

Tesis defendida por

**Francisco López Monzalvo**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

*Director del Comité*

---

Dra. Larisa Burtseva

*Miembro del Comité*

---

Dr. Andrey Chernykh

*Miembro del Comité*

---

Dr. José Alberto Fernández Zepeda

*Miembro del Comité*

---

Dr. José Antonio García Macías

*Coordinador del programa de  
posgrado en Ciencias de la computación*

---

Dr. Jesús Favela Vara

*Director de Estudios de Posgrado*

Agosto de 2013

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**Programa de posgrado en ciencias  
en ciencias de la computación**

---

**Diseño de algoritmos bioinspirados para el problema multiobjetivo  
p-mediana bajo incertidumbre.**

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

Presenta:

**Francisco López Monzalvo**

Ensenada, Baja California, México, 2013

**Resumen** de la tesis de **Francisco López Monzalvo**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN. Ensenada, Baja California, Agosto de 2013.

**Diseño de algoritmos bioinspirados para el problema multiobjetivo  
p-mediana bajo incertidumbre.**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Director de Tesis

El problema de localización de instalaciones bajo ambientes de incertidumbre es un problema importante y desafiante. Su objetivo es la ubicación óptima de las instalaciones o centros de distribución que sirven a un conjunto de nodos o clientes que se encuentran distribuidos en una región determinada. Una forma de resolver este problema es modelando la incertidumbre por medio de escenarios para optimizar algún criterio de robustez, tal como el lamento promedio o el máximo lamento sobre todos esos escenarios. Se propone entonces emplear una metodología de solución y análisis aproximado de problemas multiobjetivo basada en algoritmos evolutivos para resolver un problema de localización de instalaciones (p-mediana) multiobjetivo bajo incertidumbre. Para ello, el estudio se divide en dos partes: en la primera se modela el problema de diseño robusto como uno de optimización del lamento promedio y máximo lamento, el cual se resuelve por medio de un algoritmo evolutivo, el NSGA-II. Con este mismo algoritmo se analiza el efecto de las variaciones en el cambio de los parámetros del problema y del algoritmo evolutivo sobre la calidad de las soluciones obtenidas. En la segunda parte se propone modelar el diseño robusto-confiable como un problema de optimización de tres objetivos: lamento promedio, máximo lamento y confiabilidad.

Los resultados experimentales muestran que: i) El algoritmo evolutivo propuesto resuelve, con buena aproximación al frente Pareto, tanto el diseño robusto como el robusto-confiable. ii) Los frentes no dominados más robustos se obtienen cuando la cota inferior de la función objetivo del producto demanda-distancia entre nodos minoristas y centros de distribución es más cercana al óptimo. iii) Cuando el número de centros de distribución se aproxima al número de nodos, se obtienen soluciones no dominadas más robustas, sin embargo hay casos donde es posible obtener, con un número menor de centros de distribución, un frente Pareto que domina a otro obtenido con un número mayor de centros de distribución, como se muestra en la comparación de un caso de 3 centros de distribución contra uno de 5. iv) La evidencia experimental no permite definir una regla de comportamiento general para la robustez en el caso en el que se deja fijo el número de centros de distribución y se varía el número de clientes. v) Con respecto a los resultados del modelo robusto-confiable, más que generar conclusiones definitivas, nos

motiva a plantear preguntas interesantes, tales como, ¿cuánto tiempo adicional necesita invertir el algoritmo para conseguir, con tres funciones objetivo, la misma calidad de solución obtenida al optimizar dos funciones objetivo?, ¿cuál es la relación entre el costo computacional al optimizar al mismo tiempo tres funciones objetivo y el costo al optimizar dos para distintos valores del tercer objetivo?.

**Palabras Clave:** Problema p-Mediana, Incertidumbre, Escenarios, Robustez, Lamento, Confiabilidad, Algoritmos Evolutivos Multi-Objetivo, NSGA-II.

**Abstract** of the thesis presented by **Francisco López Monzalvo**, in partial fulfillment of the requirements for the Doctor in Sciences degree in Computer Science. Ensenada, Baja California, August 2013.

**A multi-objective evolutive algorithm approach for the multiobjective p-Median problem under uncertainty**

Abstract approved by:

---

PhD. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Thesis advisor

Facility location problem under uncertain environments is an important and challenging problem that deals with the optimal location of facilities, or distribution centres, that serve a set of spatially distributed retailers nodes. One way to deal with this problem is by modelling uncertainty by means of scenarios, while some robustness criteria, such as average and maximum regrets, are optimised over them. We propose to use a solution methodology for multi-objective problems based on evolutionary algorithms, in order to solve a multi-objective facility location problem (p-median) under uncertainty. Therefore, this study is divided into two parts: first, we model the robust design as an optimization problem that seeks to minimize the average and maximum regrets, we then analyse the effects of variations in the problem parameters on the quality of the Pareto solutions. In the second part, we propose to model the robust and reliable design as an optimization problem considering three objective functions: average regret, maximum regret, and reliability.

The experimental results show that: i) The proposed evolutionary algorithm solves, with good approximation to the Pareto front both, the robust and the robust and reliable facility location model. ii) Solutions with higher robustness are obtained when the lower bound of the objective function, related to the demand-distance product between retailer nodes and distribution centres, is closer to the optimum. iii) When the distribution centres number is close to the retailer nodes number, the most robust non-dominated fronts are obtained, however, there are cases where it is possible to find, with a smaller number of distribution centres, a Pareto front which dominates another one that is obtained with a larger number of distribution centres. iv) The experimental evidences do not allow us to state a general behaviour rule for the robustness in the case where the number of distribution centres is fixed and the number of retailer nodes is varied. v) In the case of the robust and reliable model, the experimental results motivate us to formulate a set of interesting questions such as, how much additional time does the algorithm need to invest in order to achieve, with three objective functions, the same quality of solution obtained while optimizing two objective functions?, in terms of computation time, what is the relationship between optimizing simultaneously three

objective functions, compared to optimizing two of them for different values of the third one?

**Keywords:** p-median problem, Uncertainty, Scenarios, Robustness, Regret, Reliability, Multi-objective evolutionary algorithm, NSGA-II.

# Dedicatoria

# Agradecimientos

Al **CICESE** y en particular a su departamento de **Ciencias de la Computación**, por haberme permitido descubrir un gusto que nunca imaginé y que espero tener la habilidad de convertirlo en mi vocación principal.

Al **CONACyT** por su confianza y su invaluable apoyo económico durante mis estudios de posgrado sin el cual este resultado no sería posible.

De forma particular al **Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez** por su paciencia, su asesoría, y su acompañamiento durante mi tránsito por el CICESE. Él ha sido una fuente de inspiración en mi formación profesional como un futuro investigador, pero también en el equilibrio que esta labor debe tener con los asuntos familiares y personales. Muchas gracias, doctor.

Agradezco igualmente a los miembros de mi Comité evaluador: **Dra. Larysa Burtseva**, **Dr. Andrei Chernykh** y **Dr. José Alberto Fernández Zepeda**. Sus comentarios, observaciones y sugerencias fueron de gran ayuda para mejorar la calidad del trabajo que aquí se presenta. Muchas gracias por su paciencia.

A la **Universidad del Caribe** y en particular a su **Departamento de Ciencias Básicas e Ingenierías**, por todos los retos que impuso en mis actividades, fortaleciendo mi relación con el CICESE debido al contraste en sus estilos de trabajo, lo que me permitió apreciar mis fortalezas y oportunidades, pero sobre todo, me preparó para sobreponerme a las amenazas que sólo retrasaron la llegada a mi meta. Muy en particular a mis becarios porque su ayuda llegó siempre a tiempo.

En particular, a los maestros: **David Israel Flores Granados**, quien siempre me brindó su apoyo en los momentos críticos cuando la duda y las amenazas pretenden acabar con una ilusión, y al maestro **Flavio Reyes Ramírez**, por haberme invitado a formar parte de la “masa crítica” que dió origen a esta grata aventura académica. Para ellos mi respeto y admiración porque compartimos experiencias semejantes.

A la srita. **Rocío Giner de los Ríos Leger**, quien como amiga que es, quitó de mi camino todo obstáculo cuando parecía imposible. Gran parte de este resultado te lo debo a ti y nunca saldaré mi deuda contigo, ¿me aceptarías un gracias para empezar?

A mis padres **Inés y Francisco**, quienes me enseñaron quizás lo único que pude aportar en esta labor: *“nunca desistir y continuar trabajando hasta el final, sin importar el reto”* .

Finalmente, pero no menos importante, a mi familia: **Laura, David y Raquel**, quienes esperando todo, nunca se atrevieron a pedir nada y quienes siempre han sido el motivo de todo cuanto emprendo. Muchas gracias por soportar firmes hasta el final.

# Contenido

	Página
<b>Resumen en español</b>	<b>i</b>
<b>Resumen en inglés</b>	<b>iii</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vi</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xiii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes y motivación . . . . .	1
1.2 Planteamiento del problema . . . . .	5
1.3 Objetivos de investigación . . . . .	8
1.4 Metodología propuesta . . . . .	8
1.5 Contribuciones de la investigación . . . . .	10
1.6 Organización del trabajo . . . . .	12
<b>2. Revisión de literatura</b>	<b>14</b>
2.1 El problema de localización de instalaciones en el diseño de la cadena de suministro . . . . .	14
2.2 El factor de incertidumbre en el FLP . . . . .	17
2.3 El modelado de la incertidumbre en el FLP . . . . .	19
2.3.1 El enfoque de escenarios . . . . .	20
2.3.2 Optimización robusta mono-objetivo . . . . .	23
2.3.3 RO multiobjetivo . . . . .	26
2.4 Confiabilidad del FLP-multiobjetivo . . . . .	28
2.5 Preguntas de investigación en el FLP incierto y confiable . . . . .	31
<b>3. Formulación del problema</b>	<b>34</b>
3.1 Formulación del PMP robusto . . . . .	35
3.2 Formulación del PMP robusto y confiable . . . . .	37
3.3 Conceptos básicos de la optimización multiobjetivo . . . . .	40
<b>4. Propuesta de algoritmos evolutivos para la solución experimental de los modelos PMP</b>	<b>43</b>

# Contenido

	Página
4.1 Metodología empleada en la solución experimental de los modelos PMP propuestos . . . . .	43
4.2 Algoritmos propuestos . . . . .	46
4.2.1 Algoritmo pMNSGA-II robusto . . . . .	47
4.2.2 Algoritmo pMNSGA-II robusto y confiable . . . . .	53
4.3 Resumen del capítulo . . . . .	57
<b>5. Marco experimental y resultados</b>	<b>59</b>
5.1 Generación de casos de prueba . . . . .	59
5.2 Experimentos y análisis de resultados respecto al pMNSGA-II robusto . . . . .	63
5.2.1 Experimento 1.1 ¿Qué tan importante es la calidad de la cota inferior de $V_k^*$ en la calidad del mejor frente <b>ND</b> obtenido por el pMNSGA-II?	63
5.2.2 Experimento 1.2 ¿Cómo cambia el mejor frente <b>ND</b> con respecto al número de CDs seleccionados?	68
5.2.3 Experimento 1.3 ¿Cómo cambian los frentes <b>ND</b> con respecto al cambio en el número de nodos para un número fijo de CDs ?	70
5.2.4 Experimento 1.4 ¿Es posible encontrar un conjunto de soluciones robustas de alta calidad para el problema definido por (3.2) a (3.3f), al emplear sólo las soluciones óptimas obtenidas de la minimización de $V_k$ en la función (3.1) para cada escenario $k$ ?	74
5.3 Experimentos y análisis de resultados respecto al pMNSGA-II robusto y confiable . . . . .	79
5.3.1 Experimento 2.1 ¿Cuál es la relación de compromiso entre el lamento esperado, el máximo lamento y la confiabilidad?	80
5.3.2 Experimento 2.2 ¿Es posible obtener el frente Pareto entre el máximo lamento y la confiabilidad al optimizar las funciones de una de las proyecciones de la hipersuperficie de frentes <b>ND</b> ?	88

# Contenido

	Página
5.3.3 Experimento 2.3 ¿Cuáles son los efectos en el compromiso entre el máximo lamiento y la confiabilidad, causados por cambios en el número de nodos? . . . . .	93
5.4 Discusión del capítulo . . . . .	95
<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>97</b>
<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>104</b>
<b>Acrónimos</b>	<b>117</b>
<b>Anexos</b>	<b>119</b>
<b>A. Cálculo de las distancias ortodrómicas (método del Gran Círculo)</b>	<b>119</b>
A.1 Radio de la Tierra . . . . .	121
A.2 Ejemplo de cálculo de la distancia ortodrómica entre dos coordenadas	121
<b>B. Resultados experimentales</b>	<b>123</b>
B.1 Experimento 1 . . . . .	123
B.2 Experimento 2 . . . . .	128
B.3 Experimento 3 . . . . .	132
B.4 Experimento 4 . . . . .	136

# Índice de Figuras

Figura	Página
1.1	Esquema general de la cadena de suministro . . . . . 2
1.2	Esquema general del problema de localización de instalaciones . . . . . 3
1.3	Ejemplo de selección de CDs - asignación de minoristas. . . . . 7
1.4	Esquema de optimización de “caja negra” para la solución del problema multiobjetivo . . . . . 9
4.1	Diagramas de flujo de metodologías empleadas en la optimización robusta de problemas multiobjetivo . . . . . 45
4.2	Asignación de 85 nodos a 3 CDs en escenarios distintos . . . . . 49
4.3	Asignación de 85 nodos a 3 CDs (versión MORO confiable) . . . . . 54
5.1	Ubicación de los puntos de atracción para la generación de escenarios . . . . . 61
5.2	Frente Pareto consolidado $n=1500$ , $p=5$ CDs . . . . . 66
5.3	Variaciones en el número de CDs para los frentes <b>ND</b> consolidados . . . . . 69
5.4	Asignación de 85 nodos a 3 CDs y a 5 CDs . . . . . 70
5.5	Comparación de frentes <b>ND</b> para dos casos de selección de CDs . . . . . 71
5.6	Comparación de soluciones BSC <i>vs.</i> pMNSGA-II . . . . . 77
5.7	Hipersuperficie Pareto obtenida por optimización simultánea de 3 funciones objetivo . . . . . 83
5.8	Proyección entre el lamento esperado versus el lamento minimax. . . . . 85
5.9	Proyección sobre el plano definido por el lamento esperado y la confiabilidad. . . . . 86
5.10	Proyección sobre el plano definido por el lamento minimax y la confiabilidad . . . . . 87
B.1	Frente Pareto consolidado $n=49$ , $p=5$ CDs . . . . . 124
B.2	Frente Pareto consolidado $n=88$ , $p=5$ CDs . . . . . 124
B.3	Frente Pareto consolidado $n=150$ , $p=5$ CDs . . . . . 125
B.4	Frente Pareto consolidado $n=300$ , $p=5$ CDs . . . . . 125

# Índice de Figuras

Figura	Página
B.5 Frente Pareto consolidado $n= 700$ , $p=5$ CDs . . . . .	126
B.6 Frente Pareto consolidado $n= 1500$ , $p=5$ CDs . . . . .	126
B.7 Conjunto de soluciones para $n=6$ , $p=4$ y la solución óptima para $p=2$ . .	129
B.8 Frente Pareto consolidado $n= 1500$ , $p=5$ CDs . . . . .	130
B.9 Frente Pareto consolidado $n= \{49, 88, 150, 300\}$ , $p=5$ CDs . . . . .	133
B.10 Frente Pareto consolidado $n= \{49, 88, 150, 300\}$ , $p=10$ CDs . . . . .	133
B.11 Frente Pareto consolidado $n= \{49, 88, 150, 300\}$ , $p=15$ CDs . . . . .	134
B.12 Frente Pareto consolidado $n= \{49, 88, 150, 300\}$ , $p=20$ CDs . . . . .	134
B.13 Frente Pareto consolidado $n= \{49, 88, 150, 300\}$ , $p=30$ CDs . . . . .	135
B.14 Frente Pareto consolidado $n= \{49, 88, 150, 300\}$ , $p=\{5, 10, 15, 20, 30\}$	135

# Índice de Tablas

Tabla	Página	
5.1	Ubicación de los “puntos de atracción” por cada escenario. . . . .	61
5.2	Definición de parámetros experimentales del algoritmo pMNSGA-II . . .	64
5.3	Tiempos promedio de ejecución del algoritmo NSGA-II . . . . .	67
5.4	Parámetros experimentales para obtener el frente <b>ND</b> consolidado . . .	72
5.5	Relación de frentes <b>ND</b> para un número fijo de CDs . . . . .	73
5.6	Selección óptima de CDs por escenario para la selección de CDs por consenso . . . . .	75
5.7	Frecuencia de selección de CDs en 9 escenarios . . . . .	75
5.8	Comparación de soluciones BSC <i>vs.</i> BGA para $n=88$ y $p=5$ . . . . .	76
5.9	Comparación de calidad de frentes de soluciones (BSC versus BGA) . .	78
5.10	Soluciones <b>ND</b> de la hipersuperficie Pareto . . . . .	83
5.11	Comparación de valores de Lamento Minimax y tiempo de cálculo . . .	89
A.1	Ejemplo de coordenadas A y B . . . . .	121
B.1	Intervalos de tiempo de cálculo de $V_k^*$ empleando el pMNSGA-II . . . .	127
B.2	Conjunto de soluciones para el caso de estudio $n=6$ , $p=4$ y $n=6$ , $p=2$ .	131
B.3	Selección óptima de CDs por escenario para $n=49$ , $p=5$ y derivación de la selección de CDs por consenso. . . . .	137
B.4	Comparación de soluciones BSC <i>vs.</i> BGA para $n=49$ , $p=5$ . . . . .	137
B.5	Selección óptima de CDs por escenario para $n=88$ , $p=5$ y derivación de la selección de CDs por consenso. . . . .	138
B.6	Comparación de soluciones BSC <i>vs.</i> BGA para $n=88$ , $p=5$ . . . . .	138
B.7	Selección óptima de CDs por escenario para $n=150$ , $p=5$ y derivación de la selección de CDs por consenso. . . . .	139
B.8	Comparación de soluciones BSC <i>vs.</i> BGA para $n=150$ , $p=5$ . . . . .	139

# Índice de Tablas

Tabla	Página
B.9 Selección óptima de CDs por escenario para $n=300$ , $p=5$ y derivación de la selección de CDs por consenso. . . . .	140
B.10 Comparación de soluciones BSC <i>vs.</i> BGA para $n=300$ , $p=5$ . . . . .	140

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes y motivación

La administración de la cadena de suministro tiene como objetivo tomar las decisiones respecto a la adquisición, producción y distribución de bienes con el fin de satisfacer las necesidades de los clientes de una manera efectiva y eficiente (*Vitasek, 2010*); por lo que las instalaciones que integran la red básica de la cadena de suministro (productores o fabricantes, sistemas de transporte, centros de distribución, tiendas minoristas o clientes y consumidores final) tienen el objetivo de manejar y distribuir las mercancías desde el proveedor inicial hasta el consumidor final (ver Figura (1.1)). Estas decisiones dependen del diseño óptimo de la cadena de suministro, mismo que está basado en la correcta ubicación de las instalaciones que la conforman (*Simchi-Levi, et al., 2000*). Al problema de definir adecuadamente dicha ubicación se le conoce como problema de localización de instalaciones (*Daskin, 1995*). En la Figura (1.2) se muestra un conjunto de nodos que se encuentran distribuidos en una región determinada. De este conjunto de nodos existe un subconjunto de ellos que se seleccionan como centros de distribución y que atienden la demanda del resto de los nodos o clientes minoristas a los que han sido asignados, tal y como muestran las flechas. Este es el esquema general del problema de localización de instalaciones.

El riesgo que implica tomar una decisión errónea durante el diseño de la cadena de suministro, respecto a la localización de instalaciones, se observa a largo plazo y

se supone como permanente dado que la reversibilidad de esta decisión resulta complicada y extremadamente costosa (Surti y Hassini, 2012), por lo que vale la pena invertir tiempo en decidir la ubicación correcta de las instalaciones que la integran. Desafortunadamente, las técnicas tradicionales que se emplean para resolver este tipo de problema requieren de un tiempo considerable para coleccionar la información y sus resultados prevalecen por un corto tiempo debido a condiciones pasajeras (Maynard y Kjell, 2007); por este motivo, es posible que las soluciones que son óptimas en las condiciones actuales, dejen de serlo bajo condiciones futuras (Ben-Tal y Nemirovski, 2002). Es precisamente la incertidumbre que rodea: la estimación de parámetros tales como la demanda de minoristas, el cálculo del impacto de posibles riesgos y/o los errores de

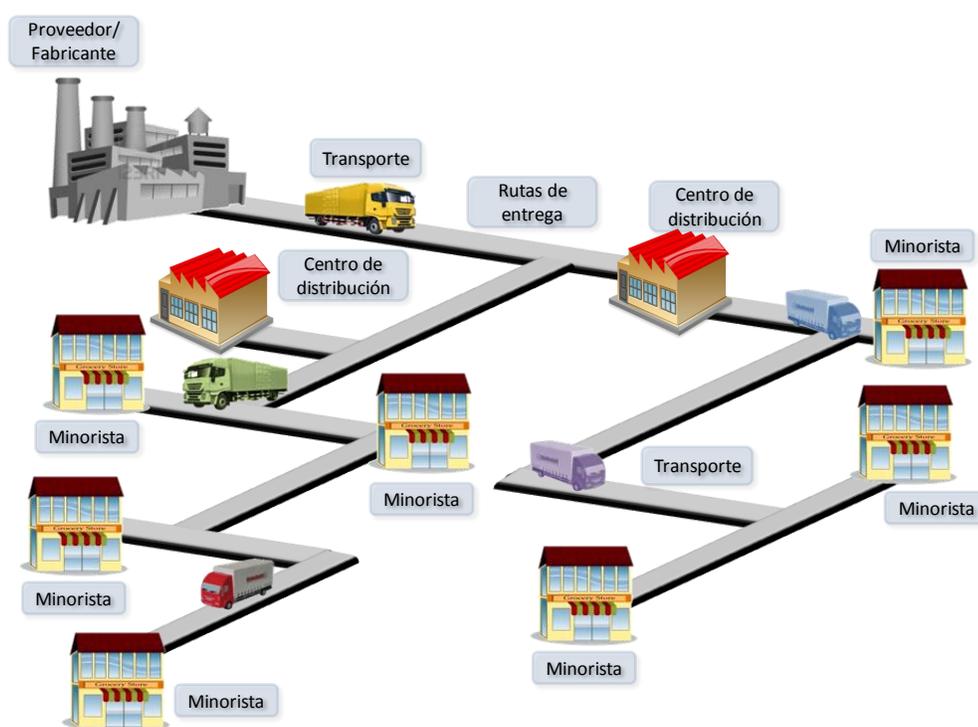


Figura 1.1: Esquema general de la cadena de suministro. Figura elaborada por el autor de la tesis.

medición de las variables de los modelos de localización (costos, distancias, tiempos, etc.) (Klibi y Martel, 2009; Min y Zhou, 2002), el principal factor que ha estimulado el interés en la solución del problema de localización en las últimas tres décadas (Zanjirani, et al., 2010). De hecho, a pesar de tener certidumbre en los parámetros que definen la cadena de suministro, el sistema aún puede encarar interrupciones diversas debido a factores naturales o provocados (Snyder, 2003). Son precisamente estas condiciones inciertas y/o de riesgo, las que generan la necesidad de incorporar el factor incertidumbre en las decisiones estratégicas del problema de localización de instalaciones (Mulvey, et al., 1995).

Existen diversas formas de modelar la incertidumbre en el problema de localización de instalaciones, una de ellas es la optimización robusta cuyo objetivo es encontrar las soluciones que presentan la menor degradación ante la presencia de incertidumbres

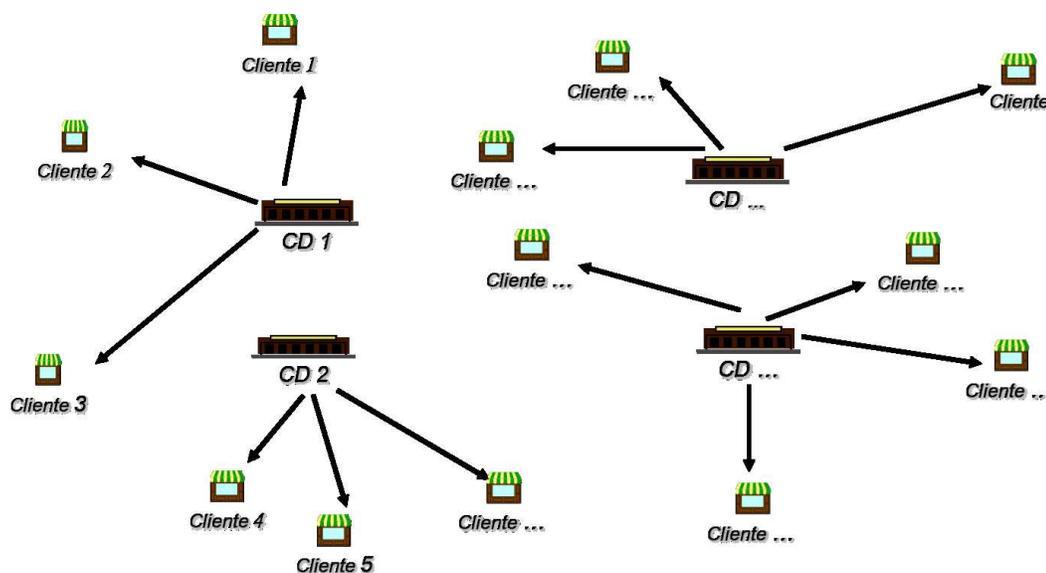


Figura 1.2: Esquema general del problema de localización de instalaciones donde se observan las asignaciones de nodos minoristas (Cliente  $i$ ) a los centros de distribución seleccionados (CD  $j$ ). Figura elaborada por el autor de la tesis.

en el modelo (e.g., costos, tiempos de transporte, demandas) (*Birge y Louveaux, 2011; Mulvey, et al., 1995; Snyder, 2003*), aunque no necesariamente sea una solución óptima bajo ninguna de esas condiciones. De entre estos modelos, el que se basa en escenarios permite definir diversos niveles de incertidumbre a través de un conjunto de escenarios, cada uno con su respectiva probabilidad de ocurrencia (*Daskin, et al., 1997; Mulvey, et al., 1995*). Bajo este enfoque, un par de medidas de robustez encontradas en la literatura son: el lamento (del término en inglés *regret*<sup>1</sup>) promedio y el máximo lamento (*Savage, 1951*), las que, por lo general, están en conflicto mutuo, por lo que el problema a resolver es uno de tipo multiobjetivo (*Gabrel, et al., 2012; Iancu y Trichakis, 2012*) y el cual se define más adelante. Es importante mencionar que el término lamento se define como la diferencia entre el valor de la función objetivo de esa solución y el valor óptimo para el mismo escenario (*Savage, 1951*). Por otro lado, cuando la solución obtenida es robusta en todos los escenarios considerados, se dice que es 100 % confiable, por lo que una solución es  $\alpha$ -confiable (donde  $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0.00 \leq \alpha \leq 1.00\}$ ) cuando la suma de las probabilidades de los escenarios seleccionados alcanza, por lo menos, el valor  $\alpha$  establecido (*Daskin, et al., 1997*).

Un problema multiobjetivo tiene un número  $\omega$  de funciones objetivo, mismas que se pretende minimizar o maximizar (según corresponda) y que se encuentran sujetas a un conjunto de restricciones, por lo que, a diferencia de los problemas mono-objetivo, los problemas multiobjetivo buscan la optimización de un vector de objetivos (*Deb, 2009*). Estos objetivos se encuentran en mutuo conflicto en muchas ocasiones, por lo que los métodos para resolver estos problemas buscan aquellas soluciones que mejoran una función objetivo, a expensas de degradar alguna otra (i.e., soluciones *no dominadas*). Al conjunto de soluciones *no dominadas* sobre todo el conjunto de soluciones factibles

---

<sup>1</sup>El lamento se considera la pérdida de oportunidad debido a una decisión tomada.

se le nombra conjunto de soluciones óptimas Pareto o simplemente Pareto (*Deb, 2009*).

El problema de localización de instalaciones multiobjetivo cuenta con algunos enfoques de solución basados en técnicas exactas de optimización robusta (*Min y Zhou, 2002; Snyder y Daskin, 2006*); sin embargo, estos llegan a ser infactibles cuando el tamaño del problema aumenta (*Fernandez, et al., 2001; Rakas, et al., 2004; Shen, et al., 2011; Villegas, et al., 2006*). Este aspecto sugiere el empleo de heurísticas que permitan obtener soluciones para casos de gran tamaño, a expensas de perder la garantía de optimalidad. Una meta-heurística que resuelve esta situación, dado que trabaja con un multiconjunto de soluciones, es el paradigma conocido como algoritmo evolutivo multiobjetivo que, a pesar de no garantizar la optimalidad de las soluciones, sí ofrece buenas aproximaciones a la solución óptima (*Coello, et al., 2007; Deb, et al., 2002*). En el caso particular de esta investigación se desea estudiar experimentalmente la robustez y la confiabilidad de las soluciones al problema p-mediana bajo incertidumbre ante el cambio de los valores de sus parámetros, tales como el número de centros de distribución o el número de clientes.

## 1.2 Planteamiento del problema

Debido a los antecedentes planteados anteriormente, esta tesis propone una solución a un modelo básico de localización de instalaciones que aporte soluciones robustas y robusto-confiables ante la incertidumbre de factores que puedan amenazar su desempeño a futuro y la cual se modela mediante escenarios. Es importante señalar que una solución robusta es aquella que presenta el desempeño esperado, aun ante la presencia de futuras condiciones inciertas tales como incrementos en los costos, en los tiempos de traslado, etc. Por otro lado, una solución robusto-confiable, cumple con las mis-

mas expectativas que una solución robusta, inclusive cuando ciertas partes del sistema fallan, por ejemplo, cuando algún centro de distribución deja de estar disponible debido a las condiciones climáticas (*Snyder, 2003*). El modelo empleado, por tanto, para este efecto es el conocido como p-mediana presentado por primera ocasión por *Hakimi (1964, 1965)*, mismo que selecciona, de entre un conjunto de minoristas,  $p$  centros de distribución que atienden la demanda de los nodos minoristas. Otros autores (*Mirchandaní y Odoni, 1979; Church y ReVelle, 1982; Weaver y Church, 1983; Daskin, et al., 1997*) retoman este problema y agregan que cada nodo presenta una demanda aleatoria independiente distribuída normalmente, además, cada nodo se encuentra ubicado en una coordenada particular dentro de una región específica, por lo que la distancia entre los nodos minoristas es fija y conocida. El factor incertidumbre se introduce en los valores de demanda de cada nodo minorista y se administra por medio de escenarios donde las demandas por nodo son distintas (*Daskin, et al., 1997*). En la Figura (1.3) se muestra un ejemplo de una solución del modelo p-mediana con dos escenarios:  $k_1$  y  $k_2$  que se muestran a izquierda y derecha de la figura, respectivamente. Cada uno de esos escenarios presenta un determinado valor de probabilidad ( $q_1$  y  $q_2$ ) y también de lamento ( $R_1$  y  $R_2$ ). En cada escenario se distinguen 17 nodos distribuidos en una región determinada (identificados por su número de referencia); entre esos nodos existen tres centros de distribución (los nodos 3, 8 y 17, que se identifican con la leyenda CD, seguida del número de centro de distribución que le corresponde), mismos que atienden la demanda de los nodos minoristas. Además, se indica las demanda de cada nodo en el paréntesis adyacente a cada identificación de nodo. Finalmente, las flechas indican qué centro de distribución atiende a cuál minorista.

El modelo p-mediana se plantea como un problema bi-objetivo para la primera parte de la investigación, misma que considera como medidas de calidad de solución: el

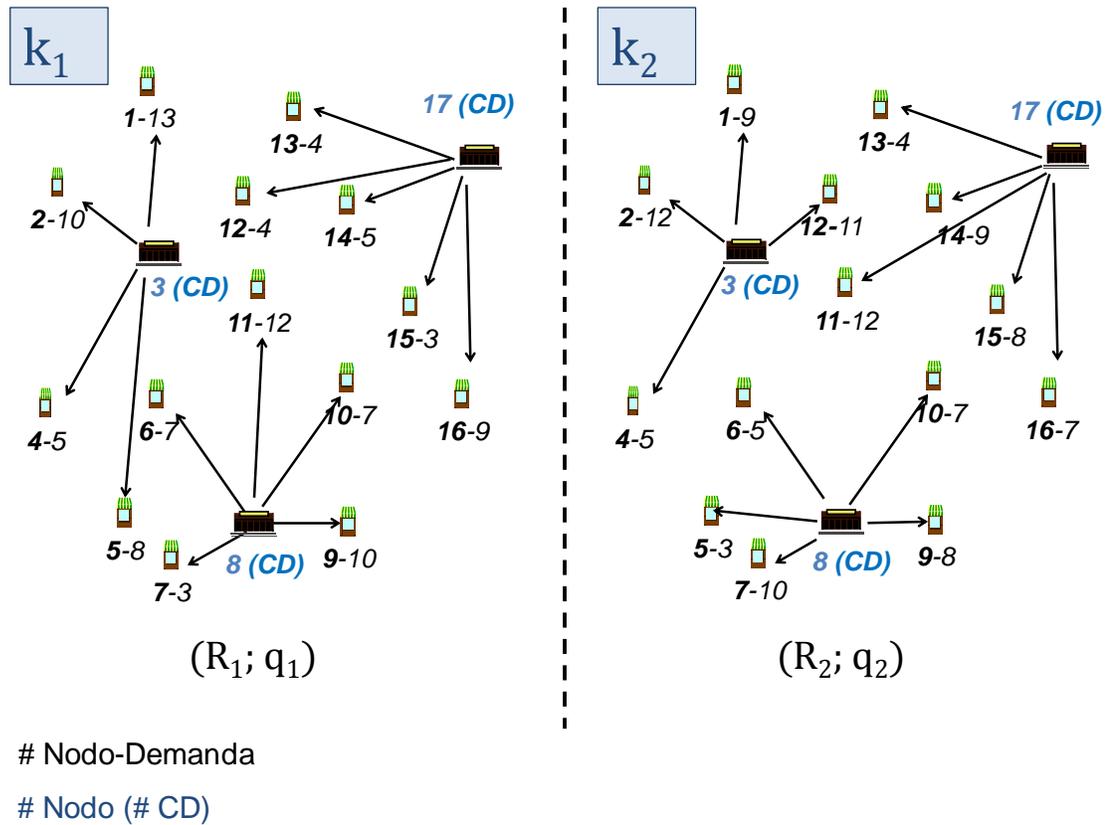


Figura 1.3: Ejemplo de selección de CDs - asignación de minoristas para los escenarios  $k_1$  y  $k_2$  con lamento  $R_k$  y probabilidad  $q_k$ . Figura elaborada por el autor de la tesis.

lamento esperado y el máximo lamento. Esta primera parte se describe extensamente en *López-Monzalvo y Brizuela (2013)* y en los Capítulos 3 al ???. Para la segunda parte de la investigación, el problema se plantea como un problema tri-objetivo al considerar igualmente las medidas previas de robustez, más la medida de confiabilidad  $\alpha$ . Por lo tanto, los problemas a resolver son: encontrar el conjunto de soluciones Pareto considerando dos y tres funciones objetivo y determinar el efecto que tiene sobre estas soluciones las variaciones en el número de clientes y en el número de centros

de distribución.

