

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Doctorado en Ciencias
en Ciencias de la Tierra
con orientación en Geofísica Aplicada**

**Inversión conjunta tridimensional de datos
electromagnéticos aéreos y potenciales**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Adrián Misael León Sánchez

Ensenada, Baja California, México

2019

Tesis defendida por

Adrián Misael León Sánchez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Director de tesis

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Dr. Enrique Gómez Treviño

Dr. Alan Yusen Ley Cooper



Dr. Jonas de Dios De Basabe Delgado
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Adrián Misael León Sánchez © 2019

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis

Resumen de la tesis que presenta Adrián Misael León Sánchez como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Inversión conjunta tridimensional de datos electromagnéticos aéreos y potenciales

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Director de tesis

En muchos escenarios geológicos, la interpretación de múltiples grupos de datos geofísicos a través del uso de la inversión conjunta se ha convertido en una práctica común, sobre todo cuando todos los datos tienen una resolución espacial similar. Esto ha sido particularmente cierto en aplicaciones de inversión conjunta de datos de gravedad y magnetismo, así como en diferentes combinaciones de otros tipos de datos. A pesar de esta creciente popularidad, a la fecha no exista ningún desarrollo de inversión conjunta que asimile datos Electromagnéticos Aéreos (EMA). Mientras que esto puede deberse simplemente a la complejidad de los cálculos involucrados en los problemas directos e inversos, también es posible que la incompatibilidad de su resolución espacial con otros datos tomados de plataformas aéreas (como los datos aeromagnéticos) hayan desalentado el desarrollo de algoritmos de inversión conjunta con datos EMA. Nuestra hipótesis afirma que una fracción de éstos grupos de datos se origina de los mismos cuerpos del subsuelo englobados en una estructura geológica, la cual provee un marco común para estrategias de inversión conjunta. En este trabajo probamos ésta hipótesis a partir de la inversión conjunta bidimensional de los tres tipos de datos, donde demostramos que existe un área del subsuelo cuya estructura es detectada simultáneamente por los tres tipos de datos. Después nos concentramos en explorar la viabilidad de estimar modelos tridimensionales del subsuelo a partir de la inversión conjunta de datos potenciales y EMA. Formulamos el marco teórico de inversión conjunta tridimensional y desarrollamos los algoritmos de modelado directo de los datos EMA y potenciales. Nuestro esquema de inversión conjunta adopta la función de gradientes cruzados como restricción en un algoritmo de gradientes conjugados no lineales. Realizamos experimentos de inversión conjunta en modelos sintéticos tridimensionales usando datos potenciales, donde pudimos evaluar el papel de la similitud estructural en la determinación de estructuras tridimensionales.

Palabras clave: Inversión conjunta, Electromagnéticos aéreos, Aeromagnéticos, Gradientes Cruzados.

Abstract of the thesis presented by Adrián Misael León Sánchez as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

Tridimensional joint inversion of airborne electromagnetic and potential datasets

Abstract approved by:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Thesis Director

In many geological settings, the interpretation of multiple geophysical data sets through joint inversion has become common practice, as long as all datasets share a similar spatial resolution. Particularly, this is true for joint inversion of gravity and magnetic data sets, as well as in different combinations of other types of data. Even though these developments have been gaining popularity, nowadays there is no scheme of joint inversion that integrates airborne electromagnetic (AEM) datasets. Whereas this may be due to the complexity of the calculations in forward and inverse problems, it is also possible that the incompatibility of spatial resolution with other aerial systems (such as aeromagnetic data) have discouraged the implementations of algorithms of joint inversion with AEM data. Our hypothesis poses that a fraction of these datasets originates from the same subsurface bodies enclosed in a geological structure, which provides a common framework for joint inversion strategies. In this work, we test our hypothesis through the two dimensional joint inversion of the three data types, where we demonstrate that there is a subsurface area whose structure is sensed simultaneously by the three data sets. We then explore the possibility of estimating three dimensional models of the subsurface through joint inversion of potential field and AEM data. We formulated the theoretical framework for the three dimensional joint inversion and developed the forward modeling algorithms for the AEM and potential field data. Our inversion scheme adopts the cross-gradient function as a constrain in a non linear conjugate gradient method algorithm. We performed joint inversion experiments on three dimensional synthetic models using potential field data, where we could test the role of the structural resemblance in the determination of three dimensional heterogeneities.

Keywords: Joint inversion, Airborne electromagnetic, Airborne magnetic, Cross Gradients.

Dedicatoria

A mis padres, Daniel Misael León Chávez y María Dolores Sánchez Fuentes, quienes poseen todo mi amor, respeto, admiración y lealtad.

A mis hermanos Claudia y Héctor, Rossana, Paul y Mirla.

A mis sobrinos Sebastián y Esteban. A la memoria de Héctor.

A quien al verme le da frío.

Al resto de mi familia

Agradecimientos

Al **Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE)**, por la formación académica y recursos que me proporcionó.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** por el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado. No. de becario: 254258.

Al **Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado** por haberme dedicado su valioso tiempo y haberme compartido su saber. Su paciencia e inmensurable hambre de conocimiento son dignas de reconocer e imitar.

A los miembros de mi comité de tesis por las acertadas aportaciones y tiempo dedicado.

- Dr. Carlos Francisco Flores Luna
- Dr. Enrique Gómez Treviño
- Dr. Alan Yusen Ley Cooper

A la coordinación del programa de posgrado en ciencias de la tierra, Dr. Juan García Abdeslem y Lic. Ana Rosa Rincón Soto, por su apoyo, recursos y tiempo otorgados.

Al Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado, por permitirme utilizar el servidor *LAMB*

Al personal académico de la División de Ciencias de la Tierra de CICESE por su paciencia y total disposición en la transmisión de conocimiento.

Al personal administrativo y técnico, cuyo arduo trabajo y dedicación son dignos de reconocer.

A mis amigos y compañeros del CICESE por los buenos momentos.

De manera muy especial a Salvador, Paúl y Raúl, por haberme brindado su amistad.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xv

Capítulo 1. Introducción

1.1. Antecedentes	1
1.2. Hipótesis	2
1.3. Objetivo general	3

Capítulo 2. Inversión conjunta bidimensional de datos potenciales y electromagnéticos aéreos

Capítulo 3. Datos electromagnéticos aéreos

3.1. Modelado directo de datos electromagnéticos aéreos	6
3.1.1. Sistema de adquisición de datos EMA TEMPEST	7
3.1.2. Ecuaciones de Maxwell	9
3.1.3. Discretización del modelo	11
3.1.4. Ecuaciones de Maxwell en diferencias finitas	13
3.1.5. Estabilidad	17
3.1.6. Condiciones de frontera	18
3.1.6.1. Fronteras por debajo de la superficie de la tierra	18
3.1.6.2. Interface aire-tierra	18
3.1.7. Condiciones iniciales	20
3.1.7.1. Respuesta al impulso como condición inicial	20
3.1.7.2. Función caja como condición inicial	22
3.1.8. Dispersión numérica y ecuaciones para tiempos tempranos	25
3.1.9. Aproximación de cuarto orden en diferencias finitas	27
3.1.10. Interpolación a un espaciado regular	27
3.1.11. Extrapolación	28
3.1.11.1. Ajuste de mínimos cuadrados de una función exponencial	28
3.1.11.2. Ajuste de mínimos cuadrados de una función logarítmica	30
3.1.12. Convolución con la forma de onda	30
3.1.13. Validación del algoritmo de modelado datos EMA	33
3.1.13.1. Validación del algoritmo utilizando la respuesta al impulso como condición inicial	33
3.1.13.2. Validación del algoritmo utilizando la función caja como condición inicial	34

Tabla de contenido (continuación)

3.1.14. Respuesta del algoritmo propuesto a estructuras geológicas simples	35
3.1.14.1. Respuesta de un medio homogéneo	36
3.1.14.2. Respuesta de un medio de dos capas	36
3.1.14.3. Respuesta de una falla vertical	37
3.2. Cálculo de sensibilidades en inducción electromagnética	41
3.2.1. Cálculo de sensibilidades en el dominio de la frecuencia	41
3.2.2. Transformada de Fourier de series de tiempo no uniformemente espaciadas	45
3.2.3. Cambio de variable realizado para garantizar conductividades positivas	48
3.2.4. Calibración del cálculo de sensibilidades de los datos EMA	49
3.2.4.1. Derivada de los datos con respecto a la conductividad	50
3.2.4.2. Derivada de la función de ajuste de los datos con respecto a la conductividad	51

Capítulo 4. Modelado directo y matriz de sensibilidad de datos potenciales

4.1. Datos magnéticos	56
4.1.1. Modelado directo de datos magnéticos	56
4.1.2. Matriz de sensibilidad de datos magnéticos	58
4.2. Datos de gravedad	59
4.2.1. Modelado directo de datos de gravedad	59
4.2.2. Matriz de sensibilidad de los datos de gravedad	61
4.3. Respuesta magnética y de gravedad de un prisma rectangular	61
4.4. Respuesta magnética y de gravedad de dos prismas rectangulares	63

Capítulo 5. Inversion conjunta tridimensional

5.1. Parametrización del modelo del subsuelo	67
5.2. Función objetivo	68
5.2.1. Ajuste de los datos	69
5.2.2. Regularización	69
5.2.3. Información <i>a priori</i>	70
5.2.4. Gradientes cruzados	71
5.2.5. Función objetivo completa	79
5.3. Solución de la función objetivo a partir del método de gradientes conjugados no lineales	80

Capítulo 6. Resultados

6.1. Evaluación de la función de ajuste de datos, f_A	82
6.2. Evaluación de las funciones del modelo <i>a priori</i> , $\mathbf{f}_a$, y de regularización, $\mathbf{f}_R$	91
6.3. Evaluación del vector de gradientes cruzados	93
6.4. Resultados de la inversión conjunta	96

Tabla de contenido (continuación)

Capítulo 7. Discusiones

7.1. Acerca de la inversión conjunta de datos potenciales restringida por un modelo de conductividad	109
7.2. Acerca del modelado directo de datos electromagnéticos aéreos	109
7.3. Acerca del modelados directos de datos potenciales	110
7.4. Acerca del esquema de gradientes conjugados como metodología de inversión de datos geofísicos	110
7.5. Acerca de la metodología de los gradientes cruzados en la inversión conjunta	111
7.6. Acerca del uso del computo paralelo	111

Capítulo 8. Conclusiones

8.1. Trabajo futuro	114
-------------------------------	-----

Literatura citada	115
------------------------------------	-----

Anexo A	120
--------------------------	-----

Anexo B	143
--------------------------	-----

Anexo C	149
--------------------------	-----

Anexo D	154
--------------------------	-----

Lista de figuras

Figura	Página
1. Principio de operación de los métodos Electromagnéticos Aéreos. Modificada de Nabighian (1991).	7
2. Discretización de un modelo tridimensional de la tierra. El espaciamiento de la rejilla se incrementa lateralmente y verticalmente. Modificada de Wang y Hohmann (1993).	12
3. Rejilla escalonada (Yee, 1966). a) El campo eléctrico es muestreado en el centro de las aristas del prisma, y el campo magnético es muestreado en el centro de las caras de los prismas. b) Interacción entre los circuitos eléctricos y magnéticos. El circuito eléctrico está formado por las componentes que conforman una cara del prisma. El circuito magnético está formado por las cuatro componentes de campo magnético adyacentes, $\overline{\Delta x_i} = (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)/2$ y $\overline{\Delta y_j} = (\Delta z_{k-1} + \Delta z_k)/2$. Modificada de Wang y Hohmann (1993).	13
4. Geometría utilizada para el cálculo de la respuesta al impulso del campo magnético. Tx representa la posición del transmisor, Rx muestra la posición de receptor.	21
5. Vector potencial de una espira donde circula una corriente. El centro de la espira se ubica en el origen del sistema coordenado y tiene su eje en la dirección Oz. Modificada de Grant y West (1965).	23
6. Simulación del encendido y apagado de una fuente electromagnética. . . .	25
7. Geometría básica de la interpolación lineal.	28
8. a) Apariencia real de la forma de onda del transmisor. b) Respuesta medida de la tierra (dB/dt). c) Forma de onda de la corriente del transmisor para datos procesados. d) Respuesta de la tierra (B) para los datos procesados. Modificada de Lane <i>et al.</i> (2000).	32
9. Componente vertical de la respuesta de un semiespacio homogéneo de 0.01 S/m. El transmisor es un dipolo magnético vertical ubicado 90 metros por encima de la superficie del semiespacio. El receptor se encuentra 100 metros por detrás y 55 metros por debajo del transmisor, respectivamente.	34
10. Respuesta de tres algoritmos de modelado directo de datos EMA. El modelo utilizado fue un semiespacio homogéneo de 0.01 S/m.	35
11. a) Medio homogéneo de 0.01 S/m. Los puntos blancos muestran la posición de las estaciones por encima de la superficie del modelo. b) Campo magnético medido en el receptor. E1, E10, E20 y E31 son las etiquetas de las estaciones 1, 10, 20 y 31 respectivamente.	38
12. a) Modelo conformado por un estrato y un basamento infinito. b) Campo magnético medido en el receptor. E1, E10, E20 y E31 son las etiquetas de las estaciones 1, 10, 20 y 31 respectivamente.	39

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
13. a) Modelo que representa una falla vertical. b) Campo magnético medido en el receptor. E1, E10, E20 y E31 son las etiquetas de las estaciones 1, 10, 20 y 31 respectivamente.	40
14. Geometría básica de la metodología de integración semianalítica, utilizada para llevar a cabo la Transformada de Fourier de series de tiempo no uniformemente espaciadas.	46
15. a) Modelo homogéneo de conductividad 0.0100 S/m. b) Modelo homogéneo de conductividad 0.0100 S/m que contiene una perturbación de 0.0101 S/m en su interior. Tx y Rx representan la posición del transmisor y receptor sobre la superficie de la tierra, respectivamente.	50
16. Derivada de los datos con respecto a la conductividad a partir de una derivada analítica (Curvas color rojo) y una derivada numérica (Curvas color azul). a) Parte real de la derivada. b) Parte imaginaria de la derivada.	51
17. a) Función objetivo. b) Derivadas numérica y analítica de la función objetivo; la derivada numérica se calcula a partir de la ecuación (84) y la derivada analítica a partir de la derivada de la ecuación (103).	52
18. Prisma básico de magnetización y densidad uniforme. Los lados del prisma son paralelos a los ejes cartesianos, z_1 corresponde a la profundidad al techo del prisma y z_2 al piso de éste	60
19. Prisma rectangular básico de densidad y magnetización uniforme (cuerpo color guinda). Los puntos negros representan la posición de las estaciones en la superficie del modelo. La escala de color puede ser gr/cm^3 o A/m. . .	62
20. a) Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (Tomada de Fregoso-Becerra, 2010). b) Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (Tomada de Fregoso-Becerra, 2010). c) Respuesta magnética a partir del algoritmo propuesto en este trabajo. d) Respuesta de gravedad a partir del algoritmo propuesto en este trabajo.	62
21. a) Los dos cuerpos tienen un contraste positivo de densidad o magnetización. b) Uno de los cuerpos tiene un contraste positivo y el otro cuerpo un contraste negativo. c) Los dos cuerpos tienen un contraste negativo de densidad y magnetización. Los puntos en la superficie del modelo representan las estaciones de magnetismo y gravedad. La escala de color puede ser gr/cm^3 o A/m.	63

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
22. Respuesta de dos prismas rectangulares con contraste de densidad o magnetización positiva. a) y b) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, reportados por Fregoso-Becerra (2010). c) y d) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, de dos prismas rectangulares calculadas con los modelados propuestos en este trabajo.	64
23. Respuesta de dos prismas rectangulares, uno con contraste positivo y el otro con contraste negativo de densidad o magnetización. a) y b) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, reportados por Fregoso-Becerra (2010). c) y d) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, de dos prismas rectangulares calculadas con los modelados propuestos en este trabajo.	65
24. Respuesta de dos prismas con contraste de densidad o magnetización negativa. a) y b) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, reportados por Fregoso-Becerra (2010). c) y d) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, de dos prismas rectangulares calculadas con los modelados propuestos en este trabajo.	66
25. Parametrización del modelo del subsuelo. La m puede ser conductividad, magnetización o densidad. n_x , n_y y n_z son el número total de celdas en cada una de las 3 direcciones.	68
26. Rejilla utilizada en el cálculo de los gradientes cruzados.	73
27. Algoritmo de gradientes conjugados no lineales.	81
28. Cuerpo de densidad y magnetización uniforme rodeado por un medio homogéneo de densidad y magnetización uniforme. Los puntos negros en la superficie del modelo muestran la posición de las 1024 estaciones de gravedad y magnetismo.	83
29. Mapas de la evolución del proceso de ajuste de datos magnéticos. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y ajuste de datos en la iteración 4 (b), 8 (c), 40 (d), 80 (e) y 153 (f) del proceso de inversión.	84
30. Mapas de la evolución del proceso de ajuste de datos de gravedad. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y ajuste de datos en la iteración 8 (b), 20 (c), 80 (d), 200 (e) y 455 (f) del proceso de inversión.	85

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
31. Mapas de residuales del proceso de inversión individual de datos de magnetismo. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y mapa de residuales de la iteración 4 (b), 8 (c), 40 (d), 80 (e) y 153 (f) del proceso de inversión.	86
32. Mapas de residuales del proceso de inversión individual de datos de gravedad. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y mapa de residuales de la iteración 8 (b), 20 (c), 80 (d), 200 (e) y 455 (f) del proceso de inversión.	87
33. a) Evolución del RMS de los residuales del proceso de inversión de datos magnéticos. b) Evolución del RMS de los residuales del proceso de inversión de datos de gravedad.	88
34. Evolución del modelo de magnetización obtenido de inversión separada de datos magnéticos. Modelo de magnetización en la iteración 2 (a), 4 (b), 8 (c), 40 (d), 80 (e) y 153 (f).	89
35. Evolución del modelo de densidad obtenido de la inversión individual de datos de gravedad. Modelo de densidad en la iteración 2 (a), 8 (b), 20 (c), 80 (d), 200 (e) y 455 (f).	90
36. Modelo inicial del que parte el proceso de inversión (Homogéneo de 5.5) y modelo <i>a priori</i> que se quiere recuperar (Dos estratos de 1.0 y 10.0). La escala de color puede ser cualquier propiedad física de las rocas.	92
37. Repercusiones en los modelos del uso de las funciones f_a y f_R en la función objetivo f . a) Modelo recuperado al usar un $\alpha_R = 0.0$. b) Modelo recuperado al usar un $\alpha_R = 3.33$. c) Modelo recuperado al usar un $\alpha_R = 6.66$. d) Comportamiento de la función objetivo para diferentes α_R	93
38. Modelos usados en el cálculo del vector de gradientes cruzados. a) Modelo obtenido a partir de la ecuación de una esfera. b) Modelo obtenido a partir de la ecuación de un esferoide. c) Sección que muestra las variaciones internas de la esfera. d) Sección que muestra las variaciones internas del esferoide.	94
39. Vector de gradientes cruzados. a) Plano de observación xz. b) Plano de observación yz. c) Plano de observación xy. d) Perspectiva general del vector de gradientes cruzados.	95

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
40. Evolución del ajuste de los datos magnéticos del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y ajuste de datos magnéticos en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.	97
41. Mapas de residuales de la evolución de ajuste de datos magnéticos del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y mapa de residuales en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.	98
42. Evolución del modelo de magnetización obtenido a partir de la inversión conjunta. Modelo de magnetización en la iteración 4 (a), 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e) y 1753 (f) del proceso de inversión.	99
43. Evolución del ajuste de los datos de gravedad del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y ajuste de datos de gravedad en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.	100
44. Mapas de residuales de la evolución de ajuste de datos de gravedad del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y mapa de residuales en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e) y 1753 (f) del proceso de inversión.	101
45. Evolución del modelo de densidad obtenido a partir de la inversión conjunta. Modelo de densidad en la iteración 4 (a), 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.	102
46. a) Evolución del RMS de los datos magnéticos y de gravedad del proceso de inversión conjunta. c) Comportamiento total y de cada una de las partes que fueron tomadas en cuenta en la función objetivo para el proceso de inversión conjunta.	103
47. a) Modelo de magnetización resultante de la inversión individual. b) Modelo de magnetización resultante de la inversión conjunta.	104
48. a) Modelo de densidad resultante de la inversión individual. b) Modelo de densidad resultante de la inversión conjunta.	105

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
49. Magnitud del vector de gradientes cruzados de los modelos de densidad y magnetización obtenidos a partir del proceso de inversión individual de datos de gravedad y magnetismo. a) Perspectiva general. b) Plano de visualización xy . c) Plano de visualización xz . d) Plano de visualización yz . .	106
50. Magnitud del vector de gradientes cruzados de los modelos de densidad y magnetización obtenidos a partir del proceso de inversión conjunta de datos de gravedad y magnetismo. a) Perspectiva general. b) Plano de visualización xy . c) Plano de visualización xz . d) Plano de visualización yz . .	107
51. a) Cross-plot resultante de la inversión individual de datos magnéticos y de gravedad. b) Cross-plot resultante de la inversión conjunta de datos magnéticos y de gravedad.	108
52. Gráfica de la forma cuadrática $f(\mathbf{x})$ correspondiente a un paraboloides elíptico. El punto mínimo de esta superficie es la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tomada de Calderón Magallón (2015).	155
53. Superficies de nivel del paraboloides elíptico $f(\mathbf{x})$. Cada curva elipsoidal tiene una $f(\mathbf{x})$ constante y el punto en el origen es la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tomada de Calderón Magallón (2015).	156
54. El gradiente de f' es representado en algunas localidades a lo largo de la línea de búsqueda (flechas sólidas). Cada proyección del gradiente en la línea también se muestra (flechas punteadas). Los vectores de gradiente representan la dirección del incremento máximo de f' , y las proyecciones representan la velocidad de una línea de búsqueda transversa. En la búsqueda de línea, f es minimizada donde el gradiente es ortogonal a la línea de búsqueda. Tomada de Shewchuck (1994)	157
55. Vectores <i>A-ortogonales</i>	161
56. En el método de los gradientes conjugados, cada nuevo residual es ortogonal a todos los residuales previos y direcciones de búsqueda; cada nueva dirección de búsqueda es construida (del residual) para ser <i>A-ortogonal</i> a todos los previos residuales y direcciones de búsqueda. Los puntos finales de r_2 y d_2 están en un plano paralelo a D_2 (el subespacio sombreado). En gradientes conjugados, d_2 es una combinación lineal de r_2 y d_1 . Tomado de Shewchuck (1994).	165
57. Condición de decrecimiento suficiente. Modificada de Nocedal y Wright (2006).	171
58. Condición de curvatura. Modificada de Nocedal y Wright (2006).	171
59. Longitud de paso que satisface las condiciones de Wolfe. Modificada de Nocedal y Wright (2006).	172

Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Características principales del sistema TEMPEST. Tomada de Lane <i>et al.</i> (2000).	8
2.	Ventanas de tiempo del sistema TEMPEST	9
3.	Función objetivo y su derivada analítica y numérica	52
4.	RMS de la diferencia entre las versiones analítica y discreta del vector de gradientes cruzados. Calculado a partir de 1,000,000 muestras.	96

Capítulo 1. Introducción

1.1. Antecedentes

La exploración eficiente de áreas inaccesibles demanda el uso de plataformas de sensibilidad remota, dentro de las cuales los levantamientos aéreos de datos geofísicos han jugado un papel importante por mucho tiempo. Levantamientos aéreos con sensores de gravedad, magnéticos y electromagnéticos, en particular, nos permiten cubrir grandes y remotas extensiones de terreno con suficiente profundidad y resolución espacial a un costo mínimo (Reeves *et al.*, 1997). Además, una mayor eficiencia se obtiene al equipar las aeronaves con sistemas multiplataforma (Wilson *et al.*, 2011; Fraser *et al.*, 2012; Dransfield, 2011), lo que resulta en una abundancia de datos Electromagnéticos Aéreos (EMA), Aeromagnéticos (AM) y de gravedad. Dado que la mayoría de éstos tipos de datos están disponibles y cada uno de ellos entrega información de una propiedad física específica a diferente profundidad de investigación, parece natural que su interpretación combinada debería llevar a una mejor identificación de regiones con mayor potencial para la exploración.

Una técnica que ha dado resultados exitosos en la inversión conjunta de datos geofísicos, independientemente de nuestro conocimiento de las leyes de correspondencia entre las propiedades estudiadas, es la inversión conjunta usando gradientes cruzados desarrollada por Gallardo y Meju (2003). La inversión conjunta usando gradientes cruzados intenta encontrar modelos del subsuelo que reflejen similitud estructural (Gallardo y Meju, 2003, 2004). Mientras que esta aproximación se ha aplicado para varias combinaciones de datos (Gallardo, 2007; Gallardo y Meju, 2004, 2007; Moorkamp *et al.*, 2011; Doetsch *et al.*, 2010; Gallardo *et al.*, 2012), ninguna de ellas ha considerado la inclusión de datos electromagnéticos aéreos.

Parte esencial de los gradientes cruzados es la búsqueda de modelos del subsuelo con similitudes estructurales, impulsada por la suposición de que cualquier representación geofísica del subsuelo coincide con la misma estructura geológica evidenciada por los datos geofísicos (Gallardo y Meju, 2011; Haber y Gazit, 2013) y, por lo tanto, parece implícito que las grandes mejoras en la resolución de los modelos ocurre cuando todos los datos geofísicos alcanzan resolución espacial comparable. Ésta hipótesis ha sido extensamente probada con datos potenciales aéreos (Gallardo *et al.*, 2012;

Gallardo y Thebaud, 2012; Gessner *et al.*, 2016; León-Sánchez y Gallardo, 2015; Solon *et al.*, 2014). Para todas éstas aplicaciones, modelos de datos potenciales alcanzan profundidades máximas que varían de los 5 a los 15 kilómetros, lo cual puede ser considerado demasiado profundo para propósitos de exploración minera, así como para la correlación de dichos datos con datos EMA. Igualmente, las hipótesis de regularización implícitas y que son necesarias para llevar a cabo la inversión conjunta o separada de datos de gravedad y aeromagnéticos no les permite definir estructuras someras con el detalle suficiente para aplicaciones mineras o ambientales.

Es de nuestro conocimiento que el único trabajo que ha intentado llevar a cabo una inversión conjunta de datos EMA y potenciales es el realizado por León-Sánchez *et al.* (2016); León-Sánchez *et al.* (2018), ver Anexo A. En general, sus resultados confirman que la inversión conjunta usando gradientes cruzados de datos EMA y potenciales conlleva una mejor deducción de las heterogeneidades en el subsuelo debido a que se aprovechan las sensibilidades de todos los datos involucrados, por lo que, es una técnica que promete buenos resultados en la interpretación de datos geofísicos aéreos.

En éste trabajo se retoma lo propuesto por León-Sánchez *et al.* (2016); León-Sánchez *et al.* (2018) y se extiende a una versión tridimensional del problema. Para lograr lo anterior, es necesario contar con algoritmos que sean capaces de simular la adquisición tridimensional de datos EMA y potenciales.

1.2. Hipótesis

Consideramos que los datos potenciales son sensibles a estructuras corticales profundas, sin embargo, ellos también conllevan información de estructuras someras (menos de 600 metros de profundidad), y son así también sensibles a estructuras que comúnmente son identificadas con sondeos EMA. Por lo que, nosotros planteamos que los datos EMA pueden proveer la resolución necesaria a los modelos de densidad y magnetización, sobre todo en la parte más somera de los modelos y evitar su propagación a profundidad. Similarmente, también esperamos que las grandes estructuras identificadas por datos potenciales puedan ser útiles para extender las estructuras resistivas lateralmente y a profundidad, de tal forma que las grandes zonas tectónicas puedan definirse adecuadamente haciendo uso de todas las propiedades físicas disponibles.

Nuestra hipótesis establece que las técnicas de adquisición de datos EMA y Potenciales son compatibles y pueden ser relacionadas a través de la técnica de inversión de los gradientes cruzados, por lo que, pueden ser usadas para la generación de modelos bidimensionales y tridimensionales del subsuelo de las tres propiedades físicas combinadas, y de esta manera poder establecer la distribución espacial de las estructuras geológicas.

1.3. Objetivo general

Formular un marco teórico y desarrollar un algoritmo de inversión conjunta tridimensional a partir de la técnica de gradientes cruzados haciendo uso de datos EMA y Potenciales. De esta manera podremos demostrar que la inversión conjunta de datos EMA y potenciales ofrece una mejor resolución espacial de estructuras geológicas tanto superficiales como profundas, lo cual permitiría caracterizar mejor los diferentes tipos de materiales geológicos del subsuelo. Para lograr ésto se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Realizar experimentos de inversión conjunta multidimensional de datos de gravedad, AM y EMA en terrenos geológicos complejos.
2. Desarrollar algoritmos de inversión tridimensional de datos de gravedad, AM y EMA.
3. Plantear y desarrollar esquemas de inversión conjunta tridimensional usando la restricción de los gradientes cruzados con combinaciones de estos tipos de datos.
4. Probar los algoritmos desarrollados en modelos sintéticos controlados.
5. Realizar experimentos de inversión conjunta tridimensional de los datos seleccionados.

Capítulo 2. Inversión conjunta bidimensional de datos potenciales y electromagnéticos aéreos

En este capítulo, exponemos de manera breve tres experimentos que nos permitieron darle respuesta a la hipótesis planteada en éste trabajo. Nuestros resultados probaron ser lo suficientemente buenos y fueron aceptados para ser expuestos en un congreso internacional (León-Sánchez *et al.*, 2016) y publicados en una revista de circulación internacional (León-Sánchez *et al.*, 2018). Para mayor información sobre dicho desarrollo ver los documentos completos en el Anexo A.

Como se mencionó anteriormente, llevamos a cabo un estudio sistemático de inversión conjunta bidimensional que engloba datos de gravedad, magnéticos y EMA adquiridos en la Orogenia Capricorn en Australia Occidental, la cual es un área poco explorada y que se considera como una potencial fuente de yacimientos minerales (Johnson *et al.*, 2013). Esto debido a que se encuentra precisamente en una zona de colisión de los cratones Yilgarn y Pibara, lugar donde se han registrado emplazamientos de intrusiones plutónicas, metamorfismos medios a altos y la evolución de cuencas sedimentarias (Cawood y Tyler, 2004). Los depósitos minerales de mayor importancia comprenden metales preciosos y metales base, tales como uranio, manganeso y hierro (Tyler *et al.*, 1998; Pirajno, 2004).

Para poder llevar a cabo nuestros experimentos, seleccionamos un segmento de una línea de vuelo de 10 km de datos EMA (Australian Geoscience Information Network, 2019), la cual: i) es coincidente con una sección sísmica, ii) tiene abundante heterogeneidad en su conductividad eléctrica y iii) muestra variedad en sus respuestas magnéticas y de gravedad.

En primer lugar generamos modelos del subsuelo a partir de la inversión individual de cada tipo de datos, esto con el objetivo de evaluar la resolución espacial de cada metodología. En segundo lugar, llevamos a cabo una inversión conjunta, restringida con los gradientes cruzados, usando solamente datos de gravedad y magnetismo. Finalmente, adaptamos la inversión conjunta estructural para incluir el modelo de resistividad de datos EMA como una restricción. También llevamos a cabo una estadística básica de los modelos obtenidos, donde observamos que en general todos los procesos de inversión que realizamos, tienen el mismo arreglo estructural, lo cual significa

que todas las estructuras vistas en los modelos realmente son detectadas por los tres tipos de datos.

La interpretación de los modelos obtenidos se hizo a partir de las llamadas imágenes geoespectrales (Gallardo, 2007) y de las firmas geoespectrales. Dichas imágenes facilitan la visualización de la distribución espacial de la combinación de las propiedades físicas del subsuelo, mientras que las firmas geoespectrales facilitan el análisis de los grupos de combinaciones de propiedades físicas y sus correlaciones.

Con este estudio demostramos que hay un área del subsuelo que es sensible por las tres metodologías. Concluimos que los datos magnéticos y de gravedad resuelven las estructuras profundas, mientras que las estructuras someras fueron más sensibles a los datos EMA. Sin embargo, los datos EMA también ayudan a mejorar la resolución de estructuras más profundas al suprimir tendencias poco realistas que son comunes en los modelos que se obtienen de la inversión conjunta de datos magnéticos y de gravedad; los cuales comúnmente se muestran como transiciones muy suaves y monótonas entre las estructuras someras y las más profundas.

Esto nos ayudó a generar una interpretación coherente de las estructuras someras y profundas de la sección estudiada, la cual pudimos validar al comprar nuestros resultados con una sección sísmica cercana.

Sin embargo, nuestros resultados también resaltan la necesidad de incluir dentro del esquema de inversión conjunta la función de ajuste de los datos EMA, ésto con el objetivo de evidenciar las tendencias generales que se forman por el acoplamiento de todos los grupos de datos.

Es de nuestro conocimiento que este desarrollo es el único trabajo que ha intentado llevar a cabo una inversión conjunta de datos EMA y potenciales.

Capítulo 3. Datos electromagnéticos aéreos

Una ventaja importante de la prospección electromagnética, es que la toma de datos puede llevarse a cabo desde el aire. Esto ha permitido el desarrollo de una gran variedad de sistemas aéreos de adquisición de datos EMA. Originalmente, los levantamientos EMA se llevaban a cabo con pequeñas aeronaves de ala fija. Ahora los sistemas se han modificado para ser transportados en helicóptero, el cual es más apropiado para trabajos a detalle, terrenos más abruptos y con vuelos más cercanos a la superficie de la Tierra.

El objetivo de dichos levantamientos es determinar la distribución de la conductividad eléctrica en la tierra, parametrizada por un grupo finito de elementos homogéneos de conductividad a través de la inversión de los datos observados en campo.

En éste capítulo se presentan las metodologías con las que desarrollamos nuestro algoritmo de modelado directo de datos electromagnéticos aéreos, así como la manera en la que será calculada la matriz de sensibilidad utilizada en nuestra metodología de inversión.

3.1. Modelado directo de datos electromagnéticos aéreos

Nuestro modelado directo de datos electromagnéticos aéreos está basado en el modelado propuesto por Wang y Hohmann (1993), el cual es una solución tridimensional en diferencias finitas para problemas electromagnéticos transitorios. Dicha solución resuelve las ecuaciones de Maxwell en pasos de tiempo usando la técnica de la rejilla escalonada de Yee (1966). El paso en el tiempo usa una versión modificada del método de Du Fort y Frankel (1953) para discretizar las ecuaciones de Maxwell del caso cuasiestático. Dicha metodología garantiza que el paso de tiempo sea siempre explícito y estable. La solución propuesta provee las respuestas a los campos eléctricos y magnéticos en la tierra, además, tanto la conductividad como la permeabilidad magnética pueden ser funciones del espacio y la geometría de las estructuras terrestres puede ser bastante complicada.

En las siguientes secciones se presenta la formulación tridimensional de diferencias finitas en el dominio del tiempo, se describen también las condiciones de frontera y la forma de iniciar la propagación de los campos eléctricos y magnéticos en el tiempo.

Cabe mencionar que la simulación de la adquisición de datos EMA se llevó a cabo considerando el sistema de adquisición TEMPEST (Lane *et al.*, 2000).

3.1.1. Sistema de adquisición de datos EMA TEMPEST

El sistema TEMPEST está configurado con una bobina transmisora localizada en una aeronave de ala fija y tres bobinas receptoras remolcadas, las cuales pueden medir las componentes, x , y y z del campo magnético (Figura 1). El sistema de operación consiste de una fuente artificial que crea un campo magnético primario variante en el tiempo el cual causa que corrientes fluyan en conductores localizados en el subsuelo. Un campo electromagnético secundario es generado por dichas corrientes y la fuerza electromotriz debida a ese campo puede ser medida usando bobinas receptoras (Nabighian, 1991). Las especificaciones más importantes del sistema TEMPEST se muestran en la Tabla 1.

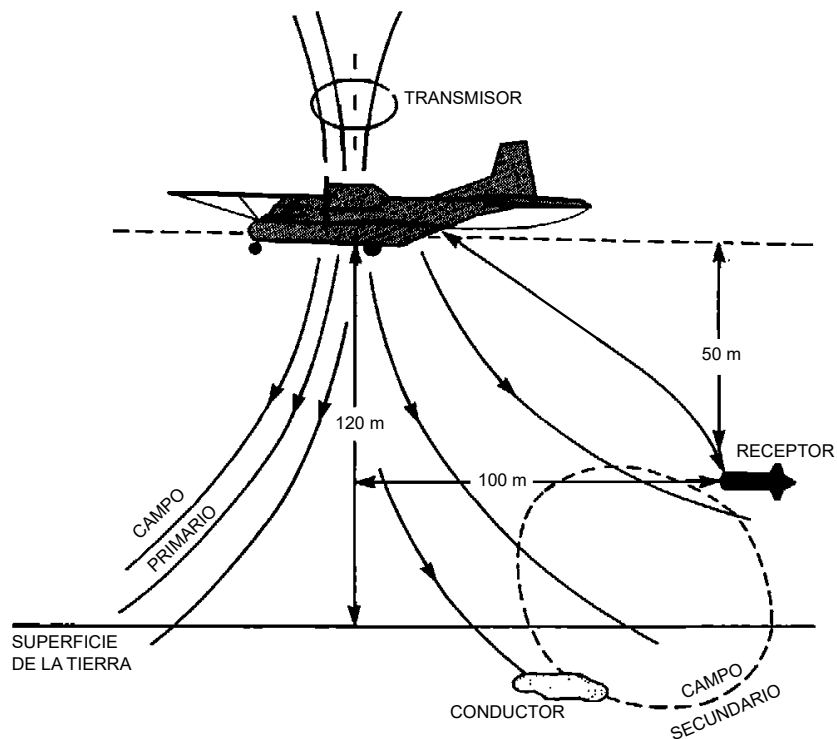


Figura 1. Principio de operación de los métodos Electromagnéticos Aéreos. Modificada de Nabighian (1991).

Tabla 1. Características principales del sistema TEMPEST. Tomada de Lane *et al.* (2000).

Frecuencia base en Norte América	25 Hz, con el fin de reducir las corrientes de transmisión de 50 Hz
Frecuencia base en Australia	30 Hz, con el fin de reducir las corrientes de transmisión de 60 Hz
Área de la bobina transmisora	186 m ²
Vueltas de la bobina transmisora	1
Forma de onda	Cuadrada (Bipolaridad)
Ciclo de trabajo	50 % (tiempo de encendido y apagado idéntico)
Tiempo de pulso encendido	10 ms
Tiempo de pulso apagado	10 ms
Corriente pico	300 A
Momento pico	55,800 Am ²
Momento promedio	27,900 Am ²
Razón de muestreo del receptor	75 kHz
Intervalo de muestreo del receptor	13 microsegundos
Muestras por medio ciclo de muestreo	1500
Banda ancha del sistema	25 Hz a 37.5 kHz
Altura de vuelo	120 m (nominal, sujeta a consideraciones de seguridad)
Sensor electromagnético	Remolcado con 3 bobinas perpendiculares dB/dt
Separación horizontal del transmisor-receptor	100 m (nominal)
Separación vertical del transmisor-receptor	50 m (nominal)
Intervalo de salida de los datos apilados	200 ms (nominal)
Número de ventanas de salida	15
Tiempos centrales de las ventanas	13 μ s a 16.2 ms
Razón del ciclo GPS	1 s

El producto final de un estudio EMA usando el sistema TEMPEST es una curva de decaimiento con 15 datos para las componentes x y z del campo magnético, los cuales son el resultado de promediar el campo magnético usando ciertos intervalos de tiempo. En la Tabla 2 se muestran las características principales de las ventanas de tiempo usadas en el sistema TEMPEST. Cabe señalar que en este trabajo solamente utilizaremos la componte z del campo magnético.

Tabla 2. Ventanas de tiempo del sistema TEMPEST

Ventana	Número de muestras	Tiempo inicial [s]	Tiempo final [s]	Tiempo central [s]
1	2	0.000007	0.000020	0.000013
2	2	0.000033	0.000047	0.000040
3	2	0.000060	0.000073	0.000067
4	4	0.000087	0.000127	0.000107
5	6	0.000140	0.000207	0.000173
6	10	0.000220	0.000340	0.000280
7	16	0.000353	0.000553	0.000453
8	24	0.000567	0.000873	0.000720
9	36	0.000887	0.001353	0.001120
10	56	0.001367	0.002100	0.001733
11	88	0.002113	0.003273	0.002693
12	138	0.003287	0.005113	0.004200
13	216	0.005127	0.007993	0.006560
14	330	0.008007	0.012393	0.010200
15	570	0.012407	0.019993	0.016200

3.1.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell que describen los campos transitorios electromagnéticos bajo la aproximación cuasiestática en medios lineales, isotrópicos y libres de fuente están dadas por las expresiones

$$-\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (4)$$

con

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{h}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

Donde $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ son la inducción magnética, el campo magnético y el campo eléctrico, respectivamente; $\sigma(\mathbf{r})$ y $\mu(\mathbf{r})$ son la conductividad y la permeabilidad magnética de la Tierra; y $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ es la densidad de corriente.

La ecuación (3) implica que sólo dos de tres componentes de $\mathbf{b}$ son independientes de cada uno; cada uno de ellos puede ser calculado a partir de los otros dos. Ésto sugiere una manera de incorporar dicha ecuación calculando dos componentes de $\mathbf{b}$ de la ecuación (1) y las otras componentes de la (3), esto es,

$$-\frac{\partial b_x}{\partial t} = \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} \quad (7)$$

$$-\frac{\partial b_y}{\partial t} = \frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial z} = -\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} \quad (9)$$

Las ecuaciones de Maxwell implican las siguientes condiciones de continuidad a lo largo de las fronteras de las propiedades de los materiales:

1. continuidad de los campos tangenciales eléctricos y magnéticos,
2. continuidad de las componentes normales de la corriente total y flujo magnético.

Éstas condiciones son usadas en la siguiente sección para definir campos continuos en una rejilla escalonada.

También, para que la solución sea única, a las ecuaciones (2), (5), (6) y (7) a la (9) se les agregan condiciones de frontera en el dominio. Las siguientes condiciones son suficientes para dar una solución única: las componentes tangenciales de los campos **e** y **b** definidas en la frontera, o las componentes tangenciales de **e** definidas en parte de la frontera y las componentes tangenciales de **b** en lo que resta de la frontera. Como condiciones de frontera, nosotros usamos las componentes tangenciales de **e** en todas las fronteras por debajo de la superficie de la Tierra y las componentes tangenciales de **b** en la superficie de la Tierra.

3.1.3. Discretización del modelo

El modelo de la Tierra es discretizado en prismas como se muestra en la Figura 2. Un sistema cartesiano definido con eje z positivo hacia abajo. El origen de coordenadas es localizado en la esquina superior izquierda de la rejilla. Los índices i , j y k se usan para numerar las posiciones de la rejilla en las direcciones x , y y z , respectivamente. La conductividad y permeabilidad magnética se suponen constantes en cada prisma. El espaciado de la rejilla es mas pequeño en el centro de la rejilla y se incrementa gradualmente en las orillas.

Una rejilla escalonada (Yee, 1966) es usada para definir los campos eléctricos y magnéticos, como se muestra en la Figura 3a. Las componentes del campo eléctrico se localizan en el centro de las aristas de los prismas, mientras que las componentes del campo magnético se localizan en el centro de las caras de los prismas. Una importante consecuencia de esto es que al colocar apropiadamente las distribuciones de conductividad y permeabilidad magnética, todos los campos son continuos.

La rejilla escalonada está compuesta por dos circuitos, uno eléctrico y otro magnético. El circuito eléctrico esta formado por las cuatro componentes de **e** que unen la misma cara de un prisma, mientras que el circuito magnético está compuesto por las cuatro componentes de **b** adyacentes. Un ejemplo se muestra en la Figura 3b. Éste concepto de los circuitos elementales es muy útil en la discretización de las ecuaciones de Maxwell.

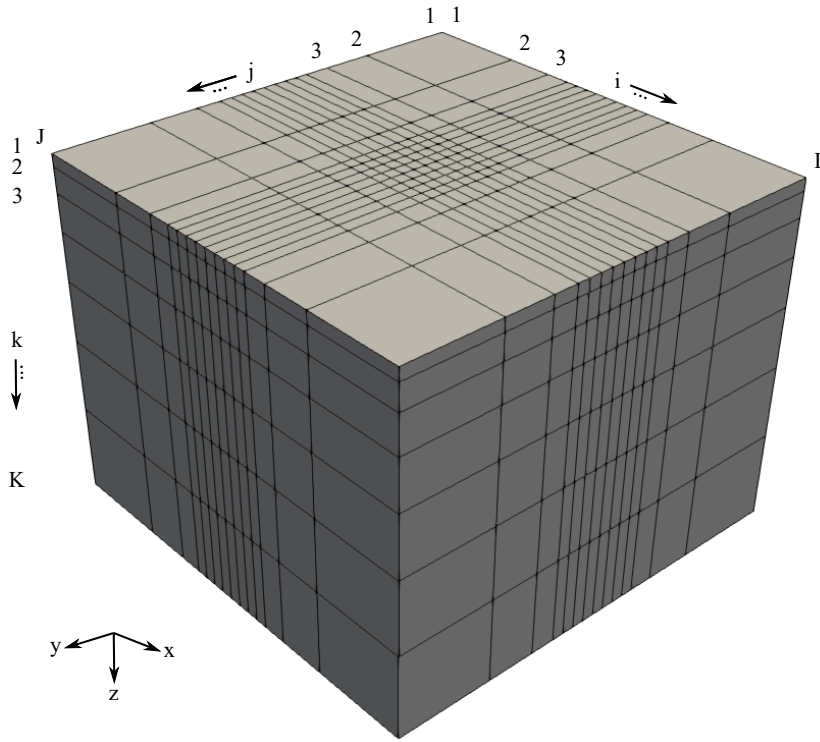


Figura 2. Discretización de un modelo tridimensional de la tierra. El espaciamiento de la rejilla se incrementa lateralmente y verticalmente. Modificada de Wang y Hohmann (1993).

La solución utilizada en esta tesis (Wang y Hohmann, 1993) utiliza una versión modificada del método Du Fort-Frankel para calcular los pasos en el tiempo (Du Fort y Frankel, 1953). Dicho método es explícito y estable cuando se aplica a la ecuación de difusión. La esencia del método es introducir implícitamente un termino hiperbólico en la ecuación parabólica. Ésto es necesario para garantizar la estabilidad del operador. Para aplicar el método Du Fort-Frankel al sistema de primer orden, se modifica la ecuación (2), obteniendo:

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t). \quad (10)$$

Donde γ es un coeficiente que se definirá más adelante. El primer término a la izquierda de la ecuación asemeja una corriente de desplazamiento, sin embargo, ésta es puramente artificial. Al definir apropiadamente γ , se puede definir una solución explícita, y siempre estable de pasos en el tiempo.

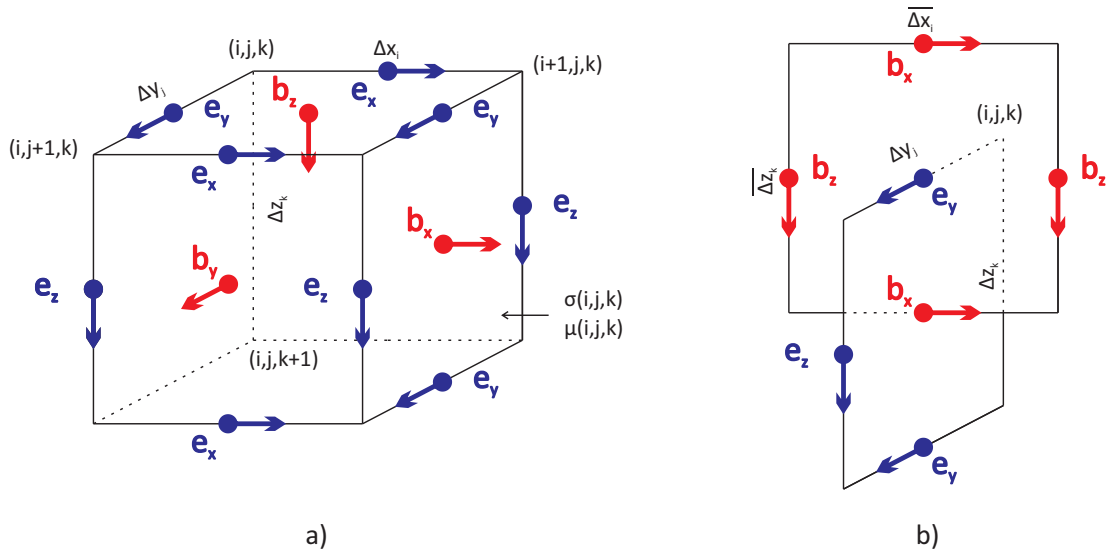


Figura 3. Rejilla escalonada (Yee, 1966). a) El campo eléctrico es muestreado en el centro de las aristas del prisma, y el campo magnético es muestreado en el centro de las caras de los prismas. b) Interacción entre los circuitos eléctricos y magnéticos. El circuito eléctrico está formado por las componentes que conforman una cara del prisma. El circuito magnético está formado por las cuatro componentes de campo magnético adyacentes, $\overline{\Delta x_i} = (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)/2$ y $\overline{\Delta y_j} = (\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)/2$. Modificada de Wang y Hohmann (1993).

La solución usa los índices $0, 1, 2, \dots, n-1, n, \dots$ para representar instantes en el tiempo $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$, con $t_n = t_{n-1} + \Delta t_{n-1}$. Siguiendo el esquema de tiempo de Yee (1966), definimos el campo eléctrico en índices enteros de tiempo y el campo magnético en índices intermedios de tiempo. Llevamos a cabo los pasos de tiempo usando la técnica del salto de rana; ésto es, dado un campo $\mathbf{e}$ en $t \leq t_n$ y $\mathbf{b}$ en $t \leq t_n + \Delta t_n/2$, extrapolamos $\mathbf{e}$ en $t = t_{n+1}$ usando la ecuación (2); entonces con $\mathbf{b}$ en $t \leq t_n + \Delta t_n/2$ y $\mathbf{e}$ en $t \leq t_{n+1}$, extrapolamos $\mathbf{b}$ en $t = t_{n+1} + \Delta t_{n+1}/2$ usando la ecuación (1), y así sucesivamente.

3.1.4. Ecuaciones de Maxwell en diferencias finitas

La ecuación (10) se puede descomponer en componentes de la siguiente manera

$$\gamma \frac{\partial e_x}{\partial t} + \sigma e_x = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\gamma \frac{\partial e_y}{\partial t} + \sigma e_y = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}, \quad (12)$$

y

$$\gamma \frac{\partial e_z}{\partial t} + \sigma e_z = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (13)$$

Primero discretizamos las ecuaciones (7) y (12) como representativas del sistema de paso en el tiempo. Después se discute una aproximación en diferencias de la ecuación (9), seguida de la evaluación numérica de la ecuación (5) usando la rejilla escalonada. La notación $b_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2)$ se usa para representar un campo magnético en la dirección x ubicado en el nodo $(i, j + 1/2, k + 1/2)$ y al tiempo $t_n + \Delta t_n/2$. Notaciones similares son usadas para las otras componentes de los campos. Aplicando la forma integral de la ecuación (7)

$$-\int \int \frac{\partial b_x}{\partial t} = \oint (\mathbf{e} \times \mathbf{u}_x) \cdot d\mathbf{l},$$

donde $\mathbf{u}_x$ es un vector unitario en la dirección x y $\mathbf{l}$ se encuentra en el plano yz del circuito eléctrico de la Figura 3b. Aproximando $\partial b_x / \partial t$ en un tiempo n usando diferencias finitas centradas se tiene que

$$\left(\frac{\partial b_x}{\partial t} \right)^n \approx \frac{b_x^{n+1/2} - b_x^{n-1/2}}{\frac{\Delta t_{n-1} + \Delta t_n}{2}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} b_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) = & b_x^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - \frac{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n+1}}{2} \\ & \times \left[\frac{e_z^n(i, j + 1, k + 1/2) - e_z^n(i, j, k + 1/2)}{\Delta y_j} \right. \\ & \left. - \frac{e_y^n(i, j + 1/2, k + 1) - e_y^n(i, j + 1/2, k)}{\Delta z_k} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Para obtener la ecuación (14), suponemos que b_x es constante a través del área completa del circuito eléctrico, y que e_y y e_z son constantes a lo largo de las aristas y y z del circuito, respectivamente. Una ecuación similar se puede obtener para la

ecuación (8).

De manera similar, al aplicar la forma integral de la ecuación (12) al circuito magnético de la Figura 3b, una aproximación de $\partial e_y / \partial t$ al tiempo $n + 1/2$ usando diferencias finitas centradas tenemos

$$\left(\frac{\partial e_y}{\partial t} \right)^{n+1/2} \approx \frac{e_y^{n+1} - e_y^n}{\Delta t_n},$$

y $e_y^{n+1/2}$ por el promedio de e_y^n y e_y^{n+1}

$$e_y^{n+1/2} \approx \frac{e_y^n + e_y^{n+1}}{2},$$

esto nos lleva a la ecuación en diferencias finitas para extrapolar e_y

$$\begin{aligned} e_y^{n+1}(i, j + 1/2, k) &= \frac{2\gamma - \Delta t_n \sigma(i, j + 1/2, k)}{2\gamma + \Delta t_n \sigma(i, j + 1/2, k)} e_y^n(i, j + 1/2, k) \\ &\times \frac{2\Delta t_n}{2\gamma + \Delta t_n \sigma(i, j + 1/2, k)} \\ &\times \left[\frac{h_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - h_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k - 1/2)}{\overline{\Delta z_k}} \right. \\ &\left. - \frac{h_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) - h_z^{n+1/2}(i - 1/2, j + 1/2, k)}{\overline{\Delta x_i}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

con

$$\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2},$$

$$\overline{\Delta z_k} = \frac{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}{2}.$$

En las ecuaciones arriba mencionadas, $\sigma(i, j + 1/2, k)$ es la conductividad promedio de los cuatro prismas conectados por el circuito magnético

$$\sigma(i, j + 1/2, k) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sigma(i - p, j, k - q) w(i - p, j, k - q),$$

donde w es una función de peso evaluada como la razón que existe entre el área de un prisma particular cortado por el circuito magnético y el área total del circuito. Al derivar la ecuación (15), suponemos que e_y y su derivada en el tiempo son constantes a través de toda el área de circuito magnético, y que b_x y b_z son constantes en las aristas del circuito en el que se encuentran. Las ecuaciones en diferencias finitas de (11) y (13) se obtienen de manera similar.

La aproximación de la ecuación (9) es sencilla. Hay que notar que la divergencia de $\mathbf{b}$ se puede aproximar en el centro de un prisma usando las seis componentes que se encuentran en las caras del prisma. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{b_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k + 1) - b_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k)}{\Delta z_k} \\ &= \frac{b_x^{n+1/2}(i + 1, j + 1/2, k + 1/2) - b_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2)}{\Delta x_i} \\ & - \frac{b_y^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1, k + 1/2) - b_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2)}{\Delta y_j}. \end{aligned}$$

Despejando se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} & b_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) \\ &= b_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k + 1) \\ &+ \Delta z_k \left[\frac{b_x^{n+1/2}(i + 1, j + 1/2, k + 1/2) - b_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2)}{\Delta x_i} \right] \\ &+ \Delta z_k \left[\frac{b_y^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1, k + 1/2) - b_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2)}{\Delta y_j} \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Para resolver la ecuación anterior se inicia desde las celdas más profundas del modelo donde $b_z = 0$ y se calcula b_z hacia arriba.

Finalmente, el campo magnético, **h**, aquí se usa como variable intermediaria, se puede calcular a partir de **b** usando permeabilidades magnéticas promedio. Por ejemplo,

$$h_x(i, j + 1/2, k + 1/2) = \frac{b_x(i, j + 1/2, k + 1/2)}{\mu(i, j + 1/2, k + 1/2)}, \quad (17)$$

donde

$$\mu(i, j + 1/2, k + 1/2) = \frac{\Delta x_{i-1} \mu(i - 1, j, k) - \Delta x_i \mu(i, j, k)}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}$$

Las ecuaciones (14) a (17) tienen un segundo orden de exactitud en espacio y tiempo. Cada variable de los campos es guardada solamente en cada tiempo.

3.1.5. Estabilidad

Las ecuaciones (14) a (17) son explícitas y estables si

$$\gamma \geq \frac{3}{\mu_{min}} \left[\frac{\Delta t_n}{\Delta_{min}} \right]^2, \quad (18)$$

donde Δ_{min} es espaciamiento mínimo de la rejilla, y μ_{min} es el valor mínimo de permeabilidad magnética.

El término artificial en la ecuación (10) actúa como una corriente de desplazamiento. Para prevenir que la corriente de desplazamiento ficticia domine el campo electromagnético de difusión, es necesario limitar la longitud del paso de tiempo. Según Adhidjaja y Hohmann (1989) y Oristaglio y Hohmann (1984) el campo mantiene su naturaleza difusiva si

$$\Delta t \ll \left[\frac{\mu_{min} \sigma t}{6} \right]^{1/2} \Delta_{min}, \quad (19)$$

donde σ es la conductividad mínima en el modelo. En la práctica, uno puede usar el paso en el tiempo

$$\Delta t_{max} = \alpha \left[\frac{\mu_{min} \sigma t}{6} \right]^{1/2} \Delta_{min}, \quad (20)$$

donde α varía entre 0.1 y 0.2, dependiendo en la exactitud requerida. Hay que notar que el paso en el tiempo dado en la ecuación (20) se incrementa al incrementar el tiempo.

3.1.6. Condiciones de frontera

Para asegurar una solución única, impusimos condiciones de frontera tipo Dirichlet en todas las fronteras del dominio que se encuentran por debajo de la superficie del modelo, mientras que para la interfase aire-tierra utilizamos una continuación ascendente como condición de frontera.

3.1.6.1. Fronteras por debajo de la superficie de la tierra

En las fronteras que se encuentra por debajo de la superficie de la tierra, simplemente se especifica que el campo eléctrico tangencial sea igual a cero. Ésta condición de frontera homogénea tipo Dirichlet es una buena aproximación si las fronteras se encuentran lo suficientemente lejos de la fuente a un tiempo dado. Generalmente, una Tierra menos conductiva o una fuente muy grande requieren una gran rejilla, mientras que la respuesta de los tiempos tempranos necesitan una rejilla de menor tamaño que aquella usada para la respuesta de tiempos tardíos.

