

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**SIMULACION NUMERICA DE LA CIRCULACION
BAROTROPICA EN LA BAHIA DE TODOS SANTOS, B. C.**

**T E S I S
MAESTRIA EN CIENCIAS**

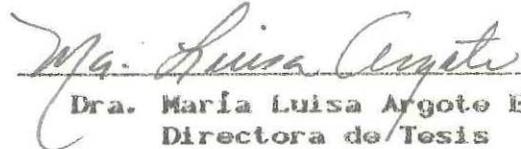
FRANCISCO JOSE GAVIDIA MEDINA

Ensenada, Baja California, 4 de noviembre de 1988.

RESUMEN de la tesis de Francisco José Gavidia Medina, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOLOGIA con opción en OCEANOGRAFIA FISICA. Ensenada, Baja California, México. Noviembre de 1988.

SIMULACION NUMERICA DE LA CIRCULACION BAROTROPICA
EN LA BAHIA DE TODOS SANTOS B. C.

Resumen aprobado por:


Dra. María Luisa Argote Espinoza.
Directora de Tesis

Se simulan algunos aspectos de la circulación de la Bahía de Todos Santos resolviendo las ecuaciones de movimiento integradas verticalmente por medio de un modelo numérico hidrodinámico (M.N.H.) de dos dimensiones. En particular se analiza el comportamiento de: la onda de marea, la circulación residual inducida por las corrientes de marea, la circulación inducida por el viento y el efecto de la Corriente de California sobre la circulación en la bahía.

Los resultados sugieren que la circulación en la bahía es controlada principalmente por el viento, con un transporte por ancho unitario del orden de 10^{-1} m²/s, mientras que el transporte residual inducido por la marea es del orden de 10^{-3} m²/s. En general el esfuerzo del viento produce flujo paralelo a la línea de costa, con la dirección de la componente del viento paralela a la misma. En esta zona costera se presentan las velocidades máximas. En zonas más profundas, alejadas de la costa, el flujo tiende a desviarse hacia la derecha de la dirección del viento, por el efecto de rotación de la tierra. La onda de marea presenta un carácter estacionario, como resultado de que dada la débil disipación por fricción en el fondo, durante un ciclo de marea gran parte de la energía se propaga y se refleja en la pared interior. El efecto de la Corriente de California se restringe a una zona, cercana a la conexión Noroeste de la bahía con el mar abierto. Aparentemente, la isóbata de 40 m delimita la zona de influencia de la corriente.

Las características de la circulación indicadas por el reducido número de mediciones directas de corrientes en la bahía, concuerdan con los resultados obtenidos con el modelo. Esto permite afirmar que los resultados de la modelación reproducen los rasgos principales en la circulación de la bahía.

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y
DE EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**DIVISION DE OCEANOLOGIA
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFIA FISICA**

**SIMULACION NUMERICA DE LA CIRCULACION BAROTROPICA
EN LA BAHIA DE TODOS SANTOS B. C.**

TESIS

**que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para
obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:**

FRANCISCO JOSE GAVIDIA MEDINA

Ensenada, Baja California, 4 de noviembre de 1988

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:



Dra. María Luisa Argote Espinoza, Director del Comité



Dr. Miguel Fernando Lavín Peregrina, Miembro del Comité



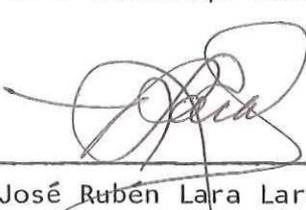
Dr. José Luis Ochoa de la Torre, Miembro del Comité



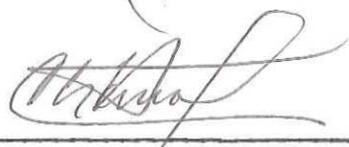
M.C. Jesús Manuel Figueroa Rodríguez, Miembro del Comité



M.C. José Guadalupe Acosta Chang, Miembro del Comité



Dr. José Rubén Lara Lara, Director de la División de Oceanología



M.C. José María Robles Pacheco, Jefe del Departamento de Oceanografía Física



M.C. Cuauhtémoc Nava Button, Director Académico

Tesis presentada en Noviembre 04, 1988

DEDICATORIA

A Yanira Almó

A María

A mis padres y hermanos

AGRADECIMIENTOS

A la Dra. María Luisa Argote, por su dirección y apoyo en el desarrollo de la presente tesis.

A los miembros del comité de tesis, Dr. José Luis Ochoa, Dr Miguel Fernando Lavín Peregrina, M.C. Manuel Figueroa y M.C. Jesús Guadalupe Acosta Chang, por sus comentarios y críticas al escrito de la tesis.

Al M.C. José María Robles Pacheco, por su apoyo en el desarrollo del presente trabajo y durante toda mi estancia en el CICESE.

Al Sr. José María Rodríguez, dibujante del CICESE, por su colaboración en el diseño de todo el material gráfico de la tesis.

Al CONACyT y CICESE como instituciones, por la ayuda económica.

A las personas mencionadas, y a todos aquellos que durante estos tres años y medio me brindaron su amistad.

CONTENIDO

Página

I	INTRODUCCIÓN	1
	I.1 Descripción y trabajos previos sobre la hidrodinámica en la bahía	2
	I.2 Planteamiento del problema	5
	I.3 Descripción del trabajo	7
II	MODELO	8
	II.1 Introducción	8
	II.2 Problema de contorno	9
	II.3 Solución numérica aproximada al problema de contorno	13
III	RESULTADOS	24
	III.1 Introducción	24
	III.2 Comportamiento de la marea	24
	III.2.1 Comparación entre el comportamiento predicho y el observado	31
	III.2.2 Resumen	33
	III.3 Corriente residual inducida por la marea	36
	III.3.1 Velocidad de transporte residual	38
	III.3.2 Resumen	39
	III.4 Corrientes de deriva	43
	III.4.1 Rapidez de la corriente de deriva	56
	III.4.2 Comparación entre la corriente de deriva calculada y mediciones de campo	58
	III.4.3 Resumen	62

CONTENIDO (continuación)

	<u>Página</u>
III.5 Efecto de la Corriente de California	64
III.5.1 Comparación entre la Corriente de California simulada y mediciones directas de corrientes	65
III.5.2 Resumen	67
IV DISCUSION Y CONCLUSIONES	68
LITERATURA CITADA	82
APENDICE: Integración vertical de las ecuaciones de movimiento	88

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1	Localización de la Bahía de Todos Santos, al NW de la Península de Baja California. En la gráfica se incluye la batimetría en m. Se indica la localización del mareógrafo del puerto de Ensenada, de un anemómetro en El Ciprés, de un correntómetro frente a la barra del estero y de un correntómetro al Norte de las islas.	3
2	Esquema del sistema físico. Aparecen representados el esfuerzo en la superficie (τ^s); el esfuerzo en el fondo (τ^f); la descarga de la corriente de California (Q); y la elevación en la frontera abierta (η).	13
3	Malla espacio-temporal. El Δx y Δy es de 10^3 m, el Δt es de 8.94 s. Los valores de U , V , η son calculados en tres puntos distintos, y en la integración en tiempo, U y V se calculan primero y η un $\Delta t/2$ después. Tomado de Hunter (1980).	16
4	Rejilla. Tiene un total de 506 cuadros de los cuales 407 son de agua. Se indican las barreras que representan los bajos al extremo de Punta Banda, y el rompeolas en el puerto de Ensenada, la frontera superior en donde se prescribió la Corriente de California, las secciones de 3 Km en donde se calculó la rapidez de la corriente de deriva y el área frente al Sauzal de Rodríguez donde se calculó el I.S.C.	17
5	Mapa cotidal de la M_2 frente a la costa occidental de México. La amplitud viene dada en cm y la fase en grados referidos al TMG. Tomado de Godin, et al. (1980).	21
6	Amplitud de la elevación para la M_2 . Las unidades son cms. Se señala la ubicación del mareógrafo del puerto de Ensenada.	26

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
7 Fase de la elevación para la Mz. Las unidades son grados referidos al tiempo local. Se señala la ubicación del mareógrafo del puerto de Ensenada.	27
8 Semieje mayor de la elipse para la Mz. Las unidades son cm/s. Se señala la ubicación del correntómetro al Sur de la bahía.	28
9 Contornos del semieje mayor de la elipse para la Mz. Las unidades son cm/s. Se señala la ubicación del correntómetro al Sur de la bahía.	30
10 Excentricidad de la elipse para la Mz. Si es igual a cero la corriente describe una recta, y si es igual a uno, un círculo. El signo menos indica que la rotación es a favor de las manecillas del reloj. Se señala la ubicación del correntómetro al sur de la bahía	32
11 Comparación de las elipses. a) observada, b) calculada. La orientación está referida al Este, y la fase al tiempo local.	34
12 Velocidad de la corriente residual inducida por la marea (\tilde{V}_R). Las unidades son cm/s.	40
13 Velocidad del transporte residual inducido por la marea (\tilde{V}_T). Las unidades son cm/s.	41
14 Corriente de deriva para un viento del NW de 5 m/s. Las unidades son cm/s. Se señala la ubicación del correntómetro y del anemómetro. La flecha indica la dirección del viento.	45
15 Corriente de deriva para un viento del W de 5 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.	46

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
16 Corriente de deriva para un viento del N de 5 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.	47
17 Elevación de la superficie del mar para un viento del NW de 5 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.	48
18 Elevación de la superficie del mar para un viento del W de 5 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.	49
19 Elevación de la superficie del mar para un viento del N de 5 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.	51
20 Corriente de deriva para un viento del S de 1 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.	52
21 Corriente de deriva para un viento del SW de 1 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.	53
22 Corriente de deriva para un viento del E de 10 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.	54
23 Elevación de la superficie del mar para un viento del E de 10 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.	55
24 Flujo inducido por una corriente prescrita en la frontera superior, con velocidad $V = -0.1 \bar{h}/h_i$ m/s, $U = 0$. Las unidades son cm/s. Se señala la ubicación del arreglo de correntómetros al NW de las islas.	66

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura

Página

- 25 Esquemas de los mecanismos de generación de la circulación residual. a) conservación de vorticidad potencial; b) gradiente de la fricción por gradiente de la rapidez de la corriente de marea; c) gradiente de la fricción por gradiente de la profundidad normal a la dirección de la corriente de marea. Tomado de Robinson (1983).

72

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla</u>	<u>Página</u>
I Entradas para el algoritmo de Hunter (1980), utilizadas en la simulación numérica de la circulación barotrópica en la Bahía de Todos Santos.	23
II Valores promedios de la rapidez en secciones de 3 Km, obtenidos de la salida del modelo para los diferentes vientos. Las secciones se indican en la figura 4. Los valores entre paréntesis indican la profundidad promedio de cada una de las secciones. La magnitud del esfuerzo del viento se calcula con la relación 13.	57
III Corriente de deriva obtenida a partir de dos meses de datos de un correntómetro ubicado en la Jolla (Fig. 1) y la calculada a partir de la salida del modelo para un viento sinóptico que representa los vientos observados en El Ciprés (véase texto).	60

SIMULACION NUMERICA DE LA CIRCULACION BAROTROPICA EN LA BAHIA DE TODOS SANTOS B. C.

I INTRODUCCION

El estudio de la hidrodinámica en cuerpos de agua costeros es necesario porque además de permitir entender el porqué y como de la circulación, tiene aplicaciones en otras áreas de estudio. Por ejemplo al mar van a parar gran cantidad de contaminantes (aguas negras, fertilizantes, desechos de industrias) y su tiempo de permanencia en un área depende del movimiento del agua (horizontal y vertical). Otro ejemplo es el cultivo de especies marinas en balsas. Las larvas de mejillón y ostión son transportadas por las corrientes, por lo que para decidir en que puntos conviene colocar las balsas de cultivo es recomendable hacer un estudio previo de la circulación.

La componente barotrópica de la circulación en cuerpos de agua costeros puede ser descrita mediante las ecuaciones de movimiento integradas verticalmente. Para resolver estas ecuaciones es posible emplear modelos numéricos hidrodinámicos. El uso de este procedimiento ha ido en aumento durante los últimos años debido al mejoramiento de los sistemas de cómputo. Actualmente tiene la ventaja de permitirnos trabajar con una representación más real de la batimetría y la configuración de la línea de costa, lo cual es

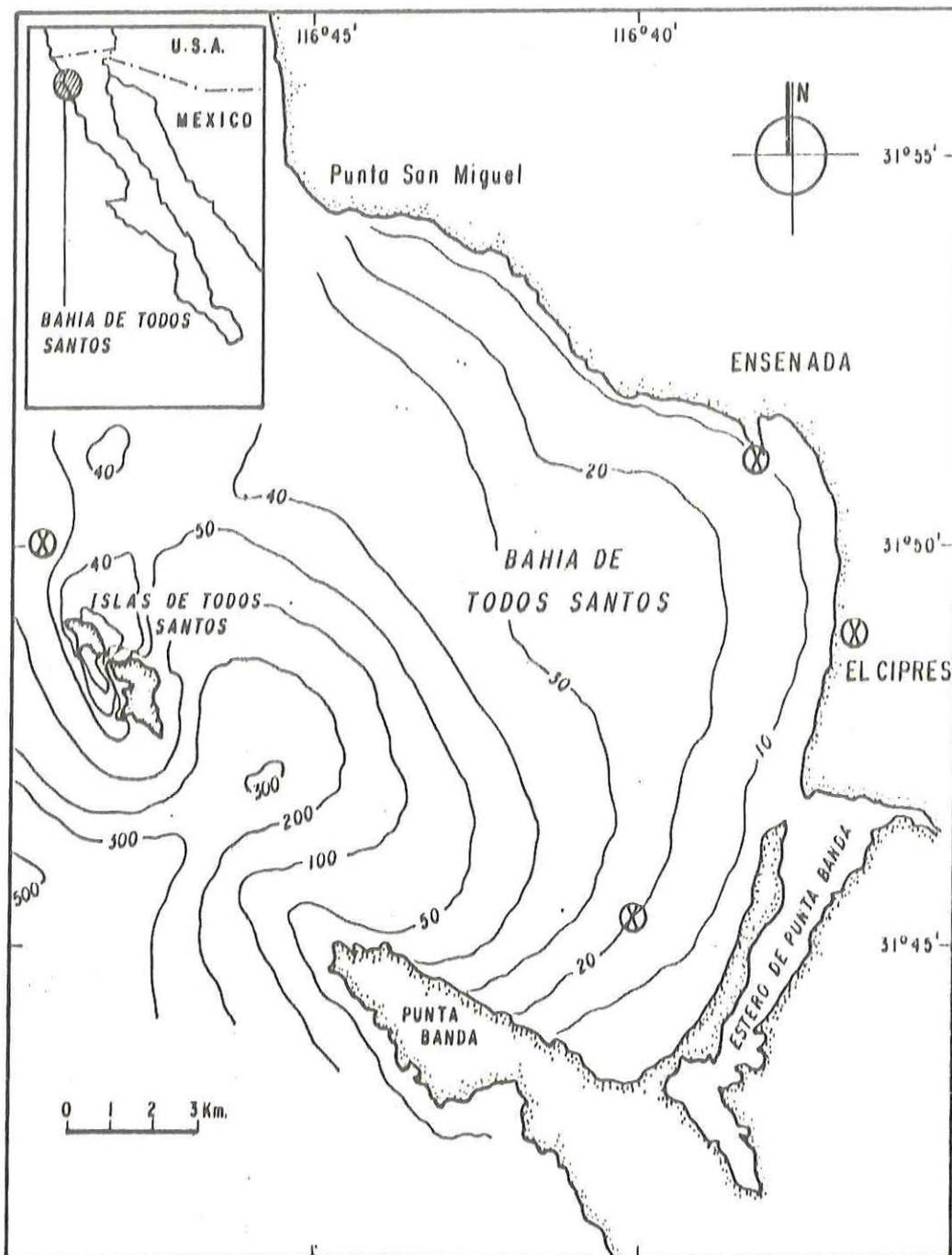


Figura 1. Localización de la Bahía de Todos Santos, al NW de la Península de Baja California. En la gráfica se incluye la batimetría en m. Se indica la localización del mareógrafo del puerto de Ensenada, de un anemómetro en El Ciprés, de un correntómetro frente a la barra del estero y de un correntómetro al Norte de las islas.

muy importante, sobre todo cuando se estudian cuerpos de agua someros y costeros, donde la circulación barotrópica está fuertemente determinada por su interacción con el lecho marino.

La hidrodinámica en la Bahía de Todos Santos ha sido estudiada a partir de mediciones directas. En el presente trabajo se simula la circulación barotrópica mediante un modelo numérico.

I.1 Descripción y trabajos previos sobre la hidrodinámica de la bahía

La Bahía de Todos Santos está localizada al Noroeste de México, en la costa occidental de la Península de Baja California. Es una cuenca somera con una batimetría suave a excepción de un cañón que presenta una profundidad máxima de 350 m. La profundidad media sin considerar el cañón, es de 30 m. Las islas de Todos Santos están ubicadas 15 Km mar afuera (Fig. 1).

Un primer estudio sobre las características de la circulación en la bahía es el de Argote, et al. (1975), quienes a partir de las distribuciones horizontales de temperatura y salinidad, señalaron que la circulación superficial para vientos provenientes del Norte, puede presentar flujos paralelos a la costa. Un flujo dirigido desde Punta San Miguel al interior de la bahía, y el otro desde

Punta Banda a la barra del estero de Punta Banda. No obstante que la validez de este método para estimar la circulación es discutible, sobre todo porque las mediciones no son simultáneas, estos rasgos han sido encontrados con mediciones superficiales (1 m) con cuerpos de deriva (Alvarez et al., 1988), basados en 30 experimentos realizados durante el período 1980-1986.

La mayoría de estas observaciones se realizaron en la franja costera (10 Km de la costa) y el tiempo promedio de seguimiento de los cuerpos de deriva fue de 12 hr. Estos autores indican la existencia de flujos paralelos a la costa con vientos estacionarios del NW y del W. La rapidez promedio de la corriente superficial para los meses de marzo a agosto fue de 15 cm/s, mientras que para los meses de septiembre a enero el valor promedio fue de 5 cm/s. En este trabajo también se señala que las trayectorias siguen la dirección del viento, y cerca de la línea de costa la orientación de ésta.

El efecto de la línea de costa sobre la dirección de la corriente también se refleja en las mediciones eulereanas que reportó Ocampo (1983). Las mediciones se realizaron al sur de la bahía durante un período de 4 meses (febrero, mayo de 1982), con un correntómetro a media agua anclado sobre la isóbata de 20 m (Fig 1). Analizando las observaciones se encontró una tendencia a seguir la orientación de la línea de costa dado que alrededor del 50 % de las mediciones tuvieron direcciones entre los 40° y 140° N, que es la dirección

aproximada de la barra del estero y de Punta Banda respectivamente. Los promedios mensuales de la rapidez de la corriente fueron de 5 ± 0.1 cm/s.

Otro antecedente sobre la hidrodinámica de la bahía son las mediciones realizadas a tres niveles (25, 42, 60 m) sobre la isóbata de 75 m, al Norte de las islas (Fig. 1), durante un año, desde octubre de 1978 a octubre de 1979 (Barton, 1985). Este autor encontró que el flujo medio en la capa superficial (25 m) fue de 2.19 ± 17.87 cm/s, dirigido hacia el ecuador. En la capa de fondo (42 y 60 m) el flujo medio fue de 2.42 ± 9.50 cm/s con dirección hacia los polos. Durante el período de mediciones el viento promedio provino del Norte. Estos resultados son indicativos de la presencia de la Corriente de California y de la contracorriente, en las inmediaciones de la bahía. Es evidente que estas mediciones como las reportadas por Ocampo (1983), únicamente dan información puntual sobre la circulación en esta zona.

I.2 Planteamiento del problema

El propósito del presente trabajo es estudiar la hidrodinámica de la bahía empleando un modelo numérico. Para el efecto se utiliza un modelo numérico que considera un sistema homogéneo en la vertical, esto es sin tomar en cuenta la estratificación que existe en el océano real. Con este modelo de una capa, lo que se calcula es el movimiento

integrado de toda la columna de agua, que es una aproximación de la circulación total.

En los antecedentes se menciona que el agente externo que controla la circulación es el viento. Otro agente externo que actúa en cuencas someras es la marea de mar abierto. Esta determina la corriente de marea que a su vez induce un flujo residual, ambos importantes en la circulación de cuerpos de agua costeros.

Los trabajos previos establecen la distribución de corrientes para la bahía con ciertas direcciones de viento. El campo de viento en regiones costeras está compuesto del sistema de brisas mar-tierra y del viento sinóptico. La dirección y rapidez del viento sinóptico puede variar estacionalmente respondiendo a las variaciones en el campo de presión atmosférica.

Frente a la bahía y a todo lo largo de la costa occidental de Norteamérica, se localiza el sistema de la Corriente de California. Aunque las mediciones en la boca de la bahía presentan el perfil vertical de velocidad de dicho sistema, no se sabe si el efecto es localizado o se generaliza a toda la extensión de la bahía.

Tomando en cuenta los antecedentes el objetivo de la tesis fue simular numéricamente algunos aspectos de la circulación barotrópica como: la corriente de marea, la corriente residual inducida por ésta, la corriente de deriva generada por los vientos sinópticos locales y el efecto de la

Corriente de California sobre la bahía.

I.3 Descripción del escrito

En el segundo capítulo, titulado MODELO, se describe la representación matemática del modelo desde las ecuaciones primitivas con sus aproximaciones, y las condiciones iniciales y en la frontera. Así mismo se describe el algoritmo utilizado para calcular la solución numérica al problema de contorno, como sus entradas específicas para la Bahía de Todos Santos.

En el tercer capítulo, titulado RESULTADOS, se presenta la descripción de la circulación barotrópica. La descripción se divide en cada uno de los aspectos de la circulación que fueron simulados. Para cada uno de ellos se especifican las entradas del algoritmo. La circulación calculada se compara con mediciones directas, para verificar la confiabilidad de la simulación.

En el cuarto capítulo, titulado DISCUSION Y CONCLUSIONES, se discute y fundamenta las características más sobresalientes de la circulación barotrópica de la bahía. Se especifica bajo qué condiciones otro cuerpo de agua costero podría presentar una circulación similar. Así mismo se relaciona la circulación a problemas o fenómenos que se presentan en la bahía. Para terminar se señalaron posibles trabajos que podrían complementar lo aquí obtenido, para un mejor entendimiento de la hidrodinámica de la bahía.

II MODELO

II.1 Introducción

La circulación barotrópica de la Bahía de Todos Santos se simuló utilizando un modelo numérico hidrodinámico de una capa. En particular se analizó: el comportamiento de la onda de marea en el interior de la bahía, que resulta al excitar la bahía con una señal de marea, en su conexión con el mar abierto. Así mismo se calculó el transporte residual de marea sobre un período de la señal de marea. También se simuló la circulación inducida por el forzamiento de vientos uniformes y estacionarios. Otro aspecto que se analizó con el modelo fue el efecto de la Corriente de California sobre la circulación de la bahía.

Para calcular la solución numérica se emplea un algoritmo que utiliza esquemas de integración en diferencias finitas y un procedimiento explícito. El algoritmo requiere como entradas: la geometría de la cuenca, las condiciones en la frontera e iniciales, y una serie de constantes como el tamaño de la malla (Δx , Δy), el intervalo de integración (Δt), y los coeficientes de los términos de las ecuaciones. La solución numérica se comparó con mediciones de campo para verificar qué tan bien simula la circulación barotrópica de la bahía.