A continuación se describen los objetivos propuestos con el fin de encontrar una solución al problema planteado.

### 1.3 Objetivos de investigación

El objetivo principal de este trabajo de investigación es:

- Resolver el problema multiobjetivo p-mediana bajo incertidumbre modelado mediante el uso de escenarios por medio de un algoritmo evolutivo.

Este objetivo se alcanza por medio de los siguientes objetivos particulares:

- Diseñar un algoritmo evolutivo multiobjetivo que genere soluciones robustas y confiables para el problema p-mediana bajo incertidumbre modelado mediante el uso de escenarios.
- Desarrollar una codificación eficiente para la representación de las soluciones en los casos robusto y robusto-confiable.
- Crear el conjunto de operadores evolutivos de cruzamiento y mutación que se adapten a la codificación planteada.
- Determinar el efecto que tienen las variaciones en los parámetros del problema sobre las soluciones robustas y confiables obtenidas.

### 1.4 Metodología propuesta

Para el desarrollo de los objetivos arriba plasmados, y debido a que el problema pertenece a la clase NP-difícil (*Daskin, et al., 1997*), se siguió una metodología basada

en la optimización de “caja negra” mostrada en la Figura (1.4) donde se tiene un vector de decisión  $x$  como entrada y al menos dos funciones objetivo  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  como salida. Las propiedades de las funciones objetivo (modelo) se desconocen, por lo que se utiliza un algoritmo de optimización para evaluar la función objetivo por búsqueda directa. Por lo general, este algoritmo se basa en algoritmos clásicos de búsqueda que emplean un enfoque donde cada solución encontrada por iteración se modifica para obtener una solución diferente (posiblemente mejor) (Deb, et al., 2002). Esta metodología es adecuada para problemas de tipo mono-objetivo; sin embargo, para el caso que interesa en este trabajo, es necesario convertir la tarea de búsqueda de soluciones donde se minimiza un sólo objetivo, en la de encontrar los compromisos entre las funciones objetivo consideradas; es decir, resolver un problema multiobjetivo.

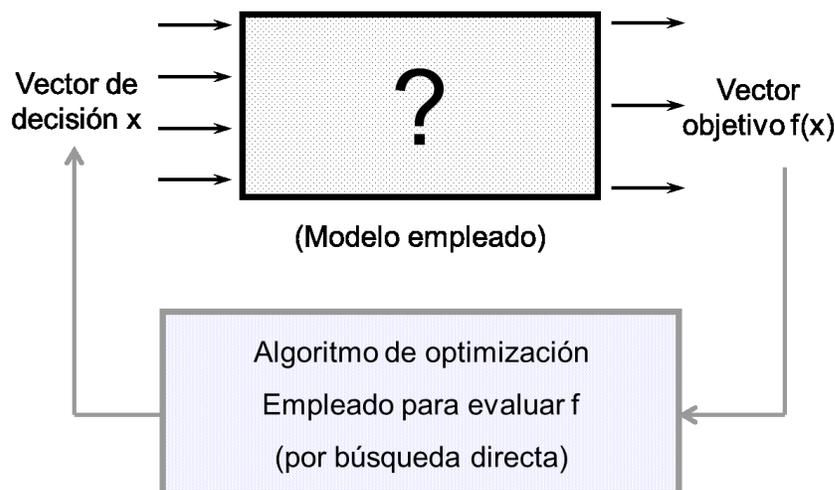


Figura 1.4: Esquema de optimización de “caja negra” empleado en la solución del problema multiobjetivo (tomado de la diapositiva de Thiele (1998)). Figura elaborada por el autor de la tesis.

La solución a los problemas multiobjetivo está dada por el uso de meta-heurísticas bien conocidas que funcionan bien con un multi-conjunto de soluciones y que se han

aplicado exitosamente en distintos problemas de optimización multiobjetivo. Este enfoque se conoce como el paradigma de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (*Coello, et al., 2007; Deb, et al., 2002*) dado que imitan los principios evolutivos de la naturaleza con el fin de dirigir su búsqueda hacia una solución óptima. Existen incluso algunas propuestas aplicadas específicamente al problema de localización de instalaciones (*Deb y Gupta, 2006; Goh y Tan, 2009; Gaspar-Cunha y Covas, 2008; Saha, et al., 2011*), aunque con una definición diferente de robustez a la que se plantea en este trabajo y que sirven como motivación adicional para el empleo de esta técnica. A continuación se presentan las contribuciones de la investigación al estado del arte.

## 1.5 Contribuciones de la investigación

Existen casos exitosos de solución a problemas robustos multiobjetivo basados en enfoques evolutivos (*Deb y Gupta, 2006; Goh y Tan, 2009; Gaspar-Cunha y Covas, 2008; Saha, et al., 2011*), aunque difieren de la presente propuesta en la definición de robustez empleada. Mientras que aquellos trabajos se interesan en encontrar la solución que en promedio sea menos perturbada sobre un conjunto de parámetros, en el presente se buscan las soluciones que permanezcan más cerca al óptimo cuando algún parámetro del modelo cambie. Los aportes principales de este trabajo de investigación son los siguientes:

- Una propuesta al problema p-mediana multiobjetivo bajo incertidumbre que aporta soluciones robustas y robusto-confiables, basada en el algoritmo evolutivo presentado por *Deb, et al. (2002)*: el NSGA-II.
  - ▷ Una codificación para la representación de las soluciones tanto en el caso del

problema p-mediana robusto como en el caso robusto-confiable.

- ▷ Un conjunto de operadores evolutivos de cruzamiento y mutación que se adaptan a la codificación planteada.
- Se muestran experimentalmente aspectos importantes derivados del análisis de los frentes no dominados, tales como:
  - ▷ El efecto que tiene la calidad de la cota inferior del valor óptimo de la función objetivo involucrada en el lamento sobre el frente Pareto que es definido por el lamento esperado y el máximo lamento.
  - ▷ El efecto que tiene el incremento en el número de centros de distribución, seleccionados de entre el conjunto de nodos, sobre la robustez de las soluciones obtenidas para el problema multiobjetivo robusto.
  - ▷ La existencia de casos particulares en donde es posible encontrar soluciones no dominadas más robustas con un número menor de centros de distribución, respecto a lo reportado en la literatura.
  - ▷ La imposibilidad de generalizar la hipótesis de que la robustez del conjunto de soluciones, al mantener fijo el número de centros de distribución, se incrementa al disminuir el número de minoristas.
  - ▷ La comprobación de que la selección óptima de los centros de distribución por escenario, al optimizar una función objetivo, no es suficiente para generar soluciones robustas para todos los escenarios.
  - ▷ El efecto que tienen los cambios en el número de centros de distribución y en el número de minoristas sobre los compromisos entre las funciones objetivo del problema multiobjetivo robusto-confiable.

- ▷ La forma que presenta la hipersuperficie de Pareto al agregar la función de confiabilidad al problema de localización y optimizar simultáneamente tres medidas de la calidad de la solución.
- Se propone una metodología para resolver problemas multiobjetivo, analizar los compromisos entre sus funciones objetivo, formular una serie de preguntas interesantes y plantear nuevas hipótesis que eventualmente lleven a una comprensión más amplia del problema en estudio.

## 1.6 Organización del trabajo

Esta tesis se organiza de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se presenta la revisión de la literatura acerca de algunos modelos de localización de instalaciones, en particular el modelo para el problema  $p$ -mediana. Se amplía esta revisión considerando factores de incertidumbre y, más adelante, desde una perspectiva multiobjetivo. Se presenta una discusión acerca de la medición de la calidad de las soluciones del problema de localización de instalaciones desde un marco multiobjetivo, empleando específicamente la robustez y la confiabilidad. En el Capítulo 3 se introduce el modelo multiobjetivo del problema  $p$ -mediana en sus versiones robusto y robusto-confiable. Además, se plantean los conceptos de robustez y confiabilidad aplicados en la optimización del modelo  $p$ -mediana multiobjetivo. En el Capítulo 4 se presenta el algoritmo evolutivo propuesto en sus dos versiones: robusto y robusto-confiable. En el Capítulo 5 se presenta el marco experimental y los resultados obtenidos. Se analizan algunos puntos notables acerca del conjunto de soluciones robustas encontradas. En la sección de Conclusiones y trabajo futuro se resumen los resultados obtenidos, se presentan las conclusiones generales del trabajo de investigación y se discuten algunas áreas de interés para trabajos futuros.

Hacia la parte final del documento se presentan dos apéndices: el primero se refiere al cálculo de las distancias por el método del Gran Círculo empleado en la definición de las distancias entre los nodos del problema. El segundo muestra los resultados experimentales respecto a las variaciones en los parámetros del problema.

## Capítulo 2

### Revisión de literatura

En este capítulo se describen los trabajos más relevantes que anteceden la propuesta de esta tesis y que se relacionan con el modelado de los factores de incertidumbre en el problema de localización de instalaciones, dentro del ámbito de la cadena de suministro.

#### 2.1 El problema de localización de instalaciones en el diseño de la cadena de suministro

La administración de la cadena de suministro (SCM<sup>2</sup>) tiene como objetivo mejorar las expectativas de los clientes al mínimo costo, a través de la planeación óptima de las actividades de adquisición, producción y distribución de materiales y de productos (*Simchi-Levi, et al., 2000*). Esto es posible a través del eficiente diseño de la red de cadena de suministro (SCND<sup>3</sup>). Esta red expande todos los movimientos y el almacenamiento de la materia prima, producto en proceso y producto terminado, desde su punto de origen hasta su punto de consumo (*Vitasek, 2010*) (ver Figura (1.1)). Por lo tanto, por debajo del SCND existe un problema de localización de instalaciones (FLP<sup>4</sup>) que se debe resolver eficientemente y que hoy en día, con más de un siglo de estudio, se considera como un problema clásico (*Zanjirani, et al., 2010*).

El FLP se relaciona con el modelado matemático de problemas vinculados con la

---

<sup>2</sup>SCM: Supply Chain Management.

<sup>3</sup>SCND: Supply Chain network Design.

<sup>4</sup>FLP: Facility Location Problem.

localización óptima de instalaciones que sirven a la demanda de un conjunto de nodos distribuidos espacialmente (*Drezner y Hamacher, 2004; Louveux, 1986; Mirchandani, 1980; Owen, y Daskin, 1998*) (ver Figura (1.2)). En general, estos modelos matemáticos intentan resolver cuatro preguntas, según *Daskin (1995)*:

- ¿Cuántas instalaciones se deben establecer?
- ¿En dónde se deben establecer esas instalaciones?
- ¿Qué tamaño deben tener esas instalaciones?
- ¿Cómo se debe ubicar la demanda de cada minorista en los centros de distribución (CD <sup>5</sup>) seleccionados?

La respuesta a estas cuatro preguntas tiende a ser más difícil de lo que aparenta, y depende tanto del contexto del problema como del objetivo que se persigue. En algunos casos es necesario que las instalaciones se encuentren tan cerca de los centros de demanda como sea posible; tal es el caso de la localización tanto de los servicios de emergencia como de los servicios de salud (*Toregas, 1971*). En otros casos será necesario que las instalaciones se encuentren tan lejos de los centros de demanda como sea posible; este es el caso de la localización de plantas nucleares o de los centros de colección de residuos sólidos y de recolección de basura, sólo por mencionar algunos (*Snyder, 2003*).

La mejora de la calidad del servicio al cliente es otro objetivo que pretende resolver la localización de instalaciones, dado que es un factor que es función directa del número de instalaciones habilitadas; sin embargo, este aspecto genera un impacto importante en el incremento de los costos, tanto de habilitación como de servicio, por lo que el número

---

<sup>5</sup>CD traducido del inglés: Distribution Center.

de instalaciones es una función de la relación costo-servicio (*Shen y Daskin, 2005*). Por lo anterior resulta importante analizar las políticas relacionadas con la localización de puntos de demanda, dado que es más conveniente proveer a los clientes desde un punto único para evitar entregas divididas y así garantizar un servicio satisfactorio a bajo costo. A pesar de lo anterior, existen casos en que la demanda se satisface con mayor agilidad por un proveedor más lejano en lugar del más cercano, debido a cuestiones tales como: tráfico en la ruta de entrega, falta de garantía en la entrega de mercancías por el proveedor más cercano, o presencia de condiciones de alto de riesgo que provocarían efectos contraproducentes por la entrega realizada por el proveedor más cercano (*Daskin, et al., 2005*).

Existe un listado bastante amplio de modelos que se han propuesto para resolver el FLP (Isard, 1960; Hakimi, 1964, 1965; Frank, 1966; Goldman, 1971; Toregas, 1971; Carbone, 1974; Mirchandani y Odoni, 1979; Church y ReVelle, 1982; Weaver y Church, 1983; Daskin, *et al.*, 1988; Snyder, 2003; Shen y Daskin, 2005; López, *et al.*, 2006; Klibi y Martel, 2009). Algunos de los modelos más estudiados son: el modelo del problema de localización, limitado en capacidad y con cargo fijo (CFLP<sup>6</sup>) (Louveux, 1986), el problema de localización ilimitada en capacidad y con cargo fijo (UFLP<sup>7</sup>) (Daskin, *et al.*, 1988; Daskin, 1995; Righini y Zaniboni, 2004; Ravi y Sinha, 2006), el modelo estocástico de capacidad (Tamir, 1996), el modelo del problema p-mediana (Snyder y Daskin, 2006, 2005; Snyder, *et al.*, 2006; Lim, *et al.*, 2009), entre otros.

La gran mayoría de las definiciones previas manejan funciones con el fin de minimizar algún tipo de costo (o maximizar alguna ganancia) a través de la mejor distribución de productos dentro de la cadena de suministro; sin embargo, existen algunos aspectos por

---

<sup>6</sup>CFLP: Capacitated Fixed Charge Facility Location Problem.

<sup>7</sup>UFLP: Uncapacitated Fixed Charge Facility Location Problem.

resolver tales como ¿qué proveedores se deben emplear?, ¿cuántas empresas productoras y bodegas se deberían abrir?, ¿dónde deberían colocarse las instalaciones?, entre otras (Shen y Daskin, 2005). Pero un detalle más importante es que los modelos más populares de la cadena de suministro (SC<sup>8</sup>) suponen que cada uno de sus elementos siempre tiene el mismo desempeño con el que fueron planeados pero, ¿qué pasaría si no fuera así?. ¿Qué tan severo sería el impacto de la falla del suministro sobre la eficiencia de la SC? (Bundschuh, *et al.*, 2005).

Idealmente sería deseable que el SCND fuera capaz de mostrar el desempeño esperado durante un horizonte de tiempo extenso; sin embargo, diversos aspectos que son difíciles de prever, tales como las condiciones de riesgos, limitan su buen funcionamiento (Bundschuh, *et al.*, 2005). Es necesario, por tanto, reducir los riesgos y los costos que dichas condiciones tienen sobre la SC, proporcionando soluciones al problema de localización de instalaciones y a su asignación de clientes para incluir, desde el nivel estratégico, las áreas de riesgo potencial, dado que resulta muy costoso hacer cambios en la selección de proveedores y en el envío de bienes a nuevos mercados por situaciones imprevistas (Melo, *et al.*, 2009). Los factores de riesgo arriba mencionados y su impacto sobre los modelos del problema de localización se analizan en la siguiente sección bajo el modelo de incertidumbre.

## 2.2 El factor de incertidumbre en el FLP

En la literatura de la SCM, el riesgo ha sido modelado principalmente sobre el nivel táctico (Bundschuh, *et al.*, 2005) enfocándose en la incertidumbre de las variaciones de la demanda, las distorsiones en la información, fallas de calidad, interrupciones

---

<sup>8</sup>SC: Supply Chain.

abruptas, entre otros eventos (Goh, *et al.*, 2007; Melo, *et al.*, 2009; Min y Zhou, 2002). Dado que estos aspectos inciertos no se pronostican con exactitud (Snyder y Shen, 2006b), el SCND se torna más complicado. Idealmente, es deseable que el SCND bajo situaciones de riesgo pueda tener un desempeño adecuado en presencia de fallas en sus componentes o subsistemas (Bundschuh, *et al.*, 2005).

Son muchas las razones para analizar el comportamiento del SCND bajo incertidumbre: las tendencias de expansión de las compañías, el rápido desarrollo de los mercados globales, las intensas reducciones de costos dentro de la CS, la competencia global, las amenazas de crecimiento, entre muchas otras. Sólo en la última década, el SCND, una de las categorías más famosas del FLP (Zanjirani, *et al.*, 2010), incrementó su atractivo debido especialmente a las condiciones de incertidumbre y de riesgo que actualmente le rodean (Klibi y Martel, 2009; Min y Zhou, 2002), las que hacen de este problema todo un reto. Sin embargo, en los modelos de optimización del FLP, típicamente se supone que los datos de entrada se conocen con precisión, por lo que se ignora la influencia de la incertidumbre sobre las variables del diseño y/o los parámetros del problema (Deb, *et al.*, 2009), con el objetivo de evitar la afectación de la optimalidad y/o la factibilidad de su solución (Mulvey, *et al.*, 1995; Sim, 2004). Sin embargo, si a las consideraciones anteriores se agregan aspectos de incertidumbre, entonces el problema se complica tanto en su diseño como en su análisis. Por lo tanto, las necesidades del mundo real han motivado el desarrollo de metodologías que sean capaces de proporcionar soluciones resistentes a las perturbaciones en los parámetros del problema (Ben-Tal y Nemirovski, 2002).

La incertidumbre puede provenir de distintas fuentes (Jin y Branke, 2005), tales como las inevitables desviaciones del ambiente operativo real. Los diseños que se optimizan sin tomar en cuenta las causas que provocan la degradación de la calidad de las

soluciones son susceptibles a variaciones inaceptables en su desempeño, ya sea debido a malas decisiones o a variaciones en los parámetros ambientales. Por lo tanto, las incertidumbres surgen en el espacio del diseño más que en el espacio de las funciones objetivo (Goh y Tan, 2007).

En la siguiente sección se explican algunos de los enfoques para modelar la incertidumbre dentro del FLP.

## 2.3 El modelado de la incertidumbre en el FLP

Los modelos de localización bajo incertidumbre se basan en el trabajo propuesto por *Hakimi (1964, 1965)*, quien menciona que la solución óptima para el problema de localización de redes implica colocar las instalaciones en los nodos de la red y no en sus aristas. Esta propiedad la probó *Mirchandani y Odoni (1979)* para el problema p-mediana (PMP<sup>9</sup>) en una red cuyos costos de transporte siguen la ruta más corta. Estos costos los define cualquier función cóncava no decreciente; además, considera que los costos de transporte y la demanda son inciertos. La prueba realizada por *Mirchandani y Odoni (1979)* la retomó *Weaver y Church (1983)* quienes presentaron un algoritmo empleando la relajación de Lagrange.

Algunos enfoques recientes para modelar la incertidumbre dentro del FLP pertenecen al conjunto de modelos de programación estocástica, mientras que otros son modelos de optimización determinística (*Fernandez, et al., 2001*). En los modelos de programación estocástica, los parámetros de incertidumbre se describen por escenarios discretos, cada uno con una probabilidad de ocurrencia y su objetivo es minimizar el costo esperado. Estos modelos han incrementado en fechas recientes su aplicación y en general dividen

---

<sup>9</sup>PMP: p-Median problem.

su función en dos etapas: primero, decidir la ubicación de las instalaciones; segundo, asignar los clientes que cada instalación atenderá, con el fin de satisfacer alguna función objetivo o condición particular. Tal es el caso de la propuesta de *Carbone (1974)* quien considera localizar  $p$  instalaciones para minimizar la cota superior  $k$  del producto ponderado entre distancia-demanda, misma que se alcanza con un valor de probabilidad a lo más de  $\alpha$ , es decir:

$$P\left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} Y_{ij} \leq K\right) \leq \alpha \quad (2.1)$$

Donde  $h_i$  es la demanda aleatoria del cliente  $i$ ,  $d_{ij}$  es la distancia del cliente  $i$  a la instalación  $j$ .  $Y_{ij} = 1$  si se asigna el cliente  $i$  a la instalación  $j$  y el valor  $0 \leq \alpha \leq 1$  es constante.

Por otro lado, el modelo de optimización robusta (RO<sup>10</sup>), que pertenece al conjunto de modelos determinísticos, tiene el objetivo de encontrar soluciones que tengan la degradación de calidad más baja en presencia de incertidumbres. En el modelo RO, los parámetros se describen, ya sea por escenarios discretos o por intervalos continuos, aunque no siempre cuenta con datos de probabilidad y, típicamente, su objetivo es minimizar el costo, en el peor de los casos (*Daskin, et al., 2003*).

En las siguientes secciones se explican los aspectos particulares de la RO.

### 2.3.1 El enfoque de escenarios

Uno de los modelos de RO es el modelo basado en escenarios (*Birge y Louveaux, 2011; Mulvey, et al., 1995*). Este enfoque permite modelar condiciones muy específicas y clasificarlas en niveles de incertidumbre (*Sheppard, 1974*) a través de un conjunto de

---

<sup>10</sup>RO: Robust Optimization.

escenarios, cada uno con una probabilidad de ocurrencia particular y una demanda bien establecida para un conjunto dado de minoristas (Melo, *et al.*, 2009). El enfoque de escenarios es muy útil para planear no sólo las demandas futuras, sino también otro tipo de eventos indeseables tales como ataques terroristas, contracciones del mercado, epidemias, fenómenos ambientales, etc; dado que el horizonte de planeación en el que se basan es amplio (Klibi y Martel, 2009; Melo, *et al.*, 2009).

Se prefiere el enfoque basado en escenarios por encima de enfoques más estandarizados, tales como el modelo de programación lineal estocástica (Dantzig e Infanger, 1991; Kall y Mayer, 2011), dado que el primero resuelve momentos de orden superior en su función objetivo y puede incluir fácilmente las preferencias del que toma las decisiones para usar modelos de riesgo diferente (Mulvey, *et al.*, 1995). El modelo basado en escenarios es atractivo debido a su simplicidad estructural y a su capacidad para modelar dependencia entre parámetros aleatorios. Sin embargo, si el número de escenarios es muy grande, el enfoque de la programación entera no lineal proporciona una alternativa para resolver este problema (Shen, *et al.*, 2011).

Existen diversas propuestas que han empleado el modelo basado en escenarios para resolver el FLP, entre las que destacan las siguientes: el modelo de máxima captura con incertidumbre, que es un modelo basado en la teoría de juegos con una colección reducida de escenarios (Ghosh y McLafferty, 1982); el modelo de máxima captura cuya meta es seleccionar  $p$  instalaciones para maximizar el mercado compartido en cada uno de los escenarios, considerando que la competencia de la firma ya ha colocado sus instalaciones (Serra, *et al.*, 1996); el problema PMP con escenarios que modela la incertidumbre asociada con los costos futuros y las condiciones operativas (Daskin, *et al.*, 1997); el PMP en una red dinámica, cuyos parámetros (tiempo de desplazamiento, demandas y distancias) cambian a lo largo del día y para el que, a cada condición, se

asocia un escenario particular; el problema de localización estocástico  $p$ -robusto, que modela la dependencia entre los niveles de demanda futura, los costos múltiples y sus correlaciones (Snyder y Daskin, 2006); entre otros modelos.

En general, los modelos basados en escenarios tienen el reto de definir un criterio para medir la calidad de sus soluciones, dado que no todos los escenarios tienen la misma oportunidad de ocurrir. Al respecto, existe una amplia variedad de criterios en la literatura que se emplean como medida de robustez que van desde los que miden el desempeño esperado (el lamento esperado), hasta los que miden el desempeño en el peor de los casos (el máximo lamento) (Daskin, *et al.*, 1997; Snyder y Daskin, 2006; Chen, *et al.*, 2006).

Un ejemplo particular del FLP bajo incertidumbre es el modelo que emplea escenarios y que emplea el criterio de lamento (Snyder, 2003). Este modelo considera: las variables  $x_{1i}, \dots, x_{ni} \in X$  (donde  $X$  representa el conjunto de variables factibles), los escenarios  $s \in S$ , la función de lamento  $R$  para cada escenario, los coeficientes de la función objetivo  $c_{is}$ , las probabilidades de escenarios  $q_s$  y los valores óptimos  $z_s^*$  en la función objetivo para cada escenario. El modelo se define de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } \sum_{s \in S} q_s R_s \quad (2.2)$$

sujeto a

$$R_s = \sum_{i \in I} c_{is} x_i - z_s^* \quad \forall s \in S, x \in X \quad (2.3)$$

Sustituyendo la variable de lamento en la función objetivo se obtiene:

$$\text{Minimizar } \sum_{s \in S} q_s \left( \sum_{i \in I} c_{is} x_i - z_s^* \right) \quad (2.4)$$

sujeto a

$$x \in X \quad (2.5)$$

La función objetivo de este problema es la función objetivo con el mínimo lamento esperado, menos una constante. Al respecto, *Snyder (2003)* menciona que los problemas que se basan en el lamento tienden a ser más difíciles que los problemas estocásticos debido a su estructura minimax.

Algunos autores (Serra, *et al.*, 1996; Daskin, *et al.*, 1997) definen el término lamento como la diferencia entre el valor de la función objetivo de esa solución y el valor óptimo para el mismo escenario (*Savage, 1951*). Este concepto de lamento también se conoce como la pérdida de oportunidad (Chen, *et al.*, 2006). Por otro lado, el máximo lamento se relaciona con la decisión tomada bajo el peor de los casos, el cual ocurre en el escenario que, por lo general, tiene la menor oportunidad de ocurrir aunque, en caso de que ocurra, el costo derivado sería extremadamente alto para el sistema en estudio.

En el siguiente apartado se muestran algunos ejemplos de aplicación de RO basados en modelos mono-objetivo.

### 2.3.2 Optimización robusta mono-objetivo

Existen varios enfoques para manejar la incertidumbre dentro del problema FL; estos enfoques pertenecen, ya sea a la optimización estocástica o a la optimización determinística (*Fernandez, et al.*, 2001).

El enfoque RO, que es una propuesta determinística, tiene el objetivo de producir una solución que se comporta aceptablemente bien bajo cualquier tipo de dato de

entrada; i.e. en la presencia de fallas en los datos de entrada (*Bundschuh, et al., 2005*). Ésta es precisamente la principal ventaja de este enfoque sobre otras propuestas (*Fernandez, et al., 2001*) donde los datos de entrada se seleccionan previamente de acuerdo a la experiencia del que toma las decisiones, llevando así la decisión inicial hacia un conjunto de soluciones que no necesariamente son susceptibles de ser implementadas.

Por años, los modelos robustos del problema FL se formularon y resolvieron como problemas de optimización mono-objetivo (SO<sup>11</sup>) (*Serra, et al., 1996; Serra y Marianov, 1998*). En una gran cantidad de trabajos se observa que el conjunto de funciones objetivo a optimizar es bastante limitado (*Ben-Tal y Nemirovski, 2002; Bertsimas, et al., 2010; Beyer y Sendhoff, 2007; Bundschuh, et al., 2005; Gabrel, et al., 2012; Zanjirani, et al., 2010*), siendo las principales funciones objetivo a optimizar: la distancia viajada entre nodos, los costos fijos por cada instalación establecida, los costos de reubicación de instalaciones, los costos de transporte entre nodos, la cobertura de la demanda, entre otros. Es común encontrar modelos que buscan minimizar la pérdida en la función objetivo en el peor caso, el que se produce al tomar una decisión sin tener cierta certeza acerca del estado de la naturaleza que tendrá lugar (*Averbakh y Berman, 2000*); mientras que otros modelos buscan maximizar algún objetivo, como la captura del mercado en una región sumamente competitiva, considerando un conjunto de escenarios que modelan la incertidumbre de la demanda o la ubicación de los competidores (*Serra, et al., 1996*).

Un ejemplo de modelo RO es el modelo de localización minimax que ofrece un parámetro de robustez cuando se desconoce información probabilística. Su objetivo es minimizar el máximo costo a través de un conjunto de escenarios. *Snyder (2003)* menciona que esta decisión es muy conservadora, pero también es útil cuando las decisiones

---

<sup>11</sup>SO: Single-objective.

se deben tomar en un ambiente considerado como “el peor de los escenarios”.

Uno de los aspectos más importantes en el modelado del FLP, en su versión RO con escenarios, es definir una medida adecuada de robustez. En algunos de los modelos se minimiza el valor esperado del costo total, en otros se desea encontrar el costo total para el peor caso, en otros casos se desea maximizar los puntos de demanda que son abastecidos y en otros más una combinación entre algunos de los anteriores (*Snyder, 2003*).

Es importante señalar que el término *robustez* se considera como la medida de la habilidad del sistema en proporcionar una solución efectiva y permanente, a pesar de los cambios adversos causados por las condiciones inciertas tales como variaciones en la demanda (Klibi y Martel, 2009). En este sentido, el diseño robusto generalmente se relaciona con la calidad de la solución y no con las restricciones propias del problema. Existen varias medidas de robustez, incluídas las de un buen desempeño, las de un buen desempeño en el peor de los casos, las de desempeño con baja variabilidad, o la de un desempeño aceptable a pesar de enfrentarse a un amplio rango de perturbaciones (Deb, *et al.*, 2009).

Vale la pena mencionar que la robustez se emplea para medir significativamente los sistemas heterárquicos y jerárquicos; i.e. sistemas que están interconectados y frecuentemente superpuestos sobre redes jerárquicas cuyos componentes pertenecen simultáneamente a múltiples redes (Jen, 2002). Lo anterior significa que la presencia o ausencia de robustez en uno de los niveles, no implica la presencia o ausencia de la misma en otro nivel. Por esta razón, a menudo es inevitablemente necesario considerar múltiples perturbaciones en múltiples dimensiones (Krakauer, 2002).

A pesar de que la literatura para el caso de RO mono-objetivo (*Ben-Tal y Nemirovski, 2002; Bertsimas, et al., 2010; Beyer y Sendhoff, 2007*) y, específicamente en

el caso de RO en el FLP mono-objetivo (*Melo, et al., 2009; Zanjirani, et al., 2010*) es vasta, increíblemente el problema de robustez dentro de la administración del riesgo para el FLP no se ha estudiado extensivamente, como lo muestran *Melo, et al. (2009)*. Por otro lado, las implicaciones del mundo real consideradas dentro del modelo del FLP bajo incertidumbre son más complejas de lo que la caracterización mono-objetivo muestra (*Shen y Daskin, 2005*). Un mejor enfoque para este problema es la formulación del modelo de optimización multiobjetivo, mismo que permite estudiar los compromisos que existen entre distintos criterios de optimización (*Goh y Tan, 2007*), lo que permite tener un panorama más completo acerca de la robustez de cada solución. Sin embargo, en el caso de la optimización multiobjetivo, la literatura es muy escasa (*Gabrel, et al., 2012; Iancu y Trichakis, 2012*), como se observa en la siguiente sección.

### **2.3.3 RO multiobjetivo**

Debido a su reciente introducción como tema de estudio (*Witting, et al., 2012*), la optimización multiobjetivo bajo incertidumbre, dentro del contexto del FLP, presenta muy pocas aplicaciones; por ejemplo, *Rakas, et al. (2004)* desarrollaron un modelo FLP multiobjetivo en un ambiente de incertidumbre que encara diversos criterios en conflicto para determinar las ubicaciones de instalaciones indeseables por medio de funciones minisum (costo y distancia) optimizadas por medio de programación lineal difusa. *Villegas, et al. (2006)* plantearon un modelo del FLP con capacidad ilimitada como un problema bi-objetivo (costo-cobertura), diseñando dos algoritmos evolutivos y otro basado en programación matemática, para obtener una buena aproximación a la frontera Pareto. *Fernandez, et al. (2001)* resuelven el problema optimizando simultáneamente dos criterios de lamento minimax; donde cada lamento corresponde a

un tomador de decisión y cada tomador de decisiones tiene su propio conjunto de escenarios; las soluciones óptimas Pareto para el conjunto de ubicaciones robustas se caracterizan completamente. *Daskin, et al. (1997)* tratan el problema de localización PMP robusto y confiable a través de un modelo basado en escenarios que emplea métodos exactos para calcular el frente Pareto con un valor determinado de confiabilidad, para las funciones objetivo de lamento promedio y máximo lamento.

Los enfoques tradicionales de investigación de operaciones que están relacionados con la optimización multiobjetivo típicamente implican la transformación del problema original en un problema mono-objetivo. Esto lo hacen mediante el empleo de algoritmos punto a punto, tales como el algoritmo de ramificación y acotamiento (*branch and bound*), con el fin de obtener iterativamente una mejor solución (*Min y Zhou, 2002*). La propuesta de *Snyder y Daskin (2006)* es quizás uno de los mejores ejemplos multiobjetivo del FLP, dado que combina los enfoques estocástico y de robustez, mediante la búsqueda de la solución de costo mínimo sujeta a una restricción adicional tal que, el lamento relativo en cada escenario no es mayor que una cota específica. En este caso, el lamento de una solución se calcula de la forma clásica.

Además de los factores de incertidumbre por resolver, generalmente las funciones objetivo que se espera optimizar se encuentran en conflicto entre sí (*Alçada-Almeida, et al., 2009; Berman y Drezner, 2007; Current, et al., 1990; Klose y Drexl, 2004; Serra, et al., 1996; Shen y Daskin, 2005; Snyder, 2006*). Por lo tanto, con el fin de entender los compromisos que existen entre los diversos criterios de optimización bajo incertidumbre (*Goh y Tan, 2009*), es necesario resolver un modelo multiobjetivo que optimice simultáneamente dichas funciones objetivo.

