de los subsistemas, el de carga Φ , o el de espín S .

La matriz de amplitud de entrelazamiento (Eberly, 2005) del sistema compuesto se muestra en la ecuación,

$$\zeta = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

El modelo propuesto es un sistema de $2xn$ estados, de tal manera. Un sistema con estas características tiene una función de onda de la forma,

$$|\psi_{2 \times n}\rangle = \sum_{i,j}^{i=n, j=\{\uparrow, \downarrow\}} \alpha_{i,j} |\Phi_i\rangle \otimes |s_j\rangle, \quad (81)$$

donde $|\Phi_i\rangle$ representan los n grados de libertad de carga, y $|s_j\rangle = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ el grado de libertad de espín. Un sistema así descrito tendrá una matriz de amplitudes de la

forma,

$$\zeta = \begin{bmatrix} \alpha_{1\uparrow} & \alpha_{2\uparrow} & \cdots & \alpha_{n\uparrow} \\ \alpha_{1\downarrow} & \alpha_{2\downarrow} & \cdots & \alpha_{n\downarrow} \end{bmatrix}, \quad (82)$$

donde las columnas representan los $|\Phi_i\rangle$ grados de libertad de carga, y los renglones los $|s_j\rangle$ grados de libertad de espín.

La matriz densidad reducida sobre estados de carga, calculada como la traza parcial sobre los estados de espín, se determina de la siguiente manera,

$$\rho_\Psi = \zeta \zeta^\dagger = \begin{bmatrix} \sum_i |\alpha_{i\uparrow}|^2 & \sum_i \alpha_{i\uparrow} \alpha_{i\downarrow}^* \\ \sum_i \alpha_{i\downarrow} \alpha_{i\uparrow}^* & \sum_i |\alpha_{i\downarrow}|^2 \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Siguiendo este procedimiento para el sistema descrito por la función de onda de la ecuación (78), se determina la matriz de densidad reducida como,

$$\rho_\Psi = \zeta \zeta^\dagger = \begin{bmatrix} |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 & \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_6^* \\ \alpha_4 \alpha_1^* + \alpha_5 \alpha_2^* + \alpha_6 \alpha_3^* & |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 \end{bmatrix}. \quad (84)$$

La matriz de densidad reducida de la ecuación (80), permite tratar el problema como un sistema de sólo dos grados de libertad. Con este criterio, podemos describir el sistema como un sistema cuántico de dos niveles o un espín. Los operadores de densidad de los sistemas de dos estados tienen propiedades interesantes. La matriz de densidad de un sistema de dos niveles está representada por,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + s_3 & s_1 + i s_2 \\ s_1 - i s_2 & 1 - s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (85)$$

donde \mathbf{s} es el vector de pseudo espín $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ para el sistema de dos niveles, en el que podemos calcular los eigenvalores utilizando $g_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm |\vec{s}|)$. La parametrización

de la matriz densidad reducida sobre el operador densidad de un sistema de dos niveles, permite realizar el cálculo de los eigenvalores como se ilustra en la ecuación,

$$g_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}, \quad (86)$$

donde:

$$\begin{aligned} s_x &= \alpha_1\alpha_4^* + \alpha_2\alpha_5^* + \alpha_3\alpha_6^* + \alpha_4\alpha_1^* + \alpha_5\alpha_2^* + \alpha_6\alpha_3^*, \\ s_y &= \frac{1}{i}(\alpha_1\alpha_4^* + \alpha_2\alpha_5^* + \alpha_3\alpha_6^* - \alpha_4\alpha_1^* - \alpha_5\alpha_2^* - \alpha_6\alpha_3^*), \\ s_z &= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2. \end{aligned} \quad (87)$$

Con base en lo anterior, buscamos todos los posibles estados en el sistema de 6 grados de libertad que tengan un entrelazamiento máximo. Por lo que debemos maximizar el número de Schmidt de la ecuación (79), sobre la función de onda $|\Psi\rangle$ de la ecuación (78). Consideramos primero el caso donde los coeficientes no evolucionan. Se espera una relación entre los coeficientes y la base de Bell general para sistemas de 4 grados de libertad

En la figura 18 se muestra el mapa auto organizado para familias de únicamente dos estados de la función de onda (78) que tienen entrelazamiento máximo, es decir, donde sólo consideramos la existencia de dos coeficientes $\alpha_i, \alpha_j \neq 0$, con el resto de los coeficientes $\alpha_k = 0, i \neq j \neq k, i, j, k = \{1, \dots, 6\}$, de la función de onda de la ecuación (78). Podemos apreciar la matriz-U (*U-matrix*) que representa las familias o grupos que tienen máximo entrelazamiento, y las gráficas independientes para los coeficientes de la función de onda del sistema. Tanto la matriz U, como las matrices bidimensionales para cada coeficiente, tienen una correspondencia espacial, es decir, que para obtener una función de onda que satisface la condición de máximo entrelazamiento, utilizando la representación auto organizada mostrada, basta con posicionarse en algún sitio de cualquiera de las matrices y en el mismo lugar en el resto de las matrices. Por ejemplo,

en la matriz U , en la parte superior izquierda se encuentra una de las familias. Los coeficientes que dan lugar a esta familia los encontramos cuando $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con el resto de los coeficientes nulos.

Se obtienen seis familias de entrelazamiento máximo como se aprecia en la matriz U (U -matrix) del gráfico. Estas seis familias conformarían las combinaciones lineales aditivas de la ecuación (88). Sin embargo, dichas familias se representan en combinaciones como sumas y restas de estados con el propósito de construir una base completa, la cual permita representar cualquier estado de la base original. De esta manera, los estados de máximo entrelazamiento en la cuasi base de Bell para un sistema con 6 estados estaría conformado por 12 estados de máximo entrelazamiento restringidos a una combinación lineal de dos estados:

$$\begin{aligned} |\Psi_{nm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_n \uparrow\rangle \pm |\Phi_m \downarrow\rangle), \\ |\Psi_{nm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_n \downarrow\rangle \pm |\Phi_m \uparrow\rangle), \end{aligned} \tag{88}$$

$$n \neq m; n = I, C, D; m = I, C, D.$$

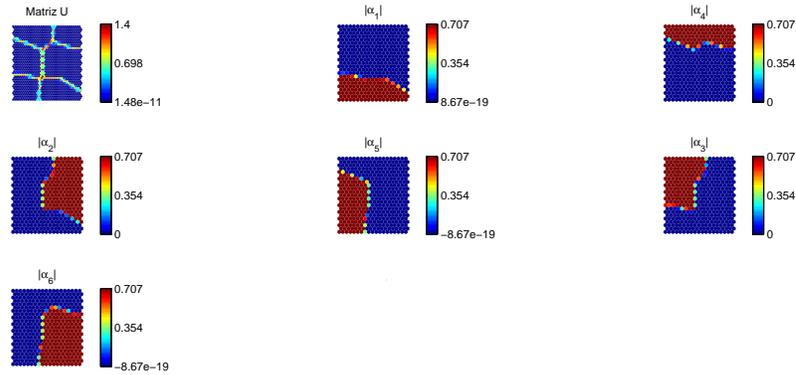


Figura 18. Mapa auto-organizado de entrelazamiento máximo del sistema de la figura 17, restringido a dos grados de libertad. Se muestra la matriz U de aprendizaje U -matrix y los módulos de los coeficientes de la función de onda de la ecuación (78). La intensidad de color representa los valores posibles que pueden tomar los coeficientes para maximizar el entrelazamiento en un sistema de 3×2 grados de libertad, restringido a 2 estados, o coeficientes.

Encontramos la relación mostrada en la ecuación (88), donde queda en evidencia que se pueden obtener estados de máximo entrelazamiento como combinación lineal de sólo dos estados del sistema, con una estructura muy semejante a la encontrada en los estados de Bell. Del mismo modo podemos obtener aquellos estados que sean combinación de todos los estados del sistema, es decir que todos los coeficientes $\alpha_j \neq 0, j = \{1, \dots, 6\}$ de la función de onda de la ecuación (78), y que a su vez, sean estados de entrelazamiento máximo.

En la figura 19 se muestra el mapa auto organizado para familias con todos los estados de la función de onda de la ecuación (78) con probabilidad no nula. Se muestra la matriz de aprendizaje U , y los mapas corresponden a los valores de los módulos de los coeficientes de la función de onda del sistema. En la matriz U (U -matrix) podemos apreciar que existen 9 familias de estados de máximo entrelazamiento involucrando a todos los estados del sistema de 3×2 grados de libertad. Los estados mayormente

probables los vemos dentro de un cuadrado ocupando casi en su totalidad el área de la matriz de aprendizaje U . Y vemos que existen otros cuatro estados delimitados por un tono más claro en la matriz U en los extremos laterales del mapa y otros cuatro en las esquinas.

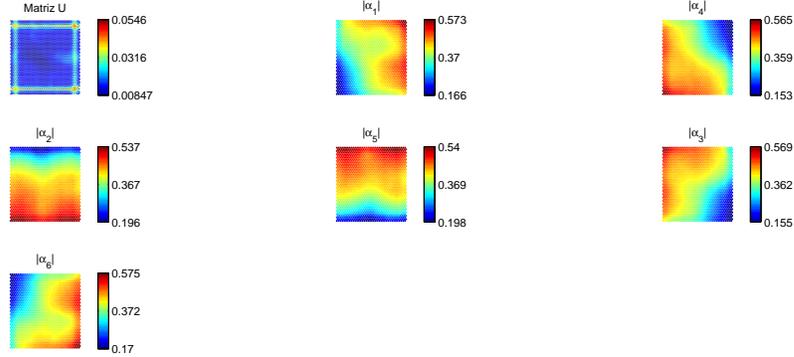


Figura 19. Mapa auto-organizado de entrelazamiento máximo del sistema de la figura 17, con todos los grados de libertad disponibles. Se muestra la matriz U de aprendizaje U -matrix y los módulos de los coeficientes de la función de onda de la ecuación (78). La intensidad de color representa los valores posibles que pueden tomar los módulos de los coeficientes para maximizar el entrelazamiento en un sistema de 3×2 grados de libertad, con todos los estados con probabilidad no nula.

En el mapa podemos ver que la familia dominante es una combinación lineal simétrica de todos los estados del sistema. Sin embargo, es de esperarse que dichos estados posean una fase que permita que el vector de pseudo espín se anule. Debido a la complejidad en el análisis de dichos estados, en nuestro trabajo únicamente incluimos la relación que determina la familia más probable como:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(e^{i\lambda_1} |\Phi_I \uparrow\rangle + e^{i\lambda_2} |\Phi_C \uparrow\rangle + e^{i\lambda_3} |\Phi_D \uparrow\rangle + e^{i\lambda_4} |\Phi_I \downarrow\rangle + e^{i\lambda_5} |\Phi_C \downarrow\rangle + e^{i\lambda_6} |\Phi_D \downarrow\rangle), \quad (89)$$

donde λ_i representa las fases de cada estado. Es claro ver que las fases deben cumplir

con $s_x = 0$ y $s_y = 0$ del vector de pseudo espín. Asimismo los términos: $\alpha_1\alpha_4^*$, $\alpha_2\alpha_5^*$, $\alpha_3\alpha_6^*$ son opuestos a $\alpha_4\alpha_1^*$, $\alpha_5\alpha_2^*$, $\alpha_6\alpha_3^*$ en s_x . En s_y estos últimos tienen una fase π que proviene del signo negativo, la cual nos permite entender la forma que deben tener las fases en general. Para hacerlo más claro, ejemplificamos la determinación de las fases utilizando s_y . Si seleccionamos un producto de los anteriores de manera arbitraria inicial, podemos ver que los segmentos opuestos en s_x se encuentran en la misma dirección en s_y , por lo que tendríamos en total tres vectores en el plano complejo de longitud $2 \times (1/6) = 1/3$. La única forma para que estos vectores se cancelen es que se encuentren separados por un ángulo de $2\pi/3$. Tomando en cuenta s_x , se deduce que las fases se encuentran relacionadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\lambda_4 - \lambda_1 &= (\lambda_1 - \lambda_4) + \pi, \\
\lambda_2 - \lambda_5 &= (\lambda_1 - \lambda_4) - 2\pi/3, \\
\lambda_5 - \lambda_2 &= (\lambda_1 - \lambda_4) - \pi/3, \\
\lambda_3 - \lambda_6 &= (\lambda_1 - \lambda_4) + 2\pi/3, \\
\lambda_6 - \lambda_3 &= (\lambda_1 - \lambda_4) + \pi/3,
\end{aligned} \tag{90}$$

de estas ecuaciones podemos ver que únicamente tenemos que escoger un valor de fase al azar, y los demás se determinan a partir de estas ecuaciones, siendo siempre reducidas a simples sistemas de 2×2 . La ecuación (89) es sólo uno de los estados de entrelazamiento máximo; sin embargo, tiene la peculiaridad de ser una combinación simétrica de todos los estados del sistema.

Vemos que existen otras cuatro familias en las esquinas de la matriz U y también otras cuatro en los laterales; sin embargo, de éstas no presentamos un análisis detallado debido a su dificultad en el análisis de las relaciones de las fases, al dejar de ser los módulos iguales y debido a que el objetivo principal de nuestro trabajo consiste en la

aplicación de esquemas de control en protocolos de comunicación cuánticos.

En el desarrollo de esta sección, utilizamos las medidas de entrelazamiento descritas en el capítulo II para cuantificar el grado de entrelazamiento de un sistema de 3×2 grados de libertad. Primeramente calculamos los estados del sistema cuyo número de Schmidt fuera máximo, obtuvimos la reducción esperada a una base equivalente a la de Bell cuando restringimos la existencia de sólo dos coeficientes de la función de onda. Calculamos también los estados de máximo entrelazamiento con todos los coeficientes no nulos. Explicamos detalladamente como se forma el caso más general y de máxima simetría con todos los módulos de la función de onda iguales, pero con fase distinta. También se determinó la dependencia de fase que existe en este tipo de estados.

III.2 Modelo del sistema con carga y espín. Caso dinámico.

Hasta ahora hemos calculado aquellas combinaciones lineales de estados que producen un entrelazamiento máximo, sin considerar la evolución en el tiempo de dichos estados. De tal forma que en esta sección consideramos el mismo modelo que para el caso estático, pero ahora añadimos la dependencia temporal de los coeficientes. En nuestro modelo, sólo tenemos un electrón por lo que el sistema total es de 6 estados. En la figura 20 se muestra una representación del modelo propuesto. El cual, es un sistema con dos grados de libertad, el de ocupación y el de espín. La ocupación está denotada por los sitios izquierda, centro y derecha para los estados $|\Phi_I\rangle, |\Phi_C\rangle, |\Phi_D\rangle$. El espín tiene los grados arriba y abajo, $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. Adicionalmente, las probabilidades de transición entre sitios tienen forma de pulsos gaussianos en el tiempo. La definición de estos pulsos, es

lo que forma los parámetros de control. Existe también una probabilidad de transición con cambio de espín, promovida por la interacción espín-órbita tipo Dresselhaus. En el triple punto cuántico consideramos que la energía cinética de los electrones es mucho menor que la altura de las barreras de potencial (Perel *et al.*, 2003).

Queremos encontrar la forma de las barreras (entre ellas: altura, dispersión y desplazamiento temporal) que generen un estado de máximo entrelazamiento bajo una condición inicial dada.

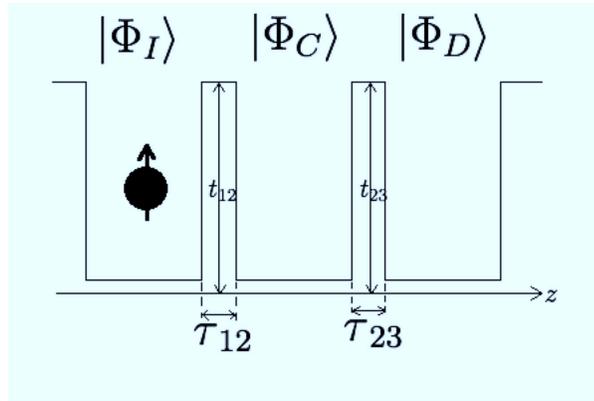


Figura 20. Modelo de triple punto cuántico con un electrón. Parámetros de control: altura y dispersión de las barreras dependientes del tiempo.

La función de onda del sistema, en la base de sitio y ocupación está determinada por $|spin\rangle \otimes |sitio\rangle$, siendo el estado general,

$$|\Psi\rangle = \alpha_1(t) |\Phi_I \uparrow\rangle + \alpha_2(t) |\Phi_C \uparrow\rangle + \alpha_3(t) |\Phi_D \uparrow\rangle + \alpha_4(t) |\Phi_I \downarrow\rangle + \alpha_5(t) |\Phi_C \downarrow\rangle + \alpha_6(t) |\Phi_D \downarrow\rangle. \quad (91)$$

El Hamiltoniano que describe la dinámica del modelo propuesto, en la base de ocupación y espín es,

$$H_T = I \otimes H_{\Phi_S} + H_{SO} + I \otimes H_{\Phi_C}(t, b) \quad (92)$$

con

$$H_{SO} = H_{Dr} \otimes H_{\Phi S} \quad (93)$$

donde $H_{\Phi S}$ representa el Hamiltoniano del sistema de carga, H_{SO} el Hamiltoniano de interacción espín-órbita, $H_{\Phi C}(t, b)$ el Hamiltoniano de control, y H_{Dr} es el Hamiltoniano para la interacción espín-órbita tipo Dresselhaus. Como se detalla en el capítulo II, la forma explícita de estos Hamiltonianos es:

$$H_{\Phi S} = \begin{bmatrix} E & t_0 & 0 \\ t_0 & E & t_0 \\ 0 & t_0 & E \end{bmatrix}, \quad (94)$$

$$H_{\Phi C}(t, b) = \begin{bmatrix} 0 & t_{IC} & 0 \\ t_{IC} & 0 & t_{CD} \\ 0 & t_{CD} & 0 \end{bmatrix},$$

donde el primer Hamiltoniano, $H_{\Phi S}$, representa la dinámica sin perturbar de los tres puntos cuánticos con energía de sitio E , la cual consideramos constante y cero para simplicidad de los cálculos, y con un tuneleo t_0 , que define la probabilidad de transición entre sitios. Mientras que $H_{\Phi C}(t, b)$ está compuesto por los pulsos de control de forma gaussiana en el tiempo como vimos en la sección II.9.2. El Hamiltoniano de la interacción espín-órbita que utilizamos es el Hamiltoniano de Perel, cuya representación matricial, que estudiamos en la sección II.6, que tiene la forma,

$$\hat{H}_{Dr} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma|k|e^{i\phi}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \gamma|k|e^{-i\phi}\frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (95)$$

donde $|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ y $\phi = \tan^{-1}\frac{k_y}{k_x}$.