II.2 Problema de contorno

El modelo se basa en la teoría de aguas someras (TAS), la cual describe la dinámica de ondas largas ($\lambda \gg h \rightarrow 0$, donde λ es el vector número de onda y h es la profundidad). El sistema de ecuaciones primitivas es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + f \hat{k} \times \vec{v} = -g \nabla \eta + \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{v}), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

donde:

- t coordenada temporal.
- \vec{v} vector velocidad con componentes u, v, w .
- \hat{k} vector unitario en la dirección z .
- η elevación de la superficie libre.
- f parámetro de Coriolis.
- g aceleración de la gravedad de la tierra.
- ν coeficiente de viscosidad turbulenta.

En las ecuaciones (1)-(2), se han hecho las siguientes aproximaciones y suposiciones: un fluido incompresible, es decir que los cambios de la densidad con la presión son despreciables, lo cual es válido para movimientos con rapidez de fase menor a la velocidad del sonido. La aproximación hidrostática, que hace posible deducir la presión con la elevación, esto se satisface cuando se estudian fenómenos de escala horizontal mucho mayor que la vertical. La aproximación

al plano- f , donde f tiene un valor constante, se cumple porque la bahía es lo suficientemente pequeña como para que la variación de f con la latitud geográfica no tenga efectos importantes sobre el movimiento.

Las ecuaciones en el problema de contorno fueron las ecuaciones (1)-(2) promediadas en la vertical (modo barotrópico). Originalmente, la velocidad horizontal (u, v) puede depender de la coordenada vertical z porque los esfuerzos tangenciales que actúan sobre el plano x - y pueden generar una estructura vertical. Cuando se promedia en la vertical se obtiene un vector (U, V) que no depende de z y los esfuerzos en el fondo y en la superficie son considerados como fuerzas de cuerpo. Los esfuerzos tangenciales laterales, que actúan en los planos z - x , z - y generan estructuras horizontales que están restringidas a la capa límite lateral. En el apéndice se explica detalladamente como se hizo el promediado vertical de las ecuaciones (1)-(2).

Las condiciones iniciales y en la frontera que se impusieron fueron: reposo en todo el dominio, deslizamiento libre en la costa y una señal periódica en la conexión con el mar abierto. Marchuk, et al., (1972) demostraron que un problema de contorno con ecuaciones de tipo parabólico, como es nuestro caso, está bien definido si la condición en toda la frontera (abierta y cerrada) es la velocidad. Dado que en muchos casos, como es el del presente trabajo, no se cuenta con datos de velocidad para imponerlos como condiciones en la

frontera abierta, se impone como condición la elevación. A partir de las elevaciones, se calculan numéricamente las velocidades, las cuales se imponen en las celdas que forman la frontera con el mar abierto.

En síntesis el problema de contorno que se resuelve es:

Ecuaciones:

$$\partial_t U = -U \partial_x U - V \partial_y U + fV - g \partial_x \eta + \frac{\tau_x^a - \tau_x^f}{\rho_m (\eta + h)} + A(\partial_{xx} U + \partial_{yy} U), \quad (3)$$

$$\partial_t V = -U \partial_x V - V \partial_y V - fU - g \partial_y \eta + \frac{\tau_y^a - \tau_y^f}{\rho_m (\eta + h)} + A(\partial_{xx} V + \partial_{yy} V), \quad (4)$$

$$\partial_t \eta = -\partial_x [(\eta + h)U] - \partial_y [(\eta + h)V], \quad (5)$$

Condiciones iniciales:

$$U = V = \eta = 0, \quad (6)$$

$$\forall (x, y) \in D \wedge t = 0$$

Condiciones en la frontera:

$$\tilde{v} \cdot \hat{n} = \partial_{\hat{n}} (\tilde{v} \cdot \hat{p}) = 0, \quad (7)$$

$$\forall (x, y) \in \Gamma_o \wedge t \geq 0$$

$$\eta = \eta_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (8)$$

$$\forall (x, y) \in \Gamma_m \wedge t \geq 0$$

donde:

- U, V componentes horizontales de la velocidad promediada en la vertical.
- x, y coordenadas cartesianas de un sistema de referencia de mano derecha.
- τ_x^s, τ_y^s componentes horizontales del esfuerzo en la superficie.
- τ_x^f, τ_y^f componentes horizontales del esfuerzo en el fondo.
- ρ_m densidad media del mar.
- $-h$ profundidad de la columna de agua medida hacia abajo.
- A coeficiente de fricción lateral.
- D dominio del problema (no incluye las fronteras).
- Γ_o frontera con la costa.
- Γ_m frontera con el mar abierto.
- \hat{n}, \hat{p} vectores unitarios en la dirección normal y perpendicular a Γ_o .
- η_0 amplitud de la elevación en Γ_m .
- ω frecuencia de la armónica.
- δ fase de la elevación en Γ_m .

Una condición que debe satisfacerse una vez que el sistema se ha estabilizado, es que el flujo neto a través de la frontera con el océano adyacente sea nulo durante un período de la armónica:

$$\int_0^T \int_0^L [(h+\eta)U \cos \alpha + (h+\eta)V \sin \alpha] ds dt = 0, \quad (9)$$

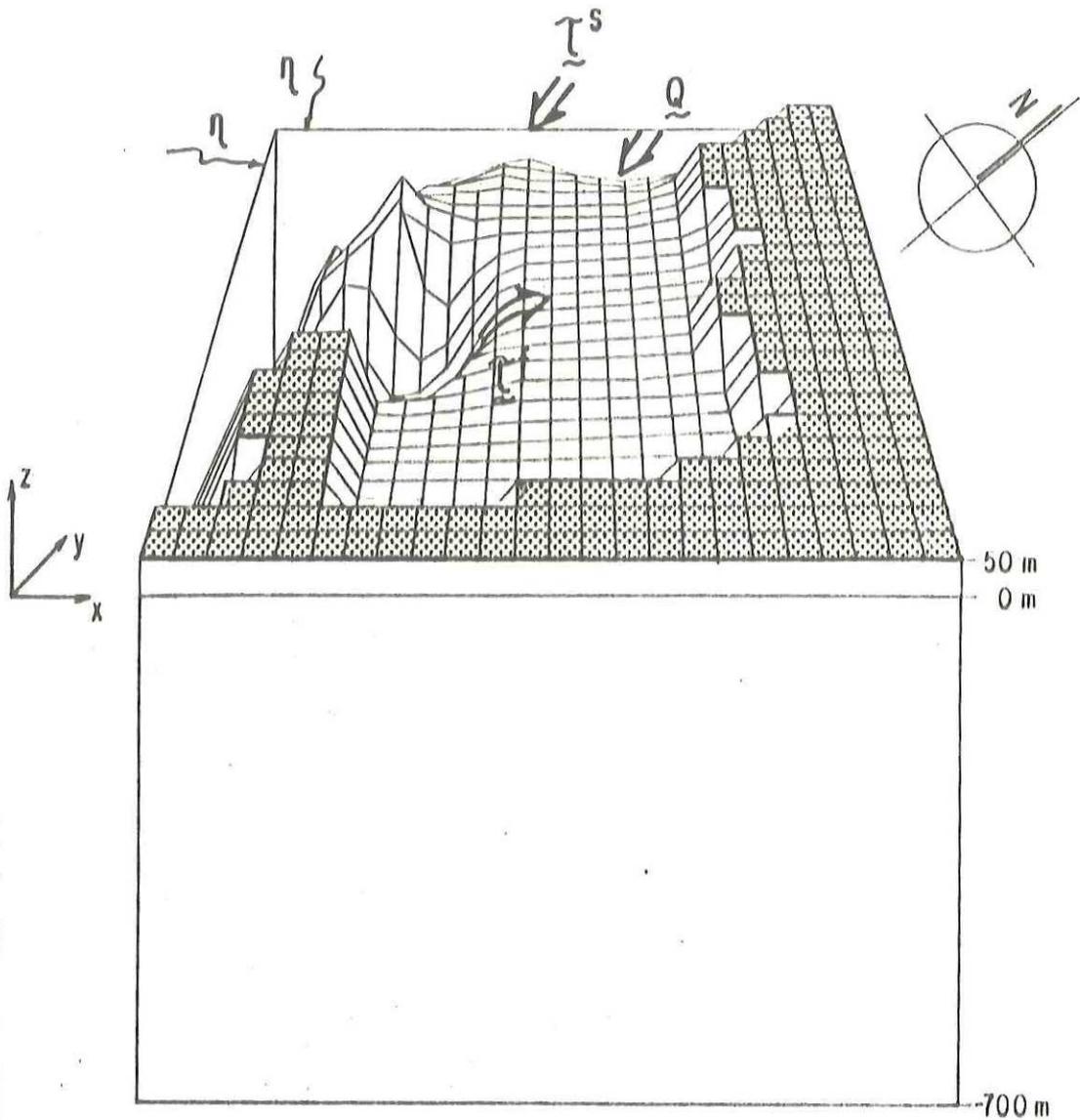


Figura 2. Esquema del sistema físico. Aparecen representados el esfuerzo en la superficie (τ^s); el esfuerzo en el fondo (τ^b); la descarga de la corriente de California (Q); y la elevación en la frontera abierta (η).

donde α es el ángulo que forma el eje x con la dirección normal a la frontera Γ_m , L es la longitud de esta frontera, y τ es el período de la armónica.

II.3 Solución numérica aproximada al problema de contorno

El algoritmo empleado para encontrar la solución numérica al problema de contorno fue desarrollado por Hunter (1980); la representación en diferencias finitas de las ecuaciones diferenciales se encuentra, por ejemplo, en Pingree y Maddock (1977).

Para asegurar la convergencia del algoritmo, son necesarias y suficientes las siguientes condiciones: que sea consistente esto es que el error al aproximar las derivadas parciales por diferencias finitas tiende a cero cuando Δx , Δy , $\Delta t \rightarrow 0$, y que sea estable es decir que los errores de truncamiento y redondeo disminuyan durante la integración; como establece el teorema de equivalencia enunciado por Lax y Richtmyer (1956). Como los esquemas del algoritmo (salto de rana y diferencias centradas), siguen un procedimiento explícito, la convergencia de la solución numérica se cumple si:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{g h_{\max} (\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2})}} \quad (10)$$

(criterio de Courant, Friedrichs, y Lewy, 1928).

La malla espacial es de tipo descentrada (Fig. 3), es decir que los valores de U , V y η son calculados en tres puntos distintos de cada celda. La resolución de la malla (Δx , Δy) es de 10^3 m.

La geometría de la cuenca se obtuvo sobreponiendo una rejilla con cuadros de 1 Km de lado, sobre el mapa batimétrico Todos Santos South 120-16-4 zona r-11 (1971). En cada cuadro se calculó la profundidad promedio y se asignó al centro del cuadro. La profundidad máxima (h_{max}) fue de 585 m, y el Δt escogido (8.94 s), satisface el criterio establecido en la relación 10. El eje vertical de la rejilla tiene una orientación de $304^\circ N$. Como parte de la geometría se incluyeron dos barreras: una para representar una serie de bajos al extremo de Punta Banda y la otra representando el rompeolas (Fig 4).

Como señal en la frontera con el mar abierto se usó una marea de tipo cooscilante porque en cuerpos costeros la marea es inducida casi en su totalidad por la marea externa (Godin, 1982).

Para decidir con que armónica representar a la marea se calculó la razón entre las amplitudes de la O_1 , K_1 con respecto a las amplitudes de la S_2 , M_2 , reportadas por Godin et al. (1980) para el mareógrafo del puerto de Ensenada. Se encontró un valor de 0.76 que corresponde a una marea mixta

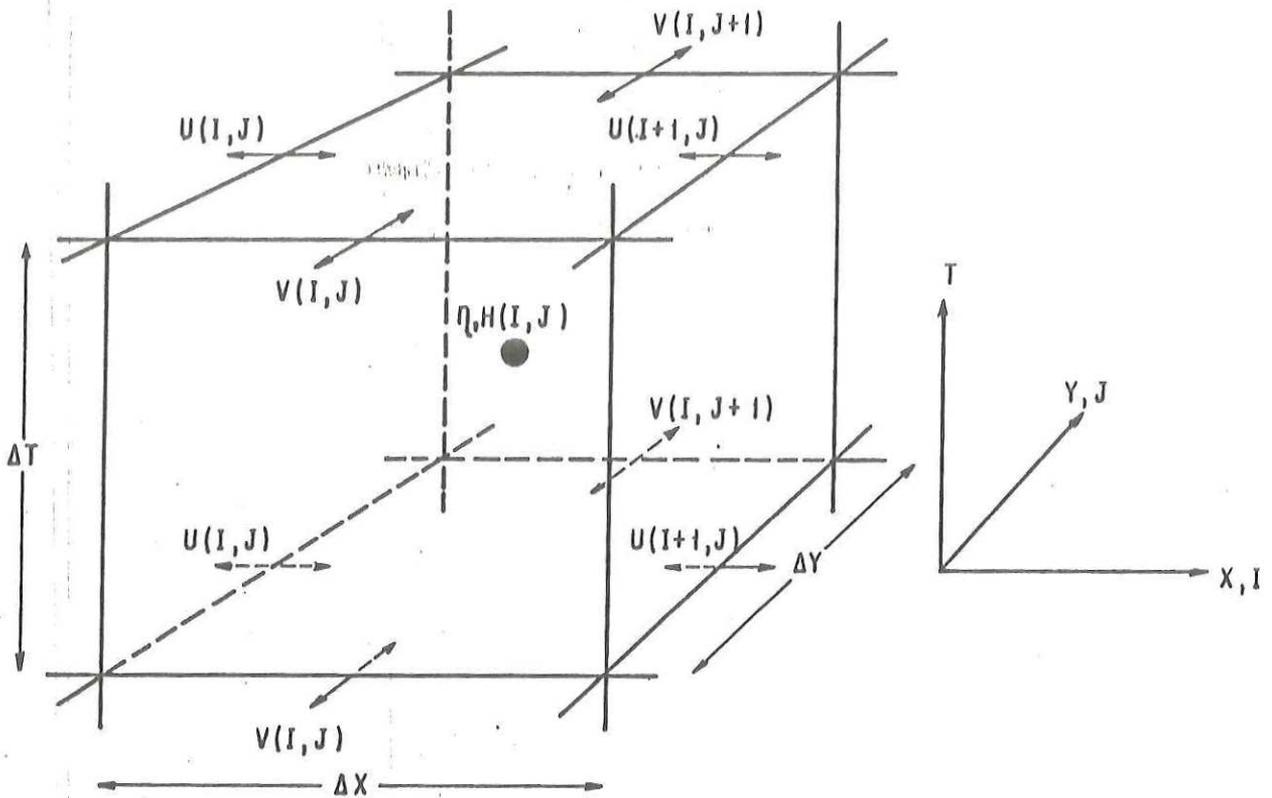


Figura 3. Malla espacio-temporal. El Δx y Δy es de 10^9 m, el Δt es de 8.94 s. Los valores de U , V , η son calculados en tres puntos distintos, y en la integración en tiempo, U y V se calculan primero y η un $\Delta t/2$ después. Tomado de Hunter (1980).

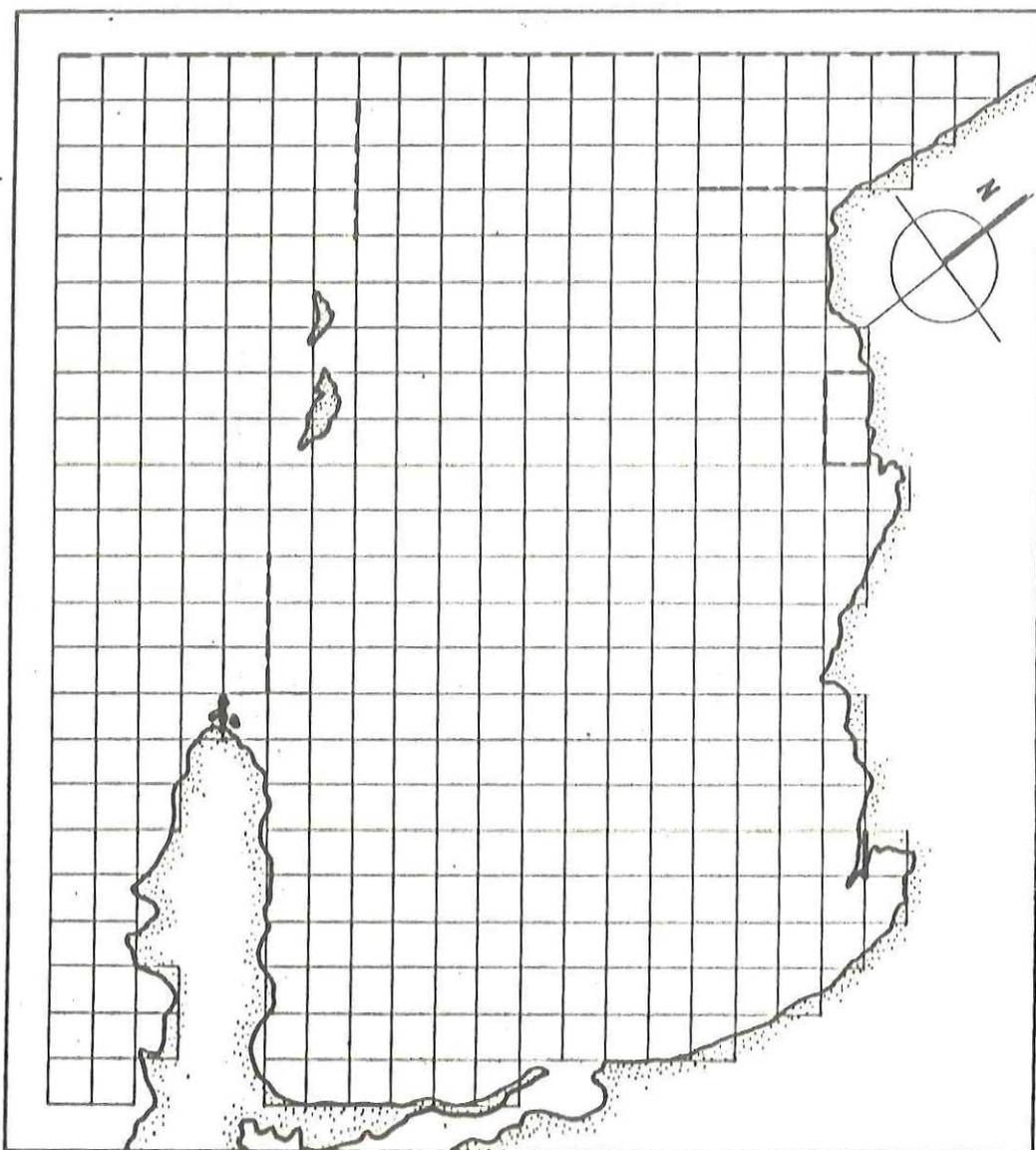


Figura 4. Rejilla. Tiene un total de 506 cuadros de los cuales 407 son de agua. Se indica: las barreras que representan los bajos al extremo de Punta Banda, y el rompeolas en el puerto de Ensenada, la frontera superior en donde se prescribió la Corriente de California, las secciones de 3 Km en donde se calculó la rapidez de la corriente de deriva y el área frente al Sauzal de Rodríguez donde se calculó el I.S.C.

principalmente semidiurna (Bowden, 1983). Por otra parte la armónica que contiene un mayor porcentaje de la energía potencial asociada a las cuatro armónicas principales resultó ser la M₂. Los porcentajes calculados con las amplitudes al cuadrado, como medida de la energía potencial fueron:

M ₂	55.60 %
K ₁	24.30 %
S ₂	10.05 %
O ₁	10.05 %

En base a lo anterior se decidió representar a la marea con la M₂ ($\eta_0 = 0.487$ m; $\omega = 1.4 \times 10^{-4}$ s⁻¹; $\delta = 265^\circ$ referida al tiempo local). Los valores de amplitud y fase se prescribieron en forma constante a lo largo de toda la frontera con el mar abierto porque como se observa en la figura 5, su variación es mínima en una distancia equivalente a la boca de la bahía (para 20 Km se estimó un cambio de 0.003 m y 0.7°).

A la frecuencia inercial f se le asignó un valor de 7.69×10^{-5} s⁻¹ que corresponde a la latitud media de la bahía de $\phi = 31^\circ 50'$ ($f = 2 \Omega \sin \phi$, donde $\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s, es la velocidad angular de la tierra). El coeficiente del término de fricción lateral fue de 10 m²/s, valor que se obtuvo de la relación (Salas de León, 1985):

$$A \approx \left| \frac{V}{\omega} \right| \Delta, \quad (11)$$

siendo $|\underline{V}|$ una velocidad típica esperada y Δ (Δx , Δy) la resolución de la rejilla.

El término de esfuerzo en el fondo se parametrizó usando la relación:

$$\underline{\tau}^f = \rho_m C_f \underline{V} |\underline{V}|, \quad (12)$$

donde ρ_m es la densidad media del agua de mar (1026 kg/m^3) y \underline{V} es la corriente promediada en la vertical. El valor de C_f fue de 3×10^{-3} (Ramming y Kowalik, 1980).

Estas fueron las entradas para la simulación de la corriente de marea y de la corriente residual inducida por la marea. Para simular la corriente de deriva además de las entradas mencionadas, se incluyó el esfuerzo en la superficie, parametrizado con la relación:

$$\underline{\tau}^s = \rho_a C_u \underline{W} |\underline{W}|, \quad (13)$$

donde ρ_a es la densidad media del aire (1.25 kg/m^3), C_u es un coeficiente de arrastre cuyo valor depende de la velocidad del viento y \underline{W} es el vector velocidad del viento. Para representar vientos de escala sinóptica se usó un viento uniforme y estacionario. Por escala sinóptica se entiende 100 Km o más espacialmente y semanas a meses temporalmente. Pavía y Reyes (1983), y Reyes et al. (1983) analizando registros de viento en diferentes localidades de la bahía encuentran algunas

características del viento sinóptico local. En base a sus conclusiones se trabajó con vientos del NW, W, N con rapidez de 5 m/s como representativos de verano y S, SW con rapidez de 1 m/s como representativos de invierno. Además de simular el viento sinóptico en dos estaciones del año, se simuló la condición Santana, que son vientos que provienen de tierra adentro transportando masas de aire calientes y secas. El viento con que se representó la condición Santana fue de 10 m/s proveniente del E. Los valores de $C_g \times 10^9$ que se utilizaron fueron 1.3, 1.1 y 1.3 para los vientos de 1, 5 y 10 m/s respectivamente (Phillips, 1977).