Es necesario aclarar el concepto de dominancia de Pareto (*Deb, et al., 2002*), el cual permite ordenar parcialmente las soluciones multiobjetivo, hasta encontrar el conjunto

eficiente de soluciones (o “no inferior”), también conocido como conjunto óptimo de Pareto. Cada componente objetivo de cualquier solución en el conjunto óptimo de Pareto sólo se mejora al degradar, al menos, uno de los otros componentes objetivo (*Goh y Tan, 2007*).

A pesar de que se han presentado propuestas interesantes para resolver problemas multiobjetivo con optimización robusta (MORO<sup>13</sup>) por medio de algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEA<sup>14</sup>) (*Deb y Gupta, 2006; Goh y Tan, 2009; Gaspar-Cunha y Covas, 2008; Saha, et al., 2011*), todos ellos difieren del presente trabajo en la definición de robustez empleada.

## 2.4 Confiabilidad del FLP-multiobjetivo

Previamente se ha observado una serie de estrategias relacionadas con el manejo de incertidumbre para el FLP (*Goh y Tan, 2007; Melo, et al., 2009; Min y Zhou, 2002*); sin embargo, aún existen vías poco exploradas tales como el desarrollo de soluciones que sean simultáneamente robustas y confiables (*Daskin, et al., 1997; Klibi y Martel, 2009*). Por lo tanto, uno de los objetivos actuales de los problemas multiobjetivo es contar con modelos cuyas soluciones permanezcan eficientes a lo largo de las condiciones futuras y, al mismo tiempo, que sean mínimamente susceptibles a interrupciones potenciales; es decir, tener soluciones robustas (*Klibi y Martel, 2009*) y confiables (*Bundschuh, et al., 2005*).

Al respecto, en un problema hipotético, la solución óptima determinista permanece típicamente en los límites de una restricción particular o en la intersección de más

---

<sup>13</sup>MORO: Multiobjective Robust Optimization.

<sup>14</sup>MOEA: Multiobjective Evolutionary Algorithm.

de una restricción. Sin embargo, en presencia de incertidumbres en los parámetros, la solución se hace infactible por lo que, para encontrar una solución que sea más confiable (que tenga baja probabilidad de transformarse en infactible), la solución óptima debe sacrificarse, por lo que se elige una solución interior de la región factible. En tales casos se tiene un problema de optimización estocástico cuyas restricciones son del tipo probabilístico, lo que significa que la probabilidad de falla (de ser una solución infactible) se limita a un valor pre-establecido (e.g.  $(1 - \alpha)$ ), donde  $\alpha$  es la confiabilidad específica del diseño. Para un valor específico de la medida de confiabilidad  $\alpha$  se desea entonces encontrar la solución factible que asegure que la probabilidad de tener una solución infactible, ocasionada por factores de incertidumbre, es a lo más  $(1 - \alpha)$  (*Deb, et al., 2009*).

Existen diversas técnicas de optimización basadas en el factor de confiabilidad, mismas que varían en la forma en la que manejan las restricciones probabilísticas. Uno de esos enfoques se basa en las técnicas de simulación Monte Carlo. Estas técnicas crean un número de muestras provenientes de una distribución de probabilidad para representar incertidumbres y aleatoriedades, tanto en el diseño de variables como en los parámetros del problema y en su evaluación. Su objetivo es calcular su probabilidad de fallo (*Liang, et al., 2008; Loughlin y Ranjithan, 1999*). Otra forma de resolver este problema, considerando el nivel de confiabilidad, emplea métodos teóricos de decisión que transforman el problema de la selección de valores objetivo de la medida de seguridad (decisión *a priori*), a un problema de selección de valores de costo asociados a un evento de falla (decisión *a posteriori*) (*Ditlevsen y Madsen, 2005*).

Las metodologías basadas en optimización sugieren tener cuidado con las restricciones de probabilidad (*Liang, et al., 2008*). En estos modelos, las variables estocásticas y sus parámetros se transforman en el estándar del espacio variable normal para for-

mular un problema de optimización por separado en el que se calcule la probabilidad de falla con el fin de igualarla con los valores deseados  $f(\alpha)$ . Para resolver este tipo de problemas existen, al menos, tres métodos distintos: método de lazo doble, método de lazo sencillo y método desacoplado. En el método de lazo doble se emplea optimización anidada. El lazo externo optimiza el problema original. Por cada solución del lazo externo se calcula una restricción para resolver otro problema de optimización (el lazo interno) usando ya sea el enfoque de medida del desempeño (PMA<sup>15</sup>) o el enfoque del índice de confiabilidad (RIA<sup>16</sup>). Por otro lado, el método de lazo sencillo combina las dos tareas de optimización previas aunque, en este caso, para aproximar una solución al punto más probable (MPP<sup>17</sup>) (*Liang, et al., 2008*). Los métodos desacoplados emplean dos enfoques de optimización (en nivel interno y externo) uno seguido del otro. Estos métodos inician encontrando la solución óptima determinística en la búsqueda del espacio de soluciones (sin considerar incertidumbres). Posteriormente encuentran el MPP para cada restricción, empleando el PMA o el RIA; en la siguiente iteración cada restricción se cambia de acuerdo a los puntos MPP encontrados en el lazo interno de optimización y, entonces, se resuelve un problema determinístico de optimización para el cambio de restricción. Esta optimización dual continúa hasta que no existe mejora en la solución obtenida (*Deb, et al., 2009*).

Como se ha mostrado, los problemas de optimización de diseño que se basan en la confiabilidad (RBDO<sup>18</sup>) tienen como objetivo encontrar el valor óptimo correspondiente a un valor de probabilidad de falla (o un determinado índice de confiabilidad) (*Gea y Oza, 2006*). Por lo anterior, resulta interesante saber cómo cambia la confiabilidad

---

<sup>15</sup>PMA: Performance Measure Approach.

<sup>16</sup>RIA: Reliability Index Approach.

<sup>17</sup>MPP: Most Probable Point.

<sup>18</sup>RBDO: Reliability-based Design Optimization.

de las soluciones para diferentes valores del índice de confiabilidad dado que, al no considerarse este valor, la solución deseada es la solución óptima (*Deb, et al., 2009*), lo que en muchas ocasiones se aleja de escenarios reales. A continuación se presentan las generalidades del enfoque MORO para la solución del FLP incierto y confiable.

## 2.5 Preguntas de investigación en el FLP incierto y confiable

Aunque todos los trabajos anteriores abordan temas muy importantes, existe un conjunto de preguntas relevantes que se han dejado desatendidas y que motivan el trabajo propuesto en el presente documento. Por ejemplo, todos los trabajos que están vinculados con las medidas de lamento (*Chen, et al., 2006; Daskin, et al., 1997; Serra, et al., 1996; Snyder, 2006*) requieren calcular el óptimo de alguna función objetivo para cada escenario. Sin embargo, varios de los modelos de solución del FLP pertenecen a la clase de problemas NP-difícil, e.g. el PMP (*Mirchandani y Odoni, 1979*), UFLP (*Weaver y Church, 1983*), MCLP (*Megiddo, et al., 1983*), CFLP (*Van Roy, y Erlenkotter, 1982*), LMRP (*Shen, et al., 2003*), QAP (*Sanhi y Gonzalez, 1976*), sólo por citar algunos. Esto implica que existen algunos casos para los que no es factible calcular el óptimo, por lo que es necesario confiar en el cálculo de aproximaciones a él. Aunque la calidad de la cota inferior no afecta el cálculo del lamento promedio (*Snyder, 2006*), aún puede tener un impacto importante en el máximo lamento y, más importante, en el frente Pareto inducido por los lamentos promedio y máximo. Sin embargo, aún no se han encontrado registros en la literatura con respecto a qué tan grande es este impacto sobre la calidad del frente Pareto. Igualmente, se desconoce si es de utilidad el cálculo del óptimo para

una determinada función objetivo por escenario durante la construcción de soluciones robustas. Otra pregunta importante se relaciona con el impacto que tiene el incremento o el decremento del número de clientes sobre la robustez de las soluciones Pareto, así como el incremento o decremento del número de CDs para un número fijo de clientes. Por otro lado, aún no se han encontrado registros en la literatura con respecto a los compromisos que existen entre dos medidas de robustez y una de confiabilidad que sean optimizadas de forma simultánea, ni la forma que tiene la hipersuperficie creada por estos compromisos. Además, es interesante analizar los compromisos existentes entre las soluciones robusto-confiables acotadas por determinados valores de confiabilidad.

Una forma para responder estas preguntas es resolviendo el problema a optimalidad para cada caso; sin embargo, esto no es factible para casos con un tamaño suficientemente grande. Una manera para sortear esta dificultad, a expensas de la precisión de las conclusiones, es mediante el uso de heurísticas.

Los enfoques metaheurísticos que se inspiran en fenómenos biológicos o físicos, tales como los algoritmos evolutivos (EA<sup>19</sup>) (*Jin y Branke, 2005*) han ido ganando aceptación como una alternativa flexible y eficiente a los problemas complejos de optimización en los últimos años (*Goh y Tan, 2007*). Entre estas metaheurísticas, el MOEA tiene las capacidades de: primero, probar múltiples soluciones de forma simultánea, con una perspectiva global del problema multiobjetivo; y segundo, encontrar el conjunto óptimo de soluciones Pareto (*Deb, et al., 2002*).

Los algoritmos evolutivos trabajan con un multi-conjunto de soluciones, lo que los hace adecuados para los problemas multiobjetivo, especialmente en el caso en el que las funciones objetivo estén en conflicto. Además, esta heurística es capaz de resolver un conjunto de problemas de gran complejidad, incluyendo características muy particulares

---

<sup>19</sup>EA: Evolutionary algorithm.

del problema, sin añadir mayor dificultad al algoritmo, como ocurre con los métodos exactos (tal como el método conocido como  $\epsilon$ -*constraint*, descrito por *Daskin, et al. (1997)*). El costo de esta ventaja es la pérdida de garantía de optimalidad, lo que representa un problema importante. A pesar de que estos algoritmos no garantizan la optimalidad de las soluciones, se propone usarlos como un método para encontrar buenas aproximaciones a las soluciones y para responder a las preguntas indicadas anteriormente.

## Capítulo 3

### Formulación del problema

El modelo PMP es un modelo de localización de instalaciones considerado como un clásico (*Hakimi, 1964, 1965*), el cual consiste en seleccionar exactamente  $p$  instalaciones como CDs, tomados de un conjunto de  $n$  nodos, seguido de la asignación de minoristas (o nodos de demanda) a los CDs seleccionados. El objetivo de este modelo es minimizar el producto demanda-distancia entre los nodos y los CDs seleccionados. Entre las múltiples variantes que existen de este enfoque existe una que modela la incertidumbre mediante el empleo de escenarios (*Daskin, et al., 1997*). Una solución obtenida por este modelo consiste en la selección de  $p$  CDs, mismos que permanecen fijos en todos los escenarios, mientras la asignación de los minoristas a los CDs seleccionados cambia, en función de las distancias entre cada nodo en cada escenario, por lo que el objetivo es minimizar el promedio de las diferencias entre el valor de la función objetivo (i.e. el producto demanda-distancia) evaluado para un escenario particular y el valor óptimo de la misma función en el escenario bajo consideración (*Chen, et al., 2006; Daskin, et al., 1997; Serra, et al., 1996*)

### 3.1 Formulación del PMP robusto

A continuación se presenta la notación que emplea el modelo PMP robusto:

$h_{ik}$  : demanda del nodo  $i$  en el escenario  $k$ ,  $\forall i=1,\dots,n; k=1,\dots,K$

$d_{ijk}$  : distancia del nodo  $i$  al sitio candidato  $j$  bajo el escenario  $k$ ,

$\forall i=1,\dots,n; j=1,\dots,n; k=1,\dots,K$

$V_k^*$  : valor óptimo del modelo  $p$ -mediana bajo el escenario  $k$ ,  $\forall k=1,\dots,K$

$q_k$  : probabilidad de que el escenario  $k$  ocurra,  $\forall k=1,\dots,K$

VARIABLES DE DECISIÓN:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si un CD se ubica en el nodo candidato } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$Y_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ se asigna a la instalación } j \text{ bajo el escenario } k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Bajo esta notación, el costo total del producto demanda-distancia se define como sigue (*Daskin, et al., 1997*):

$$V_k = \sum_i \sum_j h_{ik} d_{ijk} Y_{ijk} \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.1)$$

El lamento  $R_k$ , que está asociado a algún plan de ubicación en el escenario  $k$ , se define como la diferencia entre el valor de la función objetivo  $V_k$ , estableciendo los CDs en exactamente  $p$  ubicaciones, y el valor óptimo de la función objetivo  $V_k^*$ , ambos para el mismo escenario; i.e.  $R_k = V_k - V_k^*$  (*Daskin, et al., 1997*). Dado que cada escenario tiene asociado un valor particular de probabilidad  $q_k$ , el lamento esperado está dado por

$C_1 = \sum_{k=1}^K q_k R_k$ . Respecto a esto, el máximo lamento se define como  $C_2 = \max_k \{R_k\}$ , por lo que el problema de optimización multiobjetivo (MOOP<sup>20</sup>) se define como:

$$\text{Minimizar } \{C_1, C_2\} \quad (3.2)$$

Sujeto a

$$\sum_j X_j = p \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.3a)$$

$$\sum_j Y_{ijk} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (3.3b)$$

$$Y_{ijk} - X_j \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (3.3c)$$

$$R_k - \left[ \sum_i \sum_j h_{ik} d_{ijk} Y_{ijk} - V_k^* \right] = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.3d)$$

$$X_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.3e)$$

$$Y_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (3.3f)$$

En el conjunto definido por (3.2) se busca minimizar el lamento promedio y el lamento minimax simultáneamente. La restricción (3.3a) estipula que solo  $p$  instalaciones se deben ubicar. La restricción (3.3b) establece que cada nodo de demanda se asigna a un sólo CD en cada escenario  $k$ . La restricción (3.3c) estipula que las demandas en el nodo  $i$  se asignan a un CD habilitado en el nodo  $j$ , bajo el escenario  $k$ . La restricción (3.3d) define el lamento asociado al escenario  $k$ . Finalmente, (3.3e) y (3.3f) restringen a las variables a que tomen sólo valores de 1 o 0 (tomado de *Daskin, et al. (1997)*).

---

<sup>20</sup>MOOP: Multiobjective Optimization Problem.

*Daskin, et al. (1997)* examinan el compromiso entre el lamento esperado y el lamento minimax, por medio de la resolución del problema definido en (3.2) a (3.3f), resuelto mediante el uso de un método exacto. Los autores imponen una restricción sobre la función del lamento esperado con el fin de calcular los compromisos entre las funciones objetivo en (3.2), forzándola a ser menor o igual que un valor  $R_0$  dado; i.e.  $\sum_{k=1}^n q_k R_k \leq R_0$ . Inicialmente la cota del lamento esperado se fija en  $R_0 = \infty$ , lo cual resulta en una solución óptima para  $C_2$ , asociada con un valor de lamento esperado  $R_{C_2}$ . Posteriormente, los autores restan una unidad a  $R_{C_2}$  y utilizan el valor resultante como la nueva cota  $R_0$  para resolver el problema nuevamente. A este método se le conoce como el método  $\epsilon$ -restringido (*Miettinen, 1999*); cabe señalar que para cada valor de  $R_0$ , un problema NP-difícil se debe resolver; esto implica que el método no funciona para casos de tamaño lo suficientemente grande.

Por lo anterior, las funciones objetivo que se encuentran en conflicto ( $C_1$  y  $C_2$ ) se consideran como medidas de robustez para un conjunto de soluciones. Esto significa que entre más cerca se encuentre el conjunto de soluciones del conjunto óptimo, en todos los escenarios, más robusta es la solución. Para entender mejor lo que significa optimizar dos o más funciones objetivo al mismo tiempo, más adelante se presentan los conceptos básicos referentes a la optimización multiobjetivo. La comparación de robustez entre diferentes conjuntos de soluciones se explica con mayor detalle en el Capítulo 5.

## 3.2 Formulación del PMP robusto y confiable

*Daskin, et al. (1997)* presentaron una variación del modelo PMP al que nombraron “problema  $\alpha$ -confiable con lamento  $p$ -Minimax bajo incertidumbre”; este enfoque busca

minimizar el máximo lamento para un valor dado de confiabilidad  $\alpha$ . De manera idéntica al modelo PMP robusto, una solución del modelo  $\alpha$ -confiable consiste en seleccionar  $p$  CDs que permanecen fijos en todos los escenarios, mientras que las asignaciones de los minoristas cambia como función de la distancia entre los nodos en cada escenario. La variación con respecto al modelo PMP robusto estriba en que, como cada escenario tiene un valor de probabilidad dado, los escenarios seleccionados deben sumar, al menos, un valor de confiabilidad  $\alpha$ , mismo que se fija previamente.

Dado que el modelo PMP robusto-confiable tiene su fundamento en el modelo PMP robusto, sólo es necesario agregar una variable de decisión al modelo, ésta es:

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona el escenario } k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El cálculo de los lamentos se realiza como se describe en la Sección 3.1 en el caso del PMP robusto, donde el lamento promedio se obtiene por  $C'_1 = \sum_{k=1}^n q_k R_k Z_k$ , mientras que el lamento minimax se define por  $C'_2 = \max_k \{R_k Z_k\}$ . La confiabilidad esperada se calcula empleando cada una de las probabilidades de ocurrencia de los escenarios ( $q_k$ ), i.e.  $C'_3 = \sum_{k=1}^k q_k Z_k$ . Por lo anterior, el modelo multiobjetivo de optimización se define a continuación:

$$\text{Minimizar } \{C'_1, C'_2\}, \text{ Maximizar } \{C'_3\} \quad (3.4)$$

Sujeto a

$$\sum_j X_j = p \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.5a)$$

$$\sum_j Y_{ijk} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (3.5b)$$

$$Y_{ijk} - X_j \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (3.5c)$$

$$R_k - \left[ \sum_i \sum_j h_{ik} d_{ijk} Y_{ijk} - \hat{V}_k \right] = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.5d)$$

$$X_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.5e)$$

$$Y_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (3.5f)$$

$$Z_k \in \{0, 1\} \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.5g)$$

A diferencia del modelo PMP robusto, el modelo PMP robusto y confiable (ecuaciones (3.4) a (3.5g)) debe optimizar tres funciones objetivo de forma simultánea: minimiza el lamento esperado y el lamento minimax, mientras maximiza la confiabilidad de la solución. Otra diferencia con respecto al modelo PMP robusto es la restricción (3.5g) respecto a la variable de decisión, que considera la inclusión, o no, de cada escenario. Dado que la probabilidad acumulada de los escenarios seleccionados variará en cada conjunto-solución, el objetivo es entonces seleccionar los escenarios que contribuyen a maximizar la confiabilidad, mientras se mantiene la robustez de la solución a su nivel máximo. El significado de optimizar simultáneamente dos o más funciones objetivo se define formalmente a continuación.

### 3.3 Conceptos básicos de la optimización multiobjetivo

Un problema multiobjetivo se formula, sin pérdida de generalidad, como uno de minimización (*Ehrgott, 2005; Miettinen, 1999; Steuer, 1986*):

$$\text{minimizar}\{z_1 = f_1(x), \dots, z_J = f_J(x)\} \quad (3.6)$$

donde  $J$  es el número de funciones objetivo, una solución  $x = [x_1, \dots, x_l] \in \mathbf{X}$  es un vector de variables discretas y  $\mathbf{X}$  es el conjunto de soluciones factibles. Para el caso que se pretende resolver,  $\mathbf{X}$  se refiere a todas las posibles selecciones de  $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_p}$  que satisfagan las restricciones (3.3b) a (3.3f), junto con sus respectivas asignaciones  $Y_{ijk}$  bajo los  $K$  escenarios. La *imagen* de una solución en el espacio de decisión es un *punto*,  $z = [z_1, \dots, z_J] \in \mathbf{Z}$  en el espacio de criterios. Bajo este esquema, no existe una solución óptima simple para los problemas multiobjetivo, sino muchas soluciones no dominadas (**ND**) conocidas como las soluciones óptimas de Pareto (*Ehrgott, 2005; Miettinen, 1999; Steuer, 1986*). Si se supone, de nuevo, un problema de minimización, la definición de dominancia se establece como sigue (*Ehrgott, 2005; Miettinen, 1999; Steuer, 1986*):

Un punto  $z^1 \in \mathbf{Z}$  domina a un punto  $z^2 \in \mathbf{Z}$ , denotado por  $z^1 \preceq z^2$ , si  $\forall_j z_j^1 \leq z_j^2$ , y si existe al menos un índice  $j$  para el cual  $z_j^1 < z_j^2$ . La solución  $x^1$  domina a la solución  $x^2$ ,  $x^1 \preceq x^2$ , si la imagen de  $x^1$  domina la imagen de  $x^2$ . Una solución  $x \in \mathbf{X}' \subseteq \mathbf{X}$  es **ND** si no existe una solución  $x' \in \mathbf{X}'$  tal que  $x' \preceq x$ . Un conjunto de soluciones  $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}'$  se conoce como un **conjunto ND** si cada  $x \in \mathbf{F}$  es **ND**. Si  $\mathbf{X}'$  es el conjunto de todas las soluciones factibles, i.e.  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$ , entonces  $\mathbf{F}$  se conoce como el **conjunto Pareto**

**óptimo.** En este caso, la imagen de  $\mathbf{F}$  se denomina **frente Pareto**. Esto significa que minimizar  $\{C_1, C_2\}$ , o minimizar  $\{C'_1, C'_2, -C'_3\}$  implica encontrar el **conjunto Pareto óptimo** y su correspondiente frente.

Dado que resolver problemas multiobjetivo de gran tamaño presenta dificultades de factibilidad al emplear algoritmos exactos, se propone emplear un enfoque de cómputo evolutivo.

Los algoritmos evolutivos trabajan con un multi-conjunto de soluciones, lo que los hace adecuados para trabajar con problemas multiobjetivo. La motivación para trabajar con esta heurística se debe a que ella considera características de gran complejidad dentro del problema, sin agregar mayor complejidad dentro del algoritmo, tal y como ocurre con el método  $\epsilon$ -restringido descrito en (*Daskin, et al., 1997*), o por cualquier otro método exacto. El costo de esta ventaja es la pérdida de garantía de optimalidad en la solución, lo que es un problema mayor. Sin embargo, nuestra hipótesis es que las aproximaciones obtenidas son lo suficientemente buenas como para entender los compromisos que se forman entre los objetivos que se desean optimizar.

Más allá de encontrar las soluciones **ND** para el problema en estudio, surge una serie de preguntas derivadas del análisis de los resultados obtenidos, tales como las que se describen a continuación.

Es bien conocido que minimizar  $C_1$  es equivalente a minimizar el costo esperado asociado a la ecuación (3.1) (*Snyder, 2003*), por lo que no es necesario calcular el valor de  $V_k^*$ . Sin embargo, minimizar  $C_2$  no necesariamente equivale a minimizar el  $\max_k \{V_k\}$  dado que para este cálculo sí se requiere conocer el valor de  $V_k^*$ , o una cota inferior del mismo, por lo que una pregunta natural que surge es:

i ¿Qué tan importante es la calidad de la cota inferior del valor óptimo ( $V_k^*$ ) para

el cálculo de los compromisos entre los objetivos en conflicto,  $C_1$  y  $C_2$ ?

Por otro lado, además de resolver el problema, es interesante conocer la sensibilidad de las soluciones **ND** ante la variación de los parámetros del problema, por ejemplo:

- ii ¿Cómo cambia el compromiso entre los objetivos  $C_1$  y  $C_2$ , en función del cambio en el número de nodos de demanda o en el número de CDs?

Se ha mostrado en la literatura que la calidad de las soluciones **ND** depende de la selección de CDs que ofrezca valores altos de robustez y confiabilidad en todos los escenarios (*Daskin, et al., 1997*); sin embargo, dado que esta selección de CDs es inicialmente desconocida, resultaría útil tener alguna idea previa sobre qué CDs elegir. Por ello, surge la siguiente pregunta:

- iii ¿Es favorable emplear las asignaciones óptimas de los CDs por escenario (las que minimizan la función (3.1)) para generar soluciones eficientes del problema multiobjetivo ((3.2) to (3.3f)), considerando todos los escenarios?

Este y otro tipo de preguntas, además de la solución de los problemas en estudio, se resuelven empleando los algoritmos que se describen en el siguiente capítulo.

## Capítulo 4

# Propuesta de algoritmos evolutivos para la solución experimental de los modelos PMP

Hasta el momento se han presentado las particularidades de los problemas a resolver. En el presente capítulo se abordan los detalles de la metodología empleada para solucionar los problemas de localización de instalaciones para ambas versiones: MORO y MORO confiable, seguida de la propuesta de algoritmos que los resuelven.

### 4.1 Metodología empleada en la solución experimental de los modelos PMP propuestos

En el Capítulo 2 se mencionó que es posible encontrar la solución robusta a los problemas multiobjetivo empleando diversas enfoques que van, desde los algoritmo exactos, hasta los algoritmos evolutivos. Una metodología típica empleada en la solución y análisis de problemas MORO mediante métodos exactos, se muestra en la Figura (4.1-a), en donde se nota que al inicio se tiene un problema MORO que cuenta con parámetros y variables bien definidos, mismos que se codifican precisamente por medio de métodos exactos hasta optimizar la solución. Posteriormente, es posible que surjan preguntas interesantes derivadas del análisis de situaciones asociadas al problema, lo que dirige precisamente a la formulación de hipótesis que posteriormente se deseen comprobar. Es precisamente en esta etapa de esta metodología donde aparece un área de oportunidad dado que, en muchas ocasiones, hacer ajustes a los parámetros o variables del problema

implica recodificar el método de solución propuesto inicialmente. Dado que todo este lazo se repite en varias ocasiones hasta tener una comprensión aceptable del problema, es muy probable que el método exacto inicialmente propuesto se deba recodificar varias veces, lo que a la postre resulta costoso o incluso inviable.

A pesar de la amplia variedad de técnicas empleadas para resolver los problemas multiobjetivo, algunas de ellas (en particular las que están basadas en los algoritmos exactos) son demasiado rígidas como para adaptarlas fácil y ágilmente, en caso de que se deseen hacer variaciones en los parámetros, en las variables o en las funciones objetivo, con el fin de tener una comprensión más profunda del problema. Por esta razón, se proponen otras metodologías como la que se describe a continuación.

La metodología de “caja negra” que emplea técnicas evolutivas se muestra en la Figura (4.1-b). Al igual que en el caso previo, inicia con un problema multiobjetivo que cuenta con un conjunto de parámetros y variables bien definidos, mismos que se codifican por medio de algoritmos evolutivos que se sintonizan previamente antes de buscar experimentalmente las soluciones **ND**. Este algoritmo se ejecutará hasta que se cumpla un criterio de paro previamente definido. La parte interesante de esta metodología radica en que se tiene una ganancia no considerada en la metodología descrita previamente dado que, posterior al análisis de situaciones asociadas al problema y al surgimiento de las hipótesis que responden las típicas preguntas del tipo “*what if*”, la variación de los parámetros, los cambios en la(s) función(es) objetivo, o incluso la adición de nuevas funciones objetivo para comprobar dichas hipótesis, no implica una reformulación del algoritmo, siendo ésta, la principal fortaleza de la metodología de solución propuesta. Si bien, la búsqueda de soluciones **ND** se penaliza con la pérdida de optimalidad, la ganancia derivada en la etapa de análisis de situaciones permite tener una comprensión amplia del problema en estudio. A continuación se presentan las

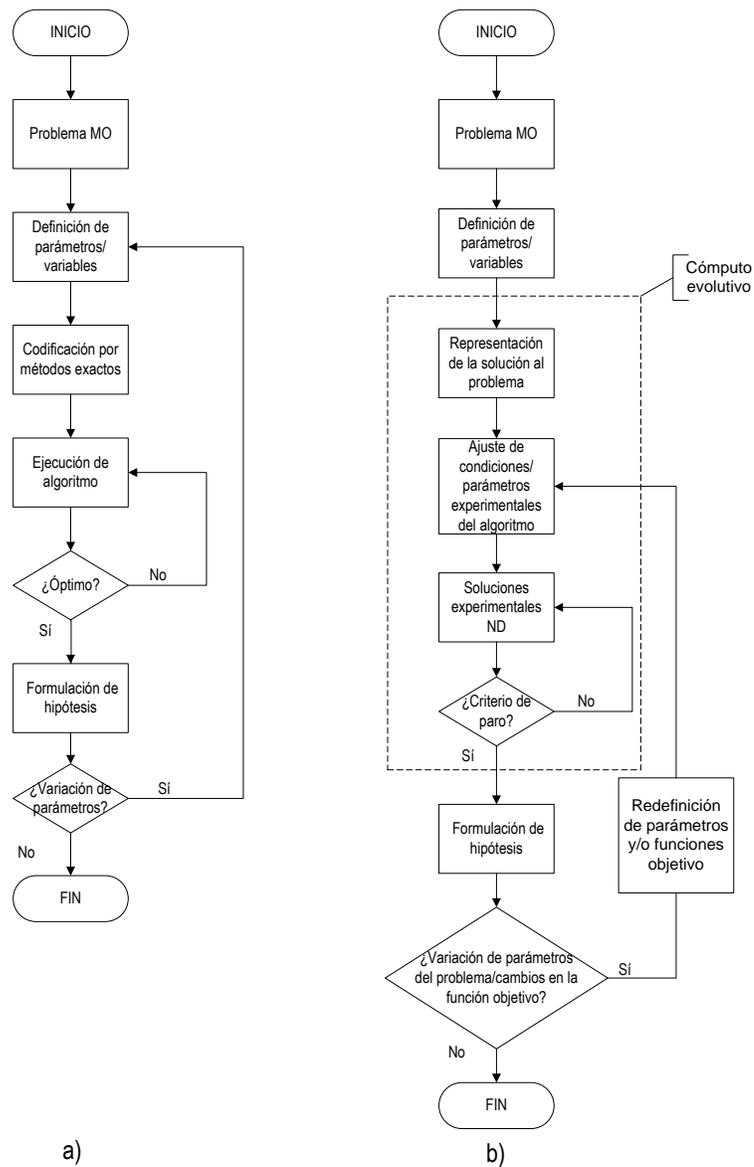


Figura 4.1: Diagramas de flujo de metodologías empleadas en la optimización robusta de problemas multiobjetivo por medio de a) métodos exactos y b) algoritmos evolutivos. Figura elaborada por el autor de la tesis.

propuestas de algoritmos para los problemas de localización MORO y MORO-confiable, es decir, la técnica encerrada en línea discontinua en la Figura (4.1-b).

## 4.2 Algoritmos propuestos

En capítulos anteriores se han presentado las particularidades del problema multiobjetivo PMP bajo incertidumbre, enfatizando la complejidad que involucra la búsqueda de un conjunto de soluciones que cumplan determinadas características de robustez. A pesar de que existen diversas propuestas para resolver este tipo de problemas, es precisamente la complejidad de los mismos la que motiva el uso de algoritmos evolutivos. De acuerdo a *Eiben y Smith (2003)*, los algoritmos evolutivos imitan los principios evolutivos de la naturaleza con el fin de dirigir su búsqueda hacia una solución óptima, basándose en los siguientes principios evolutivos:

- \* Existe una **población** de individuos quienes conviven en un ambiente con recursos limitados.
- \* La **competencia** por esos recursos causa la **selección** de los individuos que mejor se **adaptan** al ambiente.
- \* Esos individuos actúan como la semilla de la nueva generación de individuos a través de los operadores de **recombinación** y **mutación** creando **diversidad** en la población.
- \* Los nuevos individuos se **evalúan** con base en su nivel de aptitud y **compiten** (posiblemente también contra sus padres) por sobrevivir.
- \* Con el tiempo, la **selección natural** provoca el crecimiento de una población mejor adaptada.

A continuación se abordan los detalles de los algoritmos genéticos propuestos para resolver los problemas de localización bajo incertidumbre; para ello, inicialmente se presenta el pseudocódigo aplicado al PMP basado en el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II (NSGA-II)* propuesto por *Deb, et al. (2002)* y posteriormente se explican cada uno de sus elementos a detalle.

### 4.2.1 Algoritmo pMNSGA-II robusto

#### Algoritmo 1. pMRNSGA-II

**Entrada:** El número de nodos  $n$ , la demanda  $h_{ik}$  de cada nodo  $i$  en el escenario  $k$ , la distancia  $d_{ijk}$  del nodo  $i$  al nodo  $j$  en el escenario  $k$ , el número  $p$  de CDs a instalar, el número de escenarios  $K$ , el máximo número de generaciones, la probabilidad de cruzamiento  $q_c$  y de mutación  $q_m$ .

**Salida:** El conjunto de soluciones **ND** y su correspondiente frente **F<sub>ND</sub>**.

**1 Inicialización.** Genera una población aleatoria  $P_{Ini}$ ,  $t = 0$ .

Clasifica la población de acuerdo a su rango de **ND**.

Mediante selección binaria por torneo se obtiene  $P_0$ , el cruzamiento de un sólo punto, y los operadores de cruzamiento  $q_c$  y mutación  $q_m$

se usan para generar la población de hijos  $Q_0$  de tamaño  $N$ .

**2** Hasta que el criterio de terminación seleccionado se cumpla:

**3** Combinar la población de padres e hijos  $R_t = P_t \cup Q_t$

**4** Aplicar *ordenamiento rápido ND* sobre  $(R_t)$ ,

i.e. calcular  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots)$

**5** Inicializar la nueva población y el contador;

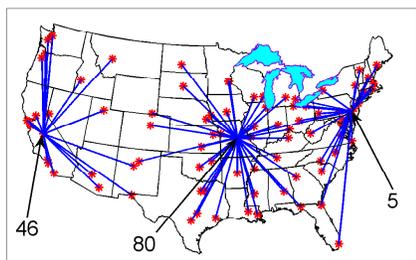
i.e.  $P_{t+1} = \emptyset$  e  $i = 0$

- 6 Hasta que la población se llene; i.e. mientras  $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$
- 7 Calcular la *distancia de amontonamiento* en  $F_i$
- 8 Incluir el  $i$ -ésimo conjunto **ND** en la población;  
i.e.  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$
- 9 Verifica el conjunto **ND** siguiente para su inclusión dentro  
de la nueva población y continúa a la etapa (6).
- 10 Ordena los elementos del conjunto **ND** en forma descendente  
empleando  $<_c$ ; i.e.  $\text{Ordena}(F_i, <_c)$
- 11 Escoge los primeros  $(N - |P_{t+1}|)$  elementos de  $F_i$ ;  
i.e.  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i [1 : (N - |P_{t+1}|)]$
- 12 Emplea la selección de torneo binario para actualizar  $P_{t+1}$ ,  
y aplica los operadores de cruzamiento de un sólo punto  
y de mutación para crear una nueva población  $Q_{t+1}$
- 13 Incrementa el contador de generaciones  $t = t + 1$   
y continúa al paso (3).
- 14 devuelve el conjunto **ND** y su correspondiente frente  $\mathbf{F}_{\mathbf{ND}}$ .

