

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES

CONTROL JERÁRQUICO DE ROBOTS
MANIPULADORES
BASADO EN LAZOS INTERNOS DE VELOCIDAD

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el
grado de DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

Eduardo Javier Moreno Valenzuela

Ensenada, Baja California, México. Octubre de 2002.

RESUMEN de la Tesis de Eduardo Javier Moreno Valenzuela, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California, México. Octubre de 2002.

CONTROL JERÁRQUICO DE ROBOTS MANIPULADORES BASADO EN LAZOS INTERNOS DE VELOCIDAD

Resumen aprobado por:

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez
Director de tesis

El presente tema de tesis doctoral se enfoca al estudio de controladores para robots manipuladores basados en dos lazos de retroalimentación. Más precisamente, los sistemas de control estudiados consisten en el uso de un lazo externo, cuyo diseño depende del objetivo de control a ser satisfecho, en forma adicional a un lazo interno de velocidad articular. Esta clase de sistemas de control ha sido usada en manipuladores industriales, y en este trabajo es denominada controlador jerárquico. El control jerárquico consiste en el diseño de algoritmos de control con estructura de dos lazos de retroalimentación, pero considerando la dinámica completa del robot, incluyendo fricción en las articulaciones. La ventaja de estos sistemas de control es que una vez diseñado el lazo interno de control (controlador de velocidad articular), el lazo externo puede ser diseñado en forma independiente al lazo interno. El lazo externo de control puede ser cambiado si el usuario lo determina. El diseño de controladores jerárquicos ha incluido los objetivos de control de movimiento, control por campo de velocidad y control de ruta. Los objetivos de control estudiados han sido especificados en el espacio de configuración operacional. También ha sido llevado a cabo trabajo experimental, al implementar controladores jerárquicos para los objetivos de control estudiados en un robot de dos grados de libertad, comprobándose la factibilidad práctica de los esquemas de control propuestos.

ABSTRACT of the Thesis of Eduardo Javier Moreno Valenzuela, presented as a partial requirement for obtaining the degree of DOCTOR OF SCIENCE. Ensenada, Baja California, Mexico. September 2002.

HIERARCHICAL CONTROL OF ROBOT MANIPULATORS BASED ON VELOCITY INNER LOOPS

This Thesis work concerns to the study of control algorithms for robot manipulators based on two loops of feedback. More precisely, the studied control systems consist in using an outer loop, whose design depends of the control objective to be satisfied, in addition to an inner loop of joint velocity. This class of control systems has been used in industrial manipulators, and in this work is called hierarchical control. Hierarchical control consists in the design of control algorithms with a two loops of feedback structure, but considering the whole robot dynamics and including friction at the joints. The advantage of these control systems is that once designed the inner control loop (joint velocity controller), the outer loop can be designed in an independent way with respect to the inner loop. The outer control loop can be changed if the user determines it. The design of hierarchical controllers has included the control objectives of motion control, velocity field control, and path control. The studied control objectives have been specified in the operational configuration space. It has also been carried out experimental work, implementing hierarchical controllers on a two degrees-of-freedom direct-drive arm. The experimental results show the practical feasibility of the proposed controllers.

DEDICATORIA

A Hermelinda y Pedro, mis Padres.

A Alonzo, Pedro, Dalia y Guillermo, mis Hermanos.

Por el apoyo que siempre me han brindado.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Rafael Kelly por su firme apoyo en la dirección y terminación de este trabajo. Agradezco a los miembros del comité de tesis, al Dr. Víctor Santibáñez, al Dr. César Cruz y al Dr. Iouri Orlov, por sus cuestionamientos y sugerencias acerca de este trabajo de tesis.

Agradezco a todas las personas que me brindaron su amistad durante mi estadía en CICESE.

Agradezco a la familia Martínez Sotelo por su amistad y apoyo durante el tiempo que he pasado con ellos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada.

Contenido

	Página
I Introducción	1
I.1 Modelo de robots manipuladores	1
I.1.1 Fricción en sistemas mecánicos	5
I.1.2 Modelo dinámico de robots rígidos	9
I.1.3 Modelo cinemático	11
I.2 Control de robots manipuladores	13
I.2.1 Diseño de algoritmos de control	16
I.2.2 Control jerárquico de robots manipuladores	17
I.3 Objetivos del trabajo de tesis	20
I.4 Organización de la tesis	21
II Control de velocidad	22
II.1 Control de velocidad de motores	23
II.1.1 Control PI usando un observador asintótico	25
II.1.2 Control PI usando un observador exponencial	28
II.1.3 Control de velocidad usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb	30
II.1.4 Resultados experimentales	32
II.2 Control de velocidad articular de robots manipuladores	37
II.2.1 Control de velocidad basado en dinámica inversa	38
II.2.2 Control de velocidad basado en PD con compensación	42

Contenido (continuación)	Página
II.2.3 Control de velocidad basado en PD+	45
II.2.4 Control de velocidad usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb	47
II.2.5 Resultados experimentales	49
II.3 Conclusiones	59
 III Control jerárquico de movimiento	 61
III.1 Introducción	61
III.2 Control cinemático	63
III.3 Lazo interno basado en dinámica inversa	65
III.4 Lazos interno basado en el control PD con compensación	69
III.5 Lazos interno basado en el control PD+	71
III.6 Resultados experimentales	73
III.6.1 Experimentos usando el lazo interno basado en dinámica inversa	75
III.6.2 Experimentos usando el lazo interno basado en PD con compen- sación.	77
III.7 Conclusiones	78
 IV Control jerárquico por campo de velocidad	 82
IV.1 Introducción	82
IV.2 Control cinemático por campo de velocidad	85
IV.3 Lazo interno basado en dinámica inversa	86
IV.4 Lazo interno basado en PD con compensación	90
IV.5 Lazo interno basado en PD+	93

Contenido (continuación)	Página
IV.6 Resultados experimentales	96
IV.6.1 Campo de velocidad deseado	97
IV.6.2 Experimentos usando el lazo interno basado en dinámica inversa	98
IV.6.3 Experimentos usando el lazo interno PD con compensación . . .	100
IV.6.4 Experimentos usando velocidad articular baja	104
IV.7 Conclusiones	108
V Control jerárquico de ruta	109
V.1 Introducción	109
V.1.1 Codificación de tareas y objetivo de control de ruta	111
V.2 Control cinemático de ruta	120
V.3 Lazo interno basado en dinámica inversa	124
V.4 Lazo interno basado en PD con compensación	129
V.5 Lazo interno basado en PD+	133
V.6 Resultados experimentales	136
V.6.1 Experimentos usando el lazo interno basado en dinámica inversa	137
V.6.2 Experimentos usando el lazo interno basado en PD con compen- sación	141
V.7 Conclusiones	142
VI Conclusiones	145
VI.1 Trabajo futuro	147
Literatura Citada	149

Contenido (continuación)	Página
Apéndices	156
A Robot experimental de 2 grados de libertad	157
B Control de ruta en coordenadas articulares	163
B.1 Codificación de tareas y objetivo de control de ruta	163
B.2 Controlador de ruta basado en Dahl y Nielsen (1990)	169
B.3 Controlador de ruta propuesto	175
B.4 Resultados experimentales	182
B.4.1 Control de movimiento: Experimentos	185
B.4.2 Control de ruta: Experimentos	189
B.4.3 Observaciones	190
B.5 Conclusiones	191
C Programas en SPAC	193
C.1 Listado del programa <code>dahlv1.rob</code>	193
C.2 Listado del programa <code>dahlv3.rob</code>	196
C.3 Listado del programa <code>velm01.rob</code>	199
C.4 Listado del programa <code>pcvdmod.rob</code>	202
C.5 Listado del programa <code>pdcvd.rob</code>	208
C.6 Listado del programa <code>pdmvd.rob</code>	213
C.7 Listado del programa <code>cj00.rob</code>	219
C.8 Listado del programa <code>input1.rob</code>	220

Contenido (continuación)	Página
C.9 Listado del programa <code>input2.rob</code>	230
C.10 Listado del programa <code>input4.rob</code>	239
C.11 Listado del programa <code>input5.rob</code>	250
C.12 Listado del programa <code>input7.rob</code>	261
C.13 Listado del programa <code>input8.rob</code>	271
D Programas en SIMNON	282
D.1 Programa <code>robot.t</code>	282
D.2 Programas para simular el controlador de velocidad de la sección II.2.1	284
D.3 Programas para simular el controlador de velocidad de la sección II.2.2	289
D.4 Programas para simular el controlador de velocidad de la sección II.2.3	293
D.5 Programas para simular el controlador jerárquico de movimiento de la sección III.3	298
D.6 Programas para simular el controlador jerárquico de movimiento de la sección III.4	304
D.7 Programas para simular el controlador jerárquico por campo de velocidad de la sección IV.3	310
D.8 Programas para simular el controlador jerárquico por campo de velocidad de la sección IV.4	318
D.9 Programas para simular el controlador jerárquico de ruta de la sección V.3	325
D.10 Programas para simular el controlador jerárquico de ruta de la sección V.4	331

Lista de Figuras

	Página
1 Diagrama abstracto de un robot de n grados de libertad (g.d.l.)	2
2 Descripción de un robot de 4 grados de libertad	4
3 Modelo de fricción viscosa y de Coulomb	6
4 a) Asperezas de dos superficies en contacto. b) Representación de las asperezas por medio de cerdas de cepillos entrelazadas. c) Ilustración gráfica de la deflexión promedio de todas las cerdas	8
5 Entradas y salidas del robot.	13
6 Control de posición pura en el espacio operacional	14
7 Control de movimiento en el espacio operacional	15
8 Esquemas generales de control, a) coordenadas articulares, b) coordenadas operacionales.	16
9 Diagrama a bloques de un esquema de control jerárquico basado en lazos internos de velocidad articular	18
10 Motor con modelo de fricción de Dahl	24
11 Controlador PI usando un observador asintótico	27
12 Controlador PI usando un observador exponencial	31
13 Sistema experimental	32
14 Evolución temporal de $\omega_d(t)$	33
15 Error de velocidad: Control PI + compensación de fricción viscosa . . .	34
16 Error de velocidad: Control PI + compensación de fricción viscosa y de Coulomb	34
17 Error de velocidad: Control PI + observador asintótico	35

Lista de Figuras (continuación)	Página
18 Error de velocidad: Control PI + observador exponencial	35
19 Norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para 10 ejecuciones	36
20 Controlador de velocidad basado en dinámica inversa	39
21 Controlador de velocidad basado en PD con compensación	43
22 Controlador de velocidad basado en PD+	46
23 Velocidad deseada	50
24 Error de velocidad: Control por dinámica inversa + observador basado en el modelo de Dahl	51
25 Error de velocidad: Control por dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb	51
26 Error de velocidad: Control PD con compensación + observador basado en el modelo de Dahl	52
27 Error de velocidad: Control PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb	52
28 Error de velocidad: Control PD+ observador basado en el modelo de Dahl	54
29 Error de velocidad: Control PD+ + compensación de fricción viscosa y de Coulomb	54
30 Norma $\mathcal{L}_T^2[\omega]$	56
31 Desempeño para distintos factores de la velocidad deseada: Control basado dinámica inversa	58
32 Desempeño para distintos factores de la velocidad deseada: Control basado en PD con compensación	59
33 Control jerárquico de movimiento en el espacio operacional	65

Lista de Figuras (continuación)	Página
34 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno	75
35 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial	75
36 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional	76
37 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno	77
38 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial	77
39 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional	78
40 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno	79
41 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial	79
42 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional	80
43 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno	80
44 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial	80
45 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional	81

Lista de Figuras (continuación)	Página
46 Campo de velocidad en el espacio operacional	84
47 Campo de velocidad deseado en el espacio cartesiano	84
48 Control jerárquico por campo de velocidad en espacio operacional . . .	84
49 Campo de velocidad usado en experimentos	97
50 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno	99
51 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial	100
52 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional	100
53 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno	100
54 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial	101
55 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional	101
56 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno	102
57 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial	102
58 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional	103
59 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno	103

Lista de Figuras (continuación)	Página
60 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial	103
61 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional	104
62 Error de contorno: PD con compensación usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb	105
63 Error de velocidad tangencial al círculo $v_0 - \ \dot{\mathbf{y}}\ $: PD con compensación usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb	106
64 Ruta en el espacio operacional: PD con compensación usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb	106
65 Error de contorno: PD con compensación usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl	106
66 Error de velocidad tangencial al círculo $v_0 - \ \dot{\mathbf{y}}\ $: PD con compensación usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl	107
67 Ruta en el espacio operacional: PD con compensación usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl	107
68 Movimiento en función del parámetro de ruta s	114
69 Generación de trayectorias nominales y control de movimiento	116
70 Tarea de trazar un círculo	117
71 Tarea de trazar una parábola	119
72 Control jerárquico de ruta en coordenadas operacionales usando el plan de movimiento extendido propuesto	125
73 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno	139

Lista de Figuras (continuación)	Página
74 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial	139
75 Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional	139
76 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno	140
77 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial	140
78 Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional	140
79 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno	143
80 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial	143
81 PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional	143
82 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno	144
83 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial	144
84 PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional	144
85 Robot Manipulador	157
86 Esquema de componentes del sistema experimental	158

Lista de Figuras (continuación)	Página
87 Robot Manipulador	159
88 Movimiento en función del parámetro de ruta s	167
89 Diagrama de bloques del controlador de ruta	173
90 Proyección ortogonal de \mathbf{q} sobre la curva Γ_q	178
91 Diagrama de bloques del controlador de ruta propuesto	180
92 Robot experimental	183
93 Tarea solicitada	183
94 Control de movimiento: q_2 contra q_1	186
95 Control de movimiento: Evolución temporal de $\ \tilde{\mathbf{q}}\ $ y $\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\ $	187
96 Control de ruta, $K=\text{diag}\{20.0,20.0\}$: q_2 contra q_1	187
97 Control de ruta, $K=\text{diag}\{20.0,20.0\}$: Evolución temporal de $\ \mathbf{e}_p\ $ y $\ \mathbf{e}_v\ $	188
98 Control de ruta, $K=\text{diag}\{100.0,100.0\}$: q_2 contra q_1	188
99 Control de ruta, $K=\text{diag}\{100.0,100.0\}$: Evolución temporal de $\ \mathbf{e}_p\ $ y $\ \mathbf{e}_v\ $	189
100 Resultado del control de movimiento y control de ruta usando en el plan de movimiento extendido a) $K=\text{diag}\{20.0,20.0\}$, b) $K=\text{diag}\{100.0,100.0\}$	190

Lista de Tablas

	Página
I Error de velocidad relativo	36
II Promedio de $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para 10 ejecuciones de cada controlador	37
III Error de velocidad pico: Control basado en dinámica inversa	50
IV Error de velocidad pico: Control basado en PD con compensación	53
V Error de velocidad pico: Control basado en PD+	53
VI Magnitudes máximas de la velocidad deseada para cada valor de γ	56
VII Valores numéricos de los parámetros cinemáticos y dinámicos del robot experimental.	159

I Introducción

I.1 Modelo de robots manipuladores

Un robot es un dispositivo que puede ser tan versátil como características físicas o mecánicas posea. Ejemplos de robots son un brazo manipulador, un vehículo provisto de ruedas o patas para movilizarse, un vehículo con la capacidad de volar, o una combinación de estos. En este trabajo son de interés los robots manipuladores industriales, por lo que una definición concreta de estos es necesaria. De acuerdo a la definición adoptada por la Federación Internacional de Robótica, *un robot manipulador industrial es una máquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de usos múltiples, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil, para su empleo en aplicaciones industriales.*

En este trabajo se considera el estudio de robots manipuladores que poseen articulaciones de tipo rotacional¹. La figura 1 ilustra en forma abstracta como un robot manipulador de articulaciones rotacionales es representado por una cadena cinemática abierta.

En la figura 1 se observa un marco de referencia cartesiano de tres dimensiones denotado por los ejes y_1 , y_2 y y_3 . Dicho marco de referencia puede ser colocado en cualquier lugar de la base del robot. Los eslabones son enumerados consecutivamente desde la base (eslabón 0) hasta el final (eslabón n). Las articulaciones son los puntos de contacto entre los eslabones y son numeradas de tal forma que la articulación i conecta los eslabones i e $i - 1$. La coordenada articular generalizada q_i es el desplazamiento angular alrededor del eje de movimiento asociado a cada articulación. Dicho eje de movimiento es mostrado en la figura 1 por una línea punteada en cada articulación. Las coordenadas articulares también reciben el nombre de posiciones articulares.

¹Las articulaciones de los robots son básicamente de dos tipos: rotacionales y traslacionales (Kelly, 1995).

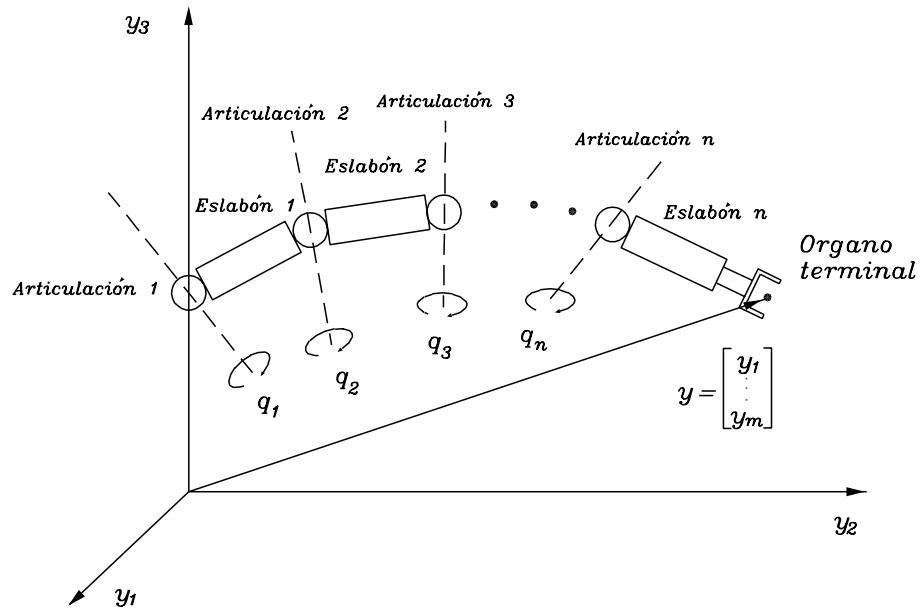


Figura 1: Diagrama abstracto de un robot de n grados de libertad (g.d.l.)

En base a lo anterior, y con fines de control automático, el adoptar la siguiente definición pragmática de robot manipulador también resulta válido (Kelly, 1995): *un robot manipulador, es un brazo mecánico articulado formado de eslabones conectados a través de articulaciones*. Generalmente el número de articulaciones en un manipulador determina su número de grados de libertad (g.d.l.).

Para propósitos analíticos, las posiciones articulares son agrupadas para formar el vector de posiciones articulares

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Es importante señalar que el espacio de coordenadas (o posiciones) articulares es referido en muchas ocasiones como el *espacio de configuración articular*. En un robot manipulador las posiciones articulares \mathbf{q} , como las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \mathbf{q}$, son medidas mediante sensores convenientemente colocados en el robot.

Por otro lado, resulta natural tratar de describir el movimiento de los robots manipuladores en el *espacio de operación* donde la posición y orientación del órgano terminal² del robot son de interés. El espacio de operación es definido como la porción del espacio físico que el órgano terminal de robot puede acceder para realizar alguna tarea dada. Dicha posición y orientación se expresa con respecto al marco de referencia coordenado cartesiano $[y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ colocado en la base del robot, así como, en forma eventual, en términos de los llamados ángulos de Euler. Los ángulos de Euler describen la orientación del órgano terminal con respecto a un marco coordenado de base. De esta forma, las posiciones y orientaciones son agrupadas en el vector \mathbf{y} de coordenadas del espacio de operación o coordenadas operacionales

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde $n \geq m$. El vector de coordenadas operacionales \mathbf{y} también es llamado vector de posiciones operacionales. El espacio \mathbf{y} de coordenadas operacionales es referido algunas veces como *espacio operacional* (Sciavicco y Siciliano, 2000).

La figura 2 muestra la descripción del espacio articular y operacional de un robot de 4 grados de libertad, en el que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$. Para el robot mostrado en la figura 2, la posición del elemento final en el espacio cartesiano es dada por el vector $[y_1 \ y_2 \ y_3]^T$, mientras que la coordenada y_4 es definida por la posición articular q_4 , i.e. $y_4 = q_4$.

A cada unión le corresponde un actuador, el cual puede ser de naturaleza electro-mecánica, neumática o hidráulica. Dichos actuadores tienen como objetivo generar los pares y fuerzas que proveen de movimiento a los eslabones. El conjunto de pares y

²El órgano terminal es una herramienta que el robot usa para realizar una tarea dada. Ejemplos de órganos terminales son una garra, una herramienta de corte tal como un rayo láser, una herramienta de pintado, etc.

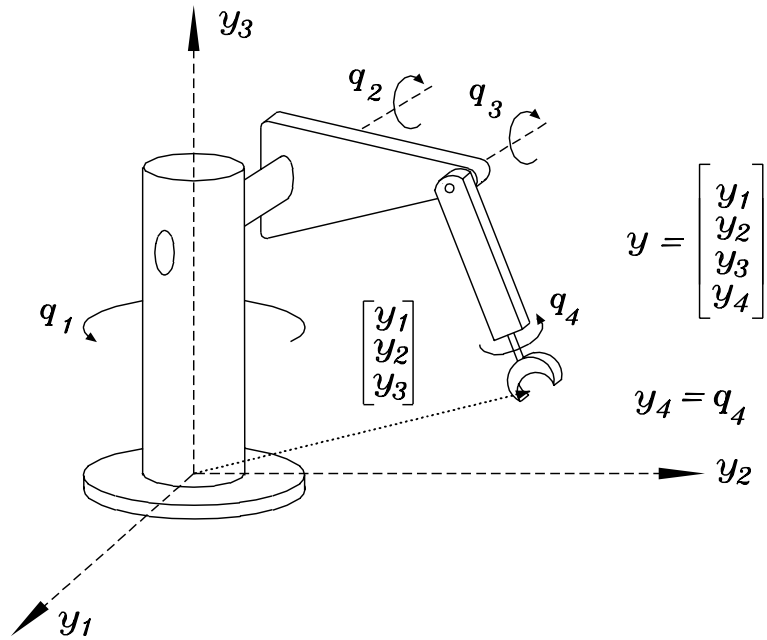


Figura 2: Descripción de un robot de 4 grados de libertad

fuerzas generados por los actuadores del robot son agrupados para fines analíticos en el vector

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}.$$

En resumen, un robot manipulador industrial es constituido por (Sciavicco y Siciliano, 2000):

- Una estructura mecánica o manipulador que consiste de una secuencia de cuerpos rígidos (eslabones) conectados por medio de articulaciones (uniones).
- Actuadores que ponen en movimiento al manipulador. Los actuadores pueden estar instalados o no en las articulaciones del robot³. Los actuadores emplea-

³En el caso en que los actuadores no estén instalados en las articulaciones, la fuerza o el par requerido para el movimiento es transferido hacia las articulaciones por medio de bandas o engranes.

dos para el movimiento del robot pueden ser de tipo eléctrico o hidráulico, y ocasionalmente neumáticos.

- Sensores para medir las variables necesarias para controlar el robot y, si es necesario, para medir algunas variables en el ambiente físico con el que el robot interactúa.
- Un sistema de control (computadora) que posibilita el control y la supervisión del movimiento del manipulador.

I.1.1 Fricción en sistemas mecánicos

La fricción es un fenómeno que deteriora la buena ejecución de los movimientos deseados en servomecanismos y robots manipuladores. El estudio de la fricción en sistemas mecánicos ha sido un tema de investigación en varias comunidades científicas, tales como ingeniería de lubricación, ingeniería mecánica, matemáticas aplicadas, e ingeniería de control. En la ingeniería de lubricación se intenta limitar el efecto de la fricción con mejores lubricantes, mientras que en ingeniería mecánica se intenta compensar su efecto rediseñando los sistemas mecánicos. En contraste, en la ingeniería de control se pretende modificar la dinámica del sistema diseñando un algoritmo de control, de modo que se obtenga una mejor respuesta en los movimientos ejecutados por el mecanismo.

Los modelos clásicos de fricción que han sido adoptados en muchas situaciones prácticas son los de fricción viscosa y de Coulomb. En estos modelos, la fuerza de fricción es un mapa estático entre la velocidad relativa \dot{q} entre dos superficies en contacto y la fuerza de fricción f . La fricción de Coulomb es dada por la siguiente ecuación

$$f_{Cou}(\dot{q}) = f_C \text{sign}(\dot{q}) \quad (3)$$

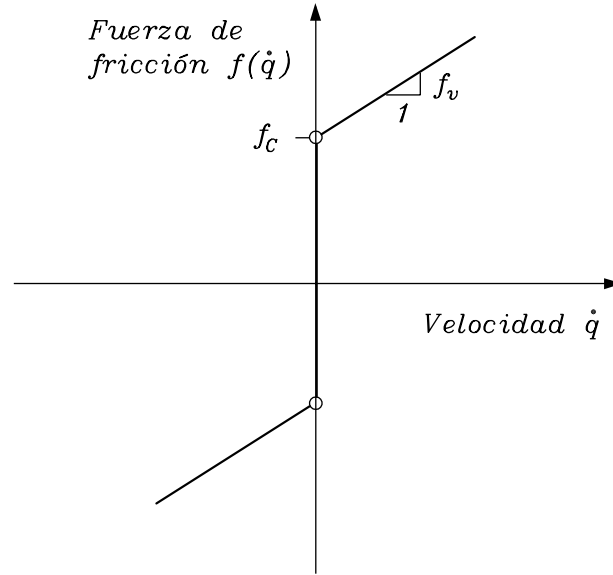


Figura 3: Modelo de fricción viscosa y de Coulomb

donde f_C es una constante positiva llamada coeficiente de fricción de Coulomb y

$$\text{sign}(\dot{q}) = \begin{cases} 1 & \forall \dot{q} > 0, \\ -1 & \forall \dot{q} < 0, \end{cases}$$

pero $\text{sign}(0)$ no se encuentra definido. Por otro lado, la fricción viscosa es dada por

$$f_{vis}(\dot{q}) = f_v \dot{q},$$

donde f_v es una constante positiva llamada coeficiente de fricción viscosa. El modelo de fricción viscosa y de Coulomb es dado por la suma de los dos modelos anteriores, i.e.

$$f(\dot{q}) = f_{Cou}(\dot{q}) + f_{vis}(\dot{q}). \quad (4)$$

La figura 3 muestra en forma gráfica el modelo de fricción viscosa y de Coulomb.

Sin embargo, el modelo dado por la ecuación (4) no captura el comportamiento de la fricción en forma detallada, particularmente a bajas velocidades. Para describir la

fuerza de fricción entre dos cuerpos en contacto de forma más precisa, Dahl pensó en usar ciertos conceptos de la mecánica de sólidos para lograr dicha descripción (Dahl, 1976). La curva de la fuerza de fricción entre dos cuerpos es obtenida de la solución de la ecuación diferencial dada por

$$\frac{df_D}{dq} = \sigma_0 \left[1 - \frac{f_D}{f_C} \text{sign}(\dot{q}) \right], \quad (5)$$

donde σ_0 es un coeficiente llamado de rigidez. Con la observación de que

$$\frac{df_D}{dt} = \frac{df_D}{dq} \frac{dq}{dt},$$

el modelo de fricción (5) propuesto por Dahl es una extensión del modelo de fricción de Coulomb (3) a un modelo de la forma

$$\frac{df_D}{dt} = \sigma_0 \left[1 - \frac{f_D}{f_C} \text{sign}(\dot{q}) \right] \dot{q}. \quad (6)$$

La ecuación (6) puede ser reescrita de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z &= -\frac{\sigma_0}{f_C} |\dot{q}| z + \dot{q}, \\ f_D &= \sigma_0 z. \end{aligned}$$

Si la velocidad relativa entre los dos cuerpos es constante es posible demostrar que la fuerza de fricción en estado estacionario es dada por

$$f_D = \sigma_0 z = f_C \text{sign}(\dot{q}),$$

lo cual implica que el modelo (6) es una generalización del modelo de fricción de Coulomb (3), en el sentido de que el modelo de fricción de Dahl considera un retardo en cambio de signo de la fuerza de fricción cuando la dirección del movimiento entre

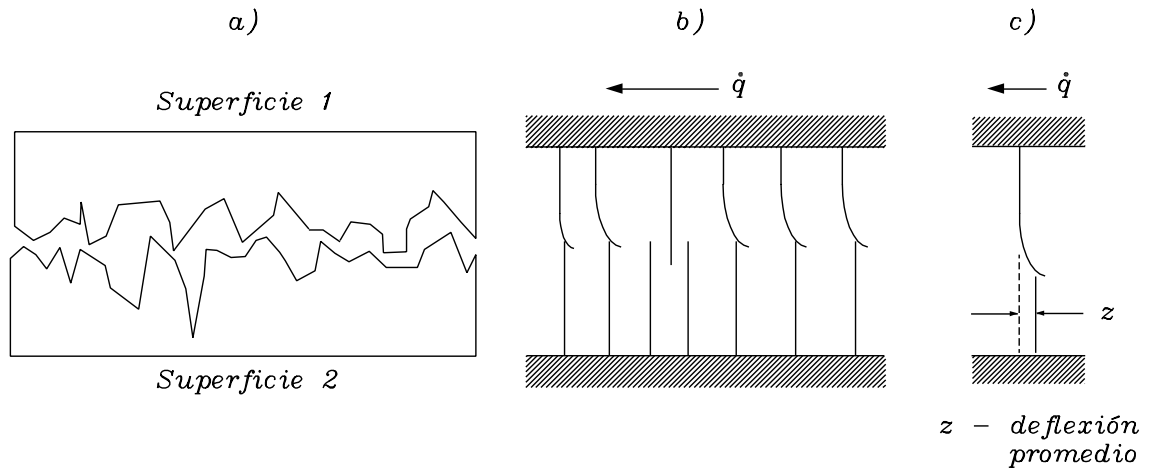


Figura 4: a) Asperidades de dos superficies en contacto. b) Representación de las asperezas por medio de cerdas de cepillos entrelazadas. c) Ilustración gráfica de la deflexión promedio de todas las cerdas

los cuerpos cambia.

El modelo de fricción de Dahl puede interpretarse como la fuerza producida por la deflexión de cerdas de dos cepillos entrelazados. Dicha fuerza es dada por el producto del coeficiente de rigidez y la deflexión promedio de las cerdas. La figura 4 ilustra esta idea. Se observa en la figura 4a) una gráfica que representa las asperezas de dos superficies en contacto, en la figura 4b) la representación de dichas asperezas por medio de cerdas de cepillos entrelazados, cuya deflexión produce la fuerza que se opone al movimiento entre las dos superficies, i.e. la fricción, y finalmente, en la figura 4c) la representación de la deflexión promedio de todas las cerdas por medio de un par de cerdas.

El modelo de fricción de Dahl considera el desplazamiento de pre-deslizamiento, i.e. deformaciones plásticas y elásticas de las asperezas entre dos cuerpos en contacto antes del deslizamiento macroscópico. Sin embargo, dicho modelo de fricción no considera otros fenómenos de fricción tales como la fricción viscosa o el efecto Stribeck. El modelo de fricción de Dahl, considerando la fricción viscosa, puede escribirse de la

forma siguiente:

$$\frac{d}{dt}z = -\frac{\sigma_0}{f_C}|\dot{q}|z + \dot{q}, \quad (7)$$

$$f = \sigma_0 z + f_v \dot{q}. \quad (8)$$

Es posible demostrar que el modelo de fricción (7)–(8) satisface los requerimientos establecidos en Baravanov y Ortega (2000) para obtener un operador pasivo de la velocidad \dot{q} a la fuerza de fricción.

Un estudio completo sobre comportamiento de la fricción, así como su modelado, es presentado en el trabajo de Armstrong–Hélouvry *et al.* (1994). Sin embargo en estudios posteriores sobre fricción se han propuestos modelos más generales que el descrito por las ecuaciones (7)–(8), como el modelo LuGre (Canudas de Wit *et al.* (1995). Otro modelo de fricción con relativas mejorías respecto al modelado de la fricción es presentado en Swevers *et al.* (2000).

El estudio sobre control de motores y robots manipuladores presentado en el presente documento de tesis doctoral considera que la fricción presente en dichos sistemas mecánicos es modelada por (7)–(8).

I.1.2 Modelo dinámico de robots rígidos

La dinámica de un robot de n eslabones seriales con articulaciones rotacionales puede ser escrito como

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

que es una ecuación diferencial no lineal en el estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$, en donde $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ llamada *matriz de inercia*, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times n$ llamada *matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis*, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de $n \times 1$ llamado *vector de pares y fuerzas gravitacionales* y $\boldsymbol{\tau}$ es un vector de $n \times 1$

llamado *vector de fuerzas externas*, siendo este último los pares y fuerzas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

En la ecuación (9), $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}})$ es un vector de $n \times 1$ que representa los pares de fricción para cada articulación, siendo el modelo de Dahl (Dahl, 1976) el que modela dichos pares

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}) = F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \mathbf{z} \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{z} + \dot{\mathbf{q}} \quad (11)$$

donde

$$\Sigma_0 = \text{diag} \{ \sigma_{0_1}, \dots, \sigma_{0_n} \}$$

es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de rigidez de cada articulación,

$$\Psi(\dot{\mathbf{q}}) = \text{diag} \left\{ \frac{\sigma_{0_1}}{f_{c_1}} |\dot{q}_1|, \dots, \frac{\sigma_{0_n}}{f_{c_n}} |\dot{q}_n| \right\}$$

es una matriz diagonal semidefinida positiva en la cual f_{c_i} representa el coeficiente de fricción de Coulomb para la articulación i ,

$$F_v = \text{diag} \{ f_{v_1}, \dots, f_{v_n} \}$$

es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa para cada articulación y $\mathbf{z} = [z_1 \ \dots \ z_n]^T$ es el estado interno del modelo de fricción de Dahl (10) el cual es no medible.

El modelo del robot (9) tiene las siguientes propiedades bien conocidas (Canudas *et al.* 1996)

Propiedad 1. La matriz $M(\mathbf{q})$ es simétrica y definida positiva. La matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe y también es simétrica y definida positiva.

Propiedad 2. La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede ser expresada de modo que ésta y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia, $\dot{M}(\mathbf{q})$, satisfacen

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n.$$

I.1.3 Modelo cinemático

El problema de cinemática directa consiste en determinar la posición y orientación \mathbf{y} del extremo final del robot en función de las posiciones articulares \mathbf{q} . Si denotamos a $\mathbf{h}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como la cinemática directa, esto es, la relación entre el espacio de configuración articular y el espacio de configuración operacional, entonces la posición y orientación $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ del efector final es dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q}). \quad (12)$$

Un robot manipulador es llamado *cinemáticamente redundante* cuando el número de grados de libertad n es mayor que el número de variables que son necesarias para describir una tarea dada (Sciavicco y Siciliano, 2000). Otra forma de decir que un robot es cinemáticamente redundante, es cuando existe un conjunto de valores no aislados del vector \mathbf{q} para los cuales la posición y orientación del extremo final es la misma.

Por otro lado, el jacobiano del robot describe un mapeo de velocidad del espacio articular al espacio operacional del robot. La derivada temporal del modelo cinemático directo (12) da el modelo cinemático diferencial

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{d}{dt} \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

donde $J(\mathbf{q})$ es una matriz llamada jacobiano analítico (Canudas *et al.*, 1996).

En un robot no redundante ($n = m$) existen ciertas configuraciones para las cuales el jacobiano resulta ser singular, esto significa que en estas posiciones el jacobiano pierde

rango. Dichas configuraciones son llamadas *singularidades cinemáticas*. Evitar las singularidades en un manipulador es de interés por lo siguiente (Sciavicco y Siciliano, 2000):

- Las singularidades normalmente aparecen cuando el extremo final del robot se encuentra en la frontera física del espacio de trabajo.
- Cuando el robot está en una singularidad, puede existir un número infinito de soluciones al problema de *cinemática inversa*⁴.
- En la vecindad de una singularidad, velocidades pequeñas en el espacio operacional pueden reflejarse en velocidades grandes en el espacio articular.

Ahora bien, si el robot es redundante ($n > m$), se observa que la matriz jacobiana resulta ser no cuadrada, por lo que una posición articular admisible, es decir que no es una configuración singular, debe cumplir

$$\text{rango}\{J(\mathbf{q})\} = m. \quad (14)$$

Tomando la derivada temporal de la ecuación (13) tenemos

$$\ddot{\mathbf{y}} = J(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (15)$$

Así, la solución correspondiente a la ecuación (15) en términos de la matriz pseudoinversa derecha del jacobiano es

$$\ddot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})^\dagger [\ddot{\mathbf{y}} - \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] \quad (16)$$

⁴El problema de cinemática inversa consiste en la determinación de las variables articulares correspondientes a una posición y orientación dada del elemento terminal.

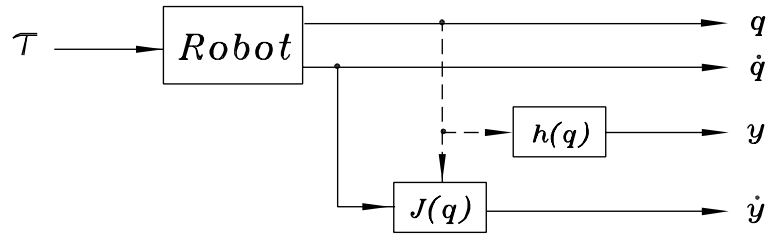


Figura 5: Entradas y salidas del robot.

donde

$$J(\mathbf{q})^\dagger = J(\mathbf{q})^T [J(\mathbf{q})J(\mathbf{q})^T]^{-1}, \quad (17)$$

con $J(\mathbf{q})J(\mathbf{q})^T$ no singular, es llamada matriz pseudoinversa derecha (Canudas *et al.*, 1996). Cabe decir que si se trata de un robot no redundante, i.e. $n = m$, la pseudoinversa del jacobiano resulta ser la matriz inversa del jacobiano.

El estudio sobre control en el espacio operacional presentado a lo largo del presente documento se basa en las siguientes hipótesis concernientes a la cinemática directa (12) y diferencial (13) del robot:

- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $n \geq m$.
- El jacobiano del robot $J(\mathbf{q})$ es de rango pleno y acotado, i.e.

$$\|J(\mathbf{q})\| \leq k_J \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad (18)$$

donde k_J es una constante estrictamente positiva.

I.2 Control de robots manipuladores

Los robots son sistemas multivariables que tienen como entradas a los pares $\boldsymbol{\tau}$, mientras que como salidas es posible elegir entre las posiciones y velocidades, ya sean dadas en el espacio articular o en el espacio operacional. La figura 5 esquematiza este concepto.

El control de robots consiste en determinar cuáles son los pares necesarios para que el robot satisfaga un objetivo de control planteado. Es ilustrativo, para propósitos de comparación, la clasificación de los objetivos de control más comunes (Kelly, 1995):

- *Control de posición pura.* Una configuración fija es especificada, donde el objetivo es llevar y mantener la posición del robot alrededor de una posición deseada constante partiendo desde cualquier condición inicial. Los comportamientos de transitorios no son especificados. El objetivo de control de posición pura en coordenadas articulares es puesto como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0},$$

y en coordenadas operacionales

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{y}_d - \mathbf{y}(t)] = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones articulares deseadas y $\mathbf{y}_d \in \mathbb{R}^m$ es el vector de posiciones operacionales deseadas, donde ambos son vectores constantes. En la figura 6 se ilustra el problema de control de posición pura en el espacio operacional.

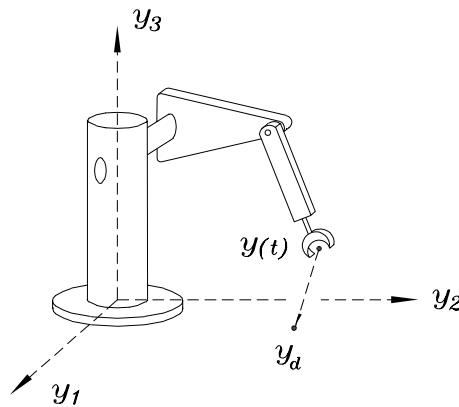


Figura 6: Control de posición pura en el espacio operacional

- *Control de movimiento.* Consiste en que las articulaciones o el extremo final sigan una trayectoria de referencia variante con el tiempo (con velocidad y aceleración continuas) especificada. En general la trayectoria deseada es supuesta tal que cumpla con las capacidades de par o fuerza de los actuadores. El objetivo de control de movimiento es seguimiento asintótico de la trayectoria deseada, i.e,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0},$$

o bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}(t)] = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{q}_d(t)$ es el vector de posiciones articulares deseadas y $\mathbf{y}_d(t)$ es el vector de posiciones operacionales deseadas, donde ambos vectores son función del tiempo. La figura 7 ilustra el problema de control de movimiento en el espacio operacional.

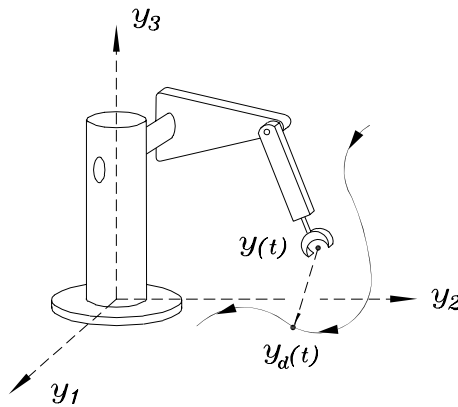


Figura 7: Control de movimiento en el espacio operacional

Cabe decir que el problema de control de posición pura es un caso particular del control de movimiento. Además, es algunas veces frecuente utilizar en la práctica el control de posición pura para resolver de manera artificial el control de movimiento, especificando una serie de puntos los cuales definirían una trayectoria que se desea seguir. La figura 8 muestra los esquemas generales de control de movimiento en coordenadas

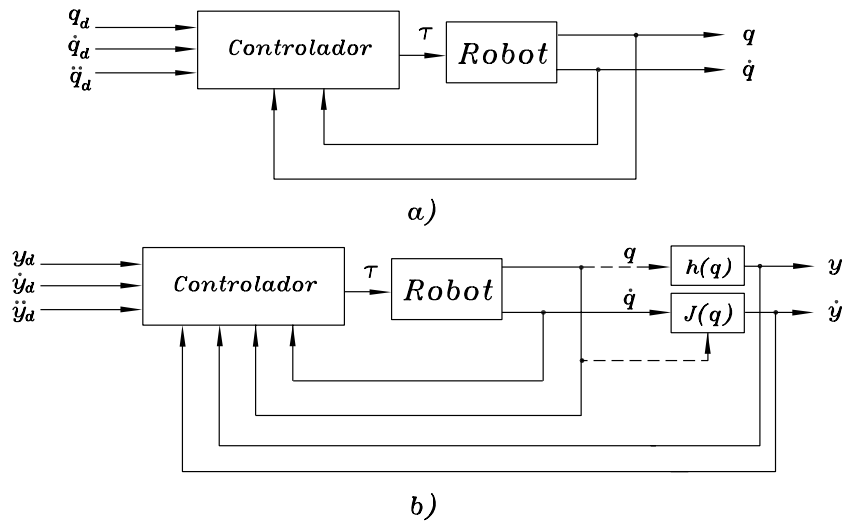


Figura 8: Esquemas generales de control, a) coordenadas articulares, b) coordenadas operacionales.

articulares y operacionales.

I.2.1 Diseño de algoritmos de control

Se ha realizado la distinción entre dos objetivos de control de robots: el control de posición pura y el control de movimiento. El cumplimiento de uno u otro en una forma cabal es básico para la realización de la tarea encomendada al manipulador. En general, el control de movimiento de robots manipuladores ha sido un tema que ha sido bien estudiado, tanto en coordenadas articulares como operacionales. Bajo distintas hipótesis y formulaciones ha sido posible la propuesta de soluciones a problemas más complejos de control de manipuladores, tales como control robusto de movimiento (Sage *et al.*, 1999, Lewis *et al.*, 1991), control de movimiento con pares acotados (De Queiroz *et al.*, 2000; Ortega *et al.*, 1998), control de movimiento en el espacio operacional (Sciavicco y Siciliano, 2000; Canudas *et al.*, 1996), entre otros.

De acuerdo a la formulación del problema de control y a la especificación de la tarea, el diseño de controladores de movimiento para robot manipuladores comprende dos vertientes generales (Aicardi *et al.*, 1995):

- Controlador diseñado en el espacio articular. En esta filosofía el algoritmo de control tiene una estructura fija y las trayectorias de referencia articulares son diseñadas fuera de línea a través de un método de inversión cinemática. Esto significa que si el movimiento es especificado en el espacio operacional, entonces deben encontrarse trayectorias de referencia articulares que represente el mismo movimiento del efector final, pero expresadas en coordenadas articulares. De esta forma, dichas trayectorias deseadas pueden ser usadas con el controlador diseñado en espacio articular.
- Controlador diseñado en el espacio operacional. Para muchas tareas robóticas es más natural desde un punto de vista físico especificar el movimiento en coordenadas operacionales que en coordenadas articulares. De aquí el interés por controladores diseñados en el espacio operacional. De esta forma cualquier trayectoria especificada en el espacio operacional puede ser ejecutada en forma directa sin necesidad de cálculos adicionales que los que el controlador requiere. Sin embargo, si el usuario desea cambiar de objetivo de control (e.g. control de movimiento, control de velocidad o control en coordenadas de visión), entonces el controlador y sus parámetros deben de ser rediseñados.

I.2.2 Control jerárquico de robots manipuladores

Tomando en cuenta las dos vertientes anteriores en el diseño de controladores, es preferible contar con un esquema de control general que permita, por un lado realizar cambios mínimos en la sintonización de las ganancias de control, y por otro, cambios menores en la estructura del controlador y sus parámetros cuando se requiere el cumplimiento de otro objetivo de control que la tarea encomendada al manipulador requiera, e.g. seguimiento de un objeto utilizando coordenadas de visión, o seguimiento de una ruta geométrica con velocidad prescrita (Nakamura *et al.*, 2000)

Por otro lado, en la práctica ha resultado satisfactorio, en cuanto a robustez y de-

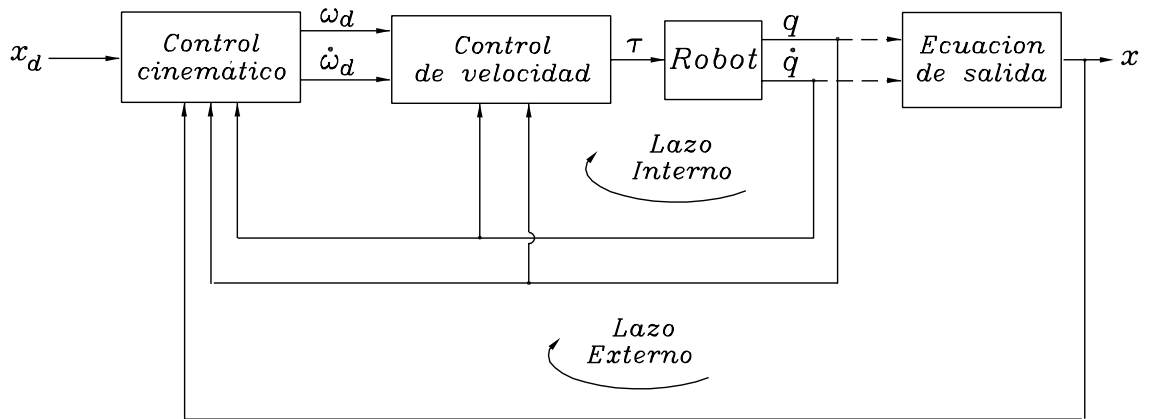


Figura 9: Diagrama a bloques de un esquema de control jerárquico basado en lazos internos de velocidad articular

sempañ, implementar los sistema de control de los robots industriales basándose en el uso de un lazo interno de velocidad articular en forma adicional a un lazo externo de posición (Corke, 1994; Nilsson, 1996). Relacionado con este hecho práctico y con el uso de algoritmos de inversión de cinemática diferencial, también llamados de control cinemático (Siciliano, 1990), se han realizado algunos estudios sobre control de movimiento de robots en coordenadas operacionales inspirados en el uso de dos lazos de retroalimentación, semejantes a los implementados en los robots industriales.

En Aicardi *et al.* (1995) se presenta un controlador que hace uso de la inversión de cinemática diferencial (control cinemático) para la resolución de velocidad articular, de modo que éste puede interpretarse como un lazo externo de control de movimiento en el espacio operacional. El lazo interno de velocidad articular que se propone en ese trabajo es basado en dinámica inversa (Spong y Vidyasagar, 1989).

Inspirado en la inversión de cinemática diferencial para calcular la velocidad articular deseada, se estudia el control de movimiento en coordenadas operacionales analizando el uso de controladores de velocidad articular con acción integral de error de velocidad en el lazo interno de control.

Estos antecedentes motivan la idea de que la estructura de control más apropiada para que un robot manipulador lleve a cabo una tarea determinada, y por ende cumpla

con un objetivo de control determinado, puede estar basada en un lazo interno de control de velocidad articular y un lazo externo de control apropiado al objetivo de control.

En la figura 9 se muestra un diagrama a bloques de un esquema de control jerárquico basado en lazos internos de velocidad articular en donde \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ denotan la posición y velocidad articular del robot, \mathbf{x} denota la salida⁵ \mathbf{x}_d denota la referencia de entrada (por ejemplo la posición y velocidad deseada del robot en el espacio), $\boldsymbol{\omega}_d$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ denotan la velocidad y aceleración articular deseada y $\boldsymbol{\tau}$ denota el par de entrada a la articulaciones del robot.

El lazo externo de control adquiere en línea mediciones de la referencia de entrada y de la salida del sistema, así como de la posición y velocidad articular del robot, con el fin de calcular los comandos de velocidad y aceleración articular que sirven de entrada al lazo interno de velocidad articular, el cual calcula los pares de entrada al robot. La razón de utilizar el adjetivo *jerárquico* para denotar el esquema de control de la figura 9, es que éste es un esquema de control basado en dos niveles o espacios: el cinemático (o de salida) y el articular (Aicardi *et al.* 1995).

Como se mencionó con anterioridad, el estudio de la compensación de fricción desde el punto de vista de control automático es un tema importante en los últimos años. La fricción es un fenómeno que aparece en muchos sistemas mecánicos como lo son los robots manipuladores y su presencia es indeseable ya que deteriora el desempeño de los movimientos de los sistemas mecánicos, particularmente a bajas velocidades. Si bien es cierto que en la literatura existe un estudio vasto de la compensación de fricción en el caso de control de movimiento de robots manipuladores (ver e.g. De Queiroz *et al.* (2000), Vedagarbha *et al.* (1999) y referencias allí citadas), hasta donde se sabe el problema de la compensación de fricción cuando el objetivo es controlar la velocidad

⁵Por ejemplo, si la salida es la posición del extremo final del robot en el espacio operacional, se tendría que $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q})$, donde $\mathbf{h}(\mathbf{q})$ es la cinemática directa. Otro ejemplo es la velocidad del extremo final, entonces $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{y}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, donde $J(\mathbf{q})$ es el jacobiano analítico del robot.

articular del robot es un problema al que no se ha prestado la atención debida.

En lo que respecta al control de robots manipuladores, este trabajo extiende el concepto de *control jerárquico de robots manipuladores* en las siguientes dos direcciones:

1. Se realiza un estudio sobre el diseño de controladores de velocidad con compensación de fricción tanto en motores como en robots manipuladores. Este estudio conlleva la aplicación de estos esquemas de control de velocidad a algoritmos de control jerárquico basado en lazos internos de velocidad.
2. Se aplica el concepto de control jerárquico a tres objetivos de control para robots manipuladores usando diferentes estructuras en el lazo de control de velocidad articular.

I.3 Objetivos del trabajo de tesis

Los objetivos que se persiguen en el presente tema de tesis doctoral son puntualizados a continuación:

- Realizar un estudio sobre el problema de control de velocidad articular considerando compensación de fricción.

Utilizando los resultados de control de velocidad articular,

- Proponer estructuras de control jerárquico para los problemas de:
 - Control de movimiento.
 - Control por campo de velocidad.
 - Control de ruta.

Estas formulaciones de control se especifican para ser resueltas en coordenadas operacionales.

Además de los aspectos teóricos, también se considera la implementación de los esquemas de control propuestos en un robot experimental de dos grados de libertad.

En lo que se refiere al problema de control de velocidad articular y su uso en control jerárquico, se ha puesto atención en realizar propuestas y comparaciones en la ejecución de los controladores basados en el uso del modelo de Dahl (Dahl, 1976) con respecto al uso del modelo de fricción viscosa y de Coulomb.

I.4 Organización de la tesis

En el capítulo II se presenta el análisis desarrollado sobre control de velocidad considerando compensación de fricción, tanto en motores como en manipuladores. El capítulo III concierne al control jerárquico de movimiento en coordenadas operacionales. El capítulo IV muestra los resultados obtenidos sobre control jerárquico de campo de velocidad en coordenadas operacionales. Los resultados sobre control jerárquico de ruta en coordenadas operacionales son mostrados en el capítulo V. Finalmente, las conclusiones sobre el presente tema de tesis doctoral son puntualizadas en el capítulo VI.

II Control de velocidad

El control de velocidad de motores eléctricos tiene muchas aplicaciones en procesos industriales y en herramientas automatizadas. El objetivo del control de velocidad es seguir en una forma precisa una referencia de velocidad que depende del tiempo.

Esquemas de regulación de velocidad (i.e. cuando la referencia de velocidad es una constante) para modelos de motores de corriente directa son estudiados en Dorf y Bishop (1998), y Kuo (1987). Una extensión al problema de control de velocidad para motores de corriente directa usando sólo mediciones de posición es reportada en Moreno y Kelly (2002a).

Por otro lado, las técnicas de compensación de fricción basadas en la utilización de modelos dinámicos se sustentan en el conocimiento de un modelo de fricción apropiado que predice la fricción real, generando así una acción de control para compensarla (Armstrong *et al.* 1994). Los modelos dinámicos de fricción, tales como el modelo de Dahl (Dahl, 1976) y el de LuGre (Canudas de Wit *et al.* 1995), son capaces de predecir fenómenos importantes que aparecen a bajas velocidades como el desplazamiento de predeslizamiento.

El control de velocidad de sistemas mecánicos con fricción es un tema que ha sido abordado en la literatura. El teorema 2 del artículo reportado por Canudas de Wit *et al.* (1995) concierne a un controlador de velocidad basado en un observador para compensar la fricción, la cual se supone es caracterizada por el modelo LuGre. La estabilidad asintótica de este controlador fue posteriormente establecida en Canudas de Wit (1998). En De Carli *et al.* (1994) se propone un controlador de velocidad basado en un modelo de fricción de Coulomb modificado. Por otro lado, el trabajo presentado por Amin *et al.* (1997) muestra resultados experimentales sobre control de velocidad usando una técnica de compensación y estimación de la fricción basada en un observador de fricción de Coulomb.

El objetivo del trabajo presentado en este capítulo es mostrar un estudio sobre control de velocidad considerando compensación de fricción basada en el model de Dahl. En primera instancia se muestran los resultados para servomecanismos (motores), y luego, la extensión a robots manipuladores. Además de mostrar el análisis para los controladores de velocidad propuestos, también se presentan resultados experimentales de control de velocidad considerando compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

II.1 Control de velocidad de motores

Esta sección presenta un estudio sobre el control de velocidad de motores con compensación de fricción de Dahl. La descripción del motor considerando el torque como la entrada es dada por

$$J\ddot{q} + f(z, \dot{q}) = \tau, \quad (19)$$

donde q es la posición angular del eje del motor, τ es el torque de entrada, J es la inercia del rotor y $f(z, \dot{q})$ representa el par debido al fricción, en donde z es un estado interno del modelo de fricción.

Un modelo bien adaptado a los fenómenos reales de fricción es el modelo de fricción de Dahl

$$f(z, \dot{q}) = \sigma_0 z + f_v \dot{q}, \quad (20)$$

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0}{f_C} |\dot{q}| z + \dot{q}, \quad (21)$$

donde f_C es el coeficiente de fricción de Coulomb, f_v es el coeficiente de fricción viscosa, σ_0 es una constante llamada parámetro de rigidez y z es el estado interno de la fricción, el cual no es medible. Como puede observarse, el modelo de fricción de Dahl es no lineal. La figura 10 muestra un diagrama de bloques del modelo del motor (19) con el

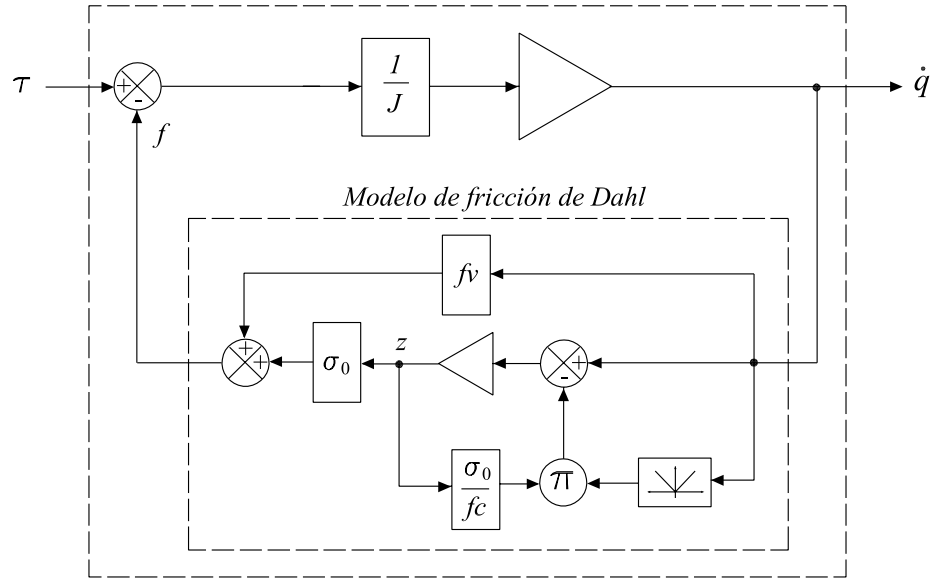


Figura 10: Motor con modelo de fricción de Dahl

modelo de fricción de Dahl (20)–(21).

Suponiendo que la especificación de velocidad deseada $\omega_d(t)$ es continuamente diferenciable y acotada, esto es que

$$\omega_d(t) \leq |\omega_d|_M \quad \forall t \geq 0,$$

y suponiendo el conocimiento de los parámetros del modelo del motor (19), (20) y (21), el problema de control de velocidad consiste en diseñar una ley de control que garantice el desvanecimiento asintótico del error de velocidad, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\omega_d(t) - \dot{q}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(t) = 0, \quad (22)$$

donde $\tilde{\omega} = \omega_d(t) - \dot{q}(t)$ denota el error de velocidad.

A continuación son analizados dos controladores de velocidad para motores. El primer controlador es basado en un observador estable, mientras que el segundo es basado en un observador exponencialmente convergente. También se plantea el uso del

modelo estático de fricción viscosa y de Coulomb para fines de compensación de fricción.

II.1.1 Control PI usando un observador asintótico

Para resolver el objetivo de control de velocidad (22), se propone el siguiente controlador

$$\tau = J[\dot{\omega}_d + k_v\tilde{\omega} + k_i\xi] + f_v\dot{q} + \sigma_0\hat{z}, \quad (23)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}, \quad (24)$$

donde k_i y k_v son constantes estrictamente positivas, y \hat{z} es una estimación del estado interno de fricción z , el cual no es medible. Es posible notar que el controlador (23)–(24) tiene una estructura proporcional–integral (PI) en el error de velocidad $\tilde{\omega}$. Para estimar el estado interno $z(t)$, se propone el siguiente observador:

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\sigma_0}{f_C}|\dot{q}|\hat{z} + \omega_d. \quad (25)$$

La figura 11 muestra un diagrama a bloques del sistema de control (23)–(25)

Sustituyendo el controlador (23)–(24) en la ecuación del motor (19), denotando a $\tilde{z} = \hat{z} - z$ como el error de observación del estado no medible z , y usando las ecuaciones (21) y (25), es posible obtener la ecuación de lazo cerrado en variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ -k_v\tilde{\omega} - k_i\xi - \frac{\sigma_0}{J}\tilde{z} \\ -\frac{\sigma_0}{f_C}|\omega_d - \tilde{\omega}|\tilde{z} + \tilde{\omega} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

donde el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio.

Para probar la estabilidad del equilibrio se usa la siguiente función positiva definida

y radialmente desacotada

$$V(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}^2 + \frac{1}{2}k_i\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{J}\tilde{z}^2,$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (26) da

$$\dot{V}(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}) \leq -k_v\tilde{\omega}^2. \quad (27)$$

Ésta es una función semidefinida positiva, por lo tanto se concluye que el sistema de lazo cerrado (26) es estable en el sentido de Lyapunov (Khalil, 1996). De este hecho se desprende que $\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z} \in L_\infty$. Adicionalmente, la conclusión de que (25) es un observador estable es implicada por la estabilidad del sistema (26).

De esta forma, integrando (27) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^t k_v\tilde{\omega}(\sigma)^2 d\sigma &\leq -\int_0^t \dot{V}(\xi(\sigma), \tilde{\omega}(\sigma), \tilde{z}(\sigma)) d\sigma \\ &= V(\xi(0), \tilde{\omega}(0), \tilde{z}(0)) \\ &\quad -V(\xi(t), \tilde{\omega}(t), \tilde{z}(t)). \end{aligned}$$

Del hecho de que $V(\xi(t), \tilde{\omega}(t), \tilde{z}(t))$ es inferiormente acotada por 0, se tiene que

$$\int_0^\infty k_v\tilde{\omega}(\sigma)^2 d\sigma < \infty.$$

Finalmente invocando el hecho de que una función cuadrática integrable — $\tilde{\omega}$ — cuya derivada temporal es acotada —ver ecuación (26)— debe de tender a cero cuando el tiempo incrementa, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(t) = 0.$$

Por lo tanto, el controlador (23)–(24) junto con el observador propuesto (25) da un sistema estable y el objetivo de control de velocidad (22) es satisfecho.