Para simular el efecto de la Corriente de California en la bahía, se prescribió una velocidad en la frontera NW con el mar abierto (Fig. 5). Las otras entradas fueron las mismas que para la simulación de la corriente de marea y residual de marea. Para decidir que velocidad prescribir, se tomaron en cuenta dos aspectos: un valor representativo de velocidad de la corriente y transporte constante a lo largo de la frontera. Gómez (1984) estimó, en base a cálculos geostroficados, que en las inmediaciones de la costa el flujo medio en la capa superficial (por arriba de los 100 m), tiene una rapidez de 10 cm/s con dirección SE. Por simplicidad se prescribió una velocidad orientada con el eje de la rejilla (la orientación de la rejilla fue $304^\circ N$), por lo que sus componentes fueron:

$$U = 0 \quad V_i = - \frac{\bar{h}}{h_i} \times 0.10 \text{ (m/s)}$$

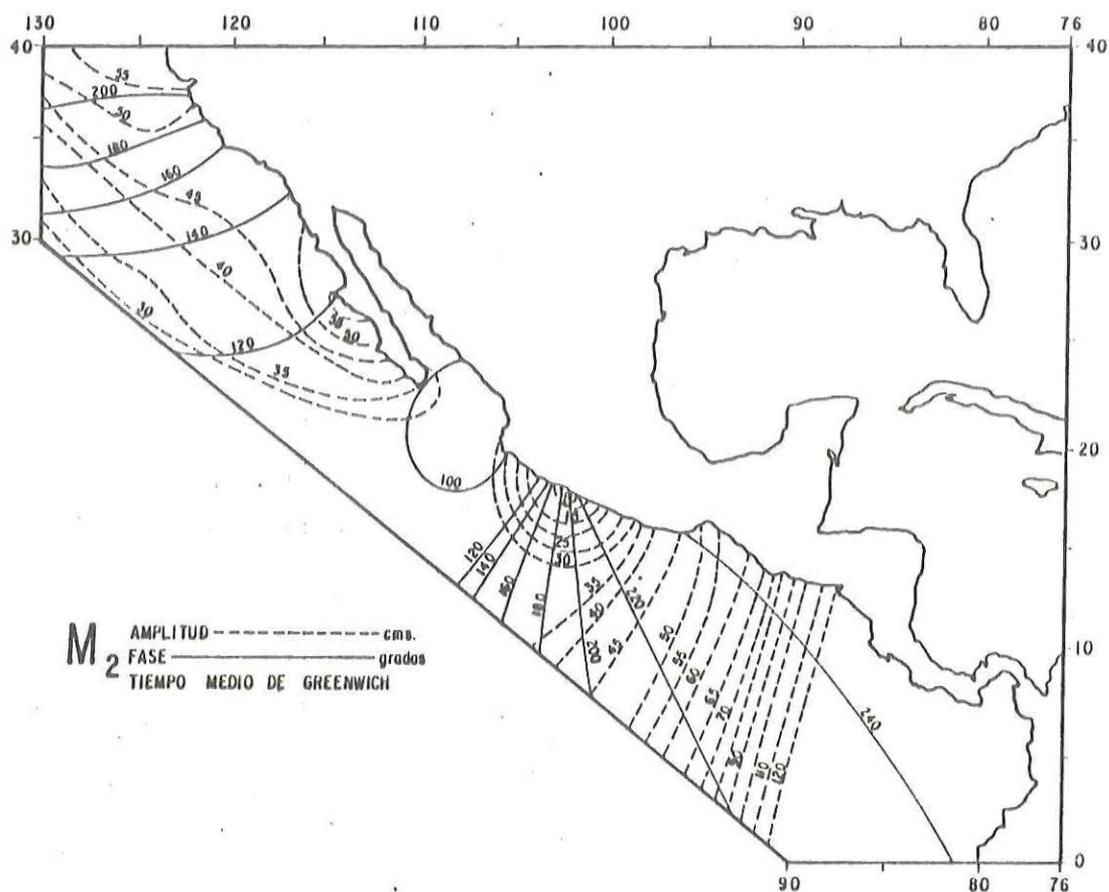


Figura 5. Mapa cotidal de la, M_2 frente a la costa occidental de México. La amplitud viene dada en cm y la fase en grados referidos al TMG. Tomado de Godin, et al. (1980).

donde:

\bar{h} profundidad promedio de la frontera NW ($\bar{h} = 178.8$ m).

h_t profundidad en cada celda de la frontera NW.

Tabla I. Entradas para el algoritmo de Hunter (1980), utilizadas en la simulación numérica de la circulación barotrópica en la Bahía de Todos Santos.

parámetro de coriolis	$f(\text{s}^{-1})$	7.60×10^{-5}
Intervalo en x de la malla	$\Delta x(\text{m})$	1×10^3
Intervalo en y de la malla	$\Delta y(\text{m})$	1×10^3
Intervalo en t de la malla	$\Delta t(\text{s})$	8.94
Densidad media del aire	$\rho_a(\text{kg/m}^3)$	1.25
Densidad media del mar	$\rho_m(\text{kg/m}^3)$	1026
Coeficiente de fricción en la superficie del mar	viento	C_s
	1 (m/s)	1.3×10^{-3}
	5 (m/s)	1.1×10^{-3}
	10 (m/s)	1.3×10^{-3}
Coeficiente de fricción en el fondo	C_f	3×10^{-3}
Coeficiente de fricción lateral	$A(\text{m}^2/\text{s})$	10
Amplitud de la elevación en la conexión bahía-mar	$\eta_o(\text{m})$	0.487
Fase de la elevación en la conexión bahía-mar	$\delta(\text{°})$	265
Frecuencia de la Mz	$\omega(\text{s}^{-1})$	1.4×10^{-4}

III RESULTADOS

III.1 Introducción

La simulación de la circulación barotrópica en la Bahía de Todos Santos, se obtuvo a partir de la solución numérica del problema de contorno descritos en el capítulo 2. La integración en tiempo partió ($t = 0$) del reposo y se prescribieron las condiciones en las fronteras en cada paso de tiempo (Δt). La integración se detuvo cuando la solución en un período de la Mz tendió a ser igual a la solución en el período anterior. Esto se logró en cinco períodos de la Mz, cuando la diferencia máxima de las variables calculadas (U, V, η), entre el cuarto y quinto ciclo fue de 2.5 %.

El flujo neto a través de la conexión con el mar abierto representó el 5×10^{-5} del volumen total ($4 \times 10^{10} \text{ m}^3$), por lo que se satisface la condición de flujo neto cero establecida en la relación 9. Obtenida la circulación barotrópica se comparó con mediciones directas para comprobar la confiabilidad de la predicción.

III.2 Comportamiento de la marea

El forzamiento de la marea externa se representó con una señal armónica en la conexión con el mar abierto como se

indicó en el capítulo 2.

Además de la corriente de marea se obtuvo la elevación de la onda de marea. Se aplicó análisis armónico a la solución numérica para encontrar la amplitud y fase de la elevación, y las características de la elipse de la corriente de marea (semieje mayor, orientación, fase, y la razón entre semiejes).

La amplitud de la elevación (Fig. 6) aumenta hacia el interior de la bahía, en un 0.4 % del valor prescrito en la frontera abierta, debido al apilamiento de agua cerca de la costa. Este apilamiento es resultado de la condición de que no hay flujo normal a través de ésta. El gradiente presenta una dirección W-E, la cual es la dirección de la onda de marea al entrar en la bahía.

La fase de la elevación es constante (Fig. 7), por lo que la marea se observa al mismo tiempo en cualquier punto de la bahía. Por otra parte se observa un desfase de aproximadamente $\frac{\pi}{2}$ con respecto a la fase de la elipse: la fase de la elevación es 265° y el valor promedio de la fase de la elipse es $359^\circ \pm 17^\circ$. Estas dos características definen el carácter estacionario de la onda de marea en la bahía, e indican que la disipación de energía por fricción es despreciable, y que la mayor parte de la energía de la onda se refleja en la costa.

El semieje mayor (Fig. 8) es perpendicular a las líneas de amplitud constante (Fig. 6), lo cual indica que el balance dinámico principal es entre el gradiente de presión y la fricción con el fondo, en la solución estacionaria ($\partial_t \equiv 0$).

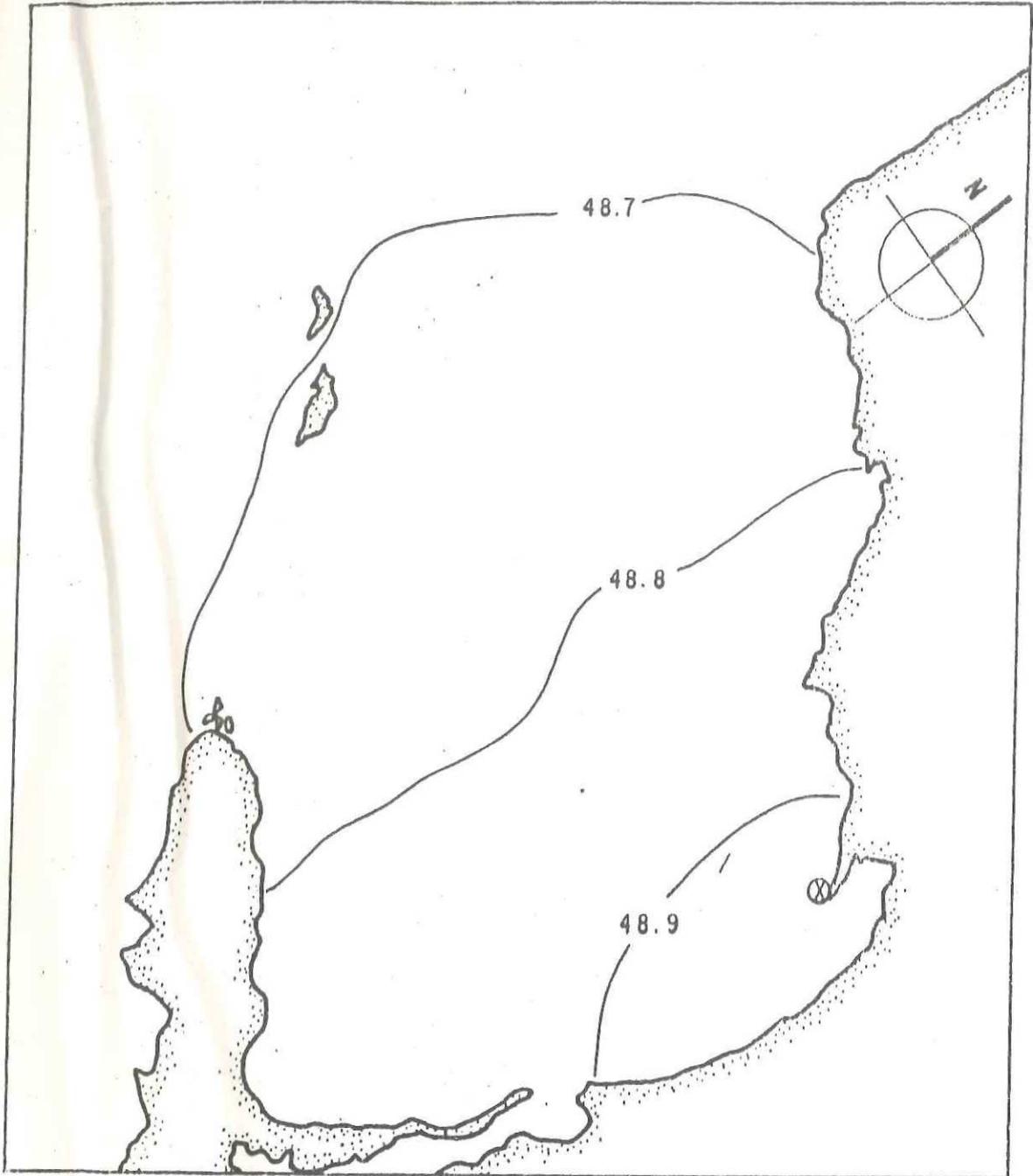


Figura 6. Amplitud de la elevación para la Mz. Las unidades son cm. Se señala la ubicación del mareógrafo del puerto de Ensenada.

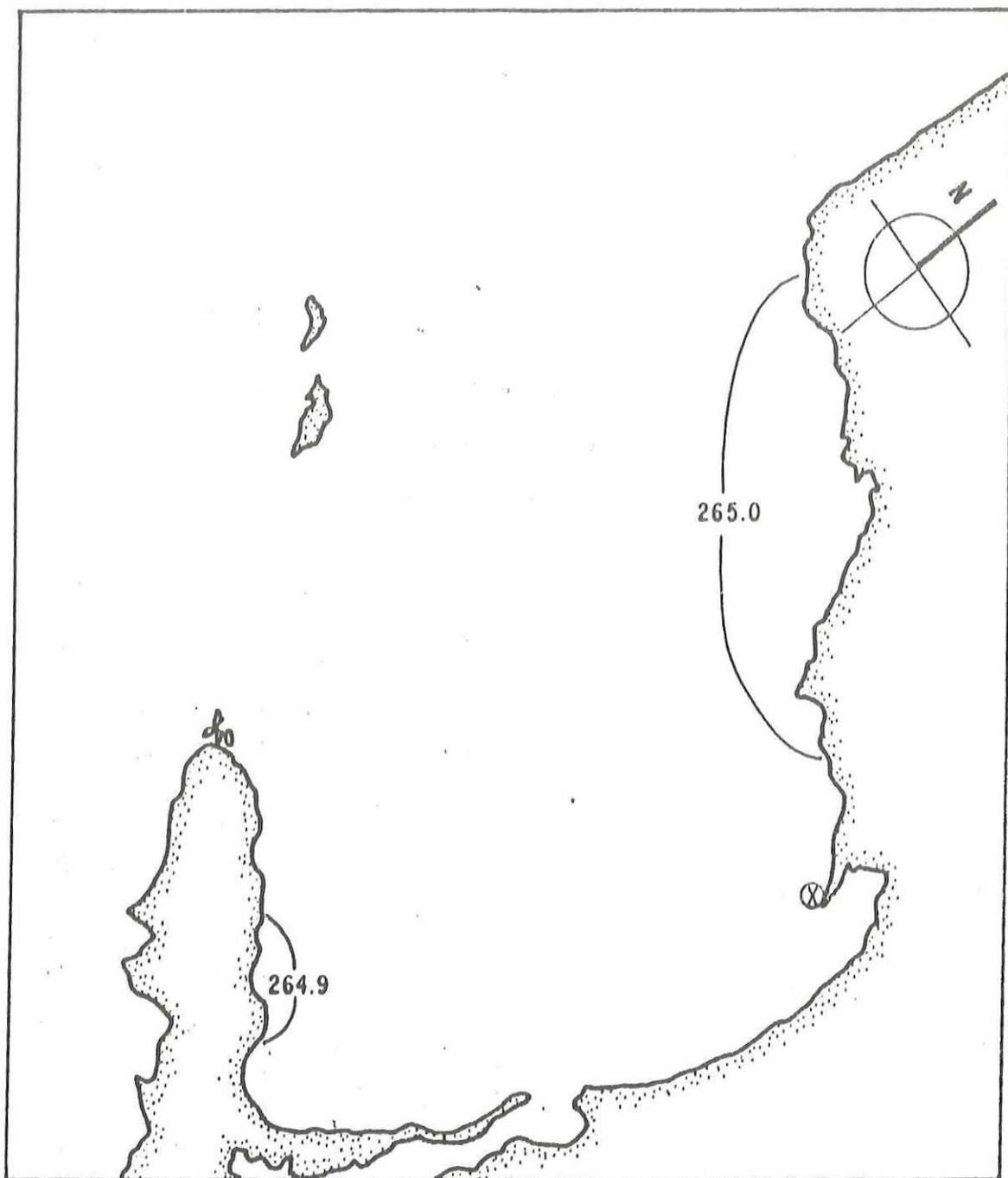


Figura 7. Fase de la elevación para la Mz. Las unidades son grados referidos al tiempo local. Se señala la ubicación del mareógrafo del puerto de Ensenada.

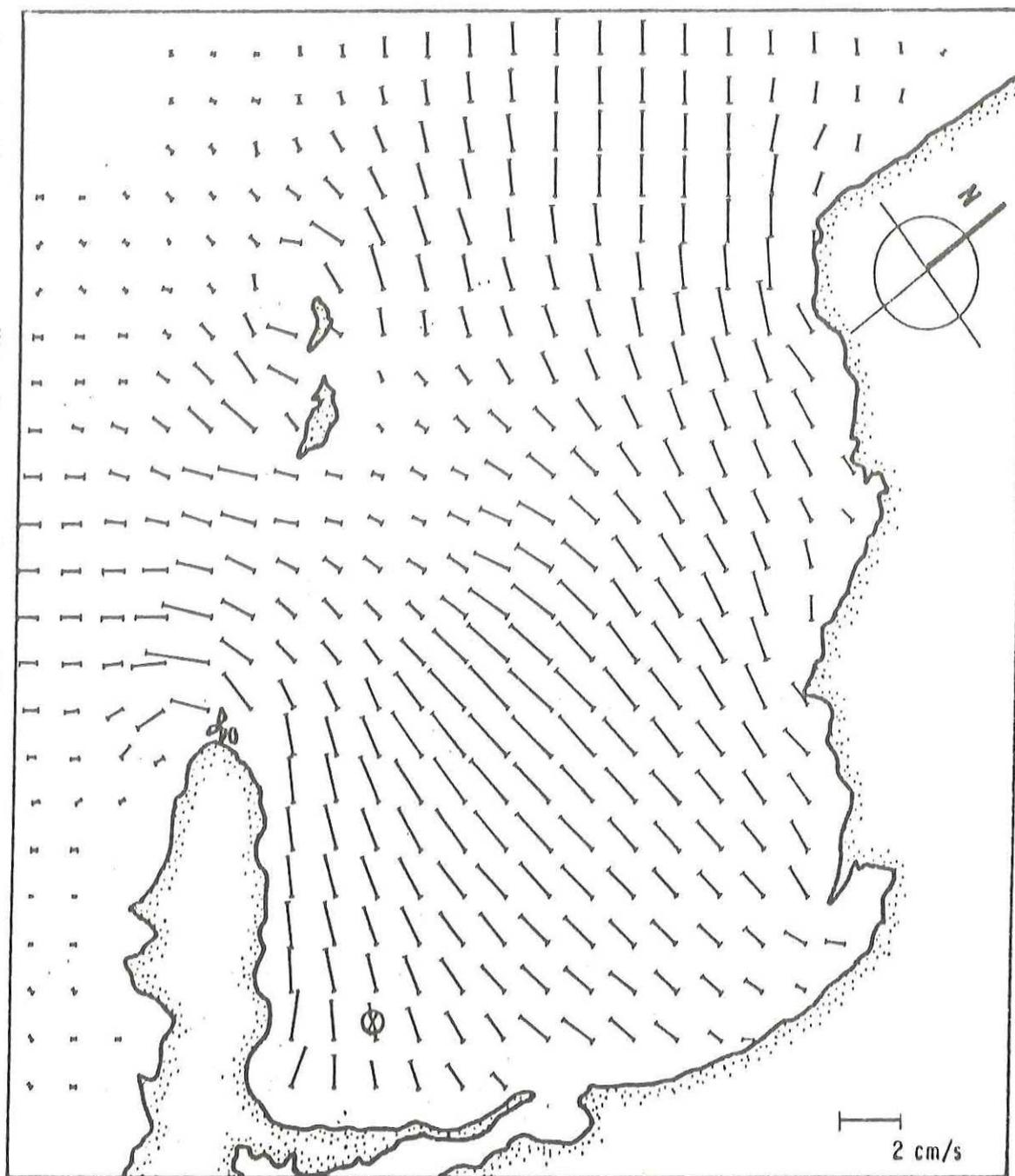


Figura 8. Semi-eje mayor de la elipse para la Mz . Las unidades son cm/s . Se señala la ubicación del correntómetro al Sur de la bahía.

El término de Coriolis no es muy importante: para que sea del mismo orden que el gradiente de presión, la escala horizontal del movimiento debe ser mayor que el radio de deformación de Rossby (o radio inercial):

$$a = \frac{\sqrt{gh}}{f} \quad (14)$$

Para la Bahía de Todos Santos, con una profundidad promedio de 30 m, y $f = 7.69 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, se obtiene $a = 223 \text{ Km}$, mientras que la longitud de onda para la Mz es de 123 Km. Por lo tanto no se observa el efecto de la rotación de la tierra, dado que la escala horizontal del movimiento no es mayor que el radio de deformación de Rossby.

Los máximos de rapidez de la corriente ($> 1.5 \text{ cm/s}$), se localizan frente a Punta Banda, Punta San Miguel y en la parte central de la Bahía (Fig. 9). El orden de magnitud de la amplitud de la corriente de marea, puede estimarse a partir de la amplitud y la profundidad en la frontera abierta:

$$U_0 = \sqrt{\frac{g}{h}} \eta_0 \quad (15)$$

donde U_0 es la amplitud de la corriente y η_0 de la elevación en la frontera abierta. Con una profundidad de 500 m (Fig. 1) y η_0 igual a 0.487 m, el orden de magnitud de U_0 es 10^{-2} m/s ; lo cual concuerda con el orden de magnitud de la corriente de

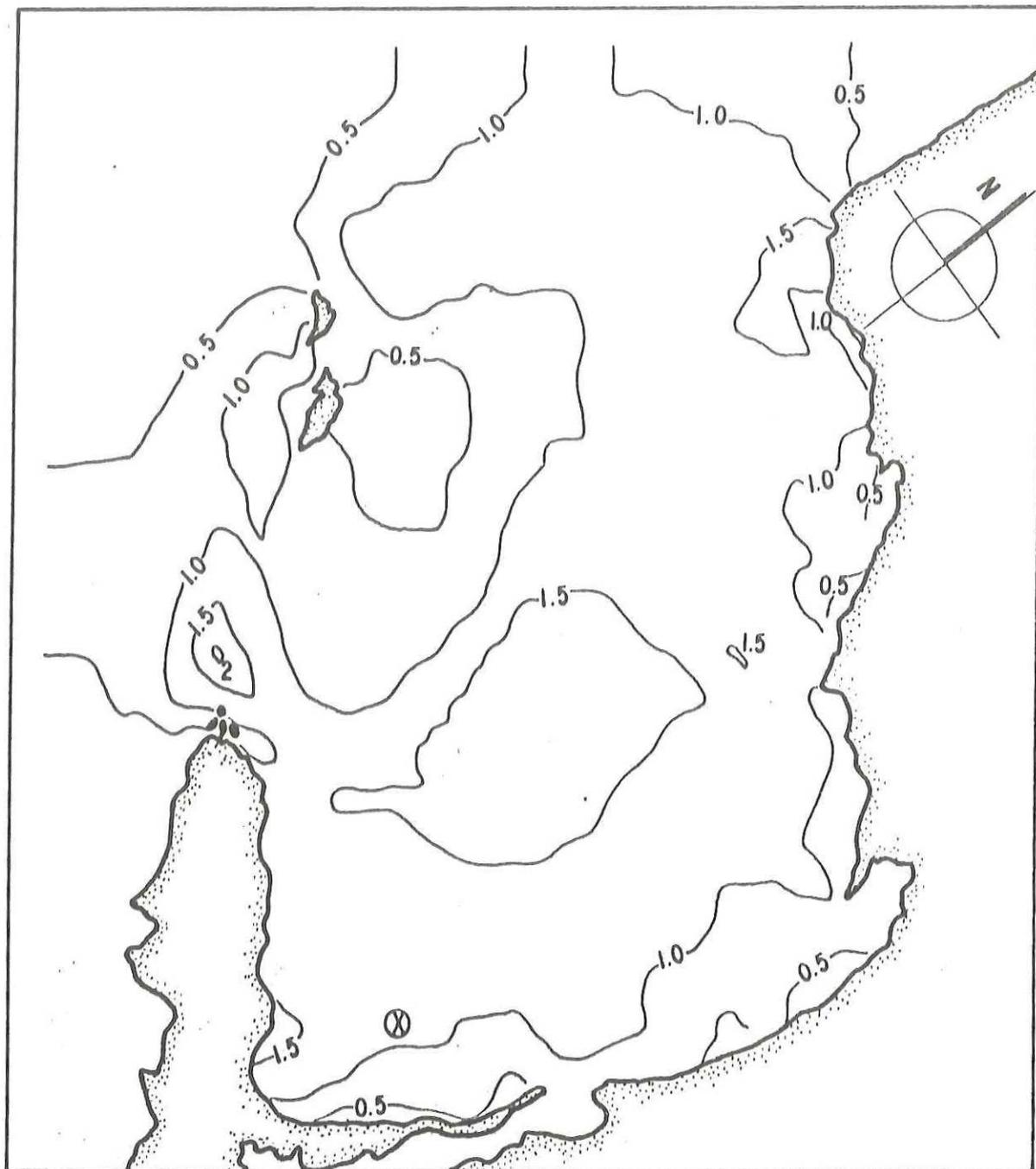


Figura 9. Contornos del semieje mayor de la elipse para la M_z . Las unidades son cm/s . Se señala la ubicación del correntómetro al Sur de la bahía.

marea que se obtuvo en la bahía (Fig. 9).