3.1.6.2. Interface aire-tierra

Una condición de frontera que usa una continuación ascendente se implementó en la superficie de la Tierra (Oristaglio y Hohmann, 1984). Esto tiene dos ventajas, el tamaño de la rejilla se puede reducir y no es necesario incluir el campo magnético en el espacio libre, lo cual requeriría pasos en el tiempo muy pequeños para mantener la solución estable. Para aplicar la continuación ascendente se extendió la rejilla un nivel por encima de la superficie, y se calculó b_x y b_y a medio nivel por encima de la superficie del modelo, usando b_z en la superficie.

En la suposición cuasi-estática, el flujo magnético en el espacio libre obedece al Laplaciano

$$\nabla^2 \mathbf{b} = 0. \quad (21)$$

Las componentes horizontales de $\mathbf{b}$ que satisfacen la ecuación (21) pueden derivarse a partir de su componente vertical en el mismo plano horizontal. De la ecuación (21)

$$\mathcal{B}_x(u, v, z = 0) = -\frac{iu}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathcal{B}_z(u, v, z = 0) \quad (22)$$

y

$$\mathcal{B}_y(u, v, z = 0) = -\frac{iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \mathcal{B}_z(u, v, z = 0) \quad (23)$$

donde $\mathcal{B}_x$, $\mathcal{B}_y$ y $\mathcal{B}_z$ son las transformadas de Fourier de b_x , b_y y b_z , respectivamente; u y v son las variables en el dominio del número de onda que corresponden a las variables x y y , respectivamente. Una transformada de Fourier bidimensional esta definida como

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy.$$

$\mathcal{B}_x$ y $\mathcal{B}_y$ dadas por las ecuaciones (22) y (23) pueden calcularse en el espacio libre a partir de una continuación ascendente, es decir,

$$\mathcal{B}_x(u, v, z = -h) = \exp\left(-h\sqrt{u^2 + v^2}\right) \mathcal{B}_x(u, v, z = 0) \quad (24)$$

y

$$\mathcal{B}_y(u, v, z = -h) = \exp\left(-h\sqrt{u^2 + v^2}\right) \mathcal{B}_y(u, v, z = 0). \quad (25)$$

Substituyendo la ecuación (22) en la (24) y la ecuación (23) en la (25) tenemos que

$$\mathcal{B}_x(u, v, z = -h) = -\frac{iu}{\sqrt{u^2 + v^2}} \exp\left(-h\sqrt{u^2 + v^2}\right) \mathcal{B}_z(u, v, z = 0) \quad (26)$$

y

$$\mathcal{B}_y(u, v, z = -h) = -\frac{iv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \exp\left(-h\sqrt{u^2 + v^2}\right) \mathcal{B}_z(u, v, z = 0). \quad (27)$$

La componente $\mathcal{B}_z$ del campo magnético en el receptor se calcula con una expresión similar a las ecuaciones (24) y (25). Es esta componente $\mathcal{B}_z$ a la que se le denominará como *dato calculado o respuesta al modelo* en el esquema de inversión conjunta y esta dada por

$$\mathcal{B}_z(u, v, z = -h) = \exp\left(-h\sqrt{u^2 + v^2}\right) \mathcal{B}_z(u, v, z = 0). \quad (28)$$

3.1.7. Condiciones iniciales

Para iniciar los pasos en el tiempo, se implementaron condiciones para **e** en $t = t_0$ y para **b** en $t = t_0 + \Delta t_0/2$, respectivamente, donde $t > 0$ y Δt_0 es el paso de tiempo inicial.

En este trabajo se experimentó con dos formas diferentes para iniciar la propagación de las ondas electromagnéticas en el subsuelo. Una de ellas considera que la fuente de ondas electromagnéticas es un impulso generado por un dipolo magnético vertical. La otra considera que la fuente es una espira circular la cual se mantiene encendida simulando de ésta manera que la fuente es una función caja.

3.1.7.1. Respuesta al impulso como condición inicial

Para este tipo de fuente, suponemos que las primeras 5 capas del subsuelo son homogéneas y calculamos en éstas los campos **e** y **b** usando una solución semi-analítica. Lo anterior se logró utilizando la solución de la respuesta al impulso de campo magnético para tiempos tempranos propuesta por Smith y Lee (2004), la cual se presenta a continuación

$$h'_i(t) = \frac{2m_{TX}}{4\pi\mu\sigma R^5} \left(\hat{I}_i^4 + \frac{1}{\sqrt{\tau\pi}} \left[\hat{I}_i^3 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\hat{I}_i^{2s+5} \tau^{s+1}}{(2s+1)(s+1)} \right] \right), \quad (29)$$

siendo t el tiempo, m_{TX} el momento dipolar del transmisor, σ la conductividad del

medio, μ la permeabilidad magnética, $\tau = \frac{t}{\mu\sigma R^2}$ y R se calcula a partir de la geometría mostrada en la Figura 4.

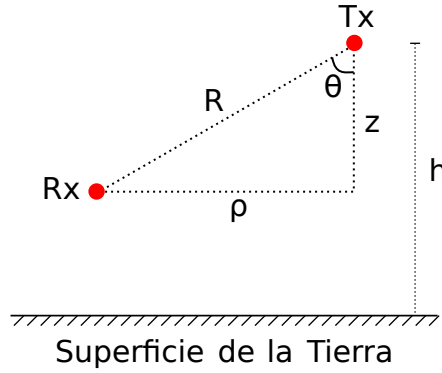


Figura 4. Geometría utilizada para el cálculo de la respuesta al impulso del campo magnético. Tx representa la posición del transmisor, Rx muestra la posición de receptor.

Si $i = z$, la componente vertical de la respuesta al impulso del campo magnético se calcula con

$$\hat{I}_z^s = s! P_s(\cos\theta). \quad (30)$$

Si $i = \rho$, la componente horizontal de la respuesta al impulso del campo magnético se calcula con

$$\hat{I}_\rho^s = \frac{Rs!}{\rho} \left[P_{s-1}(\cos\theta) - \frac{h-z}{R} P_s(\cos\theta) \right] \quad (31)$$

Para las ecuaciones (30) y (31) $P_s(\cos\theta)$ es el polinomio de Legendre de grado s . La ecuación (31) se puede descomponer para obtener las componentes h_x y h_y .

El campo eléctrico inicial se calcula a partir de los campos magnéticos obtenidos anteriormente. En general se tiene que el campo magnético en coordenadas cilíndricas se obtiene a partir de la expresión

$$\nabla \times \mathbf{h}(\rho, \phi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial h_z}{\partial \phi} - \frac{\partial h_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial h_\rho}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho h_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial h_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$

Para nuestro caso $h_\phi = 0$, por otro lado, h_ρ y h_z no dependen de ϕ , por lo que

$$\nabla \times \mathbf{h}(\rho, \phi, z) = \left(\frac{\partial h_\rho}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} \quad (32)$$

Por otro lado se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{h}(\rho, \phi, z) = \sigma e_\phi \hat{\phi}. \quad (33)$$

Igualando componentes se tiene que

$$\frac{\partial h_\rho}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial \rho} = \sigma e_\phi, \quad (34)$$

por lo tanto

$$e_\phi = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial h_\rho}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right). \quad (35)$$

La ecuación (35) se puede descomponer para obtener las componentes e_x y e_y .

En nuestro esquema, los campos eléctricos al tiempo t_0 se obtienen utilizando la expresión (35), mientras que para los campos magnéticos se utiliza la expresión (29) para el tiempo $t_{1/2}$.

3.1.7.2. Función caja como condición inicial

Para simular que nuestra fuente es una función caja, se consideró el uso de un vector potencial magnético, $\mathbf{a}$, al momento de calcular el campo magnético alrededor de una espira donde circula una corriente en el espacio libre (Figura 5), donde,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^3r_0 \quad (36)$$

y $\mathbf{j}$ es la densidad de corriente eléctrica.

Primero se escoge un sistema de referencia coordenadas cilíndrico (ρ, ϕ, z) cuyo eje coincide con aquel de la espira y cuyo origen se encuentra en su centro. Dado que

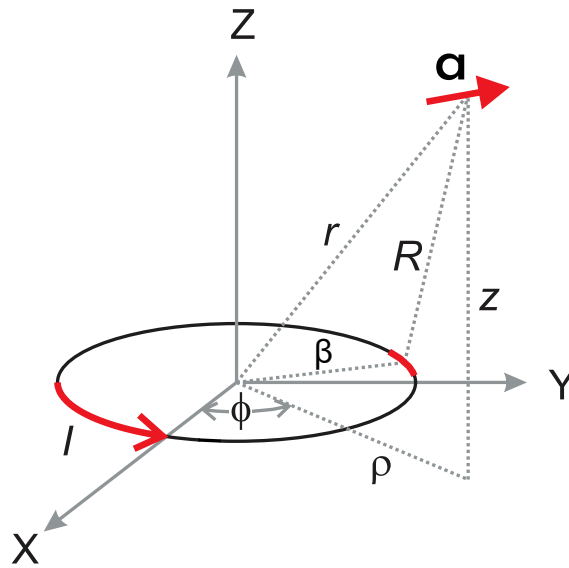


Figura 5. Vector potencial de una espira donde circula una corriente. El centro de la espira se ubica en el origen del sistema coordenado y tiene su eje en la dirección Oz. Modificada de Grant y West (1965).

existe simetría de la corriente $\mathbf{j}$ con los ejes coordenados, $\mathbf{a}$ no tendrá componente en ningún plano axial. Así, la única componente cilíndrica de $\mathbf{a}$, la cual se mantiene es la componente ϕ , por lo que, la ecuación (36) se reduce a

$$a_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_\phi(\mathbf{r}_0) \cos(\phi_0 - \phi)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d^3r_0 \quad (37)$$

donde la integral es evaluada en la circunferencia de la espira, dado que es en esta región donde solamente fluyen corrientes eléctricas. Si la corriente I fluye a través de la espira y si su área de sección transversal es muy pequeña comparada con su radio, β , entonces la integral (37) se reduce a

$$a_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta \cos(\phi_0 - \phi)}{[\rho^2 + \beta^2 + z^2 - 2\beta\rho \cos(\phi_0 - \phi)]^{1/2}} d\phi_0. \quad (38)$$

Ahora se puede hacer que $\phi = 0$. Si se expande el denominador del integrando por el teorema del binomio, se puede escribir que

$$\begin{aligned}
a_\phi &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\beta \cos \phi_0}{[\rho^2 + z^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{\beta \rho \cos \phi_0 - \frac{\beta^2}{2}}{\rho^2 + z^2} + \dots \right] d\phi_0 \\
&\doteq \frac{\mu_0 I \beta^2 \rho}{4(\rho^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \text{si } \beta^2 \ll \rho^2 + z^2
\end{aligned} \tag{39}$$

Dado que conocemos $\mathbf{a}$, y puesto el campo magnético esta dado por $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ y por $\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{a} \\
&= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{\partial a_\phi}{\partial z} \vec{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\phi) \vec{z} \right] \\
&= \frac{I \beta^2}{4} \left[\frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \vec{\rho} + \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \vec{z} \right]
\end{aligned} \tag{40}$$

Por lo que, en nuestro esquema de modelado de datos EMA, para simular que nuestra fuente es una función caja, es decir, que la fuente se mantiene encendida por un periodo de tiempo de 20 ms, hacemos uso de la ecuación (40) y de los campos magnéticos calculados a partir del esquema de diferencias finitas. La Figura 6 muestra un esquema de como simulamos que nuestra fuente se mantuvo encendida durante 20 ms. Cabe señalar que la suma que se menciona en la Figura 6 solamente se lleva a cabo en aquellos nodos que se encuentran exactamente en la superficie de la Tierra (b_z) y sobre ella (b_x y b_y), dado que la ecuación (40) es válida únicamente en el espacio libre.

Una vez que la fuente se mantuvo encendida durante 20 ms, ésta se apaga y la propagación del campo electromagnético en el modelo se calcula solamente con el esquema de diferencias finitas durante los últimos 20 ms de la simulación. Es precisamente durante éstos últimos 20 ms donde se lleva a cabo la toma de datos en el receptor.

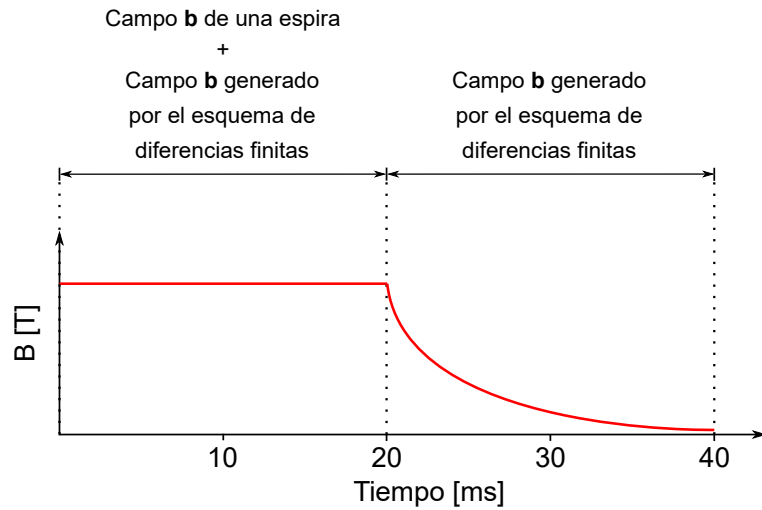


Figura 6. Simulación del encendido y apagado de una fuente electromagnética.

3.1.8. Dispersión numérica y ecuaciones para tiempos tempranos

La dispersión numérica ocurre cuando una rejilla no es capaz de simular campos de alta frecuencia. Considerando una rejilla con espaciamiento uniforme Δ , para disminuir la dispersión numérica a un grado aceptable, la razón de muestreo espacial debe cumplir

$$\frac{\lambda_{min}}{\Delta} \geq N \quad (41)$$

donde λ_{min} es la longitud de onda mínima y N es el número más pequeño de puntos de la rejilla por longitud de onda. El valor de N depende en el esquema de diferencias finitas usado. En general, un algoritmo de orden mayor es mejor para disminuir dispersión numérica, por lo que requiere una razón de muestreo menor.

La dispersión numérica también ocurre cuando un campo electromagnético difusivo es modelado usando diferencias finitas. Si se considera un campo transitorio inducido en una tierra conductora que es generado por el corte de corriente de una fuente estacionaria, poco después del corte de corriente, el campo es dominado por las altas frecuencias y las rápidas variaciones espaciales. Mientras el tiempo pasa, las altas frecuencias se atenúan y el campo se suaviza en el espacio. Por lo tanto, es más probable que la dispersión numérica ocurra en los tiempos tempranos.

La simulación de Wang y Hohmann (1993), usa un esquema de diferencias finitas

de cuarto orden para el cálculo de los campos en tiempos tempranos, es decir,

$$b_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) = b_x^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - \frac{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n+1}}{2} \times \sum_{p=-1}^2 \left[a_p e_z^n(i, j + p, k + 1/2) - b_p e_y^n(i, j + 1/2, k + p) \right] \quad (42)$$

$$e_y^{n+1}(i, j + 1/2, k) = \frac{2\gamma - \Delta t_n \sigma(i, j + 1/2, k)}{2\gamma + \Delta t_n \sigma(i, j + 1/2, k)} e_y^n(i, j + 1/2, k) + \frac{2\Delta t_n}{2\gamma + \Delta t_n \sigma(i, j + 1/2, k)} \times \sum_{p=-1}^2 \left[c_p h_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + p - 1/2) - d_p h_z^{n+1/2}(i - p + 1/2, j + 1/2, k) \right] \quad (43)$$

donde a , b , c y d son coeficientes de un sistema de ecuaciones de diferencias finitas como se explica en la sección 3.1.9.

Para mantener siempre estables los pasos en el tiempo de las ecuaciones (42) y (43) se modifica la ecuación (18) como sigue

$$\gamma \geq \frac{4}{\mu_{min}} \left(\frac{\Delta t_n}{\Delta_{min}} \right)^2$$

y se reduce apropiadamente el máximo paso de tiempo a

$$\Delta t_{max} = \alpha \left(\frac{\mu_{min} \sigma t}{8} \right)^{1/2} \Delta_{min} \quad (44)$$

Por lo que, la simulación de la propagación de las ondas electromagnéticas usa, para los tiempos tempranos, un esquema de cuarto orden y la transición al esquema de segundo orden se realiza una vez que los campos han sido muestreados correctamente al inicio de la propagación.

3.1.9. Aproximación de cuarto orden en diferencias finitas

Definiendo los valores discretos de una función f en los nodos i como f_i y el espaciado entre nodos i y $i + 1$ como Δx_i , entonces la aproximación de cuarto orden en diferencias finitas para df/dx en el nodo $i + 1/2$ se puede escribir como

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i+1/2} \approx c_{-1}f_{i-1} + c_0f_i + c_1f_{i+1} + c_2f_{i+2}, \quad (45)$$

donde c_{-1} , c_0 , c_1 y c_2 son los coeficientes a determinar. Usando una expansión de Taylor de las f_i en $x = x_i + \Delta x_i/2$ y equiparando los coeficientes de ambos lados asociados con la derivada del mismo orden, tenemos el siguientes sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -l_{-1} & -l_0 & l_1 & l_2 \\ l_{-1}^2 & l_0^2 & l_1^2 & l_2^2 \\ -l_{-1}^3 & -l_0^3 & l_1^3 & l_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Aquí,

$$L_{-1} = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i/2,$$

$$l_0 = \Delta x_i/2,$$

$$l_1 = \Delta x_i/2,$$

$$l_2 = \Delta x_i/2 + \Delta x_{i-1}.$$

El sistema de ecuaciones (46) puede resolverse para los coeficientes c_{-1} , c_0 , c_1 y c_2 .

3.1.10. Interpolación a un espaciado regular

Dado que las ecuaciones (20) y (44) establecen que el intervalo de muestreo no es uniforme y debido a que éste se incrementa poco a poco conforme avanza el tiempo, fue necesario llevar a cabo un proceso de interpolación de tal forma que las series de

tiempo obtenidas en el receptor mantuvieran un intervalo de muestreo uniforme. Se escogió una interpolación lineal debido a que los intervalos de tiempo son lo suficientemente pequeños y al realizar la interpolación no habría pérdida de información de la señal observada. La interpolación se llevó a cabo utilizando la ecuación (47) y la geometría de la Figura 7.

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (47)$$

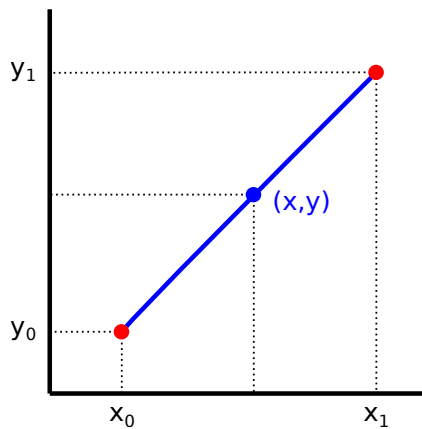


Figura 7. Geometría básica de la interpolación lineal.

3.1.11. Extrapolación

El proceso de extrapolación descrito en esta sección se usa solamente si utilizamos la respuesta al impulso como condición inicial (Sección 3.1.7.1).

El modelado de datos EMA propuesto en éste trabajo simula la obtención de datos durante un lapso de tiempo de 20 ms, sin embargo, un periodo completo de muestreo en un sondeo real dura 40 ms, por lo tanto, para poder completar un periodo completo de 40 ms es necesario extrapolar la series de tiempo obtenidas a partir de la modelación propuesta. El algoritmo propuesto en éste trabajo tiene la opción de extrapolar las series de tiempo usando una función exponencial o una función logarítmica. El uso de una o de la otra depende de la pendiente, positiva o negativa, que tenga la serie de tiempo simulada en los tiempos cercanos a 20 ms.

3.1.11.1. Ajuste de mínimos cuadrados de una función exponencial

Para ajustar un funcional de la forma

$$y = Ae^{Bx}, \quad (48)$$

se toma el logaritmo de ambos lados de la ecuación

$$\ln y = \ln A + Bx. \quad (49)$$

Los mejores valores que ajustan la expresión anterior son

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \ln y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (50)$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \ln y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (51)$$

donde $B = b$ y $A = \exp(a)$.

Las expresiones anteriores dan pesos mayores a valores pequeños de y , así que para dar peso equitativo a todos los puntos, frecuentemente es mejor minimizar la función

$$\sum_{i=1}^n y_i (\ln y_i - a - b x_i)^2. \quad (52)$$

Aplicando un ajuste de mínimos cuadrados se obtiene que

$$a \sum_{i=1}^n y_i + b \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i \ln y_i \quad (53)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i y_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \ln y_i \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \ln y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \ln y_i \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Resolviendo para a y b se tiene que

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) \sum_{i=1}^n (y_i \ln y_i) - \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \sum_{i=1}^n (x_i y_i \ln y_i)}{\sum_{i=1}^n (y_i) \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) - (\sum_{i=1}^n (x_i y_i))^2} \quad (56)$$

y

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i) \sum_{i=1}^n (x_i y_i \ln y_i) - \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \sum_{i=1}^n (y_i \ln y_i)}{\sum_{i=1}^n (y_i) \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) - (\sum_{i=1}^n (x_i y_i))^2}, \quad (57)$$

Weisstein (2019a).

3.1.11.2. Ajuste de mínimos cuadrados de una función logarítmica

Dada una función de la forma

$$y = a + b \ln x, \quad (58)$$

los coeficientes, calculados a partir de un ajuste por mínimos cuadrados, son

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n (y_i \ln x_i) - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \ln x_i}{n \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 - (\sum_{i=1}^n \ln x_i)^2} \quad (59)$$

y

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n \ln x_i}{n}, \quad (60)$$

Weisstein (2019b).

3.1.12. Convolución con la forma de onda

El proceso de convolución descrito en esta sección se usa solamente si utilizamos la respuesta al impulso como condición inicial (Sección 3.1.7.1).

Los datos calculados en el receptor a partir de la ecuación (28) son el resultado de la propagación de una onda electromagnética generada a partir de un impulso, dado por las ecuaciones (29) y (35); sin embargo, en el caso real de adquisición de datos EMA, la fuente en el transmisor no es un impulso electromagnético, sino una corriente directa que se hace circular en una bobina. Dicha corriente permanecerá encendida y apagada durante periodos de tiempo específicos en los cuales ésta cambiará de polaridad.

Matemáticamente hablando, un comportamiento de encendido, apagado y cambio de polaridad de una corriente directa puede representarse como un función caja, como la que se muestra en la Figura 8a. A dicho comportamiento se le denomina como forma de la onda del transmisor con ciclo de trabajo del 50 %. De esta manera las mediciones del campo magnético terrestre pueden hacerse en el periodo de tiempo cuando la fuente está apagada, es decir, durante la mitad de cada ciclo.

Sin embargo, éste tipo de forma de onda produce una respuesta relativamente compleja, con dos eventos de cambio por cada mitad de ciclo y efectos de baja amplitud durante el tiempo que la fuente permanece encendida, resultando en desviaciones de la forma cuadrada perfecta de la forma de onda del transmisor. Una deconvolución (éste proceso en este trabajo no es necesario llevarlo a cabo, debido a que nuestra fuente no es una forma de onda cuadrada sino un impulso) y una transformación de la respuesta de la tierra a una respuesta que considera una forma de onda de cuadrada con ciclo del trabajo del 100 % resulta en un sólo decaimiento para medio periodo completo (20 ms).

Por lo tanto, para poder simular la adquisición de datos reales es imperativo obtener una serie de tiempo que contemple la forma con ciclo del trabajo del 100%. Esto se logra al realizar la convolución de la serie de tiempo en el receptor con la serie de tiempo de una función caja de la Figura 8c.

Anteriormente se mencionó que el modelado propuesto en este trabajo solamente calcula datos en los primeros 20 ms, y que es necesario extrapolar las series de tiempo a 40 ms. Esta necesidad que tenemos de extrapolar las series de tiempo se origina precisamente por el periodo de repetición (40 ms) que tiene la forma de la onda del transmisor con ciclo de trabajo del 100 %, de tal manera que al convolucionar la forma

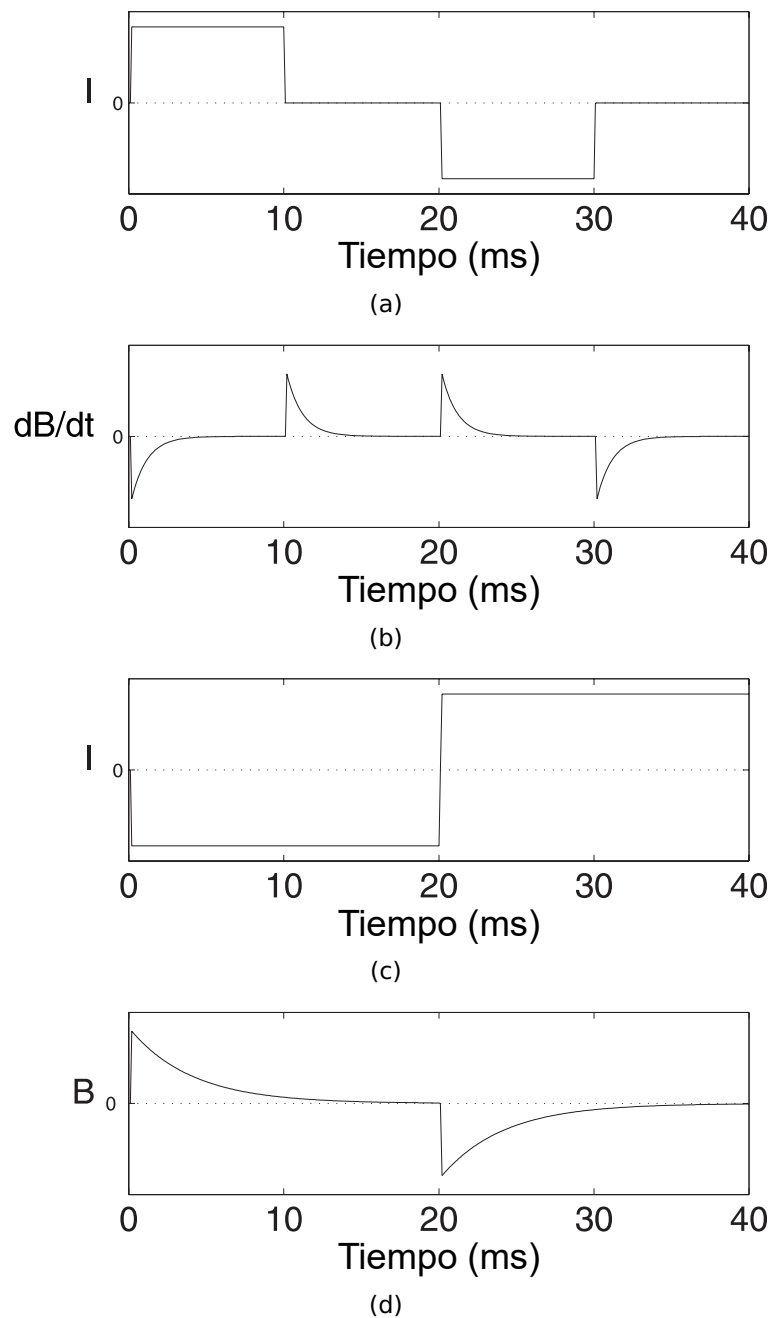


Figura 8. a) Apariencia real de la forma de onda del transmisor. b) Respuesta medida de la tierra (dB/dt). c) Forma de onda de la corriente del transmisor para datos procesados. d) Respuesta de la tierra (B) para los datos procesados. Modificada de Lane *et al.* (2000).

de la onda del transmisor y la serie de tiempo del receptor, por lo menos seamos capaces de considerar un periodo completo de observación. Así, seremos capaces de tener series de tiempo con un espaciamiento regular similares a las de la Figura 8d. Una vez que los datos muestran espaciamiento regular, es necesario agruparlas en 15 ventanas de tiempo (Ver Tabla 2 de la sección 3.1.1)

3.1.13. Validación del algoritmo de modelado datos EMA

Para comprobar el buen funcionamiento del modelado directo de datos EMA propuesto en este trabajo, se compararon los resultados obtenidos por este y resultados obtenidos por otros algoritmos que también simulan la adquisición de datos EMA y que han sido publicados y aceptados por la comunidad internacional (Smith y Lee, 2004; Brodie, 2010, 2015).

Todos los algoritmos simulan la toma de datos sobre un semiespacio homogéneo de 0.01 S/m. El transmisor se ubicó 90 metros por encima de la superficie, mientras que el receptor se ubicó a 35 metros por encima de la superficie. La distancia horizontal entre transmisor y receptor fue de 100 metros.

3.1.13.1. Validación del algoritmo utilizando la respuesta al impulso como condición inicial

En la Figura 9 se muestra una comparación entre los resultados de nuestro algoritmo de modelación y los resultados publicados por Smith y Lee (2004). En concreto, la comparación se hace con los datos obtenidos a partir de la ecuación (29), la cual es una respuesta analítica, y los datos obtenidos a partir de la ecuación (28), la cual conlleva el modelado tridimensional por diferencias finitas y una continuación ascendente a la altura del receptor.

Los datos mostrados en la Figura 9 no muestran ningún procesamiento posterior (extrapolación y convolución con la forma de onda). Reflejan simplemente los campos magnéticos medidos en el receptor.

El hecho de que las magnitudes de las dos curvas sean comparables es un buen indicador del buen funcionamiento de nuestro modelado. La falta de similitud en la forma de las curvas, sobre todo al inicio de la curva azul, se debe principalmente a que en nuestro modelado debe pasar algún tiempo para que todo el modelo responda a los efectos de la fuente. Por eso el incremento en el campo magnético a la izquierda de la curva azul.

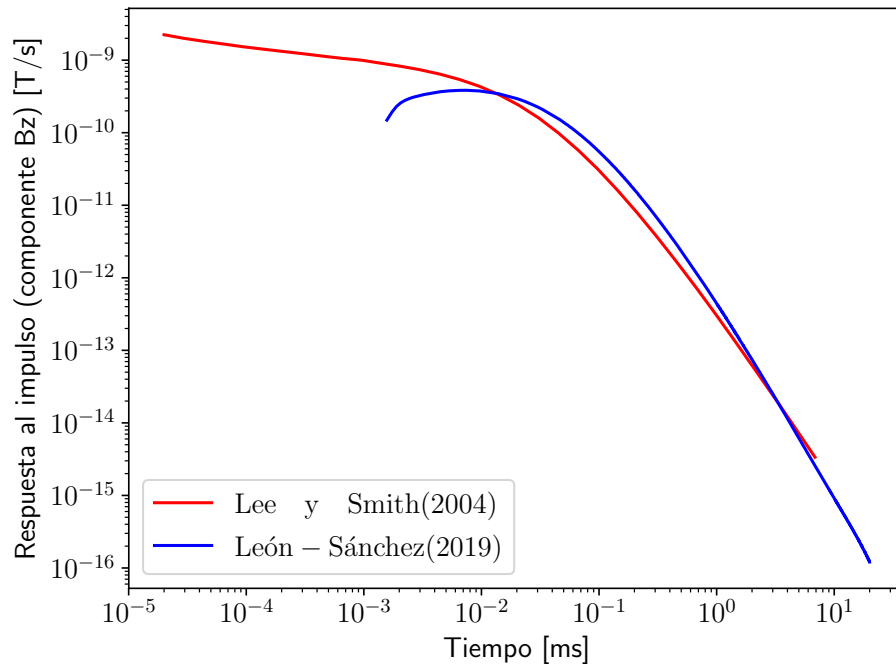


Figura 9. Componente vertical de la respuesta de un semiespacio homogéneo de 0.01 S/m. El transmisor es un dipolo magnético vertical ubicado 90 metros por encima de la superficie del semiespacio. El receptor se encuentra 100 metros por detrás y 55 metros por debajo del transmisor, respectivamente.

3.1.13.2. Validación del algoritmo utilizando la función caja como condición inicial

En la Figura 10 se muestra una comparación entre tres algoritmos diferentes, uno desarrollado por Raiche (2007), otro por Brodie (2015) y el algoritmo de modelado propuesto en éste trabajo.

La curva color verde de la Figura 10 se generó al utilizar la respuesta al impulso como condición inicial en nuestro algoritmo, por lo que, también fue necesario extrapolar y convolucionar la serie de tiempo con la forma de la onda. Por otro lado, la curva color morado se obtuvo al utilizar como condición inicial una función caja, por lo que los procesos de extrapolación y convolución con la forma de onda no fueron necesarios.

Hay que hacer notar que la amplitud de las anomalías en todas las curvas es comparable, a excepción tal vez de la parte final de la curva verde, dado que los campos decaen en un orden de magnitud. Sin embargo, el comportamiento general de las curvas es similar, lo cual sirve de argumento para validar el buen funcionamiento del algoritmo de modelado directo de datos EMA desarrollado en este trabajo.

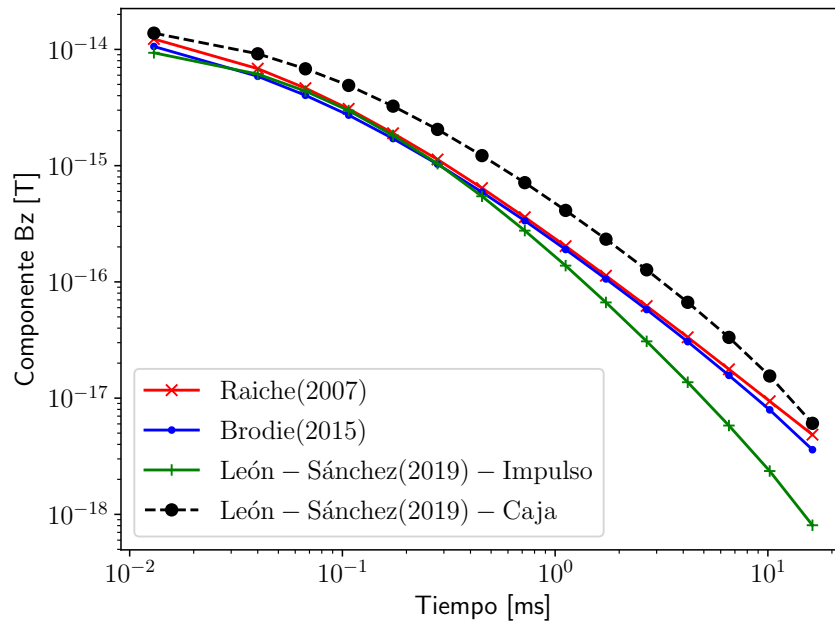


Figura 10. Respuesta de tres algoritmos de modelado directo de datos EMA. El modelo utilizado fue un semiespacio homogéneo de 0.01 S/m.

3.1.14. Respuesta del algoritmo propuesto a estructuras geológicas simples

Dado que los mejores resultados se obtienen al utilizar la función caja como condición inicial, todos los ejemplos siguientes se desarrollaron utilizando dicha condición inicial.

Se diseñó un modelo con 109 celdas en la dirección Norte, 109 celdas en la dirección Este y 30 celdas de profundidad. En la zona de interés el tamaño de las celdas es de 25 por 25 metros en las direcciones horizontales y espesor variable (La primera capa tiene un espesor de 10 metros, la segunda capa es un 20 % mayor que la primera capa, la tercera capa es un 20 % mayor que la segunda capa, y así sucesivamente). Se simuló la toma de datos en 31 estaciones separadas cada 25 metros. La altura sobre la superficie del transmisor y receptor fue de 90 y 35 metros, respectivamente. La distancia horizontal entre transmisor y receptor fue de 100 metros (Ver Figuras 11a, 12a y 13a).

Una de las maneras que se han diseñado para la interpretación de datos EMA se muestra en las Figuras 11b, 12b y 13b. Ésta consiste en asignar al eje cartesiano x la distancia horizontal que existe entre cada una de las estaciones de datos EMA. En el

eje cartesiano y se asigna la magnitud de campo magnético medido en el receptor, es decir, la componente B_z del campo magnético. Comúnmente, son 15 los tiempos que se reportan en un sondeo de datos EMA para el sistema TEMPEST, como se observa en la Figura 10, por lo que para poder interpretar éste tipo de datos es necesario unir con una línea todos los datos que correspondan al tiempo 1, de igual manera unir con una línea todos los datos correspondientes al tiempo 2 y así sucesivamente hasta unir con una línea todos los tiempos correspondientes al tiempo 15. De ésta manera es muy sencillo identificar cambios laterales en el campo magnético y que puedan ser atribuidos a cambios en la conductividad del subsuelo. A esta representación se le denomina comúnmente como perfil de datos EMA.

A continuación se muestran algunos ejemplos donde el objetivo es mostrar el buen funcionamiento del algoritmo propuesto utilizando modelos geológicos sencillos. Nótese que las Figuras 11b, 12b y 13b tienen los mismos límites inferior y superior en los ejes coordenados. Esto lo hicimos con el objetivo de observar claramente como afectan las estructuras a la amplitud del campo magnético en el receptor, es decir, una comparación visual directa.

3.1.14.1. Respuesta de un medio homogéneo

En la Figura 11a se observa la posición de las 31 estaciones con respecto a la posición del área de interés. El modelo utilizado fue un medio homogéneo resistivo de 0.01 S/m.

Los datos obtenidos a partir de la simulación anterior se muestran en la Figura 11b. Al tratarse de un medio homogéneo y dado que no hay variación de la conductividad en ninguno de los tres ejes coordenados, se espera que no haya cambios laterales en la magnitud del campo medido en el receptor. Éste comportamiento se muestra en la Figura 11b.

3.1.14.2. Respuesta de un medio de dos capas

En la Figura 12a se observa la posición de las 31 estaciones con respecto a la posición del área de interés. El modelo utilizado fue un estrato superficial de 0.01 S/m de conductividad y de 74.5 metros de espesor, por debajo de éste se encuentra un basamento infinito más conductor de 0.1 S/m de conductividad.

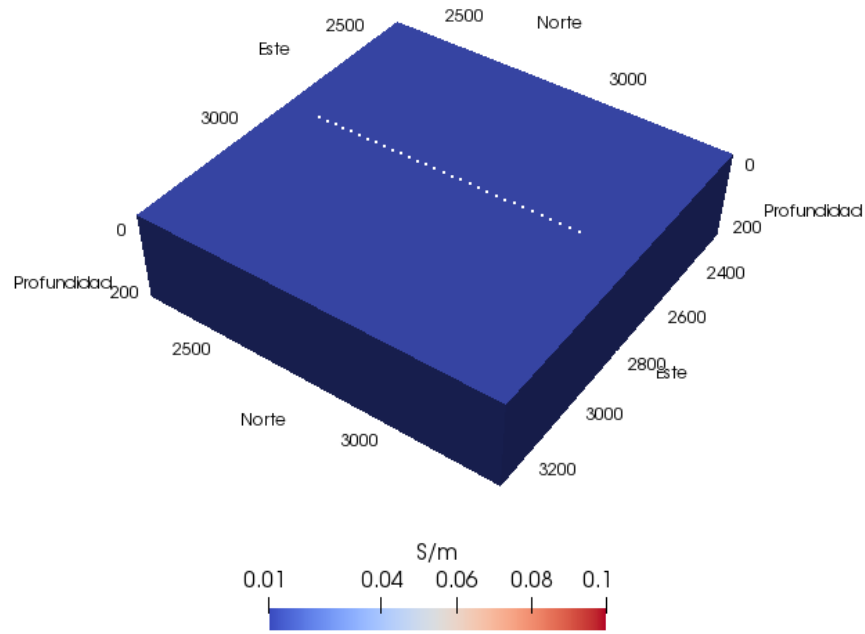
Al igual que en el caso anterior, al no haber un cambio lateral en la conductividad del modelo, es de esperarse que no haya cambios laterales en la magnitud del campo magnético medido en el receptor, sin embargo, la presencia de un cuerpo más conductor a profundidad debe de notarse en las magnitudes de los campos. Si comparamos la Figura 12b con la Figura 11b observamos que la presencia del conductor más profundo genera cambios en la magnitud del campo magnético. En este caso para los tiempos tardíos la magnitud del campo magnético ha aumentado aproximadamente un orden de magnitud, sobretodo en las últimas ventanas, las cuales son más sensibles a cuerpos más profundos.

3.1.14.3. Respuesta de una falla vertical

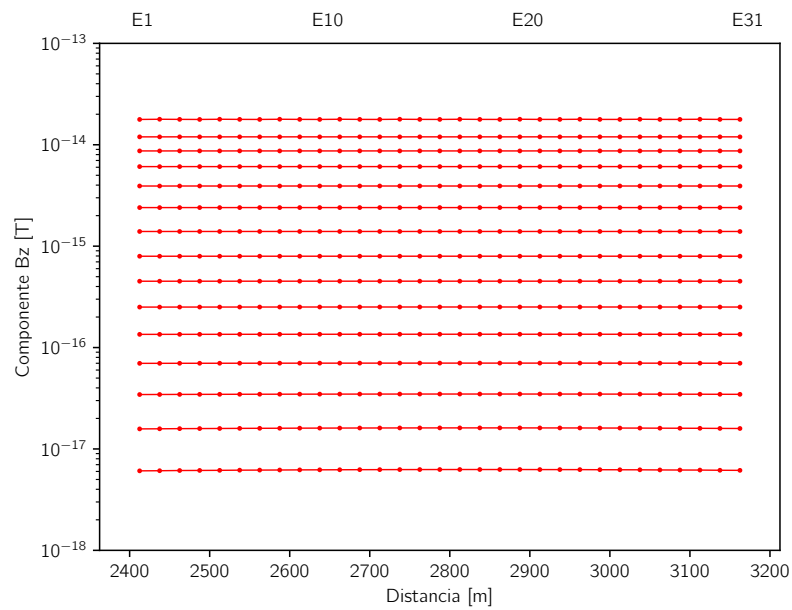
En la Figura 13a se observa la posición de las 31 estaciones con respecto a la posición del área de interés. El modelo utilizado fue un cambio lateral de la conductividad el cual podría considerarse una falla vertical. El contacto esta dado por dos cuerpos, uno con conductividad de 0.01 S/m de y el otro de conductividad 0.1 S/m.

En la Figura 13b observamos el resultado de la simulación, donde es claro el cambio lateral de la amplitud en un lado y otro del contacto. Sin embargo, en las primeras estaciones y en los tiempos tardíos la presencia del conductor es notoria. Por ejemplo, el tiempo 15 de la Estación 1 de la Figura 13b es 1.72×10^{-17} [T], mientras que el tiempo 15 de la Estación 1 de la Figura 11b es de 6.08×10^{-18} [T]. Hay que notar que ambas estaciones fueron tomadas sobre un medio de 0.01 S/m; sin embargo, aún cuando una de ellas se encuentra aproximadamente a 400 metros del contacto, éste afecta de manera significativa las amplitudes de los campos magnéticos en tiempos tardíos. Ésto debido a la naturaleza difusiva del campo electromagnético, por lo que, su influencia en tiempos tardíos es mayor.

Sin importar el tipo de dato geofísico con el que se esté trabajando, resultados como el anterior resaltan la importancia que tiene el contar con metodologías de modelado que estén basadas en teorías o marcos teóricos tridimensionales. Lo anterior se explica debido a que es evidente como la presencia de estructuras tridimensionales afectan de manera significativa las amplitudes de los datos observados, aún cuando éstas se encuentren relativamente alejadas del punto de medición.

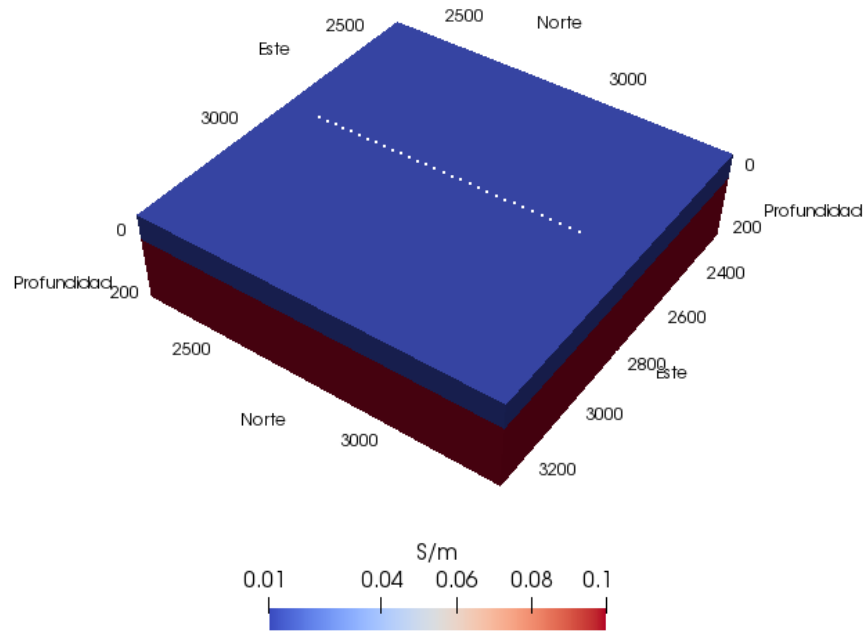


(a)

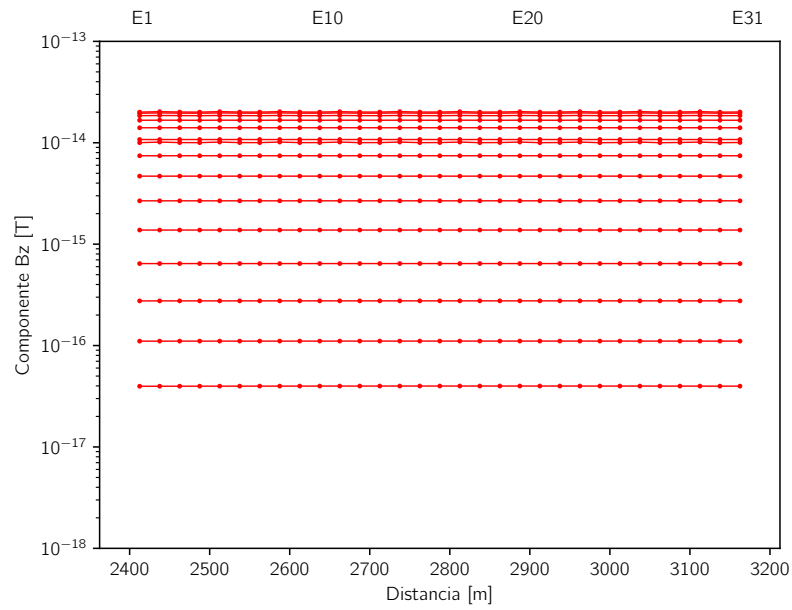


(b)

Figura 11. a) Medio homogéneo de 0.01 S/m. Los puntos blancos muestran la posición de las estaciones por encima de la superficie del modelo. b) Campo magnético medido en el receptor. E1, E10, E20 y E31 son las etiquetas de las estaciones 1, 10, 20 y 31 respectivamente.

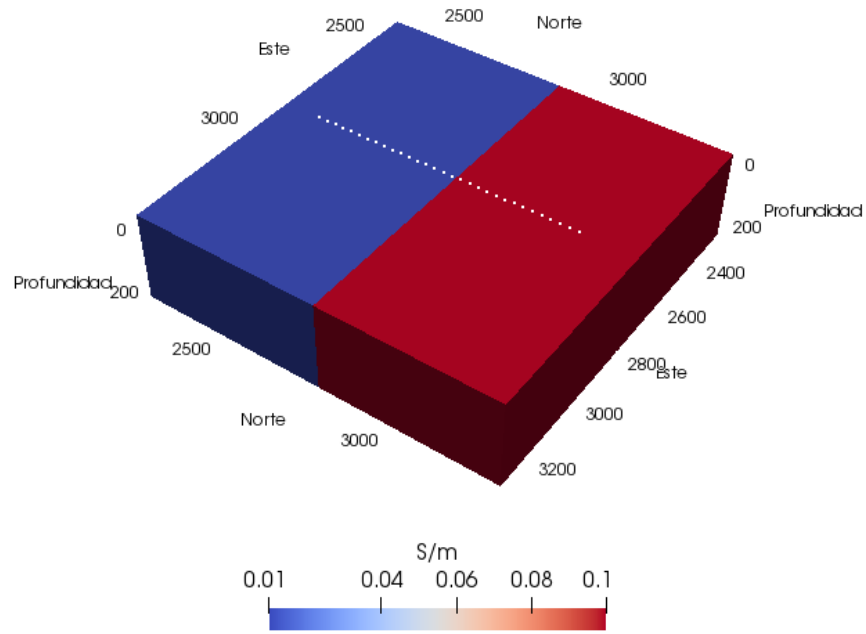


(a)

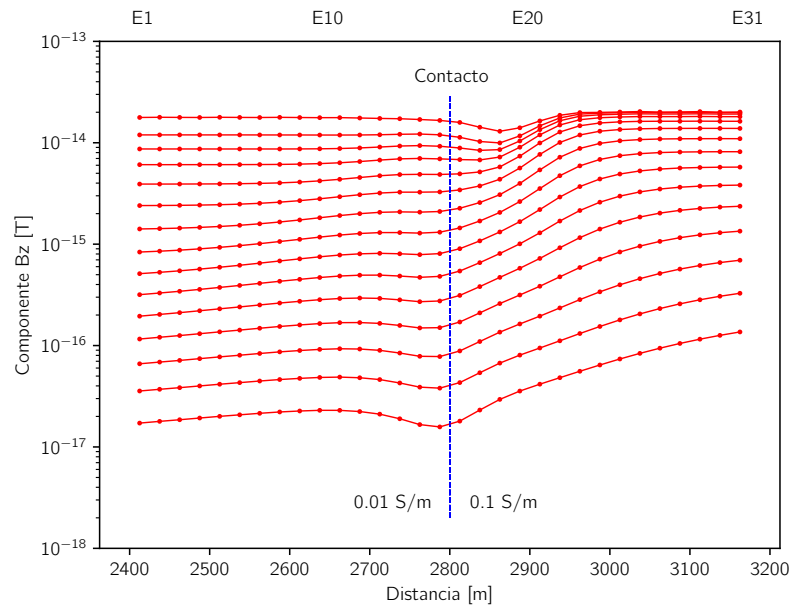


(b)

Figura 12. a) Modelo conformado por un estrato y un basamento infinito. b) Campo magnético medido en el receptor. E1, E10, E20 y E31 son las etiquetas de las estaciones 1, 10, 20 y 31 respectivamente.



(a)



(b)

Figura 13. a) Modelo que representa una falla vertical. b) Campo magnético medido en el receptor. E1, E10, E20 y E31 son las etiquetas de las estaciones 1, 10, 20 y 31 respectivamente.

3.2. Cálculo de sensibilidades en inducción electromagnética

Una de las mayores dificultades computacionales en la solución de problemas inversos es el cálculo de las sensibilidades, o derivadas parciales de los datos con respecto a los parámetros del modelo. Estas sensibilidades, las cuales establecen una relación lineal entre los cambios en la conductividad del modelo y cambios en la respuesta del modelado directo, son usadas para refinar un modelo inicial, de tal manera que se pueda mejorar el ajuste de los datos observados.

A continuación se muestra que las sensibilidades para cualquier componente de un campo electromagnético se pueden obtener al resolver dos problemas de valores en la frontera, los cuales son iguales excepto por la especificación de los términos de fuente. Los campos eléctricos de los campos primario y auxiliar son multiplicados e integrados para producir un valor numérico para la sensibilidad. Dicho esquema fue utilizado en este trabajo y fue desarrollado por McGillivray *et al.* (1994) y ha sido utilizado por Farquharson y Oldenburg (1996) y Sasaki (2004) para invertir datos obtenidos a partir del método magnetotelúrico y por Sasaki (2001) para una inversión de datos sintéticos de datos electromagnéticos aéreos y terrestres.

Debido a que el desarrollo de McGillivray *et al.* (1994) ésta hecho para datos de campo magnético y eléctrico en el dominio de la frecuencia, nos vimos en la necesidad de llevar a cabo la transformada de Fourier de nuestras series de tiempo, dado que éstas son calculadas en el dominio del tiempo.

3.2.1. Cálculo de sensibilidades en el dominio de la frecuencia

Primero, hay que considerar un dominio espacial finito o infinito D , el cual está caracterizado por una permitividad eléctrica ϵ , susceptibilidad magnética constante μ y por la conductividad $\sigma(\mathbf{x})$. Con las relaciones usuales constitutivas y suponiendo una dependencia armónica con el tiempo $e^{i\omega t}$, las ecuaciones de Maxwell se convierten en

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{e} &= -i\omega\mu\mathbf{h} + \mathbf{m}_s \\ \nabla \times \mathbf{h} &= (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{e} + \mathbf{j}_s.\end{aligned}\tag{61}$$

Donde $\mathbf{e}$ y $\mathbf{h}$ son las intensidades de campo eléctrico y magnético, respectivamente, debidas a las corrientes de densidad eléctrica, $\mathbf{j}_S$, y magnética, $\mathbf{m}_S = -i\omega\mu\mathbf{m}$.

El problema electromagnético primario se resuelve al satisfacer 61 sujeta una condición de frontera aplicada sobre ∂D , la cual es la frontera de D . La forma general de la condición de frontera puede ser de las formas

$$\begin{aligned} \alpha_e(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}) + \beta_e(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{e}) &= \mathbf{S}_e, \\ \alpha_h(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}) + \beta_h(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{h}) &= \mathbf{S}_h \end{aligned} \quad (62)$$

donde $(\alpha_e, \beta_e, \alpha_h, \beta_h)$ son constantes y $\mathbf{S}_e$ y $\mathbf{S}_h$ son respectivamente, las corrientes de superficie eléctricas y magnéticas. La forma de la ecuación (62) es general y permite a los problemas electromagnéticos ser resueltos al especificar las componentes tangenciales de los campos $\mathbf{e}$ o $\mathbf{h}$, o al especificar una impedancia como condición de frontera. Con el entendido de que las condiciones en la ecuación (62) se pueden aplicar a diferentes porciones de ∂D es conveniente escribir las condiciones de frontera como

$$\alpha(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{U}) + \beta(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{U}) = \mathbf{S} \quad (63)$$

donde $\mathbf{U}$ puede ser $\mathbf{e}$ o $\mathbf{h}$.

Soluciones numéricas del problema primario requieren que $\sigma(\mathbf{x})$ se pueda representar como

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \sigma_j \psi_j(\mathbf{x}) \quad (64)$$

donde σ_j son constantes reales y ψ_j son funciones base escogidas. Con ésta parametrización σ se especifica completamente por el vector de M elementos $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$.

En el problema inverso se intenta obtener el vector de parámetros $\boldsymbol{\sigma} \in R^M$ de tal

forma que los datos calculados a partir del modelado directo ajusten adecuadamente los datos observados. Ésto necesita el cálculo de las sensibilidades $G_{ik} = \partial d_i / \partial \sigma_k$ donde d_i es el i -ésimo dato. d_i puede tomar muchas formas; puede ser una impedancia, una componente de $\mathbf{e}$ o $\mathbf{h}$, una amplitud o una fase, por lo que, para poder calcular G_{ik} es necesario calcular $\partial \mathbf{e} / \partial \sigma_k$ y $\partial \mathbf{h} / \partial \sigma_k$

Sustituyendo 64 en 61 y diferenciando con respecto a σ_k produce las ecuaciones de sensibilidad,

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \sigma_k} &= -i\omega\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma_k}, \\ \nabla \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma_k} &= (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \sigma_k} + \psi_k(\mathbf{x})\mathbf{e}\end{aligned}\quad (65)$$

y condiciones de frontera homogéneas

$$\alpha\left(\hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma_k}\right) + \beta\left(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma_k}\right) = \mathbf{0}, \quad \text{en } \partial D. \quad (66)$$

El objetivo es obtener ecuaciones a partir de las cuales $\partial \mathbf{e} / \partial \sigma_k$ y $\partial \mathbf{h} / \partial \sigma_k$ puedan ser evaluadas, de tal manera que sólo una ecuación de la forma (61) sea resuelta. Para alcanzar este fin, se considera un problema auxiliar de Maxwell,

$$\begin{aligned}\nabla \times \tilde{\mathbf{e}} &= -i\omega\mu \tilde{\mathbf{h}} + \tilde{\mathbf{m}}_S, \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{h}} &= (\sigma + i\omega\epsilon) \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{j}}_S,\end{aligned}\quad (67)$$

donde las fuentes eléctricas, $\tilde{\mathbf{j}}_S$, y magnéticas, $\tilde{\mathbf{m}}_S = -i\omega\mu \tilde{\mathbf{m}}$, hay que definir las. El problema de valor en la frontera puede resolverse una vez que las condiciones apropiadas para $\tilde{\mathbf{j}}_S$ y $\tilde{\mathbf{m}}_S$ sean especificadas en ∂D . Éstas tienen la forma

$$\tilde{\alpha}(\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{U}}) + \tilde{\beta}(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \tilde{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}. \quad (68)$$

Hay que notar que estas condiciones de frontera pueden diferir de aquellas usadas para resolver el problema primario. Por ejemplo, el problema primario podría ser un fenómeno magnetotelúrico cuya fuente es un plano de corriente a cierta altura, pero la fuente para el problema auxiliar podría ser un dipolo eléctrico o magnético en el interior de ∂D . Con la excepción de los cambios en ciertas partes de las condiciones de frontera y detalles prácticos relacionados con la rejilla del dominio utilizada, la solución del problema primario y del problema auxiliar puede obtenerse a partir del mismo algoritmo.

