

TESIS DEFENDIDA POR
Emilia Fregoso Becerra
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Director del Comité

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández
Miembro del Comité

Dr. José Manuel Romo Jones
Miembro del Comité

Dr. Juan Contreras Pérez
Miembro del Comité

Dr. Antonio González Fernández
Miembro del Comité

Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez
Miembro del Comité

Dr. Thomas Gunter Kretzschmar
*Coordinador del programa de posgrado
en Ciencias de la Tierra*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Estudios de Posgrado

25 de febrero de 2010

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN CIENCIAS DE LA TIERRA**

**INVERSION CONJUNTA 3D DE MULTIPLES DATOS GEOFISICOS USANDO
RESTRICCIONES DE GRADIENTES CRUZADOS**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

EMILIA FREGOSO BECERRA

Ensenada, Baja California, México. Febrero de 2010.

RESUMEN de la tesis de **Emilia Fregoso Becerra**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada. Ensenada, Baja California, México. Febrero 2010.

INVERSION CONJUNTA 3D DE MULTIPLES DATOS GEOFISICOS USANDO RESTRICCIONES DE GRADIENTES CRUZADOS

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Director de Tesis

En este trabajo generalizamos la metodología de inversión conjunta mediante gradientes cruzados a medios tridimensionales e introducimos un procedimiento de solución basado en una formulación estadística y restricciones de igualdad que resaltan la similitud geométrica entre dos parámetros físicos del subsuelo. Desarrollamos la formulación y algoritmo matemáticos usando la metodología de inversión generalizada propuesta por Tarantola y Valette (1982), obteniendo una solución analítica que incorpora términos de solución del problema de mínimos cuadrados para inversión separada de ambos parámetros del modelo, así como términos que involucran las restricciones de igualdad dadas por los gradientes cruzados. Utilizamos descomposición en valores singulares (DVS) para calcular la pseudoinversa de la matriz no invertible que aparece en la solución analítica. Aplicamos la solución propuesta a inversión conjunta 3D de combinaciones de datos gravimétricos, magnéticos y de sísmica de refracción y evaluamos las ventajas de esta formulación en experimentos sintéticos y de campo.

Para calcular la respuesta de los modelos y realizar el cálculo de la matriz de jacobianos que relaciona los parámetros con sus respectivos datos geofísicos, desarrollamos algoritmos de modelado directo en 3D. Para calcular el campo producido en superficie a partir de una distribución de densidad y magnetización, basamos nuestro desarrollo en el campo producido por prismas rectangulares, el cual presenta una relación lineal analítica entre la densidad y el campo gravitacional, así como la magnetización y su campo magnético. Esto simplificó el algoritmo y redujo el tiempo de cómputo. En el modelado de tiempos de viaje de los primeros arribos de sísmica de refracción, partimos de la ecuación eikonal, la cual provee de una relación no lineal entre la velocidad de ondas sísmicas y tiempos de arribo de la onda P. Para resolver dicha ecuación basamos nuestro desarrollo en una solución en diferencias finitas propuesta por Vidale (1988, 1990). Este método proporcionó una forma eficiente de conocer no sólo los tiempos de arribo en los receptores, sino también en todos los puntos del dominio 3D discretizado. Este campo de tiempos de viaje permite el trazado de los rayos sísmicos entre cada par fuente-receptor, que forman la base para el cálculo de la matriz Jacobiana necesaria para resolver el problema de inversión.

Al aplicar el problema inverso a los datos gravimétricos, magnéticos y sísmicos, determinamos distribuciones de la densidad, magnetización y velocidad sísmica, donde la información estructural de cada uno de los modelos es incorporada dentro del algoritmo, proporcionando una forma automática de obtener dos modelos simultáneamente con características estructurales similares. Los modelos sintéticos recuperaron gran parte de su estructura original, ubicados en su posición y con una distribución de los parámetros adecuada en el dominio 3D. De esta manera logramos reducir la falta de resolución en las tres direcciones así como ambigüedades estructurales en modelos 3D, lo cual ocurre comúnmente en procesos de inversión separada convencionales de datos potenciales y sísmicos, facilitando la interpretación integrada de los modelos. El uso de la DVS nos permitió obtener un mejor balance entre las características requeridas en la formulación, principalmente en modelos para los cuales existen incompatibilidades significativas donde resulta difícil su coincidencia estructural. Sin embargo, sólo nos permitió resolver problemas de mediana escala. El experimento de inversión conjunta 3D con datos de campo fue realizado en la Bahía de Todos Santos usando datos gravimétricos y magnéticos. Aun cuando los datos caracterizan diferentes fuentes, la restricción de gradientes cruzados proporcionó una determinación conjunta de fronteras comunes entre el basamento sedimentario y el basamento magnético, mostrando así, la eficiencia de la metodología para resolver la estructura en experimentos controlados y modelos reales de la Tierra.

Palabras clave: inversión conjunta, gradientes cruzados, datos potenciales y sísmicos.

ABSTRACT of the thesis presented by **Emilia Fregoso Becerra**, as a partial requirement to obtain the degree of DOCTOR IN SCIENCES in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics. Ensenada, Baja California, Mexico. February 2010.

JOINT 3D INVERSION OF MULTIPLE GEOPHYSICAL DATA USING CROSS-GRADIENT CONSTRAINTS

In this work we generalized the cross-gradients joint inversion methodology to tridimensional media and introduced a solution procedure based on a statistical formulation and equality constraints that enhances the structural similarity between the distributions of two physical parameters in the subsurface. We developed the mathematical formulation and computational algorithm using the generalized inversion methodology proposed by Tarantola and Valette (1982), obtaining an analytical solution that incorporates least squares terms for separate inversion of both model parameters, as well as terms that account for cross-gradient equality constraints. We used singular value decomposition (SVD) to calculate a pseudo-inverse of the non-invertible matrix that is found in the analytical formulation. We then applied the 3D joint inversion formulation to paired combinations of gravity, magnetic and seismic refraction data and tested its advantages on synthetic and field examples.

To calculate the corresponding model responses and Jacobian matrices that link the parameters to their respective geophysical data, we developed computational codes to solve the 3D forward problems. To compute the gravity and magnetic fields from density and magnetization distributions, we based our development in the field produced by rectangular prisms, which show an analytical linear relationship between density and gravity field, as well as between magnetization and magnetic field. This fact simplified the algorithm and reduced the computation time. For the forward modeling of first-arrival travel times for seismic refraction, we started from the eikonal equation, which provides a nonlinear relationship between seismic wave velocity and wave arrival times. To solve this equation we based our development on the progressive finite difference solution proposed by Vidale (1988, 1990). This method proved to be efficient to determine arrival times not only in the receivers, but also in all the nodes of the 3D discretized domain. This travel time field permits the seismic ray tracing between each source-receiver pair, which furnishes the base for the calculation of the Jacobian matrix needed for the solution of the inverse problem.

By applying the inversion methodology to gravity, magnetic and seismic data, we determined distributions of density, magnetization and seismic velocity. It is shown that every single model renders its own structural information in order to simultaneously determine two models with similar structural characteristics. The obtained synthetic models reflected their original structure in terms of an adequate 3D location and distribution. Accordingly, we enhanced the 3D resolution and reduced the structural ambiguities in the three-dimensional models -which are commonly found in the conventional separate inversion of potential and seismic data-, facilitating the integrated interpretation of the models. The SVD procedure allowed us to ponder

among desirable model features, mainly in models where significant incompatibilities hinder their structural coincidence. However, its computational cost also limited the algorithms to the solution of medium scale problems only. The 3D joint inversion experiment of field data was conducted in the Todos Santos Bay area using gravity and magnetic data. Even though the data may characterize different sources, the cross-gradient constraint resolved for common boundaries in both magnetic and non-magnetic basements, showing the effectiveness of the methodology to find a common structure in controlled as well as in real models of the Earth.

Key words: joint inversion, cross-gradients, potential and seismic data.

DEDICATORIA

A la memoria de Ana

y de mis amigos que se fueron antes: *Yanina y Ricardo*.

A mi esposo Federico con quien compartí cada momento de este trayecto y quien ha sido mi mayor ejemplo de trabajo, paciencia y tenacidad.

A Santiago quien sin saberlo, me ayudó a encontrarle sentido al trabajo, a los nuevos proyectos, a la vida.

A mis padres por apoyarme siempre y ayudarme a ser lo que ahora soy.

A mis hermanos porque formaron parte de este trabajo con su cariño y apoyo.

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis, Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado por su gran apoyo y esmero. Gracias por ayudarme a enfrentar los retos y motivarme siempre a culminar este trabajo.

A los miembros del comité, por su valiosa colaboración en el desarrollo de este trabajo. Especialmente al Dr. José Manuel Romo Jones, por su amabilidad y ayuda incondicional en momentos difíciles. Al Dr. Juan Contreras Pérez, por sus valiosas aportaciones en este trabajo y por facilitarme incondicionalmente la infraestructura y equipo de cómputo que me permitió obtener mejores resultados. Al Dr. Antonio González Fernández por su amistad y sus aportaciones a lo largo de este trabajo, así como en la revisión de esta tesis.

A mis profesores. Especialmente al Dr. Rogelio Vázquez González por su incondicional apoyo académico y sus apreciables palabras.

A todo el personal técnico y administrativo de Ciencias de la Tierra, quienes facilitaron mi agradable estancia en el CICESE.

A mis amigas y amigos por hacerme olvidar las presiones. Especialmente a Rosalía, Marina y Griselda, por su gran amistad y cariño. A mis buenos amigos Reginaldo Durazo, Lorena Linacre, Antonio Martínez y Gabriela Montaña.

Al CICESE, por el apoyo brindado durante mi estancia.

Al CONACyT, por el apoyo brindado como becaria No. 144912.

CONTENIDO

	Página
Resumen en español.....	i
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatoria.....	v
Agradecimientos.....	vi
Contenido.....	vii
Lista de Figuras.....	x
Lista de Tablas.....	xxvi
Capítulo I. Introducción.....	1
I.1. Inversión de datos geofísicos	1
I.1.1. Inversión 3D	5
I.2. Integración de datos	7
I.3. Inversión conjunta	8
I.4. Inversión conjunta basada en relaciones estructurales	13
I.5. Inversión conjunta usando gradientes cruzados	15
I.6. Motivación, hipótesis y objetivos de la tesis	18
I.6.1. Contenido de la tesis	19
Capítulo II. Inversión conjunta usando gradientes cruzados.....	21
II.1. El concepto de gradientes cruzados en 3D	21
II.1.1. Análisis de la función de gradientes cruzados en dos modelos conocidos	21
II.1.2. La función de gradientes cruzados aplicada a un caso analítico de un volumen elipsoidal y un volumen esférico	23
II.1.3. La función de gradientes cruzados aplicada a un caso numérico: modelo de geometría cilíndrica y cúbica	24
II.2. Planteamiento de la función objetivo del problema de inversión conjunta	30
II.3. Solución de la función objetivo: planteamiento de ecuaciones normales	36
II.4. Implementación Numérica	39
II.4.1. Análisis matricial de la solución	40
II.4.2. Proceso numérico de los términos que intervienen en la formulación	41
II.4.2.1. Discretización del vector de gradientes cruzados y su derivada	42
II.4.2.2. Discretización de las matrices de suavidad	44
II.4.2.3. Cálculo numérico de la pseudoinversa	46
II.5. Análisis de la metodología de gradientes cruzados 3D en experimentos sintéticos	48
II.5.1. Modelo con estructura vs. modelo plano	49
II.5.2. Modelos idénticos	52
Capítulo III. Modelado directo de datos gravimétricos y magnéticos.....	56
III.1. Generalidades de los métodos gravimétrico y magnético	56

CONTENIDO (continuación)

	Página
III.2. Modelado 3D	59
III.2.1. Modelado directo de datos gravimétricos	61
III.2.2. Modelado directo de datos magnéticos	64
III.2.3. Ejemplos del modelado directo de datos gravimétricos y magnéticos	66
Capítulo IV. Inversión conjunta 3D de datos gravimétricos y magnéticos mediante gradientes cruzados.....	75
IV.1. Experimentos sintéticos	75
IV.1.1. Experimento I. Modelo de un cubo con suavidad homogénea	76
IV.1.2. Experimento II. Modelo de dos cubos someros con suavidad homogénea	99
IV.1.3. Experimento III. Modelo de un dique con efecto en profundidad usando una losa	110
IV.1.4. Experimento IV. Modelo de un cubo con efecto en profundidad conocido como <i>soporte gradiente mínimo</i>	120
IV.1.5. Experimento V. Modelo de un cubo con efecto en profundidad usando una losa y Laplaciano variable	131
IV.2. Experimento con datos reales	137
Capítulo V. Modelado directo de datos sísmicos.....	149
V.1. Generalidades de los métodos sísmicos	150
V.1.1. El método de refracción sísmica	157
V.2. La técnica de Vidale para tiempos de arribo	159
V.2.1. La técnica de Vidale para medios 3D	162
V.3. Trazado de rayos	171
V.4. Ejemplos de modelado directo y trazado de rayos	178
V.4.1. Modelo de una capa	179
V.4.2. Modelo de un cubo enterrado	182
V.4.3. Modelo de dos cubos enterrados	184
V.5. Conclusiones	186
Capítulo VI. Inversión conjunta 3D de datos potenciales y sísmicos mediante gradientes cruzados.....	188
VI.1. Proceso de inversión conjunta usando datos potenciales y sísmicos	189
VI.2. Experimentos sintéticos	191
VI.2.1. Experimento I. Modelo de dos cubos enterrados en un medio homogéneo	191
VI.2.2. Experimento II. Modelo de dos cubos enterrados restringiendo los valores en la superficie y fondo del volumen estudiado	200
VI.2.3. Experimento III. Modelo de dos cubos enterrados restringiendo los valores en la superficie y el fondo, usando datos magnéticos y sísmicos	203

CONTENIDO (continuación)

	Página
VI.3. Discusión y Conclusiones	208
Capítulo VII. Conclusiones generales.....	210
Referencias.....	217
Apéndice A. Formulación matemática para la solución del problema de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados.....	224
Apéndice B. Ecuación de la atracción gravitacional de un prisma rectangular.....	229
Apéndice C. Ecuación del campo magnético de un prisma rectangular.....	233
Apéndice D. Demostración de la ecuación eikonal.....	238
Apéndice E. Análisis de errores de tiempos de arribo para el modelo de una capa.....	241

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Los datos medidos en la superficie de la Tierra son representados por d . Los modelos m₁ , m₂ y m₃ corresponden a diferentes distribuciones de alguna propiedad física del subsuelo, las cuales pueden reproducir los mismos datos en la superficie. Las tonalidades en verde ejemplifican diferentes valores de la propiedad.	3
2	Secciones verticales de un modelo tridimensional de capas elipsoidales concéntricas. (a) muestra una sección de anillos circulares mientras que (b) corresponde a una sección perpendicular que describe anillos concéntricos elípticos, (c) muestra el interior del modelo tridimensional elipsoidal correspondiente a las secciones.	6
3	Resultados de la inversión (columna derecha) de cada uno de los datos producidos por los modelos sintéticos (columna izquierda). Figuras tomadas de Colombo y De Stefano (2007).	8
4	Representación esquemática del proceso de inversión conjunta. Los datos (d_1 , d_2) son incorporados dentro de un algoritmo de inversión conjunta, así como la relación entre los parámetros (representada por τ) e información a priori geológica o geofísica. Los modelos resultantes son representados por m_1 y m_2 .	12
5	Gradientes $(\nabla m_1, \nabla m_2)$ en diferentes posiciones de dos estructuras geométricas tridimensionales y el vector de gradientes cruzados $(\vec{t})$ asociado.	22
6	Modelos elipsoidal (a) y esférico (b) que muestran una sección interior. Estos son comparados para determinar su similitud estructural 3D. (c) vista en perspectiva de cuatro cortes verticales seleccionados que muestran los vectores de gradientes cruzados obtenidos para estos modelos. Note el comportamiento circular y-z del vector de gradientes cruzados (d).	23
7	Modelo de cilindros anidados (a) con valores mayores en el centro y menores conforme aumenta el radio. En (b) se muestran cubos anidados con valores decrecientes hacia los extremos del dominio.	25

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
8	(a) muestra secciones horizontales del modelo m_1 y los vectores ∇m_1 en diferentes posiciones, los cuales tienen componentes verticales iguales a 0. (b) muestra secciones horizontales de m_2 y los vectores gradientes ∇m_2 que tienen componentes en las tres direcciones. (c) corresponde a secciones horizontales del vector $\mathbf{t}$ de gradientes cruzados.	26
9	Imágenes del campo escalar t generadas usando la ecuación (15) para los modelos analíticos de volumen elipsoidal y esférico (a) y para los modelos numéricos de geometría cilíndrica y cúbica (b). La escala de colores muestra los valores positivos de t con magnitud mayor en color rojo.	28
10	Esquema en diferencias adelantadas para la direcciones x , y y z usadas para definir la versión discreta 3D del vector de gradientes cruzados.	42
11	Malla con bloques cúbicos usada para representar el dominio de parámetros. Los bloques seleccionados en las fronteras, marcados con círculos, tienen asociados los elementos de la matriz $\mathbf{B}$ para los que contribuyen.	44
12	Esquemas en diferencias centradas usados en la discretización del operador de Laplace. a), b) y c) muestran los bloques utilizados en la dirección x , y y z , respectivamente.	45
13	Malla con bloques cúbicos usada para representar el dominio de parámetros. Las posiciones de los círculos en los bloques de las fronteras corresponden a los bloques utilizados en el esquema de diferencias finitas del Laplaciano. Las flechas rojas muestran las direcciones de fronteras libres para el Laplaciano en cada caso.	46
14	Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de (42) y (43). Las iteraciones son marcadas con números azules. Los círculos rojos indican el nivel de corte, λ_p , en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4096$. La disminución significativa de los valores singulares a partir de 2048 indica que este valor característico podría proporcionar una buena elección del nivel de corte.	48
15	$\mathbf{m}_1$, modelo de bloques homogéneos en la dirección vertical. $\mathbf{m}_2$, modelo homogéneo en todos los bloques del dominio.	50