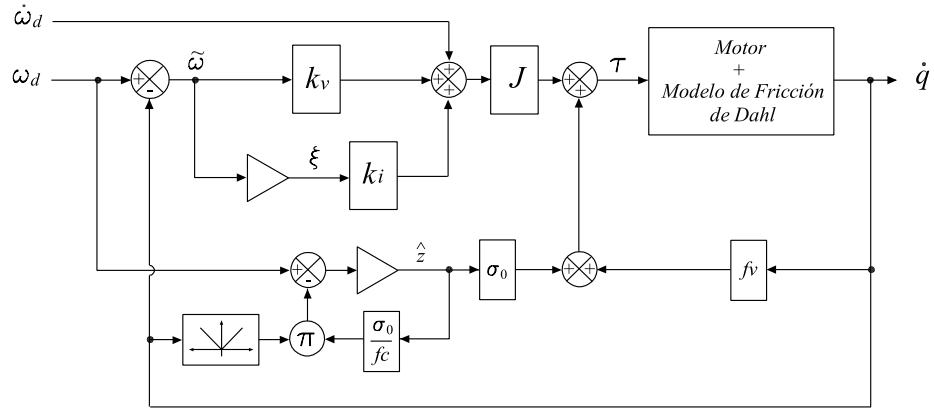


Figura 11: Controlador PI usando un observador asintótico

En vista de que se ha demostrado que $\tilde{\omega}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, la dinámica del error de observación \tilde{z} puede ser expresada por

$$\dot{\tilde{z}} = -\frac{\sigma_0}{f_c} |\omega_d(t)| \tilde{z}, \quad (28)$$

para un tiempo t suficientemente grande. La solución de la ecuación diferencial (28) es dada por

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}(0) e^{-\int_0^t |\omega_d(s)| ds}. \quad (29)$$

De esta forma, en el caso de que la velocidad deseada $\omega_d(t)$ no tiende a cero cuando el tiempo incrementa, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\omega_d(s)| ds = \infty.$$

En esta situación, de la ecuación (29) puede deducirse que el error de observación $\tilde{z}(t)$ tiende a cero cuando el tiempo incrementa.

II.1.2 Control PI usando un observador exponencial

Considere el controlador dado por

$$\tau = J[\dot{\omega}_d + \lambda\tilde{\omega}] + \bar{k}_v[\tilde{\omega} + \lambda\xi] + f_v\dot{q} + \sigma_0\hat{z} \quad (30)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega} \quad (31)$$

donde λ y \bar{k}_v son constantes estrictamente positivas. Para el controlador (30)–(31) proponemos el siguiente observador del estado $z(t)$:

$$\dot{x} = -\frac{\sigma_0}{f_C}|\dot{q}|\hat{z} + \dot{q} + k_0\bar{k}_v[\tilde{\omega} + \lambda\xi], \quad (32)$$

$$\hat{z} = x + Jk_0[\tilde{\omega} + \lambda\xi], \quad (33)$$

donde la ganancia k_0 del observador es una constante estrictamente positiva. La figura 12 muestra un diagrama a bloques del sistema de lazo cerrado que resulta de usar el controlador (30)–(33) en el modelo del motor (19)–(21).

Sustituyendo el controlador (30)–(31) en el modelo del motor (19), se obtiene

$$J[\dot{\tilde{\omega}} + \lambda\tilde{\omega}] + \bar{k}_v[\tilde{\omega} + \lambda\xi] + \sigma_0\tilde{z} = 0. \quad (34)$$

Diferenciando (33) con respecto al tiempo y usando las ecuaciones (32) y (34), se obtiene

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\sigma_0}{f_C}|\dot{q}|\hat{z} + \dot{q} - k_0\sigma_0\tilde{z}, \quad (35)$$

donde $\tilde{z} = \hat{z} - z$ denota el error de observación del estado no medible z . La ecuación de malla cerrada es obtenida de las ecuaciones (20), (21), (31), (34) y (35), que en forma

de variables de estado queda

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ -J^{-1}[\bar{k}_v \tilde{\omega} + \lambda \bar{k}_v \xi + \sigma_0 \tilde{z}] - \lambda \tilde{\omega} \\ -\frac{\sigma_0}{f_C} |\omega_d - \tilde{\omega}| \tilde{z} - k_0 \sigma_0 \tilde{z} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

El origen del espacio de estado del sistema variante con el tiempo (36) es un punto de equilibrio.

Para probar la estabilidad asintótica del equilibrio del sistema (36) puede usarse la siguiente función de Lyapunov

$$V(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}) = \frac{1}{2} J [\tilde{\omega} + \lambda \xi]^2 + \lambda \bar{k}_v \xi^2 + \frac{\alpha}{2} \tilde{z}^2, \quad (37)$$

donde α es una constante estrictamente positiva. La derivada temporal de (37) a lo largo de las trayectorias del sistema (36) da la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}) &= -\bar{k}_v \tilde{\omega}^2 - \lambda^2 \bar{k}_v \xi^2 - \alpha \frac{\sigma_0}{f_C} |\omega_d - \tilde{\omega}| \tilde{z}^2 - \alpha k_0 \sigma_0 \tilde{z}^2 \\ &\quad - \sigma_0 \tilde{\omega} \tilde{z} - \lambda \sigma_0 \xi \tilde{z}. \end{aligned}$$

Es posible obtener una cota superior sobre $\dot{V}(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z})$ como sigue

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}) &\leq \\ &= \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^2 \bar{k}_v & 0 & \frac{1}{2} \lambda \sigma_0 \\ 0 & \bar{k}_v & \frac{1}{2} \sigma_0 \\ \frac{1}{2} \lambda \sigma_0 & \frac{1}{2} \sigma_0 & \alpha k_0 \sigma_0 \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Una condición suficiente para que $\dot{V}(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z})$ sea definida negativa es que $Q > 0$.

Esto se cumple siempre para cualquier α que satisfaga

$$\alpha > \frac{\sigma_0}{2\bar{k}_v k_0}.$$

Por lo tanto, escogiendo α suficientemente grande, existe una constante $c > 0$ tal que $\dot{V}(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}) \leq -cV(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z})$. Entonces, las condiciones (ver e.g. (Vidyasagar, 1993)) para la estabilidad exponencial y global del origen del espacio de estado del sistema (36) son cumplidas. De aquí que el observador (32)–(33) sea exponencialmente convergente, lo que implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(t) = 0,$$

por lo que el objetivo del control de velocidad (22) es satisfecho.

Nótese que el controlador (30)–(31) puede ser reescrito de forma idéntica al controlador (23)–(24) usando la siguiente relación entre las ganancias

$$\bar{k}_v = \frac{Jk_v + J\sqrt{k_v^2 - 4k_i}}{2}, \quad (38)$$

$$\lambda = Jk_i \bar{k}_v^{-1}, \quad (39)$$

de donde resulta la siguiente restricción

$$k_v \geq 2\sqrt{k_i}. \quad (40)$$

II.1.3 Control de velocidad usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb

Un modelo simple de fricción que ha sido usado para fines de compensación es el siguiente model estático:

$$f(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_C \text{sign}(\dot{q}),$$

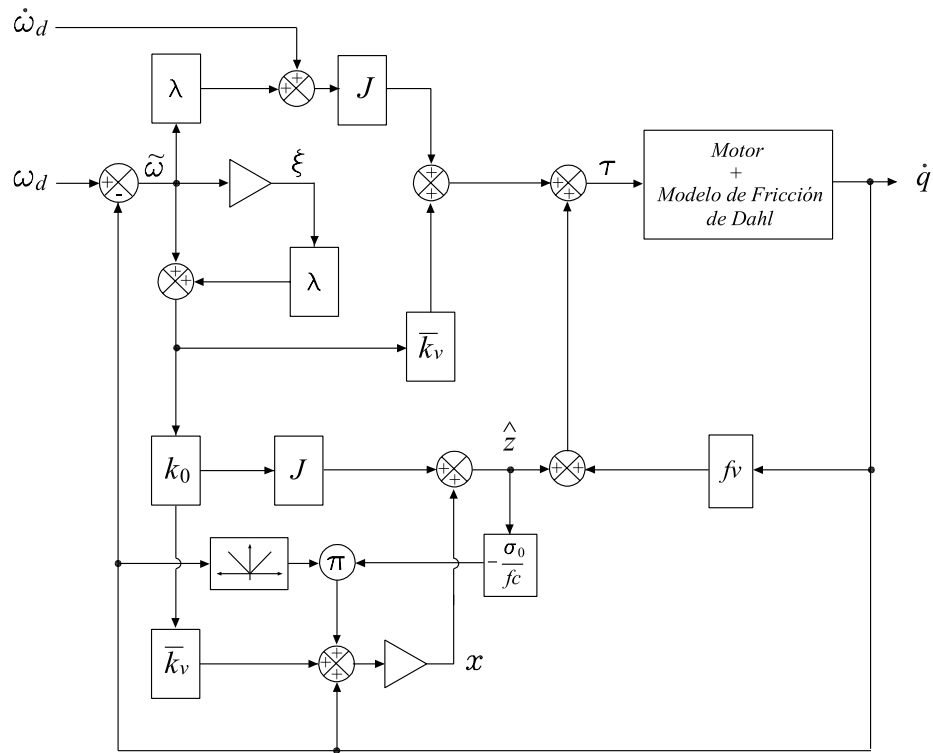


Figura 12: Controlador PI usando un observador exponencial

donde el primer término representa la fricción viscosa y el segundo representa la fricción de Coulomb. El controlador de velocidad del tipo PI mas compensación de fricción viscosa y de Coulomb que resulta es el siguiente

$$\tau = J[\dot{\omega}_d + k_v\tilde{\omega} + k_i\xi] + f_v\dot{q} + f_c\text{sign}(\dot{q}), \quad (41)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}. \quad (42)$$

Cuándo la fricción de Coulomb es despreciada, la ley de control (41)–(42) se convierte en

$$\tau = J[\dot{\omega}_d + k_v\tilde{\omega} + k_i\xi] + f_v\dot{q}, \quad (43)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}. \quad (44)$$

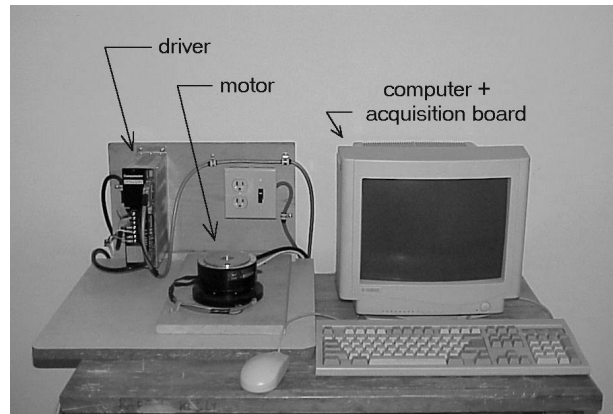


Figura 13: Sistema experimental

II.1.4 Resultados experimentales

El motor usado en los experimentos de control de velocidad es el modelo DM1004C de la compañía Parker Compumotor. Dicho motor es operado en modo par, de esta forma el motor actúa como una fuente de par y acepta una señal de voltaje como señal de referencia de torque. Este motor es equipado con un codificador óptico que tiene una resolución de 655,360 pulsos por revolución, la capacidad máxima de par es de 4 [Nm], y una capacidad de máxima velocidad de 900 [grad/seg]. El algoritmo de control es codificado en lenguaje C y ejecutado a una frecuencia de muestreo de 1 [kHz] en una PC equipada con la tarjeta de adquisición de datos MFIO-3A de Precision MicroDynamics. La figura 13 muestra el sistema experimental en cuestión.

Los parámetros numéricos del motor son: inercia del rotor $J = 2.5 \times 10^{-3}$ [kg m²], parámetro de fricción viscosa $f_v=0.1438$ [Nm seg/rad], parámetro de fricción de Coulomb $f_C=0.745$ [Nm], y coeficiente de rigidez $\sigma_0=1450.0$ [Nm/rad].

La prestaciones de los controladores fueron probadas considerando la siguiente trayectoria deseada de velocidad

$$\begin{aligned} \omega_d(t) = & 5.655t^2e^{-1.8t^3} + 11.781t^2e^{-1.8t^3}\text{sen}(2t) \\ & + 4.363 [1 - e^{-1.8t^3}] \cos(2t) \text{ [rad/seg]}. \end{aligned} \quad (45)$$

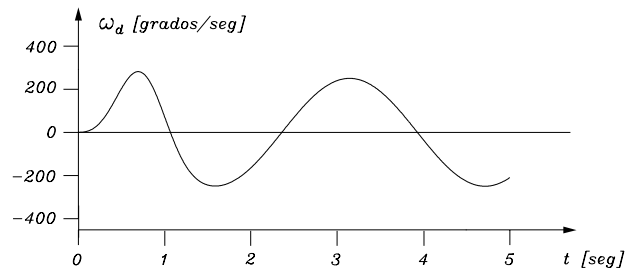


Figura 14: Evolución temporal de $\omega_d(t)$

Debe de ser notado que en tiempo $t = 0$ [seg] la velocidad y la aceleración deseada son nulas. La figura 14 muestra la evolución temporal de la velocidad deseada (45). Es fácil mostrar que la velocidad deseada satisface $|\omega_d(t)| \leq 281.2$ [grad/seg]. El seguimiento perfecto de la velocidad deseada (45) en el modelo del motor (19), (20) y (21), con los parámetros identificados arriba listados, produce picos de par de 1.5 [Nm], i.e. un 37.5% de la capacidad de par del motor.

Debe ser notado que la trayectoria de velocidad usada en los experimentos es similar en magnitud a la usada en los experimentos de control de velocidad presentados en De Carli *et al.* (1994), y Amin *et al.* (1997).

Los experimentos fueron llevados a cabo con las siguientes ganancias

$$\begin{aligned} k_i &= 10000.0 \text{ [1/seg}^2\text{]}, \\ k_v &= 200.0 \text{ [1/seg]}, \end{aligned}$$

donde fue utilizado el criterio para obtener un sistema críticamente amortiguado, i.e. $k_v = 2\sqrt{k_i}$. De esta forma se satisface la ecuación (40).

Las ganancias del controlador (30)–(31) pueden ser calculadas por medio de las ecuaciones (38) and (39), resultando en

$$\begin{aligned} \lambda &= 100.0 \text{ [seg}^{-1}\text{]}, \\ \bar{k}_v &= 0.25 \text{ [Nm seg/rad]}, \end{aligned}$$

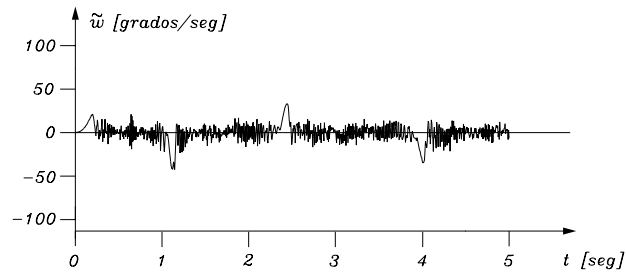


Figura 15: Error de velocidad: Control PI + compensación de fricción viscosa

El observador (32)–(33) fue implementado con $k_0=0.65$ [seg rad/[kg m²]].

La figura 15 muestra la evolución temporal del error de velocidad $\tilde{\omega}$ en el caso de usar el controlador PI más compensación de fricción viscosa (43)–(44). La figura 16 describe el resultado en caso de usar el controlador PI más compensación de fricción viscosa y de Coulomb (41)–(42). La figura 17 muestra el error de velocidad $\tilde{\omega}$ en el caso de usar el controlador PI más el observador asintótico (23)–(25), y la figura 18 en el caso de usar el controlador PI más el observador exponencial (30)–(33).

Aunque la estabilidad asintótica implica que el error de velocidad $\tilde{\omega}$ debe tender a cero, en la práctica las figuras 15, 16, 17 and 18 revelan un comportamiento oscilatorio en estado estacionario, debido a los varios factores como imprecisiones en el modelo del motor e implementación discreta del controlador

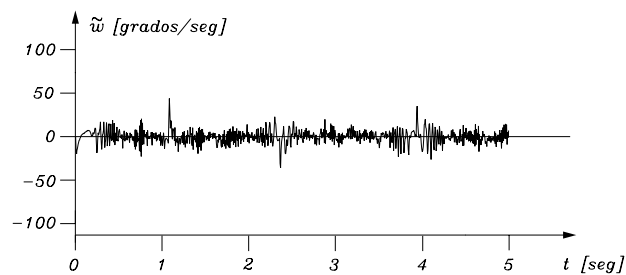


Figura 16: Error de velocidad: Control PI + compensación de fricción viscosa y de Coulomb

La tabla I muestra el porcentaje de errores pico máximos relativos al valor máximo de la velocidad deseada —281.2 [grad/seg]— para cada uno de los controladores. De esta tabla es posible aseverar que el controlador PI más el observador exponencial

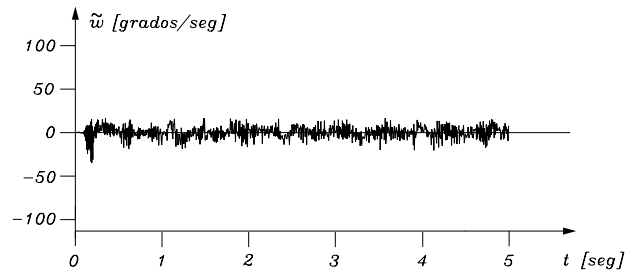


Figura 17: Error de velocidad: Control PI + observador asintótico

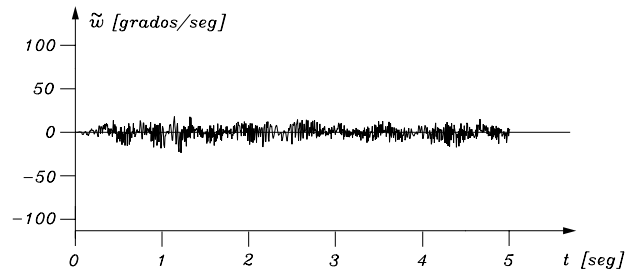


Figura 18: Error de velocidad: Control PI + observador exponencial

(30)–(33) tiene la mejor prestación de los cuatro controladores probados.

La evolución temporal del error de velocidad $\tilde{\omega}$ refleja qué tan buena es la ejecución del controlador. El criterio considerado fue el valor de la raíz cuadrática media —Root Mean Square (RMS)— de la señal de error de velocidad $\tilde{\omega}$ calculada en una excursión de tiempo T . Dicho valor RMS será denotado por $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ y es obtenido por medio de la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{\omega}(\sigma)|^2 d\sigma} \quad [\text{rad/seg}]. \quad (46)$$

La norma \mathcal{L}_T^2 ha sido previamente usada por varios autores como un criterio de ejecución de seguimiento (De Jager y Banens, 1994; Jaritz y Spong, 1996; Reyes y Kelly 2001). En la práctica, la implementación discreta del criterio (46) conduce a

$$\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}] = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=0}^i |\tilde{\omega}(kh)|^2 h} \quad [\text{rad/seg}],$$

donde $h = 1$ [mseg] es el periodo de muestreo y $T = 5$ [seg] es el tiempo de excursión.

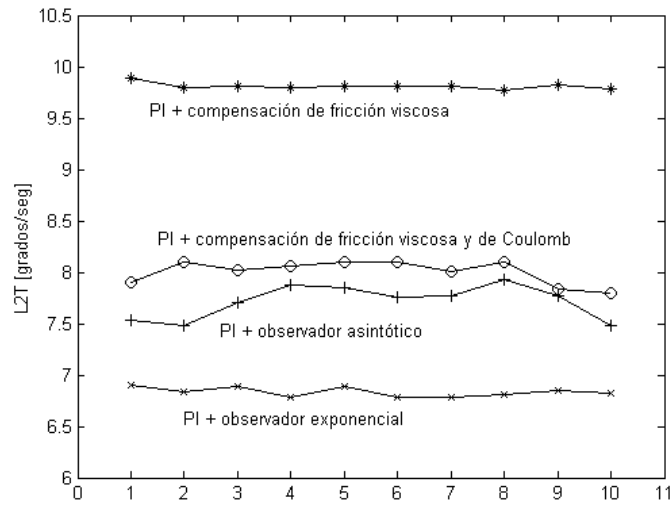


Figura 19: Norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para 10 ejecuciones

Tabla I: Error de velocidad relativo

Controlador	Percentage
PI + compensación de fricción viscosa	15.36 %
PI + compensación de fricción viscosa y de Coulomb	15.43 %
PI + observador asintótico	12.48 %
PI + observador exponencial	8.39 %

Tabla II: Promedio de $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para 10 ejecuciones de cada controlador

Controlador	Promedio
PI + compensación de fricción viscosa	9.81 [grad/seg]
PI + compensación de fricción viscosa y de Coulomb	8.00 [grad/seg]
PI + observador asintótico	7.71 [grad/seg]
PI + observador exponencial	6.84 [grad/seg]

La figura 19 muestra el valor de la norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para 10 ejecuciones de cada controlador implementado. De la figura es concluido que el controlador PI más observador exponencial (30)–(33) tuvo el mejor desempeño de los 4 controladores probados, dado que los valores de la norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ presentada en la implementación de este controlador fueron mínimos. Además, buena repetividad del controlador (30)–(33) fue apreciada, como puede ser verificado en la figura 19.

Sin embargo, el controlador con la mejor repetividad fue el controlador PI más compensación de fricción viscosa (43)–(44).

La tabla II muestra el promedio de $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para 10 ejecuciones de cada controlador. El controlador basado en observador exponencial (30)–(33) supera a los controladores PI más compensación de fricción viscosa (43)–(44), PI más compensación de fricción viscosa y de Coulomb (41)–(42), y PI más observador asintótico (23)–(25), en un 30.3%, 14.5%, y 11.3%, respectivamente.

II.2 Control de velocidad articular de robots manipuladores

Es esta sección se muestran los resultados obtenidos de la extensión del control de velocidad de motores al control de velocidad articular de robots manipuladores considerando la presencia de fricción en las articulaciones del robot. Parte de los resultados presentados en esta sección fueron reportados en Moreno *et al.* (2002). La formulación del problema de control de velocidad articular tratada en este trabajo de tesis parte del hecho de considerar que la especificación de la velocidad articular deseada $\omega_d(t)$ es

continuamente derivable y acotada, i.e.

$$\|\boldsymbol{\omega}_d(t)\| \leq \|\boldsymbol{\omega}_d\|_M \quad \forall t \geq 0.$$

Además se supone que se conoce el modelo de robot, el cual es dado por las ecuaciones (9), (10) y (11). De esta forma, el problema de control de velocidad consiste en encontrar una ley de control que garantice el cumplimiento de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{0}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_d - \dot{\mathbf{q}}$ denota el error de velocidad.

Para resolver este planteamiento se proponen tres esquemas de control. Los dos primeros controladores que se presentan para resolver el problema de control citado anteriormente corresponden a la aplicación al control de velocidad del control por dinámica inversa —también llamado “par calculado” (Spong y Vidyasagar, 1989)— y del control PD con compensación (Slotine y Li, 1991), ambos usados originalmente para control de movimiento en robots manipuladores. El tercero de ellos es la utilización del control PD+ (Koditschek, 1984), usado también para control de movimiento.

II.2.1 Control de velocidad basado en dinámica inversa

Considere el siguiente controlador basado en dinámica inversa (Spong y Vidyasagar, 1989)

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad (47)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (48)$$

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas de $n \times n$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_d - \dot{\mathbf{q}}$ denota el error de velocidad y $\hat{\mathbf{z}}$ es una estimación del estado no medible \mathbf{z} del modelo de

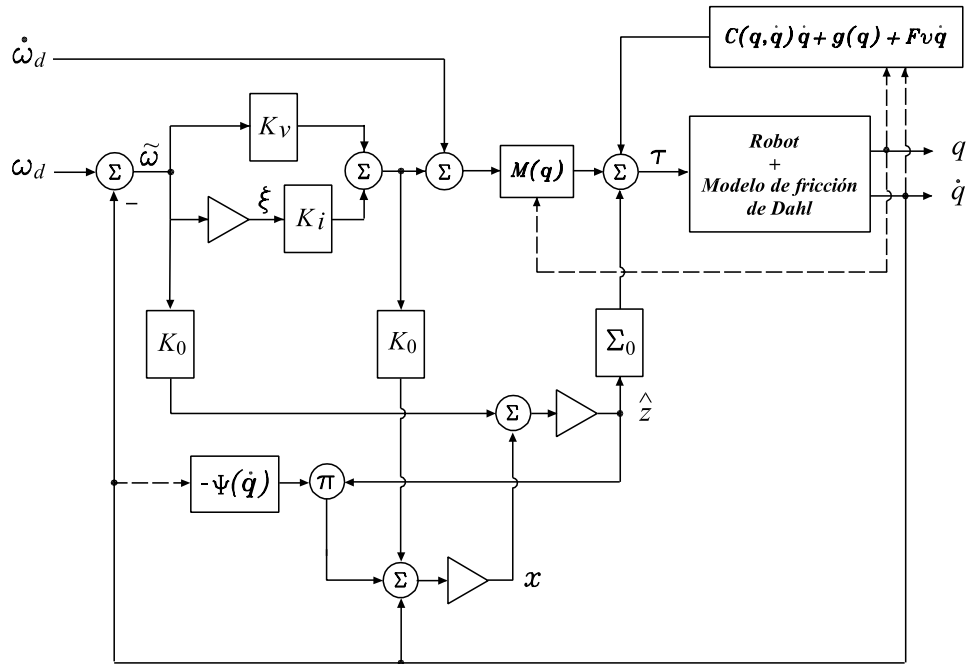


Figura 20: Controlador de velocidad basado en dinámica inversa

fricción de Dahl (10)–(11). La variable \hat{z} es obtenida del siguiente observador

$$\dot{x} = -\Psi(q)\hat{z} + \dot{q} + K_0[K_v\tilde{\omega} + K_i\xi], \quad (49)$$

$$\hat{z} = x + K_0\tilde{\omega}, \quad (50)$$

donde $K_0 = \text{diag}\{k_{01}, \dots, k_{0n}\}$ es una matriz simétrica definida positiva. La figura 20 muestra un diagrama de bloques del controlador y observador (47)–(50).

La ecuación de malla cerrada es obtenida sustituyendo al controlador (47)–(48) en la ecuación del robot (9) y definiendo

$$\tilde{z} = \hat{z} - z, \quad (51)$$

el cual denota el error de observación del estado interno \mathbf{z} . De esta forma se tiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - K_i \boldsymbol{\xi} - M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}} - K_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

El sistema de lazo cerrado (52) tiene al origen del espacio de estado como un equilibrio. Para probar la estabilidad del origen del espacio de estado del sistema (52) y el cumplimiento del objetivo de control de velocidad, se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T K_i \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \tilde{\mathbf{z}}, \quad (53)$$

donde ϵ es una constante estrictamente positiva. La derivada temporal de (53) a lo largo de la trayectorias del sistema (52) es dada por

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \Psi(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{z}} - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}}.$$

Sin embargo, es posible obtener una cota superior sobre $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ como sigue

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) &\leq \\ & - \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_v\} & -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}} & \frac{1}{\epsilon} \lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \end{bmatrix} \\ & = W(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) \end{aligned}$$

Debe ser notado que $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ es semidefinida negativa si la matriz Q es definida

positiva. Una condición necesaria y suficiente para que Q sea definida positiva es que

$$\epsilon < \frac{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\}}{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\}},$$

la cual puede ser siempre satisfecha para cualquier $K_v > 0$, $\Sigma_0 > 0$, y debido a la Propiedad 1 (sección I.1.2) del modelo del robot. El hecho de que la función de Lyapunov $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ sea radialmente desacotada y que su derivada temporal $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ sea semidefinida negativa implica la estabilidad del origen del espacio de estado del sistema (52), y por ende que las variables de estado son acotadas, esto es que $\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}} \in L_\infty^n$. De esta forma,

$$\begin{aligned} -\int_0^t W(\boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\mathbf{z}}(\sigma))d\sigma &\leq -\int_0^t \dot{V}(\sigma, \boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\mathbf{z}}(\sigma))d\sigma \\ &= V(\boldsymbol{\xi}(0), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0), \tilde{\mathbf{z}}(0)) - V(t, \boldsymbol{\xi}(t), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t), \tilde{\mathbf{z}}(t)). \end{aligned}$$

Del hecho de que $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ es acotada inferiormente por 0, se demuestra que

$$-\int_0^\infty W(\boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\mathbf{z}}(\sigma))d\sigma < \infty.$$

El que las soluciones de estados $[\boldsymbol{\xi}(t)^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)^T \tilde{\mathbf{z}}(t)^T]^T$ sean acotadas implica que sus derivadas temporales también lo están (ver ecuación de lazo cerrado (52)). De aquí se desprende la conclusión de que las soluciones de estados $[\boldsymbol{\xi}(t)^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)^T \tilde{\mathbf{z}}(t)^T]^T$ son uniformemente continuas. Por lo tanto, la función $W(\boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\mathbf{z}}(\sigma))$ también es uniformemente continua. Finalmente, invocando el lema de Barbalat (Sastrey, 1999) es posible demostrarse que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ \tilde{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

De esta forma, usando el controlador (47)–(48) junto con el observador (49)–(50) se garantiza el cumplimiento del objetivo de control de velocidad articular.

Convergencia exponencial del observador

Debe notarse que el observador (49)–(50) es exponencialmente estable. Para demostrar esta afirmación considere la función de Lyapunov dada por

$$V_0(\tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \tilde{\mathbf{z}}$$

cuya derivada temporal a lo largo del sistema (52) es dada como

$$\dot{V}_0(\tilde{\mathbf{z}}) = -\tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}}.$$

Debido a que $\Sigma_0 K_0^{-1} \Psi(\dot{\mathbf{q}})$ es una matriz semidefinida positiva y que la matriz $\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0$ es definida positiva puede demostrar que

$$\dot{V}_0(\tilde{\mathbf{z}}) \leq -cV_0(\tilde{\mathbf{z}}),$$

donde c es una constante estrictamente positiva. Lo anterior implica que $\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq C_1 e^{-C_2(t-t_0)}$, donde C_1 y C_2 son constantes estrictamente positivas.

II.2.2 Control de velocidad basado en PD con compensación

El control PD con compensación fue usado originalmente para control adaptable (Slotine y Li, 1991). Sin embargo, este controlador puede ser reescrito como en (Spong *et al.*, 1990) y obtener de él un controlador de velocidad:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \Lambda \tilde{\boldsymbol{\omega}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\omega}_d + \Lambda \boldsymbol{\xi}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi} + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (54)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (55)$$

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas y $\Lambda = K_v^{-1} K_i$. En la ecuación

Se puede demostrar la estabilidad del sistema (57) por medio de la siguiente función de Lyapunov inspirada de Spong *et al.* (1990)

$$V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda \boldsymbol{\xi}]^T M(\mathbf{q}) [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda \boldsymbol{\xi}] + \boldsymbol{\xi}^T K_i \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}},$$

cuya derivada temporal puede ser obtenida usando la Propiedad 2 (sección I.1.2) del modelo del robot:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\xi}^T K_i K_v^{-1} K_i \boldsymbol{\xi} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}} \\ &\leq -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\xi}^T K_i K_v^{-1} K_i \boldsymbol{\xi} = W(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}). \end{aligned} \quad (58)$$

La cota superior (58) sobre $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ ha sido obtenida en virtud de que $\Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}})$ es semidefinida positiva. La función $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ es semidefinida negativa globalmente, lo que implica que el origen del espacio de estado del sistema (57) es estable (Vidyasagar, 1993). Este resultado implica que

$$\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}} \in L_\infty^n.$$

Sin embargo, la hipótesis de acotamiento de la velocidad deseada junto con el resultado de acotamiento del vector de estados implican que

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}, \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \in L_\infty^n,$$

por lo que las señales $\boldsymbol{\xi}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ y $\tilde{\mathbf{z}}$ son uniformemente continuas.

Por otro lado, de la desigualdad (58) se desprende que

$$-\int_0^t W(\boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma)) d\sigma \leq -\int_0^t \dot{V}(\sigma, \boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\mathbf{z}}(\sigma)) d\sigma,$$

de donde se demuestra que

$$-\int_0^t W(\boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma)) d\sigma \leq V(0, \boldsymbol{\xi}(0), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0), \tilde{\mathbf{z}}(0)).$$

Esto muestra que $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ y $\boldsymbol{\xi}$ son funciones integrables al cuadrado, esto es que $\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\xi} \in L_2^n$. Puede invocarse el lema de Barbalat (Sastry, 1999) para demostrar el cumplimiento del objetivo de control, esto es que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{0}.$$

II.2.3 Control de velocidad basado en PD+

El controlador de velocidad con compensación de fricción basado en el control PD+ (Koditschek 1984) es descrito por

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi} + F_v\dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0\hat{\mathbf{z}} \quad (59)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (60)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_d. \quad (61)$$

Nótese que el controlador (59)–(61) surge como un caso especial del controlador (54)–(56) cuando $\Lambda = 0$. La figura 22 muestra el diagrama de bloques del controlador de velocidad (59)–(61).

Sustituyendo el controlador (59)–(61) en el modelo del robot (9) y usando la definición de error de observación (51) es posible obtener la ecuación de malla cerrada en forma de estados como sigue

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -M(\mathbf{q})^{-1} [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi} + \Sigma_0\tilde{\mathbf{z}}] \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}. \quad (62)$$

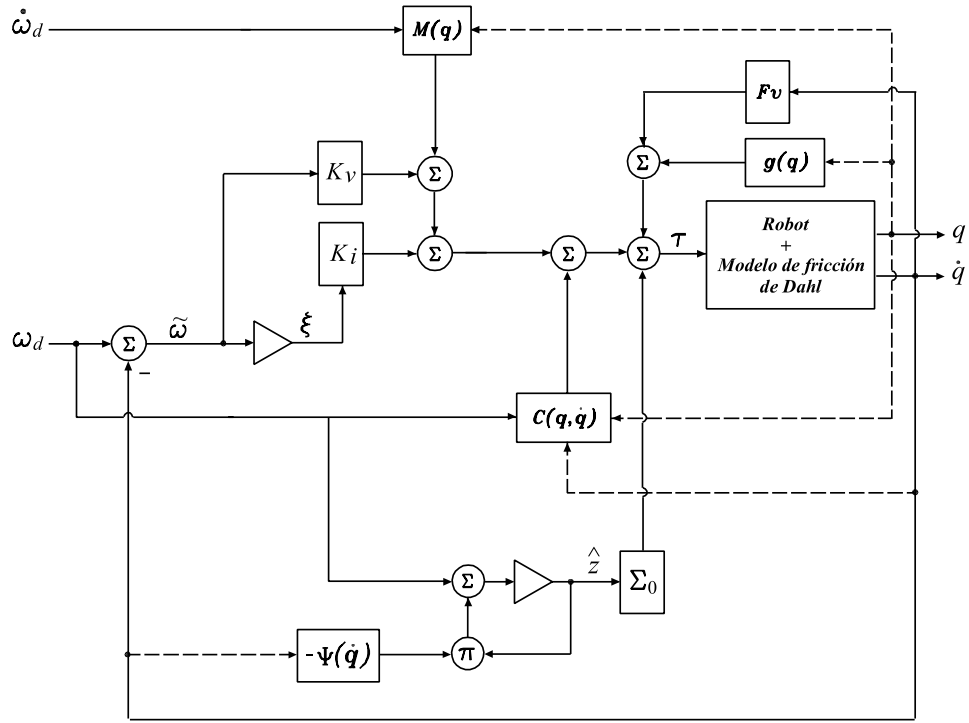


Figura 22: Controlador de velocidad basado en PD+

El origen del espacio de estados es un equilibrio del sistema (62). Para demostrar la estabilidad del origen del espacios de estado se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T M(\boldsymbol{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T K_i \boldsymbol{\xi} + \tilde{\boldsymbol{z}}^T \Sigma_0 \tilde{\boldsymbol{z}}.$$

Tomando la derivada temporal de la función de Lyapunov propuesta a lo largo de las trayectorias del sistema de lazo cerrado (62) se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{z}}^T \Sigma_0 \Psi(\dot{\boldsymbol{q}}) \tilde{\boldsymbol{z}} \\ &\leq -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} = W(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}), \end{aligned}$$

en donde se ha usado el hecho de que $\Sigma_0 \Psi(\dot{\boldsymbol{q}})$ es semidefinida positiva y la Propiedad 2 (sección I.1.2) del modelo del robot.

Empleando los mismos argumentos invocados en el análisis de los sistemas de lazo cerrado (52) y (57), puede aplicarse el lema de Barbalat para demostrar el cumplimiento del objetivo de control de velocidad, esto es que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(t) = \mathbf{0}.$$

II.2.4 Control de velocidad usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb

Es posible considerar que la fricción en las articulaciones del robot es modelada por

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = F_v \dot{\mathbf{q}} + F_C \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (63)$$

donde F_v es una matriz diagonal que contiene los coeficientes de fricción viscosa de cada articulación, F_C es una matriz diagonal que contiene los coeficientes de fricción de Coulomb de cada articulación y $\text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) = [\text{sign}(\dot{q}_1), \dots, \text{sign}(\dot{q}_n)]$ con $\text{sign}(x) = 1$ para $x > 1$ y $\text{sign}(x) = -1$ para $x < 1$, aunque $\text{sign}(0)$ es indefinido. El primer término de la ecuación (63) representa la fricción viscosa, mientras que el segundo representa la fricción de Coulomb.

Con fines de comparación, se realizaron experimentos considerando compensación de fricción basada en el modelo (63). En el caso del controlador basado en dinámica inversa resulta el siguiente esquema de control

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + F_C \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (65)$$

Respecto al control de velocidad basado en el control PD con compensación resulta

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \Lambda \tilde{\boldsymbol{\omega}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\omega}_d + \Lambda \boldsymbol{\xi}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi} + F_v \dot{\mathbf{q}} + F_C \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (66)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}, \quad (67)$$

que considera compensación de fricción viscosa y de Coulomb. En caso del control PD+ queda

$$\tau = M(\mathbf{q})\dot{\omega}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\omega_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v\tilde{\omega} + K_i\xi + F_v\dot{\mathbf{q}} + F_C\text{sign}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (68)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}. \quad (69)$$

Otra situación consiste en despreciar el efecto de la fricción de Coulomb. En este escenario, puede deducirse que

$$\tau = M(\mathbf{q})[\dot{\omega}_d + K_v\tilde{\omega} + K_i\xi] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_v\dot{\mathbf{q}}, \quad (70)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}, \quad (71)$$

es un controlador de velocidad basado en dinámica inversa que considera sólo compensación de fricción viscosa. En el caso del controlador basado en PD con compensación queda

$$\tau = M(\mathbf{q})[\dot{\omega}_d + \Lambda\tilde{\omega}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\omega_d + \Lambda\xi] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v\tilde{\omega} + K_i\xi + F_v\dot{\mathbf{q}} \quad (72)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}, \quad (73)$$

como otra elección de control de velocidad articular. Finalmente, el controlador

$$\tau = M(\mathbf{q})\dot{\omega}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\omega_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v\tilde{\omega} + K_i\xi + F_v\dot{\mathbf{q}}, \quad (74)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}, \quad (75)$$

está basado en el control PD+ y sólo considera compensación de fricción viscosa.

II.2.5 Resultados experimentales

En esta sección se presentan resultados experimentales del control de velocidad que han sido obtenidos utilizando el sistema experimental descrito en el apéndice A.

La especificación de velocidad debe ser escogida para que el movimiento del robot sea sin cambios abruptos en la posición, velocidad y aceleración desde el comienzo hasta el final del movimiento. La velocidad deseada especificada en todas las pruebas de los controladores aquí estudiados es dada por

$$\omega_{d1}(t) = 4.7124t^2e^{-2t^3} + 4.2t^2e^{-2t^3}\sin(6t) + 4.2[1 - e^{-2t^3}]\cos(6t) \text{ [rad/seg]}, \quad (76)$$

$$\omega_{d2}(t) = 6.2832t^2e^{-2t^3} + 7.0896t^2e^{-2t^3}\sin(3t) + 3.5448[1 - e^{-2t^3}]\cos(3t) \text{ [rad/seg]}. \quad (77)$$

La figura 23 muestra la evolución temporal de la velocidad deseada (76)–(77). Debe notarse que en $t=0$ tanto la velocidad deseada como la aceleración deseadas son nulas. Es posible demostrar que

$$|\omega_{d1}(t)| \leq 241.8 \text{ [grad/seg]}$$

$$|\omega_{d2}(t)| \leq 203.1 \text{ [grad/seg]}$$

El periodo de ejecución de los controladores fue de 1 [mseg].

En primera instancia se presentan experimentos con los controladores basados en dinámica inversa (47)–(50) y (64)–(65). Las ganancias elegidas para ambos controladores fueron

$$K_i = \text{diag}\{900, 900\} \text{ [1/seg}^2\text{]}$$

$$K_v = \text{diag}\{60, 60\} \text{ [1/seg]},$$

y $K_0 = \text{diag}\{0.0045, 0.0045\} \text{ [seg]}$ para el observador (49)–(50). La figura 24 muestra los errores de velocidad utilizando el controlador con compensación de fricción basada en el

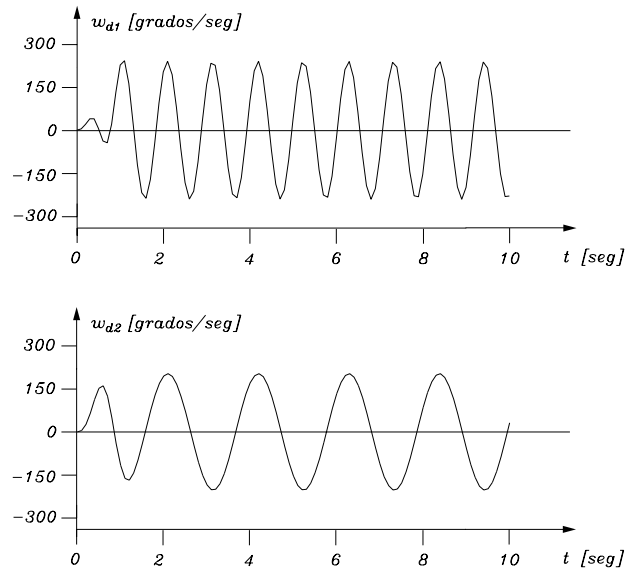


Figura 23: Velocidad deseada

Tabla III: Error de velocidad pico: Control basado en dinámica inversa

Variable	Compensación de fricción viscosa y de Coulomb	Compensación de fricción de Dahl
$\tilde{\omega}_1$	5.55 [grados/seg]	5.12 [grados/seg]
$\tilde{\omega}_2$	42.20 [grados/seg]	27.24 [grados/seg]

modelo de Dahl (47)–(50). Por otro lado, la figura 25 muestra los errores de velocidad al usar el controlador con compensación de fricción viscosa y de Coulomb (64)–(65). La mejoría en el desempeño es clara al usar el controlador (47)–(50), particularmente si se comparan $\tilde{\omega}_2$ en las figuras 24 y 25, ya que los picos de error de velocidad son menores con respecto a la implementación del controlador basado en dinámica inversa que considera compensación de fricción viscosa y de Coulomb (64)–(65). La tabla III presenta los errores pico máximos obtenidos en la implementación de dichos controladores.

Las siguientes ganancias fueron usadas para los controladores basados en el control PD con compensación (54)–(56) y control PD+ (59)–(61):

$$K_i = \text{diag}\{10, 5\} \text{ [Nm/rad]}$$

$$K_v = \text{diag}\{5, 4\} \text{ [Nm seg/rad]}.$$

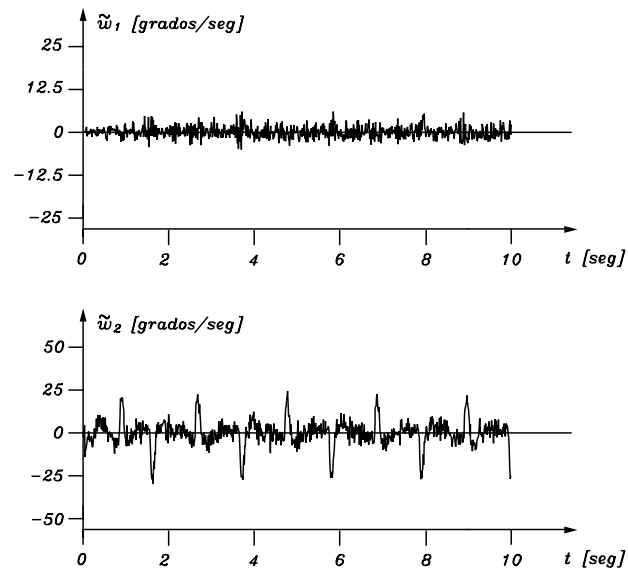


Figura 24: Error de velocidad: Control por dinámica inversa + observador basado en el modelo de Dahl

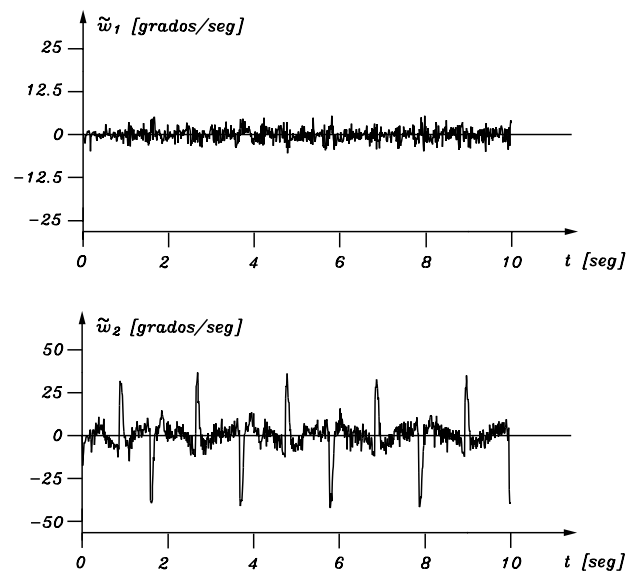


Figura 25: Error de velocidad: Control por dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb

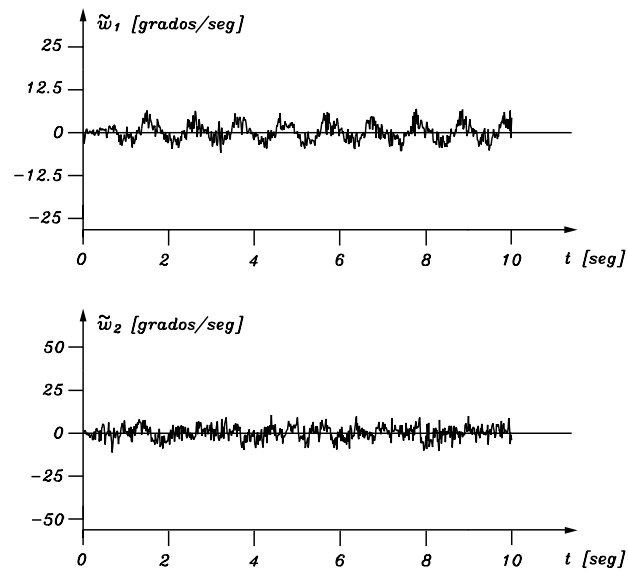


Figura 26: Error de velocidad: Control PD con compensación + observador basado en el modelo de Dahl

Para el controlador basado en el PD con compensación se tiene

$$\Lambda = K_v^{-1}K_p = \text{diag}\{2, 1.25\} [\text{seg}^{-1}].$$

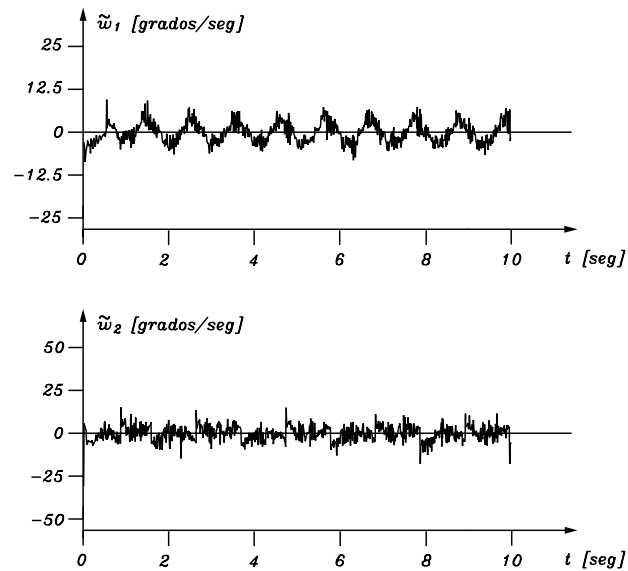


Figura 27: Error de velocidad: Control PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb

Los resultados experimentales son mostrados en la figuras 26 y 27, para los controladores basados en PD con compensación (54)–(56), que considera compensación basada en el modelo de Dahl, y (66)–(67) en caso de usar compensación de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La tabla IV muestra los errores de velocidad pico en la implementación de estos controladores, lo que ilustra que el controlador con mejor desempeño es el considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

Tabla IV: Error de velocidad pico: Control basado en PD con compensación

Variable	Compensación de fricción viscosa y de Coulomb	Compensación de fricción de Dahl
$\tilde{\omega}_1$	9.6 [grados/seg]	5.92 [grados/seg]
$\tilde{\omega}_2$	17.3 [grados/seg]	11.33 [grados/seg]

Finalmente, en consideración a la estructura de control de velocidad basada en el control PD+, la figura 28 muestra el resultado para el controlador (59)–(61) que considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, mientras que la figura 29 muestra el resultado para el controlador (68)–(69) que considera compensación de fricción viscosa y de Coulomb. Si bien es cierto que las gráficas 28 y 29 no arrojan resultados contundentes acerca de las prestaciones de cada controlador, la tabla V muestra que el controlador con compensación de fricción basada en el modelo de Dahl supera ligeramente al controlador que usa compensación de fricción viscosa y de Coulomb, ya que los errores de velocidad pico del primero son ligeramente menores que los del segundo, aunque no en una forma significativa.

Se ha recurrido al uso de un índice de comportamiento para tener una apreciación más clara del desempeño de los controladores implementados. El índice de compor-

Tabla V: Error de velocidad pico: Control basado en PD+

Variable	Compensación de fricción viscosa y de Coulomb	Compensación de fricción de Dahl
$\tilde{\omega}_1$	8.9 [grados/seg]	8.10 [grados/seg]
$\tilde{\omega}_2$	17.6 [grados/seg]	16.13 [grados/seg]

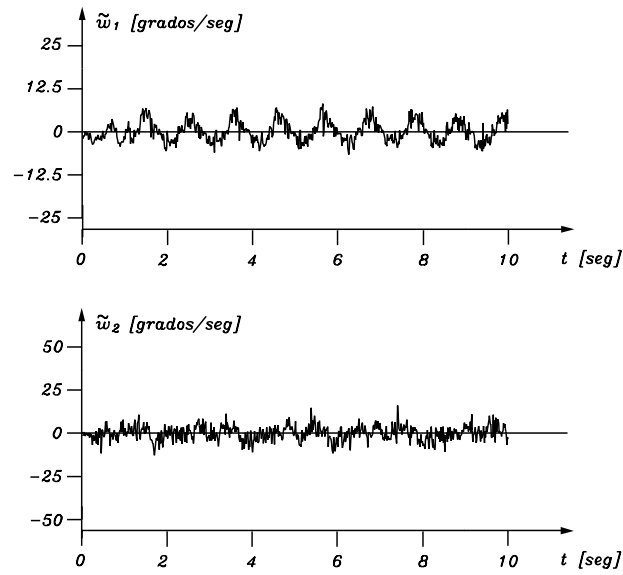


Figura 28: Error de velocidad: Control PD+ observador basado en el modelo de Dahl

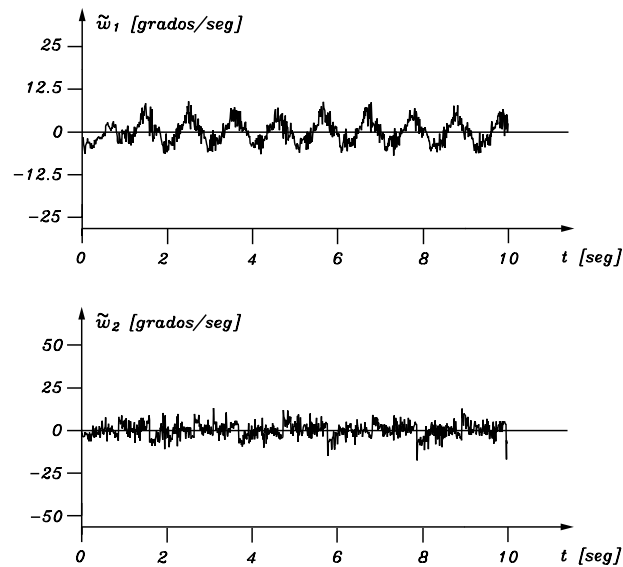


Figura 29: Error de velocidad: Control PD+ + compensación de fricción viscosa y de Coulomb

tamiento usado fue la norma truncada \mathcal{L}_T^2 del error de velocidad articular, la cual proporciona el valor RMS (“root mean square”) de dicha señal en una excursión de tiempo T ,

$$\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\omega}(\sigma)\|^2 d\sigma} \quad [\text{rad/seg}].$$

Tomando en cuenta la implementación discreta del controlador tenemos

$$\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}] = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=0}^i \|\tilde{\omega}(kh)\|^2 h} \quad [\text{rad/seg}],$$

donde $h=1$ [mseg] es el periodo de muestreo y $T=10$ [seg] es el tiempo de excursión usados.

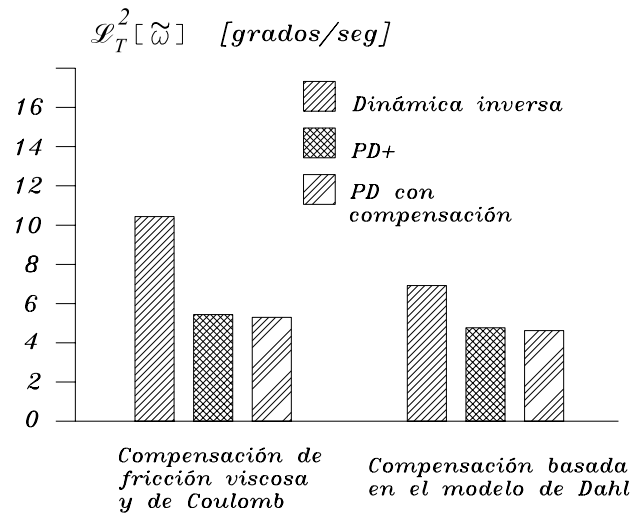
La figura 30 presenta una gráfica de barras en la que se muestran los valores de la norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para todos los controladores implementados. En el caso de usar compensación de fricción viscosa y de Coulomb, el controlador (64)–(65) presenta el valor más alto de la norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$. Los controladores de velocidad basados en PD+ (68)–(69) y PD con compensación (66)–(67) presentan valores similares de la norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$. Sin embargo, el controlador con mejor respuesta es el (68)–(69). Un mejor resultado puede ser obtenido aumentando las ganancias.

Por otro lado, los valores de la norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ para los controladores por dinámica inversa (47)–(50), PD+ (59)–(61) y PD con compensación (54)–(56), que consideran compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, resultaron ser menores comparados con lo controladores que consideran compensación de fricción viscosa y de Coulomb. Dicha mejoría es aproximadamente en un 27.3% en el caso del control por dinámica inversa, 11.1% en caso del control PD+ y 11.6% para el control PD con compensación.

Como prueba final de las prestaciones de los controladores de velocidad propuestos, se han llevado a cabo experimentos especificando la velocidad deseada $\omega_d(t)$ con distintos ordenes de magnitud. Estos experimentos consisten en especificar la velocidad deseada (76)–(77) multiplicada por un factor constante para modular su magnitud, i.e.

$$\omega_d(t) = \gamma \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ representan las expresiones dadas por el lado derecho de las ecua-

Figura 30: Norma $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ Tabla VI: Magnitudes máximas de la velocidad deseada para cada valor de γ

γ	$ \omega_{d1}(t) _M$ [grad/seg]	$ \omega_{d2}(t) _M$ [grad/seg]
0.1	24.65	20.25
0.25	61.80	50.77
0.5	123.6	101.5
0.75	185.5	152.2
1.0	241.8	203.1

ciones (76) y (77), respectivamente. El factor γ adquirió los valores de 0.1, 0.25, 0.5, 0.75 y 1.0. La razón para llevar a cabo estos experimentos es la de investigar los efectos de la velocidad articular en la dinámica del observador basado en modelo de Dahl, así como en la técnica de compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y sus efectos en el desempeño del seguimiento de velocidad deseada. La tabla VI muestra las magnitudes máximas de la velocidades deseada para los distintos valores de γ .

Los controladores implementados fueron los que están basados en la estructura de dinámica inversa y en la estructura PD con compensación. Los controladores de velocidad basados en estructura PD+ no se implementaron por considerarse un caso particular de los controladores con estructura PD con compensación usando la ganancia $\Lambda = 0$. Más precisamente, en lo que respecta a la estructura de dinámica inversa,

se implementó el controlador (47)–(50), que considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, en segundo lugar el controlador (64)–(65) bajo la consideración de compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y en forma adicional se implementó el controlador (70)–(71) que considera sólo compensación de fricción viscosa. Los controladores implementados con estructura PD con compensación son el controlador (54)–(56), en el cual la compensación de fricción es basada en el modelo de Dahl, el controlador (66)–(67), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, y finalmente el controlador (72)–(73) que sólo compensa fricción viscosa.

Los experimentos consistieron en realizar 5 ejecuciones de cada controlador para 5 valores de γ , calculando en cada ejecución el valor que adquiere $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ en un tiempo de 10 [seg]. Las figuras 31 y 32 muestran los resultados de las pruebas. Las curvas mostradas unen los puntos resultantes de promediar los valores de $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ en las 5 ejecuciones de cada controlador para un cierto valor de γ . Las líneas verticales sobre las curvas mostradas representan la variación obtenida de $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ en cada ensayo, es decir el valor máximo y mínimo de $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$.

Estructura basada en dinámica inversa. En esta estructura, los resultados se encuentran condensados en la figura 31, de donde se desprende que la compensación de fricción basada en modelo de Dahl supera a los modelos estáticos de compensación a partir de $\gamma = 0.2$, esto es cuando las magnitudes máximas de velocidad articular alcanzan valores de 60 [grados/seg] aproximadamente (ver tabla VI). Otro aspecto es que a baja velocidad articular, es decir usando $\gamma = 0.1$, es más conveniente utilizar compensación de fricción viscosa o compensación de fricción viscosa y de Coulomb. La explicación a lo anterior fue atribuida a la forma de estimar la velocidad articular, lo cual fue realizado por la aproximación de Euler, que para los valores de ganancias utilizadas, ésta puede volverse ruidosa a bajas y altas velocidades (Jaritz y Spong, 1996). En esta estructura, los resultados experimentales arrojan las siguientes conclusiones:

- Para aplicaciones de velocidades articulares bajas es preferible usar compensación

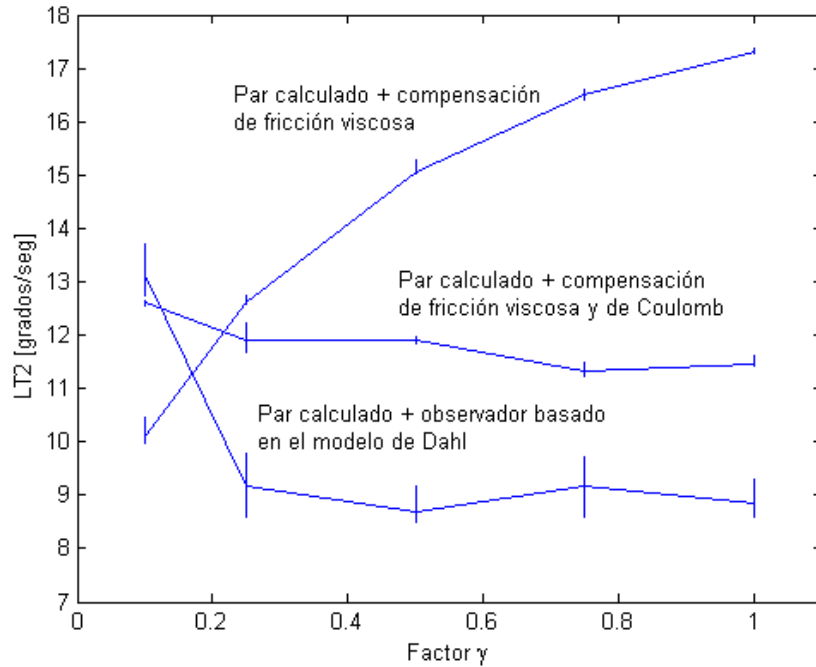


Figura 31: Desempeño para distintos factores de la velocidad deseada: Control basado dinámica inversa

de fricción viscosa y de Coulomb.

- Para aplicaciones de velocidades articulares medias o altas es preferible usar compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

Estructura basada en PD con compensación. La figura 32 ilustra los resultados para esta estructura de control de velocidad. Los valores numéricos de $\mathcal{L}_T^2[\tilde{\omega}]$ que resultan cuando sólo es compensada la fricción viscosa, i.e. controlador (72)–(73), son relativamente similares a los que se obtienen con el controlador análogo de estructura de dinámica inversa, i.e. controlador (70)–(71). Sin embargo, en todo el rango de magnitudes de referencias de velocidad articular (velocidades articulares bajas, medias y altas), la compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, y la compensación de fricción viscosa y de Coulomb, tienen un efecto de mejora drástico en comparación

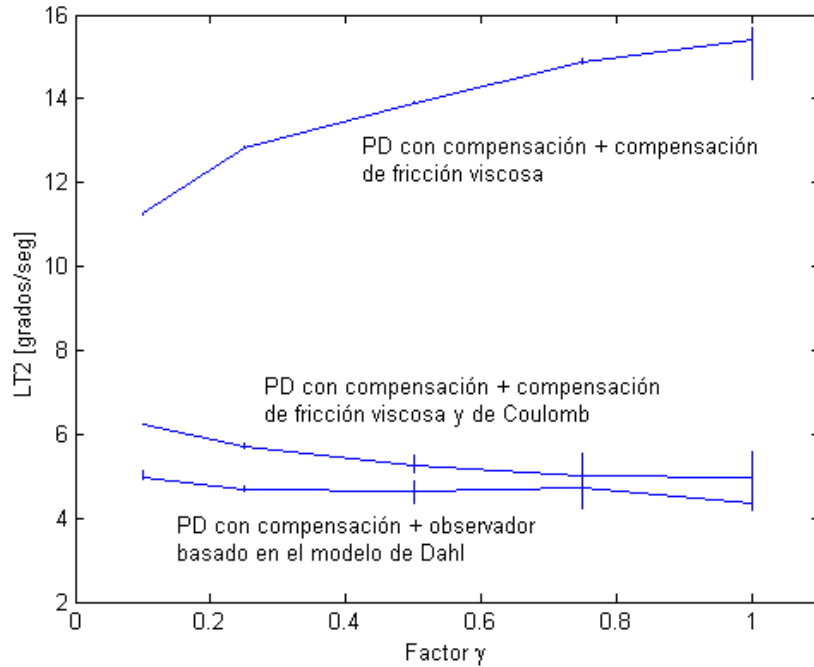


Figura 32: Desempeño para distintos factores de la velocidad deseada: Control basado en PD con compensación

a compensar sólo fricción viscosa. En el caso de usar compensación de fricción basada en el modelo de Dahl los resultados son mejores que los casos de compensación de fricción viscosa y de Coulomb, como puede apreciarse en la figura 32. El porcentaje de mejora mínimo considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl es de aproximadamente 13% cuando $\gamma = 0.5$ y el máximo es de 20 % cuando $\gamma = 0.1$. A manera de conclusión, en esta estructura de control se tiene que para aplicaciones de velocidades articulares en los rangos de magnitud implementados es mejor usar compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

II.3 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un estudio sobre control de velocidad de motores y control de velocidad articular de manipuladores, considerando en ambos casos compen-

sación de fricción.