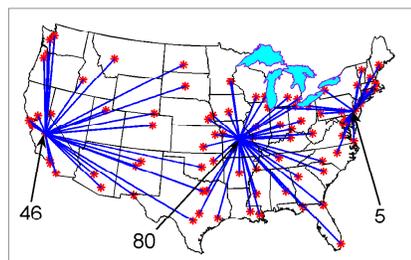
### Elementos del algoritmo pMNSGA-II robusto

**Representación del individuo.** Se usa una codificación simple de tamaño variable donde los genes en el cromosoma corresponden al índice de la instalación seleccionada. Esta codificación indica los CDs seleccionados, mientras que omite la asignación de los minoristas. Se eligió esta codificación debido a su simpleza y a que se usa ampliamente para este tipo de problemas (*Alp, et al., 2003*).

Una solución para el ejemplo del problema de 3-Mediana y dos escenarios, mostrado



(a) Asignaciones en escenario 1



(b) Asignaciones en escenario 2

Figura 4.2: Asignación de 85 nodos a 3 CDs ( $I = \{5, 46, 80\}$ ) seleccionados en dos escenarios diferentes para el caso de 88 nodos, en el problema 3-Mediana.

en las Figuras 4.2a y 4.2b, se representa por medio de un conjunto de enteros  $I = \{5, 46, 80\}$ , donde cada  $i \in I$  es el número de nodo seleccionado como CD.

Es importante hacer notar que los nodos seleccionados como CD son los mismos en los dos escenarios; así, cada minorista se asigna a un solo CD, de tal forma que el producto demanda-distancia es mínimo, lo cual permite asegurar que la función de costo (3.1) es mínima en cada escenario (*Daskin, et al., 1997*). Si la selección de CDs es óptima, se asegura que la solución global de asignación también sea óptima (esto se conoce como la propiedad de Hakimi<sup>21</sup>), según *Daskin, et al. (1997)*). También es importante resaltar que, aunque los CDs son los mismos en todos los escenarios, el par de CD/minorista cambia (e.g., cuando cambian las distancias) en cada escenario, por lo que se generan distintos productos demanda/distancia de escenario a escenario. Estos pares CD/minorista obtenidos por escenario definen un portafolio de soluciones.

**Inicialización de la población.** La población inicial  $P_{Ini}$  se crea aleatoriamente y

<sup>21</sup>El autor de este documento de tesis desconoce si esta propiedad aún es válida para el caso multi-objetivo.

cada individuo se forma por medio de un conjunto de  $p$  CDs. Estos CDs se seleccionan por muestreo aleatorio sin reemplazo, por lo tanto, ninguno de los CDs se selecciona dos veces en el mismo individuo. La población se ordena en un conjunto de frentes **ND**. A cada individuo se le asigna un rango de no-dominancia (donde uno es el mejor) y una distancia de amontonamiento. A través de la selección de padres por torneo binario, y de la aplicación sobre los padres de los operadores de cruzamiento ( $q_c$ ) y de mutación ( $q_m$ ), se crea una población de hijos  $Q_0$  de tamaño  $N$  (*Deb, et al., 2002*) (**Línea 1**).

**Criterio de finalización.** El algoritmo finaliza por cualquiera de los tres siguientes criterios: un número máximo de generaciones, un tiempo límite de cálculo o cualquiera de los criterios previos que ocurra primero (**Línea 2**).

**Combinación de la población.** La población de padres  $P_t$  y la población de hijos  $Q_t$  se combinan dentro de una sola población  $R_t$  de tamaño  $2N$  (**Línea 3**).

**Ordenamiento de frentes.** Con el fin de ordenar la población  $R_t$  en una colección de conjuntos **ND** se aplica el *ordenamiento rápido de frentes ND* a la población  $R_t$ , dando origen al conjunto de frentes **ND**; i.e. el conjunto  $F = (F_1, F_2, \dots)$  está formado por los diferentes frentes ordenados (**Línea 4**). La complejidad del *Ordenamiento rápido ND* es  $O(mN^2)$ , para detalles ver (*Deb, et al., 2002*).

**Selección de padres.** Después de inicializar la población y su índice ( $P_{t+1} = \emptyset$ ;  $i = 0$ ), se inicia el proceso de selección de padres. Este proceso se basa en el operador de torneo con amontonamiento ( $<_c$ ) cuya complejidad es  $O(2N \text{ Log } 2N)$  (*Deb, et al., 2002*). Cada individuo  $i$  tiene dos atributos:

- i Un rango de **ND**,  $r_i$
- ii Una distancia de amontonamiento local,  $d_i$

*Deb, et al. (2002)* mencionan que la distancia de amontonamiento  $d_i$ , de un indi-

viduo  $i$ , es una medida del espacio de búsqueda alrededor de  $i$  el cual no está ocupado por ningún otro individuo en la población. Siguiendo las definiciones previas, un individuo  $i$  gana un torneo en contra de otro individuo  $j$  si tiene un mejor rango en la clasificación de **ND**, comparado con  $j$  o, en caso de que ambos presenten el mismo rango, el individuo  $i$  gana si tiene mejor distancia de amontonamiento. Se sigue este proceso hasta que la nueva población se completa; i.e. mientras  $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$  (**Líneas 6 – 9**). La complejidad de la asignación de la *distancia de amontonamiento* es  $O(mN \text{ Log } N)$ , para detalles ver (*Deb, et al., 2002*).

**Selección de sobrevivientes.** Se realiza un ordenamiento **ND** para clasificar la población entera basada en la clasificación **ND** y  $<_c$ . Una vez que se efectúa el ordenamiento, la nueva población se llena con las soluciones que pertenecen a los diferentes frentes **ND**, uno a la vez. El mejor conjunto de soluciones **ND** empieza a llenar la nueva población, continuando con el segundo conjunto **ND** en la clasificación, después el tercero y así consecutivamente. Es necesario hacer notar que no todos los conjuntos **ND** están ubicados dentro de la nueva población dado que existe una población de tamaño  $2N$  y la nueva población tiene sólo  $N$  individuos. Debido a lo anterior, se eliminan todos los conjuntos **ND** que no se colocaron dentro de la población. La complejidad de la selección por *torneo de amontonamiento* es  $O(mN \text{ Log } N)$  (*Deb, et al., 2002*) (**Líneas 10 – 11**).

**Cruzamiento.** El cruzamiento de un punto se aplica con una probabilidad  $q_c$  a cada par de individuos para crear una nueva población  $Q_{t+1}$  (**Línea 12**). Después del cruzamiento, los genes que pertenecen al padre A ( $P_A$ ) y al B ( $P_B$ ), se intercambian mutuamente con sus respectivos genes, dando origen a los nuevos individuos  $Off_A$  y  $Off_B$  (*Goldberg, 1989*), tal y como se muestra a continuación (los puntos de cruzamiento se indican por medio de  $[\ : ]$ ).

$$P_A = [ 5, 46, \dot{\vdash} \mathbf{80} ], \quad P_B = [ \mathbf{43}, \mathbf{46}, \dot{\vdash} 75 ]$$

$$Off_A = [ 5, 46, 75 ], \quad Off_B = [ \mathbf{43}, \mathbf{46}, \mathbf{80} ]$$

Es posible que esta operación genere individuos no factibles. Por ejemplo, suponga que es necesario seleccionar tres CDs de entre un conjunto de minoristas (i.e.,  $p=3$ ). Sin embargo, es posible que el cruzamiento de un sólo punto genere crear individuos con CDs repetidos, a pesar de que los padres tengan el número correcto de CDs; e.g.

$$P_A = [ 5, 46, \dot{\vdash} \mathbf{80} ], \quad P_B = [ \mathbf{46}, \mathbf{80}, \dot{\vdash} 87 ]$$

$$Off_A = [ 5, 46, 87 ], \quad Off_B = [ \mathbf{46}, \mathbf{80}, \mathbf{80} ]$$

Para reparar estas soluciones no factibles, se remueve el CD duplicado y se elige aleatoriamente un nuevo CD que después se inserta dentro del cromosoma; este proceso tiene un efecto semejante al de la mutación.

**Mutación.** El operador de mutación se aplica con una probabilidad  $q_m$  a cada gen de cada individuo (**Línea 12**). Si un gen se selecciona para mutar, entonces cambiará el CD seleccionado por algún otro CD que no se encuentre en el individuo. Esto es similar a una mutación de un sólo bit (*Goldberg, 1989*), con la restricción que exactamente dos bits (un “1” y un “0”) se fuerzan a cambiar al mismo tiempo; e.g.,

$$Off_A = [ 3, 8, 15, \mathbf{17}, 29 ]$$

$$Off_A = [ 3, 8, 15, \mathbf{21}, 29 ]$$

Aquí se observa que la ubicación del CD 17 se ha movido a la ubicación 21.

**Conjunto de soluciones ND.** Después de alcanzar cualquiera de los criterios de terminación, el algoritmo regresa el frente **ND**,  $\mathbf{F}_{\mathbf{ND}}$  (**Línea 14**).

Como se observa, la complejidad global del algoritmo pMRNSGA-II es  $O(mN^2)$  por cada generación, donde  $m$  es el número de funciones objetivo y  $N$  es el tamaño de la población.

A continuación se presenta el pseudocódigo basado en el (**NSGA-II**) propuesto por *Deb, et al. (2002)* que se aplica al PMP en su versión robusto-confiable Posteriormente se explican a detalle cada uno de sus elementos.

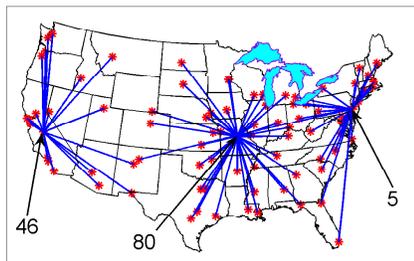
#### 4.2.2 Algoritmo pMNSGA-II robusto y confiable

El pseudocódigo aplicado al PMP robusto y confiable basado en el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II* (**NSGA-II**) propuesto por *Deb, et al. (2002)*, se aplica de la misma forma en la que se hizo con el algoritmo PMP robusto; sin embargo, la representación del individuo, los operadores genéticos y las funciones objetivo se ha adaptado como se indica a continuación.

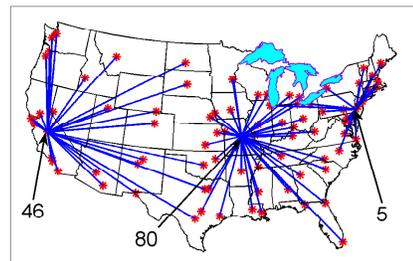
##### Elementos del algoritmo pMNSGA-II robusto y confiable

**Representación del individuo.** Se emplea una codificación simple que se divide en dos partes; en la primera parte, los genes en el cromosoma corresponden al índice de las instalaciones seleccionadas (esta parte del cromosoma es equivalente a la representación del individuo empleada en la subsección 4.2.1); mientras que en la segunda parte, una cadena binaria representa los escenarios que se han seleccionado.

Una solución para el problema de 3-Medianas (tres CDs) con tres escenarios se muestra en las figuras 4.3a y 4.3b, donde se observa el cromosoma que representa la solución. Así, en  $I = \{5, 46, 80\}\{1, 0, 1\}$ , cada  $i \in I$  es el número del nodo seleccionado como CD, y cada “1” binario en el locus  $j$  indica que el escenario  $j$  se debe considerar. Otra opción para la segunda parte del cromosoma, es que esta parte se considera como el índice del escenario. Esto sería particularmente útil para el caso en que el número de escenarios sea muy grande. Sin embargo, dado que el número de escenarios considerados en este documento es pequeño, esta forma no se empleó en los experimentos cuyos



(a) Asignaciones en escenario 1



(b) Asignaciones en escenario 3

Figura 4.3: Asignación de 85 nodos a 3 CDs ( $I = \{5, 46, 80\}$ ) en el primer y tercer escenarios ( $I = \{5, 46, 80\}\{1, 0, 1\}$ ).

resultados se presentan en el presente reporte.

Es importante hacer mención que, al igual que en el modelo PMP robusto, aunque la selección de CDs es la misma en todos los escenarios, el par CD/minorista cambia con los escenarios, generando con ello diferentes productos de demanda-distancia. Así mismo, los pares CD/minorista para cada escenario en el modelo PMP robusto y confiable definen un portafolio de soluciones.

**Inicialización de la población.** La población inicial  $P_{Ini}$  se crea de manera aleatoria. Para la primera parte del cromosoma, al igual que en el caso robusto, se selecciona un conjunto de  $p$  CDs por muestreo sin remplazo, tomados del conjunto de minoristas. Para la segunda parte del cromosoma, el escenario seleccionado  $k$  se incluye en el individuo si las dos premisas siguientes se cumplen: un número dado  $x \in [0,1]$  y  $x > q_{Ini}$ , donde  $q_{Ini}$  es la probabilidad de inicialización de la cadena binaria. La población inicializada de esta forma se ordena en distintos conjuntos **ND**. A cada individuo se le asigna un rango de no-dominancia (donde uno es el mejor nivel) y una distancia de amontonamiento. A través de la selección por torneo binario y los

operadores de cruzamiento  $q_c$  y mutación  $q_m$ , se genera una población de hijos  $Q_0$  de tamaño  $N$  (Deb, et al., 2002) (**Line 1**).

**Criterio de finalización.** Se realiza igual que en el caso del algoritmo pMNSGA-II robusto.

**Combinación de la población.** Se realiza igual que en el caso del algoritmo pMNSGA-II robusto.

**Ordenamiento de frentes.** El *ordenamiento rápido de frentes ND* emplea el procedimiento estándar de dominancia en los valores de las tres funciones objetivo que se optimizan (lamento esperado, máximo lamento y confiabilidad) entre dos soluciones  $u$  y  $v$ . Este procedimiento implica que la solución  $u$  domina a la solución  $v$  si la solución  $u$  no es peor en ninguno de los objetivos y estrictamente mejor en al menos uno de ellos respecto a la solución  $v$ , i.e.

$$E[R^u] \leq E[R^v] \text{ y } \max\{R^u\} \leq \max\{R^v\} \text{ y } \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^u \geq \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^v \text{ y}$$

$$(E[R^u] < E[R^v] \text{ o } \max\{R^u\} < \max\{R^v\} \text{ o } \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^u > \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^v) \quad (4.1)$$

A partir del procedimiento anterior y con el fin de realizar un análisis comparativo con respecto a resultados reportados en la literatura (Daskin, et al., 1997), se empleó una variante del mismo que usa solamente dos funciones objetivo: el máximo lamento y la confiabilidad, por lo que la comparación de frentes, para este caso, empleó el criterio de dominancia para las soluciones  $u$  y  $v$  como sigue,  $u$  domina a  $v$  si:

$$\max\{R^u\} \leq \max\{R^v\} \text{ y } \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^u \geq \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^v \quad (4.2)$$

y

$$(\max\{R^u\} < \max\{R^v\}) \text{ o } \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^u > \left(\sum_{k=1}^k q_k Z_k(u)\right)^v \quad (4.3)$$

**Selección de padres.** Se realiza igual que en el caso del algoritmo pMNSGA-II robusto.

**Cruzamiento.** Con el fin de obtener la población  $Q_{t+1}$  (**Línea 12**) se realiza el cruzamiento con una probabilidad  $q_c$  y se ajusta a las siguientes consideraciones: por cada par de individuos (padres), cuatro individuos se obtienen como hijos. Los primeros dos se obtienen por medio del cruzamiento de punto simple a la primera parte del cromosoma de cada par de individuos y haciendo una copia de la segunda parte del cromosoma. De forma semejante, los dos hijos siguientes se obtienen por medio del cruzamiento de punto simple aplicado a la segunda parte del cromosoma de cada par de individuos y haciendo una copia de la primera parte del cromosoma, tal y como se muestra a continuación (los puntos de cruzamiento se indican por medio de  $[\ : \ ]$ ).

$$\begin{aligned} Off_{AC-B} &= [ 5, 46, 75 ][1,0,1] \\ P_{AB} &= [ 5, 46, \ : \ 80 ][1, 0, \ : \ 1], \quad Off_{CA-D} = [43, 46, 80][0,1,0] \\ P_{CD} &= [43, 46, \ : \ 75 ][0, 1, \ : \ 0], \quad Off_{A-BD} = [ 5, 46, 80 ][1,0,0] \\ Off_{C-DB} &= [43, 46, 75][0,1,1] \end{aligned}$$

Este tipo de cruzamiento permite analizar nuevas posibilidades donde la selección de CDs explora nuevos arreglos de escenarios y donde ciertos arreglos de escenarios exploran nuevas selecciones de CDs.

**Mutación.** El operador de mutación se aplica con una probabilidad  $q_m$  a cada uno de los genes del cromosoma tal y como se explica a continuación (**Línea 12**). Después de aplicar el operador de mutación a cada gen, se obtienen dos cromosomas; i.e., si un gen de la primera parte del cromosoma se selecciona para mutar, éste cambiará la selección de CD por otro CD que no se encuentre en el individuo, mientras mantiene la selección de escenarios. Este proceso se detiene cuando la mutación del CD seleccionado se ha realizado. Por otro lado, si el gen de la segunda parte del cromosoma se selecciona para mutar, éste cambiará su escenario por otro que no se encuentre en el individuo, mientras mantiene la selección de CDs. Es importante señalar que el proceso de mutación de escenarios se aplica a todas las posiciones de los escenarios, i.e. a cada locus, y no se detiene hasta terminar con toda la cadena binaria de escenarios, por lo que es posible obtener varios loci mutados.

$$P_{AB} = [ 3, 8, 15, \mathbf{17}, 29 ] [1, 0, 1, 0, 1, 1]$$

$$Off_{A'B} = [ 3, 8, 15, \mathbf{21}, 29 ] [1, 0, 1, 0, 1, 1]$$

$$Off_{AB'} = [ 3, 8, 15, \mathbf{17}, 29 ] [\mathbf{0}, 0, 1, \mathbf{1}, 1, 1]$$

Aquí se observan que la ubicación del CD 17 se ha movido a la ubicación 21 en el hijo  $Off_{A'B}$ , mientras que el hijo  $Off_{AB'}$  ha desactivado el escenario 1 y activado el escenario 4.

**Conjunto de soluciones ND.** Después de alcanzar cualquiera de los criterios de terminación, el algoritmo regresa un frente **ND**,  $F_{ND}$  (**Línea 14**).

### 4.3 Resumen del capítulo

En el presente capítulo se ha mostrado la propuesta de solución basada en cómputo evolutivo para los problemas PMP robusto y PMP robusto-confiable. En ambos casos se

sigue una metodología que se divide en dos secciones: la primera de ellas se trata de una optimización de “caja negra” donde se ingresan distintos parámetros del problema, tales como el número de clientes o el número de CDs, y la metodología se encarga de resolver el problema devolviendo un conjunto de soluciones que se agrupan en frentes **ND**. Estos frentes se comparan entre si en forma tal que, iterativamente se van descartando hasta llegar a una aproximación al frente Pareto. La metodología de optimización empleada se basa en algoritmos evolutivos, en particular en el NSGA-II (*Deb, et al., 2002*), cuya búsqueda se orienta hacia una solución multiobjetivo óptima. Las versiones del algoritmo que se presentan en este trabajo basan su diferencia en el número y tipo de objetivos por resolver; así, el algoritmo que resuelve el PMP robusto ofrece soluciones multiobjetivo al comparar la calidad de solución entre el lamento promedio y el máximo lamento. Por su parte, el algoritmo que resuelve el PMP robusto-confiable ofrece soluciones multiobjetivo al comparar la calidad de solución entre dos medidas de calidad que son: el máximo lamento y la confiabilidad, o entre tres medidas de calidad: el lamento promedio, el máximo lamento y la confiabilidad.

Por otro lado, la metodología permite formular preguntas interesantes con respecto a las variaciones de los parámetros del problema, tales como el número de nodos o de CDs, y observar los cambios que estas variaciones tienen sobre la robustez y/o la confiabilidad de las soluciones, así como cambios en condiciones particulares del problema tales como la selección de los escenarios o la calidad de los datos de entrada. Esto es posible debido a que el costo de cómputo se controla fácilmente con el número de generaciones y el tamaño de población del algoritmo.

## Capítulo 5

### Marco experimental y resultados

En el capítulo previo se mostraron los algoritmos para resolver los problemas de localización bajo incertidumbre PMP robusto y PMP robusto-confiable, ambos basados en el trabajo de *Deb, et al. (2002)*. En el presente capítulo se muestra el marco experimental que se siguió con ambos algoritmos, iniciando con la generación de los datos de demanda a partir del trabajo de *Daskin, et al. (1997)*, seguido de los experimentos ejecutados con cada algoritmo y el análisis de resultados reportado por sección. A continuación se presenta la generación de los casos de prueba.

#### 5.1 Generación de casos de prueba

La realización de los experimentos requirió el empleo de los datos de entrada que pertenecen al trabajo de *Daskin, et al. (1997)*, mismos que se basan en los datos del censo de Estados Unidos de América en 1990 (*Bureau of the Census, 1990*). Estos datos consideran latitud, longitud y población de cada una de las ciudades más grandes de esa nación, de acuerdo a los siguientes conjuntos de nodos: 49 (representa las 48 ciudades capitales, más la Capital, Washington D.C.), 88, 150, y 300 nodos o minoristas. Siguiendo el mismo razonamiento, en este trabajo también se emplearon los datos del censo del 2000 (*Bureau of the Census, 2000*), con el fin de diseñar los ejemplos de 700 y 1500 ciudades. Es importante hacer notar que cada uno de los conjuntos de nodos

antes mencionados incluyen todos los nodos de los conjuntos más pequeños, e.g., el de 150 nodos incluye todos los nodos del caso de 88 nodos, que a su vez contiene los datos del caso de 49 nodos.

En cada caso, se definen nueve escenarios, uno por cada punto de atracción; así, el punto de atracción 1 corresponde al escenario 1, mientras que el punto de atracción 2 corresponde al escenario 2, y así sucesivamente. La ubicación de cada punto de atracción se define en la Tabla 5.1 (*Daskin, et al., 1997*) y se observan en la Figura (5.1). Cada punto opera como una referencia para calcular la distancia  $d_{rk}$  entre cada ciudad  $r$  y cada punto de atracción  $k$ . Todas las distancias entre todas las ciudades se calculan por medio del método de la distancia del gran círculo como también lo hacen *Daskin, et al. (1997)*. La distancia del gran círculo es la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera sobre la superficie de una esfera, medida a lo largo de una ruta sobre dicha superficie (*Thaddeus, 1975*). En los ejemplos generados por *Daskin, et al. (1997)*, las distancias no son dependientes del escenario; sin embargo, en el caso general, las distancias se asocian a los costos de transporte que varían de escenario a escenario (*Snyder, 2003*).

La demanda incierta de cada nodo  $i$  en cada escenario  $k$  se genera como sigue:

$$h_{ik} = h_i^0 + H_{total} \left( \frac{1}{\frac{\overline{d'_{ik}}}{\sum_{r=1}^n \frac{1}{d'_{rk}}} \right), \quad (5.1)$$

Escenario	Longitud	Latitud
1	- 75.0	25.0
2	- 65.0	55.0
3	-130.0	20.0
4	-130.0	55.0
5	- 96.5	36.5
6	- 96.5	20.0
7	- 96.5	55.0
8	-130.0	36.5
9	- 65.0	36.5

Tabla 5.1: Ubicación de los “puntos de atracción” por cada escenario.

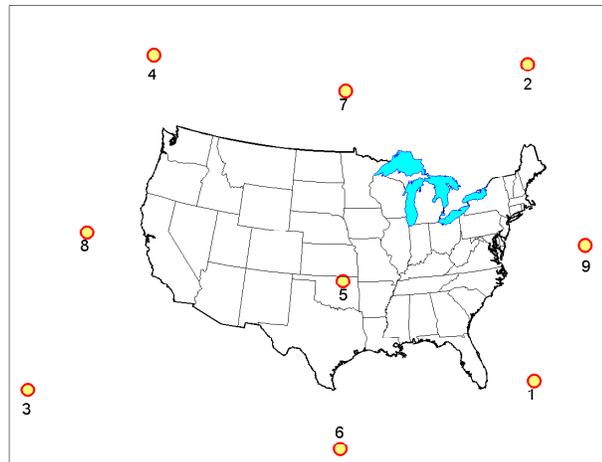


Figura 5.1: Ubicación de los “puntos de atracción” para la generación de escenarios de acuerdo a *Daskin, et al. (1997)*. Figura elaborada por el autor de la tesis.

donde:

$h_{ik}$  : demanda de la ciudad  $i$  en el escenario  $k$ ,

$h_i^0$  : demanda base (población) de la ciudad  $i$ ,

$H_{total}$  : suma de todos los  $h_i^0$  términos (es igual en todos los escenarios),

$d'_{rk}$  : distancia del gran círculo entre la ciudad  $r$  y el punto de atracción  $k$ .

La expresión (5.1) calcula los valores de demanda  $h_{ik}$  para cada nodo  $i$  en cada escenario  $k$ . Inicialmente, esta función considera la población de cada ciudad como la demanda base  $h_i^0$ ; luego, se adiciona una demanda proporcional. Esta demanda adicional considera el producto entre la demanda total  $H_{total}$  y el cociente entre la inversa de la distancia  $d'_{ik}$  entre cada ciudad  $i$  y un punto de atracción  $k$  determinado, y la suma de las inversas de las distancias de todos los nodos al punto de atracción  $k$ . Aunque la demanda total por escenario  $H_{total}$  es igual en cada escenario, la demanda proporcional de cada ciudad en cada escenario cambia; por ejemplo, en el escenario 1 las demandas en la porción sureste del país son más grandes de lo que son en el escenario 4.

Aunque el modelo considera que cada escenario tiene una probabilidad específica, nosotros suponemos en nuestros experimentos, sin pérdida de generalidad, que todos los escenarios son igualmente probables. Es importante mencionar que es posible encontrar en la literatura tamaños de problema en el intervalo de 10 a 483 nodos (*Li y Golden, 2007; Prins, 2004*); por otro lado, en el presente caso de estudio se resuelven ejemplos en un intervalo de 49 a 1500 nodos.

En la siguiente sección se presenta una serie de experimentos donde se analizan los compromisos entre las medidas de robustez empleadas por los modelos PMP robusto y PMP robusto-confiable.

## 5.2 Experimentos y análisis de resultados respecto al pMNSGA-II robusto

Con el fin de analizar el compromiso entre los criterios en conflicto (el lamento promedio y el lamento minimax), se propone el empleo del pMNSGA-II en una serie de experimentos. Derivado de estos experimentos se analiza el compromiso entre ambos criterios desde distintas perspectivas. En la Tabla 5.2 se muestran los casos de los experimentos analizados, los parámetros empleados en la ejecución del algoritmo y las características del equipo de cómputo en el que los experimentos se realizaron.

### 5.2.1 Experimento 1.1

**¿Qué tan importante es la calidad de la cota inferior de  $V_k^*$  en la calidad del mejor frente ND obtenido por el pMNSGA-II?**

Cuando se trata con problemas del tipo NP-difícil, en muchas ocasiones no es posible garantizar encontrar el valor óptimo de la función objetivo  $V_k^*$  de forma eficiente para todos los casos, por lo que generalmente se trabaja con cotas inferiores conocidas para  $V_k^*$ . Debido a lo anterior, en el presente apartado se analiza lo que ocurre con la calidad del mejor frente ND en los siguientes casos:

- i) cuando se conoce el valor óptimo ( $V_k^*$ ) de la función objetivo (3.1) en cada escenario, lo que permite calcular el lamento,

<b>Condiciones experimentales</b>	
Número de ciudades (nodos)	49, 88, 150, 300, 700, 1500
Número de escenarios ( $K$ )	9
Número de CDs ( $P$ )	5, 10, 15, 20, 30
Valor óptimo ( $V_k^*$ )	Conocido o desconocido
<b>Parámetros del pMNSGA-II</b>	
Tamaño de población	100 a 300 individuos
<b>Criterio de finalización</b>	
Máximo tiempo de cálculo (por corrida)	20000 ms
Máximo número de generaciones	100 a 7000
Número de corridas del algoritmo	30
<b>Operadores genéticos</b>	
Método de cruzamiento	De un sólo punto
Probabilidad de cruzamiento ( $q_c$ )	0.90 - 1.00
Probabilidad de mutación ( $q_m$ )	0.05 - 0.20
<b>Características del equipo de cómputo</b>	
Sistema operativo	Windows XP Prof., SP-3
Memoria	2GB RAM
Procesador	Intel Core 2 Duo T7200, 2GHz
Compilador	Java 1.6.0_18 (Blue-J. Ver. 2.5.3)

Tabla 5.2: *Condiciones experimentales, variación de parámetros de algoritmo pMNSGA-II y características del equipo de cómputo.*

ii) cuando se emplea una cota inferior (LB<sup>22</sup>) para  $V_k^*$ .

*Snyder (2006)* menciona que no es necesario calcular  $V_k^*$  para minimizar el lamento promedio. Sin embargo, ¿qué tan importante es la ausencia de esta información en la calidad del frente Pareto? Responder esta pregunta no resulta sencillo. Con este fin, se aplicó el pMNSGA-II a los casos de 49, 88, 150, 300, 700 y 1500 nodos considerando los nueve escenarios en conjunto y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que cada escenario tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

Adicionalmente, se propusieron distintos niveles de precisión con respecto a la cota inferior de  $V_k^*$ ; i.e., se probaron distintos valores de  $\delta V_k^*$ ,  $\delta \in (0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00)$  por escenario, donde un valor de  $\delta = 1.00$  significa que el valor óptimo se conoce, i.e., se utiliza a  $V_k^*$  como cota, mientras que un valor de  $\delta = 0.0$  significa que se desea minimizar  $V_k$ , ya que  $R_k = V_k - V_k^* = V_k - 0 = V_k$ . Los valores óptimos  $V_k^*$  se obtuvieron empleando un software que se encuentra públicamente disponible (*SITATION* software, versión 5.8.0.11, *Daskin (1995)*).

La Figura (4.3) muestra los compromisos entre el lamento promedio y el máximo lamento, obtenidos por medio del pMNSGA-II para la selección de 5 CDs entre 1500 nodos (éste es sólo un caso de muestra). Una ampliación de los frentes **ND** resultantes se observa cerca de cada punto relacionado con el frente generado con valores diferentes de  $\delta$ .

Se observa en la Figura (5.2) que entre más cerca se encuentre el valor de la cota inferior al valor óptimo  $V_k^*$ , el frente **ND** es más robusto; i.e., el lamento promedio y el lamento minimax son menores. De hecho, se obtienen valores muy parecidos para los casos de 49, 88, 150, 300 y 700 nodos, mismos que se presentan en el Anexo B.

---

<sup>22</sup>LB: Lower bound.

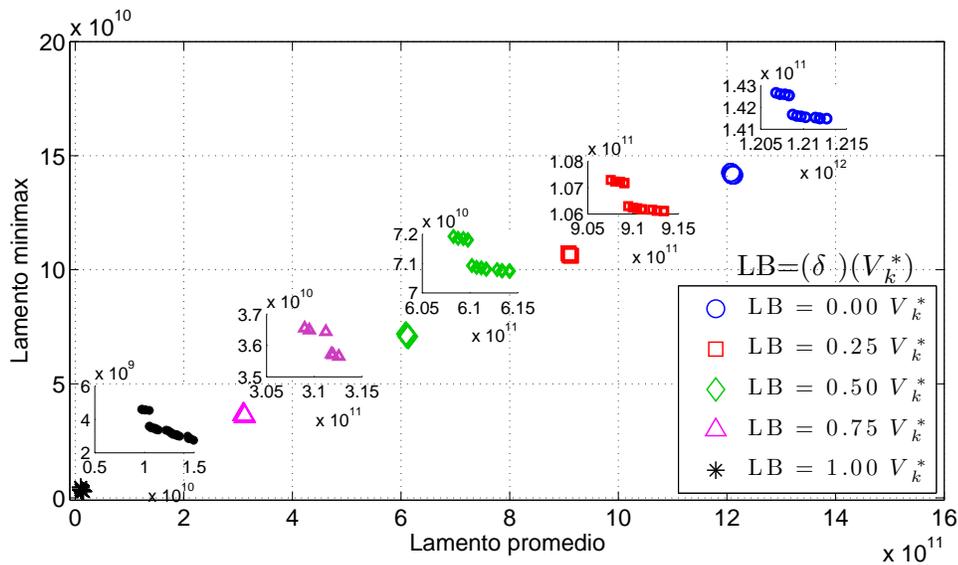


Figura 5.2: Frente Pareto consolidado para 1500 nodos, 5 CDs y distintos valores de  $\delta$ . Figura elaborada por el autor de la tesis.

Es importante hacer notar que se empleó el pMNSGA-II para optimizar el valor de  $V_k$  en los casos de 49 y hasta 300 nodos con 5, 10, 15, 20 y 30 CDs. Lo anterior se consiguió al colocar inicialmente el valor de  $V_k^* = 0$ , posteriormente el pMNSGA-II fue encontrando cada uno de los valores de  $V_k^*$  (ver intervalos de tiempo de cálculo de  $V_k^*$  en Tabla B.1 del Anexo B). Estos valores coincidieron con todos aquellos que se obtuvieron mediante el software *SITATION* (Daskin, 1995), en todos y cada uno de los nueve escenarios y cada uno de los casos de 49, 88, 150 y 300 nodos, con sus respectivos CDs (5, 10, 15, 20 y 30), a excepción de los casos de 150 y 300 nodos con 20 y 30 CDs, cuyos valores se encontraron muy cerca del valor  $V_k^*$ , presentando un error relativo máximo de 1.46% en cada uno de los escenarios.