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
16	Resultados de la inversión conjunta de los modelos de la Figura 15.	51
17	Las figuras a) y b) corresponden a los modelos a priori, mientras que c) y d) son el resultado de la inversión conjunta.	52
18	Las figuras a) y b) corresponden a los modelos a priori, mientras que c) y d) son el resultado de la inversión para el caso de un modelo fijo.	54
19	Ejemplos de rocas y sus valores de densidad asociados.	57
20	Elementos que describen la dirección del campo magnético en coordenadas cartesianas, para un punto P sobre la superficie de la Tierra.	58
21	Ejemplos ilustrativos de la respuesta gravimétrica (a) y magnética (b) de una esfera enterrada a una profundidad de 40 m al centro de la esfera y radio de 10 m. El contraste de densidad entre la esfera y el medio circundante es de 1 kg/m^3 . Mientras que la anomalía gravimétrica tiene un comportamiento simétrico, la anomalía magnética es asimétrica debido a la dirección del campo principal de la Tierra o campo inductor, el cual, para este ejemplo, tiene una inclinación $I=45^\circ$.	60
22	Esquema de un modelo de densidad o magnetización discretizado en paralelepípedos rectangulares y su campo observado en superficie. Figura modificada de Blakely (1996).	61
23	Prisma básico de densidad y magnetización uniforme. Los lados del prisma son paralelos a los ejes cartesianos, z_1 corresponde a la profundidad al techo del prisma y z_2 al piso de este.	63
24	Modelo de un cubo con contraste de densidad y magnetización de 1.0 g/cm^3 y 1.0 A/m , respectivamente. Los cuadros en gris son las proyecciones de las caras del cubo.	67
25	Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b), producidas por el modelo del cubo presentado en la Figura 21. La línea continua representa la proyección del cubo en superficie.	68
26	Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b), producidas por el modelo del cubo de la Figura 21, con datos de gravedad y campo magnético medidos fuera del dominio de interés (obsérvense las dimensiones este y norte). La línea continua representa la proyección del cubo en superficie.	69

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
27	(a) <i>Caso 1</i> : modelo de dos cubos con contrastes de densidad y magnetización positivos, 1.0 g/cm^3 y 1.0 A/m , respectivamente; (b) <i>caso 2</i> : modelo con un bloque con contraste positivo y otro negativo y (c) <i>caso 3</i> : representa un contraste de los parámetros físicos negativo (-1.0 g/cm^3 y -1.0 A/m).	70
28	Anomalías gravimétricas (a, c y e) y magnéticas (b, d y f), producidas por los modelos de dos cubos mostrados en la Figura 27, con datos de gravedad y campo magnético medidos fuera del dominio (obsérvense las dimensiones este y norte).	72
29	Secciones del modelo de un dique 3D: (a) muestra una sección de la profundidad en la posición este = 500 m, (b) es una sección en planta sobre la base del dique (profundidad = 400 m) y (c) es una vista en planta en la cima del dique (profundidad = 50 m). La densidad está representada por $\rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$ y la magnetización por $M \text{ (A/m)}$.	73
30	Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b), producidas por el modelo del dique mostrado en la Figura 29.	74
31	Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b), producidas por el modelo del cubo de la Figura 24. Los datos fueron contaminados por ruido aleatorio Gaussiano. En ambos conjuntos de datos la desviación estándar del ruido agregado es del 2% de la máxima amplitud de la anomalía. La línea continua representa la proyección del cubo en superficie.	77
32	Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta. Los modelos 3D tienen asociado su campo gravimétrico y magnético correspondiente sobre la superficie. Las secciones de los modelos son tomadas en la posición este = 40 m y muestran asimismo la anomalía producida sobre dicha sección. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	81
33	La figura (a) muestra el ajuste de los datos y (b) la convergencia del modelo para $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$, correspondiente a las ecuaciones del ajuste (77) y (78) así como (79) y (80) de la convergencia, para cada paso del proceso iterativo de inversión conjunta del modelo del cubo. Las figuras (c) y (d) muestran el ajuste de los datos y la convergencia respectivamente, para $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$.	84

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
34	Modelos de densidad y magnetización obtenidos después de 9 iteraciones del proceso de inversión conjunta usando un nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$. Los modelos de inversión separada, a partir de los cuales se obtienen estos modelos, son mostrados en la Figura 32. Las secciones de los modelos 3D son tomadas en la posición <i>este</i> = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	85
35	Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta imponiendo fondo fijo. Los modelos de inversión conjunta fueron obtenidos después de 6 iteraciones. Las secciones de los modelos 3D son tomadas en la posición <i>este</i> = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	87
36	Imágenes de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 32. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.	89
37	Figuras comparativas de la magnitud del vector de gradientes cruzados ($\ t\ $) para los modelos de la Figura 32 de inversión separada y conjunta. Las secciones son tomadas en la posición <i>este</i> = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	90
38	Figuras de la correlación entre los modelos de densidad y magnetización obtenidos de inversión separada (a) y conjunta (b) para el modelo del cubo de la Figura 32. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región del cubo enterrado, mientras que los azules corresponden al medio circundante.	91
39	Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta para el experimento del cubo con observaciones en superficie extendidas, asociadas con la Figura 26. Las secciones de los modelos son tomadas en la posición <i>este</i> = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	93
40	Ajuste de los datos (a) y convergencia del modelo (b), correspondientes a las ecuaciones del ajuste (77) y (78) así como (79) y (80) de la convergencia. Los resultados de las iteraciones son obtenidos a partir del experimento del cubo enterrado con observaciones extendidas en superficie.	94

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
41	Imágenes de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 39. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.	96
42	Figuras comparativas de la magnitud del vector de gradientes cruzados ($\ \mathbf{t}\ $) para los modelos de la Figura 39 de inversión separada y conjunta. Las secciones son tomadas en la posición <i>este</i> = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	97
43	Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b) 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del cubo enterrado, con observaciones extendidas en superficie. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región del cubo enterrado, mientras que los azules corresponden al medio circundante.	98
44	Anomalía gravimétrica (a) y magnética (c), producidas por el modelo de dos cubos de la Figura 27, colocados a una profundidad de 10 m. Las Figuras (b) y (d) muestran una sección sur a norte colocada en la posición <i>este</i> = 40m de las Figuras (a) y (c), respectivamente. Los datos fueron contaminados por ruido aleatorio Gaussiano. En ambos conjuntos de datos la desviación estándar del ruido agregado es del 2% de la máxima amplitud de la anomalía.	100
45	Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento de dos cubos colocados a 10 m de profundidad con observaciones extendidas en superficie. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4096$.	102
46	Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición <i>este</i> = 40 m que corta los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas.	104

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
47	Ajuste de los datos (a) y convergencia del modelo (b), correspondientes a las ecuaciones del ajuste (77) y (78) así como (79) y (80) de la convergencia. Los resultados de las iteraciones son obtenidos a partir del experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad con observaciones extendidas en superficie.	105
48	Imágenes de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 46. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.	107
49	Figuras comparativas de la magnitud del vector de gradientes cruzados ($\ t\ $) para los modelos de inversión separada y conjunta de la Figura 46. La magnitud fue calculada a partir de los valores para cada componente mostrados en la Figura 48. Las secciones son tomadas en la posición $este = 40$ m. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas.	109
50	Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b) 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad con observaciones extendidas en superficie. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región del cubo con contraste de magnetización positiva, mientras que los azules corresponden al cubo con contraste de magnetización negativa y lo puntos en verde están asociados al medio que los contiene.	110
51	Malla utilizada en el proceso de inversión para el experimento del dique. Los bloques utilizados en las direcciones horizontales son mostrados en (a), mientras que la malla utilizada en profundidad se muestra en (b).	112
52	Modelos de densidad y magnetización de inversión separada del dique mostrado en la Figura 26, sin restricciones en profundidad. La sección que se muestra corta el dique en la posición $este = 500$ m. La posición real del dique es delimitada por las líneas negras continuas.	113

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
53	Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento del dique con una losa en profundidad. Las iteraciones son marcadas con números azules. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4032$.	115
54	Modelos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta del dique mostrado en la Figura 29, imponiendo restricciones en profundidad. La sección que se muestra corta el dique en la posición <i>este</i> = 500 m. La posición real del dique es delimitada por las líneas negras continuas.	116
55	La Figura (a) muestra el ajuste de los datos y (b) la convergencia de los modelos 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del dique con fondo plano.	117
56	Imágenes 3D de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 54. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.	118
57	Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b) 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del dique. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región que conforma el dique, mientras que los azules corresponden al medio circundante.	119
58	Modelos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta del cubo mostrado en la Figura 24, usando restricciones en profundidad a través de β MGS para valores de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$. La sección que se muestra corta el cubo en la posición <i>este</i> = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	126
59	Modelos de densidad y magnetización de inversión conjunta comparativos con los modelos mostrados en la Figura 58, usando un nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$. La sección que se muestra corta el cubo en la posición <i>este</i> = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.	127

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
60	Gráficas comparativas entre el ajuste de los datos (a) y (c) y la convergencia (b) y (d) de los modelos 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del cubo con <i>soporte gradiente mínimo</i> . Las figuras (a) y (b) corresponden a un nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$ mientras que (c) y (d) a los valores $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$.	129
62	Modelos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta del cubo usado en los Experimentos I y IV, usando restricciones en profundidad a través de una losa y Laplaciano variable. La sección que se muestra corta el cubo en la posición <i>este</i> = 40 m. Las secciones muestran la posición real del cubo delimitada por las líneas negras continuas.	133
63	La figura (a) muestra el ajuste de los datos y (b) la convergencia del modelo para el experimento con fondo plano y Laplaciano variable de los modelos de la Figura 62. Las figuras (c) y (d) muestran el ajuste de los datos y la convergencia respectivamente, usando únicamente fondo plano, correspondiente a los modelos de la Figura 35.	134
64	Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b), correspondientes a los modelos de la Figura 62 con fondo plano y Laplaciano variable. Las figuras (c) y (d) muestran la correlación de los parámetros físicos correspondiente a los modelos de la Figura 35, donde hemos usado la restricción de una losa en profundidad (fondo plano). Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región que incluye al cubo, mientras que los azules corresponden al medio circundante.	135
65	Localización de la Bahía de Todos Santos, México y su geología superficial, tomada de Pérez-Flores et al. (2004).	138
66	Modelos a priori seleccionados. La región en rojo muestra un contraste de densidad y magnetización nulos, mientras que las regiones azul y verde muestran contrastes negativos de densidad y magnetización, respectivamente. Las líneas negras discontinuas delimitan la región cubierta por datos en cada caso y sirven de marco de referencia.	139

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
67	Distribución de los datos gravimétricos terrestres y marinos (a) y los datos magnéticos terrestres, marinos y aéreos (b) en la Bahía de Todos Santos, México. La dirección considerada del campo magnético inductor es $D=8^\circ$ and $I=56.9^\circ$. Las líneas negras discontinuas delimitan la región seleccionada en el proceso de inversión, mientras que las líneas blancas punteadas son la posición de las secciones transversales usadas para ilustrar los resultados de inversión separada y conjunta en la Figura 69. La línea continua morada indica la línea de costa y el mapa de coordenadas corresponde a UTM-11.	140
68	Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta. Los modelos 3D tienen asociado su campo gravimétrico y magnético correspondiente sobre la superficie. Las líneas negras discontinuas delimitan la región cubierta por datos en cada caso.	142
69	Modelos de las dos secciones paralelas señaladas en la Figura 67, obtenidos después de inversión separada ((a) a (d)) y conjunta ((e) a (h)) de los datos de la Bahía de Todos Santos con su correspondiente perfil de datos. Las líneas rojas de las anomalías asociadas corresponden a datos observados comparativamente a las líneas azules de los datos calculados.	144
70	Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento con datos de campo. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 3920$.	146
71	Ajuste de los datos (a) y convergencia (b) para cada iteración del experimento de inversión conjunta con datos reales, usando $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-2}$. Los cuadrados en (a) indican el rms de la primera iteración (inversión separada) mientras que los cuadrados en (b) indican el número de iteración para el modelo seleccionado.	147
72	Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b), correspondientes a los modelos de las Figuras 68 y 69. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región que forma la cuenca, mientras que los azules estarían asociados con el basamento.	148

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
73	Experimento comparativo de las ondas P y S que ocurren en el interior de la Tierra. A medida que se desplazan las ondas P, comprimen y expanden el material haciendo que vibre hacia atrás y hacia delante en una dirección paralela al movimiento de la onda. Las ondas S, son de cizalla y hacen que las partículas vibren en ángulos rectos con respecto a la dirección del movimiento de la onda (figura tomada de Tarbuck y Lutgens, 2004).	151
74	Sección de un frente de onda esférico que se propaga por un medio homogéneo y las trayectorias de los rayos perpendiculares (figura modificada de: Lecture Notes Course ES304, University of Melbourne: http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/SEIS/NOTES/raypath.html).	153
75	Ley de Snell. Se muestra el rayo que conecta dos puntos en cada lado de una frontera para $v_1 < v_2$.	154
76	Comportamiento de una onda P incidente en una frontera entre materiales con diferentes propiedades elásticas, para $v_1 < v_2$.	155
77	Ilustración esquemática que muestra la trayectoria del rayo, con ángulo crítico (i_c), de la onda incidente (SB) al contacto con una frontera de mayor velocidad ($v_2 > v_1$) y la onda refractada (BC) viajando a lo largo de la frontera. Esta última es también refractada a la capa superior con el mismo ángulo i_c y emerge con una trayectoria de rayo tal como CD. Se muestran también avances de los frentes de onda a partir del instante $t = 0$ cuando el rayo incidente intersecta la frontera en B (figura tomada de Sharma, 2004).	156
78	Frentes de onda difractados desde una esquina, D, a partir de ondas que provienen de la Fuente (figura tomada de Sharma, 2004).	157
79	Ejemplo de un modelo de velocidades heterogéneo para el cual se muestra la trayectoria de las ondas refractadas, por el método de sísmica de refracción, a través del trazado de los rayos. También se observan las curvas de tiempo-distancia que describen este modelo en superficie.	158
80	Frentes de onda para una sección de un modelo de velocidades homogéneo 3D, donde la dirección está representada por rayos, en este caso son líneas rectas desde la fuente a cada receptor.	160

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
81	Diagrama de flujo de los elementos requeridos por el esquema de Vidale para el cálculo de tiempos de viaje de los frentes de onda sísmicos. Mostramos el diseño de la malla de modelado directo e inverso para distinguir entre una malla más fina de modelado directo (malla en negro) y una mayormente espaciada para el modelado inverso (malla en rojo). El resultado del proceso es un volumen de tiempos de viaje calculados en todos los puntos de la malla para una fuente particular.	163
82	Esquemas de Vidale para el cálculo de tiempos de arribo en medios 3D, Vidale (1990). Los puntos azules numerados indican los nodos conocidos previamente, mientras que los nodos rojos indican el nodo por determinar a partir de las ecuaciones indicadas. En blanco se muestran los nodos que no son usados en cada esquema.	164
83	Esquemas propuestos por Hole y Zelt (1995) para complementar los esquemas de Vidale en el cálculo de tiempos de arribo en medios 3D (Figura 82).	166
84	Configuraciones usadas para el cálculo de tiempos de viaje 3D. (a) corresponde a los esquemas de Vidale, (b) operadores en 1D y (c) esquemas de Vidales en 2D.	167
85	Proceso para el cálculo de tiempos de viaje usando la metodología de Vidale (1990). La flecha roja indica la dirección que seguiría la expansión del cubo en una siguiente iteración, mientras que la sección horizontal son los tiempos calculados a partir de los tiempos de la cara superior. En este ejemplo se muestra un medio homogéneo con la fuente cercana a la superficie.	168
86	Ejemplo para el cálculo de la posición de la fuente artificial (centro de curvatura para un frente esférico) usando 7 nodos alrededor del punto de propagación previamente calculados. En caso de estar disponibles, se emplean los 17 nodos que rodean al punto que se está propagando para la estimación del centro de curvatura.	170
87	Contornos de tiempos de arribo a partir de la fuente F, donde se señalan puntos (F1 y F2) que deben ser marcados para considerarlos como fuentes en iteraciones posteriores. Los rayos muestran el cambio de dirección de los frentes de onda.	171
88	Esquema general para el trazado de rayos. Una vez calculados los tiempos de viaje en todo el dominio 3D (contornos 3D), trazamos la trayectoria de los frentes de onda a través de los rayos desde la fuente a los receptores.	172

