

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR  
DE ENSENADA**



---

**DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

---

**DISEÑO DE CONTROLADORES H-INFINITO PARA SISTEMAS NO SUAVES CON  
APLICACIÓN A SISTEMAS MECÁNICOS.**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

LUIS TUPAK AGUILAR BUSTOS

Ensenada, Baja California a Enero del 2003.

**RESUMEN** de la tesis de **Luis Tupak Aguilar Bustos**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California. Enero del 2003.

**DISEÑO DE CONTROLADORES H-INFINITO PARA SISTEMAS NO SUAVES CON APLICACIÓN A SISTEMAS MECÁNICOS.**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Iouri Orlov Kuchina  
Director de tesis

El presente trabajo de tesis trata sobre el diseño de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  con aplicación a sistemas mecánicos con fricción considerando que sólo se dispone de información de la salida para retroalimentación. La justificación de este problema reside en que formulaciones anteriores asumen que el sistema no lineal en estudio es suave. Esta consideración es una desventaja en sistemas mecánicos en el momento de sumar en el modelo dinámico Euler-Lagrange la fuerza de fricción. Se puede demostrar mediante la teoría de análisis no suave que la función no lineal puede ser discontinua o continua no diferenciable y de esta manera relajar la condición de suavidad del sistema. Entonces el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  es estabilizar de manera asintótica las trayectorias del sistema con fricción hacia el equilibrio y además debe atenuar cualquier perturbación admisible que influya sobre la trayectoria. En la consideración de atenuación a disturbios se toman en cuenta las discrepancias debido al error de modelado de fricción. Para la solución del problema se deben resolver un par de ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs en derivadas parciales presentando complicaciones teóricas y computacionales. Esto no es dificultad si se resuelve el problema de manera local que lleva a la solución de un par de ecuaciones diferenciales de Riccati para el sistema linealizado. Por otro lado se sabe que las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs permiten el diseño de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  que aseguren estabilidad del sistema ante perturbaciones sin necesidad de encontrar la función de Lyapunov explícita para tal efecto. Se complementa el trabajo de tesis con resultados experimentales en un robot manipulador de tres grados de libertad.

**Palabras clave:** Control  $\mathcal{H}_\infty$ , fricción, robots manipuladores, sistemas no suaves.

**ABSTRACT** of the thesis presented by Luis Tupak Aguilar Bustos as a partial requirement to obtain the DOCTOR OF SCIENCE degree in ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS. Ensenada, Baja California, Mexico. January 2003.

**H-INFINITY CONTROL DESIGN FOR NONSMOOTH SYSTEMS WITH  
APPLICATION TO MECHANICAL SYSTEMS.**

This theses deals with the  $\mathcal{H}_\infty$ -control synthesis for nonsmooth mechanical systems via measurement feedback. Although the synthesis procedure results in the infinite-dimensional solvability problem for two Hamilton-Jacobi-Isaacs inequalities arising in the state-feedback and, respectively, output-injection design, this difficulty is circumvented by solving the problem locally. A local solution is derived by means of a certain perturbation of the differential Riccati equations, appearing in solving the  $\mathcal{H}_\infty$ -control problem for the linearized system, while these unperturbed equations have bounded positive semidefinite solutions. Under appropriate assumptions the existence of suitable solutions of the differential Riccati equations, appearing in solving the  $\mathcal{H}_\infty$ -control problem for the linearized system, is shown to be necessary and sufficient condition for a local solution of the nonsmooth  $\mathcal{H}_\infty$ -control problem to exist. Theoretical results are applied to a position tracking control problem for mechanical systems with friction. Due to the nature of the approach, the resulting controller additionally yields the desired robustness properties against the discrepancy between the real friction and that described in the model. Theoretical results are applied to a position tracking control problem and, particularly, a regulation problem for mechanical systems with friction. Performance issues of the nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  controller are illustrated experimentally in a three degrees-of-freedom robot manipulator.

**Keywords:**  $\mathcal{H}_\infty$  control, friction, manipulators, nonsmooth systems.

## ***Agradecimientos***

*Al Dr. Yuri Orlov, por la atinada dirección de este trabajo de tesis, por su confianza, enseñanzas, dedicación y sobre todo por saberme guiar en el difícil camino de la investigación científica.*

*Gracias infinitas!*

*Al Dr. Joaquín Álvarez, por sus atinados comentarios, su amistad y gran apoyo durante estos tres años.*

*Al Dr. Leonardo Acho, por compartir sus experiencias, su apoyo total y valiosos consejos.*

*Al Dr. Carlos Canudas de Wit, agradezco el apoyo brindado así como la rica y profunda enseñanza que me dejó durante la estancia en el Instituto Politécnico de Grenoble.*

*El más profundo agradecimiento al Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital por todas las facilidades prestadas para la buena conclusión de este trabajo de tesis.*

*Al Dr. Jean Charles Cadiou por compartir valiosa información.*

*Al Dr. Vladimir Utkin y Dr. Leonid Fridman por todos sus comentarios y experiencias compartidas.*

*Al Dr. Luis González por sus consejos, al M.C. Julio Rolón por la confianza e Ing. Branko Ivankovic por su apoyo.*

*A Dolores, Rosy Fuentes e Ivonne Best por toda su ayuda.*

*Al CICESE.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.*

*A Dirección General de Institutos Tecnológicos.*

*Al Instituto Tecnológico de Tijuana.*

## *Dedicatoria*

*A mis padres siempre motivo de orgullo y satisfacción....  
A mi madre por su energía y a mi padre un ejemplo a seguir.*

*A mis hermanos Gilberto y Ana Yaveni.*

*A mi sobrina Yutsil.*

*A todos aquellos que han sido mis maestros dentro y fuera del aula.*

# Índice

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
I.1	Formulación del problema . . . . .	1
I.2	Organización del trabajo de tesis . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Preliminares</b>	<b>7</b>
II.1	Teoría de control $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	8
II.2	Análisis de funciones no suaves . . . . .	10
II.2.1	Límite, continuidad y diferenciabilidad . . . . .	10
II.2.2	Subdiferencial y superdiferencial . . . . .	14
II.2.3	Ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo . . . . .	18
II.3	Modelado de sistemas mecánicos . . . . .	21
II.3.1	Modelos de fricción . . . . .	22
II.4	Resumen . . . . .	26
<b>III</b>	<b>Control de sistemas discontinuos</b>	<b>28</b>
III.1	Introducción . . . . .	28
III.2	Estabilización en tiempo finito de servomotor . . . . .	29
III.3	Resumen . . . . .	42
<b>IV</b>	<b>Solución al problema de control <math>\mathcal{H}_\infty</math> para sistemas no suaves variantes en el tiempo</b>	<b>43</b>
IV.1	Introducción . . . . .	43
IV.2	Formulación del problema . . . . .	44
IV.3	Solución global en espacio de estado . . . . .	46
IV.4	Solución local en espacio de estados . . . . .	48
IV.4.1	Prueba del teorema IV.2 . . . . .	52

IV.5	Resumen . . . . .	55
<b>V</b>	<b>Solución al problema de control <math>\mathcal{H}_\infty</math> para manipuladores con fricción</b>	<b>57</b>
V.1	Introducción . . . . .	57
V.2	Problema de seguimiento . . . . .	58
V.2.1	Formulación del problema . . . . .	58
V.2.2	Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	61
V.3	Problema de regulación . . . . .	64
V.3.1	Planteamiento del problema . . . . .	64
V.3.2	Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	66
V.4	Resumen . . . . .	68
<b>VI</b>	<b>Estudio de simulación</b>	<b>69</b>
VI.1	Introducción . . . . .	69
VI.2	Caso de estudio: controlador discontinuo . . . . .	70
VI.3	Control $\mathcal{H}_\infty$ para robot manipulador de dos grados de libertad . . . . .	73
VI.3.1	Modelo utilizado para simulación . . . . .	73
VI.3.2	Objetivo de control . . . . .	74
VI.3.3	Resultados de simulación para regulación . . . . .	75
VI.3.4	Resultados de simulación para el caso de seguimiento . . . . .	77
VI.4	Comentarios . . . . .	84
<b>VII</b>	<b>Estudio experimental</b>	<b>85</b>
VII.1	Introducción . . . . .	85
VII.2	Descripción del manipulador de tres grados de libertad . . . . .	85
VII.3	Resultados experimentales . . . . .	92
VII.3.1	Regulación . . . . .	93
VII.3.2	Seguimiento de trayectorias . . . . .	96
VII.4	Comentarios . . . . .	108
<b>VIII</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>110</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo de la dinámica del robot de 3 g.d.l.</b>	<b>114</b>
A.1	Cálculo de la energía cinética . . . . .	114

A.1.1	Eslabón uno . . . . .	114
A.1.2	Eslabón dos . . . . .	115
A.2	Cálculo de la energía potencial . . . . .	116
A.3	Cálculo del Lagrangiano . . . . .	116
<b>B</b>	<b>Conceptos básicos de estabilidad</b>	<b>119</b>
B.1	Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	119
B.1.1	Estabilidad . . . . .	119
B.1.2	Estabilidad y acotamiento de las soluciones . . . . .	119
B.1.3	Estabilidad asintótica global . . . . .	120
B.1.4	Estabilidad exponencial global . . . . .	120
B.2	Teorema de invarianza . . . . .	120
<b>C</b>	<b>Prueba del lema IV.1</b>	<b>122</b>
	<b>Referencias</b>	<b>126</b>



# Lista de figuras

1	Descripción gráfica del límite de una función. . . . .	11
2	Interpretación geométrica del subgradiente próximo. . . . .	16
3	Representación gráfica de la derivada tradicional ( $f'(x)$ ) y la derivada de Clarke ( $\partial_P(x)$ ) para $f(x) =  x $ . . . . .	17
4	Trayectorias y superficies de discontinuidad. . . . .	20
5	Fuerza de fricción. . . . .	25
6	Topografía de una superficie de contacto (a) y su representación a través de cerdas flexibles (b). . . . .	26
7	Retrato de fase de servomotor controlado por controlador discontinuo. . . . .	34
8	Retrato de fase de la planta (línea sólida) y del sistema de comparación (línea punteada). . . . .	39
9	Diagrama a bloques del sistema de lazo cerrado. . . . .	60
10	Simulación de controlador discontinuo por retroalimentación de posición. . . . .	72
11	Simulación de controlador discontinuo por retroalimentación de estados. . . . .	73
12	Robustez del regulador $\mathcal{H}_\infty$ contra disturbios externos y variación paramétrica: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbación y variación paramétrica. . . . .	78
13	Robustez del regulador $\mathcal{H}_\infty$ en contra discrepancias en el modelo de fricción: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbación y variación paramétrica. . . . .	79
14	Resultados de simulación para el regulador $\mathcal{H}_\infty$ no suave (columna izquierda) y su versión suave (columna derecha). . . . .	80
15	Desempeño del regulador $\mathcal{H}_\infty$ suave y no suave para el caso no perturbado. . . . .	80
16	Robustez del controlador $\mathcal{H}_\infty$ contra disturbios externos y variaciones paramétricas: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbación y variación paramétrica. . . . .	81

Figura	Página
17 Robustez del controlador $\mathcal{H}_\infty$ contra discrepancias en el modelo de fricción: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbación y variación paramétrica. . . . .	82
18 Resultados de simulación para el controlador $\mathcal{H}_\infty$ no suave (columna izquierda) y su versión suave (columna derecha). . . . .	83
19 Comparación del desempeño del controlador $\mathcal{H}_\infty$ no suave y su versión suave para el caso no perturbado. . . . .	83
20 Manipulador de tres grados de libertad. . . . .	88
21 Ruido en la medición de entrada al servomotor. . . . .	89
22 Engranajes como fuente principal de perturbación en el sistema. . . . .	90
23 Respuesta del sistema en lazo abierto ante entrada periódica. . . . .	91
24 Respuesta del sistema ante entrada rampa. . . . .	91
25 Gráfica de velocidad vs. fricción de Coulomb + viscosa. . . . .	92
26 Juego de engrane del manipulador. . . . .	93
27 Base experimental de control. . . . .	94
28 Secuencia de programación. . . . .	96
29 Respuestas experimentales de regulador $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	99
30 Respuestas experimentales de regulador $\mathcal{H}_\infty$ con $f_2(x) = 0$ . . . . .	100
31 Resultados experimentales para el regulador $\mathcal{H}_\infty$ con carga de 0.05 Kg. . . . .	101
32 Regulador $\mathcal{H}_\infty$ lineal: No perturbado (línea continua) y perturbado (línea punteada). . . . .	102
33 Resultados experimentales para regulador $\mathcal{H}_\infty$ ante variación paramétrica. . . . .	103
34 Respuestas experimentales del sistema en lazo abierto. . . . .	104
35 Respuestas experimentales de controlador $\mathcal{H}_\infty$ no perturbado. . . . .	105
36 Respuestas experimentales de controlador $\mathcal{H}_\infty$ perturbado. . . . .	106
37 Resultados experimentales para controlador $\mathcal{H}_\infty$ con $q_d = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-.75t})$ : caso no perturbado (línea continua) y perturbado (línea punteada). . . . .	107

# Notación y simbología

$\mathbb{R}$ : Conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^+$ : Conjunto de los números reales positivos.

$\mathcal{C}$ : Clase de funciones no suaves.

$\partial_P f$ : Subdiferencial de la función  $f$ .

$\partial^P f$ : Superdiferencial de la función  $f$ .

$\zeta$ : Subgradiente o Supergradiente.

$\nabla f(x)$ : Vector gradiente de  $f$  en  $x$ .

$F_C$ : Fricción de Coulomb.

$\sigma_0$ : Coeficiente de rigidez.

$\sigma_1$ : Coeficiente de amortiguamiento.

$\sigma_2$ : Coeficiente de fricción viscosa.

$v_s$ : Velocidad de Stribeck.

$F_S$ : Fricción estática máxima.

sup: Supremo.

inf: Infimo.

$\nabla$ : Fin de ejemplo.

■: Fin de demostración.

# Capítulo I

## Introducción

### I.1 Formulación del problema

La implementación de sistemas mecánicos para la automatización de procesos industriales con el fin de aumentar la productividad es una práctica que ha ido creciendo a través del tiempo. Existen tareas como el ensamble de componentes electrónicos, transporte de elementos químicos, que exigen alto nivel de precisión, exactitud o repetibilidad en sus movimientos, o en aplicaciones de pintura, corte, soldadura, donde la fuerza de presión es una variable que se debe considerar de manera adicional. Las máquinas de control numérico y robots manipuladores son las herramientas más comunes utilizadas en industria sin considerar la variedad de prototipos que aún se encuentran en pleno desarrollo (robots bipedos, móviles, etc.).

El diseño de sistemas de control retroalimentado es la parte medular para el buen funcionamiento de estos mecanismos y diferentes metodologías se han propuesto en la literatura: controladores PID (Asada y Slotine, 1985; Sciavicco y Siciliano, 2000), adaptable (Krstic *et al.*, 1995),  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  (Sage *et al.*, 1999), modos deslizantes (Utkin, 1985; Slotine y Li, 1991), control basado en pasividad (Ortega *et al.*, 1998). El modelo matemático que describe el sistema físico a controlar es fundamental para el buen diseño de los controladores. Los modelos

Euler-Lagrange se pueden aplicar con éxito para este propósito (Sciavicco y Siciliano, 2000).

La existencia inevitable de elementos perturbadores o dinámicas no modeladas pueden empobrecer el funcionamiento de los sistemas mecánicos al no ser tratados de una manera adecuada. El error de modelado, disturbios externos, ruido en la señal medida, por nombrar algunos, son objeto de estudio desde hace varios años (Gutman, 1979; Corless y Leitmann, 1981; Sage *et al.*, 1999; Chen y Chang, 1997; Jaritz y Spong, 1996) y diferentes metodologías como control adaptable (Krstic *et al.*, 1995),  $\mathcal{H}_\infty$  (Postlethwaite, 1999), rediseño de Lyapunov (Khalil, 1998) se han extendido para resolver estos problemas. Por otro lado, fenómenos físicos como fricción, “backlash”, histéresis, zona muerta también limitan el desempeño esperado de los sistemas y por esto mismo ha llamado la atención en las investigaciones. Debido al interés por entender estas no linealidades se han generado importantes contribuciones, por ejemplo Armstrong *et al.* (1995); Cadiou y Sirdi (1995); Canudas-de-Wit *et al.* (1995); Dahl (1976); Krasnoselskii y Pokrovskii (1989); Tao y Kokotovic (1996) y Tao y Lewis (2001), por citar algunos. En realidad, estos fenómenos han sido difíciles de modelar, entonces se describen por modelos con cierto grado de incertidumbre. Este tipo de no linealidades se conocen como no suaves o duras, debido a que se representan de forma matemática como funciones no diferenciables.

La fricción aparece en cualquier parte donde haya movimiento entre dos componentes físicos y principalmente puede generar error en estado estacionario y ciclos límites cerca de la posición de referencia; “backlash” es una característica dinámica que se presenta por acoplamientos mecánicos como trenes de engranaje limitando la precisión de los servomecanismos; y zona muerta es una relación estática entrada-salida que para un determinado intervalo de valores de entrada no se genera salida y están presentes en actuadores y amplificadores.

Durante el diseño de sistemas de control de lazo cerrado para manipuladores mecánicos, en ocasiones se consideran despreciables estos efectos, produciendo en la práctica, tareas de pobre rendimiento (e.g. Berghuis y Nijmeijer, 1993; Chiaverini *et al.*, 1994; Lasky y Hsia, 1991); por otro lado, en linealización por retroalimentación se requiere del conocimiento exacto de los

parámetros del modelo de fricción utilizado para cancelar este efecto, generando incertidumbre paramétrica o sintonizando los parámetros de controladores para generar alta ganancia con el riesgo de saturar los actuadores.

Sin lugar a duda se deben destacar trabajos que consideran estos fenómenos de una manera adecuada como González *et al.* (1995); Wang *et al.* (2001) y Olsson *et al.* (1998). El diseño de controladores discontinuos tratado por Orlov *et al.* (2000), se utiliza para contrarrestar el fenómeno de fricción de Coulomb. El análisis de estabilidad del sistemas en lazo cerrado se encuentra dentro del marco de métodos basados en funciones de Lyapunov con derivadas temporales no positivas a lo largo de la trayectoria del sistema, complementado con la extensión del teorema de invarianza para sistemas discontinuos (Alvarez *et al.*, 2000) para concluir estabilidad global del equilibrio. Una desventaja es que se producen oscilaciones de alta frecuencia en el par una vez que la trayectoria converge al punto de equilibrio excitando dinámicas no deseadas en los mecanismos. Los algoritmos de control continuos no garantizan estabilidad asintótica global en sistemas con lado derecho discontinuo porque el sistema en lazo cerrado presenta múltiples puntos de equilibrio.

En resumen, los siguientes factores, relevantes en la práctica, se deben considerar y tratar de una manera apropiada:

1. Los sistemas dinámicos son no lineales y, debido a los efectos de fricción y otras no linealidades como “backlash” y zona muerta, son no suaves ( $\mathcal{C}$ ). La trayectoria deseada es una función en el tiempo disponible en términos de la posición generalizada, velocidades y aceleraciones correspondientes, por lo que la dinámica del error del sistema en lazo cerrado es no lineal, no suave y variante en el tiempo.
2. El movimiento a través de la trayectoria de referencia se ve afectada por perturbaciones; y además se dispone de información incompleta e imperfecta de los estados del sistema.

Motivado por lo anterior descrito, en esta tesis se diseñan controladores  $\mathcal{H}_\infty$  que garanticen estabilidad asintótica de sistemas mecánicos con fricción y que el tamaño de la señal de error

sea acotada de manera uniforme con respecto a las señales de disturbio admisibles.

En 1981, Zames plantea el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para el caso escalar basada en la respuesta entrada-salida. La solución del problema la obtienen Zames y Francis en 1984 y posteriormente los mismos autores extienden los resultados para el caso multivariable. Es a partir de Doyle *et al.* (1989) cuando impulsa la solución algorítmica de los problemas de control  $\mathcal{H}_\infty$  en espacio de estados, obteniéndose un controlador de la misma dimensión que la planta ampliada o también denominada planta generalizada (constituida por el modelo del proceso junto con las matrices de ponderación que constituyen las especificaciones de diseño). Los algoritmos desarrollados en espacio de estado se caracterizan por basarse en la solución de un par de ecuaciones algebraicas de Riccati desacopladas, partiendo de las matrices de estado de la planta generalizada. Otro enfoque de la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  se relaciona con la teoría de juegos (Basar y Bernhard, 1990), esto es, se debe pensar en el diseñador por un lado y en el medio ambiente por otro lado, y el objetivo del diseñador es elegir un controlador que establezca el sistema y sea óptimo con respecto a un criterio dado mientras que el medio exterior tiene como objetivo hacer fracasar la estrategia del diseñador por medio de la elección de la peor perturbación posible que actúe sobre la planta a controlar. A partir de estas ideas Ravi *et al.* (1991) extienden la teoría  $\mathcal{H}_\infty$  hacia sistemas lineales variantes en el tiempo basados en la solución de un par de ecuaciones diferenciales de Riccati. De manera respectiva, Van der Schaft (1992) e Isidori y Astolfi (1992) presentan la solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para el caso global y local de sistemas no lineales invariantes en el tiempo con retroalimentación de estados y salida respectivamente. La solución del problema consiste en resolver dos ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs (caso global) o ecuaciones de Riccati (caso local). De manera reciente, Orlov *et al.* (1999) extienden la solución hacia sistemas no lineales variantes en el tiempo con retroalimentación de salida.

Estas estrategias para encontrar controladores  $\mathcal{H}_\infty$  se utilizan hasta la fecha, y ellas tienen en común que las dinámicas no suaves son consideradas como perturbaciones externas, esto significa que, una condición para encontrar la solución del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para

sistemas no lineales es asumir que el lado derecho de la ecuación dinámica  $\dot{x} = f(x)$  es suave ( $\mathcal{C}^1$ ). En el presente trabajo se muestra que la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal se puede extender a sistemas continuos no diferenciables invariantes y variantes en el tiempo y de esta manera se pueden aplicar a problemas de seguimiento de trayectorias y regulación para sistemas mecánicos con fricción. Las aportaciones teóricas en el análisis no suave de Clarke (1983, 1998, 2001) se utilizan en este estudio.

El diseño de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  que se presenta en esta tesis se basa en la teoría de juegos de Basar y Bernhard (1990) y el análisis de la ganancia  $\mathcal{L}_2$  de Isidori y Astolfi (1992) y Van der Schaft (1992). En el análisis se presentan las condiciones suficientes para la existencia de una solución global del problema en función de la solución de dos desigualdades de Hamilton-Jacobi e Isaacs, así mismo se sigue la línea de razonamiento propuesta por Orlov *et al.* (1999) donde la correspondiente expresión de Hamilton-Jacobi-Isaacs requiere que sea negativa definida en lugar de negativa semidefinida. Esto permite desarrollar un procedimiento de diseño que no obliga al sistema de control tener las condiciones de estabilidad y detectabilidad (Doyle, 1989).

Con el propósito de fortalecer los resultados teóricos se realizan experimentos de regulación y seguimiento de trayectorias en un manipulador de tres grados de libertad (g.d.l.) que cuenta con un sistema de transmisión por engranaje y cadenas (fuente de fricción) que lo hacen ideal para observar el comportamiento de estos controladores así como sensores de posición.

Basados en las consideraciones previamente mencionadas, se resaltan los objetivos de esta tesis:

- Desarrollar la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  con retroalimentación de salida hacia sistemas continuos no diferenciables invariantes y variantes en el tiempo.
- Aplicar los resultados hacia sistemas mecánicos completamente actuados con fricción dinámica.
- Ilustrar de manera experimental el diseño de los controladores.



## I.2 Organización del trabajo de tesis

El presente trabajo de tesis se divide en ocho capítulos y tres apéndices. En el primer capítulo se presenta una introducción al trabajo desarrollado. Para una mejor comprensión de las ideas transmitidas se facilitan en el capítulo dos las herramientas básicas necesarias relativas a la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$ , sistemas no suaves y robots manipuladores. El modelo discontinuo de fricción de Coulomb es la representación más simple para caracterizar este fenómeno. Las hipótesis que se asumen acerca de la función no lineal no incluyen esta clase de sistemas, pero a manera de antecedente, se presenta el diseño de controladores discontinuos en el capítulo tres. Para ejemplificar, la función no lineal se reduce a un sistema de segundo orden discontinuo, es decir los servomotores con fricción de Coulomb y “backlash” (como elemento perturbador) serán objeto de estudio ya que, evidentemente, no están libres de estos fenómenos. Para contrarrestar esta dinámica, los controladores conmutados permiten estabilizar de forma global y en tiempo finito las trayectorias hacia la posición de referencia de los servomotores. El análisis de estabilidad está dentro del marco de trabajo de los métodos basados en funciones de Lyapunov con derivadas temporales no positivas a lo largo de la trayectoria del sistema.

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas no suaves variantes en el tiempo se estudia en el capítulo cuatro tomando como base las aportaciones de Clarke relativas al análisis no suave en teoría de control. En el capítulo cinco, el procedimiento de síntesis se extiende a problemas de regulación y control de seguimiento de trayectorias de sistemas mecánicos basados en modelos Euler-Lagrange con fricción de Dahl. El análisis del funcionamiento del controlador se realiza para un robot manipulador de tres grados de libertad. El desempeño de los controladores se estudia en los capítulos seis a través de simulación numérica para un manipulador de dos grados de libertad. En el capítulo siete, se ilustran mediante resultados experimentales, las respuestas de los controladores aplicado a un manipulador de tres grados de libertad con nivel de fricción distinto de cero debido a la transmisión por engranaje y cadenas en cada articulación. Finalmente, en el capítulo ocho se presentan las conclusiones.

## Capítulo II

# Preliminares

En este capítulo se presentan las herramientas que serán empleadas en los capítulos posteriores. Específicamente, este capítulo se divide en las siguientes tres secciones:

- Teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$ .
- Análisis de funciones no suaves.
- Modelado de sistemas mecánicos.

En la primera sección, más que teoría  $\mathcal{H}_\infty$ , se presenta una recopilación de las aportaciones más importantes en el tema. Estos van desde el planteamiento del problema en 1981 hasta la más reciente formulación. En la segunda sección se presentarán los fundamentos de la teoría de análisis no suaves. Esto será realizado a través de un conjunto de lemas y teoremas tomados de la literatura. En la sección tres se describen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange debido a que se utilizarán en los próximos capítulos para modelar la dinámica de robot manipuladores de enlaces rígidos completamente actuados. Así mismo se complementa esta sección con un resumen relativo a modelos dinámicos de fricción más utilizados.

## II.1 Teoría de control $\mathcal{H}_\infty$

A manera de reseña histórica, Zames en 1981 formula el problema de control robusto  $\mathcal{H}_\infty$  para el caso escalar y se basa en una respuesta entrada-salida (dominio de la frecuencia). Zames y Doyle obtienen la solución del problema en 1984 y posteriormente los mismos autores encuentran la solución para el caso multivariable.

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  considerado por Zames (1981) consiste en encontrar un controlador  $K$  que pertenece a una familia de controladores  $\mathcal{K}$  que minimiza el valor supremo de la función de transferencia entre la perturbación a la salida de la planta y la salida del sistema (también conocida como función de sensibilidad  $S(j\omega)$ ) definida por la norma  $\mathcal{H}_\infty$  como:

$$\|S\|_\infty = \sup_{\omega} |S(j\omega)|$$

mientras que para el caso multivariable, éste significa minimizar el supremo del valor singular máximo ( $\bar{\sigma}$ ):

$$\|S\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma} |S(j\omega)|.$$

La justificación de este problema reside en que si el valor pico de la función de sensibilidad es pequeño, entonces la magnitud de  $S$  es necesariamente pequeño para todas las frecuencias, y por lo tanto las perturbaciones serán atenuadas para todas las frecuencias. La minimización de  $\|S\|_\infty$  es la optimización del peor caso, porque ello equivale a la minimización del efecto sobre la salida de la peor perturbación.

Los primeros algoritmos para la solución del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ , desarrollados desde 1984 hasta 1988 han tenido el inconveniente de que el controlador es de un orden elevado (Francis y Doyle, 1987) comparado con el de la planta, por lo que un paso previo a la implementación del controlador era conveniente realizar un intenso trabajo para obtener controladores de menor dimensión (e.g.  $\mu$ -síntesis).

Es a partir de Doyle y colaboradores (1989) cuando se da un fuerte impulso a la solución

algorítmica de los problemas de control  $\mathcal{H}_\infty$  en espacio de estados, obteniéndose un controlador de la misma dimensión que la planta ampliada, o también denominada planta generalizada (constituida por el modelo del proceso junto con las matrices de ponderación que constituyen las especificaciones de diseño). Los algoritmos en espacio de estado se caracterizan por basarse en la solución de dos ecuaciones algebraicas de Riccati desacopladas, partiendo de las matrices de estado de la planta generalizada.

Un manejo más comprensivo de la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  está relacionado con la teoría de juegos diferencial (Basar y Bernhard, 1990). Para verlo se debe pensar en el diseñador por un lado, y en el medio ambiente por otro lado (como si se tratara de dos jugadores). El objetivo del diseñador es elegir un controlador que estabilice el sistema y sea óptimo con respecto a un criterio dado; mientras que el medio exterior tiene como objetivo el desbaratar o hacer fracasar la estrategia del diseñador, por medio de la elección de la perturbación peor posible que actúe sobre la planta a controlar. Así se define un índice de comportamiento (Basar y Bernhard, 1990):

$$J(K, w) = \min_{z \in \mathcal{L}_2} \max_{w \in \mathcal{L}_2} \left[ \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \right]$$

siendo  $K$  el controlador,  $w \in \mathcal{L}_2$  la perturbación actuante sobre el sistema,  $z \in \mathcal{L}_2$  es una medida para evaluar el comportamiento en lazo cerrado del sistema, y  $\gamma > 0$  es un parámetro arbitrario. Si la solución existe entonces habrá un controlador  $K^*$  que estabilice al sistema de lazo cerrado para la peor perturbación ( $w^*$ ) actuante sobre el sistema.

Tomando como base estos conceptos Ravi *et al.* (1991) extiende la teoría  $\mathcal{H}_\infty$  hacia sistemas lineales variantes en el tiempo basados en la solución de un par de ecuaciones diferenciales de Riccati. Van der Schaft (1992) e Isidori y Astolfi (1992) presentan de manera clara la solución al problema global y local de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas no lineales con retroalimentación de estados y salida basados en la solución de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs y ecuaciones diferenciales de Riccati respectivamente. Más recientemente Orlov

*et al.* (1999) extiende la solución a sistemas variantes en el tiempo con retroalimentación de salida.

Estas estrategias para encontrar controladores  $\mathcal{H}_\infty$  se sigue utilizando hasta la fecha, y ellas tienen en común que la dinámica no suave que pueden presentar a los actuadores como “backlash”, fricción de Coulomb se debe considerar despreciable o como perturbación externa.

## II.2 Análisis de funciones no suaves

Existen importantes razones para involucrar el análisis de funciones no suaves (o no diferenciables) en teoría de control, por destacar algunos ejemplos, la minimización de una función  $\varphi(x)$  o la determinación de la estabilidad local de un punto de equilibrio  $x^*$  de una ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$ , requieren que las funciones  $\varphi(x)$  y  $f(x)$  sean diferenciables respectivamente; sin embargo, en muchos sistemas físicos las funciones no cumplen con esta consideración, principalmente aquéllos que tomen en cuenta no linealidades de los actuadores (fricción de Coulomb, “backlash”, zona muerta, etc.) y algunos otros considerados en Aubin y Cellina (1984); Brogliato (1999); Clarke (1983); Clarke *et al.* (1998) y Vinter (2000) y algunas referencias dentro de ellas. Los conceptos de funciones no suaves se toman principalmente de los trabajos de Rockafellar (1970), Ioffe (1983) y Clarke (1983, 1989) entre otros. Para comenzar con esta sección se toma como punto de partida las definiciones de límite, continuidad y diferenciabilidad de una función.

### II.2.1 Límite, continuidad y diferenciabilidad

Antes de entrar en materia de sistemas no suave es necesario explicar la continuidad y diferenciabilidad de una función. Para ello se ofrece una serie de definiciones.

**Definición II.1 (Parcell y Varberg, 1984)** *Para decir que el  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L$  es un número real, significa que para cada  $\epsilon > 0$  dado (no importa que tan*

pequeño sea), existe un correspondiente valor  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$  esto es,

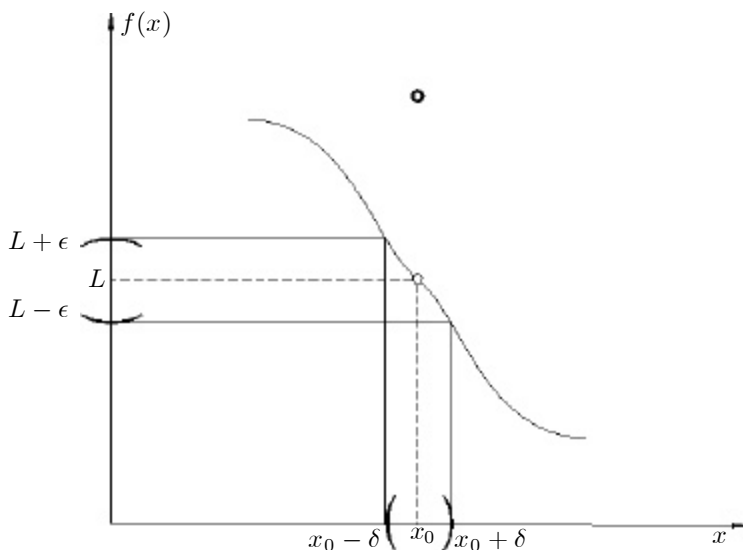
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Obsérvese la figura 1 para una mejor comprensión de esta definición.

Al considerar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  significa que sólo interesan los valores de  $x$  en un intervalo abierto que contenga a  $x_0$  pero no a  $x_0$  mismo, es decir, valores de  $x$  cercanos a  $x_0$  y mayores y menores que  $x_0$ .

**Teorema II.1 (Swokowski, 1979)** *Suponer que existe un intervalo abierto que contiene el punto  $x_0$  y que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida en todo el intervalo excepto posiblemente en  $x_0$ . Entonces el  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ .*

En el teorema II.1  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  significa que es el límite cuando  $x$  se aproxima a  $x_0$  por la izquierda y por la derecha respectivamente. Este teorema está íntimamente relacionado con el concepto de límite unilateral.