Usando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (69)$$

permite a las ecuaciones 65 y 67 ser combinadas, dando

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{e}} \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \sigma_k} \times \tilde{\mathbf{h}} \right) = \tilde{\mathbf{m}}_S \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma_k} + \tilde{\mathbf{j}}_S \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \sigma_k} - \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} \psi_k(\mathbf{x}). \quad (70)$$

Integrando 70 sobre D y usando el teorema de la divergencia se obtiene

$$\int_{\partial D} \left(\tilde{\mathbf{e}} \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \sigma_k} \times \tilde{\mathbf{h}} \right) \cdot \mathbf{n} ds = \int_D \left[\tilde{\mathbf{m}}_S \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma_k} + \tilde{\mathbf{j}}_S \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \sigma_k} - \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} \psi_k(\mathbf{x}) \right] dv. \quad (71)$$

El cálculo de las sensibilidades deseadas se obtiene cuando el lado izquierdo de la ecuación (71) se hace igual a cero. Los campos $\tilde{\mathbf{e}}$, $\tilde{\mathbf{h}}$, $\partial \mathbf{h} / \partial \sigma_k$, $\partial \mathbf{e} / \partial \sigma_k$, todos se originan de fuentes finitas, y por lo tanto el lado izquierdo de la ecuación (71) se acerca a cero cuando la frontera ∂D se extiende al infinito. Para un dominio finito D la integral es también cero si el problema primario y auxiliar tienen las mismas condiciones de frontera.

Al igualar a cero al lado izquierdo de la ecuación (71), es posible escribir

$$\int_D \left[\tilde{\mathbf{m}}_S \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma_k} + \tilde{\mathbf{j}}_S \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \sigma_k} \right] dv = \int_D \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} \psi_k(\mathbf{x}) dv. \quad (72)$$

La ecuación (72) muestra que la sensibilidad de $\mathbf{e}$ o $\mathbf{h}$ se puede obtener al especificar apropiadamente las fuentes para los campos auxiliares y al integrar el producto punto de los campos eléctricos primarios y auxiliares sobre la región donde ψ_k es diferente de cero. Por ejemplo, para obtener las sensibilidades de H_z en un punto de observación $\mathbf{x}_0$, se asigna $\tilde{\mathbf{m}}_s = (-i\omega\mu) \times (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\hat{\mathbf{z}})$ y $\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$. Entonces (72) se convierte

$$\frac{\partial h_z(\mathbf{x}_0)}{\partial \sigma_k} = \frac{-1}{i\omega\mu} \int_D \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} \psi_k(\mathbf{x}) dV, \quad (73)$$

o si deseamos trabajar con la componente b_z en vez de la componente h_z entonces tenemos que

$$\frac{\partial b_z(\mathbf{x}_0)}{\partial \sigma_k} = \frac{-1}{i\omega} \int_D \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} \psi_k(\mathbf{x}) dV. \quad (74)$$

El problema primario se resuelve para el campo eléctrico a través de todo el dominio. El problema auxiliar, con un dipolo magnético vertical unitario como fuente en la posición $\mathbf{x}_0$, se resuelve para el campo eléctrico auxiliar $\tilde{\mathbf{e}}$ en todo el dominio. La cantidad $\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}$ es entonces integrada para generar $\partial h_z / \partial \sigma_k$.

3.2.2. Transformada de Fourier de series de tiempo no uniformemente espaciadas

El cálculo de la matriz de sensibilidad implica transformar las series de tiempo obtenidas en nuestro esquema directo al dominio de la frecuencia. Sin embargo, un problema particular de dicho esquema es que la series de tiempo calculadas no tienen un espaciado regular en el tiempo. Por lo que una solución a dicho problema fue llevar a cabo una transformada de Fourier de series de tiempo no uniformemente espaciadas.

Una alternativa es aproximar la función muestreada por una función continua (e.g. un polinomio) e integrar estos segmentos analíticamente antes de sumarlos. La ecuación para la integración semianalítica usando interpolación lineal se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la línea recta mostrada en la Figura 14, cuya expresión esta dada por

$$\int (d_n + c_n t) e^{-i\omega t} dt. \quad (75)$$

Donde la pendiente de la línea recta esta dada por $c_n = (g_{n+1} - g_n)/(t_{n+1} - t_n)$, y la ordenada al origen por d_n

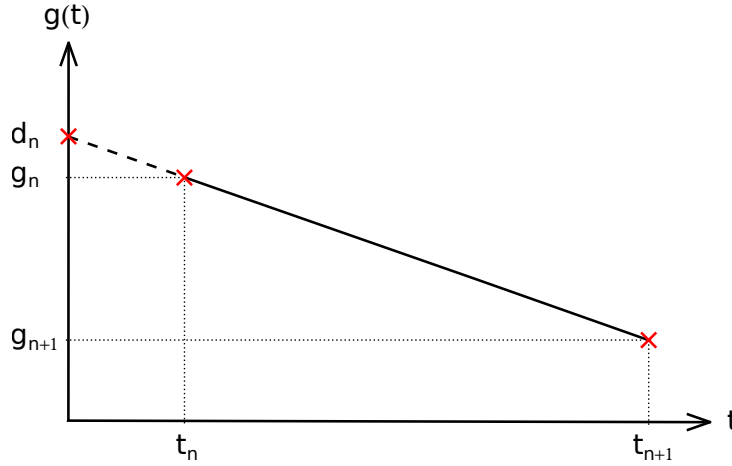


Figura 14. Geometría básica de la metodología de integración semianalítica, utilizada para llevar a cabo la Transformada de Fourier de series de tiempo no uniformemente espaciadas.

La ecuación (75) se resuelve utilizando el método de integración por partes haciendo uso de los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} u = t & \rightarrow du = dt \\ dv = e^{-i\omega t} dt & \rightarrow v = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \int (d_n + c_n t) e^{-i\omega t} dt \right\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ d_n \int e^{-i\omega t} dt + c_n \int t e^{-i\omega t} dt \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{d_n}{(-i\omega)} \int e^{-i\omega t} (-i\omega) dt + c_n \left[\frac{t}{(-i\omega)} e^{-i\omega t} - \int \frac{1}{(-i\omega)} e^{-i\omega t} dt \right] \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left[\frac{d_n}{(-i\omega)} e^{-i\omega t} - \frac{c_n t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{c_n}{i\omega} \frac{1}{(-i\omega)} e^{-i\omega t} \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left[-\frac{d_n}{i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{c_n t e^{-i\omega t}}{i\omega} + \frac{c_n}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \right\} . \end{aligned}$$

Evaluando los límites de integración resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \int (d_n + c_n t) e^{-i\omega t} dt \right\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left[-\frac{d_n}{i\omega} e^{-i\omega t_{n+1}} - \frac{c_n t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}}}{i\omega} + \frac{c_n}{\omega^2} e^{-i\omega t_{n+1}} \right] - \right. \\
&\quad \left[-\frac{d_n}{i\omega} e^{-i\omega t_n} - \frac{c_n t_n e^{-i\omega t_n}}{i\omega} + \frac{c_n}{\omega^2} e^{-i\omega t_n} \right] \Big\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ -\frac{d_n}{i\omega} e^{-i\omega t_{n+1}} - \frac{c_n t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}}}{i\omega} + \frac{c_n}{\omega^2} e^{-i\omega t_{n+1}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{d_n}{i\omega} e^{-i\omega t_n} + \frac{c_n t_n e^{-i\omega t_n}}{i\omega} - \frac{c_n}{\omega^2} e^{-i\omega t_n} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{c_n}{\omega^2} [e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}] - \frac{c_n}{i\omega} [t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}} - t_n e^{-i\omega t_n}] - \right. \\
&\quad \left. \frac{d_n}{i\omega} [e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}] \right\}.
\end{aligned}$$

Eliminando el número complejo del denominador nos queda que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \int (d_n + c_n t) e^{-i\omega t} dt \right\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{c_n}{\omega^2} [e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}] - \frac{i\omega c_n}{i\omega} \frac{c_n}{i\omega} [t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}} - t_n e^{-i\omega t_n}] - \right. \\
&\quad \left. \frac{i\omega d_n}{i\omega} \frac{d_n}{i\omega} [e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}] \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{c_n}{\omega^2} [e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}] + \frac{i\omega c_n}{\omega^2} [t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}} - t_n e^{-i\omega t_n}] + \right. \\
&\quad \left. \frac{i\omega d_n}{\omega^2} [e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}] \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\omega^2} \left[(c_n + i\omega d_n) (e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. i\omega c_n (t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}} - t_n e^{-i\omega t_n}) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \int (d_n + c_n t) e^{-i\omega t} dt \right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\omega^2} \left[(c_n + i\omega d_n) (e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}) + i\omega c_n (t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}} - t_n e^{-i\omega t_n}) \right] \right\}. \quad (76)$$

La expresión anterior puede reacomodarse de la siguiente manera,

$$X_i(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[(c_n + i\omega d_n) (e^{-i\omega t_{n+1}} - e^{-i\omega t_n}) + i\omega c_n (t_{n+1} e^{-i\omega t_{n+1}} - t_n e^{-i\omega t_n}) \right], \quad (77)$$

con $\omega = 2\pi f$, $c_n = [g(t_{n+1}) - g(t_n)] / (t_{n+1} - t_n)$ y $d_n = g(t_n) - c_n t_n$, donde $g(t)$ es la serie de tiempo con espaciado no uniforme y t el tiempo. La ecuación (77) fue diseñada por Papoulis (1962) y ha sido usada exitosamente por Bland *et al.* (1996) and Wiese y Weil (1988).

3.2.3. Cambio de variable realizado para garantizar conductividades positivas

Para poder garantizar que las conductividades siempre sean positivas fue necesario llevar un cambio de variable, el cual consistió en calcular el logaritmo base 10 de la conductividad, es decir,

$$m = \log_{10} \sigma, \quad (78)$$

y cuya derivada esta dada por

$$\frac{\partial m}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma \ln(10)}. \quad (79)$$

La ecuación (78) garantiza que la conductividad siempre sea mayor a cero. Sin embargo, nuestro modelado directo de datos EMA depende de la conductividad, σ , y no del logaritmo de la conductividad, $\ln_{10} \sigma$. Este detalle nos obliga a llevar cabo ciertas

operaciones en el espacio de los logaritmos. Por ejemplo, dado que necesitamos calcular la derivada de la función objetivo con respecto a los parámetros del modelo fue necesario utilizar la regla de la cadena para incluir el logaritmo de la conductividad en dicha operación. Esto es

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \sigma}. \quad (80)$$

Despejando de la ecuación (80) nos queda que

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}{\frac{\partial m}{\partial \sigma}}. \quad (81)$$

Haciendo uso de la ecuación (79) tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \sigma \ln(10) \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (82)$$

donde $\partial f / \partial \sigma$ se obtiene a partir de la ecuación (74). La ecuación (82) es la expresión de derivada de datos EMA que usaremos en el algoritmo de gradientes conjugados (Ver sección 5.3).

3.2.4. Calibración del cálculo de sensibilidades de los datos EMA

Para comprobar el funcionamiento del cálculo de la sensibilidad dada por la ecuación (74) se diseñaron dos experimentos. El primero contempla la comparación de la derivada de los datos con respecto a la conductividad, $\frac{\partial B_z}{\partial \sigma}$, cuando ésta se calcula de dos formas diferentes, es decir, a partir de una derivada analítica y de una derivada numérica que contempla perturbaciones de la conductividad en el modelo. El segundo ejemplo contempla la comparación de la derivada de la función objetivo con respecto a la conductividad, $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$, cuando se considera solamente el ajuste de los datos en la función objetivo, es decir, $f = f_A$ (Ver sección 5.2.5). Para este segundo ejemplo también se considera la comparación de una derivada analítica con una derivada numérica obtenida a partir de perturbaciones de la conductividad del modelo.

3.2.4.1. Derivada de los datos con respecto a la conductividad

Para entender mejor el cálculo de la sensibilidad a partir de perturbaciones tomemos como ejemplo la Figura 15, la cual representa una sección bidimensional de un modelo del subsuelo de la Tierra. Nótese que existe simetría entre la geometría del modelo y las posiciones del transmisor y receptor. La Figura 15a representa el cálculo del campo magnético en el receptor cuando se utiliza un modelo homogéneo. Por otro lado, la Figura 15b representa el cálculo del campo magnético en el receptor cuando se ha perturbado solamente una celda del modelo.

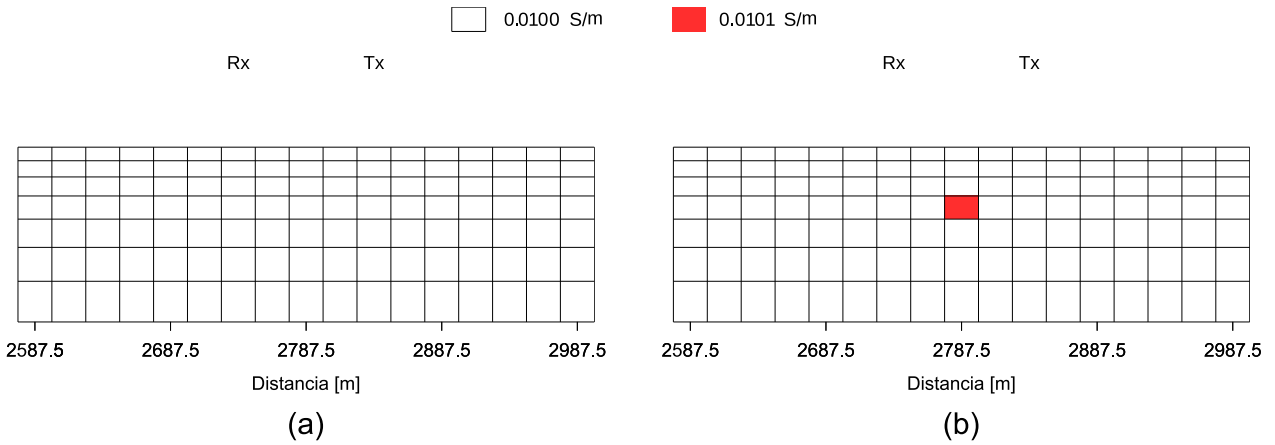


Figura 15. a) Modelo homogéneo de conductividad 0.0100 S/m. b) Modelo homogéneo de conductividad 0.0100 S/m que contiene una perturbación de 0.0101 S/m en su interior. Tx y Rx representan la posición del transmisor y receptor sobre la superficie de la tierra, respectivamente.

Una expresión matemática simple para el cálculo de sensibilidades a partir de perturbaciones empleando los modelos antes mostrados esta dada por

$$\frac{\Delta B_z}{\Delta \sigma_k} = \frac{B_{zh} - B_{zp}}{0.0100 - 0.0101}, \quad (83)$$

donde, B_z es el campo magnético medido en el receptor, h y p hacen referencia a los modelos homogéneo y perturbado, respectivamente.

La Figura 16 muestra las diferencias que existen entre dos formas diferentes (ecuaciones 74 y 83) de calcular la matriz sensibilidad para datos EMA. Dado que el cálculo de la sensibilidad se lleva a cabo en el dominio de las frecuencias, la Figura 16 muestra tanto la parte real como la parte imaginaria de la derivada. El ejemplo mostrado en la Figura 15 se repitió para 21 celdas diferentes, con el objetivo de ver el comportamiento

de la derivada cuando se perturban varias celdas.

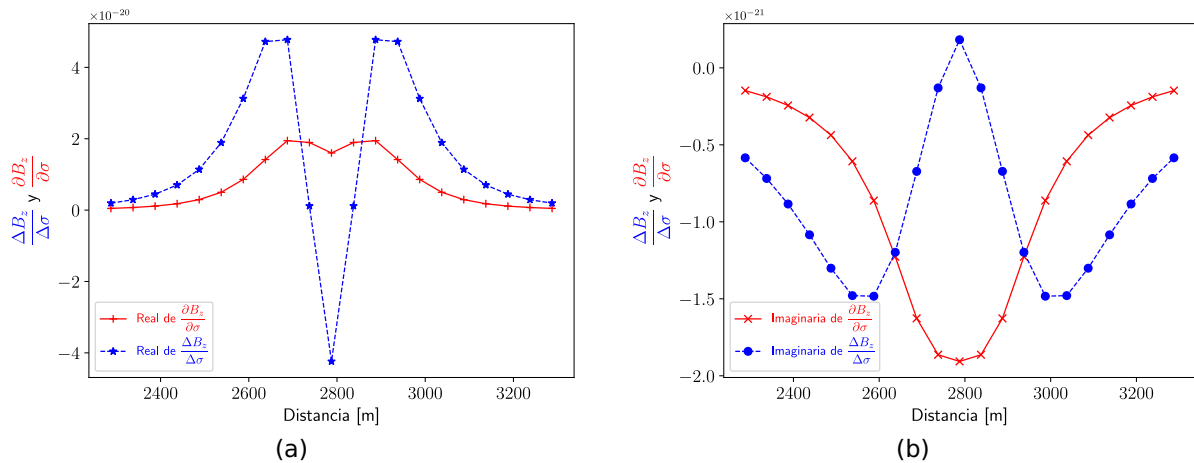


Figura 16. Derivada de los datos con respecto a la conductividad a partir de una derivada analítica (Curvas color rojo) y una derivada numérica (Curvas color azul). a) Parte real de la derivada. b) Parte imaginaria de la derivada.

En la Figura 16 se nota que las magnitudes de la parte real son un orden de magnitud mayores que las magnitudes de la parte imaginaria, por lo que, son las partes reales las que más contribuyen en la magnitud de la derivada. También se observa simetría con respecto al centro del arreglo Tx-Rx mostrado en la Figura 15, sin embargo, las magnitudes tanto de la parte real como de la imaginaria difieren bastante para las dos metodologías utilizadas, existiendo incluso cruces por cero.

3.2.4.2. Derivada de la función de ajuste de los datos con respecto a la conductividad

En esta sección se evalúan los valores de la función objetivo y de su derivada modificando el valor de la conductividad. Para este ejemplo hicimos uso de una geometría igual a la de la Figura 15. Para tener un marco de comparación, la derivada la calculamos a partir de perturbaciones

$$\frac{\Delta f}{\Delta \sigma} = \frac{f(\alpha + 0.001) - f(\alpha - 0.001)}{0.002}; \quad (84)$$

así como a través de la ecuación (74).

El experimento se diseñó de tal manera que el mínimo de la función objetivo coincide con un valor α igual a 1. Éste comportamiento se observa en la Tabla 3, donde

es claro que el mínimo de la función y el cambio de signo en la pendiente de la curva ocurre cuando $\alpha = 1$. Es notable que los valores de la derivada analítica tienen signo invertido.

En la Figura 17a se muestran los valores de la función objetivo, f , al modificar la conductividad de una celda. En la Figura 17b se muestra la derivada de la función objetivo a partir de perturbaciones, $\Delta f/\Delta\sigma$, y la derivada analítica, $\partial f/\partial\sigma$. Véase que las magnitudes de ésta última se han multiplicado por -1, con el objetivo de poder comparar la forma de las curvas.

Tabla 3. Función objetivo y su derivada analítica y numérica

α	f	$\partial f/\partial\sigma$	$\Delta f/\Delta\sigma$
0.0	2.13E-38	7.79E-40	-1.18E-37
0.2	7.03E-39	3.30E-40	-3.88E-38
0.4	1.90E-39	1.19E-40	-1.56E-38
0.6	3.44E-40	3.28E-41	-6.08E-39
0.8	2.20E-41	2.03E-42	-3.33E-39
1.0	6.39E-41	-6.37E-42	2.04E-40
1.2	1.92E-40	-7.29E-42	-9.15E-40
1.4	3.09E-40	-5.91E-42	5.59E-40
1.6	4.07E-40	-4.30E-42	-1.42E-40
1.8	4.95E-40	-3.00E-42	-1.64E-39
2.0	5.69E-40	-2.03E-42	1.96E-40

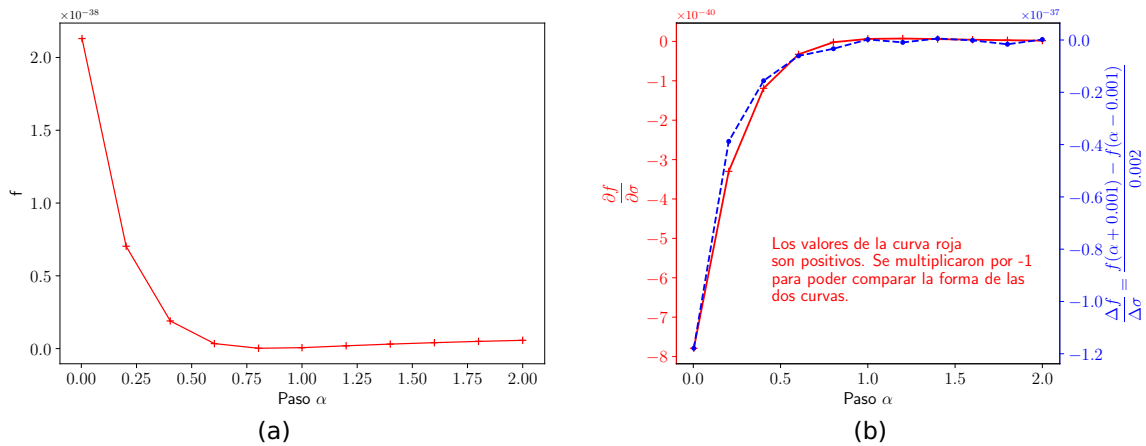


Figura 17. a) Función objetivo. b) Derivadas numérica y analítica de la función objetivo; la derivada numérica se calcula a partir de la ecuación (84) y la derivada analítica a partir de la derivada de la ecuación (103).

De los dos ejemplos anteriores observamos que aún cuando la forma de las curvas de los valores de derivada es similar, no lo son sus magnitudes. Por lo que concluimos

que si usáramos los valores de derivada analítica en el proceso de inversión estaríamos incurriendo en errores al momento de calcular el tamaño de los paso y la dirección de búsqueda, según lo establecido por la metodología de gradientes conjugados (Ver sección 5.3). Este hecho nos llevaría a la generación de modelos tridimensionales de la conductividad del subsuelo erróneos, lo cual se traduciría en una mala interpretación de la información recabada.

Capítulo 4. Modelado directo y matriz de sensibilidad de datos potenciales

Los métodos de gravedad y magnetismo frecuentemente son agrupados y llamados métodos potenciales, sin embargo, hay diferencias básicas entre ellos. La gravedad es una propiedad inherente de la masa, mientras que el estado magnético de la materia depende de otros factores, tales como campos inductivos y/o orientaciones de los dominios magnéticos. Las variaciones de densidad son relativamente pequeñas, y los efectos de gravedad de masas locales son muy pequeñas comparadas con el campo generado por la Tierra, mientras que las anomalías magnéticas pueden ser relativamente grandes cuando se les compara con el campo principal. La variación temporal del campo magnético es muy compleja, mientras que el campo gravitacional es relativamente constante (ignorando las mareas terrestres). Esto también se debe al comportamiento bipolar del campo magnético, mientras que el campo gravitacional se considera monopolar. La adquisición de datos de gravedad es más costosa que la adquisición de datos magnéticos, y el trabajo de campo es más lento y requiere personal más calificado (Telford *et al.*, 1990).

La exploración magnética ha sido usada ampliamente a través de los años, resultando en una gran cantidad de datos con enormes áreas de cobertura. Los datos magnéticos han sido usados para el mapeo de estructuras geológicas, especialmente en la etapa de reconocimiento de la exploración, pero cuando es usada en prospección a detalle, deben ser usados algoritmos de inversión robustos y eficientes.

Por otro lado, la adquisición de datos de gravedad ha sido usada en investigaciones con un amplio rango de escalas, tales como estudios tectónicos, exploración de minerales, exploración petrolera, en ingeniería y en problemas ambientales. La inversión de datos de gravedad constituye un paso importante en la interpretación cuantitativa debido a que la construcción de modelos de contraste de densidad incrementa la cantidad de información que se extrae de los datos de gravedad.

Sin embargo, una dificultad primordial con la inversión de datos potenciales es la inherente no unicidad. Por el teorema de Gauss, si la distribución del campo es conocida solamente en una superficie limitante, hay muchas distribuciones de fuentes equivalentes dentro del frontera que pueden reproducir el campo conocido.

Para el caso magnético, cualquier campo medido en la superficie de la tierra puede ser reproducido por una delgada zona infinitesimal de dipolos magnéticos por debajo de la superficie. Para el caso de gravedad, este mismo efecto se da si una de tales distribuciones es una capa delgada infinitesimal de masa justo por debajo de la superficie.

Desde un punto de vista matemático, esto significa que no existe resolución vertical inherente en datos potenciales. Una segunda fuente que origina la no unicidad es el hecho de que las observaciones magnéticas y de gravedad son finitas en número e inexactas. Si existe un modelo que reproduzca los datos, hay otros modelos que reproducirán los datos con el mismo grado de exactitud (Li y Oldenburg, 1996, 1998).

Una parte fundamental del proceso de inversión es conocer la respuesta de un modelo de una propiedad física del subsuelo (densidad y magnetización), con la cual se comparan los datos observados. En la literatura (Grant y West, 1965; Dobrin y Savit, 1960; Telford *et al.*, 1990) es ampliamente descrita la respuesta analítica de gravedad y magnética de algunas estructuras geométricas conocidas a diferentes profundidades y de distintas dimensiones, tales como la esfera, el cilindro, prismas rectangulares y losas. Sin embargo, debido a que en la naturaleza las formas que adquieren las diferentes estructuras rocosas son más complejas, usamos aproximaciones de éstas suponiendo que el subsuelo consta de un agregado de formas geométricas conocidas. De ésta manera, la respuesta de gravedad y magnética será la suma de los campos producidos por cada cuerpo básico.

Aunque cualquier medio o cuerpo puede ser dividido en elementos con formas geométricas arbitrarias para su modelado, una técnica muy utilizada en la práctica, debido a su relativa facilidad de visualización geométrica, planteamiento matemático y computacional, consiste en la discretización del medio en prismas rectangulares.

En este capítulo se muestran las ecuaciones y metodologías en las que están basadas nuestros modelados directos de datos magnéticos y de gravedad, así como las matrices de sensibilidad que serán utilizadas para la inversión de datos.

4.1. Datos magnéticos

4.1.1. Modelado directo de datos magnéticos

Nuestro modelado directo de datos magnéticos aéreos esta basado en su totalidad en el desarrollo propuesto por Gallardo (1997) y que ha sido utilizado por Fregoso-Becerra (2010) y Romero-Ruiz (2015). Dicho desarrollo presenta una expresión para calcular el campo magnético de un prisma con magnetización uniforme.

El desarrollo inicia considerando la expresión del potencial magnético escalar

$$A(\mathbf{r}) = C \int \int \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) dV' \quad (85)$$

donde $\mathbf{r}$ es el radio vector al punto de análisis, $\mathbf{r}'$ es el radio vector al punto elemental del cuerpo, C es una constante magnética cuyo valor en el sistema internacional de unidades es $C = \mu_0/4\pi$, con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$, y $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ es el vector de magnetización en un punto elemental del cuerpo.

El campo magnético $\mathbf{b}$ producido por un cuerpo en general viene dado por

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = -\nabla(A(\mathbf{r})). \quad (86)$$

Al sustituir las ecuaciones (85) en (86) da como resultado

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = -C \nabla \int \int \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) dV'. \quad (87)$$

Considerando un cuerpo prismático de magnetización uniforme, el campo magnético $\mathbf{b}(x, y, z)$ en un punto cualquiera es

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = -C \nabla \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{M} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) dx' dy' dz', \quad (88)$$

donde x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 y z_2 son las coordenadas de los límites del prisma.

La ecuación anterior puede expresarse en términos matriciales de la siguiente manera

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \\ \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad (89)$$

con $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$, $\Delta z = z' - z$ y $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$. Además M_x , M_y y M_z son las componentes del vector de magnetización en las direcciones x , y y z , respectivamente.

Si trabajamos con mediciones en la dirección del campo magnético terrestre, la componente del campo medido en esta dirección (b) es

$$b = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}), \quad (90)$$

donde $\mathbf{U}^T$ es el vector unitario en dirección del campo magnético terrestre, definido a su vez por sus cosenos directores l , m , n .

La ecuación (90) corresponde al campo magnético producido por un prisma rectangular con magnetización homogénea (Bhattacharyya, 1964). En la Figura (18) se observa la geometría del cálculo de campo magnético generado por solamente un prisma. De tal forma que el campo magnético total en un punto determinado producido por un conjunto de N prismas magnetizados homogéneamente está dado por

$$b = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{b}_i(\mathbf{r}), \quad (91)$$

es decir, la suma aritmética del campo magnético producido por cada uno de los prismas. Al igual que Fregoso-Becerra (2010) y Romero-Ruiz (2015), en este trabajo se hace la suposición de que el vector de magnetización está orientado en dirección del campo magnético terrestre para cada uno de los prismas, con ello éste se reduce a un solo valor de magnetización para cada celda. Por lo tanto, la ecuación (90) se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = [l \ m \ n] \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \\ \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} M, \quad (92)$$

donde M es la magnitud de la magnetización del prisma (Ver Anexo B).

4.1.2. Matriz de sensibilidad de datos magnéticos

Para nuestro caso, el campo magnético total medido en determinada posición i y producido por un conjunto de N prismas magnetizados uniformemente en la dirección del campo magnético terrestre se obtiene al combinar las ecuaciones (91) y (146), de tal manera que

$$b_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} M_j, \quad (93)$$

donde

$$a_{ij} = [l \ m \ n] \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \\ \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (94)$$

es constante en cada prisma. Los subíndices i y j especifican el campo magnético medido en la i -ésima posición asociado al j -ésimo prisma, $\Delta x_1 = x_i - x_j$ y $\Delta x_2 = x_i - x_{j+1}$, ..., representan la distancia del punto de observación a los bordes del prisma (Ver Figura 18) . La matriz de derivadas parciales o matriz de sensibilidad de los datos de magnetismo esta dada por (94), debido a la linealidad sobre M que existe en (93).

4.2. Datos de gravedad

4.2.1. Modelado directo de datos de gravedad

El efecto de gravedad generado por un prisma rectangular con densidad uniforme se obtiene de la ley de Newton de Gravitación Universal, dada por

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\Delta \vec{r}|^2} \Delta \hat{r}, \quad (95)$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza de atracción entre las dos masas m_1 y m_2 , γ es la constante de gravitación y $|\Delta \vec{r}|$ es la distancia entre las dos masas m_1 y m_2 . Esta expresión se cumple cuando la distancia que separa los cuerpos es relativamente más grande que las dimensiones de los mismos.

Combinando ahora la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m_2 \vec{g}$ (que relaciona la fuerza con la aceleración), con la ley de atracción de masas (95) se tiene

$$\vec{g} = \gamma \frac{m_1}{|\Delta \vec{r}|^2} \Delta \hat{r}. \quad (96)$$

Tomando en cuenta la Figura 18, considerando elementos diferenciales de volumen dv con densidad ρ , la ecuación (96) se puede escribir como

$$d\vec{g}(\vec{r}) = \gamma \frac{\rho(\vec{r}')}{|\Delta\vec{r}|^2} \Delta\hat{r} dv. \quad (97)$$

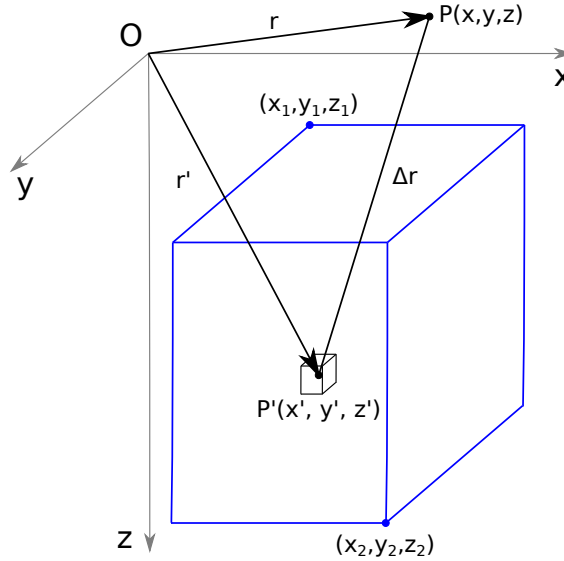


Figura 18. Prisma básico de magnetización y densidad uniforme. Los lados del prisma son paralelos a los ejes cartesianos, z_1 corresponde a la profundidad al techo del prisma y z_2 al piso de éste

El efecto total del prisma se obtiene integrando en todo el cuerpo. Tomando la componente vertical g_z como el valor a determinar se obtiene la expresión

$$g_z(\vec{r}) = \gamma \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho(\vec{r}')(z' - z)}{|\Delta\vec{r}|^3} dx' dy' dz'. \quad (98)$$

Ahora, tomando en cuenta que el prisma tiene densidad constante, el término de la densidad sale de la integral y la ecuación (98) se simplifica. Resolviendo las integrales (Ver Anexo C) se llega a una expresión para la componente vertical de la atracción gravitacional, g_z , de un prisma rectangular de densidad constante en un punto (x_0, y_0, z_0) , dada por

$$g_z(x_0, y_0, z_0) = \gamma \rho \left\{ z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) - x \ln(r + y) - y \ln(r + x) \right\} \bigg|_{\Delta x_1}^{\Delta x_2} \bigg|_{\Delta y_1}^{\Delta y_2} \bigg|_{\Delta z_1}^{\Delta z_2}. \quad (99)$$

4.2.2. Matriz de sensibilidad de los datos de gravedad

Debido a la linealidad sobre ρ en (99), la matriz de derivadas parciales o matriz de sensibilidad entre los datos de gravedad y la densidad esta dada por

$$A_{ij} = \gamma \left\{ z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) - x \ln(r+y) - y \ln(r+x) \right\} \begin{vmatrix} \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta z_2 \\ \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 \end{vmatrix}. \quad (100)$$

para cada punto de observación i . Luego multiplicamos la matriz obtenida por los valores de densidad ρ_j para cada prisma j .

4.3. Respuesta magnética y de gravedad de un prisma rectangular

Para poder comprobar el buen funcionamiento de los dos modelados antes descritos, recreamos los experimentos propuestos por Fregoso-Becerra (2010). El primer experimento consiste de un modelo sintético de un prisma rectangular con densidad de 1 gr/cm^3 y magnetización 1 A/m . Dicho cuerpo esta rodeado por un semiespacio homogéneo de densidad 0 gr/cm^3 y magnetización 0 A/m . La declinación e inclinación del campo magnético terrestre se consideraron de 0° y de 51° , respectivamente. Se tomaron 1681 estaciones para cada método geofísico. El espaciamiento entre estaciones fue de 2 metros en la dirección Norte y 2 metros en la dirección Este. Las dimensiones del cuerpo son de 20 metros por lado y 10 metros de espesor. La parte más somera del cuerpo se encuentra a 30 metros de profundidad. Ver Figura 19.

La Figura 20 muestra como nuestro algoritmo fue capaz de reproducir los resultados de Fregoso-Becerra (2010). La Figura 20c muestra una anomalía asimétrica, debida principalmente por la inclinación y declinación utilizadas. Por otro lado la Figura 20d muestra una anomalía simétrica positiva, debido al contraste de densidad positivo del modelo.

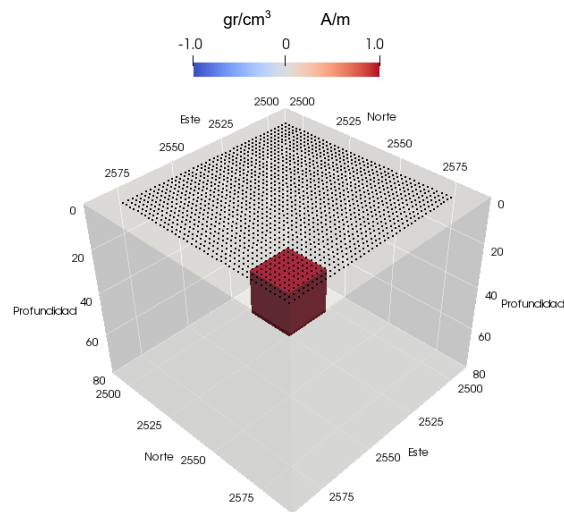


Figura 19. Prisma rectangular básico de densidad y magnetización uniforme (cuerpo color guinda). Los puntos negros representan la posición de las estaciones en la superficie del modelo. La escala de color puede ser gr/cm^3 o A/m .

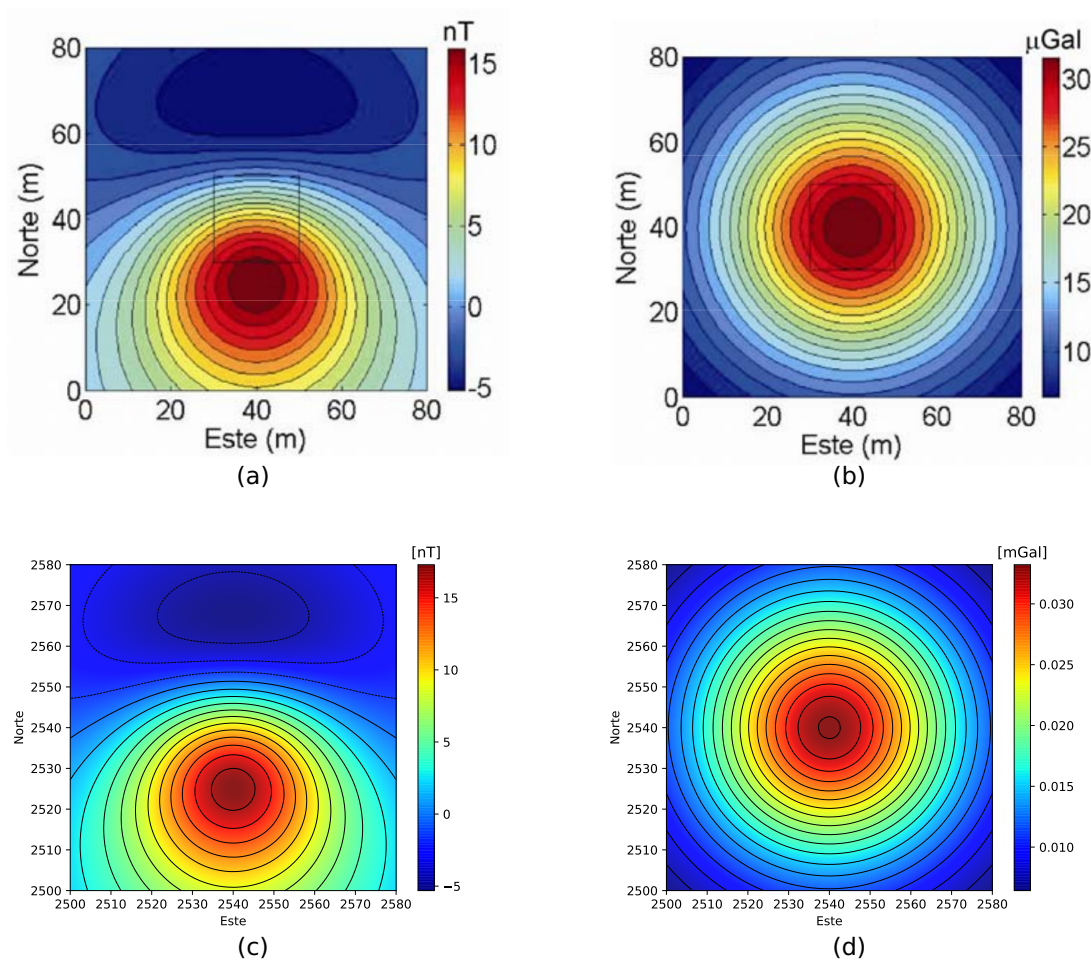


Figura 20. a) Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (Tomada de Fregoso-Becerra, 2010). b) Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (Tomada de Fregoso-Becerra, 2010). c) Respuesta magnética a partir del algoritmo propuesto en este trabajo. d) Respuesta de gravedad a partir del algoritmo propuesto en este trabajo.

4.4. Respuesta magnética y de gravedad de dos prismas rectangulares

El segundo experimento propuesto por Fregoso-Becerra (2010) consiste de 2 prismas rectangulares encerrados por un medio homogéneo. Dependiendo del algoritmo a utilizar la propiedad puede ser densidad (gr/cm^3) o magnetización (A/m). En la Figura 21 se muestran los modelos usados en cada experimento y las 6561 estaciones utilizadas para cada uno. En la Figura 21a se tiene un contraste positivo de densidad o magnetización en los dos cuerpos. En la Figura 21b un cuerpo tiene un contraste positivo y el otro cuerpo un contraste negativo de densidad o magnetización. En la Figura 21c los dos cuerpos tienen un contraste negativo de densidad o magnetización.

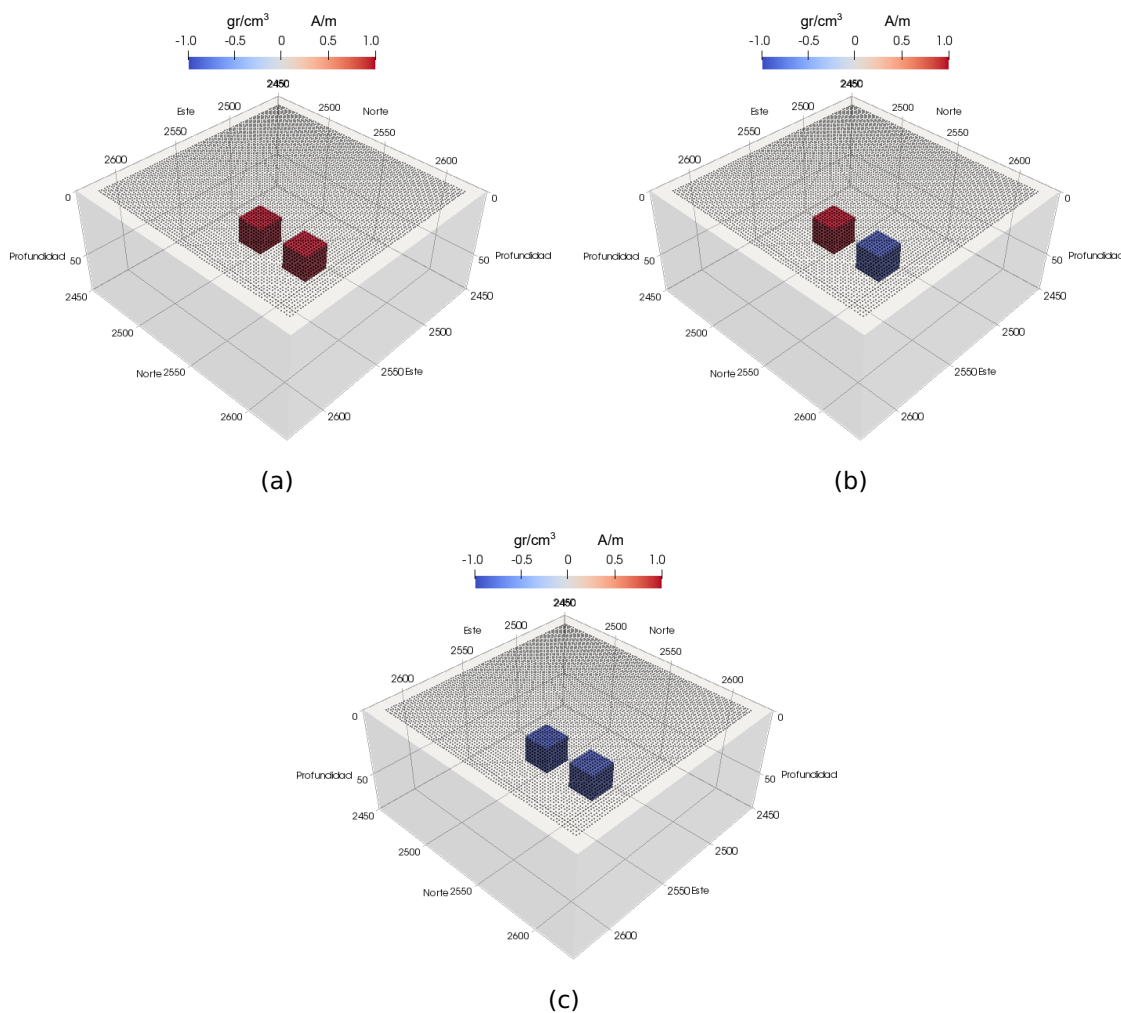


Figura 21. a) Los dos cuerpos tienen un contraste positivo de densidad o magnetización. b) Uno de los cuerpos tiene un contraste positivo y el otro cuerpo un contraste negativo. c) Los dos cuerpos tienen un contraste negativo de densidad y magnetización. Los puntos en la superficie del modelo representan las estaciones de magnetismo y gravedad. La escala de color puede ser gr/cm^3 o A/m .

Las Figuras 22, 23 y 24 muestran como nuestros algoritmos repropuyen nuevamente los resultados de Fregoso-Becerra (2010)

Para el caso donde los contrastes son positivos (Figura 21a), observamos que la Figura 22c muestra una anomalía más compleja que la anomalía de la Figura 20c. Ésto debido precisamente a la presencia de un segundo cuerpo en el subsuelo. Sin embargo, es posible determinar la presencia de dichos cuerpos. Para el caso de la anomalía de gravedad (Figura 22d) observamos una sola anomalía, la cual se forma a partir de la contribución de ambos cuerpos, por lo que, la presencia de los dos cuerpos no es notoria.

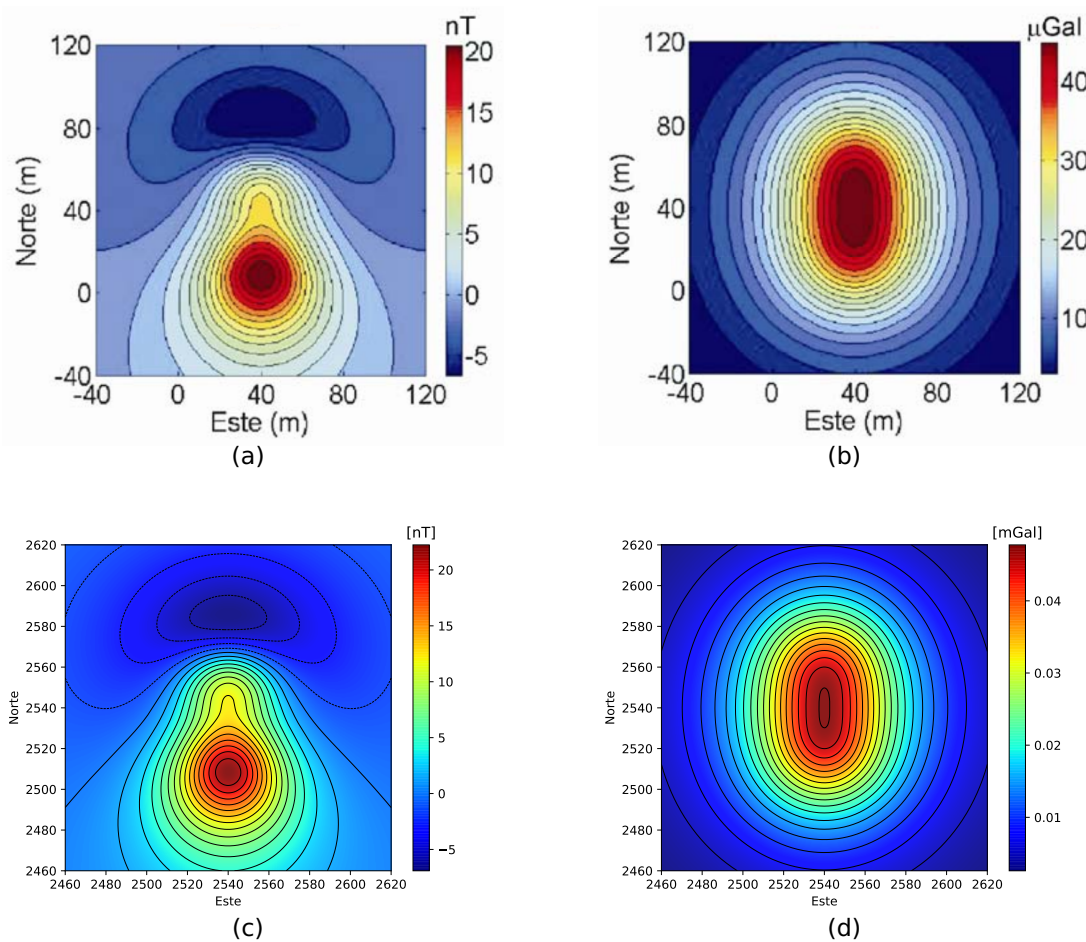


Figura 22. Respuesta de dos prismas rectangulares con contraste de densidad o magnetización positiva. a) y b) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, reportados por Fregoso-Becerra (2010). c) y d) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, de dos prismas rectangulares calculadas con los modelos propuestos en este trabajo.

Mayor complejidad en la forma de la anomalía se observa para el caso donde existe un contraste positivo y uno negativo en el subsuelo (Figura 23). Sin embargo, dicha complejidad en la anomalía facilita la determinación de los límites de los cuerpos.

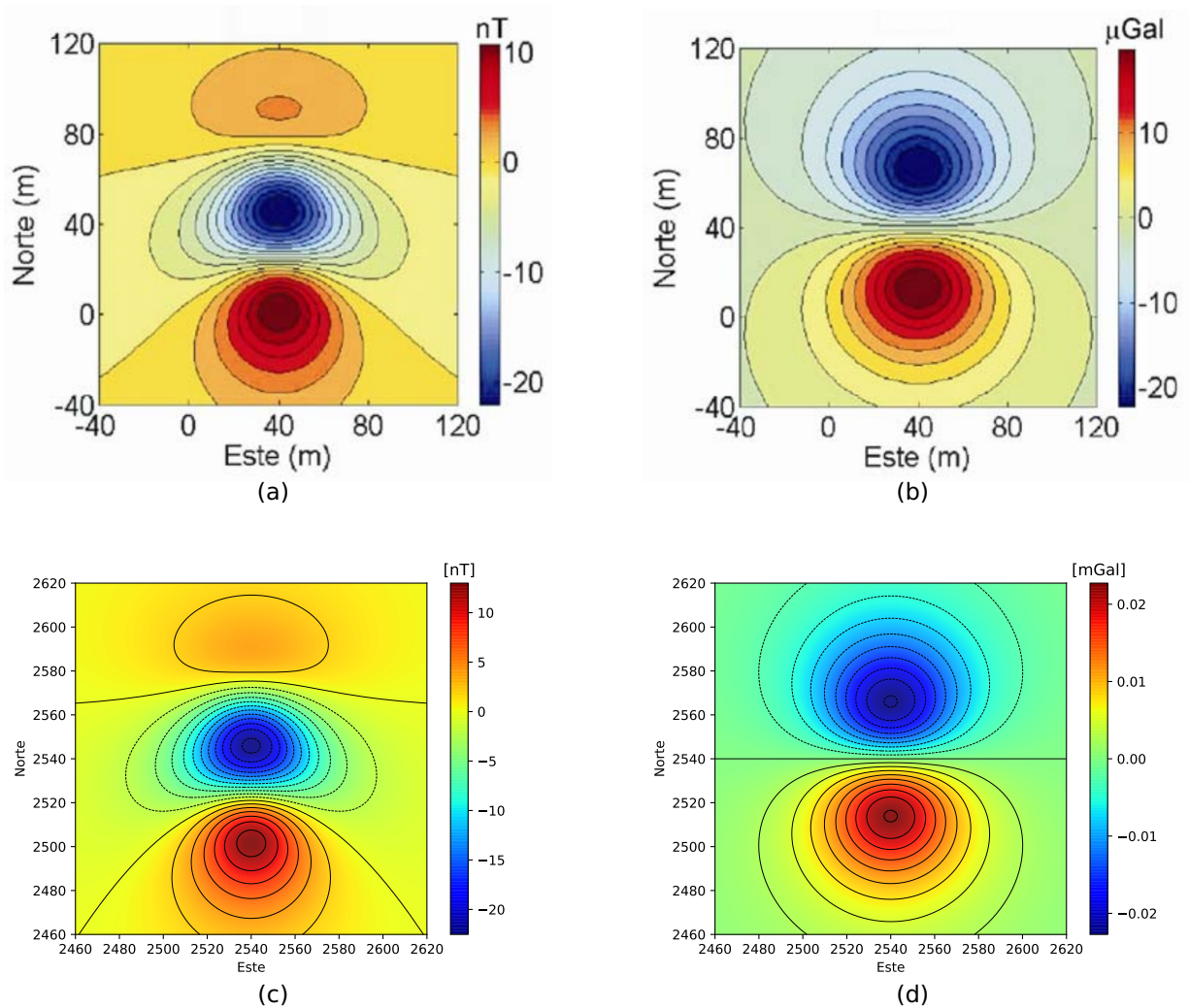


Figura 23. Respuesta de dos prismas rectangulares, uno con contraste positivo y el otro con contraste negativo de densidad o magnetización. a) y b) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, reportados por Fregoso-Becerra (2010). c) y d) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, de dos prismas rectangulares calculadas con los modelados propuestos en este trabajo.

El caso donde los contrastes son negativos, Figura 21c, es similar al caso donde existen solamente contrastes positivos. En la anomalía magnética la detección de dos cuerpos es posible, 24c, mientras que en la anomalía de gravedad, los efectos de los dos cuerpos están sumados, por lo que la presencia por separado de ambos cuerpos es difícil de detectar (Figura 24d).

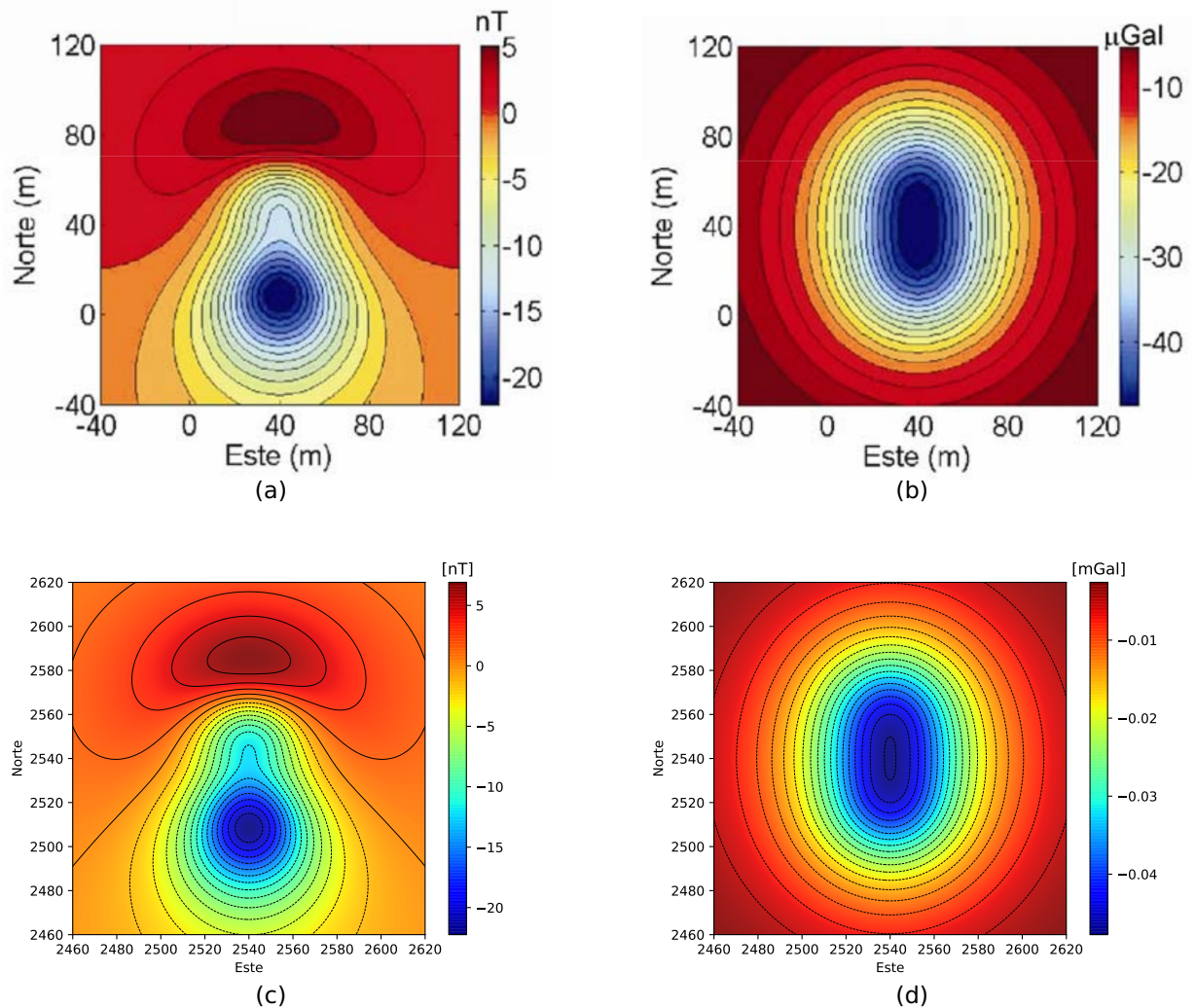


Figura 24. Respuesta de dos prismas con contraste de densidad o magnetización negativa. a) y b) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, reportados por Fregoso-Becerra (2010). c) y d) son las respuestas magnética y de gravedad, respectivamente, de dos prismas rectangulares calculadas con los modelados propuestos en este trabajo.

En los tres ejemplos anteriores nuestro algoritmo reproduce los resultados obtenidos por Fregoso-Becerra (2010).

Capítulo 5. Inversion conjunta tridimensional

Para poder conocer con mayor precisión la estructura, composición y fenómenos físicos que ocurren en el subsuelo de una región de interés cualquiera, es necesario tener acceso a varios tipos de datos geofísicos; sin embargo, es común que la interpretación de cada uno de ellos se desarrolle de manera individual (Saucedo-Andrade, 2007).

Actualmente se han desarrollado metodologías que permiten integrar información obtenida a partir de diferentes técnicas de exploración geofísica (Saunders *et al.*, 2005; Lines *et al.*, 1988; Gallardo, 2004). Con el objetivo de caracterizar mejor el subsuelo, dichas técnicas realizan una comparación de los modelos obtenidos a partir de los diferentes datos. Sin embargo, es posible que al comparar los diferentes modelos geofísicos obtenidos existan diferencias sustanciales entre ellos. La discrepancia entre los distintos modelos puede deberse a las incompatibilidades entre los datos observados en campo y los datos calculados a partir del modelado directo (debido a la inexactitud, suposiciones y aproximaciones consideradas en las ecuaciones). Otra causa de la discrepancia entre los modelos geofísicos se debe a la no unicidad que presentan los métodos geofísicos, es decir, al hecho de que diferentes modelos pueden generar la misma respuesta o señal geofísica.