La razón entre los semiejes, muestra que el sentido de rotación es anticiclónico (Fig. 10). En general este depende de la frecuencia de la armónica, la frecuencia inercial, y el sentido de rotación de la fuerza de marea. La rotación anticiclónica es dominante en la mayoría de los casos como lo demuestra Thorade (1928), basado en un análisis general de los tres factores antes mencionados.

La excentricidad cerca de la costa es menor a -0.2 , que indica corrientes rectilíneas, en contraste con las zonas profundas, en donde la corriente tiende a describir un círculo, con valores aún mayores a -0.8 (Fig. 10). El comportamiento de la corriente en la zona costera es debido a que se impusieron las siguientes condiciones: la componente normal es cero sobre la línea de costa y la componente tangencial es igual al valor adyacente a ésta (ver condición en la frontera 7).

III.2.1 Comparación entre el comportamiento predicho y el observado

Para comprobar la validez de las predicciones de la corriente de marea, se comparan éstas con mediciones directas de correntómetro realizadas al Sur de la bahía (Ocampo, 1983), durante el período del 1 de febrero al 4 de junio de 1982. El correntómetro estaba ubicado a una profundidad de 10 m sobre

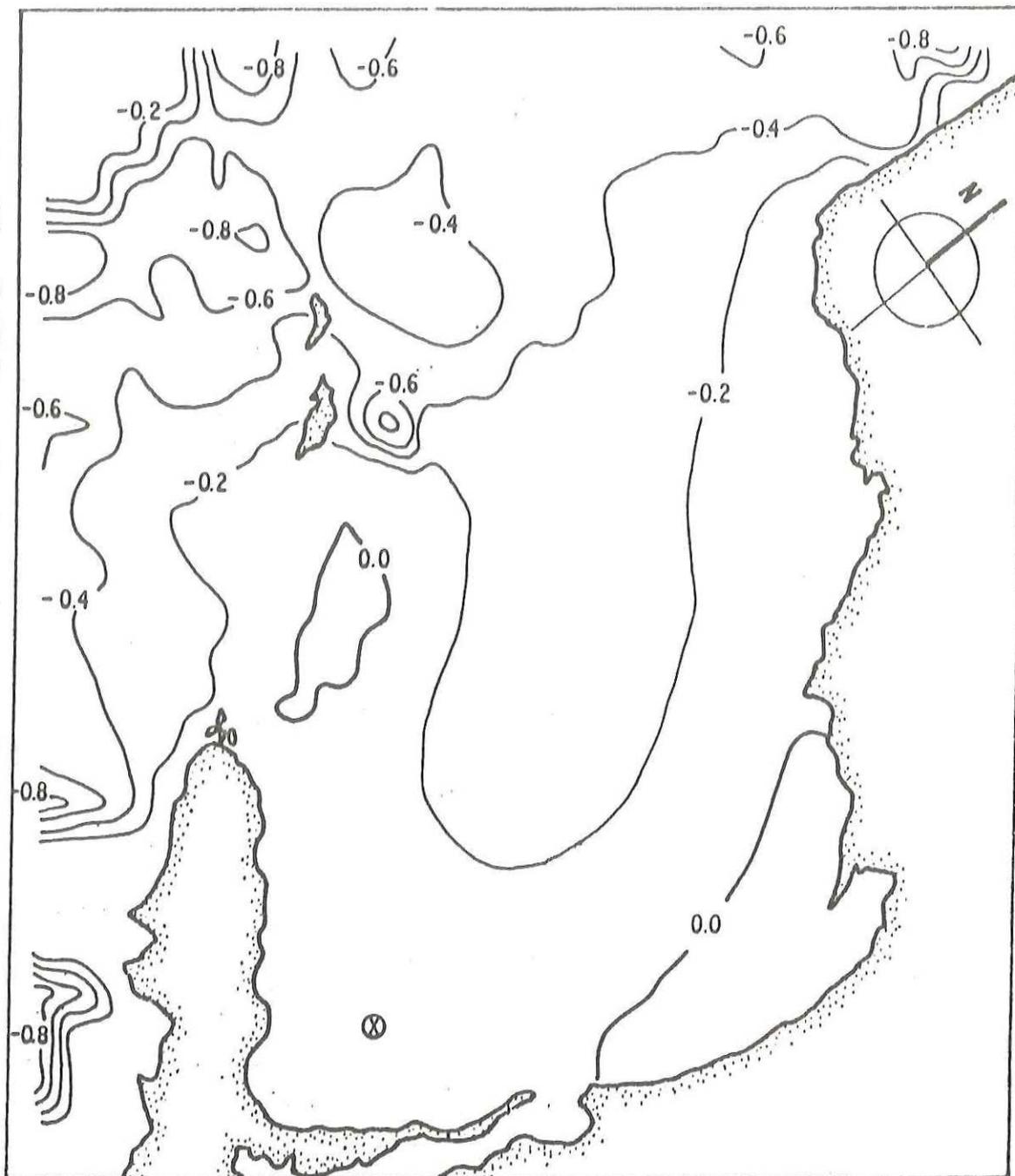


Figura 10. Excentricidad de la elipse para la M_z . Si es igual a cero la corriente describe una recta, y si es igual a uno, un círculo. El signo menos indica que la rotación es a favor de las manecillas del reloj. Se señala la ubicación del correntómetro al sur de la bahía.

la isóbata de 20 m. A los datos se les aplicó el análisis armónico para obtener la elipse de la Mz. Se promediaron los valores de los elementos de la elipse de los 9 nodos mas cercanos a la localización del correntómetro (Fig 1 y 4). En virtud de que la corriente predicha está promediada en la vertical y las mediciones corresponden a un punto de la columna de agua, se empleó la relación empírica encontrada por Bowden y Fairbairn (1952), para calcular el valor de la rapidez a una cierta profundidad a partir de su valor promedio:

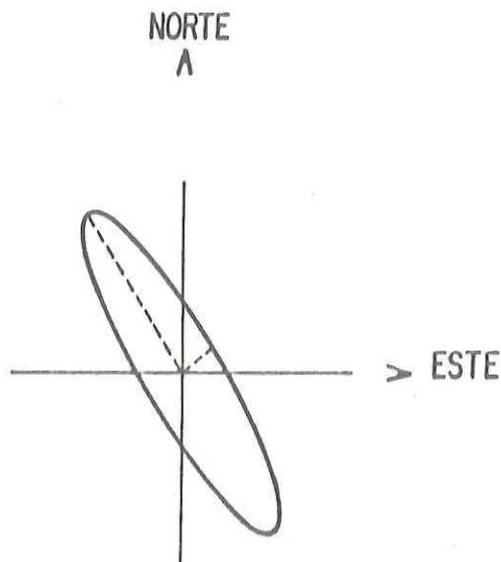
$$U_z = 1.15 \bar{U} \left(0.63 + 0.37 \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \right), \quad (16)$$

donde U_z es la amplitud de la corriente a una cierta profundidad; \bar{U} es el valor promedio en la vertical; h es la profundidad total de la columna de agua; y z es la profundidad del correntómetro. En la figura 11 se presentan ambas elipses. la diferencia más notable entre éstas es la magnitud del semieje mayor en donde el valor calculado a partir de las observaciones es aproximadamente el 50 % del que se obtiene a partir del modelo. Por otra parte ambas elipses muestran un giro anticiclónico. La diferencia entre las fases (~ 1 %) y las orientaciones (~ 7 %), también indican una concordancia aceptable entre las observaciones y la predicción.

a) OBSERVADA

EXCENTRICIDAD - 0.2
 SEMI-EJES
 MAYOR 2.010 CM/S.
 MENOR -0.440 CM/S.
 ORIENTACION 124.3°
 FASE 355.9°

ESCALA
 2.0 CM/S



b) CALCULADA

EXCENTRICIDAD -0.1
 SEMI-EJES
 MAYOR 1.252 CM/S.
 MENOR -0.120 CM/S.
 ORIENTACION 149.2°
 FASE 352.2°

ESCALA
 2.0 CM/S

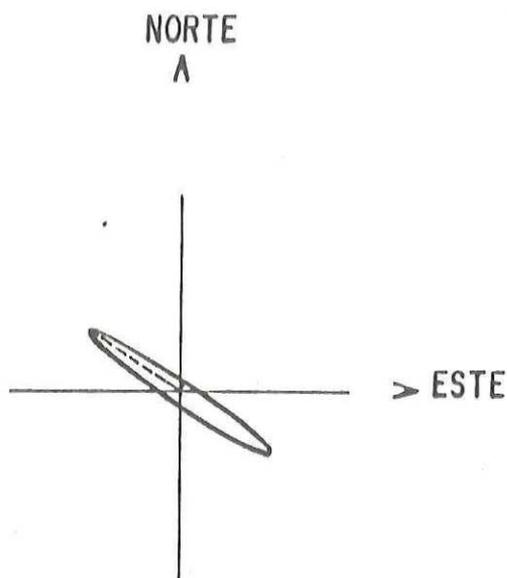


Figura 11. Comparación de las elipses. a) observada, b) calculada. La orientación está referida al Este, y la fase al tiempo local.

III.2.2 Resumen

Se describe la marea barotrópica en toda la extensión de la Bahía de Todos Santos, representada por la armónica más energética, la M_2 , encontrándose el siguiente comportamiento. La onda de marea tiene un carácter estacionario: la fase de la elevación es constante y existe un desfase de 90° entre la elevación y la corriente (fig. 7).

Los términos más importantes en el balance dinámico de la corriente de marea parecen ser el de gradiente presión y fricción en el fondo, como lo indica la orientación del semieje mayor (Fig. 6 y 8). Los valores máximos de la corriente de marea (> 1.5 cm/s), se encuentran frente a Punta Banda, Punta San Miguel y en la porción central de la bahía (Fig. 9). Durante un período de la M_2 la corriente describe la elipse girando a favor de las manecillas del reloj, como se señala con el valor negativo de la excentricidad (Fig. 10).

III.3 Corriente residual inducida por la marea

El forzamiento que induce la corriente residual es la fricción de la corriente de marea sobre el lecho marino. Esta se parametrizó con una relación cuadrática, como función de la velocidad promedio en la vertical (relación 12). La definición matemática que se empleó es:

$$\bar{v}_R = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{v} dt, \quad (17)$$

donde \bar{v}_R se conoce como velocidad residual euleriana, y T es el periodo de la Mz, t_0 es el tiempo inicial y \bar{v} es el promedio vertical de la velocidad. La corriente residual que se obtiene es el flujo medio en un cierto periodo.

Nihoul (1980), señala que la escala temporal de la circulación residual inducida por la marea es del orden de semanas a meses. Un flujo medio también puede ser generado por otros factores, tales como el esfuerzo del viento, y los gradientes horizontales de densidad. La circulación residual que se produce cuando el flujo oscilatorio de la marea interactúa con el fondo y la costa de una cuenca, es uno o dos órdenes de magnitud menor que la corriente de marea (Robinson, 1983). Su medición directa en algunos casos es difícil, ya que puede ser del mismo orden de magnitud que el ruido de los correntómetros, y cuando es calculada a partir de una solución

numérica, puede ser confundida con el ruido numérico asociado a los esquemas de integración.

Las interacciones mencionadas son no lineales porque involucran transferencia de propiedades entre movimientos de escalas temporales diferentes. A pesar de que la corriente residual es poco energética, puede determinar en gran medida el transporte neto de sustancias y propiedades dado su carácter permanente, ya que está asociada a variaciones de la línea de costa y del fondo.

La forma en que se obtuvo el movimiento residual es la siguiente. Se descompone la solución numérica de las ecuaciones con términos advectivos en tres partes:

$$\tilde{v} = \tilde{v}_{M_2} + \tilde{v}_R + \delta \tilde{v}, \quad (18)$$

la parte oscilatoria (\tilde{v}_{M_2}), la parte residual (\tilde{v}_R), y el error numérico ($\delta \tilde{v}$). En esta descomposición no se toma en cuenta los mecanismos de generación de la parte residual. Se hace esta aclaración porque cuando la corriente interactúa con el fondo, además del flujo residual se generan subarmónicas de la armónica principal, que también forman parte de la solución. Al promediar la solución en el tiempo sobre el período de la M_2 , se filtra la parte oscilatoria, quedando la parte residual y el error numérico. Por otra parte, la solución de las ecuaciones sin términos advectivos contiene información de la parte oscilatoria y el error numérico, por

lo que al promediarla se obtiene el error numérico, y finalmente al restar ambas soluciones promediadas, queda únicamente el movimiento residual.

Para que, siguiendo este procedimiento, se obtengan resultados confiables, se debe satisfacer que el orden de magnitud del error numérico, sea menor que el del flujo residual. En nuestro caso el orden de magnitud del error es 10^{-6} m/s y de la residual 10^{-4} m/s. El orden de magnitud de la parte oscilatoria es 10^{-2} m/s. Este procedimiento ha sido empleado exitosamente por diferentes autores (Tee, 1976; Pingree y Maddock, 1977; Meir-Riemer, 1977; Pingree y Maddock, 1979a; Pingree y Griffiths, 1980a). El movimiento residual así obtenido se denomina euleriano (relación 17), porque es representativo de un punto en el espacio.

III.3.1 Velocidad del transporte residual

Otra velocidad cuyo cálculo es importante en regiones costeras, la cual se define como la velocidad del transporte residual (Pingree y Maddock, 1977), esta dada por:

$$\tilde{v}_T = \frac{1}{hT} \int_{t_0}^{t_0+T} (\eta + h) \tilde{v} dt. \quad (19)$$

Utilizando la definición de la velocidad residual euleriana (relación 17), puede ser escrita como:

$$\tilde{v}_T = \tilde{v}_R + \frac{1}{hT} \int_{t_0}^{t_0+T} \eta \tilde{v} dt. \quad (20)$$

Esta es la velocidad requerida para que por una columna de agua de profundidad h , pase el volumen transportado por la velocidad residual, en una columna de profundidad $h + \eta$. La diferencia entre la velocidad y transporte residual es mayor en las zonas someras que en las zonas profundas.

En las figuras 12 y 13 se presentan la velocidad residual euleriana, y la velocidad del transporte residual, inducidas por la corriente de marea en la Bahía de Todos Santos. Las diferencias entre ambas gráficas son mínimas porque η es mucho menor que h y \tilde{v} están desfasadas aproximadamente 90° , por lo que se hará referencia únicamente a una de ellas, por ejemplo la figura 13. Las características sobresalientes que presenta son tres giros y flujo paralelo a la costa Norte (Fig. 13). Tanto los giros, localizados sobre el cañón, al Norte de las islas y al Oeste de Punta San Miguel, como el flujo costero, están asociados al gradiente de rapidez de la corriente de marea y al de profundidad (Fig. 1 y 9). Otro rasgo de la circulación residual de marea es que sigue aproximadamente los contornos de profundidad (Fig. 13).

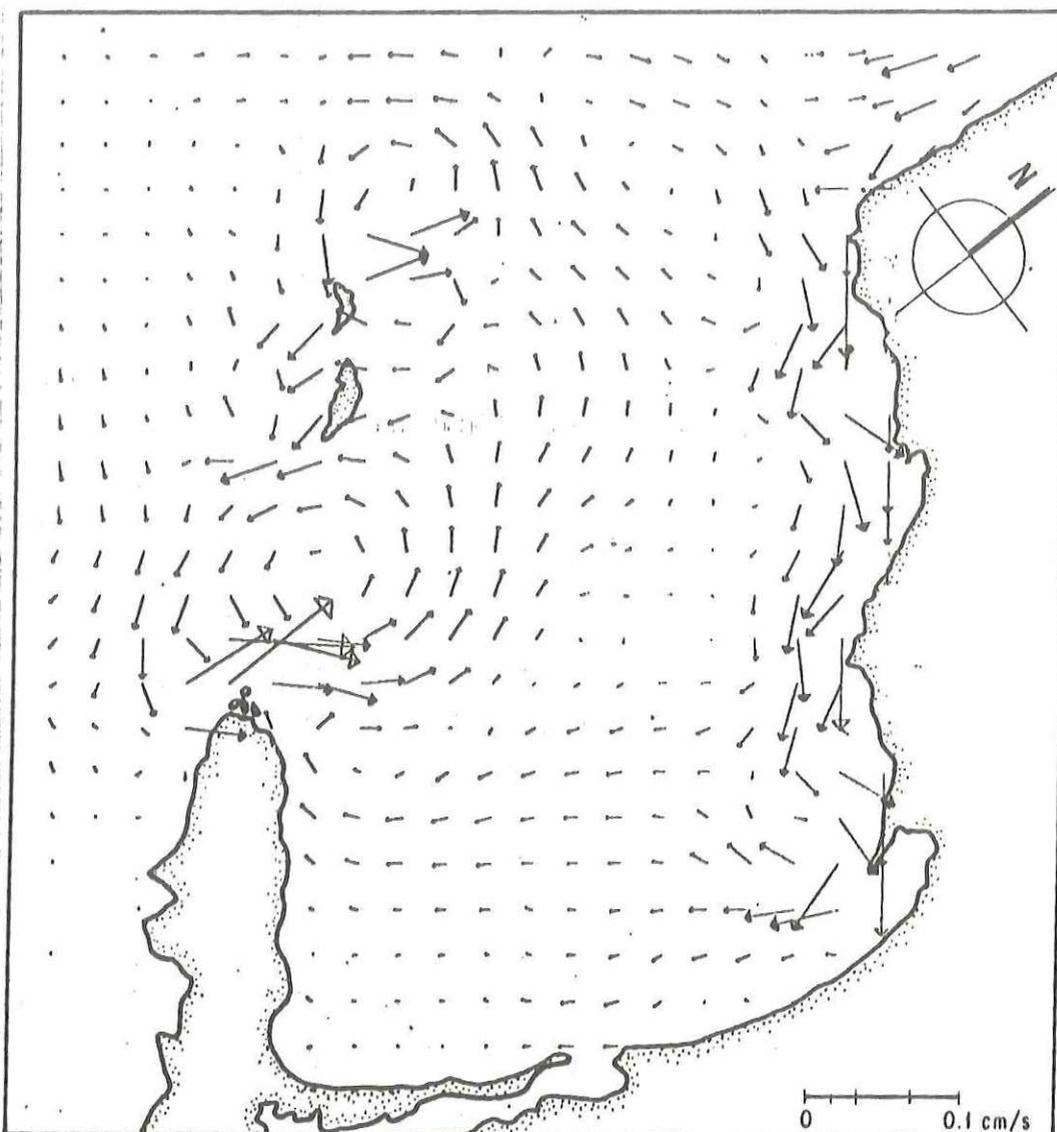


Figura 12. Velocidad de la corriente residual inducida por la marea (\vec{V}_R). Las unidades son cm/s.

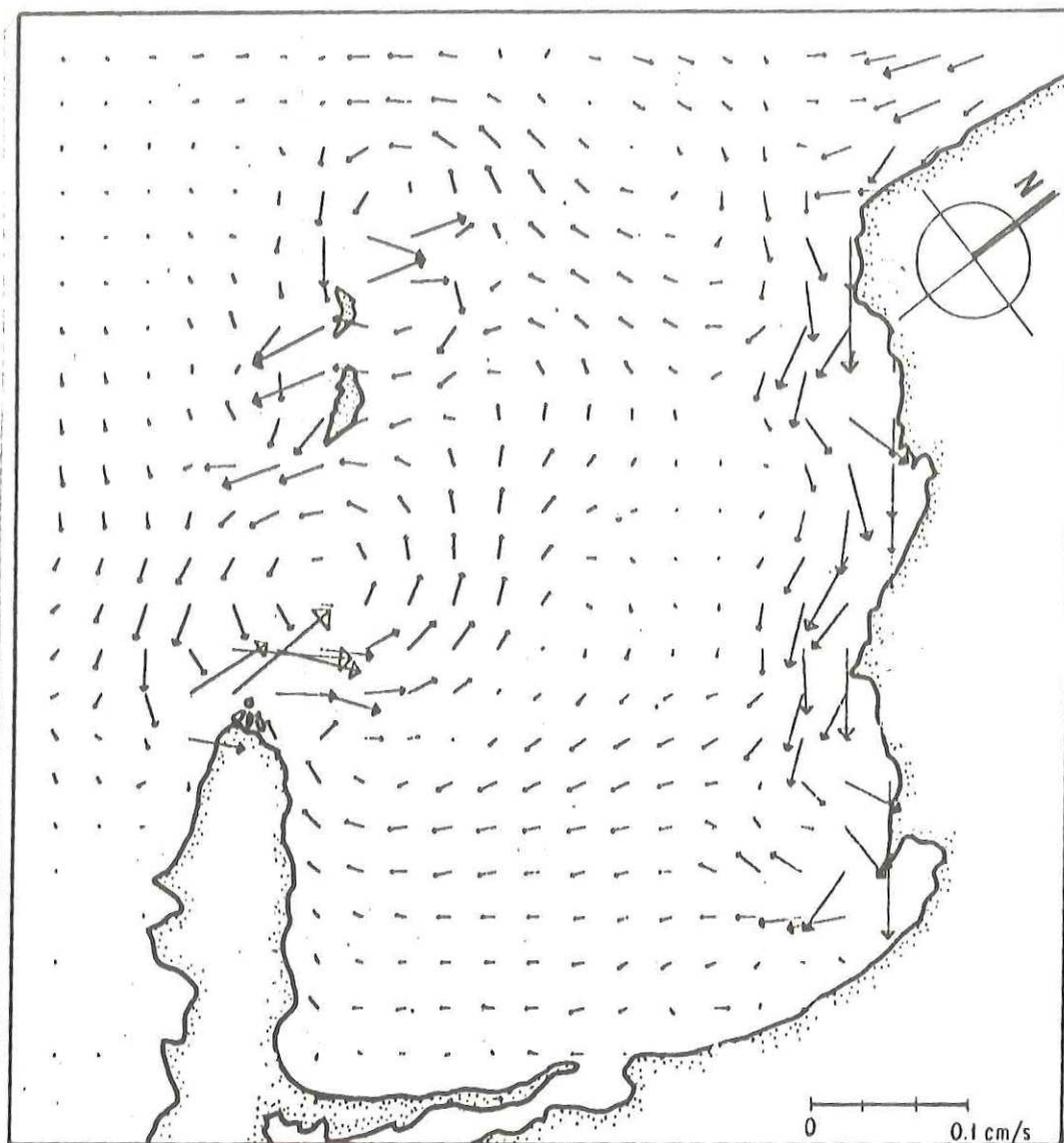


Figura 13. Velocidad del transporte residual inducido por la marea (\tilde{V}_T). Las unidades son cm/s.

III.3.2 Resumen

La circulación residual inducida por la marea en la Bahía de Todos Santos, presenta las siguientes características. El orden de magnitud es de 10^{-4} m/s, dos órdenes de magnitud menor que la corriente de marea, presentando un valor máximo de 0.07 cm/s, frente a Punta Banda. Se observan tres giros y un flujo costero. En general las líneas de corriente siguen contornos de profundidad (Fig. 13).

III.4 Corriente de deriva

El esfuerzo del viento en la superficie fue parametrizado con la relación 13. Se simuló la corriente de deriva en la Bahía de Todos Santos, para los vientos sinópticos locales descritos en el capítulo 2.