Basándose en el diseño de observadores fundamentados en el modelo de fricción de Dahl, se presentan algoritmos de control de velocidad para motores. Los resultados experimentales llevados a cabo en un motor de transmisión directa con fricción mostraron que los controladores propuestos tienen mejores prestaciones que los controladores que basan la compensación de fricción en los modelos de fricción viscosa y de Coulomb.

En el caso de control de velocidad articular de manipuladores, se realizó la aplicación de tres estructuras de control de movimiento a la especificación de control de velocidad. Estas son el control por dinámica inversa, el control PD con compensación y el control PD+. Para cada una de estas estructuras de control se diseñó un observador basado en el modelo de fricción de Dahl. Los experimentos realizados en un robot de transmisión directa de dos grados de libertad mostraron resultados similares. Sin embargo, el considerar compensación de fricción basada en el modelo de Dahl a velocidades articulares medias o altas mejora el desempeño obtenido en comparación a compensar la fricción viscosa y de Coulomb.

III Control jerárquico de movimiento

III.1 Introducción

Los movimientos deseados para un robot manipulador son típicamente especificados en términos de trayectorias de la posición y orientación del efector final en el espacio operacional (Canudas *et al.*, 1996; Sciavicco y Siciliano, 2000). Una estrategia para lograr control en el espacio operacional es a través del control cinemático. Suponiendo que una trayectoria deseada de posición y orientación es especificada, el problema del control cinemático consiste en encontrar una trayectoria en el espacio articular que reproduzca el mismo movimiento (Siciliano, 1990). Una solución al problema de control cinemático realizada *fuera de línea* consiste en una reconstrucción en lazo abierto de las variables articulares por medio de integración de la cinemática diferencial. Sin embargo, este método no es eficiente debido a la deriva numérica (Sciavicco y Siciliano, 2000). Para responder a esta desventaja, una versión en lazo cerrado de la inversión cinemática diferencial para la resolución de la velocidad o aceleración debe ser usada (Canudas *et al.*, 1996). No obstante, dado que las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares no pueden ser usadas como entradas para el robot, el uso del control cinemático requiere del diseño de un algoritmo de control apropiado para calcular los pares, los cuales son la entrada natural para el robot.

El control de cada articulación en muchos robots industriales es llevado a cabo usando un lazo interno de velocidad en forma adicional a un lazo externo de posición (Corke, 1994; Nilsson, 1996). Este hecho práctico motiva la investigación de esquemas de control basados en el uso de un lazo interno de control de velocidad articular en forma adicional a un lazo externo de control de posición. De esta forma, se obtiene un esquema de control basado en dos lazos de retroalimentación para solucionar el problema de control de movimiento en el espacio operacional. Un algoritmo de control cinemático y un controlador de velocidad asintóticamente estable califican en esta clase

de controladores.

El trabajo reportado por Aicardi *et al.* (1995) trata sobre el uso de la cinemática diferencial inversa para la resolución de la velocidad articular como un lazo externo de control. Un controlador basado en dinámica inversa (Spong y Vidyasagar, 1989) es usado como lazo interno de control de velocidad articular. Sin embargo, el controlador de velocidad usado por Aicardi *et al.* no considera acción integral del error de velocidad, la cual mejora la robustez del controlador. Tampoco se considera la presencia de fricción en las articulaciones del robot. En Kelly *et al.* (1999), se propone una solución al problema de control servo visual de robots planos. Dicho algoritmo consiste en el uso de un lazo externo de control basado en la imagen de una cámara para la resolución de la velocidad y aceleración articular. En dicho trabajo, un controlador de velocidad articular basado en el control por dinámica inversa con acción PI en el error de velocidad es propuesto para el lazo interno.

El objetivo principal del trabajo desarrollado a lo largo de esta sección es mostrar un estudio sobre control jerárquico de movimiento en coordenadas operacionales. Los controladores propuestos se basan en el uso del control cinemático para la resolución de velocidad articular (lazo externo de control de posición en el espacio operacional) y en el uso de un controlador de velocidad con compensación de fricción (lazo interno de control de velocidad).

Las contribuciones del trabajo presentado en esta sección son:

- La presentación del control de movimiento de robots manipuladores en el espacio operacional en un marco unificado basado en el uso del control jerárquico.
- El uso de compensación de fricción en el lazo interno de control de velocidad articular.
- Un estudio experimental que describe el desempeño de los controladores propuestos en un sistema experimental consistente en un robot de dos grados de lib-

ertad.

III.2 Control cinemático

Considere al vector $\mathbf{y}_d(t) \in \mathbb{R}^m$ como la trayectoria de posición deseada en el espacio operacional, la cual se supone es dos veces diferenciable. Se dice que el problema de control de movimiento en el espacio operacional es resuelto si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0}, \quad (78)$$

donde $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}(t)$ denota el error de posición en el espacio operacional. Se supone que la derivada temporal de la posición articular deseada $\dot{\mathbf{y}}_d(t)$ es acotada, esto es que

$$\|\dot{\mathbf{y}}_d(t)\| \leq \|\dot{\mathbf{y}}_d\|_M \quad \forall t \geq t_0, \quad (79)$$

donde $\|\dot{\mathbf{y}}_d\|_M$ es una constante positiva.

El control cinemático considera a la ecuación (13) como el modelo del robot. Si se toma en cuenta que la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ es la entrada al robot, es posible definir la velocidad articular deseada como

$$\boldsymbol{\omega}_d = J(\mathbf{q})^\dagger [\dot{\mathbf{y}}_d + K\tilde{\mathbf{y}}], \quad (80)$$

donde K es una matriz simétrica definida positiva de $m \times m$. Bajo la suposición de seguimiento perfecto de velocidad, i.e., $\dot{\mathbf{q}} \equiv \boldsymbol{\omega}_d$, sustituyendo (80) en (13) se tiene

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = -K\tilde{\mathbf{y}}. \quad (81)$$

Dado que K es simétrica y definida positiva, se concluye que $\tilde{\mathbf{y}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$. De esta forma se satisface el objetivo de control de movimiento (78).

Sin embargo, en la práctica, un controlador de velocidad no asegura seguimiento instantáneo de la velocidad articular especificada, por lo tanto la suposición de seguimiento ideal de velocidad debe ser relajada a seguimiento asintótico de velocidad. De esta forma, la implementación práctica del control cinemático (80) requiere el diseño de un controlador de velocidad articular. Defínase el error de velocidad articular como

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_d - \dot{\mathbf{q}}. \quad (82)$$

De la cinemática diferencial (13), de la velocidad articular deseada (80), y de la definición del error de velocidad articular (82), se tiene que

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{y}} = -K\tilde{\mathbf{y}} + J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (83)$$

Como se ha mencionado, la implementación práctica del control cinemático (80) involucra el diseño de un lazo interno de control de velocidad articular, de modo que sea garantizado el seguimiento asintótico de velocidad articular, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\boldsymbol{\omega}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = \mathbf{0}.$$

La figura 33 muestra un diagrama de bloques de cómo implementar en la práctica el control cinemático y un lazo interno de control velocidad articular para construir un sistema de control jerárquico de movimiento en el espacio operacional. Nótese que las referencias al sistema de control de la figura 33 son la posición, velocidad y aceleración especificadas en el espacio operacional. También debe notarse que el controlador de velocidad articular que conforma el lazo interno de control requiere la aceleración articular deseada, la cual es calculada derivando (80) con respecto al tiempo, lo cual da

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_d = \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q})^\dagger \right] [\dot{\mathbf{y}}_d + K\tilde{\mathbf{y}}] + J(\mathbf{q})^\dagger [\ddot{\mathbf{y}}_d + K\dot{\tilde{\mathbf{y}}}] . \quad (84)$$

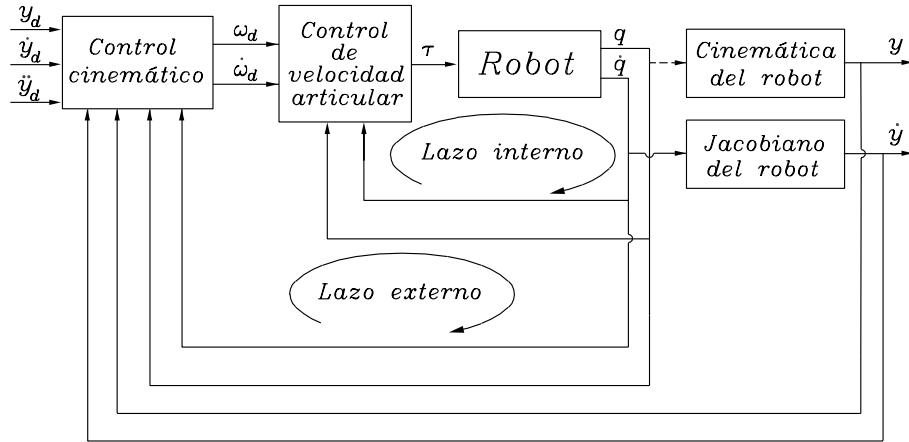


Figura 33: Control jerárquico de movimiento en el espacio operacional

El resto del capítulo está destinado a mostrar el análisis del uso de diferentes estructuras de control de velocidad articular, en conjunto con el control cinemático (80).

III.3 Lazo interno basado en dinámica inversa

En este apartado se estudiará una alternativa al control jerárquico de movimiento en coordenadas operacionales, la cual está basada en el uso de un controlador de velocidad con estructura de dinámica inversa. Dicho controlador de velocidad es dado por

$$\tau = M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad (85)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (86)$$

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas de $n \times n$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_d - \dot{\mathbf{q}}$ denota el error de velocidad, $\boldsymbol{\omega}_d$ está dada por la ecuación (80), y $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ denota la derivada temporal de (80), la cual es dada en forma explícita en la ecuación (84).

La variable $\hat{\mathbf{z}}$ en (85) pretende ser una estimación del estado no medible \mathbf{z} del modelo de fricción de Dahl (10)–(11). El observador del estado \mathbf{z} que se propone es el

siguiente

$$\dot{\mathbf{x}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{q}} + K_0[K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi}], \quad (87)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{x} + K_0\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (88)$$

donde $K_0 = \text{diag}\{k_{01}, \dots, k_{0n}\}$ es una matriz simétrica definida positiva.

Sustituyendo el controlador (85)–(88) en la ecuación del robot (9), y considerando la ecuación (83) que define la dinámica del error de posición en coordenadas operacionales, se obtiene la ecuación de malla cerrada, la cual es posible escribir en forma de estados de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K\tilde{\mathbf{y}} + J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} - K_i\boldsymbol{\xi} - M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\tilde{\mathbf{z}} \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} - K_0M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix}. \quad (89)$$

El sistema (89) es no autónomo y no lineal, y el origen del espacio de estados $[\boldsymbol{\xi}^T \ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \ \tilde{\mathbf{z}}^T \ \tilde{\mathbf{y}}^T]^T = \mathbf{0}$ es un equilibrio.

Para probar la estabilidad del origen del sistema (89), y el cumplimiento del objetivo de control de movimiento, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^TK_i\boldsymbol{\xi} + \alpha\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}^T\Sigma_0K_0^{-1}\tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{2\alpha}\tilde{\mathbf{y}}^T\tilde{\mathbf{y}}, \quad (90)$$

donde α es una constante estrictamente positiva.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (90) a lo largo de la trayectorias del sistema (89) es dada por

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^TK_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^TM(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\tilde{\mathbf{z}} - \alpha\tilde{\mathbf{z}}^T\Sigma_0K_0^{-1}\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}}$$

$$-\alpha \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} - \frac{1}{\alpha} \tilde{\mathbf{y}}^T K \tilde{\mathbf{y}} + \frac{1}{\alpha} \tilde{\mathbf{y}}^T J(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}}.$$

Usando la suposición de que jacobiano $J(\mathbf{q})$ es acotado (ver la ecuación (18) que expresa esta hipótesis) es fácil mostrar que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \leq \\ - \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{y}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_v\} & -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}} & -\frac{1}{2\alpha} k_J \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}} & \alpha \lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\} & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha} k_J & 0 & \frac{1}{\alpha} \lambda_m\{K\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{y}}\| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (91)$$

La derivada temporal $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})$ es semidefinida negativa si la matriz Q es definida positiva. Es posible demostrar que una condición suficiente para que Q sea definida positiva es que α satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\alpha > \min \left\{ \frac{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}}{4\lambda_m\{K_v\} \lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}}, \frac{k_J^2}{4\lambda_m\{K\} \lambda_m\{K_v\}} \right\}. \quad (92)$$

La condición (92) puede ser siempre satisfecha para cualquier $K_v, K, \Sigma_0 > 0$, debido a que la inversa de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})^{-1}$ siempre existe (Propiedad 1 del modelo del robot en sección I.1.2). El cumplimiento de la desigualdad (92) garantiza que la derivada de la función de Lyapunov $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})$ es semidefinida negativa. Este hecho, junto con la propiedad de que $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})$ en (90) es decreciente⁶, permite invocar el método directo de Lyapunov (Vidyasagar, 1993) para concluir que el origen

⁶La función $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})$ es decreciente si $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) \leq V_M(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})$, donde $V_M(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})$ es una función globalmente positiva definida (Vidyasagar, 1993).

del espacio de estados del sistema (89) es uniformemente estable. Esto implica que

$$\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} \in L_{\infty}^n,$$

ya que $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})$ en (90) es radialmente desacotada. De la hipótesis (79), que establece el acotamiento de la derivada temporal de la posición deseada $\dot{\mathbf{y}}_d(t)$, de la hipótesis de acotamiento del jacobiano del robot $J(\mathbf{q})$ dada en (18), que a su vez implica que la matriz pseudoinversa $J(\mathbf{q})^{\dagger}$ también es acotada, y de la ecuación de malla cerrada (89), puede concluirse que

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \in L_{\infty}^n,$$

y de aquí que las funciones $\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ y $\tilde{\mathbf{z}}$ sean uniformemente continuas (Khalil, 1996). De la ecuación (91) es posible escribir

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(\sigma, \boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\mathbf{z}}(\sigma), \tilde{\mathbf{y}}(\sigma)) d\sigma \leq \int_0^{\infty} -\lambda_m\{Q\} \left\| \begin{array}{c} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \\ \tilde{\mathbf{z}}(\sigma) \\ \tilde{\mathbf{y}}(\sigma) \end{array} \right\|^2 d\sigma,$$

de donde puede demostrarse que

$$\int_0^{\infty} \lambda_m\{Q\} \left\| \begin{array}{c} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \\ \tilde{\mathbf{z}}(\sigma) \\ \tilde{\mathbf{y}}(\sigma) \end{array} \right\|^2 d\sigma \leq V(0, \boldsymbol{\xi}(0), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0), \tilde{\mathbf{z}}(0), \tilde{\mathbf{y}}(0)),$$

lo que a su vez implica que las funciones $\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}} \in L_2^n$. Invocando el hecho de que una función uniformemente continua que es cuadrática integrable debe tender a cero cuando el tiempo incrementa (Khalil, 1996), se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ \tilde{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

De esta forma se garantiza que con la ley control jerárquica que estructuran el control cinemático (83) y el controlador de velocidad articular (85)–(86), el objetivo de control de movimiento en el espacio operacional (78) es satisfecho.

III.4 Lazos interno basado en el control PD con compensación

El control PD con compensación fue originalmente propuesto para solucionar el problema de control de movimiento adaptable (Slotine y Li, 1991). Sin embargo, este controlador puede ser reescrito como en (Spong *et al.* 1990) y obtener de él un controlador de velocidad:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \Lambda \tilde{\boldsymbol{\omega}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\omega}_d + \Lambda \boldsymbol{\xi}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi} + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (93)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (94)$$

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas y $\Lambda = K_v^{-1} K_i$. El observador del estado interno \mathbf{z} que se propone es dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_d + \Lambda \boldsymbol{\xi}. \quad (95)$$

La ecuación de malla cerrada que resulta de utilizar el controlador (93), (94) y (95), y de considerar (83), es dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda \boldsymbol{\xi}] - K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - K_i \boldsymbol{\xi} - \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}}] - \Lambda \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda \boldsymbol{\xi} \\ -K \tilde{\mathbf{y}} + J(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \quad (96)$$

donde $\tilde{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ es el error de observación del estado interno \mathbf{z} . La ecuación (96) es no lineal, no autónoma y tiene como un equilibrio al origen del espacio de estado. Se

puede demostrar estabilidad por medio de la siguiente función de Lyapunov

$$V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{2} [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda \boldsymbol{\xi}]^T M(\boldsymbol{q}) [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda \boldsymbol{\xi}] + \boldsymbol{\xi}^T K_i \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{z}}^T \Sigma_0 \tilde{\boldsymbol{z}} + \alpha \tilde{\boldsymbol{y}}^T \tilde{\boldsymbol{y}},$$

donde α es una constante estrictamente positiva. Usando la Propiedad 2 del modelo del robot (sección I.1.2) es posible demostrar que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\xi}^T K_i K_v^{-1} K_i \boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{z}}^T \Sigma_0 \Psi(\dot{\boldsymbol{q}}) \tilde{\boldsymbol{z}} - \alpha \tilde{\boldsymbol{y}}^T K \tilde{\boldsymbol{y}} + \alpha \tilde{\boldsymbol{y}}^T J(\boldsymbol{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ &\leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\boldsymbol{\xi}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{y}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_v\} & 0 & -\alpha \frac{1}{2} k_J \\ 0 & \lambda_m\{K_i K_v^{-1} K_i\} & 0 \\ -\alpha \frac{1}{2} k_J & 0 & \alpha \lambda_m\{K\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\boldsymbol{\xi}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{y}}\| \end{bmatrix}, \quad (97) \end{aligned}$$

donde k_J es definida en la ecuación (18). Debe notarse que la desigualdad (97) ha sido obtenida en virtud de que $\Sigma_0 \Psi(\dot{\boldsymbol{q}})$ es positiva semidefinida. La matriz Q es definida positiva si y sólo si se satisface la siguiente desigualdad

$$\alpha < \frac{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{K\}}{k_J^2}.$$

El hecho de que $Q > 0$ prueba que $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ es semidefinida negativa. Invocando el método directo de Lyapunov (Khalil, 1996) es posible concluir la estabilidad uniforme del origen del espacio de estados del sistema de lazo cerrado (96), ya que $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ es decreciente. La estabilidad uniforme del origen del espacio de estados del sistema (96), junto con el hecho de que $V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ es radialmente desacotada, implica que

$$\tilde{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} \in L_\infty^n.$$

Usando este hecho además de la hipótesis (79), la hipótesis de acotamiento del jacobiano

del robot $J(\mathbf{q})$, y la ecuación de lazo cerrado (96), se demuestra que

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \in L_{\infty}^n.$$

Lo anterior implica que las funciones $\tilde{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ y $\tilde{\mathbf{z}}$ son uniformemente continuas (Khalil, 1996). Adicionalmente, usando la desigualdad (97) es posible demostrar que

$$\tilde{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} \in L_2^n.$$

De esta forma se satisfacen las condiciones suficientes para que pueda afirmarse que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

El límite anterior demuestra que con la ley de control jerárquico que se compone de (83) y el controlador de velocidad articular basado en estructura PD con compensación (85)–(86), se cumple el objetivo de control movimiento en el espacio operacional (78).

III.5 Lazos interno basado en el control PD+

Otro controlador de velocidad con compensación de fricción basada en el modelo de Dahl es el dado por

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi} + F_v\dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0\tilde{\mathbf{z}}, \quad (98)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (99)$$

De nueva cuenta K_i y K_v denotan matrices simétricas positivas definidas, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_d - \dot{\mathbf{q}}$ denota el error de velocidad, $\boldsymbol{\omega}_d$ está dada por la ecuación (80), y $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ es dada por (84). El controlador (98)–(99) está basado en el control PD+ (Paden y Panja, 1988).

El observador del estado interno \mathbf{z} que se propone para ser usado en el controlador (98)–(99) es el siguiente:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_d \quad (100)$$

Sustituyendo el controlador (98)–(100) en el modelo del robot (9), usando la definición del error de observación del estado interno $\tilde{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$, y considerando la ecuación (83), es posible obtener la siguiente ecuación de malla cerrada en forma de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -M(\mathbf{q})^{-1} [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi} + \Sigma_0\tilde{\mathbf{z}}] \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -K\tilde{\mathbf{y}} + J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

El sistema de malla cerrada (101) es no lineal, no autónomo, y tiene como un equilibrio al origen del espacio de estados. Para demostrar la estabilidad del origen del espacio de estados del sistema (62) se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T M(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T K_i\boldsymbol{\xi} + \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0\tilde{\mathbf{z}} + \alpha\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}},$$

donde α es una constante estrictamente positiva. Usando la propiedad 2 del modelo del robot, es posible demostrar que la derivada temporal de la función de Lyapunov propuesta es dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}) &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} - \alpha\tilde{\mathbf{y}}^T K\tilde{\mathbf{y}} + \alpha\tilde{\mathbf{y}}^T J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ &\leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{y}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_v\} & -\alpha\frac{1}{2}k_J \\ -\alpha\frac{1}{2}k_J & \alpha\lambda_m\{K\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{y}}\| \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (102)$$

donde la constante k_J está definida en la ecuación (18). La cota superior (102) ha sido obtenida a partir de que $\Sigma_0\Psi(\dot{\mathbf{q}})$ es semidefinida positiva. La matriz Q en la desigualdad

(102) es definida positiva si y sólo si la constante α satisface la siguiente desigualdad

$$\alpha < \frac{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{K\}}{k_j^2}.$$

El hecho de que $Q > 0$ prueba que $\dot{V}(t, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ es semidefinida negativa (ver ecuación (102)), de donde se concluye que el origen del sistema de lazo cerrado (57) es uniformemente estable (Vidyasagar, 1993).

Usando los mismos argumentos para el análisis del sistema (89) y (96), pueden usarse las propiedades de las funciones L_p^n para demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{0},$$

y de esta forma concluir que con el controlador jerárquico (80) y (98)–(100) se satisface el objetivo de control de movimiento en coordenadas operacionales, el cual es expresado por la ecuación (78).

III.6 Resultados experimentales

En esta sección se presentan resultados experimentales de control de movimiento en el espacio operacional. Los experimentos han sido llevados a cabo utilizando el sistema experimental descrito en el apéndice A.

La evaluación experimental de los esquemas de control propuestos requiere el diseño de una trayectoria deseada apropiada que proporcione información acerca de las prestaciones del esquema de control bajo prueba. Trayectorias periódicas son apropiadas para este fin. La trayectoria de movimiento en el espacio operacional que se seleccionó para la prueba de los controladores es la siguiente:

$$\boldsymbol{y}_d(t) = \begin{bmatrix} y_{1c} + r_0 \cos\left(\frac{v_0 t}{r_0}\right) \\ y_{2c} + r_0 \sin\left(\frac{v_0 t}{r_0}\right) \end{bmatrix}, \quad (103)$$

donde $y_{1c} = 0.26$ [m], $y_{2c} = 0.0$ [m], $v_0 = 0.65$ [m/seg], y $r_0 = 0.085$ [m]. Los experimentos mostrados fueron llevados a cabo usando la condición inicial $y_1(0) = 0.345$ [m], $y_2(0) = 0$ [m], y $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ [m/seg]. Debe notarse que la trayectoria de posición $\mathbf{y}_d(t)$ en (103) satisface la hipótesis (79).

La ganancia de control elegida para el control cinemático (80) fue de

$$K = \text{diag}\{10.0, 10.0\} \text{ [1/seg]}.$$

Como un índice de las prestaciones de los controladores implementados se calculó el error de contorno, que es definido como (Chiu y Tomizuka, 2001)

$$e_C(t) = r_0 - \sqrt{[y_1(t) - y_{1c}]^2 + [y_2(t) - y_{2c}]^2}.$$

Otra variable que se ha calculado también es el error de velocidad tangencial al círculo que es dado por la diferencia entre la velocidad tangencial al círculo v_0 y la rapidez del extremo final del robot $\|\dot{\mathbf{y}}\|$, esto es $v_0 - \|\dot{\mathbf{y}}\|$.

Los experimentos llevados a cabo contemplaron el uso de las estructuras de control de velocidad articular basadas en dinámica inversa y en PD con compensación. Las razones que motivaron a realizar sólo estos experimentos, y no usar la estructura PD+, son las siguientes.

- Los resultados experimentales sobre control de velocidad articular de la sección II.2.5 demuestran que las prestaciones entre la estructura de control de velocidad tipo PD+ y PD con compensación son similares.
- Lo anterior puede explicarse debido a que, desde un punto de vista de estructura, los controladores de velocidad basados en PD+ son un caso particular de los controladores basados PD con compensación usando la ganancia $\Lambda = 0$.

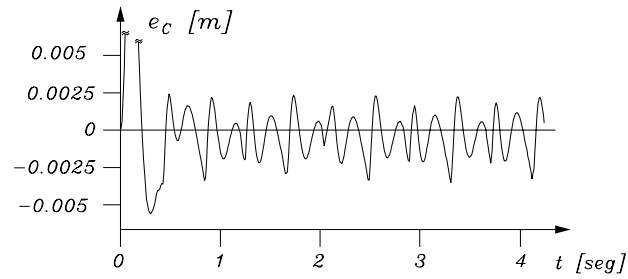


Figura 34: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno

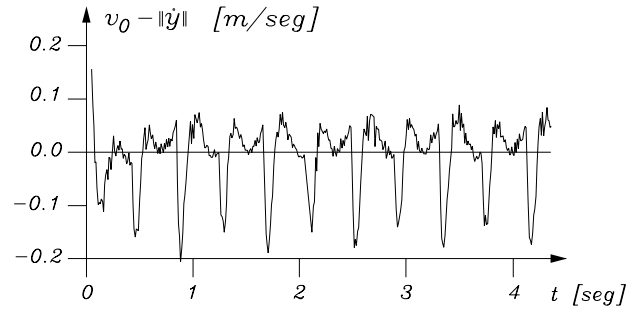


Figura 35: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial

III.6.1 Experimentos usando el lazo interno basado en dinámica inversa

En primer lugar se implementó el controlador (64)–(65) bajo la consideración de compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y en segundo lugar se implementó el controlador (85)–(88), que considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Las ganancias utilizadas en los controladores fueron

$$K_i = \text{diag}\{100.0, 400.0\} [1/\text{seg}^2],$$

$$K_v = \text{diag}\{15.0, 40.0\} [1/\text{seg}].$$

Para el observador (87)–(88) basado en el modelo de fricción de Dahl se usó

$$K_0 = \text{diag}\{0.0045, 0.0045\} [\text{seg}].$$

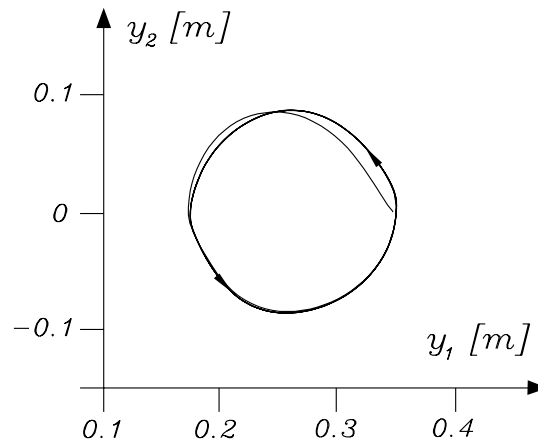


Figura 36: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional

Con respecto al controlador (64)–(65), la figura 34 muestra el error de contorno, mientras que la figura 35 muestra el error de velocidad tangencial, y la figura 36 bosqueja la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas. Los resultados concernientes al controlador (85)–(88), el cual considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, son mostrados en la figura 37, que muestra el error de contorno, en la figura 38, que muestra el error de velocidad tangencial, y finalmente en la figura 39, que muestra la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas. En estado estacionario, el valor pico del error de contorno es de 0.0038 [m] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb y de 0.0026 para el compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Esto representa una mejoría de 31% del segundo con respecto al primero. En lo que respecta al error de velocidad tangencial, el error pico máximo es de 0.21 [m/seg] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y de 0.15 [m/seg] para compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, lo que resulta en una mejoría de 28%, aproximadamente.

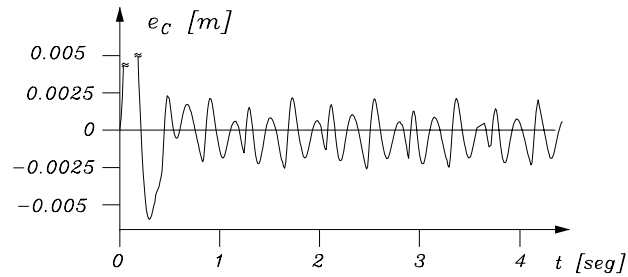


Figura 37: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno

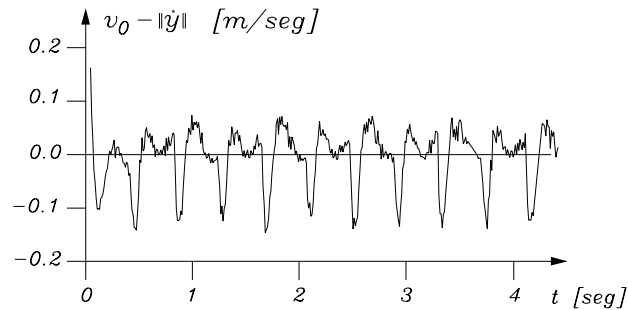


Figura 38: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial

III.6.2 Experimentos usando el lazo interno basado en PD con compensación.

Los controladores implementados con estructura PD con compensación en el lazo interno de control de velocidad articular son el controlador (66)–(67), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, y el controlador (93)–(95), en el cual la compensación de fricción es basada en el modelo de Dahl. Las ganancias de los controladores fueron escogidas como

$$K_i = \text{diag}\{10.0, 5.0\} \text{ [Nm/rad]},$$

$$K_v = \text{diag}\{5.0, 4.0\} \text{ [Nmseg/rad]},$$

lo que resulta en $\Lambda = K_v^{-1}K_i = \text{diag}\{2.0, 1.25\} \text{ [seg}^{-1}\text{]}$.

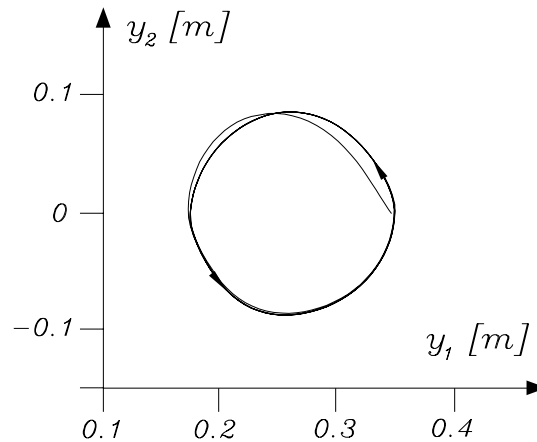


Figura 39: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional

Para la implementación del controlador (66)–(67), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, las figuras 40, 41 y 42 muestran el error de contorno, el error de velocidad tangencial, y la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas, respectivamente. Las figuras 43, 44 y 45, que muestran el error de contorno, el error de velocidad tangencial, y la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas, respectivamente, corresponden a la implementación del controlador (93)–(95), donde la compensación de fricción es basada en el modelo de Dahl.

En estado estacionario, el valor pico del error de contorno es de 0.0013 [m] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y de 0.0011 para compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, i.e. una mejoría de 15% del segundo con respecto al primero. En lo que respecta al error de velocidad tangencial al círculo, los resultados son bastante similares entre las dos técnicas de compensación de fricción.

III.7 Conclusiones

Se ha tratado el control de movimiento de robots manipuladores en espacio operacional considerando presencia de fricción en las articulaciones del robot. Se ha supuesto que la fricción en las articulaciones del robot es caracterizada por el modelo de fricción de

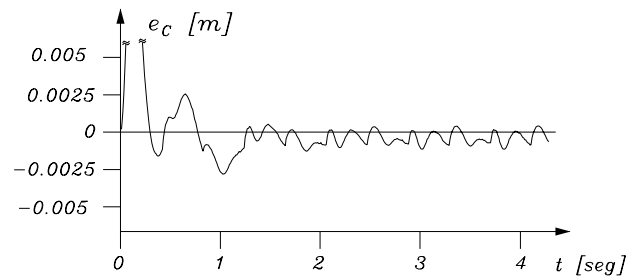


Figura 40: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno

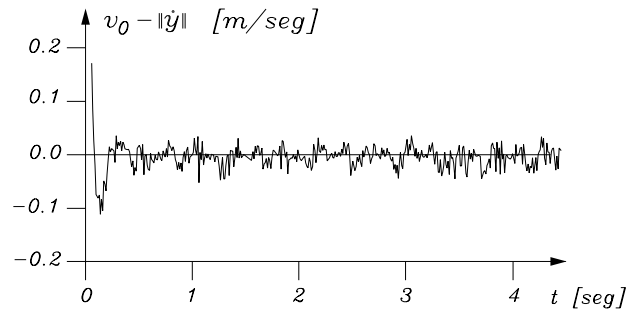


Figura 41: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial

Dahl.

Han sido analizados tres esquemas de control basados en el uso del control cinemático y en el uso de un lazo interno de velocidad. El análisis de estabilidad realizado en cada controlador consistió en demostrar estabilidad del origen de la ecuación de malla cerrada y en demostrar convergencia a cero del error de posición en coordenadas operacionales del robot usando propiedades de funciones L_p^n .

Los resultados experimentales no sólo muestran el funcionamiento del control jerárquico de movimiento, sino que también se comparan dos técnicas de compensación de fricción, resultando que el compensar la fricción basándose en un modelo de fricción dinámico, como lo es el modelo de fricción de Dahl, aumenta la precisión de los movimientos efectuados por el mecanismo.

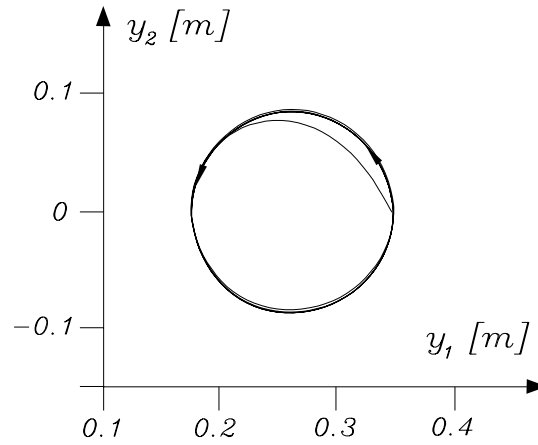


Figura 42: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional

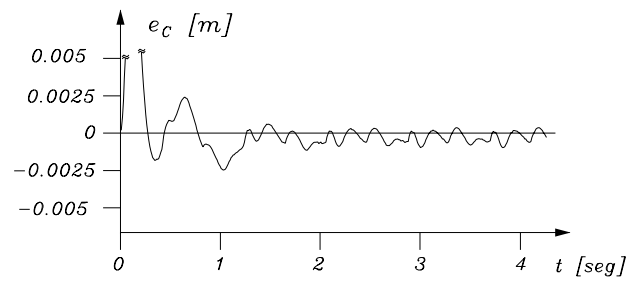


Figura 43: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno

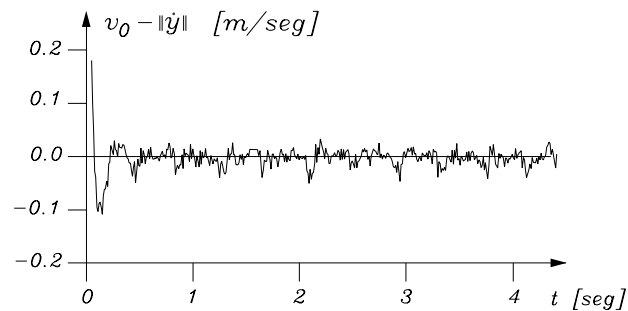


Figura 44: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial

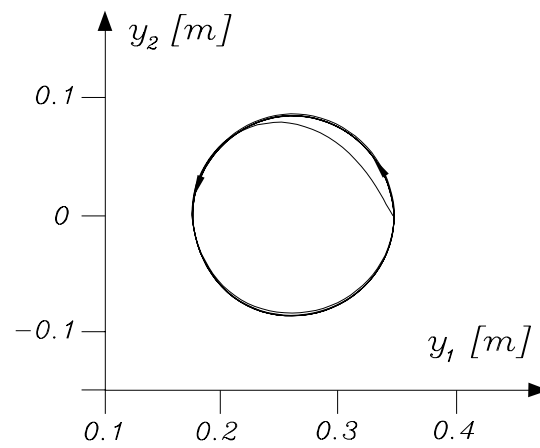


Figura 45: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional

IV Control jerárquico por campo de velocidad

IV.1 Introducción

El control por campo de velocidad ha sido recientemente propuesto por Li y Horowitz (2001a, 2001b) intentando ser una alternativa al control de movimiento de robot manipuladores. En la filosofía de control por campo de velocidad la tarea a ser llevada a cabo por el robot es codificada por medio de un campo de velocidad deseado que está definido en el espacio de configuración operacional \mathcal{G} y denotado con una función

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}) : \mathcal{G} &\rightarrow T\mathcal{G} \\ \mathbf{y} &\mapsto \mathbf{v}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

donde $T_y\mathcal{G}$ es el espacio tangente de \mathcal{G} a una configuración específica \mathbf{y} y $T\mathcal{G} = \cup_{\mathbf{y} \in \mathcal{G}} T_y\mathcal{G}$ denota el espacio de todos los vectores tangentes (*tangent bundle*) de \mathcal{G} .

Un campo de velocidad define un vector tangente (la velocidad deseada $\dot{\mathbf{y}}_d$ del elemento final) en cada punto \mathbf{y} del espacio de configuración operacional. La figura 46 ilustra la especificación de movimiento por medio de un campo de velocidad. En la figura 47 se describe un campo de velocidad definido en el espacio operacional de un robot de dos grados de libertad que asigna un vector velocidad a cada punto del plano cartesiano. Las líneas de flujo mostradas en la figura 47 indican que éstas convergen a un contorno circular.

Aunque la idea de especificación del movimiento en forma independiente al tiempo parece ilógica, en muchas aplicaciones el tiempo en la trayectoria deseada no es importante en comparación con la coordinación de los movimientos ejecutados. En relación a esto último, el control de contorno de robots manipuladores es un acto en donde el elemento final del robot se mueve a lo largo de una ruta con una velocidad asignada (Nakamura *et al.* 2000). El control de contorno es un objetivo de control importante para operaciones de maquinado tales como corte, taladrado y desbastado. De esta

forma, el control por campo de velocidad es particularmente apropiado para tareas en las que se requiere seguir con precisión un contorno deseado, es decir tareas de control de contorno (Li, 1999).

El problema de control por campo de velocidad consiste en diseñar una ley de control para determinar la acción de control $\boldsymbol{\tau}$ de modo que el error de campo de velocidad, definido como la diferencia entre el campo de velocidad deseado $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ y la velocidad del elemento final del robot $\dot{\boldsymbol{y}}$, tienda a cero en forma asintótica, es decir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}(t)) - \dot{\boldsymbol{y}}(t)] = \mathbf{0}. \quad (104)$$

En esta situación, el campo de velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ es definido de modo que la velocidad $\dot{\boldsymbol{y}}$ de la salida sea igual a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$, es decir que $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$. Siendo así, la salida del robot es guiada hacia el contorno deseado. En este sentido se dice que un campo de velocidad codifica una tarea de movimiento para el manipulador. Así, en lugar de requerir que el extremo final del manipulador se encuentre en una postura determinada a un tiempo dado, como es impuesto en control de movimiento, en el control por campo de velocidad la postura del efector final será guiada por las líneas de flujo del campo de velocidad deseado, tal como es observado en la figura 47.

Sin embargo, es posible usar una estructura de control jerárquica para resolver el problema de control por campo de velocidad en el espacio operacional. La figura 48 muestra un diagrama de bloques de dicho esquema de control jerárquico.

En esta parte del trabajo de tesis se aborda el problema de control por campo de velocidad en coordenadas operacionales. Para resolver este problema de control se recurre a una estructura de control jerárquica basada en el uso de un lazo externo de control cinemático por campo de velocidad. Como lazo interno de control se propone el uso de controladores de velocidad articular que consideran compensación de fricción viscosa y de Coulomb. Se presentan también resultados experimentales que han sido llevados a cabo en un robot de transmisión directa de dos grados de libertad. Los

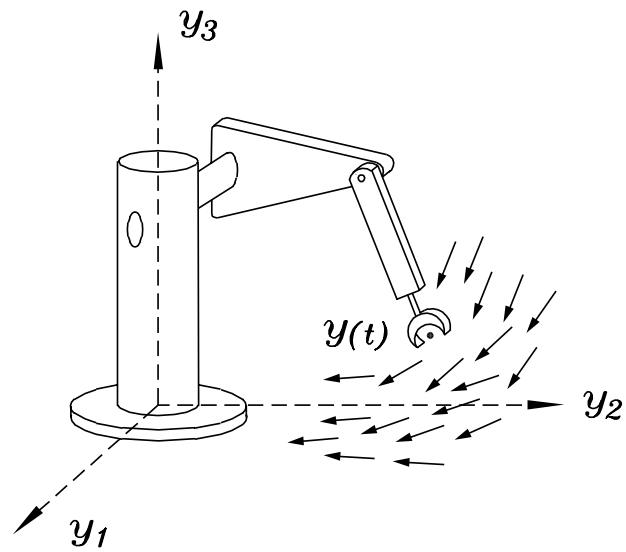


Figura 46: Campo de velocidad en el espacio operacional

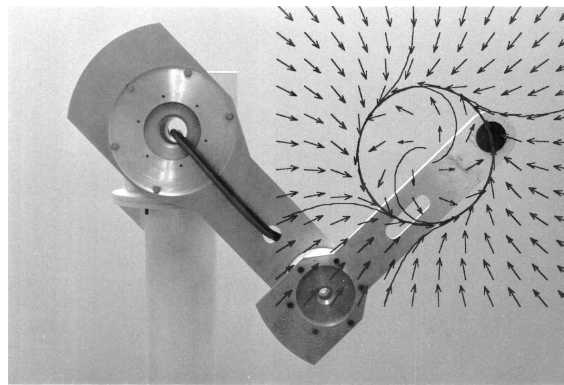


Figura 47: Campo de velocidad deseado en el espacio cartesiano

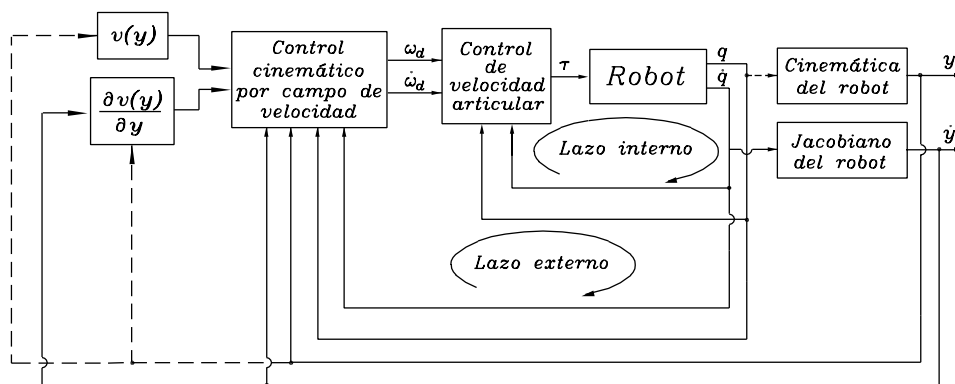


Figura 48: Control jerárquico por campo de velocidad en espacio operacional

experimentos muestran los efectos en el seguimiento del campo de velocidad cuando se usan distintas formas de compensar fricción.

IV.2 Control cinemático por campo de velocidad

Una suposición requerida en el análisis de los controladores propuestos es que el campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{v}\|_M \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (105)$$

donde $\|\mathbf{v}\|_M$ es una constante positiva.

Bajo la óptica del control cinemático se tiene que la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ es la entrada del sistema dado por la cinemática diferencial (13). Suponiendo que el jacobiano del robot $J(\mathbf{q})$ es de rango completo y acotado, se propone la siguiente ley de control para generar la velocidad articular deseada $\boldsymbol{\omega}_d$

$$\boldsymbol{\omega}_d = J(\mathbf{q})^\dagger[\mathbf{v}(\mathbf{y}) + K\boldsymbol{\rho}], \quad (106)$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}(\mathbf{y}) - \dot{\mathbf{y}}, \quad (107)$$

donde K es una matriz de $m \times m$ simétrica definida positiva. Bajo la hipótesis de seguimiento perfecto de la velocidad articular, esto es que $\dot{\mathbf{q}}(t) \equiv \boldsymbol{\omega}_d(t)$, y sustituyendo (106) en (13) es posible escribir

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = -K\boldsymbol{\rho}.$$

Dado que K es una matriz simétrica definida positiva se garantiza el anulamiento exponencial del error de campo de velocidad, esto es que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{y}(t)) - \dot{\mathbf{y}}(t)] = \mathbf{0}.$$

Sin embargo, en la práctica, los controladores de velocidad aseguran seguimiento asintótico en lugar de seguimiento exacto. Con la definición de error de velocidad articular $\tilde{\omega} = \omega_d - \dot{q}$ es posible demostrar que la dinámica del error de campo de velocidad es dada por

$$\dot{\rho} = -K\rho + J(q)\tilde{\omega}. \quad (108)$$

El conocimiento de la aceleración articular $\dot{\omega}_d(t)$ puede ser obtenido diferenciando la ecuación (106) con respecto al tiempo

$$\dot{\omega}_d = J(q)^\dagger \left[\frac{\partial v(y)}{\partial y} \dot{y} + K[v(y) - \dot{y}] \right] + \left[\frac{d}{dt} J(q)^\dagger \right] [v(y) + K\rho]. \quad (109)$$

donde el estado ρ es dado por (107). Es posible hacer uso de algunas de las estructura de control de velocidad articular para usarla en conjunto con el control cinemático (106) y de esta forma resolver el objetivo de control por campo de velocidad por medio de una estructura de control jerárquica.

IV.3 Lazo interno basado en dinámica inversa

En esta sección se analiza el uso del controlador de velocidad basado en dinámica inversa con compensación de fricción (47)–(50) para ser usado con la especificación de velocidad articular deseada dada por el control cinemático de campo de velocidad (106)–(107). Dicho esquema de control de velocidad articular ha sido usado en estructuras de control jerárquico de movimiento con buenos resultados (ver sección III.3).

El controlador de velocidad estudiado en esta sección es reescrito a continuación

$$\tau = M(q) [\dot{\omega}_d + K_v \tilde{\omega} + K_i \xi] + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) + F_v \dot{q} + \Sigma_0 \hat{z}, \quad (110)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega}, \quad (111)$$

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas de $n \times n$, $\tilde{\omega} = \omega_d - \dot{q}$ denota el

error de velocidad, ω_d está dada por la ecuación (106), y $\dot{\omega}_d$ denota la derivada temporal de (106), la cual es dada en forma explícita en la ecuación (109). El observador del estado \mathbf{z} es dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{q}} + K_0[K_v\tilde{\omega} + K_i\xi], \quad (112)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{x} + K_0\tilde{\omega}, \quad (113)$$

donde $K_0 = \text{diag}\{k_{01}, \dots, k_{0n}\}$ es una matriz simétrica definida positiva.

La ecuación de malla cerrada es obtenida al sustituir el controlador (110)–(111) en la ecuación del robot (9), y usando la ecuación (108)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K\boldsymbol{\rho} + J(\mathbf{q})\tilde{\omega} \\ \tilde{\omega} \\ -K_v\tilde{\omega} - K_i\xi - M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\tilde{\mathbf{z}} \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} - K_0M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (114)$$

donde $\tilde{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ es el error de observación del estado interno \mathbf{z} , cuya dinámica es obtenida usando las ecuaciones (10)–(11) y (112)–(113). El origen del espacio de estados es un equilibrio del sistema no lineal (114).

La estabilidad de lazo cerrado puede ser demostrada usando la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{z}}) = \alpha V_1(\boldsymbol{\rho}) + V_2(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{z}}) \quad (115)$$

donde

$$\begin{aligned} V_1(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}^T\boldsymbol{\rho}, \\ V_2(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\omega}) &= \frac{1}{2}\tilde{\omega}^T\tilde{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^TK_i\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\epsilon}\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{z}}^T\Sigma_0K_0^{-1}\tilde{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

con α una constante tal que

$$\frac{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{K\}}{k_J^2} > \alpha > 0, \quad (116)$$

y ϵ una constante que satisface

$$a[\lambda_m\{K\}\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\} - \frac{\alpha}{4}k_J^2\lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\}] > \epsilon > 0, \quad (117)$$

donde

$$a = \frac{4}{\lambda_m\{K\}\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\}}$$

y k_J según (18). No es difícil que la desigualdad (117) siempre se satisfaga, ya que α cumple con (116). Además, la función candidata de Lyapunov (115) es una función globalmente definida positiva para cualquier α y ϵ que satisfagan (116) y (117).

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (115) a lo largo de las trayectorias del sistema de lazo cerrado (114) es dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) &= -\alpha\boldsymbol{\rho}^T K \boldsymbol{\rho} + \alpha\boldsymbol{\rho}^T J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ &\quad -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} - \frac{1}{\epsilon}\tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1}\Psi(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{z}} - \frac{1}{\epsilon}\tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Usando la suposición de que el jacobiano $J(\mathbf{q})$ es acotado, ver (18), es fácil mostrar que

$$\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\rho}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\rho}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \end{bmatrix},$$

donde Q es dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha\lambda_m\{K\} & -\frac{\alpha}{2}k_J & 0 \\ -\frac{\alpha}{2}k_J & \lambda_m\{K_v\} & -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\}} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\}} & \frac{1}{\epsilon}\lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\} \end{bmatrix}$$

Del hecho de que ϵ y α satisfacen (116) y (117), la matriz Q es definida positiva. Por tanto, la derivada temporal $\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ es globalmente definida negativa. De acuerdo al método directo de Lyapunov (Vidyasagar, 1993), es posible establecer la conclusión de que el origen del espacio de estado de la ecuación de malla cerrada (114) es uniformemente estable, ya que $V(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ en (115) es decreciente. De aquí que pueda afirmarse que $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}} \in L_\infty^n$, pues $V(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ es radialmente desacotada. La conclusión de que $\dot{\boldsymbol{\rho}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}, \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \in L_\infty^n$ se desprende de la ecuación de lazo cerrado (114), usando el hecho de que $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}$ son funciones acotadas, la hipótesis de acotamiento del campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{y})$, dada en la ecuación (105), y la hipótesis de acotamiento del jacobiano $J(\mathbf{q})$, de la que se desprende el hecho de que $J(\mathbf{q})^\dagger$ es también función acotada. Por lo tanto, puede afirmarse que las funciones $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}$ son uniformemente continuas (Khalil, 1996). Por otro lado, puede establecerse que

$$\int_0^\infty \dot{V}(\boldsymbol{\rho}(\sigma), \boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\mathbf{z}}(\sigma))d\sigma \leq \int_0^\infty -\lambda_m\{Q\} \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\rho}(\sigma) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \\ \tilde{\mathbf{z}}(\sigma) \end{array} \right\|^2 d\sigma,$$

de donde se demuestra que

$$\int_0^\infty \lambda_m\{Q\} \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\rho}(\sigma) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \\ \tilde{\mathbf{z}}(\sigma) \end{array} \right\|^2 d\sigma \leq V(\boldsymbol{\rho}(0), \boldsymbol{\xi}(0), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0), \tilde{\mathbf{z}}(0)),$$

lo que a su vez implica que las funciones $\boldsymbol{\rho}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}} \in L_2^n$. Invocando el hecho de que una función uniformemente continua que es cuadrática integrable debe tender a cero cuando

el tiempo incrementa (Khalil, 1996), se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ \tilde{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Finalmente, el desvanecimiento asintótico de $\boldsymbol{\rho}(t)$ y $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)$, y la hipótesis de acotamiento del jacobiano del robot, aseguran que (ver ecuación (108))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{y}(t)) - \dot{\mathbf{y}}(t)] = \mathbf{0}.$$

De esta forma se garantiza el cumplimiento del objetivo de control por campo de velocidad en coordenadas operacionales (104) usando el controlador jerárquico (106)–(107) y (110)–(113).

IV.4 Lazo interno basado en PD con compensación

En esta sección se propone al control basado en PD con compensación dado por las ecuaciones (54)–(56) para ser usado en el lazo interno de control de velocidad, que junto con el control cinemático de campo de velocidad (106)–(107) forma un esquema de control jerárquico.

El controlador de velocidad estudiado en esta sección es reescrito a continuación

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \Lambda \tilde{\boldsymbol{\omega}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\boldsymbol{\omega}_d + \Lambda \boldsymbol{\xi}] \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi} + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (118)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (119)$$

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas, $\Lambda = K_v^{-1} K_i$, la velocidad articular deseada $\boldsymbol{\omega}_d$ es dada en (106), la aceleración articular deseada $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ es definida

en (109), y $\hat{\mathbf{z}}$ es la estimación del estado interno \mathbf{z} del modelo de fricción (11)–(10). El observador del estado interno \mathbf{z} que se propone para ser usado en el controlador (118)–(119) es dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_d + \Lambda\xi. \quad (120)$$

La ecuación de malla cerrada resulta de sustituir el controlador (118)–(119) en el modelo del robot (9) y de usar las ecuaciones (11) y (120), quedando

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K\boldsymbol{\rho} + J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda\xi] - K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} - K_i\xi - \Sigma_0\tilde{\mathbf{z}}] - \Lambda\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda\xi \end{bmatrix} \quad (121)$$

donde $\tilde{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ es el error de observación del estado interno \mathbf{z} . La ecuación (121) es no lineal, no autónoma y tiene como un equilibrio al origen del espacio de estado. Se puede demostrar estabilidad del origen del espacio de estado por medio de la siguiente función de Lyapunov

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) &= \frac{1}{2} [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda\xi]^T M(\mathbf{q}) [\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda\xi] \\ &\quad + \boldsymbol{\xi}^T K_i \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} + \alpha \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho}, \end{aligned}$$

donde α es una constante estrictamente positiva. Usando la propiedad 2 del modelo del robot, es posible demostrar que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\xi}^T K_i K_v^{-1} K_i \boldsymbol{\xi} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}} \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{\rho}^T K \boldsymbol{\rho} + \alpha \boldsymbol{\rho}^T J(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned}$$

Tomando una cota superior sobre la derivada de función de Lyapunov se tiene

$$\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\boldsymbol{\xi}\| \\ \|\boldsymbol{\rho}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_v\} & 0 & -\alpha\frac{1}{2}k_J \\ 0 & \lambda_m\{K_i K_v^{-1} K_i\} & 0 \\ -\alpha\frac{1}{2}k_J & 0 & \alpha\lambda_m\{K\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\boldsymbol{\xi}\| \\ \|\boldsymbol{\rho}\| \end{bmatrix} \quad (122)$$

donde k_J se define en (18). Debe notarse que la desigualdad (122) ha sido obtenida en virtud de que $\Sigma_0\Psi(\dot{\boldsymbol{q}})$ es semidefinida positiva. La matriz Q en (122) es definida positiva si y sólo si es satisfecha la siguiente desigualdad

$$\alpha < \frac{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{K\}}{k_J^2}.$$

Dado que siempre puede ser escogido un α apropiado de modo que $\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}})$ sea semidefinida negativa globalmente, se tiene que el origen del espacio de estado del sistema (62) es estable en el sentido de Lyapunov. En forma adicional, las señales $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}} \in L_\infty^n$, ya que la función candidata de Lyapunov $V(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}})$ es radialmente desacotada. Para demostrar que las funciones $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}$ son uniformemente continuas (Khalil, 1996), es necesario demostrar que $\dot{\boldsymbol{\rho}}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{z}}} \in L_\infty^n$, lo que se deduce de la ecuación de lazo cerrado (121), de la hipótesis de acotamiento del campo de velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$, dada en la ecuación (105), y de la hipótesis de acotamiento del jacobiano $J(\boldsymbol{q})$. Por otro lado,

$$\int_0^\infty \dot{V}(\boldsymbol{\rho}(\sigma), \boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{z}}(\sigma))d\sigma \leq \int_0^\infty -\lambda_m\{Q\} \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(\sigma) \\ \boldsymbol{\xi}(\sigma) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \end{bmatrix} \right\|^2 d\sigma,$$

de donde puede demostrarse que

$$\int_0^\infty \lambda_m\{Q\} \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(\sigma) \\ \boldsymbol{\xi}(\sigma) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \end{bmatrix} \right\|^2 d\sigma \leq V(\boldsymbol{\rho}(0), \boldsymbol{\xi}(0), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0), \tilde{\mathbf{z}}(0)),$$

lo que a su vez implica que las funciones $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} \in L_2^n$. Invocando el hecho de que una función uniformemente continua que es cuadrática integrable debe tender a cero cuando el tiempo incrementa (Khalil, 1996), se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Finalmente, el desvanecimiento asintótico de $\boldsymbol{\rho}(t)$ y $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)$, junto con la hipótesis de acotamiento del jacobiano del robot asegura que (ver ecuación (108))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{v}(\mathbf{y}(t)) - \dot{\mathbf{y}}(t)] = \mathbf{0}.$$

De esta forma se garantiza el cumplimiento del objetivo de control por campo de velocidad en coordenadas operacionales (104) usando el controlador jerárquico (106)–(107) y (118)–(120).

IV.5 Lazo interno basado en PD+

En esta sección se propone al controlador de velocidad basado en PD+ (59)–(61) para formar una esquema de control jerárquico por campo de velocidad junto con el controlador cinemático (106)–(107). Dicho controlador de velocidad es reescrito a continuación:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi} + F_v\dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0\hat{\mathbf{z}} \quad (123)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (124)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_d. \quad (125)$$

Nótese que el controlador (123)–(125) surge como un caso especial del controlador (118)–(120) cuando $\Lambda = 0$.

La ecuación de malla cerrada que resulta del uso del control jeráquico por campo de velocidad (106)–(107) y (123)–(125) es descrita por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K\boldsymbol{\rho} + J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -M(\mathbf{q})^{-1} [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi}] \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}, \quad (126)$$

la cual es una ecuación no lineal y no autónoma, en donde el origen del espacio de estados $[\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\xi}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\mathbf{z}}^T]^T = \mathbf{0}$ es un equilibrio.

Para probar la estabilidad del origen del espacio de estado y el cumplimiento del objetivo de control por campo de velocidad, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) = \alpha \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T K_i \boldsymbol{\xi} + \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}},$$

donde α es una constante estrictamente positiva. La derivada temporal de $V(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}})$ es dada por

$$\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}) = -\alpha \boldsymbol{\rho}^T K \boldsymbol{\rho} + \alpha \boldsymbol{\rho}^T J(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}},$$

donde se ha usado la propiedad 2 del modelo del robot. Es posible obtener la siguiente

cota superior sobre $\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}})$:

$$\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\rho}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha\lambda_m\{K\} & -\frac{1}{2}\alpha k_J \\ -\frac{1}{2}\alpha k_J & \lambda_m\{K_v\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\rho}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \end{bmatrix}. \quad (127)$$

La matrix Q en (127) es definida positiva si y sólo si α satisface la siguiente condición

$$\alpha < \frac{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{K\}}{k_J^2}.$$

Dado que siempre se puede escoger un α apropiado, $\dot{V}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}})$ es negativa definida globalmente, lo que implica que el origen del espacio de estado del sistema (126) es estable en el sentido de Lyapunov. Utilizando argumentos similares que los usados en el análisis de los sistemas de lazo cerrado (114) y (121) se puede demostrar que las funciones $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{z}}$ son uniformemente continuas (Khalil, 1996). Por otro lado, se satisface que

$$\int_0^\infty \dot{V}(\boldsymbol{\rho}(\sigma), \boldsymbol{\xi}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma), \tilde{\boldsymbol{z}}(\sigma)) d\sigma \leq \int_0^\infty -\lambda_m\{Q\} \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(\sigma) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \end{bmatrix} \right\| d\sigma,$$

de donde puede demostrarse que

$$\int_0^\infty \lambda_m\{Q\} \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(\sigma) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma) \end{bmatrix} \right\| d\sigma \leq V(\boldsymbol{\rho}(0), \boldsymbol{\xi}(0), \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0), \tilde{\boldsymbol{z}}(0))$$

lo que a su vez implica que las funciones $\boldsymbol{\rho}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} \in L_2^n$. Invocando el hecho de que una función uniformemente continua que es cuadrática integrable debe tender a cero cuando el tiempo incrementa (Khalil, 1996), se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Al igual que en los controladores jerárquicos por campo de velocidad analizados anteriormente, el hecho de que $\boldsymbol{\rho}(t)$ y $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)$ tiendan a cero cuando el tiempo incrementa, y la hipótesis de acotamiento del jacobiano del robot, aseguran que el error de campo de velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}(t)) - \dot{\boldsymbol{y}}(t)$ tiende a cero cuando el tiempo incrementa. De este modo se garantiza el cumplimiento del objetivo de control por campo de velocidad en coordenadas operacionales (104) usando el controlador jerárquico (106)–(107) y (123)–(125).

IV.6 Resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales sobre control jerárquico por campo de velocidad. Los detalles sobre el sistema experimental usado están descritos en la apéndice A.

Los controladores implementados son los que utilizan en el lazo interno de control de velocidad las estructuras tipo dinámica inversa y PD con compensación. La estructura de control de velocidad articular tipo PD+ no fue implementada, ya que ésta puede considerarse un caso particular de la estructura PD con compensación usando $\Lambda = 0$. Además, según los resultados experimentales mostrados en la sección II.2.5, las prestaciones entre la estructura de control de velocidad tipo PD+ y PD con compensación son similares. Cabe señalar que la ganancia de control usado en el lazo externo de campo de velocidad (106)–(107) fue puesta con el valor numérico de

$$K = \text{diag}\{10.0, 10.0\} [1/\text{seg}].$$

Al igual que los experimentos de control de movimiento, se calculó el error de contorno (Chiu y Tomizuka, 2001)

$$e_C(t) = r_0 - \sqrt{[y_1(t) - y_{c1}]^2 + [y_2(t) - y_{c2}]^2},$$

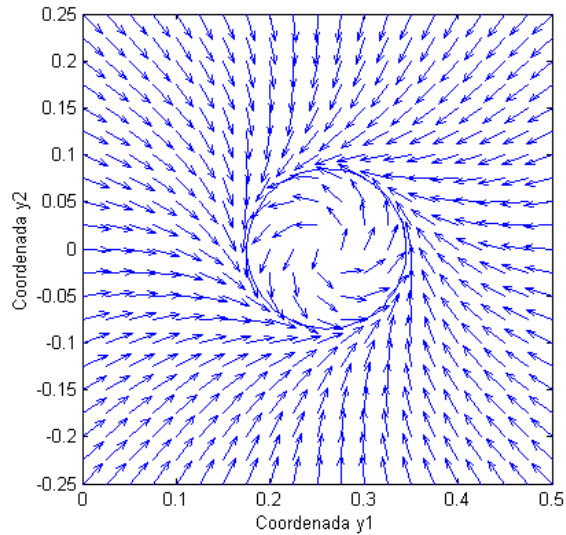


Figura 49: Campo de velocidad usado en experimentos

que en este trabajo es considerado como un índice de las prestaciones de los controladores implementados. Además se muestra el error de rapidez tangencial al círculo, definido por la diferencia en la velocidad tangencial al círculo v_0 y la rapidez del extremo del manipulador $\|\dot{\mathbf{y}}\|$.