Considerando los resultados previos, también se empleó el pMNSGA-II en los casos de 700 y 1500 nodos; sin embargo, dadas las limitaciones del software empleado para resolver casos por métodos exactos con un número de nodos superior a 300 con el fin

Cota		Nodos				
$\delta$	49	88	150	300	700	1500
0.00	14.25	22.29	38.07	73.88	180.22	452.86
0.25	14.50	22.33	37.00	73.78	180.54	445.82
0.50	14.62	23.18	36.39	71.66	181.18	452.41
0.75	14.11	22.82	36.34	71.44	206.73	466.11
1.00	13.92	22.34	38.49	71.72	187.91	422.94

**Tabla 5.3:** *Tiempos promedio de ejecución del algoritmo en milisegundos, con variaciones en el número de nodos y en la calidad de la cota mínima.*

de comparar la calidad de las soluciones, y también dada la ausencia de garantía para encontrar el valor óptimo empleando el enfoque evolutivo, sólo se analizaron los casos hasta de 300 nodos.

Todos los resultados previos permiten expresar que, a medida que la cota para  $V_k^*$  se aleja de ella (i.e., degrada su calidad), el conjunto de soluciones pierde robustez sin importar el número de nodos por considerar, por lo tanto, se concluye que la calidad de la cota inferior de  $V_k^*$  es de gran importancia para el cálculo de una serie de soluciones eficientes dentro de un marco de incertidumbre, así que bien vale la pena invertir el tiempo en calcular una cota más cercana a  $V_k^*$  para mejorar la robustez de la solución final.

La Tabla 5.3 muestra los tiempos promedio de cálculo para los distintos casos y distintos valores de la cota  $V_k^*$ . Es importante mencionar que los cambios en los tiempos de cálculo para el pMNSGA-II están relacionados sólo con el número de nodos y no con la calidad de la cota para  $V_k^*$ .

## 5.2.2 Experimento 1.2

### ¿Cómo cambia el mejor frente ND con respecto al número de CDs seleccionados?

Debido a que el SCND es un proceso de orden estratégico, es necesario considerar las posibles condiciones futuras que afectarían la calidad de la solución ante el cambio en el número  $p$  de instalaciones seleccionadas. Por lo anterior, en la presente sección se analiza la robustez de los frentes **ND** ante esta situación; para ello se emplea el pMNSGA-II en los casos de 49, 88, 150 y 300 nodos, considerando los nueve escenarios y el valor óptimo de la función objetivo como *conocido*. Como un ejemplo, la Figura (5.3) muestra la relación de todos los frentes, exclusivamente para el caso de 88 nodos, con variaciones en el número de CDs (2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 30 y 87).

Inicialmente,  $V_k^*$  se calcula para los casos de 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 30, y 87 CDs. En el caso particular de 88 nodos, cada nodo es su propio CD. En ese caso, dado que la distancia entre cada minorista y su respectivo CD es igual a cero, entonces  $V_k^* = 0$ .

Se observa en la Figura (5.3) que, a medida que el número de CDs aumenta, ambos lamentos decrecen a cero. Esto ocurre cuando el número de CDs es igual al número total de minoristas; i.e., los mejores frentes **ND** se obtienen cuando se emplea un número grande de CDs. Estos frentes ofrecen la solución más robusta dado que es la mejor en todos los escenarios, aunque también resulta la más costosa al momento de implementarla; sin embargo, este es un resultado esperado (*Snyder y Daskin, 2005*).

Por otro lado, sería muy útil encontrar una cota inferior para el número de CDs que proporcione valores mínimos en el lamento promedio y en el lamento minimax. Por ejemplo, *Daskin, et al. (1997)* resuelven el PMP para  $p = 5$  en el caso de 88 nodos; sin

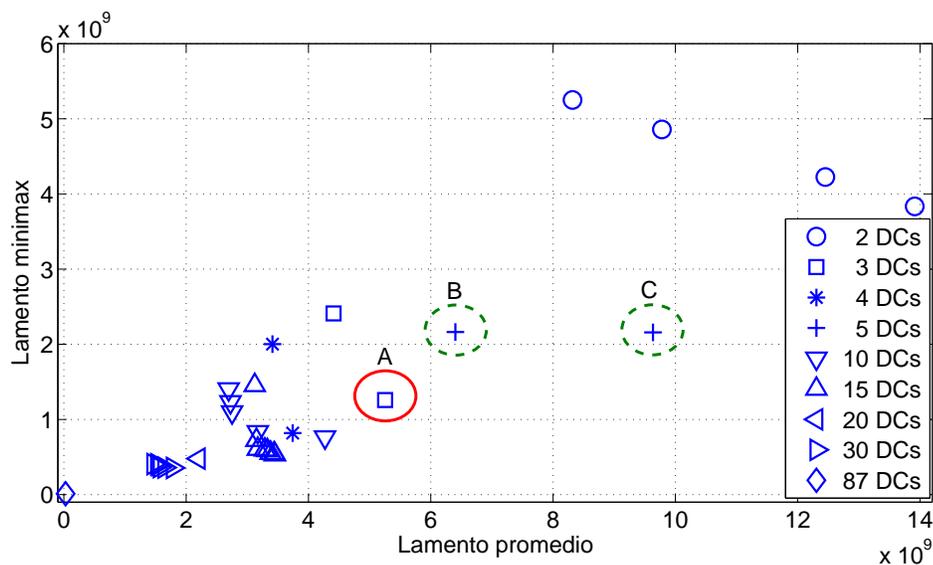
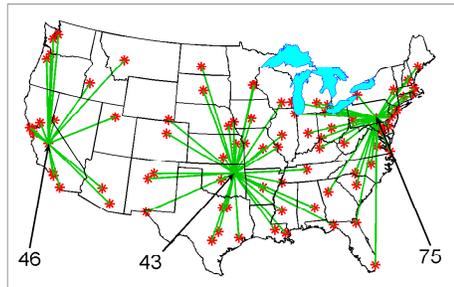
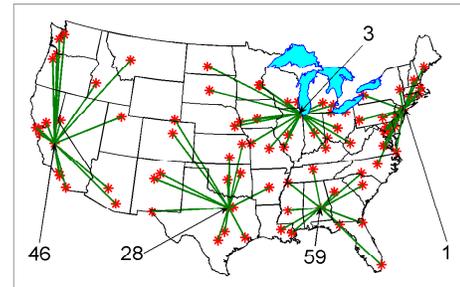


Figura 5.3: Variaciones en el número de CDs *vs.* el lamento promedio y el lamento minimax para los frentes ND consolidados, 88 nodos y valor  $V_k^*$  conocido. Figura elaborada por el autor de la tesis.

embargo, para el mismo caso, la solución obtenida en el frente ND con 3 CDs (ver el punto A en la Figura (5.3)) domina a todas las soluciones con 5 CDs (Ver los puntos B y C en la Figura (5.3)), i.e., existen soluciones con tres CDs que son más robustas que aquellas obtenidas con 5 CDs. A primera vista, estos resultados parecen contradictorios, dado que en un sólo escenario no resulta complicado comprobar que las soluciones más robustas se obtienen cuando se incrementa el número de CDs. Sin embargo, no resulta claro si este resultado se mantendrá, o no, cuando se considere más de un escenario. Los resultados aquí presentados muestran que esto no ocurre así y se ilustra por lo que ocurre en las soluciones obtenidas en los casos de 5-mediana y 3-mediana (ver figuras (5.4a) y (5.4b)). Es altamente probable que este comportamiento sea causado por las variaciones en la demanda mostradas en cada escenario. En el Anexo B se propone un caso de prueba, de tamaño pequeño, para comprender mejor el fenómeno para los



(a) Solución A en la Fig. 5.3



(b) Solución B en la Fig. 5.3

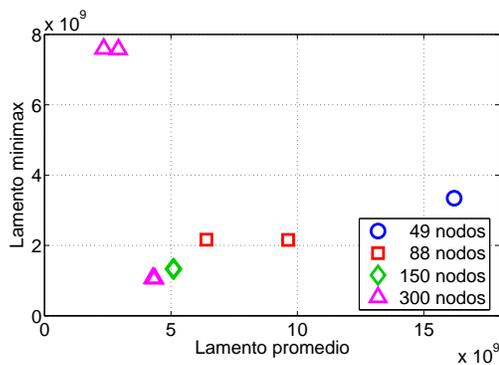
Figura 5.4: Asignación de 85 nodos a 3 CDs ( $I = \{43, 46, 75\}$  en Figura 5.4a) y a 5 CDs ( $I = \{1, 3, 28, 46, 59\}$  en Figura 5.4b). Figura elaborada por el autor de la tesis.

casos de  $p=5$  y  $p=3$  donde la robustez de la solución para  $p=3$  es mejor en todos los escenarios con respecto al caso de  $p=5$  (i.e. para  $p=3$  el valor de  $V_k=V_k^*$  en todos los escenarios, por lo que su lamento es cero) lo que es inesperado y altamente benéfico en el caso de su implementación.

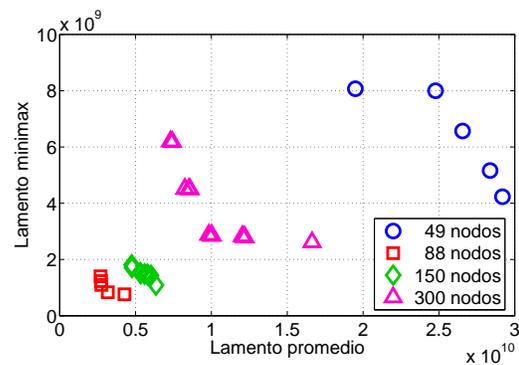
### 5.2.3 Experimento 1.3

**¿Cómo cambian los frentes ND con respecto al cambio en el número de nodos para un número fijo de CDs ?**

Dado un número fijo de CDs, asociado a un número dado de minoristas, ¿cuál es el efecto sobre la robustez de las soluciones generadas al incrementar, o decrementar, el número de minoristas? El sentido común sugiere que al decrementar el número



(a) El caso de cinco CDs



(b) El caso de diez CDs

Figura 5.5: Comparación de frentes ND de un par de casos de selección de CDs (cinco y diez) con respecto a las variaciones en el número de nodos. Figura elaborada por el autor de la tesis.

de minoristas se generarán soluciones más robustas. El objetivo de este experimento es mostrar que éste no es siempre el caso, particularmente al tratarse una situación MO. Para probar esta hipótesis, el pMNSGA-II se ejecuta inicialmente para ubicar exactamente cinco CDs en nueve escenarios, en los casos de 49, 88, 150 y 300 nodos, mismos que se analizan para cada número fijo de CDs.

En la Figura (5.5a) se nota el dominio alcanzado por cada frente **ND**, de acuerdo a la selección fija de cinco CDs por cada caso de cambio en el número de nodos. Esto se muestra empleando la siguiente notación  $f_p^n$ , que representa cada frente  $f$  obtenido por el algoritmo propuesto al momento de localizar  $p$  CDs sobre  $n$  nodos. Así,  $f_5^{300} \preceq f_5^{150} \preceq f_5^{88} \preceq f_5^{49}$ , donde el mejor frente **ND** corresponde al caso de 300 nodos y el peor corresponde al caso de 49 nodos. Este comportamiento es diferente de lo esperado, dado que la robustez de la solución obtenida con un número pequeño de CDs (e.g.  $p=5$ ) para un número grande de nodos (e.g.  $n=300$ ) es mejor que la solución obtenida para un

Parámetros para el caso $n=300$ , $p=5$		
Número de generaciones	Tamaño de población	Número de soluciones
500	100	2
7000	250	4

Tabla 5.4: *Parámetros empleados al obtener el frente ND consolidado para  $n=300$ ,  $p=5$*

número pequeño de nodos (e.g.  $n=49$ ).

¿Es posible tener un comportamiento semejante cuando se considera un número distinto de CDs? Como podemos observar, en el caso de la selección de 10 CDs (ver Figura (5.5b)), los frentes presentan un comportamiento distinto.

Para obtener la mejor aproximación posible para el frente Pareto por cada caso, se ejecutó el pMNSGA-II para distintos ajustes en los parámetros del algoritmo, incluidos el tamaño de la población, el máximo número de generaciones y las probabilidades de cruzamiento y de mutación (ver Tabla 5.2). Sin embargo, todos los frentes generados por cada caso y por cada ajuste en los parámetros, son iguales. La excepción fue el caso de cinco CDs para 300 nodos, el cual generó dos frentes Pareto distintos para valores diferentes de sus parámetros. Para este caso en particular, se mantienen ambos frentes y dado que ambos son **ND** entre sí, se presentan como un frente **ND** consolidado (ver Tabla 5.4). Para el resto de los casos (10, 15, 20 y 30 CDs), los parámetros se establecieron de la siguiente forma: tamaño de población: 100, máximo número de generaciones: 500, probabilidad de cruzamiento: 0.90, probabilidad de mutación: 0.20. Esta combinación de valores de parámetros se seleccionó dado que, después de un procedimiento de prueba y error fueron los valores que ofrecieron las soluciones con mejor robustez.

<b>Relación de frentes ND ante variaciones en el número de nodos</b>					
Número fijo de CDs	5	10	15	20	30
Frentes <b>ND</b> para los casos de nodos	300	88	88 - 150	88 - 150	88 - 150

*Tabla 5.5: Relación de frentes ND para un número fijo de CDs (5, 10, 15, 20 y 30) y variaciones en el número de nodos.*

Se observa en la Tabla 5.5 que, para 5 CDs, el caso de los 300 nodos es el mejor frente **ND**. Un comportamiento semejante se observa en el mejor frente **ND** (un frente sencillo) en el caso de 10 CDs, pero para 88 nodos. Sin embargo, para 15, 20 y 30 CDs, el conjunto formado por los frentes **ND** de 88 y 150 nodos generan el mejor frente, dado que se traslapan entre sí. Lo anterior permite suponer lo siguiente: primero, para un número dado de CDs, existen casos donde un número mayor de minoristas produce frentes más robustos. Segundo, particularmente para los casos de 15, 20 y 30 CDs, es posible tener soluciones robustas con 88 y 150 nodos. Estos resultados muestran que no existen reglas de generalización y que cada caso requiere analizarse por separado. En el Anexo B se propone un caso de tamaño pequeño para comprender mejor este fenómeno.

Siguiendo los primeros resultados del Experimento 2, se espera tener soluciones más robustas cuando se asigna un número menor de minoristas, así, las soluciones del frente **ND** de 5CDs-300 nodos presentarían menor robustez comparadas con las soluciones del frente **ND** de 30CDs-150 nodos; a pesar de ello, se ha mostrado en este experimento que esto no es así en todos los casos (ver Figura (B.14) en Anexo B).

### 5.2.4 Experimento 1.4

**¿Es posible encontrar un conjunto de soluciones robustas de alta calidad para el problema definido por (3.2) a (3.3f), al emplear sólo las soluciones óptimas obtenidas de la minimización de  $V_k$  en la función (3.1) para cada escenario  $k$ ?**

Como se mostró al final de la sección 5.2.2, la selección de CDs en cada escenario del caso 3-mediana retorna soluciones con mejor robustez respecto a las soluciones del caso 5-mediana. Teniendo lo anterior en cuenta, se decidió resolver el caso de  $n=88$  y  $p=5$  empleando como selección inicial los cinco CDs que devuelven la solución óptima por escenario. Sin embargo, dado que la selección de CDs es distinta por escenario, se formó una selección por consenso; i.e., en este caso la selección de CDs la forman cinco CDs que aparecen con mayor frecuencia entre todas las soluciones óptimas de los nueve escenarios (ver Tabla 5.6).

La solución óptima ( $V_k^*$ ), en cada uno de los nueve escenarios se calcula por medio de un método exacto. Dado que cada escenario tiene su propio conjunto de CDs, se decidió seleccionar los cinco CDs que aparecieron con mayor frecuencia en los nueve escenarios, por lo que los minoristas restantes se asignan al CD más cercano a ellos con respecto a esta nueva selección de CDs. A este arreglo se le identificó como el arreglo con las mejores soluciones obtenidas por consenso (BSC<sup>23</sup>). El valor de la función objetivo alcanzado ( $V_k$ ) se comparó con el valor óptimo  $V_k^*$  con el fin de obtener el lamento

---

<sup>23</sup>BSC: Best Selection by Consensus.

Selección óptima de CDs por escenario						
$k$	$V_k^*$	Selección de CDs				
1	21709836327	1	2	3	8	15
2	21674007164	1	3	28	36	46
3	23150153094	2	3	8	30	72
4	22726295290	1	2	3	8	30
5	20297531619	1	2	3	43	59
6	22333061215	1	2	3	28	59
7	22999482018	1	8	13	46	47
8	22349106770	1	3	8	30	46
9	20537555398	1	2	3	28	36
Selección por consenso		1,2,3,8,(28,30,46)				

Tabla 5.6: Selección óptima de CDs por escenario para  $n=88$ ,  $p=5$  y derivación de la selección de CDs por consenso.

promedio y el lamento minimax.

De acuerdo a los datos mostrados en la Tabla 5.6 y aplicando un conteo simple de los CDs que se seleccionaron con mayor frecuencia en todos los escenarios, se observa la siguiente frecuencia de selección en la Tabla 5.7.

Al momento de buscar el BSC es posible encontrar más de una combinación de CDs que compartan la frecuencia más alta, por lo que existen varios arreglos de CDs bajo este criterio. De hecho, casi nunca hay una sólo solución para el BSC, sino un

Frecuencia de selección de CDs														
CD	1	2	3	8	13	15	28	30	36	43	46	47	59	72
Frecuencia	8	6	8	5	1	1	3	3	2	1	3	1	2	1

Tabla 5.7: Frecuencia de selección de CDs en los 9 escenarios con  $n=88$  y  $p=5$  para la selección de CDs por consenso.

Comparación de soluciones BSC vs. BGA para $n=88$ y $p=5$							
Solución	Selección de CDs					Lamento esperado	Lamento minimax
$BSC_1$	1	2	3	8	28	36217969251	5929339953
$BSC_2$	1	2	3	8	30	10729368589	3399689889
$BSC_3$	1	2	3	8	46	20136096061	3960293214
$BGA_1$	1	8	44	46	47	9634579243	2157538559
$BGA_2$	1	3	28	46	59	6402041016	2163134237

Tabla 5.8: Comparación de soluciones BSC vs. BGA para  $n=88$  y  $p=5$  (ver Figura 5.6).

conjunto de soluciones **ND**. Por ello, es necesario emplear el pMNSGA-II en cada caso para buscar el frente Pareto. Siguiendo con el ejemplo introducido en la Tabla 5.7, las soluciones obtenidas por cada arreglo BSC ofrecen una medida de robustez particular (ver Tabla 5.8). Así, en la Figura (5.6) se muestran los compromisos entre el lamento promedio y el lamento minimax, para el caso de 88 nodos y cinco CDs, comparando las tres soluciones obtenidas a través del método BSC contra las soluciones obtenidas por el pMNSGA-II (BGA<sup>24</sup>).

Este experimento se extendió a los casos de 49, 88, 150 y 300 nodos (ver Tablas B.3 a B.10 del Anexo B). El comportamiento que se observa en todos estos experimentos es tal que, las soluciones obtenidas por el BSC en un escenario particular son dominadas, al menos, por una solución generada por el BGA. Aunque el método BSC parece trivial, bien valdría la pena pensar en él como una alternativa inicial con el fin de encontrar una solución adecuada, cercana al óptimo, para el conjunto completo de escenarios, a pesar de que aquí se muestra que es poco probable que funcione.

Note que se hace necesario comparar la robustez relativa del conjunto de soluciones generado por dos algoritmos distintos: aquél generado por el BSC y el obtenido por

<sup>24</sup>BGA: Best selection by Genetic Algorithm

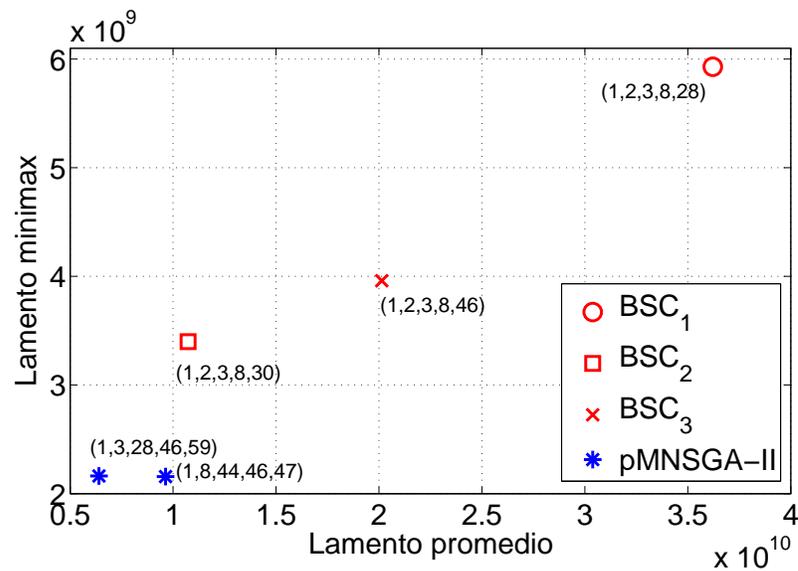


Figura 5.6: Tres soluciones diferentes de cinco CDs para 88 nodos obtenidas por BSC *vs.* las soluciones obtenidas por pMNSGA-II para el mismo caso. Figura elaborada por el autor de la tesis.

el BGA. Este procedimiento de comparación es el mismo que se emplea cuando se comparan dos conjuntos de soluciones **ND**. Para llevar a cabo este proceso se emplearon como medidas de comparación los siguientes: el índice de cobertura de conjunto,  $C$  (SCI<sup>25</sup>) y el indicador,  $I_\epsilon$ . Estos indicadores se calcularon para cada uno de los casos.

De acuerdo con el indicador de cobertura (*Zitzler, et al., 2003*), un valor  $C_{(BGA,BSC)}=1$  significa que todos los vectores de decisión en BSC son dominados débilmente por un subconjunto de aquellos generados por el BGA. Por otro lado,  $C_{(BSC,BGA)}=0$  significa que ninguna de las soluciones del BGA son dominadas por las soluciones del BSC. Por lo tanto, se afirma que todas las soluciones obtenidas por el pMNSGA-II dominan a todas las soluciones generadas por el método del consenso (ver las columnas 2 y 3 de la Tabla 5.9).

<sup>25</sup>SCI: Set Coverage Index.

Nodos	$C_{(BGA,BSC)}$	$C_{(BSC,BGA)}$	$I_{\epsilon(BGA,BSC)}$	$I_{\epsilon(BSC,BGA)}$
49	1.000	0.000	0.144	7.597
88	1.000	0.000	0.635	1.677
150	1.000	0.000	0.027	10.000
300	1.000	0.000	0.904	1.248

Tabla 5.9: Comparación de calidad de frentes de soluciones (BGA (pMNSGA-II) versus BSC).

Aunque el indicador de cobertura es capaz de detectar el grado de dominancia entre los conjuntos de aproximación, no proporciona información alguna acerca de la calidad de la solución respecto a la cercanía de los frentes generados por el BGA con respecto a aquellos generados por el BSC. Para cubrir esta deficiencia se incluye en las columnas cuatro y cinco de la Tabla 5.9, los resultados obtenidos después de aplicar el indicador binario epsilon  $I_{\epsilon(BGA,BSC)}$ .

El indicador binario epsilon  $I_{\epsilon(BGA,BSC)}$  (Zitzler, et al., 2003) indica el factor mínimo  $\epsilon$  por el que el vector objetivo asociado al BSC debe ser multiplicado tal que, éste sea débilmente dominado por las soluciones del BGA (Zitzler, et al., 2008); así, los valores de  $I_{\epsilon(BGA,BSC)}$  cercanos a cero indican que las soluciones BSC se encuentran lejos de las soluciones BGA. Igualmente, dado que el operador epsilon no es simétrico, también es necesario calcular el valor de  $I_{\epsilon(BSC,BGA)}$ .

La columna cuatro de la Tabla 5.9 muestra que las soluciones BSC para los casos de 49 y 150 nodos se encuentran lejos de las soluciones BGA (los valores están cerca del cero), con respecto a los casos de 88 y 300 nodos. Lo anterior se confirma con los datos en la columna cinco de la Tabla 5.9, para los mismos casos.

De acuerdo a los indicadores previos, todas las soluciones del pMNSGA-II presentan

una mejor aproximación con respecto a las soluciones obtenidas por la selección de consenso. Estos resultados implican que las soluciones obtenidas por la selección por consenso no son competitivas con respecto a aquellas generadas por el pMNSGA-II.

### 5.3 Experimentos y análisis de resultados respecto al pMNSGA-II robusto y confiable

Al resolver un problema de optimización con restricciones es típico encontrar su solución óptima sobre el límite de una restricción particular o en la intersección de más de una de ellas; sin embargo, ante la variación de algún parámetro del modelo, la solución óptima se vuelve infactible; por lo tanto, con el fin de encontrar una solución que sea más confiable, a veces es necesario sacrificar la optimalidad de la solución a cambio de seleccionar otra que sea factible y confiable ante condiciones inciertas (*Deb, 2009*).

En secciones previas se estudió el problema PMP robusto que optimizaba las medidas de robustez (i.e., lamento esperado y máximo lamento), dado que se tomaron en cuenta todos los escenarios disponibles, las soluciones obtenidas fueron 100% confiables. Sin embargo, surgen las preguntas: ¿qué pasaría si cambian los valores de confiabilidad  $\alpha$  (i.e., si se considera un número menor de escenarios)?, ¿es posible encontrar soluciones más robustas si se renuncia al 100% de confiabilidad de la solución?. De ser esto posible, ¿cuál sería la ganancia en términos de robustez?

Una aproximación a la solución de este problema, llamado PMP robusto-confiable, se presenta en esta sección que se divide en tres partes: en la primera se observan los

compromisos que existen entre las tres funciones objetivo cuando éstas se optimizan simultáneamente, es decir, observando la hipersuperficie construida por las soluciones **ND** obtenidas al optimizar simultáneamente el lamento esperado, el máximo lamento y la confiabilidad. Se espera que, derivado de esta perspectiva visual, las proyecciones de los planos particulares entre cada par de funciones objetivo permitan realizar el análisis de los frentes **ND** con mayor profundidad y precisión. En la segunda parte del estudio se comparan las soluciones obtenidas por el pMNSGA-II con las soluciones reportadas en la literatura (*Daskin, et al., 1997*). Finalmente, en la última etapa se analiza el impacto que tienen los cambios en los parámetros del problema PMP robusto-confiable sobre los frentes **ND** obtenidos.

Los parámetros del algoritmo y las características del equipo de cómputo que fueron empleados para analizar los diversos casos son los mismos que en el problema anterior (ver Tabla 5.2).

### **5.3.1 Experimento 2.1**

**¿Cuál es la relación de compromiso entre el lamento esperado, el máximo lamento y la confiabilidad?**

Considerando que es importante conocer el impacto que tienen las variaciones de la confiabilidad sobre la robustez de las soluciones del PMP, en esta sección se presentan los resultados experimentales obtenidos al optimizar simultáneamente tres funciones objetivo: el lamento esperado, el máximo lamento y la confiabilidad, empleando el pMNSGA-II y considerando que se resuelve el PMP robusto-confiable para una selección de 5 CDs, con 88 nodos minoritas y hasta 9 escenarios posibles.

Soluciones ND de la hipersuperficie Pareto					
$\alpha$	Lamento promedio	Lamento minimax	$\alpha$	Lamento promedio	Lamento minimax
2	263936	13196845	63	259131003	524807622
5	457654	9153099	66	243516189	765664089
9	829633	20740830	<b>68</b>	<b>273420778</b>	<b>564942912</b>
17	903216	6021441	69	288490775	794116814
19	19174343	115419734	69	305163551	578330792
20	26803688	240265784	72	308154468	578330792
20	21853368	267902515	72	293723943	794116814
33	27156741	115419734	73	313803897	578330792
34	63361755	221657696	73	297960754	794116814
34	38499116	264075167	76	322497278	578330792
34	29835766	267902515	77	328146707	578330792
34	57835765	240265784	78	345746742	578330792
35	7116453	711645368	81	348737659	578330792
<b>39</b>	<b>65764412</b>	<b>240265784</b>	<b>82</b>	<b>354387088</b>	<b>578330792</b>
39	43039524	267902515	83	692493744	1171811253
39	31243144	624862884	83	457005846	1182715612
40	94359702	423430322	83	715599377	1166292535
42	95060125	440300196	83	393792146	2252724362
42	67409455	447252388	84	462655275	1182715612
43	97462782	440300196	85	494398048	1182715612
43	78751830	447252388	88	766229297	1163064749

*Continúa en la siguiente página*

Tabla 5.10 – *Continúa de la página previa*

$\alpha$	Lamento esperado	Lamento minimax	$\alpha$	Lamento esperado	Lamento minimax
47	102988772	440300196	88	497388965	1182715612
47	80613213	447252388	89	503038394	1182715612
48	105391429	440300196	92	511731775	1182715612
48	83292238	447252388	<b>92</b>	<b>783099050</b>	<b>1163064749</b>
49	192307431	427661407	93	848937237	1166292535
49	151061520	521313662	93	824819859	1171811253
49	146194933	993417719	93	517381204	1182715612
49	123875897	2163134237	94	534981239	1182715612
52	156294688	521313662	97	537972156	1182715612
<b>53</b>	<b>200947777</b>	<b>427661407</b>	97	841689612	1171811253
53	165136442	521313662	<b>97</b>	<b>864402586</b>	<b>1166292535</b>
53	150520595	1025054210	<b>98</b>	<b>543621585</b>	<b>1182715612</b>
57	174606421	521313662	99	884046300	2117834430
58	178843232	521313662	99	583026643	2252724362
58	232890622	450924350	99	906496962	2104718806
59	224976842	794116814	<b>99</b>	<b>1036545175</b>	<b>2032389001</b>
59	232837587	564942912	<b>100</b>	<b>970577789</b>	<b>2157538559</b>
<b>62</b>	<b>241530968</b>	<b>450924350</b>	100	588676072	2252724362
63	247180397	564942912	100	954795012	2177322193

*Continúa en la siguiente página*

Tabla 5.10 – Continúa de la página previa

$\alpha$	Lamento esperado	Lamento minimax	$\alpha$	Lamento esperado	Lamento minimax
----------	------------------	-----------------	----------	------------------	-----------------

Tabla 5.10: Soluciones **ND** de la hipersuperficie Pareto para  $n=88$  y  $p=5$ . En negritas se muestran las soluciones cuyas proyecciones coinciden con los valores reportados por Daskin, *et al.* (1997)

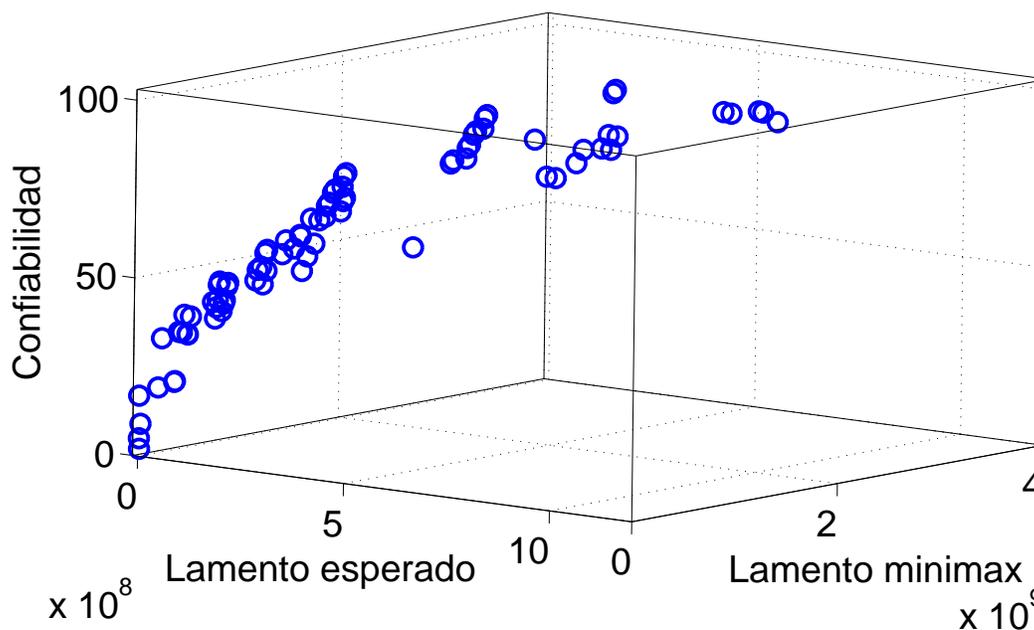


Figura 5.7: Hipersuperficie Pareto obtenida con el pMNSGA-II al optimizar simultáneamente 3 funciones objetivo para  $n=88$  y  $p=5$ . Figura elaborada por el autor de la tesis.

En la Tabla 5.10 se muestran las 80 soluciones **ND** que se obtuvieron con el pMNSGA-II robusto-confiable, señalando en negritas 10 soluciones que coinciden con los valores reportados en la literatura (*Daskin, et al., 1997*), mientras que en la Figura (5.7)

se muestra una perspectiva tridimensional del frente **ND** (i.e., la hipersuperficie) que conjuga las tres funciones objetivo en conflicto donde se nota que, efectivamente, el compromiso entre las medidas de lamento se ve afectado por las variaciones que existen en la confiabilidad del sistema, tal y como se esperaba. En otras palabras, al observar la hipersuperficie se nota que la robustez de las soluciones mejora a expensas de perder confiabilidad.

Otro aspecto importante es el tiempo invertido para formar el conjunto de soluciones **ND** bajo estas características. En el caso que aquí se presenta, el tiempo de cálculo comprende un intervalo de 612.9 a 662.7 segundos por corrida. Este incremento en el tiempo de optimización respecto al tiempo observado en los experimentos de la Sección 5.2 se debe principalmente a que el pMNSGA-II robusto-confiable debe realizar tres comparaciones, una por cada función objetivo, al efectuar el proceso de optimización simultánea.

A pesar de que la hipersuperficie de soluciones **ND** brinda una perspectiva global de los compromisos obtenidos entre las funciones objetivo, se pierden detalles importantes entre los frente **ND** con respecto a cada función objetivo, por ello y para observar mejor los compromisos en estudio, a continuación se presentan las tres proyecciones formadas por los planos entre dos de los tres criterios estudiados en las figuras (5.8), (5.9) y (5.10).