**Figura 1:** Descripción gráfica del límite de una función.

Suponer que existe una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  para la cual  $f(x) = \sqrt{x - x_0}$ . Como  $f(x)$  no existe si  $x < x_0$ , entonces  $f$  no está definida en cualquier intervalo abierto que contenga a  $x_0$ . Si  $x$  está restringida a valores mayores que  $x_0$ , el valor de  $f(x) = \sqrt{x - x_0}$  se puede acercar a cero tomando a  $x$  suficientemente cercana a  $x_0$  pero mayor que  $x_0$ . En tal caso se acerca  $x$  a  $x_0$  por la derecha, por tal motivo se considera el límite unilateral por la derecha, el cual se define a continuación:

**Definición II.2** *Sea  $f$  una función definida en todos los números de algún intervalo abierto  $(x_0, x_1)$ . Entonces, el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a  $x_0$  por la derecha es  $L$ , y se escribe:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , independientemente de qué tan pequeño sea, existe una  $\delta > 0$  tal que:

$$\text{si } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

**Definición II.3 (Graves, 1956)** *Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $x_0$  con  $x_0 \in S \subset \mathbb{R}^n$  donde  $S$  es un conjunto abierto si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1.  $f(x_0)$  existe,
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe,
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Sin embargo para algunas funciones la definición II.2 no se satisface, por ejemplo  $f(x) = 1/x$  no tiene solución para  $x = 0 \in S$ . Por eso en el estudio de las funciones, a veces resulta útil el análisis en las fronteras de sus restricciones (límite unilateral y bilateral).

**Definición II.4 (Clarke, 1998)** *La función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es semicontinua por abajo, res-*

pectivamente por arriba, en el punto  $x_0$  si  $x_0 \in S \subset \mathbb{R}^n$  y

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

respectivamente, si

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

**Definición II.5 (Parcell y Varberg, 1984)** Sea una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida en una frontera alrededor del punto  $x_0$ , la derivada de  $f$  en  $x_0$ , denotada como  $f'(x_0)$ , está dado por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un intervalo abierto  $I$  se dice que es diferenciable en  $I$  si  $f'(x)$  existe para cada punto en el intervalo  $I$  y la derivada por un lado exista. Cuando una función  $f(x)$  no tiene derivada en un punto  $x_0 \in S$  (e.g.  $|x|$ ,  $\text{sgn}(x)$ ), es en ocasiones útil considerar los límites por un lado, ya sea superior o inferior, de los cocientes de diferencia, el cual siempre existen cuando se considera el límite desde  $\pm\infty$ . Para este caso se introduce una de las derivadas de Dini (inferior por la derecha):

$$Df(x) := \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}. \quad (1)$$

Se destaca que la derivada  $Df(x)$  puede tomar el valor de  $+\infty$  ó  $-\infty$ . Para hacerse una mejor idea de esta definición, se ofrece el siguiente ejemplo:

**Ejemplo II.1** Considérese la función  $f(x) = -|x|$ , que es continua en  $x = 0$  pero la derivada por la izquierda es  $f'(x) = 1$  y la derivada por la derecha es  $f'(x) = -1$ , por consiguiente la igualdad

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{-|x+t| + |x|}{t}$$



no se satisface, entonces  $f(x)$  no es diferenciable en  $x = 0$ .  $\nabla$

Un resultado básico en la teoría diferencial suave es la derivada direccional de  $f(x)$  en la dirección de  $v \in \mathbb{R}^n$  y es definida por:

$$Df(x; v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}. \quad (2)$$

Si  $f(x)$  es diferenciable en  $x$ , entonces la derivada direccional, que existe en cada dirección de  $v$ , es una función lineal de  $v$  y se tiene la siguiente relación:

$$Df(x; v) = \nabla f(x)^T v, \quad (3)$$

donde  $\nabla f(x)$  es el vector gradiente de  $x$ . Por la fórmula de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned} f(x + d) &= f(x) + \nabla f(x)^T d + \|d\| \varepsilon(d) \\ &= f(x) + Df(x; d) + \|d\| \varepsilon(d) \quad \forall d \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon(d) \rightarrow 0$  cuando  $\|d\| \rightarrow 0$  (Mäkelä y Neittaanmäki, 1992).

Estas definiciones son básicas para una mejor comprensión del concepto de subdiferencial, superdiferencial y gradiente generalizado estudiados por Clarke (1983) e Ioffe (1997) entre otros y que se estudian en la próxima subsección.

## II.2.2 Subdiferencial y superdiferencial

En esta subsección se proporcionan herramientas para sistemas que no son diferenciables en el sentido definido hasta ahora (definición II.2). Como antecedente al análisis de la teoría no suave se definen los conceptos de *gradiente generalizado*, *subgradiente* y *subdiferencial*. Para iniciar con la explicación se supone una función real localmente Lipschitz definida en  $\mathbb{R}^n$ . Una función  $f$  es localmente Lipschitz en  $x \in \mathbb{R}^n$  si cada punto  $x$  tiene una vecindad  $\epsilon > 0$

tal que exista una constante  $K$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  que cumpla con la siguiente desigualdad:

$$|f(y) - f(z)| \leq K|y - z| \quad \forall y, z \in B(x; \varepsilon).$$

Además la función  $f(x)$  es positivamente homogénea si  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  para todo  $\lambda \geq 0$  y subaditiva si  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  para toda  $x$  y  $y$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Suponer que la función  $f$  no es diferenciable en un punto  $x \in S$ . Por lo tanto se define en lugar de la derivada ordinaria la derivada direccional generalizada de  $f$  evaluada en  $x$  en la dirección de  $v$ .

**Definición II.6 (Clarke, 1983)** Sea la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Lipschitz en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$ . La derivada direccional generalizada de  $f(x)$  en la dirección de  $v \in \mathbb{R}^n$  es definida por:

$$Df(x; v) = \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ w \rightarrow v}} \frac{f(x + tw) - f(x)}{t}. \quad (4)$$

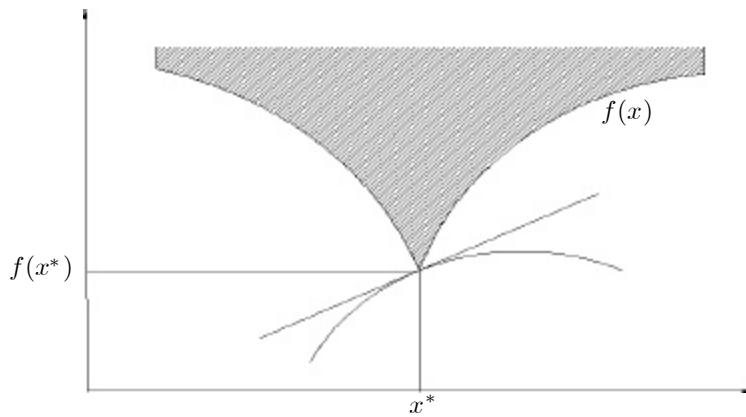
**Teorema II.2 (Clarke, 1983)** Sea  $f$  localmente Lipschitz en  $x$  con una constante  $K$ . Entonces:

- La función  $v \rightarrow Df(x; v)$  es finita, positivamente homogénea, y subaditiva en el conjunto  $X$ , y satisface

$$|Df(x; v)| \leq K\|v\|.$$

- $Df(x; v)$  es semicontinua por arriba como una función de  $(x, v)$  y como una función de  $v$  es Lipschitz de rango  $K$  en  $X$ .
- $Df(x; -v) = -Df(x; v)$ .

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  cualquier función y  $x$  un punto donde  $f(x)$  es finito. Un vector  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  se dice que es el subgradiente próximo de  $f$  en  $x$  si existe una vecindad - de  $x$  y un



**Figura 2:** Interpretación geométrica del subgradiente próximo.

número  $\sigma \geq 0$  tal que:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2 \quad \forall y \in \cdot.$$

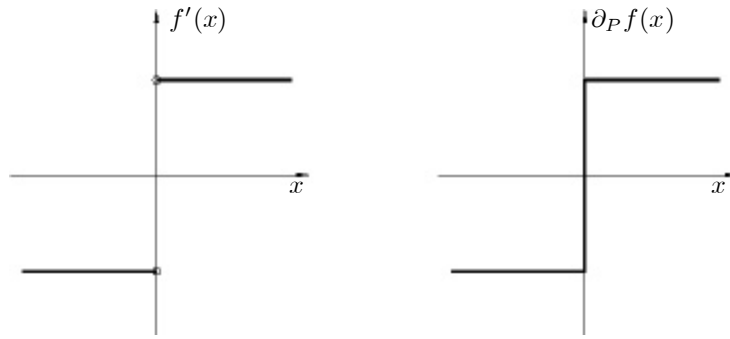
El conjunto de los subgradientes próximos en  $x$  (que puede ser vacío y que no es necesariamente cerrado, abierto o acotado pero que es convexo) se denota como  $\partial_P f(x)$ , y es llamado *subdiferencial próximo*. Si  $f$  es diferenciable en  $x$ , entonces  $\partial_P f(x) \subset \{f'(x)\}$ .

La existencia de un subgradiente próximo  $\zeta$  en un punto  $x$  corresponde a la posibilidad de aproximar la función  $f$  por abajo por una función cuya gráfica es una parábola. El punto  $(x, f(x))$  es un punto de contacto entre la gráfica de  $f$  y la parábola y  $\zeta$  es la pendiente de la parábola en ese punto (ver figura 2).

**Definición II.7 (Clarke, 1983)** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Lipschitz en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces la subdiferencial de  $f$  en  $x$  es el conjunto

$$\partial f(x) := \{\zeta \in \mathbb{R}^n : Df(x; v) \geq \langle v, \zeta \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\}. \quad (5)$$

Cada elemento  $\zeta \in \partial f(x)$  es llamado *subgradiente* de  $x$ .



**Figura 3:** Representación gráfica de la derivada tradicional ( $f'(x)$ ) y la derivada de Clarke ( $\partial_P f(x)$ ) para  $f(x) = |x|$ .

**Ejemplo II.2** Considérese la función  $f(x) = |x|$ . Si  $x$  es estrictamente positiva, entonces

$$Df(x; v) = \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ w \rightarrow v}} \frac{x + tw - x}{t} = v$$

entonces el conjunto de números  $\zeta$  que satisfacen  $v \geq \zeta v$  para toda  $v$  se reduce a  $\partial f(x) = 1$ .

De manera similar  $\partial f(x) = -1$  si  $x < 0$ . Para  $x = 0$ , la derivada direccional es

$$Df(0; v) = \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ w \rightarrow v}} \frac{|0 + tw| - |0|}{t} = |v|,$$

por lo tanto  $\partial f(0)$  consiste de todo  $\zeta$  que satisface la desigualdad  $|v| \geq \zeta v$  para toda  $v$ , resultando en  $\partial f(0) = [-1, 1]$ . ▽

**Teorema II.3 (Clarke, 1998)** Sea la función continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es decreciente si y sólo si  $Df(x; v) \leq 0$  para toda  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}_+^n$ .

Si la función  $f$  es continuamente diferenciable, la derivada direccional  $D(x; v)$  corresponde precisamente a  $\langle \nabla f(x), v \rangle$  resultando en el siguiente corolario:

**Corolario 1 (Clarke, 1998)** Una función continuamente diferenciable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es decreciente si y sólo si  $\nabla f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Un vector  $\zeta$  se le conoce como el *supergradiente próximo* de una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$  en  $x$  si existe alguna  $\sigma > 0$  tal que, para toda  $y$  en alguna vecindad de  $x$  se cumple con la siguiente desigualdad:

$$f(y) \leq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle + \sigma|x - y|^2.$$

El conjunto de subgradietes próximo de  $f$  en  $x$  se denota como  $\partial^P V(x)$  y se le conoce como *superdiferencial próximo* de  $V$  en  $x$ .

### II.2.3 Ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo

La solución a la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x, t)$  con lado derecho continuo es equivalente a

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds. \quad (6)$$

Esta definición no es valida para todas las ecuaciones diferenciales y de manera particular para aquéllas que presentan un lado derecho discontinuo (Filippov, 1988). La ecuación (6) se puede aplicar en el caso en que la solución se aproxime por un lado a la superficie de discontinuidad ( $S$ ) y la deje por otro lado (ver Figura 4a). Por ejemplo, considérese la función  $\dot{x} = \text{sgn}(x)$ , para  $t < 0$  se tiene que  $\dot{x} = -1$ , entonces la solución a la ecuación diferencial es  $x = -t + c_1$ ; para  $t > 0$  se tiene a  $\dot{x} = 1$ , y la solución es  $x = t + c_2$ , y de acuerdo a la definición de continuidad para  $t = 0$  se tiene

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} (-t + c_1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t + c_2), \quad x(0) = c_1 = c_2$$

en consecuencia la solución de  $\dot{x} = \text{sgn}(x)$  se expresa por la fórmula  $x(t) = |t| + c$ . Para  $t = 0$  la derivada no existe. Aquí la solución pasa a través de  $S$  y satisface la ecuación excepto en el punto de intersección en la cual la solución no tiene derivada. Por otra parte, cuando en ambos lados de una superficie de discontinuidad  $S$  la solución se aproxima a  $S$  (Figura

4b). Por ejemplo, sea  $\dot{x} = 1 - 2\text{sgn}(x)$ , para  $x < 0$ , se tiene que  $\dot{x} = 3$ , y la solución a la ecuación diferencial es  $x = 3t + c_1$ ; para  $x > 0$  se tiene que  $\dot{x} = -1$ , entonces la solución es  $x(t) = -t + c_2$ . Aquí la definición de la solución es inadecuada porque si se analiza el límite por la derecha y por la izquierda

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} (-t + c_2) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} (3t + c_1) = 0, \quad c_1 = c_2 = 0,$$

y para  $1 - 2\text{sgn}(0) = 1 \neq 0$ , por lo tanto no hay manera de saber como la solución, que ha alcanzado  $S$ , pueda ser continua.

Para el análisis de la solución considerar la ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{7}$$

con una función continua a tramos  $f$  en un dominio  $G$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x} = dx/dt$ ;  $M$  es un conjunto (de medida cero) de puntos de discontinuidad de la función  $f$ . La solución a la ecuación diferencial (7) se presenta enseguida:

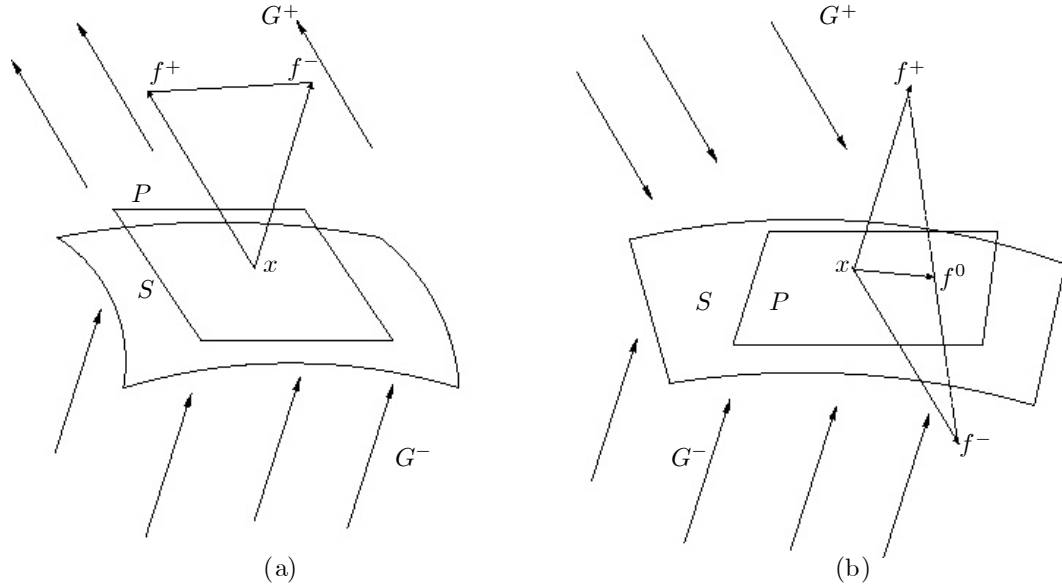
1. Se considera para cada punto  $(x, t)$  de un dominio  $G$ , un conjunto  $F(x, t)$  en un espacio  $n$ -dimensional. Si en el punto  $(x, t)$  la función  $f$  es continua, el conjunto  $F(x, t)$  consiste de un punto que coincide con el valor de la función  $f$  en ese punto.
2. Si  $(x, t)$  es un punto de discontinuidad de la función  $f$ , la solución a la ecuación diferencial (7) es una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(x, t) \tag{8}$$

es decir, una función vectorial absolutamente continua <sup>1</sup>  $x(t)$  definida en un intervalo o segmento  $I$  para el cual  $\dot{x} \in F(x, t)$  en casi todas partes de  $I$ .

---

<sup>1</sup>Una función absolutamente continua significa que no sólo  $F(\beta) - F(\alpha)$  se vuelve infinitamente pequeña con  $\beta - \alpha$  sino que  $\sum[F(\beta) - F(\alpha)]$  es también infinitamente pequeña con  $\sum[\beta - \alpha]$ .



**Figura 4:** Trayectorias y superficies de discontinuidad.

Para cada punto  $(x, t) \in G$  el conjunto  $F(x, t)$  es el conjunto convexo cerrado más pequeño que contiene todos los valores límite de la función vectorial  $f(x^*, t)$  para  $(x^*, t) \notin M$ ,  $x^* \rightarrow x$ ,  $t = \text{const}$ . Una solución de la ecuación (7) es una solución de la inclusión (8).

Considérese el caso donde la función  $f(x, t)$  es discontinua en una superficie suave dada por la ecuación  $\varphi(x) = 0$ . La superficie  $S$  separa las vecindades en el espacio  $x$  en los dominios  $G^-$  y  $G^+$ . Para  $t = \text{const}$  y para el punto  $x^*$  aproximándose al punto  $x \in S$  desde el dominio  $G^-$  y  $G^+$ , entonces la función  $f(x^*, t)$  tiene los siguientes valores límite:

$$\lim_{\substack{x^* \in G^- \\ x^* \rightarrow x}} f(x^*, t) = f^-(x, t) \quad \lim_{\substack{x^* \in G^+ \\ x^* \rightarrow x}} f(x^*, t) = f^+(x, t)$$

Entonces, el conjunto  $F(x, t)$  es un segmento lineal uniendo los puntos finales de los vectores  $f^-(x, t)$  y  $f^+(x, t)$ .

Si para  $t_1 < t < t_2$  este segmento se encuentra en un lado del plano  $P$  tangente a la superficie  $S$  en el punto  $x$ , las soluciones para esta  $t$  pasa por un lado de la superficie  $S$  a la otra (Figura 4a). Si este segmento intersecta el plano  $P$ , el punto de intersección es el punto final del vector  $f^0(x, t)$  que está determinada por la velocidad de movimiento  $\dot{x} = f^0(x, t)$  a

lo largo de la superficie  $S$  en el espacio  $x$  (Figura 4b). Esto significa que la ecuación

$$\dot{x} = f^0(x, t) \quad (9)$$

se asume como la solución de la ecuación (7). El párrafo anterior se resume en el siguiente lema II.1.

**Lema II.1 (Filippov, 1988)** *Considerése la región  $G^-$  y  $G^+$  en el espacio  $x_1 \dots x_n$  separada por una superficie suave  $S$ . Suponer que  $f(x, t)$  es una función vectorial acotada y para cualquier constante  $t$  sus valores límites  $f^-(x, t)$  y  $f^+(x, t)$  existen cuando  $S$  es aproximada por  $G^-$  y  $G^+$ . Sean  $f_N^-$  y  $f_N^+$  las magnitudes de las proyecciones de los vectores  $f^-$  y  $f^+$  en la normal de la superficie  $S$  dirigida desde  $G^-$  y  $G^+$ . Sea la función vectorial  $x(t)$  absolutamente continua y para  $t_1 < t < t_2$  considerar que  $x \in S$ ,  $f_N^-(x, t) \geq 0$ ,  $f_N^+(x, t) \leq 0$ ,  $f_N^- - f_N^+ > 0$ . Para que  $x(t)$  sea una solución de (7), es necesario y suficiente que para casi toda  $t \in [t_1, t_2]$ :*

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x, t), \quad f^0 \equiv \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-, \quad \alpha = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+}. \quad (10)$$

Aplicaciones potenciales de estas herramientas es en el diseño de controladores para sistemas mecánicos con fricción debido a que este fenómeno es modelado por ecuaciones con términos discontinuos (fricción de Coulomb) o por ecuaciones dinámicas con términos continuos no diferenciables. En la próxima subsección se resaltan las ecuaciones Euler-Lagrange para modelar la dinámica de un manipulador seguido de la descripción de algunos modelos de fricción.

## II.3 Modelado de sistemas mecánicos

En las últimas dos décadas se ha escrito una diversidad de literatura detallando el procedimiento para derivar la ecuación dinámica de un robot manipulador completamente actuado (Asada y Slotine, 1985; Sciavicco y Siciliano, 2000; Lewis *et al.*, 1993; entre otros). Una



manera de describir la dinámica de un sistema mecánico es a través de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (Sciavicco y Siciliano, 2000):

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

donde  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q)$  representa la función Lagrangiana,  $\mathcal{K}(q, \dot{q})$  es la energía cinética,  $\mathcal{U}(q)$  es la energía potencial,  $q_i$  es el vector de coordenadas generalizadas y  $\tau_i$  es la fuerza generalizada asociada con las coordenadas generalizadas  $q_i$ . Para un manipulador de enlaces rígidos de  $n$  grados de libertad, las coordenadas generalizadas son las posiciones articulares  $q = [q_1 \cdots q_n]^T$ . Las fuerzas generalizadas  $\tau_i$  están dadas por las fuerzas no conservativas como los pares aplicados por algún actuador, pares debido a las fuerzas de fricción en cada articulación, así como otros pares ejercidos debido al contacto con el medio ambiente que los rodea.

Las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de un robot manipulador de  $n$ -grados de libertad mediante las ecuaciones de Lagrange se pueden representar de manera compacta como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau \quad (12)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  representa las posiciones articulares,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es el par aplicado al manipulador,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica positiva definida que representa la inercia,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el vector de Coriolis y de fuerzas centrífugas,  $G(q)$  representa el vector de pares gravitacionales y  $F(\dot{q})$  representa la fricción presente en el mecanismo.

### II.3.1 Modelos de fricción

Se define la fricción como una fuerza resistente que actúa sobre un cuerpo, que impide o retarda el deslizamiento de un cuerpo respecto a otro o superficie que este en contacto. Esta

fuerza es siempre tangencial a la superficie en los puntos de contacto con otros cuerpos, y tiene un sentido tal que se opone al movimiento posible o existente del cuerpo respecto a esos puntos. Cuando dos superficies están en contacto, siempre se presentan fuerzas tangenciales llamadas fuerzas de fricción, cuando se trata de mover una de las superficies con respecto a otra. Por otra parte estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el movimiento si se aplican fuerzas lo suficientemente grandes.

### Modelo clásico

La fricción es una fuerza que se opone al movimiento de un cuerpo y que su magnitud es dependiente de la velocidad y de la superficie de contacto. La fricción clásica es uno de los modelos de fricción más ampliamente utilizados. Está compuesto de la fricción cinética y viscosa y se puede describir de la siguiente manera:

$$F = F_C \operatorname{sgn}(v) + \sigma_2 v \quad (13)$$

donde la fuerza de fricción  $F_C$  es proporcional a la carga normal  $F_C = \mu F_N$ ,  $\sigma_2$  es el coeficiente de fricción viscosa y  $v$  es la velocidad. El primer término de la ecuación (13) se conoce como el modelo de fricción de Coulomb y genera una fuerza de retardo constante a la superficie de contacto, además no especifica la fuerza de fricción a la velocidad cero generando discontinuidades durante movimientos bidireccionales. El segundo término en la ecuación (13) es la fricción viscosa resultado de la viscosidad de una capa de fluidos lubricantes entre dos superficies en contacto. Como se muestra en la figura 5 la fricción viscosa se representa como una función lineal de la velocidad (Leonard y Krishnaprasad, 1991 y Olsson *et al.*, 1997).

### Modelo de fricción Dahl

El modelo de fricción de Dahl, introducido por Dahl (1968), se desarrolló con el objeto de simular sistemas de control con fricción. El punto de partida del modelo de Dahl es la curva

esfuerzo-deformación en mecánica sólida. Cuando cierto cuerpo es sometido a estiramiento la fuerza de fricción se incrementa hasta que ocurre la ruptura del objeto. Dahl modeló la curva esfuerzo-deformación a través de una ecuación diferencial, donde  $x$  es el desplazamiento,  $F$  la fuerza de fricción y  $F_C$  la fuerza de fricción de Coulomb, tomando la forma que sigue:

$$\frac{dF}{dx} = \sigma_0 \left(1 - \frac{F}{F_C} \operatorname{sgn}(v)\right)^\alpha \quad (14)$$

donde  $\sigma_0$  es el coeficiente de rigidez y  $\alpha$  es un parámetro que determina la forma de la curva esfuerzo-fátiga. El modelo de Dahl en función del tiempo es:

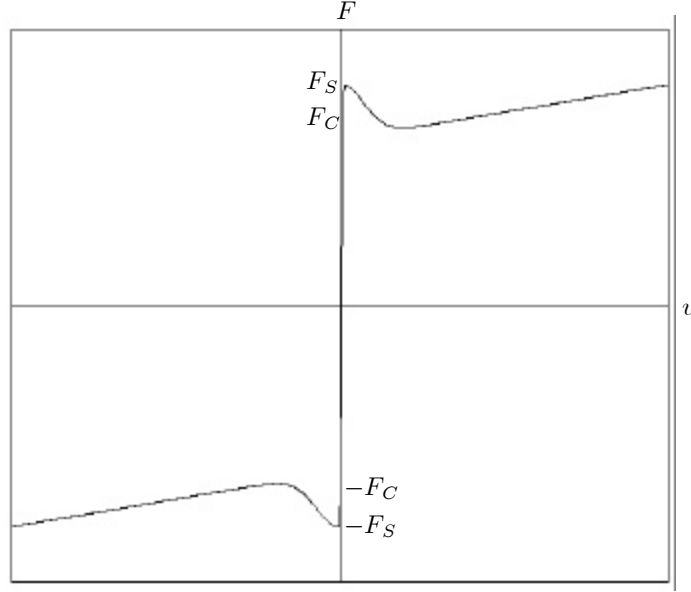
$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} v = \sigma_0 \left(1 - \frac{F}{F_C} \operatorname{sgn}(v)\right)^\alpha v, \quad (15)$$

y que es una generalización del modelo de fricción de Coulomb (Olsson *et al.*, 1997). Para  $\alpha = 1$  el modelo de Dahl (14) es:

$$\frac{dF}{dt} = \sigma_0 \left(v - \frac{F}{F_C} |v|\right).$$

### Modelo de fricción LuGre

El modelo de fricción LuGre es un modelo de fricción dinámico presentado por Canudas-de-Wit *et al.* (1995). Este modelo asume que la topografía de la superficie de un objeto se puede representar como una serie de cerdas flexibles (Haessig y Friedland, 1991). En el momento de aplicar una fuerza tangencial sobre las cerdas entonces se flexionarán como resortes (vease Figura 6). Este modelo de fricción se interpreta como el promedio de la fuerza de deflexión de los resortes elásticos. Si la deflexión es lo suficientemente grande las cerdas empezarán a



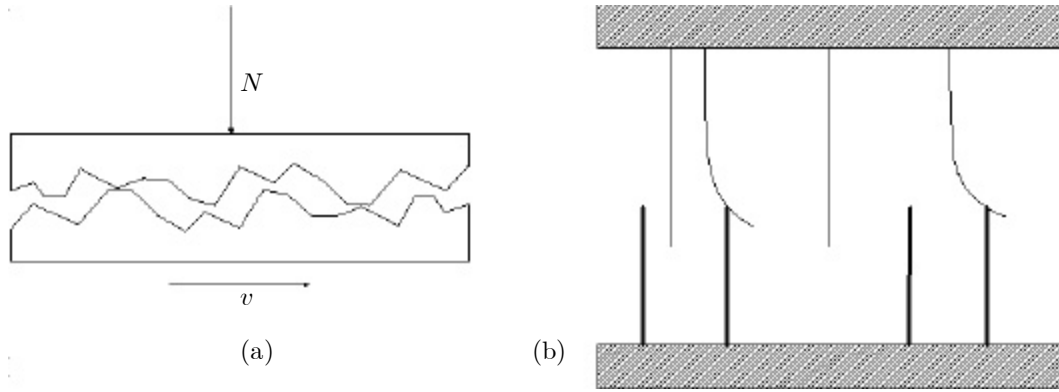
**Figura 5:** Fuerza de fricción.

deslizarse. Este modelo dinámico está descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= v - \frac{\sigma_0}{g(v)}z|v| \\ F &= \sigma_0 z + \sigma_1(v)\dot{z} + \sigma_2 v,\end{aligned}\tag{16}$$

donde  $F$  es la fuerza de fricción,  $z$  es el promedio de deflexión de las cerdas,  $v$  es la velocidad relativa entre dos superficies,  $\sigma_0$  es el coeficiente de rigidez,  $\sigma_1$  es el coeficiente de amortiguamiento asociado a  $\dot{z}$ ,  $\sigma_2 v$  representa la fricción viscosa y la función  $g$ , que depende de muchos factores como propiedades del material, lubricación, temperatura, etc., fue propuesta para describir el efecto de Stribeck (Canudas de Wit *et al.*, 1995):

$$g(v) = F_C + (F_S - F_C)e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2}\tag{17}$$



**Figura 6:** Topografía de una superficie de contacto (a) y su representación a través de cerdas flexibles (b).

donde  $v_s$  es la velocidad de Stribeck y  $F_S$  es el nivel de fricción estática máxima. El valor de la fuerza de fricción  $F$  en estado estable es:

$$F_{ss} = \sigma_0 z_{ss} + \sigma_2 v = g(v) \operatorname{sgn}(v) + \sigma_2 v. \quad (18)$$

## II.4 Resumen

Para encontrar la solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas no lineales se necesita resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs. Desde un punto de vista práctico, la solución de esta ecuación representa dificultades computacionales. Una alternativa para facilitar el desarrollo computacional es resolver un par de ecuaciones de Riccati (Laub y Gahinet, 1997) pero en esta estrategia se debe linealizar la función no lineal. Los trabajos presentados por Chen y Chang (1997) y Acho *et al.* (2001) son ejemplos con aplicaciones a sistemas mecánicos con ausencia de fricción. La presencia de términos continuos no diferenciables en el lado derecho del sistema dinámico  $\dot{x} = f(x)$ , usualmente para representar fricción (Dahl, 1976; Canudas-de-Wit *et al.*, 1995) aparentemente representa una desventaja en la formulación de problemas  $\mathcal{H}_\infty$  donde asumen que los sistemas son infinitamente diferenciables. Las ideas teóricas que se presentan en este capítulo relativas a sistemas no suaves (subdiferencial y superdiferencial;

derivada de Clarke) permite hacer extensiva la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  a sistemas continuos no diferenciables con aplicación a sistemas mecánicos representados por la formulación Euler-Lagrange (12). Los detalles en el manejo de esta teoría se presenta en el capítulo cuatro y cinco, pero se puede adelantar que estas herramientas permiten analizar la derivada en las fronteras del punto donde la derivada no existe.

## Capítulo III

# Control de sistemas discontinuos

### III.1 Introducción

El modelo estático de fricción de Coulomb es la representación más simple para caracterizar este fenómeno. Las hipótesis relativas al sistema no lineal, dadas más adelante, no incluyen esta clase de sistemas. Por otro lado, este modelo no absorbe otros efectos asociados a la fricción (Armstrong-Hélouvry *et al.*, 1994). En este capítulo se presenta el diseño de un controlador conmutado para estabilizar de manera global y en tiempo finito la trayectoria de un servomotor eléctrico que opera bajo condiciones inciertas debido a la presencia de fricción y “backlash”. La ecuación del servomotor es gobernada por una ecuación diferencial de segundo orden con un término discontinuo para representar el fenómeno de fricción de Coulomb y un término que cubre las incertidumbres. Los controladores continuos implementados en esta clase de sistemas no garantizan estabilidad asintótica debido a que presentan múltiples puntos de equilibrio. Un antecedente de controladores discontinuos son los llamados modos deslizantes (Utkin, 1992). Los controladores por modos deslizantes consisten de dos partes: primero, se diseña una variedad tal que en ella el controlador presenta las propiedades deseadas; segundo, la ley de conmutación lleva las trayectorias del sistema a esta variedad en un intervalo de tiempo finito. Los controladores por modos deslizantes estabiliza de manera

asintótica las trayectorias del sistema mostrando ciertos niveles de robustez sin embargo estos controladores generan oscilaciones de alta frecuencia produciendo dinámicas no deseadas en los mecanismos. El controlador diseñado en este capítulo no depende de movimientos deslizante, sin embargo presenta las mismas características de robustez. Las funciones de Lyapunov están dentro del marco de trabajo para la prueba de estabilidad así como el lema de Barbalat y una extensión al teorema de invarianza serán tomados en cuenta en este estudio.

### III.2 Estabilización en tiempo finito de servomotor

Considérese la ecuación dinámica de un servomotor dada por:

$$J\ddot{q} = u - F(\dot{q}) + \omega(t), \quad q, u \in \mathbb{R}^1, \quad (19)$$

donde  $q$  denota desplazamiento,  $u$  es la entrada de control,  $J$  es la inercia,  $\omega(t)$  es el disturbio externo y  $F(\dot{q})$  es la fuerza de fricción gobernada por el modelo clásico:

$$F(\dot{q}) = \sigma_2 \dot{q} + F_C \operatorname{sgn}(\dot{q}) \quad (20)$$

donde  $\sigma_2 > 0$  es el coeficiente de fricción viscosa,  $F_C > 0$  es el nivel de fricción de Coulomb, y

$$\operatorname{sgn}(\dot{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q} > 0 \\ -1 & \text{si } \dot{q} < 0 \end{cases} \quad (21)$$

Debido a que el fenómeno de fricción no ha sido entendido completamente y es difícil de modelar entonces se incluye el término de incertidumbre  $\omega(t)$  en la ecuación del motor (19) para tomar en cuenta algunas discrepancias como rigidez y “backlash”. Se asume que la magnitud de la incertidumbre está acotada por un término conocido a priori  $M > 0$ :

$$|\omega(t)| \leq M \quad \forall t. \quad (22)$$



El objetivo de control es la convergencia de la trayectoria del servomotor (19) hacia el origen  $q = \dot{q} = 0$  en un intervalo de tiempo finito y conservarlo en esta posición a pesar de la influencia de disturbios externos (22) sobre el sistema controlado.