IV.6.1 Campo de velocidad deseado

En los experimentos se ha considerado un campo de velocidad que codifica la tarea de trazar un círculo a velocidad constante en el espacio operacional. Esto significa que las líneas de flujo del campo de velocidad especificado convergen a un contorno circular. El objetivo de control es que la posición del extremo final del robot siga las líneas de flujo del campo de velocidad, y por ende siga en forma asintótica el contorno deseado con velocidad tangencial constante. El campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ propuesto para generar líneas de flujo convergentes al círculo en el plano y_1 - y_2 es mostrado en la figura 49. La rapidez deseada en el círculo es de $v_0 = 0.65$ [m/seg].

La expresión matemática del campo de velocidad deseado $\mathbf{v}(\mathbf{y})$, descrito en la figura

49 es dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = -k(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \begin{bmatrix} 2[y_1 - y_{c1}] \\ 2[y_2 - y_{c2}] \end{bmatrix} + c(\mathbf{y}) \begin{bmatrix} -2[y_2 - y_{c2}] \\ 2[y_1 - x_{c1}] \end{bmatrix}, \quad (128)$$

donde $f(\mathbf{y}) = [y_1 - y_{c1}]^2 + [y_2 - y_{c2}]^2 - r_0^2$. Denotando $\nabla f(\mathbf{y})$ como el gradiente de $f(\mathbf{y})$, las funciones $k(\mathbf{y})$ y $c(\mathbf{y})$ son definidas como

$$k(\mathbf{y}) = \frac{k_0}{|f(\mathbf{y})| \|\nabla f(\mathbf{y})\| + \epsilon},$$

$$c(\mathbf{y}) = \frac{v_0 \exp^{-\alpha|f(\mathbf{y})|}}{\|\nabla f(\mathbf{y})\|},$$

donde $k_0 = 0.65$ [m/s], $\alpha = 50$ [m⁻²], y $\epsilon = 0.00075$ [m³]. El campo de velocidad (128) satisface la hipótesis (105).

IV.6.2 Experimentos usando el lazo interno basado en dinámica inversa

Los experimentos que fueron llevados a cabo usando como lazo interno de control de velocidad la estructura de control de dinámica inversa consideraron tanto la compensación de fricción viscosa y de Coulomb, así como la compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

En primer lugar se implementó el controlador (64)–(65) bajo la consideración de compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y en segundo lugar se implementó el controlador (110)–(113), que considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Las ganancias utilizadas en los controladores fueron

$$K_i = \text{diag}\{100.0, 400.0\} [1/\text{seg}^2],$$

$$K_v = \text{diag}\{15.0, 40.0\} [1/\text{seg}].$$

Para el observador (112)–(113) basado en el modelo de fricción de Dahl se usó

$$K_0 = \text{diag}\{0.0045, 0.0045\} \text{ [seg]}.$$

Los resultados de la implementación del control jerárquico por campo de velocidad dado por las ecuaciones (106)–(107) y controlador de velocidad articular (64)–(65), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, son dados en la figura 50, que muestra el error de contorno, en la figura 51, que muestra el error de velocidad tangencial, y en la figura 52 que muestra la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas. Por otro lado, los resultados de usar el algoritmo (85)–(88) que basa la compensación de fricción en el modelo de Dahl, son mostrados en la figura 53, que muestra el error de contorno, en la figura 54, que muestra el error de velocidad tangencial, y finalmente en la figura 55, que muestra la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas.

En estado estacionario, el valor pico de el error de contorno es de 0.0033 [m] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y de 0.0029 para compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. La mejora del segundo con respecto al primero es de 12%. En lo que respecta al error de velocidad tangencial, el desempeño es bastante similar entre las implementaciones de los tipos de compensación de fricción en la estructura de control de velocidad del tipo dinámica inversa.

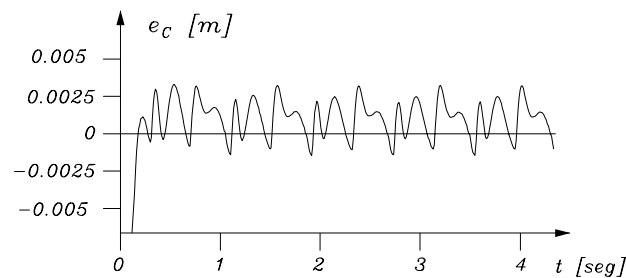


Figura 50: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno

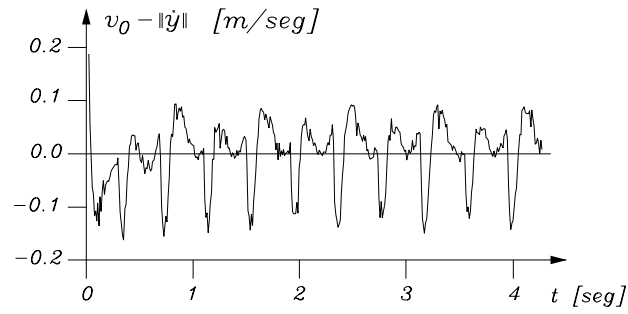


Figura 51: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial

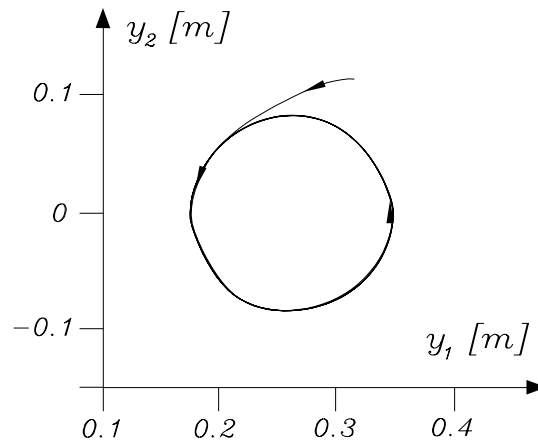


Figura 52: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional

IV.6.3 Experimentos usando el lazo interno PD con compensación

Las ganancias utilizadas para esta estructura de control fueron las siguientes

$$K_i = \text{diag}\{10, 5\} \text{ [Nm/rad]},$$

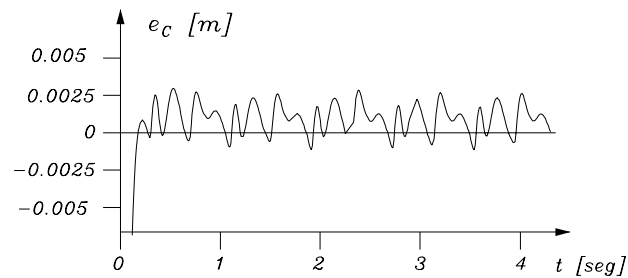


Figura 53: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno

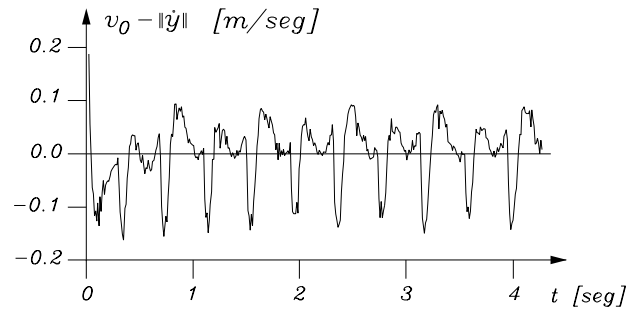


Figura 54: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial

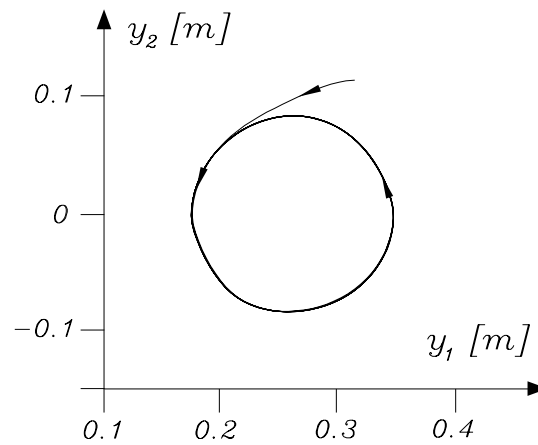


Figura 55: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional

$$K_v = \text{diag}\{5, 4\} \text{ [Nm seg/rad]},$$

lo que resulta en

$$\Lambda = K_v^{-1}K_p = \text{diag}\{2, 1.25\} \text{ [seg}^{-1}\text{]}.$$

Para la implementación del controlador jerárquico por campo de velocidad (106)–(107) y (66)–(67), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, las figuras 56, 57 y 58 muestran el error de contorno, el error de velocidad tangencial, y la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas, respectivamente. Mientras que las figuras 59, 60 y 61, que muestran el error de contorno, el error de velocidad tangencial, y la ruta

trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas, respectivamente, corresponden a la implementación del controlador jerárquico por campo de velocidad (106)–(107) usando el controlador de velocidad articular (118)–(120), donde la compensación de fricción es basada en el modelo de Dahl.

En estado estacionario, el valor pico del error de contorno es de 0.0096 [m] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y de 0.00086 [m] para compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, i.e. una mejoría de 10.4% del segundo con respecto al primero. En lo que respecta al error de velocidad tangencial al círculo, los resultados son bastante similares entre las dos técnicas de compensación de fricción.

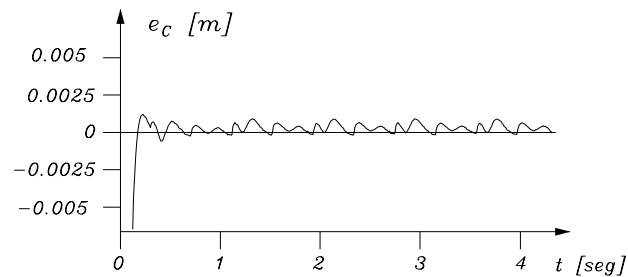


Figura 56: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno

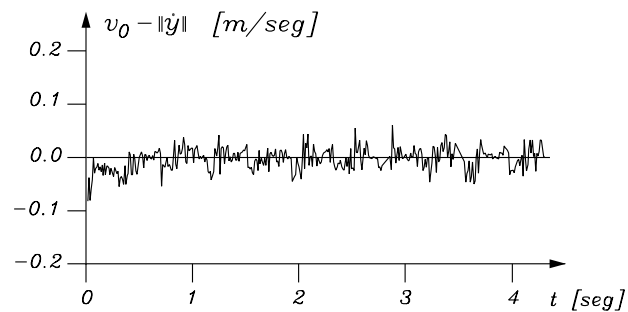


Figura 57: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial

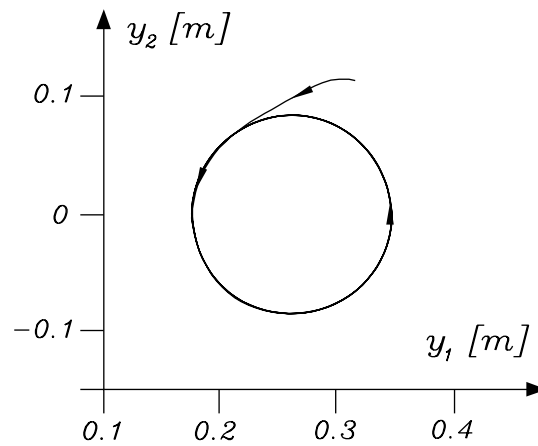


Figura 58: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional

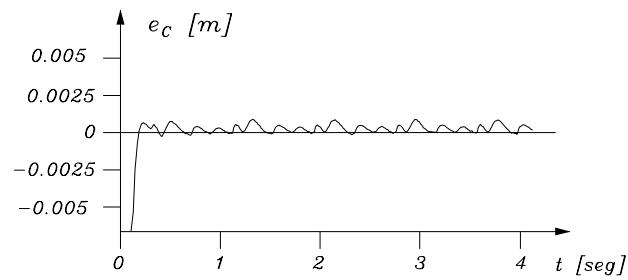


Figura 59: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno

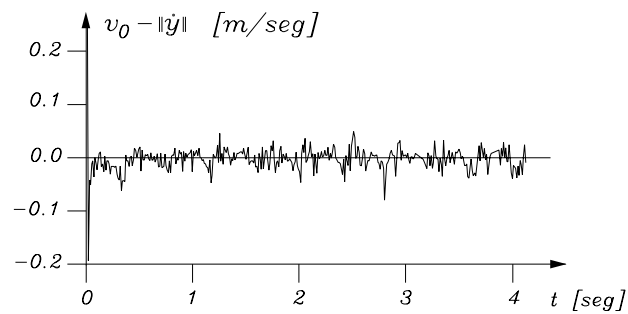


Figura 60: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial

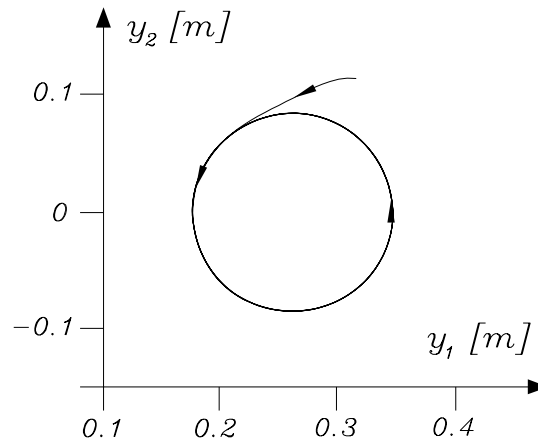


Figura 61: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional

IV.6.4 Experimentos usando velocidad articular baja

Estos experimentos consistieron en usar el campo de velocidad dado por las ecuación (128) pero especificando para cada punto del espacio cartesiano una velocidad más baja que la usada en los experimentos presentados anteriormente. Usando $v_0 = 0.2$ [m/seg] y $k_0 = 0.2$ [m/seg] en las expresiones de $c(\mathbf{y})$ y $k(\mathbf{y})$ del campo de velocidad (128) se especifica una rapidez de aproximadamente 0.2 [m/seg] para cada punto del espacio cartesiano.

Los experimentos consistieron en usar el control cinemático por campo de velocidad (106)–(107) en conjunto con el controlador de velocidad articular basado en el control PD con compensación considerando distintos casos en la forma de compensar la fricción presente a las articulaciones del robot. Es decir usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb con el controlador (66)–(67), y usando compensación de fricción basada en observador con el controlador (118)–(120).

Con respecto al controlador de velocidad basado en estructura PD con compensación expresado por las ecuaciones (66)–(67), que usa compensación de fricción viscosa y de Coulomb, los resultados son mostrados en las figuras 62 que presenta el error de contorno e_C , la figura 63 que describe el error de rapidez en el círculo, y la figura 64 que muestra la

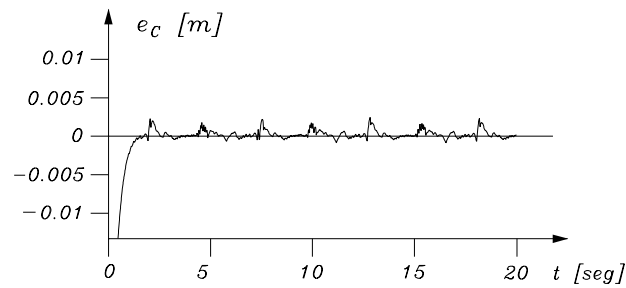


Figura 62: Error de contorno: PD con compensación usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb

ruta bosquejada en el plano cartesiano $y_1 - y_2$. Para el controlador basado en estructura PD con compensación que considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl (118)–(120) los resultados son mostrados en forma análoga en las figuras 65, 66 y 67.

En este conjunto de experimentos, es posible notar que el peor resultado con respecto al error de contorno e_c fue empleando compensación de fricción viscosa y de Coulomb. Por el contrario, el mejor fue usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Particularmente, considerando compensación de fricción viscosa y de Coulomb, el error de contorno máximo es de 0.0024 [m], y usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, el error de contorno máximo es de 0.0012 [m], un 50% menos que el anterior. Las prestaciones obtenidas en el error de contorno son reflejadas en la ruta trazada por el manipulador en el espacio cartesiano. Ver figuras 64 y 67.

En lo que se refiere al error de rapidez tangencial al círculo $v_0 - \|\dot{\mathbf{y}}\|$, el controlador con la peor prestación fue el que considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, y el que tuvo la mejor prestación fue el controlador que considera compensación de fricción viscosa y de Coulomb. La examinación visual de las figuras 63 y 66 corrobora este hecho.

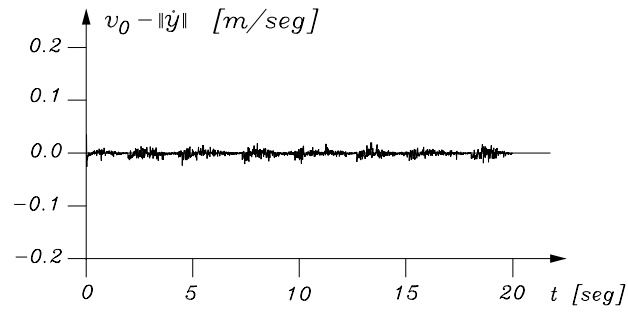


Figura 63: Error de velocidad tangencial al círculo $v_0 - \|\dot{\mathbf{y}}\|$: PD con compensación usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb

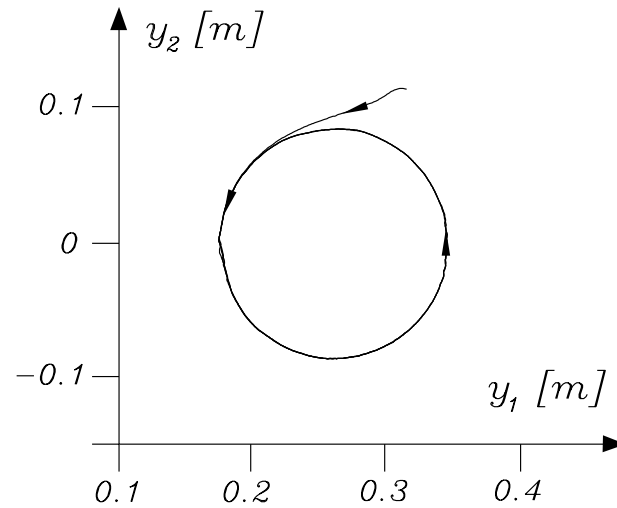


Figura 64: Ruta en el espacio operacional: PD con compensación usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb

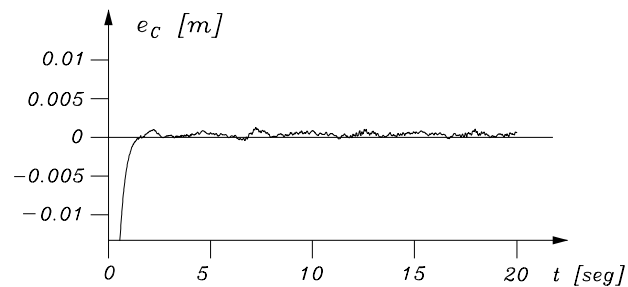


Figura 65: Error de contorno: PD con compensación usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl

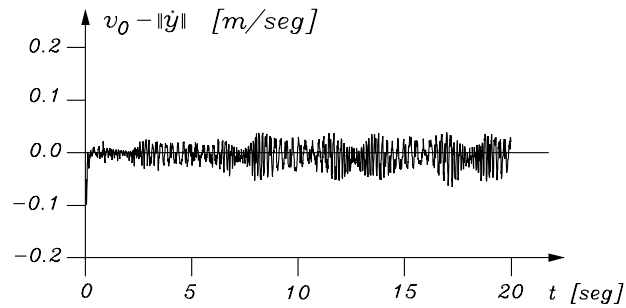


Figura 66: Error de velocidad tangencial al círculo $v_0 - \|\dot{\mathbf{y}}\|$: PD con compensación usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl

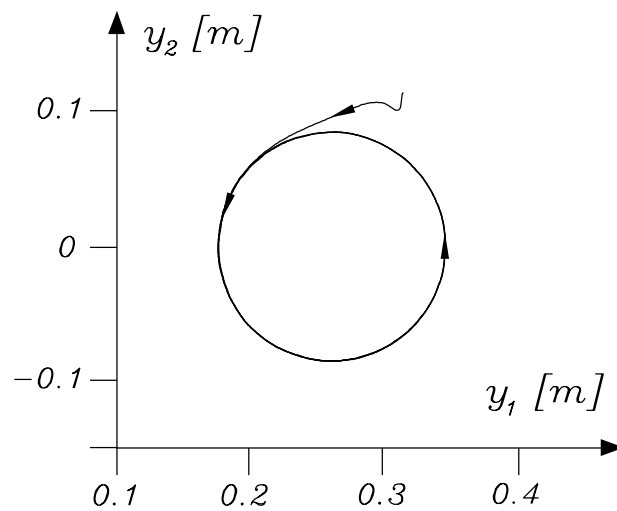


Figura 67: Ruta en el espacio operacional: PD con compensación usando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl

IV.7 Conclusiones

En esta sección se han presentado soluciones al problema de control por campo de velocidad. Las soluciones consisten en una estructura de control jerárquica basada en un lazo externo de control cinemático por campo de velocidad para la resolución de la velocidad articular deseada y un lazo interno de velocidad articular que considera compensación de fricción.

Los resultados experimentales muestran buenas prestaciones al considerar métodos clásicos de compensación de fricción en comparación a compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Sin embargo el uso de compensación de fricción basada en el modelo de Dahl mejora las prestaciones en la precisión de los movimientos ejecutados. Con respecto al seguimiento del campo de velocidad deseado utilizando velocidades articulares bajas se desprenden las siguientes conclusiones:

- Método de compensación de fricción clásico. Buen resultado en el seguimiento de la velocidad deseada en el contorno circular pero malo en el error de contorno.
- Método de compensación de fricción basado en el modelo de Dahl. Mal desempeño en el seguimiento de la velocidad deseada en el contorno circular pero bueno en el error de contorno.

V Control jerárquico de ruta

V.1 Introducción

El control de movimiento de manipuladores (también llamado control de seguimiento) ha sido bien estudiado en los últimos 20 años, ver por ejemplo Abdallah *et al.* (1991), Lewis *et al.* (1993), y referencias allí citadas. Esta manera de formular el control de robots ha dado buenos resultados para muchas aplicaciones prácticas. No obstante, la mayoría de las tareas robóticas pueden ser bien ejecutadas mediante coordinación de las articulaciones del robot sin consideración del tiempo. Este es el caso de aplicaciones tales como corte, taladrado y pulido, donde no es necesario el uso de trayectorias deseadas, i.e. funciones vectoriales dadas explícitamente en función del tiempo. Esta clase de tareas pueden ser llevadas a cabo usando controladores basados en la especificación de una ruta.

En muchas aplicaciones prácticas es encontrado conveniente que el robot manipulador realice su movimiento sobre una ruta (*path*) especificada junto con una ley de tiempo apropiada de modo que no se excedan los límites de par de entrada a los que los actuadores del manipulador están restringidos. Este problema ha sido abordado por Hollerbach (1984), en donde es tratado el caso del escalamiento temporal de una trayectoria nominal, que es especificada a través de una ruta y un parámetro escalar cuya principal característica es ser una función estrictamente creciente del tiempo. Por otro lado, en Dahl y Nielsen (1990) otra solución al mismo problema ha sido propuesta partiendo de la especificación de la ruta y un *perfil de velocidad* de tiempo óptimo, el cual es una función escalar estrictamente positiva con la que pueden ser obtenidas trayectorias nominales deseadas. La metodología propuesta en Dahl y Nielsen (1990) es llamada control de velocidad de ruta (*path velocity control*) y tiene como objetivo principal realizar el escalamiento de las trayectorias modificando en línea el perfil de velocidad especificado de modo que se respeten los límites de par de entrada. Como

puede observarse, para llevar a cabo el escalamiento de trayectorias, estas metodologías parten de la especificación de una ruta y una función escalar, con los que es posible obtener la trayectoria nominal deseada. Dicho de otra forma, el movimiento que estaría codificado por una trayectoria nominal deseada se encuentra especificado por la ruta y la función escalar en cuestión, i.e. una función estrictamente creciente del tiempo en el caso estudiado por Hollerbach (1984), o un perfil de velocidad de tiempo óptimo, en la metodología propuesta por Dahl y Nielsen (1990).

Otra formulación de control que no requiere la especificación de trayectorias nominales deseadas para codificar una tarea, es el control basado en eventos (*event-based control*) (Tarn *et al.*, 1996). En el control basado en eventos una tarea robótica es representada por una ruta parametrizada en términos de un escalar llamado variable de referencia de movimiento (*motion reference variable*). El algoritmo de control es diseñado para seguir una determinada posición especificada por la variable de referencia de movimiento, cuya dinámica está regida por un plan de movimiento nominal que puede ser modificado cuando los sensores del robot detectan una situación inusual, tal como la presencia de un obstáculo. Por así decirlo, en el control basado en eventos la dinámica de la variable de referencia de movimiento es gobernada por un “plan de movimiento basado en los sensores”. Sin embargo, los casos de estudio experimentales presentados en (Tarn *et al.*, 1996) están restringidos a calcular la posición y velocidad deseada a través de la estimación de la longitud de arco dada por la posición en el espacio operacional del efector final. Además, existen problemas abiertos concernientes a las implicaciones de definir la referencia de movimiento en una forma diferente a la estimación de la longitud de arco, pues la definición de la referencia de movimiento debe cumplir con determinadas propiedades requeridas para la estabilidad (en el sentido de Lyapunov) del sistema en lazo cerrado.

De esta forma, la idea de plantear el control de robots manipuladores usando como especificación una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado requiere un estudio más detallado. En este capítulo, se propone un planteamiento de control de ruta para robots

manipuladores como una alternativa al control clásico de movimiento. Más particularmente, se ilustran las ideas básicas del control de ruta en coordenadas operacionales. Además, se proponen tres esquemas de control de ruta basados en control jerárquico con la consideración de compensación de fricción en el lazo interno de control.

El control de ruta es un intento por desarrollar esquemas de control en los que el uso de trayectorias nominales de posición no es necesario. Muchos sistemas de control presentados en la literatura se diseñan para que el robot siga una posición que depende en forma explícita del tiempo, como lo es en el control clásico de movimiento. En cambio, el diseño de un sistema de control de ruta puede permitir que el robot siga una posición que varía con respecto a ciertos estados o eventos del robot. En un sistema de control de ruta el movimiento del robot obedece a un *plan de movimiento extendido*, en lugar de obedecer a un plan de movimiento nominal, como podría ser en control de movimiento.

V.1.1 Codificación de tareas y objetivo de control de ruta

En este apartado se introducen algunas definiciones necesarias en el estudio del control de ruta. Las primeras dos definiciones están relacionadas con la forma de especificar el movimiento a ser ejecutado por un robot manipulador. Posteriormente se definen el objetivo de control de ruta y el plan de movimiento, el cual provee un sentido geométrico a la definición del objetivo de control de ruta.

Definición (ruta deseada). Una ruta deseada es dada por (Marsden y Tromba, 1988)

$$\mathbf{y}_d(s) : [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (129)$$

donde $s \in [s_0, \infty)$ es llamado parámetro de ruta, s_0 es una constante real. La imagen de $\mathbf{y}_d(s)$ es llamada curva de $\mathbf{y}_d(s)$. Se supone que $\mathbf{y}_d(s)$ es dos veces diferenciable.

◇◇◇

Definición (perfil de velocidad deseado). Un perfil de velocidad deseado es definido por el mapa dado por (Dahl y Nielsen, 1990; Dahl, 1992)

$$\vartheta(s) : [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad (130)$$

donde s_0 es una constante real. Se supone que $\vartheta(s)$ es continua y diferenciable, además de que satisface

$$\inf_{s \in [s_0, \infty)} \vartheta(s) = \vartheta_0 > 0, \quad (131)$$

donde ϑ_0 es una constante estrictamente positiva.

◇◇◇

La ruta deseada $\mathbf{y}_d(s)$ y el perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$ pueden codificar el movimiento que el robot debe ejecutar para realizar una tarea. Esto será aclarado más adelante. Una vez que la ruta deseada $\mathbf{y}_d(s)$ y el perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$ han sido especificados, entonces es posible definir el objetivo de control de ruta.

Definición (objetivo de control de ruta). El objetivo de control de ruta en el espacio operacional es establecido como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix}, \Gamma \right) = 0, \quad (132)$$

donde la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^{2m}$ en el espacio de estado es definida por

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} : \mathbf{y} = \mathbf{y}_d(s) \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds} \vartheta(s); \forall s \in [s_0, \infty) \right\}, \quad (133)$$

y $\text{dist}(\mathbf{x}, A)$ denota la distancia más pequeña entre el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}$ y un punto del conjunto $A \subset \mathbb{R}^{2m}$, i.e.

$$\text{dist}(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{p} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|.$$

◇◇◇

La siguiente definición es importante para dar una interpretación geométrica a la definición del conjunto Γ .

Definición (plan de movimiento). El perfil de velocidad (130) define un plan de movimiento por medio de la siguiente ecuación diferencial (Tarn *et al.*, 1996)

$$\dot{s} = \vartheta(s), \quad s(t_0) = s_0. \quad (134)$$

◇◇◇

De esta forma, usando la definición del plan de movimiento (134), la derivada temporal de $\mathbf{y}_d(s)$ puede ser calculada como

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_d(s) = \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds}\dot{s} = \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds}\vartheta(s), \quad (135)$$

la cual es una función del parámetro de ruta s . Puede notarse que la ecuación (135) es usada en la definición (133) para determinar la velocidad deseada en el espacio operacional en función del parámetro de ruta s . De esta forma, el conjunto Γ en (133), definido en el espacio de estado $[\mathbf{y}^T \quad \dot{\mathbf{y}}^T]^T$, especifica la posición y la velocidad deseada como una función del parámetro de ruta s .

Del hecho de que el vector $\frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds}\vartheta(s)$ defina un vector tangente para cada punto de la curva definida por la ruta deseada $\mathbf{y}_d(s)$, la especificación del perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$ tiene efecto en la rapidez de la ruta definida por

$$\left\| \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds}\vartheta(s) \right\|.$$

Debe ser observado que si s denota la longitud de arco de la curva definida por $\mathbf{y}_d(s)$, entonces la rapidez de la ruta es dada por $\vartheta(s)$ (Marsden y Tromba, 1988). La figura 68 describe la curva representada por la ruta deseada $\mathbf{y}_d(s) \in \mathbb{R}^3$ y el vector velocidad

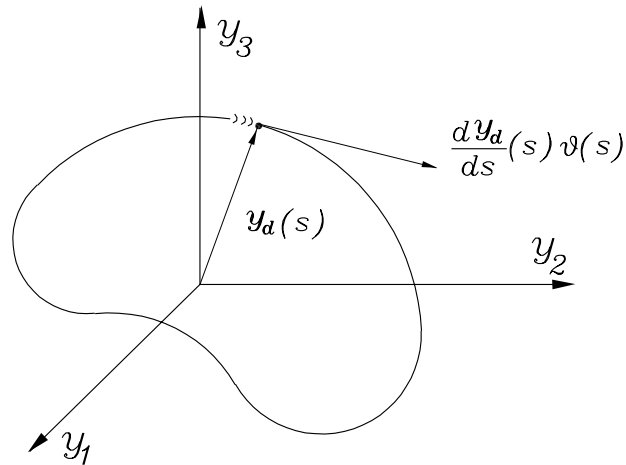


Figura 68: Movimiento en función del parámetro de ruta s

descrito por $\frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds} \vartheta(s)$.

El cálculo de un perfil de velocidad $\vartheta(s)$ es usualmente llevado a cabo empleando un algoritmo de planificación de trayectorias. Tal como es indicado por el plan de movimiento (134), el perfil de velocidad $\vartheta(s)$ representa la relación entre $s(t)$ y $\dot{s}(t)$ (Dahl y Nielsen, 1990). No obstante, algunas veces el cálculo del perfil de velocidad $\vartheta(s)$ es llevado a cabo como un problema de programación dinámica (ver e.g. Pfeiffer y Johanni (1987) para revisar la técnica de optimización en el plano de fase —*phase-plane optimization technique*— para planificación de trayectorias de tiempo mínimo). Por otro lado, también basado en técnicas de optimización, en Tarn *et al.* (1996) es propuesto un método para planificar perfiles de velocidad a través de restricciones de velocidad y aceleración.

Puede ser mostrado que la solución $s(t)$ del plan de movimiento (134) tiene las siguientes propiedades:

P1. $s(t)$ es una función estrictamente creciente.

P2. $s(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Las propiedades P1 y P2 del parámetro de ruta $s(t)$, el cual resulta del plan de

movimiento (134), pueden ser demostradas como sigue. Del hecho de que $\dot{s}(t)$ en (134) es una función estrictamente positiva (ver ecuación (131)), se satisface que

$$\frac{s(t_1 + \delta) - s(t_1)}{\delta} > 0$$

para una constante $\delta > 0$ suficientemente pequeña y $t_1 \geq 0$. Defínase $t_2 = t_1 + \delta$, entonces es posible escribir

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} > 0. \quad (136)$$

Del hecho de que δ es supuesto una constante positiva, de la desigualdad (136) es posible afirmar que $s(t_2) - s(t_1) > 0$ y $t_2 - t_1 > 0$. Por lo tanto, $s(t)$ es una función estrictamente creciente. Por otro lado, bajo la suposición (131), es posible escribir

$$\dot{s} = \vartheta(s) \geq \vartheta_0.$$

Invocando el principio de comparación (Arnold, 1973) se prueba

$$s(t) \geq \vartheta_0 t + s_0. \quad (137)$$

Es fácil notar que el lado derecho de la ecuación (137) es una función estrictamente creciente que pertenece al intervalo $[s_0, \infty)$. En consecuencia, la función $s(t)$ está también en el intervalo $[s_0, \infty)$.

Por otro lado, en relación a la especificación de una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado, una trayectoria nominal de posición

$$\mathbf{y}_r(t) = \mathbf{y}_d(s(t)) \quad (138)$$

es obtenida resolviendo el plan de movimiento (134) para obtener $s(t)$ (Dahl y Nielsen, 1990). La velocidad y aceleración nominales son obtenidas derivando (138) con respecto

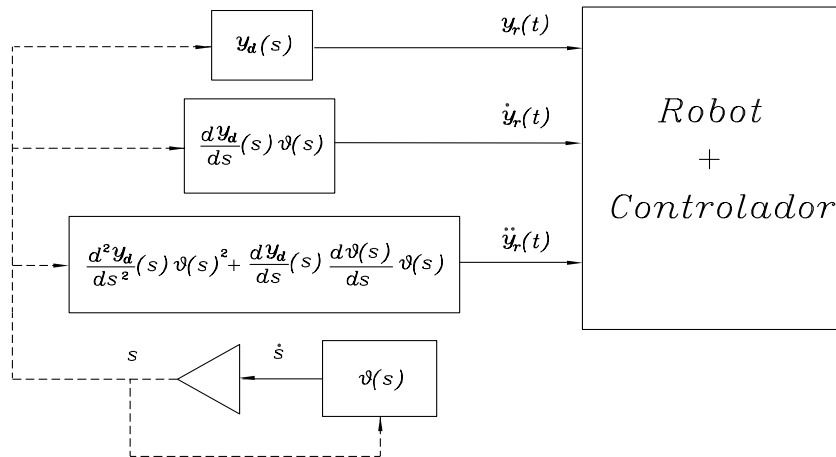


Figura 69: Generación de trayectorias nominales y control de movimiento

al tiempo y usando el plan de movimiento (134):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_r(t) &= \frac{d\mathbf{y}_d}{ds}(s(t))\vartheta(s(t)) \\ \ddot{\mathbf{y}}_r(t) &= \frac{d^2\mathbf{y}_d}{ds^2}(s(t))\vartheta(s(t))^2 + \frac{d\mathbf{y}_d}{ds} \frac{d\vartheta}{ds}(s(t))\vartheta(s(t))\end{aligned}$$

La generación de la trayectoria nominal de posición $\mathbf{y}_r(t)$, de velocidad $\dot{\mathbf{y}}_r(t)$, y de aceleración $\ddot{\mathbf{y}}_r(t)$, en base a la especificación de una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado es ilustrada en la figura 69. En la misma figura se muestra que las trayectorias nominales sirven como entrada al sistema formado por un robot y controlador de movimiento, como lo prodría ser un controlador basado en dinámica inversa (Spong y Vidyasagar, 1989; Sciavicco y Siciliano, 2000).

Ejemplo 1: Trazar una círculo con velocidad tangencial constante

Para considerar los conceptos que se han introducido en esta sección, considere un robot restringido al espacio operacional cartesiano de dos dimensiones, i.e. $m = 2$. La tarea solicitada es que el extremo final del robot $\mathbf{y}(t)$ debe trazar un círculo de radio r_0 con velocidad tangencial constante v_0 . La figura 70 muestra la tarea que se desea el robot

ejecute.

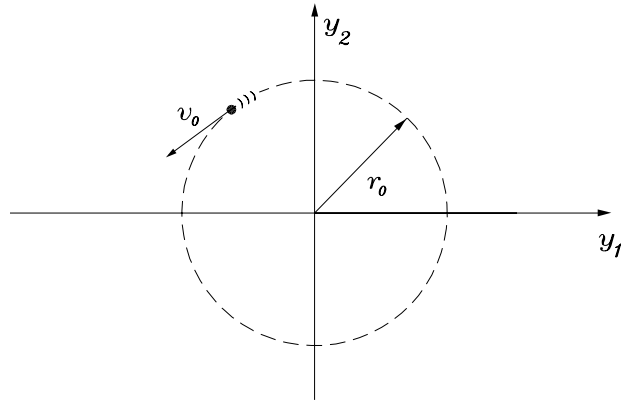


Figura 70: Tarea de trazar un círculo

La tarea en cuestión puede ser codificada por medio de la siguiente ruta

$$\mathbf{y}_d(s) = \begin{bmatrix} r_0 \cos(s) \\ r_0 \sin(s) \end{bmatrix}, \quad (139)$$

donde $s \in [s_0, \infty)$. El perfil de velocidad deseado puede ser dado por

$$\vartheta(s) = v_0/r_0. \quad (140)$$

El conjunto Γ definido en (133) resulta ser para la tarea en cuestión

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} : \mathbf{y} = \mathbf{y}_d(s) = \begin{bmatrix} r_0 \cos(s) \\ r_0 \sin(s) \end{bmatrix} \text{ y} \right. \\ \left. \dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds} \vartheta(s) = \begin{bmatrix} -v_0 \sin(s) \\ v_0 \cos(s) \end{bmatrix}, \forall s \in [s_0, \infty) \right\}. \quad (141)$$

Así, la tarea de trazar un círculo de radio r_0 centrado en el origen del espacio operacional con velocidad tangencial constante v_0 es lograda si el objetivo de control de ruta (132) es satisfecho.

Es posible notar que para la tarea solicitada, el plan de movimiento (134) es dado

por

$$\dot{s} = \frac{v_0}{r_0}. \quad (142)$$

Usando el plan de movimiento (142), es posible calcular la derivada temporal de $\mathbf{y}_d(s)$ como sigue

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_d(s) = \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds}\vartheta(s) = \begin{bmatrix} -v_0 \sin(s) \\ v_0 \cos(s) \end{bmatrix}, \quad (143)$$

la cual es una función del parámetro de ruta s .

Resolviendo el plan de movimiento (142), se tiene que $s(t) = \frac{v_0}{r_0}[t - t_0] + s_0$. Sustituyendo $s(t)$ en la ruta deseado $\mathbf{y}_d(s)$ (139) se obtiene la trayectoria deseada $\mathbf{y}_r(t)$ que codifica la tarea solicitada:

$$\mathbf{y}_r(t) = \mathbf{y}_d(s(t)) = \begin{bmatrix} r_0 \cos\left(\frac{v_0}{r_0}[t - t_0] + s_0\right) \\ r_0 \sin\left(\frac{v_0}{r_0}[t - t_0] + s_0\right) \end{bmatrix}. \quad (144)$$

De esta forma, se demuestra que muchas de las taras robóticas pueden ser codificadas a través de una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado.

Ejemplo 2: Trazar una parábola con velocidad tangencial constante

Otro ejemplo para considerar los conceptos que se han introducido en esta sección, es la tarea de trazar una parábola en el espacio de coordenadas operacionales cuyo mínimo esté situado en la coordenada $(y_1, y_2) = (0, -a)$, donde a es una constante positiva. También se especifica velocidad tangencial constante v_0 . La figura 71 muestra la forma gráfica la tarea que se desea el robot ejecute.

Para codificar la tarea mostrada en la figura 71 considere la siguiente ruta deseada

$$\mathbf{y}_d(s) = \begin{bmatrix} s \\ s^2 - a \end{bmatrix},$$

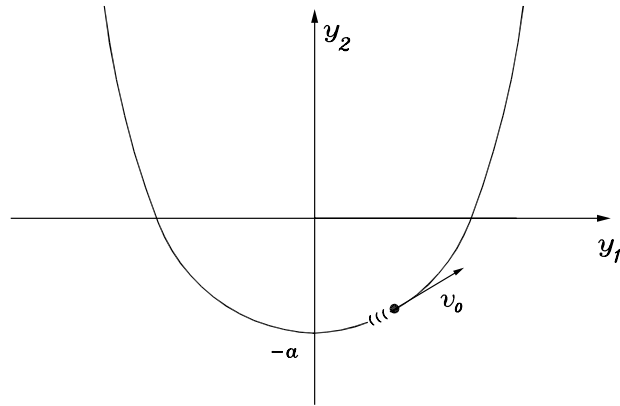


Figura 71: Tarea de trazar una parábola

con $a \in \mathbb{R}_{>0}$ y $s \in [s_0, \infty)$, con s_0 una constante arbitraria. El perfil de velocidad deseado es el siguiente

$$\vartheta(s) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 4s^2}}. \quad (145)$$

Para esta tarea el conjunto Γ definido resulta estar dado por

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{y} = \mathbf{y}_d(s) = \begin{bmatrix} s \\ s^2 - a \end{bmatrix} \quad \text{y} \right. \\ \left. \dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds} \vartheta(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2s \end{bmatrix} \frac{v_0}{\sqrt{1 + 4s^2}} \quad \forall s \in [s_0, \infty) \right\}. \quad (146)$$

De esta forma la tarea de trazar una parábola con las especificaciones dadas es lograda si el objetivo de control de ruta (132) es satisfecho.

El plan de movimiento (134) para esta tarea es dado por

$$\dot{s} = \vartheta(s) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 4s^2}}. \quad (147)$$

Usando el plan de movimiento (147), es posible calcular la derivada temporal de $\mathbf{y}_d(s)$ como sigue

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}_d(s) = \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds} \vartheta(s) = \begin{bmatrix} s \\ s^2 - a \end{bmatrix} \frac{v_0}{\sqrt{1 + 4s^2}}, \quad (148)$$

la cual es una función del parámetro de ruta s .

Resolviendo el plan de movimiento (147), se puede obtener la expresión de $s(t)$. Al igual que antes, sustituyendo $s(t)$ en la ruta deseada $\mathbf{y}_d(s)$ se determina la trayectoria nominal de posición $\mathbf{y}_r(t)$ que codifica la tarea solicitada.

El resto de este capítulo está destinado a presentar el concepto de control cinemático de ruta, además de tres controladores jerárquicos de ruta con la consideración de compensación de fricción en el lazo interno de velocidad. Al igual que en los capítulos anteriores, son presentados resultados experimentales en un robot de 2 dos grados de libertad. Sin embargo, para complementar los resultados sobre control de ruta presentados en este capítulo, en el apéndice B se describe la adecuación del concepto de control de ruta a coordenadas articulares. Además se detalla el estudio de un controlador de ruta derivado de los algoritmos de control propuestos en (Dahl y Nielsen, 1990). En el mismo apéndice se presentan resultados experimentales sobre control de ruta en coordenadas articulares.

V.2 Control cinemático de ruta

Considere las variables dadas por

$$\mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) = \mathbf{y}_d(\sigma) - \mathbf{y}, \quad (149)$$

$$\mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) - \dot{\mathbf{y}}, \quad (150)$$

donde σ es dado por el *plan de movimiento extendido*, definido de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma} = \vartheta(\sigma) - \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y})^T \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma}, \quad \sigma(0) = s_0, \quad (151)$$

donde $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz diagonal positiva definida.

Es fácil notar que las ecuaciones (149) y (150) satisfacen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) = \mathbf{0} &\implies \mathbf{y} = \mathbf{y}_d(\sigma) \text{ y } \sigma(t) \in [s_0, \infty), \\ \mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} &\implies \dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma). \end{aligned} \quad (152)$$

Entonces, como una consecuencia de (152), se tiene que el conjunto Γ , dado por la expresión (133), puede también ser definido por

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} : \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \quad \forall \sigma \in [s_0, \infty) \right\}.$$

De aquí que el objetivo de control de ruta (132) es cumplido si se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p^y(\sigma(t), \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{e}_v^y(\sigma(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (153)$$

Si se considera que las entradas del robot son las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$, es posible retener a (13) como el modelo del robot. Tomando esto en consideración, se propone como velocidad articular deseada a

$$\boldsymbol{\omega}_d = J(\mathbf{q})^\dagger \left[\frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) + K \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) \right] \quad (154)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva. Con la hipótesis de seguimiento perfecto de velocidad, esto es $\dot{\mathbf{q}} \equiv \boldsymbol{\omega}_d$, se obtiene

$$\mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}}) + K \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (155)$$

Tomando en cuenta que $\mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}})$ puede ser expresada de la siguiente manera

$$\mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) + \frac{d\mathbf{y}(\sigma)}{d\sigma} [\vartheta(\sigma) - \dot{\sigma}],$$

donde $\dot{\sigma}$ denota el plan de movimiento extendido (151), la ecuación (155) se reescribe de la forma siguiente

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_p^y = -K \mathbf{e}_p^y - \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma}. \quad (156)$$

Debe ser notado que el lado derecho de (156) depende también de σ . De esta forma, las ecuaciones (151) y (156) definen el siguiente sistema autónomo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \mathbf{e}_p^y - \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \\ \vartheta(\sigma) - \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \end{bmatrix}. \quad (157)$$

Para analizar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (157) se propone la siguiente función no negativa

$$V(\mathbf{e}_p^y, \sigma) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \mathbf{e}_p^y.$$

La derivada temporal de $V(\mathbf{e}_p, \sigma)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (157) es dada por

$$\dot{V}(\mathbf{e}_p, \sigma) = -\mathbf{e}_p^{yT} \Delta K \mathbf{e}_p^y - \left[\mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \right]^2,$$

la cuál es una función semidefinida negativa. Del hecho que el sistema (157) sea autónomo, es posible invocar el principio de invariancia de LaSalle (Khalil, 1996) para analizar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (157). Con este fin, es definido el conjunto

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} : \dot{V}(\mathbf{e}_p^y, \sigma) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \text{ y } \sigma \in [s_0, \infty) \right\}. \end{aligned}$$

El paso siguiente en la aplicación del principio de invariancia de LaSalle es encontrar

el conjunto invariante más grande en Ω , el cual es dado por

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{e}_p^y = \mathbf{0}, \text{ y } \sigma \in [s_0, \infty) \right\}.$$

Por lo tanto, de acuerdo al principio de invariancia de LaSalle, las soluciones del sistema (157) se aproximan a S cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier condición inicial $\mathbf{e}_p^y(\sigma(0), \mathbf{y}(0)) \in \mathbb{R}^m$, y $\sigma(0)=s_0$. De esta forma es demostrado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_p^y(\sigma(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{0}. \quad (158)$$

No obstante, el hecho que se satisfaga (158) implica, de la ecuación (155), que también se satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_v^y(\sigma(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{0}. \quad (159)$$

Dado que (158) y (159) son ciertas, entonces el objetivo de control de ruta (132) es satisfecho.

Al igual que en los planteamientos de control cinemático de movimiento y control cinemático por campo de velocidad, la velocidad articular no es la entrada al manipulador, por lo que debe ser realizado un análisis más detallada sobre el uso del control cinemático (154) para resolver el problema de control de ruta en el espacio operacional. Esta consideración consiste en que la implementación práctica del control cinemático (154) debe ser a través de un controlador de velocidad articular de modo que se garantice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{0},$$

donde

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\omega}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (160)$$

denota el error de velocidad articular. De la cinemática diferencial (13), usando la

definición de error de velocidad articular (160), y la velocidad deseada (154), es posible demostrar que

$$\mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}}) + K \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) = J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (161)$$

Usando la ecuación (156), puede reescribirse la ecuación (161) para obtener la dinámica de $\mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y})$ y de σ expresada por el siguiente sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \mathbf{e}_p^y - \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} + J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \vartheta(\sigma) - \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \end{bmatrix}. \quad (162)$$

La estructura jerárquica de control de ruta en el espacio operacional está dada por la velocidad deseada (154) y un controlador de velocidad articular. La aceleración articular deseada $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ es la derivada temporal de (154), es decir

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d &= \left[\frac{d}{dt} J(\mathbf{q})^\dagger \right] \left[\frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) + K \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y}) \right] + J(\mathbf{q})^\dagger \left[\frac{d^2 \mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma^2} \dot{\sigma} \vartheta(\sigma) + \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\vartheta(\sigma)}{d\sigma} \dot{\sigma} \right] \\ &\quad + J(\mathbf{q})^\dagger K \left[\mathbf{e}_v^y(\sigma, \dot{\mathbf{y}}) - \mathbf{e}_p^y(\sigma, \mathbf{y})^T \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \right], \end{aligned} \quad (163)$$

donde $\dot{\sigma}$ denota el plan de movimiento extendido (151). La figura 72 muestra un diagrama de bloques del control jerárquico de ruta en coordenadas operacionales.

V.3 Lazo interno basado en dinámica inversa

El objetivo de esta sección es mostrar el uso del esquema de control de velocidad articular basado en dinámica inversa que ha sido utilizado para control jerárquico de movimiento y para control jerárquico por campo de velocidad. El controlador de velocidad en cuestión es reescrito de nueva cuenta a continuación:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i \boldsymbol{\xi}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad (164)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (165)$$

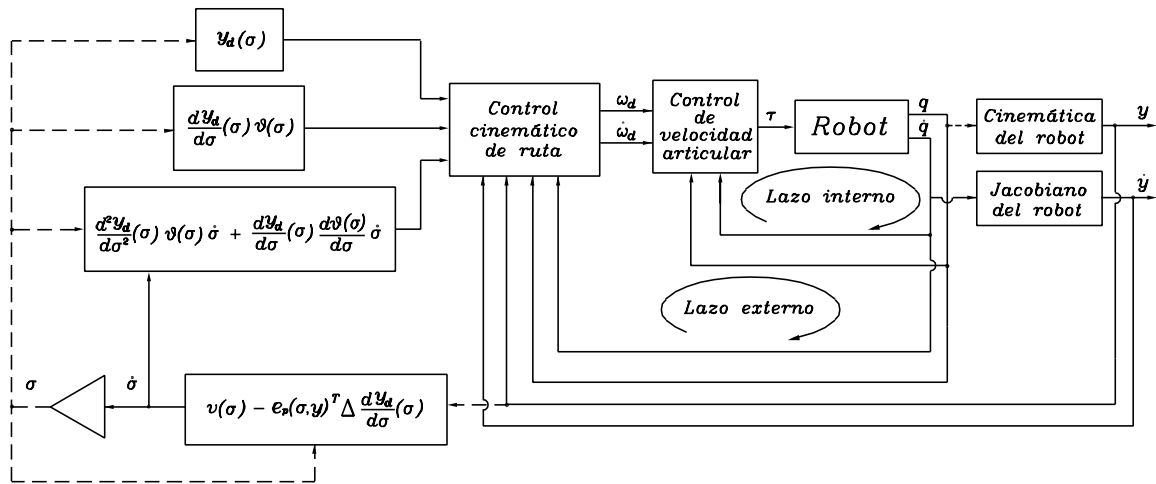


Figura 72: Control jerárquico de ruta en coordenadas operacionales usando el plan de movimiento extendido propuesto

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas de $n \times n$, $\tilde{\omega} = \omega_d - \dot{q}$ denota el error de velocidad, ω_d está dada por la ecuación (154), y $\dot{\omega}_d$ está expresada en la ecuación (163). La variable \hat{z} en el controlador (164)–(165) es una estimación del estado no medible z del modelo de fricción de Dahl (10)–(11). La dinámica de la variable \hat{z} que se propone es dada por el siguiente par de ecuaciones:

$$\dot{x} = -\Psi(\dot{q})\hat{z} + \dot{q} + K_0[K_v\tilde{\omega} + K_i\xi], \quad (166)$$

$$\dot{\hat{z}} = x + K_0\tilde{\omega}, \quad (167)$$

donde $K_0 = \text{diag}\{k_{01}, \dots, k_{0n}\}$ es una matriz simétrica definida positiva.

La ecuación de malla cerrada es obtenida sustituyendo al controlador (164)–(165) en la ecuación del robot (9), usando las ecuaciones (11) y (166)–(167) junto con la definición $\tilde{z} = \hat{z} - z$, que denota el error de observación del estado interno z , y considerando la ecuación (162), que denota la dinámica de $e_p^y(\sigma, y)$ y del parámetro σ .

Finalmente, la ecuación de malla cerrada puede ser expresada como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ -K_v \tilde{\omega} - K_i \xi - M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{z} \\ -\Psi(\boldsymbol{\omega}_d - \tilde{\omega}) \tilde{z} - K_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{z} \\ -K \mathbf{e}_p^y - \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} + J(\mathbf{q}) \tilde{\omega} \\ \vartheta(\sigma) - \mathbf{e}_p^{yT} K \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \end{bmatrix}. \quad (168)$$

La ecuación (168) representa un sistema autónomo. Para demostrar ésto, debe notarse que $\boldsymbol{\omega}_d$ y \mathbf{q} están relacionados con los estados del sistema de lazo cerrado (168) por medio de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_d &= J(\mathbf{q})^\dagger \left[\frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) + \Delta \mathbf{e}_p^y \right], \\ \mathbf{q} &= \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y}_d(\sigma) - \mathbf{e}_p^y), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})$ denota la cinemática inversa.

Para analizar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (168) se propone la siguiente función no negativa

$$V(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) = \frac{1}{2} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} + \frac{1}{2} \xi^T K_i \xi + \alpha \frac{1}{2} \tilde{z}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \tilde{z} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \mathbf{e}_p^y, \quad (169)$$

donde α es una constante estrictamente positiva.

La derivada temporal de (169) a lo largo de la trayectorias del sistema (168) es dada

por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) = & -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} - \alpha \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}} \\ & - \alpha \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{e}_p^{yT} \Delta K \mathbf{e}_p^y + \frac{1}{\alpha} \mathbf{e}_p^{yT} \Delta J(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \frac{1}{\alpha} \left[\mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \right]^2. \end{aligned}$$

Sin embargo, es posible obtener una cota superior sobre la derivada temporal de la función de Lyapunov $\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma)$ usando los hecho de que $\alpha \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}}$ y $\frac{1}{\alpha} \left[\mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \right]^2$ son funciones semidefinidas positivas. De esta forma

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) \leq \\ - \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \\ \|\mathbf{e}_p^y\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_v\} & -\frac{1}{2}b_0 & -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{2}b_1 \\ -\frac{1}{2}b_0 & \alpha\lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{2}b_1 & 0 & \frac{1}{\alpha}\lambda_m\{\Delta K\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{z}}\| \\ \|\mathbf{e}_p^y\| \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$b_0 = \sqrt{\lambda_M\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}}$$

y

$$b_1 = \sqrt{\lambda_M\{J(\mathbf{q})^T \Delta^2 J(\mathbf{q})\}}.$$

La derivada temporal $\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma)$ es semidefinida negativa si la matriz Q es definida positiva. Una condición suficiente para que Q sea definida positiva es que α satisfaga las siguientes desigualdades

$$\alpha > \frac{b_0}{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1}\Sigma_0\}},$$

y

$$\alpha > \frac{b_1^2 \lambda_m \{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\} + b_0^2 \lambda_m \{\Delta K\}}{4 \lambda_m \{\Delta K\} \lambda_m \{K_v\} \lambda_m \{\Sigma_0 M(\mathbf{q})^{-1} \Sigma_0\}},$$

las cuales pueden ser siempre satisfechas para cualquier $K, K_v, \Delta, \Sigma_0 > 0$. Debido a la autonomía del sistema (168), es posible invocar el principio de invariancia de LaSalle (Khalil, 1996) para analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de dicho sistema autónomo. Con este fin, es definido el conjunto

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \mathbf{e}_p^y = \mathbf{0}, \sigma \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

El siguiente paso en la aplicación del principio de invariancia de LaSalle es encontrar el conjunto invariante más grande en Ω . Se denota a S como al conjunto invariante más grande en Ω

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \text{ y } \sigma \in [s_0, \infty) \right\}.$$

Por lo tanto, de acuerdo al principio de invariancia de LaSalle, las soluciones del sistema de lazo cerrado (168) se aproximan a S cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier condición inicial

$[\xi(0)^T \tilde{\omega}(0)^T \tilde{z}(0)^T e_p^y(0)^T]^T$ y $\sigma(0)=s_0$. De esta forma es demostrado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \tilde{\omega}(t) \\ \tilde{z}(t) \\ e_p^y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (170)$$

Sin embargo, el hecho que se satisfaga (170) y la hipótesis de acotamiento del jacobiano (ver ecuación (18)) implican de la ecuación (161) que también se satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_v^y(t) = \mathbf{0}. \quad (171)$$

El hecho que se cumplan (170) y (171) implica que el objetivo de control de ruta en el espacio operacional (132) es satisfecho usando el control cinemático de ruta (154) junto con el controlador de velocidad basado en dinámica inversa (164)–(165), y el observador (166)–(167).

V.4 Lazo interno basado en PD con compensación

El controlador de velocidad basado en el control PD con compensación ha sido usado en el lazo interno para resolver el control jerárquico de movimiento y de campo de velocidad. Ahora dicho controlador junto con el control cinemático (154) será usado para resolver el control jerárquico de ruta. El controlador de velocidad articular propuesto es el siguiente:

$$\tau = M(\mathbf{q}) [\dot{\omega}_d + \Lambda \tilde{\omega}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\omega_d + \Lambda \xi] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v \tilde{\omega} + K_i \xi + F_v \dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 \tilde{z} \quad (172)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\omega} \quad (173)$$

donde K_i y K_v son matrices simétricas definidas positivas, $\Lambda = K_v^{-1} K_i$, la velocidad

articular deseada ω_d es dada en (154), la aceleración articular deseada $\dot{\omega}_d$ es definida en (163), y \hat{z} es la estimación del estado interno z del modelo de fricción (11)–(10). El observador del estado interno z que se propone para ser usado en el controlador (172)–(173) es dado por

$$\dot{\hat{z}} = -\Psi(\dot{q})\hat{z} + \omega_d + \Lambda\xi. \quad (174)$$

La ecuación de malla cerrada que resulta de usar el esquema de control jerárquico de ruta (154) y (172)–(173) en el sistema dado por las ecuaciones del robot (9) y (10)–(11), es dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \\ e_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ M(q)^{-1} [-C(q, \dot{q}) [\tilde{\omega} + \Lambda\xi] - K_v\tilde{\omega} - K_i\xi - \Sigma_0\tilde{z}] - \Lambda\tilde{\omega} \\ -\Psi(\dot{q})\tilde{z} + \tilde{\omega} + \Lambda\xi \\ -K e_p^y - e_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} + J(q)\tilde{\omega} \\ \vartheta(\sigma) - e_p^{yT} K \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \end{bmatrix} \quad (175)$$

donde $\tilde{z} = \hat{z} - z$ es el error de observación del estado interno z . La ecuación (175) es no lineal y autónoma.

Con el fin de demostrar el cumplimiento del objetivo de control de ruta, se propone la siguiente función no negativa

$$V(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}, e_p^y, \sigma) = \frac{1}{2} [\tilde{\omega} + \Lambda\xi]^T M(q) [\tilde{\omega} + \Lambda\xi] + \xi^T K_i \xi + \frac{1}{2} \tilde{z}^T \Sigma_0 \tilde{z} + \alpha e_p^{yT} \Delta e_p^y,$$

donde α es una constante estrictamente positiva. Usando la Propiedad 2 del modelo del robot (sección I.1.2), es posible demostrar que la derivada temporal de $V(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}, e_p^y, \sigma)$

está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) = & -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\xi}^T K_i K_v^{-1} K_i \boldsymbol{\xi} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}} \\ & - \alpha \mathbf{e}_p^{yT} \Delta K \mathbf{e}_p^y + \alpha \mathbf{e}_p^{yT} \Delta J(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \alpha \left[\mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \right]^2. \end{aligned}$$

Tomando una cota superior sobre la derivada de la función de Lyapunov se tiene

$$\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\boldsymbol{\xi}\| \\ \|\mathbf{e}_p^y\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_m\{K_v\} & 0 & -\alpha \frac{1}{2} b_1 \\ 0 & \lambda_m\{K_i K_v^{-1} K_i\} & 0 \\ -\alpha \frac{1}{2} b_1 & 0 & \alpha \lambda_m\{\Delta K\} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \\ \|\boldsymbol{\xi}\| \\ \|\mathbf{e}_p^y\| \end{bmatrix}, \quad (176)$$

donde $b_1 = \sqrt{\lambda_M\{J(\mathbf{q})^T K^2 J(\mathbf{q})\}}$. La matriz Q en (176) es definida positiva si y sólo si es satisfecha la siguiente desigualdad

$$\alpha < \frac{4\lambda_m\{K_v\}\lambda_m\{\Delta K\}}{b_1^2}.$$

Dado que siempre se puede escoger un α apropiado de modo que Q en (176) sea definida positiva, $\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma)$ es semidefinida negativa en forma global. El sistema de lazo cerrado (175) es autónomo, por lo que es posible invocar el principio de invariancia de LaSalle (Khalil, 1996) con el fin de demostrar el cumplimiento del objetivo de control de ruta. Con este fin, es definido el conjunto

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}, \mathbf{e}_p^y = \mathbf{0}, \sigma \in \mathbb{R} \right\}.$$

La aplicación del principio de invariancia de LaSalle requiere encontrar el conjunto invariante más grande en Ω . Se denota a S como al conjunto invariante más grande en Ω , que es dado en forma explícita como

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \text{ y } \sigma \in [s_0, \infty) \right\}.$$

Por lo tanto, de acuerdo al principio de invariancia de LaSalle, las soluciones del sistema de lazo cerrado (175) se aproximan a S cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier condición inicial $[\boldsymbol{\xi}(0)^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0)^T \tilde{\mathbf{z}}(0)^T \mathbf{e}_p^y(0)^T]^T$ y $\sigma(0)=s_0$. De esta forma es demostrado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ \tilde{\mathbf{z}}(t) \\ \mathbf{e}_p^y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (177)$$

Usando la ecuación (161), la hipótesis de acotamiento del jacobiano, y el cumplimiento del límite (177) se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_v^y(t) = \mathbf{0}. \quad (178)$$

De esta forma, el hecho de que se satisfaga que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p^y(t) \\ \mathbf{e}_v^y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

implica que el objetivo de control de ruta en el espacio operacional (132) es satisfecho usando el control cinemático de ruta (154) junto con el controlador de velocidad de velocidad articular basado en PD con compensación (172)–(173), y el observador (174).