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
89	Esquema de un frente de onda esférico atravesando un cubo de modelado directo, donde se muestra el rayo perpendicular que entra por un punto en la cara 2 (C2) y sale por un punto en la cara 3 (C3).	173
90	Bloque de modelado directo para el cálculo del gradiente.	174
91	Malla uniforme de modelado directo (en rojo) contenida en una malla más grande (en negro), correspondiente a la discretización del modelo inverso, que admite bloques de diferentes tamaños.	178
92	Modelo de una capa empleado para calcular los tiempos de primeros arribos y trayectorias de rayos sísmicos. Los puntos denotan la posición de los receptores y los triángulos invertidos la posición de las fuentes sísmicas.	179
93	Tiempos de viaje calculados para el modelo de dos capas de la Figura 92. Las secciones están ubicadas en las posiciones de las fuentes, esto es, en $x = 5$ km.	180
94	Error calculado en los receptores para cada una de las fuentes (F1, F2) a partir de la ecuación (114). Los receptores están numerados en ambas direcciones.	182
95	Modelo de velocidades de un cubo enterrado en un medio de menor velocidad.	183
96	Tiempos de viaje calculados para tres fuentes colocadas sobre una línea vertical a un costado del cubo, hacia el fondo del dominio. Las secciones corresponden a cada fuente en la posición $x=40$ m que atraviesa el cubo. Los rayos mostrados sobre las secciones indican el comportamiento de las ondas viajeras a lo largo de secciones paralelas.	184
97	Modelo de velocidades de dos cubos enterrados a una profundidad de 10 m en un medio homogéneo. Las fuentes están representadas por los triángulos invertidos mientras que los receptores se observan sobre la superficie con forma oval.	185
98	Tiempos de viaje para el modelo 3D descrito en la Figura 97. También mostramos contornos para una sección intermedia en la posición $x=40$ m y las trayectorias de los frentes de onda a través de los rayos.	186
99	Diagrama de flujo que muestra el proceso de inversión conjunta usando datos de campo potencial (m_p) y de sísmica (m_s). El índice k indica las iteraciones.	190

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
100	Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento de dos cubos colocados a 10 m de profundidad. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4096$.	194
101	Modelos comparativos de densidad y lentitud de inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad, con una losa en profundidad para el modelo de densidad. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición $x = 40$ m que atraviesa los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas. Se muestran, en la base de la figura, la anomalía gravimétrica calculada de los modelos de inversión conjunta, así como los rayos sísmicos para ambas fuentes (F1 y F2), sobrepuestos a los tiempos de viaje calculados.	195
102	La Figura (a) muestra el ajuste de los datos gravimétricos $-g$ - y sísmicos $-s$ - y (b) la convergencia del proceso iterativo. Estos valores fueron calculados usando las expresiones (77)-(80). La correlación entre los parámetros de densidad y lentitud obtenidos después de inversión separada es mostrada en (c) y después de inversión conjunta en (d), para el Experimento I. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región de los cubos, mientras que los puntos azules corresponden a los valores del medio circundante.	198
103	Contornos de los tiempos de arribo (sin ruido) observados en superficie para cada fuente F1 y F2. Comparativamente se muestran contornos de los tiempos de arribo calculados para cada experimento del modelo de lentitudes obtenido por inversión conjunta.	199

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
104	Modelos comparativos de densidad y lentitud de inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad, restringiendo los valores de la capa superficial de ambos modelos y en profundidad para el modelo de densidad. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición $x = 40$ m que atraviesa los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas. Se muestran, en la base de la figura, la anomalía gravimétrica calculada de los modelos de inversión conjunta así como los rayos del modelo de lentitud para ambas fuentes (F1 y F2), sobrepuestos a los tiempos de viaje calculados.	201
105	La Figura (a) muestra el ajuste de los datos gravimétricos $-g$ - y sísmicos $-s$ - y (b) la convergencia del proceso iterativo. Estos valores fueron calculados usando las expresiones (77)-(80). La correlación entre los parámetros de densidad y lentitud obtenidos después de inversión separada es mostrada en (c) y después de inversión conjunta en (d), para el Experimento II. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región de los cubos, mientras que los puntos azules corresponden a los valores del medio circundante.	203
106	Modelos comparativos de magnetización y lentitud obtenidos de la inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad, restringiendo sobre la capa superficial de ambos modelos y en profundidad para el modelo de magnetización. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición $x = 40$ m que atraviesa los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas. Se muestran, en la base de la figura, la anomalía magnética calculada de los modelos de inversión conjunta así como los rayos del modelo de lentitud para ambas fuentes (F1 y F2), sobrepuestos a los tiempos de viaje calculados.	205
107	La Figura (a) muestra el ajuste de los datos magnéticos $-m$ - y sísmicos $-s$ - y (b) la convergencia del proceso iterativo. Estos valores fueron calculados usando las expresiones (77)-(80). La correlación entre los parámetros de magnetización y lentitud obtenidos después de inversión separada es mostrada en (c) y después de inversión conjunta en (d), para el Experimento III. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región de los cubos, mientras que los puntos azules corresponden a los valores del medio circundante.	207

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
108	Secciones de los tiempos de arribo calculados y los rayos asociados en $x = 40$ m, para el modelo 3D de lentitudes obtenido en la 7ª iteración del proceso de inversión conjunta.	208
109	Las figuras a, d y g muestran contornos de las diferencias entre tiempos de arribo obtenidos numéricamente (t_c) con líneas negras y analíticamente (t_r) con líneas de colores para cada sección indicada. Las figuras b, e y h corresponden a las diferencias entre tiempos calculados numéricamente y analíticamente para cada sección. Las figuras c, f e i muestran contornos de los esquemas utilizados (1 a 7) en cada bloque con la metodología desarrollada (véase texto para referencia del número de esquema utilizado).	243

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I	Tamaño de las matrices y vectores involucrados en la solución (42) y (43), del problema de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados.	39
II	Factores de peso y parámetros de control establecidos en cada experimento de prueba de la formulación de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados.	79
III	Factores de peso y parámetros de control establecidos en cada experimento de prueba de la formulación de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados, para experimentos con datos tanto gravimétricos y sísmicos como magnéticos y sísmicos.	192
IV	Esquemas utilizados en el proceso de modelado de tiempos de primeros arribos.	241

Capítulo I

Introducción

I. 1. Inversión de datos geofísicos

El interior de la Tierra está compuesto por diferentes tipos de rocas que han sido sometidas a diversos procesos a través del tiempo, lo cual ha llevado a la formación de estructuras, algunas de éstas han desarrollado ambientes propicios para la concentración de minerales, agua, petróleo, gas y otros recursos que hemos hecho indispensables para la vida humana. En Geofísica, se han desarrollado múltiples técnicas que permiten determinar de manera cada vez más precisa la ubicación, geometría y el estado actual de dichos recursos, así como también nos permiten tener un mayor entendimiento de los procesos dinámicos que experimentan las diferentes estructuras en el subsuelo y con ello conocer las implicaciones y repercusiones que esto puede tener para el ser humano.

El primer paso para describir las características y los procesos que ocurren en el interior de la Tierra es el análisis e interpretación de los datos obtenidos mediante mediciones de campos en la superficie de la Tierra. Dichas mediciones nos dan información de las propiedades físicas de las rocas en el subsuelo como son: densidad, magnetización o susceptibilidad magnética, velocidad de ondas sísmicas, resistividad eléctrica, entre otras. El segundo paso consiste en encontrar metodologías y tecnologías que nos permitan determinar la magnitud, posición y distribución de dichas propiedades en el subsuelo, y que además satisfagan las observaciones en la superficie de la Tierra. En la literatura han surgido diferentes metodologías y técnicas que han ido mejorando con el tiempo. Para conocer cuál ha sido el proceso evolutivo de éstas, describiremos el concepto de *inversión de datos geofísicos* y cómo se ha desarrollado en diferentes aplicaciones.

Cuando conocemos la magnitud, posición y distribución de las propiedades físicas en el subsuelo así como las características físicas y estructurales de las fuentes de campos

físicos que son inducidos en la Tierra, podemos determinar de manera única su respuesta en superficie, a través de leyes físicas que relacionan los campos medidos en superficie con las propiedades de los materiales del subsuelo. La solución a este problema es conocida como *modelado directo de datos geofísicos* o *problema directo*.

El *problema inverso* consiste en encontrar una distribución, magnitud y posición de los parámetros físicos en el subsuelo que reproduzca los datos observados en la superficie con un nivel de error adecuado. Sin embargo, este problema no tiene solución única. Esto es, hay más de una distribución de las propiedades físicas en el subsuelo que reproducen las observaciones en la superficie, lo que ha llevado a proponer métodos y técnicas de inversión para reducir la ambigüedad de la solución. Un claro ejemplo de la *no unicidad* en problemas inversos para datos gravimétricos, lo podemos encontrar en Skeels (1947).

En muchos casos podemos asociar las observaciones con alguna propiedad que está definida por un cuerpo con características geométricas simples y, mediante prueba y error, es posible ajustar el modelo de la propiedad física a los datos observados (Sharma, 2004). Sin embargo, en la mayoría de los casos reales, la distribución de la propiedad física no puede ser descrita mediante cuerpos geométricos conocidos, por lo que recurrimos a la *teoría de inversión*, con la cual la compatibilidad entre las observaciones y la distribución de los parámetros físicos se lleva a cabo de forma automática. Además, las perforaciones que permiten observar el subsuelo directamente, son costosas y están limitadas a regiones localizadas.

La Figura 1 es una representación gráfica del concepto de problema directo e inverso en Geofísica. Se observa que la solución del problema directo (**d**) está dada de manera única, mientras que resolver el problema inverso involucra infinitas soluciones (Ej. **m**₁, **m**₂, **m**₃,...). En este caso se muestran las diferentes distribuciones de alguna propiedad física del subsuelo, sus magnitudes son representadas por tonalidades de verdes en el dominio de estudio.

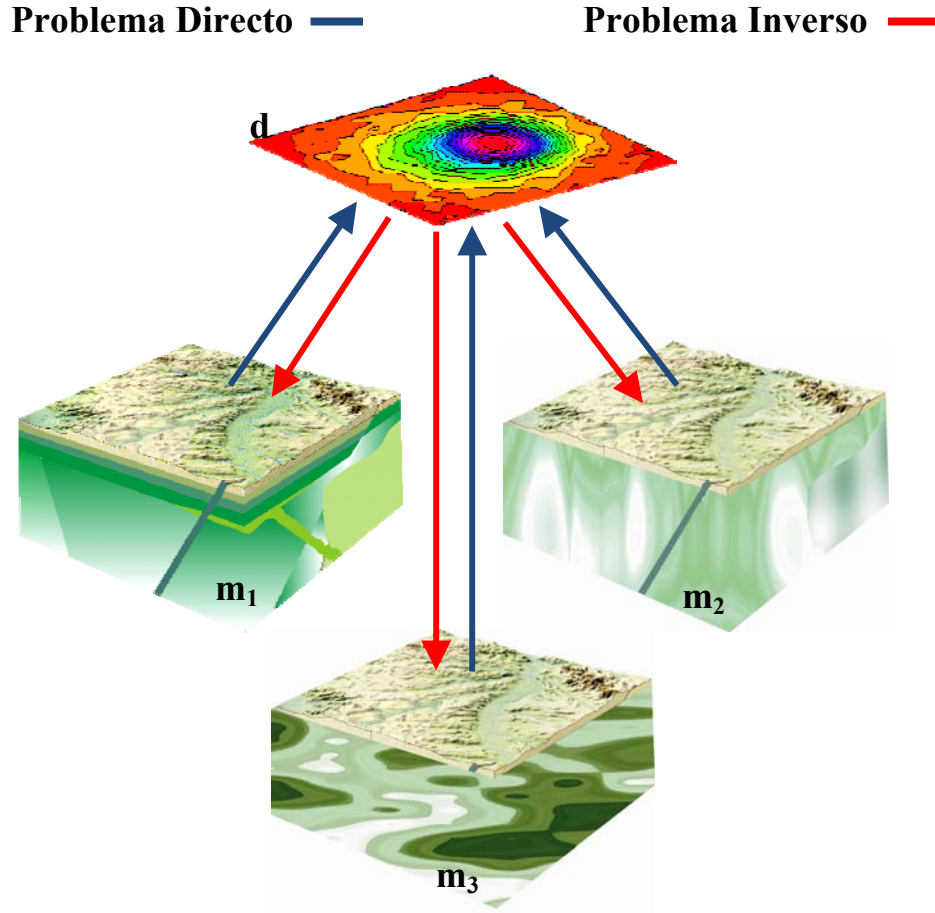


Figura 1. Los datos medidos en la superficie de la Tierra son representados por **d**. Los modelos **m₁**, **m₂** y **m₃** corresponden a diferentes distribuciones de alguna propiedad física del subsuelo, las cuales pueden reproducir los mismos datos en la superficie. Las tonalidades en verde ejemplifican diferentes valores de la propiedad.

Existen diferentes técnicas para resolver problemas inversos, basadas ya sea en criterios probabilísticos o algebraicos. Los criterios que minimizan una *norma p* (L_p) de los residuales son los más comunes en esta segunda categoría. Para el caso discreto, toman la forma:

$$\min \left\{ \|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{m}\|_p \right\}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad \text{donde} \quad \|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{m}\|_p = \left(\sum_i |d_i - A_{ij}m_j|^p \right)^{1/p},$$

donde **A** es una matriz que indica la sensibilidad de los datos observados (**d**) a los parámetros (**m**). Existen varias alternativas de obtener una medida de esta diferencia (o

ajuste de los datos) que produzca un modelo con un carácter deseable específico (ver: Farquharson y Oldenburg, 1998; Portniaguine y Zhdanov 1999; Farquharson, 2008).

En las técnicas de inversión algebraicas basadas en mínimos cuadrados, la compatibilidad entre las observaciones en superficie y los parámetros físicos del interior se obtiene, usando la norma L_2 ($\|\cdot\|_2$), con funciones tales como:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|C_d^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))\|_2^2 = [\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})]^T C_d^{-1} [\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})], \quad (1)$$

donde $\Phi(\mathbf{m})$ es el error cuadrático entre los datos observados ($\mathbf{d}$) y los valores predichos por un modelo determinado $\mathbf{f}(\mathbf{m})$. Para darle un marco probabilístico, es común incorporar la incertidumbre de los datos observados a través de la matriz de covarianza C_d . Sin embargo, la minimización de la ecuación (1), conocido como problema de mínimos cuadrados, requiere información adicional geofísica o no geofísica para restringir el espacio de soluciones y estabilizar la solución. Esta información es incorporada en el algoritmo de inversión (Glasko, 1988; Menke, 1989; Meju, 1994; Aster et al., 2005). La información geofísica adicional puede estar basada en información de pozos en el sitio de estudio (Oristaglio y Worthington, 1980) o bien en el conocimiento previo sobre valores de los parámetros físicos (Zeyen y Pous, 1991); mientras que la información no geofísica se basa en suposiciones acerca de la distribución de dichos parámetros, como es el caso de la suavidad o rugosidad de los modelos (deGroot-Hedlin y Constable, 1990; Constable et al. 1987). El peso que se le debe dar a este tipo de información para resolver la no unicidad en un problema inverso depende de cuán realista sea ésta. Por ejemplo, si suponemos que los valores de los parámetros físicos en el subsuelo varían de forma continua y suave, los criterios de suavidad de los modelos pueden ser incorporados de manera natural en un algoritmo de inversión. Por otra parte, si contamos con información del valor de una propiedad física en algún punto determinado o tenemos una idea a priori del valor que ésta pueda tener en alguna región del subsuelo, dicha información puede asignarse a la región correspondiente en el modelo. Estas hipótesis se pueden incorporar en la función de error cuadrático (función objetivo) expandiendo la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{m}) = & [\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})]^T \mathbf{C}_d^{-1} [\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m})] \\
& + \alpha^2 \mathbf{m}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{m} \\
& + [\mathbf{m} - \mathbf{m}^{\text{apr}}]^T \mathbf{C}_{\mathbf{m}^{\text{apr}}}^{-1} [\mathbf{m} - \mathbf{m}^{\text{apr}}],
\end{aligned} \tag{2}$$

donde $\mathbf{D}$ es el operador de suavidad que actúa sobre los parámetros $\mathbf{m}$ y α es el factor de peso que regula el nivel de suavidad requerido por el modelo. La información a priori es incorporada en $\mathbf{m}^{\text{apr}}$ la cual puede tener cierta variabilidad dada a través de una matriz de covarianza $\mathbf{C}_{\mathbf{m}^{\text{apr}}}$.