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, los algoritmos de control continuo no estabilizan de manera asintótica al sistema (19), (20) por la presencia de términos discontinuos (21). El servomotor (19), (20) con ley de control continua  $u$  tiene un conjunto de puntos de equilibrios alrededor del origen  $q = 0$  (ver Alvarez *et al.*, 2000), llegando a una solución no apropiada al problema de estabilización. De manera particular, los controladores continuos desarrollados por Bhat y Bernstein (1998) y Hong *et al.* (2001) para estabilizar osciladores sin fricción en tiempo finito no son válidos para estabilizar asintóticamente servomotores (19), (20) con nivel de Coulomb  $F_C$  distinto de cero.

Bajo este argumento, considérese el siguiente algoritmo de control conmutado para resolver el problema de estabilización del servomotor (19), (20) con fricción de Coulomb:

$$u = -\mu\dot{q} - \nu q - \beta\text{sgn}(q) - \gamma\text{sgn}(\dot{q}) \quad (23)$$

donde  $\mu, \nu, \beta, \gamma$  son las ganancias de los parámetros que satisfacen:

$$\mu, \nu \geq 0, \beta - M > F_C + \gamma > M. \quad (24)$$

Las ecuaciones de estado del sistema dinámico (19), (20) con la entrada de control (23) genera discontinuidades en el conjunto de medida cero:

$$\mathcal{N} = \{(q, \dot{q}) : q\dot{q} = 0\} \in \mathbb{R}^2 \quad (25)$$

y en las siguientes líneas de conmutación:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y < 0\}, \\
S_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = 0\}, \\
S_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

**Nota.** Un conjunto de medida cero es un conjunto de valores  $q \in \mathcal{N}$  que puede ser cubierto por una secuencia de intervalos cuya longitud total es arbitrariamente pequeña. Formalmente, se dice que un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida cero si para cada  $\varepsilon > 0$  hay una unión contable de bolas  $B_1, B_2, \dots$  de volumen  $\varepsilon_i$  tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$$

y

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Debido a esto, las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado (19), (20), (23) tiene solución en el sentido de Filippov (Filippov, 1988), esto es, para la solución de la ecuación de segundo orden con términos discontinuos en el lado derecho considérese la función  $\varphi(z, t) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua a tramos en  $z$ , y que sobrepase las discontinuidades en el conjunto  $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^n$  de medida cero para casi toda  $t$ . Entonces la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z} = \varphi(z, t) \tag{27}$$

está dada por la definición III.1.

**Definición III.1 (Filippov, 1998)** Para cada punto  $z \in \mathbb{R}^n$  y  $t \in \mathbb{R}$  sea el conjunto  $\Phi(z, t)$  el conjunto convexo más pequeño que contienen a todos los valores límites de  $\varphi(z^*, t)$  para  $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}(t)$ ,  $z^* \rightarrow z$ . Una función absolutamente continua  $z(t)$ , definida en un intervalo

$I$  se dice que es la solución de (27) si la inclusión diferencial

$$\dot{z} \in \Phi(z, t) \quad (28)$$

con  $\Phi(z, t)$  se satisface para  $z(t)$  en casi todas partes del intervalo  $I$ .

Como se muestra en la Figura 7, el vector de velocidad del servomotor (19), (20) bajo la ley de control conmutada (23), (24) es tal que la trayectorias del sistema pasa por las líneas de conmutación (26) en todas partes excepto en el origen  $(q, \dot{q}) = 0$ .

Con el propósito de representar el sistema de lazo cerrado (19), (20), (23) en la forma de la ecuación diferencial (27), considérese ahora a  $z = (x, y)^T$ ,  $x = q$  y  $y = \dot{q}$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ , donde:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z, t) &= y, \\ \varphi_2(z, t) &= J^{-1}[-(\sigma_2 + \mu)y - \nu x - \beta \operatorname{sgn}(x) - (F_C + \gamma) \operatorname{sgn}(y) + \omega(t)]. \end{aligned} \quad (29)$$

El conjunto de discontinuidades (25) parte el plano de fase  $\mathbb{R}^2$  en las siguientes cuatro regiones:

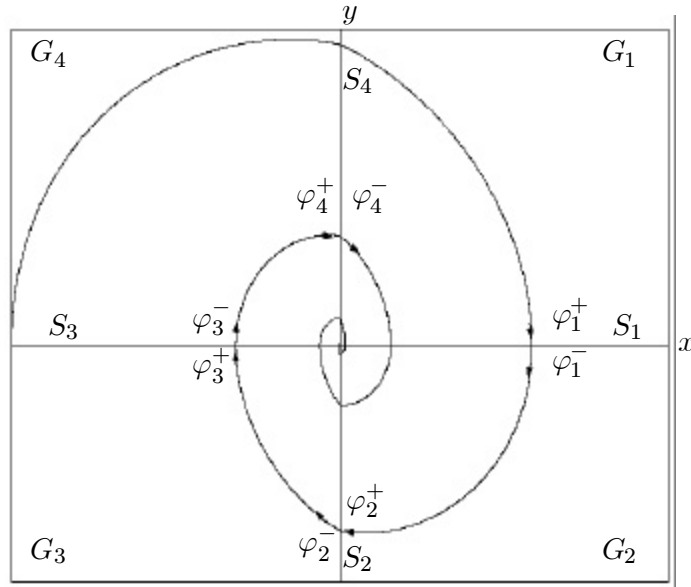
$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}, \quad G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}, \\ G_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}, \quad G_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}, \end{aligned} \quad (30)$$

y en las líneas de conmutación (26), los vectores de velocidad:

$$\varphi_1^+ = \lim_{\substack{z \rightarrow (x_1, 0) \\ z \in G_1}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu x_1 - \beta - (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1^- &= \lim_{\substack{z \rightarrow (x_1, 0) \\ z \in G_2}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu x_1 - \beta + (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix} \\
\varphi_2^+ &= \lim_{\substack{z \rightarrow (0, y_1) \\ z \in G_2}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} Jy_1 \\ -(\sigma_2 + \mu)y_1 - \beta + (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix} \\
\varphi_2^- &= \lim_{\substack{z \rightarrow (0, y_1) \\ z \in G_3}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} Jy_1 \\ -(\sigma_2 + \mu)y_1 + \beta + (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix} \\
\varphi_3^+ &= \lim_{\substack{z \rightarrow (x_1, 0) \\ z \in G_3}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu x_1 + \beta + (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix} \\
\varphi_3^- &= \lim_{\substack{z \rightarrow (x_1, 0) \\ z \in G_4}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu x_1 + \beta - (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix} \\
\varphi_4^+ &= \lim_{\substack{z \rightarrow (0, y_1) \\ z \in G_4}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} Jy_1 \\ -(\sigma_2 + \mu)y_1 + \beta - (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix} \\
\varphi_4^- &= \lim_{\substack{z \rightarrow (0, y_1) \\ z \in G_1}} \varphi(z, t) = J^{-1} \begin{pmatrix} Jy_1 \\ -(\sigma_2 + \mu)y_1 - \beta - (F_C + \gamma) + \omega(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

apuntan hacia la misma región para todo instante de tiempo  $t$  y todo disturbio admisible externo (22). Por lo tanto el controlador conmutado (23) no genera modos deslizantes en las



**Figura 7:** Retrato de fase de servomotor controlado por controlador discontinuo.

líneas de conmutación (26), y  $(q, \dot{q}) = 0$  es el único punto de equilibrio del sistema. Junto con esto, el controlador (23) asegura la estabilización de los servomotores en un tiempo finito. Este párrafo se define de manera formal en el teorema III.1.

**Teorema III.1** *Considérese el servomotor (19), (20) controlado por (23). Entonces el punto de equilibrio  $(q, \dot{q}) = (0, 0)$  del sistema en lazo cerrado (19), (20), (23) es asintóticamente estable de manera global y todas las trayectorias convergen al equilibrio en tiempo finito al menos que un disturbio (22) afecte su trayectoria ( $w \neq 0$ ).*

**Prueba.** La prueba de este teorema se divide en tres partes.

1. Con el propósito de probar estabilidad asintótica y global de (27), (29) se utiliza una función de Lyapunov no suave:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(\nu x^2 + Jy^2) + \beta|x|, \quad (31)$$

cuya derivada temporal a lo largo de la trayectoria del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -(\sigma_2 + \mu)y^2(t) - (F_C + \gamma)|y(t)| + y(t)\omega(t) \leq \\ &\quad -(\sigma_2 + \mu)y^2(t) - (F_C + \gamma - M)|y(t)| \end{aligned} \quad (32)$$

donde la desigualdad proviene de las condiciones (22) y (24). La desigualdad (32) con constantes positivas  $(F_C + \mu)$  y  $(F_C + \gamma - M)$  se satisface en todas partes a lo largo del conjunto de discontinuidades (25). Dado que ninguna trayectoria se queda en  $N \setminus \{0\}$  dentro de un intervalo de tiempo finito, la desigualdad (32) se satisface para casi toda  $t$  y por lo tanto la estabilidad del sistema en lazo cerrado se garantiza.

Otra consecuencia de (32), se concluye que para las trayectorias del sistema inicializadas dentro de un conjunto acotado  $\{(x, y) : V(x, y) \leq V_0\}$ , donde  $V_0$  es una constante positiva suficientemente grande, las trayectorias permanecen acotadas de manera uniforme por:

$$\sup_{t \in [0, \infty)} V(x(t), y(t)) \leq V_0. \quad (33)$$

Además, se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad (34)$$

a pesar de la selección de las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado. Para justificar (34) es suficiente integrar la desigualdad (32) y representar la desigualdad resultante en la forma

$$\int_0^\infty [(\sigma_2 + \mu)y^2(t) + (F_C + \gamma - M)|y(t)|] dt \leq V_0. \quad (35)$$

Debido a (33) entonces las derivadas con respecto al tiempo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado son uniformemente acotadas.

Para completar la prueba de estabilidad asintótica global del sistema en lazo cerrado (27), (29) falta por justificar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (36)$$

La relación anterior se establece derivando la función auxiliar (indefinida)  $W(x, y) = xJy$  a lo largo de la trayectoria del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{W} = \dot{x}Jy + xJ\dot{y} &= Jy^2 - \nu x^2 - (\sigma_2 + \mu)xy - \beta|x| - (F_C + \gamma)x\text{sgn}(y) \\ &+ x\omega \leq Jy^2 - \nu x^2 - (\sigma_2 + \mu)xy - [\beta - M - (F_C + \gamma)]|x|. \end{aligned} \quad (37)$$

Integrando (37) y aplicando la desigualdad:

$$2gh \leq \varepsilon g^2 + \frac{1}{\varepsilon} h^2, \quad g, h \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0$$

se llega a

$$\begin{aligned} &\int_0^t \{\nu x^2 + [\beta - M - (F_C + \gamma)]|x|\} d\tau \\ &\leq W(0) - W(t) + \int_0^t [Jy^2 - (\sigma_2 + \mu)xy] d\tau \\ &\leq W(0) - W(t) + \int_0^t \left\{ \varepsilon x^2 + \left[ J + \frac{1}{4\varepsilon} (\sigma_2 + \mu)^2 \right] y^2 \right\} d\tau \\ &\leq W(0) - W(t) + \int_0^t \left\{ \varepsilon V_0 \beta^{-1} |x| + \left[ J + \frac{1}{4\varepsilon} (\sigma_2 + \mu)^2 \right] y^2 \right\} d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Considerando  $\varepsilon = \frac{\beta}{2V_0} (\beta - M - F_C - \gamma)$  positiva debido a (24) entonces

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left\{ \nu x^2 + \frac{1}{2} [\beta - M - (F_C + \gamma)] |x| \right\} d\tau \\ &\leq x(0)Jy(0) - x(t)Jy(t) + \int_0^t \left[ J + \frac{1}{4\varepsilon} (\sigma_2 + \mu)^2 \right] y^2 d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

Debido a (33) y (35) el lado derecho de la desigualdad (39) es acotada de manera

uniforme en  $t \geq 0$  para todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado, inicializada dentro del conjunto acotado  $\{(x, y) : V(0) \leq V_0\}$ , entonces la siguiente desigualdad:

$$\int_0^{\infty} x^2 d\tau \leq L(V_0) \quad (40)$$

con alguna constante positiva  $L$  dependiente de  $V_0$  se obtiene directamente de (39).

Aplicando el lema de Barbalat a la integral de la desigualdad (40), se concluye que las trayectorias del sistema convergen al equilibrio (36) con las condiciones iniciales dentro  $\{(x, y) : V(0) \leq V_0\}$ . Para una constante  $V_0$  arbitrariamente grande se puede concluir convergencia global (36) para las trayectorias del sistema con condiciones iniciales arbitrarias.

2. El sistema en lazo cerrado (27), (29) es asintóticamente estable en forma global y todas las trayectorias del sistema permanecen en una bola arbitrariamente pequeña  $B_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

El tiempo de establecimiento  $T(x(0), y(0))$  (es decir, el tiempo de convergencia al origen) de la trayectoria, inicializada dentro de una bola  $B_R$  de radio  $R > 0$  suficientemente pequeña puede ser estimada invocando el siguiente sistema de comparación

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(J)^{-1}[\beta \operatorname{sgn}(x) + (F_C + \gamma - M - \varepsilon) \operatorname{sgn}(y)] \quad (41)$$

donde  $\varepsilon > 0$  es tal que

$$F_C + \gamma > M + \varepsilon. \quad (42)$$

El lado derecho

$$\varphi_1^c(x, y) = y, \quad \varphi_2^c(x, y) = -(J)^{-1}[\beta \operatorname{sgn}(x) + (F_C + \gamma + M + \varepsilon) \operatorname{sgn}(y)] \quad (43)$$



del sistema de comparación (41) se relaciona con el sistema original (27), (29) de la siguiente manera:

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1^c(x, y), \quad \varphi_2(x, y, \omega) = \varphi_2^c(x, y) + \Delta\varphi(x, y, \omega) \quad (44)$$

donde

$$\Delta\varphi(x, y, \omega) = -(J)^{-1}[(M + \varepsilon)\text{sgn}(y) - \omega + (\sigma_2 + \mu)y + \nu x] \quad (45)$$

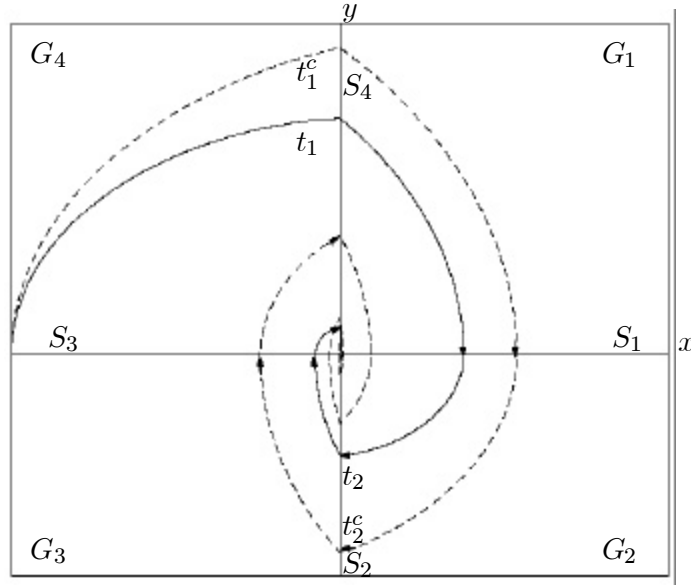
y debido a (24)

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x, y, \omega) &\leq 0 \text{ si } (x, y) \in (G_1 \cup G_4) \cap B_R \\ \Delta\varphi(x, y, \omega) &\geq 0 \text{ si } (x, y) \in (G_2 \cup G_3) \cap B_R \end{aligned} \quad (46)$$

para todas las perturbaciones externas admisibles (22) y radio suficientemente pequeño  $R > 0$ .

Debido a (44) y (46), el movimiento de la trayectoria de la planta (27) y (29) inicializada dentro de la bola  $B_R$  con radio suficientemente pequeño, es dominado por el sistema de comparación (41) sujeto a las mismas condiciones iniciales. En otras palabras, la trayectoria  $(x^c(t), y^c(t))$  del sistema de comparación y la trayectoria de la planta  $(x(t), y(t))$  rotan alrededor del origen y en cada región  $G_i, i = 1, 2, 3, 4$  la gráfica de la trayectoria de la planta está acotada por la correspondiente curva de la trayectoria del sistema de comparación y las líneas de conmutación  $S_{i-1}, S_i$ . El retrato de fase de la Figura 8 muestra la evolución de las trayectorias del sistema original y el sistema de comparación.

Sean  $t_k(x(0), y(0))$  y  $t_k^c(x(0), y(0))$ ,  $k = 1, 2, \dots$  los instantes en el tiempo de la  $k$ -ésima intersección de la solución del sistema (27), (29) correspondiente a la condición inicial  $(x(0), y(0)) \in B_R$ , y el eje vertical  $x = 0$ , y la del sistema de comparación (41) sujeto a las mismas condiciones iniciales respectivamente. El sistema dinámico (19)-(23) genera



**Figura 8:** Retrato de fase de la planta (línea sólida) y del sistema de comparación (línea punteada).

un número de infinito de conmutaciones en un intervalo de tiempo finito, entonces, por construcción:

$$Var_0^T y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |y(t_k)| \leq Var_0^{T^c} y^c(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |y^c(t_k)| \quad (47)$$

donde  $T = T(x(0), y(0))$  y  $T^c = T^c(x(0), y(0))$  son los tiempos de establecimiento de la trayectoria de la planta y del sistema de comparación. Por otro lado

$$Var_0^T y(t) = \int_0^T |\dot{y}(t)| dt \geq (\beta - F_C - \gamma - M)T \quad (48)$$

porque de acuerdo a (27), (29)

$$|\dot{y}(t)| \geq (\beta - F_C - \gamma - M) \text{ en casi toda } t \in [0, T] \quad (49)$$

y debido a (24), la constante  $c = (\beta - F_C - \gamma - M)$  es positiva. La relación (47)-(49) asegura que el tiempo de establecimiento de la trayectoria del sistema en lazo cerrado

sea gobernado por:

$$T \leq (\beta - F_C - \gamma - M)^{-1} \text{Var}_0^{T^c} y^c(t) \quad (50)$$

y es por lo tanto finito siempre y cuando la variación de velocidad  $\text{Var}_0^{T^c} y^c(t)$  del sistema de comparación lo sea.

3. Para completar la prueba sólo falta por demostrar que todas las trayectorias del sistema de comparación (41), inicializadas dentro de una bola  $B_R$  de radio  $R > 0$  suficientemente pequeño son de variación finita  $\text{Var}_0^{T^c} y^c(t) = \int_0^{T^c} |y^c(t)| dt$ . De acuerdo a (41),  $|y^c(t)| \leq \beta + F_C + \gamma - M - \varepsilon$ , es suficiente probar que todas estas trayectorias convergen al origen en tiempo finito.

Considerérense las constantes  $a = J^{-1}\beta$ ,  $b = J^{-1}(F_C + \gamma - M - \varepsilon)$  entonces el sistema de comparación (41) se puede representar de forma simplificada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -a \text{sgn}(x) - b \text{sgn}(y). \end{aligned} \quad (51)$$

El sistema (51) es homogéneo en el sentido de que junto con la solución  $(x(t), y(t))$  de (51) y una función vectorial  $(x_0(t), y_0(t))$  gobernada por:

$$x_0(t) = c^2 x(c^{-1}t), \quad y_0(t) = c y(c^{-1}t) \quad (52)$$

con cualquier constante arbitraria  $c > 0$  es también una solución de (51). Esta propiedad de homogeneidad se verifica directamente a través de la diferenciación de (52).

Debido a que  $a > b$  por (42), entonces la línea de razonamiento del paso 1 permite concluir que el sistema (51) es asintóticamente estable en forma global. Además, el sistema (51) es autónomo y por el lema 1 de Filippov (1988) [pág. 160] la estabilidad es uniforme con condiciones iniciales dentro de una bola  $B_R$ , es decir, todas las soluciones

que inician dentro de la bola de radio  $R > 0$  convergen uniformemente al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . De esta manera, dado que  $\delta > 0$ , entonces existe una  $s > 0$  tal que para todas las soluciones  $z_0(t) = (x_0(t), y_0(t))$  con  $z_0(0) \in B_\delta$  existe una  $z_0(t) \in B_{\frac{1}{2}\delta}$  para toda  $t > s$ .

Sea  $R \in (0, \delta)$  y sea  $z(t)$  una solución arbitraria de (51) con  $z(0) \in B_R$ . Entonces (52), especificada con  $c = \sqrt{\delta R^{-1}} > 1$ , es aparentemente una solución de (51) tal que  $z_0(0) \in B_\delta$ , y por lo tanto:

$$z_0(t) \in B_{\frac{1}{2}\delta} \text{ para } t \geq s. \quad (53)$$

La solución anterior, reescrita en términos de  $z(t)$  por medio de (52) y sujeta a  $c = \sqrt{\delta R^{-1}}$  se representa de la siguiente manera:

$$z(t) \in B_{\frac{1}{2}R} \text{ para } t \geq t_1 = \sqrt{\delta^{-1}R} s. \quad (54)$$

Aplicando la misma derivación de la solución a (51) con  $z(t_1) \in B_{\frac{1}{2}R}$  se obtiene:

$$z(t) \in B_{\frac{1}{4}R} \text{ para } t \geq t_2 = t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\delta^{-1}R} s. \quad (55)$$

En general se obtienen las siguientes relaciones:

$$z(t) \in B_{2^{-(i+1)}R} \text{ para } t \geq t_{i+1} = t_i + \frac{1}{\sqrt{2^i}}\sqrt{\delta^{-1}R} s, \quad i = 1, 2, \dots \quad (56)$$

por iteración en  $i$ . Entonces se concluye que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2^i}} \sqrt{\delta^{-1}R} s = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{2^{-n}}}{1 - \sqrt{2^{-1}}} \sqrt{\delta^{-1}R} s &= (\sqrt{2} + 2) \sqrt{\delta^{-1}R} s < \infty, \end{aligned} \quad (57)$$

y finalmente las relaciones (56) resultan en:

$$z(t) \in \cap_{i=1}^{\infty} B_{2^{-i}R} = \{0\} \text{ para } t \geq (\sqrt{2} + 2)\sqrt{\delta^{-1}R} s, \quad (58)$$

de tal modo que queda establecida la propiedad de convergencia en tiempo finito para el sistema de comparación (51). ■

Finalmente, se observa que la prueba de convergencia en tiempo finito de sistemas discontinuos está inspirada de la literatura existente acerca de la teoría de modos deslizantes de alto orden (Levant, 1993; Levant, 2000) mientras que la aproximación basada en el principio de invarianza para probar estabilidad asintótica es novedosa para sistemas discontinuos y puede ser de ayuda en futuras investigaciones en modos deslizantes de alto orden.

### III.3 Resumen

Los servomotores son gobernados por ecuaciones diferenciales de segundo orden con incertidumbres en su lado derecho admitiendo términos discontinuos para tomar en cuenta fricción y “backlash”. El análisis de estabilidad y síntesis de control conmutado para un servomotor eléctrico ante la presencia del fenómeno de fricción y “backlash” está en el marco de funciones de métodos de Lyapunov con derivadas temporales no positivas a lo largo de la trayectoria del sistema. En el controlador discontinuo construido aparecen un número infinito de conmutaciones en un intervalo de tiempo finito, sin embargo, éste no cuenta con la generación de movimientos deslizantes llevando de la reducción oscilaciones de alta frecuencia del sistema en lazo cerrado mientras que conserva algunas características de robustez similares a las que se presentan en modos deslizantes. De manera particular, el controlador conmutado atenúa la influencia no deseada de fricción y “backlash” en el motor. Resultados de simulación se presentan en el capítulo seis.

## Capítulo IV

# Solución al problema de control $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas no suaves variantes en el tiempo

### IV.1 Introducción

En este capítulo se presenta la solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas que presentan términos continuos no diferenciables. En la formulación planteada por Van der Schaft (1992), Isidori y Astolfi (1992), Ball *et al.* (1993) entre otros, se obtiene la solución considerando un campo vectorial suave, sin embargo en aplicaciones a sistemas mecánicos es inevitable la presencia de fricción y otros términos no suaves (en general) considerándolos despreciables o como perturbación externa. Desafortunadamente ante actuadores con alto nivel de fricción se producen tareas de pobre rendimiento. En resumen, en estos planteamientos, la solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no garantiza estabilidad asintótica para sistemas mecánicos afectados por fricción.

La principal contribución de este capítulo es formular el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para

encontrar una ley de control que garantice estabilidad asintótica para el sistema ante presencia de fricción y que el tamaño de la señal de error se mantenga uniformemente acotada ante cualquier perturbación externa admisible.

Para resolver este problema se sigue la línea de razonamiento propuesta por Orlov *et al.* (1999) para sistemas no lineales variantes en tiempo y se involucran las herramientas de análisis no suave proporcionadas por Clarke (1993). Se considera de manera particular la presencia de términos continuos no diferenciables concavos (e.g.  $-|x|$ ), motivado por el hecho de que modelos dinámicos de fricción presentan esta propiedad.

## IV.2 Formulación del problema

En anteriores formulaciones  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas no lineales variantes en el tiempo se considera que existe una función  $f(x, t)$  diferenciable (i.e.  $\mathcal{C}^1$  o suave), sin embargo, se asume ahora que  $f(x, t)$  contiene también términos continuos no diferenciables (no suaves) en el estado y concavos. Para facilitar el subsecuente análisis se considera que  $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$ , donde  $f_1(x, t)$  y  $f_2(x, t)$  contiene a los términos suaves y no suaves respectivamente.

Considérese un sistema no lineal no autónomo de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), t) + f_2(x(t), t) + g_1(x(t), t)w(t) + g_2(x(t), t)u(t) \\ z(t) &= h_1(x(t), t) + k_{12}(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= h_2(x(t), t) + k_{21}(x(t), t)w(t) \end{aligned} \tag{59}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $t \in \mathbb{R}$  es el tiempo,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^r$  es la señal de disturbio,  $z \in \mathbb{R}^l$  es la salida desconocida a ser controlada,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la única información disponible para retroalimentación en el sistema. Para el sistema (59) se deben satisfacer las siguientes suposiciones:

**A1)** Las funciones  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$ ,  $k_{12}(x, t)$ ,  $k_{21}(x, t)$  son

continuas a tramos en  $t$  para toda  $x$  y localmente Lipzchitz en  $x$  para casi toda  $t$ .

**A2)**  $f_1(0, t) = 0$ ,  $f_2(0, t) = 0$ ,  $h_1(0, t) = 0$ , y  $h_2(0, t) = 0$  para casi toda  $t$ .

**A3)**

$$h_1^T(x, t)k_{12}(x, t) = 0, \quad k_{12}^T(x, t)k_{12}(x, t) = I$$

$$k_{21}(x, t)g_1^T(x, t) = 0, \quad k_{21}(x, t)k_{21}^T(x, t) = I.$$

La consideración A1) garantiza que el sistema dinámico sea bien definido, mientras sean aplicadas entradas externas, así como aceptar términos no suaves. A2) asegura que el origen sea un punto de equilibrio para el sistema dinámico no controlado ( $u = 0$ ) y no perturbado ( $w = 0$ ); finalmente A3) simplifica el desarrollo del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

Un controlador dinámico:

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{K}(\xi, t), \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, y) \end{aligned} \tag{60}$$

donde  $\mathcal{K}(\xi, t) \in \mathcal{C}^1$ ,  $\eta(\xi, y) \in \mathcal{C}^0$  y con estado interno  $\xi \in \mathbb{R}^s$  se dice que es un controlador admisible en forma global (local) si el sistema de lazo cerrado (59), (60) es asintóticamente (uniformemente) estable en forma global (local) siempre y cuando  $w = 0$ .

Dado un número real  $\gamma > 0$ , se dice que el sistema (59), (60) tiene una ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor que  $\gamma$  si la respuesta  $z$ , resultante de  $w$  para cualquier estado inicial  $x(t_0) = 0$ ,  $\xi(t_0) = 0$ , satisface:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \tag{61}$$

para toda  $t_1 > t_0$  y para toda función continua a tramos  $w(t)$ .

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no suave es encontrar un controlador admisible en forma



global (60) tal que la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema de lazo cerrado (59), (60) sea menor que  $\gamma$ . Un controlador admisible en forma local (60) se dice que es una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  si existe una frontera en  $U$  alrededor del punto de equilibrio tal que la desigualdad (61) se satisface para todo  $t_1 > t_0$  y para toda función continua a tramos  $w(t)$  para la cual la trayectoria del estado del sistema en lazo cerrado que inicia en  $(x(t_0), \xi(t_0)) = (0, 0)$  se mantenga en  $U$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

### IV.3 Solución global en espacio de estado

De las hipótesis dadas a continuación se parte para encontrar la solución global del controlador  $\mathcal{H}_\infty$ .

**H1)** Existe una función positiva definida  $F(x)$  y una función suave, acotada, positiva definida  $V(x, t)$ , tal que la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Issacs

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f_1(x, t) + f_2(x, t)] + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) - \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) \\ + h_1^T(x, t) h_1(x, t) + F(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (62)$$

se cumpla para casi toda  $t \in \mathbb{R}$  con

$$\alpha_1(x, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (63)$$

$$\alpha_2(x, t) = -\frac{1}{2} g_2^T(x, t) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T. \quad (64)$$

**H2)** Existe una función continua a tramos  $G(t)$ , y una función positiva semidefinida  $Q(x, \xi)$ , sujeto a que  $Q(0, t)$  sea positiva definida; y una función suave, acotada, positiva semidefinida  $W(x, \xi, t)$  sujeta a que  $W(0, \xi, t)$  sea acotada y positiva definida, tal que la

desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_e(x, \xi, t) + h_e^T(x, \xi, t) h_e(x, \xi, t) \\ + \gamma^2 \phi^T(x, \xi, t) \phi(x, \xi, t) + Q(x, \xi) \leq 0 \end{aligned} \quad (65)$$

se cumpla para todo  $t \in \mathbb{R}$  con

$$\begin{aligned} f_e^T(x, \xi, t) &= ((f_e^1)^T, (f_e^2)^T) \\ f_e^1 &= f_1(x, t) + f_2(x, t) + g_1(x, t)\alpha_1(x, t) + g_2(x, t)\alpha_2(\xi, t) \\ f_e^2 &= f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + g_1(\xi, t)\alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t)\alpha_2(\xi, t) + \\ &G(t)(h_2(x, t) - h_2(\xi, t)) \end{aligned} \quad (66)$$

$$h_e(x, \xi, t) = \alpha_2(\xi, t) - \alpha_2(x, t) \quad (67)$$

$$\phi(x, \xi, t) = \frac{1}{2\gamma^2} g_e^T(x, t) \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^T \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^T \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$g_e(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ G(t)k_{21}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Bajo las hipótesis H1) y H2), la solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  se establece en el teorema IV.1,

**Teorema IV.1** *Suponer que las hipótesis H1) y H2) se satisfacen. Entonces la retroali-*

mentación de la salida

$$\dot{\xi} = f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + g_1(\xi, t)\alpha_1(\xi, t) + g_2(\xi, t)\alpha_2(\xi, t) + G(t)[y(t) - h_2(\xi, t)],$$

$$u = \alpha_2(\xi, t) \tag{70}$$

estabiliza en forma asintótica y global el sistema sin perturbaciones (59) y hace que la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema de lazo cerrado sea menor que  $\gamma$ .

#### IV.4 Solución local en espacio de estados

En la presente sección se dará solución al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  en forma local. En este análisis se asume de manera adicional lo siguiente:

- A4)** Para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ , las funciones  $f_1(x, t)$ ,  $g_1(x, t)$ ,  $g_2(x, t)$ ,  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$ ,  $k_{12}(x, t)$ ,  $k_{21}(x, t)$  son al menos dos veces diferenciables en  $x$  alrededor del origen  $x = 0$  mientras que sus derivadas de primer y segundo orden son continuas a tramos y uniformemente acotadas en  $t$  para toda  $x$  en alguna frontera alrededor el origen  $x = 0$ .
- A5)** El vector  $\zeta = 0$  es el supergradiente próximo de los componentes  $f_{2i}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de las funciones  $f_2(x, t)$  en  $x = 0$ .

Se puntualiza que un vector  $\zeta(\hat{x}, t) \in \mathbb{R}^n$  es el supergradiente próximo de una función escalar  $f(x, t)$  en  $(\hat{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , si existe alguna  $\sigma(\hat{x}, t) > 0$  tal que

$$f(x, t) \leq f(\hat{x}, t) + \zeta^T(\hat{x}, t)(x - \hat{x}) + \sigma(\hat{x}, t)\|x - \hat{x}\|^2 \tag{71}$$

para toda  $x$  en alguna frontera  $U(\hat{x}, t)$  alrededor de  $\hat{x}$ . El supergradiente próximo  $\zeta(\hat{x}, t)$  se dice que es uniforme en tiempo si la desigualdad (71) se satisface para cualquier  $\sigma(\hat{x}) > 0$

y toda  $x$  en cualquier frontera invariante en el tiempo  $U(\hat{x}, t)$  de  $\hat{x}$ . El conjunto  $\partial^P f(x, t)$  del supergradiente próximo de  $f$  en  $(\hat{x}, t)$  se conoce como el superdiferencial próximo de  $f$  en  $(\hat{x}, t)$ .

Así que los componentes  $f_{2i}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de la función  $f_2(x, t)$  es tal que

$$0 \in \partial^P f_{2i}(0, t) \text{ uniformemente en } t \in \mathbb{R} \quad (72)$$

o de manera equivalente,

$$f_{2i}(x, t) \leq \sigma \|x\|^2 \quad (73)$$

para cualquier  $\sigma > 0$ , para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  y todo  $x \in U(0)$ .

Las consideraciones A1)-A5) permiten linealizar la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaac para obtener una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

En el análisis local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  se considera el sistema lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \\ z &= C_1(t)x + D_{12}(t)u \\ y &= C_2(t)x + D_{21}(t)w \end{aligned} \quad (74)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, t), \quad B_1(t) = g_1(0, t), \quad B_2(t) = g_2(0, t), \\ C_1(t) &= \frac{\partial h_1}{\partial x}(0, t), \quad C_2(t) = \frac{\partial h_2}{\partial x}(0, t), \quad D_{12}(t) = k_{12}(0, t), \quad D_{21}(t) = k_{21}(0, t). \end{aligned} \quad (75)$$

Este problema es bien entendido si el sistema lineal (74) es estabilizable y detectable desde  $u$  hasta  $y$ . Bajo estas consideraciones, los siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que la solución del problema exista (ver Ravi *et al.*, 1991):

**C1)** Existe una solución simétrica, positiva semidefinida<sup>1</sup> acotada a la ecuación

$$-\dot{P} = P(t)A_1(t) + A_1^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P(t) \quad (76)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A_1 - (B_2B_2^T - \gamma^{-2}B_1B_1^T)P](t)x(t) \quad (77)$$

sea exponencialmente estable;

**C2)** Existe solución simétrica, positiva semidefinida y acotada de la ecuación

$$\dot{Z} = A(t)Z(t) + Z(t)A^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) + Z(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}PB_2B_2^TP - C_2^TC_2\right](t)Z(t) \quad (78)$$

tal que el sistema

$$\dot{x} = [A - Z(C_2^TC_2 - \gamma^{-2}PB_2B_2^TP)](t)x(t) \quad (79)$$

sea exponencialmente estable con  $A(t) = A_1(t) + \frac{1}{\gamma^2}B_1(t)B_1^T(t)P(t)$ .