Con el objetivo de reducir las diferencias entre los modelos obtenidos es necesario llevar a cabo, de manera simultánea, el proceso de ajuste de los datos y la comparación de los modelos, lo cual se conoce como inversión conjunta.

5.1. Parametrización del modelo del subsuelo

El objetivo de un problema inverso en geofísica es la determinación de los parámetros del subsuelo que mejor ajusten los datos observados en campo. Para el caso de los datos EMA el parámetro a determinar es la conductividad eléctrica, para los datos AM el parámetro a determinar es la magnetización y para los datos de gravedad el parámetro buscado es la densidad. En la Figura 25 se muestra la posición de cada uno de los parámetros a determinar con respecto al sistema de referencia mostrado. En dicha Figura el subsuelo se supone heterogéneo en las tres direcciones (x, y, z), definiendo así un subsuelo tridimensional.

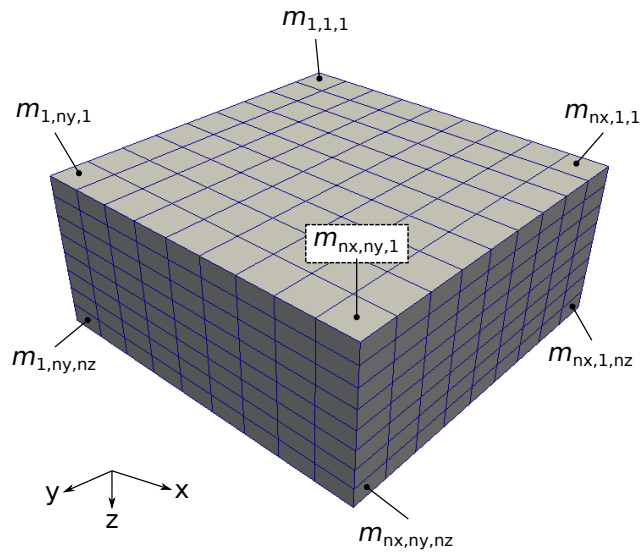


Figura 25. Parametrización del modelo del subsuelo. La m puede ser conductividad, magnetización o densidad. n_x , n_y y n_z son el número total de celdas en cada una de las 3 direcciones.

En el interior de cada celda se supone que cada parámetro es constante, aún cuando las dimensiones de las celdas pueden variar (ver Figura 2).

5.2. Función objetivo

Meju (1994) describe al problema inverso como: "Dada cierta información sobre los valores de algunas cantidades medidas (campos o datos experimentales), una relación teórica es usada para calcular valores de un grupo de parámetros que explican o reproducen las observaciones de campo". En el caso de una inversión conjunta queremos minimizar el error de ajuste para dos conjuntos de datos geofísicos simultáneamente, por lo que es necesario plantear una ecuación, a la cual llamaremos función objetivo, y que nos permita llevar a cabo el proceso de minimización antes mencionado.

Una función objetivo debe ser cuantitativa. Por si sola debe representar modelos aceptables del subsuelo, de tal forma que cada vez que su magnitud sea mejorada también los modelos obtenidos sean mejores. En este trabajo la función objetivo propuesta esta formada por 4 elementos fundamentales. El primer elemento es una condición que tiene por objetivo comparar los datos observados en campo con datos calculados con el modelado teórico. La segunda componente es la condición de suavidad, que pretende reducir lo más posible la no unicidad y ayuda a generar modelos que sean geológicamente aceptables. El tercer elemento consiste de toda aquella información previa que se conozca de la zona de estudio, comúnmente denominado

como modelo *a priori*. El cuarto elemento es la condición de similitud estructural, dada por la función de gradientes cruzados. A continuación se explica en mayor detalle cada uno de los elementos de la función objetivo.

5.2.1. Ajuste de los datos

El primer criterio para plantear el problema inverso es encontrar un modelo, $\mathbf{m}$, que reproduzca lo mejor posible los datos observados en campo. Una medida de esto está dado por el ajuste

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}), \quad (101)$$

donde $\mathbf{d}$ son los datos observados en campo y $\mathbf{f}(\mathbf{m})$ son la respuesta teórica del modelo. El modelo, $\mathbf{m}$, representa algunos parámetros físicos del subsuelo discretizados. Con éste ajuste se puede definir una parte de la función objetivo que determine si el modelo justifica de mejor o peor manera los datos observados. Uno de los planteamientos más usados para llevar a cabo lo anterior es a través de la norma cuadrática de los residuales. La forma matricial de esta norma esta dada por

$$f_A = \|\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})\|_{\mathbf{C}_d^{-1}}^2, \quad (102)$$

donde $\mathbf{C}_d$ es la covarianza de los datos de campo (asumida diagonal). La versión discreta de la ecuación anterior esta dada por

$$f_A = \sum_{p=1}^L \left[\frac{d_p - f_p(m)}{\sigma_p} \right]^2, \quad (103)$$

donde L es el número total de datos y σ_p es la desviación estándar de los datos de campo.

5.2.2. Regularización

En geofísica es de esperar que exista un número infinito de modelos que puedan justificar los datos observados. Para minimizar lo más posible este tipo de problemas

es necesario agregar información adicional hasta que el problema se convierta en un problema bien definido. A esta estrategia se le conoce como regularización (Silva-Avalos, 2015) y es una forma efectiva de invertir una colección finita de datos inexactos. Consiste en imponer la restricción de que la solución deseada sea suave. Esta medida puede estar basada en la física del problema o en consideraciones puramente geológicas (Meju, 1994). Lo que se desea es que los parámetros del modelo varíen lentamente con la posición, es decir, que podemos escoger minimizar la diferencia entre parámetros físicamente adyacentes. La versión matricial de la operación antes mencionada se expresa de la siguiente manera

$$f_R = \|\mathbf{Dm}\|^2, \quad (104)$$

donde $\mathbf{D}$ es el operador de suavidad que actúa sobre los parámetros $\mathbf{m}$. El equivalente discreto de la ecuación (104) se expresa como

$$f_R = \sum_{q=1}^M (D_{qk} m_k)^2. \quad (105)$$

5.2.3. Información *a priori*

La información *a priori* sirve para limitar las soluciones obtenidas de tal manera que se satisfagan cualquiera de nuestras expectativas bien definidas de los parámetros del modelo. La información *a priori* puede tomar varias formas. Puede ser información geofísica previamente obtenida, registros de pozo, muestras de barreno o también puede ser dictada por la física del problema. Generalmente, estos datos externos ayudan a seleccionar una solución de todas aquellas que sean equivalentes. La expresión matricial con la cual incluimos dicha información en la función objetivo esta dada por expresión

$$f_a = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_a\|^2, \quad (106)$$

donde $\mathbf{m}_a$ es el modelo que contiene los parámetros previamente conocidos del modelo $\mathbf{m}$. La versión discreta de la ecuación (106) esta dada por

$$f_a = \sum_{k=1}^N (m_k - m_{ak})^2. \quad (107)$$

5.2.4. Gradientes cruzados

La inversión conjunta esta basada en la interrelación que existe entre los diferentes parámetros físicos del subsuelo. Sin embargo, esto es muy complicado de alcanzar debido a que en el sitio de estudio se requiere el monitoreo de diferentes factores tales como litología, porosidad, humedad, fracturamiento, presión, temperatura, etc., los cuales no siguen las mismas leyes físicas ni son idénticos en todos los ambientes geológicos. Sin embargo, una relación que sí es posible esperar es la similitud estructural de la distribución de los parámetros físicos del subsuelo obtenidos a partir de técnicas geofísicas diferentes. En general, las propiedades del subsuelo varían con la posición y dichas variaciones pueden ser caracterizadas por su magnitud y dirección de cambio. Por lo que una distribución común de los cambios puede determinar si los modelos del subsuelo obtenidos a partir de dos tipos de datos geofísicos diferentes son estructuralmente similares o no.

Dichos atributos se pueden utilizar para establecer una formulación matemática y de esta manera cuantificar la similitud estructural de las heterogeneidades de los modelos obtenidos en un proceso de inversión. La función de gradientes cruzados, propuesta por Gallardo y Meju (2003, 2004), hace uso del principio de similitud estructural y mide matemáticamente la similitud geométrica de las estructuras generadas y definidas por dos modelos del subsuelo. La función vectorial de gradientes cruzados $\boldsymbol{\tau}$ esta dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(x, y, z) &= \nabla \mathbf{m}_1(x, y, z) \times \nabla \mathbf{m}_2(x, y, z) \\ &= \tau_x(x, y, z)\vec{i} + \tau_y(x, y, z)\vec{j} + \tau_z(x, y, z)\vec{k} \end{aligned} \quad (108)$$

donde $\mathbf{m}_1(x, y, z)$ y $\mathbf{m}_2(x, y, z)$ son dos parámetros distintos del mismo modelo.

Cuando la función de gradientes cruzados es igual a cero, $\boldsymbol{\tau}(x, y, z) = \mathbf{0}$, se puede decir que existe similitud estructural entre los modelos, ya que este resultado implica

que los cambios en ambos modelos son colineales.

Al igual que los tres elementos de la función objetivo antes mencionados, la función de gradientes cruzados es incorporada a la función objetivo a partir su norma cuadrática, es decir

$$\begin{aligned} f_{\tau} &= \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \\ &= \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2. \end{aligned} \quad (109)$$

Una versión discreta de la ecuación (109) esta dada por

$$f_{\tau} = \sum_{\alpha=1}^{n_x-1} \sum_{\beta=1}^{n_y-1} \sum_{\gamma=1}^{n_z-1} \left(\tau_{x\alpha\beta\gamma}^2 + \tau_{y\alpha\beta\gamma}^2 + \tau_{z\alpha\beta\gamma}^2 \right). \quad (110)$$

Para tener un mejor entendimiento de los elementos τ_x , τ_y y τ_z de la ecuación (109) podemos analizar el concepto de gradientes cruzados en tres dimensiones.

De forma individual cada una éstas componentes esta dada por

$$\tau_x(x, y, z) = \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial z} - \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial y}, \quad (111)$$

$$\tau_y(x, y, z) = \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial x} - \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial z} \quad (112)$$

y

$$\tau_z(x, y, z) = \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial y} - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial x}, \quad (113)$$

donde las funciones escalares m_1 y m_2 corresponden a dos propiedades físicas del subsuelo que cambian en las tres direcciones x , y y z . Por lo tanto, $\boldsymbol{\tau}$ es un campo vectorial que cuantifica el paralelismo entre los dos gradientes de las funciones m_1 y

m_2 .

La función de gradientes cruzados (108) observa los cambios en las propiedades físicas del subsuelo a través del gradiente e indica la dirección perpendicular a esos cambios. Haciendo uso de la Figura (26) y de parte derecha de la ecuación (111) tenemos que

$$\frac{\partial m_1}{\partial y} = \frac{m_{1,i,j+1,k} - m_{1,i,j,k}}{\frac{\Delta y_{j+1}}{2} + \frac{\Delta y_j}{2}} = \frac{2(m_{1,i,j+1,k} - m_{1,i,j,k})}{\Delta y_{j+1} + \Delta y_j}$$

y

$$\frac{\partial m_2}{\partial z} = \frac{m_{2,i,j,k+1} - m_{2,i,j,k}}{\frac{\Delta z_{k+1}}{2} + \frac{\Delta z_k}{2}} = \frac{2(m_{2,i,j,k+1} - m_{2,i,j,k})}{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k}.$$

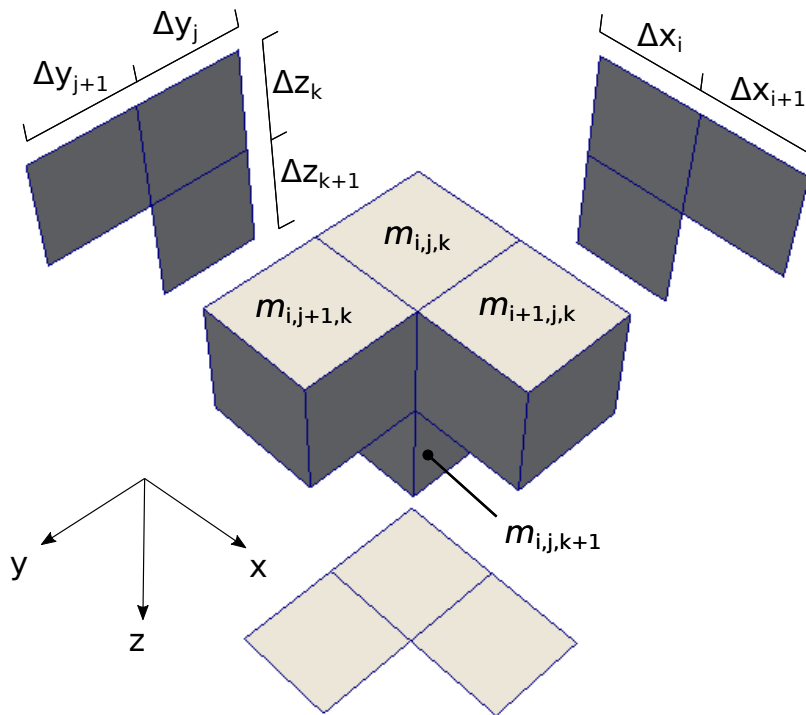


Figura 26. Rejilla utilizada en el cálculo de los gradientes cruzados.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial z} &= \frac{2(m_{1_{i,j+1,k}} - m_{1_{i,j,k}})}{\Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{y_j}} \frac{2(m_{2_{i,j,k+1}} - m_{2_{i,j,k}})}{\Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{z_k}} \\ &= \frac{4(m_{1_{i,j+1,k}} m_{2_{i,j,k+1}} - m_{1_{i,j+1,k}} m_{2_{i,j,k}} - m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j,k+1}} + m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j,k}})}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}}.\end{aligned}$$

De una manera similar tenemos que

$$\frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial y} = \frac{4(m_{1_{i,j,k+1}} m_{2_{i,j+1,k}} - m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j+1,k}} - m_{1_{i,j,k+1}} m_{2_{i,j,k}} + m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j,k}})}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}}.$$

Por lo tanto, la componente $\tau_x(x, y, z)$ está dada por

$$\begin{aligned}\tau_x(x, y, z) &= \\ &= \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial z} - \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial y} \\ &= \frac{4(m_{1_{i,j+1,k}} m_{2_{i,j,k+1}} - m_{1_{i,j+1,k}} m_{2_{i,j,k}} - m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j,k+1}} + m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j,k}})}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}} \\ &\quad - \frac{4(m_{1_{i,j,k+1}} m_{2_{i,j+1,k}} - m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j+1,k}} - m_{1_{i,j,k+1}} m_{2_{i,j,k}} + m_{1_{i,j,k}} m_{2_{i,j,k}})}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}} \\ &= \frac{4[m_{1_{i,j+1,k}}(m_{2_{i,j,k+1}} - m_{2_{i,j,k}}) + m_{1_{i,j,k}}(m_{2_{i,j+1,k}} - m_{2_{i,j,k}}) + m_{1_{i,j,k+1}}(m_{2_{i,j,k}} - m_{2_{i,j+1,k}})]}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}}.\end{aligned}\tag{114}$$

Siguiendo un proceso similar al anterior y haciendo uso de la Figura (26) y de las ecuaciones (112) y (113) podemos ver que

$$\begin{aligned}
\tau_y(x, y, z) &= \\
&= \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial x} - \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial z} \\
&= \frac{4[m_{1_{i,j,k+1}}(m_{2_{i+1,j,k}} - m_{2_{i,j,k}}) + m_{1_{i,j,k}}(m_{2_{i,j,k+1}} - m_{2_{i+1,j,k}}) + m_{1_{i+1,j,k}}(m_{2_{i,j,k}} - m_{2_{i,j,k+1}})]}{\Delta_{x_{i+1}}\Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{x_i}\Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{x_{i+1}}\Delta_{z_k} + \Delta_{x_i}\Delta_{z_k}}
\end{aligned} \tag{115}$$

y

$$\begin{aligned}
\tau_z(x, y, z) &= \\
&= \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial y} - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial x} \\
&= \frac{4[m_{1_{i,j+1,k}}(m_{2_{i,j+1,k}} - m_{2_{i,j,k}}) + m_{1_{i,j,k}}(m_{2_{i+1,j,k}} - m_{2_{i,j+1,k}}) + m_{1_{i,j+1,k}}(m_{2_{i,j,k}} - m_{2_{i+1,j,k}})]}{\Delta_{x_{i+1}}\Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_i}\Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_{i+1}}\Delta_{y_j} + \Delta_{x_i}\Delta_{y_j}}.
\end{aligned} \tag{116}$$

Debido a que el algoritmo de gradientes conjugados no lineales requiere el cálculo de la derivada de la función de gradientes cruzados con respecto a los parámetros del modelo, últimos dos elementos de la parte derecha de la ecuación (126) (ver sección 5.3), es necesario llevar a cabo la derivada con respecto a los parámetros del modelo de las ecuaciones (111), (112) y (113). Por lo tanto, para la componente $\tau_x(x, y, z)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{x_{i,j,k}}(x, y, z)}{\partial m_{1_{\alpha\beta\gamma}}} = \\
& = \frac{4[\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} m_{2_{i,j,k}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} m_{2_{i,j,k+1}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{2_{i,j+1,k}} + \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} m_{2_{i,j,k}}]}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}} \quad (117) \\
& = \frac{4[(m_{2_{i,j,k+1}} - m_{2_{i,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} + (m_{2_{i,j,k+1}} - m_{2_{i,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} + (m_{2_{i,j,k}} - m_{2_{i,j+1,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1}]}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{x_{i,j,k}}(x, y, z)}{\partial m_{2_{\alpha\beta\gamma}}} = \\
& = \frac{4[\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} m_{1_{i,j+1,k}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{1_{i,j,k}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} m_{1_{i,j,k}} + \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} m_{1_{i,j,k+1}}]}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}} \quad (118) \\
& = \frac{4[(m_{1_{i,j+1,k}} - m_{1_{i,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} + (m_{1_{i,j,k}} - m_{1_{i,j,k+1}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} + (m_{1_{i,j,k}} - m_{1_{i,j+1,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k}]}{\Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_{k+1}} + \Delta_{y_{j+1}} \Delta_{z_k} + \Delta_{y_j} \Delta_{z_k}}
\end{aligned}$$

donde $\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k}$ son deltas de Kronecker.

De manera similar para las componentes $\tau_y(x, y, z)$ y $\tau_z(x, y, z)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{y_{i,j,k}}(x, y, z)}{\partial m_{1_{\alpha,\beta,\gamma}}} &= \\
&= \frac{4[\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} m_{2_{i+1,j,k}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{2_{i+1,j,k}} - \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{2_{i,j,k+1}} + \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{2_{i,j,k}}]}{\Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_k} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_k}} \\
&= \frac{4[(m_{2_{i+1,j,k}} - m_{2_{i,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} (m_{2_{i,j,k+1}} - m_{2_{i+1,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} (m_{2_{i,j,k}} - m_{2_{i,j,k+1}}) \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k}]}{\Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_k} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_k}}, \tag{119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{y_{i,j,k}}(x, y, z)}{\partial m_{2_{\alpha,\beta,\gamma}}} &= \\
&= \frac{4[\delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{1_{i,j,k+1}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{1_{i,j,k+1}} - \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1} m_{1_{i+1,j,k}} + \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{1_{i+1,j,k}}]}{\Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_k} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_k}} \\
&= \frac{4[(m_{1_{i,j,k+1}} - m_{1_{i,j,k}}) \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} + (m_{1_{i+1,j,k}} - m_{1_{i,j,k+1}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} + (m_{1_{i,j,k}} - m_{1_{i+1,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k+1}]}{\Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_{k+1}} + \Delta_{X_{i+1}} \Delta_{Z_k} + \Delta_{X_i} \Delta_{Z_k}}, \tag{120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{z_{i,j,k}}(x, y, z)}{\partial m_{1_{\alpha, \beta, \gamma}}} = \\
& = \frac{4[\delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{2_{i,j,k}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{2_{i+1,j,k}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} m_{2_{i+1,j,k}} + \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} m_{2_{i,j,k}}]}{\Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_j} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_j}} \\
& = \frac{4[(m_{2_{i,j,k}} - m_{2_{i+1,j,k}}) \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} + (m_{2_{i+1,j,k}} - m_{2_{i,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} + (m_{2_{i,j,k}} - m_{2_{i+1,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k}]}{\Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_j} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_j}}, \tag{121}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{z_{i,j,k}}(x, y, z)}{\partial m_{2_{\alpha, \beta, \gamma}}} = \\
& = \frac{4[\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} m_{1_{i+1,j,k}} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} m_{1_{i+1,j,k}} - \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{1_{i,j,k}} + \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} m_{1_{i,j+1,k}}]}{\Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_j} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_j}} \\
& = \frac{4[(m_{1_{i+1,j,k}} - m_{1_{i,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j+1} \delta_{\gamma k} + (m_{1_{i,j,k}} - m_{1_{i+1,j,k}}) \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k} + (m_{1_{i,j,k}} - m_{1_{i,j+1,k}}) \delta_{\alpha i+1} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma k}]}{\Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_{i+1}} \Delta_{y_j} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_{j+1}} + \Delta_{x_i} \Delta_{y_j}}. \tag{122}
\end{aligned}$$

5.2.5. Función objetivo completa

Comúnmente, la inversión de un sólo tipo de dato geofísico se llevaría a cabo utilizando solamente la función de ajuste de datos, la función de regularización y la función de información *a priori*. Esto podría expresarse como

$$f = f_A + f_R + f_a. \quad (123)$$

Sin embargo, dado que la intención de este trabajo es llevar a cabo la inversión conjunta de varios tipos de datos geofísicos, la forma de la función objetivo cambia bastante, puesto que ésta debe considerar cada uno de los tres elementos antes mencionados por cada tipo de dato geofísico, más la función de gradientes cruzados. Por ejemplo, si consideramos solamente dos tipos de datos geofísicos, la función objetivo a utilizar tendría la forma

$$f = f_{1_A} + f_{1_R} + f_{1_a} + f_{2_A} + f_{2_R} + f_{2_a} + f_\tau. \quad (124)$$

Haciendo uso de las versiones discretas de los elementos antes mencionados, la función objetivo (124) esta dada por

$$\begin{aligned} f = & \sum_{p=1}^{L_1} \left[\frac{d_{1p} - f_{1p}(m_1)}{\sigma_{1p}} \right]^2 + \alpha_{1_R}^2 \sum_{q=1}^{M_1} (D_{1qk} m_{1k})^2 + \alpha_{1_a}^2 \sum_{k=1}^{N_1} (m_{1k} - m_{1_{a_k}})^2 \\ & + \sum_{p=1}^{L_2} \left[\frac{d_{2p} - f_{2p}(m_2)}{\sigma_{2p}} \right]^2 + \alpha_{2_R}^2 \sum_{q=1}^{M_2} (D_{2qk} m_{2k})^2 + \alpha_{2_a}^2 \sum_{k=1}^{N_2} (m_{2k} - m_{2_{a_k}})^2 \\ & + \alpha_\tau^2 \left(\sum_{\alpha=1}^{nx-1} \sum_{\beta=1}^{ny-1} \sum_{\gamma=1}^{nz-1} \left(\tau_{x\alpha\beta\gamma}^2 + \tau_{y\alpha\beta\gamma}^2 + \tau_{z\alpha\beta\gamma}^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (125)$$

Donde los subíndices 1 y 2 representan diferentes tipos de datos y/o parámetros a utilizar, d representa el vector de datos observados, m representa los parámetros del modelo, $f(m)$ es las respuesta teórica del modelo, σ es la desviación estándar de los datos observados, D es la versión discreta del operador de suavidad que actúa

sobre los parámetros m , m_a es un modelo *a priori*, τ_x , τ_y y τ_z son las componentes del vector de gradientes cruzados τ , α_R , α_0 y α_τ son factores de peso para las funciones de suavidad, modelo *a priori* y gradientes cruzados, respectivamente, y n_x , n_y , y n_z son el número de celdas en la dirección x , y y z , respectivamente.

5.3. Solución de la función objetivo a partir del método de gradientes conjugados no lineales

El método de gradientes conjugados (Ver Anexo D) es un algoritmo usado para encontrar el mínimo local más cercano de una función de n variables, la cual presupone que el gradiente de la función puede ser calculado. Usa direcciones conjugadas en vez del gradiente local como forma de acercarse al mínimo. Dicho método es una de las técnicas más usadas para resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales y también puede ser adaptado para resolver problemas no lineales de optimización.

El método lineal de gradientes conjugados fue propuesto por Hestenes y Stiefel (1952) como un método iterativo para resolver sistemas lineales con matrices de coeficientes definidas positivamente.

El primer método de gradiente conjugado no lineal fue introducido por Fletcher y Reeves (1964). Es una de las primeras técnicas usadas para resolver problemas de optimización no lineales. Al pasar de los años, muchas variantes del esquema original han sido propuestas, y muchas son ampliamente usadas. Las características clave de dichas técnicas radica en que no se requiere almacenar la matriz de sensibilidad y es más rápido que otros métodos de solución de sistemas de ecuaciones. En la Figura 27 observamos el algoritmo de gradientes conjugados no lineales implementado en este trabajo.

De la Figura 27 tenemos que m_0 es un modelo inicial de parámetros del modelo (comúnmente se considera un semiespacio homogéneo), f es la función objetivo dada por la ecuación (125), p es una dirección de búsqueda, α es una distancia medida en la dirección de búsqueda, β es un escalar que involucra el hecho de que las direcciones de búsqueda p_k y p_{k+1} sean conjugadas. ∇f es la derivada de la ecuación (125) con respecto a los parámetros m y esta dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)}{\partial m_k} = & -2 \sum_p^{L_1} \left(\frac{d_{1p} - f_{1p}(m_1)}{\sigma_{1p}^2} \right) \frac{\partial f_{1p}}{\partial m_{1k}} \\
& + 2\alpha_{1R}^2 \sum_q^{M_1} D_{1kq} D_{1qk} m_{1k} \\
& + 2\alpha_{1a}^2 \sum_k^{N_1} (m_{1k} - m_{1a_k}) \\
& - 2 \sum_p^{L_2} \left(\frac{d_{2p} - f_{2p}(m_2)}{\sigma_{2p}^2} \right) \frac{\partial f_{2p}}{\partial m_{2k}} \\
& + 2\alpha_{2R}^2 \sum_q^{M_2} D_{2kq} D_{2qk} m_{2k} \\
& + 2\alpha_{2a}^2 \sum_k^{N_2} (m_{2k} - m_{2a_k}) \\
& + 2\alpha_\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{n_X-1} \sum_{\beta=1}^{n_Y-1} \sum_{\gamma=1}^{n_Z-1} \left(\tau_{X\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tau_{X\alpha\beta\gamma}}{\partial m_{1k}} + \tau_{Y\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tau_{Y\alpha\beta\gamma}}{\partial m_{1k}} + \tau_{Z\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tau_{Z\alpha\beta\gamma}}{\partial m_{1k}} \right) \\
& + 2\alpha_\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{n_X-1} \sum_{\beta=1}^{n_Y-1} \sum_{\gamma=1}^{n_Z-1} \left(\tau_{X\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tau_{X\alpha\beta\gamma}}{\partial m_{2k}} + \tau_{Y\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tau_{Y\alpha\beta\gamma}}{\partial m_{2k}} + \tau_{Z\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tau_{Z\alpha\beta\gamma}}{\partial m_{2k}} \right).
\end{aligned} \tag{126}$$

Dado un m_0 ;
 Evaluar $f_0 = f(m_0)$, $\nabla f_0 = \nabla f(m_0)$;
 Asignar $p_0 \leftarrow -\nabla f_0$, $k \leftarrow 0$;
Mientras $\nabla f_k \neq 0$
 Calcular α_k y asignar $m_{k+1} = m_k + \alpha_k p_k$
 Evaluar ∇f_{k+1} ;
 $\beta_{k+1} \leftarrow \frac{\nabla f_{k+1}^T \nabla f_{k+1}}{\nabla f_k^T \nabla f_k}$;
 $p_{k+1} \leftarrow -\nabla f_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$;
 $k \leftarrow k + 1$
Fin (Mientras)

Figura 27. Algoritmo de gradientes conjugados no lineales.

Capítulo 6. Resultados

En este capítulo evaluamos el funcionamiento del algoritmo de inversión conjunta. Iniciamos con ejemplos que nos permitieron determinar que las cuatro partes con las que cuenta la función objetivo (ajuste, regularización, modelo *a priori* y gradientes cruzados) funcionan correctamente cuando se evalúan de manera individual. A continuación presentamos los resultados de la inversión individual y conjunta de datos potenciales.

Cabe señalar que en todos los ejemplos de inversión presentados a continuación, el criterio de paro consistió en encontrar un valor de la raíz cuadrática media (RMS por sus siglas en inglés) de los residuales de los datos de gravedad y magnetismo que fuera menor a un error atribuido a los datos. Donde, dicho error corresponde al 1 % del valor máximo de las anomalías observadas de gravedad y magnetismo.

6.1. Evaluación de la función de ajuste de datos, f_A

Nuestro modelo de prueba, que se muestra en la Figura 28, consiste de un prisma rectangular de magnetización y densidad constante de 1 A/m y 1 gr/cm³, rodeado por un medio homogéneo de magnetización y densidad constante de 0 A/m y 0 gr/cm³, respectivamente. El cuerpo tiene dimensiones horizontales de 150 × 150 metros y un espesor de 38 metros. La parte superior del cuerpo se encuentra a 36 metros de profundidad. Para éste modelo se simuló la toma de 1024 estaciones de gravedad y magnetismo, espaciadas 25 metros en cada dirección. A los datos observados se les agregó ruido aleatorio Gaussiano de media cero y desviación estándar uno.

La evolución de la inversión individual de cada uno de los datos se muestra en las Figuras 29 y 30. Conforme pasan las iteraciones la mejora en el ajuste de los datos se aprecia tanto en los mapas como en las escalas de color. En las escalas de color nos percatamos como en cada paso iterativo los valores de magnetismo y gravedad calculados se van semejando cada vez más a los datos observados.

Otra forma de observar el buen ajuste de datos es a partir de mapas de residuales los cuales permiten mostrar claramente en que partes el ajuste de los datos puede considerarse bueno o no. Estos mapas se muestran en las Figuras 31 y 32.

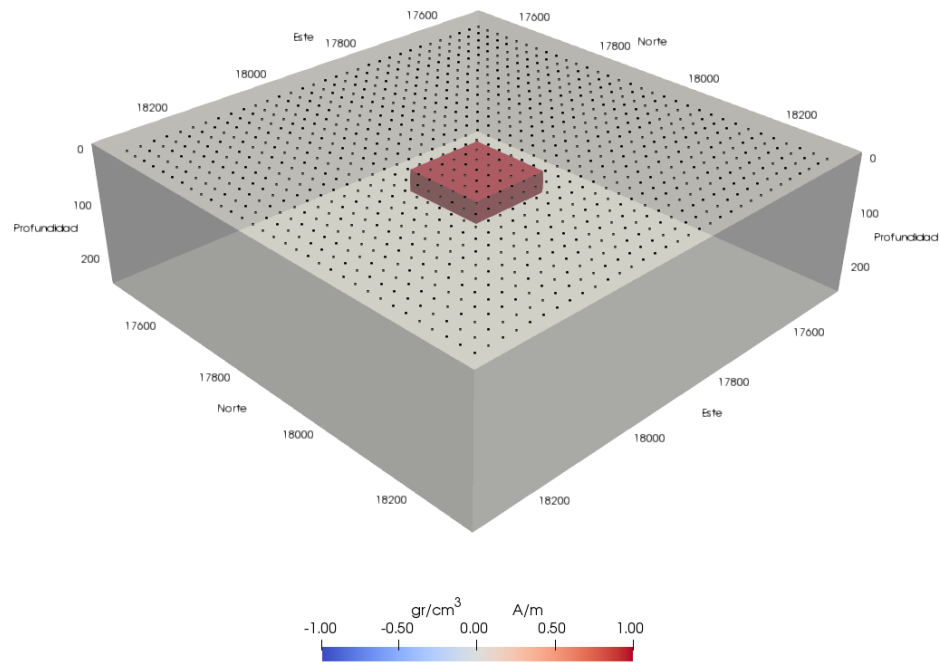


Figura 28. Cuerpo de densidad y magnetización uniforme rodeado por un medio homogéneo de densidad y magnetización uniforme. Los puntos negros en la superficie del modelo muestran la posición de las 1024 estaciones de gravedad y magnetismo.

Cabe señalar que para los datos magnéticos fueron necesarias 153 iteraciones para llegar a un ajuste de datos óptimo. Mientras que para los datos de gravedad 455 iteraciones se necesitaron para alcanzar el ajuste deseado. En la Figura 33 se muestra la evolución del RMS de los residuales de los datos magnéticos y de gravedad, el cual siempre disminuye conforme avanzan las iteraciones. Dicho comportamiento es el deseado en cualquier proceso de inversión y es otra forma de demostrar que el ajuste de datos observados y datos calculados se está alcanzando.

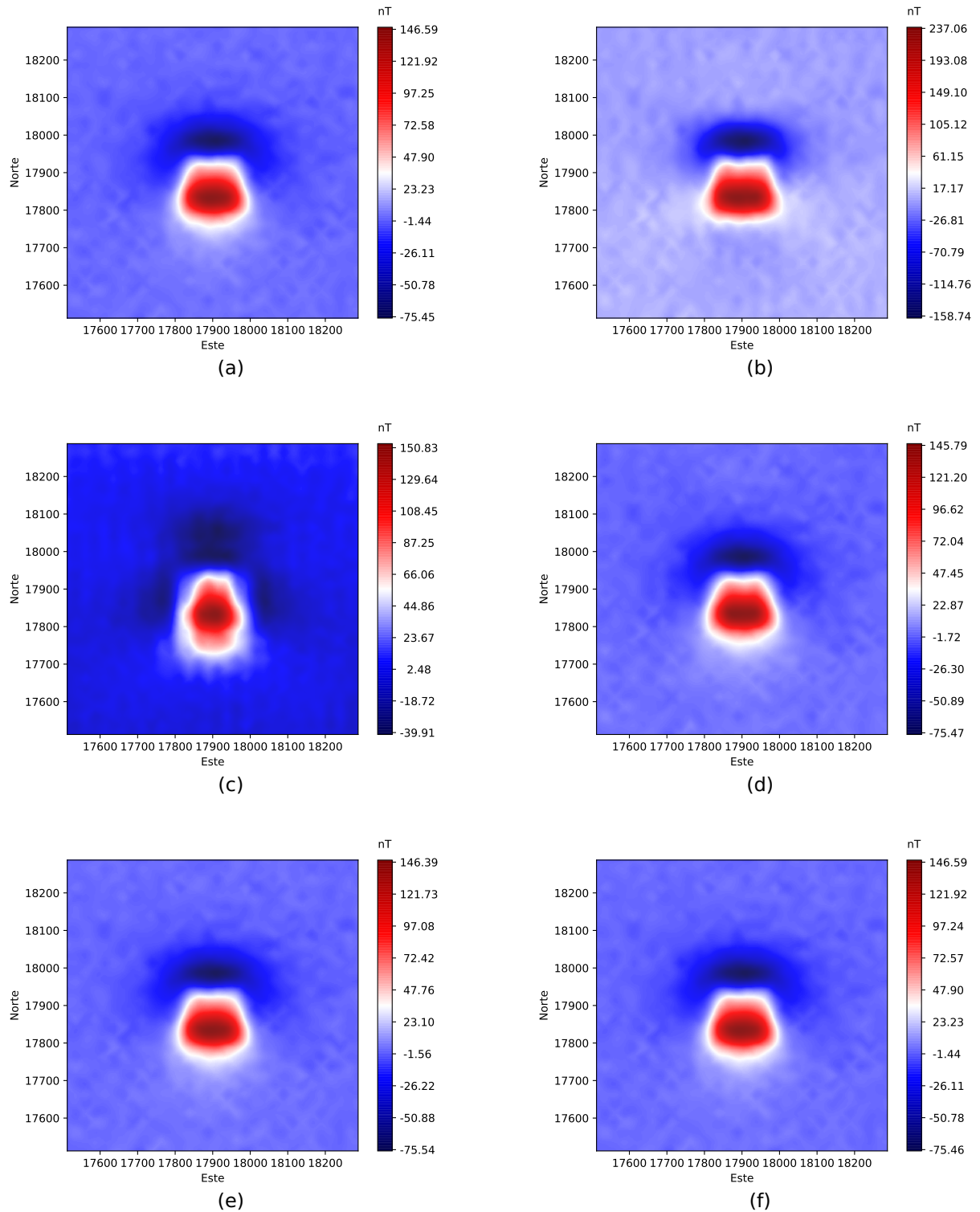


Figura 29. Mapas de la evolución del proceso de ajuste de datos magnéticos. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y ajuste de datos en la iteración 4 (b), 8 (c), 40 (d), 80 (e) y 153 (f) del proceso de inversión.

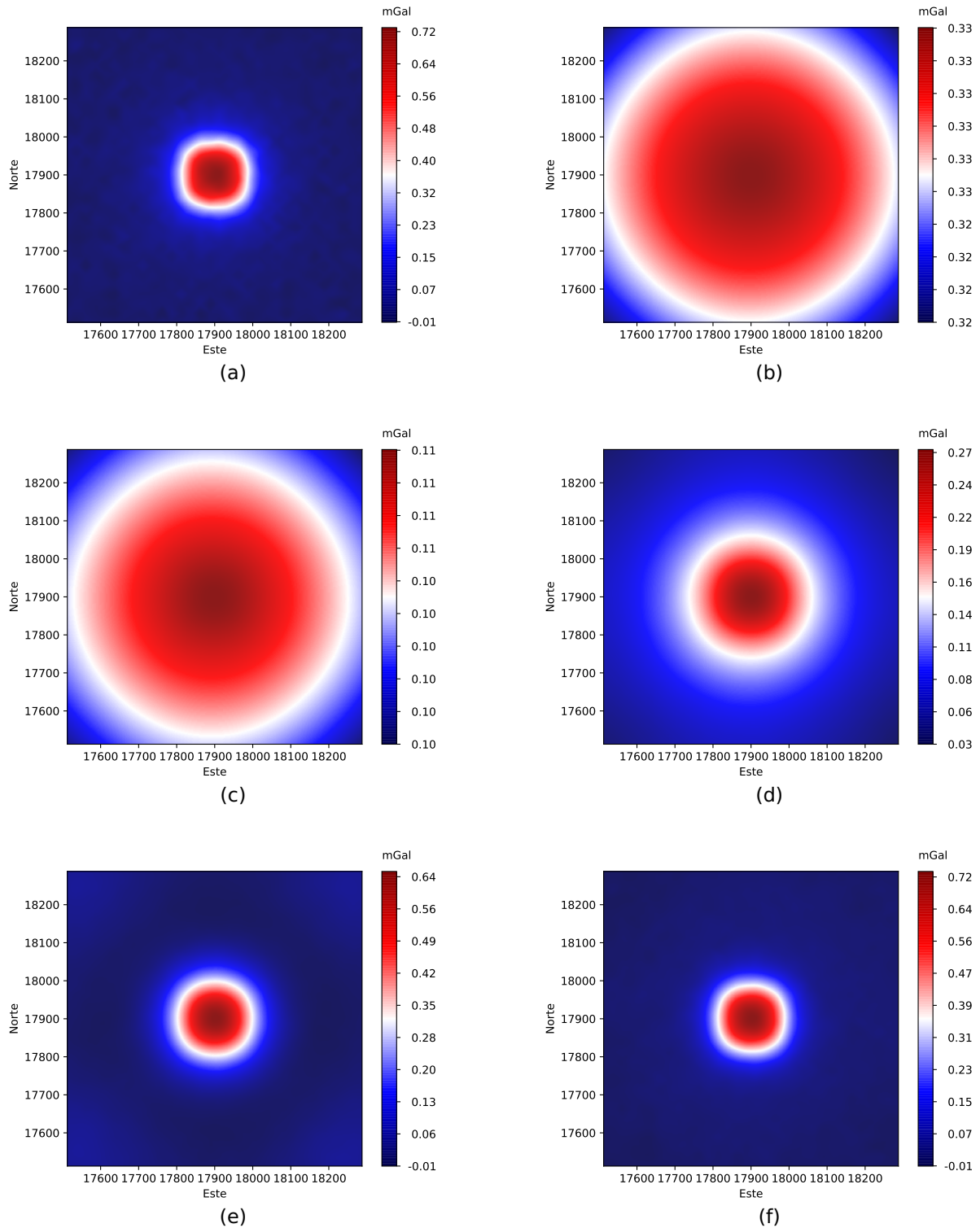


Figura 30. Mapas de la evolución del proceso de ajuste de datos de gravedad. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y ajuste de datos en la iteración 8 (b), 20 (c), 80 (d), 200 (e) y 455 (f) del proceso de inversión.

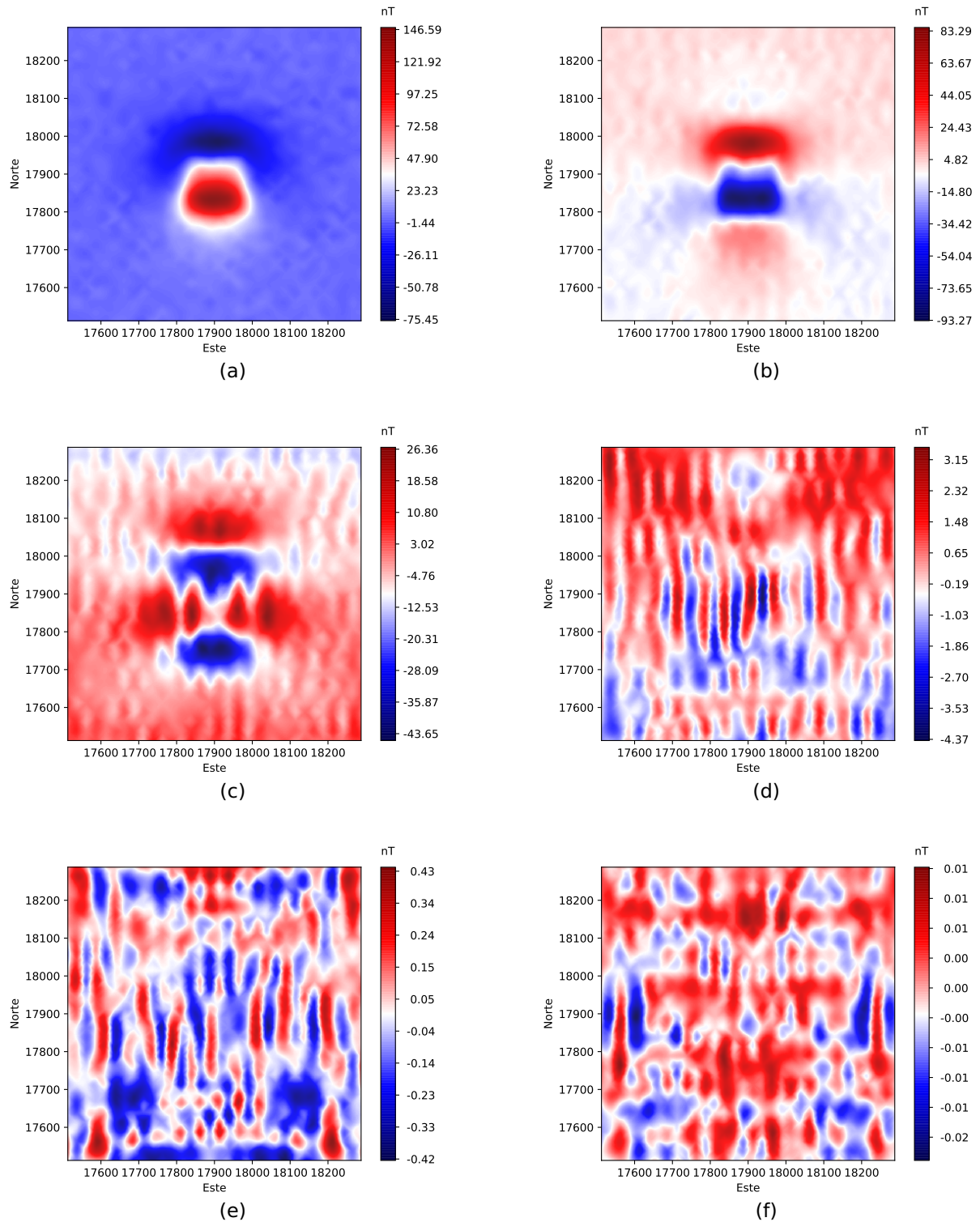


Figura 31. Mapas de residuales del proceso de inversión individual de datos de magnetismo. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y mapa de residuales de la iteración 4 (b), 8 (c), 40 (d), 80 (e) y 153 (f) del proceso de inversión.

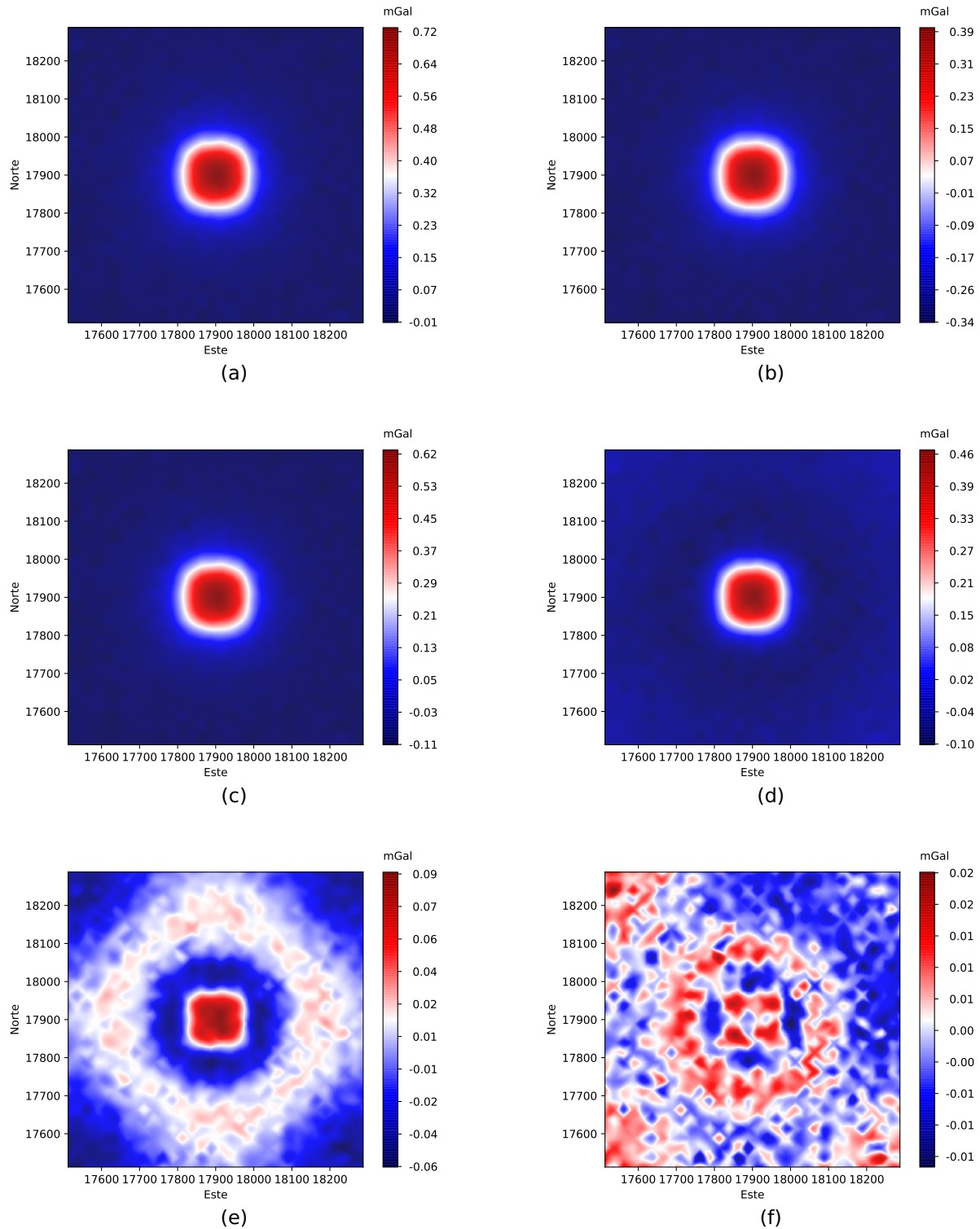


Figura 32. Mapas de residuales del proceso de inversión individual de datos de gravedad. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y mapa de residuales de la iteración 8 (b), 20 (c), 80 (d), 200 (e) y 455 (f) del proceso de inversión.

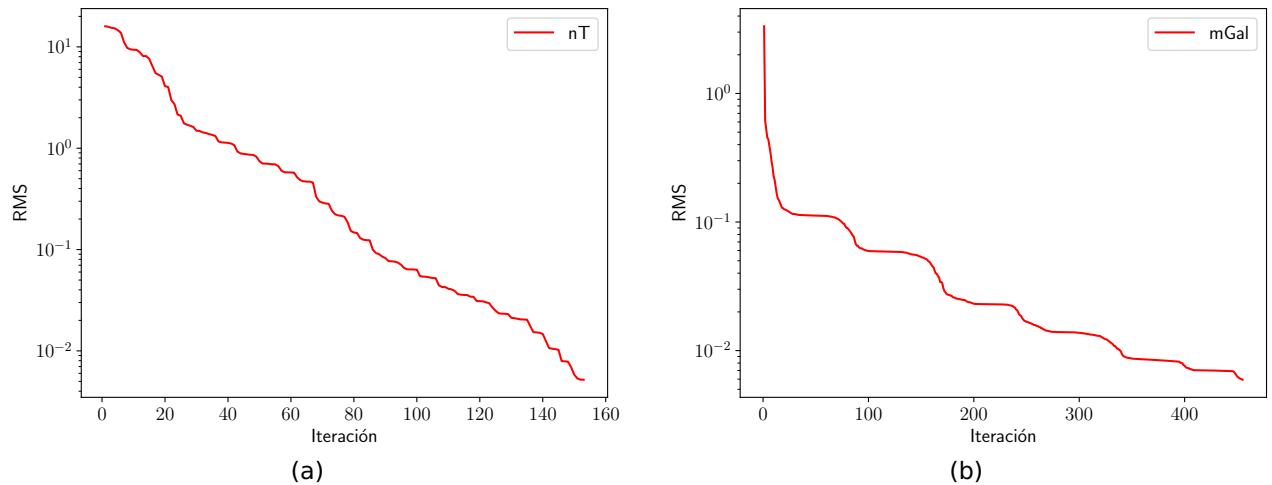


Figura 33. a) Evolución del RMS de los residuales del proceso de inversión de datos magnéticos. b) Evolución del RMS de los residuales del proceso de inversión de datos de gravedad.

En la Figura 34 observamos la evolución del modelo de magnetización durante todo el proceso de inversión individual de datos magnéticos. Dicha Figura esta relacionada con los mapas de la Figura 29.

Por otro lado, en la Figura 35 se observa la evolución del modelo de densidad durante todo el proceso de inversión individual de datos de gravedad. De manera similar, ésta Figura esta relacionada con los mapas de la Figura 30.

En ambas Figuras (34 y 35) observamos que no se recuperó por completo el modelo al que quería llegar (Figura 28). También, es posible notar que la inversión ubica los cuerpos muy cerca de la superficie. Característica común en la inversión de datos potenciales.

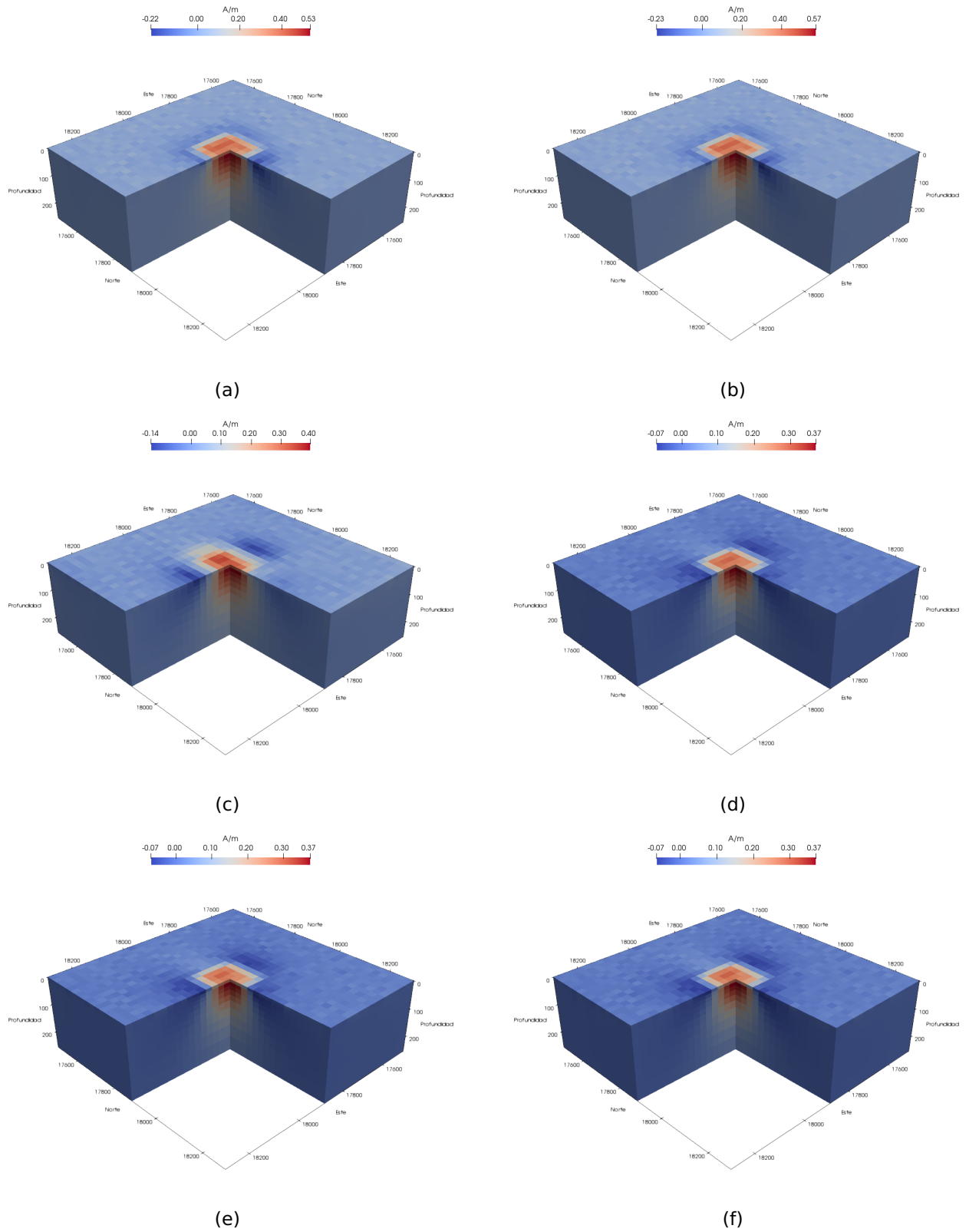


Figura 34. Evolución del modelo de magnetización obtenido de inversión separada de datos magnéticos. Modelo de magnetización en la iteración 2 (a), 4 (b), 8 (c), 40 (d), 80 (e) y 153 (f).

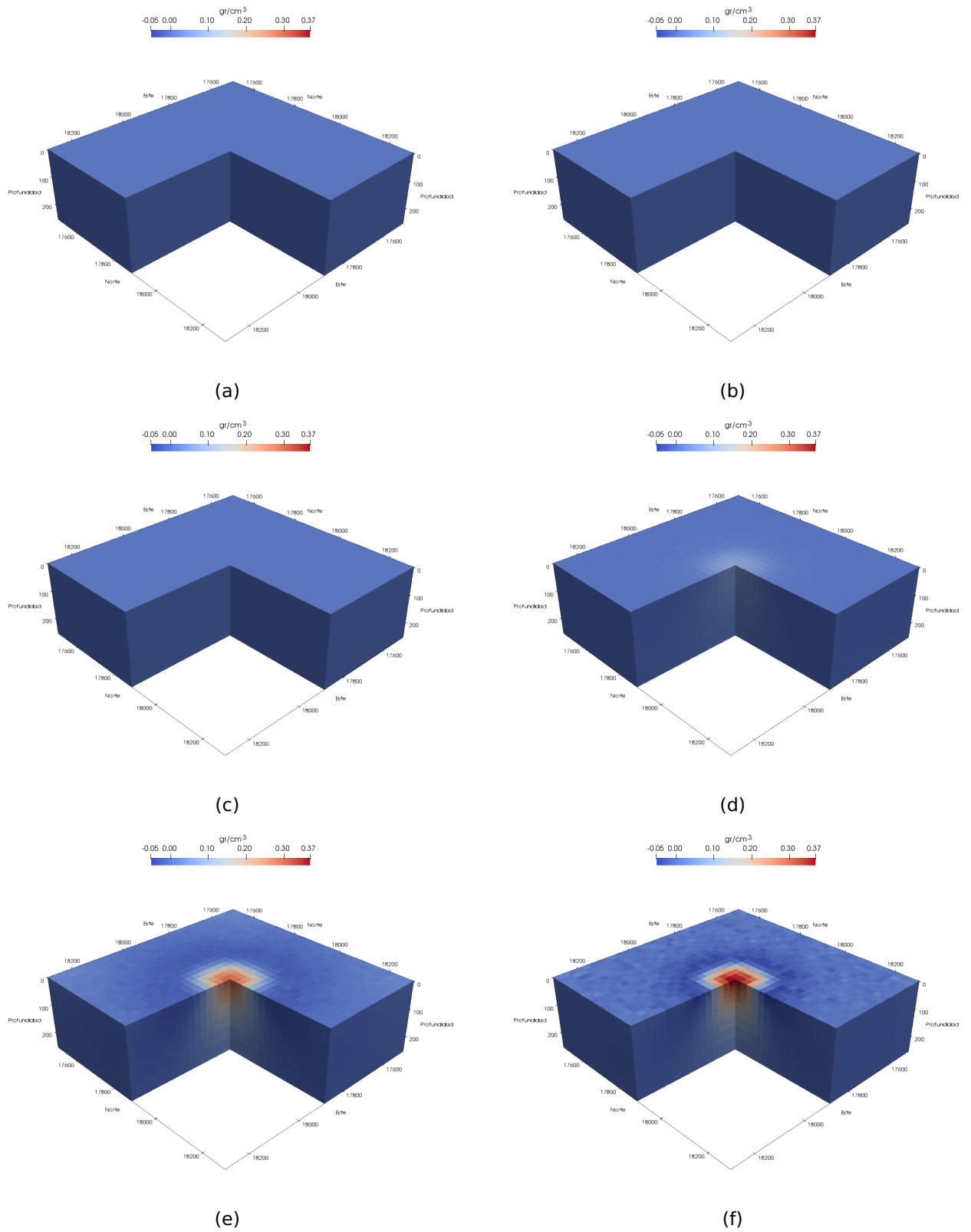


Figura 35. Evolución del modelo de densidad obtenido de la inversión individual de datos de gravedad. Modelo de densidad en la iteración 2 (a), 8 (b), 20 (c), 80 (d), 200 (e) y 455 (f).