I. 1. 1. Inversión 3D

Muchos problemas inversos pueden ser resueltos con técnicas que utilizan modelos en 1D que consisten de variaciones espaciales de los parámetros en profundidad, típicamente conocidos como modelos estratificados o por capas (Oldenburg, 1974; Constable et al. 1987; Farquharson y Oldenburg, 1998; Monteiro Santos et al. 2006). En otros ambientes se requiere de modelos 2D que incluyen además variaciones laterales de los parámetros (deGroot-Hedlin y Constable, 1990; Last y Kubik, 1983; Farquharson, 2008). Aunque estas pueden ser aproximaciones aceptables, cada vez es más frecuente el encontrar situaciones en las que los parámetros del subsuelo tienen fuertes variaciones en las tres direcciones espaciales. Un ejemplo simple lo podemos observar en los modelos de la Figura 2, donde se muestra una sección x - z de un modelo de capas elipsoidales concéntricas (Figura 2a). Dicha estructura puede ser obtenida al invertir datos recolectados únicamente en una dirección transversal al modelo elipsoidal de la Figura 2c. Sin embargo, al considerar mediciones en la dirección longitudinal, es posible obtener un modelo elíptico como el observado en la Figura 2b. Resulta claro que la inversión de los datos en ambas direcciones perpendiculares permite delimitar un modelo tridimensional como el mostrado en la Figura 2c.

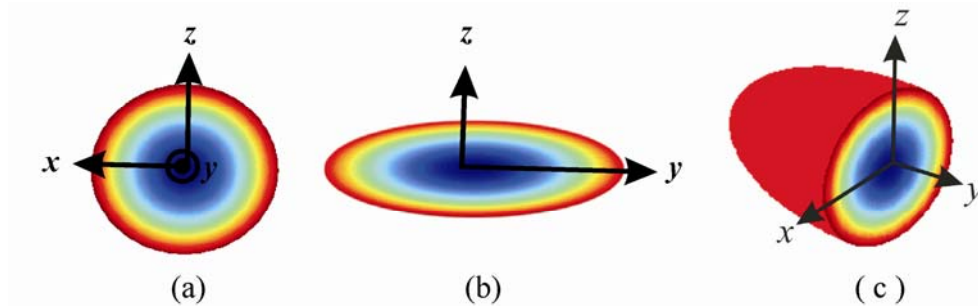


Figura 2. Secciones verticales de un modelo tridimensional de capas elipsoidales concéntricas. (a) muestra una sección de anillos circulares mientras que (b) corresponde a una sección perpendicular que describe anillos concéntricos elípticos, (c) muestra el interior del modelo tridimensional elipsoidal correspondiente a las secciones.

El ejemplo anterior muestra que la inversión 3D de datos geofísicos permite delimitar las dimensiones y estructura de los parámetros físicos en el subsuelo de forma más realista, lo cual, para fines económicos en explotación de recursos naturales, problemas del medio ambiente e investigaciones científicas, resulta significativo. Un ejemplo lo podemos encontrar en Farquharson (2008), donde se muestra la cantidad de información (estructura, valores del parámetro físico) que puede ser recuperada a partir de la inversión de, en este caso, datos gravimétricos de un modelo complejo de densidad 3D. Otros autores que han desarrollado diferentes metodologías de inversión 3D aplicadas a distintos tipos de datos son: Li y Oldenburg (1996, 1998) así como Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002), García-Abdeslem (2008), entre otros.

Algunos trabajos que involucran inversión 2D contienen efectos en los modelos, que no pueden ser completamente justificados. Estos, por lo tanto, se han considerado como artificios producto de la estructura 3D del subsuelo. Como ejemplo podemos citar a Meju y Sakkas (2007) quienes realizaron un estudio de inversión en la parte sur de Kenya usando modelos 2D con datos magnetotelúricos. En ellos se observan contrastes laterales excesivamente abruptos en los modelos de resistividad, que podrían estar asociados a estructuras 3D.

El reto más importante en inversión 3D es desarrollar algoritmos numéricos robustos que permitan representar el subsuelo de forma realista y con buena resolución espacial. La dificultad computacional asociada a estas restricciones es considerable ya que requiere de una gran cantidad de memoria computacional. En tal situación el uso de técnicas iterativas es la mejor estrategia (Ej. Last y Kubik, 1983; Farquharson y Oldenburg, 1998; Farquharson, 2008). Algunos autores que han desarrollado metodologías de inversión 3D sugieren el uso del método de *gradientes conjugados* para este fin (Ej. Porniaguine y Zhdanov, 2002).

I. 2. Integración de datos

La caracterización de los diferentes materiales geológicos a partir de un conjunto de datos geofísicos, depende fuertemente de la sensibilidad de los datos a los cambios laterales en las propiedades físicas así como en profundidad. Para reducir las incertidumbres y ambigüedades en la interpretación de las propiedades geofísicas de la Tierra, comúnmente se recurre a la *integración de datos geofísicos*. Esta metodología consiste en invertir diferentes conjuntos de datos independientemente para después integrarlas en un modelo único. Un ejemplo ilustrativo lo podemos encontrar en Colombo y De Stefano (2007), quienes llevaron a cabo la inversión 2D de tres tipos de datos geofísicos (gravimétricos, magnetotelúricos y sísmicos) en un modelo realista que consiste de un domo salino enterrado en capas de sedimentos. Los modelos construidos para cada técnica y los resultados de la inversión de cada uno de los datos asociados se muestran en la Figura 3.

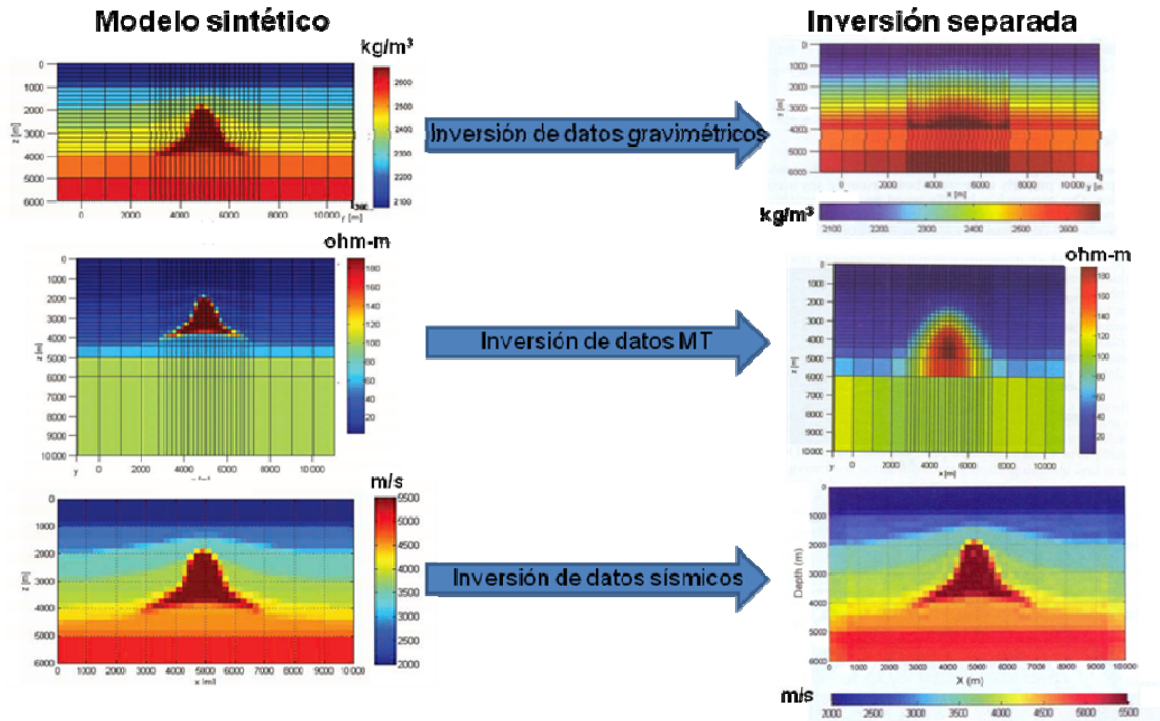


Figura 3. Resultados de la inversión (columna derecha) de cada uno de los datos producidos por los modelos sintéticos (columna izquierda). Figuras tomadas de Colombo y De Stefano (2007).

A partir de este experimento se puede observar que cada una de las técnicas proporciona información diferente y en algunos casos dicha información no es compatible con las características reales del modelo, por lo que la interpretación se vuelve subjetiva y depende en gran medida de la experiencia del intérprete para desarrollar un modelo geológico que sea consistente con varios conjuntos de datos.

I. 3. Inversión conjunta

Una manera de eliminar las incompatibilidades entre los modelos obtenidos por diferentes tipos de datos geofísicos de manera separada, consiste en llevar a cabo un modelado conjunto de la información. Dado que la obtención de un modelo geológico único a través de inversión separada de los datos involucra información subjetiva relacionada a aspectos geológicos, la mayoría de las veces cualitativos, es conveniente encontrar una forma más eficiente para reducir la ambigüedad y no unicidad en análisis

de datos geofísicos y su interpretación conjunta. Esta problemática lleva a conceptos como *inversión cooperativa, secuencial o conjunta*, esto es, definir cuantitativamente nuestro concepto de un modelo geológico integral e incorporarlo dentro de un mismo algoritmo de inversión al igual que los diferentes tipos de datos geofísicos.

Lines et al. (1988) propusieron una forma de invertir dos conjuntos de datos dentro de un mismo algoritmo, conocida como *inversión secuencial*. Esta se basa en la idea de que los contrastes de densidad y velocidad ocurren en fronteras comunes. De esta manera, la geometría y los valores de velocidad sísmica, obtenidos después de invertir datos sísmicos, son usados como información adicional en el algoritmo de inversión de datos gravimétricos. Una idea similar fue aplicada por Saunders et al. (2005), la cual usa información estructural obtenida de inversión de datos sísmicos para incorporarla en la inversión de datos de resistividad eléctrica. Así, la resolución que tienen algunas técnicas en alguna dirección espacial es mejorada por la influencia de los rasgos estructurales proporcionados por la otra técnica geofísica.

Haber y Oldenburg (1997) propusieron una nueva metodología que denominaron como *inversión conjunta*. Estos autores la definen como *la habilidad para invertir simultáneamente los conjuntos de datos combinados (d_1, d_2) y recuperar los modelos (m_1, m_2)* . Otro autores que han trabajado en esta metodología, como Linde et al. (2008), sugieren que *la inversión conjunta puede mejorar la resolución de cada modelo geofísico y proporcionar modelos consistentes entre sí y de esta manera facilitar la interpretación*.

Para llevar a cabo la inversión conjunta es necesario establecer una característica que sea común a los dos conjuntos de datos. Actualmente, esto puede ser llevado a cabo de las siguientes maneras:

Relaciones directas entre los parámetros.

Aquí, los campos se acoplan a través de relaciones empíricas y analíticas entre los parámetros. Esto es, se busca relacionar los parámetros (m_1, m_2) a través de una función g , si existe, tal que $m_2 = g(m_1)$ (Nielsen y Jacobsen, 2000; Afnimar et al. 2002; Musil et

al. 2003; Kowalsky et al. 2006; Colombo y De Stefano, 2007). Por ejemplo, la ley de Birch (1961(a), 1961(b)) que relaciona la densidad (ρ) con la velocidad de onda P (V), a través de la ley empírica

$$\rho = a + bV, \quad (3)$$

donde a y b son constantes por determinar. Otra relación empírica que puede utilizarse para acoplar esos campos es la ecuación de Gardner (Gardner et al., 1974)

$$\rho = kV^{1/4}, \quad (4)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. También, la relación empírica entre la resistividad eléctrica (ρ) y velocidad de onda P (V) (Colombo y De Stefano, 2007).

$$\log(\rho) = aV + b, \quad (5)$$

entre otras.

Relaciones estructurales entre los parámetros.

Otra característica que relaciona los dos conjuntos de datos es a través de criterios estructurales entre los parámetros. Estos criterios consideran los cambios espaciales de las propiedades físicas en la misma posición. El fundamento es suponer que existe una coincidencia espacial de fronteras y/o zonas de transición, la cual liga los dos modelos de las propiedades (Zhang y Morgan, 1997; Haber y Oldenburg, 1997; Gallardo y Meju, 2003, 2004; Tryggvason y Linde, 2006; Monteiro Santos et al. 2006; Pilkington, 2006; Gallardo, 2007; Linde et al. 2008).

Relaciones indirectas entre los parámetros.

Existen otras metodologías que utilizan formulaciones estadísticas para llevar a cabo inversión conjunta. Estas toman en cuenta información petrofísica y geológica para acoplar las propiedades físicas (Bosch, 1999; Bosch y McGaughey, 2001; Paasche y Tronicke, 2007). O bien, se utilizan formulaciones matemáticas que relacionan propiedades petrofísicas (porosidad, saturación, permeabilidad, etc.) con los parámetros.

Cada una de las relaciones expuestas tiene limitaciones. Sin embargo, también presentan ventajas que hacen que en la actualidad los tres tipos de metodologías sean

ampliamente aplicadas para el desarrollo de algoritmos de inversión conjunta. Para el caso de la inversión conjunta empleando *relaciones directas entre los parámetros* vemos que en muchos ambientes geológicos no existe una relación funcional explícita entre los parámetros o bien, si esta existe, no hay garantía de que sea válida en otros sitios. De tal manera que la inversión conjunta que es desarrollada tomando en cuenta relaciones directas entre los parámetros está limitada a casos específicos. Sin embargo, en las regiones donde se conoce una relación matemática entre dos parámetros físicos con certidumbre, es posible obtener modelos acoplados en estructura y magnitud. De manera similar, la aproximación basada en *relaciones estructurales* presenta la ventaja de que puede ser aplicada a cualquier tipo de datos geofísicos, aún cuando no exista una relación entre los parámetros. Además, este tipo de relaciones son aplicadas en cualquier ambiente geológico y conceptualmente representan una forma más natural y general de ligar las propiedades físicas. En cuanto a la inversión conjunta basada en *relaciones indirectas entre los parámetros* se tiene la ventaja de combinar información de diferentes disciplinas (geofísicas y geológicas) que mejoran la interpretación de las características del subsuelo. Sin embargo, se tiene una vez más el inconveniente de requerir información petrofísica del área de una forma precisa, lo cual puede resultar costoso y no siempre está disponible.

Esquemáticamente el proceso de inversión conjunta se describe en la Figura 4, donde se observa que los datos (d_1 , d_2) son incorporados dentro de un algoritmo de inversión conjunta, así como la relación entre los parámetros (representada por τ) e información *a priori* disponible tanto geológica como geofísica (representada por $(m_1^{\text{apr}}, m_2^{\text{apr}})$). Esta información proporciona modelos de los parámetros (m_1 , m_2) que definen mejor la distribución de las diferentes estructuras en el subsuelo.

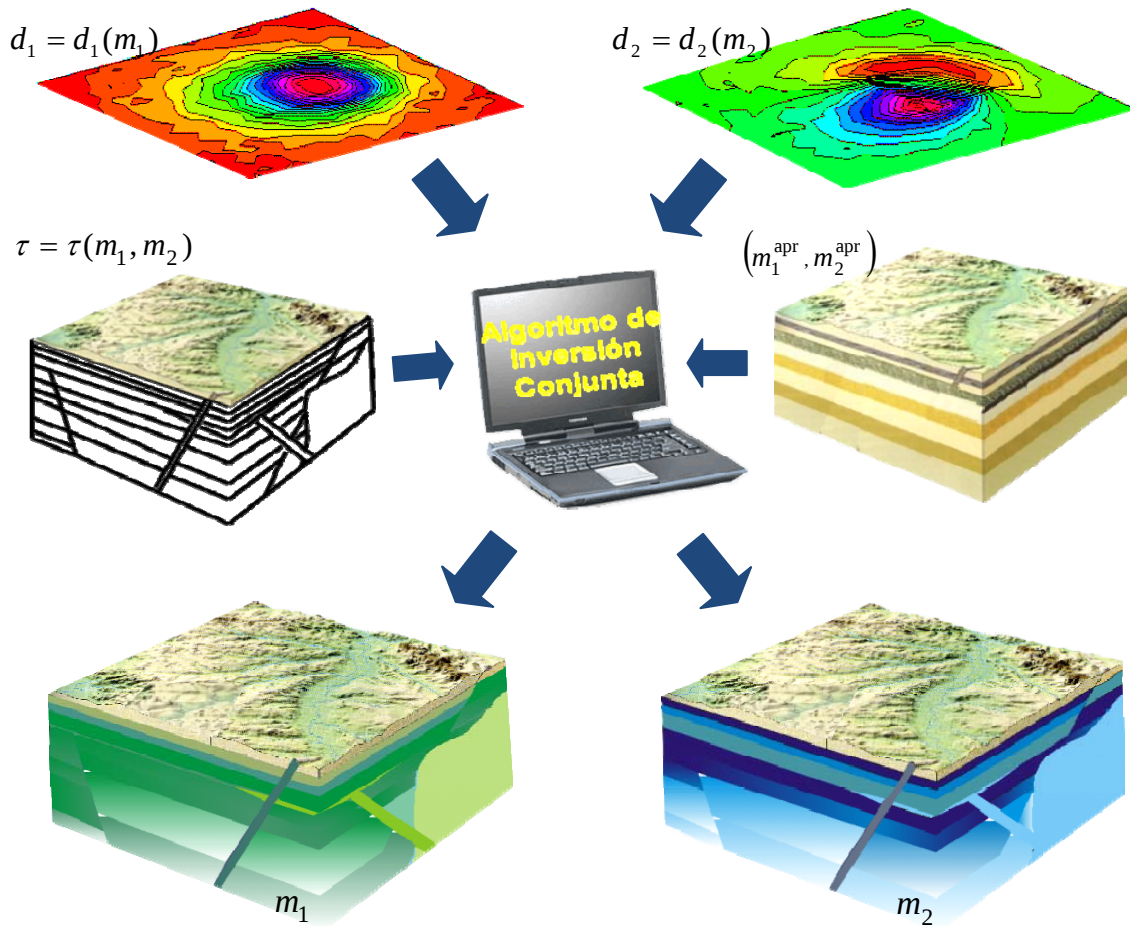


Figura 4. Representación esquemática del proceso de inversión conjunta. Los datos (d_1 , d_2) son incorporados dentro de un algoritmo de inversión conjunta, así como la relación entre los parámetros (representada por τ) e información a priori geológica o geofísica. Los modelos resultantes son representados por m_1 y m_2 .