De acuerdo al lema real de acotamiento variante en el tiempo, definida más adelante, las condiciones C1) y C2) aseguran que existe una constante positiva  $\varepsilon_0$  tal que la ecuación de Riccati perturbada del sistema

$$-\dot{P}_\varepsilon = P_\varepsilon(t)A_1(t) + A_1^T(t)P_\varepsilon(t) + C_1^T(t)C_1(t) + P_\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P_\varepsilon(t) + \varepsilon I, \quad (80)$$

---

<sup>1</sup>La matriz  $P(t)$  dependiente del tiempo es positiva semidefinida si y sólo si  $x^TP(t)x \geq 0$  para todo  $n$ -vector y todo instante de tiempo  $t$  mientras que  $P(t)$  es positiva definida si y sólo si  $x^TP(t)x \geq mx^Tx$  para toda  $x$  y  $t$ , y cualquier constante  $m > 0$ .  $P(t)$  es acotada si y sólo si  $\|P(t)\| \leq m_0$  para toda  $t$  y cualquier constante  $m_0 > 0$ .

$$\dot{Z}_\varepsilon = A_\varepsilon(t)Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)A_\varepsilon^T(t) + B_1(t)B_1^T(t) + Z_\varepsilon(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2\right](t)Z_\varepsilon(t) + \varepsilon I \quad (81)$$

tenga una única solución simétrica positiva definida y acotada  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  donde  $A_\varepsilon(t) = A_1(t) + \frac{1}{\gamma^2} B_1(t)B_1^T(t)P_\varepsilon(t)$ . La versión de este lema para el caso periódico se encuentra en Chung y Hauser (1997).

**Lema IV.1** *Asumiendo que las condiciones C1 y C2 se satisfacen entonces existe una  $\varepsilon_0 > 0$  tal que el sistema (80), (81) tiene una solución única simétrica positiva definida y acotada  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .*

De esta forma las ecuaciones (80) y (81) permiten obtener la solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal para el sistema (59).

**Teorema IV.2** *Suponer que las condiciones C1) y C2) se satisfacen y sea  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  una solución positiva definida de (80), (81) bajo cualquier  $\varepsilon > 0$ . Entonces las hipótesis H1) y H2) se satisfacen en forma local alrededor del punto de equilibrio  $(x, \xi) = (0, 0)$  con*

$$V(x, t) = x^T P_\varepsilon(t)x, \quad (82)$$

$$W(x, \xi, t) = \gamma^2(x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-1}(t)(x - \xi), \quad (83)$$

$$F(x) = \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2, \quad (84)$$

$$G(t) = Z_\varepsilon(t)C_2^T(t), \quad (85)$$

$$Q(x, \xi) = \frac{\varepsilon}{2} \gamma^2 \min_{t \in R} \|Z_\varepsilon^{-1}(t)\|^2 \|x - \xi\|^2, \quad (86)$$

y la salida de retroalimentación

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi, t) g_1^T(\xi, t) - g_2(\xi, t) g_2^T(\xi, t) \right] P_\varepsilon(t) \xi \\ & + Z_\varepsilon(t) C_2^T(t) [y(t) - h_2(\xi, t)] \end{aligned} \quad (87)$$

$$u = -g_2^T(\xi, t) P_\varepsilon(t) \xi \quad (88)$$

es una solución local al problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ .

*Prueba.* La prueba del teorema IV.2 se presenta en la subsección IV.4.1.

Las condiciones C1) y C2) aseguran la existencia de una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal y además estas condiciones no solo son suficientes sino necesarias para que la solución exista. Además existe una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  no lineal y su aproximación no lineal estabiliza en forma exponencial el sistema lineal no perturbado (74). De la proposición 6 en Van der Schaft (1992) se puede observar que las anteriores consideraciones garantizan la solución del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  lineal para el sistema linealizado (74) y considerando que (74) es estabilizable y detectable entonces (ver Ravi, 1991) las condiciones C1) y C2) se satisfacen.

#### IV.4.1 Prueba del teorema IV.2

Primero, se demuestra que en una frontera alrededor del origen  $x = 0$  y para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ , la función  $V(x, t) = x^T P_\varepsilon x$ , diferenciable, acotada y positiva definida por construcción, satisface la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs (62) sujeta a (84). Desarrollando

$$\frac{\partial V}{\partial t} = x^T \dot{P}_\varepsilon(t) x \quad (89)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, t) = x^T [P_\varepsilon A_1 + A_1^T P_\varepsilon](t)x + o_t(\|x\|^2) \quad (90)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_2(x, t) \leq \sigma^0 \|x\|^3 \quad (91)$$

$$\gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) = \frac{1}{\gamma^2} x^T P_\varepsilon B_1(t) B_1^T(t) P_\varepsilon x + o_t(\|x\|^2) \quad (92)$$

$$-\alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) = -x^T P_\varepsilon B_2(t) B_2^T(t) P_\varepsilon x + o_t(\|x\|^2) \quad (93)$$

$$h_1^T(x, t) h_1(x, t) = x^T C_1^T(t) C_1(t) x + o_t(\|x\|^2) \quad (94)$$

donde  $\sigma^0 = 2\sigma \sup_{t \in R} \|P_\varepsilon(t)\|$ , y en relación a las condiciones de suavizamiento impuestas en las funciones anteriores (A4),  $\frac{o_t(\|x\|^2)}{\|x\|^2} \rightarrow 0$  uniformemente en  $t$  cuando  $\|x\|^2 \rightarrow 0$ . Entonces debido a (80) se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} [f_1(x, t) + f_2(x, t)] + \gamma^2 \alpha_1^T(x, t) \alpha_1(x, t) - \\ & \alpha_2^T(x, t) \alpha_2(x, t) + h_1^T(x, t) h_1(x, t) \leq \\ & x^T \{ \dot{P}_\varepsilon + P_\varepsilon A_1 + A_1^T P_\varepsilon + P_\varepsilon [ \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T ] P_\varepsilon + C_1^T C_1 \} (t) x + \\ & \sigma^0 \|x\|^3 + o_t(\|x\|^2) \leq -\varepsilon \|x\|^2 + o_t(\|x\|^2) \leq -\frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2 \end{aligned} \quad (95)$$

para casi toda  $t \in \mathbb{R}$  y donde  $\|x\|$  es lo suficientemente pequeña. Por lo tanto, la hipótesis se cumple en forma local con  $V(x, t)$  y  $F(x)$  definida por (82) y (84).



Observar que por construcción la función

$$W(x, \xi, t) = \gamma^2(x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-1}(t)(x - \xi)$$

es suave, acotada, positiva semidefinida, y tal que  $W(0, \xi, t)$  sea positiva definida. En una frontera alrededor del origen  $(x, \xi) = (0, 0)$  y para casi toda  $t \in \mathbb{R}$ ,  $W(x, \xi, t)$  satisface la desigualdad de Hamilton-Jacobi-Isaacs (65) sujeta a (85) y (86). Desarrollando

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma^2(x - \xi)^T \dot{Z}_\varepsilon^{-1}(t)(x - \xi) \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_\varepsilon(x, \xi, t) \leq \gamma^2(x - \xi)^T \{ Z_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon + A_\varepsilon^T Z_\varepsilon^{-1} - \\ 2C_2^T C_2 \}(t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2) \end{aligned} \quad (97)$$

$$h_e^T(x, \xi, t) h_\varepsilon(x, \xi, t) = (x - \xi)^T [P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon](t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2) \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \phi^T(x, \xi, t) \phi(x, \xi, t) = \gamma^2(x - \xi)^T \{ Z_\varepsilon^{-1} B_1 B_1^T Z_\varepsilon^{-1} + \\ C_2^T C_2 \}(t)(x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2) \end{aligned} \quad (99)$$

y tomando en consideración la ecuación

$$\begin{aligned} -\dot{Z}_\varepsilon^{-1} = Z_\varepsilon^{-1}(t) A_\varepsilon(t) + A_\varepsilon^T(t) Z_\varepsilon^{-1}(t) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2 \right](t) + \\ + Z_\varepsilon^{-1}(t) B_1(t) B_1^T(t) Z_\varepsilon^{-1}(t) + \varepsilon Z_\varepsilon^{-2}(t), \end{aligned} \quad (100)$$

obtenida de (81), se tiene que

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) f_\varepsilon(x, \xi, t) + h_e^T(x, \xi, t) h_\varepsilon(x, \xi, t) +$$

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 \phi^T(x, \xi, t) \phi(x, \xi, t) \leq \\
& \gamma^2 (x - \xi)^T \{ \dot{Z}_\varepsilon^{-1} + Z_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon + A_\varepsilon^T Z_\varepsilon^{-1} \\
& \quad [\frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2] + \\
& \quad Z_\varepsilon^{-1} B_1 B_1^T Z_\varepsilon^{-1} \} (t) (x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2) = \\
& -\varepsilon \gamma^2 (x - \xi)^T Z_\varepsilon^{-2}(t) (x - \xi) + o_t(\|x - \xi\|^2) \leq \\
& -\frac{\varepsilon}{2} \gamma^2 \min_{t \in R} \|Z_\varepsilon^{-1}(t)\|^2 \|x - \xi\|^2
\end{aligned}$$

para casi toda  $t \in \mathbb{R}$  y  $\|x\|$ ,  $\|x - \xi\|$  son lo suficientemente pequeñas. De esta manera, la hipótesis H2) se cumple en forma local con  $W(x, \xi, t)$ ,  $G(t)$ , y  $Q(x, \xi)$  definida por (83), (85), y (86), respectivamente.

Finalmente, aplicando el teorema IV.1, se concluye que la salida retroalimentada (70) es una solución local del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  debido a que (82)-(86) toma la forma de (87), (88).

## IV.5 Resumen

En este capítulo se resuelve el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas continuos no diferenciables variantes en el tiempo. Las aplicaciones al caso particular de mecanismos con fricción se presenta en el próximo capítulo.

Para remarcar, en los controladores discontinuos desarrollados en el capítulo tres, requieren del conocimiento explícito de la función de Lyapunov para garantizar estabilidad para una planta nominal sujeta a perturbaciones y variaciones paramétricas. En el diseño del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  la función de Lyapunov asumida ( $V(x, t) + W(x, \xi, t)$ ) sirve también como función de Lyapunov para el sistema de lazo cerrado para todas las perturbaciones admisibles. En conclusión, la teoría de Hamilton-Jacobi-Isaacs (o ecuaciones de Riccati para el caso

lineal) permite el diseño controladores de manera directa que aseguren estabilidad del sistema ante perturbaciones.

En este capítulo se utilizan como base la definición de superdiferencia y supergradiente tomadas de la teoría no suave (Clarke *et al.*, 1998). Ambos conceptos permiten analizar una función en los límites del punto donde la derivada no tiene solución y además están asociadas a funciones concavas. Entonces, con el uso del supergradiente se puede demostrar que las desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs se satisfacen para sistemas continuos no diferenciables.

A diferencia de otros procedimientos como Basar y Bernhard (1990), Isidori y Astolfi (1992) y Van der Schaft (1992), la correspondiente expresión de Hamilton-Jacobi-Isaacs requiere ser negativa definida en lugar de negativa semidefinida. Esta característica permite desarrollar un procedimiento de diseño  $\mathcal{H}_\infty$  en la que no se necesita verificar las condiciones de estabilización o detectabilidad en el sistema de control. Además el procedimiento de diseño resulta ser un problema de dimensiones infinitas, dificultad que se puede evitar si se resuelve el problema de manera local.

Si de aplicaciones se refiere, los modelos con fricción dinámica pertenecen a la clase sistemas en estudio (ver próximo capítulo). Por otro lado, se sabe que el modelo discontinuo de fricción de Coulomb, que aunque no capturan totalmente otros fenómenos asociados a la fricción (Stribeck, rigidez), es la representación más simple de este fenómeno, sin embargo estos no entran en el marco de análisis realizado.

## Capítulo V

# Solución al problema de control $\mathcal{H}_\infty$ para manipuladores con fricción

### V.1 Introducción

En el presente capítulo se extienden los resultados teóricos obtenidos en el capítulo cuatro hacia la solución del problema de seguimiento y de regulación de sistemas mecánicos con fricción. Se podrá observar que las consideraciones tomadas en cuenta hacia la función no suave  $f_2(x, t)$  (continua no diferenciable, localmente Lipschitz, concava) está dentro del marco de análisis realizado dentro del presente capítulo. Los teoremas IV.1 y IV.2 se pueden aplicar a sistemas invariantes en el tiempo bajo la misma línea de razonamiento. Para el presente análisis se utiliza el modelo de fricción de Dahl (Dahl 1976) aumentado con fricción viscosa. El objetivo de control es asegurar estabilidad asintótica ante la presencia de fricción. En este procedimiento se toma en cuenta las discrepancias que puedan existir entre los parámetros del modelo de Dahl y viscosa y la fricción real. La solución al problema de regulación y seguimiento se presentan en la sección V.2 y V.3 respectivamente, finalizando con un resumen del capítulo en la sección V.4.

## V.2 Problema de seguimiento

### V.2.1 Formulación del problema

Como punto de partida, considérese el modelo matemático que describe la dinámica de un robot manipulador:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau + w_1 \quad (101)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  es la posición articular,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es la entrada de control,  $w_1 \in \mathbb{R}^n$  representa los disturbios externos,  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  y  $F(\dot{q})$  son funciones matriciales de dimensiones apropiadas. Desde el punto de vista físico,  $q$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\tau$  es el vector de pares aplicados,  $M(q)$  es la matriz de inercia, simétrica y positiva definida para toda  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas,  $G(q)$  es el vector de pares gravitacionales, los componentes  $F_i(\dot{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de  $F(\dot{q})$  son las fuerzas de fricción que actúan de manera independiente en cada articulación.

Las funciones  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $G(q)$  son continuamente diferenciables al menos dos veces, mientras que las fuerzas de fricción se representan como una combinación de la fricción viscosa  $\sigma_{2i}\dot{q}_i$  y la fricción de Dahl  $F_{di}$ :

$$F_i = \sigma_{2i}\dot{q}_i + F_{di}, \quad i = 1, \dots, n \quad (102)$$

donde  $F_{di}$  es gobernada por el siguiente modelo dinámico (Dahl 1976):

$$\dot{F}_{di} = \sigma_{0i}\dot{q}_i - \sigma_{0i}|\dot{q}_i|\frac{F_{di}}{F_{Ci}} + w_{2i} \quad (103)$$

donde  $\sigma_{0i} > 0$ ,  $\sigma_{2i} > 0$  y  $F_{Ci} > 0$  son los coeficientes rigidez, de fricción viscosa y el nivel de fricción de Coulomb respectivamente, correspondiente a cada articulación del manipulador y  $w_{2i}$  es la incertidumbre debido al error de modelado de fricción. Las relaciones anteriores se

pueden reescribir de manera vectorial de la siguiente manera:

$$F = \sigma_2 \dot{q} + F_d \quad (104)$$

$$\dot{F}_d = \sigma_0 \dot{q} - \sigma_0 \text{diag}\{|\dot{q}_i|\} F_C^{-1} F_d + w_2 \quad (105)$$

donde  $F = \text{col}\{F_i\}$ ,  $F_d = \text{col}\{F_{di}\}$ ,  $q = \text{col}\{q_i\}$   $\sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0i}\}$ ,  $\sigma_2 = \text{diag}\{\sigma_{2i}\}$ ,  $F_C = \text{diag}\{F_{Ci}\}$ ,  $w_2 = \text{col}\{w_{2i}\}$ , las notaciones *diag* y *col* son usadas para indicar una matriz diagonal y un vector columna respectivamente.

Se asume que la trayectoria deseada  $q_d(t) = \text{col}\{q_{di}(t)\}$  para el robot manipulador es al menos dos veces diferenciable, y las funciones  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$  y  $\ddot{q}_d$  están acotadas de manera uniforme en  $t$ . Entonces si no existe algun disturbio externo, la dinámica no lineal (101) se puede compensar a través del par externo:

$$\tau_d = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) + F_n(\dot{q}_d) \quad (106)$$

donde  $F_n(t) = \text{col}\{F_{ni}\}$  es la fuerza de fricción nominal:

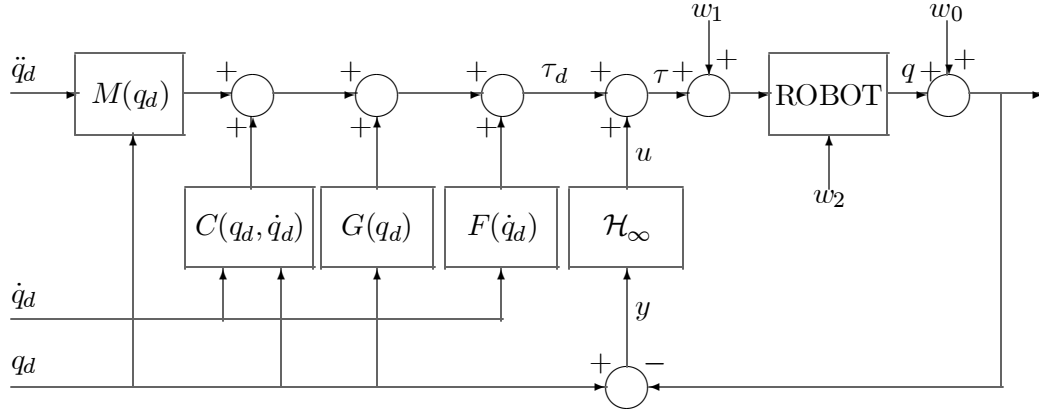
$$F_n = \sigma_2 \dot{q}_d + F_{nd} \quad (107)$$

calculada a lo largo de la trayectoria deseada de acuerdo al modelo de fricción no perturbado:

$$\dot{F}_{nd} = \sigma_0 \dot{q}_d - \sigma_0 \text{diag}\{|\dot{q}_{di}|\} F_C^{-1} F_{nd} \quad (108)$$

sujeito a la condición inicial:

$$F_{nd}(t_0) = 0 \quad (109)$$



**Figura 9:** Diagrama a bloques del sistema de lazo cerrado.

a cualquier instante  $t_0 \in \mathbb{R}$  (la ausencia de perturbaciones externas significa que  $q(t_0) = q_d(t_0)$ ,  $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_d(t_0)$ ,  $F_d(t_0) = 0$ , y  $w_1 = w_2 = 0$ ).

El *objetivo de control* es diseñar un controlador de la forma (Asada y Slotine 1985):

$$\tau = \tau_d + u \quad (110)$$

tal que se cumplan las condiciones de estabilidad deseadas alrededor de  $q_d(t)$ , y que además atenue de manera local cualquier efecto de las perturbaciones externas. De esta manera el controlador diseñado, que consiste de una etapa de compensación de la trayectoria (110) y una etapa de atenuación al disturbio  $u(t)$ , debe estabilizar al sistema en lazo cerrado alrededor de la trayectoria deseada. Esta estructura se representa en el diagrama a bloques de la figura 9.

Para fines prácticos, este trabajo se centra en el problema de control de seguimiento de trayectorias bajo las siguientes condiciones:

**I.** La salida a ser controlada está dada por:

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q - q_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (111)$$

con una función de peso positiva  $\rho$  utilizada para mejorar el funcionamiento del sistema de lazo cerrado, y

**II.** Solo se dispone de las mediciones de posición

$$y = q + w_0, \quad (112)$$

corrompidas por un vector de error  $w_0(t) \in \mathbb{R}^n$ .

El problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para el seguimiento de trayectorias de robot manipuladores se puede formular de la siguiente manera: Dado un sistema mecánico (101)-(112), una trayectoria deseada a seguir, y un número real  $\gamma > 0$ , se requiere encontrar un controlador dinámico (60) con un estado interno  $\xi \in \mathbb{R}^s$  tal que el sistema de lazo cerrado no perturbado sea estable en forma asintótica y exponencial alrededor de  $q_d(t)$  y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  sea de manera local menor que  $\gamma$ , es decir, (61) se debe satisfacer para todo  $t_1 > t_0$  y para toda función continua a pasos  $w(t) = ((w_0(t), w_1(t), w_2(t))^T$ , para la cual la trayectoria del sistema de lazo cerrado iniciando desde el punto inicial  $(q(t_0), \dot{q}(t_0), F_d(t_0), \xi(t_0)) = (q_d(t_0), \dot{q}_d(t_0), 0, 0)$  se mantenga en una frontera de la trayectoria deseada  $q_d(t)$  para toda  $t \in [t_0, t_1]$ .

De manera particular, si la trayectoria se especifica como un punto de equilibrio  $q_d \in \mathbb{R}^n$  del sistema de lazo cerrado entonces el problema se convierte en un problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$ .

### V.2.2 Síntesis $\mathcal{H}_\infty$

Se analizará por separado el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para el seguimiento de trayectorias donde:

$$\dot{q}_{d_i}(t) \neq 0 \text{ para casi todo } t, \quad i = 1, \dots, n \quad (113)$$



y el problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$ , donde

$$\dot{q}_d(t) \equiv 0. \quad (114)$$

Primero, se define el vector de error  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  donde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= q_d(t) - q(t) \\ x_2(t) &= \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \\ x_3(t) &= F_{nd}(t) - F_d(t). \end{aligned}$$

$x_1$  es la desviación de la posición articular con respecto a la trayectoria deseada  $q_d(t)$ ;  $x_2$  es la desviación de la velocidad articular con respecto a  $\dot{q}_d(t)$ , y  $x_3$  es la desviación de la fricción de Dahl con respecto a las calculadas en (105), (108).

La representación en espacio de estado del sistema en función del error es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q}_d + M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(\dot{q}_d - x_2) + G(q_d - x_1) \\ &\quad - M(q_d)\ddot{q}_d - C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - G(q_d) - \sigma_2 x_2 - x_3 - u - w_1] \\ \dot{x}_3 &= \sigma_0 x_2 - \sigma_0 \text{diag}\{|\dot{q}_{di} - x_{2i}|\} F_C^{-1} x_3 + \sigma_0 [\text{diag}\{|\dot{q}_{di} - x_{2i}|\} \\ &\quad - \text{diag}\{|\dot{q}_{di}|\}] F_C^{-1} F_{nd}(t) - w_2 \end{aligned} \quad (115)$$

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (116)$$

$$y = x_1 + w_0 \quad (117)$$

Dado que para todo  $t$ , el lado derecho de las ecuaciones (115)-(117) sujetas a (113), es al menos dos veces continuamente diferenciables en  $x$  alrededor del origen  $x = 0$ , entonces el

problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  de seguimiento no es nada más que el caso estudiado en el capítulo IV para sistemas no suaves variantes en el tiempo (59) especificado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
f_1(x, t) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ \ddot{q}_d + M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, \dot{q}_d - x_2)(\dot{q}_d - x_2) + G(q_d - x_1)] \\ \sigma_0 x_2 - \sigma_0 \text{diag}\{|\dot{q}_{di} - x_{2i}|\} F_c^{-1} x_3 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q_d - x_1)[-M(q_d)\ddot{q}_d - C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - G(q_d) - \sigma_2 x_2 - x_3] \\ \sigma_0 [\text{diag}\{|\dot{q}_{di} - x_{2i}|\} - \text{diag}\{|\dot{q}_{di}|\}] F_C^{-1} F_{nd}(t) \end{bmatrix} \\
f_2(x, t) &= 0_{3 \times 1} \\
g_1(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1}(q_d - x_1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}(q_d - x_1) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{118}$$

$$h_1(x) = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1, \quad k_{12}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = [1 \ 0 \ 0]. \tag{119}$$

Aplicando el teorema IV.2 al sistema (59), anteriormente especificado, se deriva una solución local para el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  de seguimiento.

**Teorema V.1** *Considerar que las siguientes condiciones se satisfacen*

1. (113) se cumple para la trayectoria deseada a seguir;
2. C1) y C2) se cumplen para las funciones matriciales  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  gobernada por (75), (118), (119)

y sea  $(P_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$  la solución positiva definida acotada correspondiente de (80), (81) y un

valor  $\varepsilon > 0$ . Entonces la salida de retroalimentación:

$$\dot{\xi} = f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t) + \left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi)\right] P_\varepsilon(t) \xi + Z_\varepsilon(t) C_2^T(t) [y(t) - h_2(\xi)] \quad (120)$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon(t) \xi \quad (121)$$

sujetas a (118), (119) son una solución local al problema de seguimiento de posición  $\mathcal{H}_\infty$  para el manipulador mecánico con fricción (101)-(112).

*Prueba.* Las consideraciones A1)-A5) se pueden verificar facilmente para el sistema (59) especificadas a través de (118), (119) sujeta a (113). El sistema (59) hasta ahora especificado, representa la ecuación del error (115)-(117) para el manipulador mecánico con fricción (101)-(112) y con el fin de completar la prueba es necesario aplicar el teorema IV.2 a la ecuación del error (115)-(117). ■

## V.3 Problema de regulación

### V.3.1 Planteamiento del problema

Se asume que la trayectoria deseada  $q_d(t) = \text{col}\{q_{di}(t)\}$  para el robot manipulador es constante para todo  $t \geq 0$ . Entonces si no existe algun disturbio externo, la posición deseada se puede alcanzar aplicando el par externo:

$$\tau_d = G(q_d) \quad (122)$$

El *objetivo de control* es diseñar un controlador de la forma (110) tal que cumpla con las condiciones de estabilidad deseadas alrededor de  $q_d(t)$  y que además atenue de manera local

cualquier efecto de las perturbaciones externas. De esta manera el controlador diseñado, que consiste de una etapa de compensación de la gravedad (122) y una etapa de atenuación al disturbio  $u(t)$ , debe estabilizar al sistema en lazo cerrado alrededor de la posición deseada. Para fines prácticos, este trabajo se centra en el problema de regulación bajo las siguientes condiciones:

**I.** La salida a ser controlada está dada por

$$z = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ q - q_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (123)$$

con una función de peso positiva  $\rho$  utilizada mejorar el funcionamiento del sistema de lazo cerrado, y

**II.** Solo se dispone de las mediciones de la posición

$$y = q + w_0, \quad (124)$$

corrompidas por un vector de error  $w_0(t) \in \mathbb{R}^n$ .

El problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$  de robot manipuladores se puede formular de la siguiente manera: Dado un sistema mecánico (101), (122)-(124), una posición de referencia  $q_d$  y un número real  $\gamma > 0$ , se requiere encontrar un controlador dinámico (60) con un estado interno  $\xi \in \mathbb{R}^s$  tal que el sistema de lazo cerrado no perturbado sea estable en forma asintótica y exponencial alrededor de  $q_d$  y su ganancia  $\mathcal{L}_2$  sea de manera local menor que  $\gamma$ , es decir, (61) se debe satisfacer para todo  $t_1 > t_0$  y para toda función continua a tramos  $w(t) = ((w_0(t), w_1(t), w_2(t))^T$ , para la cual la trayectoria del sistema de lazo cerrado inicializada en  $(q(t_0), \dot{q}(t_0), F_d(t_0), \xi(t_0)) = (q_d(t_0), \dot{q}_d(t_0), 0, 0)$  se mantenga en una frontera alrededor de la posición deseada  $q_d$  para toda  $t \in [t_0, t_1]$ .

De manera particular, donde la trayectoria se especifique como un punto de equilibrio  $q_d \in \mathbb{R}^n$  del sistema de lazo cerrado, el problema se convierte en un problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$ .

### V.3.2 Síntesis $\mathcal{H}_\infty$

Es importante notar que la solución local del problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$  no puede ser deducida de manera sencilla como en el problema de control de seguimiento  $\mathcal{H}_\infty$  porque la ecuación de la dinámica del error contiene términos no suaves ( $f_2(x, t) \neq 0$ ). De hecho, sustituyendo la velocidad nominal  $\dot{q}_d(t) = 0$  y la fricción de Dahl  $F_{nd} = 0$ , calculada de acuerdo a (105) y (114) en (115) lleva a la siguiente ecuación del error no autónoma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, -x_2)x_2 + G(q_d - x_1) - G(q_d) \\
 &\quad - \sigma_2 x_2 - x_3 - u - w_1] \\
 \dot{x}_3 &= \sigma_0 x_2 - \sigma_0 \text{diag}\{|x_{2i}|\} F_C^{-1} x_3 - w_2(t)
 \end{aligned} \tag{125}$$

con respecto a la posición deseada  $q = q_d$ , la velocidad nominal  $\dot{q} = 0$ , y la fricción nominal  $F_{nd} = 0$ . Dado que el lado derecho de (125) es no suave alrededor del origen  $x = 0$  para casi todo  $t$  entonces la relación (118) para el problema de regulación se puede modificar como sigue:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -M^{-1}(q_d - x_1)[C(q_d - x_1, -x_2)x_2 - G(q_d - x_1) + G(q_d) + \sigma_2 x_2 + x_3] \\ \sigma_0 x_2 \end{bmatrix} \\
 f_2(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_0 \text{diag}\{|x_{2i}|\} F_C^{-1} x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{126}$$

y debido a la desigualdad bien conocida

$$2|a|b \leq a^2 + b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

la función  $f_2(x, t)$  satisface (73) para  $\sigma = 0.5 \max_i \sigma_{0i} F_{Ci}^{-1}$  y todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces invocando el teorema IV.2 se prueba que el sistema (59) especificado mediante la relación (119) y (126) se cumple para el problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$  y se resume en el teorema V.2.

**Teorema V.2** *Considerar que las condiciones C1) y C2) se satisfacen para las funciones matriciales  $A, B_1, B_2, C_1, C_2$  gobernada por (75), (119), (126), y sea  $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  la correspondiente solución positiva definida invariante en el tiempo de (80), (81) y cualquier  $\varepsilon > 0$ . Entonces la salida de retroalimentación:*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & f_1(\xi) + f_2(\xi) + \left[ \frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi \\ & + Z_\varepsilon C_2^T(t) [y(t) - h_2(\xi)], \end{aligned} \quad (127)$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi \quad (128)$$

*sujeta a (74), (126) es una solución local del problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$  donde la posición de referencia del manipulador (101), (122)-(124) es gobernada por (114).*

*Prueba.* Las consideraciones A1)-A5) se cumplen para el sistema en función del error (125), el cual representa la ecuación del manipulador (101), (122)-(124) en términos de la desviación del estado con respecto a la posición deseada  $q_d$ , la velocidad nominal  $\dot{q} = 0$ , y la fricción nominal de Dahl  $F_{nd} = 0$ . La validez del teorema V.2 se concluye de manera directa aplicando el teorema IV.2 al sistema autónomo (125). La solución positiva definida invariante en el tiempo de (80), (81) solo se deben tomar en cuenta para este caso autónomo. ■

## V.4 Resumen

En este capítulo se resuelve el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas mecánicos con fricción asumiendo que sólo se dispone de la información de la posición. Para el análisis de regulación aparece un término no diferenciable en la función  $f(x)$  y es tratado de manera apropiada usando la definición de supergradiente y superdiferencial. En los próximos capítulos se apoyan los resultados teóricos mediante simulaciones y experimentos en manipuladores mecánicos.

# Capítulo VI

## Estudio de simulación

### VI.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados numéricos para observar el comportamiento de los controladores estudiados en los capítulos tres al cinco. El objetivo de este estudio se resume en tres puntos:

1. Evaluar un controlador discontinuo en un actuador donde se asume la presencia de fricción de Coulomb, Stribeck y “backlash”. Para este caso la evaluación consiste en comprobar la convergencia en tiempo finito hacia el equilibrio y las oscilaciones en alta frecuencia en el par.
2. Estudiar el funcionamiento del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para los casos de regulación y seguimiento de trayectoria en un robot manipulador ideal (sin perturbaciones) asumiendo que sólo se dispone de información de la posición articular.
3. Observar la respuesta del sistema bajo perturbación permanente y variación paramétrica.



## VI.2 Caso de estudio: controlador discontinuo

Las simulaciones numéricas del controlador conmutado se realizan en el paquete SIMNON. Las especificaciones del servomotor se toman del prototipo construido por Cadiou y Sirdi (1995). El objetivo de control es llevar la trayectoria hacia el equilibrio  $q_d = 0$ ,  $\dot{q}_d = 0$  desde la posición inicial  $q(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{q}(0) = 0$ . Con el fin de comparación, se utiliza un controlador discontinuo con retroalimentación de posición:

$$u = -\beta \text{sgn}(q) \quad (129)$$

con la amplitud de conmutación:

$$\beta = 10 \quad (130)$$

y luego un controlador discontinuo con retroalimentación de estados (23), bajo las siguientes especificaciones:

$$\beta = 10, \gamma = 0, \mu = 20, \nu = 40. \quad (131)$$

La selección de estos parámetros se calculan en base a (24) tomando como referencia los parámetros del sistema proporcionados por Cadiou y Sirdi (1995).

La ley de control (129) estabiliza en tiempo finito las trayectorias hacia el equilibrio, sin embargo sólo se garantiza rechazo al disturbio (22) si la cota superior es menor al nivel de fricción de Coulomb  $F_C$  (Levant, 1993).