V.5 Lazo interno basado en PD+

La propuesta de control de velocidad articular analizada en esta sección, para ser usada junto con el control cinemático (154), es el controlador de velocidad basado en control PD+ (59)–(61). Este controlador de velocidad es reescrito a continuación:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi} + F_v\dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0\hat{\mathbf{z}} \quad (179)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (180)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_d. \quad (181)$$

La ecuación de malla cerrada que resulta del uso del control jerárquico de ruta dado por las ecuaciones (154) y (179)–(181) es descrita por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -M(\mathbf{q})^{-1} [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_v\tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_i\boldsymbol{\xi}] \\ -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ -K\mathbf{e}_p^y - \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} + J(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \vartheta(\sigma) - \mathbf{e}_p^{yT} K \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \end{bmatrix}, \quad (182)$$

la cual es una ecuación no lineal y autónoma.

El objetivo del análisis de la ecuación de malla cerrada (182) es el de probar el

cumplimiento del límite (153) y de esta forma el objetivo de control de ruta en coordenadas operacionales (132). La aplicación del teorema de LaSalle requiere el uso de la siguiente función no negativa

$$V(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) = \alpha \frac{1}{2} \mathbf{e}_p^{yT} \Delta \mathbf{e}_p^y + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T K_i \boldsymbol{\xi} + \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \tilde{\mathbf{z}},$$

donde α es una constante estrictamente positiva. La derivada temporal de $V(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma)$ es dada por

$$\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) = -\alpha \mathbf{e}_p^{yT} \Delta K \mathbf{e}_p^y + \alpha \mathbf{e}_p^{yT} \Delta J(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \alpha \left[\mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \right]^2 - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}},$$

donde se ha usado la propiedad 2 del modelo del robot. Es posible obtener la siguiente cota superior sobre $\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma)$ usando el hecho de que $\tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_0 K_0^{-1} \Psi(\dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{z}}$ y $\alpha \left[\mathbf{e}_p^{yT} \Delta \frac{d\mathbf{y}_d(\sigma)}{d\sigma} \right]^2$ son funciones semidefinidas positivas:

$$\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma) \leq - \begin{bmatrix} \|\mathbf{e}_p^y\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \lambda_m \{ \Delta K \} & -\frac{1}{2} \alpha b_1 \\ -\frac{1}{2} \alpha b_1 & \lambda_m \{ K_v \} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\mathbf{e}_p^y\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \end{bmatrix}, \quad (183)$$

donde $b_1 = \sqrt{\lambda_M \{ J(\mathbf{q})^T \Delta^2 J(\mathbf{q}) \}}$. La matrix Q en (183) es definida postiva si y sólo si α satisface la siguiente condición

$$\alpha < \frac{4 \lambda_m \{ K_v \} \lambda_m \{ K \}}{b_1^2}.$$

Dado que siempre puede ser escogido un α apropiado, $\dot{V}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_p^y, \sigma)$ es definida negativa globalmente. Esta condición junto con el hecho de que el sistema de lazo cerrado (182) es autónomo, permite invocar el principio de invariancia de LaSalle (Khalil, 1996) con el fin de demostrar el cumplimiento del objetivo de control de ruta. Con este fin,

es definido el conjunto

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \\ e_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \dot{V}(\xi, \tilde{\omega}, \tilde{z}, e_p^y, \sigma) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \\ e_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \xi \in \mathbb{R}^n, \tilde{z} \in \mathbb{R}^n, \tilde{\omega} = \mathbf{0}, e_p^y = \mathbf{0}, \sigma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se denota a S como al conjunto invariante más grande en Ω :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \\ e_p^y \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m+1} : \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{\omega} \\ e_p^y \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tilde{z} \in \mathbb{R}^n, \text{ y } \sigma \in [s_0, \infty) \right\}.$$

De acuerdo al principio de invariancia de LaSalle (Khalil, 1996), las soluciones del sistema de lazo cerrado (182) se aproximan a S cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier condición inicial $[\xi(0)^T \tilde{\omega}(0)^T \tilde{z}(0)^T e_p^y(0)^T]^T$ y $\sigma(0)=s_0$. Lo anterior implica que el siguiente límite se satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \tilde{\omega}(t) \\ e_p^y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (184)$$

Usando la ecuación (161), la hipótesis de acotamiento del jacobiano, y el cumplimiento

del límite (184) se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_v^y(t) = \mathbf{0}.$$

Se ha demostrado que el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p^y(t) \\ \mathbf{e}_v^y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

se satisface. Esto implica que el objetivo de control de ruta en el espacio operacional (132) es satisfecho usando el control cinemático de ruta (154) junto con el controlador de velocidad articular basado en la estructura PD+ (179)–(180), y el observador (181).

V.6 Resultados experimentales

Al igual que la experimentación de los algoritmos de control de movimiento y de campo de velocidad, los experimentos realizados sobre control de ruta han sido realizados con el sistema experimental descrito en la apéndice A. Los controladores implementados son los que utilizan en el lazo interno de control de velocidad las estructuras tipo dinámica inversa y PD con compensación. Cabe señalar que la ganancia de control usado en el lazo externo de campo de velocidad (154) fue seleccionada con el valor numérico de

$$K = \text{diag}\{5.0, 5.0\} [1/\text{seg}].$$

El valor numérico de la ganancia del plan de movimiento extendido (151) fue de

$$\Delta = \text{diag}\{100.0, 100.0\} [1/\text{m}].$$

Al igual que los experimentos de control de movimiento y de campo de velocidad,

se calculó el error de contorno (Chiu y Tomizuka, 2001)

$$e_C(t) = r_0 - \sqrt{[y_1(t) - y_{c1}]^2 + [y_2(t) - y_{c2}]^2},$$

que en este trabajo es considerado como un índice de las prestaciones de los controladores implementados. Además se muestra el error de rapidez tangencial al círculo, definido por la diferencia entre la velocidad tangencial al círculo v_0 y la rapidez del extremo del manipulador $\|\dot{\mathbf{y}}\|$.

La evaluación experimental de los esquemas de control de ruta requiere la especificación de una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado. La ruta deseada es la siguiente

$$\mathbf{y}_d(s) = \begin{bmatrix} y_{1c} + r_0 \cos(sv_0/r_0) \\ y_{2c} + r_0 \text{sen}(sv_0/r_0) \end{bmatrix}, \quad s \in [0, \infty),$$

donde $y_{1c} = 0.26$ [m], $y_{2c} = 0.0$ [m], $v_0 = 0.65$ [m/seg], y $r_0 = 0.085$ [m]. El perfil de velocidad deseado es dado por

$$\vartheta(s) = 1.0 \quad \forall s \in [0, \infty),$$

Los experimentos mostrados fueron llevados a cabo usando la condición inicial $q_1(0) = 63.025$ [grad], $q_2(0) = 103.13$ [grad], y $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ [grad/seg].

V.6.1 Experimentos usando el lazo interno basado en dinámica inversa

Los experimentos que fueron llevados a cabo usando como lazo interno de control de velocidad la estructura de control de dinámica inversa consideraron tanto la compensación de fricción viscosa y de Coulomb, como compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

En primer lugar se implementó el controlador (64)–(65) que compensa la fricción

viscosa y de Coulomb, y en segundo lugar se implementó el controlador (164)–(167), que considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Las ganancias utilizadas en los controladores fueron

$$K_i = \text{diag}\{100.0, 400.0\} [1/\text{seg}^2],$$

$$K_v = \text{diag}\{15.0, 40.0\} [1/\text{seg}].$$

Para el observador (112)–(113) basado en el modelo de fricción de Dahl se usó

$$K_0 = \text{diag}\{0.0045, 0.0045\} [\text{seg}].$$

Los resultados de la implementación del control jerárquico de ruta dado por las ecuaciones (154) y el controlador de velocidad articular (64)–(65), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, son dados en la figura 73, que muestra el error de contorno, en la figura 74, que muestra el error de velocidad tangencial, y en la figura 75 que muestra la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas. Por otro lado, los resultados de usar el algoritmo (164)–(167) que basa la compensación de fricción en el modelo de Dahl, son mostrados en la figura 76, que muestra el error de contorno, en la figura 77, que muestra el error de velocidad tangencial, y finalmente en la figura 78, que muestra la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas.

En estado estacionario, el valor pico de el error de contorno es de 0.00285 [m] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y de 0.00181 [m] para la compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. La mejora del segundo con respecto al primero es de 36%. En lo que respecta al error de velocidad tangencial, el error pico máximo es de 0.21 [m/seg] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y de 0.166 [m/seg] para el compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, lo que resulta en una mejoría de 21% aproximadamente.

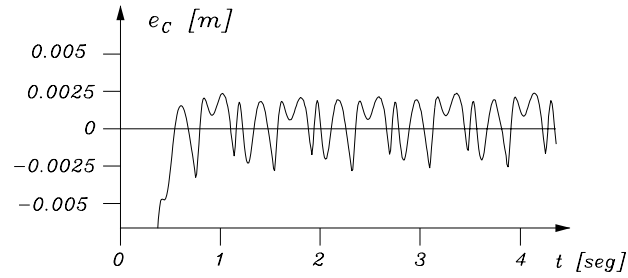


Figura 73: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de contorno

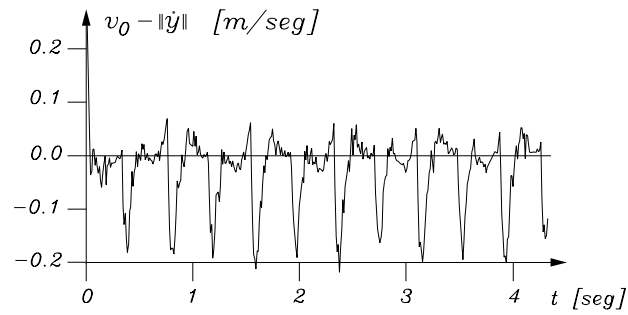


Figura 74: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Error de velocidad tangencial

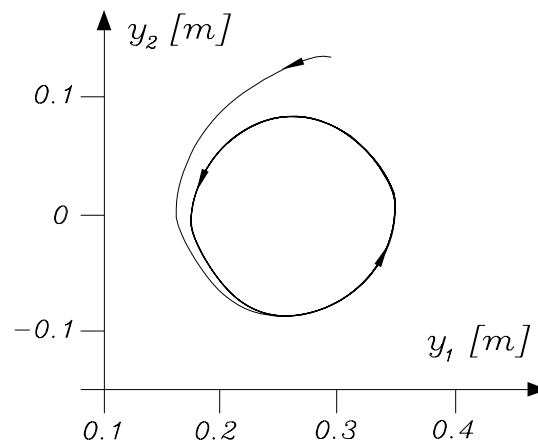


Figura 75: Dinámica inversa + compensación de fricción viscosa y de Coulomb: Ruta en el espacio operacional

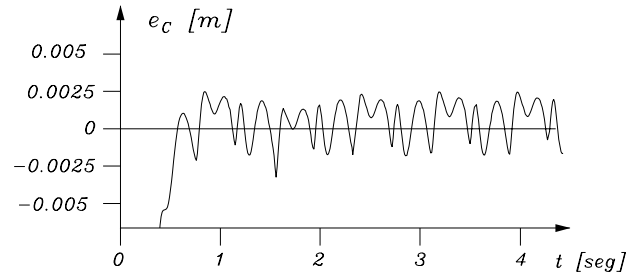


Figura 76: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl:
Error de contorno

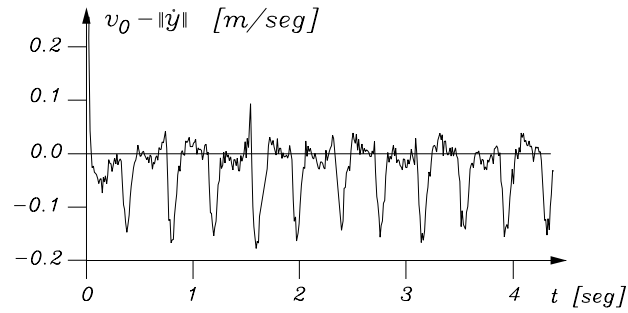


Figura 77: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl:
Error de velocidad tangencial

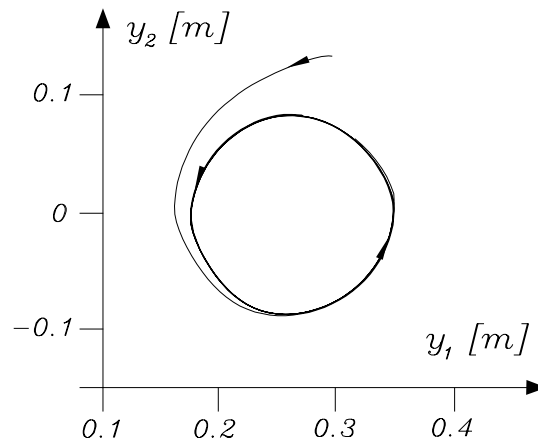


Figura 78: Dinámica inversa + compensación de fricción basada en modelo de Dahl:
Ruta en el espacio operacional

V.6.2 Experimentos usando el lazo interno basado en PD con compensación

Los controladores implementados con estructura PD con compensación en el lazo interno de control de velocidad articular son el controlador (66)–(67), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, y el controlador (172)–(174), en el cuál la compensación de fricción es basada en el modelo de Dahl. Las ganancias de los controladores fueron escogidas como

$$\begin{aligned} K_i &= \text{diag}\{10.0, 5.0\} \text{ [Nm/rad]}, \\ K_v &= \text{diag}\{5.0, 4.0\} \text{ [Nmseg/rad]}, \end{aligned}$$

lo que resulta en $\Lambda = K_v^{-1}K_i = \text{diag}\{2.0, 1.25\} \text{ [seg}^{-1}\text{]}$.

Para la implementación del controlador (66)–(67), que compensa fricción viscosa y de Coulomb, las figuras 79, 80 y 81 muestran el error de contorno, el error de velocidad tangencial, y la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas, respectivamente. Mientras que las figuras 82, 83 y 84, que muestran el error de contorno, el error de velocidad tangencial, y la ruta trazada por el manipulador en coordenadas cartesianas, respectivamente, corresponden a la implementación del controlador (172)–(174), donde la compensación de fricción es basada en el modelo de Dahl.

En estado estacionario, el valor pico de el error de contorno es de 0.0011 [m] para compensación de fricción viscosa y de Coulomb, y de 0.00094 [m] para la compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, i.e. una mejoría de 14.5% del segundo con respecto al primero. En lo que respecta al error de velocidad tangencial al círculo, los resultados son bastante similares entre las dos técnicas de compensación de fricción de fricción, lo que puede corroborarse al comparar las gráficas 80 y 83.

V.7 Conclusiones

En esta sección se ha presentado varios aspectos del problema de control de ruta en coordenadas operacionales. Las conclusiones sobre los resultados presentados en este tema pueden ser puntualizadas como sigue:

- Basándose en la especificación una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado se ha presentado una formulación del problema de control de ruta en coordenadas operacionales.
- Se proponen tres controladores para control de ruta en coordenadas operacionales. En forma específica, el problema de control de ruta en coordenadas operacionales considerando la presencia de fricción en las articulaciones del robot ha sido resuelto al proponer controladores basados en un algoritmo de control cinemático de ruta en conjunto con un controlador de velocidad articular que considera el uso de un observador de fricción fundamentado en el modelo de fricción de Dahl. De esta forma, los controladores propuestos tienen una estructura jerárquica.
- Se han realizados pruebas experimentales de control jerárquico de ruta utilizando en el lazo interno de control de velocidad articular compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Con fines de comparación, también se realizaron pruebas experimentales considerando el caso de compensación de fricción viscosa y de Coulomb en el lazo interno de control.
- Los resultados experimentales muestran que cuando se considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl se tienen mejores resultados en cuanto a la precisión de los movimientos realizados por el manipulador.

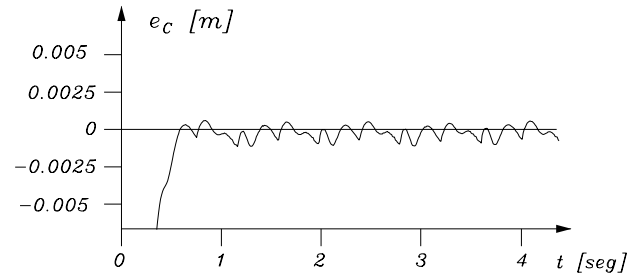


Figura 79: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb:
Error de contorno

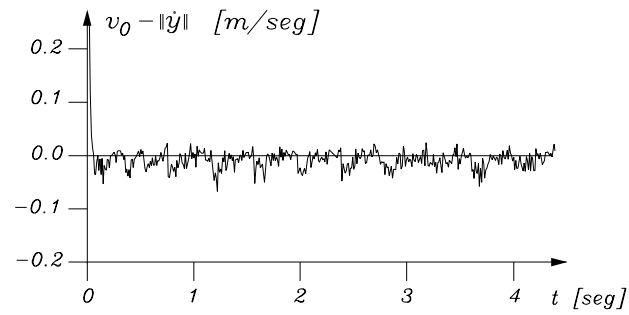


Figura 80: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb:
Error de velocidad tangencial

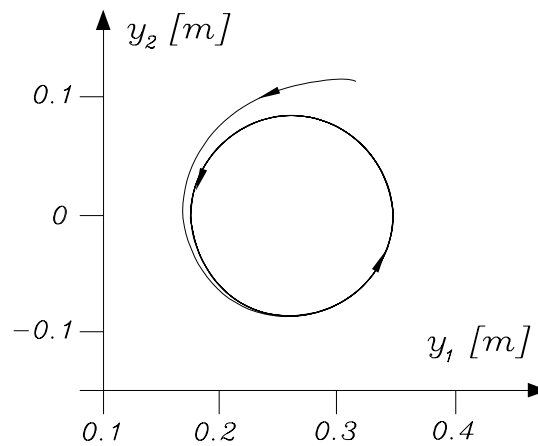


Figura 81: PD con compensación + compensación de fricción viscosa y de Coulomb:
Ruta en el espacio operacional

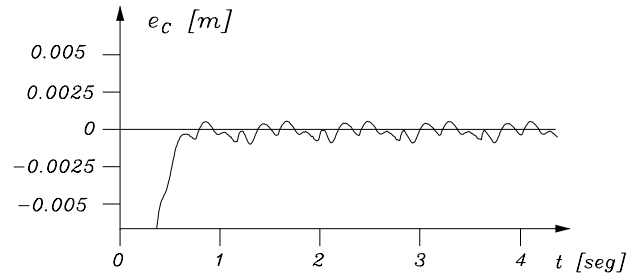


Figura 82: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de contorno

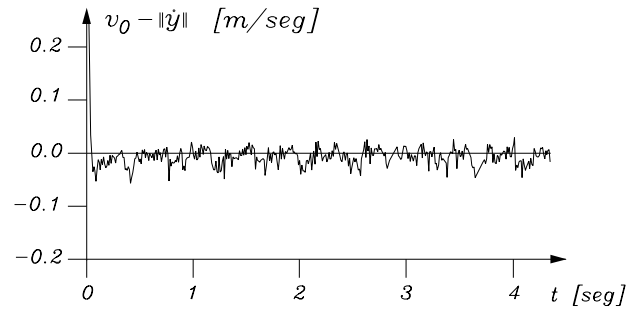


Figura 83: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Error de velocidad tangencial

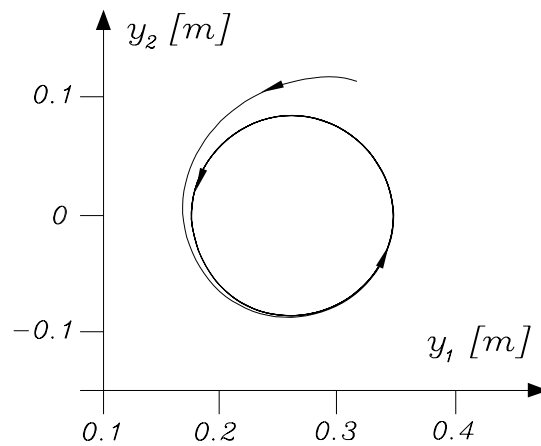


Figura 84: PD con compensación + compensación de fricción basada en modelo de Dahl: Ruta en el espacio operacional

VI Conclusiones

En esta tesis doctoral se presenta un estudio sobre controladores para robots manipuladores basados en dos lazos de retroalimentación. Más precisamente, los sistemas de control estudiados consisten en el uso de un lazo externo, cuyo diseño depende del objetivo de control a ser satisfecho, en forma adicional a un lazo interno de velocidad articular. Esta clase de sistemas de control se ha usado en manipuladores industriales, y en este trabajo es denominada control jerárquico. El trabajo presentado sobre control jerárquico consiste en el diseño de algoritmos de control con estructura de dos lazos de retroalimentación. Se consideró la dinámica completa del robot, incluyendo la fricción presente en las articulaciones. La ventaja de estos sistemas de control es que una vez diseñado el lazo interno de control (controlador de velocidad articular), el lazo externo puede ser diseñado en forma independiente al lazo interno. El lazo externo de control puede ser cambiado si el usuario lo determina. El diseño de controladores jerárquicos ha incluido los objetivos de control de movimiento, control por campo de velocidad y control de ruta. Los objetivos de control estudiados han sido especificados en el espacio de configuración operacional. También ha sido llevado a cabo trabajo experimental, al implementar controladores jerárquico para los objetivos de control estudiados en un robot de dos grados de libertad, comprobándose la factibilidad práctica de los esquemas de control propuestos. La metodología seguida para desarrollar este trabajo fue realizar un estudio sobre control de velocidad articular con compensación de fricción, tanto en servomecanismos como en robots manipuladores. En segunda instancia, con los resultados de los algoritmos de control de velocidad, se realizó la propuesta de controladores jerárquicos de movimiento, de controladores jerárquicos por campo de velocidad, y finalmente de controladores jerárquicos de ruta.

Con respecto al tema de control de velocidad articular con compensación de fricción se tienen las siguientes conclusiones:

- Se presentaron tres estructuras de control de velocidad.

- Para cada estructura de control de velocidad fue diseñado un observador basado en el modelo de fricción de Dahl.
- Los experimentos realizados en un robot de transmisión directa de dos grados de libertad mostraron que el considerar compensación de fricción basada en el modelo de Dahl mejora el desempeño en comparación a compensar la fricción viscosa y de Coulomb.

Las conclusiones con respecto al tema de control de jerárquico de movimiento son:

- El control jerárquico de movimiento es una alternativa a los controladores clásicos de movimiento reportados en la literatura que calculan las entradas de control en coordenadas operacionales o articulares.
- Una justificación teórica es realizada desarrollando un estudio de la estabilidad del sistema de lazo cerrado con el uso de cada uno de los controladores jerárquicos propuestos.
- Los resultados experimentales demostraron la efectividad de los controladores propuestos, comprobándose el objetivo de control de movimiento. El considerar compensación de fricción basada en el modelo de Dahl en lazo interno de velocidad articular mejora el desempeño en comparación a compensar la fricción viscosa y de Coulomb.

El tema de control por campo de velocidad fue abordado al proponer tres esquemas de control de jerárquico por campo de velocidad. Es posible puntualizar las siguientes ideas alrededor del estudio realizado en este tema.

- La estructura de control jerárquica por campo de velocidad consiste en un lazo externo de control cinemático por campo de velocidad que utiliza la especificación del campo de velocidad deseado y un lazo interno de velocidad articular que considera compensación de fricción.

- Los resultados experimentales muestran buenas prestaciones en el seguimiento del campo de velocidad deseado especificado en el espacio operacional. También se realizaron comparaciones entre métodos clásicos de compensación de fricción y compensación de fricción basada en el modelo de Dahl, donde los mejores resultados fueron obtenidos en este último caso.

Sobre el problema de control de ruta y su solución a través de una estructura de control jerárquica pueden generarse las siguientes conclusiones.

- Basándose en la especificación una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado se ha presentado una formulación del problema de control de ruta en coordenadas operacionales.
- En forma análoga al control de movimiento y control por campo de velocidad, se proponen tres controladores para resolver el problema de control de ruta en coordenadas operacionales, los cuales consideran compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.
- Se han realizados pruebas experimentales de control jerárquico de ruta utilizando en el lazo interno de control de velocidad articular compensación de fricción basada en los observadores propuestos. Los resultados experimentales muestran que cuando se considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl se tienen mejores resultados en cuanto a la precisión de los movimientos realizados por el manipulador.

VI.1 Trabajo futuro

En el tema de control de velocidad articular, la extensión más natural de los resultados presentados en este trabajo, es un estudio sobre control de velocidad articular con compensación de fricción pero a baja velocidad, en donde los efectos de implementación

discreta del controlador y estimación de la velocidad tienen un efecto drástico en el desempeño de los controladores. El uso de otros modelos de fricción más completos pudiera ser también tomado en cuenta.

En el tema de control por campo de velocidad, un problema que aún queda por estudiarse es la propuesta de algoritmos para la planificación de campos de velocidad. La relación que existe entre algunos planteamientos de control de contorno y campo de velocidad parece ser muy estrecha, por lo que el problema de planificación de campos de velocidad puede plantearse como un problema de control de ruta.

Por otro lado, en tema de control de ruta requiere de un mayor estudio con el fin de desarrollar una metodología completa para diseño de controladores de ruta. Otra extensión del tema de control de ruta es el estudio de controladores de velocidad de ruta, los cuales realizan un escalamiento en línea de trayectorias nominales codificadas por medio de una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado (Dahl y Nielsen, 1990; Dahl, 1992).

Finalmente, la solución de otros objetivos de control a través del uso de estructuras de control jerárquico considerando compensación de fricción en el lazo interno pudiera ser estudiada. Por su importancia, la aplicación podría ser hecha al control de robots en coordenadas de visión y al control de fuerza.

Literatura Citada

- Abdallah C., Dawson D.M., Dorato P. y Jamshidi M. 1991. "Survey of robust control for rigid robots", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 11, No. 2, February, pp. 24–30.
- Aicardi M., Caiti A., Cannata G. y G. Casalino. 1995. "Stability and robustness analysis of a two layered hierarchical architecture for a closed loop control of robots in the operation space", *Proc. of the IEEE ICRA*, pp. 2771–2778.
- Amin J., Friedland B. y A. Harnoy. 1997. "Implementation of a friction estimation and compensation technique" *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 17, No. 4, pp. 71–76.
- Armstrong-Hélouvry B., Dupont P. and C. Canudas de Wit. 1994. "A survey of analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction", *Automatica*, Vol. 30, No. 7, pp. 1083–1138.
- Arnold V.I. 1973. *Ordinary differential equations*, MIT Press, Cambridge, 273 p.
- Barabanov N. y R. Ortega. 2000. "Necessary and sufficient conditions for passivity of the LuGre friction model", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 45, No. 4, pp. 830–832.
- Canudas de Wit C. 1998. "Comments on 'A new model for control of systems with friction'". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 43, No. 8, pp. 1189–1190.

- Canudas de Wit C., Olsson H., Åström K. J. and P. Lichinsky. 1995. “A new model for control of systems with friction”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 40, No. 3, pp. 419–425.
- Canudas C., Siciliano B. y G. Bastin (eds.) 1996. *Theory of robot control*, Springer-Verlag, London, 392 pp.
- Chiu G. T.-C. y M. Tomizuka. 2001. “Contouring control of machine tool feed drive systems: A task coordinate frame approach”, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 9, No. 1, pp. 130–139.
- Dahl P.R. 1976. “Solid friction damping of mechanical vibrations”, *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 12, pp. 1675–1682.
- Dahl O. 1992. *Path constrained robot control*, Ph.D. dissertation, Lund Institute of Technology, Sweden, 177 p.
- Dahl O. y L. Nielsen. 1990. “Torque limited path following by on-line trajectory time scaling”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 5, pp. 554–561.
- De Carli A., Cong S. and D. Maccioni. 1994. “Dynamic friction compensation in servodrives”, *Proc. of the 3th IEEE Conference on Control Applications*, pp. 193–198.
- De Jager B. and J. Banens. 1994. “Experimental evaluations of robot controllers” In *Proc. of the 33rd. Conference on Decision and Control*, pp. 363–368.

- De Queiroz M.S., D.M. Dawson, S.P. Nagarkatti, F. Zhang. 2000. *Lyapunov-based control of mechanical systems*, Birkhauser, Boston, 315 pp.
- Dorf R. D. y R.H. Bishop. 1998. *Modern control systems*, 8th ed., Addison–Wesley, Menlo Park, 855 p.
- Hollerbach J.M. 1984. “Dynamic scaling of manipulator trajectories”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 106, March, pp. 102–106.
- Jaritz A. y M. Spong. 1996. “An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator” *IEEE Trans. Control Systems Technology*, Vol. 4, No. 6, pp. 627–640.
- Kelly R., Llamas J. Campa R. 2000. “A measurement procedure for viscous and Coulomb friction, *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, Vol. 49, No. 4, pp. 857–861.
- Kelly R. 1995. *Control de Movimiento de robots manipuladores*, CICESE, Ensenada, B.C., Mexico. 451 pp.
- Kelly R., Reyes F., Moreno J. y S. Hutchinson. 1999. “A two loops direct visual control of direct-drive planar robots with moving target”, *Proc. of the IEEE International Conferences in Robotics and Automation*, Detroit, May., pp. 599–604.
- Khalil H. 1996. *Nonlinear systems*, Macmillan, New York, NY. 734 pp.

- Koditschek, D. 1984. Natural motion for robot arms, *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, NV, pp. 733–735.
- Kuo B C. 1987. *Automatic control systems*, 5th ed., Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 797 p.
- Lewis F.L., Abdallah C.T. y Dawson, D.M. 1993. *Control of robot manipulators*, Macmillan, New York, 425 p.
- Li P.Y. 1999. “Coordinated contour following control for machining operations – A survey”, *Proc. of the American Control Conference*, San Diego, pp. 4543–4547.
- Li P.Y. y Horowitz, R. 2001a. “Passive velocity field control (PVFC): Part I–Geometry and robustness”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 46, No. 9, pp. 1346–1359.
- Li P.Y. and Horowitz, R. 2001b. “Passive velocity field control (PVFC): Part II–Application to contour following”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 46, No. 9, pp. 1360–1371.
- Marsden J. y A. Tromba. 1988. *Vector calculus*, W. H. Freeman and Company, New York, NY. 664 pp.
- Moreno J. y R. Kelly. 2002a. “On motor velocity control by using only position measurements: two case studies”, *International Journal of Electrical Engineering Education*, Vol. 39, No. 2, pp. 118–127.

- Moreno J. y R. Kelly. 2002b. “Robotic tasks using path control: two case studies”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 35, No. 1, September, pp. 41–59.
- Moreno J., Kelly R. y R. Campa. 2002. “On manipulator velocity control using friction compensation”, *Proc. of the IEEE International Conferences in Robotics and Automation*, Washington, May., pp. 3417–3422.
- Nakamura M., Munasinghe S.R., Goto S. y N. Kyura. 2000. “Enhanced contour control of SCARA under torque saturation constraint”, *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, Vol. 5, No. 4, pp. 437–440.
- Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J. and H. Sira-Ramírez. 1998. *Passivity-based control of Euler-Lagrange Systems*, Springer-Verlag, London, 543 p.
- Pfeiffer F. and R. Johanni 1987. “A concept for manipulator trajectory planning”, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, pp. 115–123.
- Reyes F. 1997. *Control de un robot de 2 grados de libertad de transmisión directa*, tesis doctoral, CICESE, Ensenada, BC., Mex. 156 pp.
- Reyes F. y R. Kelly. 1997. “Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot”, *Robotica*, Vol. 15. pp. 563-571.
- Reyes F. y R. Kelly. 2001. “Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm”, *Mechatronics*, Vol. 11, pp. 267–282.

- Sage H.G., De Mathelin M.F. y E. Ostertag. 1999. “Robust control of manipulators: a survey”, *International Journal of Control*, Vol. 72, No. 16, pp. 1498–1522.
- Sastry S. 1999. *Nonlinear systems*, Springer, New York, 667 p.
- Sciavicco L. y B. Siciliano, 2000. *Modelling and control of robot manipulators*, Springer–Verlag, London, 377 p.
- SIMNON for Windows, Version 2.0*. 1995. SSPA Maritime Consulting AB, Sweden.
- Slotine J.J. y W. Li. 1991. *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 410 p.
- Spong M., R. Ortega and R. Kelly. 1990. Comments on “Adaptive manipulator control: A case of study”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **35**, June, 761–762.
- Spong M. y M. Vidyasagar. 1989. *Robot dynamics and control*, John Wiley and Sons, New York, 336 p.
- Sciavicco L. y B. Siciliano. 2000. *Modeling and control of robot manipulators*, Springer–Verlag, London, 377 p.
- Swevers J., Al–Bender F., Ganseman C.G. y T. Prajogo. 2000. “An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 45, No. 4, pp. 675–685.
- Tarn T. J. , N. Xi and A. K. Bejczy. 1996. “Path–based approach to integrated planning and control of robotic manipulators”, *Automatica*, vol. 32, no. 12, pp. 1675–1687.

- Vedagarbha P., D.M. Dawson y M. Feemster. 1999. Tracking control of mechanical systems in the presence of nonlinear dynamic friction effects *IEEE Transactions on Control Systems Technology* Vol. 7, No. 4, July, pp. 446–456,
- Vidyasagar M. 1993. *Nonlinear systems analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 302 p.
- Xi N. y T. J. Tarn. 1999. “Sensor-based planning and control for robotic systems: An event-based approach”, in B. K. Ghosh, N. Xi and T. J. Tarn (Eds.), *Control in robotics and automation*, Academic Press, San Diego, pp. 3–55.

Apéndices

A Robot experimental de 2 grados de libertad

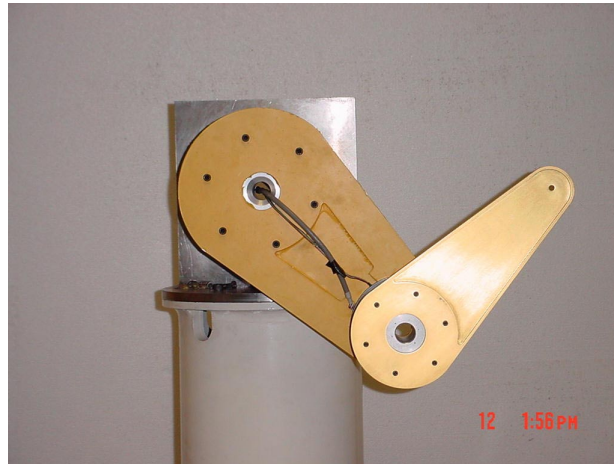


Figura 85: Robot Manipulador

El sistema en el que se desarrollaron los experimentos mostrados en este trabajo de tesis consiste de un robot dos grados de libertad de transmisión directa y de articulaciones rotacionales. Dicho mecanismo se muestra en la figura 85. Este sistema experimental se encuentra disponible en el Laboratorio de Robótica del CICESE para el desarrollo y validación de algoritmos de control

El robot manipulador está equipado con sensores de posición para medir los desplazamientos articulares q_1 y q_2 de cada eslabón, y servo actuadores para manejar cada articulación a través de los pares aplicados τ_1 y τ_2 . Estos son generados por un algoritmo de control que se ejecuta en una tarjeta basada en un procesador digital de señales instalada dentro de una computadora 486DX2 y un ambiente de programación que genera una interfaz amigable al usuario con las herramientas necesarias para la implementación de algoritmos de control. El periodo de ejecución de los controladores

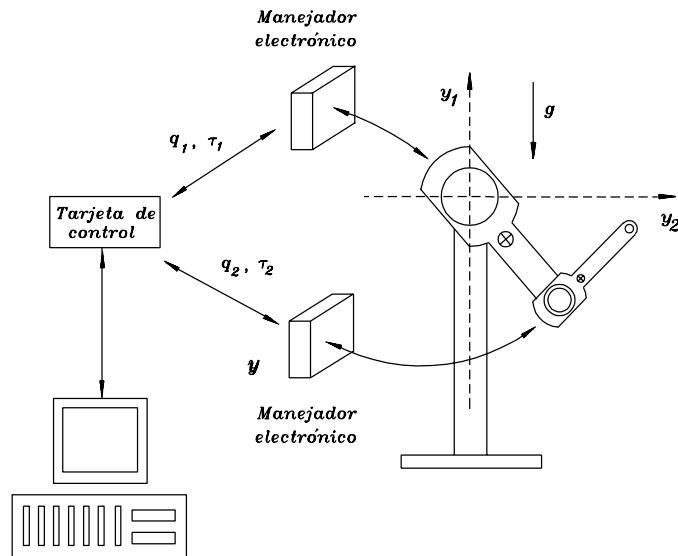


Figura 86: Esquema de componentes del sistema experimental

implementados fue de 1 [mseg]. La figura 86 muestra el esquema de componentes que integran al brazo mecánico experimental.

El brazo mecánico consiste de dos eslabones rígidos fabricados de aluminio 6061. Los servo motores utilizados en la articulación del hombro y codo, son los modelos DM1015-B y DM1004-C, respectivamente, de la compañía Parker Compumotor. Los manejadores electrónicos de los motores operan en modo par aceptando un voltaje analógico como referencia de la señal de par. De esta forma los motores actúan como una fuente ideal de par. La información de la posición articular del robot manipulador es obtenida a través de codificadores ópticos incrementales localizados en los motores. La información de la velocidad articular es obtenida mediante el algoritmo de Euler, a través de la diferenciación numérica de la posición articular.

Se ha logrado identificar completamente todas las constantes dinámicas y cinemáticas

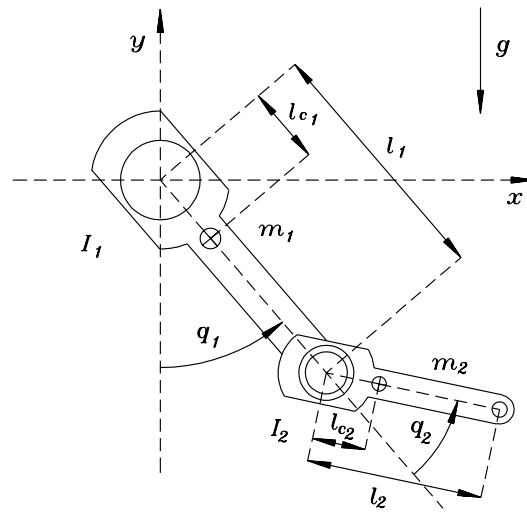


Figura 87: Robot Manipulador

Tabla VII: Valores numéricos de los parámetros cinemáticos y dinámicos del robot experimental.

Descripción del parámetro	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.26	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.26	m
Masa del eslabón 1	m_1	6.5225	Kg
Masa del eslabón 2	m_2	2.0458	Kg
Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}	0.0983	m
Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}	0.0229	m
Inercia del eslabón 1	I_1	0.1213	Kg m ²
Inercia del eslabón 2	I_2	0.0116	Kg m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/seg ²

asociadas al modelo dinámico de dicho robot y se presentan en la tabla VII⁷. En la figura 87 se encuentra ilustrado el significado físico de los parámetros presentados en la tabla VII.

El origen del plano cartesiano está en el eje de rotación de la primera articulación

⁷Es importante reconocer que el trabajo de identificación de los parámetros del modelo dinámico, incluyendo los parámetros del modelo de fricción, fue llevado a cabo por Ricardo Campa.

(hombro), donde y_1 denota el eje horizontal y y_2 denota el eje vertical. Ver la figura 87. De esta forma se obtiene el modelo cinemático siguiente:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

El jacobiano analítico $J(\mathbf{q})$ puede calcularse usando usando la siguiente relacion:

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

Para el robot experimental de dos grados de libertad es posible escribir la matriz de inercia, la matriz de Coriolis, y del vector de pares gravitacionales, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}, \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -2\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \theta_4 \sin(q_1) + \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + I_1 + I_2,$$

$$\theta_2 = m_2 l_1 l_{c2},$$

$$\theta_3 = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$\theta_4 = g(m_1 l_{c1} + m_2 l_1),$$

$$\theta_5 = g m_2 l_{c2}.$$

Incorporando los valores numéricos de la tabla VII, tenemos que las matrices de inercia y de Coriolis y el vector pares gravitacionales son expresados por:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0.3353 + 0.02436\cos(q_2) & 0.01267 + 0.01218\cos(q_2) \\ 0.01267 + 0.01218\cos(q_2) & 0.01267 \end{bmatrix} \text{ [Nm seg}^2\text{/rad]}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -0.01218\text{sen}(q_2)\dot{q}_2 & -0.01218\text{sen}(q_2)\dot{q}_1 - 0.01218\text{sen}(q_2)\dot{q}_2 \\ 0.01218\text{sen}(q_2)\dot{q}_1 & 0.0 \end{bmatrix} \text{ [Nm seg/rad]}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = g \begin{bmatrix} 1.1731\text{sen}(q_1) + 0.04685\text{sen}(q_1 + q_2) \\ 0.04685\text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \text{ [Nm]}$$

donde $g=9.81$ [m/seg²].

Utilizando los procedimientos expuestos por Kelly *et al.* (2000), se han estimado los

siguientes valores para los parámetros de modelo de fricción de Dahl del robot:

$$\sigma_{0_1} = 1757 \quad [\text{Nm/rad}], \quad \sigma_{0_2} = 2764 \quad [\text{Nm/rad}],$$

$$f_{C_1} = 1.29 \quad [\text{Nm}], \quad f_{C_2} = 0.965 \quad [\text{Nm}],$$

$$f_{v_1} = 0.2741 \quad [\text{Nm seg/rad}], \quad f_{v_2} = 0.1713 \quad [\text{Nm seg/rad}],$$

para las articulaciones 1 y 2 respectivamente.

B Control de ruta en coordenadas articulares

Parte de los resultados presentados en este apéndice se encuentran reportados en Moreno y Kelly (2002b).

En este apéndice se supone que la dinámica de un robot manipulador de n articulaciones es descrito por

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (185)$$

donde $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ llamada *matriz de inercia*, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times n$ llamada *matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis*, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de $n \times 1$ llamado *vector de pares y fuerzas gravitacionales*, $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$ es un vector de $n \times 1$ que representa el par debido a la fricción, y $\boldsymbol{\tau}$ es un vector de $n \times 1$ llamado *vector de fuerzas externas*, siendo este último los pares y fuerzas aplicados por los actuadores en las articulaciones.

B.1 Codificación de tareas y objetivo de control de ruta

En esta sección se describen algunos conceptos concernientes al problema de control de ruta. Los conceptos expuestos aquí son la adecuación de los presentados en la sección V.1.1, en donde se describe la codificación de tareas y objetivo de control de ruta en coordenadas operacionales.

Definición (ruta deseada). Una ruta deseada en el espacio de configuración articular es dada por la función (Marsden y Tromba, 1988)

$$\mathbf{q}_d(s) : [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (186)$$

donde $s \in [s_0, \infty)$ es llamado parámetro de ruta y s_0 es una constante real. La imagen de $\mathbf{q}_d(s)$ es llamada curva de $\mathbf{q}_d(s)$ en el espacio de configuración articular. Se supone que $\mathbf{q}_d(s)$ es dos veces continuamente diferenciable.

• • •

Definición (perfil de velocidad deseado). El perfil de velocidad deseado es definido por la función (Dahl y Nielsen, 1990)

$$\vartheta(s) : [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad (187)$$

donde s_0 es una constante real. Se asume que $\vartheta(s)$ es continua y diferenciable, además de que satisface

$$\inf_{s \in [s_0, \infty)} \vartheta(s) = \vartheta_0 > 0, \quad (188)$$

donde ϑ_0 es una constante estrictamente positiva.

• • •

Definición (Objetivo de control de ruta). El objetivo de control de ruta en

coordenadas articulares es definido como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}, \Gamma \right) = 0, \quad (189)$$

donde el conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^{2n}$ definido en el espacio de estados es dado por

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{q} = \mathbf{q}_d(s) \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}_d(s)}{ds} \vartheta(s); \quad \forall s \in [s_0, \infty) \right\}, \quad (190)$$

donde $\text{dist}(\mathbf{x}, A)$ denota la distancia más pequeña entre el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ y un punto del conjunto $A \subset \mathbb{R}^{2n}$, i.e.

$$\text{dist}(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{p} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|.$$

• • •

Definición (plan de movimiento). El perfil de velocidad $\vartheta(s)$ en (187) define un plan de movimiento a través de la siguiente ecuación diferencial (Tarn *et al.*, 1996)

$$\dot{s} = \vartheta(s), \quad s(t_0) = s_0. \quad (191)$$

• • •

Usando el plan de movimiento definido en la ecuación (191) es posible calcular la

derivada temporal de $\mathbf{q}_d(s)$, la cuál es dada por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q}_d(s) = \frac{d\mathbf{q}_d(s)}{ds}\vartheta(s). \quad (192)$$

La función (192) depende del parámetro de ruta s . De esta forma, el conjunto Γ en (190) define la posición y velocidad deseada en el espacio de estado a través de dos funciones vectoriales, $\mathbf{q}_d(s)$ en (186) y $\frac{d}{dt}\mathbf{q}_d(s)$ en (192), que dependen del parámetro de ruta s .

La solución $s(t)$ del plan de movimiento (191) tiene las siguientes propiedades

P1. $s(t)$ es una función estrictamente creciente.

P2. $s(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La demostración de las propiedades P1 y P2 ha sido planteada en la sección V.1.1.

Es importante notar que la derivada temporal de la ruta deseada $\mathbf{q}_d(s)$ puede ser calculada usando la definición de plan de movimiento (191), es decir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q}_d(s) = \frac{d\mathbf{q}_d(s)}{ds}\dot{s} = \frac{d\mathbf{q}_d(s)}{ds}\vartheta(s), \quad (193)$$

La expresión del lado derecho de la ecuación (193) es usada en la definición de (190), y determina la velocidad deseada en el espacio operacional en función del parámetro de ruta s . Por lo tanto, el conjunto Γ en (190) especifica la posición y la velocidad deseada

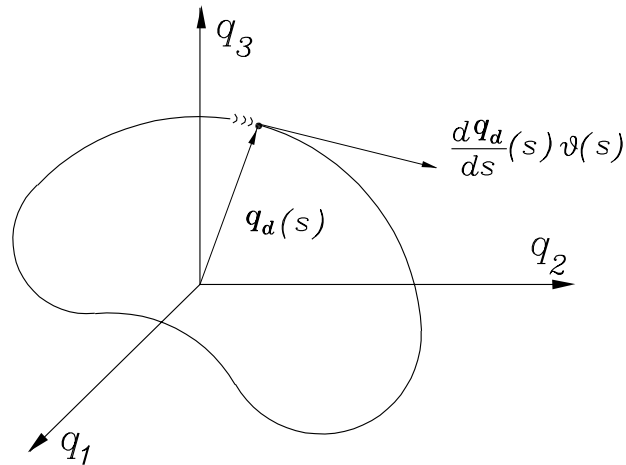


Figura 88: Movimiento en función del parámetro de ruta s

como una función del parámetro de ruta s .

Del hecho de que el vector $\frac{d\mathbf{q}_d(s)}{ds}\vartheta(s)$ defina un vector tangente para cada punto de la curva definida por la ruta deseada $\mathbf{q}_d(s)$, la especificación del perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$ tiene efecto en la rapidez de la ruta definida por

$$\left\| \frac{d\mathbf{q}_d(s)}{ds}\vartheta(s) \right\|.$$

Debe ser observado que si s denota la longitud de arco de la curva definida por $\mathbf{q}_d(s)$, entonces la rapidez de la ruta es dada por $\vartheta(s)$ (Marsden y Tromba, 1988). La figura 88 describe la curva representada por la ruta deseada $\mathbf{y}_d(s) \in \mathbb{R}^3$ y el vector velocidad descrito por $\frac{d\mathbf{q}_d(s)}{ds}\vartheta(s)$.

El cálculo de un perfil de velocidad $\vartheta(s)$ es usualmente llevado a cabo empleando un algoritmo de planificación de trayectorias. Tal como es indicado por el plan de

movimiento (134), el perfil de velocidad $\vartheta(s)$ representa la relación entre $s(t)$ y $\dot{s}(t)$ (Dahl y Nielsen, 1990). No obstante, algunas veces el cálculo del perfil de velocidad $\vartheta(s)$ es llevado a cabo como un problema de programación dinámica (ver e.g. Pfeiffer y Johanni (1987) para revisar la técnica de optimización en el plano de fase —*phase-plane optimization technique*— para planificación de trayectorias de tiempo mínimo). Por otro lado, también basado en técnicas de optimización, en Tarn *et al.* (1996) es propuesto un método para planificar perfiles de velocidad a través de restricciones de velocidad y aceleración.

A través de la especificación de una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado puede obtenerse trayectorias nominales de posición denotadas como $\mathbf{q}_r(t)$. Más precisamente, una trayectoria nominal es dada por

$$\mathbf{q}_r(t) = \mathbf{q}_d(s(t)),$$

donde $s(t)$ resulta de resolver el plan de movimiento (191). De esta forma se demuestra que usando la especificación de una ruta deseada y un perfil de velocidad deseado pueden ser codificadas muchas tareas robóticas que son típicamente expresadas por medio de trayectorias que dependen del tiempo. En la sección V.1.1 se muestran un par de ejemplos de la obtención de trayectorias nominales que pueden ser aplicados a coordenadas articulares.

B.2 Controlador de ruta basado en Dahl y Nielsen (1990)

La filosofía de *control de velocidad de ruta* (Dahl y Nielsen, 1990) es una metodología para resolver el control robusto de manipuladores con entrada de par acotada a través del escalamiento de trayectorias. La metodología propuesta por Dahl y Nielsen (1990) es basada en modificar el perfil de velocidad deseado para escalar en tiempo la trayectoria nominal que se genera con el perfil de velocidad deseado.

La metodología estudiada en Dahl y Nielsen (1990) tiene como especificaciones una ruta deseada $\mathbf{q}_d(s)$ y un perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$. Suponiendo que todos los parámetros del modelo del robot son conocidos, y despreciando la suposición de entrada de par acotada, es posible obtener de los algoritmos introducidos en Dahl y Nielsen (1990) el siguiente controlador de ruta.

Considere las siguientes variables

$$\mathbf{e}_p(\sigma(t), \mathbf{q}(t)) = \mathbf{q}_d(\sigma(t)) - \mathbf{q}(t), \quad (194)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_p(\sigma(t), \dot{\sigma}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma(t))}{d\sigma} \dot{\sigma}(t) - \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (195)$$

donde σ es un nuevo parámetro de ruta que es obtenido del siguiente plan de movimiento extendido dado por el sistema autónomo

$$\ddot{\sigma} = \frac{d\vartheta(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) + \frac{\alpha}{2} [\vartheta(\sigma)^2 - \dot{\sigma}^2], \quad (196)$$

con α una constante estrictamente positiva. El plan de movimiento extendido (196) resulta ser un caso particular del algoritmo original introducido en (Dahl y Nielsen, 1990). El siguiente lema concierne a la solución del plan de movimiento extendido (196).

Lema. Si las condiciones iniciales del sistema (196) satisfacen

$$\sigma(0) \in [s_0, \infty), \quad \text{y} \quad \dot{\sigma}(0) > \vartheta(\sigma(0)) > 0, \quad (197)$$

entonces

- $\sigma(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$,
- $\dot{\sigma}(t) \rightarrow \vartheta(\sigma(t))$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Prueba. Defina

$$\phi(\sigma) = \sqrt{\vartheta(\sigma)^2 + k_1 e^{-\alpha[\sigma - k_2]}} \quad \forall \sigma \in [s_0, \infty), \quad (198)$$

donde α y k_1 son constantes estrictamente positivas, k_2 es una constante real. Debido a que $\vartheta(\sigma) \geq \vartheta_0 \neq 0$ (ver (188)) se tiene que

$$\phi(\sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \in [s_0, \infty). \quad (199)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{\sigma} = \phi(\sigma) \quad \forall \sigma \in [s_0, \infty). \quad (200)$$

Diferenciando (200) con respecto al tiempo, se tiene

$$\ddot{\sigma} = \frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} \dot{\sigma} = \frac{2 \frac{d\vartheta(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) \dot{\sigma} - k_1 \alpha \dot{\sigma} e^{-\alpha[\sigma - k_2]}}{2\phi(\sigma)}. \quad (201)$$

Usando el hecho que $\phi(\sigma) \neq 0$ para todo $\sigma \in [s_0, \infty)$, y la ecuación (200), es posible reescribir (201) como

$$\ddot{\sigma} = \frac{d\vartheta(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) - \frac{1}{2} k_1 \alpha e^{-\alpha[\sigma - k_2]}. \quad (202)$$

Además, es posible obtener de (198) y (200) la siguiente ecuación

$$k_1 \alpha e^{-\alpha[\sigma - k_2]} = -\vartheta(\sigma)^2 + \dot{\sigma}^2.$$

Esta relación puede sustituirse en la ecuación (202) para obtener

$$\ddot{\sigma} = \frac{d\vartheta(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) + \frac{\alpha}{2} [\vartheta(\sigma)^2 - \dot{\sigma}^2],$$

que corresponde a (196). Por lo tanto, el sistema (200) coincide con la dinámica descrita por el plan de movimiento extendido (196).

Considerando las condiciones iniciales (197) para el plan de movimiento (196), y en consistencia con el sistema (199) y (200), se concluye que $\dot{\sigma}(t) \geq \vartheta_0 > 0$ para todo $t \geq 0$. Este resultado implica que $\sigma(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Además, en virtud de (198) y de que $\sigma(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, finalmente se tiene que $\phi(\sigma(t)) \rightarrow \vartheta(\sigma(t))$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que $\dot{\sigma}(t) \rightarrow \vartheta(\sigma(t))$ cuando $t \rightarrow \infty$.

▽▽▽

Es importante observar de las ecuaciones (194)–(195) que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{0} &\implies \mathbf{q} = \mathbf{q}_d(\sigma), \\ \dot{\mathbf{e}}_p(\sigma, \dot{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} &\implies \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}_d}{d\sigma}(\sigma)\dot{\sigma}. \end{aligned} \quad (203)$$

Como consecuencia de (203), y considerando que $\dot{\sigma} = \vartheta(\sigma)$ con $\sigma(0) = s_0$, se tiene que $\sigma(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces el conjunto Γ definido en (190) puede ser reescrito como

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{e}}_p(\sigma, \dot{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \text{ con } \dot{\sigma} = \vartheta(\sigma), \sigma(0) = s_0 \right\}. \quad (204)$$

Por lo tanto, el objetivo de control de ruta (189) es satisfecho si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p(\sigma(t), \mathbf{q}(t)) \\ \dot{\mathbf{e}}_p(\sigma(t), \dot{\sigma}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (205)$$

Esto puede ser concluido ya que el lema enunciado antes proporciona condiciones su-

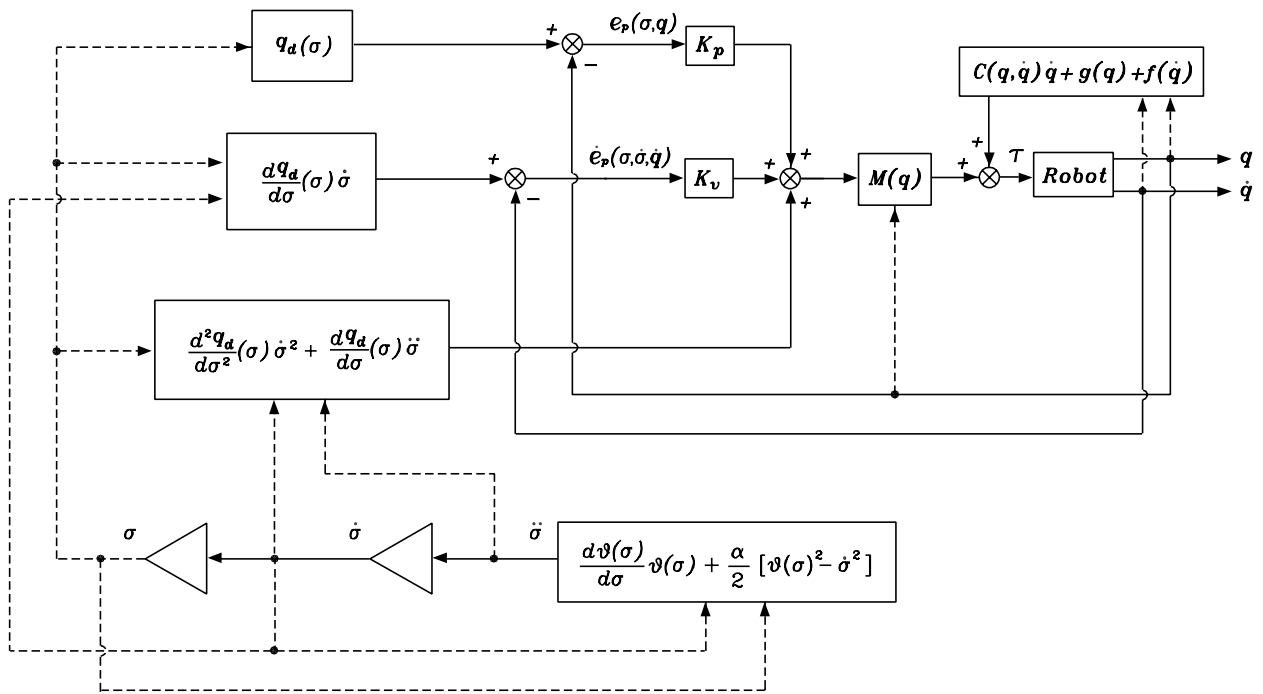


Figura 89: Diagrama de bloques del controlador de ruta

ficientes para $\sigma(t) \rightarrow \infty$ y $\dot{\sigma}(t) \rightarrow \vartheta(\sigma(t))$ cuando el tiempo incrementa. Si el límite (205) es satisfecho con $\sigma(t)$ obtenido de (196) y condiciones iniciales (197), entonces el vector $[\mathbf{q}(t)^T \ \dot{\mathbf{q}}(t)^T]^T$ converge al conjunto Γ en (204). De aquí que el objetivo de control de ruta (189) será garantizado si (205) es satisfecho.

Como fue comentando antes, la metodología estudiada en Dahl y Nielsen (1990) tiene como especificaciones la ruta deseada $\mathbf{q}_d(s)$ y el perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$. Suponiendo que los parámetros del robot son conocidos, y despreciando la hipótesis de que la entrada de par es limitada, es posible obtener el siguiente controlador de ruta

de los algoritmos propuestos en Dahl y Nielsen (1990)

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \left[\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}_d(\sigma) + K_v \dot{\mathbf{e}}_p(\sigma, \dot{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) + K_p \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (206)$$

donde K_p y K_v son matrices simétrica definidas positivas de $n \times n$. Es importante notar que

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}_d(\sigma) = \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \ddot{\sigma} + \frac{d^2\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma^2} \dot{\sigma}^2.$$

Las señales $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, y $\ddot{\sigma}(t)$, usadas en el controlador (206), son obtenidas del sistema (196). La figura 89 muestra un diagrama de bloques del controlador (196) y (206).

Sustituyendo el controlador (206) en la ecuación del robot (185), se obtiene la siguiente ecuación de lazo cerrado

$$\ddot{\mathbf{e}}_p + K_v \dot{\mathbf{e}}_p + K_p \mathbf{e}_p = \mathbf{0}. \quad (207)$$

Del hecho que K_p y K_v son matrices simétricas definidas positivas, se desprende que $[\mathbf{e}_p^T \ \dot{\mathbf{e}}_p^T]^T = \mathbf{0}$ es un equilibrio exponencialmente estable en forma global del sistema (207). Esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_p(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Entonces, en vista de los argumentos previamente establecidos, esto garantiza que

el objetivo de control de ruta es satisfecho, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}, \Gamma \right) = 0.$$

B.3 Controlador de ruta propuesto

En la sección anterior se presentó un controlador de ruta descrito por las ecuaciones (196) y (206), el cual ha sido sintetizado de las ideas propuestas en Dahl y Nielsen (1990). El plan de movimiento extendido (196) actúa como un sistema de lazo abierto con respecto a la dinámica del robot. Por lo tanto, el plan de movimiento extendido (196) no juega un papel importante en la estabilidad del sistema de lazo cerrado. Una alternativa distinta al control de ruta será presentada en esta sección, introduciendo un nuevo plan de movimiento extendido que usa la posición articular con fines de retroalimentación. Esta característica provee una forma de mejorar las prestaciones del sistema en lazo cerrado.

Un criterio para cuantificar el cumplimiento del objetivo de control de ruta (189) es dado por la definición de las siguientes variables

$$\mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{q}_d(\sigma) - \mathbf{q}, \quad (208)$$

$$\mathbf{e}_v(\sigma, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) - \dot{\mathbf{q}}, \quad (209)$$

donde σ es un parámetro de ruta. Se propone el siguiente plan de movimiento extendido

en lazo cerrado para generar el parámetro de ruta σ

$$\dot{\sigma} = \vartheta(\sigma) - \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q})^T K \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \quad (210)$$

donde K es una matriz diagonal de $n \times n$ definida positiva y $\sigma(0) = s_0$. Es importante notar que si $K = 0$ en el plan de movimiento extendido (210), entonces el plan de movimiento (134) es obtenido.

El fundamento lógico del plan de movimiento extendido (210) es explicado a continuación. Considere que la matrix K es igual a kI , donde I es la matriz identidad y k es una constante real suficientemente grande. Entonces, el plan de movimiento extendido propuesto (210) puede ser reescrito como un sistema singularmente perturbado

$$\epsilon \dot{\sigma} = \epsilon \vartheta(\sigma) - \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q})^T \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma}$$

donde $\epsilon = 1/k$. Obsérvese que poniendo $\epsilon = 0$, el sistema anterior degenera en la ecuación algebraica

$$\mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q})^T \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} = 0 \quad (211)$$

la cual tiene la siguiente interpretación geométrica. Sea Γ_q la curva definida por la ruta deseada $\mathbf{q}_d(s)$, i.e.

$$\Gamma_q = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{q} = \mathbf{q}_d(s) \quad \forall s \in [s_0, \infty) \}.$$

Con respecto a Γ_q , se tienen los siguiente hechos:

- El vector $\frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma}$ es tangente a la curva Γ_q descrita por la ruta $\mathbf{q}_d(\sigma)$ (Marsden y Tromba, 1988).
- El vector $\mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q})$ en (208) es definido por la diferencia entre $\mathbf{q}_d(\sigma) \in \Gamma_q$ y \mathbf{q} .

Entonces, un valor de σ que satisfaga (211) da la proyección ortogonal de \mathbf{q} a la curva Γ_q en el sentido de que $\mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q})$ es ortogonal a $\frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma}$. De esta forma, el punto en Γ_q de proyección ortogonal es dado por $\mathbf{q}_d(\sigma)$, donde σ satisface (211). La figura 90 ilustra el concepto de proyección ortogonal para una ruta definida en el plano.