En diferentes trabajos donde se han desarrollado metodologías de inversión conjunta como los mencionados anteriormente, se presentan ventajas sobre la inversión de datos individuales. (i) Mejoran la falta de resolución en cualquier dirección espacial, inherente en algunas técnicas geofísicas. (ii) Las estructuras de los modelos quedan mejor delimitadas y localizadas en su posición original. (iii) En la mayoría de los casos, la magnitud de los valores de los modelos es más cercana al valor real.

I. 4. Inversión conjunta basada en relaciones estructurales

En la literatura han surgido diferentes metodologías para invertir simultáneamente dos conjuntos de datos utilizando criterios que se enfocan en la relación entre las características estructurales de los parámetros. Entre ellos debemos mencionar a Zhang y Morgan (1997) quienes realizan la inversión conjunta basados en la idea de que: *si encontramos la posición de un contraste en la estructura en un modelo geofísico, es probable que otro modelo geofísico también tenga determinado contraste en la misma posición*. Su metodología se basa en la minimización simultánea de los funcionales

$$\begin{aligned}\Phi_1(m_1) &= \|d_1 - G_1(m_1)\|^2 + \tau \|R(m_1) - F(R(m_2))\|^2 \\ \Phi_2(m_2) &= \|d_2 - G_2(m_2)\|^2 + \tau \|F(R(m_1)) - R(m_2)\|^2,\end{aligned}\tag{6}$$

donde d son los datos observados, $G(m)$ los datos calculados, τ un parámetro de regularización, R es un operador de regularización (en este caso el operador Laplaciano), mientras que $F(R(m))$ controla la estructura mediante la curvatura del modelo normalizada.

Otro criterio para ligar dos conjuntos de datos y desarrollar una metodología de inversión conjunta basada en la *coincidencia espacial entre las fronteras o zonas de transición* de las propiedades físicas, es el propuesto por Haber y Oldenburg (1997). En este caso, la medida de la diferencia en la estructura entre los modelos (ϕ_c) está dada por la norma

$$\phi_c = \int_D (S[m_1] - S[m_2])^2 dV,\tag{7}$$

en donde S es el operador estructura y corresponde con el funcional

$$S[m] = \begin{cases} 0 & |\nabla^2 m| < \tau_1 \\ P_5(|\nabla^2 m|) & \tau_1 < |\nabla^2 m| < \tau_2 \\ 1 & \tau_2 < |\nabla^2 m|, \end{cases}\tag{8}$$

donde P_5 es un polinomio de grado cinco con coeficientes escogidos para asegurar que S es continuo y dos veces diferenciable. En este caso el operador estructura se enfoca en la magnitud de los cambios en los parámetros a través de la magnitud del Laplaciano.

Como es mencionado por Bedrosian (2006), una limitación de este método es que τ_1 y τ_2 deben ser escogidos cuidadosamente, ya que es difícil hacer una estimación a prior de la magnitud de los cambios. Haber y Oldenburg (1997) demostraron que los modelos de lentitud y densidad obtenidos con inversión conjunta, son sustancialmente mejores que aquellos obtenidos mediante inversiones individuales, ilustrando que los datos gravimétricos proporcionan información complementaria en la inversión de datos sísmicos y viceversa.

Una metodología inspirada en estas ideas y que está siendo recientemente muy usada, es la propuesta por Gallardo y Meju (2003, 2004), la cual involucra restricciones estructurales entre los parámetros para llevar a cabo la inversión conjunta. En esta metodología los parámetros (m_1 , m_2) son acoplados mediante un operador de similitud estructural $\vec{t}$, el cual está dado por

$$\vec{t} = \nabla m_1 \times \nabla m_2 \quad (9)$$

conocido como *gradientes cruzados*. En regiones del dominio donde $\vec{t} = \vec{0}$ los modelos m_1 y m_2 son estructuralmente similares, dado el completo paralelismo de los vectores gradientes o bien la nulidad de uno de ellos.

La principal diferencia entre estas metodologías de inversión conjunta basadas en criterios estructurales, consiste en que tanto Zhang y Morgan (1997) como Haber y Oldenburg (1997) usan la magnitud de los cambios en las propiedades físicas como indicadores de superficies que deben coincidir exactamente, sin tomar en cuenta la dirección de dichos cambios. Gallardo y Meju (2003, 2004), en contraste, usan la dirección de los cambios en las propiedades físicas como indicadores de la estructura sin importar la magnitud de éstos y sin suponer la existencia de superficies de contacto.

El concepto de gradientes cruzados, aunque proporciona información necesaria para llevar a cabo la inversión conjunta, no es suficiente para resolver el problema de no unicidad e inestabilidad inherente en los problemas de inversión geofísica, por lo que la función objetivo involucra una medida de la suavidad de los modelos así como

información a priori disponible, quedando el problema de Minimizar:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = & [\mathbf{d}_1 - \mathbf{f}_1(\mathbf{m}_1)]^T \mathbf{C}_{\mathbf{d}_1}^{-1} [\mathbf{d}_1 - \mathbf{f}_1(\mathbf{m}_1)] \\
 & + [\mathbf{d}_2 - \mathbf{f}_2(\mathbf{m}_2)]^T \mathbf{C}_{\mathbf{d}_2}^{-1} [\mathbf{d}_2 - \mathbf{f}_2(\mathbf{m}_2)] \\
 & + \alpha_1^2 \mathbf{m}_1^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{m}_1 + \alpha_2^2 \mathbf{m}_2^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{m}_2 \\
 & + [\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1^{\text{apr}}]^T \mathbf{C}_{\mathbf{m}_1^{\text{apr}}}^{-1} [\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1^{\text{apr}}] \\
 & + [\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_2^{\text{apr}}]^T \mathbf{C}_{\mathbf{m}_2^{\text{apr}}}^{-1} [\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_2^{\text{apr}}]
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \mathbf{t}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \mathbf{0}, \tag{11}$$

donde $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son los datos observados para dos conjuntos de datos geofísicos, ponderados por su matriz de covarianza asociada $\mathbf{C}_{\mathbf{d}_1}$ y $\mathbf{C}_{\mathbf{d}_2}$. Mientras que $\mathbf{f}_1(\mathbf{m}_1)$ y $\mathbf{f}_2(\mathbf{m}_2)$ son los datos calculados correspondientes. Los términos restantes son como en la ecuación (2) para cada uno de los datos. $\mathbf{t}$ es el vector de gradientes cruzados.

Un ejemplo claro donde se satisface la restricción de gradientes cruzados (11) se puede observar en los modelos sintéticos de la Figura 3, para los cuales los cambios en las propiedades físicas (densidad, resistividad y velocidad de la onda P) se presentan en la misma posición o bien, la propiedad tiene una distribución homogénea. En contraste, un caso donde esta restricción no se cumple se puede observar en una corteza oceánica donde la magnetización cambia debido a los cambios de polaridad del campo magnético, mientras que la densidad o la velocidad sísmica de las rocas podrían permanecer sin cambios o tener un comportamiento diferente al de magnetización.

I. 5. Inversión conjunta usando gradientes cruzados

Como hemos mencionado, la técnica de inversión conjunta usando restricciones de gradientes cruzados fue desarrollada por Gallardo y Meju (2003, 2004) y originalmente aplicada a datos de resistividad y sísmica en modelos 2D. Esta técnica mostró resultados exitosos en la obtención de modelos con mayor similitud estructural. La información cuantitativa (valores de los parámetros) y cualitativa (distribución de las

estructuras) de los modelos, obtenidos mediante inversión de datos individuales, se fusiona, resaltando sólo aquellas características estructurales comunes que están en concordancia con las observaciones en superficie.

La metodología de inversión conjunta que involucra una liga estructural entre dos propiedades físicas (Ec. 11), presenta las siguientes ventajas:

1. No requiere de la existencia de alguna relación directa entre los parámetros ni entre sus propiedades petrofísicas, por lo que podemos invertir simultáneamente dos conjuntos de datos cualesquiera.
2. La medición de similitud estructural a través de gradientes cruzados es válida en la mayoría de los ambientes geológicos y, por lo tanto, la inversión conjunta de datos se puede realizar en cualquier sitio de estudio.
3. La restricción de gradientes cruzados es válida para modelos donde una propiedad cambia y la otra no. Por lo tanto es una técnica robusta en su aplicación.
4. Los gradientes cruzados no prestan atención a las magnitudes de los cambios, las cuales son difíciles de estimar a priori.

El siguiente paso en el desarrollo del método de gradientes cruzados es extenderlo a medios tridimensionales. El objetivo, por supuesto, es caracterizar la geometría del subsuelo de forma más realista y con mayor detalle, a través de modelos 3D de propiedades físicas con distribuciones estructurales similares, al mismo tiempo que resolver el problema de los modelos bidimensionales que muestran incompatibilidades con las características geológicas o geofísicas debido a efectos 3D. Un ejemplo lo podemos encontrar en Infante et al. (2008) quienes presentan un estudio usando la metodología propuesta por Gallardo y Meju (2003, 2004) para datos 2D de resistividad de corriente directa y datos sísmicos. Es importante notar que los modelos obtenidos por estos autores muestran incompatibilidades que son justificadas por los datos. Sin embargo, los modelos no son consistentes uno con otro en algunas zonas, por lo que se dificulta su interpretación. Este hecho podría ser atribuido a un efecto 3D de uno de los modelos, por lo que este experimento muestra evidencia de la necesidad de llevar a cabo

inversión conjunta 3D usando gradientes cruzados y de esta manera resolver las incompatibilidades.

Entre los trabajos que se han desarrollado sobre inversión conjunta 3D usando gradientes cruzados se encuentra Tryggvason y Linde (2006), quienes, a diferencia de la formulación propuesta por Gallardo y Meju (2003, 2004; Ecs. 10 y 11), incorporaron la restricción de gradientes cruzados en la función objetivo a minimizar. El proceso de inversión fue aplicado a datos sísmicos de ondas P y S. Los resultados obtenidos con esta metodología, como lo argumentan estos autores, mostraron modelos que representan la Tierra de manera más objetiva que con experimentos comparativos de inversión separada e inversión conjunta usando información a priori, lo cual es crucial para el análisis cuantitativo e inferencia de propiedades físicas y procesos en el interior de la Tierra. Resultados similares fueron obtenidos por Linde et al. (2006), quienes aplicaron la metodología para invertir datos de resistividad eléctrica y tiempos de viaje de radar de penetración (ERT y GPR por sus siglas en inglés, respectivamente). En este trabajo fueron analizados los casos de aplicación de la metodología de inversión conjunta cuando es minimizado el funcional de gradientes cruzados o bien, es restringido a ser idénticamente cero. El argumento de estos autores es que dado que los datos geofísicos sólo proporcionan información a gran escala de las unidades litológicas, es posible obtener resultados realistas usando el funcional de gradientes cruzados como una restricción. Sin embargo, en casos donde los cambios de unidades litológicas se pueden considerar de pequeña escala, de forma continua, el funcional de gradientes cruzados puede ser minimizado, considerando esto como una restricción más suave. Linde et al. (2008), aplicaron nuevamente la metodología de inversión a datos GPR y tiempos de viaje sísmicos, mostrando, una vez más, que la metodología es eficiente en determinar la geometría de las estructuras.

I. 6. Motivación, hipótesis y objetivos de la tesis

Como se ha discutido en aplicaciones de la formulación de gradientes cruzados, la similitud estructural debería ser válida exclusivamente en casos 3D, dada la información que proporcionan las tres componentes del vector de gradientes cruzados. Sin embargo,

los resultados de inversión conjunta en modelos bidimensionales han sido capaces de reproducir modelos 2D estructuralmente idénticos. Es preocupante pensar que las componentes de cualquiera de los datos que son debidas a estos efectos tridimensionales son absorbidas y distribuidas por todos los modelos estudiados. Resulta necesario entonces determinar: ¿Cuál es este efecto propagado a los modelos por estas simplificaciones y cuán importante es aplicar una congruencia estructural tridimensional en los modelos y, dado el caso, cuál es la relación costo/beneficio de hacer una inversión conjunta 2D en lugar de 3D?

Si la tridimensionalidad del vector de gradientes cruzados no es un factor determinante para la similitud estructural de modelos 3D entonces, ¿cuál de sus características es realmente esencial para obtener modelos 3D compatibles? Esto es importante ya que marca la diferencia entre producir un algoritmo lo suficientemente exacto y con una mayor simplicidad en cuanto a requerimientos de cómputo y tiempo de proceso en problemas de gran escala, estrategias fundamentales para resolver problemas de inversión 3D con el detalle requerido por muchas aplicaciones geofísicas.

En muchas aplicaciones en problemas tridimensionales, es casi un hecho que los primeros datos disponibles corresponden a datos potenciales como mediciones gravimétricas y magnéticas. Sin embargo, ambas metodologías son generalmente aceptadas como limitadas en cuanto a la capacidad de resolver características detalladas del subsuelo, sobre todo en escalas mayores de profundidad. Además de la limitada resolución en la componente vertical de las estructuras. ¿Cuál sería entonces la ventaja de aplicar esta técnica de inversión conjunta usando exclusivamente este tipo de datos? ¿La congruencia estructural realmente sería un factor relevante para reducir los problemas de ambigüedad en la interpretación? Otro tipo de datos que son obtenidos de manera regular en problemas 3D corresponden a datos sísmicos tanto de terremotos para estudios corticales como de reflexión y refracción sísmica para prospección a detalle en objetivos someros e intracuenca, como yacimientos minerales y petroleros. Sabiendo que los datos sísmicos en general tienen una mejor capacidad de resolución del subsuelo, la estructura compartida por estos ¿será de mayor utilidad a los datos potenciales? ¿Igualmente podrán

los datos potenciales mejorar en algún aspecto sustantivo modelos sísmicos tridimensionales?

Tomando en cuenta experiencias de estudios previos se esperaría que la tridimensionalidad del vector de gradientes cruzados sea un factor importante para obtener modelos del subsuelo 3D detallados y que la calidad en el detalle deberá estar en cualquier caso restringida por la capacidad de resolución de los datos. Además, el vector de gradientes cruzados 3D será suficiente para combinar información relevante en modelos con poca resolución, como son modelos del subsuelo obtenidos a partir de datos potenciales, mejorando aún más sus características al incorporar modelos a partir de datos sísmicos.

Para dar respuesta a estas preguntas y demostrar nuestras hipótesis, en la presente tesis nos hemos planteado los siguientes objetivos.

- (i) Extender la metodología de gradientes cruzados, propuesta por Gallardo y Meju (2003, 2004), al caso 3D para dos conjuntos de datos geofísicos.
- (ii) Desarrollar la formulación matemática, así como un algoritmo de inversión conjunta 3D basado en dos metodologías geofísicas. Para esto, requerimos desarrollar e implementar las formulaciones de modelado directo 3D para cada técnica geofísica usada.
- (iii) Analizar las ventajas de aplicar la metodología de inversión conjunta 3D combinando datos gravimétricos, magnéticos y de sísmica de refracción en experimentos sintéticos y de campo.

I. 6. 1. Contenido de la tesis

En el **Capítulo II** de esta tesis se estudia la información aportada por cada una de las componentes del vector de gradientes cruzados en modelos de geometría sencilla. A partir del desarrollo de una metodología de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados, analizamos la información aportada por los diferentes elementos involucrados en la formulación matemática que proporcionan características estructurales similares en modelos heterogéneos 3D.

El **Capítulo III** establece las formulaciones matemáticas de modelado directo 3D de datos gravimétricos y magnéticos a través del estudio de conceptos físicos involucrados, con las cuales conoceremos los campos observados o producidos en la superficie de la Tierra a partir de modelos conocidos del subsuelo.

En el **Capítulo IV** se lleva a cabo la inversión conjunta 3D usando gradientes cruzados de datos gravimétricos y magnéticos en experimentos sintéticos y de campo. También se analizan las ventajas y desventajas de la técnica en la determinación de estructuras comunes que representen modelos realistas del subsuelo. Asimismo observamos la influencia de la resolución de los datos para este fin.

Similarmente, para llevar a cabo inversión 3D con datos de sísmica de refracción, en el **Capítulo V** describimos las teorías físicas que intervienen en la propagación de ondas sísmicas por el interior de la Tierra. Con base en éstas desarrollamos una metodología para el modelado directo de datos sísmicos en medios 3D y establecemos los alcances de esta técnica para proporcionar información más detallada de estructuras complejas.