6.2. Evaluación de las funciones del modelo *a priori*, f_a , y de regularización, f_R .

Para poder comprobar el buen funcionamiento de la función del modelo *a priori*, f_a , y de la función de regularización, f_R , diseñamos dos experimentos. En el primer experimento la función objetivo solamente toma en cuenta la función f_a . El objetivo de este experimento es obligar a la inversión a recuperar por completo un modelo previamente establecido. En el segundo experimento la función objetivo esta conformada por las funciones f_a y f_R . Dado que en este segundo experimento haremos uso de la regularización, o suavidad, se espera que el contacto entre propiedades del modelo no sea tan abrupta, sino que haya una cierta suavidad en la transición entre las propiedades del modelo.

En la Figura 36 se muestran el modelo inicial del que partió el proceso de inversión y el modelo que queremos recuperar. Iniciamos con un modelo homogéneo e intentamos recuperar un modelo constituido por dos capas horizontales. Cabe señalar que las funciones del modelo *a priori*, f_a , y la de regularización, f_R , tienen la misma forma para cualquier tipo de dato geofísico, por lo que, la escala de color que se muestra en la Figura 36 puede ser cualquier propiedad física de la tierra (conductividad, densidad, magnetización, etc.).

En la Figura 37 se muestran los modelos que se recuperan al realizar los experimentos antes mencionados. La Figura 37a muestra el modelo que se obtiene cuando solamente incluimos la función f_a en la función objetivo. Podemos observar que recuperamos completamente el modelo previamente establecido. Las Figuras 37b y 37c, se obtienen a partir de procesos en los cuales se usó diferente peso, α_R , para la regularización. Para la Figura 37b se usó un $\alpha_R = 3.33$ y para la Figura 37c se usó un $\alpha_R = 6.66$. El resultado de aplicar diferente peso es evidente, dado que un α_R mayor genera una transición más suave entre los parámetros del modelo. También es claro que seguimos recuperando el modelo *a priori* previamente establecido, sobre todo en las partes más alejadas del contacto entre parámetros del modelo.

La Figura 37d muestra el comportamiento de la magnitud de la función objetivo para los experimentos antes explicados. En las tres curvas se observa como decrece la magnitud de la función objetivo, hasta el punto en el que el algoritmo ha alcanzado

un ajuste óptimo con el modelo previamente establecido.

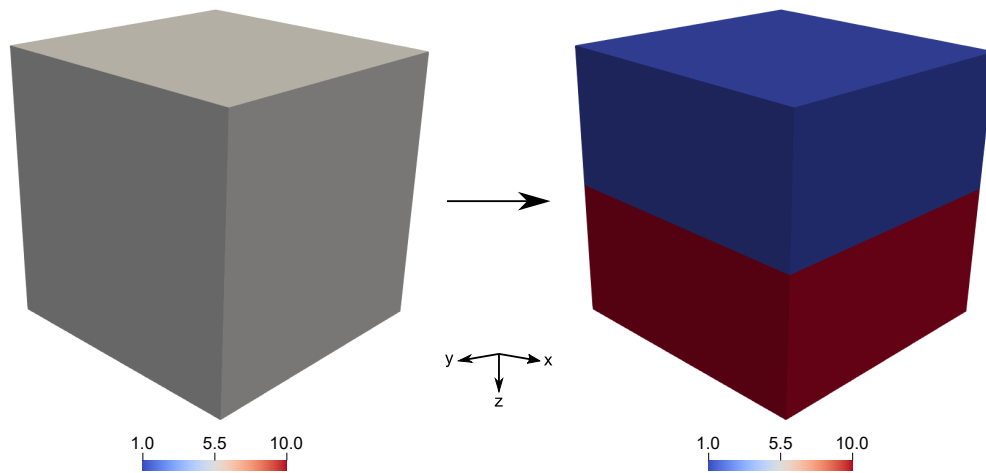


Figura 36. Modelo inicial del que parte el proceso de inversión (Homogéneo de 5.5) y modelo *a priori* que se quiere recuperar (Dos estratos de 1.0 y 10.0). La escala de color puede ser cualquier propiedad física de las rocas.

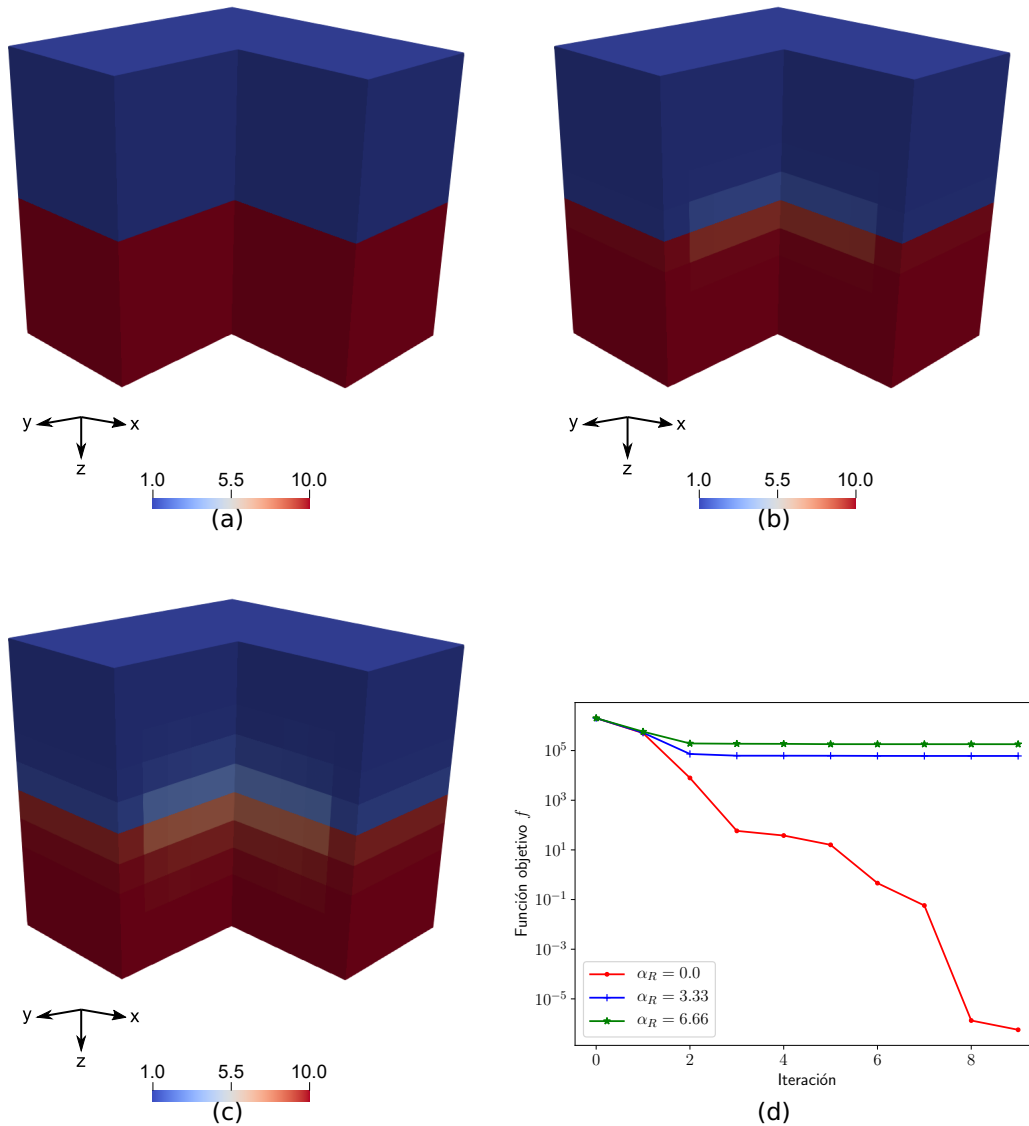


Figura 37. Repercusiones en los modelos del uso de las funciones f_a y f_R en la función objetivo f . a) Modelo recuperado al usar un $\alpha_R = 0.0$. b) Modelo recuperado al usar un $\alpha_R = 3.33$. c) Modelo recuperado al usar un $\alpha_R = 6.66$. d) Comportamiento de la función objetivo para diferentes α_R

6.3. Evaluación del vector de gradientes cruzados

Para este experimento decidimos recrear el ejemplo presentado por Fregoso-Becerra (2010). Puesto que la función de gradientes cruzados, τ , es una medida de la similitud estructural de dos modelos, para poder comprobar el buen funcionamiento de ésta parte del algoritmo nos apoyamos de dos cuerpos que comparten ciertas similitudes estructurales, el esferoide y la esfera. De hecho, estos cuerpos geométricos comparten la misma ecuación. En coordenadas cartesianas y con centro en el origen de coordenadas dicha ecuación ésta dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, donde a , b y c son las longitudes

de los semiejes respecto a los ejes x , y y z . Siendo la esfera un caso particular de la ecuación cuando $a = b = c$. Fregoso-Becerra (2010) propone llevar a cabo el cálculo del gradiente cruzado de los modelos $m_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (Esfera, Figuras 38a y 38c) y $m_2(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ (Esferoide, Figuras 38b y 38d), el cual está dado por

$$\tau(x, y, z) = \nabla m_1(x, y, z) \times \nabla m_2(x, y, z) = 12x(0, z, -y). \quad (127)$$

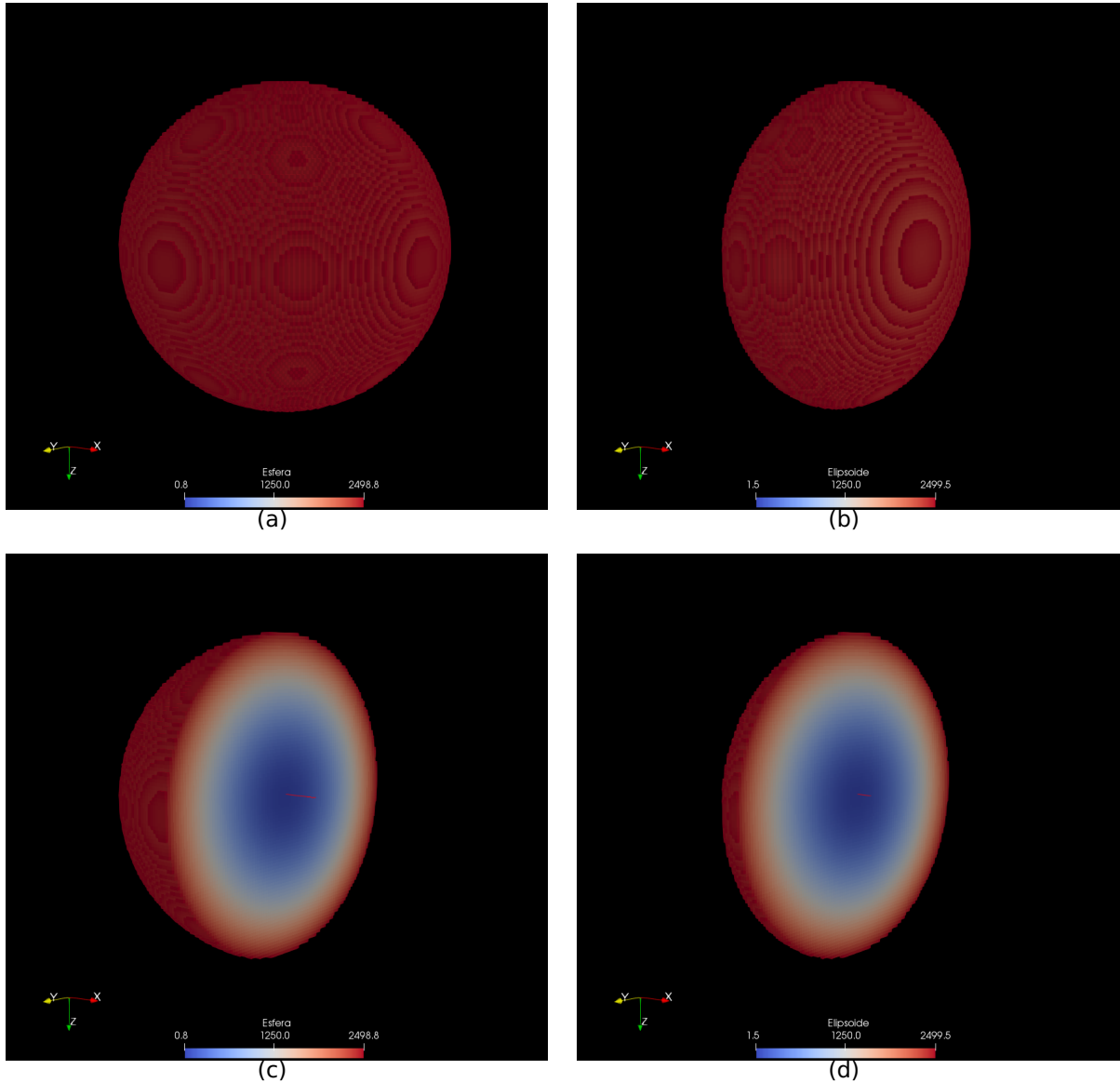


Figura 38. Modelos usados en el cálculo del vector de gradientes cruzados. a) Modelo obtenido a partir de la ecuación de una esfera. b) Modelo obtenido a partir de la ecuación de un esferoide. c) Sección que muestra las variaciones internas de la esfera. d) Sección que muestra las variaciones internas del esferoide.

De las Figuras 38c y 38d podemos observar claramente que en el centro de los

modelos, es decir, cuando $x = 0$ y por lo tanto $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, es donde encontramos mayor similitud estructural entre los modelos (Figuras 39a y 39c). De la ecuación (127) también observamos que no tiene componente x , por lo tanto, es en el plano yz donde se mostrará la rotación del vector $\boldsymbol{\tau}$ (Figura 39b). El comportamiento general del vector de gradientes cruzados lo vemos en la Figura 39d.

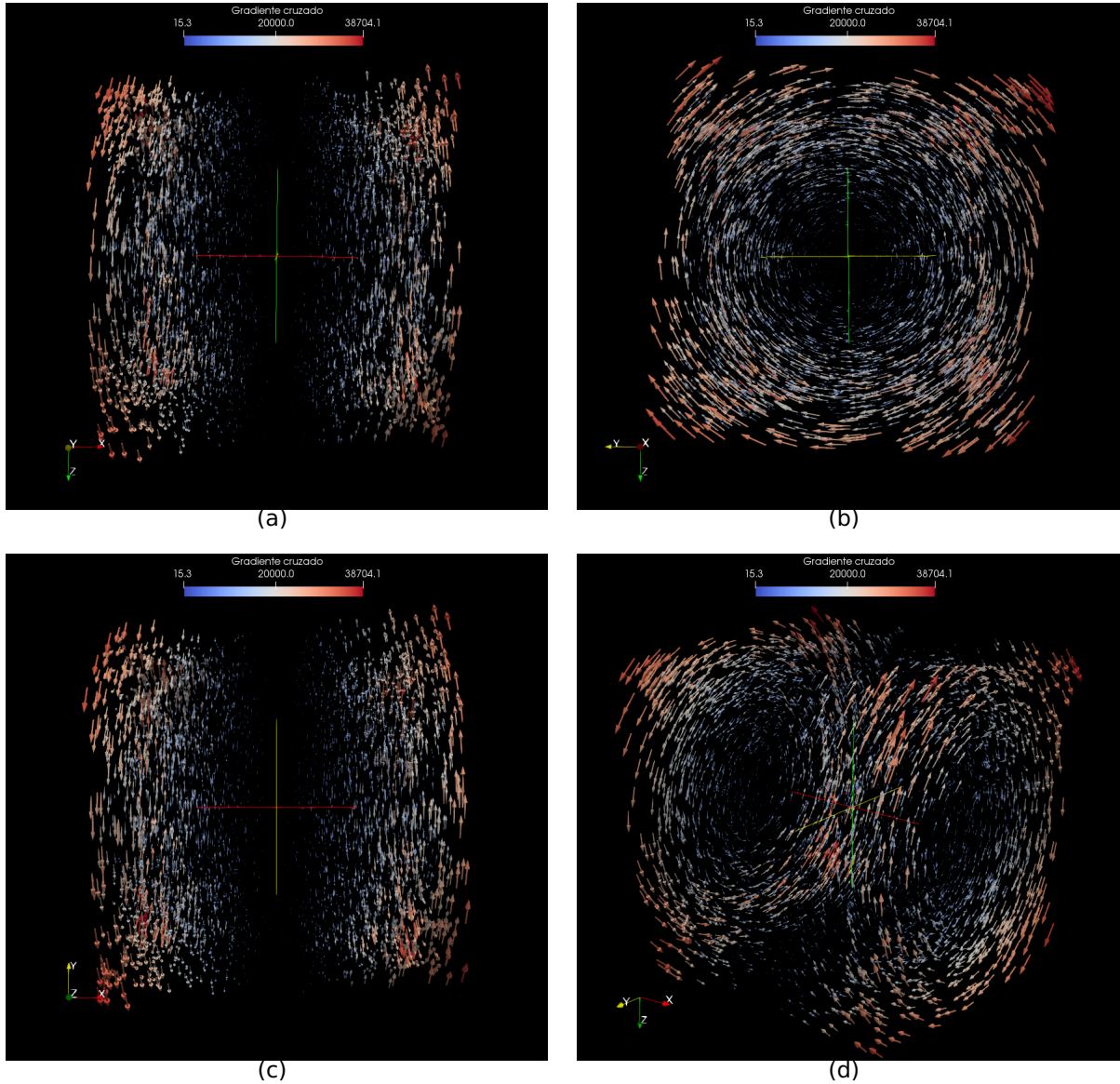


Figura 39. Vector de gradientes cruzados. a) Plano de observación xz . b) Plano de observación yz . c) Plano de observación xy . d) Perspectiva general del vector de gradientes cruzados.

Dado que la ecuación (127) es analítica, podemos calcular su valor en cualquier punto del espacio. Sin embargo, para nuestro caso, puesto que nuestros modelos siempre estarán formados por prismas rectangulares, el valor del vector de gradientes cruzados dependerá de las dimensiones de nuestras celdas. El ejemplo anterior

lo realizamos en un modelo de $100 \times 100 \times 100$ celdas cuadradas y lo repetimos en cuatro ocasiones, es decir, para cuatro dimensiones de celdas diferentes y evaluamos el RMS de las diferencias entre los resultados de la ecuación (127) y los resultados de la versión discreta de la ecuación (108). Los valores de RMS los podemos consultar en la Tabla 4. En ella se muestra claramente la dependencia que existe entre el valor del vector de gradiente cruzado y las dimensiones de las celdas.

Tabla 4. RMS de la diferencia entre las versiones analítica y discreta del vector de gradientes cruzados. Calculado a partir de 1,000,000 muestras.

$\Delta x = \Delta y = \Delta z$	RMS
1×10^{-4}	2.972×10^{-4}
1×10^{-3}	2.972×10^{-2}
1×10^{-2}	2.972
1×10^{-1}	297.24

6.4. Resultados de la inversión conjunta

Para este ejemplo se utilizó nuevamente el modelo mostrado en la Figura 28, empleando un peso para la regularización de 1.0 ($\alpha_R = 1.0$), tanto para los datos magnéticos como para los datos de gravedad. También se utilizó un peso para la función de gradientes cruzados de 10^5 ($\alpha_\tau = 10^5$).

En las Figuras 40, 41 y 42, se muestra, respectivamente, la evolución que tuvieron el ajuste de los datos magnéticos, los mapas de residuales de los datos magnéticos y el modelo de magnetización durante todo el proceso de inversión conjunta.

De manera similar, en las Figuras 43, 44 y 45, se muestra, respectivamente, la evolución que tuvo el ajuste de los datos de gravedad, los mapas de residuales de datos de gravedad y el modelo de densidad durante todo el proceso de inversión conjunta.

En total se necesitaron 1753 iteraciones para ajustar ambos tipos de datos.

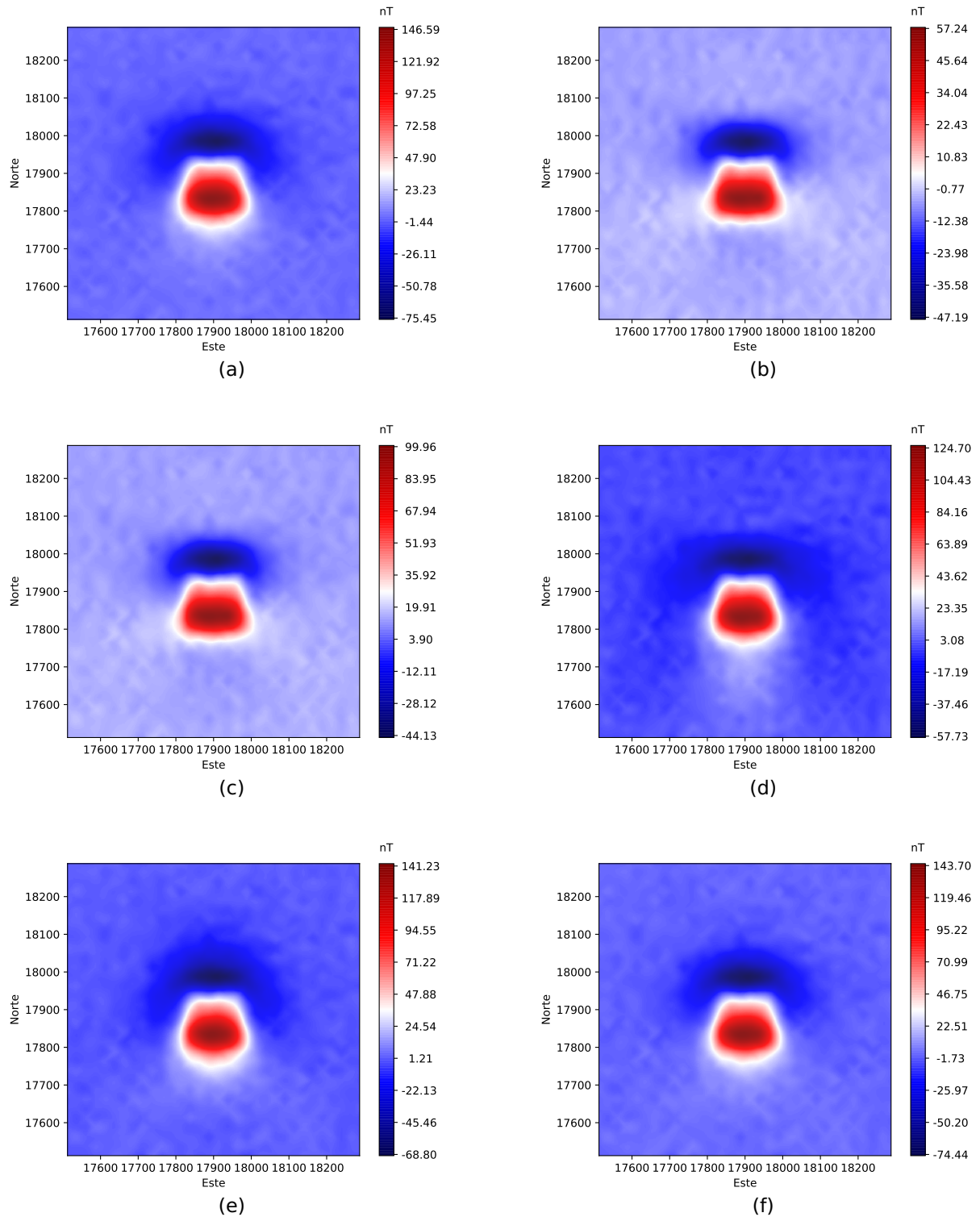


Figura 40. Evolución del ajuste de los datos magnéticos del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y ajuste de datos magnéticos en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.

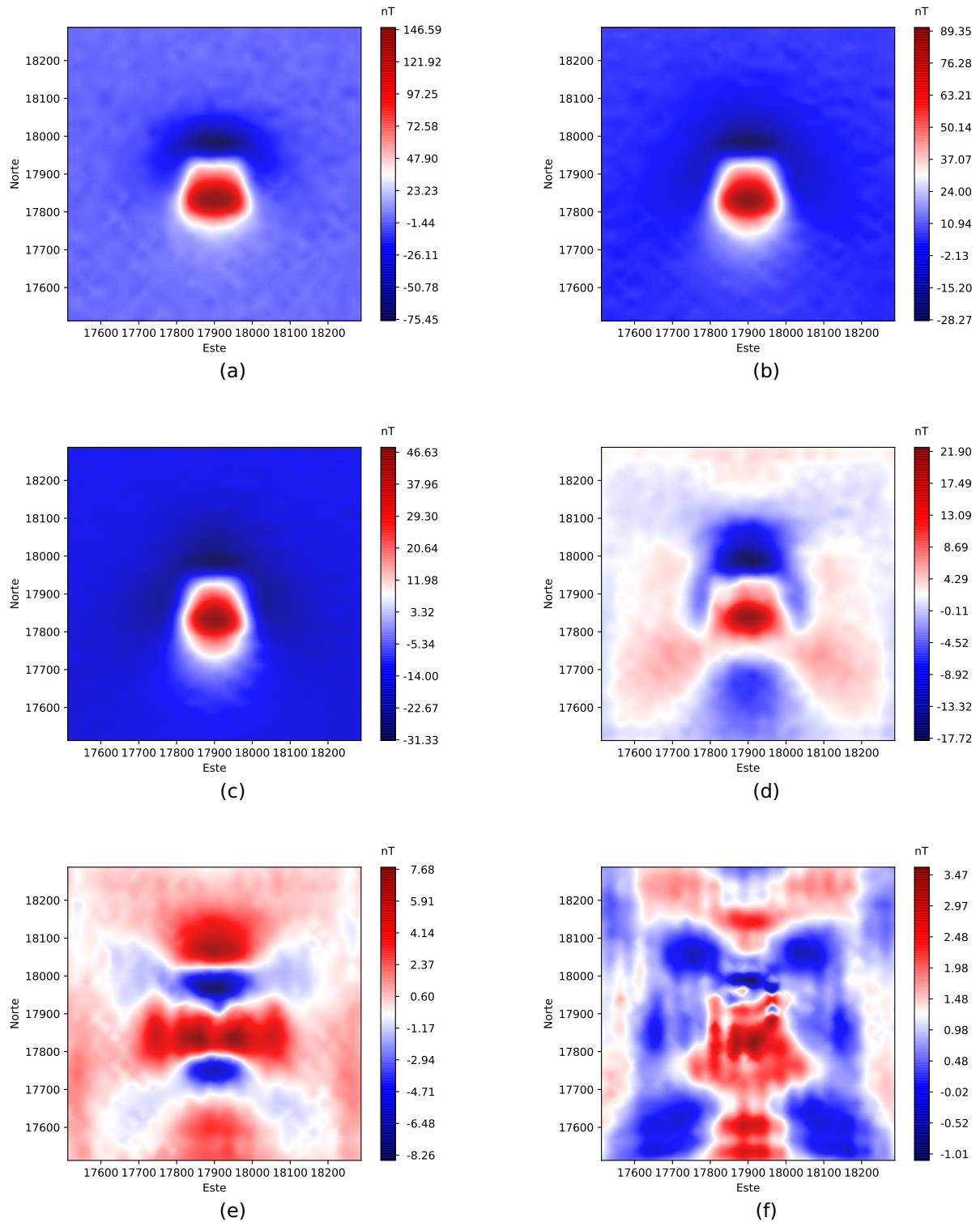


Figura 41. Mapas de residuales de la evolución de ajuste de datos magneticos del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme (a) y mapa de residuales en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.

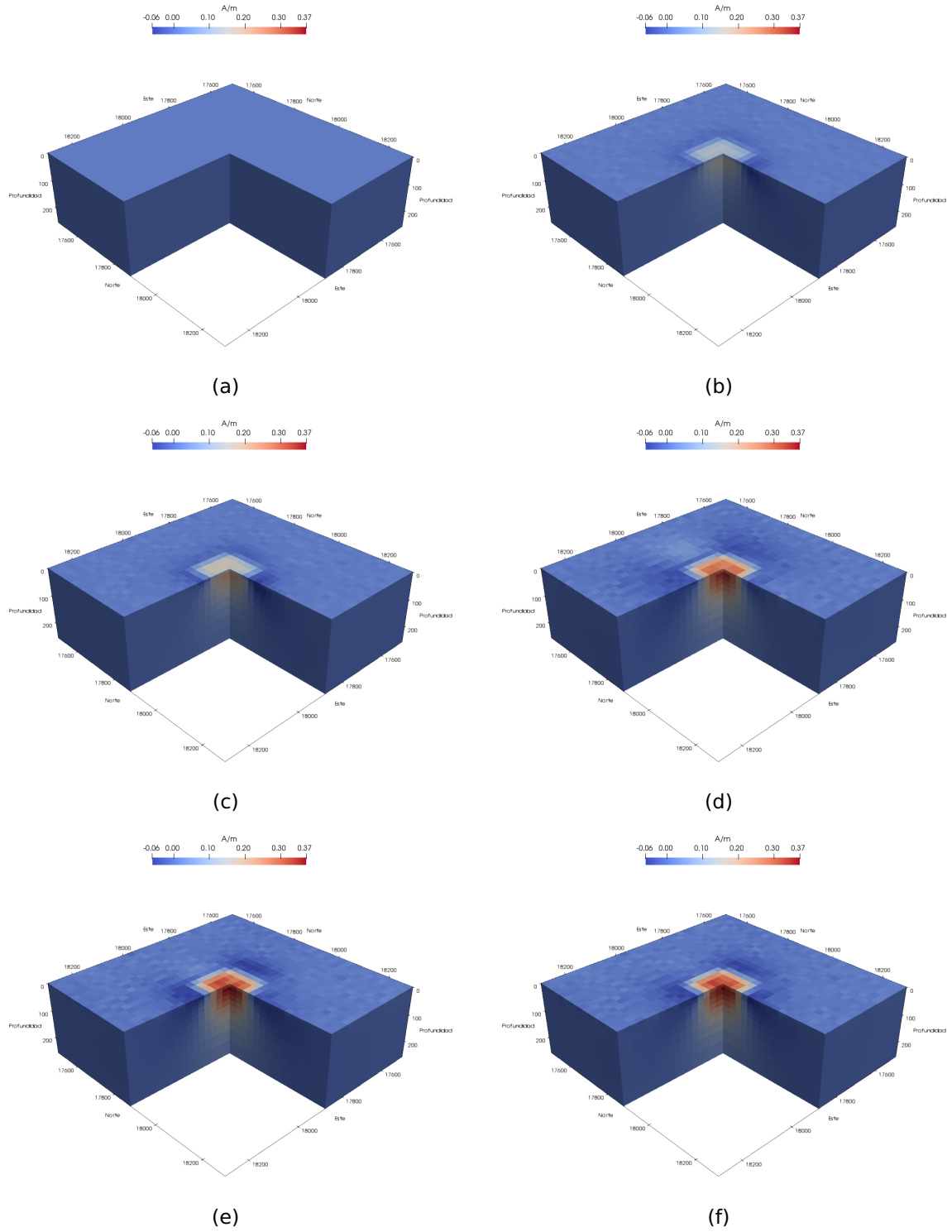


Figura 42. Evolución del modelo de magnetización obtenido a partir de la inversión conjunta. Modelo de magnetización en la iteración 4 (a), 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e) y 1753 (f) del proceso de inversión.

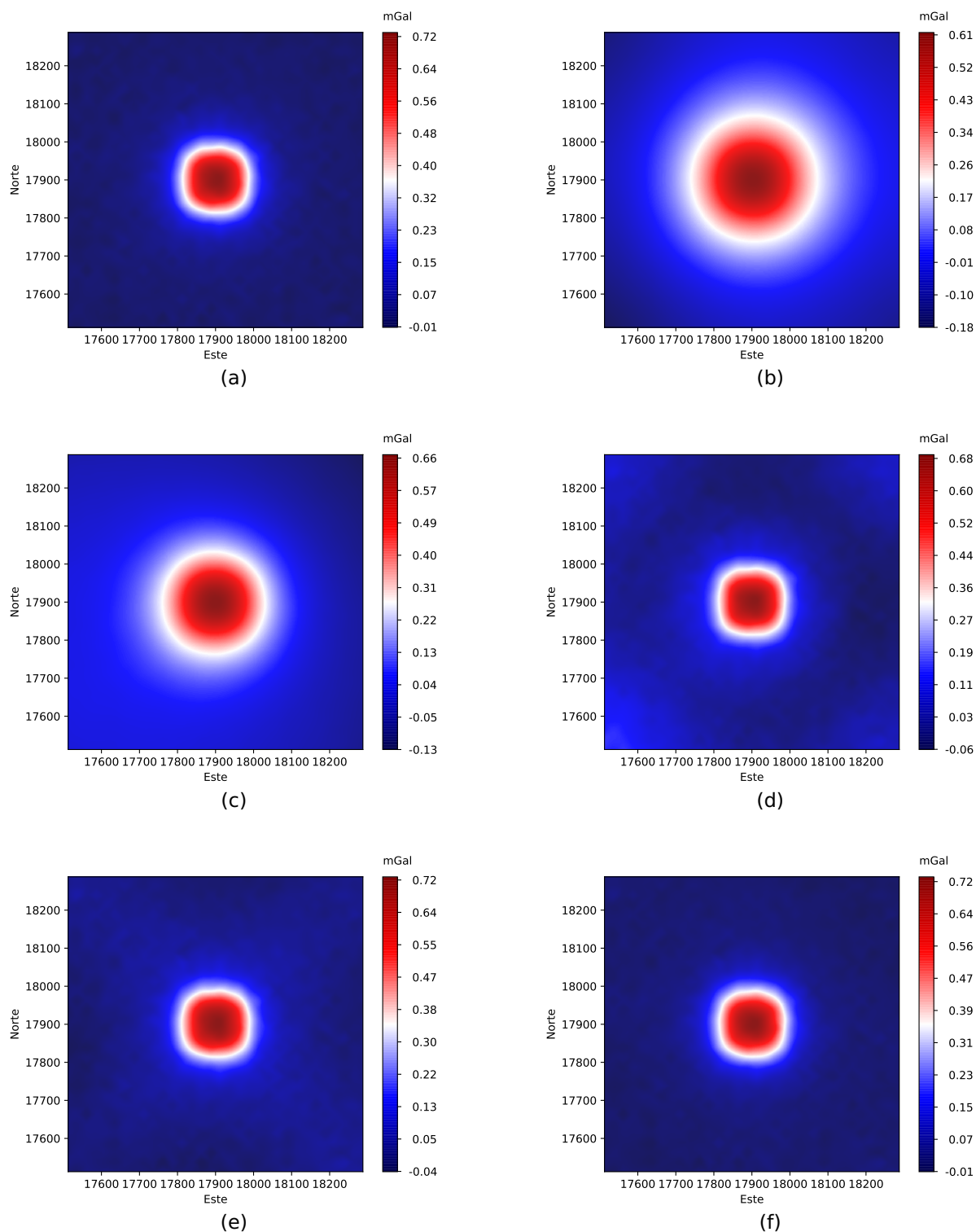


Figura 43. Evolución del ajuste de los datos de gravedad del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez más conforme pasan las iteraciones. Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y ajuste de datos de gravedad en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.

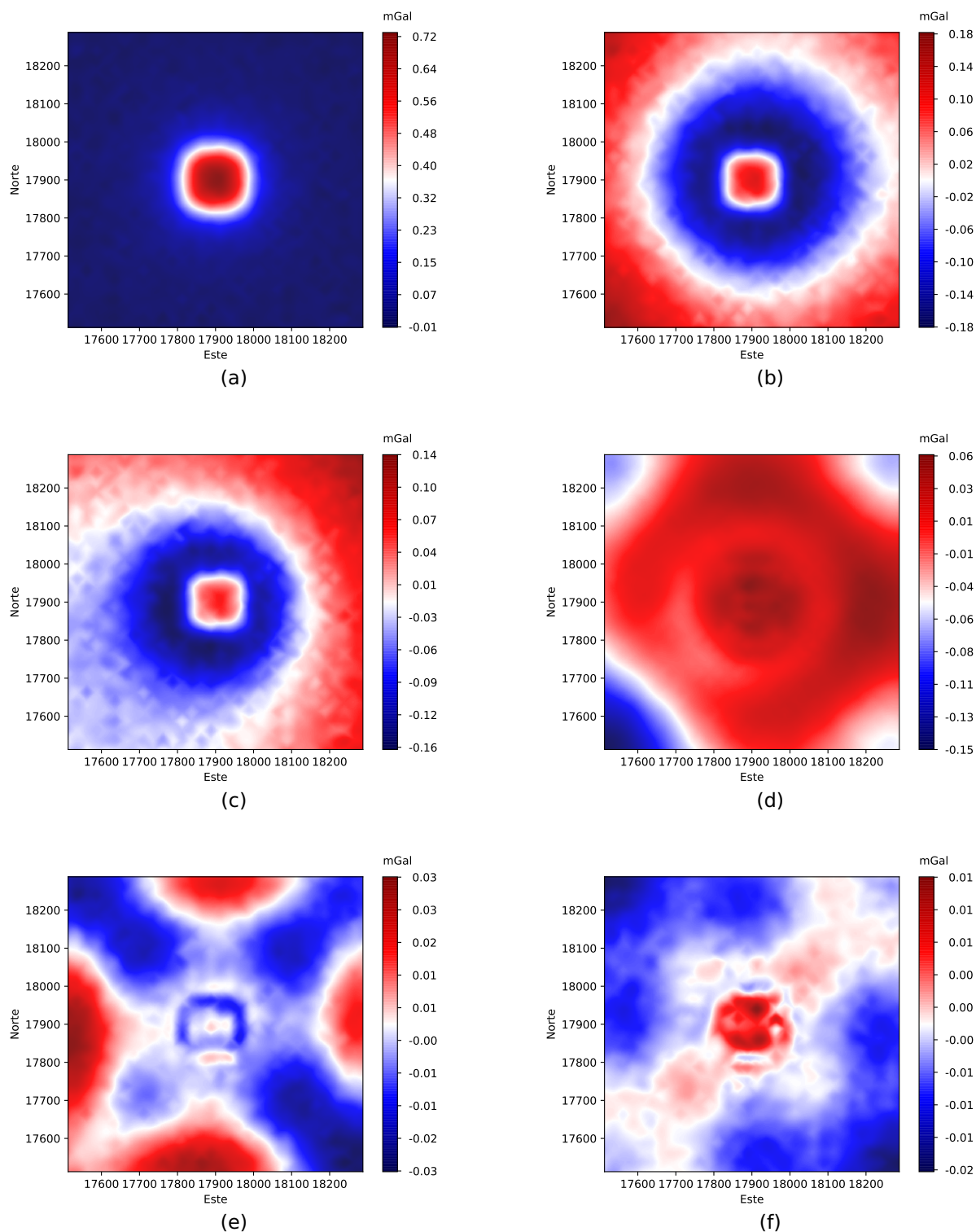


Figura 44. Mapas de residuales de la evolución de ajuste de datos de gravedad del proceso de inversión conjunta. Notar que las escalas de color se parecen cada vez menos conforme pasan las iteraciones. Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme (a) y mapa de residuales en la iteración 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e) y 1753 (f) del proceso de inversión.

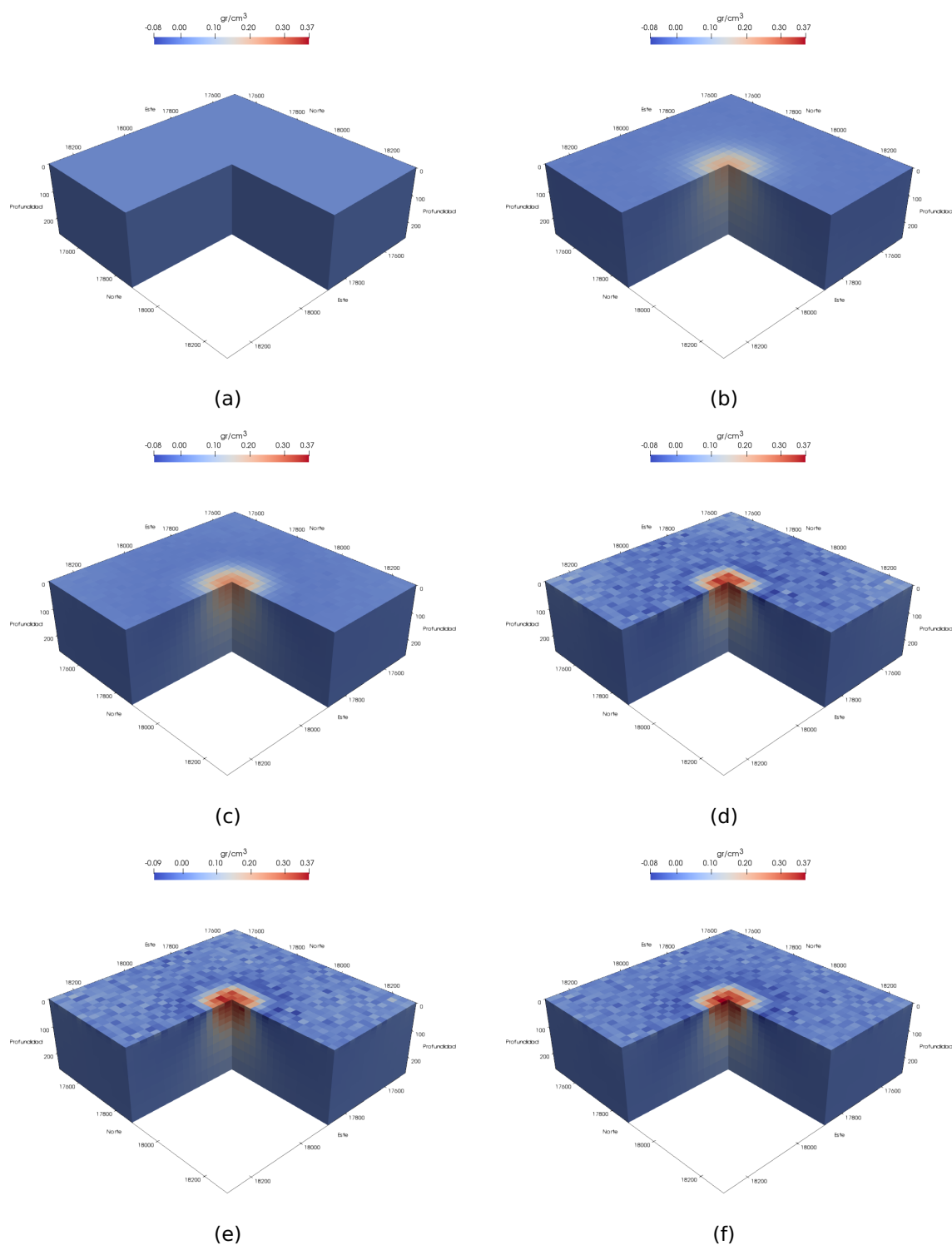


Figura 45. Evolución del modelo de densidad obtenido a partir de la inversión conjunta. Modelo de densidad en la iteración 4 (a), 60 (b), 100 (c), 600 (d), 1000 (e), 1753 (f) del proceso de inversión.

En la Figura 46a podemos observar la tendencia descendente del RMS de los residuales del ajuste de los dos tipos de datos. Por otro lado, en la Figura 46b se observa el comportamiento de cada una de las componentes de la función objetivo, así como el valor total de ésta. La función objetivo total (curva negra intermitente) siempre disminuye su valor, resultado deseado en cualquier metodología de inversión de datos.

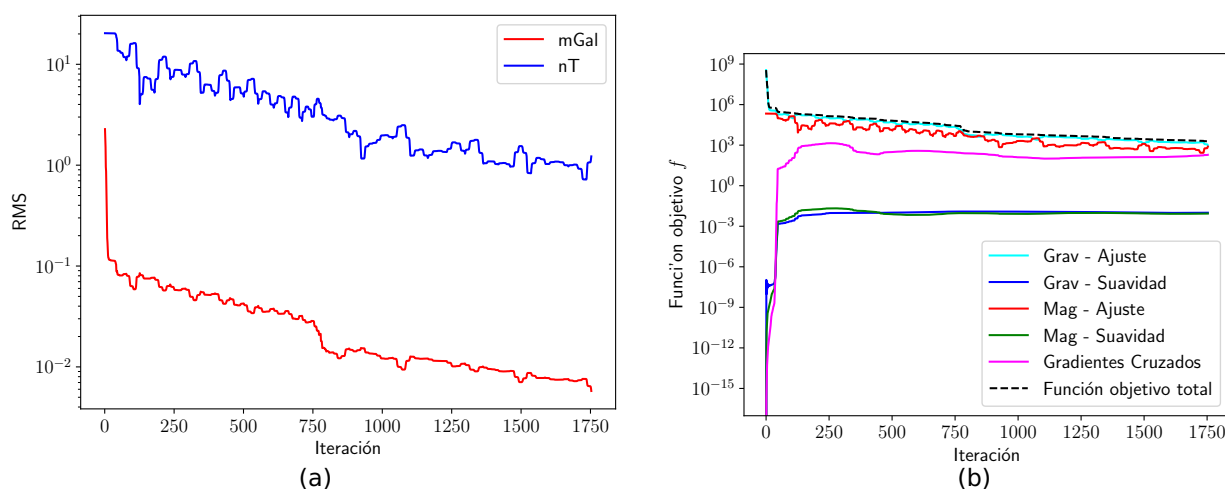
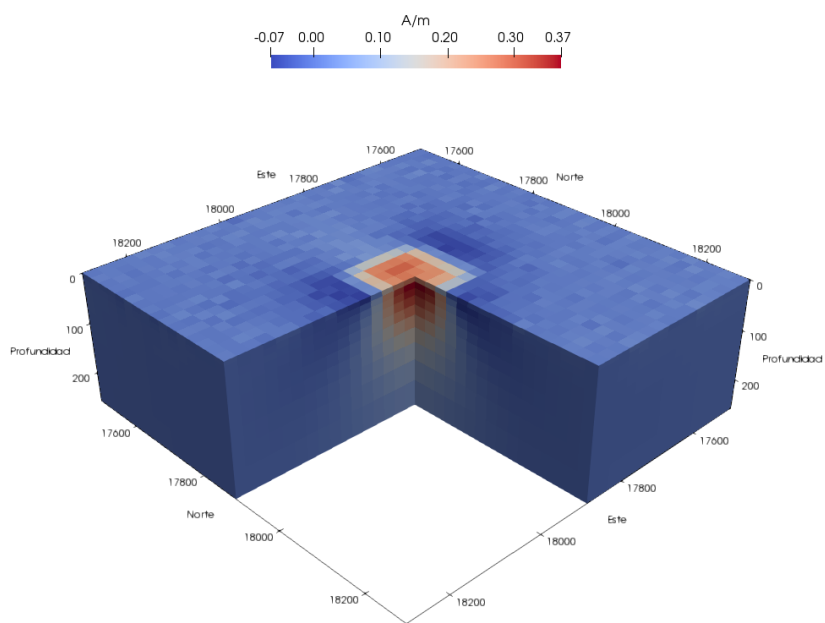


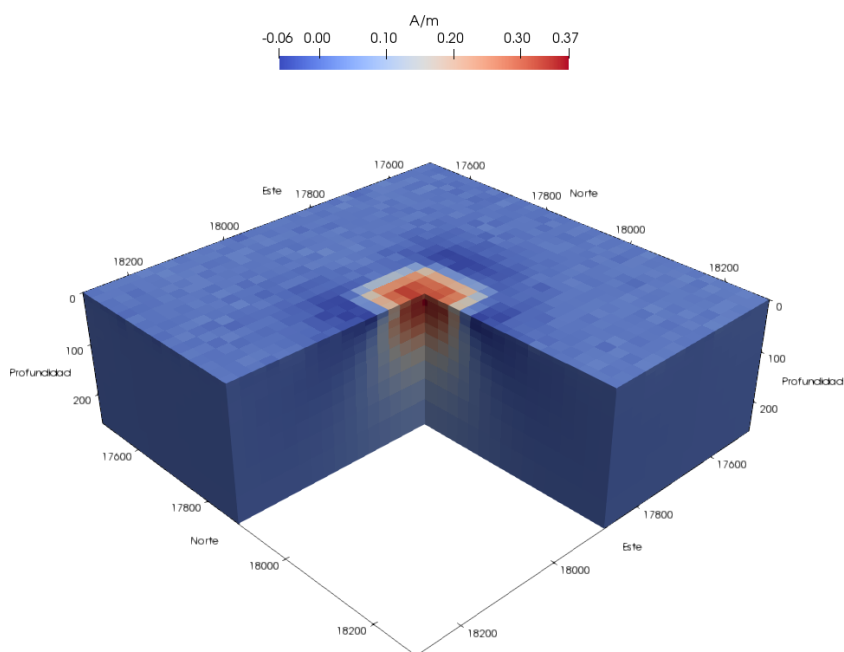
Figura 46. a) Evolución del RMS de los datos magnéticos y de gravedad del proceso de inversión conjunta. c) Comportamiento total y de cada una de las partes que fueron tomadas en cuenta en la función objetivo para el proceso de inversión conjunta.

En la Figura 47 se comparan los modelos de magnetización resultantes de la inversión individual y conjunta. Por otro lado, en la Figura 48 se comparan también los modelos de densidad que resultaron de los procesos de inversión individual y conjunta.

Las magnitudes de los parámetros obtenidos al finalizar la inversión y los modelos en sí son muy similares uno al otro, por lo que, para discernir las mejoras atribuibles a la inversión conjunta de datos, se calculó el vector de gradientes cruzados entre los modelos finales de inversión individual y de la inversión conjunta. En la Figura 49, se muestra la magnitud del vector de gradientes cruzados que resulta de la inversión individual. Por su parte, la magnitud del vector de gradientes cruzados que se obtiene de los modelos de inversión conjunta se muestra en la Figura 50. De forma similar a lo expuesto en la sección 6.3, la similitud estructural que existe entre los modelos de magnetización y densidad se da en zonas donde el vector de gradientes cruzados es cero. Entre mayor sea la magnitud del vector, menor será la similitud estructural existe entre los modelos resultantes. De las Figuras 49 y 50 podemos observar que es la inversión individual la que contiene valores de magnitud del vector de gradientes

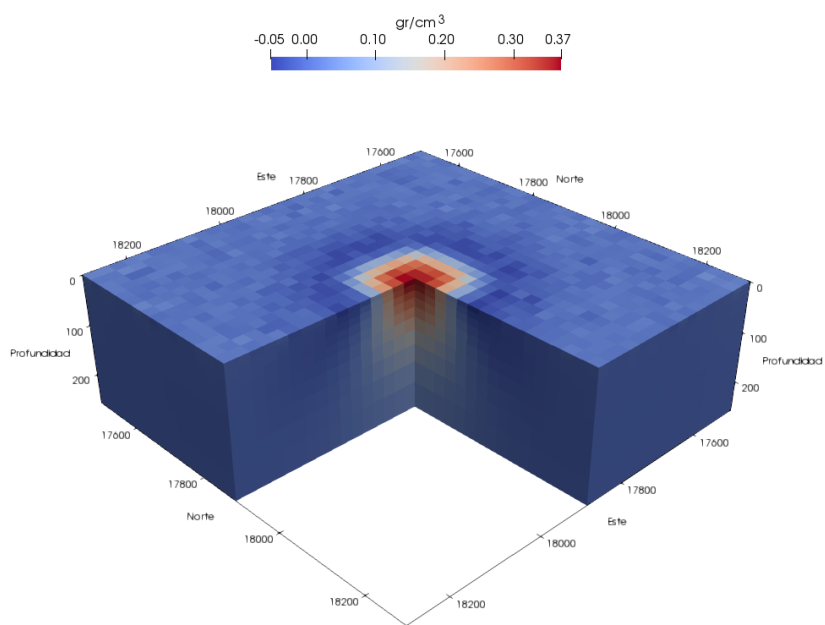


(a)

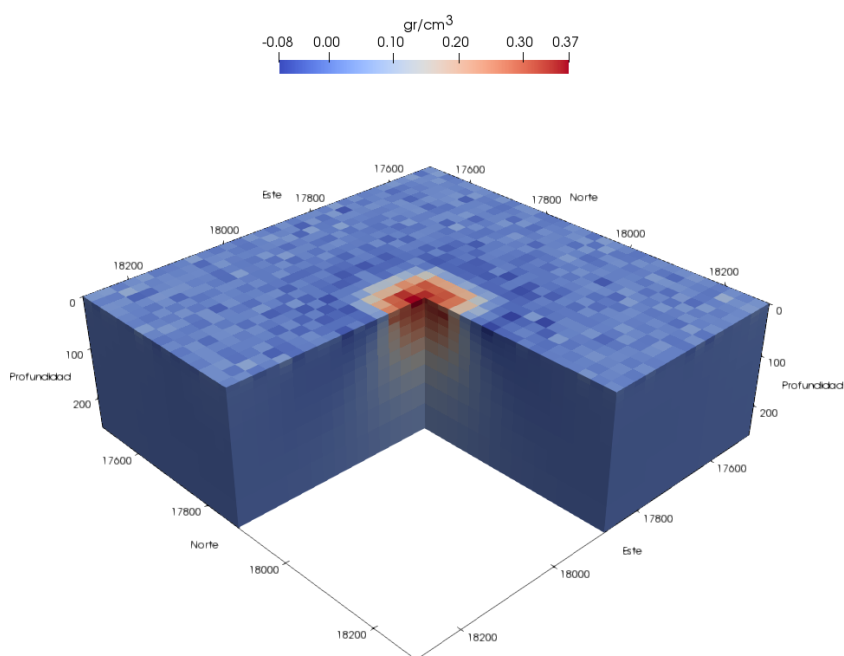


(b)

Figura 47. a) Modelo de magnetización resultante de la inversión individual. b) Modelo de magnetización resultante de la inversión conjunta.



(a)



(b)

Figura 48. a) Modelo de densidad resultante de la inversión individual. b) Modelo de densidad resultante de la inversión conjunta.

cruzados mayores, lo cual se traduce en menor similitud estructural entre los modelos obtenidos.

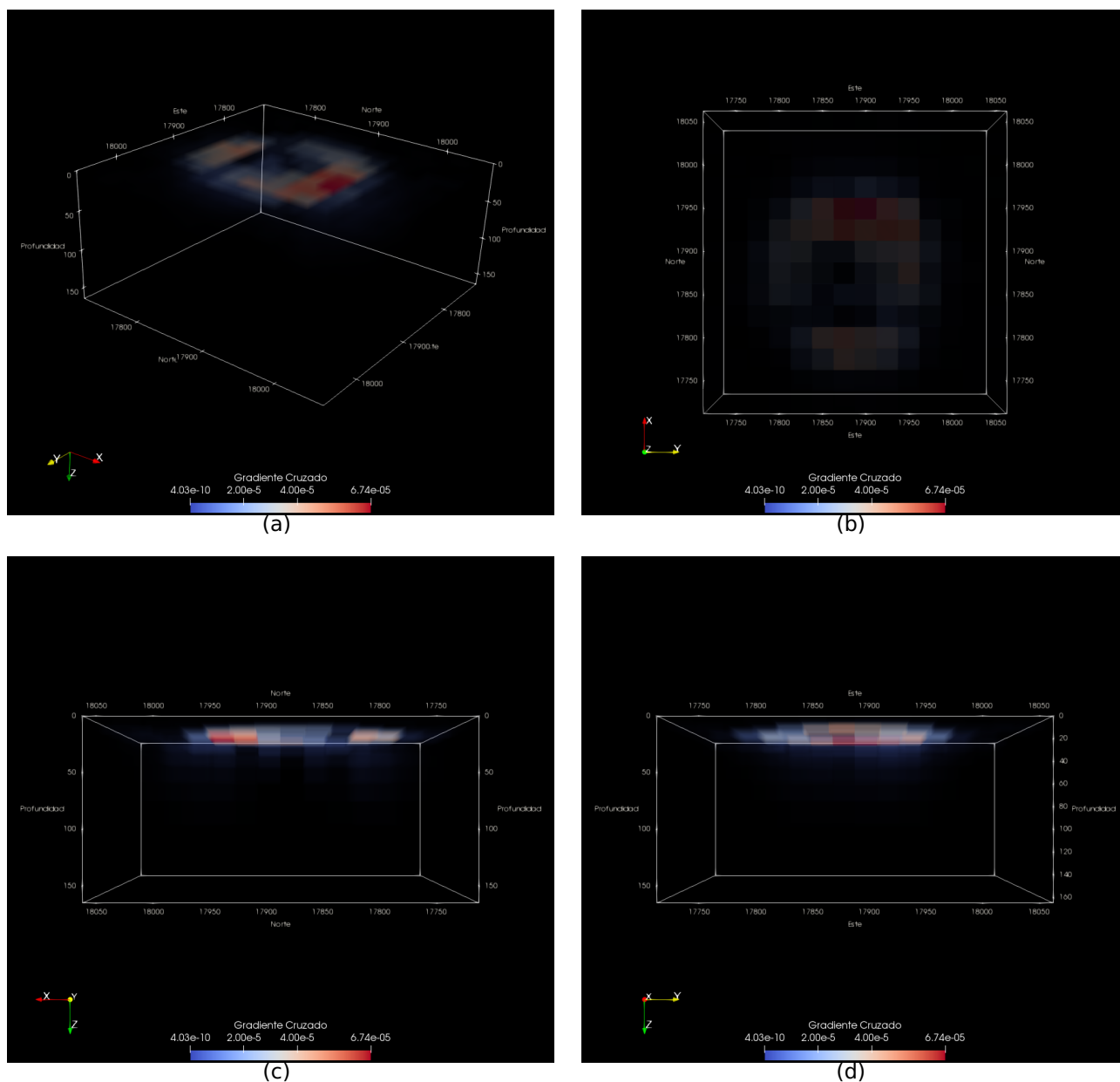


Figura 49. Magnitud del vector de gradientes cruzados de los modelos de densidad y magnetización obtenidos a partir del proceso de inversión individual de datos de gravedad y magnetismo. a) Perspectiva general. b) Plano de visualización xy. c) Plano de visualización xz. d) Plano de visualización yz.