El Hamiltoniano del sistema de carga $H_{\Phi S}$, describe las transiciones entre sitio in-

herentes al sistema, siendo t_0 la probabilidad de tuneo entre sitios vecinos con espín constante cuando no hay ningún estímulo externo, y E_n son las energías basales de sitio, las cuales consideraremos como iguales y nulas para la simplificación del cálculo. El Hamiltoniano de interacción espín órbita describe las probabilidades de transición entre sitio con cambio de espín. El Hamiltoniano de control, $H_{\Phi C}$, introduce barreras dependientes del tiempo entre sitios que modifican y controlan la probabilidad de transición entre los sitios izquierda-centro y centro-derecha, con los pulsos t_{IC} y t_{CD} respectivamente. El Hamiltoniano del sistema y de control en la base de ocupación es,

$$H_T(t) = \begin{array}{c} \text{Base} \\ \langle \Phi_I \uparrow | \\ \langle \Phi_C \uparrow | \\ \langle \Phi_D \uparrow | \\ \langle \Phi_I \downarrow | \\ \langle \Phi_C \downarrow | \\ \langle \Phi_D \downarrow | \end{array} \begin{array}{ccccccc} | \Phi_I \uparrow \rangle & | \Phi_C \uparrow \rangle & | \Phi_D \uparrow \rangle & | \Phi_I \downarrow \rangle & | \Phi_C \downarrow \rangle & | \Phi_D \downarrow \rangle & \\ \left(\begin{array}{ccccccc} E_1 & t_0 + t_{IC} & 0 & \gamma|k|E_1e^{i\phi} & \gamma|k|t_0e^{i\phi} & 0 & \\ t_0 + t_{CI} & E_2 & t_0 + t_{CD} & \gamma|k|t_0e^{i\phi} & \gamma|k|E_2e^{i\phi} & \gamma|k|t_0e^{i\phi} & \\ 0 & t_0 + t_{DC} & E_3 & 0 & \gamma|k|t_0e^{i\phi} & \gamma|k|E_3e^{i\phi} & \\ \gamma|k|E_1e^{-i\phi} & \gamma|k|t_0e^{-i\phi} & 0 & E_1 & t_0 + t_{IC} & 0 & \\ \gamma|k|t_0e^{-i\phi} & \gamma|k|E_2e^{-i\phi} & \gamma|k|t_0e^{-i\phi} & t_0 + t_{CI} & E_2 & t_0 + t_{CD} & \\ 0 & \gamma|k|t_0e^{-i\phi} & \gamma|k|E_3e^{-i\phi} & 0 & t_0 + t_{DC} & E_3 & \end{array} \right) \end{array} \quad (96)$$

Modelamos el problema de control siguiendo la metodología de las secciones anteriores a continuación:

1. Definimos el Hamiltoniano del sistema y el Hamiltoniano de control, como se expresa en la ecuación (92), el cual, al expandirlo en la base de ocupación y espín tiene la representación:

Para el acoplamiento espín - órbita utilizamos los parámetros arbitrarios $|k| = 0.2, \gamma = 24, \varphi = \frac{3\pi}{4}$, en este ejemplo ilustrativo consideramos $\langle k_z^2 \rangle = 1$.

2. Establecemos los parámetros a controlar, los cuales están contenidos en la ecuación (97), y describen esencialmente un comportamiento gaussiano de un campo eléctrico. La inclusión de la \tanh como vimos en el capítulo II se vuelve necesaria para contrarrestar el efecto del tuneleo a un tiempo dado, en este caso, el tiempo de medición, que es al tiempo al cual se busca lograr el entrelazamiento, nombrado como t_m . Expandiendo el hamiltoniano de la ecuación (92), obtenemos la representación matricial del hamiltoniano total, en la ecuación (96). La base utilizada es $|\Phi_I \uparrow\rangle, |\Phi_C \uparrow\rangle, |\Phi_D \uparrow\rangle, |\Phi_I \downarrow\rangle, |\Phi_C \downarrow\rangle, |\Phi_D \downarrow\rangle$.

$$\begin{aligned} t_{IC} &= t_0(b_{ICE} e^{-\frac{(t-t_{OIC})^2}{2\tau_{IC}^2}} - \tanh\frac{(t-t_{OIC})^2}{2\tau_{IC}^2}), \\ t_{CD} &= t_0(b_{CDE} e^{-\frac{(t-t_{OCD})^2}{2\tau_{CD}^2}} - \tanh\frac{(t-t_{OCD})^2}{2\tau_{CD}^2}), \end{aligned} \quad (97)$$

$$t_{CI} = t_{IC}^* = t_{IC},$$

$$t_{DC} = t_{CD}^* = t_{CD},$$

en donde b_{IC}, b_{CD} , representa la altura de las barreras como un factor de t_0 ; O_{IC}, O_{CD} representan el desplazamiento temporal de los pulsos respecto a $t = 0$ y τ_{IC}, τ_{CD} las dispersiones de las barreras. Como en la figura 14.

3. Establecemos la función a optimizar. Procedemos de la misma forma que para el caso estático, sólo que en esta ocasión se realizará el cálculo del número de Schmidt [ecuación (79)], de forma dinámica, buscando que sea un máximo en el tiempo de medición. El tiempo de medición se establece como $t_m = 2000$, pues es tiempo suficientemente grande para que el sistema H_S permita varias oscilaciones naturales, asegurando que se promuevan las transiciones necesarias para maximizar la probabilidad de entrelazamiento máximo a ese tiempo.

4. Se busca la solución integrando la ecuación de onda (91), al tiempo de medición.
5. Determinamos los parámetros de control que optimizan el entrelazamiento. Obtenemos un estado de máximo entrelazamiento denotado en la ecuación,

$$|\Psi(t_{med})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_I \uparrow\rangle + |\Phi_D \downarrow\rangle), \quad (98)$$

que a su vez es parte de la base de Bell. Este estado en particular, resulta de interés, ya que permite la destilación de entrelazamiento híbrida. Es decir, que si realizamos una medición de carga en cualquiera de los puntos extremos, sabremos con certeza cual es el espín del electrón. La gráfica de la evolución temporal de las probabilidades de ocupación del sistema híbrido, la podemos apreciar en la figura 21.

El caso dinámico de 6 grados de libertad tiene una respuesta interesante, como podemos ver en la figura 21, donde la función objetivo, el inciso *d*), oscila entre dos estados de máximo entrelazamiento de diferente dimensionalidad, y otro localizado en el punto cuántico central, esto lo podemos observar viendo la correspondencia de máximos y mínimos con el valor de las probabilidades mostrados en las gráficas del inciso *a*) al *d*). Estos tres estados los podemos apreciar en $|\Psi_2\rangle$ que es cuando $f \rightarrow 2$ y $t \approx 1700$, $|\Psi_1\rangle$ cuando $f = 2$ y $t = 2000$, y $|\Psi_3\rangle$ cuando $f = 0$ en $t \approx 2500$ y los ilustramos en las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi} |\Phi_C \uparrow\rangle + e^{-i\pi/4} |\Phi_C \downarrow\rangle), \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|\Phi_I \uparrow\rangle + e^{i\pi/4} |\Phi_C \uparrow\rangle + e^{-i\pi} |\Phi_D \uparrow\rangle + \\ &e^{-i\pi/4} |\Phi_I \downarrow\rangle + e^{-i3\pi/4} |\Phi_C \downarrow\rangle + e^{i3\pi/4} |\Phi_D \downarrow\rangle), \\ |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_I \uparrow\rangle + |e^{i3\pi/4} \Phi_D \downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (99)$$

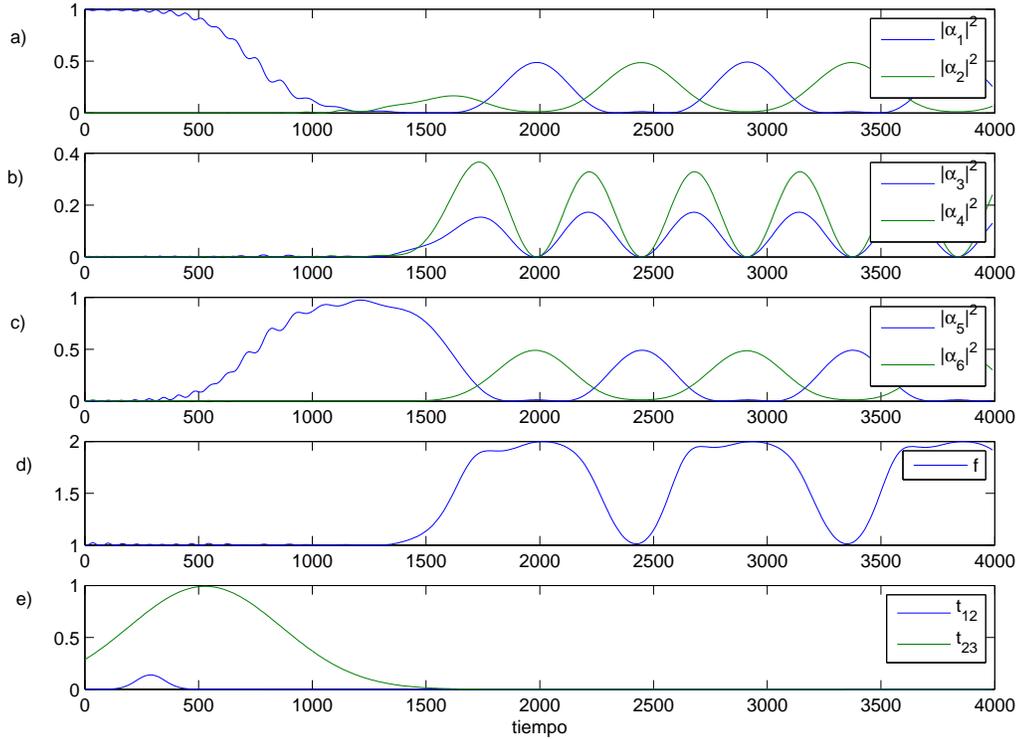


Figura 21. Probabilidades de ocupación de la ecuación como función del tiempo de la ecuación de onda (91) del sistema dinámico. Se muestra la probabilidad de estar en (a) $|\Phi_I \uparrow\rangle, |\Phi_C \uparrow\rangle$, (b) $|\Phi_D \uparrow\rangle, |\Phi_I \downarrow\rangle$, (c) $|\Phi_C \downarrow\rangle, |\Phi_D \downarrow\rangle$. (d) La función objetivo (79), (e) El tuneo entre sitios izquierda-centro t_{12} y centro derecha t_{23} .

En el desarrollo de esta sección buscamos estados de máximo entrelazamiento en un sistema dinámico de carga y espín, modelado en un triple punto cuántico, controlando únicamente la forma de los pulsos que modulan la probabilidad de transición entre sitios con una forma de onda gaussiana, vimos que es posible alcanzar estados de máximo entrelazamiento no constantes y que evolucionan en el tiempo de forma periódica. Resultó interesante en el caso dinámico ver como el sistema pasa de tener la partícula en un estado muy localizado a estados con distintos grados de libertad de entrelazamiento máximo.

Capítulo IV

Modelado del protocolo de teleportación cuántica con estados híbridos de espín y carga

El objetivo fundamental de este capítulo es establecer un esquema de control sobre un modelo de puntos cuánticos, que permita, con estados entrelazados híbridos, implementar los protocolos de comunicación cuántica. Con las actividades desarrolladas hasta ahora, podemos plantear los protocolos de comunicación cuántica y modelarlos para la teleportación y el código super denso.

Para la aplicación del esquema de control al protocolo de teleportación cuántica, el modelo general está representado en la figura 22. Donde Alice está en posesión de los sitios izquierda, $|\Phi_I\rangle$ y centro, $|\Phi_C\rangle$, y Bob del sitio derecha, $|\Phi_D\rangle$. Alice quiere enviar un estado de espín a Bob utilizando para ello un estado compartido con Bob. Dicho estado compartido será un estado de entrelazamiento máximo, siendo alguno de los estados de la base de Bell híbrida. Bob, realizando una medición de carga en el sitio que posee deberá recuperar el estado de espín que Alice le envía.

Bajo este modelo, el punto izquierda $|\Phi_I\rangle$ representa la partícula que posee el estado que queremos teleportar, el cual es una combinación lineal de espín arriba y abajo $|\Phi_I\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$. Dicho estado se teleportará mediante una interacción electrostática de intercambio tipo espín-espín $J(t)S_I \cdot S_C$ entre los sitios izquierda y centro, donde $J(t)$ es un parámetro de control dinámico. Esta interacción será activada durante un

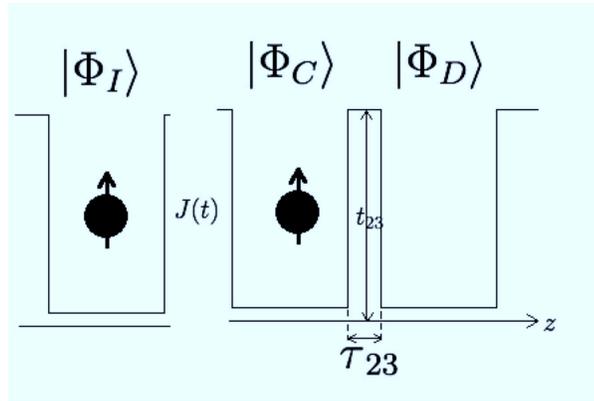


Figura 22. Modelo de puntos cuánticos para el protocolo de teleportación, con interacción tipo espín-espín (de intercambio) $J(t)$ controlable.

periodo de tiempo, de tal forma que la información contenida en la partícula que se encuentra en $|\Phi_I\rangle$, sea comunicada a la partícula que se encuentra en el centro $|\Phi_C\rangle$. Posteriormente, la interacción $J(t)$ se anula, y entra en juego el control del túnelo t_{CD} , para maximizar la probabilidad de encontrar la partícula en el punto derecha $|\Phi_D\rangle$ con el estado de espín deseado $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$. El túnelo es utilizado como el medio de comunicación del estado híbrido. Se encuentra presente también el acoplamiento espín - órbita tipo Dresselhaus, t_{SO} , entre los sitios $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$, el cual, promueve transiciones electrónicas con cambio de espín. Asimismo, permitimos que la energía del sitio $|\Phi_C\rangle$ tenga una dependencia temporal, lo que nos permite controlar la probabilidad de ocupación de los $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$.

Se observa que bajo este modelo, el protocolo de teletransportación cuántica descrito en secciones anteriores debe tener ciertas modificaciones. La principal diferencia es que el sistema que proponemos es un sistema híbrido de carga y espín, donde el estado entrelazado para la teletransportación es un estado híbrido. Con el fin de que aclarar la forma en que adaptaremos nuestro modelo podemos partir de la aplicación en puntos cuánticos convencional propuesta por Sattler (Sattler, 2010) que abordamos en el apéndice A, ya

que proponemos las estructuras de medición de manera semejante, con la diferencia de que nuestro sistema tiene estados entrelazados híbridos de carga y espín.

En resumen, un estado de espín es teleportado del sitio de la izquierda, al sitio de la derecha utilizando un estado entrelazado híbrido de espín y carga.

Para lograr el protocolo de teleportación cuántica debemos realizar una serie de etapas, las que mostramos en forma cualitativa en la figura 23. En la figura 23(a) tenemos el planteamiento de forma general, Alice está en posesión de los sitios $|\Phi_I\rangle$ y $|\Phi_C\rangle$, y Bob posee el sitio $|\Phi_D\rangle$. Alice quiere enviar Bob la información contenida en la partícula que tiene en el sitio $|\Phi_I\rangle$, dicha información es el espín del electrón. Primeramente deben compartir un estado entrelazado híbrido entre los sitios centro y derecha, que servirá al protocolo de teleportación cuántica. Supongamos que en principio el sitio $|\Phi_I\rangle$ no interactúa con los sitios centro y derecha, y además el tuneo es nula entre éstos. Colocamos un electrón en el sitio $|\Phi_C\rangle$ con espín arriba $|\uparrow\rangle$, en el sistema siempre está presente la probabilidad de tuneo generada por la interacción espín - órbita, t_{SO} , utilizamos el control del tuneo para generar el estado de entrelazamiento híbrido que buscamos, $|\Phi_{CD}^+\rangle$. En la figura 23(b), podemos apreciar el estado híbrido entrelazado $|\Phi_{CD}^+\rangle$ de forma descriptiva, como una partícula que tiene igual probabilidad de encontrarse en el sitio centro con espín arriba y en el sitio derecha con espín abajo, es decir, $|\Phi_{CD}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \uparrow\rangle + |\Phi_D \downarrow\rangle)$. En la búsqueda de transferir la información entre sitios la partícula en el sitio centro, $|\Phi_C\rangle$, puede interactuar de forma electrostática con la partícula en el sitio izquierda, $|\Phi_I\rangle$, mediante la interacción de intercambio $J(t)$ (Guerrero Moreno, 2008). La interacción electrostática sólo es de manera temporal y desaparece posteriormente, como podemos apreciar en la figura 23(c), donde el electrón en el sitio izquierda ha colapsado al estado $|\Phi_I \uparrow\rangle$, y ahora los sitios centro y derecha adquieren una combinación lineal del estado que tenía originalmente, $|\Phi_I\rangle$. Como el

sitio derecha adquirió el estado en forma rotada, se permite nuevamente la existencia de tuneo entre sitios centro y derecha, para generar una rotación en X , o un intercambio de coeficientes. Después de aplicado el pulso del tuneo, en la figura 23(d) podemos apreciar que el estado se encuentra distribuido entre los sitios centro y derecha, por lo que aumentamos la energía en el sitio central E_C , con el fin de aumentar la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha con el estado deseado. Finalmente, en la figura 23(e), vemos el estado final del sistema donde la partícula es teleportada del sitio $|\Phi_I\rangle$ al sitio $|\Phi_D\rangle$

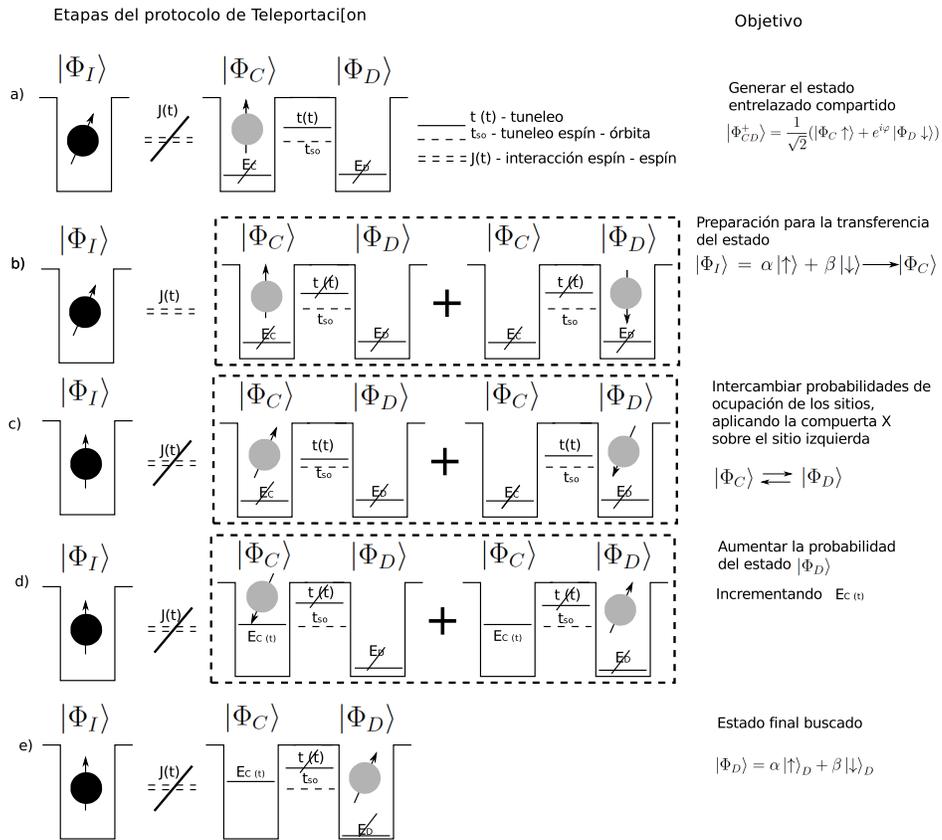


Figura 23. Etapas del modelo de teleportación cuántica: (a) preparación del estado de entrelazamiento híbrido, (b) interacción electrostática entre sitios, (c) Rotación R_x aplicada en los sitios $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$, (d) Aumento en la energía de sitio E_C , (e) partícula en el sitio derecha con el estado de espín que se buscaba transmitir, con un máximo de probabilidad.