En la Figura (5.8) se muestra la proyección de los frentes **ND** entre el lamento esperado y el máximo lamento, de manera semejante a como se realizó en los experimentos de la Sección 5.2, pero en este caso considerando un intervalo de confiabilidad desde  $\alpha = 2\%$  hasta  $\alpha = 100\%$ , a diferencia de los casos reportados en la Sección 5.2 que se obtuvieron para un valor fijo de  $\alpha = 100\%$ . En esta misma figura se observa que es posible aumentar la robustez de una solución a expensas de perder confiabilidad y que

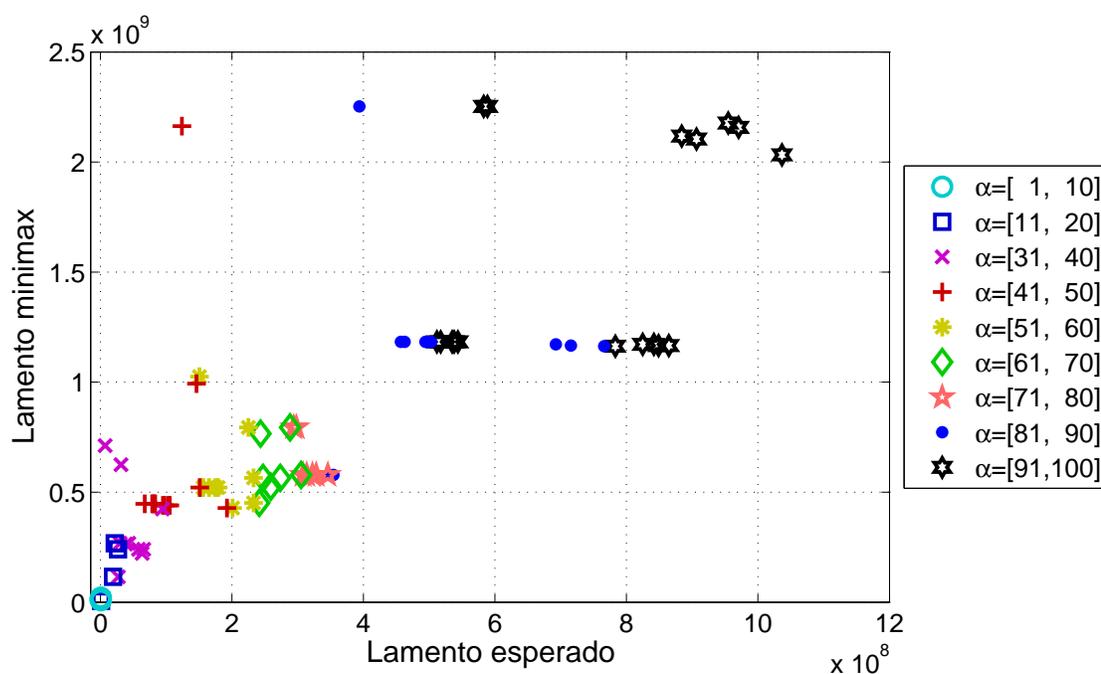


Figura 5.8: Proyección de soluciones ND entre el lamento esperado versus el lamento minimax. Figura elaborada por el autor de la tesis.

las soluciones más confiables son las menos robustas. Sin embargo, un aspecto interesante sería conocer el efecto que tiene sobre la robustez de las soluciones ND el empleo de una cota inferior para el valor de confiabilidad al optimizar, simultáneamente, las tres funciones objetivo. Esto se deja como trabajo a futuro.

Por otro lado, en la Figura (5.9) se muestra la proyección de los frentes ND entre el lamento esperado y la confiabilidad. Se nota un compromiso bien definido entre las funciones objetivo dado que a cada valor de lamento esperado le corresponde un sólo valor de confiabilidad (ver Tabla 5.10).

De manera semejante a la Figura (5.8), en la Figura (5.9) también se observa que es posible obtener soluciones más robustas, a expensas de perder confiabilidad y que las soluciones más confiables son, al mismo tiempo, las menos robustas. Sin embargo,

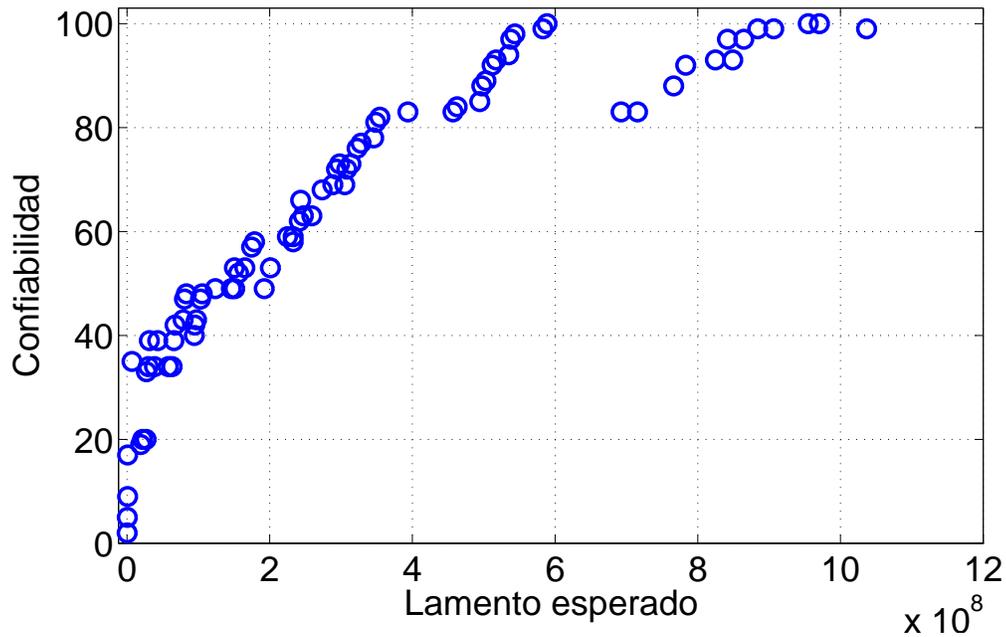


Figura 5.9: Proyección de soluciones ND sobre el plano definido por el lamento esperado y la confiabilidad. Figura elaborada por el autor de la tesis.

al observar la Figura (5.10) que muestra la proyección de las soluciones **ND** entre el máximo lamento y la confiabilidad, se nota que el frente **ND** no está tan bien definido como el de la Figura (5.9) dado que existen soluciones que comparten el mismo valor de máximo lamento para distintos valores de confiabilidad y viceversa.

Es importante recalcar aquí que, aunque en apariencia el dominio de algunas soluciones no es claro sobre el frente **ND** mostrado en las proyecciones, la solución **ND** es el resultado de la optimización simultánea de las tres funciones objetivo, por lo que ciertas soluciones que en apariencia son dominadas en un plano dado, en realidad son soluciones **ND** en la hipersuperficie. Esto conduce a la pregunta: ¿qué resulta más conveniente: optimizar simultáneamente todas las funciones objetivo, o sólo aquellas que forman una proyección de la hipersuperficie de frentes **ND**? Aunque esta pregunta

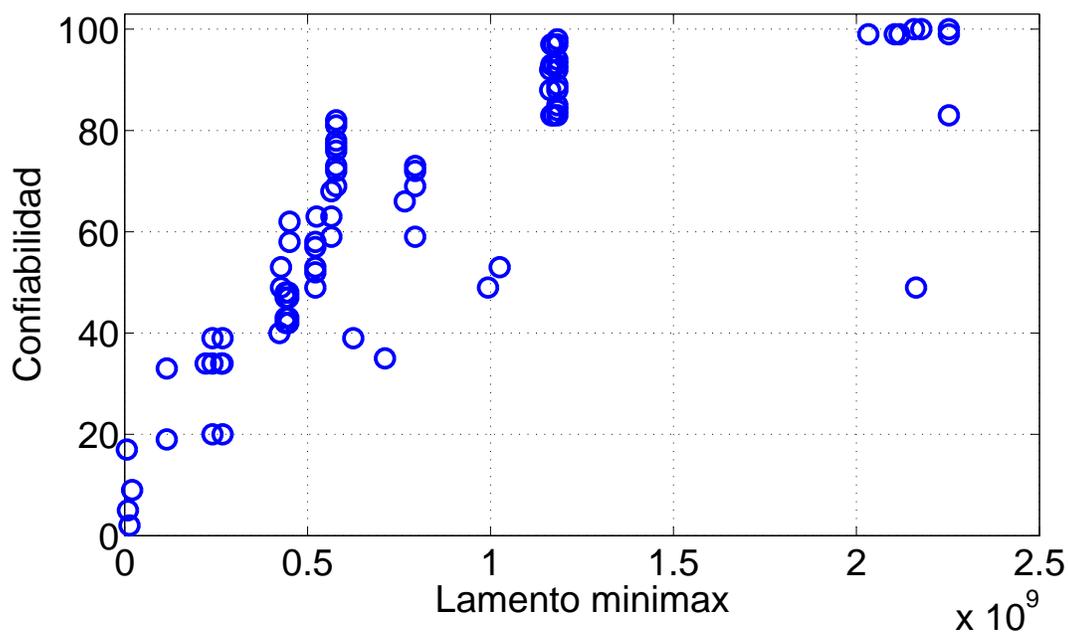


Figura 5.10: Proyección de soluciones ND sobre el plano definido por el lamento minimax y la confiabilidad. Figura elaborada por el autor de la tesis.

se deja como trabajo a futuro, en la Sección 5.3.2 se aborda una aproximación a la misma al emplear el pMNSGA-II para optimizar las funciones de máximo lamento y confiabilidad para contrastar estas soluciones con lo reportado en la literatura (*Daskin, et al., 1997*).

### 5.3.2 Experimento 2.2

**¿Es posible obtener el frente Pareto entre el máximo lamento y la confiabilidad al optimizar las funciones de una de las proyecciones de la hipersuperficie de frentes ND?**

El costo de cómputo para resolver el modelo  $\alpha$ -Confiable  $p$ -Minimax (*Daskin, et al., 1997*) es extremadamente alto dado que, para crear todo el frente Pareto se requiere calcular una solución por cada valor de  $\alpha$  ya que se emplea el método de la restricción *épsilon*; sin embargo, con la propuesta MO es posible hacerlo de una forma más ágil dado que se optimizan simultáneamente dos funciones objetivo: lamento minimax y confiabilidad.

La Figura (5.11) presenta los compromisos entre el lamento minimax y la confiabilidad esperada. Estos resultados se obtuvieron después de 120 corridas y empleando un tamaño de población de 300 individuos teniendo como criterio de paro 100 generaciones por corrida. Como se observa, del total de soluciones obtenidas con el algoritmo pMNSGA-II robusto-confiable, existe un alto número de ellas que coinciden con las soluciones óptimas obtenidos por el algoritmo  $\alpha$ -Confiable lamento  $p$ -Minimax presentados por *Daskin, et al. (1997)*; i.e., trece de quince soluciones coinciden con el valor óptimo (para mayor detalle, ver la Tabla 5.11).

La contribución más importante del algoritmo propuesto es que éste proporciona, en cada corrida, los frentes **ND** entre las funciones objetivo. Por otro lado, mientras las soluciones del modelo  $\alpha$ -confiable de *Daskin, et al. (1997)* se obtienen a un costo de

	<b>pMNSGA-II</b>	<b><math>\alpha</math>-Confiable Lamento p-Minimax (*)</b>	
$\alpha$	Lamento Minimax	Lamento Minimax	Tiempo de solución (s)
1.00	<b>2157538559</b>	<b>2157538559</b>	517.50
0.99	<b>2032389001</b>	<b>2032389001</b>	509.95
0.98	<b>1182715612</b>	<b>1182715612</b>	452.11
0.97	<b>1166292535</b>	<b>1166292535</b>	538.47
0.92	<b>1163064749</b>	<b>1163064749</b>	1234.00
0.82	<b>578330792</b>	<b>578330792</b>	826.18
0.68	<b>564942912</b>	<b>564942912</b>	622.02
0.67	<b>524807622</b>	<b>524807622</b>	769.17
0.62	<b>450924350</b>	<b>450924350</b>	678.07
0.53	<b>427661407</b>	<b>427661407</b>	1459.20
0.44	<b>423681157</b>	<b>423681157</b>	914.64
0.43	<b>352206878</b>	<b>352206878</b>	881.07
0.39	<b>240265784</b>	<b>240265784</b>	743.79
0.38	<b>221657696</b>	<b>221657696</b>	1012.25
0.34	<b>0</b>	<b>0</b>	3291.84

Tabla 5.11: Comparación entre el Lamento Minimax y el tiempo de cálculo entre las soluciones del modelo Alfa-Confiable-Lamento p-Minimax (\*: Daskin, et al. (1997)) y el modelo pMNSGA-II (con un tiempo promedio de cálculo de 22s por cada una de las 30 corridas) para  $p=88$  y  $n=5$ .

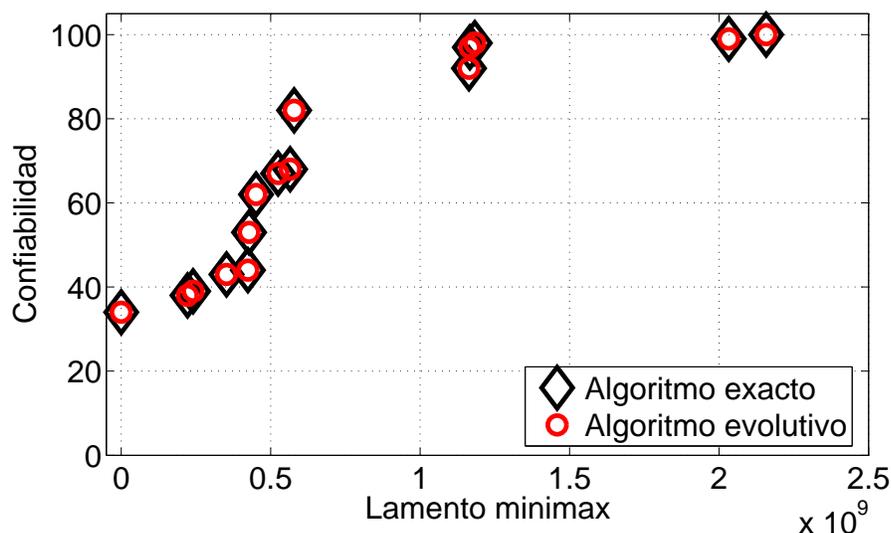


Figura 5.11: Comparación de Frentes Pareto: pMNSGA-II *vs.*  $\alpha$ -Confiable, lamento  $p$ -Minimax para el caso de 88 nodos, 5 CDs. Figura elaborada por el autor de la tesis.

cálculo de 14489.81 seg (\*<sup>26</sup>), las soluciones encontradas por el pMNSGA-II se encontraron entre 20.3 y 22.4 segundos por corrida al fijar como criterio de paro un número máximo de generaciones igual a 100, aunque el precio por obtener una solución de forma rápida es la pérdida de garantía de optimalidad, tal y como se muestra en la Tabla 5.11.

Por otro lado, se observa que al incrementar el muestreo de las soluciones con el número de ejecuciones del algoritmo, no aumenta en forma sustancial el número de soluciones **ND** encontradas, tal y como se explica a continuación. Se hicieron experimentos para los casos de 30, 60, 90 y 120 corridas, todos con un tamaño de población de 300 individuos y un total de 100 generaciones evaluadas en cada corrida para todos los casos. Para 30 corridas el pMNSGA-II encontró sólo 13 soluciones que coinciden con

<sup>26</sup> Estos datos se codificaron en AMPL y se procesaron empleando las características por omisión de CPLEX ver. 4.0 sobre una estación SPARC de Sun 20/HS14 con cuatro procesadores hyperSPARC a 100 MHz y 64 MB de memoria con un sistema operativo SunOS ver. 4.1.3.u1 (Daskin, et al., 1997).

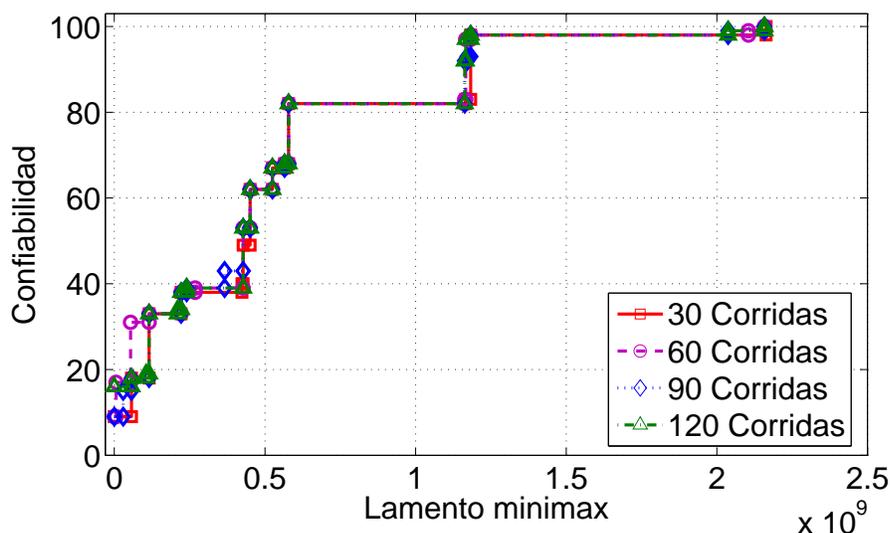


Figura 5.12: Comparación de frentes ND obtenidos con el pMNSGA-II con diferentes número de corridas,  $p=5$ ;  $n=88$ . Figura elaborada por el autor de la tesis.

las soluciones obtenidas por el método  $\alpha$ -Confiable (Daskin, et al., 1997). En los casos de 60, 90 y 120 corridas se obtuvieron 11, 12 y 13 coincidencias, respectivamente (ver la Figura (5.12)), por lo que se nota que incrementar el número de corridas, no aumenta en forma sustancial el número de soluciones ND encontradas; sin embargo, si se calcula un frente ND consolidado considerando todas las soluciones ND de los cuatro casos de corridas (30, 60, 90 y 120), entonces se observa que se encuentran las 15 soluciones que forman el frente Pareto. Por otro lado, al sintonizar los parámetros evolutivos (e.g. tamaño de población de 100 individuos con 300 generaciones), notamos que las soluciones convergen al frente Pareto, ya que con sólo 30 corridas se encuentran todas las soluciones del mismo (ver Tabla 5.11). A pesar de lo anterior, algo más interesante sería ver cómo cambia este número de soluciones óptimas encontradas cuando se varía algún parámetro del algoritmo, tal como el número de generaciones y/o el tamaño de la población. Esto se deja como trabajo a futuro. A continuación se presentan los resulta-

dos obtenidos por el pMNSGA-II ante el cambio en el número de nodos del problema.

### 5.3.3 Experimento 2.3

**¿Cuáles son los efectos en el compromiso entre el máximo lamento y la confiabilidad, causados por cambios en el número de nodos?**

Es posible que el cambio en algunos parámetros del problema, tales como el número de nodos, afecte el compromiso entre las soluciones robusto-confiables, situación que se estudia en la presente sección al emplear el pMNSGA-II para analizar el comportamiento del frente **ND** para los casos de 49, 88, 150 y 300 nodos.

Si ya en los experimentos previos se observó que al incrementar la confiabilidad del sistema, la robustez de las soluciones disminuye, el sentido común nos dicta que, al incrementar el número de nodos, la robustez también disminuye dado que es más complicado mantener una red de CS robusta y confiable con un número grande de nodos que con uno pequeño. A continuación se presentan los resultados del experimento.

La Figura (5.13) muestra los compromisos entre el lamento minimax y la confiabilidad para cada caso de cambio en el número de nodos. Claramente se observa que las soluciones obtenidas para 49 nodos son dominadas por las soluciones de 88, 150 y 300 nodos. Este resultado es inesperado dado que se suponía que un número menor de nodos aportara soluciones con mayor confiabilidad y menor lamento máximo, lo que no ocurrió así en el caso de 49 nodos.

Observando los resultados obtenidos en secciones previas, es altamente probable que en el caso de los 49 nodos se esté muy cerca de las soluciones óptimas, a reserva de sintonizar mejor los parámetros del algoritmo evolutivo, tarea fuera del alcance de este trabajo.

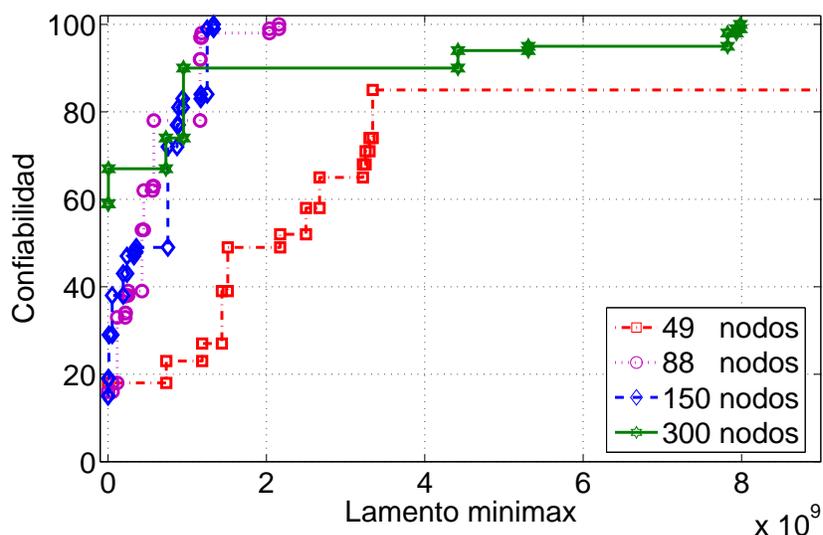


Figura 5.13: Comparación de frentes Pareto obtenidos con el pMNSGA-II con diferentes número de nodos y  $p=5$ . Figura elaborada por el autor de la tesis.

Por otro lado, se observa que las soluciones **ND** para los casos de 88, 150 y 300 se traslapan entre sí y que no existe una relación de dominio claro entre ellas, aún así, se observa que las soluciones de 88 y 150 nodos presentan menor lamento minimax que las soluciones para 300 nodos, según se observa en la Figura (5.13).

Es importante mencionar que en todos los casos presentados, el tiempo de ejecución permanece entre los 20 y los 24 segundos por ejecución.

Como trabajo a futuro se propone realizar una serie de experimentos con variaciones en la sintonía de los parámetros del algoritmo evolutivo tales como, tamaño de población y número de generaciones a evaluar como condición de paro del algoritmo, con el propósito de observar una mejoría en la convergencia de los frentes **ND** hacia el frente Pareto. El caso de 88 nodos es un buen candidato para analizarse ya que se dispone del frente Pareto por lo que, si se emplean todos los recursos para encontrar un frente **ND** para 150 nodos que domine el frente Pareto de 88 nodos, se concluiría

que los frentes **ND** con un número mayor de nodos dominan a aquellos que tienen un número menor de ellos, dado que ofrecen mayor confiabilidad y menor lamento máximo.

## 5.4 Discusión del capítulo

Derivado de los resultados experimentales se mencionan algunos aspectos relevantes que se listan a continuación.

No siempre resulta viable calcular el valor óptimo de  $V_k^*$  para la mayoría de los casos en estudio; sin embargo, del presente estudio se concluye que es importante invertir todo el tiempo disponible para calcular la mejor cota inferior de  $V_k^*$  con el objetivo de tener soluciones más robustas dentro de un marco de incertidumbre.

Al analizar las soluciones obtenidas conforme a las modificaciones en los parámetros del problema, se concluye que para un número fijo de nodos, un número mayor de CDs proporciona soluciones más robustas. Sin embargo, este mismo análisis demostró inesperadamente que, al considerar simultáneamente todos los escenarios, es posible encontrar soluciones más robustas con un menor número de CDs, comparadas con las soluciones óptimas para un escenario particular

La metodología empleada permite demostrar que no necesariamente se encontrarán soluciones más robustas para un número fijo de CDs con un número menor de clientes dada la distribución regional de la demanda, por lo que es necesario analizar caso por caso para encontrar soluciones robustas para un número fijo de CDs. Aquí es importante señalar que las conclusiones derivadas de este experimento no tienen una precisión tan alta como en el resto de los experimentos aquí mostrados, dado que la comparación de los resultados se realiza con respecto a soluciones de las que no se tiene

certeza de qué tan lejos se encuentren con respecto a las soluciones óptimas debido a que precisamente se desconocen dichas soluciones. Sin embargo, la evidencia experimental permite conjeturar que la afirmación también en este caso es correcta.

La información proporcionada por la selección óptima de CDs por consenso, al optimizar el  $V_k$  por escenario, no es suficiente como para construir soluciones robustas al considerar todos los escenarios.

El algoritmo construye la hipersuperficie **ND** al optimizar simultáneamente 3 funciones objetivo (2 medidas de robustez y 1 de confiabilidad).

Al contrastar las soluciones **ND** obtenidas por medio del algoritmo evolutivo contra las soluciones obtenidas por el algoritmo exacto publicadas por *Daskin, et al. (1997)*, es posible observar que se obtienen las 15 soluciones que forman el frente Pareto.

Un resultado interesante se observa al contrastar las soluciones obtenidas al variar el número de nodos, donde el frente **ND** para 49 nodos es dominado por los frentes de 88, 150 y 300 nodos, lo que es inesperado.

Igualmente, la metodología de solución para problemas MORO mediante algoritmos evolutivos empleada aquí permite observar y analizar las soluciones robusto-confiables sometidas a cambios en los parámetros del problema tales como el cambio en el número de nodos.

## Conclusiones y trabajo futuro

En el presente apartado se presentan los sumarios y conclusiones obtenidos a partir de las soluciones experimentales obtenidas de la aplicación del pMNSGA-II, tanto en su versión robusta como en su versión robusta y confiable.

### Sumario sobre el modelo pMNSGA-II robusto

Este trabajo propone un esquema de solución al problema robusto de localización PMP multiobjetivo basado en escenarios y que se ha modelado como uno de optimización bi-objetivo, cuyas medidas de robustez a minimizar son el lamento promedio y el máximo lamento. Por la naturaleza del problema, el marco experimental empleado se basa en el algoritmo pMNSGA-II, un algoritmo evolutivo derivado del NSGA-II propuesto por *Deb, et al. (2002)* y que se diseñó para mostrar que el pMNSGA-II es un algoritmo eficiente, tanto para diseñar soluciones robustas (i.e. soluciones donde los frentes **ND** son de alta calidad), así como para hacer un análisis aproximado de los compromisos entre las medidas de robustez bajo distintas circunstancias.

Se prepararon diversos casos de prueba para analizar las características especiales del algoritmo y de las soluciones **ND** bajo condiciones muy particulares. Por tal motivo, experimentalmente se encontraron los valores de probabilidad de mutación ( $q_m$ ), de cruzamiento ( $q_c$ ), de tamaño de población y de las condiciones de paro, propios de un algoritmo evolutivo, que devolvieran los mejores frentes **ND** para su posterior análisis.

Respecto a los casos de prueba del PMP robusto a resolver se definieron diver-

sos experimentos, algunos derivados de hipótesis que surgieron después de la revisión de literatura (*Daskin, et al., 1997*). Por ejemplo, dado que no es posible calcular el valor óptimo de  $V_k^*$  para la mayoría de los casos analizados, es indispensable calcular aproximaciones del mismo. El primer experimento se enfocó entonces en determinar el efecto sobre la calidad de la aproximación del valor  $V_k^*$  en el frente **ND** generado. Por otro lado, se experimentó el efecto que tiene en los frentes **ND**, el incremento en el número de CDs seleccionados de entre la población de nodos disponibles. Así también, se experimentó el efecto que provoca el cambio del número de nodos participantes en el PMP sobre la calidad de las soluciones. Por último, dado que la calidad de la medida de lamento depende del valor  $V_k^*$  contra el que se compara, se experimentó con el diseño de una heurística de selección de CDs que devolviera soluciones robustas en todos los escenarios, misma que se basa en la selección de CDs que retorna el valor  $V_k^*$  en cada escenario. Las conclusiones derivadas del análisis de las soluciones obtenidas experimentalmente, se muestran en la Sección .

## **Sumario sobre el modelo pMNSGA-II robusto y confiable**

En el caso del pMNSGA-II en su versión robusto-confiable, el marco experimental se diseñó de manera semejante al caso mostrado en la Sección , por lo que los casos de prueba empleados estuvieron dirigidos a encontrar los valores de probabilidad de mutación ( $q_m$ ) y de cruzamiento ( $q_c$ ) que devolvieran los mejores frentes **ND**. Igualmente, se experimentó con los valores de tamaño de población y número de generaciones. En

relación al muestreo de las soluciones, se experimentó con diversos valores en el número de corridas.

Respecto a los casos de prueba del PMP robusto-confiable también se definieron diversos experimentos. Primero, se estudió el caso de la adhesión de una tercera función objetivo con el fin de construir una aproximación a la hipersuperficie Pareto para observar los compromisos entre tres funciones objetivo: lamento esperado, lamento minimax y confiabilidad. Más adelante se buscó replicar aquellos resultados encontrados en la literatura (*Daskin, et al., 1997*) para analizar los frentes **ND** entre dos funciones objetivo: lamento minimax y confiabilidad. Finalmente, se experimentó con el número de nodos y su efecto sobre los frentes **ND**. Las conclusiones derivadas del análisis de las soluciones obtenidas experimentalmente, se muestran en la Sección .

## Conclusiones

Se han presentado los resúmenes relacionados con los casos experimentales donde se emplearon los algoritmos pMNSGA-II robusto y pMNSGA-II robusto-confiable. A continuación se presentan las conclusiones a las que se llegaron.

### Conclusiones al modelo PMP robusto

- Los resultados experimentales mostraron que la calidad de la cota inferior de  $V_k^*$  es de suma importancia para el cálculo de las soluciones **ND** entre el lamento promedio y el lamento minimax, esto implica que a mejor calidad de la cota se garantiza una mejor calidad del frente **ND** obtenido.

- Los frentes de soluciones **ND** más robustos se obtienen con un número mayor de CDs (los mejores frentes **ND** se encuentran cuando cada nodo se selecciona como un CD), lo que es un resultado esperado. Sin embargo, el resultado de tener un mejor frente Pareto con un número mayor de CDs no siempre se sostiene. Un contra ejemplo se tiene en el caso de 88 nodos con cinco y tres CDs, donde se muestra que las soluciones Pareto de tres CDs son mejores que las soluciones con cinco CDs.
- Los resultados también mostraron otro ejemplo contra-intuitivo: no siempre resulta que un menor número de minoristas induzca a una mayor robustez en las soluciones para un número fijo de CDs. Por lo tanto, para conocer qué combinación de minoristas resulta mejor para un número de CDs dado, resulta indispensable analizar caso por caso. Es importante señalar que en la conclusión de este experimento no existe una certeza total como en el resto de los casos aquí mostrados; lo anterior se debe a que los frentes **ND** obtenidos no necesariamente coinciden con las soluciones del problema, aunque se conjetura que ambas tienen un comportamiento similar.
- También se mostró que la información proporcionada por la selección óptima de CDs, al optimizar  $V_k$ , en cada escenario por separado, no es suficiente para construir una solución robusta cuando se consideran todos los escenarios. Esto es apoyado por la evidencia de que cada solución del pMNSGA-II domina todas las soluciones generadas por la selección óptima de CDs.

A pesar de que el PMP no caracteriza por completo la mayoría de los problemas de localización (FLP), la metodología propuesta en este documento no está sujeta a ningún modelo en particular, por lo que es susceptible de ser aplicada para resolver problemas

con mayor complejidad, tales como el CFLP (*Louveux, 1986*), el UFLP (*Daskin, et al., 1988*), o hasta el LMRP (*Snyder, 2003*).

## Conclusiones al modelo PMP robusto-confiable

Los resultados preliminares en este subproblema, más que presentar conclusiones contundentes, dan pie a una serie de preguntas que resultan de gran relevancia para tener una mayor comprensión del problema, sobre todo al analizar el efecto que tiene la adhesión de una tercer función objetivo sobre la validez de las soluciones **ND** en un marco de incertidumbre. Sin embargo, las conclusiones que hasta el momento se han podido establecer son las siguientes:

- La proyección de la hipersuperficie Pareto respecto al compromiso entre el lamento minimax y la confiabilidad confirma que a medida que se incrementa la confiabilidad de las soluciones, disminuye la robustez de las soluciones **ND** (i.e., las medidas de lamento esperado y máximo lamento aumentan).
- El valor de las funciones objetivo derivado de la optimización simultánea de tres funciones objetivo es peor que los valores de las funciones objetivo reportados al realizar la optimización bi-objetivo de cualquiera de sus proyecciones. Esto se debe a que se requiere un mayor tiempo de cómputo para lograr la misma convergencia cuando se tiene  $k$  funciones objetivo que cuando se tiene  $k - 1$ .
- Los resultados experimentales mostraron que la calidad de las soluciones **ND** entre el lamento minimax y la confiabilidad están muy cercanas a la solución óptima reportada en la literatura (*Daskin, et al., 1997*) con la diferencia que

el tiempo empleado para encontrar toda la solución óptima fue de 14489.81 seg (\*<sup>27</sup>), mientras que una solución **ND** obtenida en una corrida mediante el modelo robusto-confiable tomó en promedio 22 seg.

- La robustez de las soluciones **ND** tiende a disminuir a medida que la confiabilidad se incrementa, independientemente del número de nodos que se empleen, aunque este efecto es más visible para los casos en donde existe un número de nodos mayor a 150 y menor a 88 nodos.

## Trabajo futuro

Otras preguntas derivadas de este trabajo aún están en proceso de ser resueltas, pero escapan a la extensión temporal del presente documento. Algunas de ellas son:

- ¿Cuánto tiempo adicional necesita invertir el algoritmo para conseguir, con tres funciones objetivo, la misma calidad de solución obtenida al optimizar dos funciones objetivo?
- ¿Qué resulta más conveniente: optimizar simultáneamente todas las funciones objetivo, o sólo aquellas que forman alguna de las proyecciones de la hipersuperficie de frentes **ND**?
- ¿Qué efecto tiene el empleo de una cota inferior para el valor de confiabilidad, sobre la robustez de las soluciones **ND** definida por ambos lamentos al optimizar simultáneamente las tres funciones objetivo?

---

<sup>27</sup>\*: Estos datos se obtuvieron bajo determinadas características técnicas indicadas en el pie de página 25, sección 5.3.2.