De esta forma, si las componentes de la ganancias de control $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$ son suficientemente grandes, entonces el plan de movimiento extendido (210) proporciona una estimación del valor de σ tal que $\mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q})$ es ortogonal a $\frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma}$. Entonces, una mejora en la prestación puede ser esperada usando el plan de movimiento extendido (210) junto con un controlador de ruta, pues una estimación de la proyección ortogonal \mathbf{q} a la curva Γ_q puede ser hecha usando el plan de movimiento extendido (210).

Debe ser notado que las ecuaciones (208) y (209) cumplen con

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{0} &\implies \mathbf{q} = \mathbf{q}_d(\sigma) \\ \mathbf{e}_v(\sigma, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} &\implies \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma). \end{aligned} \tag{212}$$

Como resultado de (212) y de (210) se tiene que $\dot{\sigma} = \vartheta(\sigma)$ y $\sigma(t) \in [s_0, \infty)$. Entonces,

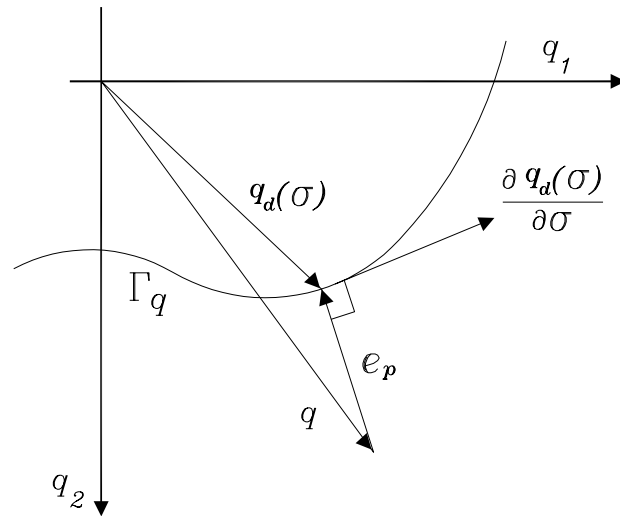


Figura 90: Proyección ortogonal de \mathbf{q} sobre la curva Γ_q

como una consecuencia de (212), el conjunto Γ dado por (190) es equivalente a

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \mathbf{e}_v(\sigma, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \text{ para todo } \sigma \in [s_0, \infty) \right\}.$$

De aquí que el objetivo de control (189) es satisfecho si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p(\sigma(t), \mathbf{q}(t)) \\ \mathbf{e}_v(\sigma(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (213)$$

Dada una ruta deseada $\mathbf{q}_d(s)$ y un perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$, se propone el siguiente controlador de ruta, que expresado en terminos del parámetro $\sigma(t)$ es dado por

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) \right] + K_v \mathbf{e}_v(\sigma, \dot{\mathbf{q}}) + K_p \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (214)$$

donde K_p y K_v son matrices diagonales de $n \times n$ definidas positivas. Es importante notar que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \vartheta(\sigma) \right] = \frac{d^2 \mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma^2} \vartheta(\sigma) \dot{\sigma} + \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\vartheta(\sigma)}{d\sigma} \dot{\sigma}.$$

El controlador de ruta (214) es basado en la técnica de dinámica inversa (Spong y Vidyasagar, 1989). La figura 91 muestra que un diagrama de bloques de la implementación del controlador (210) y (214).

La dinámica de $\sigma(t)$, definida por el plan de movimiento extendido (210), depende de $\mathbf{e}_p(t)$. Además, en el plan de movimiento extendido (210) puede ser observado que si $\mathbf{e}_p(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$ entonces $\dot{\sigma}(t) \rightarrow \vartheta(\sigma)$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto el plan de movimiento (142) será recuperado cuando $\mathbf{e}_p(t) \rightarrow \mathbf{0}$.

El sistema de lazo cerrado puede ser obtenido sustituyendo la ley de control (214)

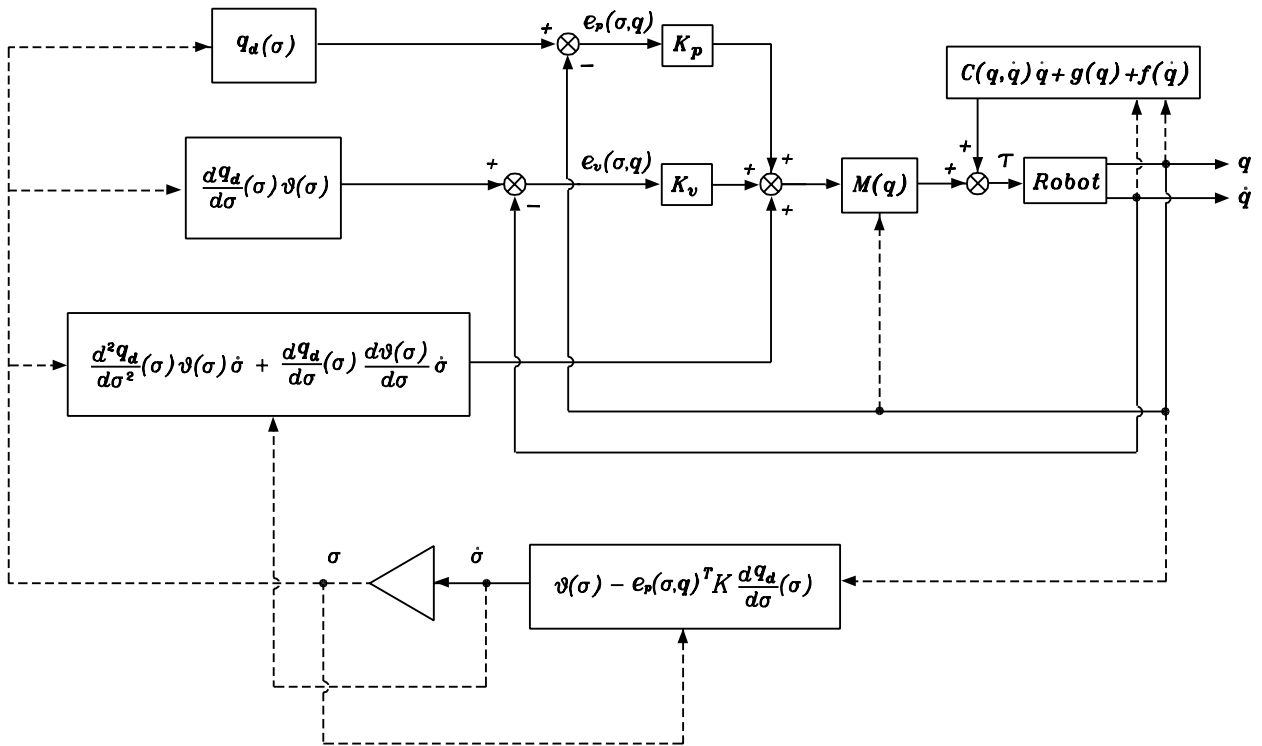


Figura 91: Diagrama de bloques del controlador de ruta propuesto

en el modelo del robot (185). Esto da la siguiente ecuación de lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_p \\ e_v \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_v - \left[e_p^T K \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \right] \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \\ -K_v e_v - K_p e_p \\ \vartheta(\sigma) - e_p^T K \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \end{bmatrix}. \quad (215)$$

El sistema (215) es autónomo. Con el fin de analizar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema de lazo cerrado (215), puede ser invocado el principio de

invariancia de LaSalle (Khalil, 1996). Considere la siguiente función no negativa

$$V(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_v, \sigma) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_p^T \mathbf{e}_p + \frac{1}{2} \mathbf{e}_v^T K_p^{-1} \mathbf{e}_v.$$

La derivada temporal de $V(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_v)$ a lo largo de las trayectorias de lazo cerrado (215)

es dada por

$$\dot{V}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_v, \sigma) = -\mathbf{e}_v^T K_p^{-1} K_v \mathbf{e}_v - \left[\mathbf{e}_p^T K \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} \right]^2.$$

Se define el conjunto

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{e}_v \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1} : \dot{V}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_v, \sigma) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{e}_v \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1} : \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q})^T K \frac{d\mathbf{q}_d(\sigma)}{d\sigma} = 0, \mathbf{e}_v(\sigma, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}, \text{ y } \sigma \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

El siguiente paso en la aplicación del principio de invariancia de LaSalle es encontrar el conjunto invariante más grande en Ω . Se denota a S como el conjunto invariante más grande en Ω :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{e}_v \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1} : \mathbf{e}_p(\sigma, \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \mathbf{e}_v(\sigma, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}, \text{ y } \dot{\sigma} = \vartheta(\sigma), \sigma(0) = s_0 \right\}.$$

Por lo tanto, de acuerdo al principio de invariancia de LaSalle, las soluciones del sistema de lazo cerrado (215) se aproximan a S cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier condición inicial $\mathbf{e}_p(\sigma(0), \mathbf{q}(0)) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_v(\sigma(0), \dot{\mathbf{q}}(0))^T \in \mathbb{R}^n$, y $\sigma(0)=s_0$. Entonces, se ha demostrado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p(\sigma(t), \mathbf{q}(t)) \\ \mathbf{e}_v(\sigma(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

se satisface, por lo tanto el objetivo de control de ruta (189) también se satisface.

El objetivo de control de ruta (213) no impone al tiempo como un requerimiento importante para realizar la tarea, pues no es necesario el uso de trayectorias nominales deseadas. Entonces, sin el uso de trayectorias nominales deseadas, y con el objetivo de compensar los errores en el movimiento ejecutado por el manipulador, el control de ruta es llevado a cabo controlando la dinámica del parámetro de ruta $\sigma(t)$. Ésto es realizado por el plan de movimiento extendido (210).

B.4 Resultados experimentales

Los experimentos presentados en esta sección se obtuvieron usando el robot descrito en la figura 92. Para descripción completa de este sistema experimental véase Reyes y Kelly (1997); Reyes y Kelly (2001).

Se presentan experimentos empleando el control par calculado (Spong y Vidyasagar, 1989; Sciavicco y Siciliano, 2000), el cual es un controlador de movimiento. Además se presentan experimentos de control de ruta con el controlador propuesto (210) y (214).

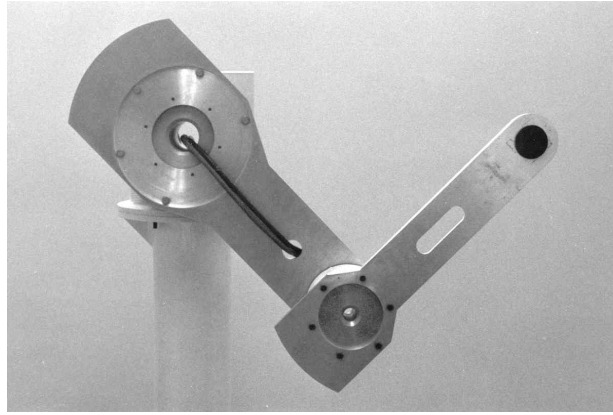


Figura 92: Robot experimental

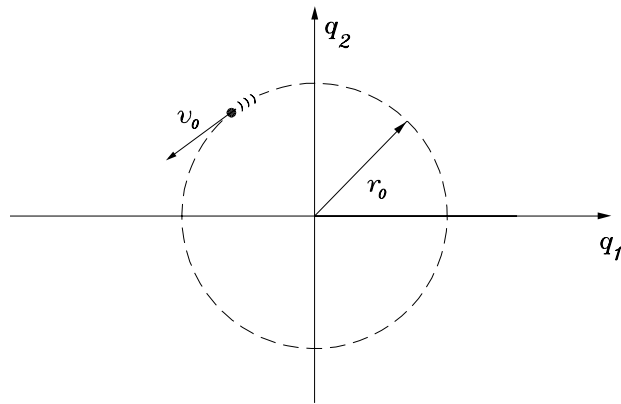


Figura 93: Tarea solicitada

El objetivo es ofrecer una comparación de las prestaciones de ambos controladores a través de la tarea del trazado de un círculo en coordenadas articulares de radio r_0 y rapidez tangencial constante v_0 — ver figura 93—.

En el caso de control de movimiento se ha usado la siguiente trayectoria deseada

$$\mathbf{q}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) = \begin{bmatrix} r_0 \cos\left(\frac{v_0}{r_0} t\right) \\ r_0 \text{sen}\left(\frac{v_0}{r_0} t\right) \end{bmatrix}. \quad (216)$$

En el caso de control de ruta, la ruta deseada está dada por

$$\mathbf{q}_d(s) = \begin{bmatrix} r_0 \cos\left(\frac{v_0}{r_0} s\right) \\ r_0 \text{sen}\left(\frac{v_0}{r_0} s\right) \end{bmatrix}, \quad s \in [0, \infty), \quad (217)$$

mientras que el perfil de velocidad deseado es dado por

$$\vartheta(s) = 1, \quad s \in [0, \infty). \quad (218)$$

Note que la trayectoria nominal $\mathbf{q}_r(t)$ en (216) puede ser obtenida usando la ruta deseada $\mathbf{q}_s(s)$ en (217) y resolviendo el plan de movimiento (191) con el perfil de velocidad deseado $\vartheta(s)$ en (218).

En los experimentos se usaron los siguientes datos: radio del círculo $r_0 = 57.3$ [deg], rapidez deseada $v_0 = 114.59$ [deg/sec]. Las siguientes ganancias fueron usadas tanto en el controlador de movimiento como en el controlador de ruta:

$$K_p = \text{diag}\{800.0, 800.0\} [1/\text{seg}^2], \quad (219)$$

$$K_v = \text{diag}\{45.0, 100.0\} [1/\text{seg}]. \quad (220)$$

El controlador de ruta propuesto fue implementado en dos ocasiones usando distintas ganancias en el plan de movimiento extendido (210):

$$K = \text{diag}\{20.0, 20.0\} [1/\text{rad}], \quad (221)$$

$$K = \text{diag}\{100.0, 100.0\} [1/\text{rad}]. \quad (222)$$

La configuración inicial del robot fue

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.0 \\ 70.0 \end{bmatrix} [\text{grados}].$$

B.4.1 Control de movimiento: Experimentos

Sea $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_r - \mathbf{q}$ el error de posición articular. Entonces, la tarea de trazar un círculo en el espacio articular, codificada por \mathbf{q}_r en (216), es llevada a cabo si el objetivo de control de movimiento definido por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (223)$$

se satisface.

El controlador par calculado (Spong y Vidyasagar, 1989; Sciavicco y Siciliano, 2000) es dado por

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \left[\ddot{\mathbf{q}}_r + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (224)$$

donde las ganancias de control K_v y K_p fueron (219) y (220), respectivamente. La trayectoria deseada $\mathbf{q}_r(t)$ es dada en (216). Observese que una vez que ha sido especi-

ficada la trayectoria deseada $\mathbf{q}_r(t)$, el objetivo primario en control de movimiento es satisfacer (223).

El controlador (224) ha sido implementado en el sistema experimental. La figura 94 describe la ruta trazada en el espacio articular. Sin embargo, en los primeros instantes se observa un transitorio en el movimiento realizado. Luego, la ruta trazada tiende al contorno circular. La figura 95 muestra la norma de los errores de seguimiento $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$ y $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$, que después del transitorio tienen un buen comportamiento manteniendo, su valor cercano a cero. El valor pico máximo en estado estacionario para $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$ es 1.8 [grad], y para $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ es 11.8 [grad/seg].

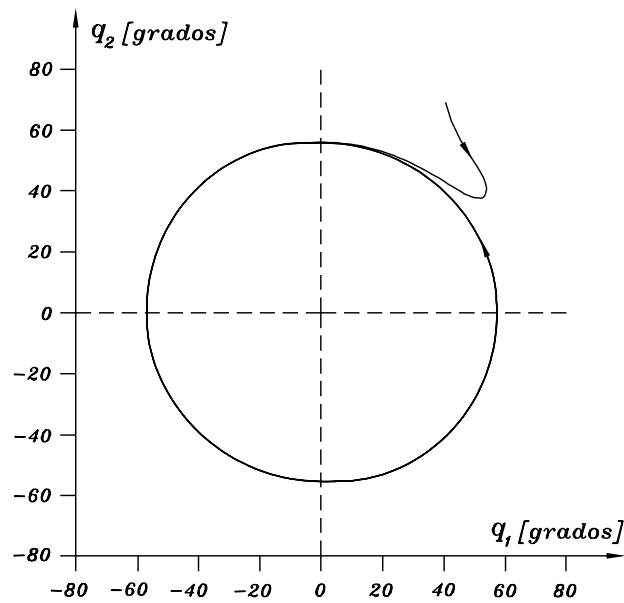


Figura 94: Control de movimiento: q_2 contra q_1

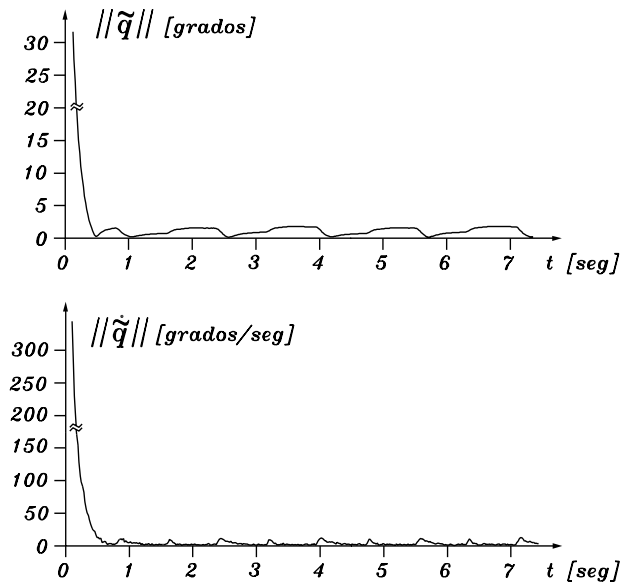


Figura 95: Control de movimiento: Evolución temporal de $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$ y $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$

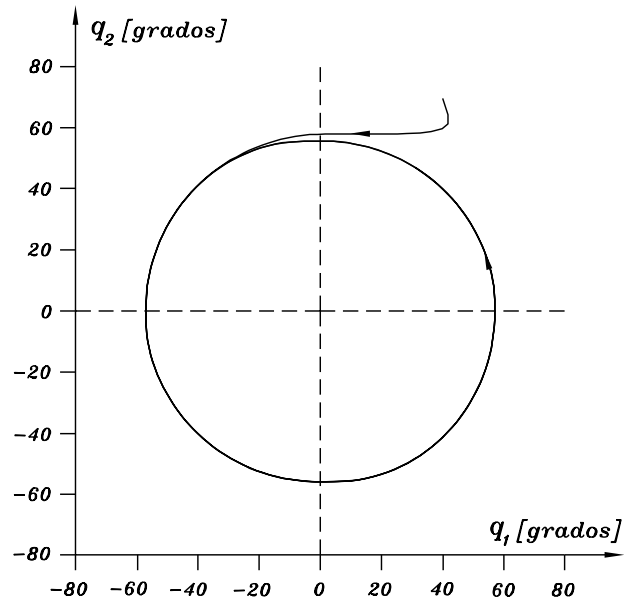


Figura 96: Control de ruta, $K=\text{diag}\{20.0,20.0\}$: q_2 contra q_1

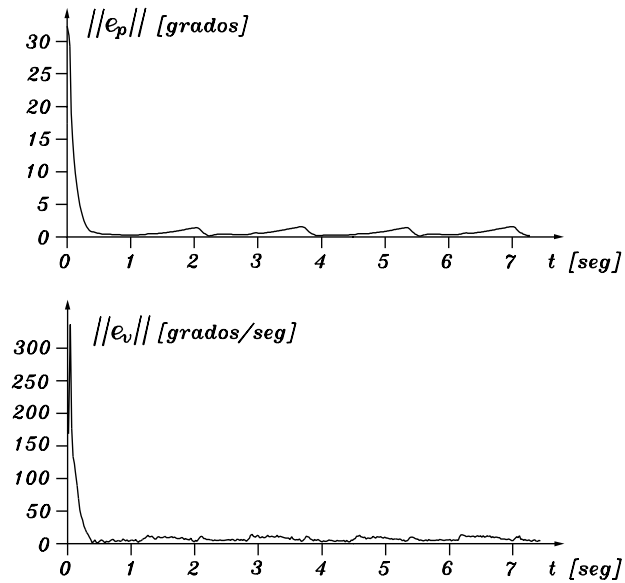


Figura 97: Control de ruta, $K=\text{diag}\{20.0,20.0\}$: Evolución temporal de $\|e_p\|$ y $\|e_v\|$

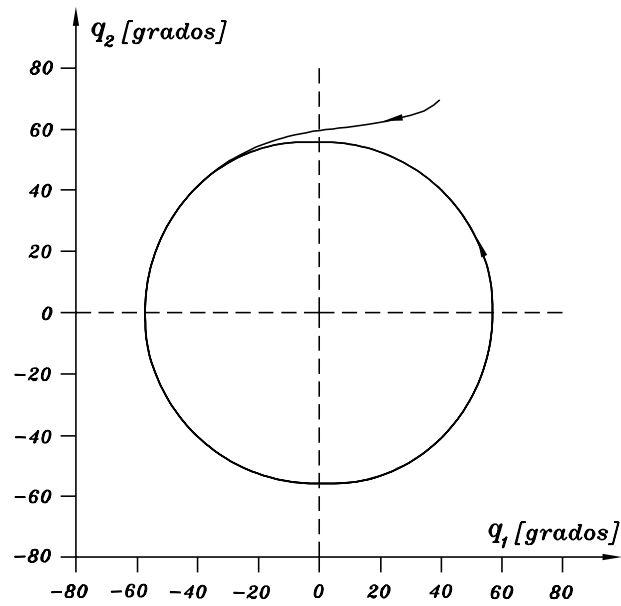


Figura 98: Control de ruta, $K=\text{diag}\{100.0,100.0\}$: q_2 contra q_1

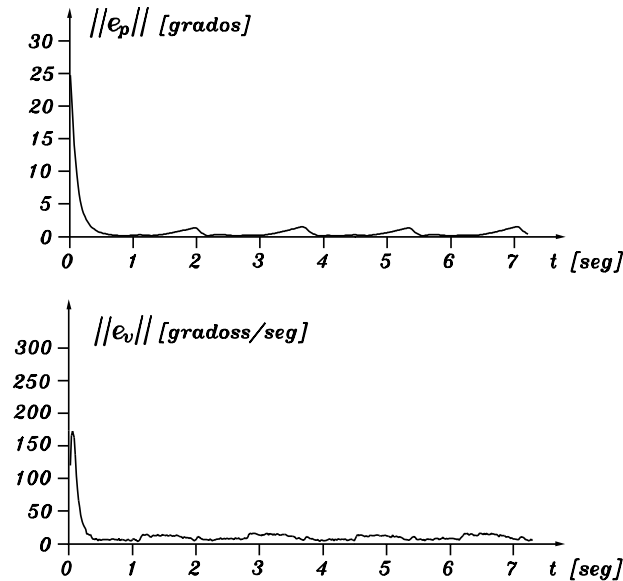


Figura 99: Control de ruta, $K=\text{diag}\{100.0,100.0\}$: Evolución temporal de $\|e_p\|$ y $\|e_v\|$

B.4.2 Control de ruta: Experimentos

El controlador de ruta propuesto (210) y (214) fue implementado con las ganancias (219), (220), y (221)–(222). Los resultados experimentales usando $K=\text{diag}\{20.0,20.0\}$ en el plan de movimiento extendido (210) son mostrados en las figuras 96 y 97. El dibujo de la figura 96 muestra q_2 contra q_1 . La evolución temporal de $\|e_p\|$ y $\|e_v\|$ es ilustrada en la figura 97. Ambos tienen una clara tendencia a cero, pero persisten pequeñas oscilaciones. La norma $\|e_p\|$ exhibe picos máximos de 1.5 [grados] en estado estacionario, por lo que el error relativo es de 2.6% con respecto al valor de r_0 — 57.3 [grados]—. Por otro lado, $\|e_v\|$ en la figura 97 presenta picos máximos de 14.5 [grados/seg], conduciendo a un error relativo de 12.65% del valor especificado de v_0 — 114.59 [grados/seg]—.

Las figuras 98 y 99 describen el resultado de usar $K=\text{diag}\{100.0,100.0\}$ en el plan de movimiento extendido (210). La figura 98 muestra la ruta trazada por el brazo en el espacio de las posiciones q_1-q_2 . Un comportamiento natural es notado, ejecutándose exitosamente la tarea de trazar el círculo. La evolución temporal de $\|e_p\|$ y $\|e_v\|$ es mostrada en la figura 99. La evolución de la norma $\|e_p\|$ presenta picos máximos de 1.45 [grados] en estado estacionario, correspondiendo a una desviación relativa de 2.53% con respecto al valor de r_0 —57.3 [grados]—. Por otro lado, la evolución de $\|e_v\|$ presenta valores pico de 14.2 [grados/seg], lo que significa 12.39% del valor de v_0 —114.59 [grados/seg]—.

B.4.3 Observaciones

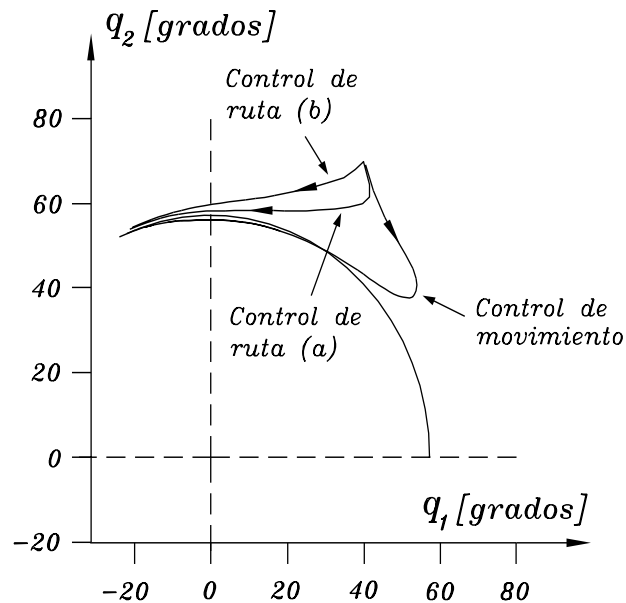


Figura 100: Resultado del control de movimiento y control de ruta usando en el plan de movimiento extendido a) $K=\text{diag}\{20.0,20.0\}$, b) $K=\text{diag}\{100.0,100.0\}$

La figura 100 revela un comportamiento interesante en las prestaciones del controlador de ruta propuesto (214) con respecto del control de movimiento (224). Se observa que la ruta trazada por el robot tiene un comportamiento más natural cuando es usado el control de ruta. La ruta trazada usando control de movimiento presenta un transitorio al principio del experimento. Este transitorio puede ser indeseable en muchas aplicaciones prácticas, tales como operaciones de maquinado, corte, taladrado y desbastado, por lo que el control de movimiento puede no ser la mejor opción para ejecutar esta clase de tareas.

Una buena prestación es llevada a cabo por el manipulador usando el controlador de ruta (214) con una alta ganancia $K=\{100.0,100.0\}$ en el plan de movimiento extendido (210). Esto es explicado por la propiedad de estimación de la proyección ortogonal del plan de movimiento extendido (210), que fue comentada anteriormente.

B.5 Conclusiones

El control de ruta es una alternativa para realizar una clase amplia de tareas robóticas, en donde el seguimiento de una trayectoria nominal deseada que depende del tiempo no es tan importante. Se ha presentado una formulación del control de ruta en coordenadas articulares. Tareas de alto nivel pueden ser codificadas en la ley de control de ruta, evitando el uso de trayectorias nominales deseadas para codificar la tarea. Se ha mostrado que el control de ruta puede ser resuelto usando un controlador derivado de los algoritmos propuestos en Dahl y Nielsen (1990). Una contribución presentada

en este apéndice es un nuevo controlador de ruta basado en el concepto de plan de movimiento extendido. El concepto de control de ruta es ilustrado por medio de la tarea de trazar un círculo en coordenadas articulares. La evaluación experimental en un robot de transmisión directa de dos grados de libertad ha dado evidencia de la factibilidad práctica de los algoritmos estudiados.

C Programas en SPAC

El sistema experimental cuenta con un ambiente de programación llamado *Sistema Programable de Algoritmos de Control* (SPAC) (Reyes, 1997). Para realizar la implementación práctica de un algoritmo de control se escribe un programa que contiene las operaciones matemáticas del controlador. Este programa es “corrido” en el SPAC y a través de él pueden seleccionarse y obtener en forma gráfica y numérica los valores de los pares aplicados, las velocidades articulares, las posiciones articulares y de las variables que se encuentran declaradas en el programa del controlador que se está implementando. La sintaxis de los programas hechos en SPAC se basa en el lenguaje C, por lo que resulta familiar la programación de un controlador en SPAC debido a la popularidad del lenguaje C.

C.1 Listado del programa dahlv1.rob

Control de velocidad de motores considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Controlador PI usando un observador asintótico presentado en la sección II.1.1.

```

/*****/
/* dahlv1.rob */
/* control de velocidad */
/* con campensacin de friccin de Dahl */
/* estructura del controlador tipo pi */
/* */
/* Javier Moreno */
/* 17/octubre/2000 */
/*****/

/* DECLARACIONES */

/* Variables "asignadas" */
float pos1; /* posicion articular 1 (grados) */
float pos2; /* posicion articular 2 (grados) */
float vel1; /* velocidad articular 1 (grados/seg) */
float vel2; /* velocidad articular 2 (grados/seg) */
float tau1; /* par articular 1 (Nm) */
float tau2; /* par articular 2 (Nm) */

/* Variables auxiliares */

float ex2;
float tr8;

```

```

float tr9;
float tr10;
float tr11;
float tr12;
float tr13;
float tr14;

float qd;
float dqd;
float ddqd;

float w2=6.0;      /* parametros de la trayectoria de vel */
float b=1.8;
float c3=1.0472;
float c4=2.1816;

float kv= 200;     /* ganancias del controlador          */
float ki= 10000;

float J=2.5e-3;   /* momento inercia Kgm^2/rad)          */

float h=0.001;    /* periodo de muestreo (seg)           */

float fv=0.1438;  /* friccion viscosa                      */
float fc=0.7450;  /* friccion de coulomb                   */
float sgma0=1450.0; /* parametro de rigidez                  */
float aux;
float norma=0.0;  /* para indice de desempehno            */
float ng=0.0;

float qtildeg;    /* variable auxiliar                      */
float dqtilde;    /* error de velocidad [rad/seg]          */
float dqtildeg;   /* error de velocidad [grad/seg]        */
float z0=0.0;     /* observacion del estado interno z     */
float xi=0.0;     /* integral de error de velocidad        */

float cgr=0.017453292; /* conv. de grados a rad          */
float t=0.0;      /* para asignar tiempo real */

/***** CUERPO *****/

t=Tiempo_real;

if (t <= 0.005)
{

```

```

norma = 0.0;
z0 = 0.0;
xi = 0.0;
}

/* posicion deseada */

ex2=exp(-b*t*t*t);

qd=c3*(1-ex2)+c4*(1-ex2)*sin(w2*t); /* pos deseada [rad] */
qtildeg=qd/cgr-pos1; /* error de pos [grados]*/

/* velocidad y aceleracion deseada */

tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t);
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t);
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t);
dqd=tr8+tr9+tr10; /* velocidad deseada [rad/seg] */
dqtildeg=dqd/cgr-vel1; /* error de velocidad [grad/seg] */

tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t*t*t*t*ex2);
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t);
tr13=3*b*c4*t*t*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t*t*ex2*sin(w2*t));
tr14=c4*w2*(3*b*t*t*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t));
ddqd=tr11+tr12+tr13+tr14; /* aceleracion deseada */

/* Observador de friccion de Dahl */
aux=1+sgma0*fabs(vel1*cgr)*h/fc ;
z0=( z0 + dqd*h )/aux ;

/* Integral de error de velocidad */
xi=xi+h*dqtildeg*cgr;

if (t<=5.0)
{
norma=norma+dqtildeg*dqtildeg;
}

ng=sqrt(norma);

/* pares aplicados */

tau1=J*(ddqd+kv*dqtildeg*cgr+ki*xi)+fv*vel1*cgr + sgma0*z0 ;

tau2 = 0.0;

```

C.2 Listado del programa dahlv3.rob

Control de velocidad de motores considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Controlador PI usando un observador exponencial presentado en la sección II.1.2.

```

/*****/
/* dahlv3.rob */
/* */
/* VARIABLES REFERIDAS AL MOTOR 2 */
/* */
/* Control de velocidad */
/* con compensacin de friccin de Dahl */
/* Observador "exponencial" */
/* Estructura del controlador tipo pi (Slotine--Li) */
/* */
/* Javier Moreno */
/* 11/junio/2001 */
/*****/

/* DECLARACIONES */

/* Variables "asignadas" */
float pos1; /* posicion articular 1 (grados) */
float pos2; /* posicion articular 2 (grados) */
float pos3;

float vel1; /* velocidad articular 1 (grados/seg) */
float vel2; /* velocidad articular 2 (grados/seg) */
float vel3;

float tau1; /* par articular 1 (Nm) */
float tau2; /* par articular 2 (Nm) */
float tau3;

/* Variables auxiliares */

float aux1;

float ex2;
float tr8;
float tr9;
float tr10;
float tr11;
float tr12;

```

```

float tr13;
float tr14;

float qd;
float dqd;
float ddqd;

float w2=2.0;      /* parametros de la trayectoria de vel */
float b=1.8;
float c3=1.0472;
float c4=2.1816;

float lambda=100.0; /* ganancia variable auxiliar */
float kv= 0.25;     /* ganancia derivativa */
float ki= 25.0;     /* ganancia integrativa */
float k0= 0.5;     /* ganancia del observador */

float J=2.5e-3;    /* momento inercia Kgm^2/rad) */

float h=0.001;    /* periodo de muestreo (seg) */

float fv=0.1438;  /* friccion viscosa */
float fc=0.7450;  /* friccion de coulomb */
float sigma0=1450.0; /* parametro de rigidez */
float aux;
float norma=0.0;  /* para indice de desempehno */
float ng=0.0;

float qtildeg;   /* variable auxiliar */
float dqtilde;   /* error de velocidad [rad/seg] */
float dqtildeg;  /* error de velocidad [grad/seg] */
float s;         /* variable auxiliar */

float x=0.0;     /* estado del observador de variable interna z */
float z0=0.0;   /* observacion de la variable interna z */
float xi=0.0;   /* integral de error de velocidad */

float cgr=0.017453292; /* conv. de grados a rad */
float t=0.0; /* para asignar tiempo real */

/***** CUERPO *****/

t=Tiempo_real;

```

```

if (t <= 0.005)
{
norma = 0.0;
x = 0.0;
xi = 0.0;
z0 = 0.0;
}

/* posicion deseada */

ex2=exp(-b*t*t*t);
qd=c3*(1-ex2)+c4*(1-ex2)*sin(w2*t); /* pos deseada [rad] */
qtildeg=qd/cgr-pos2; /* error de pos [grados]*/

/* velocidad y aceleracion deseada */

tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t);
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t);
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t);
dqd=tr8+tr9+tr10; /* velocidad deseada [rad/seg] */

dqtilde=dqd - vel2*cgr; /* error de velocidad [rad/seg] */

dqtildeg=dqtilde/cgr; /* error de velocidad [grados/seg] */

tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t*t*t*t*ex2);
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t);
tr13=3*b*c4*t*t*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t*t*ex2*sin(w2*t));
tr14=c4*w2*(3*b*t*t*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t));
ddqd=tr11+tr12+tr13+tr14; /* aceleracion deseada */

/* ***** Integral de error de velocidad ***** */
xi = xi + h*dqtilde;

s = dqtilde + lambda*xi;

/* ***** Observador de friccion de Dahl ***** */

/* Observador en lazo abierto */

/* aux=1+sgma0*fabs(vel2*cgr)*h/fc ; */
/* z0=( z0 + dqd*h )/aux ; */

```



```

/* observador exponencial */

aux1=x/h -J*k0*s*(sgma0*fabs(vel2*cgr)/fc) + vel2*cgr + k0*kv*s;
x=aux1/(1/h + sgma0*fabs(vel2*cgr)/fc);
z0=x+J*k0*s;

/* ***** Calculo del indice de desempenho ***** */

if (t<=5.0)
{
norma=norma+dqtildeg*dqtildeg;
}

ng=sqrt(norma);

/* ***** Pares aplicados ***** */

tau2=J*(ddqd + lambda*dqtilde) + kv*s + fv*vel2*cgr + sgma0*z0 ;

tau1 = 0.0;

```

C.3 Listado del programa velm01.rob

Control de velocidad de motores considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Controlador PI usando compensación de fricción viscosa y de Coulomb presentado en la sección II.1.3.

```

/*****/
/* velm01.rob */
/* control de velocidad */
/* con campensacin de friccin viscosa y de Coulomb */
/* Estructura del controlador tipo pi */
/*
/* Javier Moreno */
/* 06/noviembre/2000 */
/*****/

```

```

/* DECLARACIONES */

/* Variables "asignadas" */
float pos1;          /* posicion articular 1 (grados)      */
float pos2;          /* posicion articular 2 (grados)      */
float vel1;          /* velocidad articular 1 (grados/seg) */
float vel2;          /* velocidad articular 2 (grados/seg) */
float tau1;          /* par articular 1 (Nm)               */
float tau2;          /* par articular 2 (Nm)               */

/* Variables auxiliares -----*/
/* para calculo de la velocidad y aceleracion deseada */
float ex2;
float tr8;
float tr9;
float tr10;
float tr11;
float tr12;
float tr13;
float tr14;
float dqd;
float ddqd;

float w2=6.0;        /* parametros de la trayectoria de vel */
float b=1.8;
float c3=1.0472;
float c4=2.1816;

float kv= 200;       /* ganancias del controlador          */
float ki= 10000;

float J=2.5e-3;     /* momento inercia Kgm^2/rad)         */

float h=0.001;      /* periodo de muestreo (seg)          */

float fv=0.1438;    /* friccion viscosa                    */
float fc=0.7450;    /* friccion de coulomb                 */

float signo;        /* funcion signo                        */

float norma=0.0;    /* para indice de desempehno          */
float ng=0.0;       /* para indice de desempehno          */

float dqtilde;      /* error de velocidad [rad/seg]        */

```

```

float dqtildeg;          /* error de velocidad [grad/seg]    */
float xi=0.0;           /* integral de error de velocidad  */

float cgr=0.017453292;  /* conversion de grados a rad      */
float t=0.0;           /* para asignar tiempo real       */

/***** CUERPO PRINCIPAL DEL PROGRAMA *****/

t=Tiempo_real;

if (t <= 0.005)
{
norma = 0.0;
xi = 0.0;
}

/* velocidad y aceleracion deseada */

tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t);
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t);
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t);
dqd=tr8+tr9+tr10;          /* velocidad deseada [rad/seg] */
dqtildeg=dqd/cgr-vel1;    /* error de velocidad [grad/seg] */

tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t*t*t*t*ex2);
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t);
tr13=3*b*c4*t*t*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t*t*ex2*sin(w2*t));
tr14=c4*w2*(3*b*t*t*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t));

ddqd=tr11+tr12+tr13+tr14; /* aceleracion deseada */

if (vel1<0)                /* Definicion de la funcion signo */
{
signo=-1.0;
}
else
{
if (vel1>0)
{
signo=1.0;
}
else
{
signo=0.0;
}
}

```

```

}

/* Integral de error de velocidad */
xi=xi+h*dqtildeg*cgr;

/**** Calculo de indice de ejecucion ****/
if (t<=5.0)
{
norma=norma+dqtildeg*dqtildeg;
}

ng=sqrt(norma);

/***** pares aplicados *****/
/**** Dinamica inversa + fv + fc ****/

tau1=J*(ddqd+kv*dqtildeg*cgr+ki*xi)+fv*vel1*cgr + fc*signo;

tau2 = 0.0;

```

C.4 Listado del programa pcvdmod.rob

Control de velocidad articular considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Estructura del controlador basada en dinámica inversa. Controlador presentado en la sección II.2.1.

```

/*****
/* pcvdmod.rob */
/*
/* Control de velocidad en coordenadas */
/* articulares con compensacion de friccion de Dahl */
/*
/* Observador de friccion exponencial */
/*
/* El controlador empleado es el denominado */
/* Par Calculado */
/*
/*
/* 9 de junio del 2001 , Moreno */
*****/

/*----- Definicion de variables y constantes -----*/

float k0=0.0045; /* Ganancia observador de friccion */

```

```
float kv1=60.0; /* 30.0 */ /* Ganancias del controlador */
float kv2=60.0; /* 30.0 */

float kp1=900.0; /* 2000.0 */
float kp2=900.0; /* 2000.0 */

float b1c=0.2741; /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;

float fc1 = 1.29; /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;

float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */
float sigma02 = 2764.0;

float h=0.001; /* Periodo de muestreo */

/* Constantes auxiliares para la velocidad deseada */
float w1=6;
float w2=3;
float c1=0.7854;
float c2=0.7;
float a=2.0;
float c3=1.0472;
float c4=1.1816;
float b=2.0;

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */

float g=9.81; /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;
float pos2;
float pos3;

float vel1;
float vel2;
float vel3;

float tau1;
float tau2;
float tau3;

float m11, m12, m21, m22;
```

```

float c11, c12, c21, c22;
float g1,g2;

float v1, v2;

float dq1d, dq2d;    /*velocidad y acel. deseadas */
float ddq1d, ddq2d;

float tr1, tr2, tr3, tr4, tr5, tr6;    /* variables auxiliares */
float tr7, tr8, tr9, tr10, tr11, tr12;
float tr13, tr14;
float ex1, ex2;

float deq1; /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g; /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float z01, z02;    /* observaciones del estado interno z */
float x1, x2;

float aux11, aux12; /* variables auxiliares para */
float aux21, aux22; /* el observador de frccion */

float z1=0;    /* integral de error de velocidad 1 */
float z2=0;    /* integral de error de velocidad 2 */

float t;    /* tiempo real */

float indice=0.0; /* variables para indice de desempeo */
float norma=0.0;

float fce1, fce2;

float signo1, signo2; /* para compensacion de friccion de Coulomb */
float fcc1, fcc2;

t=Tiempo_real;

/*----- cuerpo -----*/

```

```

if (t <= 0.002)
{
  norma = 0.0;
  z1 = 0.0;
  z2 = 0.0;
  z01=0.0;
  z02=0.0;
  x1 =0.0;
  x2 =0.0;
}

/* ----- dinamica del robot -----*/

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

/* ----- Referencias de velocidad -----*/

tr1=3*a*c1*t*t*exp(-a*t*t*t);
tr2=3*a*c2*t*t*exp(-a*t*t*t)*sin(w1*t);
tr3=c2*w1*(1-exp(-a*t*t*t))*cos(w1*t);

dq1d=tr1+tr2+tr3;          /* vel. deseada 1 */

ex1=exp(-a*t*t*t);
tr4=3*a*c1*(2*t*ex1-3*a*t*t*t*ex1);
tr5=6*a*c2*t*ex1*sin(w1*t);
tr6=3*a*c2*t*t*(w1*ex1*cos(w1*t)-3*a*t*t*ex1*sin(w1*t));
tr7=c2*w1*(3*a*t*t*ex1*cos(w1*t)-w1*(1-ex1)*sin(w1*t));

```

```

ddq1d=tr4+tr5+tr6+tr7;          /* acel. deseada 1 */

tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t);
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t);
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t);

dq2d=tr8+tr9+tr10;             /* vel. deseada 2 */

ex2=exp(-b*t*t*t);
tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t*t*t*t*ex2);
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t);
tr13=3*b*c4*t*t*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t*t*ex2*sin(w2*t));
tr14=c4*w2*(3*b*t*t*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t));

ddq2d=tr11+tr12+tr13+tr14;    /* ace. deseada 2 */

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/Pi;
deq2g=deq2*180/Pi;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

z1=z1+deq1*h;
z2=z2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=10.0)
{
    norma=norma+(deq1g*deq1g+deq2g*deq2g);
}
indice=sqrt(norma);

/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/

/* Observador de friccion */

```



```

aux11=kv1*deq1+kp1*z1;
aux12=x1/h -(sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1)*k0*deq1 + vel1*cgr + k0*(aux11);
x1=aux12/(1/h + sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1);

z01=x1+k0*deq1;

aux21=kv2*deq2+kp2*z2;
aux22=x2/h -(sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2)*k0*deq2 + vel2*cgr + k0*(aux21);

x2=aux22/(1/h + sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2 );

z02=x2+k0*deq2;

/* Estimacion de la friccion de Coulomb */

fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/* terminos del controlador */

v1=ddq1d+kv1*deq1+kp1*z1;
v2=ddq2d+kv2*deq2+kp2*z2;

if (vel1<0.0)
{
signo1=-1.0;
}
else
{
signo1=1.0;
}
if (vel2<0.0)
{
signo2=-1.0;
}
else
{
signo2=1.0;
}

fcc1=fc1*signo1;

```

```
fcc2=fc2*signo2;
```

```
tau1=m11*v1+m12*v2+c11*vel1*cgr+c12*vel2*cgr+g1+b1c*vel1*cgr+fcc1; /* +sigma01*z01; */
tau2=m21*v1+m22*v2+c21*vel1*cgr+c22*vel2*cgr+g2+b2c*vel2*cgr+fcc2; /* +sigma02*z02; */
```

C.5 Listado del programa pdcvd.rob

Control de velocidad articular considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Estructura del controlador basada en PD con compensación. Controlador presentado en la sección II.2.2.

```

/*****
/* pdcvd.rob
/*
/* Control de velocidad en coordenadas
/* articulares con compensacion de friccion de Dahl
/*
/* El controlador empleado es el denominado
/* PD con compensacion
/* (Slotine-Li)
/*
/* 7 de junio del 2001 , Moreno
*****/

/*----- Definicion de variables y constantes -----*/

float kv1=5.0; /* antes 150.0 funciono mal controlador */
float kv2=4.0;

float kp1=10.0; /* antes 2000.0 */
float kp2=5.0;

float lambda1=2.0; /* antes 13.3333; */
float lambda2=1.25;

float h=0.001; /* Periodo de muestreo */

float b1c=0.2741; /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;

float fc1 = 1.29; /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;

float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */

```

```
float sigma02 = 2764.0;

float rho=100.0;

/* Constantes auxiliares para la velocidad deseada */
float w1=6;
float w2=3;
float c1=0.7854;
float c2=0.7;

float a=2.0;
float c3=1.0472;
float c4=1.1816;
float b=2.0;

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */

float g=9.81; /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;
float pos2;
float pos3;

float vel1;
float vel2;
float vel3;

float tau1;
float tau2;
float tau3;

float m11, m12, m21, m22;
float c11, c12, c21, c22;
float g1,g2;

float v1, v2;

float dq1dg;

float dq1d, dq2d; /*velocidad y acel. deseadas */
float ddq1d, ddq2d;

float tr1, tr2, tr3, tr4, tr5, tr6; /* variables auxiliares */
float tr7, tr8, tr9, tr10, tr11, tr12;
float tr13, tr14;
```

```

float ex1, ex2;

float ter1, ter2, ter3, ter4;

float deq1; /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g; /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float aux1, aux2; /* variables auxiliares para */
                  /* el observador de frccion */

float z01, z02; /* observaciones del estado interno z */

float z1=0; /* integral de error de velocidad 1 */
float z2=0; /* integral de error de velocidad 2 */

float t; /* tiempo real */

float indice=0.0; /* variables para indice de desempeo */
float norma=0.0;

float fce1, fce2;

float signo1, signo2; /* para compensacion de friccion de Coulomb */
float fcc1, fcc2;

/*----- cuerpo -----*/

t=Tiempo_real;

if (t <= 0.005)
{
  norma = 0.0;
  z1 = 0.0;
  z2 = 0.0;
  z01 = 0.0;
  z02 = 0.0;
}

/* ----- dinamica del robot -----*/

```

```

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

/* ----- Referencias de velocidad -----*/

tr1=3*a*c1*t*t*exp(-a*t*t*t);
tr2=3*a*c2*t*t*exp(-a*t*t*t)*sin(w1*t);
tr3=c2*w1*(1-exp(-a*t*t*t))*cos(w1*t);

dq1d=tr1+tr2+tr3; /* vel. deseada 1 */

dq1dg=dq1d/cgr;

ex1=exp(-a*t*t*t);
tr4=3*a*c1*(2*t*ex1-3*a*t*t*t*ex1);
tr5=6*a*c2*t*ex1*sin(w1*t);
tr6=3*a*c2*t*t*(w1*ex1*cos(w1*t)-3*a*t*t*ex1*sin(w1*t));
tr7=c2*w1*(3*a*t*t*ex1*cos(w1*t)-w1*(1-ex1)*sin(w1*t));

ddq1d=tr4+tr5+tr6+tr7; /* acel. deseada 1 */

tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t);
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t);
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t);

dq2d=tr8+tr9+tr10; /* vel. deseada 2 */

ex2=exp(-b*t*t*t);

```

```

tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t*t*t*t*ex2);
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t);
tr13=3*b*c4*t*t*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t*t*ex2*sin(w2*t));
tr14=c4*w2*(3*b*t*t*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t));

ddq2d=tr11+tr12+tr13+tr14;          /* ace. deseada 2 */

/*-----          Error de velocidad en radianes          -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*-----          Error de velocidad en grados          -----*/

deq1g=deq1*180/Pi;
deq2g=deq2*180/Pi;

/*-----          Integral del Error de velocidad          -----*/

z1=z1+deq1*h;
z2=z2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=10.0)
  {
    norma=norma+(deq1g*deq1g+deq2g*deq2g);
  }
indice=sqrt(norma);

/* -----          Ecuaciones del controlador          -----*/

/* Observador de friccion */

aux1=1+sigma01*fabs(vel1*cgr)*h/fc1;
z01=(z01+(dq1d+lambda1*z1)*h )/aux1;

aux2=1+sigma02*fabs(vel2*cgr)*h/fc2;
z02=(z02+(dq2d+lambda2*z2)*h )/aux2;

/* estimacion friccion de f. de Cou. usando modelo Dahl */

```

```

fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/* terminos del controlador */

if (vel1<0.0)
{
signo1=-1.0;
}
else
{
signo1=1.0;
}

if (vel2<0.0)
{
signo2=-1.0;
}
else
{
signo2=1.0;
}

fcc1=fc1*signo1;
fcc2=fc2*signo2;

ter1=g1+kv1*deq1+kp1*z1 +fcc1; /* +sigma01*z01; */
ter2=g2+kv2*deq2+kp2*z2 +fcc2; /* +sigma02*z02; */

ter3=c11*(dq1d+lambda1*z1)+c12*(dq2d+lambda2*z2)+ter1+b1c*vel1*cgr;
ter4=c21*(dq1d+lambda1*z1)+c22*(dq2d+lambda2*z2)+ter2+b2c*vel2*cgr;

tau1=m11*(ddq1d+lambda1*deq1)+m12*(ddq2d+lambda2*deq2)+ter3;
tau2=m12*(ddq1d+lambda1*deq1)+m22*(ddq2d+lambda2*deq2)+ter4;

```

C.6 Listado del programa pdmvd.rob

Control de velocidad articular considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Estructura del controlador basada en PD+. Controlador presentado en la sección II.2.3.

```

/*****/

```

```

/* pdmvd.rob */
/* */
/* Control de velocidad en coordenadas */
/* articulares con compensacion de friccion de Dahl */
/* */
/* El controlador empleado es el denominado */
/* PD + */
/* */
/* 9 de junio del 2001 , Moreno */
/*****/

/*----- Definicion de variables y constantes -----*/

float kv1=5.0; /* antes 150.0 funciono mal controlador */
float kv2=4.0;

float kp1=10.0; /* antes 2000.0 */
float kp2=5.0;

float h=0.001; /* Periodo de muestreo */

float b1c=0.2741; /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;

float fc1 = 1.29; /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;

float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */
float sigma02 = 2764.0;

float signo1, signo2; /* para compensacion de friccion de Coulomb */
float fcc1, fcc2;

/* Constantes auxiliares para la velocidad deseada */
float w1=6;
float w2=3;
float c1=0.7854;
float c2=0.7;
float a=2.0;
float c3=1.0472;
float c4=1.1816;
float b=2.0;

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */

```



```

float g=9.81;          /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;
float pos2;
float pos3;

float vel1;
float vel2;
float vel3;

float tau1;
float tau2;
float tau3;

float m11, m12, m21, m22;
float c11, c12, c21, c22;
float g1,g2;

float v1, v2;

float dq1d, dq2d;     /*velocidad y acel. deseadas */
float ddq1d, ddq2d;

float tr1, tr2, tr3, tr4, tr5, tr6;   /* variables auxiliares */
float tr7, tr8, tr9, tr10, tr11, tr12;
float tr13, tr14;
float ex1, ex2;

float ter1, ter2, ter3, ter4;

float deq1; /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g; /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float aux1, aux2; /* variables auxiliares para */
                 /* el observador de frccion */

float z01, z02;   /* observaciones del estado interno z */

float z1=0;      /* integral de error de velocidad 1 */
float z2=0;      /* integral de error de velocidad 2 */

```

```

float fce1, fce2; /* estimacion de la friccion de coulomb */

float t;          /* tiempo real */

float indice=0.0; /* variables para indice de desempeo */
float norma=0.0;

/*----- cuerpo -----*/

t=Tiempo_real;

if (t <= 0.002)
{
  norma = 0.0;
  z1 = 0.0;
  z2 = 0.0;
}

/* ----- dinamica del robot -----*/

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

/* ----- Referencias de velocidad -----*/

tr1=3*a*c1*t*t*exp(-a*t*t*t);
tr2=3*a*c2*t*t*exp(-a*t*t*t)*sin(w1*t);
tr3=c2*w1*(1-exp(-a*t*t*t))*cos(w1*t);

```

```

dq1d=tr1+tr2+tr3;                               /* vel. deseada 1 */

ex1=exp(-a*t*t*t);
tr4=3*a*c1*(2*t*ex1-3*a*t*t*t*t*ex1);
tr5=6*a*c2*t*ex1*sin(w1*t);
tr6=3*a*c2*t*t*(w1*ex1*cos(w1*t)-3*a*t*t*ex1*sin(w1*t));
tr7=c2*w1*(3*a*t*t*ex1*cos(w1*t)-w1*(1-ex1)*sin(w1*t));

ddq1d=tr4+tr5+tr6+tr7;                          /* acel. deseada 1 */

tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t);
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t);
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t);

dq2d=tr8+tr9+tr10;                               /* vel. deseada 2 */

ex2=exp(-b*t*t*t);
tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t*t*t*t*ex2);
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t);
tr13=3*b*c4*t*t*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t*t*ex2*sin(w2*t));
tr14=c4*w2*(3*b*t*t*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t));

ddq2d=tr11+tr12+tr13+tr14;                      /* ace. deseada 2 */

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/Pi;
deq2g=deq2*180/Pi;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

z1=z1+deq1*h;
z2=z2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=10.0)
{

```

```

        norma=norma+(deq1g*deq1g+deq2g*deq2g);
    }
    indice=sqrt(norma);

/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/

/* Observador de friccion */

aux1=1+sigma01*fabs(vel1*cgr)*h/fc1;
z01=(z01+(dq1d)*h )/aux1;

aux2=1+sigma02*fabs(vel2*cgr)*h/fc2;
z02=(z02+(dq2d)*h )/aux2;

fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/* terminos del controlador */

if (vel1<0.0)
{
    signo1=-1.0;
}
else
{
    signo1=1.0;
}

if (vel2<0.0)
{
    signo2=-1.0;
}
else
{
    signo2=1.0;
}

fcc1=fc1*signo1;
fcc2=fc2*signo2;

ter1=g1+kv1*deq1+kp1*z1+fcc1; /* +sigma01*z01; */
ter2=g2+kv2*deq2+kp2*z2+fcc2; /* +sigma02*z02; */

```

```

ter3=c11*(dq1d)+c12*(dq2d)+ter1+b1c*vel1*cgr;
ter4=c21*(dq1d)+c22*(dq2d)+ter2+b2c*vel2*cgr;

tau1=m11*(ddq1d)+m12*(ddq2d)+ter3;
tau2=m12*(ddq1d)+m22*(ddq2d)+ter4;

```

C.7 Listado del programa cj00.rob

La implementación de los controladores jerárquicos se llevó a cabo usando el modelo de programación avanzada. El programa principal es `cj00.rob`, el cual requiere el programa especificado en el módulo de programación avanzada. En caso de las implementaciones de control jerárquico presentadas se trata de los programas `input1.rob`, `input2.rob`, `input4.rob`, `input5.rob`, `input7.rob` e `input8.rob`.

```

/*****/
/* cj00.rob */
/* Ejecucion en SPAC (original SEAC) */
/* Robot Bugarin vertical con motor DM1015B NUEVO */
/* */
/* Robot de dos grados de libertad */
/* Control jerarquico */
/* */
/* REQUIERE: inputX.rob en modulo de programacion avanzada */
/* Nota: X=1,...,9 o */
/* SIR01.rob (campo de velocidad, lazo interno PD+ de velocidad) */
/* */
/* inputX.rob denota cada uno de los controladores */
/* implementados usando el esquema de control */
/* basados en lazos internos de velocidad articular */
/* con compensacion de friccion */
/* */
/* 03 de junio del 2002, JM */
/* 04 de julio de 2002, JM, RK */
/*****/

/* ----- Cuerpo del programa ----- */

/* Ajuste de variables del sistema correspondiente al robot */
/* Robot: Bugarin vertical con NUEVO motor 1: DM1015B */
/* Motor 1: DM1015B NUEVO */
/* Motor 2: DM1004C */

/* Ajustes para motor 1: */

```

```

Limite_encordado_1=1655360;
Limite_saturacion_1=15.0; /* Saturacion motor 1 = 15 Nm */
Limite_velocidad_1=720.0;
Par_conversion_1=0.0257; /* antes 0.03016; */
Kp1_casa= 8.0; /* Para rutina de ir a casa */
Kv1_casa= 0.16; /* Para rutina de ir a casa */
Lambda1_casa=2.5; /* Para rutina de ir a casa */
Resolucion_1_pulsos=655360.0;

/* Ajustes para motor 2: */
Limite_encordado_2=1966080;
Limite_saturacion_2=4.0; /* Saturacion motor 2 = 4 Nm */
Limite_velocidad_2=720.0;
Par_conversion_2=0.0877; /* antes 0.1; Factor experimental; 18 agosto 98 */
Kp2_casa= 4.0; /* Para rutina de ir a casa */
Kv2_casa= 0.01; /* Para rutina de ir a casa */
Lambda2_casa=1.80; /* Para rutina de ir a casa */
Resolucion_2_pulsos=655360.0;

Switch_gravedad_casa=0.0; /* Para rutina de ir a casa */
Periodo_muestreo = 0.001;

Controlador();

tau1=ENTRADA1;
tau2=ENTRADA2;

```

C.8 Listado del programa input1.rob

Listado del programa SPAC para ser usado en el modelo de programación avanzada. *Control jerárquico de movimiento usando lazo interno de velocidad basado en dinámica inversa.* El lazo interno considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

```

/*****/
/* input1.rob */
/* Uso: modelo de programacion avanzada */
/* */
/* En el presente modulo de programa se calculan los */
/* pares de entrada al manipulador por medio de: */
/* Control se seguimiento en el espacio operacional */
/* Robot de dos grados de libertad */

```

```

/* Control jerarquico, */
/* Lazo interno de velocidad basado en Dinamica Inversa */
/* Compensacion de friccion basda en el modelo de Dahl */
/* */
/* Tarea: Trazar un circulo en coordenadas operacionales */
/* */
/* Operado desde el programa */
/* cj00.rob */
/* */
/* Modificado 3/junio/2002 */
/* */
/*****/

/* ----- Definicion de variables globales ----- */

float ENTRADA1;
float ENTRADA2;

float rho1, rho2;

float k01=0.0045; /* 0.001;          /* Ganancia observador de friccion */
float k02=0.0045; /* 0.001; */

float kv1=15.0; /* 60.0;    /* Ganancia derivativa - lazo interno */
float kv2=40.0; /* 15.0; /* 60.0; */

float ki1=100.0; /* 900.0;    /* Ganancia integrativa - lazo interno */
float ki2=400.0; /* 100.0; /* 900.0; */

float k11=10.0;          /* Ganancia del lazo externo */
float k22=10.0;

float b1c=0.2741;      /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;
float fc1 = 1.29;      /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;
float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */
float sigma02 = 2764.0;

float h=0.001;          /* Periodo de muestreo */

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */

```

```

float g=9.81;          /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;           /* posicion articular 1 */
float pos2;           /* posicion articular 2 */
float pos3;           /* posicion articular 3 */

float vel1;           /* velocidad articular 1 */
float vel2;           /* velocidad articular 2 */
float vel3;           /* velocidad articular 3 */

float tau1;           /* torque 1 */
float tau2;           /* torque 2 */
float tau3;           /* torque 3 */

float m11, m12, m21, m22; /* variables matriz de inercia */
float c11, c12, c21, c22; /* variables matriz de Coriolis */
float g1,g2;          /* variables vector de gravedad */

float kp1a, kp2a;     /* ganancia derivativa control de posicion Tan-h */
float kv1a, kv2a;     /* ganancia proporcional control Tan-h */
float lambda1, lambda2; /* ganancia lambda Tanh(lambda*x) */
float qd1, qd2;      /* posicion articular deseada */
float error1, error2; /* error de posicion */

float y1, y2;         /* cinematica directa */
float j11, j12, j21, j22; /* jacobiano del robot */
float detj;           /* determinante del jacobiano */
float dy1, dy2;       /* cinematica diferencial */
float ji11, ji12;     /* inversa del jacobiano */
float ji21, ji22;
float super01, super02; /* variable auxiliar */
float dtj11, dtj12;   /* derivada temporal del jacobiano */
float dtj21, dtj22;

float dtji11, dtji12; /* derivada temporal de la inversa del jacobiano */
float dtji21, dtji22;

float dtdetj;        /* derivada temporal del determinante del jacobiano */

float yd1c, yd2c;    /* Centro del circulo */
float r0;             /* Radio del circulo */
float v0;             /* Velocidad tangencial */
float yd1, yd2;      /* Posicion deseada en el espacio operacional */
float dyd1, dyd2;    /* Velocidad deseada en el espacio operacional */
float ddyd1, ddyd2; /* Aceleracion deseada en el espacio operacional */

```



```

float yt1, yt2;          /* Error de posicion en el espacio operacional */
float dyt1, dyt2;      /* Error de velocidad en el espacio operacional */

float delev;           /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

float econt;          /* Error de contorno */

float nec;            /* Pata calculo del valor rms del error de contorno */
float necr;          /* Raiz cuadrada de nec */

float dq1d, dq2d;     /* velocidad deseada en el espacio articular */
float ddq1d, ddq2d;  /* aceleracion deseada en el espacio articular */
float acenum1;        /* variables auxiliares para calcular aceleracion */
float acenum2;
float acenum3;
float acenum4;

float deq1;           /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g;          /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float z01, z02;       /* observaciones del estado interno z */
float x1, x2;         /* estado del observador de friccion */

float aux11, aux12;   /* variables auxiliares para */
float aux21, aux22;   /* el observador de frccion */

float xi1;            /* integral de error de velocidad 1 */
float xi2;            /* integral de error de velocidad 2 */

float v1, v2;         /* variable auxiliar del controlador */

float fce1, fce2;     /* Estimacion de la friccion seca (de Coulomb) */

float signo1, signo2; /* signo de la velocidad articular */
float fcc1, fcc2;     /* Torque debido a la friccion de Coulomb */

float t;              /* tiempo real */
float indice;         /* variables para indice de desempeo */
float norma;