Con el propósito de incluir el efecto de Stribeck y “backlash” en el estudio numérico, los disturbios externos se estructuran de la siguiente manera:

$$\omega(t) = F_1(t) + (F_S - F_C)e^{-\xi|\dot{q}(t)|} \text{sgn}(\dot{q}(t)). \quad (132)$$

donde  $F_1$  está asociado al fenómeno de “backlash” y se describe de acuerdo a Tao y Kokotovic (1996) como:

$$F_1(t) = \begin{cases} -K(\Delta\theta - j_0) & \text{si } \Delta\theta \geq j_0 \\ 0 & \text{si } -j_0 < \Delta\theta < j_0 \\ -K(\Delta\theta + j_0) & \text{si } \Delta\theta \leq -j_0 \end{cases} \quad (133)$$

donde  $j_0 > 0$  es el término de la máxima magnitud de backlash,  $K > 0$  es el coeficiente de rigidez y  $\Delta\theta = q - \theta$  es la desviación de la posición del motor de la posición de la carga  $\theta$  gobernada por:

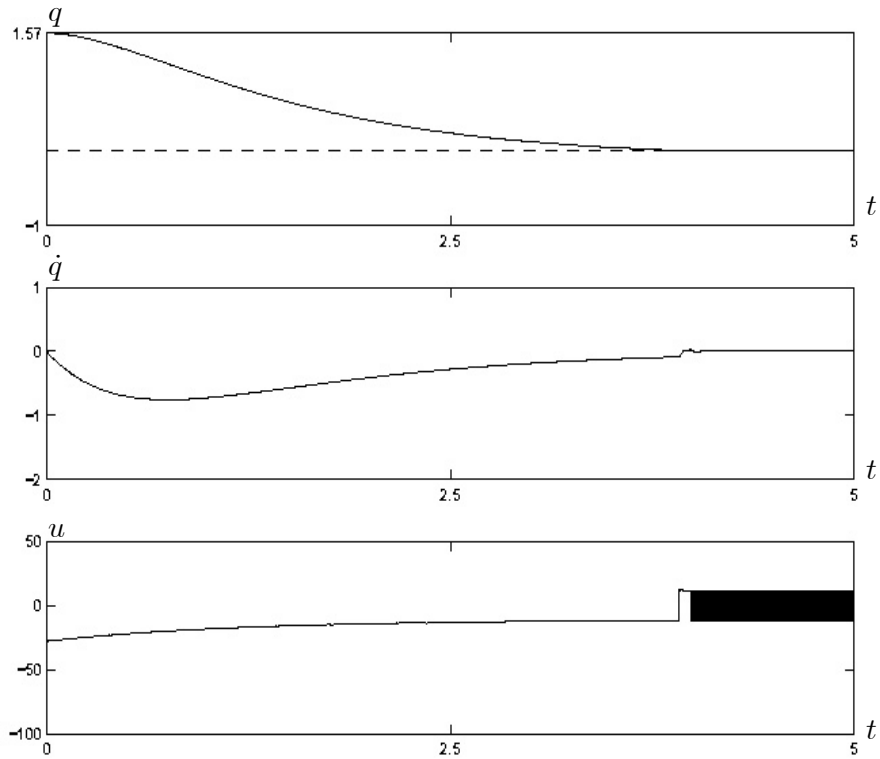
$$J\ddot{\theta} = -F_1(t) - F_C \text{sgn}(\dot{\theta}) - \sigma_2 \dot{\theta}. \quad (134)$$

El segundo término de (132) corresponde al efecto de Stribeck, caracterizado por el modelo de Tustin (Tustin 1947) con el nivel de fricción estática  $F_S > F_C$ , nivel de fricción de Coulomb  $F_C > 0$  y el parámetro gráfico  $\xi > 0$ .

En las simulaciones numéricas, las ecuaciones de estado (19), (134) del motor y la carga, se calcularon bajo las mismas condiciones iniciales  $q(0) = \theta(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{q}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ , y los parámetros de fricción y “backlash” fueron seleccionados como:

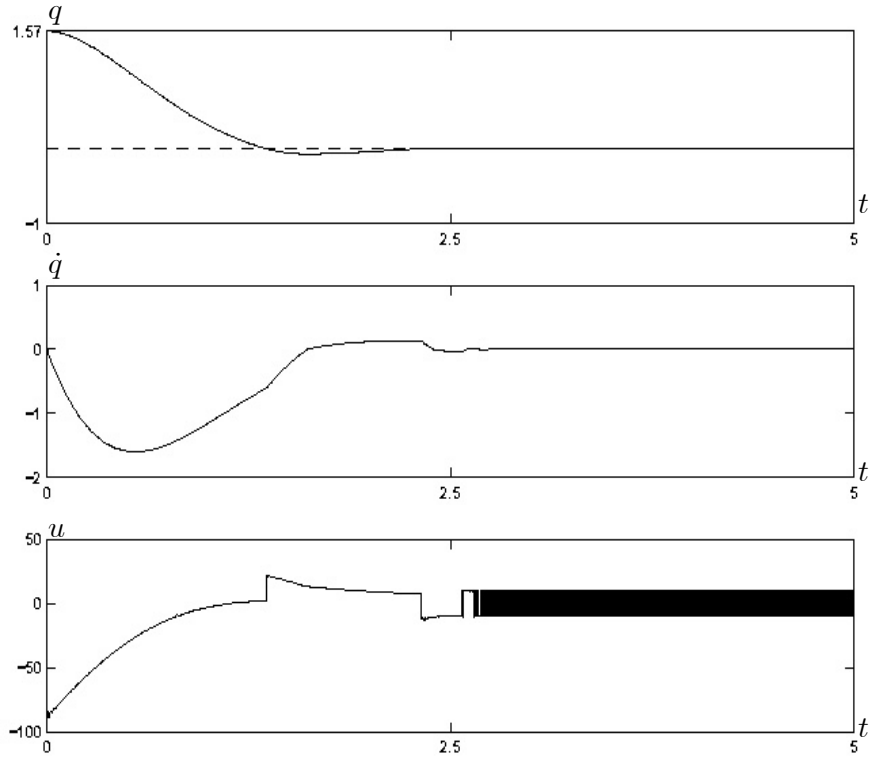
$$\begin{aligned} \sigma_2 &= 6, \quad F_C = 4, \quad F_S = 5, \\ \xi &= 0.1, \quad K = 10000, \quad j_0 = 0.0025. \end{aligned} \quad (135)$$

Los resultados de simulación para el servomotor, aplicando el controlador conmutado con retroalimentación de posición (129), (130) y el controlador con retroalimentación de estados (23), (131) se muestran en las Figuras 10 y 11 respectivamente. De estas figuras, se observa un mejor funcionamiento (tiempo de convergencia) con el controlador de estados (Fig. 11). Como se predigo en la teoría, ambos controladores llevan las trayectorias al equilibrio en un



**Figura 10:** Simulación de controlador discontinuo por retroalimentación de posición.

tiempo finito  $T$  a pesar de la presencia de “backlash” y el efecto de Stribeck. El tiempo de establecimiento fue  $T \approx 4$  segundos para el controlador con retroalimentación de posición y  $T \approx 2.5$  para el controlador con retroalimentación de estado. La magnitud del par aplicado del sistema con retroalimentación de posición es menor al par aplicado por el controlador con retroalimentación de estados. Para decrementar el tiempo de establecimiento  $T$  se debe utilizar el controlador con retroalimentación de estado (23) e incrementar sus ganancias. Esto, sin embargo puede excitar dinámicas no modeladas de alta frecuencia del sistema limitando el rendimiento del mecanismo. Las entradas de control  $u$  en las figuras 10 y 11 presentan oscilaciones de alta frecuencia de amplitud  $\beta$  a partir del tiempo de establecimiento  $T$  debido al termino discontinuo en las leyes de control (23) y (129) (Orlov *et al.*, 2001).



**Figura 11:** Simulación de controlador discontinuo por retroalimentación de estados.

## VI.3 Control $\mathcal{H}_\infty$ para robot manipulador de dos grados de libertad

### VI.3.1 Modelo utilizado para simulación

Con el propósito de analizar el desempeño de los controladores, considérese los parámetros del robot manipulador de dos grados de libertad proporcionado por Berghuis y Nijmeijer (1993). Asumir que este sistema contiene fricción caracterizado por el modelo dinámico de Dahl + fricción viscosa (Berghuis, 1993). Las matrices y vectores que componen la ecuación dinámica del robot manipulador (101) son:

$$M(q) = \begin{bmatrix} 8.77 + 1.02 \cos(q_2) & 0.76 + 0.51 \cos(q_2) \\ 0.76 + 0.51 \cos(q_2) & 0.62 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -0.51 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -0.51 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0.51 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 74.48 \sin(q_1) + 6.174 \sin(q_1 + q_2) \\ 6.174 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix},$$

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, F_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### VI.3.2 Objetivo de control

Los objetivos de control se mencionan a continuación:

- *Regulación* - El vector de posiciones articulares deseadas son seleccionadas como:

$$q_d = [0.1, 0.3]^T \text{ [rad]}$$

con condiciones iniciales:

$$q(0) = [0, 0]^T \text{ [rad]}$$

El punto final deseado ha sido preespecificado lo más cercano al origen para asegurar que la desviación del estado inicial  $x_i(0) = q_{di} - q_i(0) = q_{di}$ ,  $i = 1, 2$  esté dentro del dominio de atracción del regulador  $\mathcal{H}_\infty$ . La velocidad inicial  $\dot{q}(0)$ , la fuerza de fricción de Dahl  $F_d(0)$ , y el estado de compensación  $\xi(0)$  fueron iguales a cero para todas las simulaciones.

- *Seguimiento* - La trayectoria de referencia se especificó como:

$$q_{di}(t) = \mu_i \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2.$$

Las propiedades dinámicas de esta trayectoria se prescribe como  $\omega_1 = \omega_2 = 1.8$  para

evolucionar razonablemente rapida a la trayectoria deseada  $q_d^T = [\mu_1, \mu_2]$  con  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \pi/2$  radianes e inicializada cerca del origen:

$$q_{di}(0) = [0, 0]^T \text{ [rad]}, \quad i = 1, 2.$$

Nótese que la desviación del estado inicial  $x_i(0) = q_{di}(0) - q_i(0)$  es independiente de  $\mu_i$ .

### VI.3.3 Resultados de simulación para regulación

Las simulaciones numéricas fueron realizadas en MATLAB. Para cumplir con el objetivo de control se utilizó el regulador  $\mathcal{H}_\infty$  (118), (126)-(128) con el parámetro  $\rho = 2$ . Por iteración binaria, se encontró que el valor óptimo de  $\gamma^* \simeq 100$ . Sin embargo, en las simulaciones se utilizó un valor de  $\gamma = 350$  para evitar tener un controlador de alta ganancia que pueden aparecer para valores de  $\gamma$  cercanos al óptimo, esto significa que para tener un controlador de alta ganancia se debe reducir el valor de  $\gamma$  hasta el mínimo permitido ( $\gamma^*$ ).

Perturbando el lado derecho de las ecuaciones de Riccati (76), (78) bajo  $\gamma = 350$  se obtiene que para  $\varepsilon = 1$  la ecuación de Riccati (80), (81) tiene solución positiva definida invariante en tiempo. Por el teorema V.2, está solución resulta en una ley de control (127)-(128) que resuelve el problema de regulación.

Se simularon dos casos para el problema de regulación  $\mathcal{H}_\infty$ , sin disturbios y con un disturbio permanente  $w_{ij}(t) = 0.1$ ,  $i = 1, 2$   $j = 0, 1, 2$  y variación paramétrica:

$$\begin{aligned} M_r(q) &= \begin{bmatrix} 9.77 + 2.02 \cos(q_2) & 1.26 + 1.01 \cos(q_2) \\ 1.26 + 1.01 \cos(q_2) & 1.12 \end{bmatrix}, \\ C_r(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -2.02 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -2.02 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 1.01 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ G_r(q) &= \begin{bmatrix} 79.46 \sin(q_1) + 11.07 \sin(q_1 + q_2) \\ 11.07 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $M_r(q)$ ,  $C_r(q, \dot{q})$  y  $G_r(q)$  son la matriz de inercia, vector de Coriolis y fuerza de gravedad de la planta respectivamente, cuando se considera una carga de 0.5 Kg (Berghuis, 1993).

Los resultados de las trayectorias se muestra en la Figura 12. En esta figura se observa que el regulador estabiliza de forma asintótica las trayectorias el sistema sin perturbación alrededor de la trayectoria deseada y atenúa los disturbios externos así como las incertidumbres paramétricas.

**Discrepancias en el modelo de fricción.** Desde un punto de vista práctico no podemos pensar en un modelo de fricción consistente debido al desgaste de los materiales o por el uso de lubricantes; o simplemente el modelo de fricción puede no corresponder al fenómeno de fricción real. Considerando el segundo punto, asúmase que la planta presenta un modelo de fricción real de tipo LuGre:

$$F_l = \sigma_0 \eta + \sigma_1 \frac{d\eta}{dt}.$$

El modelo LuGre captura otras dinámicas que el modelo Dahl no abarca (Canudas-de-Wit *et al.* 1995).  $\sigma_0 = \text{diag}\{\sigma_{0i}\}$  es la rigidez,  $\sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_{1i}\}$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $\eta = \text{col}\{\eta_i\}$  es el porcentaje de deflexión de las cerdas gobernadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dt} &= \dot{q}_i - \frac{|\dot{q}_i|}{g_i(\dot{q}_i)} \eta_i, \quad i = 1, 2 \\ \sigma_{0i} g_i(\dot{q}_i) &= F_{Ci} + (F_{Si} - F_{Ci}) e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{v_{si}}\right)^2} \end{aligned} \quad (136)$$

donde  $F_{Ci}$  es el nivel de fricción de Coulomb,  $F_{Si}$  es el nivel de fricción de estática máxima, y  $v_{si}$  es la velocidad de Stribeck en cada articulación del manipulador. Los resultados se muestran en la figura 13.

El nivel de fricción estática máxima, coeficiente de amortiguamiento y velocidad de Stribeck

se seleccionaron como:

$$F_S = \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, v_s = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

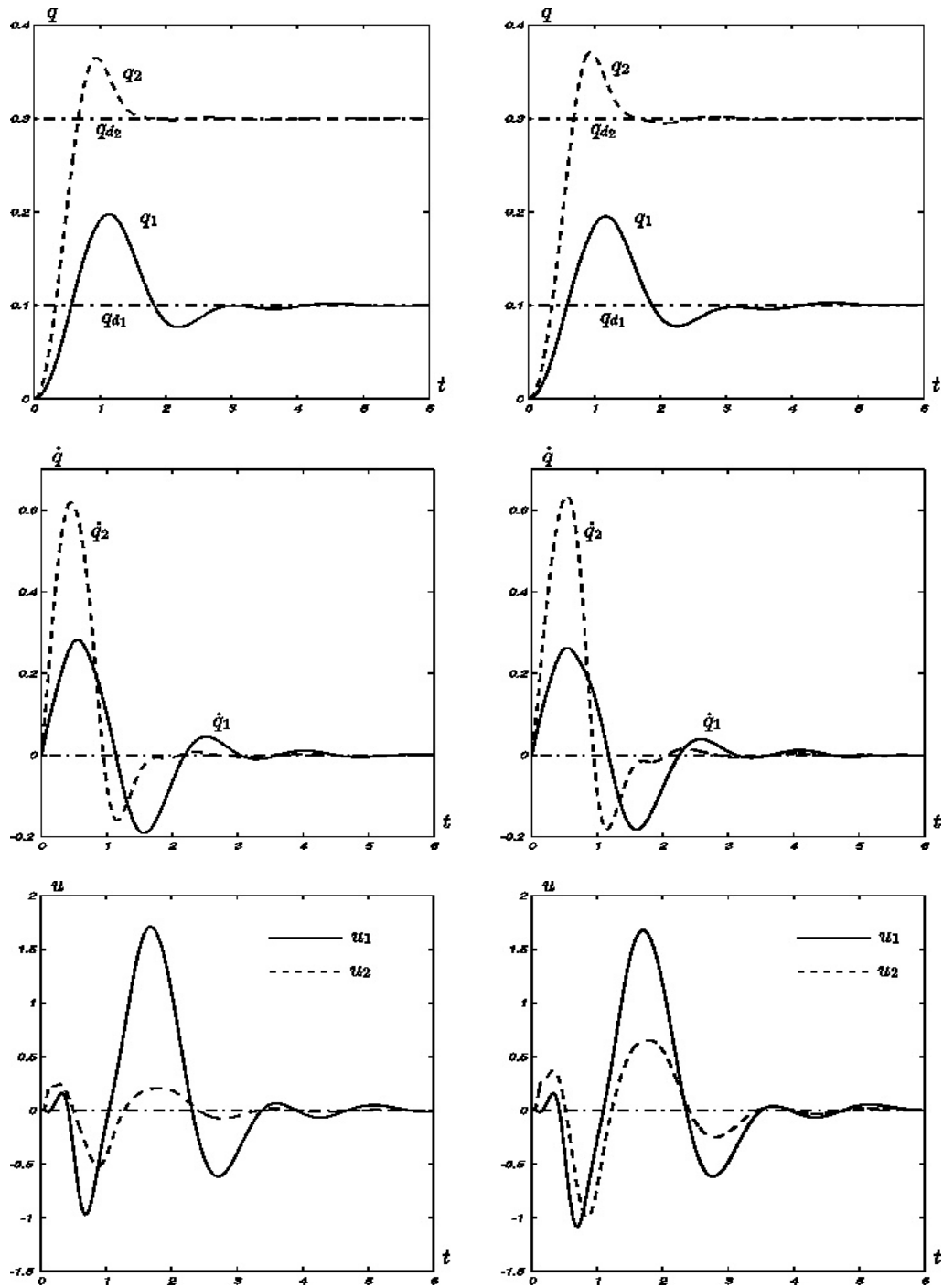
mientras que los coeficientes de fricción viscosa  $\sigma_2$ , rigidez  $\sigma_0$ , y nivel de fricción de Coulomb  $F_C$  conservan el mismo valor.

**Versión suave.** Con motivos de comparación se utiliza el controlador  $\mathcal{H}_\infty$  reportado por Orlov *et al.* (1999) y Acho *et al.* (2001) sintetizado para manipuladores libres de fricción de Coulomb sin embargo se considera sólo la presencia de fricción viscosa. De aquí en adelante, en este texto, se nombrará controlador  $\mathcal{H}_\infty$  suave. Para hacer una comparación justa, se sintoniza el valor de  $\gamma = 350$  tal que el nivel de energía de este controlador sea equivalente al nivel de energía del controlador no suave. Se debe destacar que las simulaciones se realizan para el sistema libre de perturbación para asegurar que no existe alguna influencia de éste sobre el sistema controlado. En las figuras 14 y 15 se observan los resultados obtenidos.

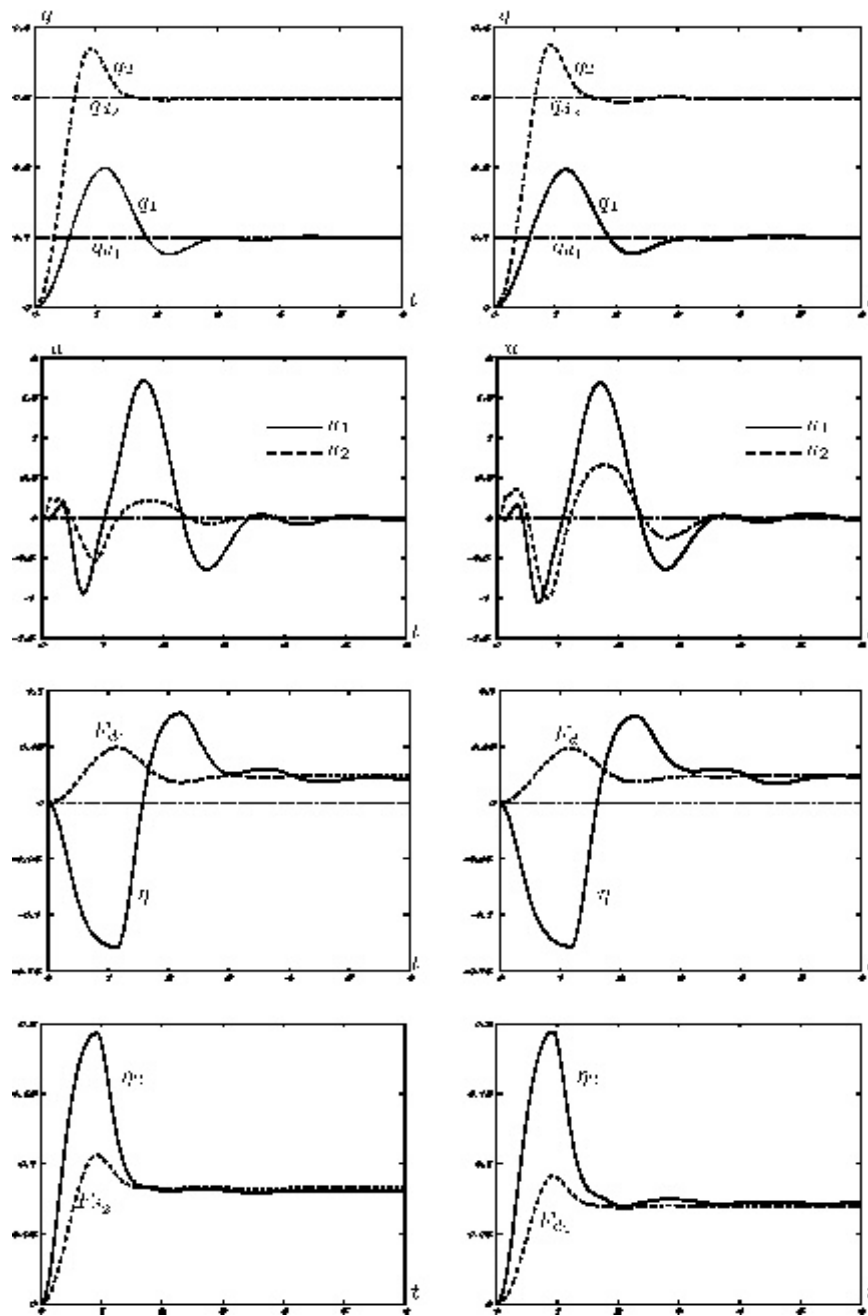
### VI.3.4 Resultados de simulación para el caso de seguimiento

En la figura 16 se presentan los resultados de simulación para el controlador de seguimiento  $\mathcal{H}_\infty$  (118)-(121) donde la función de peso se seleccionó como  $\rho = 2$ . Dado que la trayectoria deseada es suave y todas sus derivadas son uniformemente acotada en  $t$ , el teorema V.1 se aplica al problema de seguimiento  $\mathcal{H}_\infty$  y el controlador (118)-(121) propiamente especificado resuelve este problema. Aplicando el procedimiento para la síntesis  $\mathcal{H}_\infty$  se encontró una  $\gamma = 550$  para un valor de  $\epsilon = 1$ . Todas las simulaciones, realizadas para el regulador  $\mathcal{H}_\infty$  fueron repetidas para el controlador  $\mathcal{H}_\infty$  de seguimiento (ver figuras 17 a 19). Para el caso comparativo, el valor de  $\gamma$  se reduce a tal nivel que el error en estado estable sea lo suficientemente pequeño ( $\gamma = 150$ ,  $\epsilon = 0.1$ ). Obsérvese que la energía consumida es mayor debido a la reducción de  $\gamma$  (controlador de alta ganancia).

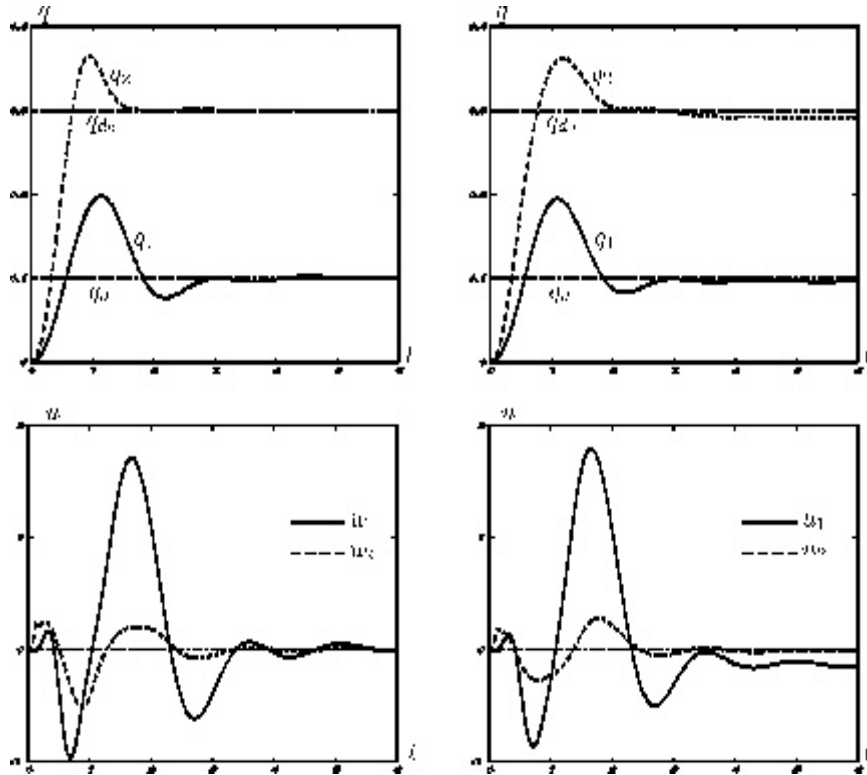




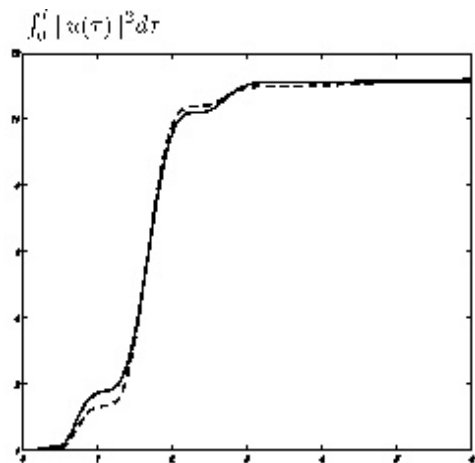
**Figura 12:** Robustez del regulador  $\mathcal{H}_\infty$  contra disturbios externos y variaci3n param3trica: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbaci3n y variaci3n param3trica.



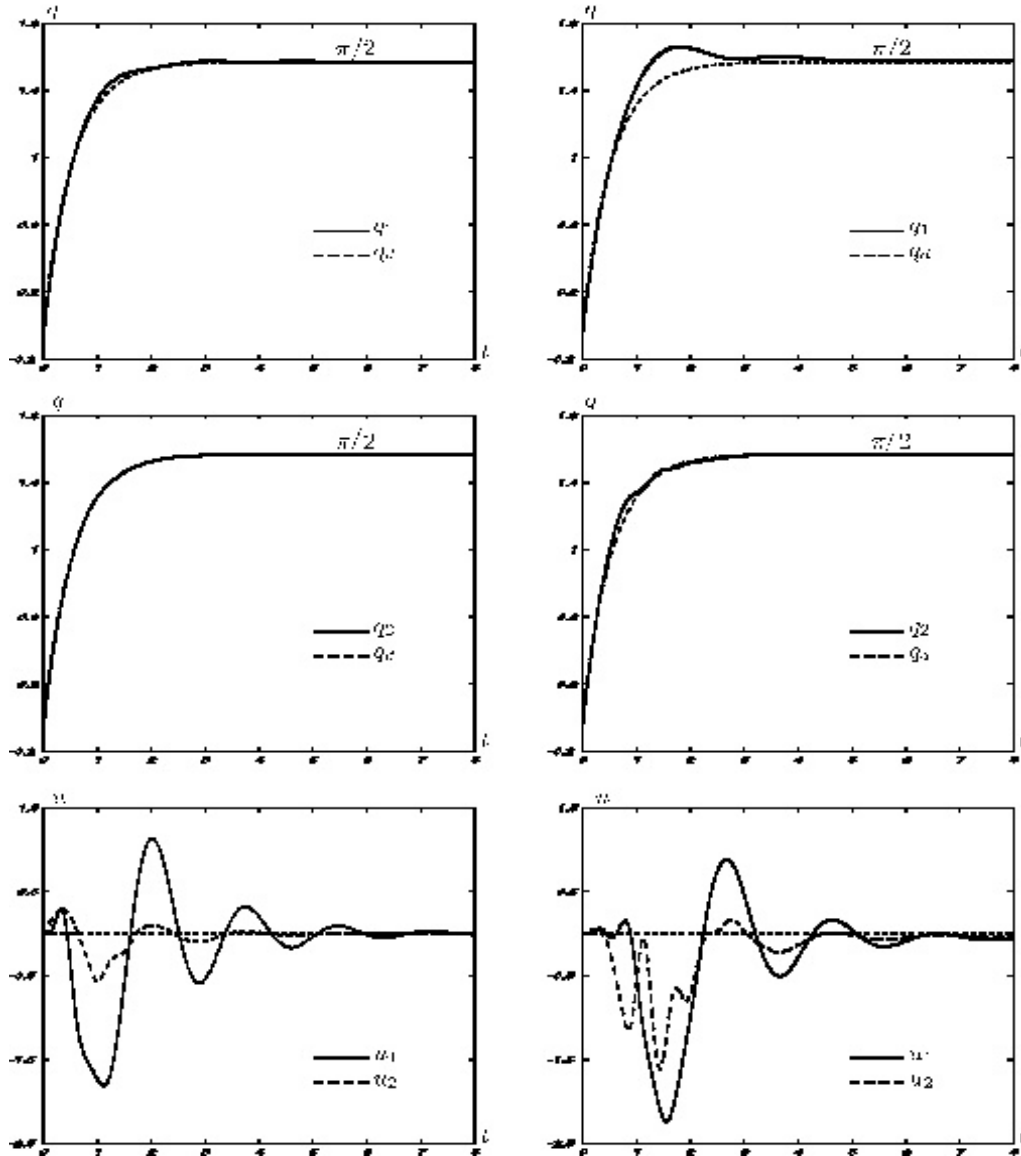
**Figura 13:** Robustez del regulador  $\mathcal{H}_\infty$  en contra discrepancias en el modelo de fricción: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbación y variación paramétrica.



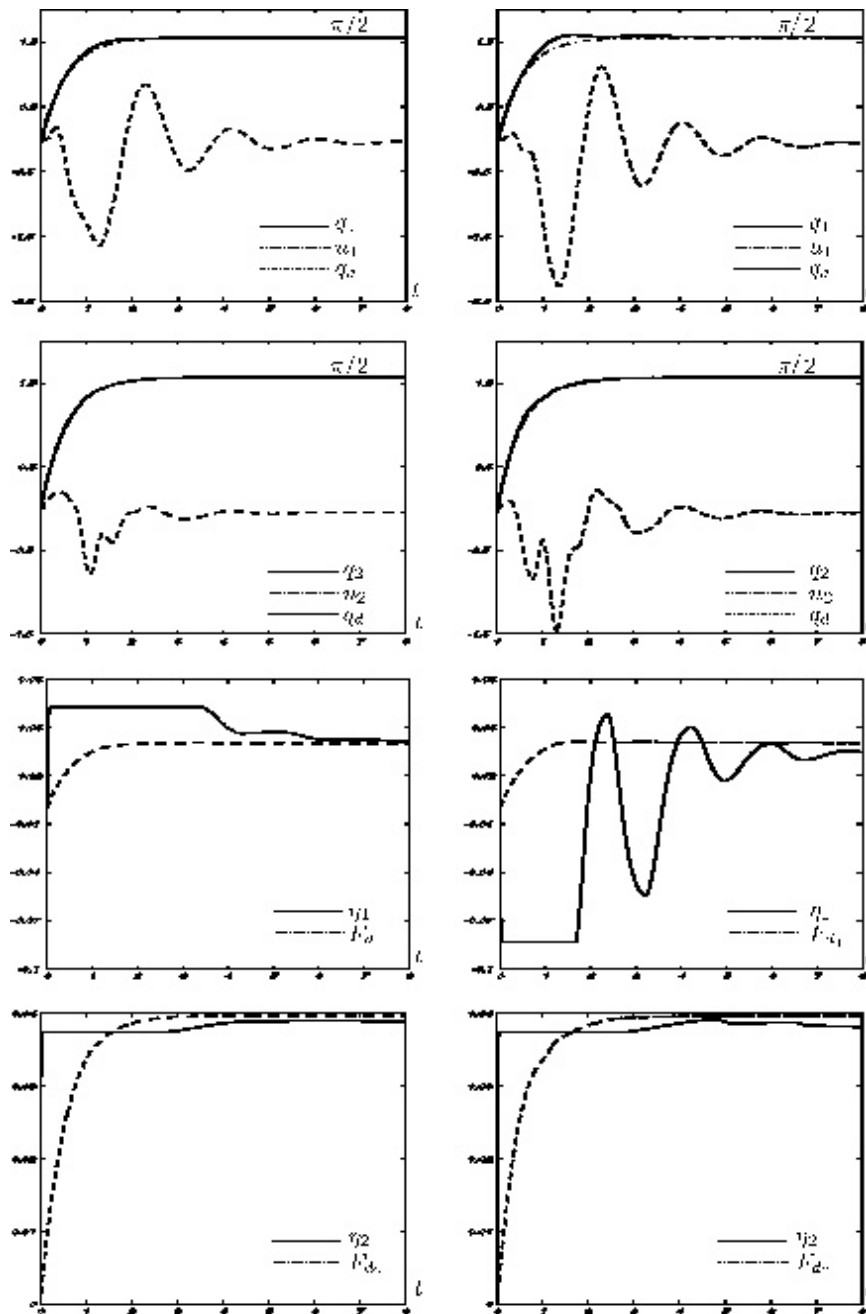
**Figura 14:** Resultados de simulación para el regulador  $\mathcal{H}_\infty$  no suave (columna izquierda) y su versión suave (columna derecha).



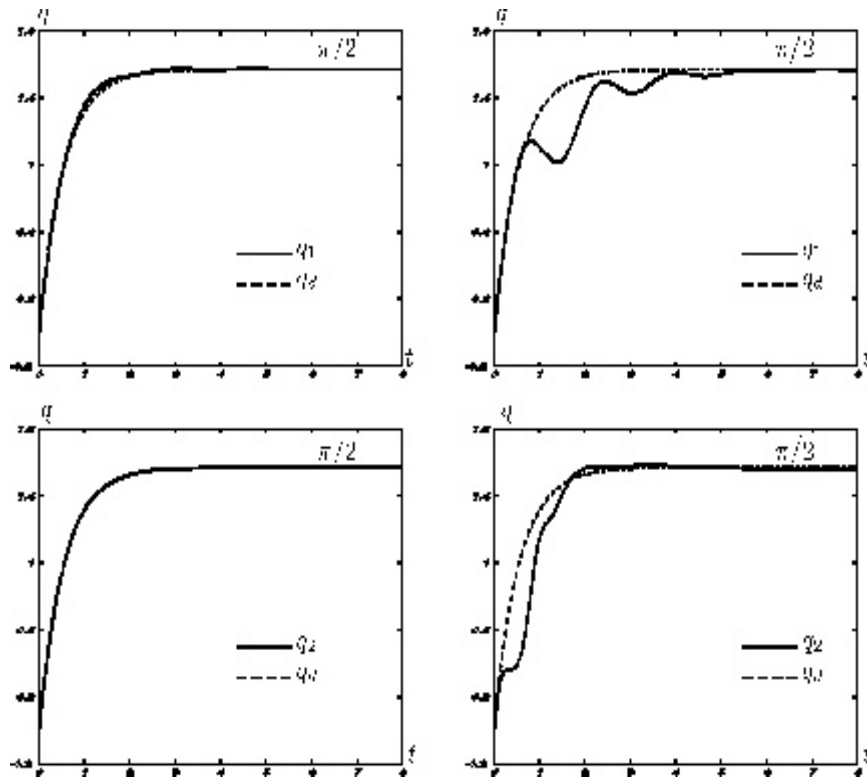
**Figura 15:** Desempeño del regulador  $\mathcal{H}_\infty$  suave y no suave para el caso no perturbado.