Estas y otras preguntas son la base de un trabajo a futuro de vital importancia para tener una mejor comprensión del problema bajo incertidumbre y su resolución mediante algoritmos evolutivos.

## Referencias bibliográficas

- Alçada-Almeida, L., Coutinho-Rodrigues, J., y Current, J.** (2009) 'A multiobjective modeling approach to locating incinerators', *Socio-Economic Planning Sciences*, Vol. 43, No. 2, pp.111-120.
- Alp, O., Erkut, E., y Drezner, Z.** (2003) 'An efficient genetic algorithm for the p-median problem', *Annals of Operation Research*, Vol. 122, No. 1-4, pp.21-42.
- Aryanezhad, M.B., Jalali, S.G., y Jabbarzadeh, A.** (2010) 'An integrated supply chain design model with random disruptions consideration', *African Journal of Business Management*, Vol. 4, No. 12, pp. 293-2401.
- Averbakh, I., y Berman, O.** (2007) 'Minmax regret median location on a network under uncertainty', *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 12, No. 2, pp.104-110.
- Ben-Tal, A., Nemirovski, A.** (2002) 'Robust optimization - methodology y applications'. *Mathematical programming*, Vol. 92, No. 3, pp.453-480.
- Berman, O., y Drezner, Z.** (2007) 'The p-median problem under uncertainty', *European Journal of Operational Research*, Vol. 189, No. 1, pp.19-30.
- Bertsimas, D., Brown, D.B., Caramanis, C.** (2010) 'Theory y applications of robust optimization'. *Society for Industrial y Applied Mathematics*, Vol. 53, No. 3, pp.464-501.
- Beyer, H.G., Sendhoff, B.** (2007) 'Robust optimization - a comprehensive survey'. *Computer Methods in Applied Mechanics y Engineering*, Vol. 196, No. 33-34, pp.3190-3218.

- Birge, J.R., y Louveaux, F.** (2011) Introduction to stochastic programming. Springer, New York.
- Bundschuh, M., Kablan, D., y Thurston, D.L.** (2005) 'Modelling robust y reliable supply chains', Optimization Online e-print. [www.optimization-online.org](http://www.optimization-online.org) (accesado en Julio 24, 2012).
- Bureau of the Census.** 1990 Census of Population y Housing: Density Using Land Area For States, Counties, Metropolitan Areas, y Places. [online] Washington, DC: Bureau of the Census, 1992 [http://www.census.gov/population/www/censusdata/files/90den\\_stco.txt](http://www.census.gov/population/www/censusdata/files/90den_stco.txt) (accesado en Julio 24, 2012).
- Bureau of the Census.** 2000 Population, Housing Units, Area, y Density: 2000 - United States - County by State; y for Puerto Rico. [online] Washington, DC: Bureau of the Census, 2000 [http://factfinder2.census.gov/rest/dnldController/deliver?\\_ts=356737414027](http://factfinder2.census.gov/rest/dnldController/deliver?_ts=356737414027) (accesado en Julio 24, 2012).
- Carbone, R.** (1974) 'Public facilities' location under stochastic demand', *INFORMS*, Vol.12, No. 3, pp.261-270.
- Chen, G., Daskin, M.S., Shen, Z.M., y Uryasev, S.** (2006) 'The  $\alpha$ -reliable mean-excess regret model for stochastic facility location modelling', *Naval Research Logistics*, Vol. 53, No. 7, pp.1520-6750.
- Church, R., y ReVelle, C.** (1982) 'The maximal covering location problem', *Papers in Regional Science*, Vol.32, No.1, pp.101-118.

- Coello-Coello, C.A., Lamont, G.B., y Van Veldhuizen D.A.** (2007) Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems. Vol. 5, Springer, New York.
- Current, J., Min, H., y Schilling, D.** (1990) 'Multiobjective analysis of facility location decisions', *European journal of Operational Research*, Vol. 43, No. 3, pp.295.307.
- Dantzig, G.B., e Infanger, G.** (1991) Large-scale stochastic linear programs: Importance sampling y Benders decomposition. No. SOL-91-4, Stanford University CA. Systems Optimization Lab.
- Daskin, M.S., Hogan, K., y ReVelle, C.** (1988) 'Integration of multiple, excess,backup, y expected covering models', *Environment y Planning B: Planning y Design*, Vol. 15 No.1, pp.15 - 35.
- Daskin, M.S.** (1995) Network y Discrete Location: Models, Algorithms, y Applications, John Wiley & Sons, Incorporated, New York. 498 p.
- Daskin, M.S., Hesse, S.M., y ReVelle, C.** (1997) 'alpha-reliable P-minimax regret: A new model for strategic facility location modelling', *Location Science*, Vol. 55, No. 4, pp.227-246.
- Daskin, M.S., Snyder, L.W., y Berger, R.T.** (2003) 'Facility Location in Supply Chain Design', *Logistics Systems: Design y optimization*, pp.39-65.
- Daskin, M.S., Snyder, L.W., y Berger, R.T.** (2003) Facility Location in Supply Chain Design. Working paper.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., y Meyarivan, T.** (2002) 'A fast y elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II', *IEEE Transaction on Evolutionary Computation*, Vol. 6, No. 2, pp.182-197.

- Deb, K.** (2009) *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons, Chichester. 515 p.
- Deb, K., y Gupta, H.** (2006) 'Introducing robustness in multi-objective optimization'. *Evolutionary computation*, Vol. 14, No. 4, pp.463-494.
- Deb, K., Gupta, S., Daum, D., Branke, J., Kumar, A.K., y Padmanabham, D.** (2009) 'Reliability-based optimization using evolutionary algorithms'. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 13, No. 5, pp.1054-1074.
- Ditlevsen, O., y Madsen, H. O.** (2011) *Structural Reliability Methods*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Drezner, Z., y Hamacher, H.W.** (2004) *Facility location: Applications y Theory*. Springer, Berlin. 463p.
- Ehrgott, M.** (2005) *Multi-criteria optimization*. 2<sup>nd</sup> ed., Springer, Germany. 323 p.
- Eiben, A.E., y Smith, J.E.** (2003) *Introduction to evolutionary computing (Natural Computing Series)*. Springer, Germany. 299 p.
- Fernandez, F.R., Nickel, S., Puerto, J., y Rodriguez-Chia, A.M.** (2001) 'Robustness in the Pareto-solutions for the multi-criteria minisum Location Problem', *Journal of Multi-Criteria Decision. Analysis*, Vol. 10, No. 4, pp.191-203.
- Frank, K.** (1966) 'Optimum locations on a graph with probabilistic demands', *Operations Research*, Vol.14, pp.409-421.
- Ghosh, A., y McLafferty, S.L.** (1982) 'Locating stores in uncertain environments: a scenario planning approach'. *Journal of Retailing* Vol.58, No. 4, pp.5-22.

- Gabrel, V., Murat, C., y Thiele, A.** (2012) 'Recent advances in robust optimization robustness: an overview', Working paper.
- Gaspar-Cunha, A., y Covas, J.A.** (2008) 'Robustness in multi-objective optimization using evolutionary algorithms', *Computational optimization y applications*, Vol. 39, No. 1, pp.75-96.
- Gea, H.C., y Oza, K.** (2006) 'Two-level approximation method for reliability-based design optimisation', *International Journal of Materials y Product Technology*, Vol. 25, No. 1-3, pp.99-111.
- Goh, M., Lim, J.Y.S., y Meng, F.** (2007) 'A stochastic model for risk management in global supply chain networks', *European Journal of Operational Research* 182:164-173.
- Goh, C.K., y Tan, K.C.** (2007) *Evolutionary Computation in Dynamic y Uncertain Environments*, Springer, Berlin.
- Goh, C.K., y Tan, K.C.** (2009) *Evolutionary Multi-Objective Optimization in Uncertain Environments*. Springer-Verlag, Berlin. 272 p.
- Goldberg, D.E.** (1989) *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, Boston. 412 p.
- Goldman, A.J.** (1971) 'Optimal center location on simple networks'. *Transportation Science*, Vol.5, pp.212-221.
- Hakimi, S.L.** (1964) 'Optimum locations of switching centers y the absolute centers y medians of a graph', *Operations Research*, Vol. 12, No. 3, pp.450-459.

- Hakimi, S.L.** (1965) 'Optimum location of switching centers in a communications network y some related graph', *Operations Research*, Vol. 13, no. 3, pp.462-475.
- Hesse, S., y Daskin, M.S.** (1998) 'Strategic facility location through scenario-based planning', *European Journal Operation Research*, Vol. 111, No. 13, pp.423-447.
- Iancu, D.A. y Trichakis, N.** (2012) 'Pareto efficiency in robust optimization', Working paper.
- Isard, W.** (1960) *Methods of regional analysis*. MIT Press, Cambridge. 784 p.
- Jen, E.** (2002) 'Stable or robust? What's the difference?', Santa Fe Institute, Santa Fe New Mexico.
- Jin, Y., y Branke, J.** (2005) 'Evolutionary optimization in uncertain environments - A survey'. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, Vol. 9, No. 3, pp.303-317.
- Kall, P., y Mayer, J.** (2011) *Stochastic linear programming: models, theory, and computation*. Springer. Vol. 156.
- Klibi, W., y Martel, A.** (2009) 'The design of effective y robust supply chain networks', *CIRRELT Research Paper*, Vol. 36, pp.1-32.
- Krakauer, D.C.** (2002) Genetic redundancy *Encyclopedia of Evolution*. Ed. Mark Pagel, Oxford University Press.
- Klose, A., y Drexel, A.** (2004) 'Facility location models for distribution system design', *European Journal of Operational Research*, Vol. 162, No. 1, pp.4-29.
- Körkel, M.** (1998) 'On the exact solution of large-scale simple plant location problems', *European Journal of Operational Research*, Vol. 39, No. 2, pp.157-173.

- Lagaros, N.D., Plevris, V., y Papadrakakis, M.** (2007) 'Reliability based robust design optimization of steel structures', *International journal for simulation y multidisciplinary design optimization*, Vol. 1, No. 1, pp.19-29.
- Li, F., Golden, B.** (2007) 'The open vehicle routing problem: Algorithms, large-scale test problems, y computational results', *Computers y Operations Research*, Vol. 34, No. 10, pp.2918-2930.
- Liang, J., Mourelatos, Z.P., y Tu, J.** (2008) 'A single-loop method for reliability-based design optimisation', *International Journal of Product Development*, Vol. 5, No. 1-5, pp.76-92.
- Lim, M., Daskin, M.S., Bassamboo, A., Chopra, S.** (2009) 'A facility reliability problem: formulation, properties y algorithm', *Naval Research Logistics*, Vol.57, No.1, pp.58-70.
- López-Redondo, J., Fernández, J., García, P., Ortigosa, I.** (2006) 'Solving the multiple competitive facilities' location y design problem on the plane', *Journal of Evolutionary Computation*, Vol. 17, No. 1, pp.21-53.
- López-Monzalvo, F., Brizuela, C.A.** (2013) 'An experimental analysis of the p-median problem under uncertainty: an evolutionary algorithm approach', *European Journal of Industrial Engineering*. (Artículo en prensa).
- Louveux, F.V.** (1999) 'Chance-constrained genetic algorithms', *Proceedings of the Genetic Evolutionary Computer Conference*, pp.369-376.
- Louveux, F.V.** (1986) 'Discrete stochastic location models', *Annals of Operations Research*, Vol. 6, No. 2, pp.23-34.

- Maynard, H., y Kjell, Z.** (2007) *Maynard's Industrial Engineering Handbook*. McGraw Hill, 2048 p.
- Megiddo, N., Zemel, E. y Hakimi, S.L.** (1983) 'The maximum covering location problem', *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, Vol. 4, No. 2, pp.253-261.
- Melo, M., Nickel, S., y Saldanha-da-Gama, F.** (2009) 'Facility location y supply chain management - A review', *European Journal of Operational Research*, Vol. 196, No. 2, pp.401-412.
- Miettinen, K.** (1999) *Nonlinear multiobjective optimization*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. 299 p.
- Min, H., y Zhou, G.** (2002) 'Supply chain modeling: past, present y future', *Computers y industrial engineering*, Vol. 43, No. 1-2, pp.231-249.
- Mirchandani, P., Odoni, A.** (1979) 'Location of medians on stochastic networks', *Transportation Science*, Vol.13, No. 2, pp.85-79.
- Mirchandani, P.** (1980) 'Locational decisions on stochastic networks'. *Geographical Analysis*, Vol. 12, No. 2, pp. 72-183.
- Mulvey, J.M., Vanderbei, R.J., y Zenios, S.A.** (1995) 'Robust optimization of large-scale systems'. *Operations Research*, Vol. 43, No. 2, pp.172-183.
- Owen, S.H. y Daskin, M.S.** (1998) 'Strategic facility location: A review'. *European Journal of Operational Research*, Vol. 111, No. 3, pp.423-447.
- Prins, C.** (2004) 'A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem', *Computers y Operations Research*, Vol. 31, No. 12, pp.1985-2002.

- Rakas, J., Teodorović, D., y Kim, T.** (2004) 'Multi-objective modeling for determining location of undesirable facilities'. *Transportation Research Part D: Transport y environment*, Vol. 9, No. 2, pp.125-138.
- Ravi, R., y Sinha, A.** (2006) 'Hedging Uncertainty: Approximation algorithm for stochastic optimization problem', *Integer programming y combinatorial optimization*, Vol. 3064, No.108, pp.97-114.
- Righini, G., y Zaniboni, L.** (2004) 'A branch-and-price algorithm for the multi-source Weber problem', *International Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.188-207.
- Saha, A., Ray, T., y Smith, W.** (2011), 'Towards practical evolutionary robust multi-objective optimization', *Evolutionary Computation (CEC)*, 2011 IEEE Congress on , vol., no., pp.2123-2130, 5-8 June 2011.
- Sanhi, S., y Gonzalez, T.** (1976) 'P-complete approximation problems', *Journal of association of computing machinery*, Vol. 23, No. 5. pp.555-565.
- Savage, L.J.** (1951) 'The Theory of Statistical Decision', *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 46, No. 253, pp.55-67.
- Serra, D., Ratick, S., y ReVelle, C.** (1996) 'The Maximum Capture Problem with Uncertainty', *Economics Working Papers Series*. Universitat Pompeu Fabra. Barcelona. 24 p.
- Serra, D., Marianov, V.** (1998) 'The p-Median Problem in a Changing Network: The Case of Barcelona', *Location Science*, Vol.6, pp.383-394.

- Shen, Z., Coullard, C., y Daskin, M.S.** (2003) 'A joint location-inventory model', *Transportation Science*, Vol. 37, No. 1. pp.40-55.
- Shen, Z., y Daskin, M.S.** (2005) 'Trade-offs between customer service y cost in integrated supply chain design', *Manufacturing y Service Operations Management*, Vol. 7, No. 3. pp.188-207.
- Shen, Z.J., Zhan, R.L., y Zhang, J.** (2011) 'The reliable facility location problem: formulation, heuristics y approximation algorithms', *INFORMS Journal of computing* 23(3):470-482.
- Sheppard, E.S.** (1974) 'A conceptual framework for dynamic location-allocation analysis', *Environment y Planning A*, Vol. 6 No. 5, pp.547-564.
- Sim, M.** (2004) Robust optimization Thesis Dissertation, Massachusetts Institute of Technology. United States of America.
- Simchi-Levi, D., Kaminski, P., y Simchi-Levi, E.** (2000) Designing y managing the supply chain: concepts, strategies, y cases. McGraw-Hill/Irwin. 544 p.
- Snyder, L.S.** (2003) Supply Chain Robustness y Reliability: Models y Algorithms. Thesis Dissertation, Thesis Dissertation, Northwestern University. United States of America.
- Snyder, L.V.** (2006) 'Facility location under uncertainty: a review', *IIE Transactions*, Vol. 38 No. 7, pp.537-554.
- Snyder, L.V. y Daskin, M.S.** (2005) 'Reliability models for facility location: the expected failure case', *Transportation Science*, Vol. 39, No. 3, pp.1905-1923.

- Snyder, L.V., y Daskin, M.S.** (2006) ‘Stochastic p-Robust location problems’, *IIE Transactions*, Vol. 38, No. 11, pp.971-985.
- Snyder, L.V., Scaparra, M.P., Daskin, M.S., y Church, R.L.** (2006) ‘Planning for the disruptions in supply chain networks’, *INFORMS*, Vol.9, pp.234-257.
- Snyder, L.V., y Daskin, M.S.** (2007) Models for reliable supply chain network design. Critical infrastructure: Reliability y vulnerability. Advances in Spatial Science. Springer Berlin Heidelberg. Vol. 7, No.13, pp.257-289.
- Snyder, L.V., y Shen, Z.** (2006) ‘Managing disruptions to Supply Chains’. *INFORMS*, Vol. 36, No. 4, pp.39-45.
- Snyder, L.V., y Shen, Z.** (2006) ‘Supply y Demand uncertainty in multi-echelon Supply Chains’, Submitted for publication Lehigh University.
- Steuer, R.E.** (1986) Multiple criteria optimization: theory, computation, y application. Wiley, New York. 546 p.
- Surti, C., y Hassini, E.** (2012) ‘Bundling in a supply chain: insights and implications’, *European journal of Industrial Engineering*, Vol. 6, No. 5, pp.542-571.
- Tamir, A.** (1996) ‘An  $O(pn^2)$  algorithm for the p-median y related problems on tree graphs’, *Operations Research Center*, Vol. 19, No.2, pp. 59-64.
- Thaddeus, V.** (1975) ‘Direct y inverse solutions of geodesics on the Ellipsoid with application of nested equations’, *Survey review*, Vol. 23, No. 176, pp.88-93.
- Tralhão, L., Coutinho-Rodrigues, J., y Alçada-Almeida, L.** (2010) ‘Multiobjective modeling approach to locate multi-compartment containers for urban sorted waste’, *Waste management*, Vol. 30, No. 12, pp.2418-2429.

- Toregas, C., Swain, R., ReVelle, C., y Bergman, L.** (1971) 'The location of emergency service facility', *Operation Research*, Vol.19, No. 6, pp.1363-1373.
- Van Roy, T.J., y Erlenkotter, D.** (1982) 'A dual-based procedure for dynamic facility location', *Management Science*, Vol. 28, No. 10, pp.1091-1105.
- Villegas, J.G., Palacios, F., y Medaglia, A.L.** (2006) 'Solutions methods for the bi-objective (cost-coverage) unconstrained facility location problem with an illustrative example', *Annals of Operations Research*, Vol. 147, No. 1, pp.109-141.
- Vitasek, K.** (2010) Supply Chain Management Terms y Glossary. Council of Supply Chain Management Professionals [online] <http://cscmp.org/digital/glossary/glossary.asp> (Accessed 21 June 2012).
- Weaver, J., y Church, R.** (1983) 'Computational procedures for location problems on stochastic networks', *Transportation Science* Vol.17, No. 2, pp.168-180.
- Witting, K., Ober-Blöbaum, S., y Dellnitz, M.** (2012) 'A variational approach to define robustness for parametric multiobjective optimization problems', *Journal of Global Optimization*, pp.1-15.
- Zanjirani, R., SteadieSeifi, M., y Asgari, N.** (2010) 'Multiple criteria facility location problems: A survey', *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 7, pp.1689-1709.
- Zitzler, E., Laumanns, T.M., Fonseca, C., y da Fonseca, V.** (2003) 'Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis y review', *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 7, No. 2, pp.529-533.

**Zitzler, E., Knowles, J., y Thiele, L.** (2008) Quality assessment of Pareto set approximation, *Multiobjective Optimization*. Springer Berlin Heidelberg. Vol. 5252, No. 14, pp.373-404.

## Acrónimos

A continuación se presenta el listado de definición de acrónimos empleados en este documento, seguidos de su traducción (en caso necesario), listados en el orden de aparición en el documento.

**SCM:** Supply Chain Management. Administración de la cadena de suministro.

**SCND:** Supply Chain network Design. Diseño de la red de cadena de suministro.

**FLP:** Facility Location Problem. Problema de localización de instalaciones.

**CD:** Centro de distribución. Traducido del inglés: Distribution Center.

**CFLP:** Capacitated Fixed Charge Facility Location Problem. Modelo del problema de localización, limitado en capacidad y con cargo fijo.

**UFLP:** Uncapacitated Fixed Charge Facility Location Problem. Problema de localización ilimitada en capacidad y con cargo fijo.

**SC:** Supply Chain. Cadena de suministro.

**PMP:** p-median problem. Problema p-mediana.

**RO:** Robust Optimization. Modelo de optimización robusta.

**SO:** Single-objective. Optimización mono-objetivo.

**MORO:** Multiobjective Robust Optimization. Optimización robusta multiobjetivo

**MOEA:** Multiobjective Evolutionary Algorithm. Algoritmo evolutivo multiobjetivo.

**PMA:** Performance Measure Approach. Enfoque de la medida del desempeño.

**RIA:** Reliability Index Approach. Enfoque del índice de confiabilidad.

**MPP:** Most Probable Point. Punto más probable.

**RBDO:** Reliability-based Design Optimization. Problemas de optimización de diseño basados en la confiabilidad.

**EA:** Evolutionary algorithm. Algoritmo evolutivo.

**MOOP:** Multiobjective Optimization Problem. Problema de optimización multiobjetivo.

**LB:** Lower bound. Cota inferior.

**BSC:** Best Selection by Consensus. Soluciones obtenidas por consenso.

**BGA:** Best selection by Genetic Algorithm. Soluciones obtenidas por algoritmo genético.

**SCI:** Set Coverage Index. Índice de cobertura de conjunto.

## Apéndice A

### Cálculo de las distancias ortodrómicas (método del Gran Círculo)

La distancia de los grandes círculos es la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie de una esfera, medida a lo largo de una ruta sobre la superficie de dicha esfera (*Thaddeus, 1975*) y opuesta a viajar a través del interior de la esfera. Debido a la geometría esférica, es muy diferente del cálculo de distancias empleando la geometría Euclideana ordinaria. La distancia entre dos puntos dentro del espacio Euclideano es la longitud de una línea recta desde un punto hasta otro. Sobre una esfera, no existen líneas rectas. Dentro de la geometría no Euclideana, las líneas rectas se remplazan con geodésicas. Las geodésicas sobre la esfera son los grandes círculos (círculos sobre la esfera cuyos centros coinciden con el centro de la esfera).

Entre dos puntos cualquiera sobre una esfera, que no se encuentran directamente opuestas una de otra, existe un gran círculo, solamente. Los dos puntos separan el gran círculo en dos arcos. La longitud del arco más corto es la distancia de los grandes círculos entre dos puntos.

Debido a que la Tierra es aproximadamente una esfera, las ecuaciones para el cálculo de las distancias de los grandes círculos son importantes para encontrar la distancia más corta entre puntos sobre la superficie de la Tierra, por lo que son muy importantes para aplicaciones de navegación, entre otros. Las funciones que se emplean para determinar la distancia entre los puntos se presentan a continuación.

Sean:

$\phi_s$  Latitud punto  $s$  (rad)

$\lambda_s$  Longitud punto  $s$  (rad)

$\Delta_\phi$  Diferencias entre latitudes

$\Delta_\lambda$  Diferencias entre longitudes

$\Delta_\sigma$  Diferencia de distancia angular

La diferencia de la distancia angular, también conocida como ángulo central, se encuentra constituida por la ley esférica de los cosenos:

$$\Delta_\sigma = \arccos [(\sin \phi_s)(\sin \phi_s) + (\cos \phi_s)(\cos \lambda_f)(\cos) \Delta_\lambda] \quad (\text{A.1})$$

La distancia  $d$ , i.e., la longitud del arco, para una esfera de radio  $r$  y  $\Delta_\sigma$  dada en radianes es:

$$d = r \Delta_\sigma \quad (\text{A.2})$$

Es posible que esta fórmula del arcocoseno presente grandes errores de redondeo para el caso común en el que la distancia sea pequeña; sin embargo, se usa comúnmente. En lugar de ello, se emplea la función de Haversine que es más precisa para distancias pequeñas (*Thaddeus, 1975*).

$$\Delta_\sigma = 2 \arcsin \left( \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\Delta_\phi}{2} \right) + (\cos \phi_s) (\cos \phi_f) (\sin^2 \left( \frac{\Delta_\lambda}{2} \right))} \right) \quad (\text{A.3})$$

*Thaddeus (1975)* menciona que cuando se habla de errores, ellos sólo se refieren al redondeo dado que las fórmulas son exactas.

Coordenadas A y B (rad)		
	$\phi$	$\lambda$
Coordenada A	0.436	-1.309
Coordenada B	0.710	-1.291

Tabla A.1: *Ejemplo de coordenadas A y B (rad)*

## A.1 Radio de la Tierra

Para cuestiones prácticas, es necesario referirse al radio de la Tierra. La forma de la Tierra es muy cercana a una esfera “achatada” en sus polos, con valores extremos de radio de 6,378.137 km en el ecuador y 6,356.752 km en sus polos. El radio promedio para la aproximación esférica de la figura de la Tierra es aproximadamente 6371.01 km ó 3958.75 mi.

## A.2 Ejemplo de cálculo de la distancia ortodrómica entre dos coordenadas

Sean dos coordenadas A y B definidas por sus valores de latitud ( $\phi$ ) y longitud ( $\lambda$ ) como se muestra en la Tabla A.1. Se calcula inicialmente la diferencia entre las latitudes y longitudes de las coordenadas en estudio empleando las siguientes funciones:

$$\Delta_{\phi} = \phi_B - \phi_A = 0.710 - 0.436 = 0.274$$

$$\Delta_{\lambda} = \lambda_B - \lambda_A = -1.291 - (-1.309) = 0.018$$

Ahora se emplea la función de Harvesine definida por (A.3) y los valores arriba obtenidos.

$$\Delta_{\sigma} = 2 \arcsin \left( \sqrt{\sin^2 \left( \frac{0.274}{2} \right) + (\cos(0.710)) (\cos(0.436)) (\sin^2 \left( \frac{0.018}{2} \right))} \right)$$

$$\Delta_{\sigma} = 0.274$$

Ahora se utiliza el valor del radio terrestre en la función de la distancia por el método del gran círculo definida por (A.2) y expresada aquí en millas (\*28).

$$d = r \Delta_{\sigma}$$

$$d = (3958.75 \text{ mi})(0.274) = 1084.434 \text{ mi}$$

---

<sup>28</sup> Se emplea como unidad *milla* por facilidad de comparación con los datos obtenidos en la literatura consultada

# Apéndice B

## Resultados experimentales

### B.1 Experimento 1

En las siguientes figuras se muestran los Frentes **ND** consolidados de 30 corridas para los casos de  $n=\{49, 88, 150, 300, 700, 1500\}$  obtenidos durante la búsqueda de la cota inferior  $\delta$  para el valor  $V_k^*$ . Es de notar que en todas las figuras los Frentes **ND** obtenidos presentan el mismo comportamiento; además de que, a medida que el valor de la cota inferior  $\delta$  se acerca al valor de  $V_k^*$ , las medidas del lamento esperado y del máximo lamento se reducen; i.e. la robustez de la solución aumenta. Todas las figuras de la presente sección fueron elaboradas por el autor de la tesis.

Por otro lado, en la Tabla B.1 se indican los intervalos de tiempo invertidos para obtener el dato de  $V_k^*$  para cada uno de los casos de  $n=\{49, 88, 150, 300, 700, 1500\}$  con  $p=\{5, 10, 15, 20, 30\}$  y  $k=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  que se obtuvieron empleando el pMNSGA-II.

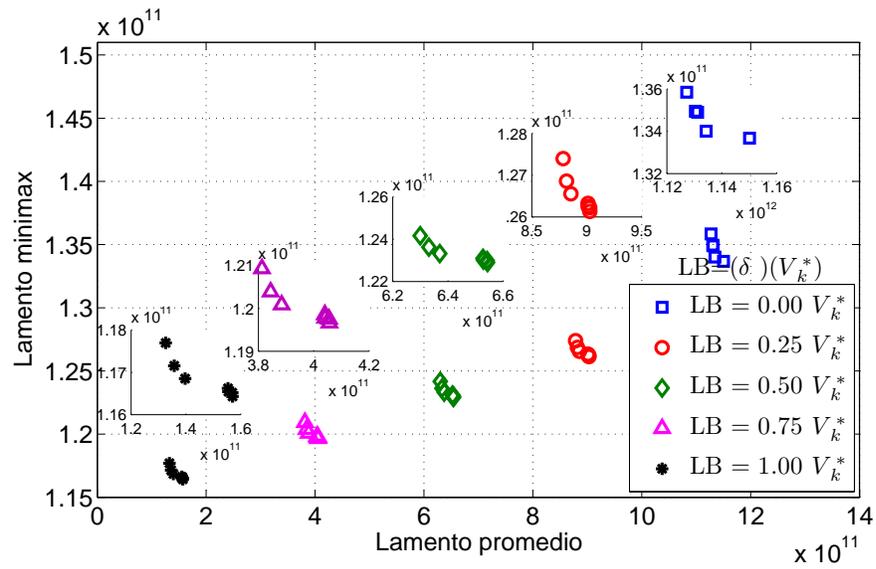


Figura B.1: Frente Pareto consolidado para 49 nodos, 5 CDs y distintos valores de  $\delta$

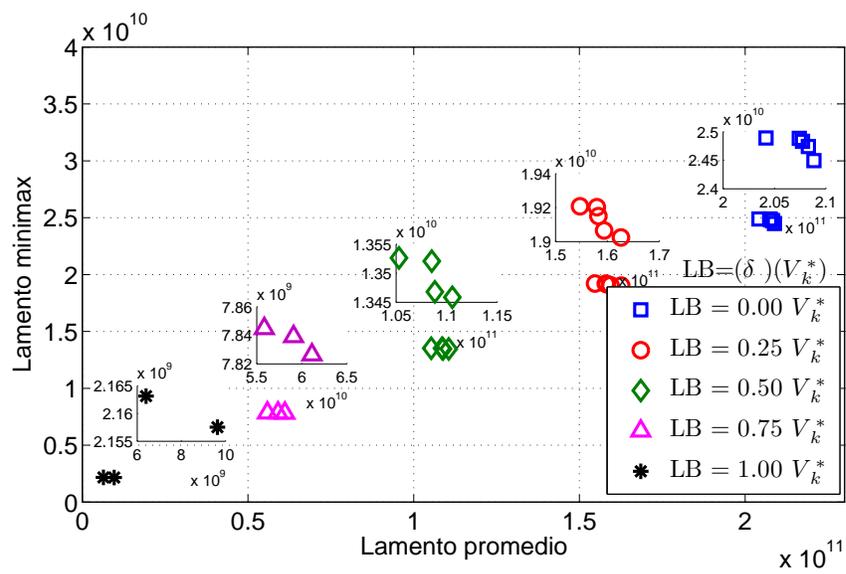


Figura B.2: Frente Pareto consolidado para 88 nodos, 5 CDs y distintos valores de  $\delta$

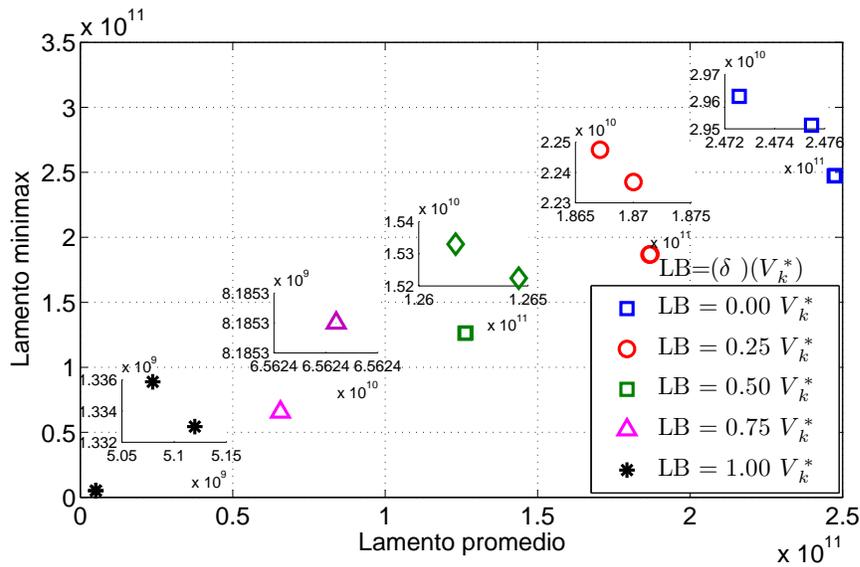


Figura B.3: Frente Pareto consolidado para 150 nodos, 5 CDs y distintos valores de  $\delta$

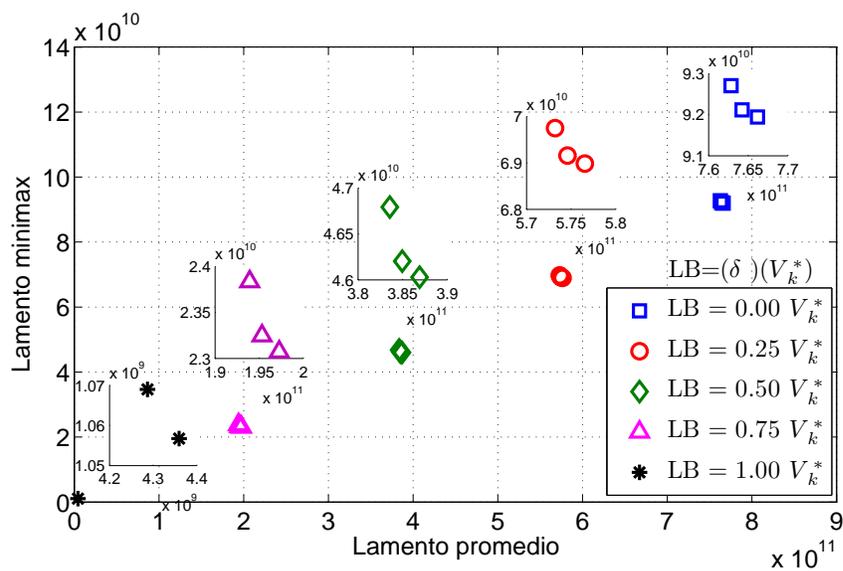


Figura B.4: Frente Pareto consolidado para 300 nodos, 5 CDs y distintos valores de  $\delta$