Para simular la corriente de deriva se tuvo el problema de que la solución se desestabilizaba en la esquina superior izquierda de la rejilla (Fig. 4). Para solucionar este problema se excluyeron los términos advectivos. Al no incluir los términos advectivos se perdió información sobre la interacción entre la corriente de deriva y la residual de marea. Este problema es común cuando se trabaja con rejillas rectangulares (Pingree y Maddock, 1979b; Argote 1983). Una alternativa para conservar los términos advectivos es trabajar con coordenadas polares.

La solución numérica obtenida se promedió sobre el período de la M₂. Esta solución de las ecuaciones sin los términos advectivos y con el esfuerzo en la superficie, se descompone en:

$$\tilde{V} = \tilde{V}_{M_2} + \tilde{V}_v + \delta\tilde{V}, \quad (21)$$

donde \tilde{V}_v es la corriente de deriva. Al promediar sobre el período de la M₂ (12.42 hr) se filtró la parte oscilatoria

(\tilde{V}_{u_2}) , y al restarle la solución sin el término de forzamiento por viento, promediada sobre el mismo período se eliminó el ruido numérico ($\delta\tilde{V}$), obteniéndose la corriente de deriva.

En las figuras 14, 15, y 16 se presenta la circulación representativa de verano, inducida por vientos de 5 m/s provenientes del NW, W, y N respectivamente. Para estas tres direcciones, en la parte somera (profundidad menor a 20 m), la circulación es en el sentido de la componente del viento, paralela a la línea de costa. La dirección de la corriente en regiones con profundidad mayor a 50 m, es a la derecha de la dirección del viento. La circulación presenta flujo de entrada frente a Punta San Miguel y flujo de salida frente a Punta Banda.

Una parte de la corriente de deriva está asociada al gradiente de presión. Este se produce por el aumento o disminución de la elevación ocasionado por el transporte perpendicular a la línea de costa. Se observa que en zonas de gradiente de elevación máximo se localizaron las corrientes de retorno. Para el viento del NW el gradiente de elevación máximo (2.2×10^{-7}) se localiza frente a la barra del estero de Punta Banda (Fig. 17), donde se observa la corriente de retorno para esta dirección de viento (Fig. 14). Cuando la dirección del viento es W el gradiente de elevación máximo (1.3×10^{-7}) se observa frente al puerto de Ensenada (Fig. 18), donde también se localiza el flujo compensatorio de la

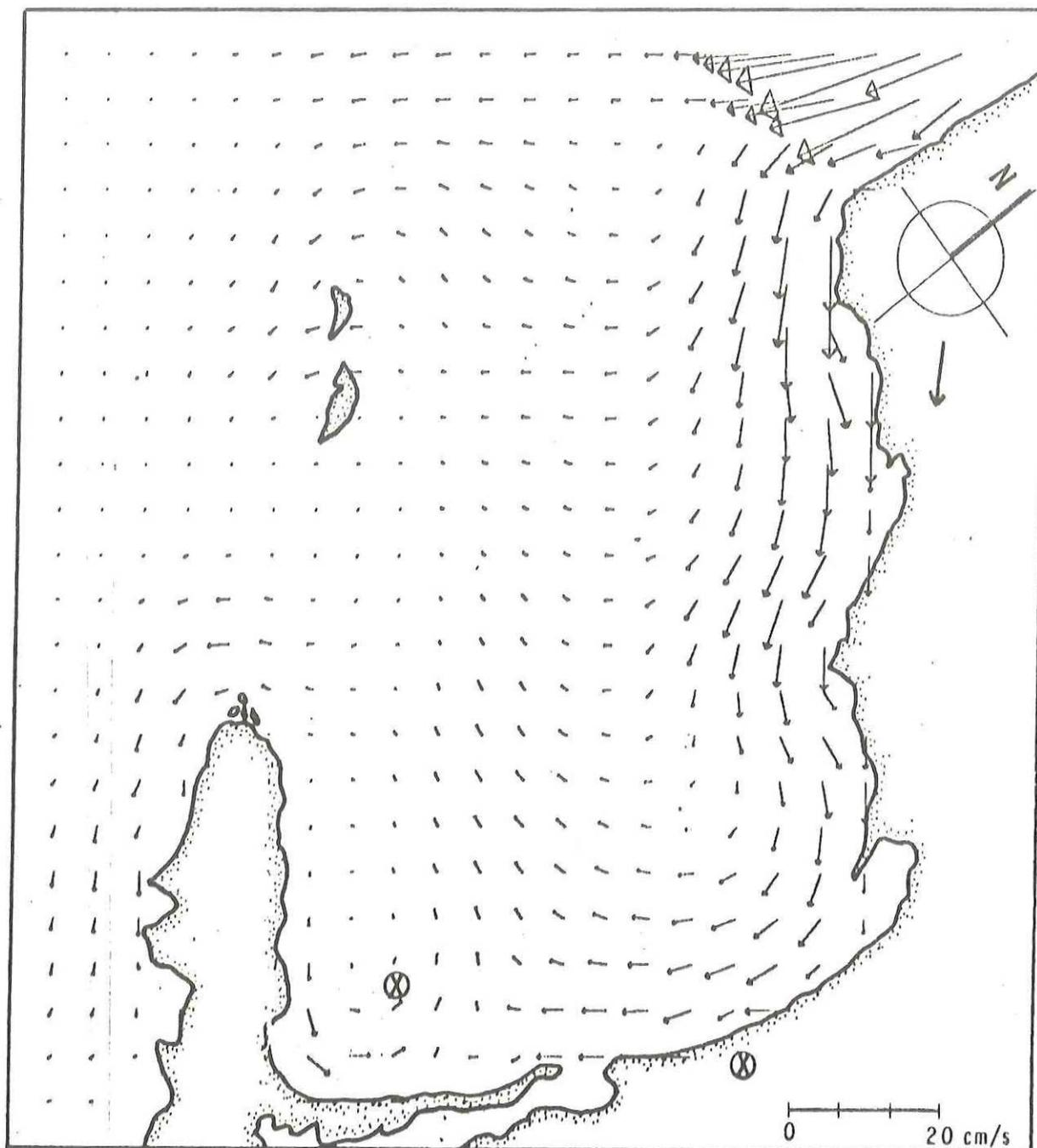


Figura 14. Corriente de deriva para un viento del NW de 5 m/s. Las unidades son cm/s. Se señala la ubicación del correntómetro y del anemómetro. La flecha indica la dirección del viento.

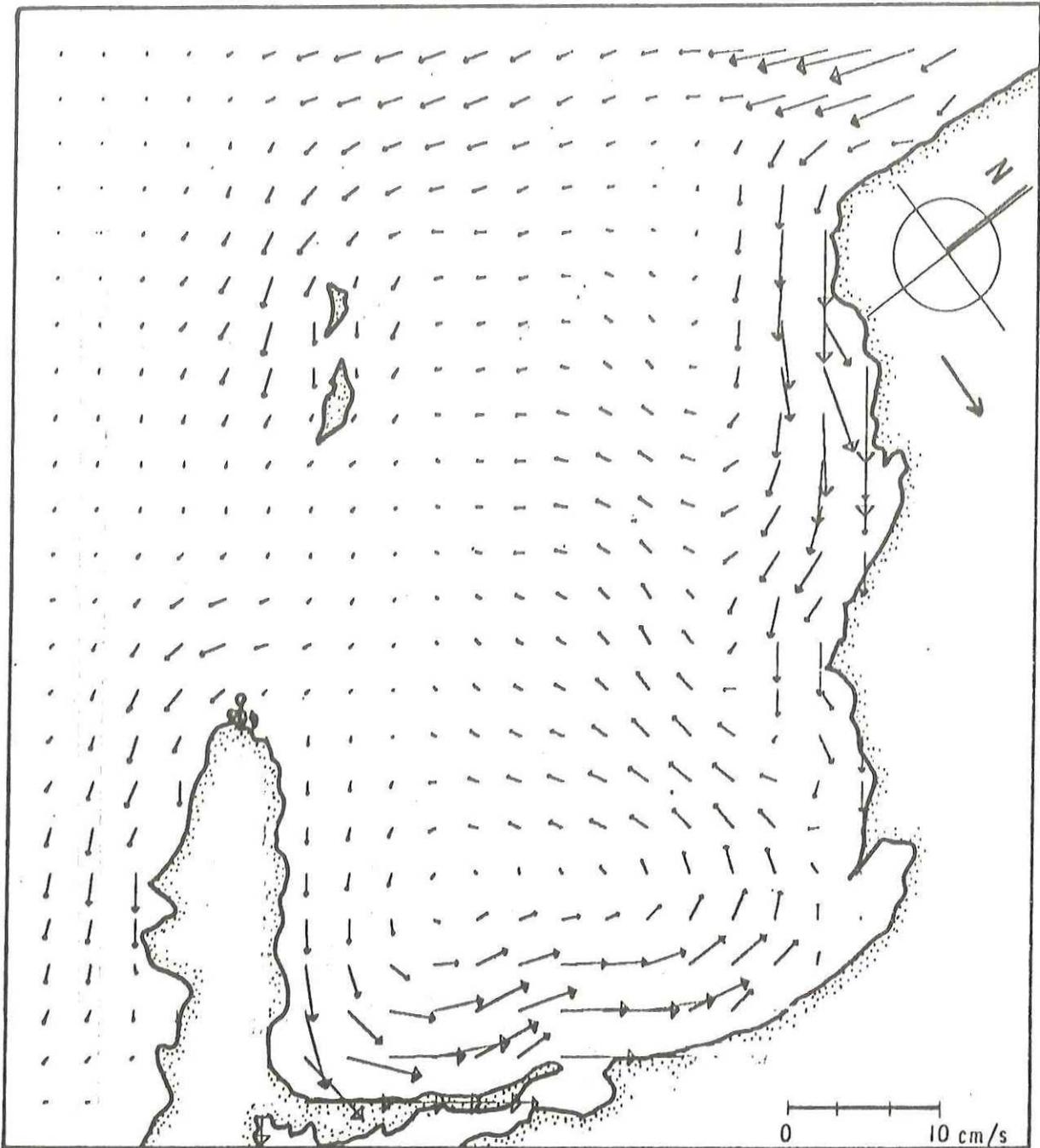


Figura 15. Corriente de deriva para un viento del W de 5 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.

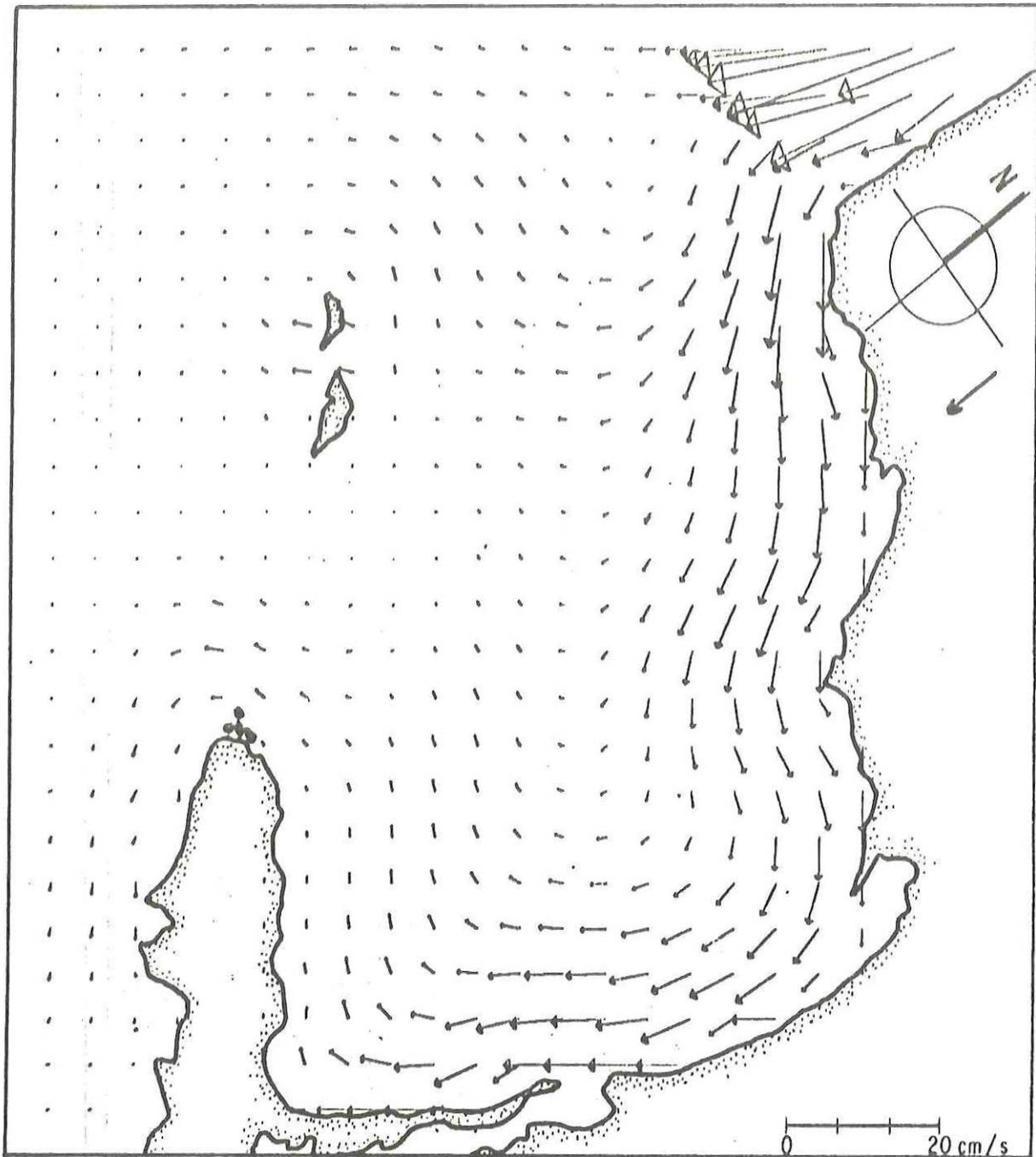


Figura 16. Corriente de deriva para un viento del N de 5 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.

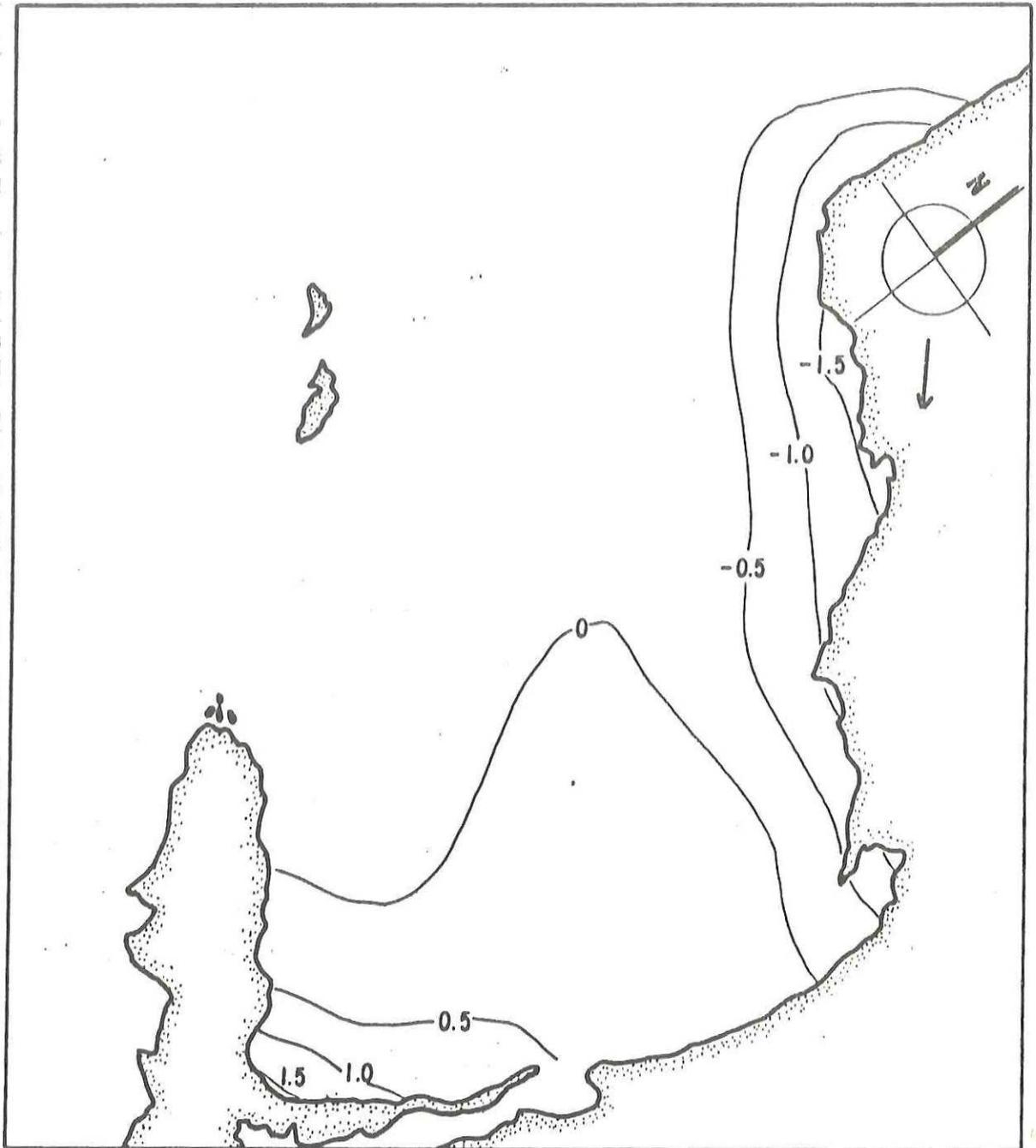


Figura 17. Elevación de la superficie del mar para un viento del NW de 5 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.

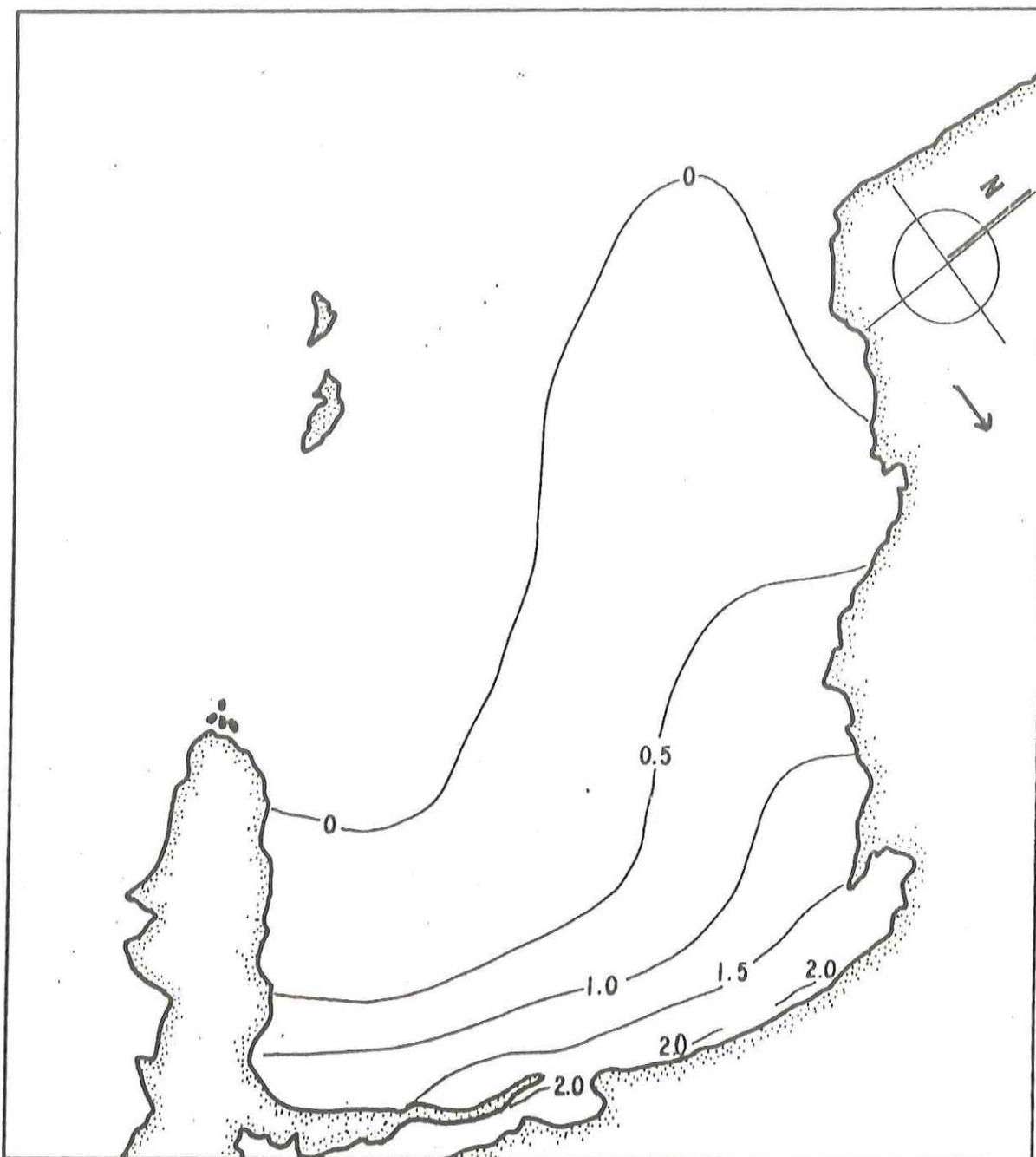


Figura 18. Elevación de la superficie del mar para un viento del W de 5 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.

circulación para dicha dirección de viento (Fig. 15).

En la distribución de elevación para el viento del N, se observa un hundimiento de la superficie del mar desde Punta San Miguel hasta la boca del Estero de Punta Banda (Fig. 19). En este caso, aunque se observa un gradiente de elevación en la barra del estero, este no está asociado a un flujo de retorno (fig. 16).

La circulación representativa de invierno, generada por vientos de 1 m/s provenientes del S y del SW, se presenta en las figuras 20 y 21. Diferencias notables en relación a la circulación representativa de verano son: la inversión en el sentido de los flujos, que no presentaron corrientes de retorno y la menor rapidez.