Durante todo el capítulo utilizaremos unidades de tiempo con $\hbar = 1$ y la energía en

eV . Por lo que el tiempo tiene unidades de $\hbar/eV = 6.58 \times 10^{-16} s$.

IV.1 Preparación del estado entrelazado híbrido

La primera etapa, consiste en obtener el estado entrelazado compartido $|\Phi_{CD}^+\rangle$ que será necesario para establecer el protocolo de teleportación cuántica. El modelo propuesto es el que se muestra en la figura 22. Suponemos inicialmente que el punto $|\Phi_I\rangle$ no interactúa con el resto del sistema, además de que probabilidad de tuneo es siempre nula entre los sitios $|\Phi_I\rangle$ y $|\Phi_C\rangle$, y consideramos una interacción de intercambio tipo espín-espín. Tenemos por lo tanto, los sitios $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$ en los que colocamos inicialmente un electrón con espín arriba en el sitio centro. Dicho electrón tiene probabilidades de transición al sitio derecha y viceversa con cambio de espín debida al acoplamiento espín-órbita inherente del material, además de una probabilidad de tuneo con espín constante, que es la altura, y dispersión de las barreras, que utilizaremos como parámetro de control, junto con las energías de sitio.

Utilizamos la base construida con sitio de ocupación y espín. De manera que la función de onda a todo tiempo es:

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_1(t) |\Phi_C \uparrow\rangle + \alpha_2(t) |\Phi_D \uparrow\rangle + \alpha_3(t) |\Phi_C \downarrow\rangle + \alpha_4(t) |\Phi_D \downarrow\rangle, \quad (100)$$

donde, $|\alpha_1|^2, |\alpha_2|^2, |\alpha_3|^2, |\alpha_4|^2$ son las probabilidades de encontrar el electrón al tiempo t en el sitio centro con espín arriba, en el sitio derecha con espín arriba, en el sitio centro con espín abajo y en el sitio derecha con espín abajo respectivamente, manteniendo $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 = 1$. El estado que queremos obtener y que será utilizado para establecer los protocolos de comunicación es,

$$|\Phi_{CD}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_C \uparrow\rangle + e^{i\phi} |\Phi_D \downarrow\rangle), \quad (101)$$

partiendo de la condición inicial $|\Psi(t=0)\rangle = |\Phi_C \uparrow\rangle$.

Definiremos la función objetivo como la proyección de la función de onda (100) sobre el estado que estamos buscando, $|\Phi_{CD}^+\rangle$, al tiempo de medición t_m , ya que la partícula que se colocará en el sitio izquierda es aquella cuyo estado se busca teleportar hasta el sitio derecha $|\Phi_D\rangle$. Por lo tanto, tendremos un Hamiltoniano que describe únicamente la dinámica de los sitios centro y derecha, que estará compuesto, por un Hamiltoniano del sistema y otro de control, $H(t) = H_0 + H_c(t, b)$, donde el Hamiltoniano del sistema, H_0 , representa la dinámica entre los sitios centro y derecha, con energías E_n para los sitios, la cual consideramos constante e igual a cero para simplificación de los cálculos. t_0 representa la probabilidad de transición intrínseca del material, así como el acoplamiento espín-órbita característico del material (GaAs), el cual es básicamente $\gamma|k|t_0e^{\pm i\phi}$, mientras que el Hamiltoniano de control, $H_c(t, b)$, está compuesto por la probabilidad de transición, t_{CD} , con espín constante entre los sitios $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$, modulado con una función gaussiana dependiente del tiempo, así como de una rotación en Z para introducir un cambio de fase, controlado con las energías de los sitios $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$.

En el tiempo de medición, definido como $t_m = 2000 \times 10^2$, el tunelo con espín constante queda cancelado, de tal forma que el sistema tiene los eigenvalores y eigenvectores debidos al acoplamiento espín órbita, que se muestran a continuación

$$\begin{aligned} & \{-|k|\gamma, -|k|\gamma, |k|\gamma, |k|\gamma\} \\ & \{-e^{i\phi}, 0, 0, 1\}, \{0, -e^{i\phi}, 1, 0\}, \{e^{i\phi}, 0, 0, 1\}, \{0, e^{i\phi}, 1, 0\}. \end{aligned} \tag{102}$$

Los eigenvectores del sistema nos muestran que podemos obtener un estado de máximo entrelazamiento como un estado estacionario del sistema, de tal forma que seleccionamos un estado de Bell híbrido, en su forma generalizada, con una fase arbitraria seleccionada como $\phi = \pi/4$,

$$|\Phi_{CD}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \uparrow\rangle + e^{i\pi/4} |\Phi_D \downarrow\rangle), \quad (103)$$

el cual, es el mismo estado de Bell que el mostrado en la ecuación (101), con una fase. Este será el estado buscado, es decir, el estado sobre el que proyectaremos la función de onda completa (100), para maximizar la probabilidad de encontrarnos en dicho estado, y será el que ayudará a llevar a cabo el transporte de información.

Metodología

Utilizamos el procedimiento para el control cuántico definido en la sección II.9.

1. Definimos el Hamiltoniano del sistema y el de control:

$$H(t) = H_0 + H_S + H_C(t, b) \quad (104)$$

donde:

$$H_0 = \begin{bmatrix} E_C & t_0 & 0 & 0 \\ t_0 & E_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_C & t_0 \\ 0 & 0 & t_0 & E_D \end{bmatrix},$$

$$H_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma|k|E_C e^{i\phi} & \gamma|k|t_0 e^{i\phi} \\ 0 & 0 & \gamma|k|t_0 e^{i\phi} & \gamma|k|E_D e^{i\phi} \\ \gamma|k|E_C e^{-i\phi} & \gamma|k|t_0 e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ \gamma|k|t_0 e^{-i\phi} & \gamma|k|E_D e^{-i\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (105)$$

$$H_C(t, b) = \begin{bmatrix} \sigma_{CD}^+(t, b) & t_{CD}(t, b) & 0 & 0 \\ t_{CD}^*(t, b) & \sigma_{CD}^-(t, b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{CD}^+(t, b) & t_{CD}(t, b) \\ 0 & 0 & t_{CD}^*(t, b) & \sigma_{CD}^-(t, b) \end{bmatrix},$$

donde H_0 representa la dinámica del sistema sin perturbar, con energía de sitios E_C, E_D consideradas como cero, t_0 es la probabilidad de transición de espín constante del sistema, H_S representa la dinámica del acoplamiento espín-órbita tipo Dresselhaus compuesta por los parámetros γ, k y ϕ propios del material. $H_C(t, b)$ es el hamiltoniano de control, en el que modelaremos la forma de los pulsos que nos permitan alcanzar el estado buscado mostrado en la ecuación (101), $\sigma_{CD}^+(t, b) = -\sigma_{CD}^-(t, b)$ son las energías de los sitios centro $|\Phi_C\rangle$ y derecha, $|\Phi_D\rangle$ dependientes del tiempo respectivamente, $t_{CD}(t, b)$ la probabilidad de transición entre sitios dependiente del tiempo, ambas modeladas con pulsos con forma de onda gaussiana. Consideramos la utilización de GaAs, que tiene $\gamma = 24eV\text{\AA}^3$ (Perel *et al.*, 2003). Hemos definido los parámetros $t_0 = 1meV$, $|k| = 0.34$, $\phi = \pi/5$ y utilizamos $\langle k_z^2 \rangle = (\frac{\pi}{\omega})^2 = 24.6nm^{-2}$ (Studer *et al.*, 2010), considerando el ancho de los pozos como $\omega = 20nm$.

2. Los parámetros a controlar que conforman el tuneo son los de la función:

$$\begin{aligned}
t_{CD}(t, b) &= b_{CD} e^{-\frac{(t-t_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}} - \tanh\frac{(t-t_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}, \\
\sigma_{CD}^+(t, b) &= b\sigma_{CD} e^{-\frac{(t-t\sigma_{CD})^2}{2\tau\sigma_{CD}^2}} - \tanh\frac{(t-t\sigma_{CD})^2}{2\tau\sigma_{CD}^2}, \\
\sigma_{CD}^-(t, b) &= -\sigma_{CD}^+(t, b).
\end{aligned} \tag{106}$$

Las funciones $t_{CD}(t, b)$ y $\sigma_{CD}^\pm(t, b)$ representan el tuneo y las energías de sitio dependientes del tiempo como parámetros de control, cuyos rangos son $[0, 10]$ para $b_{CD}, b\sigma_{CD}$ como fracciones de t_0 ; $[0, 1000]$ para t_{CD} y $t\sigma_{CD}$ que son el desplazamiento temporal de los pulsos, medido en unidades de tiempo con $\hbar = 1$, y con el rango $[0, 444]$ para τ_{CD}, τ_σ que son la dispersión de los pulsos, medido en unidades de tiempo.

Aquí resulta interesante ver como el hecho de manipular antisimétricamente las energías de sitio es equivalente a una rotación en Z , y por lo tanto es como una compuerta,

$$R_{Z_{I \otimes D}}(\theta) = e^{-iI \otimes \sigma_z \theta / \hbar}. \quad (107)$$

La hemos nombrado por comodidad $\sigma_{CD}(t)$, pero es claro ver que $\sigma_{CD}^+(t)$ no es más que la energía del sitio $|\Phi_C\rangle$ y $\sigma_{CD}^-(t)$ la energía del sitio $|\Phi_D\rangle$. El tuneo entre sitios es equivalente a una rotación en X , o simplemente a la aplicación de la compuerta NOT. Así podrían verse como operadores de evolución de la forma

$$U_Z(t) = T e^{-iI \otimes \sigma_z \theta_{\sigma_{CD}}(t_{max})t/\hbar} \quad U_X(t) = T e^{-iI \otimes \sigma_X \theta_{t_{CD}}(t_{max})t/\hbar}, \quad (108)$$

donde

$$\theta_{\sigma_{CD}}(t_{max}) = \int_{-\infty}^{t_{max}} |\sigma_{CD}^{\pm}(t)| dt \quad \theta_{t_{CD}}(t_{max}) = \int_{-\infty}^{t_{max}} t_{CD}(t) dt. \quad (109)$$

3. La función objetivo, es encontrar el estado de la ecuación (101), al tiempo de medición, establecido como $t_m = 2000 \times 10^2$, de tal forma que:

$$f = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \Phi_C \uparrow | + e^{i\pi/4} \langle \Phi_D \downarrow |) |\Psi(t)\rangle \right|^2 + C. \quad (110)$$

Se agrega C para denotar la concurrencia, pues se busca un estado que a su vez tenga un entrelazamiento máximo y al ser un sistema de 2 qubits, podemos utilizar la expresión de la concurrencia dentro de la función objetivo, tomando los coeficientes de la función de onda completa (100),

$$C = 2|\alpha_1(t)\alpha_4(t) - \alpha_2(t)\alpha_3(t)|. \quad (111)$$

4. Evaluación de la ecuación dependiente del tiempo, para los coeficientes $\alpha_j(t)$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \alpha_j(t) = \sum_{i,j}^n H_{i,j}(t, b) \alpha_j(t). \quad (112)$$

5. Aplicación del algoritmo genético. Obtenemos los parámetros óptimos de los pulsos de control que son:

$$\begin{aligned} b_{CD} &= 7.2meV, & t_{CD} &= 310, & \tau_{CD} &= 64 \\ b\sigma_{CD} &= 7.6meV, & t\sigma_{CD} &= 63, & \tau\sigma_{CD} &= 250. \end{aligned} \quad (113)$$

En la figura 24 podemos apreciar la evolución temporal del sistema desde que, en tiempo cero, se coloca un electrón con espín arriba en el sitio centro $|\Psi(0)\rangle = |\Phi_C \uparrow\rangle$, hasta la generación del estado entrelazado híbrido. Mientras que en la figura 25 tenemos el circuito equivalente que realiza este mismo proceso. Inicialmente la partícula se encuentra confinada en el estado $|\Psi(0)\rangle = |\Phi_C \uparrow\rangle$ [(figura 24(a))], como se aprecia hasta tiempos menores a 200×10^2 , posteriormente la probabilidad de encontrar la partícula en el estado $|\Phi_D \uparrow\rangle$ [figura 24(b)] comienza a incrementarse lo que puede explicarse como una operación Hadamard en sobre el grado de libertad de carga, $|\Psi_1\rangle$, como se muestra en las ecuaciones del circuito equivalente:

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= |\Phi_C \uparrow\rangle, \\ |\Psi_1\rangle &= H |\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\Phi_C \uparrow\rangle + |\Phi_D \uparrow\rangle), \\ |\Psi_2\rangle &= Z \otimes I |\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \uparrow\rangle + |\Phi_D \uparrow\rangle), \\ |\Psi_3\rangle &= \text{CNOT} |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \downarrow\rangle + |\Phi_D \uparrow\rangle), \\ |\Psi_4\rangle &= T \otimes I |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi} |\Phi_C \downarrow\rangle + |\Phi_D \uparrow\rangle), \\ |\Psi_5\rangle &= X \otimes I |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi} |\Phi_D \downarrow\rangle + |\Phi_C \uparrow\rangle). \end{aligned} \quad (114)$$

es necesario incluir una rotación (compuertas Z), obtenidos en $|\Psi_2\rangle$. Alrededor del tiempo 200×10^2 aparece también el estado $|\Phi_C \downarrow\rangle$ [figura 24(c)], que resulta de la transición generada por la operación $CNOT$ del estado $|\Psi_2\rangle$ al estado $|\Psi_3\rangle$, con el estado de carga como bit de control. En el tiempo 250×10^2 aproximadamente, se introduce una fase, mostrada en $|\Psi_4\rangle$. Finalmente entre el tiempo 300×10^2 y 400×10^2 aparece el estado $|\Phi_D \downarrow\rangle$ [figura 24(d)], como la transición de la compuerta NOT sobre el grado de libertad de carga, hasta que posterior al tiempo 400×10^2 sólo sobreviven los estados $|\Phi_I \uparrow\rangle$ y $|\Phi_D \downarrow\rangle$ que son los correspondientes al estado $|\Psi_4\rangle$. En la figura 24(e) se muestra la evolución de la función objetivo, tiene variaciones cuando el pulso del tuneleo t_{CD} tiene lugar, vemos como después del tiempo 400×10^2 se incrementa hasta llegar al máximo en un tiempo cercano a 1000×10^2 . En la figura 24(f) se muestran los pulsos de control, en verde, la energía de sitio positiva E_C , mientras que la energía del sitio derecha es equivalente a $E_D = -E_C$, la cual, desde tiempo cero se encuentra activa en un máximo de 2.5 eV y va disminuyendo hasta nulificarse cerca del tiempo $t = 600 \times 10^2$. Asimismo, el pulso de tuneleo con espín constante, en azul, t_{CD} , interviene entre los tiempos $t = 200 \times 10^2$ y $t = 400 \times 10^2$, produciendo las transiciones antes descritas.

Después de la optimización, obtenemos el estado,

$$|\Psi\rangle = |\Phi_{CD}^+\rangle = e^{i\omega t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_C \uparrow\rangle + e^{-i\pi/4} |\Phi_D \downarrow\rangle) \right), \quad (115)$$

el cual es un estado estable de máximo entrelazamiento que no evoluciona. Tiene una fase global $e^{i\omega t}$, que no tiene relevancia, pues la probabilidad total se mantiene constante en el tiempo. En otras palabras en la referencia $e^{i\omega t}$ podemos ver el estado como un estado de fase constante, lo cual resulta de gran utilidad para el resto de los cálculos, ya que como punto de partida para los protocolos de comunicación necesitamos de un

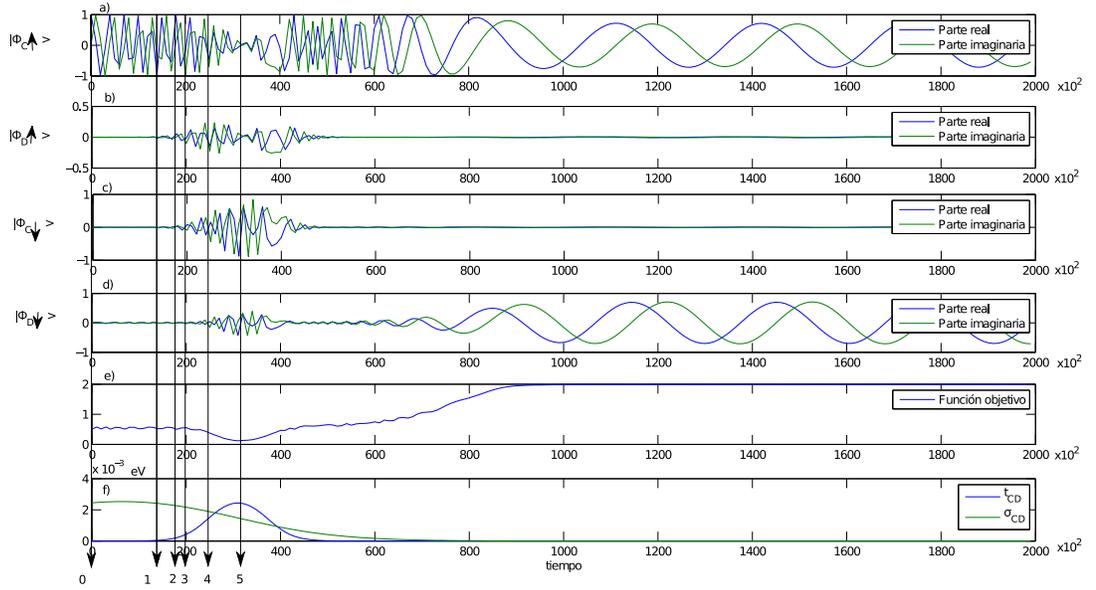


Figura 24. Evolución temporal de los coeficientes de la función de onda (100), en la preparación del estado entrelazado híbrido. En la figura se aprecian las partes real e imaginaria de los coeficientes de los estados: (a) $|\Phi_C \uparrow\rangle$, (b) $|\Phi_D \uparrow\rangle$, (c) $|\Phi_C \downarrow\rangle$, (d) $|\Phi_D \downarrow\rangle$, (e) Función objetivo (110), (f) Pulsos de control t_{CD} y σ_{CD} . Las flechas numeradas marcando posiciones en el tiempo, muestran las operaciones de la ecuación (114).

estado de máximo entrelazamiento. Debido a la normalización de las unidades, los tiempos característicos en la preparación del estado es de unos pocos picosegundos.