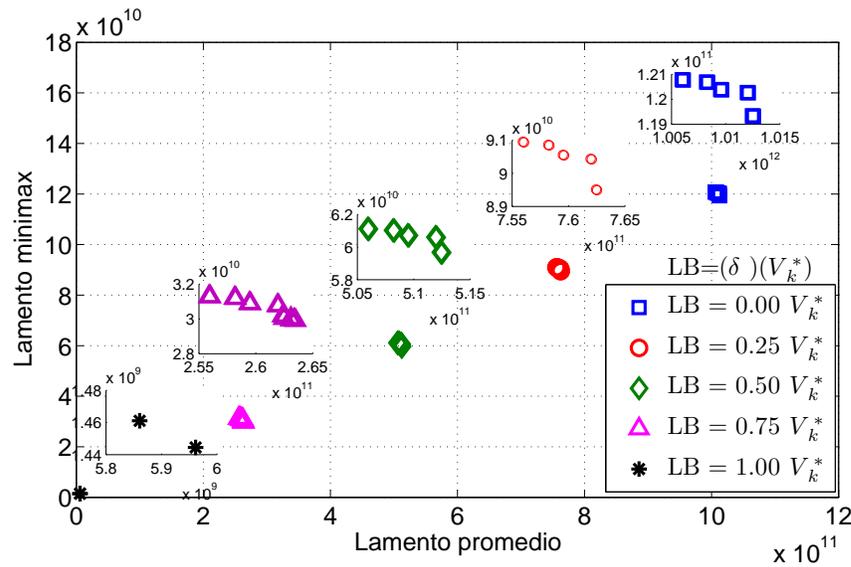


Figura B.5: Frente Pareto consolidado para 700 nodos, 5 CDs y distintos valores de  $\delta$

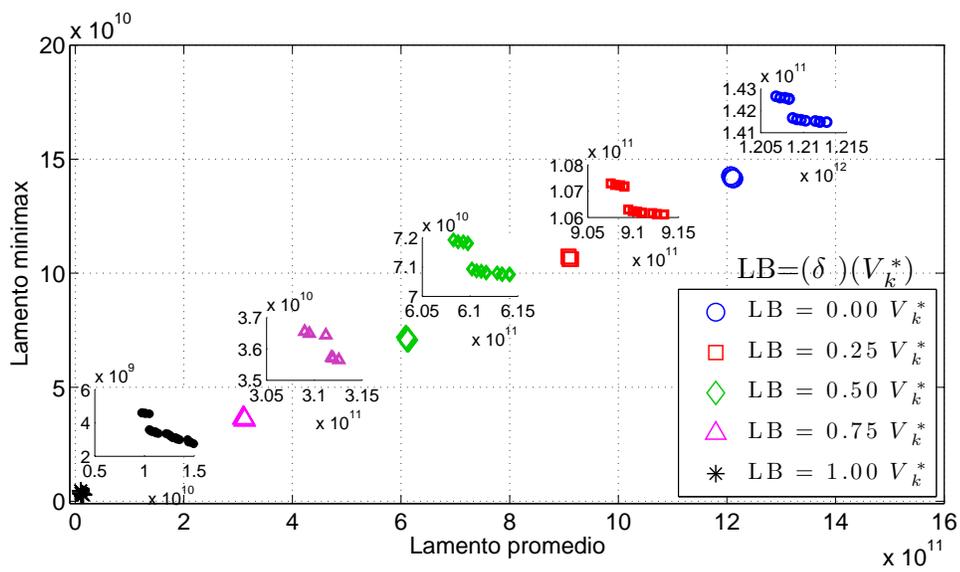


Figura B.6: Frente Pareto consolidado para 1500 nodos, 5 CDs y distintos valores de  $\delta$

Intervalos de tiempo de cálculo de $V_k^*$								
<b>5 CDs</b>	49 nodos		88 nodos		150 nodos		300 nodos	
$k$	LI	LS	LI	LS	LI	LS	LI	LS
1	6.32	6.90	6.75	7.32	8.37	9.04	12.61	13.70
2	6.41	7.00	7.07	7.82	7.96	8.59	12.30	13.15
3	6.32	6.89	6.87	7.51	7.93	8.58	12.21	13.33
4	6.42	7.11	6.89	7.56	8.28	8.80	12.83	13.49
5	6.12	6.71	7.02	7.77	8.10	8.71	12.73	13.65
6	6.48	7.07	6.80	7.38	7.95	8.68	12.54	13.15
7	6.05	6.62	6.90	7.46	7.94	8.53	12.62	13.36
8	6.14	6.84	6.86	7.57	8.19	8.84	12.35	13.16
9	6.17	6.73	6.62	7.23	8.21	8.75	12.35	13.12
<b>10 CDs</b>	49 nodos		88 nodos		150 nodos		300 nodos	
$k$	LI	LS	LI	LS	LI	LS	LI	LS
1	7.13	7.60	8.59	9.16	11.70	12.40	17.68	18.38
2	7.10	7.66	8.49	9.09	11.41	11.97	18.41	19.12
3	6.83	7.43	8.50	9.09	11.30	11.85	18.07	18.77
4	6.86	7.46	8.54	9.18	11.28	11.91	18.04	18.97
5	7.11	7.62	8.60	9.16	11.27	11.84	18.19	19.16
6	6.97	7.54	8.76	9.53	11.03	12.46	18.79	19.55
7	6.90	7.41	8.54	9.10	11.18	11.73	17.91	18.67
8	6.98	7.52	8.69	9.34	11.07	11.75	17.94	18.79
9	7.04	7.60	8.49	9.08	11.09	11.75	18.28	18.86
<b>15 CDs</b>	49 nodos		88 nodos		150 nodos		300 nodos	
$k$	LI	LS	LI	LS	LI	LS	LI	LS
1	7.65	8.22	9.77	10.73	13.57	14.21	23.17	23.81
2	7.76	8.30	9.99	10.50	13.42	14.10	22.57	23.33
3	7.73	8.25	10.02	10.55	13.51	14.13	22.83	23.60
4	7.67	8.23	9.90	10.49	13.44	14.17	22.60	23.32
5	7.68	8.22	9.86	10.39	13.50	14.21	22.59	23.34
6	7.73	8.27	9.96	10.49	13.40	14.08	22.97	23.84
7	7.76	8.31	9.86	10.41	13.61	14.19	22.60	23.40
8	7.71	8.27	9.89	10.44	13.62	14.19	22.80	23.58
9	7.72	8.26	9.93	10.45	13.75	14.40	23.21	23.76
<b>20 CDs</b>	49 nodos		88 nodos		150 nodos		300 nodos	
$k$	LI	LS	LI	LS	LI	LS	LI	LS
1	8.40	8.95	11.35	11.86	16.03	16.67	27.11	27.82
2	8.43	8.99	11.33	11.81	15.99	16.66	26.98	27.85
3	8.39	8.96	11.19	11.78	16.02	16.52	26.94	27.52
4	8.32	8.82	11.28	11.81	15.96	16.70	26.62	27.37
5	8.35	8.89	11.21	11.77	16.01	16.59	26.82	27.74
6	8.45	9.00	11.17	11.70	15.93	16.66	26.38	26.98
7	8.29	8.83	11.34	11.90	16.05	16.72	28.50	29.96
8	8.36	8.91	11.29	11.81	16.26	16.98	27.79	29.46
9	8.44	9.05	11.18	11.80	16.35	19.20	26.77	27.39
<b>30 CDs</b>	49 nodos		88 nodos		150 nodos		300 nodos	
$k$	LI	LS	LI	LS	LI	LS	LI	LS
1	9.62	10.17	14.25	14.93	20.81	21.38	36.93	37.89
2	9.67	10.21	14.11	14.69	20.58	21.20	36.57	37.51
3	9.66	10.21	14.23	15.08	20.34	23.90	36.08	36.93
4	9.88	10.63	14.79	15.80	19.95	25.16	35.93	36.88
5	9.78	10.30	14.97	15.67	22.13	26.32	36.40	37.16
6	9.92	10.56	14.08	14.88	20.34	23.62	36.34	37.09
7	10.08	10.66	13.99	14.72	20.59	21.51	37.34	38.29
8	9.63	10.13	14.79	15.71	20.54	21.36	36.52	36.98
9	9.75	10.21	14.78	15.84	20.32	29.57	36.98	38.08

Tabla B.1: Intervalos de tiempo de cálculo de  $V_k^* \forall i, j, k$ , empleando el *pMNSGA-II*, donde *LI*=Límite de tiempo inferior, *LS*=Límite de tiempo superior

## B.2 Experimento 2

Suponga un caso particular del problema PMP con  $n=6$  y  $p=4$ , donde cada minorista del conjunto  $n$  presenta una demanda aleatoria independiente en cada uno de los  $k=2$  escenarios. Al resolver este ejemplo se observa que el total de arreglos posibles es de  $nCp$  si se resuelve a fuerza bruta; i.e.,  $6C4=15$  soluciones posibles por escenario; sin embargo, dado que el problema PMP restringe a  $p$  el número de CDs seleccionados y que cada nodo debe asignarse exclusivamente a un sólo nodo por escenario que, además, debe habilitarse como CD, entonces no necesariamente las quince soluciones resultan factibles (Ver conjunto de Figura B.7).

Como se observa en el conjunto de Figura B.7, 4 de 15 soluciones se descartan por no cumplir con las restricciones indicadas (soluciones 1, 6, 9 y 13), el resto de las soluciones factibles muestran valores particulares de lamento promedio y máximo lamento en cada uno de los escenarios. El compromiso que presentan estas soluciones por escenario se indica en la columna cinco de la Tabla B.2 y en la Figura (B.8), donde la solución 14 domina al resto de las soluciones dado que presenta el menor compromiso entre las medidas de robustez. La solución 14, presenta un valor de lamento esperado igual a cero para el escenario  $k=2$ ; de manera semejante ocurre con la solución 5. Esta particularidad se debe a que cada selección-asignación presenta un lamento igual a cero en un escenario particular; i.e., se trata de las selecciones óptimas para cada escenario (ver Tabla B.2).

El sentido común indica que al incrementar el valor de  $p$  en este problema, se producirán soluciones más robustas; sin embargo, al analizar el caso específico  $p=2$  para las mismas condiciones del problema, se observa que la selección-asignación para cada

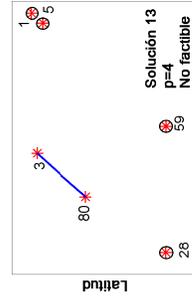
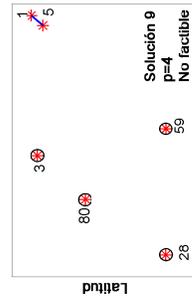
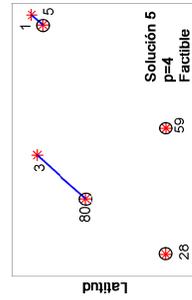
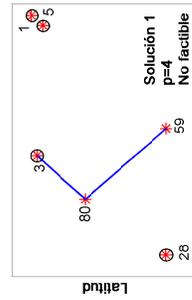
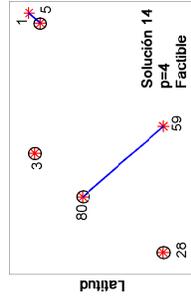
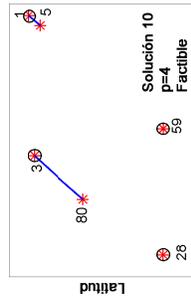
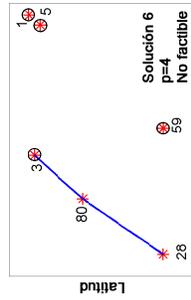
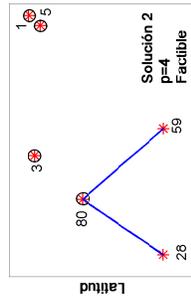
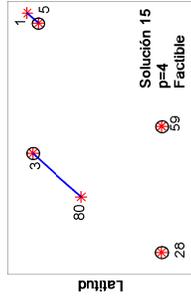
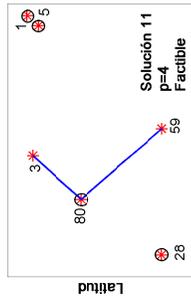
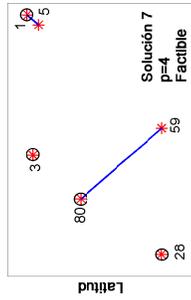
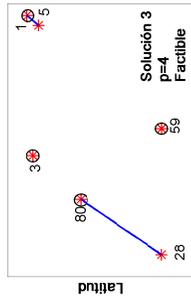
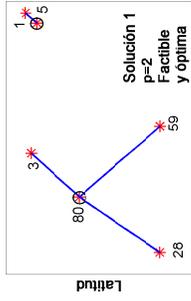
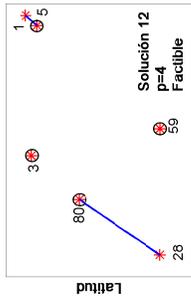
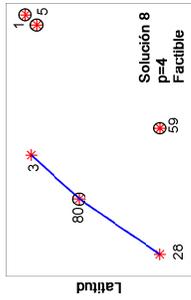
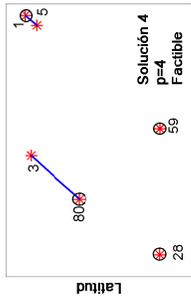


Figura B.7: Conjunto de soluciones para  $n=6$ ,  $p=4$  y la solución óptima para  $p=2$ .

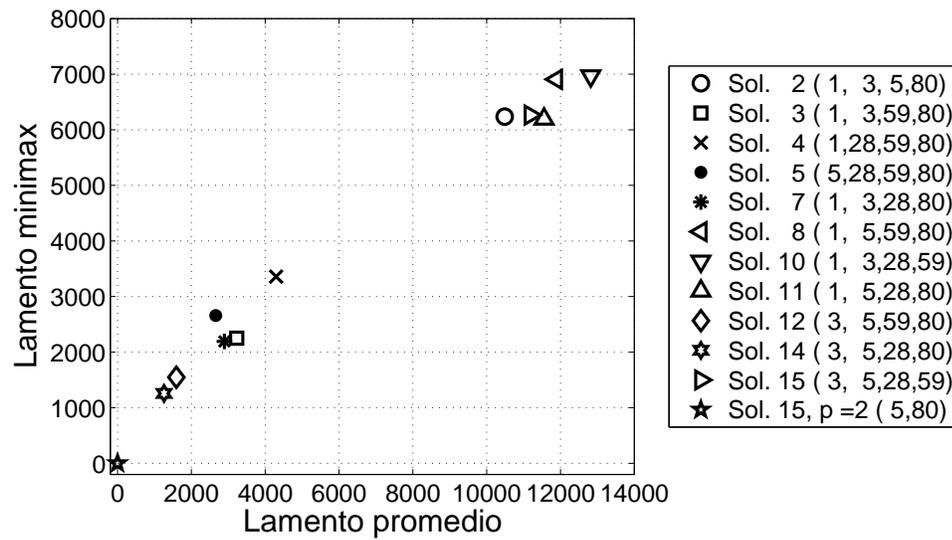


Figura B.8: Frentes ND para el caso hipotético  $n=6$ ,  $p=4$

escenario es la misma y que los valores de lamento esperado en ambos escenarios es igual a cero. Lo que significa que en ambos casos se trata de la solución óptima, misma que domina a todas las soluciones del caso  $p=4$ . Por lo que se concluye que es posible encontrar soluciones más robustas con una selección menor de CDs, lo que resulta bastante atractivo al momento de implementar (ver la Figura del extremo inferior derecho del conjunto de Figura B.7).

<b>Conjunto de soluciones para <math>n=6, p=4</math></b>							
Solución	$k$	Conjunto de CDs	$V_k^*$	$R_k$	Avg. Reg.	Max. Reg.	Factibilidad
1	1	(1,3,5,28)	8838	11115	20083	11115	No
	2	(1,3,5,28)	7071	8968			
2	1	(1,3,5,80)	8838	6237	10488	6237	Sí
	2	(1,3,5,80)	7071	4251			
3	1	(1,3,59,80)	8838	978	3228	2250	Sí
	2	(1,3,59,80)	7071	2250			
4	1	(1, 28, 59, 80)	8838	936	4295	3359	Sí
	2	(1, 28, 59, 80)	7071	3359			
5	1	(5,28,59,80)	8838	0	2657	2657	Sí
	2	(5,28,59,80)	7071	2657			
6	1	(1,3,5,59)	8838	9900	20416	10516	No
	2	(1,3,5,59)	7071	10516			
7	1	(1,3,28,80)	8838	2193	2895	2193	Sí
	2	(1,3,28,80)	7071	702			
8	1	(1,5,59,80)	8838	4980	11888	6908	Sí
	2	(1,5,59,80)	7071	6908			
9	1	(3,28,59,80)	8838	-4002	-6003	-2001	No
	2	(3,28,59,80)	7071	-2001			
10	1	(1,3,28,59)	8838	5856	12823	6967	Sí
	2	(1,3,28,59)	7071	6967			
11	1	(1,5,28,80)	8838	6195	11555	6195	Sí
	2	(1,5,28,80)	7071	5360			
12	1	(3,5,59,80)	8838	42	1590	1548	Sí
	2	(3,5,59,80)	7071	1548			
13	1	(1,5,28,59)	8838	9858	21483	11625	No
	2	(1,5,28,59)	7071	11625			
14	1	(3,5,28,80)	8838	1257	1257	1257	Sí
	2	(3,5,28,80)	7071	0			
15	1	(3,5,28,59)	8838	4920	11185	6265	Sí
	2	(3,5,28,59)	7071	6265			
<b>Conjunto de soluciones para <math>n=6, p=2</math></b>							
1	1	(5,80)	23913	0	0	0	Sí
	2	(5,80)	21050	0			

Tabla B.2: *Conjunto de soluciones para  $n=6, p=4$  y  $n=6, p=2$*

### B.3 Experimento 3

En cada una de las siguientes figuras se muestran los frentes **ND** consolidados de 30 corridas para los casos en que se varió el número de nodos  $n=\{49, 88, 150, 300\}$  dejando fijo el valor de CDs para alguno de los valores del conjunto  $p=\{5, 10, 15, 20, 30\}$ ; i.e., la Figura B.9 corresponde al caso en que mantiene fijo  $p=5$ , la Figura B.10 corresponde al caso en que mantiene fijo  $p=10$ , la Figura B.11 corresponde al caso en que mantiene fijo  $p=15$ , la Figura B.12 corresponde al caso en que mantiene fijo  $p=20$ , y la Figura B.13 corresponde al caso en que mantiene fijo  $p=30$  y en todos esos casos se varió el número de los nodos.

Es de notar que en las Figuras B.9 a B.14, los frentes **ND** obtenidos no necesariamente presentan el mismo comportamiento caso por caso, por lo que, a diferencia de los ejemplos analizados en los experimentos previos, no resulta tan sencillo concluir acerca del comportamiento del fenómeno ante las variaciones definidas por el número de nodos. Esto obliga a analizar caso por caso a fin de establecer los compromisos entre las medidas de robustez. De hecho, en la Figura B.14 aparecen los mejores frentes **ND** de cada caso en que el valor de  $p$  permaneció fijo. Aunque en los casos con  $p=\{5, 10\}$  se observan perfectamente los frentes Pareto, en los casos donde  $p=\{15, 20, 30\}$  existen dos frentes **ND** que se traslapan entre sí, los que corresponden a los resultados de  $n=\{88,150\}$  (ver Tabla ??).

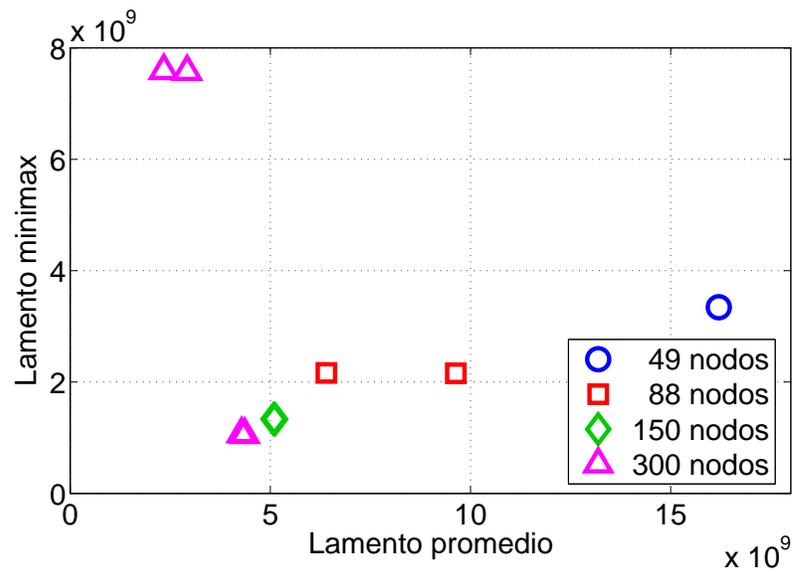


Figura B.9: Comparativo de los frentes ND para el caso de selección de 5 CDs con respecto a las variaciones en el número de nodos.

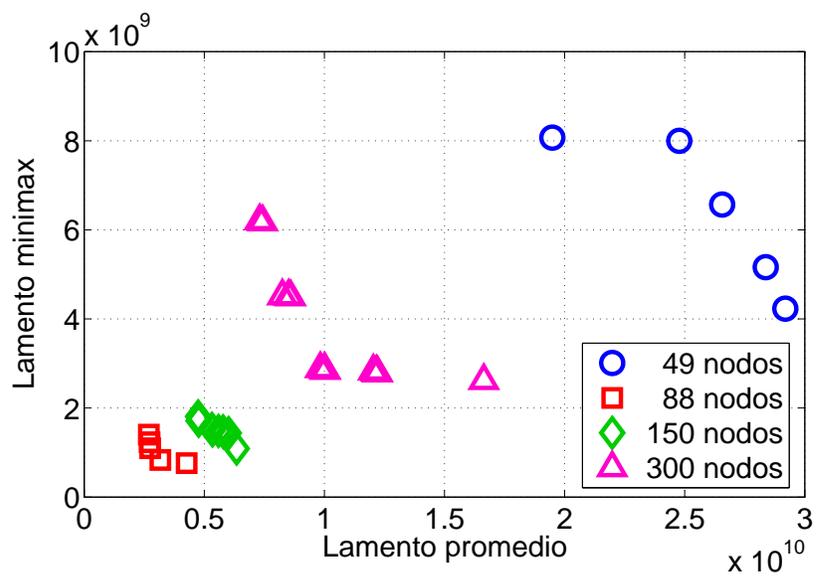


Figura B.10: Comparativo de los frentes ND para el caso de selección de 10 CDs con respecto a las variaciones en el número de nodos.

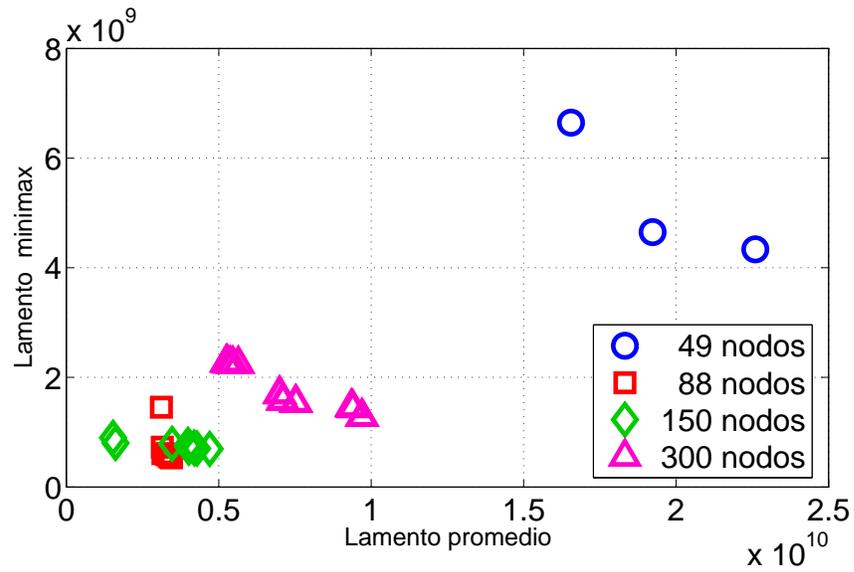


Figura B.11: Comparativo de los frentes ND para el caso de selección de 15 CDs con respecto a las variaciones en el número de nodos.

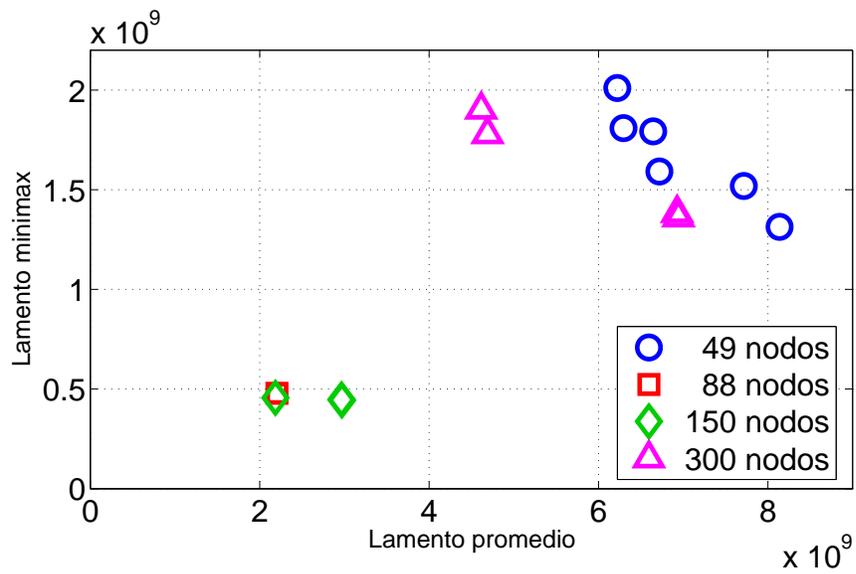


Figura B.12: Comparativo de los frentes ND para el caso de selección de 20 CDs con respecto a las variaciones en el número de nodos.

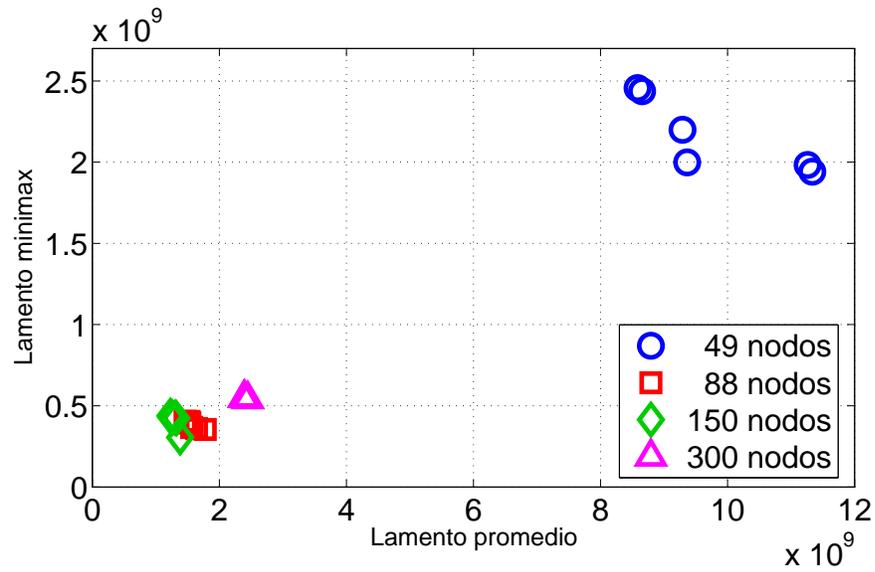


Figura B.13: Comparativo de los frentes ND para el caso de selección de 30 CDs con respecto a las variaciones en el número de nodos.

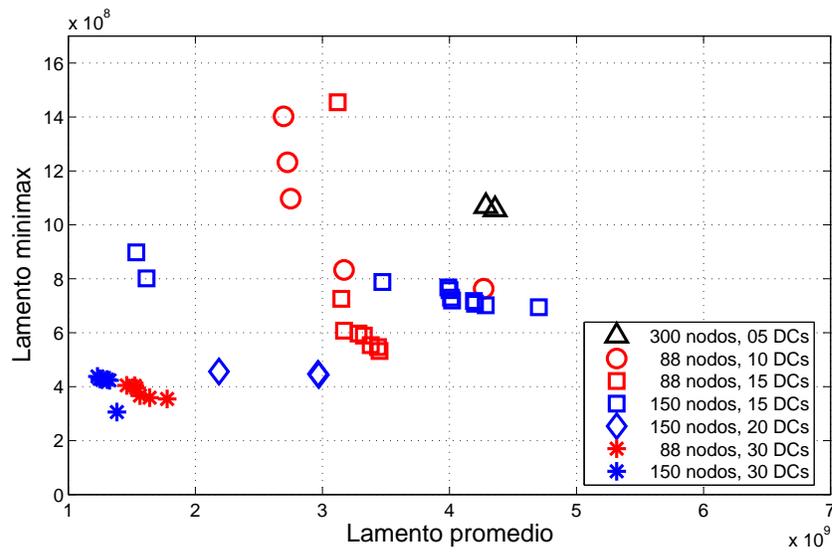


Figura B.14: Comparativo de los frentes ND más robustos respecto a los datos mostrados en la Tabla (5.5).

## B.4 Experimento 4

En la presente sección se muestran los resultados obtenidos durante la selección por consenso para cada uno de los casos de  $n=\{49, 88, 150, 300\}$  en cada uno de los  $k=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  escenarios con sus respectivos valores de  $V_k^*$  y los valores de lamento derivados de la selección por consenso que en cada caso que se obtuvieron empleando el pMNSGA-II.

Selección óptima de CDs por escenario						
$k$	$V_k^*$	Selección de CDs				
1	117003174667	1	9	14	22	28
2	119151224191	1	11	14	27	32
3	129367516318	1	6	9	26	31
4	133673500883	1	6	9	31	49
5	118507671945	1	6	9	22	28
6	124562053878	1	9	14	22	28
7	127354611562	1	9	14	31	36
8	129486053269	1	6	9	31	49
9	111932166990	1	6	22	40	47
Selección por consenso		1, 6, 9, (14, 22, 31)				

Tabla B.3: Selección óptima de CDs por escenario para  $n=49$ ,  $p=5$  y derivación de la selección de CDs por consenso.

Comparación de soluciones BSC vs. BGA para $n=49$ y $p=5$							
Solución	Selección de CDs					Lamento esperado	Lamento minimax
$BSC_1$	1	6	9	14	22	137429824564	28247938208
$BSC_2$	1	6	9	14	31	127726635160	23416568581
$BSC_3$	1	6	9	22	31	123067694262	23153250159
$BGA$	1	9	14	22	32	16202458758	3342606635

Tabla B.4: Comparación de soluciones BSC vs. BGA para  $n=49$ ,  $p=5$

Selección óptima de 5 CDs por escenario						
$k$	$V_k^*$	Selección de CDs				
1	21709836327	1	2	3	8	15
2	21674007164	1	3	28	36	46
3	23150153094	2	3	8	30	72
4	22726295290	1	2	3	8	30
5	20297531619	1	2	3	43	59
6	22333061215	1	2	3	28	59
7	22999482018	1	8	13	46	47
8	22349106770	1	3	8	30	46
9	20537555398	1	2	3	28	36
Selección por consenso		1, 2, 3, 8, (28, 30, 46)				

Tabla B.5: Selección óptima de CDs por escenario para  $n=88$ ,  $p=5$  y derivación de la selección de CDs por consenso.

Comparación de soluciones BSC vs. BGA para $n=88$ y $p=5$							
Solución	Selección de CDs					Lamento esperado	Lamento minimax
$BSC_1$	1	2	3	8	28	36217969251	5929339953
$BSC_2$	1	2	3	8	30	10729368589	3399689889
$BSC_3$	1	2	3	8	46	20136096061	3960293214
$BGA_1$	1	8	44	46	47	9634579243	2157538559
$BGA_2$	1	3	28	46	59	6402041016	2163134237

Tabla B.6: Comparación de soluciones BSC vs. BGA para  $n=88$ ,  $p=5$ .

Selección óptima de 5 CDs por escenario						
$k$	$V_k^*$	Selección de CDs				
1	26686021888	1	88	95	101	135
2	26497309454	1	3	35	109	135
3	26868577339	1	3	83	109	135
4	28578408644	1	43	91	135	138
5	26487153350	1	3	28	83	135
6	27379309956	1	3	59	83	159
7	27797215450	1	3	35	109	135
8	26104785718	1	43	57	71	138
9	25779935938	1	88	89	95	127
Selección por consenso		1, 3, 83, (35, 43, 88)				

Tabla B.7: Selección óptima de CDs por escenario para  $n=150$ ,  $p=5$  y derivación de la selección de CDs por consenso.

Comparación de soluciones BSC vs. BGA para $n=150$ y $p=5$							
Solución	Selección de CDs					Lamento esperado	Lamento minimax
$BSC_1$	1	3	83	35	43	464582238597	76763548110
$BSC_2$	1	3	83	35	88	279533865413	50042926623
$BSC_3$	1	3	83	43	88	274135318220	49550930885
$BGA_1$	1	3	89	109	145	5119724171	1333001997
$BGA_2$	1	3	135	109	145	5079540350	1335867441

Tabla B.8: Comparación de soluciones BSC vs. BGA para  $n=150$ ,  $p=5$

Selección óptima de 5 CDs por escenario						
$k$	$V_k^*$	Selección de CDs				
1	80009842917	10	117	159	189	263
2	79940790986	2	10	58	60	159
3	87004785281	2	10	57	189	257
4	91825995344	2	70	77	147	189
5	85777165175	117	159	189	257	265
6	84883840413	117	159	189	257	260
7	85363746304	2	10	57	189	257
8	87119295469	2	10	105	131	257
9	76618206495	10	58	60	159	207
Selección por consenso		2, 10, 57, 58, 60				

Tabla B.9: Selección óptima de CDs por escenario para  $n=300$ ,  $p=5$  y derivación de la selección de CDs por consenso.

Comparación de soluciones BSC vs. BGA para $n=300$ y $p=5$							
Solución	Selección de CDs					Lamento esperado	Lamento minimax
$BSC$	2	10	57	58	60	5354480051	1173276040
$BGA_1$	65	117	159	215	230	2922826967	7574807145
$BGA_2$	65	117	159	230	257	2341135541	7593026505
$BGA_3$	2	10	57	105	257	4359120234	1056721173
$BGA_4$	2	10	57	189	257	4286988069	1068948916

Tabla B.10: Comparación de soluciones BSC vs. BGA para  $n=300$ ,  $p=5$