En el **Capítulo VI** se hace un análisis de la estructura del subsuelo que se puede recuperar combinando datos de sísmica de refracción y datos potenciales. Hay que notar que las conclusiones de este capítulo se basan en experimentos con datos sintéticos.

Finalmente, en el **Capítulo VII** se presentan las conclusiones generales del trabajo así como perspectivas para trabajo futuro.

Capítulo II.

Inversión conjunta usando gradientes cruzados

Como hemos puntualizado en el capítulo anterior, en este trabajo usaremos la técnica de gradientes cruzados para establecer una formulación de inversión conjunta 3D. En la siguiente sección describimos esta liga estructural para el caso 3D y la aplicamos a casos sintéticos de dos superficies geométricas conocidas, con el fin de vislumbrar los alcances de la técnica en estructuras complejas. En las secciones subsecuentes desarrollamos las ecuaciones normales requeridas para el proceso de inversión conjunta basado en esta liga estructural y analizamos cada uno de los términos involucrados. Describimos también la implementación numérica utilizada y finalmente aplicamos la técnica a ejemplos analíticos que no incluyen datos geofísicos.

II. 1. El concepto de gradientes cruzados en 3D

II. 1. 1. Análisis de la función de gradientes cruzados en dos modelos conocidos

La función de gradientes cruzados, definida por Gallardo y Meju (2003, 2004), tiene la forma

$$\begin{aligned}\vec{t}(x, y, z) &= \nabla m_1(x, y, z) \times \nabla m_2(x, y, z) \\ &= (t_x(x, y, z), t_y(x, y, z), t_z(x, y, z))\end{aligned}\tag{12}$$

para el caso 3D, la cual claramente consiste de un vector con tres componentes dadas por

$$\begin{aligned}
t_x &= \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial z} - \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial y}, \\
t_y &= \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial x} - \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial z}, \\
t_z &= \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial y} - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial x}
\end{aligned} \tag{13}$$

donde las funciones escalares $m_1, m_2 : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ corresponden a propiedades físicas del subsuelo que cambian en las tres direcciones x , y y z . Luego, $\vec{t}$ es un campo vectorial $\vec{t} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cuantifica el paralelismo entre los gradientes de las funciones m_1 y m_2 . La Figura 5 ilustra algunos de los vectores que resultan de los gradientes ∇m_1 , ∇m_2 , en diferentes posiciones de los modelos tridimensionales seleccionados, para los cuales se pueden observar las regiones de mayor colinealidad entre los gradientes, representadas por vectores $\vec{t}$ de magnitud cercana o igual a 0, lo cual está relacionado con la *similitud estructural* entre los modelos.

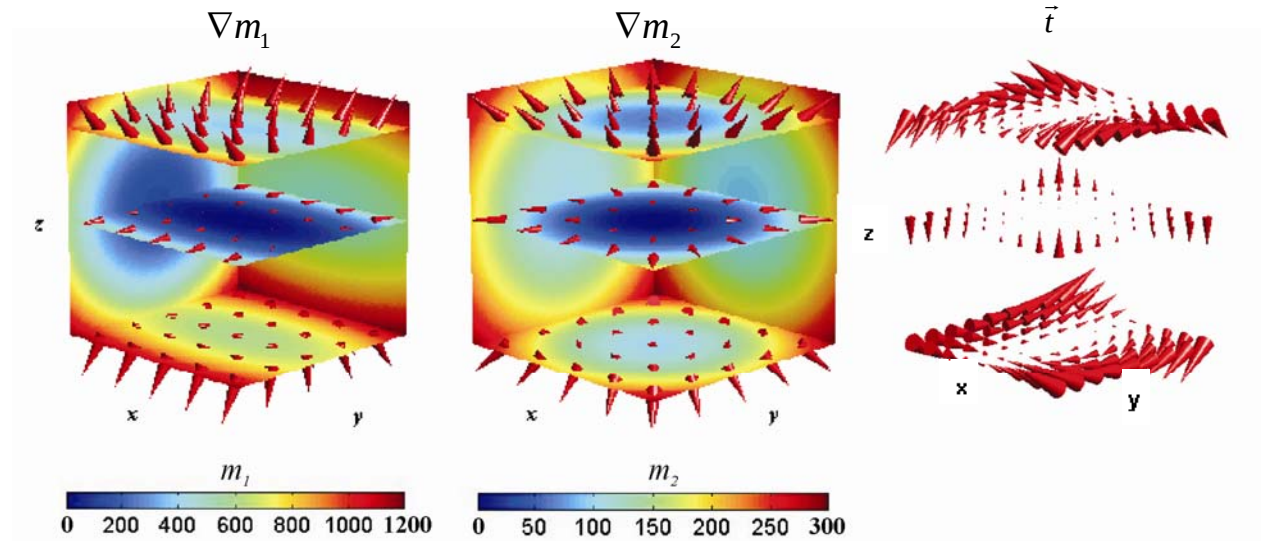


Figura 5. Gradientes $(\nabla m_1, \nabla m_2)$ en diferentes posiciones de dos estructuras geométricas tridimensionales y el vector de gradientes cruzados $(\vec{t})$ asociado.

La función de gradientes cruzados definida en las ecuaciones (12) y (13) observa cambios en las propiedades físicas a través del gradiente e indica la dirección perpendicular a esos cambios. Para conocer la información proporcionada por cada una de las componentes del vector de gradientes cruzados y cómo son combinadas para cuantificar la similitud estructural en modelos 3D, calculamos sus valores de manera analítica y numérica en dos pares de modelos de geometría relativamente simple.

II. 1. 2. La función de gradientes cruzados aplicada a un caso analítico de un volumen elipsoidal y un volumen esférico

En esta sección analizamos el vector de gradientes cruzados aplicado a dos modelos heterogéneos ilustrativos: un elipsoide y una esfera mostrados en la Figura 6a y 6b, respectivamente. Podemos observar que mientras la sección y - z de ambos modelos sugiere estructuras similares 2D, las secciones ortogonales correspondientes son diferentes, mostrando la tridimensionalidad de los modelos.

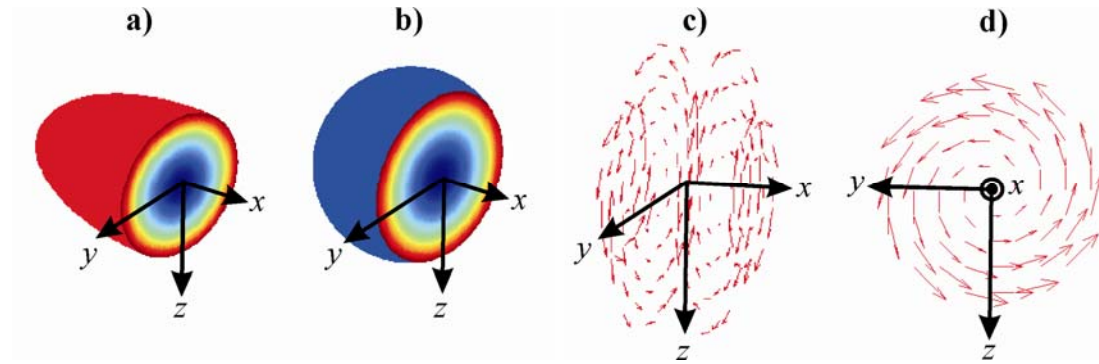


Figura 6. Modelos elipsoidal (a) y esférico (b) que muestran una sección interior. Estos son comparados para determinar su similitud estructural 3D. (c) vista en perspectiva de cuatro cortes verticales seleccionados que muestran los vectores de gradientes cruzados obtenidos para estos modelos. Note el comportamiento circular y - z del vector de gradientes cruzados (d).

Los modelos construidos tienen expresiones matemáticas $m_1 : A_1 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(x, y, z) \in A_1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 0.81$ para el caso de la esfera y $m_2 : A_2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para

todo $(x, y, z) \in A_2$, $4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ para el elipsoide. El vector de gradientes cruzados para las funciones asociadas $m_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $m_2(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ está dado por

$$\mathbf{t}(x, y, z) = (\nabla m_1 \times \nabla m_2)(x, y, z) = 12x(0, z, -y) \quad (14)$$

para $(x, y, z) \in A_1 \cap A_2$. De aquí se tiene que si $x = 0 \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{0}$ lo que indica, siguiendo la filosofía de gradientes cruzados, que en el plano y - z los modelos m_1, m_2 son estructuralmente similares, donde la similitud estructural es dada por vectores paralelos en el plano. De otra forma, si $x \neq 0$, la similitud estructural ocurre únicamente a lo largo del eje x , que corresponde al eje de rotación de ambos modelos. En este ejemplo, t_x se anula en todo el dominio mientras que t_y y t_z indican las diferencias geométricas tridimensionales de los modelos 3D. Las Figuras 6c y 6d reflejan estas diferencias y proporcionan información del origen de rotación de los modelos. El vector de gradientes cruzados (14) (Figuras 6c y 6d) muestra que la componente radial es cero mientras que la componente tangencial y - z incrementa su magnitud conforme se aleja del eje de rotación x , con valor $\|\mathbf{t}\| = 12rx$ donde r es el radio. De tal manera que para $|x| \leq \varepsilon$, r será un valor correspondiente a la esfera, mientras que si $|x| > \varepsilon$, r será un valor correspondiente a la elipse y $\varepsilon = 0.2517$.

Es claro que, en casos reales, la mayoría de los modelos de los parámetros físicos del subsuelo no presentan estructuras geométricas conocidas, como en el caso anterior y las componentes de gradientes cruzados no tienen un comportamiento predecible, sin embargo, nos da idea de la complejidad de su comportamiento en modelos realistas heterogéneos 3D.

II. 1. 3. La función de gradientes cruzados aplicada a un caso numérico: modelo de geometría cilíndrica y cúbica.

El siguiente ejemplo (Figuras 7) muestra el modelo de un cilindro y un cubo, discretizados en bloques cúbicos homogéneos a una resolución baja. El modelo m_1 (Figura 7a) muestra la discretización de cilindros anidados alargados en la dirección vertical con valores decrecientes desde el interior hacia el exterior, tomando como máximo el valor de 3 en el cilindro interior y el mínimo de 0 en el cilindro envolvente. El modelo m_2 (Figura 7b) consiste

de una serie de cubos anidados con valores semejantes al cilindro, el máximo valor de 3 se concentra en el centro y disminuye hasta 0 en las fronteras exteriores del dominio. Se puede notar que en este ejemplo no hay secciones comunes entre los modelos a lo largo de ningún corte paralelo a los ejes coordenados, lo que nos indica modelos 3D más heterogéneos con similitud estructural menos predecible. Sin embargo, dada la simetría de los modelos es posible establecer el comportamiento del vector de gradientes cruzados.

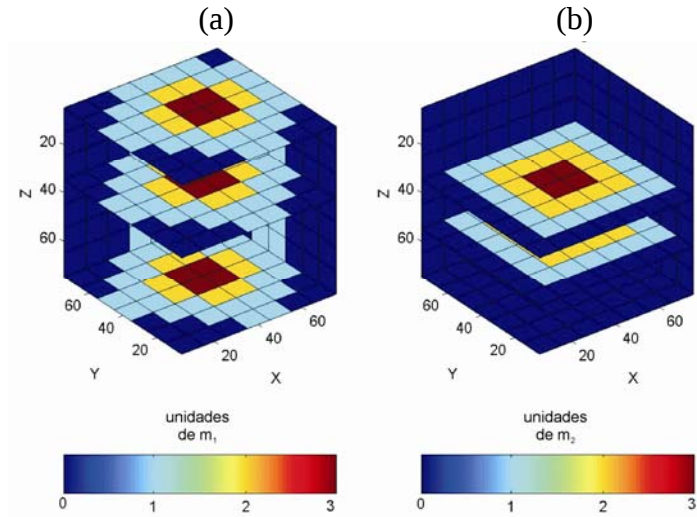


Figura 7. Modelo de cilindros anidados (a) con valores mayores en el centro y menores conforme aumenta el radio. En (b) se muestran cubos anidados con valores decrecientes hacia los extremos del dominio.

Si graficamos el modelo m_1 y sus vectores ∇m_1 en algunas posiciones del dominio (Figura 8a), observamos que dichos vectores son bidimensionales con componentes $\nabla m_1 = (a, b, 0)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Esta forma se debe a que el modelo no presenta cambios en sus valores a lo largo del eje z . El modelo de cubos (Figura 8b) sí presenta vectores gradientes con las tres componentes diferentes de cero, excepto en las fronteras del dominio donde el gradiente es unidireccional. La forma del vector es $\nabla m_2 = (c, d, e)$ donde $c, d, e \in \mathbb{R}$.

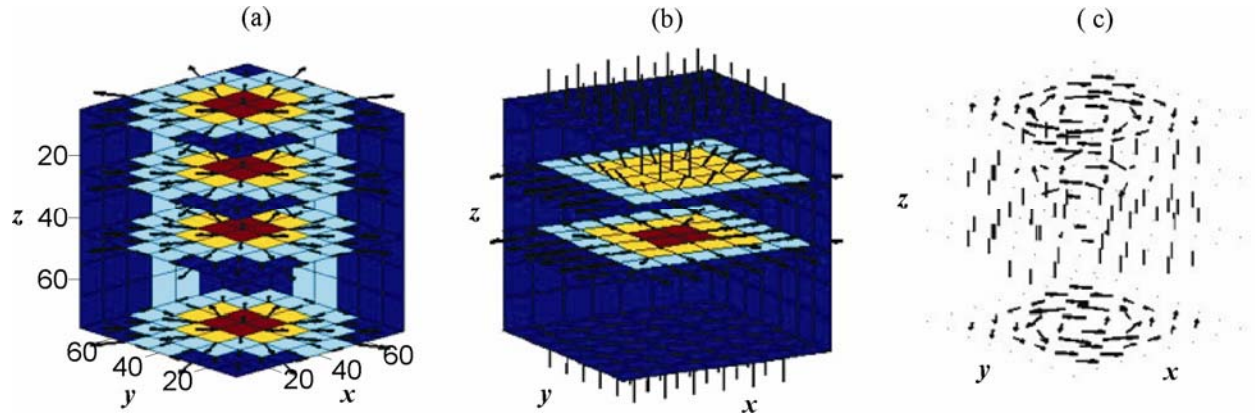


Figura 8. (a) muestra secciones horizontales del modelo m_1 y los vectores ∇m_1 en diferentes posiciones, los cuales tienen componentes verticales iguales a 0. (b) muestra secciones horizontales de m_2 y los vectores gradientes ∇m_2 que tienen componentes en las tres direcciones. (c) corresponde a secciones horizontales del vector $\mathbf{t}$ de gradientes cruzados.

Efectuando las operaciones entre estas dos familias de vectores se tiene que el vector $\mathbf{t}$ está dado por $\mathbf{t} = (be, -ae, ad - bc)$. De esta manera en los puntos donde $e=0$ se tienen vectores en la dirección vertical de la forma $\mathbf{t} = (0, 0, ad - bc)$ como se muestra en la Figura 8c, donde se observan vectores en la dirección perpendicular al plano x-y, entre los planos $z = 20$ y $z = 60$. De aquí, los valores de $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ se alcanzan en regiones donde $ad - bc = 0$, los vectores representados por puntos que aparecen en la Figura 8c corresponden a estos valores, los cuales se alcanzan a apreciar a lo largo de los planos horizontales en las fronteras del dominio y algunos puntos interiores. También vemos que no hay componente vertical en los planos horizontales de las fronteras superior e inferior ya que en este caso $\mathbf{t}$ toma la forma $\mathbf{t} = (be, -ae, 0)$. Podemos ver también que en este caso encontramos diferentes posiciones en los modelos donde sí se alcanza la similitud estructural, mientras que en el caso de los modelos esférico y elipsoidal, logramos valores de $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ en posiciones bien definidas (sobre una sección y a lo largo de un eje). A lo largo del eje z, en la parte central, se tiene un comportamiento bidimensional del vector de gradientes cruzados, similar al obtenido en el caso anterior, debido a que ∇m_2 contiene sólo la componente vertical y en otros casos se cumple que $ad - bc = 0$.

Este ejemplo puede ser relacionado con estructuras geológicas como cuerpos intrusivos, donde dos técnicas geofísicas observan diferentes estructuras de cada propiedad estudiada. A diferencia del ejemplo anterior, en éste se observan cambios abruptos en los modelos, mientras que en los modelos analíticos presentados los cambios son más suaves. Para simplificar los cálculos fue necesario discretizar los modelos ya que la expresión analítica para éstos involucra la función valor absoluto, la cual no es diferenciable, sin embargo es posible obtener una aproximación.

En modelos reales de propiedades tridimensionales del subsuelo, es común que dos técnicas geofísicas identifiquen rasgos estructurales diferentes. Cuando esto ocurre, podemos observar en base a los ejemplos presentados, que las diferencias estructurales entre los modelos pueden tener un comportamiento homogéneo, ordenado y descriptible en algunas zonas, mientras que en otras son más complejas. Al utilizar el operador de gradientes cruzados éste identificará las regiones de mayor similitud estructural, es decir, regiones donde $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, al incorporar este operador como parte de un modelo de inversión conjunta, éste resaltará las regiones estructuralmente similares. Más aún, los datos geofísicos darán la pauta para permitir cambios en los modelos de tal forma que se obtengan estructuras similares que satisfagan $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. Si tomamos en cuenta el ejemplo anterior, los datos geofísicos podrían permitir cambios en el modelo cúbico que detecten las fronteras de las estructuras que aparecen en el modelo cilíndrico, basados en la idea que una de las técnicas geofísicas no tuvo la suficiente resolución para observar los cambios en el modelo de cubos y por lo tanto los cambios estructurales identificados en el modelo de cilindros, tendrán una influencia positiva en la búsqueda de modelos estructuralmente similares.