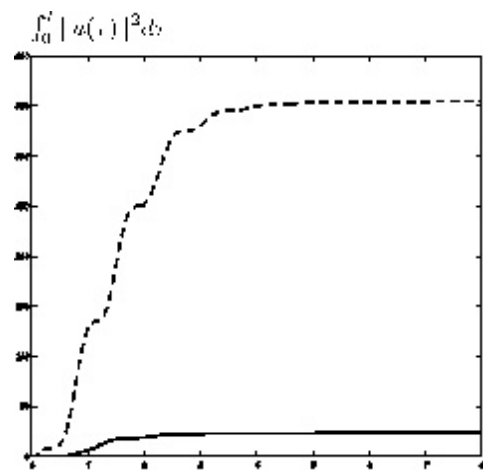
**Figura 16:** Robustez del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  contra disturbios externos y variaciones paramétricas: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbación y variación paramétrica.



**Figura 17:** Robustez del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  contra discrepancias en el modelo de fricción: izquierda para el caso no perturbado y derecha para el caso con perturbación y variación paramétrica.



**Figura 18:** Resultados de simulación para el controlador  $\mathcal{H}_\infty$  no suave (columna izquierda) y su versión suave (columna derecha).



**Figura 19:** Comparación del desempeño del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  no suave y su versión suave para el caso no perturbado.

## VI.4 Comentarios

Las conclusiones obtenidas de las simulaciones numéricas se resumen a continuación:

- *Estabilidad asintótica del sistema mecánico ante la presencia de fricción* - Si se toma como referencia las anteriores hipótesis sobre el sistema (i.e. suave) entonces el fenómeno de fricción debe considerarse como una perturbación. Para resolver este problema se debe sintonizar el valor de  $\gamma$  tal que el error en estado estable sea mínimo (reducir  $\gamma$ ), esto es equivalente a tener un controlador de ganancia alta. En la formulación que se presenta en los capítulos cuatro y cinco al tomar en cuenta el fenómeno de fricción como parte de la función no lineal, entonces los teoremas V.1 y V.2 aseguran estabilidad asintótica al menos que no exista una perturbación.
- *Estabilidad ante la presencia de perturbaciones* - Los valores resultantes de  $\gamma > 1$  quieren decir que ante la presencia de alguna perturbación admisible (en el par o en la señal de medición) se asegura que existirá un error en estado estacionario (acotado). Para valores  $0 < \gamma < 1$  entonces se asegura atenuación al disturbio.
- *Discrepancias en el modelo de fricción* - Este punto se puede interpretar de distintas maneras: a) los parámetros del modelo de fricción cambian debido a distintas circunstancias (desgaste, lubricantes, etc.) b) la fricción real de la planta puede no corresponder al modelo utilizado en el diseño del controlador. El controlador  $\mathcal{H}_\infty$  considera este tipo de discrepancias en  $w_2$ .

# Capítulo VII

## Estudio experimental

### VII.1 Introducción

En este capítulo se presentan resultados experimentales para un manipulador de tres grados de libertad. La motivación de la implementación de los controladores  $\mathcal{H}_\infty$  es ilustrar la aplicabilidad de la metodología expuesta en los capítulos cuatro y cinco así como observar el comportamiento de éstos ante perturbaciones no modeladas. El robot manipulador cuenta con un sistema de transmisión por engranaje y cadenas (generadores de fricción) que lo hace ideal para observar el comportamiento de estos controladores. Al igual que en las simulaciones numéricas se realizan pruebas de regulación y seguimiento de trayectorias. Antes de mostrar los resultados se hace una descripción del mecanismo a controlar.

### VII.2 Descripción del manipulador de tres grados de libertad

#### Descripción de base experimental de control

El robot *Pegasus*, fabricado por *amatrol*, es un robot manipulador de tres grados de libertad de articulaciones rotacionales con características didácticas e industriales. Este robot tiene



tres articulaciones rotacionales que forman el brazo, una que gira sobre el eje  $z$  ( $q_1$ ) y dos más que giran sobre el eje  $y$  ( $q_2, q_3$ ). Para visualizar mejor la estructura se recomienda observar el diagrama esquemático de la figura 20. Los juegos de engranaje que integran el sistema son la principal fuente de fricción (ver fotografías de la figura 26). Para el diseño de control retroalimentado se puede disponer únicamente de la información de posición articular mediante los encoders instalados en cada articulación del mecanismo. La base experimental, construida e instalada en CITEDI<sup>1</sup>, está integrada por cuatro subsistemas: a) El robot manipulador; b) Manejadores para motor de corriente directa; c) Tarjeta de control y adquisición de datos y d) Una computadora personal con procesador Pentium III.

La tarjeta de control diseñada en *Servotogo Inc.* es un sistema de bajo costo, de propósito general, con entradas y salidas para control de movimiento que puede manejar ocho servomotores de manera simultánea a través del BUS-ISA de una computadora PC-compatible. Las pines que integran la tarjeta de control son el canal de entradas (ocho canales para el encoder, contadores de 24 bits, señales de entrada diferencial y tasa máxima de muestreo de 10 MHz); canal de salida (ocho canales de salida analógica de  $\pm 10$  volts, 13 bits de resolución y un indicador de bit de signo); 32 bits de entrada y salida digital. Algunas aplicaciones que se pueden agregar a esta tarjeta es el control de máquinas y herramientas, control de movimiento, equipo de prueba automática e instrumentación médica. La ejecución de instrucciones se realizan a través de interrupciones.

Cada uno de los servomotores que integran el manipulador son de corriente directa de imán permanente fabricados por *Pittman*, que presentan un intervalo de voltaje de operación de 30 volts, velocidades de alrededor de 40 rad/s y pares de  $27 \times 10^{-3}$  N-m, pero debido a su relación de engranaje (19.7:1 para  $q_1$  y  $q_2$ ; y 127.8:1 para  $q_3$ ) estos pueden alcanzar un par de 1.24 N-m. Cada motor tiene integrado un encoder de 512 pulsos por revolución.

Los manejadores adquiridos en *Trust Automation Inc.* modelo BTA-28V-6A, son servoam-

---

<sup>1</sup>Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital.

plificadores lineales que alcanzan una potencia máxima de 325 W., de bajo ruido, pueden ser operados en modo de velocidad o par y aceptan una entrada de control de  $\pm 10$  volts, y que está en los límites de voltaje y corriente suministrado por la tarjeta de control. Estos amplificadores de potencia son capaces de enviar una señal control de cuatro cuadrantes para pequeños y medianos motores. El circuito de salida es un puente H diferencial flotante. Con este arreglo se puede disponer sólo de una fuente de alimentación unipolar de baja impedancia para alimentar el amplificador. Algunas características importantes son el sensado de corriente de manera precisa, programación en modo de voltaje o corriente y circuito de protección contra corriente de carga inversa.

### Modelo dinámico

Las ecuaciones dinámicas que modela el robot manipulador de la figura 20 se obtiene a través de la ecuación de Lagrange (11) y desarrolladas en el apéndice A, representado, entonces, de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}}_{M(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}}_{G(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{F(\dot{q})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}}_{\tau}$$

donde

$$M_{11}(q) = m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) + m_2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)]^2 + I_1,$$

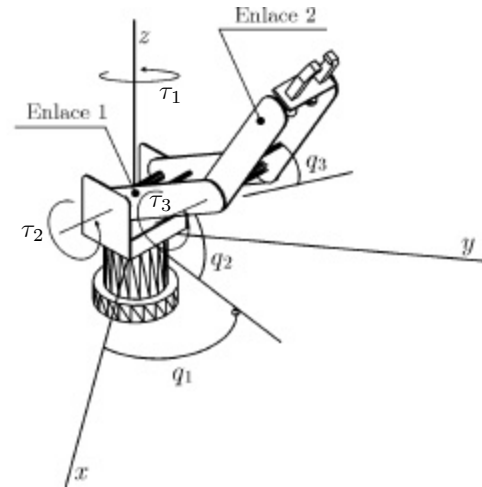
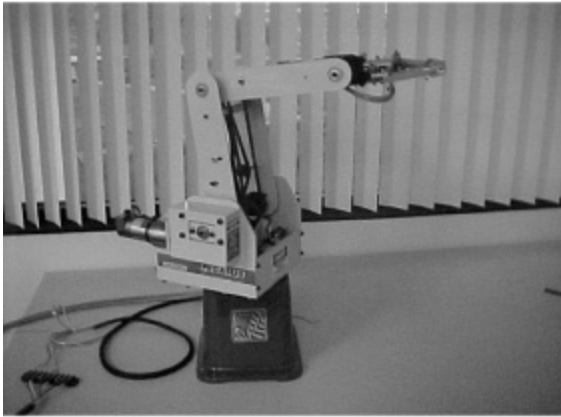
$$M_{22}(q) = m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_2 + I_3,$$

$$M_{23}(q) = m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_3,$$

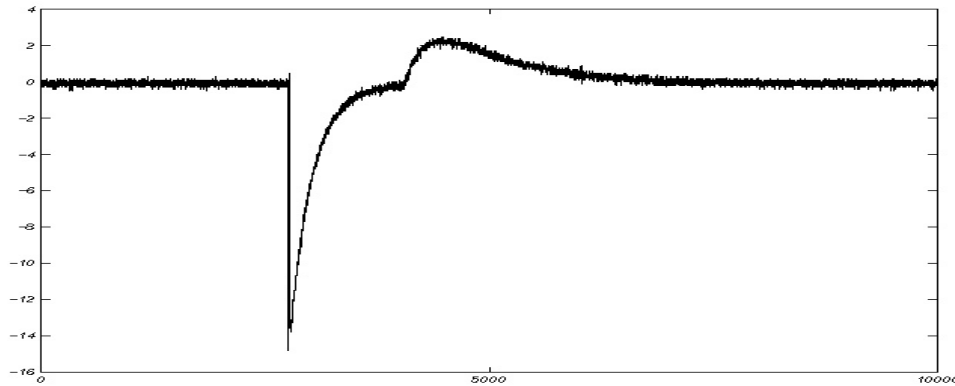
$$M_{33}(q) = m_2 l_2^2 + I_3,$$

$$\begin{aligned}
C_{11}(q, \dot{q}) &= -2m_2l_1 \cos(q_2)[l_1 \sin(q_2) + l_2 \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_2 \\
&\quad -2m_2l_2 \cos(q_2 + q_3)[l_1 \sin(q_2) + l_2 \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_2, \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= 2m_1l_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2)\dot{q}_1, \\
C_{13}(q, \dot{q}) &= -2m_2l_2[l_1 \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3)]\dot{q}_1 \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= m_1l_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2)\dot{q}_1 - m_2l_1 \cos(q_2)[l_1 \sin(q_2) - l_2 \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_1 \\
&\quad + m_2l_2 \cos(q_2 + q_3)[-l_1 \sin(q_2) + l_2 \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_1, \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= -2m_2l_1l_2 \sin(q_3)\dot{q}_3, \\
C_{23}(q, \dot{q}) &= -m_2l_1l_2 \sin(q_3)\dot{q}_3, \\
C_{31}(q, \dot{q}) &= m_2l_2[l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1, \\
C_{32}(q, \dot{q}) &= m_2l_1l_2 \sin(q_3)\dot{q}_2, \\
G_2(q) &= m_1l_1g \cos(q_2) + m_2l_1g \cos(q_2) + m_2l_2g \cos(q_2 + q_3), \\
G_3(q) &= m_2l_2g \cos(q_2 + q_3), \\
F_i(\dot{q}) &= F_{d_i} + \sigma_{2_i}\dot{q}_i, \quad i = 1, 2;
\end{aligned}$$

donde  $g$  es la constante de gravedad.



**Figura 20:** Manipulador de tres grados de libertad.



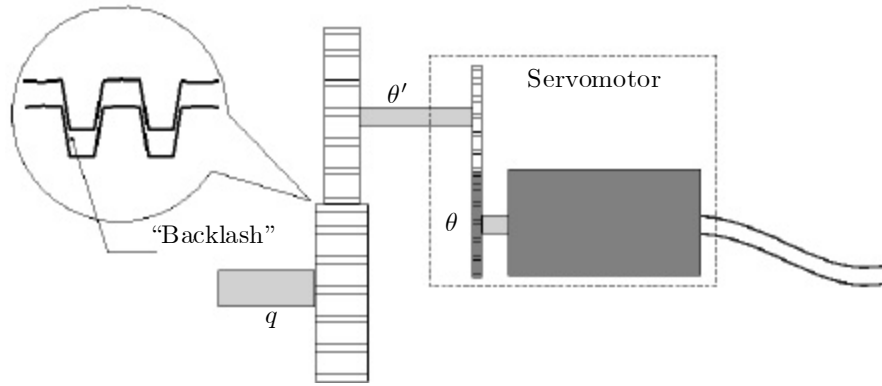
**Figura 21:** Ruido en la medición de entrada al servomotor.

### Descripción de las perturbaciones del sistema

En el sistema dinámico (59) que se debe considerar para el análisis del problema  $\mathcal{H}_\infty$  existe el vector de perturbaciones ( $w = [w_0, w_1, w_2]$ ). Con el propósito de no dejar ambiguo el conocimiento de este vector se dedica esta subsección a presentar de una manera general los elementos que lo integran.

El vector de perturbación  $w_0$  está formada por todos aquellos disturbios externos que afectan la medición de posición articular que se utiliza para retroalimentación. El osciloscopio digital de 1GHz muestra el comportamiento de la señal en la salida del amplificador (Figura 21) en un tiempo de muestreo de  $t_s = 1$  mS ante un par impulsivo. En el vector  $w_1$  están relacionados las perturbaciones hacia el par de entrada: corrientes parásitas, sobrecarga y fricción.

El actuador del mecanismo no está directamente acoplado a los enlaces, sino que existe una serie de engranes entre el enlace y el actuador y a ellos se debe que el sistema mecánico pueda presentar una serie de fuentes de perturbación: fricción, backlash, zona muerta. Se debe recordar que en esta la tesis se considera a la fricción como parte de la función  $f(x)$  y los demás fenómenos no lineales asociados al sistema de engranaje se considera como perturbación ( $w_1$ ). Por otro lado, el juego mecánico entre los engranes (“backlash”) aparece de una manera evidente en la articulación  $q_1$  y  $q_2$ . El esquema de la figura 22 muestra el tren de engranaje



**Figura 22:** Engranes como fuente principal de perturbación en el sistema.

que componen cada articulación. Existen diferentes aproximaciones en el modelado de este fenómeno, como el modelo estático llamado de zona muerta (Tustin, 1947) ó el modelo de histéresis que Tao y Kokotovic (1995) presentan en su estudio y algunos otros que se resumen en Nordin y Gutman (2002). Tomando como referencia la figura 22, si la conexión entre los engranes fuese perfecta entonces se satisface la siguiente relación entre las velocidades y posiciones angulares:

$$r_1 \theta'(t) = r_2 q(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (137)$$

$$r_1 \dot{\theta}'(t) = r_2 \dot{q}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (138)$$

donde  $r_i$  con  $i = 1, 2$  es el número de dientes de cada engrane. Aunque se puede considerar que el contacto entre los dientes de los engranes internos del servomotor nunca se pierde no se puede asumir lo mismo para el tren de engranes externos debido a lo evidente de su presencia (referencia experimental). Si existe el juego mecánico de  $\pm\Delta$  con  $\Delta > 0$  entonces el contacto entre los dientes se pierde en algún instante. De manera particular el contacto entre los engranes se presenta si alguna de estas desigualdades se satisface:

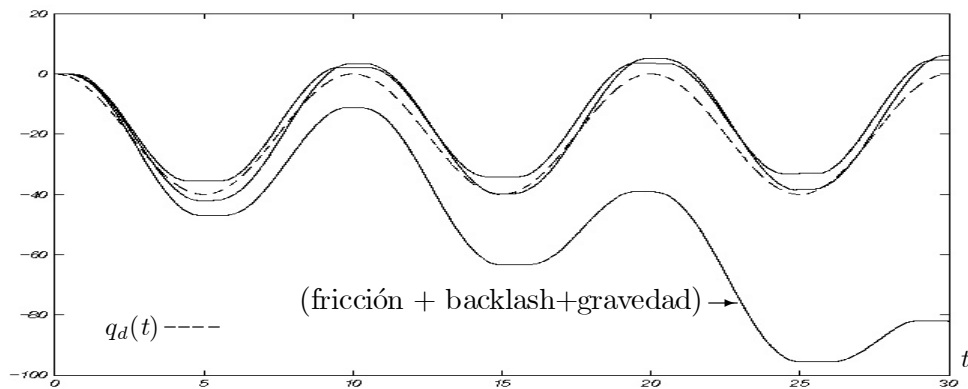
$$r_2 q(t) - r_1 \theta'(t) - \Delta \geq 0, \quad (139)$$

$$r_2 q(t) - r_1 \theta'(t) + \Delta \leq 0. \quad (140)$$

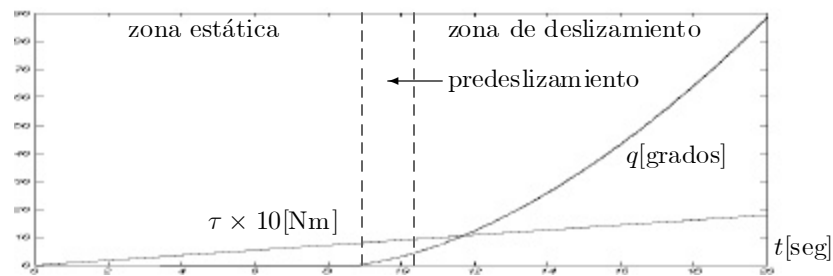
Con las desigualdades (139)-(140), entonces se puede definir el vector de perturbación  $w_1$  de la siguiente manera:

$$w_1(t) := \begin{cases} r_2 q(t) - r_1 \theta'(t) - \Delta, & \text{si (139) se satisface,} \\ r_2 q(t) - r_1 \theta'(t) + \Delta, & \text{si (140) se satisface.} \end{cases}$$

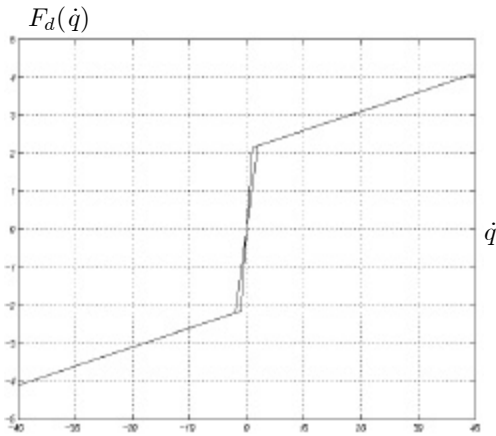
Si  $\Delta = 0$ , entonces  $w_1 = 0$  debido a las relaciones (137)-(138). En la figura 23 se puede observar las discrepancias en las mediciones de posición para cada articulación para el sistema en lazo abierto debido a estas no linealidades, además en la figura 24 se muestra que existe una región de fricción estática máxima del 10% del par máximo.



**Figura 23:** Respuesta del sistema en lazo abierto ante entrada periódica.



**Figura 24:** Respuesta del sistema ante entrada rampa.



**Figura 25:** Gráfica de velocidad vs. fricción de Coulomb + viscosa.

### VII.3 Resultados experimentales

La implementación del algoritmo de control  $\mathcal{H}_\infty$  se puede resumir en los siguientes pasos:

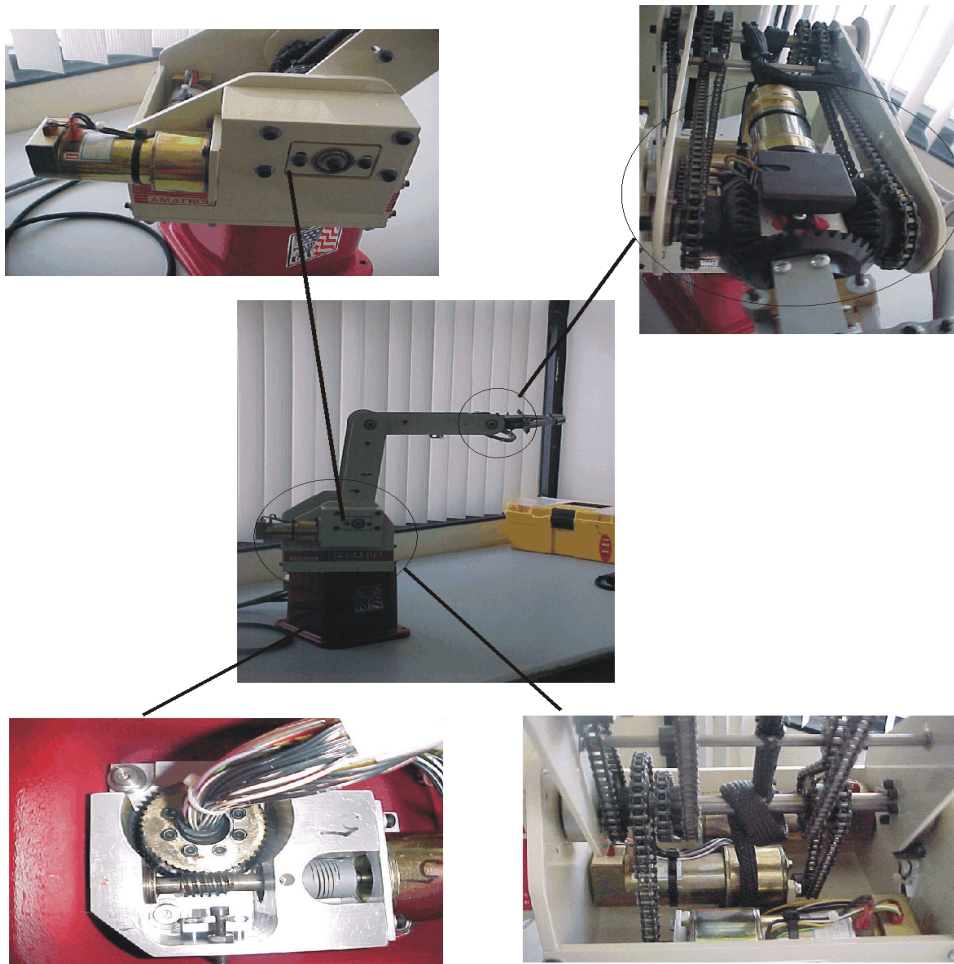
- Encontrar una  $\gamma > 0$  y un valor de  $\varepsilon > 0$  tal que exista una solución a las ecuaciones diferenciales de Riccati (80)-(81).
- Resolver las ecuaciones diferenciales Riccati en línea o fuera de línea ( $2n^2$ ) (e.g. Matlab).
- Resolver la ecuación diferencial del observador ( $n$ ).

El valor dentro del paréntesis es el número de ecuaciones diferenciales a resolver por la cantidad de grados de libertad ( $n$ ). El diagrama de la figura 28 muestra de manera generalizada la secuencia de programación del controlador  $\mathcal{H}_\infty$ .

Para resolver las ecuaciones diferenciales en lenguaje C++ se utiliza el método de integración Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \left( \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) h$$

donde  $k_1 = f(x_i, y_i)$ ,  $k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$  y  $h$  es el tamaño del paso.



**Figura 26:** Juego de engrane del manipulador.

### VII.3.1 Regulación

La serie de experimentos para el caso de regulación se enlistan continuación:

**Experimento 1.** El primer experimento en el manipulador de 3 g.d.l. tiene como tarea moverse desde el origen  $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$  hasta la posición de referencia  $q_{d_i} = 30$  grados;  $i = 1, 2, 3$  utilizando el modelo de Dahl (Dahl 1976) para representar la fricción (Figura 29). Para el diseño del regulador se seleccionó  $\gamma = 120$  y  $\varepsilon = 0.1$ . El tiempo de convergencia a la posición deseada es de 0.8 segs. para las dos primeras articulaciones y 0.5 segs. para la tercera articulación. El hecho de que no exista alguna



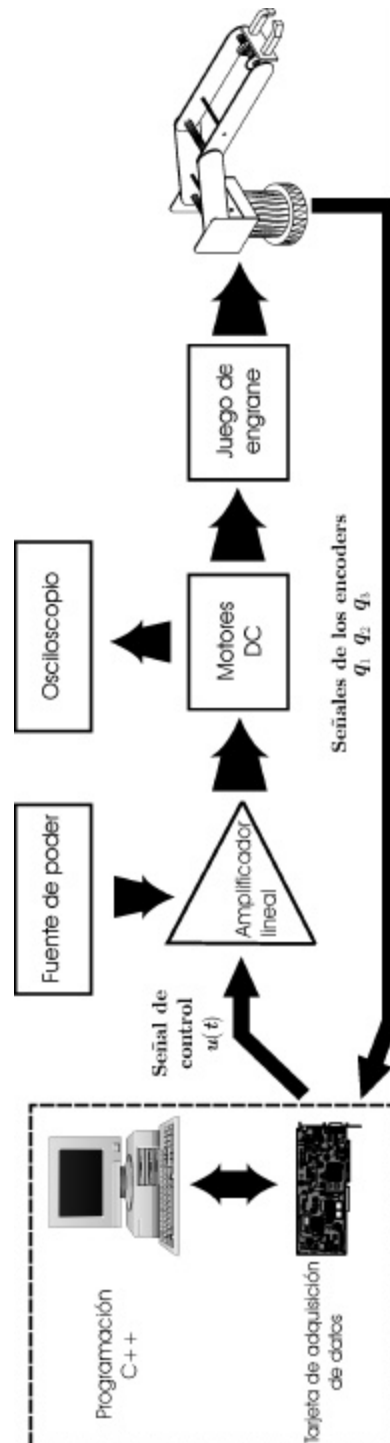


Figura 27: Base experimental de control.

**Tabla 1:** Parámetros del manipulador.

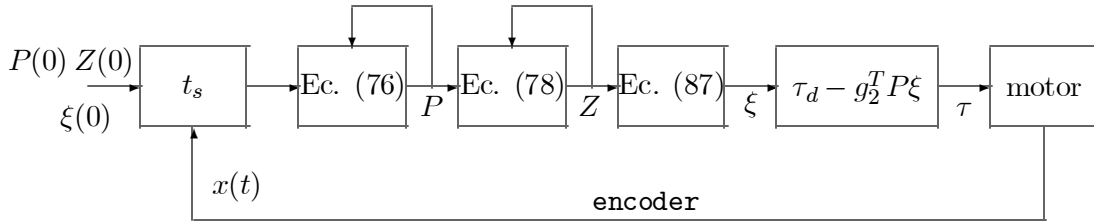
descripción	notación	valor	unidades
longitud eslabón 1	$l_1$	0.297	m
longitud eslabón 2	$l_2$	0.297	m
masa eslabón 1	$m_1$	0.60	Kg
masa eslabón 2	$m_2$	0.68	Kg
Inercia 1	$I_1$	$0.243 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
Inercia 2	$I_2$	$0.068 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
Inercia 3	$I_3$	$0.015 \times 10^{-3}$	Kg m <sup>2</sup>
fricción de Coulomb 1	$F_{C_1}$	2.10	Nm
fricción de Coulomb 2	$F_{C_2}$	1.02	Nm
fricción de Coulomb 3	$F_{C_3}$	0.780	Nm
fricción viscosa 1	$\sigma_{2_1}$	9.84	Nm · s/rad
fricción viscosa 2	$\sigma_{2_2}$	13.02	Nm · s/rad
fricción viscosa 3	$\sigma_{2_3}$	9.87	Nm · s/rad
rigidez 1	$\sigma_{0_1}$	0.054	Nm
rigidez 2	$\sigma_{0_2}$	0.053	Nm
rigidez 3	$\sigma_{0_3}$	0.039	Nm
aceleración de la gravedad	$g$	9.8	m/seg <sup>2</sup>

perturbación sobre el sistema se asegura estabilidad asintótica.

**Experimento 2.** Se estudia el desempeño del regulador  $\mathcal{H}_\infty$  discriminando el efecto de las no linealidades a bajas velocidades (fricción de Coulomb, rigidez, etc.), esto es,  $f_2(x) = 0_{3 \times 1}$  (Figura 30). Nótese el error en estado estable de alrededor de 5 grados para las primeras dos articulaciones y de 1 grado para la tercer articulación. La presencia de juegos de engranes para las articulaciones uno y dos explica la razón de que el error en estado estacionario sea mayor que en la articulación tres.

**Experimento 3.** Durante el viaje hacia la posición deseada se agrega una carga equivalente de 0.05 Kg. Obsérvese que el efecto sobre las posiciones articulares es casi nulo (Figura 31). Si se comparan los pares aplicados con los de la figura 29 se puede observar un mayor consumo de energía.

**Experimento 4.** Con objeto de comparación se considera la versión lineal del regulador  $\mathcal{H}_\infty$



**Figura 28:** Secuencia de programación.

(figura 32) para los casos perturbado y no perturbado, esto es, citando el teorema V.2:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_1 + \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T\right] P_\epsilon \xi + Z_\epsilon C_2^T(t) [y(t) - C_2], \\ u &= -B_2^T P \xi.\end{aligned}$$

Obsérvese la sensibilidad ante perturbaciones.

**Experimento 5.** Los parámetros nominales del modelo utilizado (Tabla 1) se alteran de manera aleatoria. Nótese las variaciones en la posición y en el par durante la etapa transitoria ( $t \in [0 \ 1]$ segs.), mientras que el objetivo de control se cumple cuando  $t \rightarrow \infty$ , (Figura 33).

### VII.3.2 Seguimiento de trayectorias

Para el sistema en lazo cerrado el objetivo de control es satisfacer:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Los experimentos realizados se enumeran a continuación:

**Experimento 6.** Se aplicó una señal periódica  $\tau = 10 \sin(.2\pi t)$  a cada articulación del sistema en lazo abierto con el propósito de observar la influencia de las no linealidades durante la trayectoria de cada articulación (Figura 34). Explicación detallada acerca

del origen de estos efectos se explico anteriormente en este mismo capítulo.

**Experimento 7.** Para el diseño del controlador se selecciona una  $\gamma = 50$  y  $\varepsilon = 1$ . Para satisfacer el objetivo de control se especifica la siguiente trayectoria de referencia:

$$q_{d_i} = \alpha_i \sin(\omega t)$$

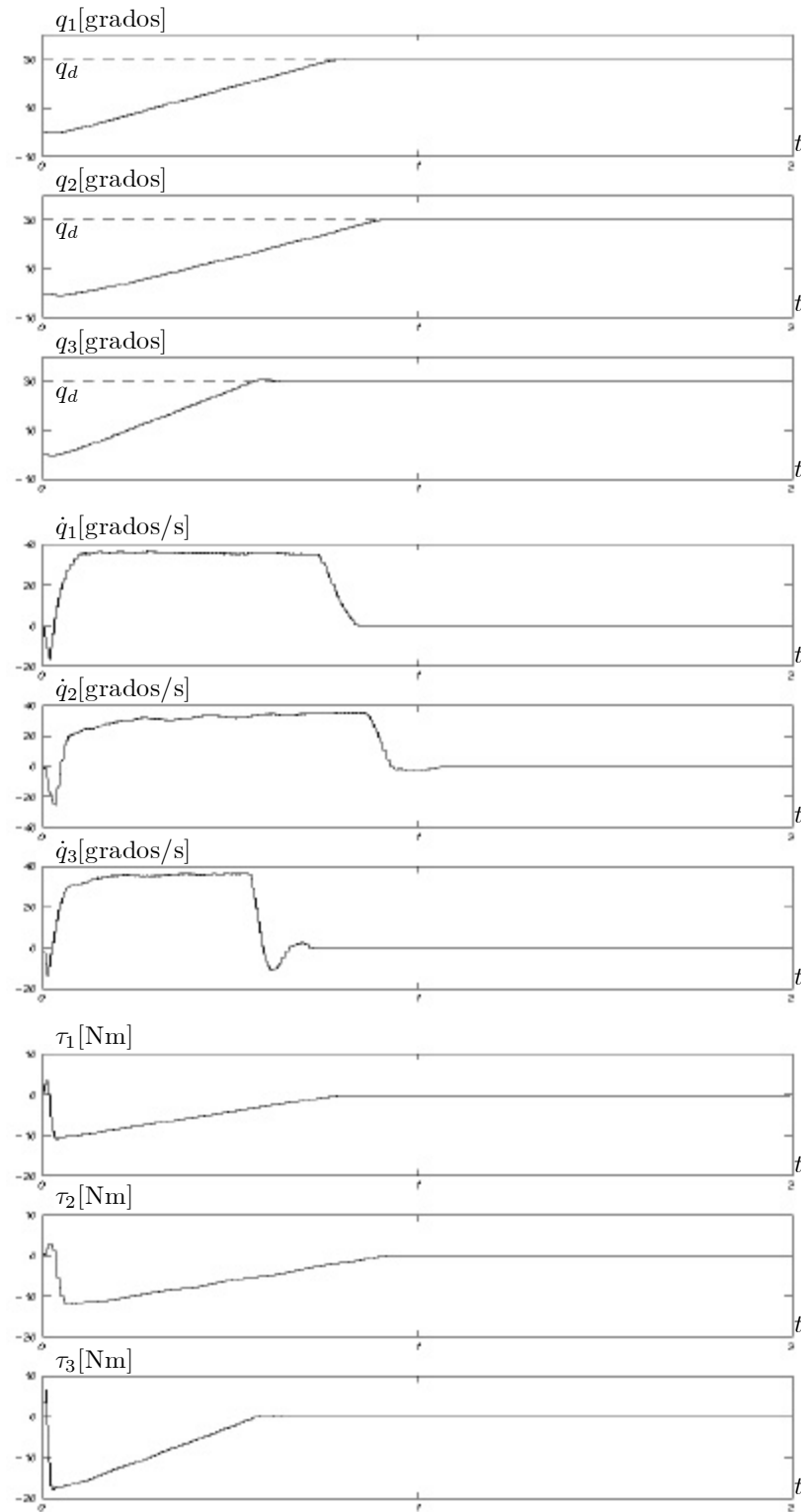
donde  $\omega = .2\pi$ ;  $\alpha_1 = 10$  grados;  $\alpha_2 = \alpha_3 = 30$  grados (Figura 35). Nótese que las condiciones iniciales se pueden especificar tan cerca como sea posible y es claro que la trayectoria de cada articulación sigue la trayectoria de referencia mientras no exista alguna perturbación.