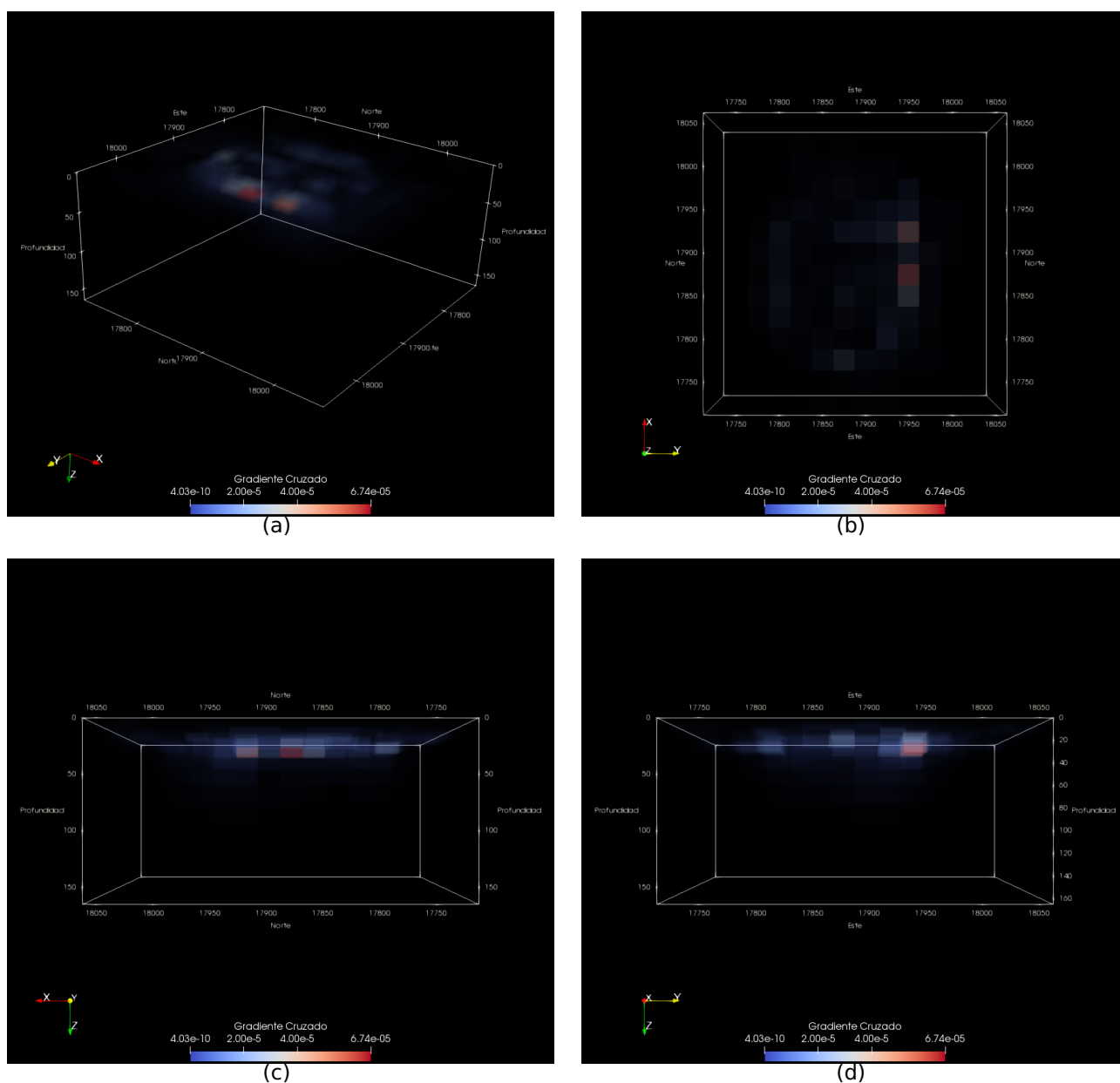


Figura 50. Magnitud del vector de gradientes cruzados de los modelos de densidad y magnetización obtenidos a partir del proceso de inversión conjunta de datos de gravedad y magnetismo. a) Perspectiva general. b) Plano de visualización xy. c) Plano de visualización xz. d) Plano de visualización yz.

Otra forma de validar que la inversión conjunta arroja mejores resultados que la inversión individual, es a través de las gráficas de nubes de puntos (cross-plots), que son gráficas que relacionan o comparan celda a celda los parámetros de los modelos finales de un proceso de inversión. En la Figura 51, se muestran los cross-plots que se obtienen de los ejemplos de inversión que se han venido analizando. Cada punto representa una celda del modelo y está graficado según los valores de las propiedades físicas que le corresponden. El grupo de datos que se encuentra cercano al valor cero,

significa que muchas de las celdas de los modelos se encuentran alrededor de esa magnitud. Una transición entre grupos de datos se interpretaría como que el modelo tiene cierta suavidad en el cambio entre sus propiedades.

Recordemos que el modelo del que partimos es un medio homogéneo de densidad 0 gr/cm^3 y magnetización 0 A/m (Figura 28), por lo que, se esperaría que en cross-plots existiera una transición entre los valores 0 y 1, con un ángulo aproximado a los 45° .

Hay que hacer notar que ninguno de los dos experimentos alcanzaron a recuperar el modelo óptimo, sin embargo, el cross-plot de la inversión conjunta (Figura 51b) es la que menos se aleja de los 45° de pendiente. Además de que las magnitudes de las propiedades del cuerpo detectado por la inversión separada son más dispersos que las obtenidas por la inversión conjunta (Magnitudes mayores a los 0.3 gr/cm^3 de densidad y 0.3 A/m de magnetización).

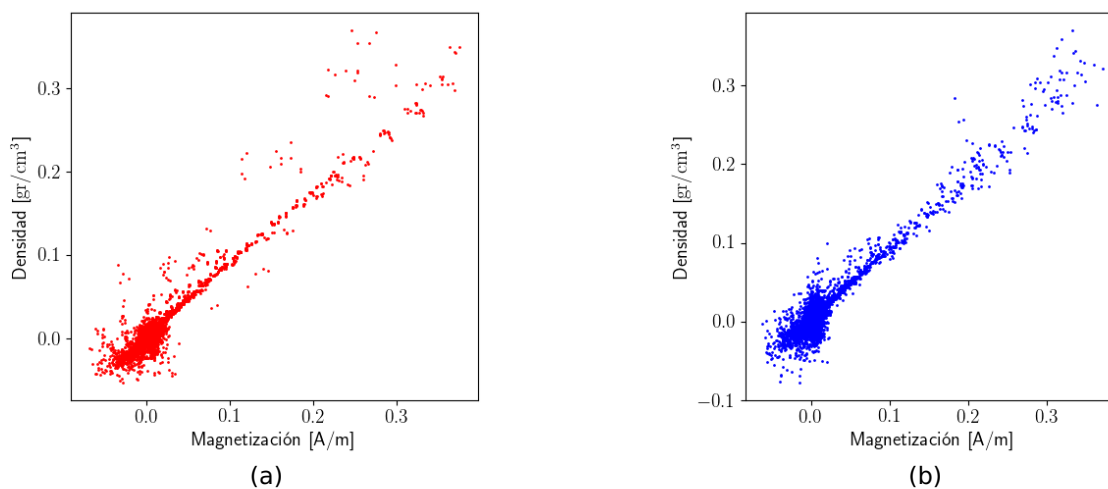


Figura 51. a) Cross-plot resultante de la inversión individual de datos magnéticos y de gravedad. b) Cross-plot resultante de la inversión conjunta de datos magnéticos y de gravedad.

Capítulo 7. Discusiones

7.1. Acerca de la inversión conjunta de datos potenciales restringida por un modelo de conductividad

Nuestros resultados nos ayudaron a darle respuesta a la hipótesis planteada en éste trabajo. Demostramos, a partir de un estudio sistemático de inversión conjunta bidimensional, que las técnicas de adquisición de datos EMA y potenciales son compatibles y pueden ser relacionadas a través de la inversión conjunta restringida por la función de gradientes cruzados. Por lo que, nos concentramos en explorar la viabilidad de generar modelos tridimensionales del subsuelo a partir de la inversión conjunta de datos potenciales y EMA.

7.2. Acerca del modelado directo de datos electromagnéticos aéreos

Una de las mayores complicaciones con las que nos encontramos en el desarrollo del algoritmo de modelado de datos EMA surgió al momento de decidir las condiciones iniciales, es decir, la fuente con la que se iniciará la simulación de la propagación de una onda electromagnética en el subsuelo. Dependiendo del tipo de fuente elegida son varios los procesos que pueden o no ser aplicados a los datos medidos en el receptor, tales como, interpolación de la serie de tiempo a una serie equiespaciada regularmente, la extrapolación de la serie de tiempo a 40 ms o la convolución con la forma de la onda. Esta selección del tipo de fuente afecta directamente al tiempo de proceso y a la magnitud de los datos medidos. Los mejores resultados los obtuvimos con un tipo de fuente que duplica el tiempo de proceso.

Una vez que las condiciones iniciales han sido generadas, el modelado directo de datos electromagnéticos propuesto por Wang y Hohmann (1993) se comportó de manera estable y apropiada. Lo cual nos llevó a generar respuestas que son comparables con las respuestas de otros algoritmos (Brodie, 2010; Raiche, 2007; Smith y Lee, 2004).

Por otro lado, el tamaño del modelo es de suma importancia, puesto que la condición de frontera en la interface aire-tierra implica la continuación ascendente de los campos en la superficie. Esto debido a que la transformada de Fourier implícita en la continuación necesita un número de elementos que sean potencia de dos, 2^n , por lo

tanto, entre más grande sea el modelo, mayor será al número de elementos que serán continuados hacia arriba. Lo cual implicará mayor tiempo en el proceso de simulación.

La mayor complicación con la que nos enfrentamos fue al momento de calcular la matriz de sensibilidad para los datos EMA. Aún cuando nuestros resultados fueron lógicos y mostraron congruencia en su forma, las amplitudes de estos no nos permitieron llevar a cabo una inversión de datos EMA de manera adecuada. Debido a que dichas amplitudes afectan directamente las direcciones de búsqueda del método de gradientes conjugados. Esto nos impidió aplicar en este trabajo el desarrollo de McGillivray *et al.* (1994), requerimiento indispensable para llevar a cabo inversiones de datos electromagnéticos aéreos en medios tridimensionales.

7.3. Acerca del modelados directos de datos potenciales

Por su parte, el modelado directo de datos magnéticos y datos de gravedad demostraron ser muy versátiles y sencillos de implementar, dado que logramos repetir de manera exitosa los resultados publicados por Fregoso-Becerra (2010). Además gracias a que sus ecuaciones son lineales la matriz de sensibilidad de cada uno de ellos se obtiene directamente y sólo es necesario calcularse una sola vez debido a que éstas dependen solamente de la geometría del modelo y ésta no cambia durante todo el proceso de inversión.

Dentro del proceso de inversión hay que ser muy cuidadosos en utilizar una desviación estándar correcta en la función de ajuste de datos, puesto que de ésta depende mucho la rapidez con la que el proceso de inversión alcanza una solución adecuada. Ésto para cada tipo de dato que se desee integrar.

También un aspecto crucial es la selección de un peso adecuado tanto para la regularización, α_R , como para el peso de la función del modelo *a priori*, α_a .

7.4. Acerca del esquema de gradientes conjugados como metodología de inversión de datos geofísicos

La metodología de gradientes conjugados demostró ser adecuada dentro de nuestro esquema de inversión debido a la gran cantidad de parámetros a determinar. Además, su implementación fue sencilla de llevar a cabo.

Las funciones f_A , f_R y f_A , funciones que han sido probadas en metodologías distintas a la de gradientes conjugados, mostraron convergencia, estabilidad y rapidez al ser evaluadas por medio del algoritmo de gradientes conjugados. Sin embargo, hay aspectos que deben considerarse y calibrarse correctamente si es que no se quiere incurrir en graves errores y en la obtención de modelos tridimensionales del subsuelo incorrectos. Uno de ellos es la selección de un algoritmo que calcule correctamente el paso, α , que hay que dar en las distintas direcciones de búsqueda, según lo establece el método. Todos nuestros procesos de inversión limitaron la búsqueda del paso de tal forma de que éste siempre fuera positivo y que su magnitud no fuera mayor a 1.5 veces la magnitud del paso anterior. De esta forma fue que logramos estabilidad y rapidez en los procesos de inversión.

7.5. Acerca de la metodología de los gradientes cruzados en la inversión conjunta

Según lo visto en la sección 6.3 la función de gradientes cruzados mostró ser muy sensible a las dimensiones de las celdas de los modelos. Esto es de esperarse debido a la naturaleza misma de la aproximación por diferencias finitas con la que se definió. Sin embargo, éste hecho no demerita la gran ventaja que su inclusión tiene dentro de cualquier esquema de inversión. Según lo visto en la sección 6.4 los modelos obtenidos a partir de inversión conjunta resultaron tener una mayor similitud estructural que aquellos obtenidos a partir de una inversión individual.

7.6. Acerca del uso del computo paralelo

Afortunadamente, tuvimos la posibilidad de desarrollar algoritmos de tal forma que estos fueran capaces de hacer uso del cómputo paralelo. Ésta herramienta mostró ser de gran utilidad dado que los tiempos de proceso se redujeron de manera significativa. Esto es de resaltarse porque hay que recordar que todas las metodologías de modelado presentadas en este trabajo contemplan la tridimensionalidad del subsuelo en su implementación, lo que incrementa el número de parámetros a utilizar y a determinar.

Por ejemplo, para el modelado directo de una estación de datos EMA, al utilizar un núcleo y un hilo como capacidad máxima de cómputo, el tiempo de procesamiento fue aproximadamente de 200 minutos. Mientras que si utilizamos un núcleo y veinte hilos como capacidad máxima de cómputo el tiempo de proceso fue aproximadamente de

90 minutos. Aún cuando el uso de 20 hilos no significó que el proceso se desarrollo 20 veces más rápido, el tiempo final de proceso disminuyo a menos de la mitad, lo cual es una disminución significativa del tiempo de proceso. Por lo que, el computó paralelo es de mucha importancia, sobre todo cuando se utilice el algoritmo en casos reales de exploración, donde se pueden llegar a tener miles de estaciones.

Capítulo 8. Conclusiones

En el presente trabajo se formuló el marco teórico de inversión conjunta tridimensional capaz de incorporar datos EMA y datos potenciales (magnetismo y gravedad). Éste marco teórico fue primeramente probado en modelos bidimensionales con los tres tipos de datos y luego se implementó un algoritmo de inversión conjunta tridimensional, que actualmente demostró su funcionalidad con datos potenciales. Con este algoritmo somos capaces de generar modelos tridimensionales de la conductividad, magnetización y densidad del subsuelo a partir de la información recabada en las distintas campañas de recolección de datos.

El programa se desarrolló completamente con el lenguaje de programación FORTRAN y hace uso de las librerías OpenMP y MPI, las cuales nos permiten utilizar múltiples computadoras y así reducir significativamente los tiempos de proceso.

Para el caso de los datos EMA, el desarrollo del algoritmo de modelación resultó ser un reto muy interesante y demandante, dado que se tuvieron que utilizar conjuntamente muchas técnicas numéricas para el cálculo de cada estación de medición, tales como, diferencias finitas en el dominio del tiempo, transformadas de Fourier en 2 dimensiones, transformada de Fourier en una dimensión para series de tiempo espaciadas regularmente y no espaciadas regularmente, convolución de series de tiempo, extrapolación logarítmica, extrapolación exponencial, interpolación bidimensional, interpolación lineal, producto escalar de vectores, continuación ascendente de campos, por nombrar algunas. Por otro lado, el cálculo de la matriz de sensibilidad requirió la implementación de una formulación semianalítica para realizar recursivamente el cálculo de los campos en el dominio de Fourier.

Para el caso de datos potenciales se utilizaron expresiones analíticas que miden la respuesta de un prisma rectangular de magnetización o densidad uniforme, las cuales resultaron sencillas de programar y de poner en práctica.

El algoritmo de gradientes conjugados nos permitió llevar a cabo la inversión individual y la inversión conjunta de diferentes tipos de datos geofísicos. Dicha metodología es adecuada debido a que no es necesario almacenar en memoria la matriz de sensibilidad de cada metodología utilizada. Además, esta diseñada para encontrar la solución de grandes sistemas de ecuaciones, que, desde el punto de vista de interpretación de

datos geofísicos, significa la localización y delimitación espacial de las propiedades físicas de las rocas, que es la meta final de cualquier estudio geofísico de exploración del subsuelo.

8.1. Trabajo futuro

Para el caso de datos EMA, consideramos necesario cambiar las condiciones iniciales de la propagación de la onda electromagnética en el subsuelo, es decir, utilizar otras ecuaciones con las cuales poder simular los campos **e** y **b** para los tiempos t_{-1} y $t_{-1/2}$, respectivamente.

También para el caso de datos EMA, es necesario calcular correctamente la matriz de sensibilidad, elemento indispensable para llevar a cabo la inversión tanto de manera individual como conjunta con datos potenciales.

Desde el punto de vista de la programación, siempre habrá espacio para implementar más y mejores instrucciones para hacer uso del cómputo paralelo. Por lo que, en su conjunto, el algoritmo puede mejorar todavía más sus tiempos de proceso.

Literatura citada

- Adhidjaja, J. I. y Hohmann, G. W. (1989). A finite-difference algorithm for the transient electromagnetic response of a three-dimensional body. *Geophysical Journal International*, **98**(2): 233–242.
- Australian Geoscience Information Network (2019). Geophysical archive data delivery system. Recuperado el 2/05/2019 de: http://www.geoscience.gov.au/cgi-bin/mapserv?map=/nas/web/ops/prod/apps/mapserver/gadds/wms_map/gadds.map&mode=browse.
- Bhattacharyya, B. (1964). Magnetic anomalies due to prism-shaped bodies with arbitrary polarization. *Geophysics*, **29**(4): 517–531.
- Blakely, R. J. (1996). *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press.
- Bland, D. M., Laakso, T. I., y Tarczynski, A. (1996). Analysis of algorithms for nonuniform-time discrete fourier transform. En: *Circuits and Systems, 1996. IS-CAS'96., Connecting the World., 1996 IEEE International Symposium on*. IEEE, Vol. 2, pp. 453–456.
- Brodie, R. C. (2010). *Holistic inversion of airborne electromagnetic data*. Tesis de doctorado, The Australian National University.
- Brodie, R. C. (2015). User manual for geoscience australia's airborne electromagnetic. Recuperado el 27/04/2019 de: <https://github.com/GeoscienceAustralia/ga-aem.git>.
- Calderón Magallón, J. P. (2015). *Modelado inverso de datos de tensor de gravedad*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.
- Cawood, P. A. y Tyler, I. M. (2004). Assembling and reactivating the proterozoic capricorn orogen: lithotectonic elements, orogenies, and significance. *Precambrian Research*, **128**(3): 201–218.
- Dobrin, M. B. y Savit, C. H. (1960). *Introduction to geophysical prospecting*, Vol. 4. McGraw-hill New York.
- Doetsch, J., Linde, N., Coscia, I., Greenhalgh, S. A., y Green, A. G. (2010). Zonation for 3d aquifer characterization based on joint inversions of multimethod crosshole geophysical data. *Geophysics*, **75**(6): G53–G64.
- Dransfield, M. (2011). *Airborne gravity gradiometry — The state of the art*, pp. 32–36. Australian Society of Exploration Geophysicists (ASEG).
- Du Fort, E. y Frankel, S. (1953). Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, **7**(43): 135–152.
- Farquharson, C. y Oldenburg, D. (1996). Approximate sensitivities for the electromagnetic inverse problem. *Geophysical Journal International*, **126**(1): 235–252.
- Fletcher, R. y Reeves, C. M. (1964). Function minimization by conjugate gradients. *The computer journal*, **7**(2): 149–154.

- Fraser, S. J., Wilson, G. A., Cox, L. H., Cuma, M., Zhdanov, M. S., y Vallée, M. A. (2012). Self-organizing maps for pseudo-lithological classification of 3d airborne electromagnetic, gravity gradiometry and magnetic inversions. En: *ASEG Extended Abstracts 2012*. Australian Society of Exploration Geophysicists (ASEG), pp. 1–4.
- Fregoso-Becerra, E. (2010). *Inversión conjunta 3D de múltiples datos geofísicos usando restricciones de gradientes cruzados*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.
- Gallardo, L. A. (1997). *Inversión 3D de datos gravimétricos y magnéticos aplicando condiciones de acotamiento y suavidad*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.
- Gallardo, L. A. (2004). *Joint two-dimensional inversion of geoelectromagnetic and seismic refraction data with cross-gradients constraint*. Tesis de doctorado, Lancaster University.
- Gallardo, L. A. (2007). Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging. *Geophysical Research Letters*, **34**(19).
- Gallardo, L. A. y Meju, M. A. (2003). Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2d inversion of dc resistivity and seismic data. *Geophysical Research Letters*, **30**(13).
- Gallardo, L. A. y Meju, M. A. (2004). Joint two-dimensional dc resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **109**(B3).
- Gallardo, L. A. y Meju, M. A. (2007). Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification. *Geophysical Journal International*, **169**(3): 1261–1272.
- Gallardo, L. A. y Meju, M. A. (2011). Structure-coupled multiphysics imaging in geophysical sciences. *Reviews of Geophysics*, **49**(1).
- Gallardo, L. A. y Thebaud, N. (2012). New insights into archean granite-greenstone architecture through joint gravity and magnetic inversion. *Geology*, **40**(3): 215–218.
- Gallardo, L. A., Fontes, S., Meju, M., Buonora, M., y de Lugao, P. (2012). Robust geophysical integration through structure-coupled joint inversion and multispectral fusion of seismic reflection, magnetotelluric, magnetic, and gravity images: Example from Santos basin, offshore Brazil. *Geophysics*, **77**(5): B237–B251.
- Gessner, K., Gallardo, L. A., Wedin, F., y Sener, K. (2016). Crustal structure of the northern Menderes Massif, western Turkey, imaged by joint gravity and magnetic inversion. *International Journal of Earth Sciences*, **105**(7): 2133–2148.
- Grant, F. S. y West, G. F. (1965). *Interpretation theory in applied geophysics*. McGraw-Hill.
- Haber, E. y Gazit, M. H. (2013). Model fusion and joint inversion. *Surveys in Geophysics*, **34**(5): 675–695.
- Hestenes, M. R. y Stiefel, E. (1952). *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, Vol. 49. NBS Washington, DC.

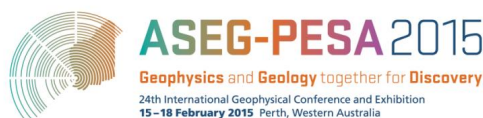
- Johnson, S. P., Thorne, A., Tyler, I., Korsch, R., Kennett, B., Cutten, H., Goodwin, J., Blay, O., Blewett, R., Joly, A., *et al.* (2013). Crustal architecture of the capricorn orogen, western australia and associated metallogeny. *Australian Journal of Earth Sciences*, **60**(6-7): 681–705.
- Lane, R., Green, A., Golding, C., Owers, M., Pik, P., Plunkett, C., Sattel, D., y Thorn, B. (2000). An example of 3d conductivity mapping using the tempest airborne electromagnetic system. *Exploration Geophysics*, **31**(1/2): 162–172.
- Larson, R. y Edwards, B. H. (1999). *Elementary Linear Algebra*. Houghton Mifflin Company, cuarta edición.
- León-Sánchez, A. M. y Gallardo, L. (2015). 2d cross-gradient joint inversion of magnetic and gravity data across the capricorn orogen in western australia. En: *ASEG Extended Abstracts 2015*. Australian Society of Exploration Geophysicists (ASEG), pp. 1–5.
- León-Sánchez, A. M., Gallardo, L. A., y Ley-Cooper, A. Y. (2018). Two dimensional cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic data sets constrained by airborne electromagnetic resistivity in the capricorn orogen, western australia. *Exploration Geophysics*, **49**(6): 940–951.
- Ley-Cooper, A. Y. y Brodie, R. C. (2013). Inversion of spectrem aem data for conductivity and system geometry. En: *ASEG Extended Abstracts 2013*. Australian Society of Exploration Geophysicists (ASEG), pp. 1–4.
- Ley-Cooper, A. Y., Munday, T., y Ibrahimi, T. (2015). Determining cover variability in the capricorn orogen with airborne em. En: *ASEG Extended Abstracts 2015: 24th International Geophysical Conference and Exhibition*. Australian Society of Exploration Geophysicists, pp. 1–6.
- León-Sánchez, A. M., Gallardo, L. A., y Ley-Cooper, A. Y. (2016). Aem cross-gradient constrained inversion of gravity and magnetic data. *ASEG Extended Abstracts*, **2016**(1): 1–6.
- Li, Y. y Oldenburg, D. W. (1996). 3-d inversion of magnetic data. *Geophysics*, **61**(2): 394–408.
- Li, Y. y Oldenburg, D. W. (1998). 3-d inversion of gravity data. *Geophysics*, **63**(1): 109–119.
- Lines, L. R., Schultz, A. K., y Treitel, S. (1988). Cooperative inversion of geophysical data. *Geophysics*, **53**(1): 8–20.
- McGillivray, P., Oldenburg, D., Ellis, R., y Habashy, T. (1994). Calculation of sensitivities for the frequency-domain electromagnetic problem. *Geophysical Journal International*, **116**(1): 1–4.
- Meju, M. A. (1994). *Geophysical data analysis: Understanding inverse problem theory and practice*. Society of Exploration Geophysics.
- Moorkamp, M., Heincke, B., Jegen, M., Roberts, A. W., y Hobbs, R. W. (2011). A framework for 3-d joint inversion of mt, gravity and seismic refraction data. *Geophysical Journal International*, **184**(1): 477.

- Nabighian, M. N. (1991). *Electromagnetic methods in applied geophysics: volume 2, application, parts A and B*. Society of Exploration Geophysicists.
- Newman, G. y Commer, M. (2010). Joint electromagnetic-seismic inverse modeling for matched data resolution. En: *EGM 2010 International Workshop*.
- Nocedal, J. y Wright, S. (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media.
- Oristaglio, M. L. y Hohmann, G. W. (1984). Diffusion of electromagnetic fields into a two-dimensional earth: A finite-difference approach. *Geophysics*, **49**(7): 870–894.
- Papoulis, A. (1962). *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill.
- Pirajno, F. (2004). Metallogeny in the capricorn orogen, western australia, the result of multiple ore-forming processes. *Precambrian Research*, **128**(3): 411–439.
- Raiche, A. (1998). Modelling the time-domain response of aem systems. *Exploration Geophysics*, **29**(1/2): 103–106.
- Raiche, A. (2007). P223 em modeling software. Recuperado el 27/04/2019 de: http://www.amirainternational.com/WEB/site.asp?section=news&page=projectpages/p223f_software.
- Reeves, C., Reford, S., y Milligan, P. (1997). Airborne geophysics: old methods, new images. En: *Proceedings of Exploration*. Vol. 97, pp. 13–30.
- Romero-Ruiz, A. (2015). *Inversion conjunta 2D de forma de onda y anomalía magnética por el método de cúmulos difusos c-means*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.
- Sasaki, Y. (2001). Full 3-d inversion of electromagnetic data on pc. *Journal of Applied Geophysics*, **46**(1): 45–54.
- Sasaki, Y. (2004). Three-dimensional inversion of static-shifted magnetotelluric data. *Earth, planets and space*, **56**(2): 239–248.
- Saucedo-Andrade, T. (2007). *Inversión conjunta de datos electromagnéticos a bajo número de inducción y sísmica de refracción*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.
- Saunders, J., Herwanger, J., Pain, C., Worthington, M., y De Oliveira, C. (2005). Constrained resistivity inversion using seismic data. *Geophysical Journal International*, **160**(3): 785–796.
- Shewchuck, J. R. (1994). *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain*. Carnegie Mellon University.
- Silva-Avalos, R. U. (2015). *Inversión de onda completa en medios elásticos bidimensionales en el dominio del tiempo usando el método de imágenes enfocadas*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.
- Smith, R. S. y Lee, T. J. (2004). Asymptotic expansions for the calculation of the transient electromagnetic fields induced by a vertical magnetic dipole source above a conductive halfspace. *Pure and applied geophysics*, **161**(2): 385–397.

- Solon, F., Gallardo, L., y Fontes, S. (2014). Characterization of sao francisco basin, brazil - joint inversion of mt, gravity and magnetic data. *76th EAGE Conference and Exhibition, 2014*, pp. 1–4.
- Telford, W. M., Telford, W., Geldart, L., Sheriff, R. E., y Sheriff, R. (1990). *Applied geophysics*, Vol. 1. Cambridge university press.
- Tikhonov, A. y Arsenin, V. (1977). *Solutions of ill-posed problems*: John wiley and sons.
- Tyler, I., Pirajno, F., Bagas, L., Myers, J., y Preston, W. (1998). The geology and mineral deposits of the proterozoic in western australia. *AGSO Journal of Australian Geology and Geophysics*, **17**: 223–244.
- Wang, T. y Hohmann, G. W. (1993). A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling. *Geophysics*, **58**(6): 797–809.
- Weisstein, E. W. (2019a). Least squares fitting–exponential. Recuperado el 27/04/2019 de: <http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFittingExponential.html>.
- Weisstein, E. W. (2019b). Least squares fitting–logarithmic. Recuperado el 27/04/2019 de: <http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFittingLogarithmic.html>.
- Wiese, H. y Weil, K. G. (1988). An efficient fourier transform algorithm for frequency domains of several decades using logarithmically spaced time samples. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **36**(7): 1096–1099.
- Wilson, G. A., Fraser, S., Cox, L. H., Cuma, M., Zhdanov, M. S., y Vallée, M. A. (2011). Lithological classification of large-scale 3d inversion of airborne electromagnetic, gravity gradiometry, and magnetic data: A case study from reid-mahaffy, ontario. En: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*. Society of Exploration Geophysicists, pp. 624–628.
- Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, **14**(3): 302–307.

Anexo A

Documentos derivados de la Tesis



2D cross-gradient joint inversion of magnetic and gravity data across the Capricorn Orogen in Western Australia.

Adrián Misael León Sánchez

*División de Ciencias de la Tierra
Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California (CICESE),
Carretera Ensenada-Tijuana No. 319, Zona Playitas,
C.P. 22860, Ensenada, Baja California, México.
aleon@cicese.edu.mx*

Luis Alonso Gallardo Delgado

*División de Ciencias de la Tierra
Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California (CICESE),
Carretera Ensenada-Tijuana No. 319, Zona Playitas,
C.P. 22860, Ensenada, Baja California, México.
lgallard@cicese.mx*

SUMMARY

In order to contribute to the recent efforts to produce a combined interpretation of the Capricorn Orogen in Western Australia, we performed the 2D cross-gradient joint inversion of the gravity and magnetic data available along the trace of the seismic section 10GA-CP2. This methodology establishes that even in the absence of analytical relationships between the physical properties underlying disparate geophysical methods, we expect a degree of structural similarity in the images that they provide. Our results show that the major subsurface structures interpreted on the seismic section are readily detected by the 2D cross-gradient joint inversion. We also illustrate how this structural framework acquires further geological significance when the framed density and magnetization properties are interpreted together and correlated to the expected geological materials within the Capricorn orogen.

Key words: Joint inversion, cross gradients, gravity data, magnetic data, Capricorn orogen.

INTRODUCTION

Differently to other geophysical data types, it is widely acknowledged that the combined analysis of magnetic and gravity data can reveal physical properties that may easily characterize distinctive rock types within the Earth's crust and contribute to elucidate their very complex geological structure (e.g. Gessner, et al., 2013). Particularly, when this geophysical information is used jointly, it may attain a resolution power capable of detecting regions of preferential mineral endowment and providing a locus for mineral exploration and targeting (cf. Gallardo and Thebaud, 2012; Johnson, et al., 2013). For this reason, the joint inversion of gravity and magnetic data along various crustal-scale seismic reflection traverses carried out along Australia is becoming a common practice. Some of these seismic reflection surveys were conducted across the southern Pilbara and Gascoyne regions during April to early July 2010. In order to assimilate density and magnetic properties to the combined interpretation of these seismic profiles, we performed the 2D cross-gradient joint inversion of the gravity and magnetic data currently available along the seismic traverse 10GA-CP2. The corresponding integrated image of density and magnetization

contrasts is compared to the interpreted seismic and geological sections reported by Johnson, et al. (2013).

Gravity and magnetic data

The Bouguer gravity and TMI magnetic data selected for this work comprise an area between the longitudes E115.5° and E118°, and between the latitudes S22° and S26°, which covers the whole extension of the seismic traverse 10GA-CP2; both data sets were provided by the Geophysical Archive Data Delivery System (GADDS) from Geoscience Australia.

For gravity data we selected the Bouguer anomaly (Figure 1) directly from the database, whereas the magnetic data were reduced to the pole (Figure 2) in order to account for the apparent local direction of magnetization induced by the geomagnetic field acting on the crooked trace of the seismic traverse. For this correction we considered a Geomagnetic field inclination of -58.81 degrees and a declination of 0.145; values extracted from NOAA's IGRF calculator for 1995.

For a full comparison to the seismic traverse 10GA-CP2, we interpolated the gravity and magnetic data at the same CDP coordinates of the seismic section (i.e. sampling at every 20 meters). In order to isolate gravity and magnetic anomalies associated to local (yet crust scale) heterogeneities covered by the seismic profile, a flat regional trend was removed from the gravity data whereas the magnetic profile was averaged to zero. We expect that after this regional removal all the remaining anomalies should originate within the upper crust in the studied region. The resulting gravity and magnetic data profiles are shown in Figures 3a and 4a, respectively.

2D CROSS-GRADIENT JOINT INVERSION

Cross-gradient joint inversion is an integrative method for different geophysical datasets with the aim to search for multiple geophysical models that are structurally matching and fit multiple data sets (Gallardo and Meju, 2003; Gallardo and Meju, 2004). This approach has been applied to data combinations including electric resistivity and seismic travel time data (Gallardo and Meju, 2004), electromagnetic and seismic refraction data (Gallardo and Meju, 2007) and gravity and magnetic data (Gallardo et al., 2012).

We aim to use the cross-gradient algorithm of Gallardo (2007) to find two sections of the subsurface: one for the distribution of electric contrast (Figure 3b), driven by the gravity data, and

one for the distribution of magnetization determined by the magnetic data (Figure 4b).

According to the cross-gradient approach, the density and magnetization sections should structurally resemble each other as measured by the cross product of their property gradients. To deal with the ambiguity inherent in unconstrained gravity and magnetic data modeling, we simplify our models by assuming that only negligible density and magnetization contrast exists below 20 km depth. While this approach may disregard some features of the deep structure still visible in a deep seismic section, it allows the variations of density and magnetic susceptibility to better relate to the architecture of the more heterogeneous upper crust.

Geophysical model parameterization and initial guess

The model was divided into regular 2-km wide cells along the distance of the seismic sections. The cell width was increased logarithmically until the complete section extended 100 km beyond the seismic section limits. The transverse section of the profiles was also extended 100 km on each side. These dimensions are set to account for any regional data trend that may still exist in each individual section in every direction, and to focus on the study area. Cell thicknesses are set to vary with depth, ranging from 100 m at the surface up to 2 km at 20 km depth. We note that, as beyond this depth no heterogeneities are assumed to exist, further discretization is not necessary. The initial model was set to zero-density and zero-magnetization contrast and, as described in Gallardo et al. (2012), the inversion goes through several iterative steps to gradually add heterogeneities and fit the individual data.

Selection of optimal models

In order to attain optimal models, the level of smoothness of the models was adjusted progressively through iterations. At the final stage, the optimal models fit the data set, are structurally correlated, concentrate the heterogeneities in the first 18 km of the crust and, therefore, are deemed as representative of the major local heterogeneities within the upper crust.

GEOPHYSICAL INTERPRETATION

The results of the cross-gradient joint inversion are presented as a 'geospectral' image using a colour scale that combines information on density and magnetization contrasts (Figure 5b). The geophysical values are maintained between reasonable bounds for average rock property values, which may correlate to major crustal rock types. Following previous interpretations (cf. Gallardo and Thebaud, 2012; Gessner et al. 2013) some major units may be identified in the geospectral images as follows: i) Gneiss and metasedimentary (green-orange), ii) magnetic igneous intrusive (red), iii) non-magnetic igneous intrusive (yellow), and iv) ultramafic rocks (dark colours). It should be noted that property contrasts along the profile are deemed accurate in general, whereas the estimated depths of features are less reliable, as they generally depend on the local dip of structures near the surface.

Geospectral image and seismic correlations

In order to furnish an exact comparison of the features readable from the geospectral image and those previously interpreted from the seismic section 10GA-CP2, we overlaid Figure 7 from Johnson et al. (2013) and our geospectral image

(Figure 5b). It is remarkable that at least 15 structures (marked with letters A to O) can be well identified by their colour in the spectral image. These units are also well delimited by their respective surrounding faults as interpreted from the seismic section: structure A coincides with northern margin of the Yilgran Craton; structures E through J accommodate themselves within the Glenburgh terrane and Gascoyne province; structure G matches the location of the indicated mines of Glenburgh (gold) and Dalgety Downs (copper, lead, silver); structures J and K also match the location of mines Yinnetharra (rare earth elements and manganese) and Springs (manganese); similarly, structures L through O extend along the surface expression of the Archean and Proterozoic basins at the north of the profile.

CONCLUSIONS

Geological structures formed by the compression and extension generated in a collision zone, such as the Capricorn Orogen in Western Australia, are abundant of rock diversity and structurally complex and as such, rich on density and magnetization imprints. In this paper we can observe that, despite the known limited resolution of gravity and magnetic data at depth, both data sets can be readily inverted jointly and provide meaningful information of rock properties and distribution that parallels the information that may otherwise only be evinced by a more laborious seismic reflection experiment. The classification of units depicted in the presented geospectral image not only resembled that interpreted previously on the seismic section, but also was able to characterize the heterogeneity even further while distinguishing local heterogeneity within the major seismic structures.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge the Geophysical Archive Data Delivery System (GADDS) for the availability of the gravity and magnetic data used in this work.

REFERENCES

- Gallardo, L.A. and Meju, M.A., 2003, Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data: *Geophysical Research Letters*, v. 30, 1658.
- Gallardo, L.A. and Meju, M.A., 2004, Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints: *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, v. 109, B03311.
- Gallardo, L.A. and Meju, M.A., 2007, Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic travel time data for structural and lithological classification: *Geophysical Journal International*, v. 169, p. 1261-1272.
- Gallardo, L.A., Fontes, S.L., Meju, M.A., Buonora, M.P. and Lugao, P.P., 2012, Robust geophysical integration through structure-coupled joint inversion and multispectral fusion of seismic reflection, magnetotelluric, magnetic, and gravity images: Example from Santos Basin, offshore Brazil: *Geophysics*, v. 77, p. B237-B251.
- Gallardo, L. A., and Thebaud, N., 2012, New insights into Archean granite-greenstone architecture through joint gravity

2D C.-G.J.I.M.G.D.A.C.O.W.A.

León, A.M., Gallardo, L.A.

and magnetic inversion, *Geology*, 40(3), 215-218, doi:10.1130/g32817.1.

Gessner, K., Jones, T., Goodwin, J.A., Gallardo, L.A., Milligan, P.R., Brett, J., and Murdie R., 2013, Interpretation of magnetic and gravity data across the Southern Carnarvon Basin, and the Narryer and Youanmi terranes in Western Australia: multiscale edge detection (worms), forward modeling, and cross-gradient joint inversion, in Youanmi and Southern Carnarvon seismic and magnetotelluric (MT) workshop 2013: extended abstracts, compiled by S. Wyche, T.J. Ivanic and I. Zibra: Geological Survey of Western Australia, Record 2013/6.

Johnson, S.P., Thorne, A.M., Tyler, I.M., Korsch, R.J., Kennett, B.L.N., Cutten, H.N., Goodwin, J., Blay, O., Blewett, R. S., Joly, A., Dentith, M.C., Aitken, A.R.A., Holzschuh, J., Salmon, M., Reading, A., Heinson, G., Boren, G., Ross, J., Costelloe, R.D., and Fomin, T., 2013, Crustal architecture of Capricorn Orogen, Western Australia and associated metallogeny: *Australian Journal of Earth Sciences*, 60, 681-705.

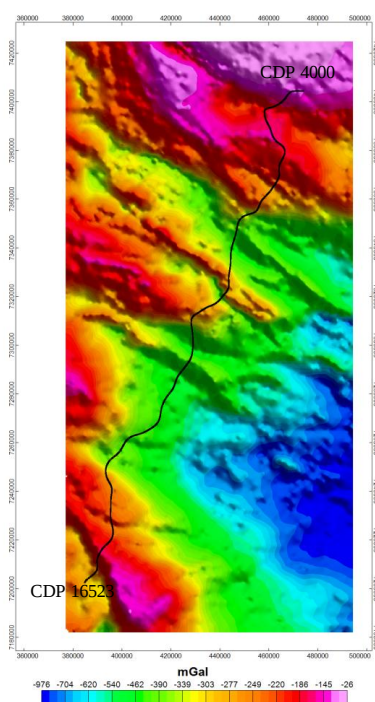


Figure 1. Bouguer anomaly (in gravity units) for the studied area. The crooked line indicates the trace of the seismic traverse 10GA-CP2.

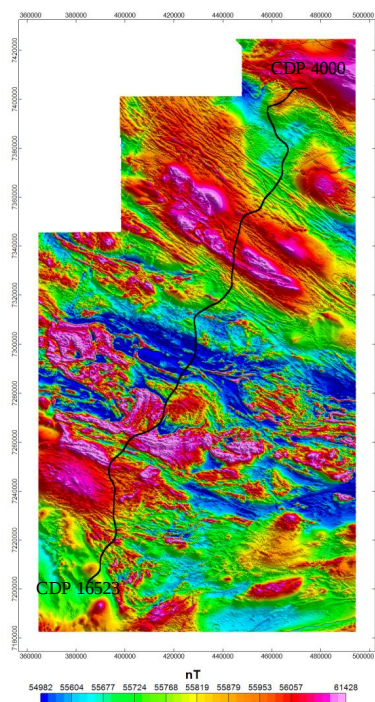


Figure 2. Composed map of the reduced to the pole (RTP) magnetic anomaly. The solid line denotes the trace of the 10GA-CP2 seismic traverse.

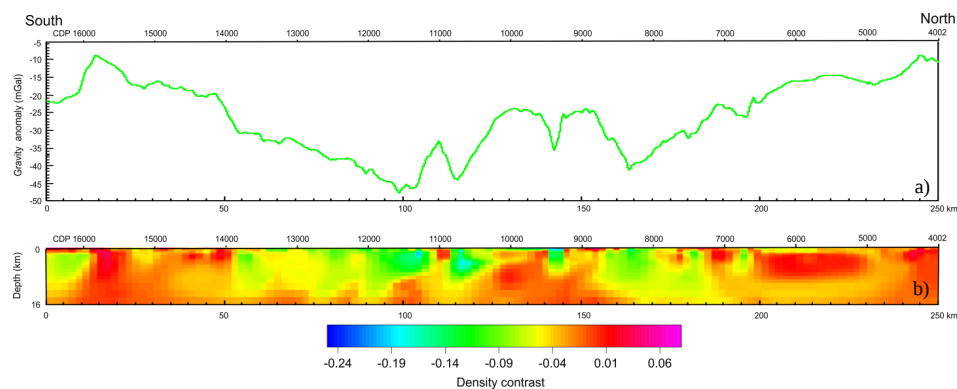


Figure 3. a) Gravity profile over the traverse 10GA-CP2. b) Distribution of density contrast for the optimal model (in g/cm^3).

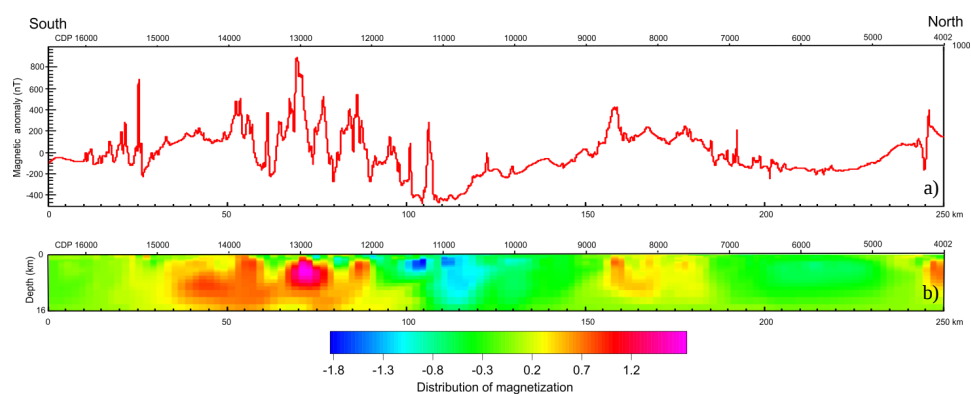


Figure 4. a) Magnetic profile over the traverse 10GA-CP2. b) Distribution of magnetization for the optimal model (in Amp/m).

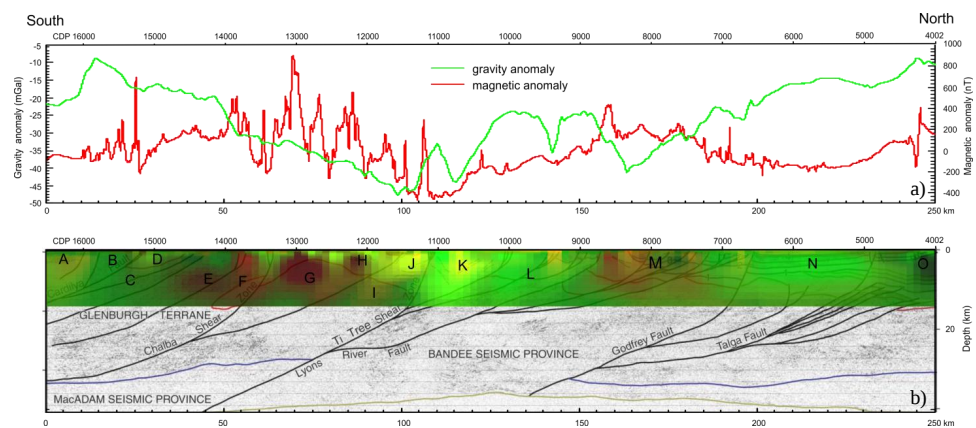


Figure 5. a) Gravity and magnetic profiles over the traverse 10GA-CP2. b) Geospectral image overlapped by the seismic section 10GA-CP2 as interpreted by Johnson et al. (2013).

AEM cross-gradient constrained inversion of gravity and magnetic data

Adrián M. León-Sánchez*

Applied Geophysics, CICESE
Ensenada-Tijuana 3918, Zona Playitas,
Baja California, 22860, México
aleon@cicese.edu.mx

Luis A. Gallardo

Applied Geophysics, CICESE
Ensenada-Tijuana 3918, Zona Playitas,
Baja California, 22860, México.
lgallard@cicese.mx

A. Yusen Ley-Cooper

Mineral Resources, CSIRO
Bentley, WA, 6102, Australia.
yusen.ley@csiro.au

SUMMARY

Nowadays magnetics, electromagnetics and gravity are among the most abundant airborne surveys. Traditionally they aim at specific depth targets. For instance, Airborne Electromagnetic (AEM) data are known to provide reliable models of a few hundred meters deep; whereas, gravity and magnetic data can reveal geological features below few thousand meters depth. This depth-resolution difference has historically limited the combined interpretation of these data. We, however, hypothesize that there is a commonly sensed depth interval, which could be used to harness the joint inversion of the data and increase the reliability of the models in the wider depth extent. To demonstrate this we designed three inversion experiments using potential and AEM field data acquired in Western Australia. Firstly, we inverted each data set separately using a conventional 2D inversion strategy. Secondly, we jointly inverted the gravity and magnetic data using the cross-gradient constraint. Thirdly, we added a preliminary AEM resistivity model as a cross-gradient constraint for the 2D cross-gradient joint inversion of the gravity and magnetic datasets. Our results show that the three data sets sense a common area of the subsurface and that the vertical resolution of each data set influences in the shallow and deep structures of the joint models.

Key words: Cross-gradient, joint inversion, AEM data, potential data, Western Australia.

INTRODUCTION

For decades, airborne geophysics has helped to cover large and inaccessible areas considered prominent for exploration and targeting at a minimum cost and with sufficient depth and spatial resolution (Reeves et al. 1997). Because airborne geophysics allows us to acquire several geophysical data types simultaneously, it seems natural to combine all the available information to generate a better and more accurate interpretation.

One technique that has the capability of combining several data types is the cross-gradient joint inversion (Gallardo and Meju, 2003). This methodology has shown excellent results with many different combinations of geophysical data types (Gallardo and Meju, 2004, 2007; Gallardo, 2007; Moorkamp et al., 2011; Doetsch et al., 2011; Gallardo et al., 2012); however, it has not, as yet, been applied to AEM data.

In order get better results, similar spatial resolution of the involved data sets is required when the cross-gradient methodology is applied. It is known that potential field models reach depths between 5 and 15 km; however, potential field data also carries information of shallow geological structures (less than 600 meters depth), which is the depth where AEM data are more sensible. Our hypothesis is that even when potential and AEM data sets have different spatial resolution, the larger potential field structures will help to resolve vertically and laterally the resistive structures. To probe this, we used gravity, magnetic and AEM data sets acquired in the Capricorn Orogen in Western Australia and developed three inversion experiments. Firstly, we inverted each data set separately. Secondly, we performed a 2D cross-gradient joint inversion of the gravity and magnetic datasets. Thirdly, we added an AEM resistivity model as a constraint for the 2D cross-gradient joint inversion of the gravity and magnetic datasets.

Our results (León-Sánchez *et al.*, manuscript submitted, 2016) show that there is an area commonly sensed by all the data sets. The shallower structures are greatly influenced by the AEM data; while, the deeper structures are mainly determined by the potential data. We make use of geospectral images (Gallardo, 2007) to present our results.

GRAVITY, MAGNETIC AND AEM DATA SETS

We developed all our experiments along a 10 km long segment of the regional AEM flight line number 1016701. This segment shows evident heterogeneity in electrical conductivity, gravity and magnetic responses. The location of the 10 km long segment is shown in Figure 1. The AEM data are part of the largest AEM survey flown in Western Australia up to date (146,300 km²) and were acquired using a fixed-wing TEMPEST system (Lane et al., 2000). The field data for the AEM survey is shown in Figure 2d. The gravity and magnetic data sets were provided by the Geophysical Archive Data Delivery System (GADDS) from Geoscience Australia. Both data sets extend between the longitudes E115.5°-E118° and latitudes S22°-S26°, which cover almost half of the AEM line 1016701. For gravity, we used the Bouguer anomaly extracted directly from the data base. The magnetic data were reduced to the pole (RTP) to avoid transversal phase shifting in our 2D magnetic model. Both profiles are shown in Figure 2a.

JOINT INVERSION OF POTENTIAL AND AEM DATA SET

We divided the 10 km long segment into 50 meters-wide cells. The cell width of each side of the 10 km segment was increased exponentially until they reach 100 km beyond the profile end. To fulfil the 2D assumption, the transversal length of the cells was set to 100 km. Vertically, the cell thicknesses vary from 10 meters at the surface to 2 km at 5m depth. The initial model for each data set is completely homogeneous with null density and magnetization contrast and constant resistivity.

Conventional 2D inversion of potential and AEM data sets

For this experiment we used the unconstrained version of the algorithm of Gallardo (2007) and the gravity and magnetic profile data shown in Figure 2a. We tested several damping factors (ranging from 0.01 to 100) in order to find the smoothest model that fit adequately their corresponding data set. The resulting models for the gravity and magnetic data sets are shown in Figures 2b and 2c, respectively. From them, it is possible to detect certain structural similarity in three large regions clearly visible in both models and the field data themselves. These heterogeneities are evinced in the residual variations (Figure 2f) between the 4 km and 8 km positions of the profile (cf. Figure 2a).

To obtain the AEM conductivity model (Figure 2e) we used the Geoscience Australia's Layered Earth Inversion (GA-LEI) algorithm (Brodie, 2010) to invert the AEM field data shown in Figure 2d. Since this model results from the lateral stitching of layered models for each individual sounding, an hypothetical 1 mSm background resistivity appears after the sounding data lose resolution (magenta line in Figure 2e).

It is worth mentioning that the three regions shown in the density and magnetization models are not visible in the conductivity model and that shallow electrical layering does not reflect in the density and magnetization models.

2D cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic data sets

For this second experiment we used the cross-gradient constraint algorithm developed by Gallardo (2007). The resulting models are shown in Figures 3a and 3b. In the resulting models, the structural correspondence imposed by the cross-gradient constraint is clearly noticeable and, in particular, that the algorithm recovers various structures at depth, which are needed to justify the short wavelength variations on the profile data. As in the late experiment, it became difficult to justify the data in the profile segment between 4 km and 8 km (Figure 3c); however, the structures outside this interval are better delineated than those of the previous experiment.

2D cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic data sets constrained by the AEM resistivity model

In our third experiment, we followed the lithotype inversion strategy described in Gallardo and Meju (2011) and adopted it to incorporate the AEM electrical resistivity values of Figure 2e in the joint inversion. From Figure 2e we selected only the resistivity values above the magenta line, which is deemed to represent the depth of penetration of each AEM sounding, and assigned a level of uncertainty to each value. We may then expect that the shallowest region of the density and magnetization models should assimilate some of the characteristics of the AEM resistivity model. Similarly, we expect that the AEM resistivity model should be enhanced by the structures shown in the density and magnetization models at depth.

As in our previous experiments, we also used the data shown Figure 2a, started from homogeneous models and tested several smoothness parameters. Notably, the resulting AEM constrained models of this experiment (Figure 4) acquired several structures that were not present in any of the previous experiments. Figures 4a and 4b show that, despite their limited depth of investigation, the AEM data eliminated unrealistic shallow annular features present in the magnetic and gravity models of the previous experiments. Correspondingly, the lateral-stitching artifact of the original AEM model was removed and fully decoupled from the deeper and larger structures resolved mainly by the gravity and magnetic data. It is remarkable that, despite the increased smoothness, the AEM data residuals associated to this model decreased in one order of magnitude (cf. Figures 2f and 4d). This accounts for the irrelevance of the sharp layering commonly sought in 1D AEM inversions (e.g. Figure 2e).

GEOSPECTRAL IMAGE COMPARISONS

Although model interpretation can be made from the individual models, we preferred an integrated interpretation of the corresponding geospectral images and signatures (Gallardo, 2007). For this, we assigned a specific RGB-colour band to each physical property. For potential future comparisons, we adopted the color convention of Gallardo and Thebaud (2012) and assigned Red for density contrast, Green to magnetization contrast and the remaining Blue band to logarithmic electrical resistivity. The resulting geospectral images are shown in Figure 5 and their corresponding geospectral signatures are shown in Figure 6 (second experiment) and 7 (third experiment). From the comparison of the geospectral images of Figure 5, we may note that the major structures are clearly driven by the gravity and magnetic data. Nevertheless, smaller scale structures are only present in Figure 5b, particularly in the first 500 m below the surface, indicating they are further supported by the AEM data. We must also point out that the persistence of the structure-rich zone located between the 4 km and 8 km profile positions furnishes more solid evidence of a potential collision zone between the two major structures along the profile.

While the geospectral images are useful to identify characteristic subsurface structures, a more detailed lithological consistency analysis is more easily performed in the associated geospectral signatures (Figures 6 and 7). In these plots, specific property cluster can be associated to lithological units whereas cluster-to-cluster trends can either reflect model smearing (smoothness) or

petrophysics. In the first case, the trend requires spatial neighborhood and thus coincidence to zone boundaries. The clearest example is the transition between clusters A and B in Figure 7. We interpret this transition as the division between the shallow structures and the deeper (and larger) structures. This transition occurs approximately at 500 m depth (just below the depth of penetration of AEM field data) since we can identify all the colours between these two clusters below the 500 meters mark in the geospectral image and the rest above.

Although the major structures are all well detected, it is difficult to conclude whether the heterogeneity in shallower structures is also needed by the potential field data or just permitted by them. In this last scenario, we may expect the occurrence of pervasive artifacts induced by the layered inversion and stitching of the AEM data. A complete solution to this dilemma has to wait until the actual AEM data are assimilated in the joint inversion.

CONCLUSIONS

Results from this work demonstrate that it is currently possible to assimilate the AEM resistivity structure in gravity and magnetic model in a cross-gradient joint inversion formulation. They also show that potential field data consistently propose larger structures (either at the near surface or at depth), however they are more meaningfully shaped when shallow deemed AEM information is included. Smoothed transitions, in particular, were significantly reduced. We also note that potential field data capability of discriminating preexisting AEM artifacts is limited, but may still favor the lateral continuity of shallower structures common in gathers of one dimensional AEM resistivity models. We acknowledge that better resolution of small scale artifacts still relies on the assimilation of actual AEM data in joint inversion strategies in multidimensional models.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank the Geophysical Archive Data Delivery System (GADDs) for the availability of the gravity and magnetic data used in this work. Part of this research was undertaken on the NCI National Facility in Canberra, Australia, which is supported by the Australian Commonwealth Government. Part of the work presented here is supported by the Discovery Program within CSIRO's Minerals Resources and the Science and Industry Endowment Fund (SIEF). We particularly acknowledge Geoscience Australia, for allowing us the use of the GA-LEI inversion code.