La circulación representativa de la condición Santana, para un viento del E de 10 m/s, se presenta en la figura 22. En este caso se obtiene la distribución de direcciones de corrientes que con viento del W (sinóptico de verano Fig. 15 y 18), pero con una inversión en el sentido de los flujos y con una mayor rapidez. Así mismo la distribución de la elevación para esta dirección de viento es similar a la que se obtiene con viento del W, con la diferencia de que para la condición Santana se observa un descenso del nivel medio del mar frente al puerto de Ensenada (Fig. 23). Como para este viento el agua es empujada fuera de la bahía, y debe satisfacerse que el flujo a través de la conexión con el mar abierto en un período de la M₂ sea nulo, la elevación resulta ser cero en las

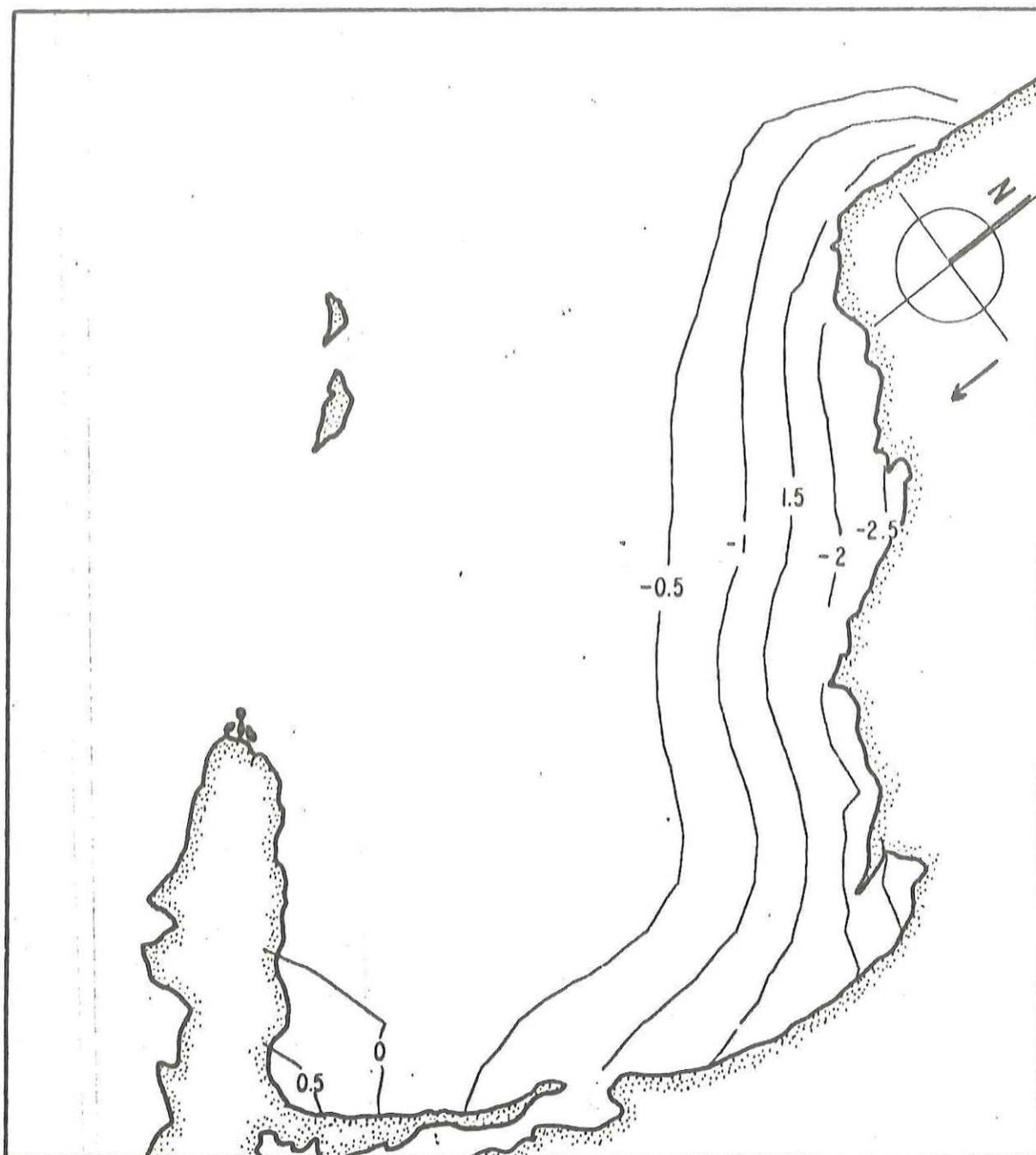


Figura 19. Elevación de la superficie del mar para un viento del N de 5 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.

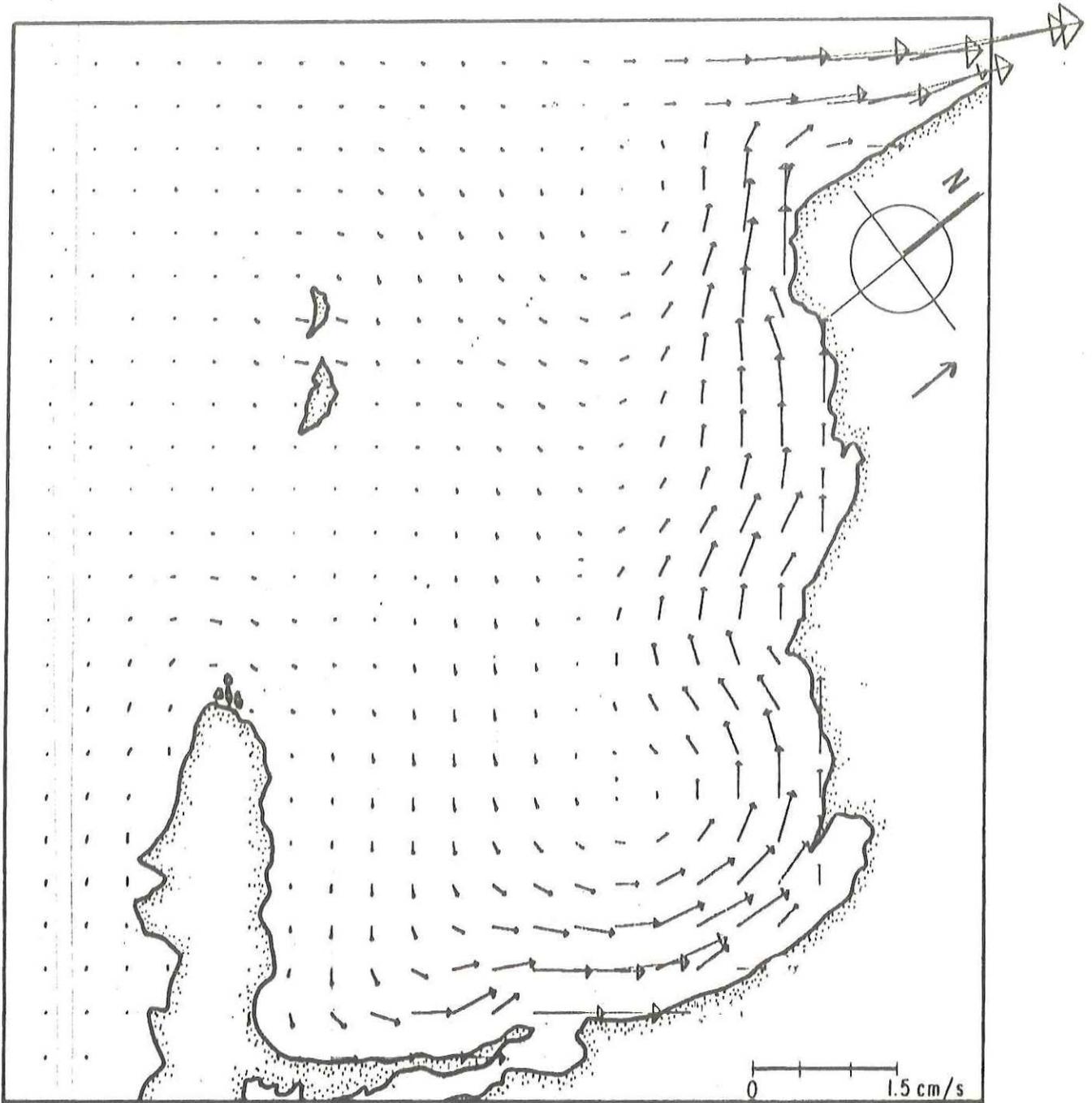


Figura 20. Corriente de deriva para un viento del S de 1 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.

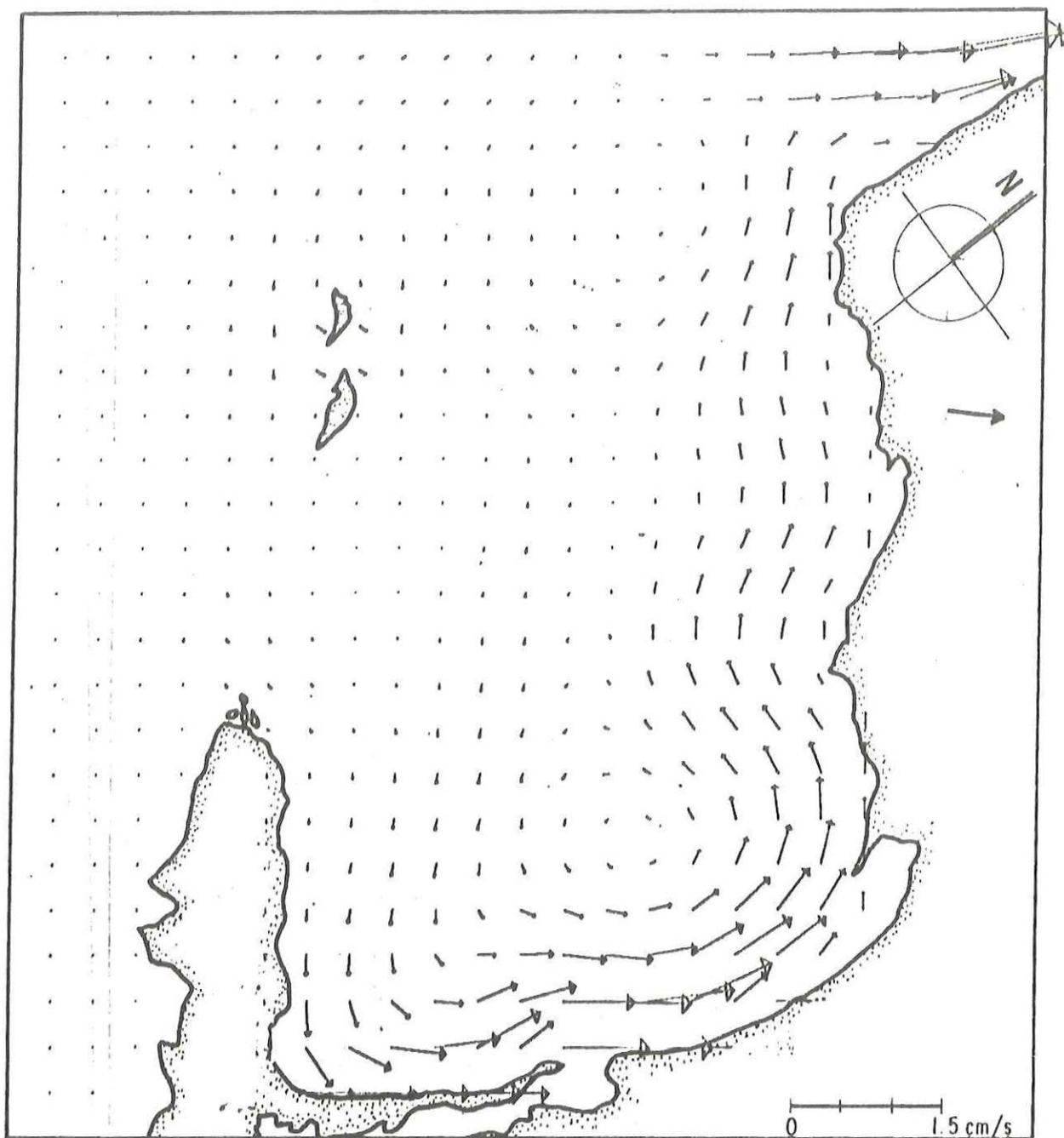


Figura 21. Corriente de deriva para un viento del SW de 1 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.

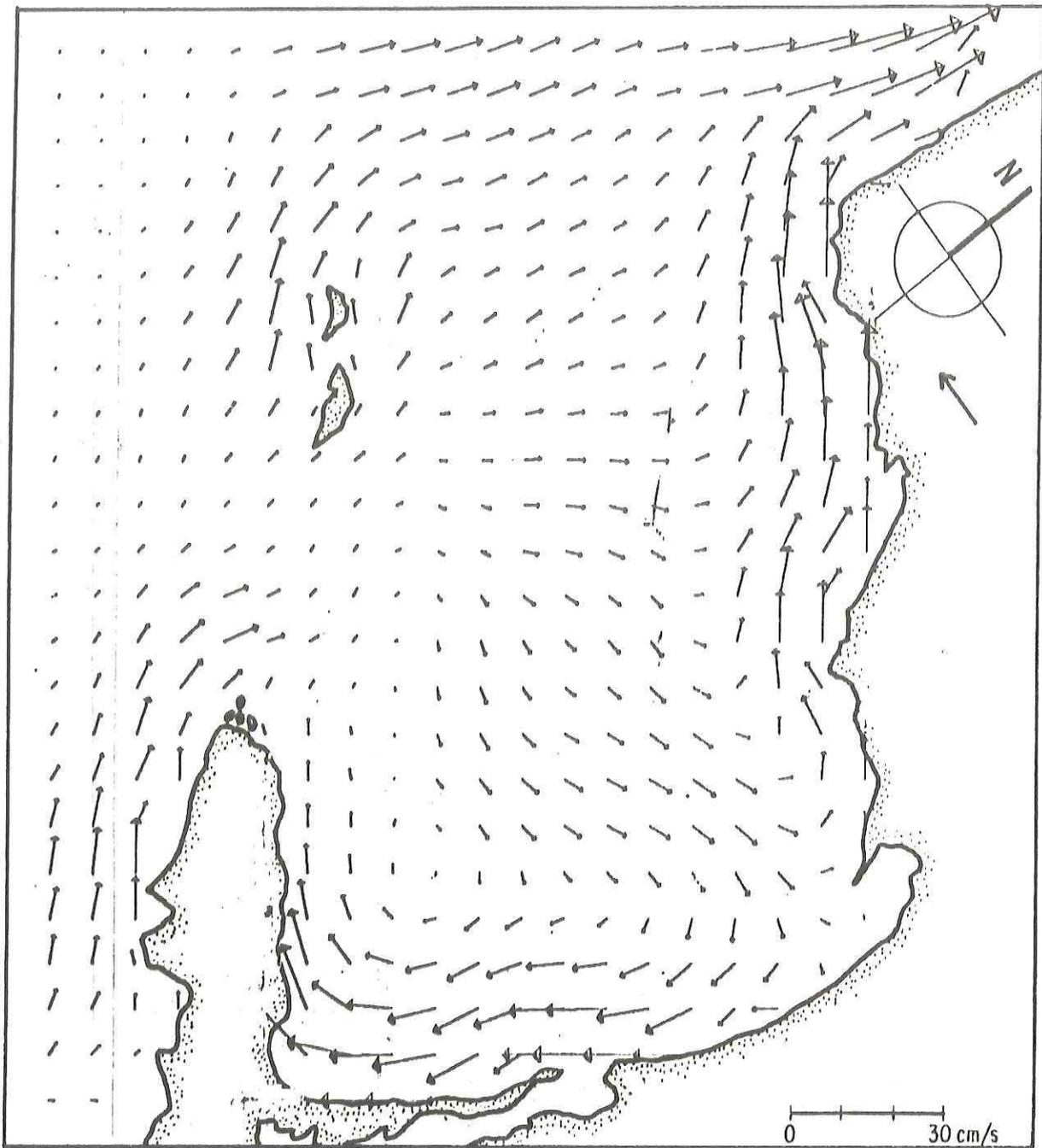


Figura 22. Corriente de deriva para un viento del E de 10 m/s. Las unidades son cm/s. La flecha indica la dirección del viento.

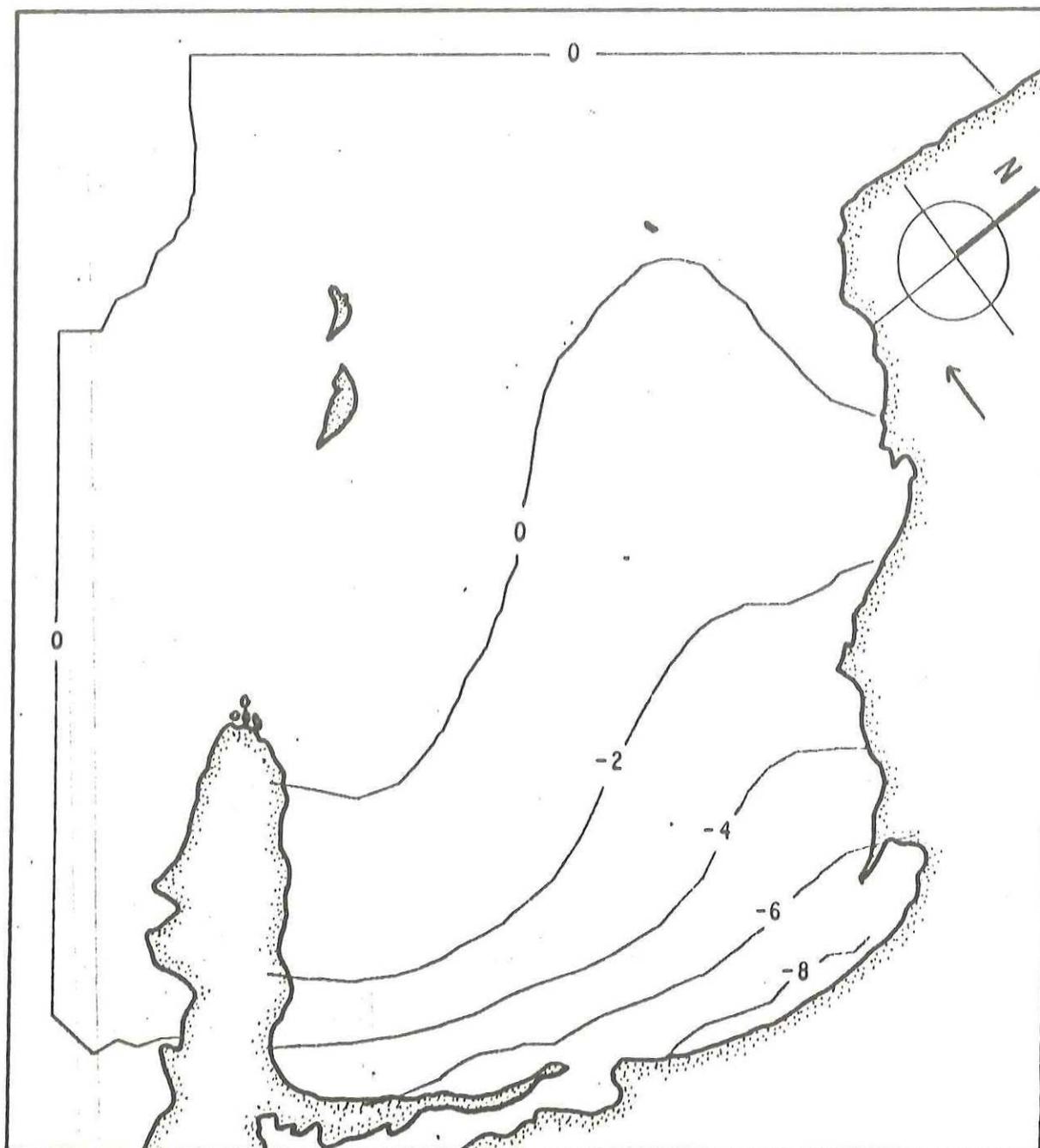


Figura 23. Elevación de la superficie del mar para un viento del E de 10 m/s. Las unidades son mm. La flecha indica la dirección del viento.

inmediaciones de la frontera abierta (Fig. 23).

III.4.1 Rapidez de la corriente de deriva

Para dar una idea de la rapidez de la corriente de deriva predicha, se calculó el promedio de las velocidades en secciones de tres Km frente a Punta San Miguel (PSM), Punta Banda (PB) y alrededor de las islas (ITS), para los diferentes vientos. Estos valores de rapidez se anotan en la tabla 2. Se aprecia en esta tabla que la rapidez de la corriente de deriva, en general, es mayor en la parte somera (PSM), que en las zonas profundas (PB e ITS), ya que el modelo simula el promedio vertical de la velocidad. La rapidez en la franja costera (PB, PSM), aún en regiones profundas como el caso de Punta Banda, en general es mayor que alejados de la costa (ITS). Esto se debe a que frente a irregularidades de la línea de costa, tales como puntas o salientes, la separación de las líneas de corrientes disminuye, por lo que se intensifica la rapidez del flujo. La razón entre rapidez de la corriente de deriva predicha (que representa el promedio vertical) y de rapidez del viento es del orden de 10^{-8} . Bowden (1983), señala que la razón entre la rapidez de la corriente superficial, y la rapidez del viento es del orden de 10^{-2} . La diferencia entre nuestros resultados y el de Bowden, resulta del hecho de que el perfil vertical de rapidez en la corriente de deriva es exponencial con velocidad máxima en la superficie.

Tabla II. Valores promedios de la rapidez en secciones de 3 Km, obtenidos de la salida del modelo para los diferentes vientos. Las secciones se indican en la figura 4. Los valores entre paréntesis indican la profundidad promedio de cada una de las secciones. La magnitud del esfuerzo se calcula con la relación 13.

ESFUERZO DEL VIENTO		PSM (46 m)	PB (138 m)	ITS (78 m)
$3.4 \times 10^{-2} \text{ Nt/m}^2$	NW	5.1 cm/s	1.7 cm/s	1.0 cm/s
	W	1.9 cm/s	1.0 cm/s	1.4 cm/s
	N	5.5 cm/s	0.9 cm/s	1.4 cm/s
$1.6 \times 10^{-3} \text{ Nt/m}^2$	SW	0.1 cm/s	0.1 cm/s	0.1 cm/s
	S	0.3 cm/s	0.1 cm/s	0.1 cm/s
$1.6 \times 10^{-1} \text{ Nt/m}^2$	E	7.6 cm/s	5.7 cm/s	5.6 cm/s

III.4.2 Comparaciones entre la corriente de deriva calculada y mediciones de campo

Con el fin de probar la confiabilidad de la simulación, la corriente de deriva se comparó con las corrientes medidas durante un período de dos meses (abril y mayo de 1982) con un correntómetro colocado a 10 m sobre la isóbata de 20 m (Fig. 1). Además se contó con una serie simultánea de mediciones de viento en El Ciprés (Fig. 1). La separación entre las localizaciones del anemómetro y del correntómetro es de 5 Km. Al hacer esta comparación se tomó en cuenta lo siguiente: a) la corriente de deriva que se simuló es el valor promediado en la vertical, mientras que la medición fue a un cierto nivel de la columna de agua; b) en la corriente medida se encuentran presentes contribuciones de diferentes agentes que transfieren cantidad de movimiento al agua tales como, el viento, la marea, gradientes de densidad, gradientes de presión, etc, mientras que la corriente de deriva que se obtuvo es generada únicamente por el esfuerzo del viento en la superficie.

Tomando en cuenta estas consideraciones y con el fin de eliminar las frecuencias diurnas y mayores, se filtraron las series de corrientes y de vientos, con el filtro pasabajo coseno de Lanczos (Mooers, et al., 1968). Se supone que las series resultantes contienen información del viento sinóptico y de la corriente inducida por éste. Así mismo se calculó la

persistencia de las series filtradas, la cual es una medida de la variabilidad de la dirección del viento o de la corriente (Panofsky y Brier, 1968). La persistencia toma valores entre cero y uno; entre mayor es el valor menor es la variabilidad de la dirección.

La rapidez y la dirección de la corriente media filtrada son, 3.6 cm/s y 67°N, con una persistencia de 0.77. Los valores de rapidez y dirección para el viento medio filtrado son, 1.6 m/s y 105°N, con una persistencia de 0.94. Una de las conclusiones de Reyes et al. (1983), sobre el viento sinóptico observado en la bahía fue que la rapidez del viento medido en la costa es menor que en mar abierto, por la fricción en la costa. En particular de los valores de viento observado en la bahía durante verano que reportan Pavía y Reyes (1983) se calculó una razón de 3.3 entre la rapidez del viento en mar abierto (Islas de Todos Santos) y en la costa (Escuela de Ciencias Marinas y faro Beach). Por esta razón se decidió comparar la corriente observada con la corriente de deriva predicha para un viento de 5 m/s, del W (90°), la cual se promedió en los 9 nodos alrededor de la posición del correntómetro (Fig. 1 y 4).

A partir de los valores anotados en la tabla 3 se aprecia que las diferencias en rapidez es de sólo 0.3 cm/s (mucho menor que la precisión del correntómetro de ± 2 cm/s) y en dirección de 6° (menor al 2 %). Resulta evidente que el modelo reproduce muy satisfactoriamente las observaciones.