IV.2 Optimización en la transferencia del estado de

$$|\Phi_I\rangle \text{ a } |\Phi_D\rangle$$

De forma análoga a la descrita en la sección II.5.1, se aplicará el protocolo de teleportación cuántica en el sistema físico modelado, que se muestra en la figura 22. Alice desea enviar a Bob, un estado cuántico de espín que ella posee, de la forma $|\Phi\rangle_I = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$. Alice está en posesión de los puntos cuántico izquierda y centro, $|\Phi_I\rangle \otimes |\Phi_C\rangle$, y Bob del punto derecha, $|\Phi_D\rangle$. Comparten un estado entrelazado $|\Phi_{CD}^+\rangle$.

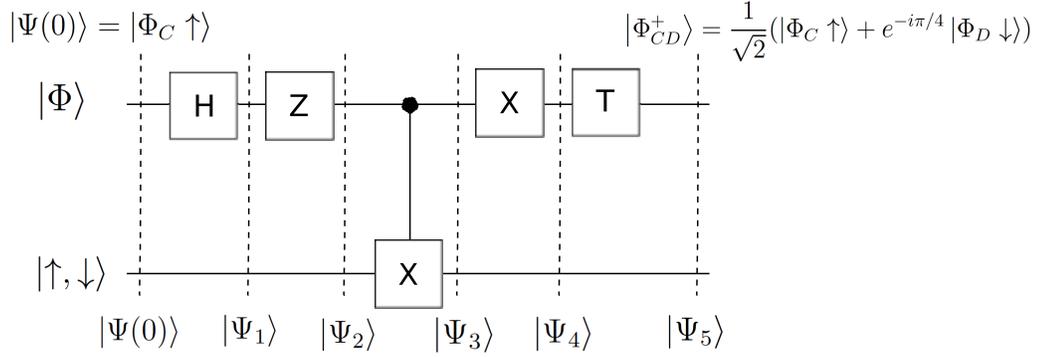


Figura 25. Circuito cuántico equivalente para generar el estado de entrelazamiento híbrido $|\Phi_{CD}^+\rangle$, partiendo de la condición inicial $|\Psi(0)\rangle = |\Phi_C \uparrow\rangle$

El sistema compartido consta de dos qubits modelados en dos puntos cuánticos, los cuales comparte un electrón.

En la sección anterior hemos preparado el compartido de entrelazamiento híbrido $|\Phi_{CD}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \uparrow\rangle + e^{-i\pi/4} |\Phi_D \downarrow\rangle)$ que es una superposición de carga y espín, entre el sitio, centro y derecha expresado en la base de sitio de ocupación y espín. Se busca realizar la transmisión del estado cuántico de espín de un electrón utilizando el protocolo de teleportación cuántica colocado en el sitio $|\Phi_I\rangle$, como se muestra en las figuras 23(b) a la 23(e). El sitio $|\Phi_I\rangle$ se acopla al sitio $|\Phi_C\rangle$ mediante interacciones de intercambio de espín o de Heisenberg. Utilizamos un pulso de la variable de intercambio $J(t)$ (Guerrero Moreno, 2008; Bonestel *et al.*, 2001), de la forma:

$$J(t) = J_0 \text{sech}[2\lambda(t - t_0)]. \quad (116)$$

Donde J_0 , λ y t_0 son la altura del pulso, el inverso del ancho del pulso y un desplazamiento en el tiempo, respectivamente.

El protocolo requiere realizar una medición conjunta en los estados que posee Alice, que serán la partícula cuyo estado se busca teleportar y el punto cuántico centro $|\Phi_I\rangle$ y $|\Phi_C\rangle$. Podemos ver que hay cuatro posibilidades de realizar esta medición conjunta, las

cuales están en la tabla (II). Estas mediciones están hechas sobre los qubits que posee Alice, los cuales son un qubit de espín del sitio izquierda, $|\Phi_I\rangle$ y el qubit de carga de los sitios centro, $|\Phi_C\rangle$ y derecha, $|\Phi_D\rangle$, esto es debido a que hemos construido la base de los qubits de los sitios centro y derecha de la forma $|\Phi_s\rangle$, donde $\Phi = \{C, D\}$ y $s = \{\uparrow, \downarrow\}$, asignamos valores 1 y 0 respectivamente a cada uno de los elementos del conjunto. Es decir que la medición que puede realizar Alice está en los qubits de espín del sitio que posee, $|\Phi_I\rangle$ y la parte de carga de los qubits del sistema centro derecha. Inicialmente supusimos que Alice estaba en posesión de los sitios izquierda, $|\Phi_I\rangle$ y centro, $|\Phi_C\rangle$ de tal forma que las mediciones que puede realizar están restringidas a sólo dos valores de los mostrados en la tabla, que serían aquellos donde la componente de carga de los sitios centro, $|\Phi_{CD}\rangle$ y derecha, sea centro, $|\Phi_C\rangle$. Seleccionamos medir espín arriba en el sitio izquierda y ausencia de carga en el sitio centro. Lo cual es equivalente a realizar una medición conjunta de los qubits que posee Alice del tipo $|10\rangle \otimes I$.

Tabla II. Posibles mediciones conjuntas que puede realizar Alice al implementar el protocolo del código súper denso.

| Entradas b, a | Estado Original |
|----------------------|------------------|
| $ \uparrow\rangle$ | $ \Phi_C\rangle$ |
| $ \uparrow\rangle$ | $ \Phi_D\rangle$ |
| $ \downarrow\rangle$ | $ \Phi_C\rangle$ |
| $ \downarrow\rangle$ | $ \Phi_D\rangle$ |

IV.2.1 Definición de la base del problema

Es importante seleccionar una base que represente al modelo físico utilizado que resulte clara. Utilizaremos la base $|\text{espín}_I, \text{sitio}, \text{espín}\rangle$. La cual, está compuesta por el espín de

electrón del sitio $|\Phi_I\rangle$, y por la ocupación y espín del electrón de los sitios $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$. Esta última notación es la que utilizamos en la preparación del estado híbrido, pues el sitio $|\Phi_I\rangle$ no intervenía. Vemos que la base completa se puede obtener con el producto externo $|\text{espín}_I\rangle \otimes |\text{sitio, espín}\rangle$. Aunque por comodidad la ordenamos de la siguiente manera: $|\uparrow \Phi_C \uparrow\rangle, |\downarrow \Phi_C \uparrow\rangle, |\uparrow \Phi_C \downarrow\rangle, |\downarrow \Phi_C \downarrow\rangle, |\uparrow \Phi_D \uparrow\rangle, |\downarrow \Phi_D \uparrow\rangle, |\uparrow \Phi_D \downarrow\rangle, |\downarrow \Phi_D \downarrow\rangle$. De esta forma, podemos escribir la función de onda a todo para el sistema completo como,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \alpha_1(t) |\uparrow \Phi_C \uparrow\rangle + \alpha_2(t) |\downarrow \Phi_C \uparrow\rangle + \alpha_3(t) |\uparrow \Phi_C \downarrow\rangle + \alpha_4(t) |\downarrow \Phi_C \downarrow\rangle \\ & + \alpha_5(t) |\uparrow \Phi_D \uparrow\rangle + \alpha_6(t) |\downarrow \Phi_D \uparrow\rangle + \alpha_7(t) |\uparrow \Phi_D \downarrow\rangle + \alpha_8(t) |\downarrow \Phi_D \downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (117)$$

donde $|\alpha_n|^2, n = 1, 2, 3, \dots, 8$ representa la probabilidad de cada uno de los estados de la función de onda.

Considerando el estado a enviar,

$$|\Phi_I(0)\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle. \quad (118)$$

Buscamos transferir dicho estado al sitio derecha. La función objetivo será maximizar la probabilidad de encontrar el estado de la ecuación (118) en el sitio derecha. Como seleccionamos las mediciones $|\uparrow\rangle_I$ y ausencia de carga en el sitio centro, o lo que es lo mismo, carga en el sitio derecha, $|\Phi\rangle_D$, la función objetivo es,

$$|\Psi(t_m)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\Phi_D\rangle \otimes (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle). \quad (119)$$

Por lo que la función objetivo que maximiza la probabilidad de encontrar la función de onda (119) al tiempo de medición, resulta de la proyección de la función de onda completa (117), sobre ésta.

IV.2.2 Planteamiento del problema de control

Consideramos nuevamente el modelo propuesto en la figura 22. En el que ya hemos preparado un estado de entrelazamiento híbrido entre los sitios centro y derecha, $|\Phi_{CD}^+\rangle$. Es colocado un electrón con el estado de espín que se quiere teleportar en el sitio izquierda. Se permite la interacción de intercambio $J(t)$ de los sitios izquierda y centro, para transferir información del estado de espín del sitio izquierda al centro. El tuneleo debido a la interacción espín-órbita siempre está presente, mientras que el tuneleo con espín constante, $t_{CD}(t)$ es un parámetro de control. La energía del sitio centro $E_C(t)$ es dependiente del tiempo, pues se busca disminuir la probabilidad de ocupación del sitio centro, en equivalencia a la medida que realiza Alice sobre el sitio centro, midiendo ausencia de carga, como establecimos anteriormente.

1. Definimos los Hamiltonianos de intercambio, del sistema, de la interacción espín-órbita y de control,

$$H(t) = H_{SS}(t) + H_0 + H_C(t, b) + H_{SO}. \quad (120)$$

2. Los parámetros a controlar son:

La interacción de intercambio $J(t) = J_0 t_0 \operatorname{sech}[2\lambda(t - t_0)]$

donde $t_{CD} = b_{CD} e^{-\frac{(t-t_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}} - \tanh\frac{(t-t_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}$

Los rangos son: para b_{CD} $[0, 2]meV$, para t_{CD} $[0, 1500]$, para $J(0)$ $[0, 4]$, para λ $[0, 444]$, para t_0 $[0, 1000]$, y para τ_{CD} $[0, 444]$.

3. La función objetivo es

$$f = |\langle \Psi_{obj} | \Psi(t) \rangle|^2 = |\alpha_0 * \alpha_5(t) + \beta_0 \alpha_7(t)|^2. \quad (121)$$

4. Evaluación de la ecuación dependiente del tiempo, para los coeficientes $\alpha_j(t)$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \alpha_j(t) = \sum_{i,j}^n H_i(t, b) \alpha_j(t). \quad (122)$$

5. Aplicación del algoritmo genético, para encontrar soluciones de los parámetros de control que hacen que la función objetivo (121) sea máxima.

El hamiltoniano de interacción espín-espín es $JS_I \cdot S_C$, de tal forma que el hamiltoniano total del sistema será $H_{total}(t) = H_{SS}(t) + H_0(t) + H_C(t) + H_{SO}(t)$, que son el hamiltoniano de intercambio, el del sistema, el de control y el de espín órbita respectivamente, los cuales detallamos a continuación:

$$H_{SS}(t) = JS_I \cdot S_C = \frac{J(t)}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (123)$$

donde $J(t)$ es uno de los parámetros a controlar, el cual, tiene la forma $J(t) = J_0 \text{sech}[2\lambda(t-t_0)]$. El Hamiltoniano de intercambio acopla los espines de los sitios izquierda, $|\Phi_I\rangle$ y centro, $|\Phi_C\rangle$.

$$H_0 = \begin{bmatrix} E_C & -t_0 & 0 & 0 \\ -t_0 & E_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_C & -t_0 \\ 0 & 0 & -t_0 & E_D \end{bmatrix}, \quad (124)$$

donde H_0 representa la dinámica de los sitios centro, $|\Phi_C\rangle$ y derecha, $|\Phi_D\rangle$ sin perturbar, con energías de sitio E_C , E_D , y una probabilidad de transición de espín constante t_0 .

$$H_{SO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & U^+ \\ 0 & 0 & U^+ & 0 \\ 0 & U^- & 0 & 0 \\ U^- & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

H_{SO} es el Hamiltoniano de la interacción espín órbita para los sitios centro, $|\Phi_C\rangle$ y derecha, $|\Phi_D\rangle$, donde $U^\pm = -t_0|k|e^{\pm i\phi}$.

$$H_C(t, b) = \begin{bmatrix} 0 & t_{IC} & 0 & 0 \\ t_{CI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{IC} \\ 0 & 0 & t_{CI} & 0 \end{bmatrix}, \quad (126)$$

donde $t_{IC} = b_{IC}e^{-\frac{(t-t_{QIC})^2}{2\tau_{IC}^2}} - \tanh\frac{(t-t_{QIC})^2}{2\tau_{IC}^2}$, siendo el Hamiltoniano de control, en el que modelamos la forma de las transiciones de espín constante entre sitios centro, $|\Phi_C\rangle$ y derecha, $|\Phi_D\rangle$.

El Hamiltoniano de intercambio, presentado en la ecuación (123) se acopla con la los elementos de la base de sitio $|\Phi_I\rangle$ y $|\Phi_C\rangle$, que son: $|\uparrow\Phi_C\uparrow\rangle, |\downarrow\Phi_C\uparrow\rangle, |\uparrow\Phi_C\downarrow\rangle, |\downarrow\Phi_C\downarrow\rangle$, y no interactúa con el resto de los elementos. Mientras que el resto de los Hamiltonianos de las ecuaciones (124), (125) y (126), se acopla con los elementos de la base de sitio $|\Phi_C\rangle$ y $|\Phi_D\rangle$, los cuales son: $|\uparrow\Phi_D\uparrow\rangle, |\downarrow\Phi_D\uparrow\rangle, |\uparrow\Phi_D\downarrow\rangle, |\downarrow\Phi_D\downarrow\rangle$. La construcción del hamiltoniano total está sujeta a $H_{total} = H_{SS} \otimes I + I \otimes H_0 + I \otimes H_C + I \otimes H_{SO}$, sin olvidar, que la interacción espín-espín, o de intercambio, únicamente podrá darse para el electrón cuyo estado se quiere transmitir, y el electrón en el sitio central $|\Phi_C\rangle$, pues no existirá interacción electrostática con el sitio derecha $|\Phi_D\rangle$, de tal forma que los elementos de matriz en los que aparezca dicha interacción al realizar el producto

exterior, no serán tomados en cuenta. La matriz hamiltoniana total, en la base (117) queda:

$$H(t) = \begin{array}{c} \text{Base} \\ \langle \uparrow \Phi_C \uparrow | \\ \langle \downarrow \Phi_C \uparrow | \\ \langle \uparrow \Phi_C \downarrow | \\ \langle \downarrow \Phi_C \downarrow | \\ \langle \uparrow \Phi_D \uparrow | \\ \langle \downarrow \Phi_D \uparrow | \\ \langle \uparrow \Phi_D \downarrow | \\ \langle \downarrow \Phi_D \downarrow | \end{array} \begin{array}{cccccccc} | \uparrow \Phi_C \uparrow \rangle & | \downarrow \Phi_C \uparrow \rangle & | \uparrow \Phi_C \downarrow \rangle & | \downarrow \Phi_C \downarrow \rangle & | \uparrow \Phi_D \uparrow \rangle & | \downarrow \Phi_D \uparrow \rangle & | \uparrow \Phi_D \downarrow \rangle & | \downarrow \Phi_D \downarrow \rangle \\ \left(\begin{array}{cccccccc} E_1^+ & 0 & 0 & 0 & -t_0 + t_{12} & 0 & U^+ & 0 \\ 0 & E_1^- & J(t)/2 & 0 & 0 & -t_0 + t_{12} & 0 & U^+ \\ 0 & J(t)/2 & E_1^- & 0 & U^- & 0 & -t_0 + t_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1^+ & 0 & U^- & 0 & -t_0 + t_{12} \\ -t_0 + t_{21} & 0 & U^+ & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_0 + t_{21} & 0 & U^+ & 0 & E_2 & 0 & 0 \\ U^- & 0 & -t_0 + t_{21} & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & U^- & 0 & -t_0 + t_{21} & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{array} \right) \end{array} \quad (127)$$

donde $E_1^\pm = E_I + E_C \pm J(t)/4$ y $E_2 = E_C + E_D$.

Por simplicidad se toman las energías de los puntos cuánticos como cero, y se analiza la dinámica originada por la interacción espín-órbita, así como la interacción espín-espín. Se parte de un estado compartido de máximo entrelazamiento entre los puntos centro y derecha, que se logró mediante el control del tuneo y las energías de sitio, con un pulso eléctrico previamente, y los voltajes de sitio. El estado compartido es que se muestra en la ecuación (128), así que lo tomamos como el estado en tiempo cero, siendo este estado, el que previamente preparamos,

$$\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow 0\rangle + e^{i\varphi} |0 \downarrow\rangle). \quad (128)$$

Vemos que tenemos un sistema parecido al que presenta Sattler (Sattler, 2010) a diferencia, de que nuestro modelo utiliza estados entrelazados híbridos de carga y espín.