```

```

/* ----- */
/* Controlador(); */
/* Calcula los pares y los asigna */
/* a las variables definidas arriba */
/* ----- */

void Controlador()
{

/* ----- Definicion de variables y constantes ----- */

/*----- CUERPO DE LA FUNCION -----*/

extern float Tiempo_real;

t=Tiempo_real;          /* Tiempo real */

/* ----- Modelo dinamico del robot -----*/

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

if(Tiempo_real<10.0) {

        /* Ganacias del controlador */

```

```

kp1a=8.0; /* antes 18.0; */
kv1a=0.16; /* antes 1.0; */
lambda1=2.5; /* antes 4.0; */
kp2a=4.0; /* antes 1.5; */
kv2a=0.01;
lambda2=1.8; /* antes 4.0; */

/* Posiciones articulares deseadas INICIALES */

qd1=41.5644; /* posicion inicial y1=0.111 */
qd2=96.8712; /* posicion inicial y2=0.0 */

/* Error en coordenadas articulares */

error1=qd1-pos1;
error2=qd2-pos2;

/* Ley de control Tanh-D con compensacion de gravedad */

ENTRADA1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
ENTRADA2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;

/* Para iniciar en cero las variables que se integran en el tiempo */
norma = 0.0; /* Indice de desempehno: valor RMS del error */
/* en el espacio operacional */
xi1 = 0.0; /* Integral del error de velocidad */
xi2 = 0.0;
x1 =0.0; /* Estado del observador de friccion */
x2 =0.0;
rho1=0.0; /* Integral del error de campo de velocidad */
rho2=0.0;
nec = 0.0; /* Valor rms del error de contorno */
}

else {

/* -----Cinematica directa y diferencial -----*/

/* Modelo cinematico */
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);

```

```

/* Jacobiano del robot */

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Determinante jacobiano */
detj=j11*j22-j12*j21;

/* Modelo cinematico diferencial */
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr;
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr;

/* Matriz inversa del jacobiano */

ji11= j22/detj;
ji12= -j12/detj;
ji21= -j21/detj;
ji22= j11/detj;

/* Derivada temporal del Jacobiano del robot */

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01;

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02;

dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

/* Derivada temporal del determinante jacobiano */
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 );

/* Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano */

dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj);
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj);
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj);
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj);

/*----- Referencia en el espacio operacional -----*/

```

```

yd1c = 0.26;
yd2c = 0.0;

r0 = 0.085; /* Radio del circulo 8.5 [cm] */
v0 = 0.65; /* Velocidad tangencial 10 [ cm/seg ] */

/* Posicion deseada */
yd1= yd1c + r0*cos((v0/r0)*(t-10));
yd2= yd2c + r0*sin((v0/r0)*(t-10));

/* Velocidad deseada */
dyd1= -v0*sin((v0/r0)*(t-10));
dyd2= v0*cos((v0/r0)*(t-10));

/* Aceleracion deseada */
ddy1= -v0*(v0/r0)*cos((v0/r0)*(t-10));
ddy2= -v0*(v0/r0)*sin((v0/r0)*(t-10));

/* Error de posicion en cordenadas operacionales */

yt1=yd1-y1;
yt2=yd2-y2;

/* Error de velocidad en cordenadas operacionales */

dyt1=dyd1-dy1;
dyt2=dyd2-dy2;

devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2); /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

/* Error de contorno */
econt=econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c));

/*----- Referencias de velocidad para el lazo interno -----*/

/* Velocidad deseada */

dq1d= ji11* (dyd1+ k11*yt1) + ji12*(dyd2+ k22*yt2);
dq2d= ji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji22*(dyd2+ k22*yt2);

/* Aceleracion deseada */

```

```

acenum1=dtji11*(dyd1+ k11*yt1) + ji11*(ddy1+ k11*dyt1);
acenum2=dtji12*(dyd2+ k22*yt2) + ji12*(ddy2+ k22*dyt2);

ddq1d= acenum1 + acenum2;

acenum3= dtji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji21* (ddy1+ k11*dyt1);
acenum4= dtji22* (dyd2+ k22*yt2) + ji22* (ddy2+ k22*dyt2);

ddq2d= acenum3 + acenum4;

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/3.1416;
deq2g=deq2*180/3.1416;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

xi1=xi1+deq1*h;
xi2=xi2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=30.0)
{
norma=norma+( yt1*yt1 + yt2*yt2 );      /* calculo del valor rms para error */
                                        /* de posicion                        */

nec  = nec + econt*econt;              /* calculo del valor rms para error */
                                        /* de contorno                        */
}

indice =sqrt(norma);
necr   =sqrt(nec);

/* -----*/
/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/

```

```

/* Observador de friccion */

aux11=kv1*deq1+ki1*xi1;
aux12=x1/h -(sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1)*k01*deq1 + vel1*cgr + k01*(aux11);
x1=aux12/(1/h + sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1);

z01=x1+k01*deq1;

aux21=kv2*deq2+ki2*xi2;
aux22=x2/h -(sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2)*k02*deq2 + vel2*cgr + k02*(aux21);
x2=aux22/(1/h + sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2 );

z02=x2+k02*deq2;

/* Estimacion de la friccion de Coulomb */
fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/*----- Controlador ----- */

/* Calculo del signo de la velocidad articular */
/* en caso de compensar friccion de Coulomb */
if (vel1<0.0)
{
  signo1=-1.0;
}
else
{
  signo1=1.0;
}
if (vel2<0.0)
{
  signo2=-1.0;
}
else
{
  signo2=1.0;
}

fcc1=fc1*signo1; /* Friccion de Coulomb, articulacion 1 */
fcc2=fc2*signo2; /* Friccion de Coulomb, articulacion 2 */

/* Control basado en dinamica inversa */

```

```

v1=ddq1d+kv1*deq1+ki1*xi1;
v2=ddq2d+kv2*deq2+ki2*xi2;

ENTRADA1=m11*v1+m12*v2 + c11*vel1*cgr+c12*vel2*cgr + g1 + b1c*vel1*cgr
+ 0.0*sigma01*z01 + 0.0*fcc1;
ENTRADA2=m21*v1+m22*v2 + c21*vel1*cgr+c22*vel2*cgr + g2 + b2c*vel2*cgr
+ 0.0*sigma02*z02 + 0.0*fcc2;

} /* cierra con IF -- ELSE */

} /* cierra con la funcion Controlador () */

```

C.9 Listado del programa input2.rob

Listado del programa SPAC para ser usado en el modelo de programación avanzada. *Control jerárquico de movimiento usando lazo interno de velocidad basado en PD con compensación.* El lazo interno considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

```

/*****
/* input2.rob */
/* Uso: modelo de programacion avanzada */
/*
/* En el presente modulo de programa se calculan los */
/* pares de entrada al manipulador por medio de: */
/* Control se seguimiento en el espacio operacional */
/* Robot de dos grados de libertad */
/* --->Robot Bugarin vertical<--- */
/* Control jerarquico, */
/* Lazo interno de velocidad */
/* basado en control PD con compensacion */
/* Compensacion de friccion basda en el modelo de Dahl */
/*
/* Tarea: Trazar un circulo en coordenadas operacionales */
/*
/* Operado desde el programa */
/* cj00.rob */
/*
/* Modificado 3/junio/2002 */
/*
/*****

```



```

/* ----- Definicion de variables globales ----- */

float ENTRADA1;
float ENTRADA2;

float ki1=10.0;      /* Ganancia integrativa -lazo interno */
float ki2=5.0;

float kv1=5.0;      /* Ganancia derivativa - lazo interno */
float kv2=4.0;

float la1=2.0;      /* Ganancia lambda = Kv^{-1}Ki -lazo interno */
float la2=1.25;

float k11=10.0;     /* Ganancia del lazo externo */
float k22=10.0;

float x1,x2;
float b1c=0.2741;   /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;
float fc1 = 1.29;   /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;
float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */
float sigma02 = 2764.0;

float h=0.001;     /* Periodo de muestreo */

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */
float g=9.81;      /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;        /* posicion articular 1 */
float pos2;        /* posicion articular 2 */
float pos3;        /* posicion articular 3 */

float vel1;        /* velocidad articular 1 */
float vel2;        /* velocidad articular 2 */
float vel3;        /* velocidad articular 3 */

float tau1;        /* torque 1 */
float tau2;        /* torque 2 */
float tau3;        /* torque 3 */

```

```

float ter1, ter2; /* Variables auxiliares para calcular el par */
float ter3, ter4;

float m11, m12, m21, m22; /* variables matriz de inercia */
float c11, c12, c21, c22; /* variables matriz de Coriolis */
float g1,g2; /* variables vector de gravedad */

float kp1a, kp2a; /* ganancia derivativa control de posicion Tan-h */
float kv1a, kv2a; /* ganancia proporcional control Tan-h */
float lambda1, lambda2; /* ganancia lambda Tanh(lambda*x) */
float qd1, qd2; /* posicion articular deseada */
float error1, error2; /* error de posicion */

float y1, y2; /* cinematica directa */
float j11, j12, j21, j22; /* jacobiano del robot */
float detj; /* determinante del jacobiano */
float dy1, dy2; /* cinematica diferencial */
float ji11, ji12; /* inversa del jacobiano */
float ji21, ji22;
float super01, super02; /* variable auxiliar */
float dtj11, dtj12; /* derivada temporal del jacobiano */
float dtj21, dtj22;

float dtji11, dtji12; /* derivada temporal de la inversa del jacobiano */
float dtji21, dtji22;

float dtdetj; /* derivada temporal del determinante del jacobiano */

float yd1c, yd2c; /* Centro del circulo */
float r0; /* Radio del circulo */
float v0; /* Velocidad tangencial */
float yd1, yd2; /* Posicion deseada en el espacio operacional */
float dyd1, dyd2; /* Velocidad deseada en el espacio operacional */
float ddyd1, ddyd2; /* Aceleracion deseada en el espacio operacional */

float yt1, yt2; /* Error de posicion en el espacio operacional */
float dyt1, dyt2; /* Error de velocidad en el espacio operacional */

float delev; /* Desviacion de la velocidad del extremo final
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

float econt; /* Error de contorno */

float nec; /* Pata calculo del valor rms del error de contorno */
float necr; /* Raiz cuadrada de nec */

```

```

float dq1d, dq2d;          /* velocidad deseada en el espacio articular */
float ddq1d, ddq2d;       /* aceleracion deseada en el espacio articular */

float acenum1;            /* variables auxiliares para calcular aceleracion */
float acenum2;
float acenum3;
float acenum4;

float deq1;               /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g;              /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float z01, z02;          /* observaciones del estado interno z */

float aux1, aux2;        /* variables auxiliares para */
                        /* el observador de frccion */

float xi1;                /* integral de error de velocidad 1 */
float xi2;                /* integral de error de velocidad 2 */

float fce1, fce2;        /* Estimacion de la friccion seca (de Coulomb) */

float signo1, signo2;    /* signo de la velocidad articular */
float fcc1, fcc2;        /* Torque debido a la friccion de Coulomb */

float t;                  /* tiempo real */
float indice;            /* variables para indice de desempeo */
float norma;

/* ----- */
/* Controlador();        */
/* Calcula los pares y los asigna */
/* a las variables definidas arriba */
/* ----- */

void Controlador()
{

/* ----- Definicion de variables y constantes ----- */

```

```

/*----- CUERPO DE LA FUNCION -----*/

extern float Tiempo_real;
t=Tiempo_real;          /* Tiempo real */

/* ----- Modelo dinamico del robot -----*/

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

if(Tiempo_real<10.0) {

    /* Ganacias del controlador */
    kp1a=8.0; /* antes 18.0; */
    kv1a=0.16; /* antes 1.0; */
    lambda1=2.5; /* antes 4.0; */
    kp2a=4.0; /* antes 1.5; */
    kv2a=0.01;
    lambda2=1.8; /* antes 4.0; */

    /* Posiciones articulares deseadas INICIALES */

    qd1=41.5644; /* posicion inicial y1=0.111 */
    qd2=96.8712; /* posicion inicial y2=0.0 */

    /* Error en coordenadas articulares */

```

```

error1=qd1-pos1;
error2=qd2-pos2;

/* Ley de control Tanh-D con compensacion de gravedad */

ENTRADA1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
ENTRADA2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;

/* Para iniciar en cero las variables que se integran en el tiempo */
norma = 0.0; /* Indice de desempehno: valor RMS del error */
/* en el espacio operacional */
xi1 = 0.0; /* Integral del error de velocidad */
xi2 = 0.0;
x1 =0.0; /* Estado del observador de friccion */
x2 =0.0;
nec = 0.0; /* Valor rms del error de contorno */
}

else {

/* -----Cinematica directa y diferencial -----*/

/* Modelo cinematico */
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Jacobiano del robot */

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Determinante jacobiano */
detj=j11*j22-j12*j21;

/* Modelo cinematico diferencial */
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr;
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr;

/* Matriz inversa del jacobiano */

ji11= j22/detj;

```

```

ji12= -j12/detj;
ji21= -j21/detj;
ji22=  j11/detj;

/* Derivada temporal del Jacobiano del robot */

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01;

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02;

dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

/* Derivada temporal del determinante jacobiano */
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 );

/* Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano */

dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj);
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj);
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj);
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj);

/*----- Referencia en el espacio operacional -----*/

yd1c = 0.26;
yd2c = 0.0;

r0 = 0.085; /* Radio del circulo 8.5 [cm] */
v0 = 0.65; /* Velocidad tangencial 10 [ cm/seg ] */

/* Posicion deseada */
yd1= yd1c + r0*cos((v0/r0)*(t-10));
yd2= yd2c + r0*sin((v0/r0)*(t-10));

/* Velocidad deseada */
dyd1= -v0*sin((v0/r0)*(t-10));
dyd2=  v0*cos((v0/r0)*(t-10));

/* Aceleracion deseada */
ddy1= -v0*(v0/r0)*cos((v0/r0)*(t-10));
ddy2= -v0*(v0/r0)*sin((v0/r0)*(t-10));

```

```

/* Error de posicion en cordenadas operacionales */

yt1=yd1-y1;
yt2=yd2-y2;

/* Error de velocidad en cordenadas operacionales */

dyt1=dyd1-dy1;
dyt2=dyd2-dy2;

devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2); /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

/* Error de contorno */
econt=econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c));

/*----- Referencias de velocidad para el lazo interno -----*/

/* Velocidad deseada */

dq1d= ji11* (dyd1+ k11*yt1) + ji12*(dyd2+ k22*yt2);
dq2d= ji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji22*(dyd2+ k22*yt2);

/* Aceleracion deseada */

acenum1=dtji11*(dyd1+ k11*yt1) + ji11*(ddy1+ k11*dyt1);
acenum2=dtji12*(dyd2+ k22*yt2) + ji12*(ddy2+ k22*dyt2);

ddq1d= acenum1 + acenum2;

acenum3= dtji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji21* (ddy1+ k11*dyt1);
acenum4= dtji22* (dyd2+ k22*yt2) + ji22* (ddy2+ k22*dyt2);

ddq2d= acenum3 + acenum4;

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

```

```

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/3.1416;
deq2g=deq2*180/3.1416;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

xi1=xi1+deq1*h;
xi2=xi2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=30.0)
{
    norma=norma+( yt1*yt1 + yt2*yt2 );      /* calculo del valor rms para error */
                                           /* de posicion                      */

    nec = nec + econt*econt;                /* calculo del valor rms para error */
                                           /* de contorno                      */
}

indice =sqrt(norma);
necr   =sqrt(nec);

/* -----*/
/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/

/* Observador de friccion */

aux1=1+sigma01*fabs(vel1*cgr)*h/fc1;
z01=(z01+(dq1d+la1*xi1)*h )/aux1;

aux2=1+sigma02*fabs(vel2*cgr)*h/fc2;
z02=(z02+(dq2d+la2*xi2)*h )/aux2;

/* Estimacion de la friccion de Coulomb */
fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/*----- Controlador ----- */

/* Calculo del signo de la velocidad articular */

```



```

/* en caso de compensar friccion de Coulomb */
if (vel1<0.0)
{
  signo1=-1.0;
}
else
{
  signo1=1.0;
}
if (vel2<0.0)
{
  signo2=-1.0;
}
else
{
  signo2=1.0;
}

fcc1=fc1*signo1; /* Friccion de Coulomb, articulacion 1 */
fcc2=fc2*signo2; /* Friccion de Coulomb, articulacion 2 */

/* Control basado en Control PD con compensacion */

ter1=g1+kv1*deq1+ki1*xi1 + b1c*vel1*cgr +0.0*sigma01*z01+0.0*fcc1;
ter2=g2+kv2*deq2+ki2*xi2 + b2c*vel2*cgr +0.0*sigma02*z02+0.0*fcc2;

ter3=c11*(dq1d+la1*xi1)+c12*(dq2d+la2*xi2)+ter1;
ter4=c21*(dq1d+la1*xi1)+c22*(dq2d+la2*xi2)+ter2;

ENTRADA1=m11*(ddq1d+la1*deq1)+m12*(ddq2d+la2*deq2)+ter3;
ENTRADA2=m12*(ddq1d+la1*deq1)+m22*(ddq2d+la2*deq2)+ter4;

} /* cierra con IF -- ELSE */

} /* cierra con la funcion Controlador () */

```

C.10 Listado del programa input4.rob

Listado del programa SPAC para ser usado en el modelo de programación avanzada. *Control jerárquico por campo de velocidad usando lazo interno de velocidad basado en dinámica inversa.* El lazo interno considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

```

/*****
/* input4.rob */
/* Uso: modelo de programacion avanzada */
/*
/* En el presente modulo de programa se calculan los */
/* pares de entrada al manipulador por medio de: */
/* Control por campo de velocidad */
/* Robot de dos grados de libertad: BUGARIN vertical */
/* Control jerarquico, */
/* Lazo interno de velocidad basado en Dinamica Inversa */
/* Compensacion de friccion basda en el modelo de Dahl */
/*
/* Tarea: Trazar un circulo en coordenadas operacionales */
/*
/* Operado desde el programa */
/* cj00.rob */
/*
/* 08 de mayo del 2002, JM */
/* Modificado 3/junio/2002 */
/*
*****/

/* ----- Definicion de variables globales ----- */

float ENTRADA1; /* par 1 generado por el controlador */
float ENTRADA2; /* par 2 generado por el controlador */

float k01=0.0045; /* Ganancia 1 observador de friccion */
float k02=0.0045; /* Ganancia 2 observador de friccion */

float kv1=15.0; /* Ganancia derivativa - lazo interno */
float kv2=40.0;

float ki1=100.0; /* Ganancia integrativa - lazo interno */
float ki2=400.0;

float k11=10.0; /* antes 15.0; /* Ganancia del lazo externo */
float k22=10.0; /* antes 15.0; */

float pos1; /* posicion articular 1 */
float pos2; /* posicion articular 2 */
float vel1; /* velocidad articular 1 */
float vel2; /* velocidad articular 2 */
float tau1; /* torque 1 */

```

```

float tau2;          /* torque 2 */

float y1, y2;

float b1c=0.2741;    /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;

float fc1 = 1.29;    /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;

float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */
float sigma02 = 2764.0;

float h=0.001;      /* Periodo de muestreo */

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */
float g=9.81;       /* aceleracion de la gravedad */

float m11, m12, m21, m22; /* variables matriz de inercia */
float c11, c12, c21, c22; /* variables matriz de Coriolis */
float g1,g2;        /* variables vector de gravedad */

float kp1a, kp2a;    /* ganancia derivativa control de posicion Tan-h */
float kv1a, kv2a;    /* ganancia proporcional control Tan-h */
float lambda1, lambda2; /* ganancia lambda Tanh(lambda*x) */
float qd1, qd2;     /* posicion articular deseada */
float error1, error2; /* error de posicion */

/* float y1, y2;          /* cinematica directa */
float j11, j12, j21, j22; /* jacobiano del robot */
float detj;             /* determinante del jacobiano */
float dy1, dy2;        /* cinematica diferencial */
float ji11, ji12;      /* inversa del jacobiano */
float ji21, ji22;
float super01, super02; /* variable auxiliar */
float dtj11, dtj12;    /* derivada temporal del jacobiano */
float dtj21, dtj22;

float dtji11, dtji12; /* derivada temporal de la inversa del jacobiano */
float dtji21, dtji22;

float dtdetj;         /* derivada temporal del determinante del jacobiano */

float yd1c, yd2c;    /* Centro del circulo */
float r0;            /* Radio del circulo */

```

```

float v0;                /* Velocidad tangencial */

float alpha=50.0;       /* Parametro del campo de velocidad */
                        /* relacionado con la componente tangente */
float ko=0.65;         /* Ganancias ko y co asociadas al campo de velocidad */
float co;

float epsilon=0.00075;
float lambda=5000.0;   /* Parametro usado para aproximar la derivada */
                        /* del valor absoluto */

float f, dtf;
float x, y, dx, dy, w1, w2;
float dist, dtdist, delfx, delfy;
float dtdelfx, dtdelfy;
float k1, c1, dendtk1, dtk1, dtc1;
float vy1, vy2, ax, ay, terx, tery;
float norx, dvy1, dvy2;

float xc, yc;
float ro;

float rho1, rho2;      /* Integral del error de campo de velocidad */

float dq1d, dq2d;      /* velocidad deseada en el espacio articular */
float ddq1d, ddq2d;   /* aceleracion deseada en el espacio articular */
float acenum1;         /* variables auxiliares para calcular aceleracion */
float acenum2;
float acenum3;
float acenum4;

float deq1;            /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g;           /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float z01, z02;       /* observaciones del estado interno z */
float x1, x2;         /* estado del observador de friccion */

float aux11, aux12;   /* variables auxiliares para */
float aux21, aux22;   /* el observador de frccion */

float xi1;             /* integral de error de velocidad 1 */
float xi2;             /* integral de error de velocidad 2 */

```

```

float v1, v2;          /* variable auxiliar del controlador */

float fce1, fce2;     /* Estimacion de la friccion seca (de Coulomb) */

float signo1, signo2; /* signo de la velocidad articular */
float fcc1, fcc2;     /* Torque debido a la friccion de Coulomb */

float t;              /* tiempo real */

float nec;            /* Para calculo del valor rms del error de contorno */
float norma;

float indice;        /* variables para indice de desempeo */

float ev1, ev2;      /* Error de campo de velocidad en */
                    /* coordenadas operacionales */
float devel;         /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
                    /* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */
float econt;         /* Error de contorno */
float necr;          /* Raiz cuadrada de nec */

/* ----- */
/* Controlador(); */
/* Calcula los pares y los asigna */
/* a las variables definidas arriba */
/* ----- */

void Controlador()
{

/* ----- Definicion de variables y constantes ----- */

/*----- CUERPO DE LA FUNCION -----*/

extern float Tiempo_real;
t=Tiempo_real;      /* Tiempo real */

/* ----- Modelo dinamico del robot -----*/

/* Matriz de inercia */

```

```

m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

if(Tiempo_real<10.0) {

    /* Ganacias del controlador */
    kp1a=8.0; /* antes 18.0; */
    kv1a=0.16; /* antes 1.0; */
    lambda1=2.5; /* antes 4.0; */
    kp2a=4.0; /* antes 1.5; */
    kv2a=0.01;
    lambda2=1.8; /* antes 4.0; */

    /* Posiciones articulares deseadas INICIALES */

    qd1=60.0; /* antes 41.5644; */
    qd2=100.0; /* antes 74.0; */

    /* Error en coordenadas articulares */

    error1=qd1-pos1;
    error2=qd2-pos2;

    /* Ley de control Tanh-D con compensacion de gravedad */

    ENTRADA1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
    ENTRADA2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;

    /* Para iniciar en cero las variables que se integran en el tiempo */
    norma = 0.0; /* Indice de desempehno: valor RMS del error */

```

```

                                /*          en el espacio operacional */
    xi1 = 0.0;                    /* Integral del error de velocidad */
    xi2 = 0.0;
    x1 =0.0;                      /* Estado del observador de friccion */
    x2 =0.0;
    rho1=0.0;                     /* Integral del error de campo de velocidad */
    rho2=0.0;
    nec = 0.0;                    /* Valor rms del error de contorno */
}

else {

/* -----Cinematica directa y diferencial -----*/

/* Modelo cinematico */
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Jacobiano del robot */

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Determinante jacobiano */
detj=j11*j22-j12*j21;

/* Modelo cinematico diferencial */
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr;
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr;

/* Matriz inversa del jacobiano */

ji11= j22/detj;
ji12= -j12/detj;
ji21= -j21/detj;
ji22= j11/detj;

/* Derivada temporal del Jacobiano del robot */

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01;

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

```

```

super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02;

dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

/* Derivada temporal del determinante jacobiano */
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 );

/* Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano */

dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj);
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj);
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj);
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj);

/*----- Referencia en el espacio operacional -----*/

yd1c = 0.26;
yd2c = 0.0;

r0 = 0.085; /* Radio del circulo 8.5 [cm] */
v0 = 0.65; /* Velocidad tangencial 10 [ cm/seg ] */

/* ***** Campo de velocidad ***** */
/* ***** que dibuja un circulo ***** */

co=v0; /* velocidad tangencial al circulo */
x=y1; /* variables auxiliares */
y=y2;
xc=yd1c;
yc=yd2c;
dx=dy1;
dy=dy2;

ro=r0;

/*******/
/* Campo de velocidad que dibuja un circulo en coordenadas */
/* cartesianas */
/*******/

/* Definicion de la funcion f */
f=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc)-(ro)*ro;

```



```

/*      Derivada temporal de f      */
dtf=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy;

/*      Gradiente de f      */
delfx=2*(x-xc);
delfy=2*(y-yc);
dist=sqrt(delfx*delfx+delfy*delfy);
dtdelfx=2*dx;
dtdelfy=2*dy;
dtdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist;

/*      Ganacia k1(q)      */
k1=ko/(fabs(f)*dist+epsilon);

/*      Derivada temporal de k1(q)      */
dendtk1=((fabs(f)*dist+epsilon)*(fabs(f)*dist+epsilon));
dtk1=-ko*(fabs(f)*dtdist+tanh(lambda*f)*dtf*dist)/dendtk1;

/*      Ganancia c1(q)      */
c1=co*exp(-alpha*fabs(f));

/*      Derivada temporal de c1(q)      */
dtc1=-alpha*co*tanh(lambda*f)*dtf*exp(-alpha*fabs(f));

/*      Campo de velocidad      */
vy1=-k1*f*delfx -c1*delfy/dist;
vy2=-k1*f*delfy +c1*delfx/dist;

/*      Variables auxiliares para calcular la derivada      */
/*      temporal del campo de velocidad      */
ax=-dtk1*f*delfx -dtc1*delfy/dist;
ay=-dtk1*f*delfy+dtc1*delfx/dist;

terx=c1*(dist*dtdelfy-dtdist*delfy)/(dist*dist);
tery=c1*(dist*dtdelfx-dtdist*delfx)/(dist*dist);

/*      Derivada temporal del campo de velocidad      */
dvy1=-k1*(dtf*delfx+f*dtdelfx)-terx+ax;
dvy2=-k1*(dtf*delfy+f*dtdelfy)+tery+ay;

/*      Aqui terminan ecuaciones del campo de velocidad      */
devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2); /* Desviacion de la velocidad del extremo final

```

```

/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

/* Error de contorno */
econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c));

/* Error de velocidad en cordenadas operacionales */

ev1=vy1-dy1;
ev2=vy2-dy2;

rho1=rho1 + ev1*h; /* integral del error de campo de velocidad */
rho2=rho2 + ev2*h;

/* Referencias de velocidad para el lazo interno */

/* Velocidad deseada */
dq1d= ji11* (vy1+ k11*rho1) + ji12*(vy2+ k22*rho2);
dq2d= ji21* (vy1+ k11*rho1) + ji22*(vy2+ k22*rho2);

/* Aceleracion deseada */

acenum1=dtji11*(vy1+ k11*rho1) + ji11*(dvy1+ k11*ev1);
acenum2=dtji12*(vy2+ k22*rho2) + ji12*(dvy2+ k22*ev2);

ddq1d= acenum1 + acenum2;

acenum3= dtji21* (vy1+ k11*rho1) + ji21* (dvy1+ k11*ev1);
acenum4= dtji22* (vy2+ k22*rho2) + ji22* (dvy2+ k22*ev2);

ddq2d= acenum3 + acenum4;

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/3.1416;
deq2g=deq2*180/3.1416;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

```

```

xi1=xi1+deq1*h;
xi2=xi2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=30.0)
  {
    norma=norma+( ev1*ev1 + ev2*ev2 );      /* calculo del valor rms para error */
                                           /* de campo de velocidad          */

    nec  = nec + econt*econt;              /* calculo del valor rms para error */
                                           /* de contorno                    */
  }

indice =sqrt(norma);
necr   =sqrt(nec);

/* -----*/
/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/

/* Observador de friccion */

aux11=kv1*deq1+ki1*xi1;
aux12=x1/h -(sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1)*k01*deq1 + vel1*cgr + k01*(aux11);
x1=aux12/(1/h + sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1);

z01=x1+k01*deq1;

aux21=kv2*deq2+ki2*xi2;
aux22=x2/h -(sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2)*k02*deq2 + vel2*cgr + k02*(aux21);
x2=aux22/(1/h + sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2 );

z02=x2+k02*deq2;

/* Estimacion de la friccion de Coulomb */
fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/*----- Controlador ----- */

/* Calculo del signo de la velocidad articular */
/* en caso de compensar friccion de Coulomb */

```

```

if (vel1<0.0)
{
  signo1=-1.0;
}
else
{
  signo1=1.0;
}
if (vel2<0.0)
{
  signo2=-1.0;
}
else
{
  signo2=1.0;
}

fcc1=fc1*signo1;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 1 */
fcc2=fc2*signo2;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 2 */

/* Control basado en dinamica inversa */
v1=ddq1d+kv1*deq1+ki1*xi1;
v2=ddq2d+kv2*deq2+ki2*xi2;

ENTRADA1=m11*v1+m12*v2+c11*vel1*cgr+c12*vel2*cgr+g1+b1c*vel1*cgr
+0.0*sigma01*z01+0.0*fcc1;
ENTRADA2=m21*v1+m22*v2+c21*vel1*cgr+c22*vel2*cgr+g2+b2c*vel2*cgr
+0.0*sigma02*z02+0.0*fcc2;

} /* cierra con IF -- ELSE */

} /* cierra con la funcion Controlador () */

```

C.11 Listado del programa input5.rob

Listado del programa SPAC para ser usado en el modelo de programación avanzada. *Control jerárquico por campo de velocidad usando lazo interno de velocidad basado en PD con compensación.* El lazo interno considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

```

/*****/
/* input5.rob */
/* Robot de Bugarin vertical */

```

```

/* Uso: modelo de programacion avanzada */
/* */
/* En el presente modulo de programa se calculan los */
/* pares de entrada al manipulador por medio de: */
/* Control por campo de velocidad */
/* Robot de dos grados de libertad BUGARIN VERTICAL */
/* Control jerarquico, */
/* Lazo interno de velocidad basado en */
/* control PD con compensacion */
/* */
/* Tarea: Trazar un circulo en coordenadas operacionales */
/* */
/* Operado desde el programa */
/* cj00.rob */
/* */
/* Creado 3/junio/2002, Moreno */
/* */
/*****

/* ----- Definicion de variables globales ----- */

float ENTRADA1; /* par 1 generado por el controlador */
float ENTRADA2; /* par 2 generado por el controlador */

float ki1=10.0; /* Ganancia integrativa - lazo interno */
float ki2=5.0;

float kv1=5.0; /* Ganancia derivativa - lazo interno */
float kv2=4.0;

float la1=2.0; /* Ganancia lambda = Kv^{-1}Ki - lazo interno */
float la2=1.25;

float k11=10.0; /* Ganancia del lazo externo */
float k22=10.0;

float b1c=0.2741; /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;

float fc1 = 1.29; /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;

float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */

```

```

float sigma02 = 2764.0;

float h=0.001;          /* Periodo de muestreo */

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */
float g=9.81;          /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;           /* posicion articular 1 */
float pos2;           /* posicion articular 2 */
float pos3;           /* posicion articular 3 */

float vel1;           /* velocidad articular 1 */
float vel2;           /* velocidad articular 2 */
float vel3;           /* velocidad articular 3 */

float tau1;           /* torque 1 */
float tau2;           /* torque 2 */
float tau3;           /* torque 3 */

float ter1, ter2;     /* Variables auxiliares para calcular el par */
float ter3, ter4;

float m11, m12, m21, m22; /* variables matriz de inercia */
float c11, c12, c21, c22; /* variables matriz de Coriolis */
float g1,g2;          /* variables vector de gravedad */

float kp1a, kp2a;     /* ganancia derivativa control de posicion Tan-h */
float kv1a, kv2a;     /* ganancia proporcional control Tan-h */
float lambda1, lambda2; /* ganancia lambda Tanh(lambda*x) */
float qd1, qd2;       /* posicion articular deseada */
float error1, error2; /* error de posicion */

float y1, y2;         /* cinematica directa */
float j11, j12, j21, j22; /* jacobiano del robot */
float detj;           /* determinante del jacobiano */
float dy1, dy2;       /* cinematica diferencial */
float ji11, ji12;     /* inversa del jacobiano */
float ji21, ji22;

float super01, super02; /* variable auxiliar */
float dtj11, dtj12;    /* derivada temporal del jacobiano */
float dtj21, dtj22;

float dtji11, dtji12; /* derivada temporal de la inversa del jacobiano */
float dtji21, dtji22;

```

```

float dtdetj;          /* derivada temporal del determinante del jacobiano */

float yd1c, yd2c;     /* Centro del circulo */
float r0;             /* Radio del circulo */
float v0;             /* Velocidad tangencial */

float alpha=50.0;     /* Parametro del campo de velocidad */
/* relacionado con la componente tangente */
float ko=0.65;        /* antes 0.1 Ganancias ko y co asociadas al campo de velocidad */
float co;

float epsilon=0.00075;
float lambda=5000.0; /* Parametro usado para aproximar la derivada */
/* del valor absoluto */

float f, dtf;
float x, y, dx, dy, w1, w2;
float dist, dtdist, delfx, delfy;
float dtdelfx, dtdelfy;
float k1, c1, dendtk1, dtk1, dtc1;
float vy1, vy2, ax, ay, terx, tery;
float norx, dvy1, dvy2;

float xc, yc;
float ro;

float ev1, ev2;       /* Error de campo de velocidad en */
/* coordenadas operacionales */

float devel;          /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

float econt;          /* Error de contorno */

float nec;            /* Pata calculo del valor rms del error de contorno */
float necr;           /* Raiz cuadrada de nec */

float rho1, rho2;     /* Integral del error de campo de velocidad */

float dq1d, dq2d;     /* velocidad deseada en el espacio articular */
float ddq1d, ddq2d;  /* aceleracion deseada en el espacio articular */
float acenum1;        /* variables auxiliares para calcular aceleracion */
float acenum2;
float acenum3;

```

```

float acenum4;

float deq1;          /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g;        /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float z01, z02;     /* observaciones del estado interno z */
float x1, x2;       /* estado del observador de friccion */

float aux1, aux2;   /* variables auxiliares para */

float xi1;          /* integral de error de velocidad 1 */
float xi2;          /* integral de error de velocidad 2 */

float fce1, fce2;   /* Estimacion de la friccion seca (de Coulomb) */

float signo1, signo2; /* signo de la velocidad articular */
float fcc1, fcc2;   /* Torque debido a la friccion de Coulomb */

float t;            /* tiempo real */
float indice;       /* variables para indice de desempeo */
float norma;

/* ----- */
/* Controlador(); */
/* Calcula los pares y los asigna */
/* a las variables definidas arriba */
/* ----- */

void Controlador()
{

/* ----- Definicion de variables y constantes ----- */

/*----- CUERPO DE LA FUNCION -----*/

extern float Tiempo_real;
t=Tiempo_real;      /* Tiempo real */

```



```

/* ----- Modelo dinamico del robot -----*/

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

if(Tiempo_real<10.0) {

    /* Ganacias del controlador */
    kp1a=8.0; /* antes 18.0; */
    kv1a=0.16; /* antes 1.0; */
    lambda1=2.5; /* antes 4.0; */
    kp2a=4.0; /* antes 1.5; */
    kv2a=0.01;
    lambda2=1.8; /* antes 4.0; */

    /* Posiciones articulares deseadas INICIALES */

    qd1=60.0; /* antes 41.5644; */
    qd2=100.0; /* antes 74.0; */

    /* Error en coordenadas articulares */

    error1=qd1-pos1;
    error2=qd2-pos2;

    /* Ley de control Tanh-D con compensacion de gravedad */

    ENTRADA1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
    ENTRADA2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;

```

```

/* Para iniciar en cero las variables que se integran en el tiempo */
norma = 0.0; /* Indice de desempehno: valor RMS del error */
/* en el espacio operacional */
xi1 = 0.0; /* Integral del error de velocidad */
xi2 = 0.0;
x1 =0.0; /* Estado del observador de friccion */
x2 =0.0;
rho1=0.0; /* Integral del error de campo de velocidad */
rho2=0.0;
nec = 0.0; /* Valor rms del error de contorno */
}

else {

/* -----Cinematica directa y diferencial -----*/

/* Modelo cinematico */
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Jacobiano del robot */

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Determinante jacobiano */
detj=j11*j22-j12*j21;

/* Modelo cinematico diferencial */
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr;
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr;

/* Matriz inversa del jacobiano */

ji11= j22/detj;
ji12= -j12/detj;
ji21= -j21/detj;
ji22= j11/detj;

/* Derivada temporal del Jacobiano del robot */

```

```

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01;

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02;

dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

/* Derivada temporal del determinante jacobiano */
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 );

/* Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano */

dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj);
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj);
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj);
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj);

/*----- Referencia en el espacio operacional -----*/

yd1c = 0.26;
yd2c = 0.0;

r0 = 0.085; /* Radio del circulo 8.5 [cm] */
v0 = 0.65; /* antes 0.1 Velocidad tangencial 10 [ cm/seg ] */

/* ***** Campo de velocidad ***** */
/* ***** que dibuja un circulo ***** */

co=v0; /* velocidad tangencial al circulo */
x=y1; /* variables auxiliares */
y=y2;
xc=yd1c;
yc=yd2c;
dx=dy1;
dy=dy2;

ro=r0;

/*******/
/* Campo de velocidad que dibuja un circulo en coordenadas */
/* cartesianas */
/*******/

```

```

/*      Definicion de la funcion f      */
f=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc)-(ro)*ro;

/*      Derivada temporal de f      */
dtf=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy;

/*      Gradiente de f      */
delfx=2*(x-xc);
delfy=2*(y-yc);
dist=sqrt(delfx*delfx+delfy*delfy);
dtdelfx=2*dx;
dtdelfy=2*dy;
dtdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist;

/*      Ganancia k1(q)      */
k1=ko/(fabs(f)*dist+epsilon);

/*      Derivada temporal de k1(q)      */
dendtk1=((fabs(f)*dist+epsilon)*(fabs(f)*dist+epsilon));
dtk1=-ko*(fabs(f)*dtdist+tanh(lambda*f)*dtf*dist)/dendtk1;

/*      Ganancia c1(q)      */
c1=co*exp(-alpha*fabs(f));

/*      Derivada temporal de c1(q)      */
dtc1=-alpha*co*tanh(lambda*f)*dtf*exp(-alpha*fabs(f));

/*      Campo de velocidad      */
vy1=-k1*f*delfx -c1*delfy/dist;
vy2=-k1*f*delfy +c1*delfx/dist;

/*      Variables auxiliares para calcular la derivada      */
/*      temporal del campo de velocidad      */
ax=-dtk1*f*delfx -dtk1*delfy/dist;
ay=-dtk1*f*delfy+dtk1*delfx/dist;

terx=c1*(dist*dtdelfy-dtdist*delfy)/(dist*dist);
tery=c1*(dist*dtdelfx-dtdist*delfx)/(dist*dist);

/*      Derivada temporal del campo de velocidad      */
dvy1=-k1*(dtf*delfx+f*dtdelfx)-terx+ax;
dvy2=-k1*(dtf*delfy+f*dtdelfy)+tery+ay;

/*      "*****"      */

```

```

/* Aqui terminan ecuaciones del campo de velocidad      */
/*"*****"*/

devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2); /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

/* Error de contorno */
econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c));

/* Error de velocidad en cordenadas operacionales */

ev1=vy1-dy1;
ev2=vy2-dy2;

rho1=rho1 + ev1*h; /* integral del error de campo de velocidad */
rho2=rho2 + ev2*h;

/* Referencias de velocidad para el lazo interno */

/* Velocidad deseada */
dq1d= ji11* (vy1+ k11*rho1) + ji12*(vy2+ k22*rho2);
dq2d= ji21* (vy1+ k11*rho1) + ji22*(vy2+ k22*rho2);

/* Aceleracion deseada */

acenum1=dtji11*(vy1+ k11*rho1) + ji11*(dvy1+ k11*ev1);
acenum2=dtji12*(vy2+ k22*rho2) + ji12*(dvy2+ k22*ev2);

ddq1d= acenum1 + acenum2;

acenum3= dtji21* (vy1+ k11*rho1) + ji21* (dvy1+ k11*ev1);
acenum4= dtji22* (vy2+ k22*rho2) + ji22* (dvy2+ k22*ev2);

ddq2d= acenum3 + acenum4;

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/3.1416;

```

```

deq2g=deq2*180/3.1416;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

xi1=xi1+deq1*h;
xi2=xi2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=30.0)
  {
    norma=norma+( ev1*ev1 + ev2*ev2 );      /* calculo del valor rms para error */
                                           /* de campo de velocidad          */

    nec  = nec + econt*econt;              /* calculo del valor rms para error */
                                           /* de contorno                    */
  }

indice =sqrt(norma);
necr   =sqrt(nec);

/* -----*/
/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/

/* Observador de friccion */

aux1=1+sigma01*fabs(vel1*cgr)*h/fc1;
z01=(z01+(dq1d+la1*xi1)*h )/aux1;

aux2=1+sigma02*fabs(vel2*cgr)*h/fc2;
z02=(z02+(dq2d+la2*xi2)*h )/aux2;

/* Estimacion de la friccion de Coulomb */
fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/*----- Controlador ----- */

/* Calculo del signo de la velocidad articular */
/* en caso de compensar friccion de Coulomb */
if (vel1<0.0)
  {

```

```

    signo1=-1.0;
  }
  else
  {
    signo1=1.0;
  }
if (vel2<0.0)
  {
    signo2=-1.0;
  }
  else
  {
    signo2=1.0;
  }

fcc1=fc1*signo1;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 1 */
fcc2=fc2*signo2;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 2 */

/* Control basado en Control PD con compensacion */

ter1=g1+kv1*deq1+ki1*xi1 + b1c*vel1*cgr+0.0*sigma01*z01+0.0*fcc1;
ter2=g2+kv2*deq2+ki2*xi2 + b2c*vel2*cgr+0.0*sigma02*z02+0.0*fcc2;

ter3=c11*(dq1d+la1*xi1)+c12*(dq2d+la2*xi2)+ter1;
ter4=c21*(dq1d+la1*xi1)+c22*(dq2d+la2*xi2)+ter2;

ENTRADA1=m11*(ddq1d+la1*deq1)+m12*(ddq2d+la2*deq2)+ter3;
ENTRADA2=m12*(ddq1d+la1*deq1)+m22*(ddq2d+la2*deq2)+ter4;

} /* cierra con IF -- ELSE */

} /* cierra con la funcion Controlador () */

```

C.12 Listado del programa input7.rob

Listado del programa SPAC para ser usado en el modelo de programación avanzada.
Control jerárquico de ruta usando lazo interno de velocidad basado en dinámica inversa.
 El lazo interno considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

```

/*****
/* input7.rob */
/* Uso: modelo de programacion avanzada */

```

```

/*                                                    */
/* En el presente modulo de programa se calculan los */
/* pares de entrada al manipulador por medio de:    */
/* Control de ruta en el espacio operacional         */
/* Robot de dos grados de libertad                 */
/* ---> Robot Bugarin vertical <---                */
/* Control jerarquico,                             */
/* Lazo interno de velocidad basado en Dinamica Inversa */
/* Compensacion de friccion basda en el modelo de Dahl */
/*                                                    */
/* Tarea: Trazar un circulo en coordenadas operacionales */
/*                                                    */
/* Operado desde el programa                        */
/* cj00.rob                                         */
/*                                                    */
/* Modificado 3/junio/2002                         */
/*                                                    */
/*****

/* ----- Definicion de variables globales ----- */

float ENTRADA1;
float ENTRADA2;

float k01=0.0045; /* 0.001;          /* Ganancia observador de friccion */
float k02=0.0045; /* 0.001; */

float kv1=15.0;      /* Ganancia derivativa - lazo interno */
float kv2=40.0;

float ki1=100.0;     /* Ganancia integrativa - lazo interno */
float ki2=400.0;

float k11=5.0;       /* Ganancia del lazo externo */
float k22=5.0;

float ke1=100.0;     /* Ganancias del plan de movimiento extendido */
float ke2=100.0;

float v=1.0;        /* Perfil de velocidad deseado */

```



```

float b1c=0.2741;          /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;
float fc1 = 1.29;         /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;
float sigma01 = 1757.0;   /* Coeficientes de rigidez */
float sigma02 = 2764.0;

float h=0.001;           /* Periodo de muestreo */

float cgr=0.0174532925;  /* conversion de grados a radianes */
float g=9.81;            /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;              /* posicion articular 1 */
float pos2;              /* posicion articular 2 */
float pos3;              /* posicion articular 3 */

float vel1;              /* velocidad articular 1 */
float vel2;              /* velocidad articular 2 */
float vel3;              /* velocidad articular 3 */

float tau1;              /* torque 1 */
float tau2;              /* torque 2 */
float tau3;              /* torque 3 */

float m11, m12, m21, m22; /* variables matriz de inercia */
float c11, c12, c21, c22; /* variables matriz de Coriolis */
float g1,g2;             /* variables vector de gravedad */

float kp1a, kp2a;        /* ganancia derivativa control de posicion Tan-h */
float kv1a, kv2a;        /* ganancia proporcional control Tan-h */
float lambda1, lambda2; /* ganancia lambda Tanh(lambda*x) */
float qd1, qd2;          /* posicion articular deseada */
float error1, error2;    /* error de posicion */

float y1, y2;            /* cinematica directa */
float j11, j12, j21, j22; /* jacobiano del robot */
float detj;              /* determinante del jacobiano */
float dy1, dy2;          /* cinematica diferencial */
float ji11, ji12;        /* inversa del jacobiano */
float ji21, ji22;
float super01, super02; /* variable auxiliar */
float dtj11, dtj12;      /* derivada temporal del jacobiano */
float dtj21, dtj22;

float dtji11, dtji12;    /* derivada temporal de la inversa del jacobiano */

```

```

float dtji21, dtji22;

float dtdetj;          /* derivada temporal del determinante del jacobiano */

float yd1c, yd2c;     /* Centro del circulo */
float r0;             /* Radio del circulo */
float v0;             /* Velocidad tangencial */
float yd1, yd2;       /* Posicion deseada en el espacio operacional */
float dyd1, dyd2;     /* Velocidad deseada en el espacio operacional */
float ddyd1, ddyd2;   /* Aceleracion deseada en el espacio operacional */

float sigma;          /* Parametro de ruta */
float dsigma;         /* Derivada temporal del parametro de ruta */

float ep1, ep2;       /* Error de posicion de ruta en cordenadas operacionales */
float dep1, dep2;     /* Error de velocidad de ruta en cordenadas operacionales */

float delev;          /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

float econt;          /* Error de contorno */

float nec;            /* Pata calculo del valor rms del error de contorno */
float necr;           /* Raiz cuadrada de nec */

float dq1d, dq2d;     /* velocidad deseada en el espacio articular */
float ddq1d, ddq2d;   /* aceleracion deseada en el espacio articular */
float acenum1;        /* variables auxiliares para calcular aceleracion */
float acenum2;
float acenum3;
float acenum4;

float deq1;           /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g;          /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float z01, z02;       /* observaciones del estado interno z */
float x1, x2;         /* estado del observador de friccion */

float aux11, aux12;   /* variables auxiliares para */
float aux21, aux22;   /* el observador de frccion */

float xi1;            /* integral de error de velocidad 1 */

```

```

float xi2;          /* integral de error de velocidad 2 */

float v1, v2;      /* variable auxiliar del controlador */

float fce1, fce2;  /* Estimacion de la friccion seca (de Coulomb) */

float signo1, signo2; /* signo de la velocidad articular */
float fcc1, fcc2;   /* Torque debido a la friccion de Coulomb */

float t;           /* tiempo real */
float indice;     /* variables para indice de desempeo */
float norma;

/* ----- */
/* Controlador(); */
/* Calcula los pares y los asigna */
/* a las variables definidas arriba */
/* ----- */

void Controlador()
{

/*----- CUERPO DE LA FUNCION -----*/

extern float Tiempo_real;
t=Tiempo_real;      /* Tiempo real */

/* ----- Modelo dinamico del robot -----*/

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */

```

```

g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

if(Tiempo_real<10.0) {

    /* Ganacias del controlador */
    kp1a=8.0; /* antes 18.0; */
    kv1a=0.16; /* antes 1.0; */
    lambda1=2.5; /* antes 4.0; */
    kp2a=4.0; /* antes 1.5; */
    kv2a=0.01;
    lambda2=1.8; /* antes 4.0; */

    /* Posiciones articulares deseadas INICIALES */

    qd1=63.025;
    qd2=103.13;

    /* Error en coordenadas articulares */

    error1=qd1-pos1;
    error2=qd2-pos2;

    /* Ley de control Tanh-D con compensacion de gravedad */

    ENTRADA1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
    ENTRADA2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;

    /* Para iniciar en cero las variables que se integran en el tiempo */
    norma = 0.0; /* Indice de desempehno: valor RMS del error */
    /* en el espacion operacional */
    xi1 = 0.0; /* Integral del error de velocidad */
    xi2 = 0.0;
    x1 =0.0; /* Estado del observador de friccion */
    x2 =0.0;
    nec = 0.0; /* Valor rms del error de contorno */
    sigma= 0.0;
}

else {

/* -----Cinematica directa y diferencial -----*/

```

```

/* Modelo cinematico */
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Jacobiano del robot */

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Determinante jacobiano */
detj=j11*j22-j12*j21;

/* Modelo cinematico diferencial */
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr;
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr;

/* Matriz inversa del jacobiano */

ji11= j22/detj;
ji12= -j12/detj;
ji21= -j21/detj;
ji22= j11/detj;

/* Derivada temporal del Jacobiano del robot */

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01;

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02;

dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

/* Derivada temporal del determinante jacobiano */
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 );

/* Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano */

dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj);
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj);
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj);

```

```

dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj);

/*----- Referencia en el espacio operacional -----*/

yd1c = 0.26;
yd2c = 0.0;

r0 = 0.085; /* Radio del circulo 8.5 [cm] */
v0 = 0.65; /* Velocidad tangencial 10 [ cm/seg ] */

/* Ruta deseada */
yd1= yd1c + r0*cos((v0/r0)*sigma);
yd2= yd2c + r0*sin((v0/r0)*sigma);

/* Derivada con respecto a sigma de la ruta deseada */
dyd1= -v0*sin((v0/r0)*sigma);
dyd2= v0*cos((v0/r0)*sigma);

/* Aceleracion deseada */
ddy1= -v0*(v0/r0)*cos((v0/r0)*sigma);
ddy2= -v0*(v0/r0)*sin((v0/r0)*sigma);

/* Error de posicion de ruta en cordenadas operacionales */

ep1=yd1-y1;
ep2=yd2-y2;

/* Error de velocidad de ruta en cordenadas operacionales */

/* Plan de movimiento extendido */
dsigma= v - (ke1*ep1*dyd1 + ke2*ep2*dyd2);

/* Actualizacion de la variable sigma */
sigma= sigma + h*dsigma;

dep1=dyd1*dsigma-dy1;
dep2=dyd2*dsigma-dy2;

devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2); /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

/* Error de contorno */
econt= r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c));

```

```

/* Aceleracion deseada de la ruta */
ddy1= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*cos(v0/r0*sigma)*dsigma*v;
ddy2= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*sin(v0/r0*sigma)*dsigma*v;

/*----- Referencias de velocidad para el lazo interno -----*/

/* Velocidad deseada */
dq1d= ji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji12*(dyd2*v+ k22*ep2);
dq2d= ji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji22*(dyd2*v+ k22*ep2);

/* Aceleracion deseada */

acenum1= dtji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji11* (ddy1 + k11*dep1);
acenum2= dtji12* (dyd2*v+ k11*ep2) + ji12* (ddy2 + k22*dep2);

ddq1d= acenum1 + acenum2;

acenum3= dtji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji21* (ddy1 + k11*dep1);
acenum4= dtji22* (dyd2*v+ k22*ep2) + ji22* (ddy2 + k22*dep2);

ddq2d= acenum3 + acenum4;

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/3.1416;
deq2g=deq2*180/3.1416;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

xi1=xi1+deq1*h;
xi2=xi2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=30.0)
{

```

```

        norma=norma+ ( ep1*ep1 + ep2*ep2 );      /* calculo del valor rms para error */
                                                /* de posicion de ruta                */

        nec  = nec + econt*econt;                /* calculo del valor rms para error */
                                                /* de contorno                        */
    }

    indice =sqrt(norma);
    necr   =sqrt(nec);

/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/
/* ----- Observador de friccion -----*/

aux11=kv1*deq1+ki1*xi1;
aux12=x1/h -(sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1)*k01*deq1 + vel1*cgr + k01*(aux11);
x1=aux12/(1/h + sigma01*fabs(vel1*cgr)/fc1);

z01=x1+k01*deq1;

aux21=kv2*deq2+ki2*xi2;
aux22=x2/h -(sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2)*k02*deq2 + vel2*cgr + k02*(aux21);
x2=aux22/(1/h + sigma02*fabs(vel2*cgr)/fc2 );

z02=x2+k02*deq2;

/* Estimacion de la friccion de Coulomb */
fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/*----- Controlador ----- */

/* Calculo del signo de la velocidad articular */
/* en caso de compensar friccion de Coulomb */
if (vel1<0.0)
{
    signo1=-1.0;
}
else
{

```



```

    signo1=1.0;
  }
  if (vel2<0.0)
  {
    signo2=-1.0;
  }
  else
  {
    signo2=1.0;
  }

  fcc1=fc1*signo1;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 1 */
  fcc2=fc2*signo2;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 2 */

  /* Control basado en dinamica inversa */
  v1=ddq1d+kv1*deq1+ki1*xi1;
  v2=ddq2d+kv2*deq2+ki2*xi2;

  ENTRADA1=m11*v1+m12*v2+c11*vel1*cgr+c12*vel2*cgr+ g1 + b1c*vel1*cgr
  + 0.0*fcc1 + 0.0*sigma01*z01;
  ENTRADA2=m21*v1+m22*v2+c21*vel1*cgr+c22*vel2*cgr+ g2 + b2c*vel2*cgr
  + 0.0*fcc2 + 0.0*sigma02*z02;

} /* cierra con IF -- ELSE */

} /* cierra con la funcion Controlador () */

```

C.13 Listado del programa input8.rob

Listado del programa SPAC para ser usado en el modelo de programación avanzada. *Control jerárquico de ruta usando lazo interno de velocidad basado en PD con compensación.* El lazo interno considera compensación de fricción basada en el modelo de Dahl.

```

/*****
/* input8.rob */
/* Uso: modelo de programacion avanzada */
/*
/* En el presente modulo de programa se calculan los */
/* pares de entrada al manipulador por medio de: */
/* Control de ruta en el espacio operacional */
/* Robot de dos grados de libertad */
/* ---> Robot Bugarin vertical <--- */

```

```

/* Control jerarquico, */
/* Lazo interno de velocidad basado en */
/* Control PD con compensacion */
/* Compensacion de friccion basada en el modelo de Dahl */
/* */
/* Tarea: Trazar un circulo en coordenadas operacionales */
/* */
/* Operado desde el programa */
/* cj00.rob */
/* */
/* Modificado 3/junio/2002 */
/* */
/*****/

/* ----- Definicion de variables globales ----- */

float ENTRADA1;
float ENTRADA2;

float ki1=10.0; /* Ganancia integrativa - lazo interno */
float ki2=5.0;

float kv1=5.0; /* Ganancia derivativa - lazo interno */
float kv2=4.0;

float la1=2.0; /* Ganancia lambda = Kv^{-1}Ki - lazo interno */
float la2=1.25;

float k11=5.0; /* Ganancias del lazo externo de control */
float k22=5.0;

float ke1=100.0; /* Ganancias del plan de movimiento extendido */
float ke2=100.0;

float v=1.0; /* Perfil de velocidad deseado */

float b1c=0.2741; /* Coeficientes de friccion viscosa */
float b2c=0.1713;
float fc1 = 1.29; /* Coeficientes de friccion de Coulomb */
float fc2 = 0.965;
float sigma01 = 1757.0; /* Coeficientes de rigidez */

```

```

float sigma02 = 2764.0;

float h=0.001;          /* Periodo de muestreo */

float cgr=0.0174532925; /* conversion de grados a radianes */
float g=9.81;          /* aceleracion de la gravedad */

float pos1;            /* posicion articular 1 */
float pos2;            /* posicion articular 2 */
float pos3;            /* posicion articular 3 */

float vel1;            /* velocidad articular 1 */
float vel2;            /* velocidad articular 2 */
float vel3;            /* velocidad articular 3 */

float tau1;            /* torque 1 */
float tau2;            /* torque 2 */
float tau3;            /* torque 3 */

float ter1, ter2;     /* Variables auxiliares para calcular el par */
float ter3, ter4;

float m11, m12, m21, m22; /* variables matriz de inercia */
float c11, c12, c21, c22; /* variables matriz de Coriolis */
float g1,g2;          /* variables vector de gravedad */

float kp1a, kp2a;     /* ganancia derivativa control de posicion Tan-h */
float kv1a, kv2a;     /* ganancia proporcional control Tan-h */
float lambda1, lambda2; /* ganancia lambda Tanh(lambda*x) */
float qd1, qd2;       /* posicion articular deseada */
float error1, error2; /* error de posicion */

float y1, y2;         /* cinematica directa */
float j11, j12, j21, j22; /* jacobiano del robot */
float detj;           /* determinante del jacobiano */
float dy1, dy2;       /* cinematica diferencial */
float ji11, ji12;     /* inversa del jacobiano */
float ji21, ji22;

float super01, super02; /* variable auxiliar */
float dtj11, dtj12;    /* derivada temporal del jacobiano */
float dtj21, dtj22;

float dtji11, dtji12; /* derivada temporal de la inversa del jacobiano */
float dtji21, dtji22;

```

```

float dtdej;          /* derivada temporal del determinante del jacobiano */

float yd1c, yd2c;    /* Centro del circulo */
float r0;            /* Radio del circulo */
float v0;            /* Velocidad tangencial */
float yd1, yd2;      /* Posicion deseada en el espacio operacional */
float dyd1, dyd2;    /* Velocidad deseada en el espacio operacional */
float ddyd1, ddyd2; /* Aceleracion deseada en el espacio operacional */

float sigma;         /* Parametro de ruta */
float dsigma;        /* Derivada temporal del parametro de ruta */

float ep1, ep2;      /* Error de posicion de ruta en cordenadas operacionales */
float dep1, dep2;    /* Error de velocidad de ruta en cordenadas operacionales */

float delevel;       /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

float econt;         /* Error de contorno */

float nec;           /* Pata calculo del valor rms del error de contorno */
float necr;          /* Raiz cuadrada de nec */

float dq1d, dq2d;    /* velocidad deseada en el espacio articular */
float ddq1d, ddq2d; /* aceleracion deseada en el espacio articular */
float acenum1;       /* variables auxiliares para calcular aceleracion */
float acenum2;
float acenum3;
float acenum4;

float deq1;          /* errores de velocidad en radianes */
float deq2;

float deq1g;         /* errores de velocidad en grados */
float deq2g;

float z01, z02;      /* observaciones del estado interno z */
float x1, x2;        /* estado del observador de friccion */

float aux1, aux2;    /* variables auxiliares para el observador de frccion */

float xi1;           /* integral de error de velocidad 1 */
float xi2;           /* integral de error de velocidad 2 */

float fce1, fce2;    /* Estimacion de la friccion seca (de Coulomb) */

```

```

float signo1, signo2;    /* signo de la velocidad articular */
float fcc1, fcc2;       /* Torque debido a la friccion de Coulomb */

float t;                /* tiempo real */
float indice;          /* variables para indice de desempeo */
float norma;

/* ----- */
/* Controlador();      */
/* Calcula los pares y los asigna      */
/* a las variables definidas arriba    */
/* ----- */

void Controlador()
{

/*----- CUERPO DE LA FUNCION -----*/

extern float Tiempo_real;
t=Tiempo_real;          /* Tiempo real */

/* ----- Modelo dinamico del robot -----*/

/* Matriz de inercia */
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr);
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr);
m21=m12;
m22=0.01267;

/* Matriz de Coriolis */
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr;
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr;
c22=0.0;

/* Vector de pares gravitacionales */
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g;
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g;

if(Tiempo_real<10.0) {

```

```

/* Ganacias del controlador */
kp1a=8.0; /* antes 18.0; */
kv1a=0.16; /* antes 1.0; */
lambda1=2.5; /* antes 4.0; */
kp2a=4.0; /* antes 1.5; */
kv2a=0.01;
lambda2=1.8; /* antes 4.0; */

/* Posiciones articulares deseadas INICIALES */

qd1=60.0;
qd2=100.0;

/* Error en coordenadas articulares */

error1=qd1-pos1;
error2=qd2-pos2;

/* Ley de control Tanh-D con compensacion de gravedad */

ENTRADA1 = kp1a*tanh(lambda1*error1) - kv1a*vel1 + g1;
ENTRADA2 = kp2a*tanh(lambda2*error2) - kv2a*vel2 + g2;

/* Para iniciar en cero las variables que se integran en el tiempo */
norma = 0.0; /* Indice de desempehno: valor RMS del error */
/* en el espacio operacional */
xi1 = 0.0; /* Integral del error de velocidad */
xi2 = 0.0;
x1 =0.0; /* Estado del observador de friccion */
x2 =0.0;
nec = 0.0; /* Valor rms del error de contorno */
sigma=0.0;
}

else {

/* -----Cinematica directa y diferencial -----*/

/* Modelo cinematico */
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Jacobiano del robot */

```

```

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr);
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr);

/* Determinante jacobiano */
detj=j11*j22-j12*j21;

/* Modelo cinematico diferencial */
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr;
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr;

/* Matriz inversa del jacobiano */

ji11= j22/detj;
ji12= -j12/detj;
ji21= -j21/detj;
ji22= j11/detj;

/* Derivada temporal del Jacobiano del robot */

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01;

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02;

dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr;

/* Derivada temporal del determinante jacobiano */
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 );

/* Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano */

dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj);
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj);
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj);
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj);

/*----- Referencia en el espacio operacional -----*/

yd1c = 0.26;

```

```

yd2c = 0.0;

r0 = 0.085; /* Radio del circulo 8.5 [cm] */
v0 = 0.65; /* Velocidad tangencial 10 [ cm/seg ] */

/* Ruta deseada */
yd1= yd1c + r0*cos((v0/r0)*sigma);
yd2= yd2c + r0*sin((v0/r0)*sigma);

/* Derivada con respecto a sigma de la ruta deseada */
dyd1= -v0*sin((v0/r0)*sigma);
dyd2= v0*cos((v0/r0)*sigma);

/* Aceleracion deseada */
ddy1= -v0*(v0/r0)*cos((v0/r0)*sigma);
ddy2= -v0*(v0/r0)*sin((v0/r0)*sigma);

/* Error de posicion de ruta en cordenadas operacionales */

ep1=yd1-y1;
ep2=yd2-y2;

/* Error de velocidad de ruta en cordenadas operacionales */

/* Plan de movimiento extendido */
dsigma= v - (ke1*ep1*dyd1 + ke2*ep2*dyd2);

/* Actualizacion de la variable sigma */
sigma= sigma + h*dsigma;

dep1=dyd1*dsigma-dy1;
dep2=dyd2*dsigma-dy2;

devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2); /* Desviacion de la velocidad del extremo final */
/* con respecto a la velocidad tangencial al circulo */

/* Error de contorno */
econt= r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c));

/* Aceleracion deseada de la ruta */
ddy1= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*cos(v0/r0*sigma)*dsigma*v;
ddy2= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*sin(v0/r0*sigma)*dsigma*v;

```



```

/*----- Referencias de velocidad para el lazo interno -----*/

/* Velocidad deseada */
dq1d= ji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji12*(dyd2*v+ k22*ep2);
dq2d= ji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji22*(dyd2*v+ k22*ep2);

/* Aceleracion deseada */

acenum1= dtji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji11* (ddy1 + k11*dep1);
acenum2= dtji12* (dyd2*v+ k11*ep2) + ji12* (ddy2 + k22*dep2);

ddq1d= acenum1 + acenum2;

acenum3= dtji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji21* (ddy1 + k11*dep1);
acenum4= dtji22* (dyd2*v+ k22*ep2) + ji22* (ddy2 + k22*dep2);

ddq2d= acenum3 + acenum4;

/*----- Error de velocidad en radianes -----*/

deq1=dq1d-vel1*cgr;
deq2=dq2d-vel2*cgr;

/*----- Error de velocidad en grados -----*/

deq1g=deq1*180/3.1416;
deq2g=deq2*180/3.1416;

/*----- Integral del Error de velocidad -----*/

xi1=xi1+deq1*h;
xi2=xi2+deq2*h;

/***** indice de ejecucion *****/

if (t<=30.0)
{
norma=norma+ ( ep1*ep1 + ep2*ep2 ); /* calculo del valor rms para error */
/* de posicion de ruta */

nec = nec + econt*econt; /* calculo del valor rms para error */
}

```

```

}
/* de contorno */

indice =sqrt(norma);
necr   =sqrt(nec);

/* -----*/
/* ----- Ecuaciones del controlador -----*/

/* Observador de friccion */
/* ----- Observador de friccion ----- */

/*----- para articulacion 1 -----*/

aux1=1+sigma01*fabs(vel1*cgr)*h/fc1;
z01=(z01+(dq1d+la1*xi1)*h )/aux1;

/*----- para articulacion 2 -----*/

aux2=1+sigma02*fabs(vel2*cgr)*h/fc2;
z02=(z02+(dq2d+la2*xi2)*h )/aux2;

/* Estimacion de la friccion de Coulomb */
fce1=sigma01*z01;
fce2=sigma02*z02;

/*----- Controlador ----- */

/* Calculo del signo de la velocidad articular */
/* en caso de compensar friccion de Coulomb */
if (vel1<0.0)
{
  signo1=-1.0;
}
else
{
  signo1=1.0;
}

```

```

}
if (vel2<0.0)
{
signo2=-1.0;
}
else
{
signo2=1.0;
}

fcc1=fc1*signo1;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 1 */
fcc2=fc2*signo2;    /* Friccion de Coulomb, articulacion 2 */

/* Control basado en Control PD con compensacion */

ter1=g1+kv1*deq1+ki1*xi1 + b1c*vel1*cgr +0.0*sigma01*z01+fcc1;
ter2=g2+kv2*deq2+ki2*xi2 + b2c*vel2*cgr +0.0*sigma02*z02+fcc2;

ter3=c11*(dq1d+la1*xi1)+c12*(dq2d+la2*xi2)+ter1;
ter4=c21*(dq1d+la1*xi1)+c22*(dq2d+la2*xi2)+ter2;

ENTRADA1=m11*(ddq1d+la1*deq1)+m12*(ddq2d+la2*deq2)+ter3;
ENTRADA2=m12*(ddq1d+la1*deq1)+m22*(ddq2d+la2*deq2)+ter4;

} /* cierra con IF -- ELSE */

} /* cierra con la funcion Controlador () */

```

D Programas en SIMNON

Las simulaciones de los controladores presentados en este trabajo de tesis pueden ser realizadas a través de los programas de SIMNON que a continuación se listan.