Tabla III Corriente de deriva obtenida a partir de dos meses de datos de un correntómetro ubicado en la Jolla (Fig. 1) y la calculada a partir de la salida del modelo para un viento sinóptico que representa los vientos observados en El Ciprés (véase texto).

		viento	corriente
Mediciones de viento y corriente.	rapidez	1.6 m/s	3.6 cm/s
	dirección	105°N	67°N
.....			
		viento	corriente
Corriente de deriva calculada.	rapidez	5 m/s	3.3 cm/s
	dirección	90°N	73°N

Otra comparación que se hizo, con la misma finalidad de verificar la confiabilidad de la simulación, fue entre la corriente de deriva predicha, y mediciones de la corriente superficial con flotadores libres (Alvarez, et al., 1988). Para comparar velocidades eulereanas con velocidades lagrangianas se establece que el orden de magnitud de la velocidad de deriva de Stokes es menor que el orden de magnitud de éstas, en virtud de que las variaciones horizontales de la corriente en la bahía son pequeñas.

Al hacer la comparación se tomó en cuenta que por corriente superficial Alvarez et al. (1988), consideran el movimiento en el primer metro de la columna de agua, mientras que la corriente de deriva que se simuló representa el movimiento promedio de toda la columna de agua.

Alvarez et al. (1988) sugieren que la circulación superficial presenta dos flujos de entrada paralelos a la costa: en Punta Banda y Punta San Miguel. En la mayoría de los experimentos analizados por estos autores, las direcciones de viento más persistentes fueron NW y W. La circulación simulada con estas direcciones presenta ambos flujos (Fig. 14 y 15). Durante los meses de marzo a agosto estos mismos autores señalan que el valor promedio de la rapidez de la corriente superficial, fue tres veces el del período de septiembre a enero (15 y 5 cm/s, respectivamente). La rapidez de la corriente entre estos dos periodos (marzo-agosto y septiembre-enero) aparentemente refleja la diferencia de la

rapidez de los vientos de verano e invierno. La rapidez de la corriente medida es mayor que los que se obtiene con el modelo, ya que las observaciones corresponden a la capa superficial, mientras que las simulaciones representan el movimiento promedio de toda la columna de agua.

III. 4. 3 Resumen

La corriente de deriva tiene las siguientes características: para todas las direcciones de viento, la dirección de los flujos en la franja costera (profundidades menores a 20 m), es la de la componente del viento paralela a la línea de costa (Fig. 14-16, 20-22). En todos los casos, la dirección de la corriente en las áreas con profundidades mayores a los 50 m, es a la derecha de la dirección del viento (Fig 14-16, 20-22), por el efecto de la rotación de la tierra. Estos resultados son indicativos de que al aumentar la profundidad los esfuerzos en el fondo y en superficie disminuyen su peso en el balance dinamico de la corriente de deriva (ecuaciones 3 y 4).

La razón entre la rapidez de la corriente de deriva y del viento es del orden de 10^{-3} (tabla 2). La corriente en las partes someras es mayor que en las partes profundas de la bahía (tabla 2).

Para ciertas direcciones de viento (NW, W, E) el apilamiento de agua en la costa genera corrientes de retorno

(en sentido opuesto a la dirección del viento) cuya localización es próxima con la de los gradientes de elevación máximos (Fig. 14-17, 15-18, 22-23). La circulación representativa de invierno a diferencia de la de verano, no presenta corrientes de retorno. El sentido de los flujos con los vientos sinópticos de invierno se invierte en relación al que se obtiene con los vientos sinópticos de verano. Dado que los vientos de invierno son de menor intensidad que los de verano, la rapidez de los flujos en la circulación de invierno es menor que en la circulación de verano.

III.5 Efecto de la Corriente de California

Para simular la Corriente de California y su efecto sobre la Bahía de Todos Santos, se prescribió una velocidad representativa del flujo geostrófico de primavera, en la conexión NW de la bahía con el mar abierto, con el requerimiento de transporte constante a lo largo de la frontera. La velocidad usada es $U = 0$, $V = -\bar{h} / h_i \times 0.10$. Las otras entradas del algoritmo fueron las mismas que para la corriente de marea y residual de marea, descritas en el capítulo 2.

Se excluyeron de las ecuaciones los términos advectivos para evitar la inestabilidad que se generaba en la esquina superior izquierda de la rejilla (Fig. 4). La solución numérica de las ecuaciones sin términos advectivos e imponiendo la velocidad en la frontera NW, se descompone en:

$$\tilde{V} = \tilde{V}_{M_2} + \tilde{V}_C + \delta\tilde{V}, \quad (22)$$

donde \tilde{V}_{M_2} es la parte oscilatoria o corriente de marea; \tilde{V}_C es la Corriente de California predicha; y $\delta\tilde{V}$ es el error de la integración numérica. Esta solución se promedió sobre el período de la M_2 para filtrar la corriente de marea. El error numérico se eliminó restando de la solución promediada, la solución de las ecuaciones sin la velocidad como condición en

la frontera NW, promediada sobre el mismo período.

La simulación de la Corriente de California se presenta en la figura 24. Claramente el efecto del flujo medio de la Corriente de California se restringe a la zona NW de la bahía, formando un meandro que se proyecta hacia el interior de la misma, el cual está aparentemente restringido por la isóbata de 40 m. Este comportamiento puede deberse a que como el flujo medio es un movimiento de gran escala, su interacción con un cuerpo de agua pequeño, como la bahía, es imperceptible. El flujo tiene una dirección SW, con una rapidez promedio de 13.9 cm/s en una sección de 3 Km al Norte de las islas (Fig. 24).

III.5.1 Comparación entre la corriente de California simulada y mediciones directas de corrientes

Con el fin de verificar la confiabilidad de la simulación de la corriente, se hicieron comparaciones entre ésta y las corrientes medidas al Norte de las islas (Fig. 1).

A partir de los datos del anclaje de correntómetros ubicado en la vecindad de las islas, reportados por Barton (1985), se estimó la velocidad promedio de la columna de agua, obteniéndose un valor de velocidad de 3 cm/s con una dirección SSW. Para la localidad de este anclaje el modelo predice una velocidad de 5.2 cm/s con dirección W. Las diferencias entre los valores observados y calculados con el modelo, pueden deberse parcialmente a que en la localidad en donde estaba

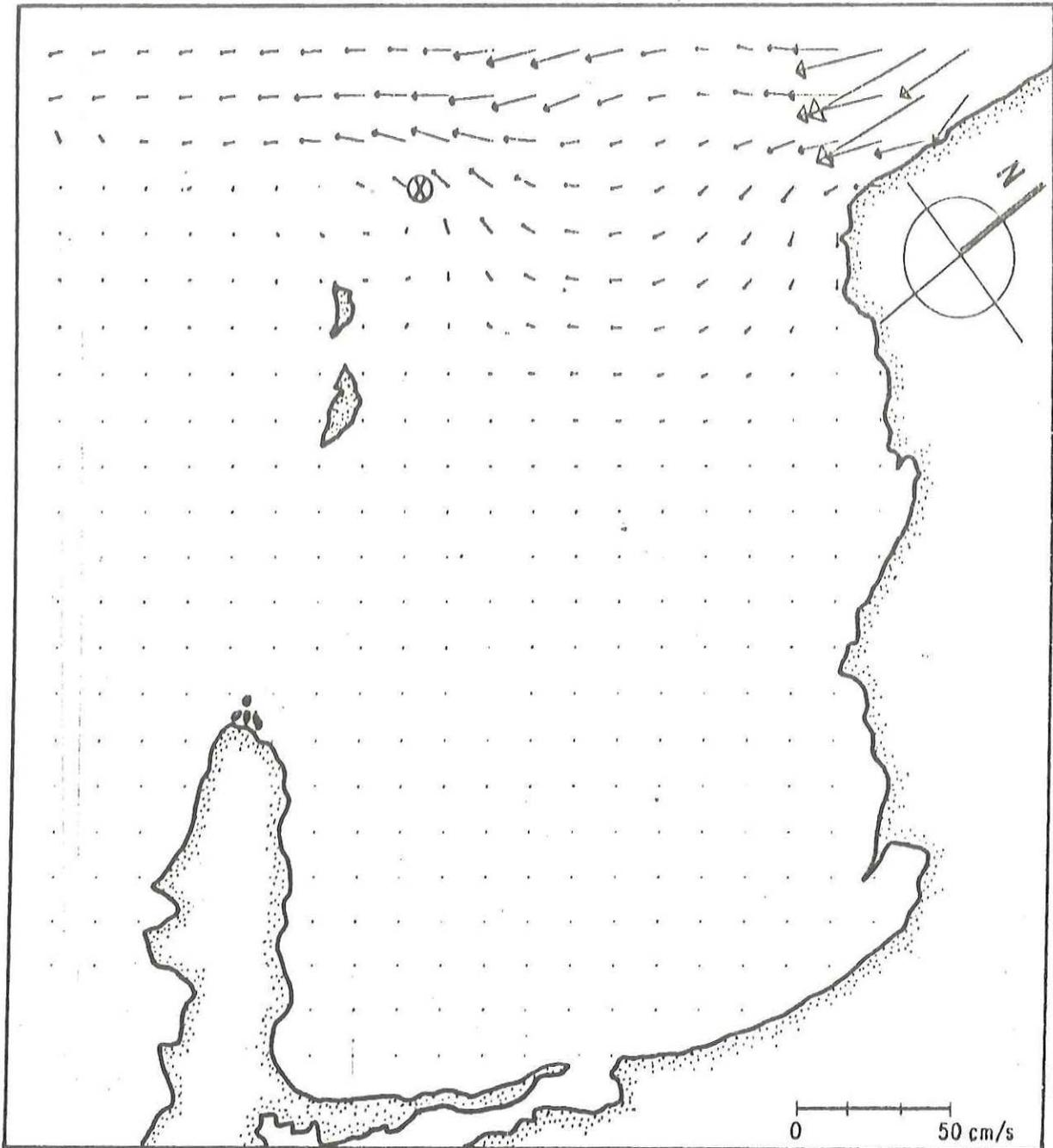


Figura 24. Flujo inducido por una corriente prescrita en la frontera superior, con velocidad $V = -0.1 \bar{h}/h$, m/s, $U = 0$. Las unidades son cm/s. Se señala la ubicación del arreglo de correntómetros al NW de las islas.

ubicado el correntómetro, el modelo predice una alta variabilidad de la velocidad tanto en dirección como en magnitud (Fig. 24).

Otra posible explicación a estas diferencias estriba en el hecho de que el transporte por ancho unitario de $17.8 \text{ m}^2/\text{s}$, utilizado en el modelo sea una sobrestimación. Un análisis más cuidadoso de la variación estacional de la componente Norte-Sur de la velocidad geostrófica de Gomez (1984), sugieren un transporte neto de $10 \text{ m}^2/\text{s}$.

A la luz de estas comparaciones no es posible establecer en forma concluyente la confiabilidad de las predicciones. Para ello se requiere de un mayor número de mediciones. No obstante dadas las restricciones del modelo y a que ésta fue una primera aproximación para modelar el efecto de la Corriente de California sobre la bahía, los resultados son alentadores.

III.5.2 Resumen

El efecto de la Corriente de California se restringe a la zona adyacente a la frontera NW de la bahía. Se observa la formación de un meandro entre las islas y Punta San Miguel, en profundidades de la columna de agua mayores a 40 m. En el interior de la bahía el flujo medio, con que se representó a la corriente, disipó casi completamente su energía por fricción con el fondo (Fig. 24).

IV. DISCUSION Y CONCLUSIONES

Los modelos numéricos hidrodinámicos (M.N.H) como el utilizado en el presente trabajo predicen una descripción preliminar del campo de velocidad (corriente de marea, corriente de deriva, etc.), y del nivel del mar (mareas, apilamiento por tormenta, etc.). La determinación de estas variables (elevación y velocidad) es en general el primer paso en la elaboración de modelos más complejos (mayor número de variables y de ecuaciones de conservación), que representan mucho mejor el sistema marino.

A pesar de las limitaciones de estos M.N.H (describir el movimiento integrado de la columna de agua, incluir un número limitado de forzamientos), las predicciones han descrito muy satisfactoriamente la hidrodinámica de mares de plataforma y costeros (Sündermann, 1977; Maddock y Pingree, 1978; Davies y Furnes, 1979; Pingree y Maddock, 1979a; Pingree y Griffiths, 1980b; Hunter, 1981 y 1983; Tatsusaburo y Malcolm, 1986; Pingree y Mardell, 1987). Esto se debe principalmente a que se conocen bastante bien los procesos físicos más importantes que determinan el movimiento del agua en cuerpos de agua costeros y en general en la plataforma continental.

Tanto las observaciones requeridas como entrada de estos M.N.H, como las necesarias para verificar la confiabilidad de las predicciones, provienen de estaciones en la costa o

adyacentes a la misma. Con esta información disponible los M.N.H sirven como una poderosa herramienta para predecir la distribución espacial del campo de velocidad y de elevación en los mares marginales del océano., y sus resultados pueden ser verificados con relativa facilidad. Al discutir los resultados hay que tomar en consideración estas bondades y limitaciones del modelo.

Para la onda de marea, el modelo predice: una fase constante en toda la bahía, y un desfase de 90° entre la corriente y la elevación de marea. Esto indica que la marea presenta carácter estacionario. Este comportamiento se espera en una cuenca semicerrada sin fricción en donde la onda de marea adquiere carácter estacionario, al reflejarse en la pared interior de la cuenca. por el contrario si existe disipación en el fondo, la onda adquiere carácter progresivo (Godin, 1982). Una estimación de qué tan importante es la disipación de energía de la onda de marea por fricción en el fondo, es el tiempo de disipación:

$$T_f = \frac{(\eta+h)}{C_f |\tilde{V}|} \quad (23)$$

en donde si $T_f > 1$ día la disipación es débil (Huthnance, 1981).

Aplicando esta relación a la bahía, se obtiene $T_f = 10$ días (con $\eta = 0.487$ m, $h = 30$ m, $C_f = 3 \times 10^{-3}$, $|\tilde{V}|_{\max.} = 2 \times 10^{-2}$ m/s). Este valor de $T_f \gg 1$ día indica que durante un

ciclo de marea, gran parte de la energía se propaga y se refleja en la parte interior, dando como resultado el carácter estacionario predicho.

El comportamiento de la onda de marea predicho por el modelo numérico utilizado, ha sido establecido a partir de soluciones analíticas (Yasuda, 1980). Este autor analizó el caso de un canal con fondo plano, unidimensional, lineal (no se considera el efecto de coriolis ni los términos advectivos y la fricción es parametrizada con una relación lineal). Los resultados de Yasuda (1980), indican que entre menor es la longitud del canal, las variaciones de la amplitud y la elevación son pequeñas y que la onda presenta carácter estacionario cuando el coeficiente de fricción es pequeño.

Dado que en el modelo se incluyó el efecto de coriolis y los términos advectivos, aparentemente no producen variaciones significativas en el comportamiento de la onda de marea, se infiere por una parte que en el balance dinámico el efecto de coriolis es poco significativo, por lo que el balance principal que se establece para la corriente de marea es entre el gradiente de presión y el esfuerzo en el fondo. Por otro lado no obstante que los términos advectivos no influyen en el comportamiento de la corriente de marea, son determinantes en la generación de flujos residuales.

La circulación residual de marea es inducida por las irregularidades del fondo y de la línea de costa, las cuales producen gradientes de la vorticidad relativa de la corriente

de marea, transfiriendo vorticidad a la corriente residual (Zimmerman, 1981).

En la ecuación de conservación de vorticidad relativa:

$$\frac{d\xi}{dt} = \underbrace{\left[\frac{\xi+f}{h+\eta} \right]}_I \frac{d}{dt} (h+\eta) + \underbrace{\frac{C_f}{(h+\eta)} \underline{v} \times \underline{v}}_{II} \frac{|\underline{v}|}{(h+\eta)} - \underbrace{\frac{C_f |\underline{v}|}{(h+\eta)^2} \underline{v} \times \underline{v}}_{III} (h+\eta) - \underbrace{\frac{C_f |\underline{v}|}{(h+\eta)}}_{IV} \xi + \underbrace{\Lambda \underline{v}^2}_{V} \xi, \quad (24)$$

donde $\xi = \partial_x V - \partial_y U$, Robinson (1981) identifica al término I, el cual representa la conservación de vorticidad potencial y los términos II, III, asociados a la fricción con el fondo, como los posibles mecanismos que generan flujos residuales. Los términos IV y V representan la disipación por fricción y difusión de vorticidad respectivamente. La representación esquemática de los términos I, II y III se presentan en la figura 25.

Para el caso de la bahía las estimaciones del orden de magnitud de estos tres términos, cuyo valor se indica a continuación, sugieren que el término de conservación de vorticidad potencial (I, Fig. 25a) es el mecanismo más importante en la generación de flujo residual en la bahía.

$$\text{término I : } fU/h \underline{v} h : 10^{-10}$$

$$\text{término II : } C_f U/h \underline{v} U : 10^{-12}$$

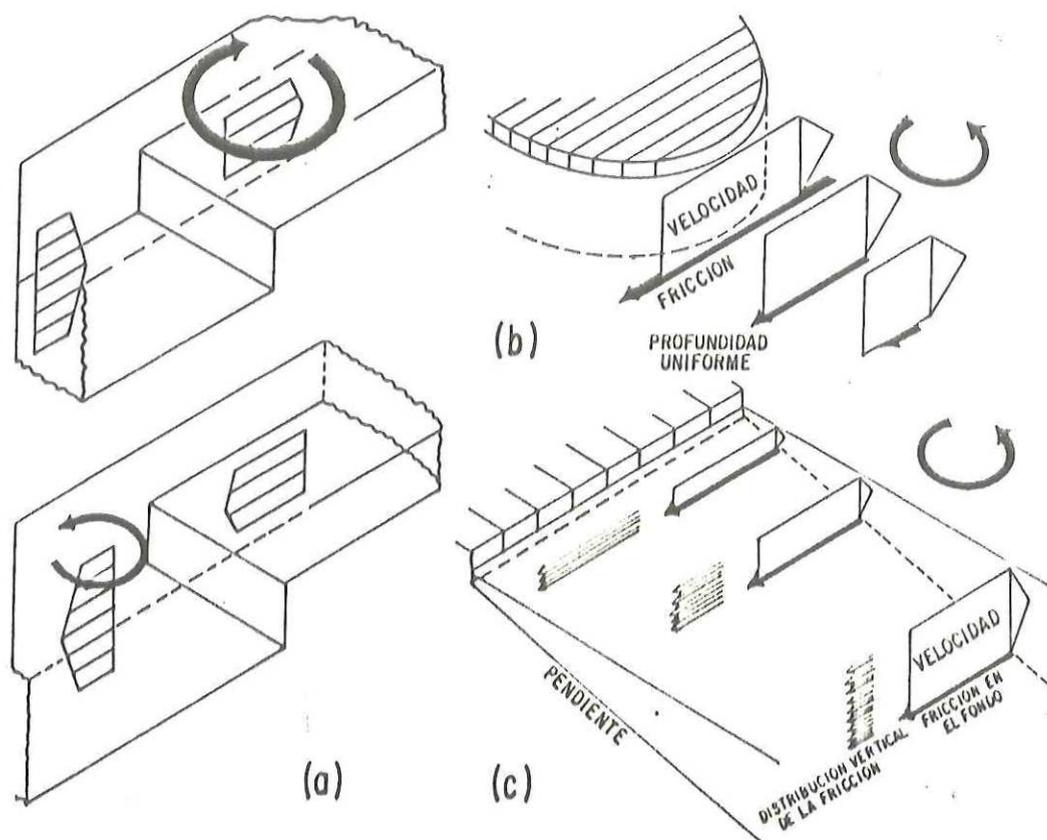


Figura 25. Esquemas de los mecanismos de generación de la circulación residual. a) conservación de vorticidad potencial; b) gradiente de la fricción por gradiente de la rapidez de la corriente de marea; c) gradiente de la fricción por gradiente de la profundidad normal a la dirección de la corriente de marea. Tomado de Robinson (1983).

$$\text{término III : } C_f U^2 / h^2 \sim h : 10^{-12}$$

A partir de las distribuciones de rapidez de la corriente de marea (Fig. 9), de la batimetría de la zona (Fig. 1) y tomando en consideración los tres mecanismos principales que generan flujo residual sugeridos por Robinson (1981), se pueden hacer las siguientes inferencias sobre los mecanismos principales que generan los giros que se observan en la circulación predicha por el modelo (Fig. 13).

La presencia de los giros ciclónicos localizados sobre el cañón y al Norte de las islas pueden explicarse en base a la conservación de vorticidad potencial (Fig. 25a). Por ejemplo en el cañón cuando una columna en el flujo se mueve de mar abierto hacia la región del cañón, la columna adquiere vorticidad relativa negativa, dada la disminución de la profundidad (Fig. 1). Por el contrario en el reflujó cuando una columna de agua se mueve de la zona somera del interior de la bahía hacia el cañón, esta adquiere vorticidad positiva, al aumentar la profundidad (Fig. 1). Dado que el gradiente de profundidad es mayor entre el interior de la bahía y el cañón, que entre éste y el mar abierto, sobre un ciclo de marea es mayor la vorticidad positiva generada en el reflujó, dando como resultado el giro ciclónico. Este mecanismo también es válido para la generación del giro al Norte de las islas.

El giro anticiclónico que se observa al Oeste de Punta San Miguel se origina por los gradientes de rapidez de la

corriente de marea (Fig. 25b) y de profundidad (Fig. 25c), que se localizan frente a la punta. En el flujo al pasar una columna de agua frente a la punta adquiere vorticidad positiva, tanto por el gradiente de rapidez (Fig. 9), como por el gradiente de profundidad (Fig. 1), normales a la dirección de la corriente. Esta vorticidad positiva es transportada hacia el interior de la bahía, en las inmediaciones de la punta. En el refluo la vorticidad que adquiere una columna de agua cuando pasa frente a la punta es negativa, por los mismos mecanismos. Esta vorticidad negativa es transportada hacia la localización del giro, explicando así la presencia del giro anticiclónico al Oeste de Punta San Miguel. A diferencia del transporte inducido por el viento que cambia su distribución dependiendo de la rapidez y dirección del viento, la distribución del transporte por marea al estar relacionado a la batimetría es invariable. Dado que el transporte de la corriente de deriva es mayor que el transporte por marea, es posible que los giros predichos en esta última sean transportados por la corriente de deriva de su localidad de generación.

Otra característica que presentó la circulación residual inducida por marea en la Bahía de Todos Santos, fue que siguió los contornos de h (Fig. 1 y 13). Este comportamiento puede ser analizado a la luz de los argumentos sugeridos por Huthnance (1981). Este autor establece que la circulación residual sigue los contornos de f/h cuando: a) la fricción con

el fondo es débil, es decir para un tiempo de disipación mayor a un día, y b) la excursión de marea es mucho menor que la escala de variaciones batimétricas. Para la Bahía de Todos Santos se cumple la primera condición ya que el tiempo de disipación es de 10 días.