Como se propuso realizar la medición conjunta en la ecuación (119), estado buscado es $\alpha|\uparrow\Phi_D\uparrow\rangle + \beta|\uparrow\Phi_D\downarrow\rangle$. En otras palabras la medición conjunta conducirá a la partícula en el sitio $|\Phi_I\rangle$ al estado espín arriba e implica que el electrón no se encuentre en el punto central, como se aprecia en la ecuación del planteamiento del problema de control (121). El primer análisis consiste en optimizar la interacción $J(t)$ con la aplicación de los algoritmos genéticos para buscar los parámetros que maximicen la fidelidad del sistema sin otras perturbaciones, de tal forma que el tuneo se mantiene en cero, y la interacción espín órbita, considerada este primer cálculo con $|k| = 0.34, \gamma = 24, \phi = 1\pi/5$, donde la γ empleada es la correspondiente al GaAs (Perel *et al.*, 2003). Utilizamos $\langle k_z^2 \rangle = (\frac{\pi}{\omega})^2 = 24.6nm^{-2}$ (Studer *et al.*, 2010), considerando el ancho de los pozos como $\omega = 20nm$. La función a maximizar es

$$\begin{aligned}\Psi_{obj} &= |\uparrow\Phi_D\rangle \otimes (\alpha_0|\uparrow\rangle_D + \beta_0|\downarrow\rangle_D), \\ f &= |\langle\Psi_{obj}|\Psi(t_{med})\rangle|^2, \\ f &= |\alpha_0^*\alpha_5 + \beta_0^*\alpha_7|^2,\end{aligned}\tag{129}$$

en donde claramente se ve que obtendríamos un máximo cuando el estado de espín que se colocó inicialmente se encuentre en los estados α_5 y α_7

Escogemos un estado arbitrario para el sitio izquierda, con el que se realizará la prueba de optimización. El estado seleccionado, conformará las condiciones iniciales para el cálculo dinámico, el cual, para propósitos particulares, hemos seleccionado $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, quedando como $|\Phi_I(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|\uparrow\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|\downarrow\rangle$, por lo tanto se muestran en la ecuación,

$$|\Psi(0)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|\uparrow\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|\downarrow\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_C\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_D\downarrow\rangle\right).\tag{130}$$

La optimización del sistema únicamente con $J(t)$ como parámetro a controlar y con el tuneo de espín constante nulo, utilizando los algoritmos genéticos, nos arroja como resultados óptimos el pulso

$$J(t) = 2.62meV \operatorname{sech}(2 * 0.0057 * (t - 630)); \quad (131)$$

sin embargo, el comportamiento de la dinámica del sistema ante estas condiciones lo podemos apreciar en la figura 26.

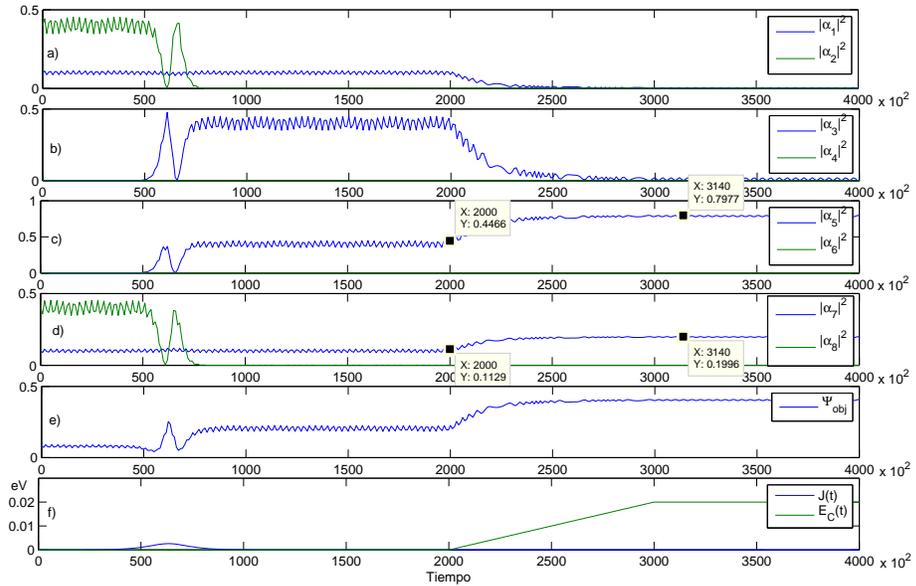


Figura 26. Probabilidades de ocupación como función del tiempo, para la función de onda (117) en el protocolo de teleportación del estado de espín del sitio $|\Phi_I\rangle$ al sitio $|\Phi_D\rangle$, únicamente con la interacción electrostática $J(t)$ y la energía de sitio E_C como parte del control. Se obtiene el estado invertido en el sitio derecha: $|\Phi_D\rangle = \alpha |\downarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle$. Probabilidades de ocupación de: (a) $|\uparrow\Phi_C\uparrow\rangle, |\downarrow\Phi_C\uparrow\rangle$, (b) $|\uparrow\Phi_C\downarrow\rangle, |\downarrow\Phi_C\downarrow\rangle$, (c) $|\uparrow\Phi_D\uparrow\rangle, |\downarrow\Phi_D\uparrow\rangle$, (d) $|\uparrow\Phi_D\downarrow\rangle, |\downarrow\Phi_D\downarrow\rangle$, (e) función objetivo (121), (f) Interacción electrostática $J(t)$ y energía de sitio $E_C(t)$

Obtuvimos como parámetros de optimización los que se muestran a continuación y que conforman los pulsos de control que se definieron en el planteamiento del problema

de control:

$$\begin{aligned} J_0 &= 2.62meV, \quad \lambda = 0.0057, \quad t_0 = 634, \\ b_{CD} &= 0.1547, \quad t_{CD} = 1256, \quad \tau_{CD} = 105. \end{aligned} \tag{132}$$

La dinámica del sistema sometida a los parámetros que maximizan la función objetivo, según la metodología del presente modelo, la podemos apreciar en la figura 26. Donde de la 26(a) a la 26(d) se grafican las probabilidades como función del tiempo para cada uno de los estados de la función de onda a todo tiempo descrita en la ecuación (117), en la figura 26(e), la función objetivo (121), y en la figura 26(f), la función de intercambio $J(t)$ y la energía del sitio centro $E_C(t)$. Podemos apreciar la evolución temporal del sistema desde la condición inicial de la ecuación (130), donde se busca teleportar el estado $|\Phi_I\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ al sitio derecha. Aproximadamente del tiempo $t = 0$ a $t = 500 \times 10^2$ el sistema se encuentra en la condición inicial mostrada en la ecuación (130), sin cambios en la función objetivo y con las funciones de intercambio $J(t)$ y energía de sitio $E_C(t)$ nulos. Del tiempo $t = 500 \times 10^2$ a $t = 1000 \times 10^2$, podemos apreciar la intervención del pulso de intercambio $J(t)$, el cual produce transiciones en los estados del sistema. Las curvas en color verde de las figuras 26(a) y 26(d) se anulan, y quedan únicamente aquellas de color azul mostradas de la figura 26(a) a la 26(d), las cuales representan los estados con la partícula en el sitio izquierda con espín arriba, $|\uparrow\rangle_D$. Esto significa que el pulso de intercambio hizo las veces de una medida proyectiva de espín arriba sobre el sitio izquierda, la que se mantiene después de que el pulso de intercambio se anula. Esto resulta útil, pues es una de las mediciones conjuntas que propusimos. Los estados objetivo son los mostrados por las curvas en azul de las figuras 26(c) y 26(d), que representan la probabilidad de encontrar al electrón con espín $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$, respectivamente en el sitio derecha. Los valores óptimos que esperaríamos al tiempo de medición ($t_m = 2000 \times 10^2$) son $|\alpha_5|^2 = |\alpha|^2$ y $|\alpha_7|^2 = |\beta|^2$ y a su vez que

$|\alpha_5|^2 + |\alpha_7|^2 = 1$, indicando un máximo de probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha con los estados deseados. Sin embargo, podemos apreciar en primera instancia que la suma de las probabilidades es aproximadamente 0.5, indicando que la probabilidad se encuentra distribuida en el sitio centro y derecha. Incrementamos la energía de sitio centro $E_C(t)$ a partir de $t = 2000 \times 10^2$ como función del tiempo para maximizar la probabilidad del sitio derecha, y encontramos que alrededor del tiempo $t = 2500 \times 10^2$ la partícula se encuentra completamente en el sitio derecha, aunque el estado es $|\Phi_D\rangle = \beta |\uparrow\rangle_D + \alpha |\downarrow\rangle_D$, el cual, es el opuesto al que se deseaba teleportar. Por esta razón incluiremos la compuerta *NOT* para inducir una rotación en X en el grado de libertad de espín de los sitios centro y derecha.

Es de esperar que únicamente manipulando $J(t)$ no se logrará una transferencia de las amplitudes de probabilidad del estado $|\Phi_I(0)\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$ que se busca teleportar al sitio $|\Phi_D\rangle$; sin embargo, el estado se transfiere sólo que con fase contraria. Esto nos hace pensar que posterior a la transferencia del estado, una compuerta *NOT* sobre el qubit del sitio derecha $|\Phi_D\rangle$, reproducirá el estado original. Adicionalmente el estado se encuentra distribuido entre los sitios centro y derecha, por la naturaleza del sistema y que éstos conformaban originalmente un sistema entrelazado. Es por esta razón que se incluye una energía de sitio dependiente del tiempo, en el sitio central $E_c(t)$, la cual disminuye la probabilidad de población en dicho sitio, aumentando por tanto la probabilidad de encontrar la partícula con el estado anteriormente compartido completamente en el sitio derecha. Resulta claro que la compuerta swap la podemos formar de la siguiente manera,

$$X_D = I \otimes I \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (133)$$

La compuerta *NOT* mostrada en la ecuación anterior, no es más que el tuneleo entre sitios centro y derecha t_{CD} , que ignoramos en el primer cálculo. El protocolo; sin embargo, ha mostrado que es necesaria su implementación de manera natural. Permitimos por lo tanto que los parámetros a controlar sean el tuneleo del sitio centro derecha t_{CD} , así como la interacción electrostática $J(t)$. El estado inicial que tenemos es,

$$\begin{aligned}
 |\Psi(0)\rangle &= (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \uparrow\rangle + |\Phi_D \downarrow\rangle)\right), \\
 |\Psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{10}} |\uparrow \Phi_C \uparrow\rangle + \frac{2}{\sqrt{10}} |\downarrow \Phi_C \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} |\uparrow \Phi_D \downarrow\rangle + \frac{2}{\sqrt{10}} |\downarrow \Phi_D \downarrow\rangle.
 \end{aligned} \tag{134}$$

La evolución temporal del sistema es exactamente igual como se explicó para la figura 26 hasta un tiempo aproximado $t = 1000 \times 10^2$. Del tiempo $t = 1000 \times 10^2$ a $t = 1500 \times 10^2$, existe probabilidad de tuneleo con espín constante t_{CD} , la cual produce un intercambio de los coeficientes α_5 y α_7 de las figuras 27(c) y 27(d), comparados con los mismos coeficientes de la figura 26. De esta forma, al tiempo de medición ($t_m = 2000 \times 10^2$) hay una probabilidad aproximada de 0.44 de encontrar el estado deseado en el sitio derecha. Esto representa una transferencia cercana al 50%, sin embargo, es un estado que oscila entre los sitios centro y derecha, el cual lo podemos ver en la figura 27. Aquí podemos ver que si realizáramos una medición de carga en el sitio derecha, entonces la partícula colapsaría al estado deseado, esto puede verse como realizar una medición de ausencia de carga en el sitio central, y pasaría a formar parte del protocolo, pues sería una de las mediciones conjuntas que Alice realiza en los puntos cuánticos de los que dispone. A partir del tiempo $t = 2000 \times 10^2$ incrementamos la energía de sitio $E_C(t)$ y a partir de $t = 2500 \times 10^2$, se obtiene un estado muy próximo al que se deseaba teleportar. En la figura se muestran las probabilidades al tiempo $t = 2900 \times 10^2$. Vemos en la figura 27(c) que la probabilidad de encontrar al electrón en el sitio derecha con espín arriba es de 0.2015 contra 0.2 del valor ideal; y la probabilidad

de encontrar el electrón en el sitio derecha con espín abajo es de 0.7912 contra el valor ideal de 0.8. La probabilidad total de encontrar la partícula en el sitio derecha con el estado deseado es por lo tanto de 99.27%.

Los estados que obtenemos al tiempo de medición son aquellos que corresponden a probabilidad 1 de que el espín del electrón en el sitio izquierda (el que se quería transmitir) esté orientado hacia arriba. Esto se explica, debido a que la interacción espín-espín que se llevó a cabo $[J(t)]$, hizo las veces de una medida proyectiva sobre espín arriba en la partícula del sitio izquierda. Luego el incremento en la energía de sitio centro $E_C(t)$ equivale a realizar una medición de ausencia de carga en el centro. Completando las mediciones conjuntas que realiza Alice en los dos sitios que posee.

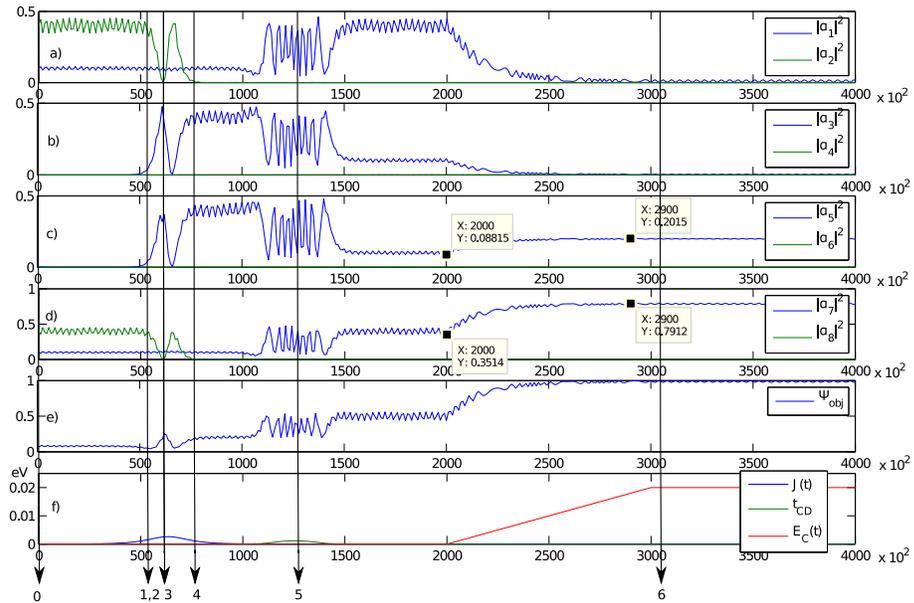


Figura 27. Probabilidades de ocupación como función del tiempo para la función de onda (117) en el protocolo de teleportación del estado de espín del sitio $|\Phi_I\rangle$ al sitio $|\Phi_D\rangle$, con la interacción electrostática $J(t)$, el tuneleo t_{23} , y la energía de sitio E_C como parte del control. Se obtiene el estado teleportado en el sitio derecha, con una probabilidad del 99.27%: $|\Phi_D\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$. Probabilidades de ocupación de: (a) $|\uparrow\Phi_C\uparrow\rangle, |\downarrow\Phi_C\uparrow\rangle$, (b) $|\uparrow\Phi_C\downarrow\rangle, |\downarrow\Phi_C\downarrow\rangle$, (c) $|\uparrow\Phi_D\uparrow\rangle, |\downarrow\Phi_D\uparrow\rangle$, (d) $|\uparrow\Phi_D\downarrow\rangle, |\downarrow\Phi_D\downarrow\rangle$, (e) función objetivo (121), (f) Interacción electrostática $J(t)$, tuneleo t_{23} y energía de sitio E_C . Las flechas numeradas marcando posiciones en el tiempo, muestran las operaciones de la ecuación (135).

Podemos tener una visión más clara del mecanismo si establecemos el circuito cuántico equivalente que describe la dinámica que está sucediendo en nuestro sistema físico. La cual ilustramos en la figura 28.

Las ecuaciones que describen las operaciones del circuito equivalente se muestran a continuación:

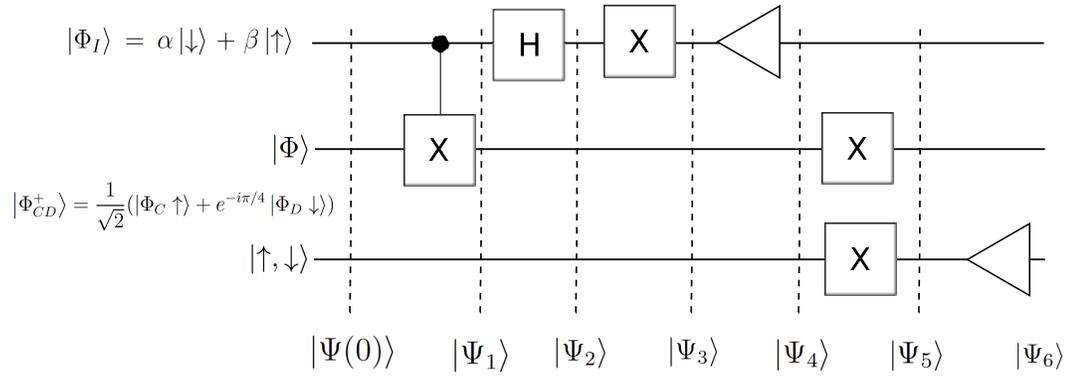


Figura 28. Circuito equivalente del protocolo de Teleportación cuántica efectivo para el modelo propuesto. El estado compartido es $|\Phi_{CD}^+\rangle$, el estado a teleportar $|\Phi_I\rangle$, que es recibido como $|\Phi_D\rangle$

$$\begin{aligned}
 |\Psi(0)\rangle &= (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \otimes |\Phi_{CD}^+\rangle, \\
 |\Psi_1\rangle &= \text{CNOT}|\Psi(0)\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes (|\Phi_D\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_C\downarrow\rangle) \\
 &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \otimes (|\Phi_C\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_D\downarrow\rangle), \\
 |\Psi_2\rangle &= \text{H}|\Psi_1\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}} \otimes (|\Phi_D\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_C\downarrow\rangle) \\
 &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\frac{(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \otimes (|\Phi_C\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_D\downarrow\rangle), \\
 |\Psi_3\rangle &= X \otimes I \otimes I|\Psi_2\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \otimes (|\Phi_D\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_C\downarrow\rangle) \\
 &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\frac{(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \otimes (|\Phi_C\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_D\downarrow\rangle), \\
 |\Psi_4\rangle &= \langle\uparrow \otimes I \otimes I|\Psi_3\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes (|\Phi_D\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_C\downarrow\rangle) \\
 &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes (|\Phi_C\uparrow\rangle + e^{-i\phi}|\Phi_D\downarrow\rangle), \\
 |\Psi_5\rangle &= I \otimes X \otimes X|\Psi_5\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes (e^{-i\phi}|\Phi_D\uparrow\rangle + |\Phi_C\downarrow\rangle) \\
 &\quad + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes (e^{-i\phi}|\Phi_C\uparrow\rangle + |\Phi_D\downarrow\rangle), \\
 |\Psi_6\rangle &= \langle\uparrow \Phi_D \otimes I|\Psi_6\rangle = e^{-i\phi}\alpha|\uparrow\rangle_D + \beta|\downarrow\rangle_D.
 \end{aligned} \tag{135}$$

Veremos la correspondencia de estas operaciones con la dinámica del sistema mostrada en la figura 27. De la figura 27(a) a la 27(d) se grafican las probabilidades como función del tiempo para cada uno de los estados de la función de onda a todo tiempo descrita en la ecuación (117), en la figura 27(e), la función objetivo (121), y en la figura 27(f), la función de intercambio $J(t)$ y la energía del sitio centro $E_C(t)$. Podemos apreciar la evolución temporal del sistema desde la condición inicial de la ecuación (130), donde se busca teleportar el estado $|\Phi_I\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$ al sitio derecha. Aproximadamente del tiempo $t = 0$ a $t = 500 \times 10^2$ el sistema se encuentra en la condición inicial mostrada en la ecuación (130), sin cambios en la función objetivo y con las funciones de intercambio $J(t)$ y energía de sitio $E_C(t)$ nulos, $|\Psi(0)\rangle$. Del tiempo $t = 500 \times 10^2$ a $t = 1000 \times 10^2$, podemos apreciar la intervención del pulso de intercambio $J(t)$, el cual produce transiciones en los estados del sistema. En estas transiciones podemos identificar una compuerta $CNOT$, en tiempos cercanos a 500×10^2 cuando las curvas en color verde de las gráficas 27(a) y 27(d) que representan la probabilidad de los estados $|\downarrow \Phi_C \uparrow\rangle$ y $|\downarrow \Phi_D \downarrow\rangle$, dando lugar a los estados $|\uparrow \Phi_C \downarrow\rangle$ y $|\uparrow \Phi_D \downarrow\rangle$ mostradas en las gráficas 27(b) y 27(c) ($|\Psi_2\rangle$), posteriormente se recuperan las probabilidades de los estados iniciales indicando una segunda $CNOT$. Posteriormente las curvas de las probabilidades de los estados $|\downarrow \Phi_C \uparrow\rangle$ y $|\downarrow \Phi_D \downarrow\rangle$ descienden nuevamente, y aumentan las de los estados $|\uparrow \Phi_C \downarrow\rangle$ y $|\uparrow \Phi_D \downarrow\rangle$, en esta ocasión lo ilustramos con una operación H , X y la equivalencia de una medida proyectiva sobre espín arriba en el sitio izquierda, $|\Psi_4\rangle$. Del tiempo $t = 1000 \times 10^2$ a $t = 1500 \times 10^2$, existe una probabilidad de tuneleo entre los sitios centro y derecha con cambio de espín, diferente de cero, lo que genera una compuerta X en el grado de libertad de espín y el de carga de los sitios centro y derecha, $|\Psi_5\rangle$.