Cada uno de los 3 programas a los que se hace referencia contiene las expresiones de

- la dinámica del robot,
- el programa conector,
- y la ley de control,

respectivamente.

D.1 Programa robot.t

```
CONTINUOUS SYSTEM ROBOT
*****

" Robot de 2 gdl con friccion de Dahl
" Author: Eduardo J. Moreno Valenzuela
" Created: 17/octubre/2000

*****

INPUT tau1 tau2
OUTPUT q1 q2 q3 q4

STATE xq1 xq2 xq3 xq4 z1 z2
DER dxq1 dxq2 dxq3 dxq4 dz1 dz2
TIME t

"Matriz de inercia
m11=0.3353+0.02436*cos(xq2)
m12=0.01267+0.01218*cos(xq2)
m21=M12
m22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis
c11=-0.01218*sin(xq2)*dxq2
```

```

c12=-0.01218*sin(xq2)*dxq1-0.01218*sin(xq2)*dxq2
c21= 0.01218*sin(xq2)*dxq1
c22=0.0

```

```

"Vector de pares gravitacionales
g1=(1.1731*sin(xq1)+0.04685*sin(xq1+xq2))*g
g2=0.04685*sin(xq1+xq2)*g

```

```

"Modelo de friccion
dz1=-(sigma01/fc1r)*abs(dxq1)*z1+dxq1
dz2=-(sigma02/fc2r)*abs(dxq2)*z2+dxq2

```

```

fric1=b1*dxq1 + tanh(1000* xq3 ) " + sigma01*z1
fric2=b2*dxq2 + tanh(1000* xq4 ) "+ sigma02*z2

```

```

h1=(c11*xq3)+(c12*xq4)+g1+fric1
h2=(c21*xq3)+(c22*xq4)+g2+fric2

```

```

S1=tau1-h1
S2=tau2-h2

```

```

"Definimos ecuaciones de estado
dxq1=xq3
dxq2=xq4
dxq3= ( M22*S1-M12*S2)/detM
dxq4= (-M12*S1+M11*S2)/detM

```

```

"Salidas posiciones
q1=xq1
q2=xq2

```

```

"Salidas velocidades
q3=xq3
q4=xq4

```

```

"Posiciones en grados
q1g=xq1*(180.0/3.1416)
q2g=xq2*(180.0/3.1416)

```

```

"Velocidades en grados
q3g=xq3*(180.0/3.1416)

```

```

q4g=xq4*(180.0/3.1416)

x= 0.45*sin(q1)+0.45*sin(q1+q2)
y=-0.45*cos(q1)-0.45*cos(q1+q2)

"Parametros
g:9.81

"Parametros de friccion promediados
b1      = 0.267
fc1r    = 1.29
sigma01 = 1757.0*f

b2      = 0.1731
fc2r    = 0.965
sigma02 = 2764.0*f
f:1
"Condicion inicial
END

```

D.2 Programas para simular el controlador de velocidad de la sección II.2.1

Control de velocidad articular considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Estructura del controlador basada en dinámica inversa.

Programa del controlador:

```

DISCRETE SYSTEM PC
" Control de velocidad de un robot de 2 gdl
" basado en control Par Calculado
" Compensacion de friccion de Dahl
" Eduardo J. Moreno Valenzuela
" junio/2001

" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2 q3 q4
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 x1 x2
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n x1n x2n

```

```

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi          "Las unidades son grados
pos1=q1kn

vel1= q3/cgr
"vel1= (pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi          "Las unidades son grados
pos2=q2kn

"vel2=(pos2-q2k)/h
vel2=q4/cgr

.....

"Matriz de inercia
M11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
M12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
M21=M12
M22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis
C11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
C12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
C21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
C22=0.0

"Vector de pares gravitacionales
G1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
G2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g

h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2

```

```

.....
"....." Velocidad deseada

tr1=3*a*c1*t*t*exp(-a*t*t*t)
tr2=3*a*c2*t*t*exp(-a*t*t*t)*sin(w1*t)
tr3=c2*w1*(1-exp(-a*t*t*t))*cos(w1*t)

dq1d=ate*(tr1+tr2+tr3)

dq1dg=dq1d*180/pi

ex1=exp(-a*t*t*t)
tr4=3*a*c1*(2*t*ex1-3*a*t^4*ex1)
tr5=6*a*c2*t*ex1*sin(w1*t)
tr6=3*a*c2*t^2*(w1*ex1*cos(w1*t)-3*a*t^2*ex1*sin(w1*t))
tr7=c2*w1*(3*a*t^2*ex1*cos(w1*t)-w1*(1-ex1)*sin(w1*t))

ddq1d=ate*(tr4+tr5+tr6+tr7)

tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t)
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t)
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t)

dq2d=ate*(tr8+tr9+tr10)

dq2dg=dq2d*180/pi

ex2=exp(-b*t*t*t)
tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t^4*ex2)
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t)
tr13=3*b*c4*t^2*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t^2*ex2*sin(w2*t))
tr14=c4*w2*(3*b*t^2*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t))

ddq2d=ate*(tr11+tr12+tr13+tr14)

c1:0.7854
c2:0.7
c3:1.0472
c4:1.1817

w1: 6          "Frecuencias
w2: 3          "en rad/seg

```



```
a:2      "Decaimiento
b:2      "exponencial
```

```
.....
```

```
"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%
dqtilde1=dq1d-vel1*cgr
dqtilde2=dq2d-vel2*cgr
```

```
dqt1g=dqtilde1*180/pi
dqt2g=dqtilde2*180/pi
```

```
"accion integral
xi1n=xi1+dqtilde1*h
xi2n=xi2+dqtilde2*h
```

```
term1=m12/detm
term2=m11/detm
term3=m22/detm
```

```
"%%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%%
```

```
aux11=kv1*dqtilde1+ki1*xi1
aux12=x1/h -(sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)*k01*dqtilde1 + vel1*cgr + k01*(aux11)
x1n=aux12/(1/h + sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)
```

```
z01=x1n+k01*dqtilde1
```

```
aux21=kv2*dqtilde2+ki2*xi2
aux22=x2/h -(sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2)*k02*dqtilde2 + vel2*cgr + k02*(aux21)
```

```
x2n=aux22/(1/h + sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2 )
```

```
z02=x2n+k02*dqtilde2
```

```
"%%%%%%%%%%%
```

```
fce1=sigma01*z01
fce2=sigma02*z02
```

```
v1=ddq1d+kv1*dqtilde1+ki1*xi1
```

$v2=ddq2d+kv2*dqtilde2+ki2*xi2$

ad1= sigma01*z01

ad2= sigma02*z02

tau1=M11*v1+M12*v2 + h1 + b1c*vel1*cgr "+ ad1

tau2=M21*v1+M22*v2 + h2 + b2c*vel2*cgr "+ ad2

k=t+h

h:0.001

"Parametros

ki1:900

ki2:900

kv1:60

kv2:60

"Ganacia del observador

k01:0.0045

k02:0.0045

g:9.81

Pi: 3.141592653589793

cgr:0.017453292519943

b1c : 0.2741

b2c : 0.1713

fc1 : 1.29

fc2 : 0.965

sigma01 : 1757.0

sigma02 : 2764.0

ate:0.1

END

Programa conector:

```
CONNECTING SYSTEM conecta
" Author:      Eduardo J. Moreno Vla.
" Created:    17/octubre/2000

TIME t

q1[pc]=q1[robot]
q2[pc]=q2[robot]

q3[pc]=q3[robot]
q4[pc]=q4[robot]

tau1[robot]=tau1[pc]
tau2[robot]=tau2[pc]

END
```

D.3 Programas para simular el controlador de velocidad de la sección II.2.2

Control de velocidad articular considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Estructura del controlador basada en PD con compensación.

Programa de controlador:

```
DISCRETE SYSTEM PDCOMP
" Control de velocidad de un robot de 2 gdl
" basado en control PD con compensacion
" -> Compensacion de friccion de Dahl
" Author:      Eduardo J. Moreno Valenzuela
" Created:    22/noviembre/2000

" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 z01 z02
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n z01n z02n
```

```

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi          "Las unidades son grados
pos1=q1kn
vel1=(pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi          "Las unidades son grados
pos2=q2kn
vel2=(pos2-q2k)/h

.....

"Matriz de inercia
M11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
M12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
M21=M12
M22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis
C11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
C12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
C21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
C22=0.0

"Vector de pares gravitacionales
G1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
G2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g

h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2

.....
" Velocidad deseada
tr1=3*a*c1*t*t*exp(-a*t*t*t)
tr2=3*a*c2*t*t*exp(-a*t*t*t)*sin(w1*t)

```

```
tr3=c2*w1*(1-exp(-a*t*t*t))*cos(w1*t)
dq1d=tr1+tr2+tr3
```

```
dq1dg=dq1d*180/pi
```

```
ex1=exp(-a*t*t*t)
tr4=3*a*c1*(2*t*ex1-3*a*t^4*ex1)
tr5=6*a*c2*t*ex1*sin(w1*t)
tr6=3*a*c2*t^2*(w1*ex1*cos(w1*t)-3*a*t^2*ex1*sin(w1*t))
tr7=c2*w1*(3*a*t^2*ex1*cos(w1*t)-w1*(1-ex1)*sin(w1*t))
ddq1d=tr4+tr5+tr6+tr7
```

```
tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t)
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t)
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t)
dq2d=tr8+tr9+tr10
```

```
dq2dg=dq2d*180/pi
```

```
ex2=exp(-b*t*t*t)
tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t^4*ex2)
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t)
tr13=3*b*c4*t^2*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t^2*ex2*sin(w2*t))
tr14=c4*w2*(3*b*t^2*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t))
ddq2d=tr11+tr12+tr13+tr14
```

```
c1:0.7854 "=45.0*cgr "Amplitudes
c2:0.7 "=10.0*cgr "en grados
c3:1.0472 "=60.0*cgr
c4:1.1817 "=125.0*cgr
```

```
w1: 6 "Frecuencias
w2: 3 "en rad/seg
```

```
a:2 "Decaimiento
b:2 "exponencial
```

```
.....
```

```
%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%
dqtilde1=dq1d-vel1*cgr
dqtilde2=dq2d-vel2*cgr
```

```
dqt1g=dqtilde1*180/pi
```

```
dqt2g=dqtilde2*180/pi
```

```
"accion integral de velocidad
```

```
xi1n=xi1+dqtilde1*h
```

```
xi2n=xi2+dqtilde2*h
```

```
"%%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%%
```

```
aux1=1+sigma01*abs(vel1*cgr)*h/fc1
```

```
z01n=(z01+(dq1d+lambda1*xi1)*h )/aux1
```

```
aux2=1+sigma02*abs(vel2*cgr)*h/fc2
```

```
z02n=(z02+(dq2d+lambda2*xi2)*h )/aux2
```

```
"%%%%%%%%% Controlador PD con compensacion
```

```
"%%%%%%%%% Controlador PD con compensacion
```

```
" Slotine-Li
```

```
ter1=g1+kv1*dqtilde1+ki1*xi1 + b1c*vel1*cgr+sigma01*z01
```

```
ter2=g2+kv2*dqtilde2+ki2*xi2 + b2c*vel2*cgr+sigma02*z02
```

```
ter3=C11*(dq1d+lambda1*xi1)+C12*(dq2d+lambda2*xi2)+ter1
```

```
ter4=C21*(dq1d+lambda1*xi1)+C22*(dq2d+lambda2*xi2)+ter2
```

```
tau1=M11*(ddq1d+lambda1*dqtilde1)+M12*(ddq2d+lambda2*dqtilde2)+ter3
```

```
tau2=M12*(ddq1d+lambda1*dqtilde1)+M22*(ddq2d+lambda2*dqtilde2)+ter4
```

```
k=t+h
```

```
h:0.001
```

```
"Parametros
```

```
kv1: 5
```

```
kv2: 4
```

```
ki1:10
```

```
ki2:5
```

```

lambda1:2
lambda2:1

b1c      : 0.2741
b2c      : 0.1713

fc1      : 1.29
fc2      : 0.965

sigma01  : 1757.0
sigma02  : 2764.0

```

```

g:9.81
Pi: 3.141592653589793
cgr:0.017453292519943

```

END

Programa del conector:

```

CONNECTING SYSTEM conecta
" Author:      Eduardo J. Moreno Vla.
" Created:     17/octubre/2000

```

TIME t

```

q1[PDCOMP]=q1[robot]
q2[PDCOMP]=q2[robot]

```

```

tau1[robot]=tau1[PDCOMP]
tau2[robot]=tau2[PDCOMP]

```

END

D.4 Programas para simular el controlador de velocidad de la sección II.2.3

Control de velocidad articular considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl. Estructura del controlador basada en PD+.

Programa de controlador:

```

DISCRETE SYSTEM PDMAS
" Control de velocidad de un robot de 2 gdl
" basado en control PD+
" -> Compensacion de friccion de Dahl
" Author:      Eduardo J. Moreno Valenzuela
" Created:     22/noviembre/2000

" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 z01 z02
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n z01n z02n

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi          "Las unidades son grados
pos1=q1kn
vel1=(pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi          "Las unidades son grados
pos2=q2kn
vel2=(pos2-q2k)/h

"Matriz de inercia
M11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
M12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
M21=M12
M22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis
C11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
C12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr

```



```
C21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
C22=0.0
```

```
"Vector de pares gravitacionales
G1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
G2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g
```

```
h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2
```

```
.....
" Velocidad deseada
```

```
tr1=3*a*c1*t*t*exp(-a*t*t*t)
tr2=3*a*c2*t*t*exp(-a*t*t*t)*sin(w1*t)
tr3=c2*w1*(1-exp(-a*t*t*t))*cos(w1*t)
dq1d=tr1+tr2+tr3
```

```
dq1dg=dq1d*180/pi
```

```
ex1=exp(-a*t*t*t)
tr4=3*a*c1*(2*t*ex1-3*a*t^4*ex1)
tr5=6*a*c2*t*ex1*sin(w1*t)
tr6=3*a*c2*t^2*(w1*ex1*cos(w1*t)-3*a*t^2*ex1*sin(w1*t))
tr7=c2*w1*(3*a*t^2*ex1*cos(w1*t)-w1*(1-ex1)*sin(w1*t))
ddq1d=tr4+tr5+tr6+tr7
```

```
tr8=3*b*c3*t*t*exp(-b*t*t*t)
tr9=3*b*c4*t*t*exp(-b*t*t*t)*sin(w2*t)
tr10=c4*w2*(1-exp(-b*t*t*t))*cos(w2*t)
dq2d=tr8+tr9+tr10
```

```
dq2dg=dq2d*180/pi
```

```
ex2=exp(-b*t*t*t)
tr11=3*b*c3*(2*t*ex2-3*b*t^4*ex2)
tr12=6*b*c4*t*ex2*sin(w2*t)
tr13=3*b*c4*t^2*(w2*ex2*cos(w2*t)-3*b*t^2*ex2*sin(w2*t))
tr14=c4*w2*(3*b*t^2*ex2*cos(w2*t)-w2*(1-ex2)*sin(w2*t))
ddq2d=tr11+tr12+tr13+tr14
```

```
c1:0.7854 "=45.0*cgr "Amplitudes
c2:0.1745 "=10.0*cgr "en grados
```

c3:1.0472 "=60.0*cgr
 c4:2.1817 "=125.0*cgr

w1: 5 "Frecuencias
 w2: 4 "en rad/seg

a:0.05 "Decaimiento
 b:0.05 "exponencial

.....

"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%

dqtilde1=dq1d-vel1*cgr
 dqtilde2=dq2d-vel2*cgr

dqt1g=dqtilde1*180/pi
 dqt2g=dqtilde2*180/pi

"accion integral de velocidad
 xi1n=xi1+dqtilde1*h
 xi2n=xi2+dqtilde2*h

"%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%

aux1=1+sigma01*abs(vel1*cgr)*h/fc1
 z01n=(z01+(dq1d)*h)/aux1

aux2=1+sigma02*abs(vel2*cgr)*h/fc2
 z02n=(z02+(dq2d)*h)/aux2

"%%%%%%%% Controlador PD+

ter1=g1+kv1*dqtilde1+ki1*xi1+b1c*vel1*cgr+sigma01*z01
 ter2=g2+kv2*dqtilde2+ki2*xi2+b2c*vel2*cgr+sigma02*z02

ter3=C11*dq1d+C12*dq2d + ter1
 ter4=C21*dq1d+C22*dq2d + ter2

tau1=M11*ddq1d+M12*ddq2d+ter3
 tau2=M12*ddq1d+M22*ddq2d+ter4

```
k=t+h
h:0.001
"Parametros

kv1:150
kv2: 15

ki1:2000
ki2:1000

b1c      : 0.2741
b2c      : 0.1713

fc1      : 1.29
fc2      : 0.965

sigma01  : 1757.0
sigma02  : 2764.0

g:9.81
Pi: 3.141592653589793
cgr:0.017453292519943

END
```

Programa del conector:

```
CONNECTING SYSTEM conecta
" Author:      Eduardo J. Moreno Vla.
" Created:    17/octubre/2000

TIME t

q1[PDmas]=q1[robot]
q2[PDmas]=aq2[robot]

tau1[robot]=tau1[PDmas]
tau2[robot]=tau2[PDmas]

END
```

D.5 Programas para simular el controlador jerárquico de movimiento de la sección III.3

Control jerárquico de movimiento considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl en el lazo interno de velocidad. Estructura del controlador de velocidad basada en dinámica inversa.

Programa del controlador:

```
DISCRETE SYSTEM TLF01
*****
" Control de movimiento de un robot de 2 gdl
" Dos lazos de retro
"
" Lazo interno Par Calculado
" con compensacion de friccion de basada en
" modelo de Dahl
"
" Eduardo Javier Moreno Valenzuela
" 11 de febrero /2002
*****

" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2 q3 q4
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 x1 x2
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n x1n x2n

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi "Las unidades son grados
pos1=q1kn

vel1= q3/cgr
"vel1= (pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi "Las unidades son grados
pos2=q2kn

"vel2=(pos2-q2k)/h
```

```
vel2=q4/cgr
```

```
.....
```

```
"Matriz de inercia
```

```
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
m21=m12
m22=0.01267
```

```
detm=m11*m22-m21*m12
```

```
"Matriz de Coriolis
```

```
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
c22=0.0
```

```
"Vector de pares gravitacionales
```

```
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g
```

```
h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2
```

```
"Modelo cinematico
```

```
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
"Jacobiano del robot
```

```
j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
"Determinante jacobiano
```

```
detj=j11*j22-j12*j21
```

```
"Modelo cinematico diferencial
```

```
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr
```

```
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr
```

```
"Matriz inversa del jacobiano
```

```
ji11= j22/detj
```

```
ji12= -j12/detj
```

```
ji21= -j21/detj
```

```
ji22= j11/detj
```

```
"Derivada temporal del Jacobiano del robot
```

```
super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01
```

```
dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02
```

```
dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
"Derivada temporal del determinante jacobiano
```

```
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 )
```

```
"Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano
```

```
dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj)
```

```
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj)
```

```
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj)
```

```
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj)
```

```
" ----- Referencias -----
```

```
yd1c:0.26
```

```
yd2c:0"0.26
```

```
r0:0.085 "Radio del circulo 8.5 cm
```

```
v0:0.1 "Velocidad tangencial : 10 cm/seg
```

```
yd1= yd1c + r0*cos(v0/r0*t)
```

```
yd2= yd2c + r0*sin(v0/r0*t)
```

```

dyd1= -v0*sin(v0/r0*t)
dyd2=  v0*cos(v0/r0*t)

ddy1= -v0*(v0/r0)*cos(v0/r0*t)
ddy2= -v0*(v0/r0)*sin(v0/r0*t)

>Error de posicion en cordenadas operacionales

yt1=yd1-y1
yt2=yd2-y2

>Error de velocidad en cordenadas operacionales

dyt1=dyd1-dy1
dyt2=dyd2-dy2

"Desviacion de la velocidad del extremo final
"con respecto a la velocidad tangencial al circulo
devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2)

>Error de contorno
econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c))

.....
"Referencias de velocidad para el lazo interno

"Velocidad deseada
dq1d= ji11* (dyd1+ k11*yt1) + ji12*(dyd2+ k22*yt2)
dq2d= ji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji22*(dyd2+ k22*yt2)

"Aceleracion deseada

acenum1=dtji11*(dyd1+ k11*yt1) + ji11*(ddy1+ k11*dyt1)
acenum2=dtji12*(dyd2+ k22*yt2) + ji12*(ddy2+ k22*dyt2)

ddq1d= acenum1 + acenum2

acenum3= dtji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji21* (ddy1+ k11*dyt1)
acenum4= dtji22* (dyd2+ k22*yt2) + ji22* (ddy2+ k22*dyt2)

ddq2d= acenum3 + acenum4

```

.....

"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%

dqtilde1=dq1d-vel1*cgr

dqtilde2=dq2d-vel2*cgr

dqt1g=dqtilde1*180/pi

dqt2g=dqtilde2*180/pi

"accion integral

xi1n=xi1+dqtilde1*h

xi2n=xi2+dqtilde2*h

term1=m12/detm

term2=m11/detm

term3=m22/detm

"%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%

aux11=kv1*dqtilde1+ki1*xi1

aux12=x1/h -(sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)*k01*dqtilde1 + vel1*cgr + k01*(aux11)

x1n=aux12/(1/h + sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)

z01=x1n+k01*dqtilde1

aux21=kv2*dqtilde2+ki2*xi2

aux22=x2/h -(sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2)*k01*dqtilde2 + vel2*cgr + k02*(aux21)

x2n=aux22/(1/h + sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2)

z02=x2n+k02*dqtilde2

k01:0.001

k02:0.001

"%%%%%%%% %%%%%%%%%

fce1=sigma01*z01

fce2=sigma02*z02


```
v1=ddq1d+kv1*dqtilde1+ki1*xi1
v2=ddq2d+kv2*dqtilde2+ki2*xi2
```

```
ad1= sigma01*z01
ad2= sigma02*z02
```

```
tau1=M11*v1+M12*v2 + h1 + b1c*vel1*cgr + fc1*sign(vel1*cgr)
tau2=M21*v1+M22*v2 + h2 + b2c*vel2*cgr + fc2*sign(vel2*cgr)
```

```
k=t+h
h:0.001
"Parametros
```

```
ki1:900
ki2:900
```

```
kv1:60
kv2:60
```

```
g:9.81
Pi: 3.141592653589793
cgr:0.017453292519943
```

```
b1c      : 0.2741
b2c      : 0.1713
```

```
fc1      : 1.29
fc2      : 0.965
```

```
sigma01  : 1757.0
sigma02  : 2764.0
```

```
k11:10
k22:10
```

```
END
```

Programa del conector:

```
CONNECTING SYSTEM conecta
" Author:      Eduardo J. Moreno Vla.
" Created:    17/octubre/2000
```

```

TIME t

q1[tlf01]=q1[robot]
q2[tlf01]=q2[robot]

q3[tlf01]=q3[robot]
q4[tlf01]=q4[robot]

tau1[robot]=tau1[tlf01]
tau2[robot]=tau2[tlf01]

END

```

D.6 Programas para simular el controlador jerárquico de movimiento de la sección III.4

Control jerárquico de movimiento considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl en el lazo interno de velocidad. Estructura del controlador de velocidad basada en PD con compensación.

Programa del controlador:

```

DISCRETE SYSTEM TLF02
*****
" Control de movimiento de un robot de 2 gdl
" Dos lazos de retro
"
" Lazo interno Control PD con compensacion
" La compensacion de friccion de basada en modelo de Dahl
"
" Eduardo Javier Moreno Valenzuela
" 16 de febrero /2002
*****

" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2 q3 q4
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 z01 z02
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n z01n z02n

TIME t

```

TSAMP k

"Velocidad numerica 1

q1kn=q1*180/Pi "Las unidades son grados
pos1=q1kn

vel1= q3/cgr

"vel1= (pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2

q2kn=q2*180/Pi "Las unidades son grados
pos2=q2kn

"vel2=(pos2-q2k)/h

vel2=q4/cgr

.....

"Matriz de inercia

m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)

m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)

m21=m12

m22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis

c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr

c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr

c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr

c22=0.0

"Vector de pares gravitacionales

g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g

g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g

h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1

h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2

"Modelo cinematico

y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)

$$y2 = -0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr}) - 0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr})$$

"Jacobiano del robot

$$j11 = 0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr}) + 0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr})$$

$$j12 = 0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr})$$

$$j21 = 0.26 \cdot \sin(\text{pos1} \cdot \text{cgr}) + 0.26 \cdot \sin(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr})$$

$$j22 = 0.26 \cdot \sin(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr})$$

"Determinante jacobiano

$$\text{detj} = j11 \cdot j22 - j12 \cdot j21$$

"Modelo cinematico diferencial

$$dy1 = j11 \cdot \text{vel1} \cdot \text{cgr} + j12 \cdot \text{vel2} \cdot \text{cgr}$$

$$dy2 = j21 \cdot \text{vel1} \cdot \text{cgr} + j22 \cdot \text{vel2} \cdot \text{cgr}$$

"Matriz inversa del jacobiano

$$ji11 = j22 / \text{detj}$$

$$ji12 = -j12 / \text{detj}$$

$$ji21 = -j21 / \text{detj}$$

$$ji22 = j11 / \text{detj}$$

"Derivada temporal del Jacobiano del robot

$$\text{super01} = -0.26 \cdot \sin(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr}) \cdot (\text{vel1} + \text{vel2}) \cdot \text{cgr}$$

$$\text{dtj11} = -0.26 \cdot \sin(\text{pos1} \cdot \text{cgr}) \cdot \text{vel1} \cdot \text{cgr} + \text{super01}$$

$$\text{dtj12} = -0.26 \cdot \sin(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr}) \cdot (\text{vel1} + \text{vel2}) \cdot \text{cgr}$$

$$\text{super02} = 0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr}) \cdot (\text{vel1} + \text{vel2}) \cdot \text{cgr}$$

$$\text{dtj21} = 0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr}) \cdot \text{vel1} \cdot \text{cgr} + \text{super02}$$

$$\text{dtj22} = 0.26 \cdot \cos(\text{pos1} \cdot \text{cgr} + \text{pos2} \cdot \text{cgr}) \cdot (\text{vel1} + \text{vel2}) \cdot \text{cgr}$$

"Derivada temporal del determinante jacobiano

$$\text{dtdetj} = j11 \cdot \text{dtj22} + \text{dtj11} \cdot j22 - (j12 \cdot \text{dtj21} + \text{dtj12} \cdot j21)$$

"Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano

$$\text{dtji11} = (\text{detj} \cdot \text{dtj22} - \text{dtdetj} \cdot j22) / (\text{detj} \cdot \text{detj})$$

$$\text{dtji12} = -(\text{detj} \cdot \text{dtj12} - \text{dtdetj} \cdot j12) / (\text{detj} \cdot \text{detj})$$

$$\text{dtji21} = -(\text{detj} \cdot \text{dtj21} - \text{dtdetj} \cdot j21) / (\text{detj} \cdot \text{detj})$$

$$\text{dtji22} = (\text{detj} \cdot \text{dtj11} - \text{dtdetj} \cdot j11) / (\text{detj} \cdot \text{detj})$$

```

" ----- Referencias -----

yd1c:0.26
yd2c:0"0.26

r0:0.085 "Radio del circulo 8.5 cm
v0:0.1 "Velocidad tangencial : 10 cm/seg

yd1= yd1c + r0*cos(v0/r0*t)
yd2= yd2c + r0*sin(v0/r0*t)

dyd1= -v0*sin(v0/r0*t)
dyd2= v0*cos(v0/r0*t)

ddy1= -v0*(v0/r0)*cos(v0/r0*t)
ddy2= -v0*(v0/r0)*sin(v0/r0*t)

"Error de posicion en cordenadas operacionales

yt1=yd1-y1
yt2=yd2-y2

"Error de velocidad en cordenadas operacionales

dyt1=dyd1-dy1
dyt2=dyd2-dy2

"Desviacion de la velocidad del extremo final
"con respecto a la velocidad tangencial al circulo
devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2)

"Error de contorno
econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c))

*****
"Referencias de velocidad para el lazo interno

"Velocidad deseada

```

```
dq1d= ji11* (dyd1+ k11*yt1) + ji12*(dyd2+ k22*yt2)
dq2d= ji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji22*(dyd2+ k22*yt2)
```

```
"Aceleracion deseada
```

```
acenum1=dtji11*(dyd1+ k11*yt1) + ji11*(ddy1+ k11*dyt1)
acenum2=dtji12*(dyd2+ k22*yt2) + ji12*(ddy2+ k22*dyt2)
```

```
ddq1d= acenum1 + acenum2
```

```
acenum3= dtji21* (dyd1+ k11*yt1) + ji21* (ddy1+ k11*dyt1)
acenum4= dtji22* (dyd2+ k22*yt2) + ji22* (ddy2+ k22*dyt2)
```

```
ddq2d= acenum3 + acenum4
```

```
.....
```

```
"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%
```

```
dqtilde1=dq1d-vel1*cgr
```

```
dqtilde2=dq2d-vel2*cgr
```

```
dqt1g=dqtilde1*180/pi
```

```
dqt2g=dqtilde2*180/pi
```

```
"accion integral
```

```
xi1n=xi1+dqtilde1*h
```

```
xi2n=xi2+dqtilde2*h
```

```
"%%%%%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%%%%%
```

```
aux1=1+sigma01*abs(vel1*cgr)*h/fc1
```

```
z01n=(z01+(dq1d+lambda1*xi1)*h )/aux1
```

```
aux2=1+sigma02*abs(vel2*cgr)*h/fc2
```

```
z02n=(z02+(dq2d+lambda2*xi2)*h )/aux2
```

```
"%%%%%%%%%%%%%% Controlador PD con compensacion
```

```
" Controlador PD con compensacion
```

```
" Slotine-Li
```

```
ter1=g1+kv1*dqtilde1+ki1*xi1n + b1c*vel1*cgr + sigma01*z01n " + sign(vel1*cgr)
```

```
ter2=g2+kv2*dqtilde2+ki2*xi2n + b2c*vel2*cgr + sigma02*z02n" + sign(vel2*cgr)
```

```
ter3=C11*(dq1d+lambda1*xi1)+C12*(dq2d+lambda2*xi2)+ter1
```

```
ter4=C21*(dq1d+lambda1*xi1)+C22*(dq2d+lambda2*xi2)+ter2
```

```
tau1=M11*(ddq1d+lambda1*dqtilde1)+M12*(ddq2d+lambda2*dqtilde2)+ter3
```

```
tau2=M12*(ddq1d+lambda1*dqtilde1)+M22*(ddq2d+lambda2*dqtilde2)+ter4
```

```
k=t+h
```

```
h:0.001
```

```
"Parametros
```

```
ki1:10
```

```
ki2:5
```

```
kv1:5
```

```
kv2:4
```

```
lambda1:2
```

```
lambda2:1.25
```

```
g:9.81
```

```
Pi: 3.141592653589793
```

```
cgr:0.017453292519943
```

```
b1c      : 0.2741
```

```
b2c      : 0.1713
```

```
fc1      : 1.29
```

```
fc2      : 0.965
```

```
sigma01  : 1757.0
```

```
sigma02  : 2764.0
```

```
k11:10
```

```
k22:10
```

```
END
```

Programa del conector:

```
CONNECTING SYSTEM conecta
```

```
" Author:      Eduardo J. Moreno Vla.
```

```
" Created:      17/octubre/2000
```

```
TIME t
```

```
q1[t1f02]=q1[robot]
```

```
q2[t1f02]=q2[robot]
```

```
q3[t1f02]=q3[robot]
```

```
q4[t1f02]=q4[robot]
```

```
tau1[robot]=tau1[t1f02]
```

```
tau2[robot]=tau2[t1f02]
```

```
END
```

D.7 Programas para simular el controlador jerárquico por campo de velocidad de la sección IV.3

Control jerárquico por campo de velocidad considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl en el lazo interno de velocidad. Estructura del controlador de velocidad basada en dinámica inversa.

Programa del controlador:

```
DISCRETE SYSTEM campo01
```

```
*****
```

```
" Control por campo de velocidad de un robot de 2 gdl
```

```
" Dos lazos de retro
```

```
"
```

```
" Lazo interno Par Calculado
```

```
" con compensacion de friccion de basada en
```

```
" modelo de Dahl
```

```
"
```

```
" Eduardo Javier Moreno Valenzuela
```

```
" 18 de febrero /2002
```

```
*****
```

```
" Inputs and outputs:
```

```
INPUT q1 q2 q3 q4
```

```
OUTPUT tau1 tau2
```

```
" States and time variables:
```

```
STATE q1k q2k xi1 xi2 x1 x2 rho1 rho2
```

```
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n x1n x2n rho1n rho2n
```



```

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi          "Las unidades son grados
pos1=q1kn

vel1= (pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi          "Las unidades son grados
pos2=q2kn

vel2=(pos2-q2k)/h

.....

"Matriz de inercia
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
m21=m12
m22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
c22=0.0

"Vector de pares gravitacionales
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g

h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2

"Modelo cinematico

```

```

y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)

```

"Jacobiano del robot

```

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)

```

"Determinante jacobiano

```

detj=j11*j22-j12*j21

```

"Modelo cinematico diferencial

```

dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr

```

"Matriz inversa del jacobiano

```

ji11= j22/detj
ji12= -j12/detj
ji21= -j21/detj
ji22= j11/detj

```

"Derivada temporal del Jacobiano del robot

```

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr

```

```

dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01

```

```

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr

```

```

super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02

```

```

dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr

```

"Derivada temporal del determinante jacobiano

```

dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 )

```

"Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano

```

dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj)
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj)
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj)

```

```
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj)
```

```
" ----- Referencias -----"
```

```
yd1c:0.26
```

```
yd2c:0"0.26
```

```
r0:0.085 "Radio del circulo 8.5 cm
```

```
v0:0.1 "Velocidad tangencial : 10 cm/seg
```

```

"-----"
"-----"Campo de velocidad"-----"
"-----"que dibuja un circulo"-----"

```

```
x=y1
```

```
y=y2
```

```
xc=yd1c
```

```
yc=yd2c
```

```
dx=dy1
```

```
dy=dy2
```

```
co:0.1
```

```
"Definicion de la funcion f
```

```
f=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc)-r0*r0
```

```
"Derivada temporal de f
```

```
dtf=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy
```

```
"Gradiente de f
```

```
delfx=2*(x-xc)
```

```
delfy=2*(y-yc)
```

```
dist=sqrt(delfx*delfx+delfy*delfy)
```

```
"Derivada temporal del gradiente
```

```
dtdelfx=2*dx
```

```
dtdelfy=2*dy
```

```
dttdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist
```



```

>Error de contorno
econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c))

.....
>Error de velocidad en cordenadas operacionales

ev1=vy1-dy1
ev2=vy2-dy2

rho1n=rho1 + ev1*h
rho2n=rho2 + ev2*h

.....
"Referencias de velocidad para el lazo interno

"Velocidad deseada
dq1d= ji11* (vy1+ k11*rho1) + ji12*(vy2+ k22*rho2)
dq2d= ji21* (vy1+ k11*rho1) + ji22*(vy2+ k22*rho2)

"Aceleracion deseada

acenum1=dtji11*(vy1+ k11*rho1) + ji11*(dvy1+ k11*ev1)
acenum2=dtji12*(vy2+ k22*rho2) + ji12*(dvy2+ k22*ev2)

ddq1d= acenum1 + acenum2

acenum3= dtji21* (vy1+ k11*rho1) + ji21* (dvy1+ k11*ev1)
acenum4= dtji22* (vy2+ k22*rho2) + ji22* (dvy2+ k22*ev2)

ddq2d= acenum3 + acenum4

.....

"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%
dqtilde1=dq1d-vel1*cgr
dqtilde2=dq2d-vel2*cgr

dqt1g=dqtilde1*180/pi

```

dqt2g=dqtilde2*180/pi

"accion integral
 xi1n=xi1+dqtilde1*h
 xi2n=xi2+dqtilde2*h

term1=m12/detm
 term2=m11/detm
 term3=m22/detm

"%%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%%

aux11=kv1*dqtilde1+ki1*xi1
 aux12=x1/h -(sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)*k0*dqtilde1 + vel1*cgr + k0*(aux11)
 x1n=aux12/(1/h + sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)

z01=x1n + k0*dqtilde1

aux21=kv2*dqtilde2+ki2*xi2
 aux22=x2/h -(sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2)*k0*dqtilde2 + vel2*cgr + k0*(aux21)

x2n=aux22/(1/h + sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2)

z02=x2n + k0*dqtilde2

k0:0.001

"%%%%%%%%% %%%%%%%%%%

fce1=sigma01*z01
 fce2=sigma02*z02

v1=ddq1d+kv1*dqtilde1+ki1*xi1
 v2=ddq2d+kv2*dqtilde2+ki2*xi2

ad1= sigma01*z01
 ad2= sigma02*z02

tau1=M11*v1+M12*v2 + h1 + b1c*vel1*cgr + ad1
 tau2=M21*v1+M22*v2 + h2 + b2c*vel2*cgr + ad2

```
k=t+h
h:0.001
"Parametros

ki1:900
ki2:900

kv1:60
kv2:60

g:9.81
Pi: 3.141592653589793
cgr:0.017453292519943

b1c      : 0.2741
b2c      : 0.1713

fc1      : 1.29
fc2      : 0.965

sigma01  : 1757.0
sigma02  : 2764.0

k11:10
k22:10

ko:0.1      "Parametro del campo de velocidad
alpha:50    "Parametro del campo de velocidad
            "relacionado con la componente tangente

epsilon:0.00075 "
lambda:5000    "Parametro usado para aproximar la derivada
            "del valor absoluto

END
```

D.8 Programas para simular el controlador jerárquico por campo de velocidad de la sección IV.4

Control jerárquico por campo de velocidad considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl en el lazo interno de velocidad. Estructura del controlador de velocidad basada en PD con compensación.

Programa del controlador:

```
DISCRETE SYSTEM campo02
*****
" Control por campo de velocidad de un robot de 2 gdl
" Dos lazos de retro
"
" Lazo interno PD con compensacion (Slotine - Li)
" considerando compensacion de friccion de basada en
" modelo de Dahl
"
" Eduardo Javier Moreno Valenzuela
" 12 de marzo /2002
*****

" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2 q3 q4
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 z01 z02 rho1 rho2
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n z01n z02n rho1n rho2n

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi "Las unidades son grados
pos1=q1kn

vel1= q3/cgr
"vel1= (pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi "Las unidades son grados
pos2=q2kn

"vel2=(pos2-q2k)/h
```



```
vel2=q4/cgr
```

```
.....
```

```
"Matriz de inercia
```

```
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
```

```
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
```

```
m21=m12
```

```
m22=0.01267
```

```
detm=m11*m22-m21*m12
```

```
"Matriz de Coriolis
```

```
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
```

```
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
```

```
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
```

```
c22=0.0
```

```
"Vector de pares gravitacionales
```

```
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
```

```
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g
```

```
h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
```

```
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2
```

```
"Modelo cinematico
```

```
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
"Jacobiano del robot
```

```
j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
```

```
"Determinante jacobiano
```

```
detj=j11*j22-j12*j21
```

```
"Modelo cinematico diferencial
```

```
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr
```

```
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr
```

```
"Matriz inversa del jacobiano
```

```
ji11= j22/detj
```

```
ji12= -j12/detj
```

```
ji21= -j21/detj
```

```
ji22= j11/detj
```

```
"Derivada temporal del Jacobiano del robot
```

```
super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01
```

```
dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02
```

```
dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
"Derivada temporal del determinante jacobiano
```

```
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 )
```

```
"Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano
```

```
dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj)
```

```
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj)
```

```
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj)
```

```
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj)
```

```
" ----- Referencias -----
```

```
yd1c:0.26
```

```
yd2c:0"0.26
```

```
r0:0.085 "Radio del circulo 8.5 cm
```

```
v0:0.1 "Velocidad tangencial : 10 cm/seg
```

```
*****
```

```

"Campo de velocidad"
"que dibuja un circulo"

x=y1
y=y2
xc=yd1c
yc=yd2c

dx=dy1
dy=dy2

co:0.1

"Definicion de la funcion f
f=(x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc)-r0*r0

"Derivada temporal de f
dtf=2*(x-xc)*dx+2*(y-yc)*dy

"Ganacia k1(q)
k1=ko/(abs(f)*dist+epsilon)

"Derivada temporal de k1(q)
dendtk1=((abs(f)*dist+epsilon)^2)
dtk1=-ko*(abs(f)*dtdist+tanh(lambda*f)*dtf*dist)/dendtk1

"Ganancia c1(q)
c1=co*exp(-alpha*abs(f))

"Derivada temporal de c1(q)
dtc1=-alpha*co*tanh(lambda*f)*dtf*exp(-alpha*abs(f))

"Gradiente de f
delfx=2*(x-xc)
delfy=2*(y-yc)

dist=sqrt(delfx*delfx+delfy*delfy)

"Derivada temporal del gradiente
dtdelfx=2*dx
dtdelfy=2*dy

dtdist=(delfx*dtdelfx+delfy*dtdelfy)/dist

"Componentes x e y del campo de velocidad

```


"Aceleracion deseada

acenum1=dtji11*(vy1+ k11*rho1) + ji11*(dvy1+ k11*ev1)
 acenum2=dtji12*(vy2+ k22*rho2) + ji12*(dvy2+ k22*ev2)

ddq1d= acenum1 + acenum2

acenum3= dtji21* (vy1+ k11*rho1) + ji21* (dvy1+ k11*ev1)
 acenum4= dtji22* (vy2+ k22*rho2) + ji22* (dvy2+ k22*ev2)

ddq2d= acenum3 + acenum4

.....

"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%"

dqtilde1=dq1d-vel1*cgr
 dqtilde2=dq2d-vel2*cgr

dqt1g=dqtilde1*180/pi
 dqt2g=dqtilde2*180/pi

"accion integral

xi1n=xi1+dqtilde1*h
 xi2n=xi2+dqtilde2*h

"%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%"

aux1=1+sigma01*abs(vel1*cgr)*h/fc1
 z01n=(z01+(dq1d+lambda1*xi1)*h)/aux1

aux2=1+sigma02*abs(vel2*cgr)*h/fc2
 z02n=(z02+(dq2d+lambda2*xi2)*h)/aux2

"%%%%%%%% Controlador PD con compensacion

" Slotine-Li

ter1=g1+kv1*dqtilde1+ki1*xi1n + b1c*vel1*cgr+ fc1*sign(vel1*cgr)" +sigma01*z01
 ter2=g2+kv2*dqtilde2+ki2*xi2n + b2c*vel2*cgr+ fc2*sign(vel2*cgr)" +sigma02*z02

$$\text{ter3} = C11 * (\text{dq1d} + \text{lambda1} * \text{xi1}) + C12 * (\text{dq2d} + \text{lambda2} * \text{xi2}) + \text{ter1}$$

$$\text{ter4} = C21 * (\text{dq1d} + \text{lambda1} * \text{xi1}) + C22 * (\text{dq2d} + \text{lambda2} * \text{xi2}) + \text{ter2}$$

$$\text{tau1} = M11 * (\text{ddq1d} + \text{lambda1} * \text{dqtilde1}) + M12 * (\text{ddq2d} + \text{lambda2} * \text{dqtilde2}) + \text{ter3}$$

$$\text{tau2} = M21 * (\text{ddq1d} + \text{lambda1} * \text{dqtilde1}) + M22 * (\text{ddq2d} + \text{lambda2} * \text{dqtilde2}) + \text{ter4}$$

k=t+h

h:0.001

"Parametros

ki1:10

ki2:5

kv1:5

kv2:4

lambda1:2

lambda2:1.25

g:9.81

Pi: 3.141592653589793

cgr:0.017453292519943

b1c : 0.2741

b2c : 0.1713

fc1 : 1.29

fc2 : 0.965

sigma01 : 1757.0

sigma02 : 2764.0

k11:10

k22:10

ko:0.1 "Parametro del campo de velocidad

alpha:50 "Parametro del campo de velocidad

"relacionado con la componente tangente

epsilon:0.00075 "

lambda:5000 "Parametro usado para aproximar la derivada

"del valor absoluto

END

D.9 Programas para simular el controlador jerárquico de ruta de la sección V.3

Control jerárquico por campo de velocidad considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl en el lazo interno de velocidad. Estructura del controlador de velocidad basada en dinámica inversa.

Programa del controlador:

```
DISCRETE SYSTEM cj07
*****
" Control de ruta de un robot de 2 gdl
" Dos lazos de retro
"
" Lazo interno Par Calculado
" con compensacion de friccion de basada en
" modelo de Dahl
"
" Eduardo Javier Moreno Valenzuela
" 01 de mayo /2002
*****

" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2 q3 q4
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 x1 x2 sigma necont
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n x1n x2n sigman necontn

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi "Las unidades son grados
pos1=q1kn

vel1= q3/cgr
"vel1= (pos1-q1k)/h
```

```

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi          "Las unidades son grados
pos2=q2kn

"vel2=(pos2-q2k)/h
vel2=q4/cgr

.....

"Matriz de inercia
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
m21=m12
m22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
c22=0.0

"Vector de pares gravitacionales
g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g

h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2

"Modelo cinematico
y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)

"Jacobiano del robot

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)

```



```
"Determinante jacobiano
detj=j11*j22-j12*j21
```

```
"Modelo cinematico diferencial
dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr
```

```
"Matriz inversa del jacobiano
```

```
ji11= j22/detj
ji12= -j12/detj
ji21= -j21/detj
ji22= j11/detj
```

```
"Derivada temporal del Jacobiano del robot
```

```
super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01
```

```
dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02
```

```
dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
"Derivada temporal del determinante jacobiano
```

```
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 )
```

```
"Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano
```

```
dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj)
```

```
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj)
```

```
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj)
```

```
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj)
```

```
" ----- Referencias -----
```

```
yd1c:0.26
```

```
yd2c:0"0.26
```

```

r0:0.085 "Radio del circulo 8.5 cm
v0:0.65  "Velocidad tangencial : 10 cm/seg

"Ruta deseada
yd1= yd1c + r0*cos(v0/r0*sigma)
yd2= yd2c + r0*sin(v0/r0*sigma)

dyd1= -r0*(v0/r0)*sin(v0/r0*sigma)
dyd2=  r0*(v0/r0)*cos(v0/r0*sigma)

"Perfil de velocidad deseado
v:1

"Error de posicion en cordenadas operacionales

ep1=yd1-y1
ep2=yd2-y2

dep1=dyd1*dsigma-dy1
dep2=dyd2*dsigma-dy2

"Error de velocidad en cordenadas operacionales

ev1=dyd1*v-dy1
ev2=dyd2*v-dy2

"Plan de movimiento extendido

dsigma=v - (ke1*ep1*dyd1 + ke2*ep2*dyd2)

sigman= sigma + h*dsigma

ke1:100 "Experimentar con estos valores tambien 1000 y 5000.
ke2:100 "1000

"Aceleracion deseada de la ruta

ddy1= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*cos(v0/r0*sigma)*dsigma*v
ddy2= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*sin(v0/r0*sigma)*dsigma*v

```

```

"Desviacion de la velocidad del extremo final
"con respecto a la velocidad tangencial al circulo
devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2)

"Error de contorno
econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c))

necontn= necont + h*econt*econt

nec=sqrt(necont)

*****
"Referencias de velocidad para el lazo interno

"Velocidad deseada
dq1d= ji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji12*(dyd2*v+ k22*ep2)
dq2d= ji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji22*(dyd2*v+ k22*ep2)

"Aceleracion deseada

acenum1= dtji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji11* (ddy1 + k11*dep1)
acenum2= dtji12* (dyd2*v+ k11*ep2) + ji12* (ddy2 + k22*dep2)

ddq1d= acenum1 + acenum2

acenum3= dtji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji21* (ddy1 + k11*dep1)
acenum4= dtji22* (dyd2*v+ k22*ep2) + ji22* (ddy2 + k22*dep2)

ddq2d= acenum3 + acenum4

*****

"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%
dqtilde1=dq1d-vel1*cgr
dqtilde2=dq2d-vel2*cgr

dqt1g=dqtilde1*180/pi
dqt2g=dqtilde2*180/pi

"accion integral
xi1n=xi1+dqtilde1*h

```

$xi2n=xi2+dqtilde2*h$

$term1=m12/detm$

$term2=m11/detm$

$term3=m22/detm$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

$aux11=kv1*dqtilde1+ki1*xi1$

$aux12=x1/h -(\sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)*k01*dqtilde1 + vel1*cgr + k01*(aux11)$

$x1n=aux12/(1/h + \sigma01*abs(vel1*cgr)/fc1)$

$z01=x1n+k01*dqtilde1$

$aux21=kv2*dqtilde2+ki2*xi2$

$aux22=x2/h -(\sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2)*k01*dqtilde2 + vel2*cgr + k02*(aux21)$

$x2n=aux22/(1/h + \sigma02*abs(vel2*cgr)/fc2)$

$z02=x2n+k02*dqtilde2$

$k01:0.001$

$k02:0.001$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

$fce1=\sigma01*z01$

$fce2=\sigma02*z02$

$v1=ddq1d+kv1*dqtilde1+ki1*xi1$

$v2=ddq2d+kv2*dqtilde2+ki2*xi2$

$ad1= \sigma01*z01$

$ad2= \sigma02*z02$

$\tau01=m11*v1+m12*v2 + h1 + b1c*vel1*cgr + fc1*sign(vel1*cgr)$

$\tau02=m21*v1+m22*v2 + h2 + b2c*vel2*cgr + fc2*sign(vel2*cgr)$

$k=t+h$

```

h:0.001
"Parametros

ki1:100
ki2:400

kv1:15
kv2:40

g:9.81
Pi: 3.141592653589793
cgr:0.017453292519943

b1c      : 0.2741
b2c      : 0.1713

fc1      : 1.29
fc2      : 0.965

sigma01  : 1757.0
sigma02  : 2764.0

k11:5
k22:5

END

```

D.10 Programas para simular el controlador jerárquico de ruta de la sección V.4

Control jerárquico por campo de velocidad considerando compensación de fricción basada en el modelo de Dahl en el lazo interno de velocidad. Estructura del controlador de velocidad basada en PD con compensación.

Programa del controlador:

```

DISCRETE SYSTEM cj08
*****
" Control de ruta de un robot de 2 gdl
" Dos lazos de retro
"
" Lazo interno Control PD con compensacion

```

```

" La compensacion de friccion de basada en modelo de Dahl
"
" Eduardo Javier Moreno Valenzuela
" 01 de mayo /2002
"
" Inputs and outputs:
INPUT q1 q2 q3 q4
OUTPUT tau1 tau2

" States and time variables:
STATE q1k q2k xi1 xi2 z01 z02 sigma necont
NEW q1kn q2kn xi1n xi2n z01n z02n sigman necontn

TIME t
TSAMP k

"Velocidad numerica 1
q1kn=q1*180/Pi "Las unidades son grados
pos1=q1kn

vel1= q3/cgr
"vel1= (pos1-q1k)/h

"Velocidad numerica 2
q2kn=q2*180/Pi "Las unidades son grados
pos2=q2kn

"vel2=(pos2-q2k)/h
vel2=q4/cgr

"
"
"Matriz de inercia
m11=0.3353+0.02436*cos(pos2*cgr)
m12=0.01267+0.01218*cos(pos2*cgr)
m21=m12
m22=0.01267

detm=m11*m22-m21*m12

"Matriz de Coriolis
c11=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr

```

```

c12=-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr-0.01218*sin(pos2*cgr)*vel2*cgr
c21= 0.01218*sin(pos2*cgr)*vel1*cgr
c22=0.0

```

```

"Vector de pares gravitacionales

```

```

g1=(1.1731*sin(pos1*cgr)+0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr))*g
g2=0.04685*sin(pos1*cgr+pos2*cgr)*g

```

```

h1=(c11*vel1*cgr)+(c12*vel2*cgr)+g1
h2=(c21*vel1*cgr)+(c22*vel2*cgr)+g2

```

```

"Modelo cinematico

```

```

y1= 0.26*sin(pos1*cgr) + 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
y2=-0.26*cos(pos1*cgr) - 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)

```

```

"Jacobiano del robot

```

```

j11=0.26*cos(pos1*cgr) + 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j12=0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)
j21=0.26*sin(pos1*cgr)+ 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)
j22=0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)

```

```

"Determinante jacobiano

```

```

detj=j11*j22-j12*j21

```

```

"Modelo cinematico diferencial

```

```

dy1= j11*vel1*cgr + j12*vel2*cgr
dy2= j21*vel1*cgr + j22*vel2*cgr

```

```

"Matriz inversa del jacobiano

```

```

ji11= j22/detj
ji12= -j12/detj
ji21= -j21/detj
ji22= j11/detj

```

```

"Derivada temporal del Jacobiano del robot

```

```

super01=- 0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr

```

```

dtj11=-0.26*sin(pos1*cgr)*vel1*cgr +super01

```

```

dtj12=-0.26*sin(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr

```

```
super02= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
dtj21= 0.26*cos(pos1*cgr)*vel1*cgr+super02
```

```
dtj22= 0.26*cos(pos1*cgr + pos2*cgr)*(vel1+vel2)*cgr
```

```
"Derivada temporal del determinante jacobiano
dtdetj=j11*dtj22+dtj11*j22 -( j12*dtj21 + dtj12*j21 )
```

```
"Derivada temporal de Matriz inversa del jacobiano
```

```
dtji11= (detj*dtj22-dtdetj*j22)/(detj*detj)
dtji12= -(detj*dtj12-dtdetj*j12)/(detj*detj)
dtji21= -(detj*dtj21-dtdetj*j21)/(detj*detj)
dtji22= (detj*dtj11-dtdetj*j11)/(detj*detj)
```

```
" ----- Referencias -----
```

```
yd1c:0.26
yd2c:0"0.26
```

```
r0:0.085 "Radio del circulo 8.5 cm
v0:0.65 "Velocidad tangencial : 65 cm/seg
```

```
"Ruta deseada
yd1= yd1c + r0*cos(v0/r0*sigma)
yd2= yd2c + r0*sin(v0/r0*sigma)
```

```
dyd1= -r0*(v0/r0)*sin(v0/r0*sigma)
dyd2= r0*(v0/r0)*cos(v0/r0*sigma)
```

```
"Perfil de velocidad deseado
v:1
```

```
"Error de posicion en cordenadas operacionales
```

```
ep1=yd1-y1
ep2=yd2-y2
```

```
dep1=dyd1*dsigma-dy1
dep2=dyd2*dsigma-dy2
```



```

"Error de velocidad en cordenadas operacionales

ev1=dyd1*v-dy1
ev2=dyd2*v-dy2

"Plan de movimiento extendido

dsigma=v - (ke1*ep1*dyd1 + ke2*ep2*dyd2)

sigman= sigma + h*dsigma

ke1:100 "Experimentar con estos valores tambien 1000 y 5000.
ke2:100 "1000

"Aceleracion deseada de la ruta

ddy1= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*cos(v0/r0*sigma)*dsigma*v
ddy2= -r0*(v0/r0)*(v0/r0)*sin(v0/r0*sigma)*dsigma*v

"Desviacion de la velocidad del extremo final
"con respecto a la velocidad tangencial al circulo
devel=v0-sqrt(dy1*dy1+dy2*dy2)

"Error de contorno
econt=r0 - sqrt((y1-yd1c)*(y1-yd1c)+(y2-yd2c)*(y2-yd2c))

necontn= necont + h*econt*econt

nec=sqrt(necont)

*****
"Referencias de velocidad para el lazo interno

"Velocidad deseada
dq1d= ji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji12*(dyd2*v+ k22*ep2)
dq2d= ji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji22*(dyd2*v+ k22*ep2)

```

"Aceleracion deseada

acenum1= dtji11* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji11* (ddy1 + k11*dep1)

acenum2= dtji12* (dyd2*v+ k11*ep2) + ji12* (ddy2 + k22*dep2)

ddq1d= acenum1 + acenum2

acenum3= dtji21* (dyd1*v+ k11*ep1) + ji21* (ddy1 + k11*dep1)

acenum4= dtji22* (dyd2*v+ k22*ep2) + ji22* (ddy2 + k22*dep2)

ddq2d= acenum3 + acenum4

.....

"%%%%%%%% Error de velocidad %%%%%%%%%

dqtilde1=dq1d-vel1*cgr

dqtilde2=dq2d-vel2*cgr

dqt1g=dqtilde1*180/pi

dqt2g=dqtilde2*180/pi

"accion integral

xi1n=xi1+dqtilde1*h

xi2n=xi2+dqtilde2*h

"%%%%%%%% Observador de friccion %%%%%%%%%

aux1=1+sigma01*abs(vel1*cgr)*h/fc1

z01n=(z01+(dq1d+lambda1*xi1)*h)/aux1

aux2=1+sigma02*abs(vel2*cgr)*h/fc2

z02n=(z02+(dq2d+lambda2*xi2)*h)/aux2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

"%%%%%%%% Controlador PD con compensacion

" Slotine-Li

ter1=g1+kv1*dqtilde1+ki1*xi1n + b1c*vel1*cgr + fc1*sign(vel1*cgr) "+sigma01*z01

ter2=g2+kv2*dqtilde2+ki2*xi2n + b2c*vel2*cgr + fc2*sign(vel2*cgr) "+sigma02*z02

ter3=C11*(dq1d+lambda1*xi1)+C12*(dq2d+lambda2*xi2)+ter1

$ter4=C21*(dq1d+lambda1*xi1)+C22*(dq2d+lambda2*xi2)+ter2$

$tau1=M11*(ddq1d+lambda1*dqtilde1)+M12*(ddq2d+lambda2*dqtilde2)+ter3$

$tau2=M12*(ddq1d+lambda1*dqtilde1)+M22*(ddq2d+lambda2*dqtilde2)+ter4$

$k=t+h$

$h:0.001$

"Parametros

$ki1:10$

$ki2:5$

$kv1:5$

$kv2:4$

$lambda1:2$

$lambda2:1.25$

$g:9.81$

$Pi: 3.141592653589793$

$cgr:0.017453292519943$

$b1c : 0.2741$

$b2c : 0.1713$

$fc1 : 1.29$

$fc2 : 0.965$

$sigma01 : 1757.0$

$sigma02 : 2764.0$

$k22=k11$ "Ganancia de Lazo externo

$k11:10$

END