La excursión de marea se define como:

$$E = \frac{|\tilde{v}|}{\omega}, \quad (25)$$

para la bahía, $|\tilde{v}|_{\max.} = 2 \times 10^{-2}$ m/s y con $\omega = 1.4 \times 10^{-4}$, $E = 150$ m. En la bahía la escala de variaciones batimétricas es de 1 Km (por ejemplo en el cañón en una distancia de 3 Km la profundidad cambia 300 m), cumpliéndose también la segunda condición. Por otra parte dadas las dimensiones de la bahía, f es constante, y las líneas de corrientes siguen los contornos de profundidad, como lo reproduce el modelo. La explicación a este comportamiento es que las líneas de corrientes siguen los contornos de propiedades conservativas. Una propiedad conservativa es la vorticidad potencial. La vorticidad potencial en el caso de flujos débiles se reduce a f/h , porque su vorticidad relativa es menor que la planetaria. Una estimación del valor de la vorticidad relativa se puede obtener de la ecuación 21 de la sección 3.2.1, de donde:

$$\zeta \approx \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)_{\max.}, \quad (26)$$

obteniéndose $\zeta \approx 1.8 \times 10^{-6}$, mientras $f = 7.69 \times 10^{-5}$. Como ya se dijo f es constante y las líneas de corrientes siguen los contornos de h .

Basados en los cálculos de transporte por ancho unitario, inducidos por la marea ($10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$) y por viento ($10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$), se establece que la circulación en la bahía es controlada principalmente por el viento. Para otros cuerpos de agua costeros la onda de marea puede ser, en contraste con la Bahía de Todos Santos, el factor que controle la circulación, si la onda de marea entra en resonancia. Esto se produce cuando el periodo de la onda es similar a algun periodo de resonancia propio de la cuenca.

El primer periodo de resonancia, que por otra parte es el mayor se calcula con la siguiente relación:

$$T = \frac{4 L}{\sqrt{gh}}, \quad (27)$$

donde L es el largo de la cuenca y h la profundidad.

Si se compara el comportamiento de la onda de marea en la Bahía de Todos Santos, con otra cuenca como la Bahía de Fundy, se encuentra que para esta última $T = 10.06 \text{ hr}$ ($L = 250 \text{ Km}$, $h = 70 \text{ m}$), es un periodo muy cercano que el de la M_2 . Este valor del primer periodo de resonancia indica que en esta zona la onda de marea es el principal factor que controla la circulación. Por el contrario para la Bahía de Todos Santos $T = 1.3 \text{ hr}$ ($L = 20 \text{ Km}$, $h = 30 \text{ m}$), es un periodo mucho más

pequeño que el de la Mz. Para que la Bahía de Todos Santos entrara en resonancia con la Mz, su profundidad tendría que ser del orden de 10^{-1} m ($L = 20$ Km), o su longitud del orden de 10^5 m ($h = 30$ m).

Por otro lado para la mayoría de los cuerpos de agua costeros del Pacífico Mexicano, como las bahías de: Sebastián Vizcaíno B.C., Yávaros Son., Guaymas Son., Manzanillo Col., cuya profundidad media es menor de 100 m, y con un largo de cuenca no mayor a 100 Km. Para esas dimensiones $T = 3.5$ hr, un periodo mucho menor que el de la Mz. Por lo tanto se espera que para todas estas bahías como el caso de la de Todos Santos, la circulación residual esté controlada principalmente por el viento.

Para el caso de la corriente de deriva, en el balance dinámico intervienen todas las fuerzas consideradas, en contraste con el balance de la corriente de marea, en donde el efecto de la rotación de la tierra no es apreciable. Esto se debe a que la corriente de deriva alcanza el estado estacionario ($\partial_t \equiv 0$) en un periodo mayor al del periodo inercial (movimientos subinerciales), lo cual implica que su escala horizontal es mayor al radio de deformación de Rossby (la razón entre la frecuencia del movimiento y la frecuencia inercial tiende a cero). Dentro de la franja costera la corriente de deriva tiene la dirección de la componente del viento paralela a la costa, mientras que en las zonas profundas tendió a desviarse a la derecha de la dirección del

viento. Una forma de explicar este comportamiento es que el esfuerzo en el fondo es menos efectivo cuando la profundidad de la columna de agua aumenta (ecuaciones 3 y 4).

En las regiones someras el movimiento inducido por el esfuerzo del viento es fuertemente afectado por la fricción en el fondo, determinando así la tendencia de la corriente a orientarse con la componente del viento paralela a la línea de costa. Por el contrario al aumentar la profundidad de la columna de agua la fricción en el fondo es menos determinante en la dinámica del movimiento, mientras que el efecto de la rotación de la tierra es más importante, reflejándose en la desviación de la corriente a la derecha de la dirección del viento.

La variabilidad estacional en la circulación refleja las variaciones en el viento sinóptico que están asociadas a la intensificación o debilitamiento del sistema de alta presión semipermanente centrado al Oeste de la costa occidental de Norteamérica (Pavía y Reyes, 1983).

Por otra parte la corriente de deriva predicha reproduce satisfactoriamente los rasgos de la circulación superficial encontrados con mediciones lagrangeanas (Alvarez, 1988). Este hecho es indicativo de que el movimiento del agua en la bahía es en esencia barotrópico, a excepción de la boca en donde las mediciones directas indican la presencia del sistema de la Corriente de California, caracterizado por gradientes verticales en el campo de velocidad.

A partir de la descripción de la corriente de deriva es posible estimar el tiempo de evacuado en la bahía, y la dirección del transporte. Si consideramos un volumen unitario que sigue una línea de corriente sin intercambio con las líneas de corriente vecinas, el tiempo medio que tardará una partícula de agua en abandonar la bahía, luego de recorrer toda la franja costera, es de una a dos semanas. Así por ejemplo las aguas frente al puerto de Ensenada, con viento de 5 m/s del NW tardarán 9 días en salir frente a Punta Banda. Las aguas que surgen frente a Punta San Miguel, serán transportadas al interior de la bahía en verano (vientos del NW, W, ND, y hacia afuera de la bahía durante invierno (vientos del S, SW) y con condición Santana (viento del E).

Los resultados obtenidos pueden aplicarse a problemas de contaminación tales como el cálculo del índice de susceptibilidad de contaminación (I.S.C) sugerido por Weyl (1976), el cual es una medida de la concentración final del contaminante en el ecosistema marino. Este índice es el recíproco del transporte a través de una sección de 1 Km de ancho y la profundidad promedio. Arce (1984) lo calculó para la zona adyacente a la pesquera del Pacífico, obteniendo un valor de 5.3 partes por billón (ppb), para una descarga de 1 ton./día. Usando los datos obtenidos a partir del modelo para esa misma zona se obtiene un valor de 21.8 ppb. La diferencia en los valores del I.S.C. se debe a que Arce (1984), estimó el transporte a partir de mediciones de la corriente superficial,

mientras que el modelo calcula precisamente el transporte. Por otra parte la circulación que se obtiene predice que los desechos arrojados al mar en esta zona, serán transportados en dirección al puerto de Ensenada en verano (vientos del NW, W, N), y hacia punta San Miguel en invierno (vientos del S, SW) y durante una condición Santana (viento del E).

En relación al efecto de la Corriente de California sobre la circulación de la bahía, se predice que únicamente la circulación en la conexión NW es modificada por el flujo medio de la corriente. El flujo medio de la Corriente de California, es un movimiento de gran escala (del orden de 10^4 m espacialmente y de meses temporalmente), por lo que no se espera que afecte pequeños cuerpos de agua costeros, como la bahía de Todos Santos. La formación de un meandro entre Punta San Miguel y las islas, restringido aproximadamente por la isóbata de 40 m, y el nulo efecto de la corriente en las partes más someras de la bahía, pueden indicar que otro factor limitante, además de las dimensiones de la cuenca, es la profundidad de la columna de agua.

La circulación barotrópica que se obtuvo representa en gran medida el movimiento del agua en la bahía, tal y como lo demuestran la comparación con mediciones directas. Una campaña sistemática de mediciones directas de corrientes y vientos, cuyo objetivo sea el de estudiar la estructura vertical y la distribución horizontal del campo de velocidad, podrían aclarar qué aspectos de la hidrodinámica que no fueron

tratados en el presente trabajo, deberían ser estudiados posteriormente.

Si los modos baroclínicos de la circulación en la bahía son importantes, sería necesario desarrollar o implementar un modelo de capas que nos permitiera resolver dichos modos.

Si se observara que dentro de la hidrodinámica de la bahía hay otros mecanismos que son de igual o mayor importancia que el viento, habría que mejorar el modelo incluyéndolos ya sea como términos en las ecuaciones de movimiento o como condiciones en la frontera.

LITERATURA CITADA

- Alvarez Sánchez, L.G., R. Hernández y R. Durazo. 1988. Patrones de deriva de trazadores lagrangeanos en la Bahía de Todos Santos. aceptado para su publicación en la revista Ciencias Marinas
- Arce Duarte, F.A. 1984. Efectos de contaminación en la zona costera de la Bahía de Todos Santos, B.C. Tesis Profesional, Universidad Autónoma de Baja California. 75 pp.
- Argote Espinoza, M. L., A. Amador y C. Morales. 1975. Distribución de los parámetros salinidad y temperatura y tendencias de circulación en la Bahía de Todos Santos, B.C. Memorias de la primera reunión del CIBCASIO, 3-30.
- Argote Espinoza, M.L. 1983. Perturbation of the density field by an island in a stratified sea. Ph.D. Thesis, University College of North Wales, Bangor. 118 pp.
- Barton, E.D. 1985. Low-frequency variability of currents and temperatures on the Pacific continental shelf off Northern Baja California, 1978 to 1979. Continental Shelf Research, 4, 425-443.
- Bowden, K.F. y L. Fairbairn. 1952. A determination of the frictional forces in a tidal current. Proceedings of the Royal Society of London, a214, 371-392.
- Bowden, K.F. 1983. Physical Oceanography of coastal waters. John Wiley and Sons, 302 pp.
- Courant, R., K. Friedrichs y H. Lewy. 1928. Über die

partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. Math. Ann., 100, 32-74.

Davies, A.M. y G.K. Furnes. 1979. Observed and computed M₂ tidal currents in the North sea. Journal of Physical Oceanography, 16, 237-257.

Godin, G., R. de la Paz-vela, N. Rodríguez y M. Ortiz. 1980. Revisión de los datos de mareas para la costa Occidental de México disponibles en el CICESE e interpretación de los resultados. CICESE. Reporte Técnico OC-80-02, 63 pp.

Godin, G. 1982. Teoría de las mareas. Apuntes en circulación. CICESE. Ensenada, B.C., México. 338 pp.

Gómez Valdéz, J. 1984. Estructura hidrográfica promedio frente a Baja California. Ciencias Marinas, 9, 75-86 pp.

Heaps, N.S. 1978. Linearized Vertically-integrated equations for residual circulation in coastal seas. Deutsche Hydrographische Zeitschrift, 31, 147-169.

Hunter, J.R. 1980. User's Manual for two dimensional numerical hydro-dynamical model. Unit for the Coastal and Estuarine Studies, Marine Science Laboratories, Menai Bridge. Report U80-5, 23 pp.

Hunter, J.R. 1981. A model of the M₂ and K₁ tides in Kuwait waters. Unit for the Coastal and Estuarine Studies, Marine Science Laboratories, Menai Bridge. Report U81-1, 29 pp.

Hunter, J.R. 1983. Numerical simulation of currents in Koombana Bay and the influence of the proposed new power station. The University of Western Australia.

Environmental Dynamics Report ED-83-049.

- Huthnance, J.M. 1981. On mass transport generated by tides a long waves. *Journal of Fluid Mechanic*, 102, 367-388.
- Kuipers, J. y C.B. Vreugdenhil. 1973. Calculations of two-dimensional horizontal flow. Delft Hydraul. Lab. Rep. basic Res. S163(1), 47 pp.
- Lax, P.D. y R.D Richtmyer. 1956. Survey of the stability of linear finite-difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* v., IX, 267-293.
- Maddock, L. y R.D. Pingree. 1978. Numerical simulation of the Portland tidal eddies. *Estuarine Coastal Marine Science*, 6, 353-363.
- Maier-Reimer, E. 1977. Residual circulation in the North Sea due to the M₂-tide and mean annual Wind Stress. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 30, 69-80.
- Mapa batimétrico: Todos Santos South, 120-16-4, Zona R-11. Editado por Continental Shelf Data Systems, 1971.
- Marchuk, G.I., R. Gordeev, B. Kagan y W. Rivkind. 1972. Numerical method to solve tidal dynamics equations and results of its testing (in Russian). Published by Computational Centre, Novosibirsk.
- Mooers, C. N. K., L. M. Bogert, R. L. Smith y J.G. Pattullo. 1968. A compilation of observations from moored current meters and thermographs. Data report 30, Dept. Oceanogr. Oregon State University, Corvallis, 91-92.
- Nihoul, J.C.J. 1980. Residual circulation, long waves and

- mesoscale eddies in the North Sea. *Oceanologica Acta*, 3, 309-316.
- Ocampo Torres, F. 1983. Circulación en la Bahía de Todos Santos. Universidad Autónoma de Baja California. Reporte de Datos 83-01, 44 pp.
- Panofsky, H.A. y G.W. Brier. 1968. Some applications of statistics to meteorology. The Pennsylvania State University Press, 224 pp.
- Pavía, E. y S. Reyes. 1983. Variaciones espaciales y estacionales del viento superficial en la Bahía de Todos Santos, B.C. *Ciencias Marinas*, 9, 151-167.
- Phillips, O.M. 1977. The dynamics of the upper ocean. Cambridge at the University Press. 261 pp.
- Pingree, R.D. y L. Maddock. 1977. Tidal residual in the English Channel. *Journal of the Marine Biological Association of the United Kingdom*, 57, 339-354.
- Pingree, R.D. y L. Maddock. 1979a. Tidal flow around an island with a regular sloping bottom topography. *Journal of the Marine Biological Association of the United Kingdom*, 59, 699-710.
- Pingree, R.D. y L. Maddock. 1979b. The tidal physics of headland flows and offshore tidal bank formation. *Marine Geology*, 32, 269-289.
- Pingree, R.D. y D.K. Griffiths. 1980a. Currents driven by a steady uniform wind stress on the shelf seas around the British Isles. *Oceanologica Acta*, 3, 227-236.

- Pingree, R.D. y D.K. Griffiths. 1980b. A numerical model of the M₂ tide in the Gulf of St. Lawrence. *Oceanologica Acta*, 3, 221-225.
- Pingree, R.D. y G.T. Mardell. 1987. Tidal flows around the channel islands. *Journal of the Marine Biological Association of the United Kingdom*, 67, 691-707.
- Ramming, H.G. y Z. Kowalik. 1980. Numerical modelling of marine hydrodynamics: Applications to dynamic physical processes. *Elsevier Oceanography Series*, 28, 368 pp.
- Reyes, S., G. Vogel, E. Pavia y A. Pares. 1983. Synoptic effects on the local winds in Todos Santos Bay: A case study. *Monthly Weather Review*, 111, 1494-1500.
- Robinson, I.S. 1981. Tidal vorticity and residual circulation. *Deep-Sea Research*, 28, 195-212.
- Robinson, I.S. 1983. Tidally induced residual flows. *Estuarine Physical oceanography of coastal and shelf seas*. Editor, B. Johns, *Elsevier Oceanography Series*, 35, 470 pp.
- Salas de León, David A. 1985. Modelisation de la maree M₂ et de la circulation residuelle dans le Golfe du Mexique. le Grade de Docteur en Oceanologie, *Universite de Liege*, 239 pp.
- Sündermann, J. 1977. The semi-diurnal principal lunar tide M₂ in the Bering Sea. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 30, 91-101.
- Tatsusaburo, I. y L.S. Malcolm. 1986. A numerical model of the M₂ and K₁ tide in the Northwestern Gulf of Alaska. *Journal of Physical Oceanography*, 17, 698-704.

- Tee, K.T. 1976. Tide-induced residual current, a 2-d numerical nonlinear tidal model. *Journal of Marine Research*, 34, 603-628.
- Thorade, H. 1928. Newton's anschauungen über ebbe und flut. *Ann. Hydr. Mar. Met.* 56, 366 pp.
- Weyl, P.K. 1976. Pollution susceptibility: An enviromental parameter for coastal zone management. *Journal of Coastal Zone Management*, 2, 327-343.
- Yasuda, H. 1980. Generating mechanism of the tidal residual current due to the coastal boundary layer. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 35, 241-252.
- Zimmerman, J.T.F. 1981. Dynamics, diffusion and geomorphological significance of tidal residual eddies. *Nature*, 290, 549-555.

APENDICE

Integración vertical de las ecuaciones de movimiento

En este apéndice se presenta el promediado vertical de las ecuaciones primitivas. La razón por la que se incluye en el escrito de la tesis es porque por una parte no es presentado en la mayoría de artículos que utilizan las ecuaciones de movimiento integradas en la vertical, y por otra que aclara ciertas suposiciones que se hacen. El trabajo que sirve de base es Salas de León (1985), aunque también pueden revisarse Heaps (1978); Kuipers y Vreugdenhil (1973).

Ecuaciones primitivas

Las ecuaciones primitivas son las que expresan la conservación de momento y de masa, presentadas en la sección 2.1 del capítulo 2:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + f \hat{k} \times \underline{v} = -g \nabla \eta + \nabla \cdot (\nu \nabla \underline{v}), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0, \quad (2)$$

Definiciones

Antes de integrar las ecuaciones (1) y (2), se escriben las condiciones de frontera material y la definición de la

velocidad horizontal que se utilizarán posteriormente. Las condiciones en $z = \eta$ y $z = -h$ son:

$$w(\eta) = \partial_t \eta + u \partial_x \eta + v \partial_y \eta. \quad (\text{a.1})$$

$$w(-h) = -(u \partial_x h + v \partial_y h). \quad (\text{a.2})$$

La velocidad horizontal se define como:

$$(u, v) \equiv (U, V) + (u', v'), \quad (\text{a.3})$$

donde:

$$(U, V) \equiv \frac{1}{(\eta+h)} \int_{-h}^{\eta} (u, v) dz. \quad (\text{a.4})$$

$$\frac{1}{(\eta+h)} \int_{-h}^{\eta} (u', v') dz \equiv 0. \quad (\text{a.5})$$

En la integración de las ecuaciones se utilizó la regla de Leibnitz para diferenciar integrales.

Integración de la ecuación de conservación de masa

Se integra la ecuación (2).

$$\int_{-h}^{\eta} (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) dz =$$

$$\partial_x \left(\int_{-h}^{\eta} u \, dz \right) - u \partial_x \eta - u \partial_x h +$$

$$\partial_y \left(\int_{-h}^{\eta} v \, dz \right) - v \partial_y \eta - v \partial_y h +$$

$$w(\eta) - w(-h) = 0$$

$$\partial_t \eta + \partial_x \left(\int_{-h}^{\eta} u \, dz \right) + \partial_y \left(\int_{-h}^{\eta} v \, dz \right) = 0$$

Con la definición del promedio en la vertical de la velocidad horizontal (a.4) se llega a la ecuación (5) de la sección 2.1:

$$\partial_t \eta + \partial_x [(\eta + h) U] + \partial_y [(\eta + h) V] = 0. \quad (5)$$

Integración de la ecuación de conservación de momento

Se integra la componente en x de la ecuación (1), término a término. Se parte de:

$$\begin{aligned} \partial_t u = & -u \partial_x u - v \partial_y u - w \partial_z u \\ & - g \partial_x \eta \\ & + f v \\ & + \nu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u) \end{aligned}$$

donde para la transferencia de momento consideramos un medio isotrópico.

Integración de la aceleración local

$$\int_{-h}^{\eta} \partial_t u \, dz = \partial_t [(\eta + h) U] - u \partial_t \eta, \quad (\text{a.6})$$

empleando la definición del promedio en la vertical de la velocidad horizontal (a.4).

Integración del gradiente de presión

$$\int_{-h}^{\eta} g \partial_x \eta \, dz = g (\eta + h) \partial_x \eta. \quad (\text{a.7})$$

Integración del término de coriolis

$$\int_{-h}^{\eta} f v \, dz = f (\eta + h) v. \quad (\text{a.8})$$

Integración del tensor de esfuerzo

$$\int_{-h}^{\eta} \nu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u) \, dz + \int_{-h}^{\eta} \nu \partial_{zz} u \, dz =$$

$$N (\eta + h) [\partial_{xx} U + \partial_{yy} U] + \frac{\tau_x^b - \tau_x^f}{\rho_m} \quad (\text{a.9})$$

utilizando la definición de la velocidad horizontal (a.3)-(a.5), y donde τ_x^s , τ_x^f son los esfuerzos en la superficie y el fondo.

Integración de los términos advectivos

Para integrar los términos advectivos utilizamos la ecuación de continuidad (2) para escribirlos como:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} u u + \frac{\partial}{\partial y} v u + \frac{\partial}{\partial z} w u$$

integraremos:

$$\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} u u + \frac{\partial}{\partial y} v u \right) dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} w u dz =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u u dz - u u \frac{\partial}{\partial x} \eta - u u \frac{\partial}{\partial x} h +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v u dz - v u \frac{\partial}{\partial y} \eta - v u \frac{\partial}{\partial y} h +$$

$$w u \Big|_{-h}^{\eta}$$

que con las condiciones en $z = \eta$, $z = -h$ (a.1)-(a.2) se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v u dz + u \frac{\partial}{\partial t} \eta$$

y considerando la definición de velocidad horizontal (a.3)-(a.5) se escribe como:

$$\partial_x [(\eta + h) U U] + \partial_y [(\eta + h) V U] + \partial_x \int_{-h}^{\eta} u^p u^p dz + \partial_y \int_{-h}^{\eta} v^p u^p dz + u \partial_t \eta. \quad (a.10)$$

Las dos integrales de la relación anterior contienen la información de la estructura vertical de la velocidad horizontal.

Finalmente sumando (a.6)-(a.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_t [(\eta + h) U] = & -\partial_x [(\eta + h) U U] - \partial_y [(\eta + h) V U] \\ & - g (\eta + h) \partial_x \eta \\ & + f (\eta + h) \bar{v} \\ & + \frac{\tau_x^b - \tau_x^f}{\rho_m} \\ & + A (\eta + h) [\partial_{xx} \bar{u} + \partial_{yy} \bar{u}] \end{aligned}$$

y utilizando la ecuación de continuidad (2) se llega a la ecuación (3) de la sección 2.1:

$$\partial_t U = -U \partial_x U - V \partial_y U - g \partial_x \eta + fV + \frac{\tau_x^b - \tau_x^f}{\rho_m (\eta + h)} + A (\partial_{xx} U + \partial_{yy} U). \quad (3)$$

En forma similar se obtiene la ecuación (4) de la sección 2.1:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fU + \frac{\tau_y^a - \tau_y^f}{\rho_m (\eta + h)} + \Lambda (\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}) \quad (4)$$

Para finalizar hay que resaltar dos aspectos. Por una parte al integrar en la vertical el tensor de esfuerzo, la transferencia de momento a través de los planos verticales x - z , y - z son parametrizados como función del promedio en la vertical de la velocidad horizontal, con un coeficiente N (a.9) que aunque formalmente no puede ser justificado, es la forma mas simple de cerrar el sistema de ecuaciones (Robinson, 1983). El problema de cerradura se resuelve al representar los procesos de transferencia turbulentos con el flujo medio.

Por otra parte al integrar en la vertical los términos advectivos la información de la estructura vertical de la velocidad horizontal queda representada en las dos integrales de la relación (a.10). Robinson (1983) las expresa como los gradientes horizontales de la profundidad total por la fluctuación de la velocidad. Huthnance (1981), los incluye en sus ecuaciones de esta forma para considerar el efecto de la fricción en el fondo como difusor vertical de momento. Heaps (1978), tomando en cuenta que son de la forma de los esfuerzos de Reynolds los incorpora a los esfuerzos turbulentos laterales con un coeficiente de viscosidad turbulenta lateral, Λ (ecuaciones 3 y 4) resolviendo de forma sencilla el problema

de cerradura.