Los estados objetivo son los mostrados por las curvas en azul de las figuras 27(c) y 27(d), que representan la probabilidad de encontrar al electrón con espín $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$, respectivamente en el sitio derecha. Los valores óptimos que esperaríamos al tiempo de medición ($t_m = 2000 \times 10^2$) son $|\alpha_5|^2 = |\alpha|^2$ y $|\alpha_7|^2 = |\beta|^2$ y a su vez que $|\alpha_5|^2 + |\alpha_7|^2 = 1$, indicando un máximo de probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha con los estados deseados. Sin embargo, podemos apreciar en primera instancia que la suma de las probabilidades es aproximadamente 0.5, indicando que la probabilidad se encuentra distribuida en el sitio centro y derecha. Incrementamos la energía de sitio centro $E_C(t)$ a partir de $t = 2000 \times 10^2$ como función del tiempo para maximizar la probabilidad del sitio derecha, y encontramos que alrededor del tiempo $t = 2500 \times 10^2$ la partícula se encuentra completamente en el sitio derecha. Esto es equivalente a realizar una medición de carga en el sitio derecha o de ausencia de carga en el sitio centro, $|\Psi_6\rangle$, a diferencia de los estados mostrados en la gráfica 26, las probabilidades de cada estado son las correctas, logrado mediante la compuerta X que se aplicó en los grados de libertad de espín y carga de los sitios centro y derecha. La probabilidad total de encontrar la partícula en el sitio derecha con el estado deseado es por lo tanto de 99.27%.

Las características que cumple este sistema físico son exactamente las mismas que en un principio fueron propuestas para el protocolo de teleportación cuántica. Vemos que para que la medición conjunta de los estados que posee el emisor (Alice), fue llevada a cabo, siguiendo la pauta C-NOT/Hadamard. Esto se logra con la interacción del pulso de intercambio $J(t)$, el cual genera compuertas $CNOT$ dinámicas. Durante la evolución de la acción de $J(t)$, los estados originales van evolucionando hasta alcanzar los estados propios de la acción de una compuerta $CNOT$, por lo que antes de que esto suceda, hay una superposición de ambos. Esto lo expresamos en el circuito como una compuerta Hadamard y una medida proyectiva.

Antes de aplicar un potencial en el sitio centro, $E_C(t)$, la probabilidad de encontrar la partícula en el punto derecha $|\Phi_D\rangle$ no era 1, pues faltaba realizar la segunda parte de la medición conjunta, donde se mide, ya sea la ausencia de carga en el punto central o carga en el punto derecha. Una vez efectuada, entonces, la renormalización de la combinación de espín en la derecha nos da el estado que tenía el electrón en el punto izquierda en un principio. Es evidente, que para detectar el estado que se busca teleportar es necesario medir la partícula en el sitio derecha, de tal forma, que esto no implica una acción adicional innecesaria. En el presente caso, si medimos carga en el sitio derecha, la función de onda al colapsarse queda como la original y por lo tanto: $|\Phi_D(t > 3000)\rangle = |\Phi_I(t = 0)\rangle$. Sin embargo, con energía de sitio como se muestra en la figura 27, vemos que con una rampa suave, a partir de $10t_0$ tenemos una probabilidad cercana a 1 de encontrar la partícula en el sitio derecha, con el estado deseado.

En este trabajo se muestran los resultados con una función de onda del sitio izquierda definida de forma arbitraria. Sin embargo, el protocolo funciona para cualquier función de onda, en otras palabras, permite teleportar cualquier estado cuántico colocado en el sitio $|\Phi_I\rangle$ siguiendo los pulsos de control obtenidos.

Capítulo V

Modelado del protocolo código super denso con estados híbridos entrelazados de carga y espín

El objetivo fundamental de este capítulo es establecer un esquema de control sobre un modelo de puntos cuánticos, que permita, con estados entrelazados híbridos, implementar el protocolo del código súper denso para comunicación de información cuántica.

Para la aplicación del esquema de control en el protocolo del código súper denso, el modelo utiliza únicamente dos puntos cuánticos. Alice, que se encuentra en posesión del punto cuántico izquierda, quiere enviar a Bob, que posee el punto cuántico de la derecha, dos bits clásicos utilizando el sistema cuántico que comparten. El código súper denso consiste en que dado un estado compartido de máximo entrelazamiento, en este caso $|\Psi_{CD}^+\rangle$, se realiza una operación unitaria sobre el qubit que posee Alice, como se describe en la ecuación 137, Esto genera un nuevo estado de máximo entrelazamiento. Realizando una medición en la base de Bell sobre el sistema completo, podemos discernir cual de los estados de Bell se ha generado. En otras palabras, se puede transferir el equivalente a dos bits clásicos únicamente enviando el equivalente de una estado entrelazado. Para el caso particular, como es un sistema híbrido, significa que se realiza la medición sobre el sistema total.

Proponemos el sistema mostrado en la figura 29, el cual consta de 2 puntos cuánticos acoplados, con una probabilidad de transición con espín constante, $t(t)$, que es contro-

lable con parámetros externos y una probabilidad de tuneo con cambio de espín, generada por el acoplamiento espín-órbita tipo Dresselhaus, inherente al material, t_{SO} . Los puntos cuánticos tienen energías de sitio $E_C(t)$ y $E_D(t)$, las cuales también formarán parte del control. Para el protocolo del código super denso, el problema puede descomponerse en cuatro problemas de optimización separados, en donde cada uno será llevar al sistema a cada uno de los estados de la base de Bell híbrida, partiendo de un estado de máximo entrelazamiento. En el presente capítulo presentamos primeramente un panorama general del modelo y desglosamos posteriormente el desarrollo de cada uno de los problemas de optimización que nos llevan a alcanzar las funciones objetivo del sistema.

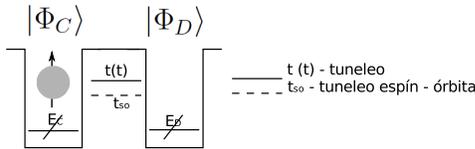


Figura 29. Modelo propuesto para la implementación del protocolo de código super denso. Consta de 2 puntos cuánticos laterales acoplados. Inicialmente colocamos un electrón en el sitio izquierda, obtenemos el estado $|\Phi^+\rangle$, que utilizaremos para generar los estados $|\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle$

Utilizaremos la base de ocupación y espín, por lo que la función de onda completa del sistema queda como sigue,

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_1 |\Phi_C \uparrow\rangle + \alpha_2 |\Phi_D \uparrow\rangle + \alpha_3 |\Phi_C \downarrow\rangle + \alpha_4 |\Phi_D \downarrow\rangle. \quad (136)$$

La generación de las operaciones unitarias necesarias para implementar el código súper denso, se realiza mediante el control del tuneo entre los dos sitios, que permite implementar la compuerta X ; y las energías de sitio de forma antisimétrica, es decir, la compuerta Z

Asumimos la preparación de estado del mismo modo que en la sección de teleportación. De tal forma que partimos de la condición inicial $|\Psi_{CD}^+\rangle$. Y planteamos el

protocolo como sigue:

$$\begin{aligned}
|\Phi_{CD}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow 0\rangle + |\downarrow 0\rangle), \\
00 &\rightarrow (I_C \otimes I_D) |\Phi_{CD}^+\rangle = |\Phi_{CD}^+\rangle, \\
01 &\rightarrow (X_C \otimes I_D) |\Phi_{CD}^+\rangle = |\Psi_{CD}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0 \uparrow\rangle + |\downarrow 0\rangle), \\
10 &\rightarrow (Y_C \otimes I_D) |\Phi_{CD}^+\rangle = |\Psi_{CD}^-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|0 \uparrow\rangle - |\downarrow 0\rangle), \\
11 &\rightarrow (Z_C \otimes I_D) |\Phi_{CD}^+\rangle = |\Phi_{CD}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow 0\rangle - |\downarrow 0\rangle),
\end{aligned} \tag{137}$$

es evidente de las ecuaciones (137) que se deben plantear 4 pulsos de control para generar los estados de la base de Bell que serán el medio de lectura de información.

La base sobre la que trabajamos es: $|\Psi(t)\rangle = \alpha_1 |\uparrow 0\rangle + \alpha_2 |0 \uparrow\rangle + \alpha_3 |\downarrow 0\rangle + \alpha_4 |0 \downarrow\rangle$. Las funciones objetivo las calcularemos como aquellas que maximicen la concurrencia y a su vez la probabilidad de estar en los estados correspondientes, como la proyección de cada uno con la función de onda completa.

Definición del esquema de control

1. Definimos el Hamiltoniano del sistema y el Hamiltoniano de control sobre el que optimizaremos el espacio de parámetros. Como estamos trabajando con un sistema de dos niveles, es decir, de dos qubits, la dinámica que lo describe es exactamente la misma que en la ecuación (104),

$$H(t) = H_0 + H_S + H_C(t, b), \tag{138}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \begin{bmatrix} E_C & t_0 & 0 & 0 \\ t_0 & E_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_C & t_0 \\ 0 & 0 & t_0 & E_D \end{bmatrix}, \\
 H_S &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma|k|E_C e^{i\phi} & \gamma|k|t_0 e^{i\phi} \\ 0 & 0 & \gamma|k|t_0 e^{i\phi} & \gamma|k|E_D e^{i\phi} \\ \gamma|k|E_C e^{-i\phi} & \gamma|k|t_0 e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ \gamma|k|t_0 e^{-i\phi} & \gamma|k|E_D e^{-i\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 H_C(t, b) &= \begin{bmatrix} \sigma_{CD}^+(t, b) & t_{CD}(t, b) & 0 & 0 \\ t_{CD}^*(t, b) & \sigma_{CD}^-(t, b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{CD}^+(t, b) & t_{CD}(t, b) \\ 0 & 0 & t_{CD}^*(t, b) & \sigma_{CD}^-(t, b) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{139}$$

2. Los parámetros a controlar, al igual que como vimos en la generación del estado de entrelazamiento híbrido en la ecuación (106), son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 t_{CD}(t, b) &= b_{CD} e^{-\frac{(t-t_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}} - \tanh\frac{(t-t_{CD})^2}{2\tau_{CD}^2}, \\
 \sigma_{CD}^+(t, b) &= b\sigma_{CD} e^{-\frac{(t-t\sigma_{CD})^2}{2\tau\sigma_{CD}^2}} - \tanh\frac{(t-t\sigma_{CD})^2}{2\tau\sigma_{CD}^2}, \\
 \sigma_{CD}^-(t, b) &= -\sigma_{CD}^+(t, b).
 \end{aligned} \tag{140}$$

3. La función objetivo a optimizar, varía dependiendo de cual de los estados se esté buscando, quedará definida de forma más explícita para cada uno de los casos descritos en el protocolo mostrado en la ecuación (137). Las diferentes funciones objetivo consistirán en maximizar la probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de los estados de la base de Bell híbrida, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla III. Funciones objetivo para generar los estados de la base de Bell híbrida en el protocolo de código super denso.

| Entradas b, a | Estado Original | Evoluciona al estado | Función objetivo |
|---------------|------------------|----------------------|---|
| 00 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Phi^+\rangle$ | $f = \langle\Phi_{CD}^+ \Psi(t)\rangle ^2 + C$ |
| 01 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Psi^+\rangle$ | $f = \langle\Psi_{CD}^+ \Psi(t)\rangle ^2 + C$ |
| 10 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Psi^-\rangle$ | $f = \langle\Psi_{CD}^- \Psi(t)\rangle ^2 + C$ |
| 11 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Phi^-\rangle$ | $f = \langle\Phi_{CD}^- \Psi(t)\rangle ^2 + C$ |

Donde C es la concurrencia. Definida por $C = 2|\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3|$.

4. Integración de la ecuación de onda dependiente del tiempo.
5. Aplicación del algoritmo genético.

V.1 Control para enviar el dato 00

Este es un caso trivial, pues el dato 00 representa llevar al sistema al mismo estado entrelazado del que estamos partiendo, de tal forma, que no es necesario realizar ninguna acción de contro; sin embargo, incluimos el caso, para seguir de forma metódica con todos los casos. Definimos la función objetivo mostrada en la ecuación 141. Podemos apreciar la evolución en la figura 30,

$$\begin{aligned}
 f &= |\langle\Phi_{CD}^+|\Psi(t)\rangle|^2, \\
 f &= \frac{1}{2}|\alpha_1(t) + \alpha_4(t)|^2.
 \end{aligned}
 \tag{141}$$

En la figura, se muestra la evolución temporal de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136), en los incisos a) al d) respectivamente. En el inciso d) se muestra la función objetivo (141), y en d) los pulsos de

control que permiten la evolución del sistema al estado deseado.

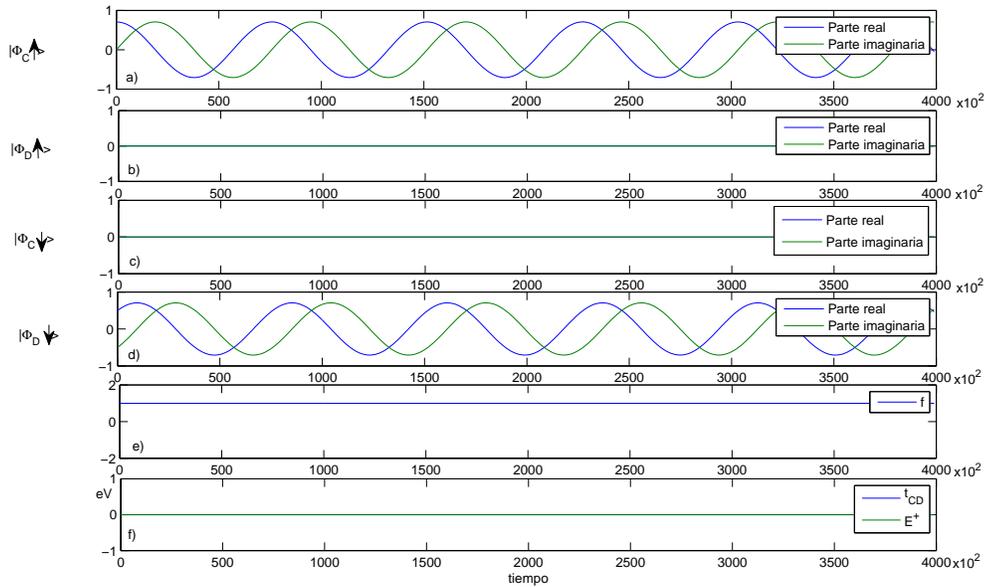


Figura 30. Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $|\Phi_{CD}^+\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C \uparrow\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D \uparrow\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C \downarrow\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D \downarrow\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (141), (f) pulsos de control.

Vemos que no es necesaria la aplicación de ningún pulso de control para mantener el estado original, simplemente, no se hace nada. Además debido a que el estado original y el estado buscado son el mismo, la función objetivo es muy simple, ya que sólo es maximizar la probabilidad de encontrarse en el mismo estado. De tal manera que arroja exactamente la evolución del estado compartido. Podemos representar esto como la aplicación de la identidad de la forma mostrada en la figura:

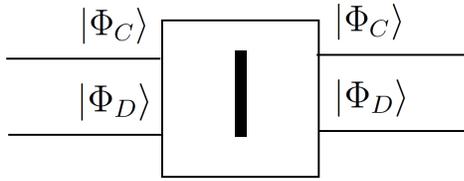


Figura 31. Representación con compuertas de la operación para transmitir el estado 00 utilizando el código súper denso. La aplicación de la identidad mantiene el estado original compartido, el cual es $|\Phi_{CD}^+\rangle$

V.2 Control para enviar el dato 01

Definimos la función objetivo,

$$f = |\langle \Psi_{CD}^+ | \Psi(t) \rangle|^2 + C, \quad (142)$$

$$f = \frac{1}{2} |\alpha_2(t) + \alpha_3(t)e^{i\pi/4}|^2 + 2|\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3|.$$

Podemos apreciar la evolución temporal del sistema en la figura 32. Se muestra la evolución temporal de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136), en los incisos a) al d) respectivamente. En el inciso d) se muestra la función objetivo (142), y en d) los pulsos de control que permiten la evolución del sistema al estado deseado. A diferencia del cálculo para $|\Phi_{CD}^+\rangle$ anterior, buscamos una transformación a otro estado de la base de Bell híbrida. Donde el estado compartido inicial es $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \uparrow\rangle + e^{-i\pi/4} |\Phi_D \downarrow\rangle)$. Es decir, que para el estado 01, buscaremos obtener el estado: $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4} |\Phi_C \downarrow\rangle + |\Phi_D \uparrow\rangle)$. La evolución se muestra con la fase incluida y vemos las gráficas de una forma más suave.