REFERENCES

- Brodie, R. C., 2010. Holistic Inversion of Airborne Electromagnetic Data: Phd Thesis, The Australian National University.
- Doetsch, J., Linde, N., Coscia, I., Greenhalgh, S. A. & Green, A. G., 2010. Zonation for 3D aquifer characterization based on joint inversions of multimethod crosshole geophysical data: *Geophysics*, 75(6), G53–G64.
- Gallardo, L. A., 2007. Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging: *Geophysical Research Letters*, 34(19), 1–5.
- Gallardo, L. A. & Meju, M. A., 2003. Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data: *Geophysical Research Letters*, 30(13), 1–3.
- Gallardo, L. A. & Meju, M. A., 2004. Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints: *Journal of Geophysical Research*, 109(B03311), 1–11.
- Gallardo, L. A. & Meju, M. A., 2007. Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification, *Geophysical Journal International*, 169, 1261–1272.
- Gallardo, L. A. & Meju, M. A., 2011. Structure-coupled multiphysics imaging in geophysical sciences: *Reviews of Geophysics*, 49, 1–19.
- Gallardo, L. A., Fontes, S. L., Meju, M. A., Buonora, M. P. & de Lugao, P. P., 2012. Robust geophysical integration through structure-coupled joint inversion and multispectral fusion of seismic reflection, magnetotelluric, magnetic, and gravity images: Example from Santos Basin, offshore Brazil: *Geophysics*, 77(5), B237–B251.
- Gallardo, L. A., and N. Thebaud (2012). New insights into Archean granite-greenstone architecture through joint gravity and magnetic inversion: *Geology*, 40(3), 215–218.
- Lane, R., Green, A., Golding, C., Owers, M., Pik, P., Plunkett, C., Sattel, D., Thorn, B., 2000. An example of 3D conductivity mapping using the TEMPEST airborne electromagnetic system: *Exploration Geophysics*, 31(2), 162–172.
- León-Sánchez, A. M., Gallardo, L. A., Ley-Cooper, A. Y., 2016. Two dimensional cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic data sets constrained by airborne electromagnetic resistivity: Submitted to *Geophysical Journal International*.
- Moorkamp, M., Heincke, B., Jegen, M., Roberts, A. W., Hobbs, R. W., 2011. A framework for 3-D joint inversion of MT, gravity and seismic refraction data: *Geophysical Journal International*, 184, 477–493.

Reeves, C. V., Reford, S. W. & Milligan, P. R., 1997. Airborne Geophysics: Old Methods, New Images, Proceedings of Exploration 97: Fourth Decennial International Conference on Mineral Exploration, 1997, 13–30.

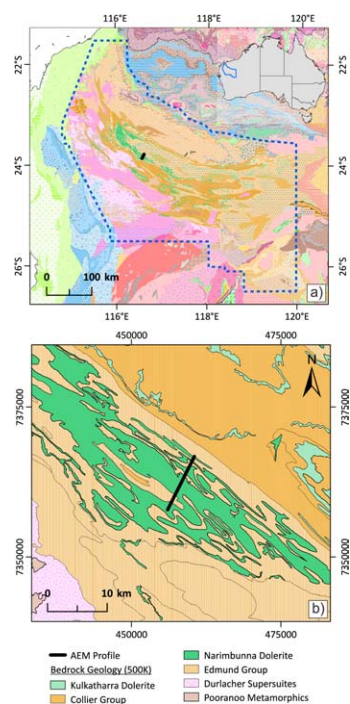


Figure 1. Study area. a) Regional geology and AEM survey limits. b) Local geology and 10 km geophysical profile. Modified from León-Sánchez *et al.* (2016).

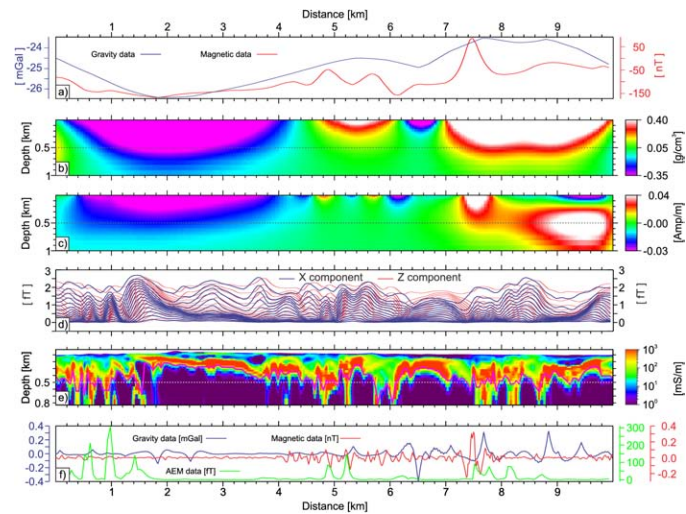


Figure 2. a) Bouguer and RTP profiles. b) Density model obtained after the individual Inversion of Bouguer profile. c) Magnetization model obtained after the individual inversion of RTP profile. d) X and Z components of the AEM survey. e) Stitched 1D AEM inversion model. f) Gravity, RTP, AEM residuals for the individual inversions. Modified from León-Sánchez *et al.* (2016).

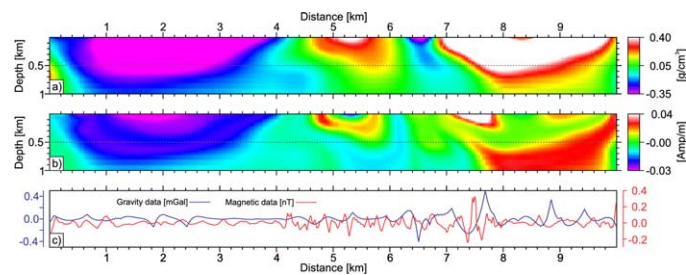


Figure 3. Cross-gradient inversion models. a) Density model. b) Magnetization model. c) Residuals. Modified from León-Sánchez *et al.* (2016).

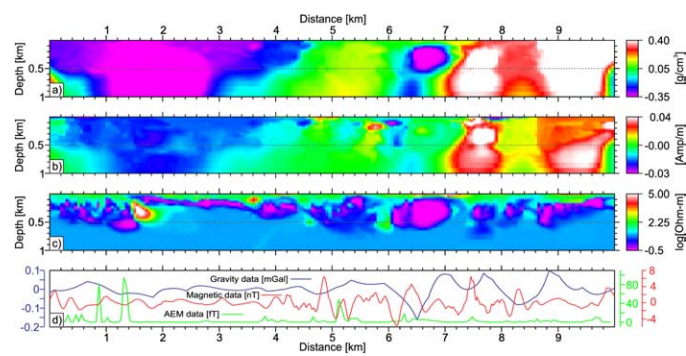


Figure 4. Cross-gradient joint inversion models constrained by AEM resistivity. a) Density model. b) Magnetization model. c) Resistivity model. d) Residuals. Modified from León-Sánchez *et al.* (2016).

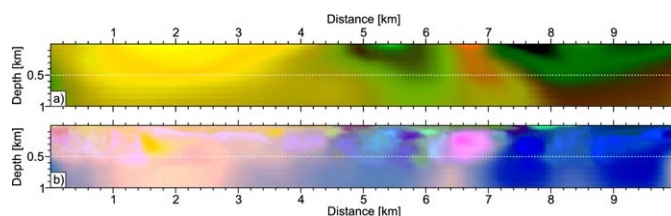


Figure 5. Geospectral images obtained from the cross-gradient joint inversion. a) Only gravity and magnetic data. b) Gravity, magnetic and AEM data. Modified from León-Sánchez *et al.* (2016).

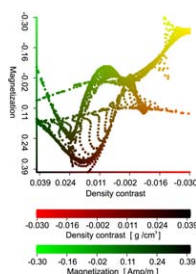


Figure 6. Geospectral signature for Figure 5a. Modified from León-Sánchez *et al.* (2016).

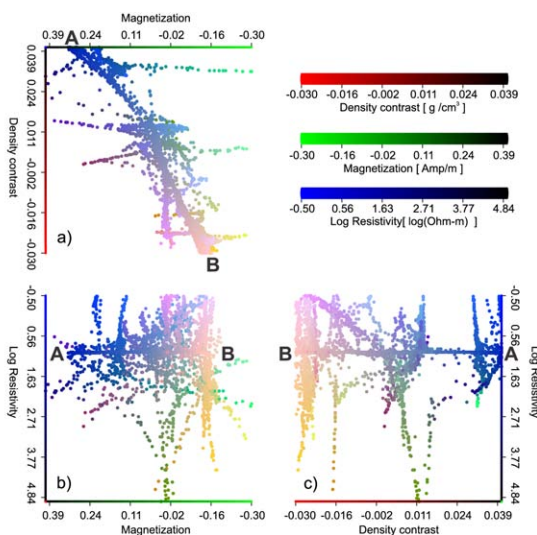


Figure 7. Geospectral signature for Figure 5b. Modified from León-Sánchez *et al.* (2016).

Two dimensional cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic data sets constrained by airborne electromagnetic resistivity in the Capricorn Orogen, Western Australia

Adrián Misael León-Sánchez^{1,3} Luis A. Gallardo¹ Alan Yusen Ley-Cooper²

¹Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), Carretera Ensenada-Tijuana 3918, Zona Playitas, Baja California 22860, México.

²Geoscience Australia, Corner of Jerrabomberra Avenue and Hindmarsh Drive, Symonston, ACT 2609, Australia.

³Corresponding author. Email: aleon@cicese.edu.mx

Abstract. In many geological scenarios, the interpretation of multiple geophysical datasets through the use of joint inversion has become a common practice provided all data share compatible spatial resolution. Unfortunately, this requirement has also limited the application of airborne electromagnetic (AEM) data in joint inversion. For instance, we commonly assume that airborne gravity and magnetic datasets largely originate at a depth of a few kilometres, whereas co-located AEM signals can only penetrate a few hundred metres, thus rendering spatially incompatible datasets. We believe, however, that a fraction of these datasets originate from the same structures and provide a common ground for structural joint inversion strategies. We aim to explore the viability of jointly inverting such datasets using potential and AEM field data acquired in Western Australia with three comparative experiments. First, we generate conventional 2D separated models for each dataset to gauge their individual resolution capability. We then perform the 2D cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic datasets. Finally, we adapt the structural joint inversion to include the AEM resistivity model as a constraint. We show that there is an area commonly sensed by the three datasets and that the coupled resolution influences both shallow and deep structures of the joint models. This yields a coherent integrated interpretation of shallow and deep structures of the studied section, which is validated when compared to a nearby seismic traverse section.

Key words: airborne electromagnetics, Australia, gravity, inversion, magnetics.

Received 16 June 2016, accepted 24 January 2018, published online 3 April 2018

Introduction

The efficient exploration of inaccessible areas demands the use of remote sensing platforms, among which airborne geophysical surveys have long played an important role. Airborne surveys with magnetic, gravity and electromagnetic (EM) sensors, in particular, allow us to cover large and remote areas with sufficient depth and spatial resolution at a minimum cost (Reeves et al., 1997). In addition, further survey efficiency is promoting combined flights with vessels equipped with multiplatform devices (e.g. Wilson et al., 2011; Fraser et al., 2012; Dransfield, 2011), which results in an abundance of co-located aeromagnetic, gravity and airborne electromagnetic (AEM) databases. Since most of these geophysical data types are jointly available and each one of them delivers information of different physical properties at different depths of investigation, it seems natural that their combined interpretation should lead to superior identification of the most prominent regions for exploration and targeting, but it also poses the question of whether they actually share a functional petrophysical or structural link among them.

One technique that has yielded successful results on jointly inverting geophysical data, independent of our knowledge of property correlative laws, is the cross-gradient joint inversion method developed by Gallardo and Meju (2003).

The cross-gradient joint inversion aims at finding subsurface models that bear a structural resemblance (regardless of any direct property relationships) and fit their corresponding field data (Gallardo and Meju, 2003, 2004). While this approach has been applied to several data combinations (Gallardo and Meju, 2004, 2007; Gallardo, 2007; Moorkamp et al., 2011; Doetsch et al., 2010; Gallardo et al., 2012), it has not been extended to AEM data.

Core in the cross-gradient approach is the search of models with structural resemblance driven by the assumption that any geophysical representation of the subsurface matches the same geological structure as evinced by the geophysical data (cf. Gallardo and Meju, 2011; Haber and Gazit, 2013). Therefore, it seems implicit that the largest enhancement on model resolution occurs where all the geophysical data attain comparable resolution at depth. This hypothesis has been extensively tested on co-located gravity and aeromagnetic surveys with success (Gallardo et al., 2012; Gallardo and Thebaud, 2012; Gessner et al., 2016; León-Sánchez and Gallardo, 2015; Solon et al., 2014). For all these applications, potential field models reach depths that range between 5 and 15 km, which may be considered too deep for feasible mineral exploration purposes and conventional AEM penetration depths, and thus, merely uncorrelated. We posit that, whereas airborne gravity and magnetic data sense

deep crustal structures, they also carry the signature of shallower (less than 600 m depth) features and are thus sensitive to structures commonly covered by AEM surveys. Similarly, we also expect that larger structures evinced by potential field data might be useful to extend features at depth and resolve the background resistivity necessary to focus AEM interpretation and to laterally connect the major resistivity structure that should define the multiphysics signature of mayor tectonic terrains. Conversely, we posit that AEM data can help to reduce the risk of aliasing deep, compact gravity and magnetic sources as extended, shallower sources. To test these hypotheses we performed a systematic joint inversion study that encompasses gravity, aeromagnetic and AEM datasets acquired in the Capricorn Orogen in Western Australia in several experiments and analysed the results in terms of structural and petrophysical resolution along a 10 km-long segment of a regional AEM flight line that coincides with a seismic traverse (10GA-CP2).

In this document, we first present our study area as well as the gravity, magnetic and AEM data used throughout this paper and then present our results on three test experiments. We elaborate from the individual inversion of each dataset, the 2D cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic datasets and a full 2D cross-gradient joint inversion constrained by the AEM resistivity model. We then apply to both conventional statistical analysis and detailed comparisons of the structural and physical property correlations depicted by geospectral images and signatures (Gallardo, 2007).

The Capricorn Project, Western Australia

Much of the mineral wealth of the ancient Australian continent is hidden below a vast and thick cover of regolith. Therefore, a systematic exploration of these resources generally starts from aeromagnetic surveys, followed by land-based exploration techniques. The Australian Government, through the National Exploration Strategy, and the Australian Academy of Sciences UNCOVER initiative created the 'distal footprints of giant ore system project'. At this stage, collaboration among several research institutions, government agencies and industry sponsors has secured funding for this project, which focuses on the Capricorn region of Western Australia (Figure 1a). The Capricorn Orogen is a poorly explored and understood area, identified as potentially being mineral endowed (Johnson et al., 2013).

Geological overview

The Capricorn Orogen extends over ~200 000 km² of Western Australia. It is located within the Paleoproterozoic collision and suturing zone of the Yilgarn and Pilbara cratons. These processes resulted in the emplacement of plutonic intrusions, medium to high-grade metamorphism and in the evolution of volcano-sedimentary basins, accommodated in the deformed limits of the colliding cratons (Cawood and Tyler, 2004).

Pirajno (2004) establishes that supercontinent assembly (i.e., collision settings associated with ocean opening and closing) was the main driver of mineralisation in the Capricorn Orogen. He also identifies two major groups of mineralisation, one related to several stages of ocean floor magmatism, rifting and basin development, and the other consisting of deposits related with orogenic events. The ore deposits include precious and base metals such as uranium, manganese and iron (Tyler et al., 1998; Pirajno, 2004).

Recently, some renewed efforts have been made to quantitatively interpret several of the geophysical datasets available. Johnson et al. (2013) created a model of the deep

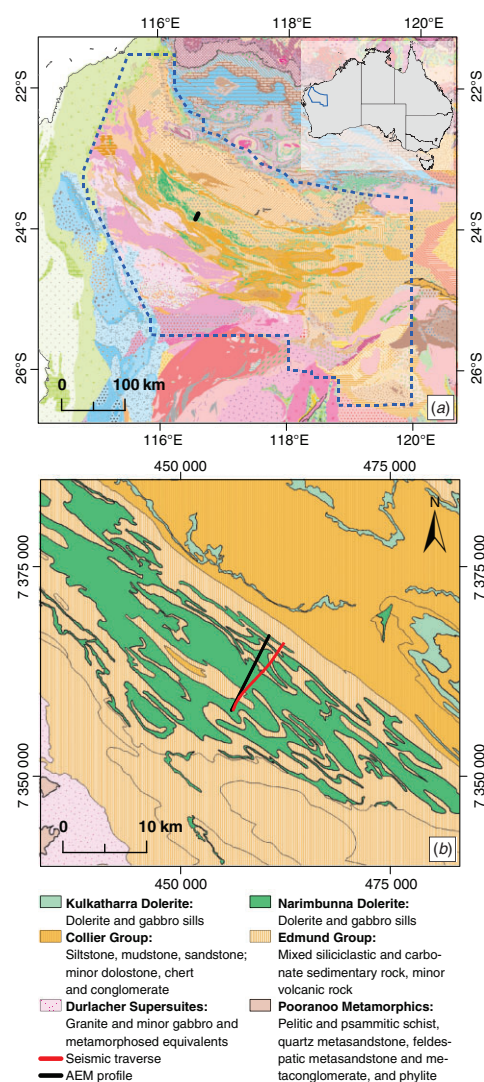


Fig. 1. Study area, taken from the Edmund 1:250 000 geological sheet (Geological Survey of Western Australia, 2016). (a) Regional geology; dotted line shows approximate extent of the Capricorn Orogen regional AEM survey. (b) Local geology and the selected 10 km geophysical profile. Geological description taken from Johnson et al. (2013).

crustal architecture and upper mantle from seismic reflection data. This interpretation identifies three main suture zones and several lithospheric-scale faults within the Capricorn Orogen. The seismic data also show several Proterozoic granitic batholiths as well as the architecture of existing Mesoproterozoic basins. Johnson et al. (2013) also suggested that ore bodies rich in gold, base metals and rare earth elements are related to the identified lithospheric-scale structures that transported hydrothermal fluids and energy directly from the mantle into the upper crust.

León-Sánchez and Gallardo (2015) applied the cross-gradient joint inversion methodology to generate a crustal-scale geospectral image that combines inferred rock density and magnetisation of the subsurface. They concluded that all the major structures identified in the seismic section by Johnson et al. (2013) are clearly noticeable in the geospectral image, confirming the combined resolution power of the potential field data to distinguish the deep structure of the Capricorn Orogen.

Test profile and geophysical data sets

Following the successful application of the cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic data in the Capricorn Orogen to resolve the deep structure, and in order to assimilate the capabilities of the AEM data regionally acquired over the Capricorn Orogen, we selected a short profile with common coverage and adequate sampling to focus on the shallower structure. The gravity and magnetic datasets selected for this work extend between the longitudes 116.2°E–116.5°E and latitudes 23.38°S–24.03°S; both datasets were provided by the Geophysical Archive Data Delivery System (GADDS) from Geoscience Australia. For our experiments, we are using the Bouguer anomaly for gravity data and the total magnetic intensity anomaly for the magnetic data (Figure 2a, b).

In order to fully test our hypotheses, we selected a 10 km segment of the AEM flight line (Figure 1b) that: (1) is coincident with a seismic traverse, (2) indicates abundant heterogeneity in electrical conductivity and (3) shows varied gravity and magnetic responses. We selected a rectangular area of 7000 m × 11 000 m that covers the whole profile length and performed a second order polynomial fit using Oasis Montaj tools. We subtracted this trend to the original grid or line gravity and magnetic data. Thus, we removed any regional effect while preserving the original data spacing.

We expect that the resulting gravity and magnetic data profiles (shown in Figure 3a) should facilitate the integrated interpretation and joint inversion with the co-located AEM data and should also focus on the shallower structure existing along the profile.

In 2013, the largest AEM survey by area to date (146 300 km²) was flown in Western Australia. Data were acquired using a fixed wing TEMPEST system (Lane et al., 2000) over an area of more than 145 000 km² along 190 flight lines, which were flown mostly following a north–south flight path and an east–west direction in the north-western part of the survey, with a separation of 5 km between them. The total survey is composed of more than 2 155 000 data points (individual EM soundings).

While the westernmost part of the Capricorn Orogen is well exposed, a heterogeneous layer of regolith of varied thickness and composition covers the remaining areas. The AEM survey was completed to determine the thickness, conductivity and variations of the regolith cover as well as the potential relationships to the underlying bedrock and implications for potential mineralisation (Ley-Cooper et al., 2015).

This AEM dataset gives us important spatial coverage throughout the Orogen. It enables us to close the gap and add coherency in regions of sparse borehole density for improved determination of complex overprints of geological events and regolith cover.

Data from the survey were inverted using Geoscience Australia's Layered Earth Inversion (GA-LEI) algorithm developed by Brodie (2010, 2015). The algorithm solves for conductivity, depth and for system geometry using both the in-line and vertical (X and Z) components. The relative

position between the transmitter and receiver (Tx-Rx) coils varies throughout the survey; Ley-Cooper and Brodie (2013) showed that solving for this improves the algorithm's ability to model the near-surface. The inversion process aims to minimise the conventional least square data misfit (Φ_d):

$$\Phi_d = \frac{1}{N_D} \sum_{k=1}^{N_D} \left[\frac{\mathbf{d}_k^{\text{obs}} - \mathbf{f}(\mathbf{m})}{\mathbf{d}_k^{\text{err}}} \right]^2, \quad (1)$$

where $\mathbf{d}_k^{\text{obs}}$ is the observed AEM data, $\mathbf{f}(\mathbf{m})$ is the model response and $\mathbf{d}_k^{\text{err}}$ represents the expected standard deviation, which helps to normalise Equation 1 by the N_D time windows for each sounding site and determine 30 conductivities per station, which means sounding sites have not gone through further decimation.

Joint inversion of gravity, magnetic and AEM resistivity

Our models were divided laterally into regular 50 m-wide cells along the 10 km profile, but the cell width was increased exponentially until they extended 100 km beyond the profile ends. Similarly, the cells are transversally extended 100 km on each side to adhere to the 2D assumption. These lateral dimensions are set to account for any regional trend that may still exist in each individual dataset and to focus on the study area. Cell thickness is set to vary with depth, ranging from 10 m at the surface up to 2 km at 5 km depth. We note that beyond this depth no heterogeneities are assumed to exist, so further discretisation is not necessary. Given the 10 km length of the profile, it would be difficult to capture an anomaly of any feature below 5 km depth that may not be discarded by a second order polynomial. This also yields the possibility of having an extended shallow structure when it is supported by the AEM data during the joint inversion.

The initial model is completely homogeneous with null density and magnetisation contrast and constant resistivity. Strategies applied for the separate inversion experiments vary, whereas the joint inversion followed the strategy described in Gallardo et al. (2012) using several iterative steps to gradually add heterogeneities and fit the individual data.

We thus define our objective function as:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{\beta^2} \left\| \mathbf{d}_{\text{gv}} - \mathbf{f}_{\text{gv}}(\mathbf{m}_{\text{gv}}) \right\|_{\mathbf{C}_{\text{dgv}}}^2 + \\ & \frac{1}{\beta^2} \left\| \mathbf{d}_{\text{mg}} - \mathbf{f}_{\text{mg}}(\mathbf{m}_{\text{mg}}) \right\|_{\mathbf{C}_{\text{dmg}}}^2 + \\ & \frac{1}{\beta^2} \left\| \mathbf{d}_{\text{aem}} - \mathbf{f}_{\text{aem}}(\mathbf{m}_{\text{aem}}) \right\|_{\mathbf{C}_{\text{daem}}}^2 + \\ & \alpha_{\text{gv}}^2 \left\| \nabla^2 \mathbf{m}_{\text{gv}} \right\|^2 + \alpha_{\text{mg}}^2 \left\| \nabla^2 \mathbf{m}_{\text{mg}} \right\|^2 + \alpha_{\text{aem}}^2 \left\| \nabla^2 \mathbf{m}_{\text{aem}} \right\|^2 + \\ & \left\| \mathbf{m}_{\text{gv}} - \mathbf{m}_{0\text{gv}} \right\|_{\mathbf{C}_{\text{m}_{0\text{gv}}}}^2 + \left\| \mathbf{m}_{\text{mg}} - \mathbf{m}_{0\text{mg}} \right\|_{\mathbf{C}_{\text{m}_{0\text{mg}}}}^2 + \left\| \mathbf{m}_{\text{aem}} - \mathbf{m}_{0\text{aem}} \right\|_{\mathbf{C}_{\text{m}_{0\text{aem}}}}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

subject to:

$$\nabla \mathbf{m}_{\text{gv}} \times \nabla \mathbf{m}_{\text{mg}} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{m}_{\text{gv}} \times \nabla \mathbf{m}_{\text{aem}} = 0. \quad (4)$$

In Equation 2, the subscripts *gv*, *mg* and *aem* correspond to the gravity, magnetic and AEM datasets, respectively. For each dataset, $\mathbf{m}$ represent the model parameters, $\mathbf{d}$ the observed data, $\mathbf{f}(\mathbf{m})$ the calculated values, $\mathbf{C}$ the covariance matrix, $\mathbf{m}_0$ the *a priori* model parameters with covariance matrix $\mathbf{C}_{\text{m}_0}$, α the

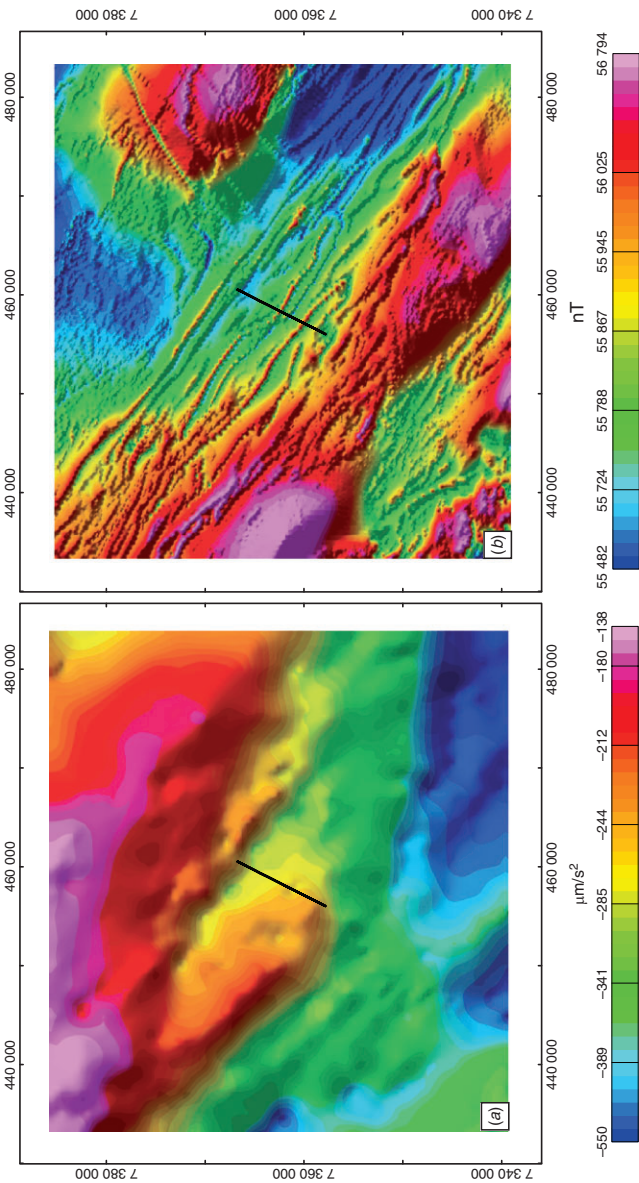


Fig. 2. (a) Local Bouguer anomaly map. (b) Local total magnetic intensity map. Black line shows location of AEM profile. Map coordinates in metres (UTM Zone 50K).

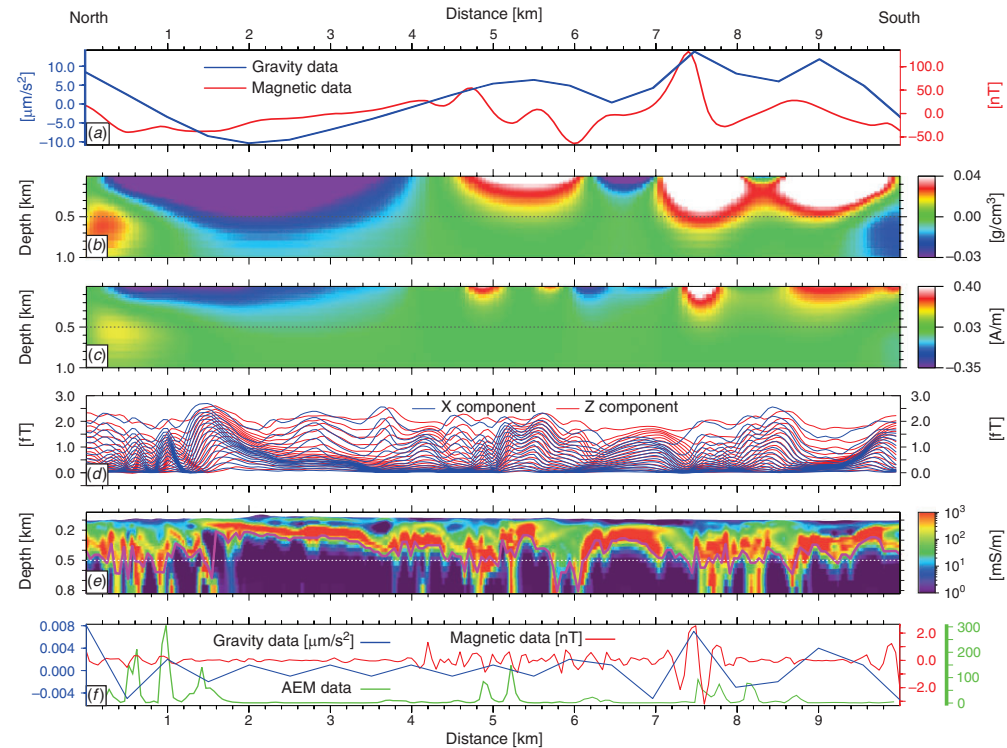


Fig. 3. (a) Residual Bouguer gravity and residual total magnetic intensity profiles. (b) Density model obtained after the individual inversion of the gravity data. (c) Magnetisation model obtained after the individual inversion magnetic data. (d) X and Z data components of the AEM survey along the profile. (e) Stitched 1D AEM-inversion model. (f) Gravity, magnetic and AEM data residuals for the separately inverted models.

weighting factors that control the smoothness level and β the relaxation factor of the *a priori* data standard deviations, ∇^2 is a discrete version of the 2D Laplacian operator. We note that $\mathbf{d}_{\text{aem}}$ is the electrical resistivity inferred from 1D inversion of each AEM station and thus $\mathbf{f}$ is a corresponding 1D-to-2D linear mapping function. We also note that all $\mathbf{m}_0$ are set homogeneous and $\mathbf{C}_0$ is large in order to account for the edge effects of the models.

Equation 2 is divided in two fundamental parts. The first one measures how well the models reproduce their corresponding geophysical data. The second is formed by the second and zero order Tikhonov regularising conditions (Tikhonov and Arsenin, 1977), which gauge the lateral continuity of the models and prevents model ambiguity. The multiple cross-gradient constraint imposes the geometrical resemblance among the three resulting models (cf. Gallardo, 2007). In order to minimise the cross-gradient constrained objective function, the cross-gradient function is linearised using a Taylor series expansion and solved iteratively.

The conventional separate inversion of gravity, magnetic and AEM data sets

In order to gauge the resolution power of each dataset individually and to calibrate our inversion parameters, we performed the conventional separate inversion of the three datasets. For this experiment, we used the gravity and magnetic

profile data shown in Figure 3a and the model discretisation described previously assuming that at the bottom cells all heterogeneities homogenise to the average crust value of zero density and magnetisation contrast. We then emulated their separate inversion using the joint inversion algorithm of Gallardo (2007), excluding the cross-gradient constraint, and tested several damping (smoothness parameters) that range from 0.01 to 100 to explore for the smoothest model that still yields an acceptable fit to their corresponding data (resulting in root mean square (rms) residual values of $0.0035 \mu\text{m/s}^2$ for gravity and 0.558 nT for magnetic data). In contrast, the AEM data illustrated in Figure 3d were inverted using the GA-LEI algorithm developed by Brodie (2010, 2015). According to this scheme, we define a set of 30 stacked horizontal layers for each AEM station whose thickness increases logarithmically with depth and invert the AEM window data for their electrical conductivity. We set a background regularising resistivity of 1 mSm , which aims to supply the loss of resolution of the sounding data at depth. Following this scheme, no horizontal continuity is sought between sounding sites so as to ensure maximum lateral conductivity contrasts and attain acceptable misfits for each position.

The corresponding geophysical models obtained for each dataset are illustrated in Figure 3. Figure 3b, c illustrates the effect of imposing deep structural homogeneity (common in potential field inversions) that favours property heterogeneities

that fade at depth. Nevertheless, it is evident that, despite their lack of depth resolution and their independent origin, the density and magnetisation models bear a clear structural resemblance that evinces three major regions (zones 0–4 km, 4–8 km and 8–10 km) along the selected profile length, satisfying our intention to represent a structurally heterogeneous region. This heterogeneity is fully supported by the geophysical data (Figure 3f) and the largest residual variations found between the profile positions at 4 and 8 km denote the zone where the largest structural complexity is expected in the models, based on the concentration of high-amplitude, short wavelength magnetic anomalies in this part of the profile (cf. Figure 3a).

On the other hand, the conductivity model that resulted from the individual inversion of the AEM field data is shown in Figure 3e. Due to the stitched origin of this model, the lateral continuity of the conductivity values could be arguable, especially where it is abruptly disrupted; however, the conductive layer shown is still geologically coherent. A calculation of its maximum depth of investigation is done at each sounding (solid magenta line in Figure 3e); below this, hypothetical 1 mS/m background takes its place. It is noteworthy that the major zonation found in the density and magnetisation models is not distinguishable in the conductivity model, and conversely, the shallower structure depicted in the AEM model is absent in their density and magnetisation counterparts. At this stage there are two key outstanding aspects that disfavour the feasibility of the joint inversion of these datasets: (1) the apparent structural incompatibility and (2) the ambiguity in the origin of any property correlative coupling. Any of them may, at the end, result in the lack of structural resemblance sought by the cross-gradient joint inversion.

Regarding structural resemblance, it seems clear that individual inversion of gravity and magnetic data are depicting much larger crustal structures than those resolved by the AEM data; therefore, there should be little common space shared by the potential field and resistivity models so as to look for a structural correlation such as the cross-gradient. However, we must bear in mind that without further information, the presented models were individualised (regularised) by contrasting assumptions: smoothness for potential field models and lateral discontinuity for the AEM model. So there is a great chance that their structural differences are induced by the inversion rather than required by the actual geophysical data.

We thus expect that a successful joint inversion should first homogenise the structural regularising assumptions in order to search for their structural compatibility (cf. Newman and Commer, 2010). Our calculation formalises this by adopting the objective function set in Equation 4, and thus, we expect to find structural correlative terms.

Regarding ambiguous correlative laws, there is no doubt that the most prevalent feature in the conductivity model is the presence of a coherent conductive layer at depth, which we cannot simply regard as an artefact of 1D inversion. On the contrary, there is strong evidence that the response is lithologically driven and could be correlated with major variations in several features, such as water content (saturated porosity), grain composition, water, salinity, or even mineralogical composition. We trust the structurally constrained inversion of gravity and magnetic data should provide an important clue to resolve this ambiguity or at least discard some unfeasible explanations.

The regional tectonic framework revealed by the cross-gradient joint inversion of gravity and magnetic data

Whereas the density and magnetisation images of the previous experiment provide evidence of a major regional zonation, it is desirable to jointly resolve the deeper structure of the profile and define the major zone boundaries using both types of potential field data simultaneously in preparation for the full three-data joint inversion experiment. For this second experiment, we jointly inverted the same gravity and magnetic profile data shown in Figure 3a using the 2D cross-gradient joint inversion algorithm of Gallardo (2007). As expected, the resulting subsurface density and magnetisation models obtained after four iterative steps (shown in Figure 4a and Figure 4b, respectively) clearly bear the structural correspondence imposed by the cross-gradient constraint and fit the corresponding data (Figure 4c), achieving rms misfits of $0.04 \mu\text{m/s}^2$ for gravity and 0.675 nT for magnetic data.

We may note that since both models seek homogeneity at depth, they result in coupled heterogeneities that extend down from the surface. Nevertheless, the algorithm also recovers sharper structures at depth, which are needed to simultaneously justify the shorter wavelength anomaly variations on the profile data, that in the previous experiment, resulted in disjointed

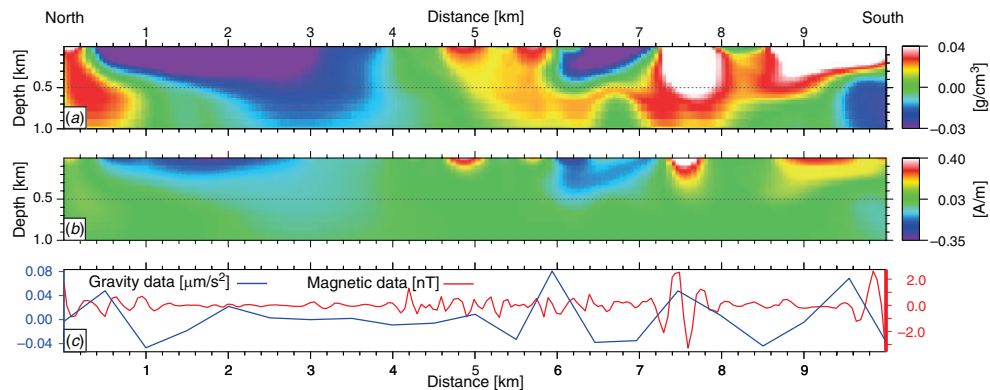


Fig. 4. Illustration of the density (a) and magnetisation (b) models obtained after 2D cross-gradient joint inversion of the selected potential field data and their corresponding gravity and magnetic data residuals (c).

density and magnetisation heterogeneities (noting in particular the 4 to 8 km data and model segments). The structures formed at the edges of the previously identified zones are well delineated and seem to follow characteristic shapes, which could not be tracked in the separated models and are thus deemed to have geological significance. We may concede, however, that while several smaller scale heterogeneities change sharply near the surface, they gradually conform to the major structures of the models at depth since none of the datasets is capable of resolving such small heterogeneities when depth increases and are, therefore, of questionable significance. It is now expected that these features could only be discarded after the AEM data are supplied in our third joint inversion experiment.

An integrated multiscale framework from the joint inversion of gravity, magnetics and AEM derived resistivity

In order to incorporate AEM data into our joint inversion, given that no algorithm has yet been developed to include the actual AEM window data acquired, we used the electrical resistivity estimated from the separate inversion experiment directly (i.e., those of Figure 3e). We acknowledge, however, the potential incompatibility of the 1D origin of the resistivity values by assigning an uncertainty level to each value and explicitly excluding those estimated for cells beyond the maximum resolution depth of each AEM site. To homogenise our structural regularising assumptions, we impose lateral and vertical continuity using the smoothness constraint available in the multiple cross-gradient joint inversion algorithm of Gallardo (2007) to the three models. This is the first time AEM data has been used as a constraint in joint gravity and magnetic inversion modelling; in our strategy, the treatment of the AEM electrical resistivity values resembles that applied by Gallardo and Meju (2011) to their lithotype data. We expect that this strategy should provide some shallow structure to the density and magnetisation models as well as assimilate some of the major features from these models into the resistivity image, as required by the cross-gradient constraint.

We therefore used the algorithm of Gallardo (2007) to jointly invert the same gravity and magnetic datasets of Figure 3a along with the AEM conductivity values depicted in Figure 3e. We followed the same strategy as in previous experiments: starting from homogeneous initial models and trying several test values for smoothness damping. Since we are handling a three-dataset inversion, we followed closely the β -weighing evolution strategy described in Gallardo et al. (2012). In this strategy, the β -factor in Equation 2 is gradually decreased until it reaches the value of one and plays no role in the objective function of the final iterative step. This β -factor evolution results in a two-cycle process, where the outer cycle aims at minimising the misfit (by decreasing β), while the inner cycle seeks for structural resemblance. The evolution of the rms misfit and the β -factor of each iteration for our preferred 2D cross-gradient joint inversion experiment can be seen in Figure 5.

Although we analysed the results from a whole ensemble of experiments to provide a basic statistical analysis, we only selected the best models from these experiments (Figure 6) to perform our final interpretation. Our best models are those that achieved rms values similar to the set standard deviation in the fourth iteration, when the β -damping factor is equal to one.

There are several outstanding features in the various resulting models, which were not present in any of our previous separate or combined inversion experiments. First, from Figure 6a, b, it is clear that the AEM resistivity data decoupled the monotonous trends of the density and magnetisation at depth, detaching

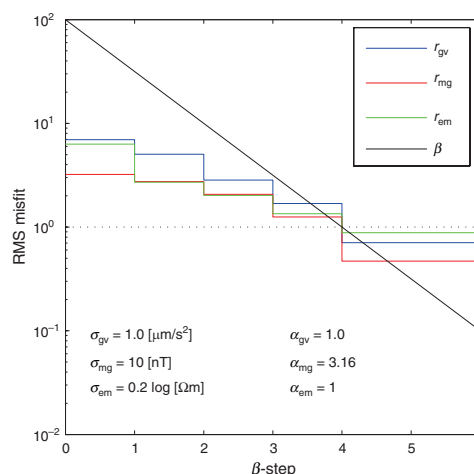


Fig. 5. Illustration of the evolution of the normalised gravity, magnetic and AEM resistivity data misfits for the selected three-data cross-gradient joint inversion process. The σ values refer to the standard deviation assigned to the data, whereas the α values refer to the damping factor used for smoothness.

the major structures from the surface and preventing them to acquire simple round shapes at depth and showing no need for density and magnetisation heterogeneities below 1 km to reproduce the observed anomalies. Remarkably, the structures appear spatially continuous despite the original maximum depth of investigation of the AEM data. Second, the AEM heterogeneities resulted in more continuous distributions that can be laterally correlated independently of the deepest structures associated to the presence of larger bodies with strong gravity and magnetic responses. Third, while the resulted AEM model was smoother than the separately estimated model, the actual AEM response to the original TEMPEST data has been down sampled by an order of magnitude (cf. Figs 3f and 6d), meaning that some vertical heterogeneities depicted in Figure 3e may be considered artefacts associated to 1D model simplifications rather than real geological features. The rms misfit values attained by these models are $0.71 \mu\text{m/s}^2$ and 4.690 nT . We may also note that the sharpest near-surface structures existing between profile positions at 4 to 8 km, induced by the AEM data in density and magnetisation, account satisfactorily for the original potential field data, since their misfits are below the preset data standard deviation.

At this stage we may remark that the inclusion of the AEM constraining model could separate laterally and vertically several density and magnetisation structures originally interpreted as shallow and smooth and suggest the potential advantages of truly including the AEM data in the inversion procedure for future developments.

Integrated model testing

From the several three-data joint inversion experiments we selected those that reached an adequate normalised misfit (i.e., close to one as in Figure 5) in the fourth iteration to test optimal model variability. We then calculated a cell-wise average and standard deviation for the chosen models, which resulted in the series of images shown in Figure 7.

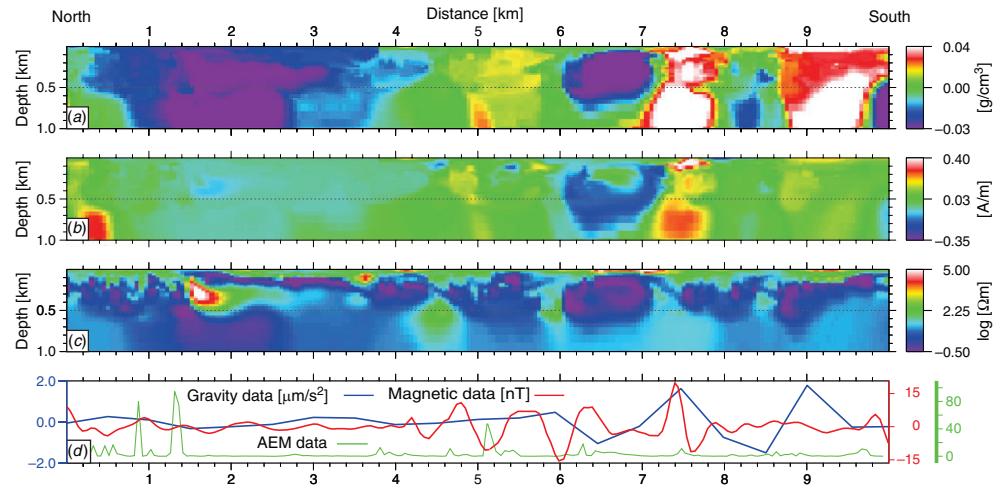


Fig. 6. Illustration of the density (a), magnetisation (b) and resistivity (c) models obtained after the full three-data cross-gradient joint inversion and corresponding data residuals (d).

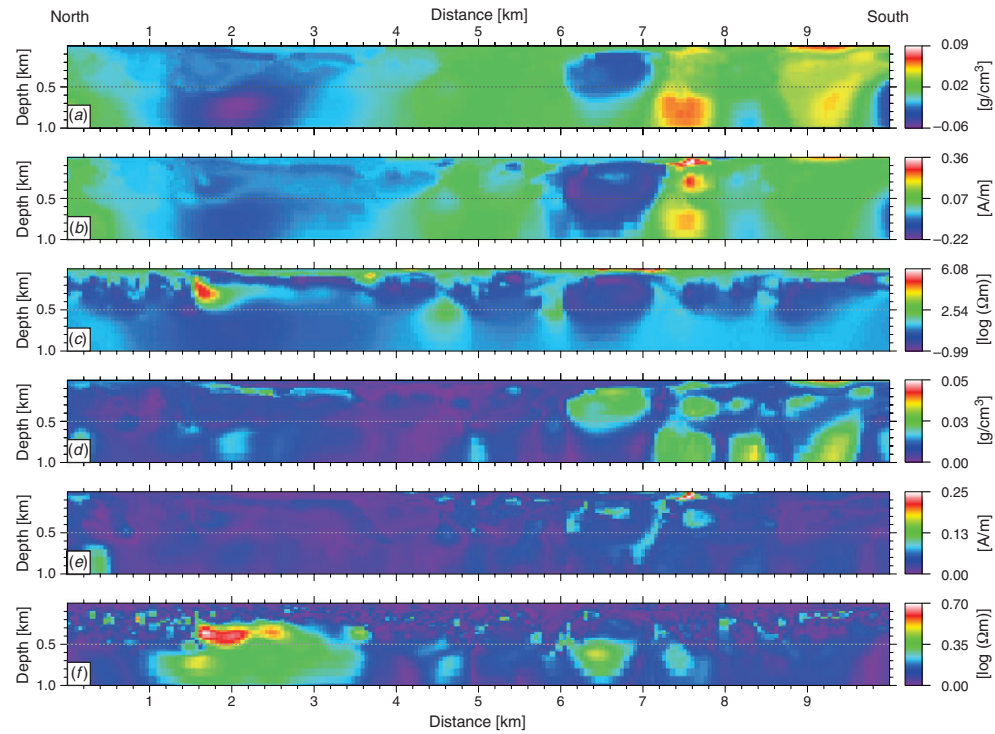


Fig. 7. 2D representations of the average density (a), magnetisation (b) and resistivity (c) cell values of six joint inversion experiments that achieved satisfactory data misfits. Ibid for the corresponding standard deviations of density (d), magnetisation (e) and resistivity (f) cell-values.

Integrated model consistency and variability

Figure 7a–c shows maps of the average values of density, magnetisation and electrical resistivity. These images bear, in general, the same overall structural arrangement of the optimal images selected, thus denoting the consistency of the features of our selected models. These averaging images also show the

largest contrast in the core of the major structures, announcing they are indeed the main features solvable by the potential and electrical resistivity data. These features also carry the structural resemblance, demonstrating that it remained consistent in the several processes. Figure 7d–f shows a systematic arrangement of the largest property deviations, which directly correlate to the

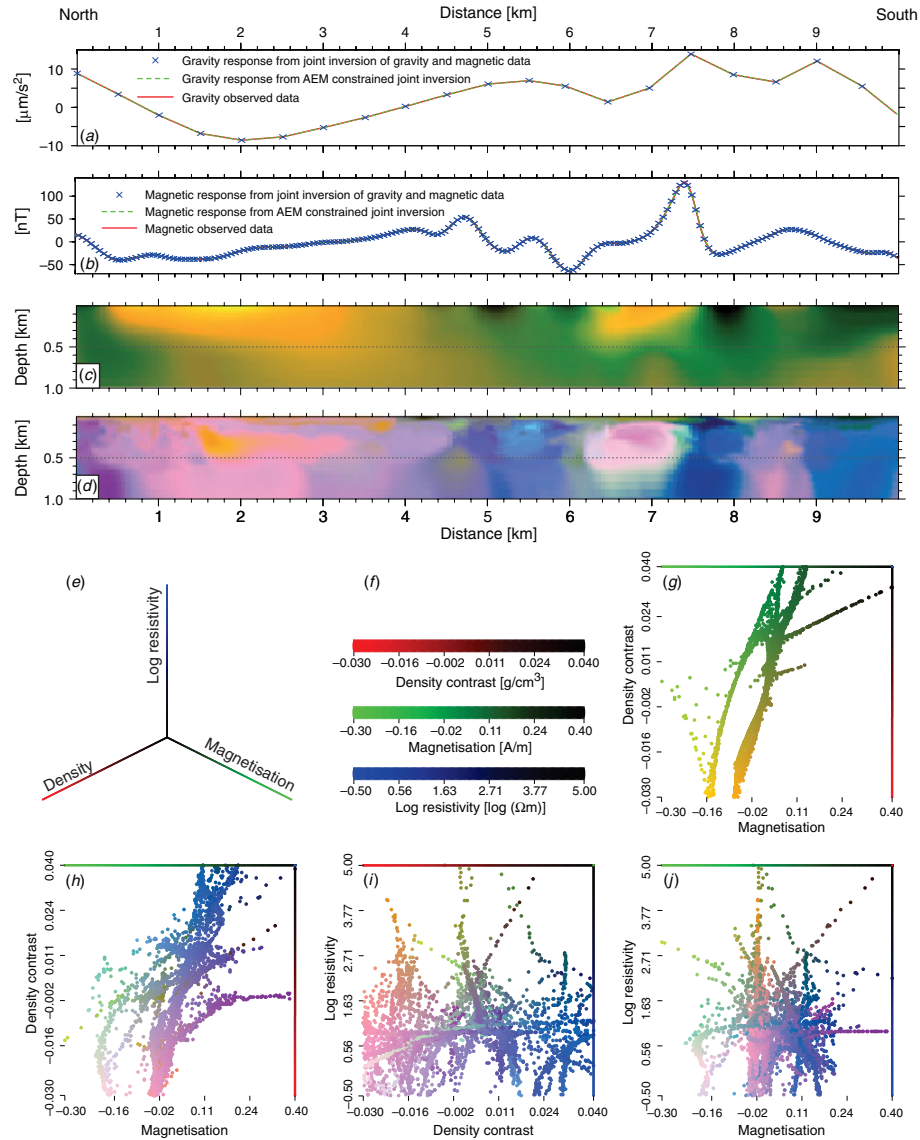


Fig. 8. (a) Observed and predicted gravity data after joint inversion. (b) Observed and predicted total magnetic intensity data after joint inversion. (c) Geospectral image that combines the structurally coupled density and magnetisation models from Figure 4. (d) Geospectral image that combines the AEM-constrained density, magnetisation and resistivity models from Figure 6. (e) Basic coordinate system to interpret geospectral signatures. (f) Basic colour scale for all geospectral signatures. (g) Geospectral signature corresponding to Figure 8c. (h–j) Geospectral signatures corresponding to Figure 8d.

position of the largest property contrast (cf. Figures 6 and 7). This implies that our ensemble followed closely a consistent structure (jointly imposed by the cross-gradient constraint) but was affected by the conventional misfit-smoothness trade-off parameter selected for each experiment, which determines the contrast of the property values themselves.

Cross-property comparisons

Whereas conventional interpretation of our resulting multiproperty models can be carried out by an integrated analysis of the individual density, magnetisation and resistivity images, a swifter analysis can be performed on the integrated geospectral image (Gallardo, 2007). In this representation we composed a coloured image assigning each physical property value to a given colour band. We thus used a 2D colour scale that combines information of the density of Figure 4a (in the red band) and magnetisation values of Figure 4b (in the green band) to shape the geospectral image of Figure 8c. Similarly, we composed a full three-colour (RGB) geospectral image (Figure 8d) combining the density, magnetisation and log-resistivity values of Figure 6a–c. It is acknowledged that the geospectral images facilitate the visualisation of the spatial distribution of characteristic combinations of physical properties, whereas their associated property-to-property cross-plots, or geospectral signatures (Figure 8g–j), facilitate the analysis of the actual physical property clusters and correlations (Gallardo, 2007). It is expected that both model representations can easily reflect geological structure and rock property interpretation (Gallardo et al., 2012). It is also worth mentioning the similarities between the observed data and the calculated responses from experiments two and three (Figure 8a, b).

It is noticeable that both geospectral images of Figure 8 largely define the same major structures that are correlateable to the largest tectonic terrains assembled in the area, detected

mainly by their clear magnetic and gravity imprints. However, the inclusion of the AEM data in the joint inversion process suggests variations within the terrains, which may imply lithological variations or possible fragmentation, mostly due to the presence of the conductive layer at depth, which has been well assimilated by potential field data. Its presence in Figure 8d is well tracked all along the model and helps to determine the presence of shallower features with distinct resistivity-magnetic signatures. This is further evidence of this conductive layer being a contrasting physical property. At the northern end of the geospectral image of Figure 8d (between 1–3 km) the conductor is related to low values of density and magnetisation, which should discard any conductive mineralisation, and favours a porosity-driven feature. For instance, we may consider the existence of a water-saturated layer with an impermeable material below.

The cross-plots of Figure 8g–j associate clusters of physical properties to their spatial location. In these images each dot represents a cell in the geospectral image, and therefore, its colour corresponds in both images. Some basic aspects that we may note for their interpretation are: (1) homogeneous areas in all properties tend to form compact clusters, (2) dot trends denote transitions between clusters and most likely coupled spatial transition of homogeneous zones and (3) scattered trends may denote dispersed spatial transitions between homogeneous zones.

In general, we may expect that property trends different from full verticality or horizontally denote the existence of neighbouring heterogeneities that are jointly detected by at least two different geophysical datasets and are thus jointly solved, as ideally required by the cross-gradient constraint. While we claim that the abundance of near-surface features that bear no coupled property correlation (reflected as scattered trends in Figure 8) may simply be attributed to the limited resolution power of the potential field data to near-surface

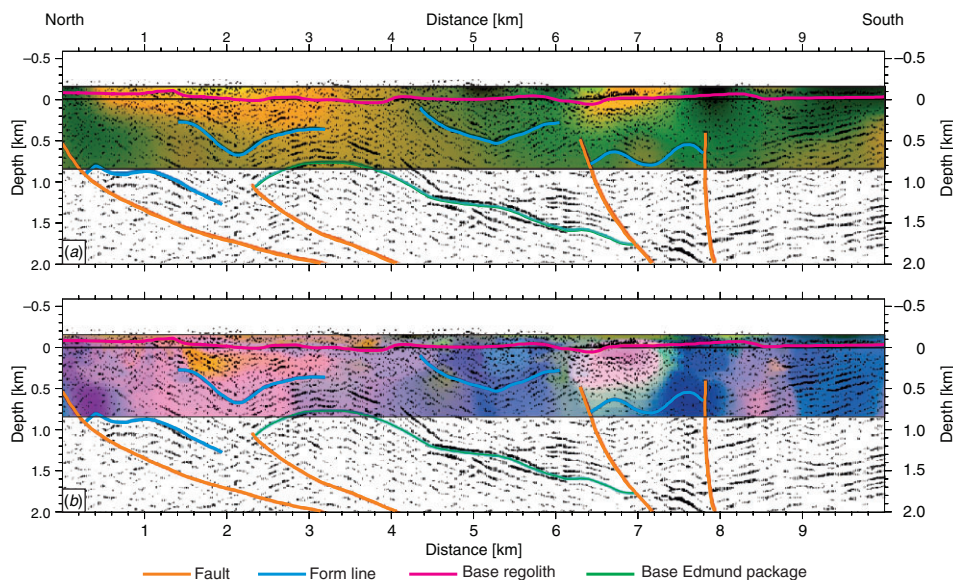


Fig. 9. Comparison between seismic interpretation of line 10GA-CP2 (GSWA digital record) made by Johnson et al. (2013) and the geospectral image obtained from 2D cross-gradient joint inversion of the selected potential field data (a) and the full three-data cross-gradient joint inversion (b).

features, they may also be influenced by an excess of resistivity heterogeneity inherited from the 1D stitched models used as input for this process. This issue, however, can only be resolved by the full multidimensional inversion of the AEM data.

Geospectral and seismic correlation

A comparison between our geospectral images and a corresponding segment of the seismic traverse 10GA-CP2, interpreted by Johnson et al. (2013), is shown in Figure 9. It is worth mentioning that the northern end of our AEM segment shifts 1900 m off the seismic line (cf. Figure 1b). This due the nature of the acquisition of the AEM line.

Figure 9 shows a remarkable correspondence between the major structures in both geospectral image and seismic section. First, the overall property (colour) transitions of the geospectral images match in the direction of the independent seismic reflectors, and second, the mayor property transitions match the boundaries explicitly (and independently) interpreted by Johnson et al. (2013) in the seismic section.

Conclusions

The AEM-constrained joint inversion of gravity and magnetic data based on cross-gradients results were feasible and yielded a stable process. We demonstrated that the AEM-constrained joint inversion lead to structurally similar density, magnetisation and resistivity models that reproduce the respective geophysical data. The integrated features of the models show not only consistency for shallow and deep structures but also little property scattering, which enable an integrative interpretation of the subsurface.