**Experimento 8.** Se repite el experimento 7 perturbando de manera independiente cada articulación. En las tres articulaciones se amortigua el efecto perturbador al liberar un peso de 0.05 Kg. sobre la articulación tres. Debido a un obstáculo puesto intencionalmente durante el recorrido de la articulación dos, el sistema de protección de la fuente de esta articulación interrumpe el paso de corriente sobre su servomotor en  $t \in [17, 22]$  segs. (existen fuentes independientes para cada articulación). Obsérvese en  $\tau_2$  de la figura 36 un exceso en el par, sin embargo es importante resaltar que este par es el calculado, existiendo en realidad una saturación de  $\pm 20$ Nm. Nótese que el sistema en lazo cerrado hace que la trayectoria se reestablezca. De manera similar se coloca el obstáculo para la articulación tres en  $t = 25$  segs. notandose sólo una pequeña discrepancia durante la trayectoria, así mismo se debe señalar que no existe saturación en el par  $|\tau_3| < 20$  Nm.

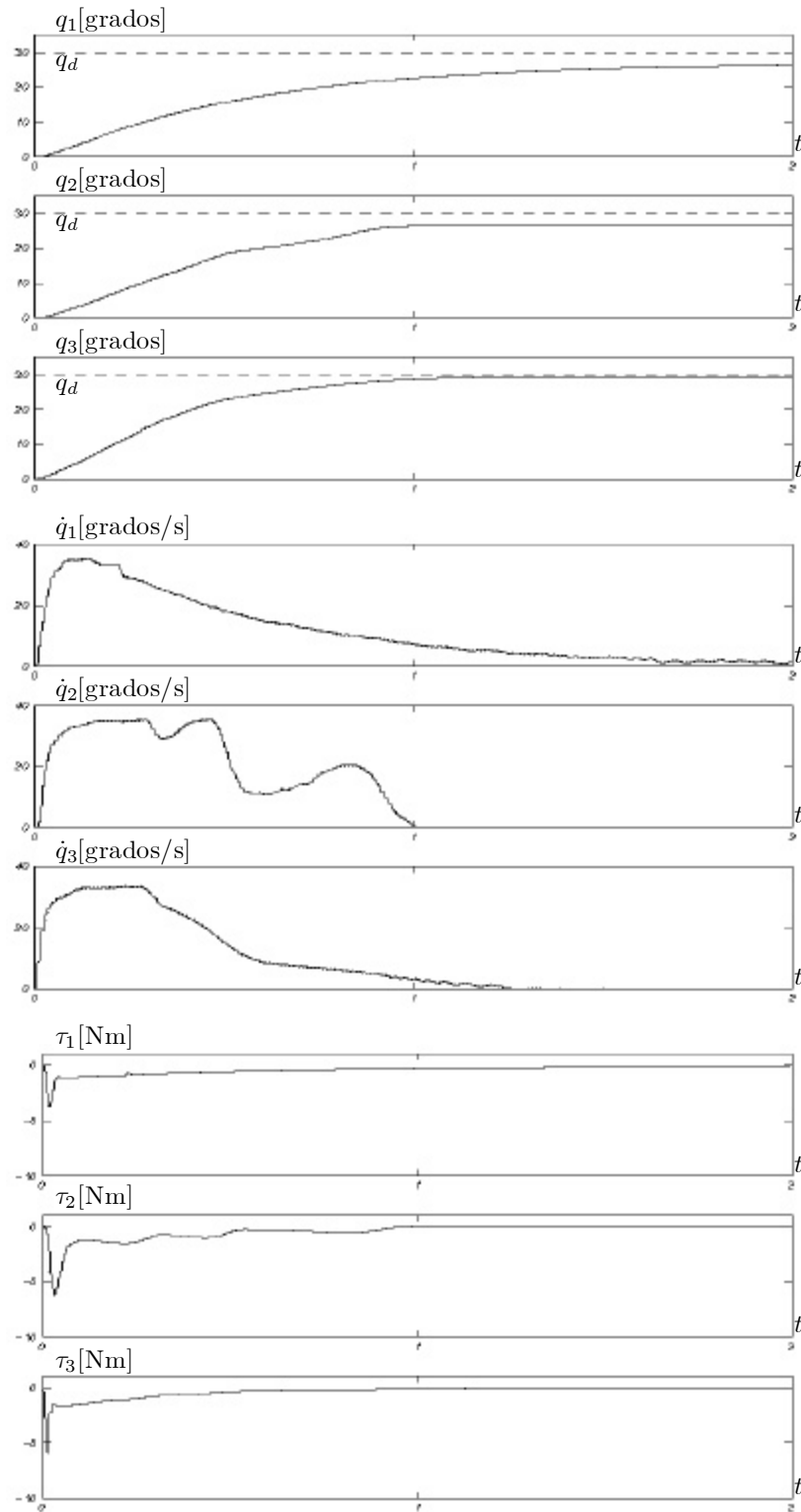
**Experimento 9.** Con el fin de acelerar el proceso de estabilización hacia un punto de referencia deseado sin excitar dinámicas no modeladas, se construye un controlador de seguimiento  $\mathcal{H}_\infty$  (126)-(128) donde la función de peso es  $\rho = 1.65$  y la trayectoria deseada se especificó como:

$$q_{d_i}(t) = \mu_i(1 - e^{-\omega_i t}), \quad i = 1, 2, 3.$$

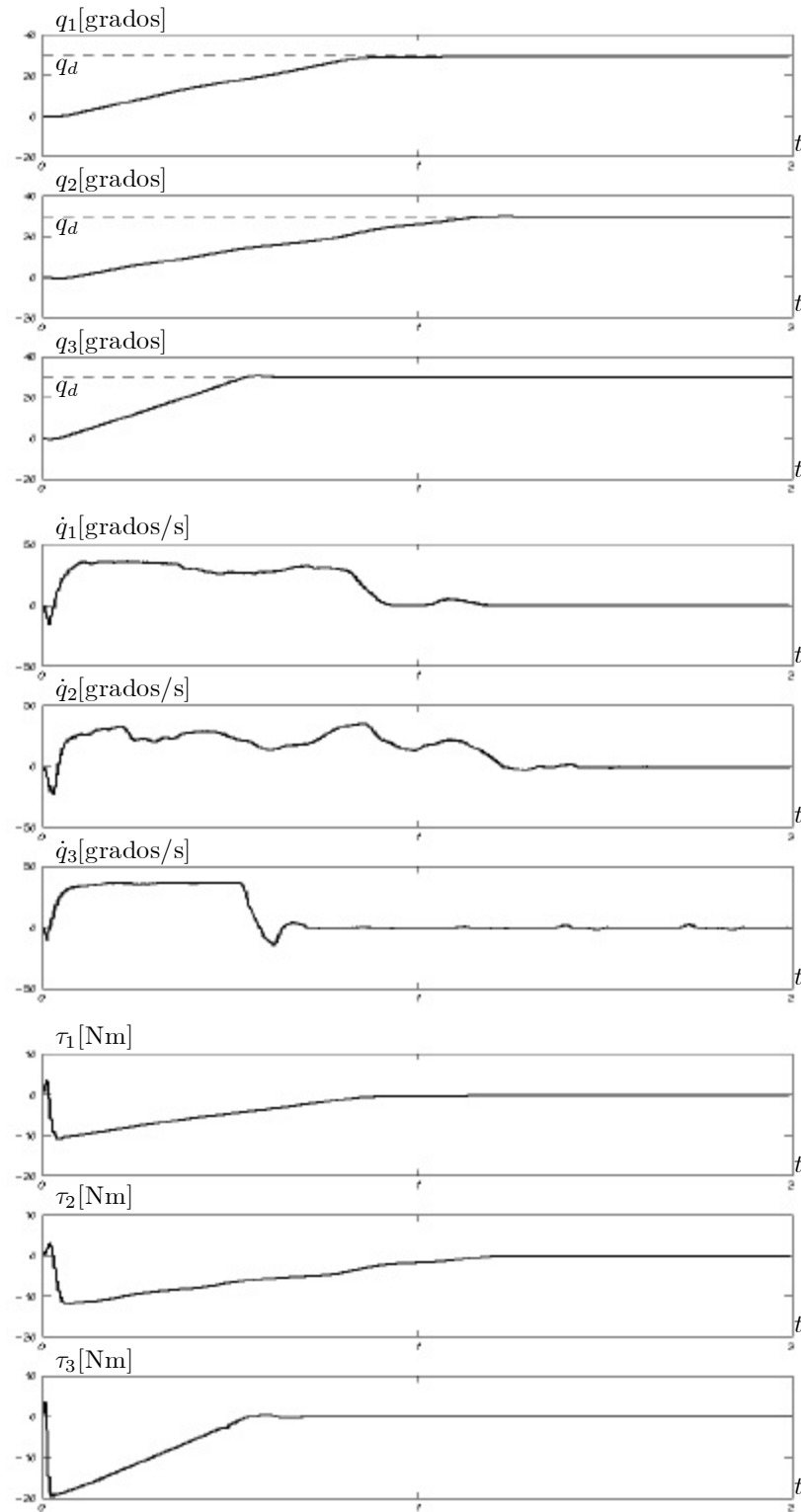
Las propiedades dinámicas de esta trayectoria se prescribe como  $\omega_i = 0.75$ ,  $i = 1, 2, 3$  para evolucionar hacia la trayectoria deseada  $q_d^T = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]$  con  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \pi/2$  (Figura 37). Nótese que para el caso no perturbado se observa estabilidad asintótica mientras tanto para el caso perturbado existe un error en estado estable.



**Figura 29:** Respuestas experimentales de regulador  $\mathcal{H}_\infty$ .

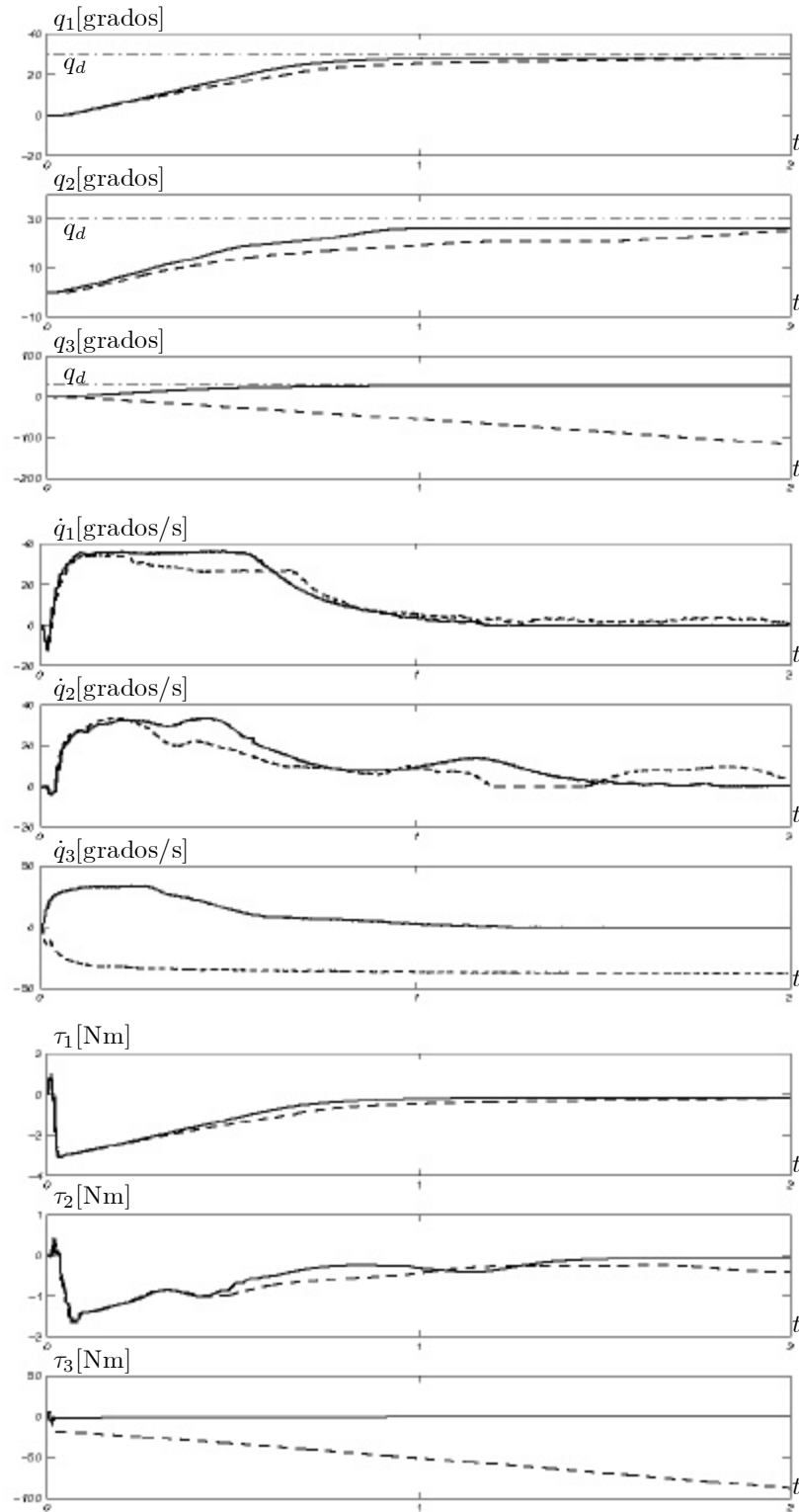


**Figura 30:** Respuestas experimentales de regulador  $\mathcal{H}_\infty$  con  $f_2(x) = 0$ .

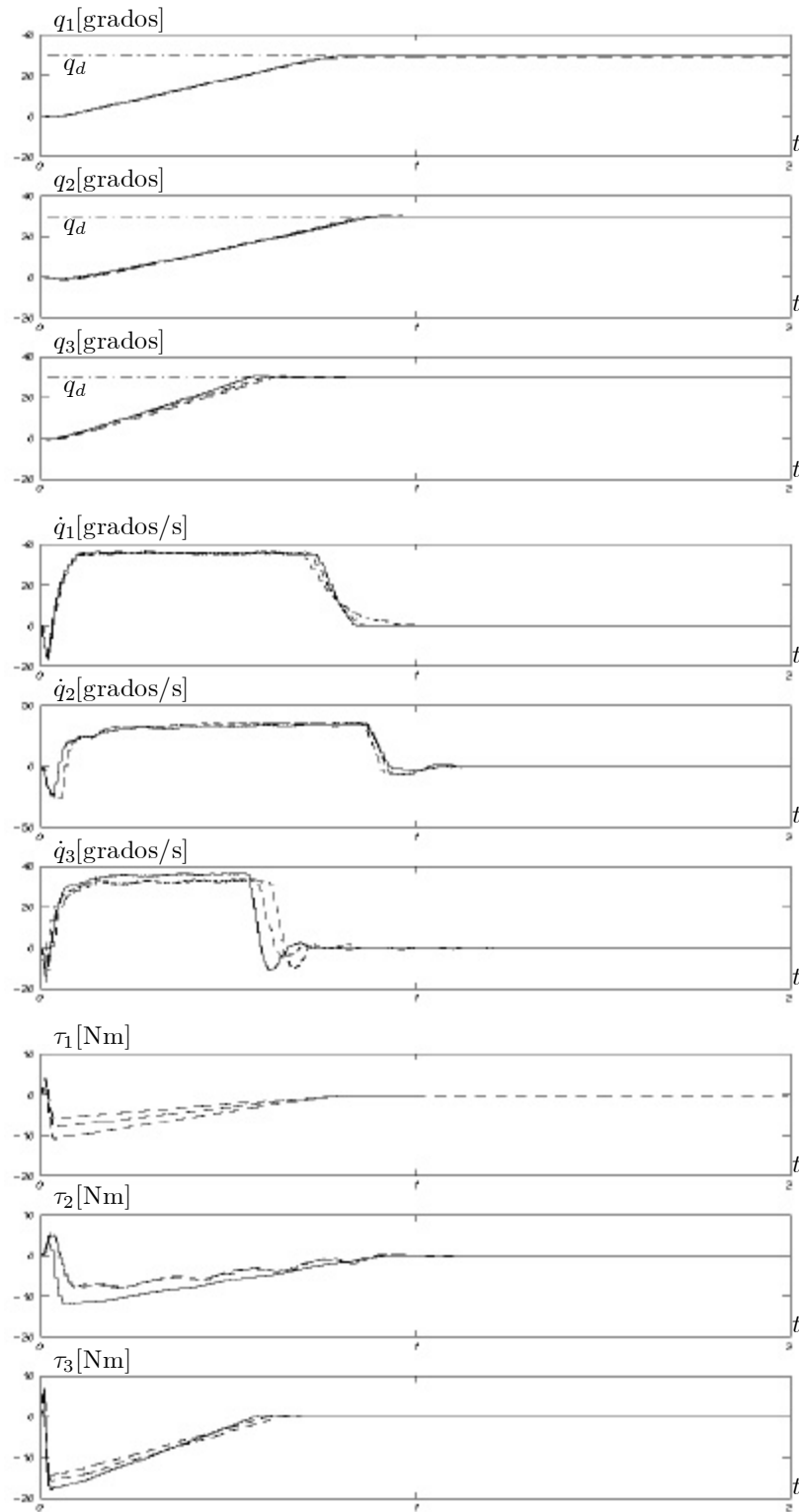


**Figura 31:** Resultados experimentales para el regulador  $\mathcal{H}_\infty$  con carga de 0.05 Kg.

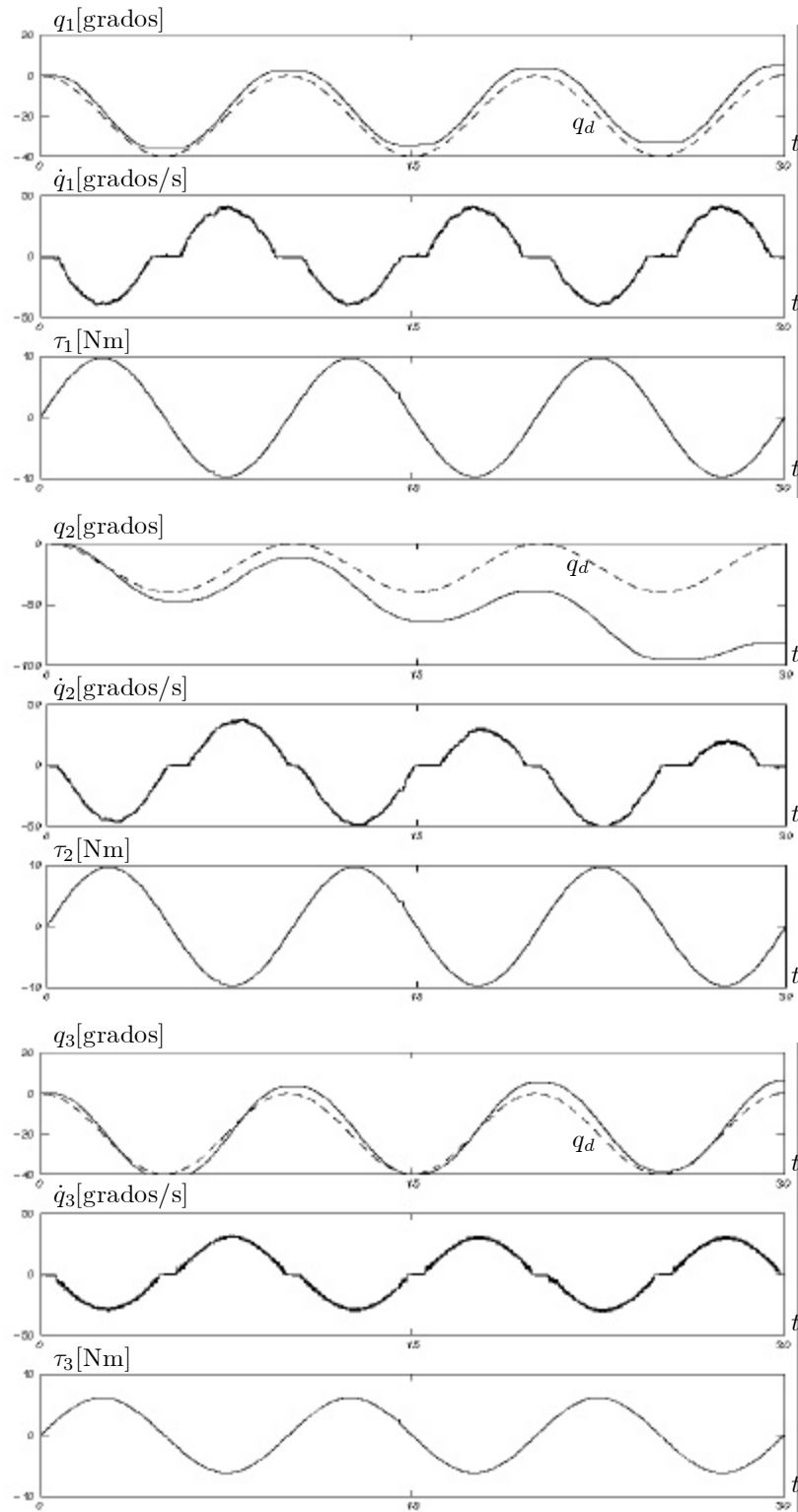




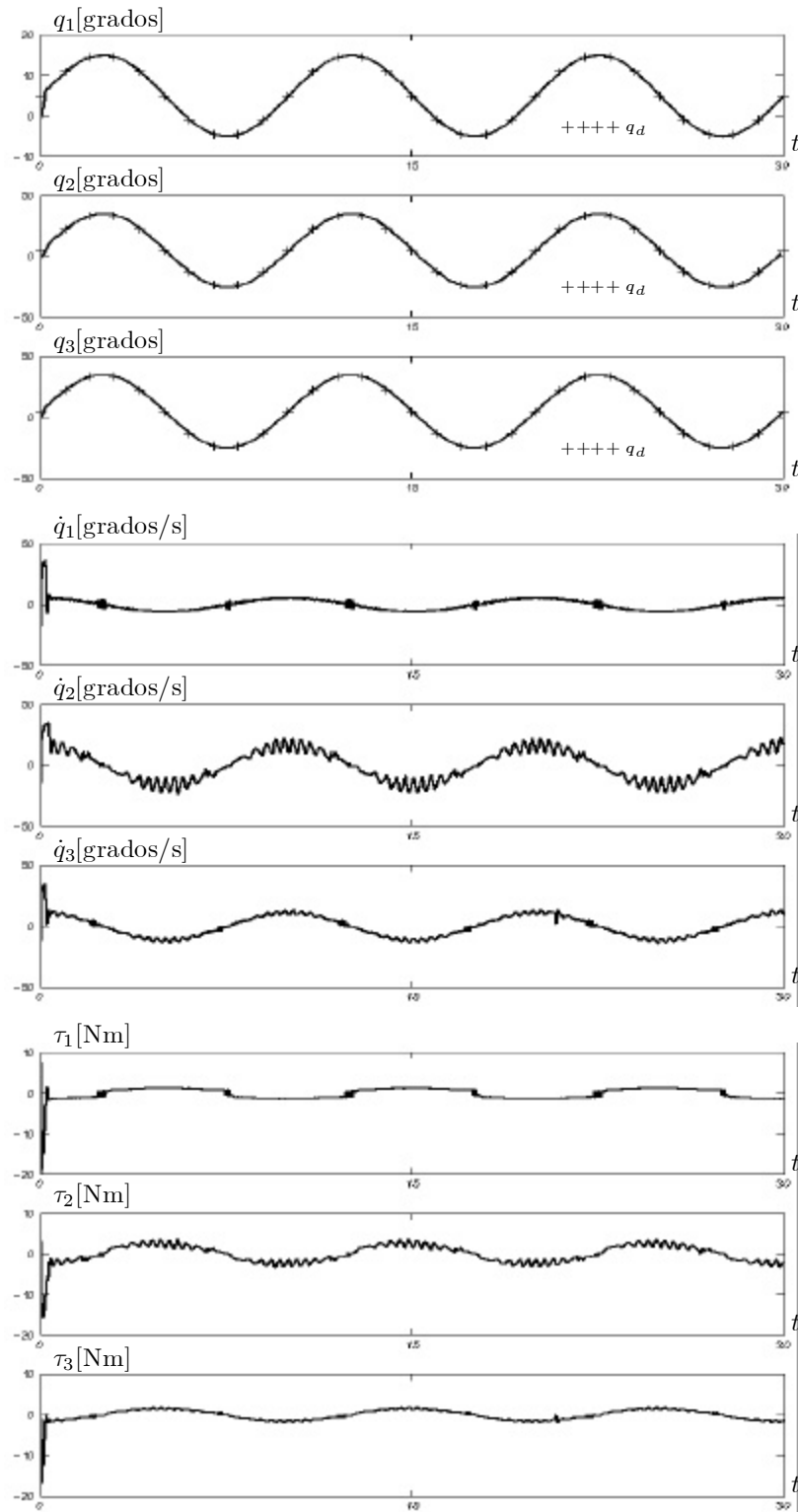
**Figura 32:** Regulador  $\mathcal{H}_\infty$  lineal: No perturbado (línea continua) y perturbado (línea punteada).



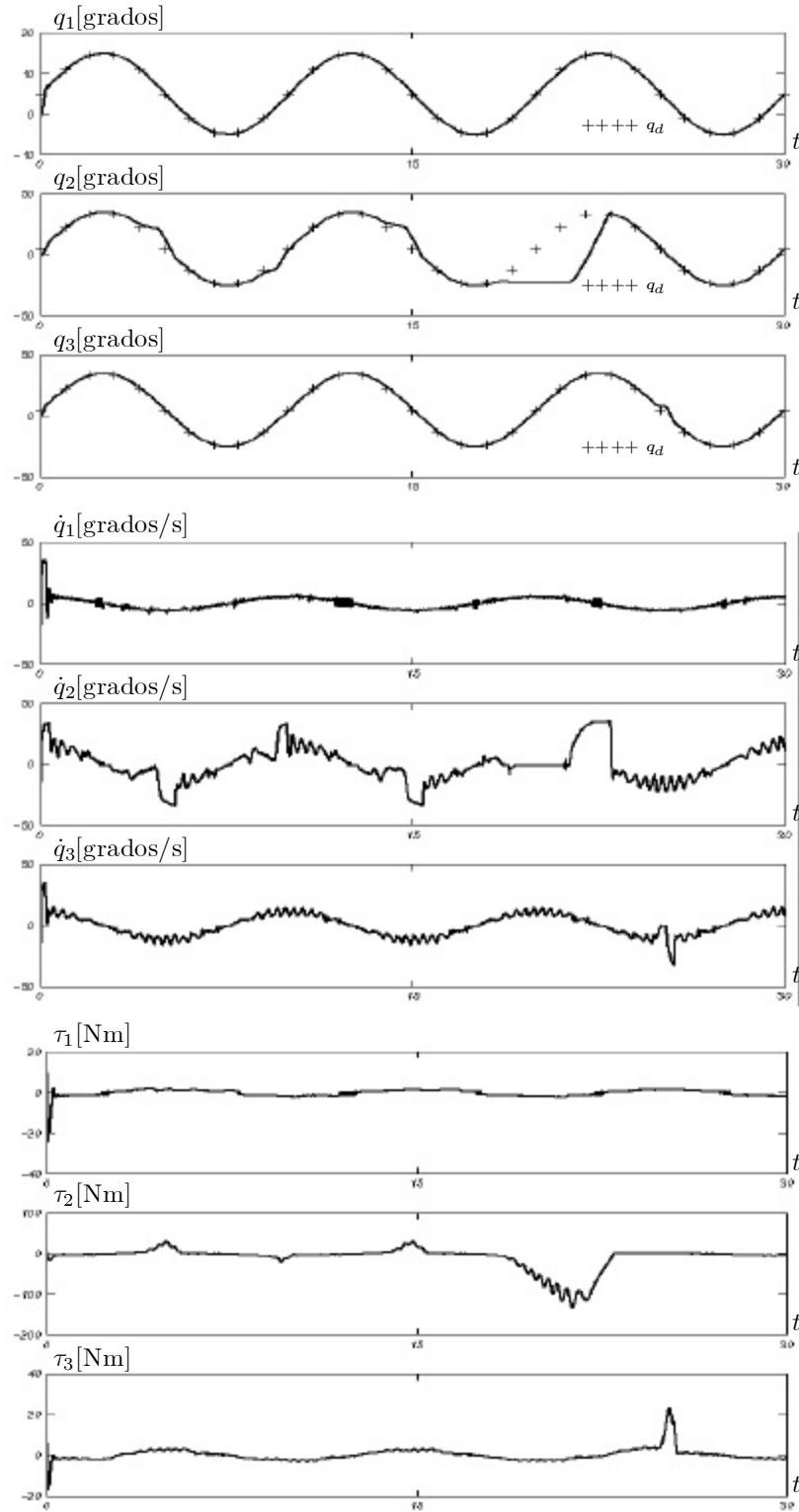
**Figura 33:** Resultados experimentales para regulador  $\mathcal{H}_\infty$  ante variación paramétrica.



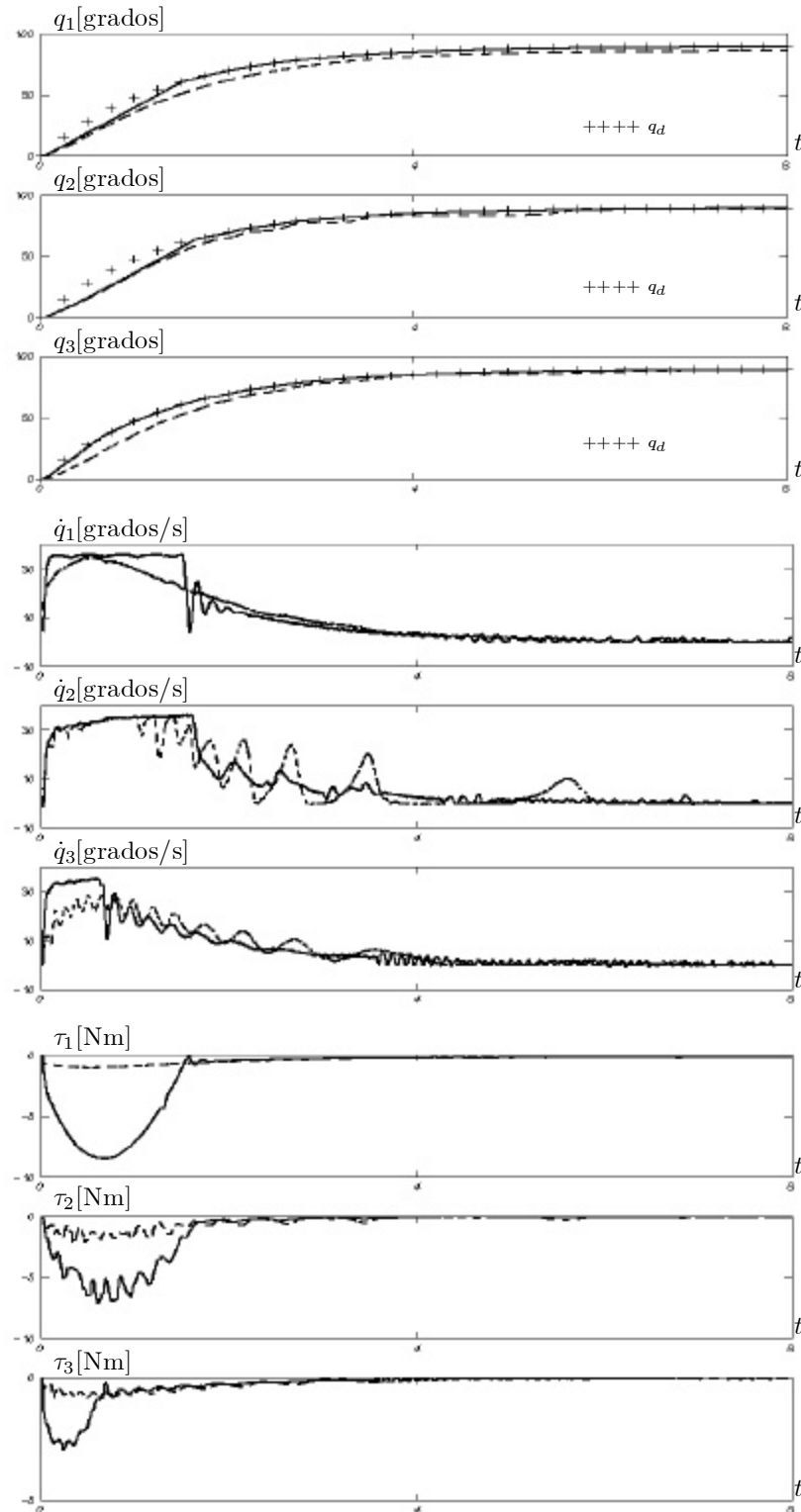
**Figura 34:** Respuestas experimentales del sistema en lazo abierto.



**Figura 35:** Respuestas experimentales de controlador  $\mathcal{H}_\infty$  no perturbado.



**Figura 36:** Respuestas experimentales de controlador  $\mathcal{H}_\infty$  perturbado.



**Figura 37:** Resultados experimentales para controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con  $q_d = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-.75t})$ : caso no perturbado (línea continua) y perturbado (línea punteada).

## VII.4 Comentarios

Las observaciones del capítulo VI se aplican de la misma medida para este capítulo, pero además:

- *Cálculo de las ecuaciones de Riccati* - Desde un sentido práctico, la solución de las ecuaciones de Riccati puede ser un problema computacional:  $(2n + 1)n$  ecuaciones diferenciales donde  $n$  es la dimensión del sistema. Sin embargo se puede observar que las ecuaciones de Riccati y correspondiente ecuación diferencial de Riccati no dependen de la salida, entonces se pueden resolver fuera de línea.
- *Perturbaciones* - La motivación por seleccionar el manipulador de tres grados de libertad, es que presenta niveles notables de fricción debido a los engranes. Sin embargo, debido a este tren de engranes se presentan otras no linealidades no suaves (evidentes en la práctica) como “backlash” y zona muerta (figura 32), que en teoría deben ser absorbidas por el vector  $w_1$ .
- *Cálculo de  $\gamma$*  - En teoría el valor de  $\gamma$  conviene que sea un valor positivo lo más pequeño posible para garantizar atenuación a los disturbios. Aún la incógnita sigue siendo como calcular el valor de  $\gamma$  óptima ( $\gamma^*$ ) desde un contexto metodológico. Para la clase de manipuladores mecánicos tratados en la presente tesis el valor de  $\gamma$  debe ser mayor a uno debido a que el producto matricial  $B_1 B_1^T = B_2 B_2^T$  y para satisfacer las ecuaciones diferenciales de Riccati este producto debe ser tal que  $\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T < B_2 B_2^T$ .