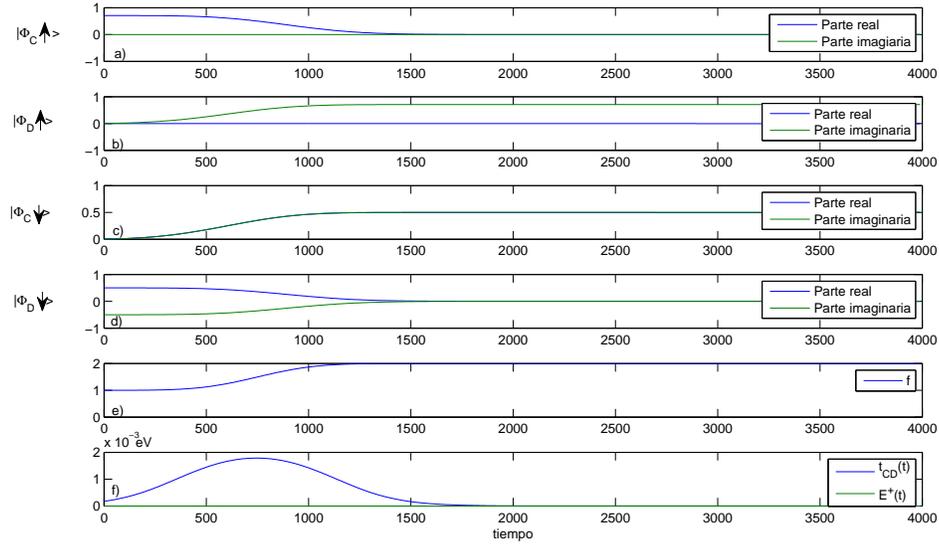


Figura 32. Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $|\Psi_{CD}^+\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C \uparrow\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D \uparrow\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C \downarrow\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D \downarrow\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (142), (f) pulsos de control: tuneleo con espín constante en azul, $t_{CD}(t)$.

Tal como vemos en la figura, el único pulso de control que aparece es el del tuneleo que es el que promueve transiciones con espín constante. Era de esperarse que no apareciera la interacción correspondiente a la compuerta Z , pues la fase global es constante.

Si analizamos el pulso de control podemos ver que es el siguiente:

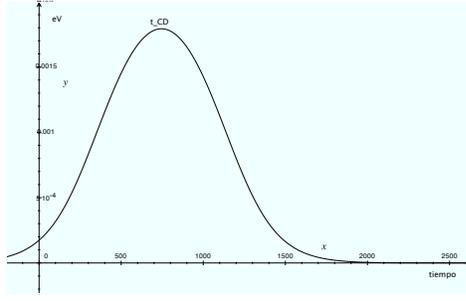


Figura 33. Pulso de control t_{CD} , que lleva al sistema del estado $|\Phi_{CD}^+\rangle$ a estado $|\Psi_{CD}^+\rangle$

Lo cual es equivalente a una rotación en X de la forma $R_X(\pi)$. Este pulso tiene los parámetros:

$$\begin{aligned} b_{CD} &= 0.78, & O_{CD} &= 745, & \tau_{CD} &= 388, \\ b\sigma_{CD} &= 0, & O\sigma_{CD} &= 0, & \tau\sigma_{CD} &= 0. \end{aligned} \quad (143)$$

Podemos representar esto como la aplicación de la compuerta mostrada en la figura:

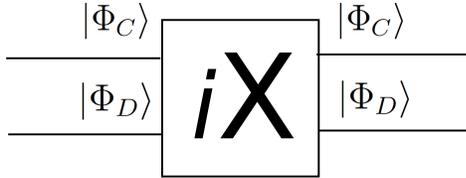


Figura 34. Representación con compuerta de la operación para transmitir el estado 01 utilizando el código súper denso. La aplicación de la compuerta $X \otimes I$, conduce al estado $|\Psi_{CD}^+\rangle$

V.3 Control para enviar el dato 10

Procedemos de forma análoga al estado 01, definimos la función objetivo como,

$$\begin{aligned} f &= |\langle \Psi_{CD}^- | \Psi(t) \rangle|^2 + C, \\ f &= \frac{1}{2} |\alpha_2(t) - e^{i\pi/4} \alpha_3(t)|^2 + 2|\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3|. \end{aligned} \quad (144)$$

Podemos apreciar la evolución en la figura 35 la evolución temporal del sistema. Se muestra la evolución temporal de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136), en los incisos a) al d) respectivamente. En el inciso d) se muestra la función objetivo (144), y en d) los pulsos de control que permiten la evolución del sistema al estado deseado.

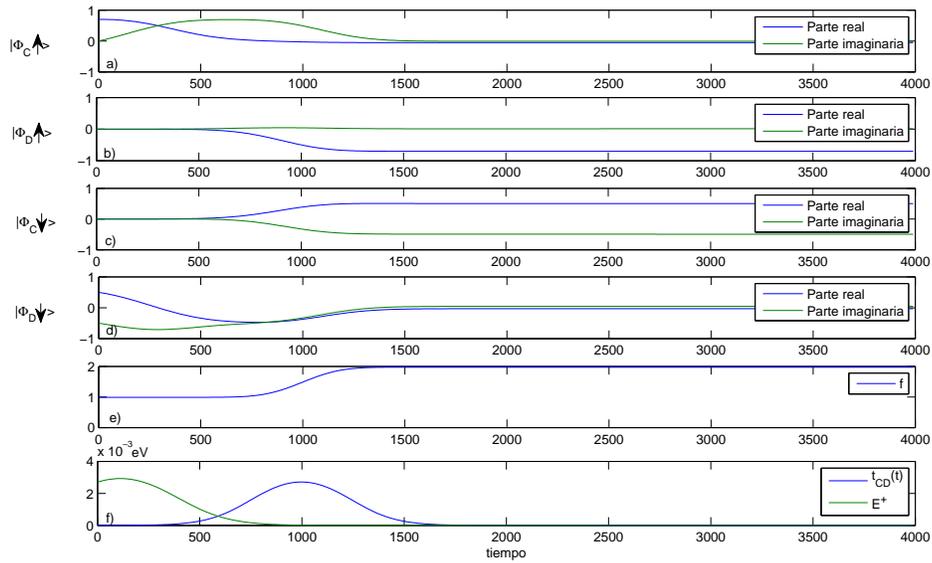


Figura 35. Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $|\Psi_{CD}^-\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C \uparrow\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D \uparrow\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C \downarrow\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D \downarrow\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (144), (f) pulsos de control: tuneleo con espín constante en azul, $t_{CD}(t)$ y energía del sitio centro $E^+(t)$, que es antisimétrica con la energía del sitio derecha, y forman la compuerta Z.

Nuevamente si vemos la acción de los pulsos de control, observamos en la figura 36, esperaríamos que las áreas bajo cada una de las curvas fuera $\pi/2$. Sin embargo, el área de bajo la curva de $E^+ = 1.3$ no es $\pi/2$. La parte faltante la encontramos en el traslape que existe con el tuneleo siendo éste de 0.27, lo que explica que cuando existe tuneleo, a la vez, parte de esos estados que están siendo pasados con fase constante,

están evolucionando en su fase. Lo que justifica el cambio de fase necesario para generar el estado $|\Psi^-\rangle$

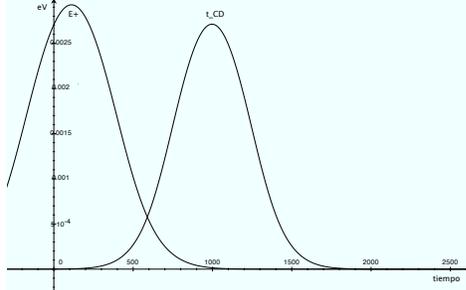


Figura 36. Pulsos de control t_{CD} y E^+ , que lleva al sistema del estado $|\Phi_{CD}^+\rangle$ a estado $|\Psi_{CD}^-\rangle$

Los pulsos de control tienen los parámetros optimizados con sigue:

$$\begin{aligned} b_{CD} &= 1.71, & O_{CD} &= 997, & \tau_{CD} &= 249, \\ b\sigma_{CD} &= 1.92, & O\sigma_{CD} &= 111, & \tau\sigma_{CD} &= 284. \end{aligned} \quad (145)$$

Podemos representar esto como la aplicación de las compuertas mostradas en la figura:

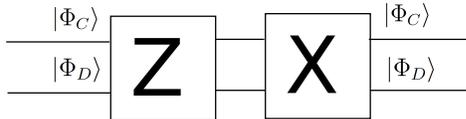


Figura 37. Representación con compuerta de la operaciones para transmitir el estado 10 utilizando el código súper denso. La aplicación de las compuertas $ZX \otimes I$, permite alcanzar el estado $|\Psi_{CD}^-\rangle$

V.4 Control para enviar el dato 11

Definimos la función objetivo mostrada en la ecuación:

$$\begin{aligned} f &= |\langle \Phi_{CD}^- | \Psi(t) \rangle|^2 + C, \\ f &= \frac{1}{2} |\alpha_1(t) - e^{i\pi/4} \alpha_4(t)|^2 + 2 |\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3|. \end{aligned} \quad (146)$$

Podemos apreciar la evolución temporal en la figura 38. Se muestra la evolución temporal de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136), en los incisos a) al d) respectivamente. En el inciso d) se muestra la función objetivo (146), y en d) los pulsos de control que permiten la evolución del sistema al estado deseado. Podemos apreciar la acción de los pulsos de tuneo y la energía de sitio. Sin embargo, vemos que el tuneo es lo suficientemente corto como para mostrar un efecto visible en el sistema.

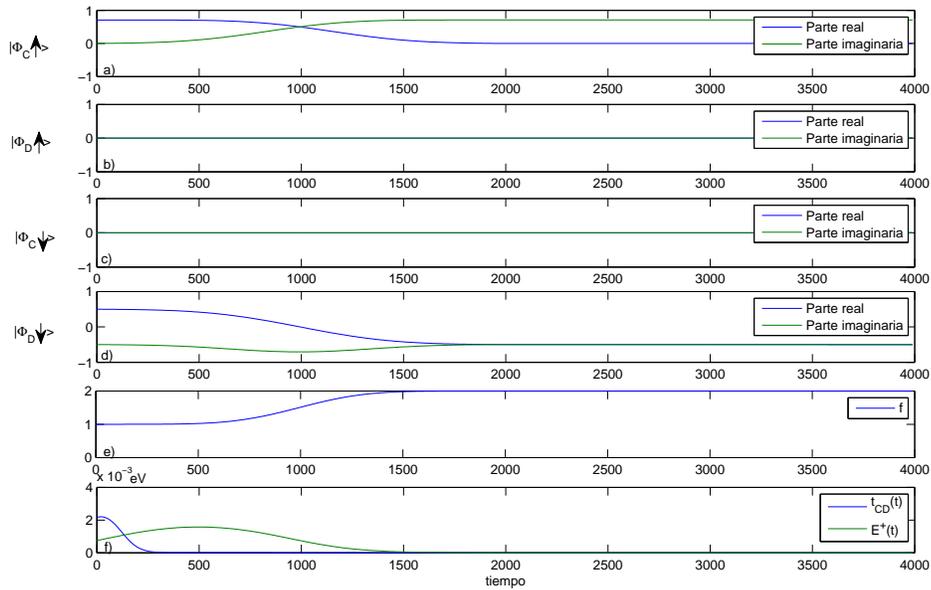


Figura 38. Evolución en el tiempo de las partes real e imaginaria de los coeficientes de expansión de la función de onda (136) para obtener el estado $|\Phi_{CD}^-\rangle$. (a) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C^+\rangle$, (b) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D^+\rangle$, (d) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_C^-\rangle$, (e) parte real e imaginaria del coeficiente de $|\Phi_D^-\rangle$, en azul la parte real, en verde, la parte imaginaria. (e) Función objetivo (146), (f) pulsos de control: tuneo con espín constante en azul, $t_{CD}(t)$ y energía del sitio centro $E/+(t)$, que es antisimétrica con la energía del sitio derecha, y forman la compuerta Z.

Nuevamente si vemos la acción de los pulsos de control, observamos en la figura 39, que la suma de las áreas bajo la curva para los pulsos de control dan $\pi/2$. Lo que

justifica el cambio de fase necesario para generar el estado $|\Phi_{CD}^-\rangle$

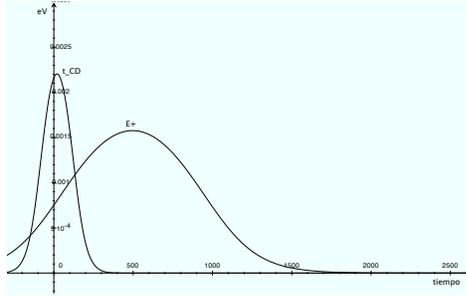


Figura 39. Pulsos de control t_{CD} y E^+ , que lleva al sistema del estado $|\Phi_{CD}^+\rangle$ a estado $|\Phi_{CD}^-\rangle$

Los pulsos de control tienen los parámetros optimizados con sigue:

$$\begin{aligned} b\sigma_{CD} &= 0.57 & O\sigma_{CD} &= 496 & \tau\sigma_{CD} &= 443 \\ b_{CD} &= 1.2 & O_{CD} &= 20 & \tau_{CD} &= 101 \end{aligned} \quad (147)$$

Podemos representar esto como la aplicación de la compuerta mostrada en la figura:

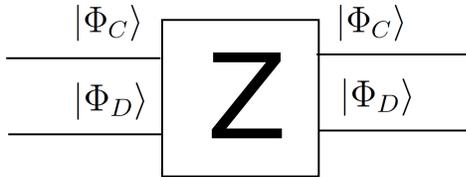


Figura 40. Representación con compuerta de la operaciones para transmitir el estado 11 utilizando el código súper denso. La aplicación de las compuertas $Z \otimes I$, permite alcanzar el estado $|\Phi_{CD}^-\rangle$

De la aplicación del esquema de control al código súper denso podemos ver que el tuneo controla los cambios de sitio con fase constante, mientras que las energías antisimétricas de sitio, permiten un cambio de fase como la compuerta σ_z , lo que permite obtener los estados de Bell de forma estacionaria realizando una operación sencilla en cada uno de los casos. Las operaciones que se realizan siempre, se pueden ver como analogías de una rotación de fase π .

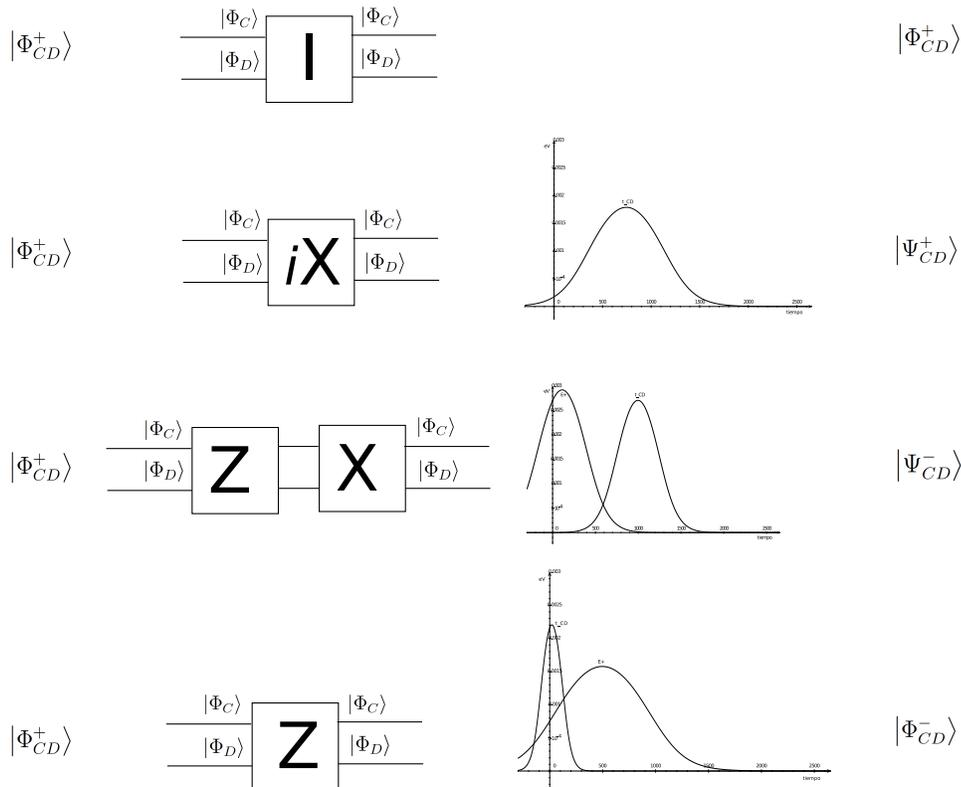


Figura 41. Resumen de pulsos de control y circuitos cuánticos del protocolo del código súper denso aplicado al modelo propuesto

Podemos resumir el protocolo del código super denso en la figura 41.

Un análisis de cerca a los pulsos obtenidos nos lleva a representar el código super denso en el circuito mostrado en la figura 42, en donde vemos que no hay grandes diferencias con el originalmente explicado en la sección de conceptos básicos, sólo un cambio en el orden de las compuertas Z y X , lo que se puede ver como una rotación $R_X(\pi)$, y por lo tanto el resultado es equivalente. De la misma forma vimos que la compuerta X , resulta con una fase total $e^{i\pi/2}$, la cual tampoco tiene relevancia al aparecer en los coeficientes de la base de Bell. Si seguimos las entradas a, b de la figura, no se obtienen los estados en el orden calculado, sino que se obtienen de forma mostrada en la tabla IV. El circuito de la figura se parte de un estado entrelazado compartido

entre Alice y Bob, $|\Phi_{CD}^+\rangle$ consta de las compuertas Z y X que posee Alice, y las cuales “activará”, dependiendo del dato que desee enviar, en el lado de Bob, se realiza una medición en la base de Bell, y con ello se obtiene la relación de cuáles operaciones realizó Alice y por lo tanto cual dato buscaba enviar. La medición en la base de Bell por parte de Bob resulta ambigua, debido a que el sistema híbrido compartido adquirirá un estado determinado cuando se mida cualquiera de las propiedades del sistema, carga o espín por lo que la realización práctica de este protocolo modelado de la forma propuesta, resulta limitada.