Aunque es posible reducir el vector de gradientes cruzados a una función escalar de la forma

$$t(x, y, z) = \|\vec{t}(x, y, z)\|^2 = |t_x(x, y, z)|^2 + |t_y(x, y, z)|^2 + |t_z(x, y, z)|^2, \quad (15)$$

donde el significado de la similitud estructural ($t = 0$) se conserva, dado que para esto se satisface que cada una de las componentes del vector de gradientes cruzados es cero, es decir, $(t_x(x, y, z), t_y(x, y, z), t_z(x, y, z)) = (0, 0, 0)$. Sin embargo, la función escalar t no

proporciona información de la contribución de cada una de las componentes independientemente, por ejemplo no describe los cambios en cada una de las direcciones espaciales de los modelos. Para el caso analítico del volumen elipsoidal y esférico, t toma la forma:

$$t(x, y, z) = 144x^2(z^2 + y^2), \quad (16)$$

donde es fácil observar que para x fijo ($x = x_0$), se obtienen circunferencias en el plano y - z de la forma $t(x_0, y, z) = 144x_0^2(z^2 + y^2)$ como se muestran en la Figura 9a y que coinciden con lo descrito en las Figuras 6c y 6d, con magnitudes mayores conforme los puntos se alejan del eje de rotación, mostrando también una sección homogénea $t(0, y, z) = 0$. Calculando la suma de los cuadrados de las componentes del vector $\mathbf{t}$ en cada punto de los modelos discretizados con geometría cilíndrica y cúbica descritos en la Figura 8, obtenemos la imagen mostrada en la Figura 9b, donde se observa la magnitud $\|\vec{t}(x, y, z)\|^2$ en cada región, pero no la dirección de los vectores tridimensionales. Vemos en esta figura un comportamiento similar a lo descrito en la Figura 8c, por ejemplo en las secciones horizontales inferior y superior del eje z , con valores nulos alrededor de las fronteras x y y y valores más grandes donde se observa la región en rojo.

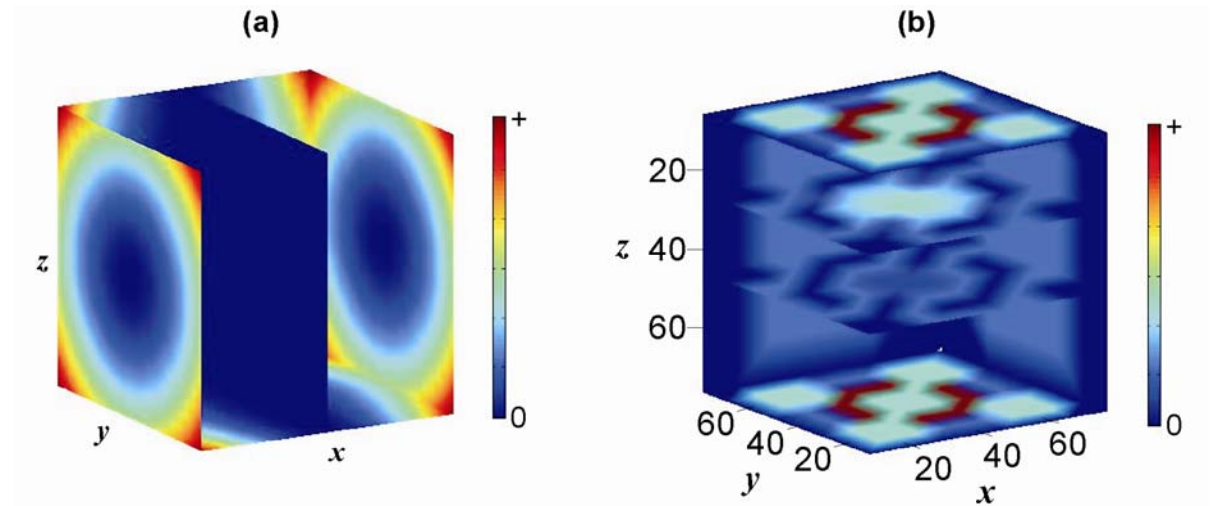


Figura 9. Imágenes del campo escalar t generadas usando la ecuación (15) para los modelos analíticos de volumen elipsoidal y esférico (a) y para los modelos numéricos de geometría cilíndrica y cúbica (b). La escala de colores muestra los valores positivos de t con magnitud mayor en color rojo.

Suponiendo que se satisface la condición de similitud estructural $(t_x(x, y, z), t_y(x, y, z), t_z(x, y, z)) = (0, 0, 0)$, donde cada una de las componentes es definida en la ecuación (13), es posible reducir a dos el número de ecuaciones, bajo ciertas suposiciones y describir las características estructurales del medio tridimensional. Sin pérdida de generalidad dichas condiciones se pueden escribir como $(t_x(x, y, z), t_y(x, y, z)) = (0, 0)$. La condición de similitud estructural es planteada a partir del siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial z} - \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial y} = 0, \\ 2) \quad & \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial x} - \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial z} = 0, \\ 3) \quad & \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial y} - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Si consideramos sólo 1) y 2) se cumple 3) si $\partial m_2 / \partial z \neq 0$. Ahora, si $\partial m_2 / \partial z = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial y} = 0, \\ 2) \quad & \frac{\partial m_1}{\partial z} \frac{\partial m_2}{\partial x} = 0, \\ 3) \quad & \frac{\partial m_1}{\partial x} \frac{\partial m_2}{\partial y} - \frac{\partial m_1}{\partial y} \frac{\partial m_2}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Para la ecuación 1) se debe cumplir que $\partial m_1 / \partial z = 0$ ó $\partial m_2 / \partial y = 0$. Si $\partial m_2 / \partial y = 0$ en la ecuación 2) se satisface que $\partial m_2 / \partial x = 0$ y con esto se cumple la ecuación 3). Ahora, si $\partial m_1 / \partial z = 0$ en la ecuación 1), se satisface la ecuación 2) pero no se tienen condiciones que garanticen que la ecuación 3) se cumple, sin embargo, bajo estas suposiciones ($\partial m_1 / \partial z = 0$ y $\partial m_2 / \partial z = 0$) se tiene una estructura 2D, la cual no ocurre para todo punto en los casos que estamos analizando en esta tesis, por lo que podemos eliminar este último caso.

Debemos notar en este desarrollo que aunque el número de condiciones que dan muestra de la similitud estructural entre los modelos puede ser reducido a dos, la descripción de la magnitud y dirección de los cambios 3D en los modelos, no puede estar representada por dos

componentes del vector únicamente. De esta manera, observamos que las tres componentes del vector de gradientes cruzados son elementos importantes en el análisis de la similitud estructural entre dos modelos en las tres direcciones espaciales.

Hemos mencionado que en los trabajos de Linde et al. (2006) y Tryggvason y Linde (2006), los valores de gradientes cruzados fueron minimizados, vistos como condiciones suaves y no estrictas como sería el caso de considerar estos valores igual a cero. La justificación en este caso es que gradientes cruzados igual a cero es satisfactoriamente aplicado bajo la suposición de que el subsuelo está compuesto de unidades de rocas distintas, que proporcionan una distribución de las propiedades físicas homogénea por zonas y donde las variaciones de dichas propiedades de las rocas de una zona a otra ocurren en la misma posición. Sin embargo, esto no necesariamente ocurre al considerar modelos petrofísicos, específicamente parámetros geohidrológicos, es decir, es posible obtener diferentes unidades de rocas y observar distribuciones homogéneas o continuas de dichos parámetros. En este caso, haciendo la función de gradientes cruzados cercana a cero se eliminan características de pequeña escala. Sin embargo, las limitaciones en la capacidad de resolución de los métodos geofísicos no permiten resolver variabilidad de pequeña escala. Veremos en los ejemplos sintéticos de la Sección II.5., que aunque la variabilidad es pequeña en los modelos, la condición de gradientes cruzados igual a cero detecta las fronteras donde ocurren dichos cambios, por lo que consideramos que esta condición de igualdad aún puede ser aplicada en estos casos. Por otro lado, el hecho de encontrar modelos de las propiedades físicas del subsuelo que satisfagan la condición de gradientes cruzados igual a cero dependerá en gran medida del ajuste a los datos y de la descomposición en valores singulares, como veremos en capítulos posteriores para los experimentos desarrollados.

II. 2. Planteamiento de la función objetivo del problema de inversión conjunta

Después de haber analizado la función de gradientes cruzados, ahora planteamos el problema de inversión conjunta incorporando dicha función. En nuestro caso queremos minimizar el error de ajuste para dos conjuntos de datos geofísicos simultáneamente, incluyendo condiciones de estabilización de la solución como se describe en el problema generalizado, ecuaciones (10) y (11). Como hemos mencionado, la técnica de mínimos cuadrados resulta conveniente y es aplicable en muchos problemas de inversión. Tiene la ventaja de ser

equivalente, bajo la adición de la hipótesis gaussiana para los errores de observación, con los estimadores de máxima verosimilitud (Bayesianos), es por esta razón que usamos un método Bayesiano descrito por Tarantola y Valette (1982).

De acuerdo a los resultados obtenidos por Gallardo y Meju (2003, 2004) en experimentos 2D, la inclusión de la función de gradientes cruzados como restricción de igualdad en un problema de mínimos cuadrados proporcionó modelos muy similares en su estructura, obtenidos por la retroalimentación de las características estructurales entre los modelos, que mostraron gran compatibilidad con los modelos teóricos y con las condiciones geológicas y geofísicas observadas en los casos reales. Debido a esto y a los argumentos antes mencionados, proponemos nuevamente la restricción de gradientes cruzados igual a cero para el caso 3D, como se muestra en la ecuación (11).

Como se describió en Gallardo et al. (2005), para el caso bidimensional, la incorporación de las restricciones de gradientes cruzados no resuelve las ambigüedades encontradas en problemas geofísicos. De esta manera, la formulación de un algoritmo con solución estable requiere información extra que incorpore otras restricciones de regularización. En nuestro caso, siguiendo la filosofía de Gallardo y Meju (2003, 2004) y el hecho de considerar que las propiedades físicas del subsuelo varían suavemente con la posición, incorporamos términos de suavidad de la solución como el Laplaciano (L). Al aplicarlo a ambos parámetros físicos se minimiza la rugosidad de la solución. Asimismo, tomamos en cuenta información a priori ($\mathbf{m}_1^{\text{apr}}$ y $\mathbf{m}_2^{\text{apr}}$), que puede ser obtenida en algunos casos, con la finalidad de minimizar la cercanía de la solución a una configuración de referencia. Cada uno de los términos de regularización tiene asociada una matriz de covarianza C_d y C_m , respectivamente, que dicta la contribución de cada término en la solución final.

Aunque la formulación descrita en Gallardo y Meju (2003) se puede extender al caso 3D, preferimos basar nuestro algoritmo de inversión en la formulación de mínimos cuadrados generalizada propuesta por Tarantola y Valette (1982). Esta formulación proporcionará un esquema estadístico más robusto necesario para evaluar el problema conjunto 3D. En un sentido más amplio, la aproximación de Tarantola y Valette (1982) permite incorporar restricciones de

regularización convencionales (Ej. Marquardt, 1970; deGroot-Hedlin y Constable, 1990) como una nueva variable aleatoria, esto es, como información no geofísica adicional. Sin embargo, la incorporación de la restricción de gradientes cruzados, como se explica a continuación, involucra algunas diferencias.

Tarantola y Valette (1982) propusieron un problema de mínimos cuadrados generalizados no lineal que minimiza la función objetivo

$$s(\hat{\mathbf{x}}) = (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{C}_0^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) \quad (19)$$

sujeta a la condición,

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$ incluye tanto los parámetros del subsuelo, $\mathbf{m}$, como sus características físicas y geofísicas, $\mathbf{d}$, que forman el sistema físico

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

La variable aleatoria $\mathbf{x}_0$ es la información a priori con matriz de covarianza $\mathbf{C}_0$. La función cuadrática $s(\hat{\mathbf{x}})$ comprende todas las variables aleatorias, incluyendo datos e información de los parámetros del modelo a priori, mientras que $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ contiene relaciones exactas físicas e hipotéticas.

Usualmente, la ecuación no lineal (20) representa un funcional de leyes físicas que relaciona los datos a los parámetros y que puede ser generalmente expresado como:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{m}}). \quad (22)$$

Esto es, los datos como función de los parámetros.

De acuerdo a Tarantola y Valette (1982), la solución del problema de minimización generalizado (ecuaciones 19 y 20) bajo un esquema Bayesiano, es de la forma

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \cdot \{\mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\}, \quad (23)$$

donde $\mathbf{F}$ es la matriz Jacobiana de derivadas parciales

$$F^{ik} = \partial f^i / \partial x^k, \quad (24)$$

evaluada en el punto $\hat{\mathbf{x}}$.

Para adaptar esta formulación a nuestro problema de inversión conjunta redefinimos el vector de valores esperados definido en (21) como

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 \\ \hat{\mathbf{L}}_1 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 \\ \hat{\mathbf{m}}_1 \\ \hat{\mathbf{m}}_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde $\hat{\mathbf{d}}_1$ y $\hat{\mathbf{d}}_2$ son las observaciones predichas para dos conjuntos de datos geofísicos, $\hat{\mathbf{L}}_1$ y $\hat{\mathbf{L}}_2$ representan los valores de las restricciones de suavidad (ya sean operadores gradientes o Laplacianos) aplicados a los parámetros de los modelos, mientras que $\hat{\mathbf{m}}_1$ y $\hat{\mathbf{m}}_2$ son los dos conjuntos de parámetros de los modelos. En este caso la información geofísica corresponde con las observaciones $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, mientras que la característica física está asociada a $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$, todos considerados dentro del conjunto de los datos $\mathbf{d}$ descrito en (21), donde también podemos incluir cualquier otro tipo de información adicional, como veremos en el Capítulo 4. Luego, $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ pertenecen al conjunto de parámetros $\mathbf{m}$.

Ahora bien, la información a priori descrita en la ecuación (19) es dada por los vectores de datos observados, $\mathbf{d}_1^{\text{obs}}$ y $\mathbf{d}_2^{\text{obs}}$; los valores de suavidad a priori, $\mathbf{L}_1^{\text{apr}}$ y $\mathbf{L}_2^{\text{apr}}$, (en este caso definidos como cero) y los parámetros de los modelos a priori, $\mathbf{m}_1^{\text{apr}}$ y $\mathbf{m}_2^{\text{apr}}$. Todos estos están incluidos en el vector:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{\text{obs}} \\ \mathbf{d}_2^{\text{obs}} \\ \mathbf{L}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{L}_2^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

y la matriz de covarianza $\mathbf{C}_0$ dada por:

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_1} & & & & & \\ & \mathbf{C}_{d_2} & & & & \\ & & \mathbf{C}_{L_1} & & & \\ & & & \mathbf{C}_{L_2} & & \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{C}_{m_1} & \\ & & & & & \mathbf{C}_{m_2} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Los elementos de la diagonal en $\mathbf{C}_0$ corresponden a las matrices de covarianza, $\mathbf{C}_{d_1}$ y $\mathbf{C}_{d_2}$, para cada conjunto de datos geofísicos (los cuales se suponen no correlacionados), $\mathbf{C}_{L_1}$ y $\mathbf{C}_{L_2}$ definen los factores de peso que regulan el nivel de suavidad requerido por los modelos. Finalmente, $\mathbf{C}_{m_1}$ y $\mathbf{C}_{m_2}$ son las matrices de covarianza para los parámetros de los modelos a priori.

Para construir las ecuaciones (20), consideramos las relaciones geofísicas para ambos tipos de datos, el operador de suavidad, $\mathbf{L}$, aplicado a ambos modelos y la restricción de gradientes cruzados

$$\mathbf{t} = \nabla \mathbf{m}_1 \times \nabla \mathbf{m}_2 = \mathbf{0}. \quad (28)$$

Esta última restricción proporciona la correlación entre los parámetros de los modelos, requerida para formular un algoritmo de inversión conjunta. Todas estas relaciones pueden ser escritas en forma compacta como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_1 - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{m}}_1) &= 0 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 - \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{m}}_2) &= 0 \\ \hat{\mathbf{L}}_1 - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_1 &= 0 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_2 &= 0 \\ \mathbf{0} - \mathbf{t}_x(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) &= 0 \\ \mathbf{0} - \mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) &= 0 \\ \mathbf{0} - \mathbf{t}_z(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Además de la restricción de gradientes cruzados, esta formulación también permite la incorporación de otras relaciones físicas o empíricas que pueden correlacionar ambos parámetros directamente. Por ejemplo, la relación de Poisson para campos gravitacional y magnético, la cual establece que si el campo magnético, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, y el campo gravitacional $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, son producidos por el

mismo cuerpo causativo con susceptibilidad κ y densidad ρ , si κ y ρ tienen un cociente constante, el campo magnético inductor $\mathbf{B}$ y el campo gravitacional $\mathbf{F}$ satisfacen la relación

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{B_0 \kappa}{4\pi\gamma\rho} \frac{\partial}{\partial \hat{u}} \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (30)$$

donde B_0 es la fuerza del campo magnético inductor en la dirección de $\hat{u}$, γ es la constante gravitacional y $\partial/\partial \hat{u}$ denota la derivada direccional. O bien, los ejemplos de relaciones directas entre los parámetros mencionados en la Sección I.3.