De los resultados experimentales se puede concluir lo siguiente:

- Estabilidad asintótica siempre y cuando el sistema no sea perturbado (teoremas V.1 y V.2 y figuras 29, 35 y 37).
- En la formulación que se presenta en los capítulos cuatro y cinco al tomar en cuenta el fenómeno de fricción como parte de la función no lineal, entonces los teoremas IV.1

y IV.2 aseguran estabilidad asintótica siempre y cuando no exista una perturbación admisible.

- Existe una frontera alrededor del equilibrio donde las trayectorias permanecen si el sistema es perturbado (clase de perturbaciones que pertenecen al espacio  $\mathcal{L}_2$ ).



## Capítulo VIII

# Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se resuelve el problema de control  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas continuos no diferenciables. Mecanismos con fricción dinámica pertenecen a esta clase de sistemas. La presencia de términos continuos no diferenciables en el lado derecho del sistema dinámico aparentemente es una desventaja en las consideraciones hechas hasta ahora en la formulación del problema  $\mathcal{H}_\infty$  debido que se asume que la función no lineal es suave. En el desarrollo teórico del capítulo cuatro y cinco se prueba que la función no lineal también puede ser continua no diferenciable y bajo este marco asegurar estabilidad asintótica ante presencia de fricción.

En este estudio se utilizan algunas bases de teoría no suave que incluye la superderivada y supergradiente. Ambos conceptos permiten analizar una función en los límites del punto donde la derivada no tiene solución y además están asociadas a funciones concavas. Entonces, con el uso del supergradiente se puede demostrar que las desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs se satisfacen para sistemas continuos no diferenciables.

En este trabajo se desarrolló un marco de trabajo práctico para la síntesis de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas no suaves variantes en el tiempo. Esta aproximación extiende el análisis  $\mathcal{L}_2$  de sistemas no lineales invariantes en el tiempo de una manera tal que se tomó en cuenta

el problema de control de seguimiento para sistemas mecánicos con fricción.

A diferencia de otros procedimientos como Basar y Bernhard (1990), Isidori y Astolfi (1992) y Van der Schaft (1992), la correspondiente expresión de Hamilton-Jacobi e Isaac requiere ser negativa definida en lugar de negativa semidefinida. Esta característica permite desarrollar un procedimiento de diseño  $\mathcal{H}_\infty$  en la que no se necesita verificar las condiciones de estabilidad o detectabilidad en el sistema de control. Además el procedimiento de diseño resulta ser un problema de dimensiones infinitas, dificultad que se puede evitar si se resuelve el problema de manera local.

El procedimiento de diseño muestra resolver el problema de seguimiento y el problema de regulación de posición para sistemas mecánicos con fricción. La efectividad en los procedimientos de diseño se apoya mediante resultados experimentales realizados en un robot manipulador de tres grados de libertad. El sistema de transmisión de potencia es a través de engranes, y debido al contacto entre dientes es fuentes de fricción, por otro lado, sólo se dispone de la información de la posición articular. Las conclusiones obtenidas de las simulaciones e implementaciones experimentales se resumen en los siguientes puntos:

- *Estabilidad asintótica del sistema mecánico ante la presencia de fricción* - Si se toma como referencia las anteriores hipótesis sobre el sistema (i.e. suave) entonces el fenómeno de fricción debe considerarse como una perturbación. Para resolver este problema se debe sintonizar el valor de  $\gamma$  tal que el error en estado estable sea mínimo (reducir  $\gamma$ ), esto es equivalente a tener un controlador de ganancia alta. En la formulación que se presenta en los capítulos cuatro y cinco al tomar en cuenta el fenómeno de fricción como parte de la función no lineal, entonces los teoremas IV.1 y IV.2 aseguran estabilidad asintótica al menos que no exista una perturbación.
- *Estabilidad ante la presencia de perturbaciones* - Los valores resultantes de  $\gamma > 1$  quieren decir que ante la presencia de alguna perturbación admisible ( $w \in \mathcal{L}_2$ ) se asegura que existirá un error en estado estacionario (acotado). Para valores  $0 < \gamma < 1$  entonces se

asegura atenuación al disturbio.

- *Discrepancias en el modelo de fricción* - Este punto se puede interpretar de distintas maneras: a) los parámetros del modelo de fricción cambian con el tiempo (desgaste, lubricantes, etc.) b) la fricción real de la planta puede no corresponder al modelo utilizado en el diseño del controlador. El controlador  $\mathcal{H}_\infty$  considera este tipo de discrepancias en  $w_2$ .

Desde un sentido práctico, la solución de las ecuaciones de Riccati puede ser un problema computacional:  $(2n + 1)n$  ecuaciones diferenciales donde  $n$  es la dimensión del sistema. Sin embargo se puede observar que las ecuaciones de Riccati y correspondiente ecuación diferencial de Riccati no dependen de la salida, entonces se pueden resolver fuera de línea.

Los teoría y resultados obtenidos en esta tesis fueron sometidos y publicados en memorias de congreso y revistas de arbitraje internacional. En (Orlov *et al.*, 2001) y (Orlov *et al.*, 2002) se presentan resultados numéricos y experimentales para robots manipuladores utilizando controladores discontinuos (capítulo III); en (Aguilar *et al.*, 2002) se presenta la teoría de control  $\mathcal{H}_\infty$  manejada en los capítulos IV al VI y en (Aguilar y Orlov, 2002) se presentan resultados experimentales. Aplicaciones en electrónica de potencia se encuentran en Acho y Aguilar (2002).

## Problemas abiertos

La teoría que se maneja en la presente tesis no permite tratar con sistemas discontinuos. El interés de esto es que el modelo discontinuo de fricción de Coulomb es la representación más simple para caracterizar este fenómeno. Una línea de razonamiento a seguir es similar a la que se presenta en el capítulo tres y en Orlov *et al* (2000, 2002). En estos trabajos se propone una ley control discontinua sin embargo son métodos basados en funciones de Lyapunov para la prueba de estabilidad. En el diseño del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  la función de

Lyapunov asumida sirve también como función de Lyapunov para el sistema de lazo cerrado para todas las perturbaciones admisibles, esto es, la teoría de Hamilton-Jacobi-Isaacs (o ecuaciones de Riccati para el caso lineal) permite el diseño controladores de manera directa que aseguren estabilidad del sistema ante perturbaciones sin necesidad de encontrar una función de Lyapunov para tal efecto.

Motivado por la experiencia experimental, la presencia de no linealidades no suaves como “backlash” y zona muerta se deben tratar de manera adecuada en el diseño del problema de control  $\mathcal{H}_\infty$ . Actualmente se encuentran disponibles distintos modelos para estas no linealidades (e.g. Nordin y Gutman 2002).

## Apéndice A

# Cálculo de la dinámica del robot de 3 g.d.l.

### A.1 Cálculo de la energía cinética

#### A.1.1 Eslabón uno

Las coordenadas del centro de masa del eslabón uno expresadas en el plano  $x, y, z$  son

$$x_1 = l_1 \cos(q_1) \cos(q_2)$$

$$y_1 = l_1 \sin(q_1) \cos(q_2)$$

$$z_1 = l_1 \sin(q_2).$$

El vector de velocidad  $v_1$  del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \cos(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_2 - l_1 \sin(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\ -l_1 \sin(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_2 + l_1 \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \\ l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

La rapidez del cuadrado  $v_1^T v_1$  del centro de masa resulta ser

$$\dot{x}_1^T \dot{x}_1 + \dot{y}_1^T \dot{y}_1 + \dot{z}_1^T \dot{z}_1 = l_1^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_1^2 + l_1^2 \dot{q}_2^2$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente del eslabón uno se obtiene como

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 \quad (141)$$

donde  $I$  es la inercia correspondiente a cada articulación.

### A.1.2 Eslabón dos

Las coordenadas del centro de masa del eslabón dos son

$$\begin{aligned} x_2 &= [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] \cos(q_1) \\ y_2 &= [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] \sin(q_1) \\ z_2 &= l_1 \sin(q_2) + l_2 \sin(q_2 + q_3) \end{aligned}$$

El vector de velocidad  $v_2 = [\dot{x}_2 \ \dot{y}_2 \ \dot{z}_2]^T$  del centro de masa es

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -l_1 \sin(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 - l_1 \cos(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_2 - l_2 \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\ &\quad - l_2 \cos(q_1) \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \dot{y}_2 &= -l_1 \sin(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_2 + l_1 \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\ &\quad - l_2 \sin(q_1) \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \dot{z}_2 &= l_1 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_2 \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{aligned}$$

La rapidez del cuadrado  $v_2^T v_2$  del centro de masa es

$$v_2^T v_2 = l_1^2 \dot{q}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + l_2^2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + \dot{q}_1^2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)]^2$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al eslabón dos se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 = & \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{q}_2^2 + m_2l_1l_2\cos(q_3)\dot{q}_2(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \frac{1}{2}m_2l_2^2(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_1^2[l_1\cos(q_2) + l_2\cos(q_2 + q_3)]^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \end{aligned} \quad (142)$$

## A.2 Cálculo de la energía potencial

La energía potencial puede descomponerse como la suma de dos partes:  $\mathcal{U}(q) = \mathcal{U}_1(q) + \mathcal{U}_2(q)$  donde  $\mathcal{U}_1(q)$  y  $\mathcal{U}_2(q)$  son las energías potenciales asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(q) &= m_1l_1g\sin(q_2) \\ \mathcal{U}_2(q) &= m_2l_1g\sin(q_2) + m_2l_2g\sin(q_2 + q_3) \end{aligned} \quad (143)$$

## A.3 Cálculo del Lagrangiano

A partir de las ecuaciones (141)-(143) puede obtenerse el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \\ &= \mathcal{K}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_2(q, \dot{q}) - \mathcal{U}_1(q) - \mathcal{U}_2(q) \\ &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\cos^2(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2[l_1\cos(q_2) + l_2\cos(q_2 + q_3)]^2\dot{q}_1^2 - m_1l_1g\sin(q_2) \\ &\quad - m_2l_1g\sin(q_2) - m_2l_2g\sin(q_2 + q_3) + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}I_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + m_2l_1l_2\cos(q_3)(\dot{q}_2^2 + \dot{q}_2\dot{q}_3). \end{aligned} \quad (144)$$

De esta última ecuación pueden obtenerse las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_1 + m_2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_1 + I_1 \dot{q}_1 \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] &= m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) \ddot{q}_1 + 2m_1 l_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 l_1^2 \cos^2(q_2) \ddot{q}_1 \\
&\quad + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \cos^2(q_2 + q_3) \ddot{q}_1 - \\
&\quad 2m_2 l_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
&\quad - 2m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_1 \ddot{q}_1 - \\
&\quad 2m_2 l_2^2 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= m_1 l_1^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1^2 \dot{q}_2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) \dot{q}_3 + \\
&\quad m_2 l_2^2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + (I_2 + I_3) \dot{q}_2 + I_3 \dot{q}_3 \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_1 l_1^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1^2 \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) \ddot{q}_2 - \\
&\quad m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) \ddot{q}_3 + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + \\
&\quad (I_2 + I_3) \ddot{q}_2 + I_3 \ddot{q}_3 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= -m_1 l_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 - m_1 l_1 g \cos(q_2) - m_2 l_1 g \cos(q_2) \\
&\quad + m_2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] [-l_1 \sin(q_2) - l_2 \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 \\
&\quad - m_2 l_2 g \cos(q_2 + q_3) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} &= m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) \dot{q}_2 + m_2 l_2^2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_3 \dot{q}_2 + I_3 \dot{q}_3 \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right] &= m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + I_3 \ddot{q}_2 + \\
&\quad I_3 \ddot{q}_3 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} &= -m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - m_2 l_2 g \cos(q_2 + q_3) \\
&\quad - m_2 \dot{q}_1^2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] [l_2 \sin(q_2 + q_3)].
\end{aligned}$$



La ecuación de Lagrange-Euler son expresadas, finalmente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (m_1 l_1^2 \cos^2(q_2) + I_1) \ddot{q}_1 + m_2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)]^2 \ddot{q}_1 \\
&\quad - 2m_2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] [l_1 \sin(q_2) \dot{q}_2 + l_2 \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] \dot{q}_1 \\
&\quad + 2m_1 l_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2; \\
\tau_2 &= [m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_2 + I_3] \ddot{q}_2 + [m_2 l_1 l_2 \cos(q_3)] \ddot{q}_3 \\
&\quad + [m_2 l_2^2 + I_3] \ddot{q}_3 - 2m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_1 l_1^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3^2 + m_1 l_1 g \cos(q_2) + m_2 l_1 g \cos(q_2) + m_2 l_2 g \cos(q_2 + q_3) \\
&\quad + m_2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] [-l_1 \sin(q_2) + l_2 \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2; \\
\tau_3 &= [m_2 l_1 l_2 \cos(q_3) + m_2 l_2^2 + I_3] \ddot{q}_2 + [m_2 l_2^2 + I_3] \ddot{q}_3 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
&\quad + m_2 l_2 [l_1 \cos(q_2) + l_2 \cos(q_2 + q_3)] \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + m_2 l_2 g \cos(q_2 + q_3) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3).
\end{aligned}$$

## Apéndice B

# Conceptos básicos de estabilidad

### B.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

#### B.1.1 Estabilidad

El origen es un estado de equilibrio estable de la función  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  si existe una función candidata de Lyapunov o una función localmente definida positiva  $V(x, t)$  con derivadas parciales continuas con respecto a  $t$  y  $x$ , tal que su derivada temporal satisfaga

$$\dot{V}(x, t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

#### B.1.2 Estabilidad y acotamiento de las soluciones

El origen es un equilibrio estable y las soluciones  $x(t)$  son acotadas para toda condición inicial  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , si existe una función candidata de Lyapunov y además decreciente de  $V(x, t)$ , tal que su derivada con respecto al tiempo satisfaga

$$\dot{V}(x, t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

### B.1.3 Estabilidad asintótica global

El origen es un estado de equilibrio global asintóticamente estable de  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  si existe una función candidata de Lyapunov  $V(x, t)$ , tal que su derivada satisfaga

- $\dot{V}(x, t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ ,
- $\dot{V}(x, t) < 0$ , para todo  $t \geq 0$ , para todo  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ .

### B.1.4 Estabilidad exponencial global

El origen es un estado de equilibrio global exponencialmente estable de  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  si existe una función candidata de Lyapunov  $V(x, t)$ , y existen constantes positivas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\beta$  tales que

- $\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x, t) \leq \alpha_2 \|x\|^2$
- $\dot{V}(x, t) \leq -\beta \|x\|^2$  para todo  $t \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## B.2 Teorema de invarianza

Considérese el sistema autónomo  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f \in C^0$ , y  $V(x)$  una función escalar  $C^1$ . Supóngase que

1. Para algún  $l > 0$ ,  $-l = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < l\}$  es acotada.
2.  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in -l$ .

Sea  $R = \{x \in -l \mid \dot{V} = 0\}$ , y  $M \subset R$  el conjunto invariante más grande contenido en  $R$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \big|_{x(0) \in -l} \in M.$$

**Teorema B.1 (Vidyasagar 1978)** *Considere el sistema no lineal variante en el tiempo  $\dot{x} = f(x, t)$ , y suponer que  $f(x, t)$  satisface*

$$f(x, t) = f(x, t + T), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0$$

*para cualquier número positivo  $T$ . Bajo estas condiciones, los siguientes dos enunciados son equivalentes*

1. *El punto de equilibrio  $x_0 = 0$  del sistema  $\dot{x} = f(x, t)$  es asintóticamente estable en cualquier instante de tiempo  $t_0 \geq 0$ ,*
2. *El punto de equilibrio  $x_0 = 0$  del sistema  $\dot{x} = f(x, t)$  es asintóticamente estable de manera uniforme sobre el intervalo  $[0, \infty]$ .*

**Lema B.1 (Khalil 1996)** *Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua en el intervalo  $[0, \infty]$ . Suponer que el  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$  existe y es finito, entonces:*

$$\phi(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

## Apéndice C

### Prueba del lema IV.1

Para comenzar, se introduce el siguiente resultado auxiliar que se utilizará para probar el lema IV.1.

**Lema C.1** *Asumir que las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. *una matriz de  $n \times n$  dependiente del tiempo  $\mathcal{S}(t)$  es continua a tramos, acotada, simétrica y positiva definida;*
2. *una matriz  $n \times n$  dependiente del tiempo  $\mathcal{A}(t)$  es continua a tramos y acotada;*
3. *la correspondiente ecuación diferencial*

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t)x \tag{145}$$

*es estable en forma asintótica y uniforme.*

Entonces la matriz

$$\mathcal{Q}(t) = \int_t^\infty \Phi_{\mathcal{A}}^T(\tau, t) \mathcal{S}(\tau) \Phi_{\mathcal{A}}(\tau, t) d\tau,$$

*especificada como la matriz anterior  $\mathcal{S}(t)$  y la matriz de transición  $\Phi_{\mathcal{A}}(\tau, t)$  de (145), es acotada y positiva definida.*

El lema C.1 es una extensión directa de la combinación de los lemas 82 y 85 de Vidyasagar (1978, p. 181) para el caso donde las funciones matriciales  $\mathcal{S}(t)$  y  $\mathcal{A}(t)$  son continuas a tramos más que continuas. La línea del razonamiento para probar los lemas 82 y 85, se aplica de la misma manera para la prueba del lema C.1 por lo tanto se omite.

*Prueba del lema IV.1.* Con el propósito de probar que la ecuación (80) tiene una única solución acotada positiva definida  $P_\varepsilon(t)$  para cada  $\varepsilon > 0$  lo suficiente pequeño, considerérese la siguiente ecuación:

$$\Gamma(P_\varepsilon) + \varepsilon I = 0 \quad (146)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma : P(t) \rightarrow & \dot{P} + P(t)A_1(t) + A_1^T(t)P(t) + C_1^T(t)C_1(t) \\ & + P(t)\left[\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right](t)P(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (147)$$

que es un mapeo desde el espacio  $\mathcal{B}$  de funciones matriciales diferenciables acotadas y simétricas con derivadas acotadas al espacio  $\mathcal{B}_1$  de funciones matriciales acotadas y continuas. La ecuación (76) es equivalente a  $\Gamma(P_{\varepsilon=0}) = 0$ .

Primero, se demuestra que el mapeo:

$$\begin{aligned} D\Gamma_P : Q(t) \rightarrow & \dot{Q}(t) + [A_1(t) + \left(\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right)(t)P(t)]^T Q(t) + \\ & Q(t)[A_1(t) + \left(\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T\right)(t)P(t)] \end{aligned} \quad (148)$$

de  $\Gamma$  a  $P_{\varepsilon=0}$  es invertible. En otras palabras, se demuestra que para cualquier  $S(t) \in \mathcal{B}_1$ , la ecuación

$$D\Gamma_P(Q) + S = 0 \quad (149)$$

tiene una única solución  $Q(t) \in \mathcal{B}$ . De hecho, se puede comprobar que tal solución está dada por:

$$Q_s(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) S(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (150)$$

donde  $\Phi(\tau, t)$  es la matriz de transición de (77), y de acuerdo a la condición C1) se satisface la desigualdad:

$$\|\Phi(\tau, t)\| \leq \mu e^{-\nu(\tau-t)} \quad (151)$$

para toda  $\tau \geq t$  y cualquier valor positivo  $\mu$  y  $\nu$ . Por otra parte, puesto que la solución arbitraria de (149) admite la representación siguiente:

$$Q(t) = \Phi^T(0, t) Q(0) \Phi(0, t) + \int_0^t \Phi^T(\tau, t) S(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau, \quad (152)$$

entonces la diferencia  $\Phi^T(0, t)[Q_1(0) - Q_2(0)]\Phi(0, t)$  entre las dos soluciones acotadas  $Q_1(t)$  y  $Q_2(t)$  de (149) es acotada si y sólo si estas soluciones tienen las mismas condiciones iniciales.

De otro modo, existirá un vector distinto de cero  $q \in \mathbb{R}^n$ , satisfaciendo la desigualdad:

$$\|\Phi(0, t)q\| \leq K$$

para alguna constante  $K > 0$ , en virtud del cual (151) resulta en una declaración falsa que  $0 \neq \|q\| = \|\Phi(t, 0)\Phi(0, t)q\| \leq \|\Phi(t, 0)\| \|\Phi(0, t)q\| \leq K\mu e^{-\nu t} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta contradicción prueba la unicidad de la solución acotada de (149). Debido al lema C.1, la

solución (150) es positiva definida siempre que  $S(t)$  sea positiva definida. Por el teorema de la función implícita (Khalil, 1996), se deduce que (146) tiene una solución única, acotada, simétrica y positiva definida  $P_\varepsilon(t)$  para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.

De manera similar, se puede mostrar que la ecuación (81) tiene una única solución acotada positiva definida y simétrica  $Z_\varepsilon(t)$  para cada  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño.



# Referencias

- Acho L., Orlov Y. y Solis V. 2001. “Nonlinear measurement feedback  $\mathcal{H}_\infty$ -control of Time-periodic systems with application to tracking control of robot manipulators”. *International Journal of Control*, **74**, 190-198 p.
- Acho L. y Aguilar L. 2001. “ $\mathcal{H}_\infty$  control design of PWM voltaje-controlled DC-DC Cuk converter”. En: Zemliak A. y Mastorakis N. (eds.). “Advances in systems theory, mathematical methods and applications”, WSEAS, 5-8 p.
- Aguilar L. y Orlov Y. 2002. “ $\mathcal{H}_\infty$  position control problem for mechanical manipulators with friction”. Sometido a *International Journal on Control*.
- Aguilar L., Orlov Y. y Acho L. “Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$ -control of nonsmooth time-varying systems with application to friction mechanical manipulators”. Sometido a *Automatica*.
- Aguilar L., Orlov Y. y Acho L. (2002). “Nonlinear H-infinity tracking control of friction mechanical manipulator”. *Proc. American Control Conference 2002*, Anchorage, Alaska.
- Alvarez J., Orlov Y. y Acho L. 2000. “An invariance principle for discontinuous dynamic systems with applications to a Coulomb friction oscillator”. *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **74**, 190-198 p.
- Anderson B.D. y Vreugdenhil R. 1973. *Network analysis and synthesis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ.

- Armstrong-Hélouvry B., Dupont P. y Canudas-de-Wit C. 1994. “A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction”. *Automatica*, **30**, 1083-1138 p.
- Asada H. y Slotine J.E. 1985. *Robot control and analysis*. Wiley-Interscience publication.
- Aubin J.P. y Cellina A. 1984. *Differential inclusions: set-valued maps and viability theory*. Ed. Springer-Verlag: Berlin.
- Bartolini G. 1989. “Chattering phenomena in discontinuous control systems”. *Int. J. Syst. Sci.*, **20**, 2471-2481 p.
- Bartolini G., Ferrara A. y Usai E. 2000. “Chattering avoidance by second-order sliding mode control”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-43**, 241-246 p.
- Basar T. y Bernhard P. 1990.  *$\mathcal{H}_\infty$  optimal control and related minimax design problems: A dynamic game approach*. Birkhauser, Boston.
- Battilotti S. y Lanari E. 1995. “Robust control of rigid robots: an  $\mathcal{H}_\infty$  approach”. *Proceedings of the European Control Conference*, Rome, Italy, 3462-3467 p.
- Bhat S. y Bernstein D. 1998. “Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators”. *IEEE Trans. on Automatic Control.*, **43**, 678-682 p.
- Becker N. y Grimm W.M. 1988. “On  $\mathcal{L}_2$  and  $\mathcal{L}_\infty$ - stability approaches for the robust control of robot manipulators”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-33**, 118-122 p.
- Berghuis H. 1993. *Model-based robot control: from theory to practice*. PhD. Theses, Universiteit Twente.
- Berghuis H. y Nijmeijer H. 1993. “Global regulation of robots using only position measurement”. *Systems & Control letters*, **21**, 289-293 p.
- Branicky M., Borkar V. y Mitter S. 1998. “A unified framework for hybrid control model and optimal control theory”. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **43**, No. 1, pp. 31-45.

- Brogliato B. 1999. *Nonsmooth mechanics: models, dynamics and control*. Springer: London.
- Cadiou J.C. y M'Sirdi N.K. 1995. "Modelization and analysis of a system with torque transmitted through a backlash". *9th world congress on the theory of machines and mechanisms*, IFToMM, v. 2, Milan, Italy, 1467-1470 p.
- Camudas-de-Wit C., Olsson H., Astrom K.J. y Lischinsky P. 1995. "A new model for control of systems with friction". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, 419-425 p.
- Chen B.-S. y Chang Y.-C. 1997. "Nonlinear mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control for robust tracking design of robotic systems". *International Journal of Control*, **67**, 837-857 p.
- Chen B.-S., Chang Y.-C. y Lee T.-C. 1997. "Adaptive control in robotic systems with  $\mathcal{H}_\infty$  tracking performance". *Automatica*, **33**, 227-234 p.
- Chen B.-S., Lee T.-S y Feng J.-H. 1994. "A nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  control design in robotic systems under parameter perturbations and external disturbances". *International Journal of Control*, **59**, 439-461 p.
- Chiaverini S., Siciliano B. y Villani L. 1994. "Force/position regulation of compliant robot manipulators". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, 647-652.
- Chung C.C y Hauser J. 1997. "Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$ -control around periodic orbits". *Systems Control Letters*, **30**, 127-137 p.
- Clarke F.H. 1983. *Optimization and nonsmooth analysis*. Wiley Interscience, New York.
- Clarke F.H. 2001. "Nonsmooth analysis in control theory: A survey". *European Journal of Control*, **7** 145-159 p.
- Clarke F.H. 1989. "Methods of dynamic and nonsmooth optimization". *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, **57**, Philadelphia Pennsylvania.
- Clarke F.H., Ledyaev Y.S., Stern R.J. y Wolenski P.R. 1998. *Nonsmooth analysis and control theory*. Graduate Texts in Mathematics, Ed.Springer.

- Clarke F.H., Ledyaev Y.S., Sontag E. y Subbotin A.I. 1997. "Asymptotic controllability implies feedback stabilization". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**, 1394-1407 p.
- Corless M. y Leitmann G. 1981. "Continuous state feedback guaranteein uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**, 1139-1144 p.
- Dahl P.R. 1976. "Solid friction damping of mechanical vibrations". *The Aerospace Corporation*, El Segundo, California, 1675-1682 p.
- Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P. y Francis B. 1989. "State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems". *IEEE Transactions Automatic Control*, **34**, 8, pp. 831-846 p.
- Ezal K., Kokotovic P. y Tao G. 1997. "Optimal control of tracking systems with backlash and flexibility". *Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, USA, 1749-1754 p.
- Feng W. y Postlethwaite I. 1993. "Robust nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$ /adaptive control of robot manipulator motion". *Proceedings of the IFAC World Congress*, 31-34 p.
- Filippov A. F. 1998. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer Academic Publisher.
- Francis B. y Doyle J.C. 1987. "Linear control theory with and  $\mathcal{H}_\infty$  optimally criterion". *SIAM Journal of Control and Optimization*, **25**, 815-844 p.
- Fridman L. y Levant A. 1996. "Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory". En: Garafalo and Glielmo (eds.). "Robust control via variable structure and Lyapunov techniques", Lecture notes in control and information science, Springer: Berlin, **217**, 107-133 p.

- Fridman L. y Levant A. 2002. "Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory". En: W. Perruquetti and J.-P. Barbot (eds.). "Sliding mode control in engineering", Marcel Dekker: New York, 53-102 p.
- Fuller A.T. 1961. "Relay control systems optimized for various performance criteria". *Proc. First World Congress IFAC, Moscow, 1960*, **1**, Butterworth, London, 510-519 p.
- González J. y Widmann G. 1995. "A forced commanded impedance control scheme for robots with hard nonlinearities". *IEEE Transactions in Control Systems Technology*, **3**, 398-408 p.
- Graves L. 1956. *The theory of functions of real variables*. Ed. Mc Graw Hill.
- Gutman S. 1979. "Uncertain dynamical systems -A Lyapunov Min-Max Approach". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-24**, 437-443 p.
- Haessig D. y Friedland B. 1991. "On the modelling and simulation of friction". *ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control*, **113**(3), 354-362 p.
- Hong Y., Huang J. y Xu Y. 2001. "On an output feedback finite-time stabilization problem". *IEEE Transactions on Automatic Control.*, **46**, 305-309 p.
- Ioffe A. 1983. "New applications of nonsmooth analysis to nonsmooth optimization". *Mathematical Theories of Optimization*, Lecture Notes in Mathematics, 178-201 p.
- Isidori A. y Astolfi A. 1992. "Disturbance attenuation and  $\mathcal{H}_\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems". *IEEE Trans. on Automatic Control*, **37**, 1283-1293 p.
- Jaritz A. y Spong M. 1996. "An experimental comparison of robust control algorithm on a direct drive manipulator". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **4**, 6, 627-640 p.
- Khalil K. 1996. *Nonlinear systems*. Springer, New Jersey, USA.

- Krasnoselskii M.A. y Pokrovskii A.V. 1989. *Systems with hysteresis*. Springer-Verlag: Berlin.
- Krasovskii N.N. 1963. *Problems of the theory of stability of motion*. Moscow: Fizmatgiz 1959 (en ruso); traducción en inglés Stanford University Press: Stanford.
- Krstic M. Kanellakopoulos C. y Kokotovic P. 1995. *Nonlinear and adaptive control design*. Ed. Macmillan Publishing Company.
- Kudriáv'tsev L. 1983. *Curso de análisis matemático*. Mir: Moscú.
- Laski T. y Hsia T. 1991. "On force tracking impedance control for robor manipulators". *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 274-280 p.
- Laub A. y Gahinet P. 1997. "Numerical improvement for solving Riccati equations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42** (9), 1303-1308 p.
- LaSalle J.P. 1960. "Some extensions of Lyapunov's second method". *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-7**, 520-527 p.
- Leonard N. y Krishnaprasad P. 1991. "Comparative study of friction-compensating control strategies for servomechanism". *Technical Research Report TR 91-88*, University of Maryland.
- Levant A. 1993. "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control". *International Journal on Control*, **58**, 1247-1263 p.
- Levant A. 2000. "Variable measurement step in 2-sliding control". *Kybernetika*, 77-93 p.
- Lewis F., Abdallah C. y D. Dawson D. 1993. *Control of robot manipulators*. Ed. Macmillan.
- Mäkelä M. y Neittaanmäki P. 1992. *Nonsmooth optimization: Analysis and algorithms with applications to optimal control*. World Scientific: Singapore.
- Michel A. N. y Wang K. 1995. *Qualitative Theory of Dynamical Systems, the Role of Stability Preserving Mappings*. Marcel Dekker: New York.

- Moreau J.J. y Panagiotopoulos P.D. 1988. *Nonsmooth mechanics and applications*. International Centre for Mechanical Science, Springer-Verlag: New York.
- Nordin M. y Gutman P. 2002. “Controlling mechanical systems with backlash- a survey”. *Automatica*. **38**, 1633-1649 p.
- Olsson H., Astrom K., Canudas-de-Wit C., Gäfvert M. y Lischisky P. 1997. “Friction models and friction compensations”. *European Journal of Control*, **4**, 3, 176-195 p.
- Orlov Y. y Acho L. 2001. “Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$ -control of time-varying systems: A unified distribution-based formalism for continuous and sampled-data measurement feedback design”. *IEEE Transactions Automatic Control*, **46**, 638-643 p.
- Orlov Y., Acho L. y Solis V. 1999. “Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$ -control of time-varying systems”. *Proc. of the 38<sup>th</sup> conference on Decision and control*, Phoenix, Arizona, 3764-3769 p.
- Orlov Y. y Aguilar L. 2002. “Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors”. Sometido a *International Journal on Control*.
- Orlov Y., Alvarez J., Acho L. y Aguilar L. 2001. “Chattering control of Coulomb friction systems”. *Proc. Nonlinear Control System Symposium*, St. Petersburg.
- Orlov Y., Alvarez J., Aguilar L. y Acho L. 2002. “Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control”. Sometido a *International Journal on Control*.
- Ortega R., Loria A., Nicklasson P. y Sira-Ramirez H. 1998. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems*. Springer: London.
- Parcell E. y Varberg D. 1984. *Calculus with analytic geometry*. Ed. Prentice Hall.
- Popov V.M. 1973. *Hyperstability of Control Systems*. Springer Verlag: Berlin.
- Ravi R., Nagpal K. y Khargonekar P. 1991. “ $\mathcal{H}_\infty$  control of linear time-varying systems: A state-space approach”. *SIAM Journal Control and Optimization*, **29**, 1394-1413 p.

- Rockafellar R. 1997. *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics, décima edición, USA.
- Sage H.G., De Mathelin M.F. y Ostertag E. 1999. “Robust control of robot manipulators: a survey”. *International Journal of Control*, **72**, 1498-1522 p.
- Sciavicco L. y Siciliano B. 2000. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Ed. Springer-Verlag: London.
- Tao G. y Kokotovic P.V. 1995. “Adaptive control of systems with unknown output backlash”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, 326-330 p.
- Tao G. y Kokotovic P.V. 1996. *Adaptive control of systems with actuator and sensor nonlinearities*. Wiley: New York.
- Tao G. y Lewis L. 2001. *Adaptive control of nonsmooth dynamics systems*. Springer: London.
- Tomei P. 1995. “Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  disturbance attenuation for robots with flexible joints”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **5**, 365-373 p.
- Tustin A. 1947. “The effects of backlash and speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control system”. *J. Institution of Electrical Engineers*, **94**, 2, 143-151 p.
- Utkin V.I. 1992. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer Verlag: Berlin.
- Utkin V.I., Guldner J. y Shi J. 1999. *Sliding modes in electromechanical systems*. Taylor and Francis: London.
- Van Der Shaft A.J. 1992. “ $\mathcal{L}_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-37**, 770-784 p.
- Vidyasargar M. 1978. *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall.
- Vinter R. 2000. *Optimal control*. Ed. Birkhauser.



- Wang J., Ge S. y Lee T. 2001. “Adaptive friction compensation for servomechanisms”. En G. Tao y F. Lewis (eds.). “Adaptive Control of Nonsmooth Dynamic Systems”, Springer: London.
- Zames G. 1981. “Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses”. *IEEE Transactions Automatic Control*, **AC-26**, 2, pp.301-320 p.
- Zelikin M. y Borisov V. 1994. *Theory of Chattering Control with Applications to Cosmonautics, Robotics, Economics, and Engineering*. Birkhauser: Boston.