Tabla IV. Transformaciones unitarias dependientes de los qubits de entrada del circuito cuántico para el protocolo del código super denso mostrado en la figura 42.

| Entradas b, a | Estado Original | Evoluciona al estado |
|---------------|------------------|----------------------|
| 00 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Phi^+\rangle$ |
| 01 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Psi^+\rangle$ |
| 10 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Psi^-\rangle$ |
| 11 | $ \Phi^+\rangle$ | $ \Phi^-\rangle$ |

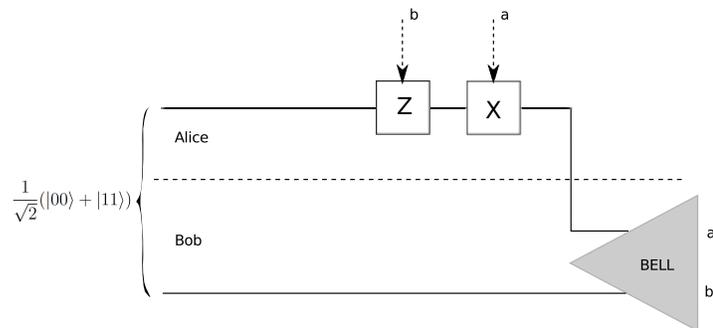


Figura 42. Circuito general del código súper denso

Capítulo VI

Conclusiones y trabajo futuro

Hemos estudiado la implementación de los protocolos de comunicación cuántica: teleportación y código súper denso en modelos de puntos cuánticos híbridos de carga y espín laterales con interacción espín órbita tipo Dresselhaus. En los que buscamos la optimización en la transferencia de información cuántica, utilizando algoritmos genéticos, los cuales determinaron el espacio de parámetros óptimo que maximiza la fidelidad. Definimos el espacio de parámetros como propiedades del modelo que podemos controlar y que son dependientes del tiempo. De este modo, la probabilidad de transición entre sitios (tuneleo), las energías de sitio son parámetros dependientes del tiempo que tienen una función gaussiana, cuya forma está determinada por los parámetros: dispersión, altura y desplazamiento respecto a $t = 0$, los cuales, son determinados por el algoritmo genético de control.

Los sistemas híbridos que utilizamos durante el presente trabajo, constaron de dos grados de libertad: de carga (ocupación) y espín. Formados en puntos cuánticos.

En los dos protocolos modelamos un sistema con dos puntos cuánticos, el cual sirve para establecer un estado de máximo entrelazamiento en la base de Bell híbrida. Realizamos la preparación del estado de entrelazamiento máximo, obtuvimos un estado de Bell híbrido estacionario controlando el tuneleo con espín constante, que es equivalente a una compuerta X, el cual tiene su acción durante un periodo de tiempo y posteriormente es anulado, quedando únicamente la probabilidad de transición debida al acoplamiento espín-órbita. También vimos que la presencia de una compuerta Z,

es decir, de la aplicación de potenciales antisimétricos, fue necesaria en la generación del estado estacionario. El estado que obtuvimos fue $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C \uparrow\rangle + e^{i\phi} |\Phi_D \downarrow\rangle)$, indicando que el electrón tenía igual probabilidad de encontrarse en los sitios centro y derecha, y a su vez, si era localizado en alguno de estos sitios, su espín se encontraba completamente determinado.

En el caso particular del protocolo de teleportación, adicionalmente al estado de Bell híbrido preparado, se tomó en consideración la presencia de un tercer punto cuántico, que denominamos izquierda, el cual confinaba un electrón, cuyo estado de espín, $|\Phi_I\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$, se buscaba transferir. Este electrón únicamente podía interactuar de forma electrostática (interacción de intercambio de espín) con su electrón vecino, centro. Obtuvimos el espacio de parámetros óptimo que determinó la forma de la interacción de intercambio necesaria para transferir el estado de espín de la partícula en el sitio izquierda al sitio centro. Vimos que la acción de la interacción de intercambio es equivalente a una compuerta C-NOT. El área bajo la curva del pulso de intercambio $J(t)$ es la que determina la evolución del sistema. Vimos que durante la evolución de la operación C-NOT se generó la superposición de estados equivalentes a los que se hubieran generado con la aplicación de la operación Hadamard. Del mismo modo, el pulso de intercambio es el que permitió la transferencia de información del estado de espín del sitio izquierda al sitio centro, produciendo a su vez que el espín del electrón en el sitio izquierda colapsara al estado $|\uparrow\rangle$, lo que es equivalente a una medida proyectiva de espín sobre el sitio izquierda.

Después de la acción de intercambio obtuvimos el estado que se buscaba transferir con probabilidades distribuidas entre los sitios centro y derecha, $|\Psi_{CD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_C\rangle \otimes (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) + |\Phi_D\rangle \otimes (\alpha |\downarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle))$. Por lo que controlando el tuneo con espín constante implementamos una compuerta X para invertir los coeficientes α y β en el

sitio derecha en sus correspondientes estados. Posteriormente para maximizar la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha, manipulamos la energía del sitio centro, propusimos el incremento como una rampa. Observamos que aproximadamente a $10t_0$, es decir, 10 veces la energía de tuneleo con espín constante inherente al material, la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio derecha con el estado de espín deseado es máxima.

Del mismo modo, en la implementación del código súper denso, generamos un estado de entrelazamiento máximo en la base de Bell, siguiendo el mismo método que para el estado utilizado en el protocolo de teleportación. Utilizamos por lo tanto, un modelo de dos puntos cuánticos acoplados laterales con interacción espín-órbita tipo Dresselhaus. Partimos del estado $|\Phi^+\rangle$ y manipulando parámetros como el tuneleo con espín constante, y la energía de sitio, podemos realizar transformaciones unitarias a este estado y generaremos todos los estados de la base de Bell híbrida $|\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle$.

Vimos como la presencia del tuneleo puede generar compuertas X, y la manipulación anti-simétrica de las energías de sitio E_C y E_D , produce compuertas Z. Estas compuertas, son las que permiten la evolución del estado inicial $|\Phi^+\rangle$ al resto de los estados de la base completa. Observamos que las áreas bajo la curva de los pulsos de control del tuneleo y las energías de sitio en todos los casos equivalente a $\frac{\pi}{2}$, que es lo que genera las compuertas X y Z necesarias. La evolución del estado $|\Phi^+\rangle$ al estado $|\Psi^+\rangle$ se llevó a cabo, manipulando el tuneleo con espín constante. Para el estado $|\Psi^-\rangle$, se modificaron las energías de sitio, de forma antisimétrica y a su vez el tuneleo con espín constante fue necesario en la optimización. Para la obtención del estado $|\Phi^-\rangle$ únicamente la manipulación antisimétrica de las energías de sitio resultó necesaria, es decir, la acción de una compuerta Z.

En comparativa el protocolo de teleportación en el modelo propuesto muestra una

mayor aplicabilidad práctica respecto al protocolo de código súper denso. Pues las mediciones de los estados finales en el protocolo de teleportación son realizables de manera clara, mientras que las mediciones de los estados finales en el código súper denso implican una medición en la base de Bell híbrida que en principio supone mediciones ambiguas puesto que medir espín determinaría la carga y viceversa.

En cuanto al trabajo pendiente que se puede realizar a futuro, es la implementación de estos esquemas en la mejora de las fidelidades de transmisión de los protocolos de comunicación cuántica modelados en puntos cuánticos. Se obtuvo que la preparación del estado híbrido del sistema fue del orden de varios femtosegundos, del mismo modo que todos los pulsos de control utilizados en el protocolo de teleportación cuántica. Por otro lado, en el protocolo de código súper denso, los tiempos característicos fueron mucho menores. Sin embargo, eso no significa que no pueda implementarse con pulsos más largos. Pues observamos que lo importante en la acción de los pulsos de control es sus áreas bajo la curva y si las áreas son superiores a $\frac{\pi}{2}$ en múltiplos enteros, simplemente generan operaciones repetitivas en el tiempo.

Asimismo resulta interesante el estudio de los efectos del medio ambiente sobre los sistemas propuestos, pues hemos obtenido fidelidades superiores al 99%; sin embargo, no hemos tomado en cuenta los tiempos de coherencia de los estados, los cuales serían un requisito en el caso de su implementación.

También consideramos que un sistema de tres puntos cuánticos como el que estudiamos en la sección III.2 resultaría de un interés particular en el estudio de estados entrelazados utilizados en modelos de comunicación cuántica, pues el estado entrelazado tiene una separación espacial con un punto cuántico en el centro no ocupado. Esto resulta atractivo, en el sentido de que puede permitir modelar los efectos del canal de comunicación.

Referencias

- Audretsch, J. (2007). *Entangled Systems. New directions in quantum physics*. Wiley-VCH, Germany, primera edición. 338 pp.
- Bell, J. S. (1964). On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics, Cambridge University Press*, **1**: 195–200.
- Bennett, C. H. y Wiesner, S. J. (1992). Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, **69**(20): 2881–2884.
- Bennett, C. H., Brassard, G., y Crépeau, C. (1993). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einsten-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, **70**(13): 1895–1898.
- Bennett, C. H., Bernstein, H. J., Popescu, S., y Schumacher, B. (1996). Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, **53**(4): 2046–2052.
- Bonestel, N. E. D., Stepanenko, D., y DiVincenzo, D. P. (2001). Anisotropic spin exchange in pulsed quantum gates. *Phys. Rev. Lett.*, **87**: 207901,1–4.
- Bouwmeester, D., Pan, J., Mattle, K., Eibi, M., Weinfurter, H., y Zeilinger, A. (1997). Experimental quantum teleportation. *Nature*, **390**: 575–579.
- Branczyk, A., Mendonça, P., Gilchrist, A., Doherty, A., y Bartlett, S. (2007). Quantum control of a single qubit. *Phys. Rev. A*, **75**(1): 12329.
- Carbonneau, P. (1995). Genetic algorithms in astronomy and astrophysics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **101**: 309–334.
- Carbonneau, P. y Knapp, B. (1995). *A user's guide to PIKAIA 1.0*. High Altitude Observatory. National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, US, primera edición. 121 pp.
- Chen, Z., Hou, G., y Zhang, Y. (2002). Quantum nonlocality and applications in quantum-information processing of hybrid entangled states. *Phys. Rev. A*, **65**: 032317, 1–5.
- Contreras-Pulido, L. D. y Aguado, R. (2004). Entanglement between charge qubits induced by common dissipative environment. *Phys. Rev. B*, **77**(15): 155420.
- Darwin, C. (1859). *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. John Murray, United Kingdom, primera edición. 502 pp.

- Delgado, F. (2010). Quantum control on entangled bipartite qubits. *Phys. Rev. A*, **81**(4): 42317.
- Deutsch, D. (1985). Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer. *Proc. Roy. Soc. London*, (400): 96–117.
- Dresselhaus, G. (1955). Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures. *Phys. Rev*, **100**(2): 580–586.
- Eberly, J. H. (2005). Schmidt analysis of pure-state entanglement. *Cornell University Library*, páginas 1–5.
- Ekert, A. y Knight, P. L. (1995). Entangled quantum systems and the schmidt decomposition. *Am. J. Phys.*, **63**(5): 415–423.
- Feynman, R. P. (1982). Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.*, **21**: 467–488.
- Feynman, R. P. (1985). Quantum mechanical computers. *Optic News*, páginas 11–20.
- Garshenfeld, N. A. y Chuang, I. L. (1997). Bulk spin-resonance quantum computation. *Science*, **275**(5298): 350–356.
- Grace, M., Brif, C., Rabitz, H., Walmsley, I. A., Kosut, R. L., y Lidar, D. A. (2007). Optimal control of quantum gates and suppression of decoherence in a system of interacting two-level particles. *Journal of Physics B*, **40**: s103.
- Grobe, R., Rzazewski, y Eberly, J. H. (1994). Measure of electron-electron correlation in atomic physics. *J. Phys. B*, **27**: L503–L508.
- Grover, L. K. (1997). Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(2): 325–328.
- Grover, L. K. (2002). Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A.*, **65**(3): 32314.
- Guerrero Moreno, R. J. (2008). *Tesis Doctoral: Estudio de anisotropía de intercambio en puntos cuánticos acoplados*. CICESE, Ensenada, B.C, Mex. 176 pp.
- Hill, S. y Wootters, K. (1997). Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, **78**(26): 5022–5025.
- Holland, J. C. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. The U. of Michigan Press, Michigan, US, primera edición. 83 pp.
- Issing, E. (1925). Zeitschrift für physik a hadrons and nuclei. *Z. Phys.*, **31**: 253.
- Kaye, P., Laflamme, R., y Mosca, M. (2007). *An Introduction to Quantum Computing*. Oxford University Press, UK, primero edición. 274 pp.

- Klaus, M., Weinfurter, H., Kwiat, P. G., y Zeilinger, A. (1996). Dense coding in experimental quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, **76**(25): 4656–4659.
- Kohonen, T. (1984). Self-organized formation of topologically correct feature maps. *Biological Cybernetics*, **43**: 59–69.
- Krause, J., Reitze, D., Sanders, G., Kuznetsov, A., y Stanton, C. (1998). Quantum control in quantum wells. *Phys. Rev. B*, **57**(15): 9024–9034.
- Landauer, R. (1994). Is quantum mechanically coherent computation useful? *Proc. of the Drexel-4 Symposium on Quantum Nonintegrability*. Int. Press.
- Loss, D. y DiVincenzo, D. P. (1998). Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, **57**(1): 120–126.
- Meier, L., Salis, G., Shorubalko, I., Gini, E., Schoen, S., y Ensslin, K. (2007). Measurement of rashba and dresselhaus spin-orbit magnetic fields. *Nature Physics*, **3**: 650–654.
- Merzbacher, E. (1998). *Quantum Mechanics 3rd. edition*. Wiley, New York, USA. p372.
- Moore, G. E. (1965). Creaming more components onto integrated circuits. *Electronics*, **38**(8): 114–117.
- Navarro-Muñoz, J. C., Rosu, H. C., y López-Sandoval, R. (2006). Genetic algorithm optimization of entanglement. *Physical Review A*, **74**: 52308.
- Nielsen, M. y Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, primera edición. 676 pp.
- Ochoa, C. (2009). *Tesis de licenciatura: Estados híbridos entrelazados en sistemas con interacción espín-órbita*. UABC, Ensenada, B.C., Mex. 84 pp.
- O'Connor, K. M. y Wothers, W. K. (2001). Entangled rings. *Phys. Rev. A*, **63**: 52302.
- Pellizzari, T., Gardiner, S. A., Cirac, J. I., y Zoller, P. (1995). Decoherence, continuous observation, and quantum computing: A cavity qed model. *Phys Rev. Lett*, **75**(21): 3788–3791.
- Perel, V. I., Tarasenko, S. A., YAssievich, I. N., Ganichev, S. A., Bel'kov, V. V., y Prettl, W. (2003). Spin-dependent tunneling through a symmetric semiconductor barrier. *Phys. Rev. B*, **67**: 201304.
- Press, W. J., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., y Vetterling, W. T. (1992). *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, primera edición. 933 pp.

- Riebe, M., Häffner, H., Ross, C. F., Hänsel, W., Benhelm, J., Lancaster, G. P. T., Wörber, T. W., Becher, C., Schmidt-Kaler, F., James, D. F. V., y Blatt, R. (2004). Deterministic quantum teleportation with atoms. *Nature*, **429**(17): 734–737.
- Sakurai, J. J. (1993). *Modern Quantum Mechanics*. Adison Wesley, Hawaii, primera edición. 500 pp.
- Sattler, K. D. (2010). *Handbook of nanophysics. Nanoparticles and quantum dots*. University of Hawaii-Manoa, Honolulu, USA, primera edición. 40 pp.
- Shor, P. (1994). Algorithms for quantum computation: Discrete log and factoring. in proceedings of the 35th annual symposium on foundations of computer science. *IEEE Computer Science Press*.
- Studer, M., Walser, M. P., Baer, S., Rusterholz, H., Schön, S., Schuh, D., Wagscheider, W., Enssin, K., y Salis, G. (2010). Role of linear en cubic terms for the drift-induced dresselhaus spin-orbit splitting in a two-dimensional electron gas. *Cond. Mat. Hall*, páginas 1–7.
- Vendra, V., Plenio, M. B., y Knight, P. L. (2001). *Entanglement Quantification*. Springer, Berlin, Alemania, primera edición. 314 pp.
- Wooters, W. K. y Zurek, W. H. (1982). A single quantum cannot be cloned. *Nature*, **299**: 802–803.
- Xi, Z. y Jin, G. (2007). *Int. J. Quantum Inform*, **5**: 857.
- Xue, D., Zou, J., Li, J.-G., Chen, W., y Shano, B. (2010). Controlling entanglement between two separated atoms by quantum-jump-based feedback. *J. Phys. B*, **43**: 45503.

Apéndice A

Teleportación cuántica implementada en puntos cuánticos

La teleportación cuántica es la transmisión de un estado cuántico con la ayuda de un estado compartido entre quien envía (Alice) y quien recibe (Bob), de máximo entrelazamiento, pudiendo ser cualquiera de los que forman la base de Bell. Supongamos que el sistema completo puede describirse por tres sitios A, B y C (Sattler, 2010). Que el estado que se busca teleportar es el qubit $|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ y que será enviado de A (Alice) a B (Bob), mientras que los dos sitios B y C se encuentran en un estado de máximo entrelazamiento:

$$|\Psi_{CB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{C\uparrow}^\dagger + c_{B\uparrow}^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{C\downarrow}^\dagger + c_{B\downarrow}^\dagger) |0\rangle \quad (148)$$

En este sistema estamos considerando la existencia de dos electrones. La base de ocupación del operador de número es $|n_{C\uparrow}n_{C\downarrow}n_{B\uparrow}n_{B\downarrow}\rangle$, de tal forma que las cuatro combinaciones posibles son $|0011\rangle$, $|1100\rangle$, $|1001\rangle$, $|0110\rangle$.

Partimos por lo tanto del estado entrelazado en la base del operador de número:

$$|\Psi_{CB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1100\rangle + |0011\rangle) \quad (149)$$

Por lo que el estado inicial del sistema es:

$$|\Psi_0\rangle = (\alpha|10\rangle + \beta|01\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|1100\rangle + |0011\rangle) \quad (150)$$

Aplicando la operación C-NOT sobre el sitio C, controlado por el primer bit de A, obtenemos:

$$|\Psi_1\rangle = \alpha |10\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle) + \beta |01\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|1100\rangle + |0011\rangle) \quad (151)$$

Posteriormente aplicamos la operación Haddamard y obtenemos el estado:

$$|\Psi_2\rangle = \alpha(|10\rangle + |01\rangle)\frac{1}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle) + \beta(|10\rangle - |01\rangle)\frac{1}{2}(|1100\rangle + |0011\rangle) \quad (152)$$

Posteriormente Alice realiza una medición conjunta en los sitios a los que tiene acceso, que son A y C, de los que claramente podemos ver de la ecuación 152 que se obtiene:

$$\begin{array}{ll} |M_1 M_2\rangle & |n_{B\uparrow} n_{B\downarrow}\rangle \\ |1011\rangle & \alpha |11\rangle + \beta |00\rangle \\ |1000\rangle & \alpha |00\rangle + \beta |11\rangle \\ |0111\rangle & \alpha |11\rangle - \beta |00\rangle \\ |0100\rangle & \alpha |00\rangle - \beta |11\rangle \end{array} \quad (153)$$

Podemos ver por lo tanto que una vez realizada la medición conjunta, podemos distinguir el estado cuántico que se quería teleportar, aplicando una transformación unitaria y midiendo en la base de doble ocupación como podemos ver en la tabla (153).