In our experiments we found that gravity and magnetic data consistently resolved the deep structures, whether they were jointly inverted or not. The shallow features, however, leaned primarily on the near-surface sensitivity provided by the AEM data. Notably, this information also transferred to the enhanced resolution of deeper structures by suppressing unrealistic trends from conventional joint inversion models of gravity and magnetic data, which are commonly induced by smoothed transitions that transfer sharp changes monotonically into the deeper structure. Additionally, we found that middle-depth features seem adequately resolved by the three methods. We gauged the reliability of the features evinced in the integrated geospectral images with a co-located seismic section and found that the features are consistent with both seismic reflectors and independent interpretations at any depth of investigation presented in our images.

The geospectral signatures show that a reliable determination of near-surface features is more likely to require the full joint inversion of AEM data so as to evince the actual correlative trends from the coupled contribution of all the datasets. Our results also show that despite this limitation, the lateral heterogeneity, which could be fictitiously induced in the stitched model, is removed by the smoothed transition aided by the information shared by the potential field data at no cost of AEM data misfit. In general, we found that the cross-gradient joint inversion seem to convey improved deductions of heterogeneities by harnessing the common sensitivity ground shared by the most common types of airborne geophysical data and reveals a promising strategy for the massive joint interpretation of aerogeophysical surveys from remote and inaccessible areas.

Conflicts of interest

The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgements

We wish to thank the GADDS for the availability of the gravity and magnetic data used in this work. We acknowledge the Geological Survey of Western Australia (GSWA) for the availability of the geological maps. We thank the CONACyT for the PhD scholarship granted to Adrián Misael León-Sánchez. Parts of the work presented here was supported by the Discovery theme within CSIRO's Minerals Recourses Flagship, the Science and Industry Endowment Fund and other industry funding sponsors, which we would also like to thank. This document was largely improved by the insightful work of two anonymous reviewers and the associate editor, which is greatly appreciated.

References

- Brodie, R. C., 2010, Holistic inversion of airborne electromagnetic data: Ph.D. thesis, The Australian National University.
- Brodie, R. C., 2015, User manual for Geoscience Australia's airborne electromagnetic inversion software. Available at: <https://github.com/GeoscienceAustralia/ga-aem.git>
- Cawood, P. A., and Tyler, I. M., 2004, Assembling and reactivating the Proterozoic Capricorn Orogen: lithotectonic elements, orogenies, and significance: *Precambrian Research*, **128**, 201–218. doi:10.1016/j.precamres.2003.09.001
- Doetsch, J., Linde, N., Coscia, I., Greenhalgh, S. A., and Green, A. G., 2010, Zonation for 3D aquifer characterization based on joint inversions of multimethod crosshole geophysical data: *Geophysics*, **75**, G53–G64. doi:10.1190/1.3496476
- Dransfield, M., 2011, Airborne gravity gradiometry – the state of the art: International Workshop on Gravity, Electrical and Magnetic Methods and their Application, October 10–13, Beijing, China.
- Fraser, S. J., Wilson, G. A., Cox, L. H., Cuma, M., Zhdanov, M. S., and Vall'ee, M. A., 2012, Self-organizing maps for pseudo-lithological classification of 3D airborne electromagnetic, gravity gradiometry and magnetic inversions: ASEG Extended Abstracts, 2012, 1–4.
- Gallardo, L. A., 2007, Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging: *Geophysical Research Letters*, **34**, L19301. doi:10.1029/2007GL030409
- Gallardo, L. A., and Meju, M. A., 2003, Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data: *Geophysical Research Letters*, **30**, 1658. doi:10.1029/2003GL017370
- Gallardo, L. A., and Meju, M. A., 2004, Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **109**, B03311.
- Gallardo, L. A., and Meju, M. A., 2007, Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification: *Geophysical Journal International*, **169**, 1261–1272. doi:10.1111/j.1365-246X.2007.03366.x
- Gallardo, L. A., and Meju, M. A., 2011, Structure-coupled multiphysics imaging in geophysical sciences: *Reviews of Geophysics*, **49**, RG1003. doi:10.1029/2010RG000330
- Gallardo, L. A., and Thebaud, N., 2012, New insights into Archean granite-greenstone architecture through joint gravity and magnetic inversion: *Geology*, **40**, 215–218. doi:10.1130/G32817.1
- Gallardo, L. A., Fontes, S. L., Meju, M. A., Buonora, M. P., and de Lugao, P. P., 2012, Robust geophysical integration through structure-coupled joint inversion and multispectral fusion of seismic reflection, magnetotelluric, magnetic, and gravity images: example from Santos Basin, offshore Brazil: *Geophysics*, **77**, B237–B251. doi:10.1190/geo2011-0394.1
- Geological Survey of Western Australia, 2016, Western Capricorn Orogen, 2016: Geological Survey of Western Australia: Geological Information Series.
- Gessner, K., Gallardo, L. A., Wedin, F., and Sener, K., 2016, Crustal structure of the northern Menderes Massif, western Turkey, imaged by joint gravity and magnetic inversion: *International Journal of Earth Sciences*, **105**, 2133–2148. doi:10.1007/s00531-016-1324-1
- Haber, E., and Gazit, M. H., 2013, Model fusion and joint inversion: *Surveys in Geophysics*, **34**, 675–695. doi:10.1007/s10712-013-9232-4
- Johnson, S. P., Thorne, A. M., Tyler, I. M., Korsch, R. J., Kennett, B. L. N., Cutten, H. N., Goodwin, J., Blay, O., Blewett, R. S., Joly, A., Dentith,

- M. C., Aitken, A. R. A., Holzschuh, J., Salmon, M., Readin, A., Heison, G., Boren, G., Ross, J., Costelloe, R. D., and Fomin, T., 2013, Crustal architecture of the Capricorn Orogen, Western Australia and associated metallogeny: *Australian Journal of Earth Sciences*, **60**, 681–705. doi:10.1080/08120099.2013.826735
- Lane, R., Green, A., Golding, C., Owers, M., Pik, P., Plunkett, C., Sattel, D., and Thorn, B., 2000, An example of 3D conductivity mapping using the tempest airborne electromagnetic system: *Exploration Geophysics*, **31**, 162–172. doi:10.1071/EG00162
- León-Sánchez, A. M., and Gallardo, L. A., 2015, 2D cross-gradient joint inversion of magnetic and gravity data across the Capricorn Orogen in Western Australia: ASEG Extended Abstracts, 2015, 1–5.
- Ley-Cooper, A. Y., and Brodie, R. C., 2013, Inversion of SPECTREM AEM data for conductivity and system geometry: ASEG Extended Abstracts, 2013, 1–4.
- Ley-Cooper, A. Y., Munday, T., and Ibrahim, T., 2015, Determining cover variability in the Capricorn Orogen with airborne EM: ASEG Extended Abstracts, 2015, 1–6.
- Moorkamp, M., Heincke, B., Jegen, M., Roberts, A. W., and Hobbs, R. W., 2011, A framework for 3-D joint inversion of MT, gravity and seismic refraction data: *Geophysical Journal International*, **184**, 477–493. doi:10.1111/j.1365-246X.2010.04856.x
- Newman, G. A., and Commer, M., 2010, Joint electromagnetic-seismic inverse modeling for matched data resolution: EGM 2010 International Workshop, 1–5.
- Pirajno, F., 2004, Metallogeny in the Capricorn Orogen, Western Australia, the result of multiple ore-forming processes: *Precambrian Research*, **128**, 411–439. doi:10.1016/j.precamres.2003.09.010
- Reeves, C. V., Reford, S. W., Milligan, P. R., and Gubins, A. G., 1997, Airborne geophysics: old methods, new images: *Proceedings of Exploration 97: Fourth Decennial International Conference on Mineral Exploration*, 13–30.
- Solon, F., Gallardo, L. A., and Fontes, S. L., 2014, Characterization of Sao Francisco Basin, Brazil - joint inversion of MT, gravity and magnetic data: 76th EAGE Conference and Exhibition, 1–4.
- Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y., 1977, *Solutions of ill-posed problems*: John Wiley.
- Tyler, I. M., Pirajno, F., Bagas, L., Myers, J. S., and Preston, W. A., 1998, The geology and mineral deposits of the Proterozoic in Western Australia: *AGSO Journal of Australian Geology & Geophysics*, **17**, 223–244.
- Wilson, G. A., Fraser, S., Cox, L. H., Cuma, M., Zhdanov, M. S., and Vallée, M. A., 2011, Lithological classification of large-scale 3D inversion of airborne electromagnetic, gravity gradiometry, and magnetic data – a case study from Reid-Mahaffy, Ontario: SEG Technical Program Expanded Abstracts, 624–628.

Anexo B

Respuesta magnética de un prisma rectangular de magnetización uniforme

Siguiendo el desarrollo de Gallardo (1997), y partiendo de la definición de potencial magnético escalar en un punto (x_0, y_0, z_0) , producto de un elemento diferencia en (x', y', z') , para el prisma completo se tiene que

$$A(x_0, y_0, z_0) = c \int_{x'-x_0} \int_{y'-y_0} \int_{z'-z_0} \mathbf{M} \cdot \nabla \left(\frac{dx' dy' dz'}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2)^{1/2}} \right). \quad (128)$$

Siendo por definición $\mathbf{b}(x_0, y_0, z_0) = -\nabla A(x_0, y_0, z_0)$

$$\mathbf{b}(x_0, y_0, z_0) = -c \nabla_0 \int_{x'-x_0} \int_{y'-y_0} \int_{z'-z_0} \mathbf{M} \cdot \nabla \left(\frac{dx' dy' dz'}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2)^{1/2}} \right). \quad (129)$$

Si se traslada el sistema con la transformación $x = x' - x_0$, $y = y' - y_0$, $z = z' - z_0$ y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y sabiendo que $\nabla_0 f(x' - x_0) = -\nabla f(x)$, $\nabla' f(x' - x_0) = \nabla f(x)$, el campo magnético esta dado por

$$\mathbf{b}(0, 0, 0) = c \nabla \int_x \int_y \int_z \mathbf{M} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dx dy dz,$$

y por linealidad

$$\mathbf{b}(0, 0, 0) = c \int_x \int_y \int_z \nabla \left[\mathbf{M} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] dx dy dz. \quad (130)$$

Empleando notación indicial y bajo la convención de suma de Einstein tenemos que

$$b_i(0) = c \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left[M_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] dv. \quad (131)$$

Considerando M_k constante, la ecuación anterior la podemos expresar como

$$b_i(0) = cM_k \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r^3} \right) dv. \quad (132)$$

Evaluando $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\frac{\partial(r)}{\partial x_k}}{r^2} = -\frac{x_k}{r^2} = -\frac{x_k}{r^3}$, por lo que (132) se convierte en

$$\begin{aligned} b_i(0) &= cM_k \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{x_k}{r^3} \right) dv = -cM_k \int \int \int_V \left(\frac{r^3 \frac{\partial x_k}{\partial x_i} - x_k \frac{\partial r^3}{\partial x_i}}{r^6} \right) dv \\ &= -cM_k \int \int \int_V \left(\frac{r^3 \delta_{ik} - 3r^2 x_k \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^6} \right) dv = cM_k \int \int \int_V \left(\frac{3r x_k x_i}{r^6} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right) dv, \end{aligned}$$

teniendo así que

$$b_i(0) = cM_k \int \int \int_V \left(\frac{3x_k x_i}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right) dv. \quad (133)$$

De la ecuación (133) se desprenden dos casos

Caso A: cuando $i = k$

Caso B: cuando $i \neq k$

CASO A

Reescribiendo, la (133) se puede expresar como

$$B_{ik} = \int \int \int_V \left(\frac{3x_k x_i}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right) dv, \quad (134)$$

y tomando como ejemplo $i = k = 1$ se tiene que (134) se convierte en

$$B_{xx} = \int_Z \int_Y \int_X \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{\delta_{xx}}{r^3} \right) dx dy dz. \quad (135)$$

Si se desarrolla primero la integración en X se tiene que

$$B_{xx} = \int_Z \int_Y \left[3 \int_X \frac{x^2}{r^5} dx - \int_X \frac{1}{r^3} dx \right] dy dz. \quad (136)$$

Para resolver se toman de tablas las siguientes integrales resueltas

$$\int_X \frac{dx}{r^3} = \frac{x}{r(y^2 + z^2)} \quad (137)$$

y

$$\int_X \frac{x^2}{r^5} dx = \frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)}. \quad (138)$$

Sustituyendo (137) y (138) en (136) se tiene que

$$\begin{aligned} B_{xx} &= \int_Z \int_Y \left[\frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)} - \frac{x}{r(y^2 + z^2)} \right] \Big|_X dy dz \\ &= \int_Z \int_Y \left[\frac{x[(x^2 + y^2 + z^2) - (y^2 + z^2)]}{r^3(y^2 + z^2)} - \frac{x}{r(y^2 + z^2)} \right] \Big|_X dy dz \\ &= \int_Z \int_Y \left[\frac{x}{r(y^2 + z^2)} - \frac{x}{r^3} - \frac{x}{r(y^2 + z^2)} \right] \Big|_X dy dz = - \left[x \int_Z \int_Y \frac{dy}{r^3} dz \right] \Big|_X. \end{aligned}$$

Empleando (137) se obtiene

$$B_{xx} = \left[-xy \int \frac{dz}{r(x^2 + z^2)} \right] \Big|_x \Big|_y. \quad (139)$$

Para resolver (139) se considera que $\int \frac{dx}{r(x^2 + z^2)} = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) \Big|_x$, obteniendo finalmente

$$B_{xx} = -xy \left[\frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{yz}{xr} \right) \right] \Big|_x \Big|_y \Big|_z = -\tan^{-1} \left(\frac{yz}{xr} \right) \Big|_x \Big|_y \Big|_z. \quad (140)$$

De manera similar, se puede determinar que

$$B_{yy} = -\tan^{-1} \left(\frac{xz}{yr} \right) \Big|_x \Big|_y \Big|_z \quad (141)$$

y

$$B_{zz} = -\tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) \Big|_x \Big|_y \Big|_z. \quad (142)$$

CASO B

Tomando la ecuación (134) en el caso cuando $i \neq k$ con t_{xy} . Desarrollando queda que

$$B_{xy} = \int_Z \int_Y \int_X \frac{3xy}{r^5} dx dy dz = 3 \int_Z \int_Y y \int_X \frac{x dx}{r^5} dy dz = 3 \int_Z \int_Y y \int_X r^{-4} \left[\frac{x}{r} \right] dy dz = \int_Y y \int_Z \frac{dz}{r^3} dy \Big|_X.$$

Utilizando la identidad $\int \frac{dx}{r^3} = \frac{x}{r(y^2 + z^2)}$ se tenemos que

$$B_{xy} = - \int_Y \frac{yz}{r(x^2 + y^2)} dy \Big|_{X|Z} = \int_Y \frac{y[(r-z)-r]}{r(x^2 + y^2)} dy \Big|_{X|Z} = \int_Y \frac{y(r-z)}{r(r^2 + z^2)} \Big|_{X|Z} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{X|Z} dy.$$

De la expresión anterior, la segunda integral es cero, por lo tanto

$$B_{xy} = \int_Y \frac{y}{r(r+z)} \Big|_{X|Z} dy = \int_Y \frac{\frac{y}{r}}{r+z} \Big|_{X|Z} dy = \ln(r+z) \Big|_{X|Y|Z}. \quad (143)$$

De forma similar a la anterior se pueden encontrar que

$$B_{xz} = \ln(r+y) \Big|_{X|Y|Z} \quad (144)$$

y

$$B_{yz} = \ln(r+x) \Big|_{X|Y|Z}. \quad (145)$$

Retomando (133), el campo magnético de un prisma esta dado por $b_i(0) = cM_k B_{ik}$. Aplicando la definición de campo total como la componente b_i en la dirección u_i del campo magnético regional tenemos que

$$b(0) = cu_i M_k B_{ik}.$$

Expresando finalmente en notación matricial, empleando los cosenos directores de u

$$b(0) = c[l\ m\ n] \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} | & | & | \\ x & y & z \\ | & | & | \end{vmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (146)$$

Anexo C

Respuesta de gravedad de un prisma rectangular de densidad uniforme

Siguiendo el desarrollo presentado en Gallardo (1997), supongamos que (x_0, y_0, z_0) es un punto de evaluación cualquiera y tomando un elemento diferencial (x', y', z') , el campo gravitacional de un prisma recto con densidad constante es de la forma

$$g_z(x_0, y_0, z_0) = \gamma\rho \int_{x_1-x_0}^{x_2-x_0} \int_{y_1-y_0}^{y_2-y_0} \int_{z_1-z_0}^{z_2-z_0} \frac{(z' - z_0)dx'dy'dz'}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2)^{3/2}}. \quad (147)$$

Para simplificar los cálculos se traslada el origen al punto de evaluación, que de acuerdo a la Figura 18 esto se logra haciendo

$$\begin{aligned} x &= x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0, \\ r &= ((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (148)$$

De esta manera, la ecuación (147) se transforma en

$$g_z(0, 0, 0) = \gamma\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{r^3} dz dy dx. \quad (149)$$

Integramos sobre z , usando la fórmula de integración $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, y renombramos los límites de integración como X, Y y Z , obteniendo

$$g_z(0, 0, 0) = \gamma\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy dx}{r} \Big|_z. \quad (150)$$

La integral de la ecuación (150) con respecto a y se obtiene considerando la fórmula de integración

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{1/2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad (151)$$

donde u es una función de valor real y a es una constante. De esta manera la ecuación (150) toma la forma de

$$g_z(0, 0, 0) = -\gamma\rho \int_{x_1}^{x_2} \ln(y+r)dx \Big|_z \Big|_Y. \quad (152)$$

Para resolver la integral con respecto a x integramos por partes

$$\begin{aligned} u &= \ln(y+r), \quad dv = dx \\ du &= \frac{x dx}{r(y+r)}, \quad v = x. \end{aligned} \quad (153)$$

De esta manera, 152 se ve como

$$g_z(0, 0, 0) = -\gamma\rho \left\{ x \ln(y+r) - \int_x \frac{x^2 dx}{r(y+r)} \right\} \Big|_z \Big|_Y. \quad (154)$$

Para resolver la integral 154 llevamos a cabo los siguientes pasos

$$\begin{aligned} \int_x \frac{x^2 dx}{r(y+r)} &= \int_x \frac{x^2(r-y)dx}{r(r^2-y^2)} \\ &= \int_x \frac{x^2 dx}{r^2-y^2} - \int_x \frac{yx^2 dx}{r(r^2-y^2)} \\ &= \int_x \frac{x^2 dx}{x^2+z^2} - y \int_x \frac{x^2 dx}{r(r^2-y^2)}. \end{aligned} \quad (155)$$

Donde $\int_x \frac{x^2 dx}{x^2+z^2} = \left(x - z \tan^{-1} \frac{x}{z} \right) \Big|_z \Big|_Y \Big|_x = 0$ para los límites de evaluación sobre y .
Así,

$$\begin{aligned}
\int_x \frac{x^2 dx}{r(y+r)} &= -y \int_x \frac{x^2 dx}{r(r^2 - y^2)} \\
&= -y \int_x \frac{(x^2 + z^2) - z^2}{r(x^2 + z^2)} dx \\
&= -y \int_x \frac{dx}{r} + yz^2 \int_x \frac{dx}{r(x^2 + z^2)} \\
&= -y \ln(x+r) + yz^2 \int_x \frac{dx}{r(x^2 + z^2)}.
\end{aligned} \tag{156}$$

Ahora, para resolver la integral 156 se realiza la siguiente sustitución: $x = \sqrt{y^2 + z^2} \tan \theta$, $dx = \sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta$. Así, la última integral en 156 se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\int_x \frac{dx}{r(x^2 + z^2)} &= \int_\theta \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{(y^2 + z^2) \tan^2 \theta + y^2 + z^2} [(y^2 + z^2) \tan^2 \theta + z^2]} \\
&= \int_\theta \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{[y^2(1 + \tan^2 \theta) + z^2(1 + \tan^2 \theta)]^{1/2} [y^2 \tan^2 \theta + z^2(1 + \tan^2 \theta)]} \\
&= \int_\theta \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{[y^2 \sec^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta]^{1/2} [y^2 \tan^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta]} \\
&= \int_\theta \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{[(y^2 + z^2) \sec^2 \theta]^{1/2} [y^2 \tan^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta]} \\
&= \int_\theta \frac{\sec \theta d\theta}{y^2 \tan^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta} \\
&= \int_\theta \frac{\cos \theta d\theta}{y^2 \sin^2 \theta + z^2}
\end{aligned} \tag{157}$$

Para resolver la última integral 157, recurrimos a la fórmula de integración $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$. De esta manera,

$$\int_\theta \frac{\cos \theta d\theta}{y^2 \sin^2 \theta + z^2} = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \frac{y \sin \theta}{z}. \tag{158}$$

Se puede demostrar, usando identidades trigonométricas, que $\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$, por lo que 158 se puede escribir como

$$\int_{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{y^2 \sin^2 \theta + z^2} = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \right). \quad (159)$$

Luego, regresando a la notación original $\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$, por lo que 159 toma la forma

$$\begin{aligned} \int_{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{y^2 \sin^2 \theta + z^2} &= \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2 + z^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2 + z^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right). \end{aligned} \quad (160)$$

Por lo tanto de 157 y 160 se tiene que

$$\int_x \frac{dx}{r(x^2 + z^2)} = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) \Big|_x. \quad (161)$$

Luego de 156 y 161 tenemos que

$$\int_x \frac{x^2 dx}{r(y + r)} \Big|_z \Big|_Y = \left[-y \ln(x + r) + z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) \right] \Big|_z \Big|_Y \Big|_X. \quad (162)$$

Finalmente, de 154 y 162 tenemos una expresión más simple para el campo gravitacional de un prisma recto con densidad constante dada por

$$g_z(0, 0, 0) = \gamma \rho \left[z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) - x \ln(y + r) - y \ln(x + r) \right] \Big|_{z|y|x}. \quad (163)$$

Anexo D

Las siguientes secciones fueron tomadas de Calderón Magallón (2015).

Gradientes conjugados

El método de los gradientes conjugados es uno más de los diferentes métodos iterativos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales grandes de la forma estándar.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (164)$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector desconocido, $\mathbf{b}$ es un vector conocido y $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica positiva definida conocida.

Una matriz positiva definida es un tipo especial de matriz que cumple estrictamente con la siguiente definición:

- Una matriz $\mathbf{A}$ es positiva definida si, para cualquier vector diferente de cero $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0. \quad (165)$$

Es decir, el resultado del producto interior en (165) debe ser un número real positivo y diferente de cero. Para entender este concepto más detalladamente revisaremos un poco la teoría que lo sustenta.

La forma cuadrática

Una forma cuadrática es una función cuadrática de un vector con la forma

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}, \quad (166)$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son vectores. La idea de las formas cuadráticas es introducida para derivar los métodos del descenso más rápido (steepest descent), direcciones conjugadas (conjugate directions) y gradientes conjugados (conjugate gradients),

donde

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}. \quad (167)$$

Para obtener la ecuación (164), sólo tenemos que igualar a cero el gradiente definido en (167); esto significa que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es un punto crítico de $f(\mathbf{x})$, es decir, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ puede resolverse encontrando un vector $\mathbf{x}$ tal que minimice a $f(\mathbf{x})$.

La figura geométrica que describe la forma cuadrática representada por la ecuación (166) corresponde a un paraboloide elíptico que se muestra en la Figura 52.

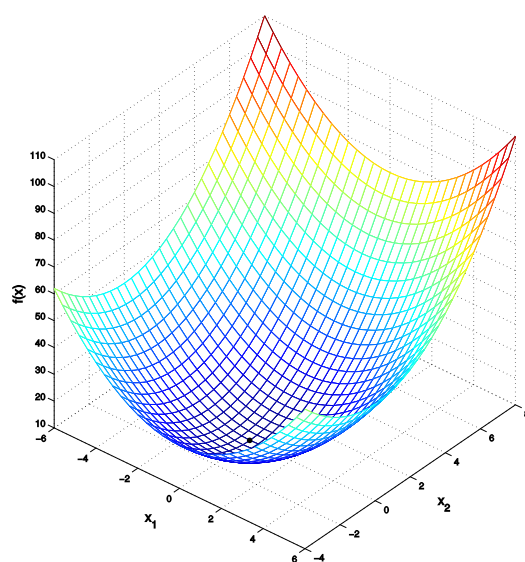


Figura 52. Gráfica de la forma cuadrática $f(\mathbf{x})$ correspondiente a un paraboloide elíptico. El punto mínimo de esta superficie es la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tomada de Calderón Magallón (2015).

La razón principal por la que un paraboloide elíptico es la forma cuadrática que representa adecuadamente la minimización de (166) consiste en que a diferencia de otras formas cuadráticas (por ejemplo la silla de montar) sólo tiene un punto mínimo, siendo este punto tanto el mínimo global como el mínimo local, esto implica que no tenemos que preocuparnos por otros criterios de minimización como por ejemplo el criterio de la segunda derivada para encontrar el punto que minimice a (167).

La Figura 53 nos muestra un mapa de contorno correspondiente a la Figura 52 y en ella podemos observar las superficies de nivel y el punto de solución del sistema representado en la ecuación (164).

El método del descenso más rápido (steepest descent)

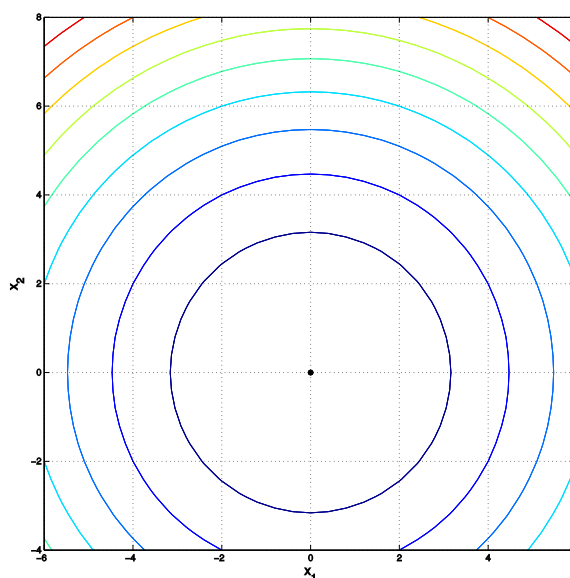


Figura 53. Superficies de nivel del paraboloido elíptico $f(x)$. Cada curva elipsoidal tiene una $f(x)$ constante y el punto en el origen es la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tomada de Calderón Magallón (2015).

El método de los gradientes conjugados está basado en el método de descenso más rápido y como en éste la idea principal es encontrar un mínimo que sea la solución del sistema de la manera más eficiente mediante el menor número de operaciones posibles para llegar a una solución satisfactoria.

En el método del descenso más rápido, comenzamos en un punto arbitrario x_0 y nos deslizamos hacia el fondo del paraboloido. Tomamos una serie de pasos $x_1, x_2, \dots$, hasta que estamos suficientemente cerca de la solución. Tenemos que la dirección en que f decrece más rápidamente es la opuesta a $f'(x)$ y de acuerdo con la ecuación (167), ésta dirección es $-f'(x_i)$.

Observamos también que en cada paso que damos tenemos cierto error $e_i = x_i - x$, que es un vector que nos indica que tan lejos estamos de la solución. También contamos con el residual $r_i = b - Ax_i$, indica que tan lejos estamos del valor correcto de b (Shewchuck, 1994).

Estas propiedades nos llevan a enunciar que

- $r_i = -Ae_i = f'(x_i)$ es la definición del descenso más rápido.

Supongamos que comenzamos en un punto x_0 . Nuestro primer paso a lo largo de la dirección de descenso más rápido, es decir, elegimos el punto

$$x_1 = x_0 + \alpha r_0. \quad (168)$$

Necesitamos dar un paso que nos deje en la mejor dirección posible, así que elegimos un α tal que minimice f a lo largo de la línea, este procedimiento se llama línea de búsqueda (line search).

Tenemos que α minimiza a $f(x)$ cuando la derivada direccional es igual a cero. Por la regla de la cadena tenemos que $\frac{d}{d\alpha}f(x_1) = f'(x_1)^T \frac{d}{d\alpha}x_1 = f'(x_1)^T r_0$; igualando esta expresión a cero nos resulta que α puede elegirse de tal forma que r_0 y $f'(x_1)$ son ortogonales.

Existe una razón por la que esperamos que estos vectores sean ortogonales en el mínimo; en este punto $f(x)$ es minimizada donde la proyección es cero, esto es, el punto en que el gradiente es ortogonal a la línea de búsqueda como podemos ver en al Figura 54

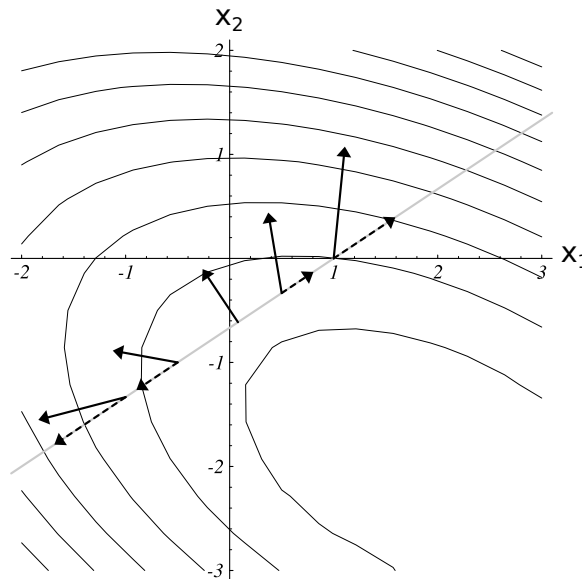


Figura 54. El gradiente de f' es representado en algunas localidades a lo largo de la línea de búsqueda (flechas sólidas). Cada proyección del gradiente en la línea también se muestra (flechas punteadas). Los vectores de gradiente representan la dirección del incremento máximo de f' , y las proyecciones representan la velocidad de una línea de búsqueda transversa. En la búsqueda de línea, f es minimizada donde el gradiente es ortogonal a la línea de búsqueda. Tomada de Shewchuck (1994)

Para determinar α , notamos que $f'(x_1) = -r_1$, y así $\alpha = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0}$.

Utilizando todo lo mencionado anteriormente, podemos escribir el algoritmo para el método de descenso más rápido.

Método del descenso más rápido

$$\begin{aligned} r_i &= b - Ax_i \\ \alpha_i &= \frac{r_i^T r_i}{r_i^T A r_i} \\ x_{i+1} &= x_i + \alpha_i r_i \end{aligned}$$

El algoritmo anterior requiere dos multiplicaciones matriz-vector por cada iteración; afortunadamente, una puede eliminarse. Premultiplicando ambos lados la tercera ecuación por $-A$ y sumando b , tenemos

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A r_i \quad (169)$$

Si bien el residual sigue siendo necesario para calcular r_0 , la ecuación (169) puede usarse para cada iteración de aquí en adelante. La desventaja del uso de esta recurrencia es que la secuencia definida por la ecuación (169) es generada sin realimentación del valor de x_i , así que la acumulación del redondeo del error del punto flotante puede causar que x_i converja a algún punto ya sea cerca o lejos de la solución x .

Vectores propios y valores propios

Los métodos iterativos frecuentemente dependen de la aplicación de una matriz B a un vector propio v una y otra vez; cuando esto sucede puede pasar una de dos cosas.

- Si $|\lambda| < 1$, entonces $B^i v = \lambda^i v$ se desvanecerá cuando i se aproxime al infinito.
- Si $|\lambda| > 1$, entonces $B^i v$ crecerá al infinito.

La primera de estas condiciones implica que si las magnitudes de todos los valores propios son más pequeñas que uno, $B^i v$ convergerá a cero, a causa de que los valores propios que componen x convergen a cero cuando B es aplicada repetidamente. La segunda condición nos dice que si uno de los valores propios tiene una magnitud más grande que uno, x diverge al infinito. Por lo tanto, es necesario que además de ser menores en magnitud que la unidad, los valores propios de una matriz positiva definida sean todos positivos pues sólo así podemos asegurar que el sistema converge.

Convergencia del método de descenso más rápido

Para señalar el límite del método del descenso más rápido en el caso general, definiremos la norma de energía (energy norm) $\|e\|_A = (e^T A e)^{1/2}$. Minimizar $\|e_i\|_A$ es equivalente a minimizar $f(x_i)$. Con esta norma tenemos que

$$\begin{aligned} \|e_{i+1}\|_A^2 &= e_{i+1}^T A e_{i+1} \\ &= \|e_i\|_A^2 \omega^2, \omega^2 = 1 - \frac{\left(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^2\right)^2}{\left(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^3\right)\left(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j\right)}. \end{aligned} \quad (170)$$

El análisis consiste en encontrar un límite superior para ω , esto significa que el término que se encuentra después del signo negativo debe ser lo más cercano posible a cero, esto nos asegura que el error actual es igual al error anterior y con ello tenemos la solución o en su defecto un resultado cercano.

Definamos el número de condición espectral (spectral condition number) de A como $\kappa = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \geq 1$.

La pendiente e_i (relativa al sistema coordenado definido por los vectores propios), que depende del punto de inicio, es denotada por $\mu = \xi_{\max}/\xi_{\min}$. Así, tenemos

$$\omega^2 = 1 - \frac{\left(\kappa^2 + \mu^2\right)^2}{\left(\kappa + \mu^2\right)\left(\kappa^3 + \mu^2\right)}. \quad (171)$$

Manteniendo κ constante observamos que (171) es máxima cuando $\mu \leq \kappa$. Un límite superior a ω (correspondiente al peor caso de puntos de inicio) se encuentra especificando $\mu^2 = \kappa^2$

$$\omega^2 = \frac{(\kappa - 1)^2}{(\kappa + 1)^2},$$

$$\omega \leq \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}. \quad (172)$$

Los resultados para la convergencia del método de descenso más rápido son

$$\|e_i\|_A \leq \|e_0\|_A, \quad (173)$$

y

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{f(x_0) - f(x)} \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{2i}.$$

Conjugación

Con el fin de tener una dirección adecuada para el descenso más rápido y así evitar dar dos o más pasos en la misma dirección que pasos anteriores, elegimos un conjunto ortogonal de direcciones de búsqueda (search directions) $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$. En cada dirección de búsqueda tomamos un paso que es la longitud adecuada para alinearlo igualmente con x y así hasta n pasos. El problema con ésta técnica es que tenemos que saber previamente la forma de e_i para calcular α_i , lo que generalmente no es posible.

La solución a este problema es hacer las direcciones de búsqueda *A-ortogonales* en lugar de ortogonales. Dos vectores d_i y d_j son *A-ortogonales* o *conjugados* si

$$d_i A d_j = 0 \quad (174)$$

La Figura 55 muestra como se ven los vectores *A-ortogonales*.

La condición de *A-ortogonalidad* expresada en 174 es más general que la ortogonalidad que utilizamos comúnmente, la diferencia fundamental consiste en que la matriz A es una matriz identidad en la ortogonalidad común y en la *A-ortogonalidad* la matriz A no es la matriz identidad. Una manera sencilla de explicarlo consiste en imaginar que podemos estirar las elipses correspondientes a las superficies de nivel en la Figura 55a

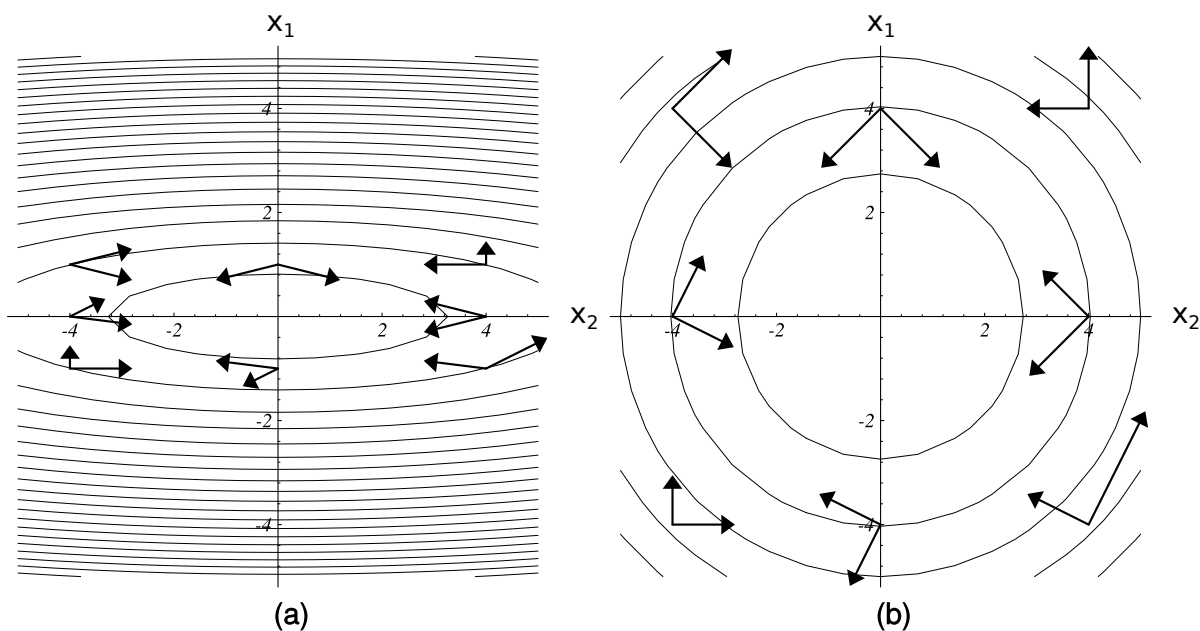


Figura 55. Vectores *A*-ortogonales

hasta lograr convertirlas en círculos concéntricos como los de la Figura 55b, es decir, de alguna manera podemos hacer que la matriz A expresada en (174) se convierta en una matriz identidad.

Necesitamos que e_{i+1} sea *A*-ortogonal a d_i . Esta condición de ortogonalidad es equivalente a encontrar el punto mínimo a lo largo de las direcciones de búsqueda d_i .

Tenemos que α_i cuando las direcciones de búsqueda son *A*-ortogonales es

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{d_i^T A e_i}{d_i^T A d_i} \\ &= \frac{d_i^T r_i}{d_i^T A d_i}.\end{aligned}\tag{175}$$

Conjugación Gram-Schmidt

Sabemos que podemos calcular α_i mediante e_i y un conjunto de direcciones de búsqueda *A*-ortogonales $\{d_i\}$. Para calcular este conjunto, nos ayudamos de un proceso ampliamente utilizado en el álgebra lineal; el denominado proceso de conjugación Gram-Schmidt.

Supongamos que tenemos un conjunto de n vectores linealmente independientes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$. Para construir d_i tomamos u_i y quitamos cualquier componente que no sea *A-ortogonal* a los d vectores previos. En otras palabras, sea $d_0 = u_0$, y para $i > 0$, tenemos

$$d_i = u_i + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} d_k, \quad (176)$$

donde los β son definidos para $i > k$. Su expresión es

$$\beta_{ij} = -\frac{u_i^T A d_j}{d_j^T A d_j} \quad (177)$$

La dificultad de usar la conjugación de Gram-Schmidt es que todos los vectores anteriores deben guardarse en memoria para construir otro nuevo, y además son requeridas $O(n^3)$ operaciones para generar el conjunto completo.

Condición óptima del término de error

Para encontrar el valor e_i que sea mejor solución en el espacio de configuraciones en que se encuentra, necesitamos encontrar el valor que minimiza a $\|e_i\|_A$.

Sea D_i el subespacio i -dimensional $\text{span}\{d_0, d_1, \dots, d_{i-1}\}$; el valor e_i se elige de $e_0 + D_i$, el cual es el valor de $e_0 + D_i$ que minimiza a $\|e_i\|_A$. Podemos expresar el término del error como una combinación lineal de direcciones de búsqueda ($e_i = e_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j d_j$) y con ello su norma energética como una sumatoria

$$\begin{aligned} \|e_i\|_A &= \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \delta_j \delta_k d_j^T A d_k \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j^2 d_j^T A d_j. \end{aligned}$$

Cada término de esta sumatoria se asocia con una dirección de búsqueda que aún no ha sido atravesada. Cualquier otro vector e elegido de $e_0 + D_i$ debe tener estos

mismos términos en su expansión.

En cada paso, el hiperplano $x_0 + D_i$ es tangente al elipsoide en cual x_0 se encuentra, también el residual en cualquier punto es ortogonal a la superficie elipsoidal en ese punto. Se sigue que en r_i también es ortogonal a D_i , es decir,

$$d_i^T r_j = 0, \quad i < j. \quad (178)$$

Es decir, el residual $r_i = -Ae_i$ es siempre ortogonal a todas las direcciones de búsqueda anteriores y también es ortogonal a los residuales previos.

A consecuencia de que las direcciones de búsqueda son construidas de los vectores u el subespacio abarcado por $u_0, u_1, \dots, u_{i-1}$ es D_i , y el residual r_i es ortogonal a esos vectores previos u como lo demuestra el producto interior de la ecuación (176) y r_j :

$$d_i^T r_j = u_i^T r_j + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} d_k^T r_j \quad (179)$$

$$0 = u_i^T r_j, \quad \text{quadi} < j \quad (180)$$

De la ecuación (179)

$$d_i^T r_i = d_i^T r_i. \quad (181)$$

Nótese que el número de productos matriz-vector por iteración puede reducirse a uno por el uso de una recurrencia para encontrar el residual:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= -Ae_{i+1} \\ &= -A(e_i + \alpha_i d_i) \\ &= r_i - \alpha_i A d_i. \end{aligned} \quad (182)$$

El método de los gradientes conjugados

El método de los gradientes conjugados es simplemente el método de direcciones conjugadas donde las direcciones de búsqueda son construidas por la conjugación de los residuales, esto es, poniendo $u_i = r_i$ (Shewchuck, 1994).

A causa de que los vectores de búsqueda se forman de los residuales, el subespacio $\text{span}\{r_0, r_1, \dots, r_{i-1}\}$ es igual a D_i . Cada residual es ortogonal a cada dirección de búsqueda previa, así, la ecuación (180) se transforma en

$$r_i^T r_j = 0, \quad i \neq j. \quad (183)$$

La ecuación (182) muestra que cada nuevo residual r_i es la combinación lineal de los residuales previos Ad_{i-1} y $d_{i-1} \in D_i$, esto implica que cada nuevo subespacio D_{i+1} es formado de la unión del subespacio previo D_i y el subespacio AD_i , por lo tanto

$$\begin{aligned} D_i &= \text{span}\{d_0, Ad_0, A^2d_0, \dots, A^{i-1}d_0\} \\ &= \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{i-1}r_0\}, \end{aligned}$$

además, la demostración de esta ecuación nos asegura que la secuencia x_k converge a un punto solución a los sumo n pasos (Nocedal y Wright, 2006).

Este subespacio es llamado *subespacio de Krilov*, un subespacio creado por la aplicación de una matriz a un vector. AD_i está incluida en D_{i+1} y con ello el residual r_{i+1} es ortogonal a D_{i+1} , ecuación (178), lo que implica que r_{i+1} es *A-ortogonal* a D_i . La conjugación Gram-Schmidt se vuelve sencilla porque r_{i+1} ya es *A-ortogonal* a todas las direcciones de búsqueda previas excepto a d_i .

De la ecuación (177) tenemos que las constantes de Gram-Schmidt son

$$\beta_{ij} = -r_i^T Ad_j / d_j^T Ad_i$$

y tomando el producto interior r_i y la ecuación (182) tenemos

$$r_i^T r_{j+1} = r_i^T r_j - \alpha_j r_i^T A d_j$$

$$\alpha_j r_i^T A d_j = r_i^T r_j - r_i^T r_{j+1}$$

$$r_i^T A d_j = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} r_i^T r_i, & i = j, \\ -\frac{1}{\alpha_{i-1}} r_i^T r_i, & i = j + 1, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i-1}} \frac{r_i^T r_i}{d_{i-1}^T A d_{i-1}}, & i = j + 1, \\ 0, & i > j + 1. \end{cases}$$

La mayoría de los términos de β_{ij} desaparecen.

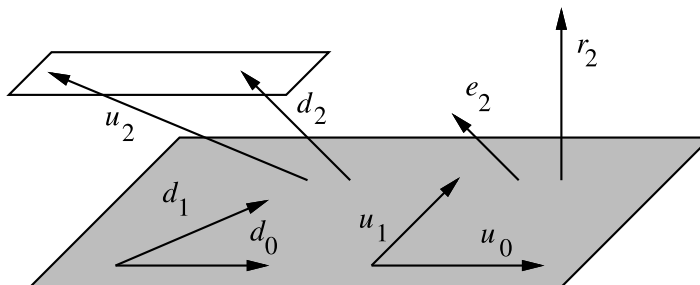


Figura 56. En el método de los gradientes conjugados, cada nuevo residual es ortogonal a todos los residuales previos y direcciones de búsqueda; cada nueva dirección de búsqueda es construida (del residual) para ser *A-ortogonal* a todos los previos residuales y direcciones de búsqueda. Los puntos finales de r_2 y d_2 están en un plano paralelo a D_2 (el subespacio sombreado). En gradientes conjugados, d_2 es una combinación lineal de r_2 y d_1 . Tomado de Shewchuck (1994).

No es necesario guardar todos los vectores viejos para asegurar la *A-ortogonalidad* de los nuevos vectores de búsqueda. La mayor ventaja es que hace a los gradientes conjugados un algoritmo importante, porque la complejidad del espacio y del tiempo de iteración son reducidas de $O(n^2)$ a $O(m)$, donde m es el número de entradas diferentes de cero de A .

Si $\beta_i = \beta_{i,i-1}$ y simplificando

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{r_i^T r_i}{d_{i-1}^T r_{i-1}} \\ &= \frac{r_i^T r_i}{r_{i-1}^T r_{i-1}}.\end{aligned}$$

Integrando todo queda que el método de los gradientes conjugados es

Gradientes conjugados
$d_0 = r_0 = b - Ax_0,$
$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{d_i^T A d_i},$
$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i,$
$r_{i+1} = r_i + \alpha_i A d_i,$
$\beta_{i+1} = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i},$
$d_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} d_i,$

Análisis de convergencia de los gradientes conjugados

El análisis de convergencia es importante porque los gradientes conjugados son usados comúnmente en problemas muy grandes que no es factible correr hasta n iteraciones.

En cada paso de gradientes conjugados, el valor de e_i es elegido de $e_0 + D_i$, donde

$$\begin{aligned}D_i &= \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2 r_0, \dots, A^{i-1} r_0\} \\ &= \text{span}\{Ae_0, A^2 e_0, A^3 e_0, \dots, A^i e_0\},\end{aligned}$$

los subespacios de Krilov tal como este tienen como propiedad que para una i fija el término de error tiene la forma

$$e_i = \left(I + \sum_{j=1}^i \psi_j A^j \right) e_0. \quad (184)$$

La expresión entre paréntesis de (184) puede expresarse como un polinomio. Sean $P_i(\lambda)$ un polinomio de grado i .

Ahora, expresamos el término de error como

$$e_i = P_i(A)e_0, \quad (185)$$

$P_i(0) = 1$. Gradientes conjugados elige este polinomio cuando elige los coeficientes ψ_j . Examinemos el efecto de aplicar este polinomio a e_0 . Expresamos e_0 como una combinación lineal de vectores propios unitarios

$$e_0 = \sum_{j=1}^n \xi_j v_j,$$

y encontramos que

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_j \xi_j P_i(\lambda_j) v_j \\ \|e_i\|_A^2 &= \sum_j \xi_j^2 [P_i(\lambda_j)]^2 \lambda_j. \end{aligned} \quad (186)$$

Gradientes conjugados encuentra el polinomio que minimiza (186), pero la convergencia es solamente tan buena como la convergencia del peor vector propio. Se $\Lambda(A)$ el conjunto de valores propios de A , tenemos que

$$\begin{aligned} \|e_i\|_A^2 &\leq \min_{P_i} \max_{\lambda \in \Lambda(A)} [P_i(\lambda)]^2 \sum_j \xi_j^2 \lambda_j \\ &\leq \min_{P_i} \max_{\lambda \in \Lambda(A)} [P_i(\lambda)]^2 \|e_0\|_A^2, \end{aligned} \quad (187)$$

es decir,

- El número de iteraciones requeridas para calcular una solución exacta es a lo

sumo el número de distintos valores propios (Calderón Magallón, 2015).

- Gradientes conjugados convergen más rápidamente cuando los valores propios están agrupados juntos que cuando están distribuidos irregularmente entre λ_{min} y λ_{max} porque le es más fácil a gradientes conjugados elegir un polinomio que haga a la ecuación (187) pequeña (Nocedal y Wright, 2006).

Polinomios de Chebyshev

Una aproximación más útil es minimizar la ecuación (187) sobre el rango $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ que en número finito de puntos. Los polinomios que cumplen esto están basados en los polinomios de Chebyshev.

Los polinomios de Chebyshev tienen la propiedad $|T_i(\omega)| \leq 1$ en el dominio $\omega \in [-1, 1]$, además que $|T_i(\omega)|$ es máximo en el dominio $\omega \notin [-1, 1]$.

La ecuación (187) es minimizada si elegimos

$$P_i(\lambda) = \frac{T_i\left(\frac{\lambda_{max} + \lambda_{min} - 2\lambda}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right)}{T_i\left(\frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right)}$$

Este polinomio tiene las propiedades oscilantes de los polinomios de Chebyshev en el dominio $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$.

El denominador impone que $P_i(0) = 1$. El numerador tiene un valor mínimo en el intervalo λ_{min} y λ_{max} , así, de la ecuación (187) tenemos

$$\begin{aligned} \|e_i\|_{\text{text}A} &\leq T_i\left(\frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right)^{-1} \|e_0\|_A \\ &= T_i\left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right)^{-1} \|e_0\|_A \\ &= 2 \left[\left(\frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1}\right)^i + \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^i \right]^{-1} \|e_0\|_A. \end{aligned} \tag{188}$$

La segunda suma dentro de los corchetes cuadrados converge a cero como i se

incrementa, por lo que expresamos la convergencia de gradientes conjugados con la igualdad

$$\|e_i\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^i \|e_0\|_A. \quad (189)$$

En la práctica, gradientes conjugados usualmente converge más rápidamente que lo que sugeriría la ecuación (189), causa de la cercanía o repetición de valores propios o buenos puntos de comienzo.

Métodos de búsqueda lineal

Cada iteración de un método de búsqueda lineal calcula una dirección de búsqueda y decide que tan lejos moverse a lo largo de dicha dirección. La iteración esta dada por

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad (190)$$

donde el escalar positivo α_k es llamado *longitud de paso*. El éxito de un método de búsqueda lineal depende en la efectividad de la selección de la dirección p_k y la longitud de paso α_k . La mayoría de los algoritmos de búsqueda lineal requieren que p_k sea una dirección descendente, es decir, una dirección para la cual $p_k^T \nabla f_k < 0$, debido a que esta propiedad garantiza que la función f pueda ser reducida a lo largo de ésta dirección.

Longitud de paso

Es necesario escoger una longitud de paso α_k de tal manera que la función f se reduzca sustancialmente, pero al mismo tiempo, es necesario no tardar mucho tiempo en hacer dicha selección. La selección ideal sería el mínimo global de la función univariada $\phi(\cdot)$ definida por

$$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k), \quad \alpha > 0, \quad (191)$$

pero en general, es muy costoso encontrar dicho valor. Generalmente, encontrar incluso un mínimo local de ϕ , con una precisión aceptable, requiere llevar a cabo muchas evaluaciones de f y posiblemente el gradiente ∇f . Existen varias estrategias que llevan a cabo una búsqueda lineal inexacta con las cuales es posible identificar una longitud de paso que logre reducir la función f adecuadamente a un costo mínimo. Típicamente, los algoritmos calculan una secuencia de valores de α , escogiendo uno de dichos valores una vez que ciertas condiciones se satisfacen.

Las condiciones de Wolfe

Una condición de búsqueda lineal popular inexacta estipula que α_k debería garantizar un decremento suficiente en la función objetivo f , medida por la siguiente desigualdad:

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f_k^T p_k \quad (192)$$

para alguna constante $c_1 \in (0, 1)$. En otras palabras, la reducción en f debería ser proporcional a la longitud de paso α_k y a la derivada direccional $\nabla f_k^T p_k$. La desigualdad (192) es llamada la condición de Armijo.

La condición de decrecimiento suficiente se ilustra en la Figura 57. El lado derecho de la ecuación (192), el cual es una función lineal, se puede denotar $l(\alpha)$. La función $l(\cdot)$ tiene una pendiente negativa $c_1 \alpha \nabla f_k^T p_k$, pero, debido a que $c_1 \in (0, 1)$, cae por encima de la gráfica de ϕ para valores positivos de α . La condición de decrecimiento suficiente establece que α es aceptable siempre y cuando $\phi(\alpha) \leq l(\alpha)$. Los intervalos en los cuales ésto sucede se muestran en la Figura 57. En la práctica, $c_1 = 10^{-4}$. La condición de decrecimiento suficiente no es suficiente por si misma para asegurar que el algoritmo tenga un progreso razonable porque, como podemos ver de la Figura 57, se satisface para todos los valores de α lo suficientemente pequeños. Para eliminar pasos pequeños inaceptables se introduce una segunda condición llamada la condición de curvatura, la cual requiere que α_k satisfaga

$$\nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k \quad (193)$$

para alguna constante $c_2 \in (c_1, 1)$, donde c_1 es la constante de (192). Hay que notar que el lado izquierdo es simplemente la derivada $\phi'(\alpha_k)$, así que la condición de curvatura asegura que la pendiente de ϕ en α_k es mayor que c_2 por el paso inicial $\phi(0)$. Ésto tiene sentido porque si la pendiente $\phi'(\alpha)$ es fuertemente negativa, tenemos indicios de que podemos reducir f significativamente al mover más a lo largo de la dirección de búsqueda.

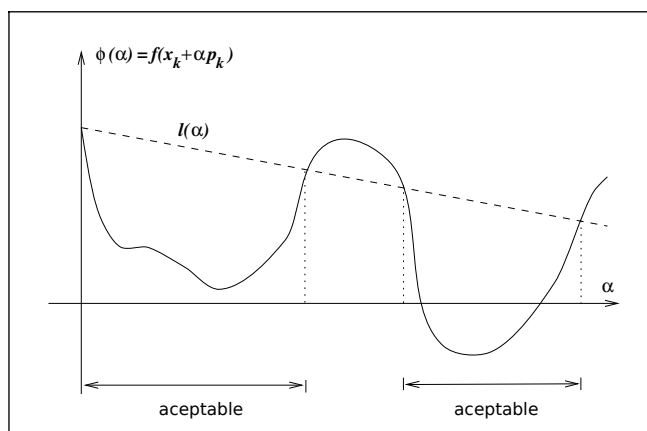


Figura 57. Condición de decrecimiento suficiente. Modificada de Nocedal y Wright (2006).

Por otro lado, si $\phi'(\alpha_k)$ es poco negativa o incluso positiva, es evidencia de que no podemos esperar mas decrecimiento en f en esa dirección, así que tiene sentido terminar la búsqueda lineal. La condición de curvatura se ilustra en la Figura 58. El valor típico de c_2 es 0.1 cuando p_k se obtiene a partir de un método de gradientes conjugados no lineales.

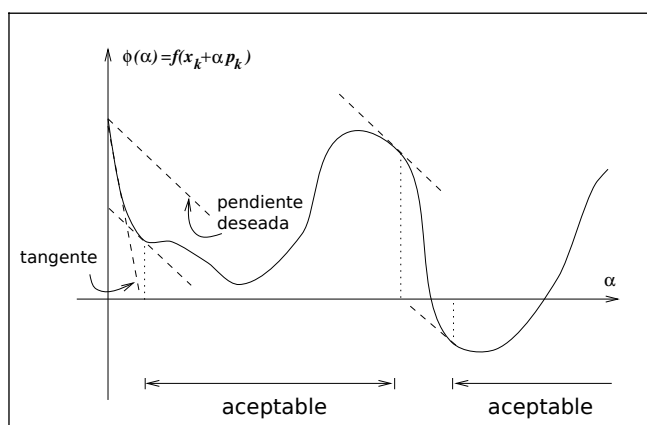


Figura 58. Condición de curvatura. Modificada de Nocedal y Wright (2006).

Las condiciones de decrecimiento suficiente y curvatura son conocidas colectivamente como las condiciones de Wolfe. Ellas se ilustran en la Figura 59.

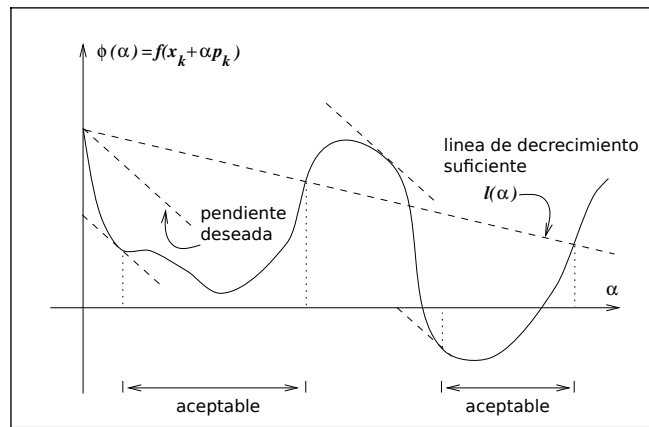


Figura 59. Longitud de paso que satisface las condiciones de Wolfe. Modificada de Nocedal y Wright (2006).

Una longitud de paso puede satisfacer las condiciones de Wolfe sin ser particularmente cercana a un mínimo de ϕ , como se muestra en la Figura 59. Sin embargo, se puede modificar la condición de curvatura para forzar a α_k para caer al menos cerca de una vecindad del mínimo local o punto estacionario de ϕ . Las condiciones fuertes de Wolfe requieren que α_k satisfaga

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f_k^T p_k, \quad (194a)$$

$$|\nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k|, \quad (194b)$$

con $0 < c_1 < c_2 < 1$. La única diferencia con las condiciones de Wolfe es que no se le permite a la derivada $\phi'(\alpha_k)$ ser positiva. Por lo tanto, se excluye a puntos que están lejos de puntos estacionarios de ϕ .