De esta manera, la función objetivo correspondiente a la ecuación (19) tiene la forma

$$s(\hat{\mathbf{x}}) = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 \\ \hat{\mathbf{L}}_1 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 \\ \hat{\mathbf{m}}_1 \\ \hat{\mathbf{m}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{\text{obs}} \\ \mathbf{d}_2^{\text{obs}} \\ \mathbf{L}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{L}_2^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_1} & & & & & \\ & \mathbf{C}_{d_2} & & & & \\ & & \mathbf{C}_{L_1} & & & \\ & & & \mathbf{C}_{L_2} & & \\ & & & & \mathbf{C}_{m_1} & \\ & & & & & \mathbf{C}_{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 \\ \hat{\mathbf{L}}_1 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 \\ \hat{\mathbf{m}}_1 \\ \hat{\mathbf{m}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{\text{obs}} \\ \mathbf{d}_2^{\text{obs}} \\ \mathbf{L}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{L}_2^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{bmatrix} \right\}, \quad (31)$$

sujeta a (29).

Una diferencia respecto a la formulación original de Tarantola y Valette (1982), es que los términos $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$ y $\mathbf{t}_z$ no son incluidos como variables aleatorias en $\mathbf{x}$. Esto admitirá una solución alternativa a la obtenida por Tarantola y Valette (1982) y constituirá una interdependencia exacta entre cada una de las componentes de $\mathbf{t}$ que es diferente a la seguida por Tryggvason y Linde (2006) y Linde et al. (2006, 2008).

II. 3. Solución de la función objetivo: planteamiento de ecuaciones normales

Una vez planteado el problema de mínimos cuadrados para nuestro caso particular, encontramos las ecuaciones normales, a partir de (23) y (24), que nos conducen a la solución del problema. Desarrollamos una expresión explícita para los parámetros de los modelos estimados

$$\hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_1 \\ \hat{\mathbf{m}}_2 \end{bmatrix}, \text{ expandiendo las matrices involucradas } \mathbf{F}. \text{ Esto nos conduce a la solución no lineal}$$

generalizada de inversión conjunta usando gradientes cruzados mostrada en el Apéndice A. Con

el propósito de encontrar una solución explícita para esta aplicación, seguimos el método de punto fijo sugerido por Tarantola y Valette (1982), con el cual se obtiene una solución iterativa de (23) de la forma

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{F}_k^T \cdot (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{F}_k^T)^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_k \cdot (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k)\} \quad (32)$$

donde las derivadas en $\mathbf{F}_k$ son tomadas en el punto $\hat{\mathbf{x}}_k$. Luego, bajo la suposición que $\mathbf{x}$ puede ser dividida en el conjunto de datos $\mathbf{d}$ y parámetros $\mathbf{m}$ de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{0}$, el algoritmo para $\mathbf{m}$ obtenido por estos autores está dado por diferentes expresiones matemáticas equivalentes, una de ellas de la forma

$$\hat{\mathbf{m}}_{k+1} = \hat{\mathbf{m}}_k + \left(\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} \mathbf{G}_k + \mathbf{C}_{m_0}^{-1} \right)^{-1} \left[\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{m}}_k)) - \mathbf{C}_{m_0}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_k - \mathbf{m}_0) \right] \quad (33)$$

para una $\mathbf{G}$ generalizada de la forma $G^{i\alpha} = \partial g^i / \partial m^\alpha$.

Siguiendo esta metodología llegamos a la siguiente solución iterativa:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}_{k+1} = & \hat{\mathbf{m}}_k + \mathbf{N}_1^{-1} \left[\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k)) - \mathbf{C}_{m_0}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_k - \mathbf{m}_0) \right] \\ & - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^{-1} \left\{ \mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \left[\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k)) - \mathbf{C}_{m_0}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_k - \mathbf{m}_0) \right] \right. \\ & \left. + \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

donde

$$\mathbf{N}_1 = \left(\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} \mathbf{G}_k + \mathbf{C}_{m_0}^{-1} \right), \quad (35)$$

cuyo desarrollo se muestra en el Apéndice A. En estas expresiones,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Df}_1(\mathbf{m}_1) & 0 \\ 0 & \mathbf{Df}_2(\mathbf{m}_2) \\ \mathbf{D(Lm}_1) & 0 \\ 0 & \mathbf{D(Lm}_2) \end{bmatrix} \quad (36)$$

donde $\mathbf{Df}_1(\mathbf{m}_1)$, $\mathbf{Df}_2(\mathbf{m}_2)$ son matrices de las derivadas parciales relacionadas con la sensibilidad entre los datos y parámetros. El tamaño de estas matrices es de $md_1 \times n$ y $md_2 \times n$, respectivamente; lo cual corresponde al número de datos para cada conjunto de datos (md_i) y al número de parámetros (n). Las matrices $\mathbf{D(Lm}_1)$, $\mathbf{D(Lm}_2)$ corresponden a las derivadas del operador de suavidad de los modelos, con tamaño teóricamente de $n \times n$. Similarmente, la matriz

Jacobiana $\mathbf{B}$ con tamaño máximo de $3n \times 2n$ asociada a la función de gradientes cruzados, es dada por

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1x} & \mathbf{B}_{2x} \\ \mathbf{B}_{1y} & \mathbf{B}_{2y} \\ \mathbf{B}_{1z} & \mathbf{B}_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{m}_1}(\mathbf{t}_x) & \mathbf{D}_{\mathbf{m}_2}(\mathbf{t}_x) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{m}_1}(\mathbf{t}_y) & \mathbf{D}_{\mathbf{m}_2}(\mathbf{t}_y) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{m}_1}(\mathbf{t}_z) & \mathbf{D}_{\mathbf{m}_2}(\mathbf{t}_z) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{m}_1}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{m}_2}$ son las derivadas con respecto a $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, respectivamente.

Las matrices $\mathbf{C}_{d_0}$ y $\mathbf{C}_{m_0}$ están dadas por

$$\mathbf{C}_{d_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_1} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}_{d_2} & & \\ & & \mathbf{C}_{L_1} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{C}_{L_2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

y

$$\mathbf{C}_{m_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{m_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{m_2} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

El vector $(\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k))$ es la diferencia entre los datos observados y los calculados, incluyendo términos de regularización de suavidad para ambos modelos, calculados como

$$\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{\text{obs}} - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{m}}_1^k) \\ \mathbf{d}_2^{\text{obs}} - \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{m}}_2^k) \\ \mathbf{L}_1^{\text{apr}} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_1^k \\ \mathbf{L}_2^{\text{apr}} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_2^k \end{bmatrix}, \quad (40)$$

y que $\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k)$ contiene las componentes del vector de gradientes cruzados

$$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x(\hat{\mathbf{m}}_1^k, \hat{\mathbf{m}}_2^k) \\ \mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{m}}_1^k, \hat{\mathbf{m}}_2^k) \\ \mathbf{t}_z(\hat{\mathbf{m}}_1^k, \hat{\mathbf{m}}_2^k) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

donde $\hat{\mathbf{m}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_1^k \\ \hat{\mathbf{m}}_2^k \end{bmatrix}$ son los modelos previos después de k iteraciones y $\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{bmatrix}$ son los

modelos a priori.

En notación compacta, la ecuación (34) puede ser escrita como

$$\hat{\mathbf{m}}_{k+1} = \hat{\mathbf{m}}_k + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^{-1} (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2 + \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k)) \quad (42)$$

donde

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k)) - \mathbf{C}_{m_0}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_k - \mathbf{m}_0), \quad (43)$$

que en forma explícita

$$\mathbf{N}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{C}_{d_1}^{-1} \mathbf{A}_1 + \alpha_1^2 \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 + \mathbf{C}_{m_1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{C}_{d_2}^{-1} \mathbf{A}_2 + \alpha_2^2 \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_2 + \mathbf{C}_{m_2}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (44)$$

y

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{C}_{d_1}^{-1} [\mathbf{d}_1 - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{m}}_1^k)] - \alpha_1^2 \mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{m}_1 + \mathbf{C}_{m_1}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_1^k - \mathbf{m}_1^{\text{apr}}) \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{C}_{d_2}^{-1} [\mathbf{d}_2 - \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{m}}_2^k)] - \alpha_2^2 \mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{m}_2 + \mathbf{C}_{m_2}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_2^k - \mathbf{m}_2^{\text{apr}}) \end{bmatrix}. \quad (45)$$

En las expresiones (42)-(45), $\mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2$ corresponde a la solución del problema de mínimos cuadrados para la estimación separada de ambos parámetros del modelo y concuerda, junto con el término $\hat{\mathbf{m}}_k$, con la ecuación (33), para inversión separada. Los demás términos son las restricciones de igualdad dadas por los gradientes cruzados, los cuales no aparecen en la formulación original de Tarantola y Valette (1982). Cabe hacer notar que las ecuaciones (34) y (35) son equivalentes a las obtenidas por Gallardo y Meju (2004) y fueron desarrolladas bajo un esquema con mejor descripción estadística de los términos involucrados.

II. 4. Implementación Numérica

Dado que la existencia de la solución de las ecuaciones (42) y (43) depende únicamente de resolver las matrices inversas involucradas, es necesario garantizar que las operaciones entre las matrices puedan llevarse a cabo de acuerdo a su tamaño y al análisis dimensional, para lo cual mostramos la Tabla 1.

Tabla I: Tamaño de las matrices y vectores involucrados en la solución (42) y (43), del problema de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados.

Vectores y matrices de la formulación	Tamaño
$\hat{\mathbf{m}}_k, \mathbf{m}_0$	$2n \times 1$
$\mathbf{C}_{m_0}^{-1}$	$2n \times 2n$
$\mathbf{d}_0, \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k)$	$(md_1 + md_2 + nL) \times 1$
$\mathbf{G}_k^T, \mathbf{C}_{d_0}^{-1}$	$2n \times (md_1 + md_2 + nL)$
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k)) - \mathbf{C}_{m_0}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_k - \mathbf{m}_0)$	$2n \times 1$
$\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k)$	$3n \times 1$
$\mathbf{N}_1^{-1}$	$2n \times 2n$
$\mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2$	$2n \times 1$
$\mathbf{B}_k$	$nB \times 2n$
$(\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^{-1}$	$nB \times nB$
$\mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^{-1} (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2 + \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k))$	$2n \times 1$
$\hat{\mathbf{m}}_{k+1} = \hat{\mathbf{m}}_k + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^{-1} \times (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2 + \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k))$	$2n \times 1$

Nota: Teóricamente el valor de nL es $2n$ y el valor nB es $3n$.

II. 4. 1. Análisis matricial de la solución

Analizando el rango de las matrices $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ involucradas en las ecuaciones (42) y (43), tenemos que aunque $\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} \mathbf{G}_k$ pudiera ser una matriz singular, la no singularidad de la matriz $\mathbf{N}_1 = (\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} \mathbf{G}_k + \mathbf{C}_{m_0}^{-1})$ se puede asegurar por la adición de la matriz de covarianza de los modelos a priori $\mathbf{C}_{m_0}^{-1}$. Ya que $\mathbf{G}_k$ es de tamaño $(md_1 + md_2 + nL) \times 2n$ con rango $r(\mathbf{G}_k) \leq 2n$, el producto de matrices $\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} \mathbf{G}_k$ es de tamaño $2n \times 2n$. Luego, la matriz $\mathbf{C}_{m_0}^{-1}$ es una matriz diagonal y por lo tanto de rango máximo. De esta manera, la matriz $\mathbf{N}_1$ es de rango completo

$r(\mathbf{N}_1) = 2n$ y $\mathbf{N}_1^{-1}$ puede ser calculada con un algoritmo eficiente de inversión. En nuestro caso usamos la función *inv* de Matlab, la cual elige un método de factorización y eliminación adecuados, dependiendo del tipo de matriz a invertir. Por ejemplo, el método de factorización LU.

Similarmente, la matriz $\mathbf{B}_k$ incluye tres ecuaciones para cada par de parámetros en el interior del volumen estudiado. Esto representa un problema sobredeterminado que hace $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ una matriz singular. Una técnica para resolver este tipo de problema es calculando la pseudoinversa de la matriz usando la descomposición en valores singulares (DVS) (Inman et al., 1973; Lines y Treitel, 1984; Strang, 1986; Lanczos, 1996; Muñoz y Rath, 2006). Aunque esto involucra un esfuerzo computacional costoso, es una buena técnica para invertir matrices singulares y analizar la condición de interdependencia lineal implícita en las restricciones de gradientes cruzados.

La pseudo inversa de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$, es expresada por

$$\left(\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T\right)^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T, \quad (46)$$

para la cual $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son matrices ortonormales donde $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ y $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz de valores singulares correspondiente. Dado que la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ no es de rango completo y por lo tanto tiene valores característicos iguales a cero, se seleccionan los p valores característicos de mayor magnitud para calcular la matriz pseudoinversa como

$$\left(\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T\right)^+ = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T \quad (47)$$

para un valor p tal que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ son considerados como valores singulares no nulos.

Cabe mencionar que la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ es de la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{m_1}(\mathbf{t}_x) & \mathbf{D}_{m_2}(\mathbf{t}_x) \\ \mathbf{D}_{m_1}(\mathbf{t}_y) & \mathbf{D}_{m_2}(\mathbf{t}_y) \\ \mathbf{D}_{m_1}(\mathbf{t}_z) & \mathbf{D}_{m_2}(\mathbf{t}_z) \end{bmatrix} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{C}_{d_1}^{-1} \mathbf{A}_1 + \alpha_1^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L} + \mathbf{C}_{m_1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{C}_{d_2}^{-1} \mathbf{A}_2 + \alpha_2^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L} + \mathbf{C}_{m_2}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \quad (48) \\
&\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{m_1}(\mathbf{t}_x) & \mathbf{D}_{m_2}(\mathbf{t}_x) \\ \mathbf{D}_{m_1}(\mathbf{t}_y) & \mathbf{D}_{m_2}(\mathbf{t}_y) \\ \mathbf{D}_{m_1}(\mathbf{t}_z) & \mathbf{D}_{m_2}(\mathbf{t}_z) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

e incluye la interacción entre todos los términos involucrados como son: matrices de sensibilidad ($\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$), matrices de suavidad ($\mathbf{L}$), matrices de peso de los modelos a priori ($\mathbf{C}_{m_1}^{-1}, \mathbf{C}_{m_2}^{-1}$) y la jacobiana de gradientes cruzados, por lo que la interpretación de las curvas de valores singulares se vuelve compleja. Sin embargo, resultan indispensables para decidir el número de ecuaciones necesarias que resuelven la pseudoinversa.

II. 4. 2 Proceso numérico de los términos que intervienen en la formulación.

Aunque la solución del problema de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados es analítica (Ecs. 42 y 43), estas expresiones corresponden a un conjunto finito de datos y a un modelo discretizado del subsuelo. Esto nos conduce a la aplicación de métodos numéricos para el cálculo de las matrices y vectores involucrados en la formulación, así como de sus inversas. En esta sección en particular expondremos el cálculo de matrices de suavidad y de gradientes cruzados usando el método de diferencias finitas y describiremos el esquema seleccionado para el cálculo de matrices inversas.

El método de diferencias finitas tiene la ventaja de ser simple en su aplicación cuando el dominio es dividido en bloques homogéneos, lo cual es un recurso típico en problemas inversos geofísicos. Además, observando los resultados obtenidos por Gallardo y Meju (2004) para el caso 2D consideramos que la metodología de diferencias finitas proporcionará una buena aproximación para resolver el problema planteado.

II. 4. 2. 1. Discretización del vector de gradientes cruzados y su derivada

Como es práctica común en Geofísica, el subsuelo es discretizado en prismas rectangulares homogéneos, los cuales constituyen los parámetros de los modelos $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$. Basados en estos prismas usamos un esquema en diferencias adelantadas análogo al propuesto por Gallardo y Meju (2004) para discretizar el vector de gradientes cruzados, $\vec{t}$, en (13) y definimos

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{4}{\Delta y \Delta z} [m_{1c}(m_{2b} - m_{2u}) + m_{1b}(m_{2u} - m_{2c}) + m_{1u}(m_{2c} - m_{2b})] \\ t_y &= \frac{4}{\Delta x \Delta z} [m_{1u}(m_{2r} - m_{2c}) + m_{1c}(m_{2u} - m_{2r}) + m_{1r}(m_{2c} - m_{2u})] \\ t_z &= \frac{4}{\Delta x \Delta y} [m_{1r}(m_{2b} - m_{2c}) + m_{1c}(m_{2r} - m_{2b}) + m_{1b}(m_{2c} - m_{2r})] \end{aligned} \quad (49)$$

donde los parámetros relevantes son mostrados en la Figura 10.

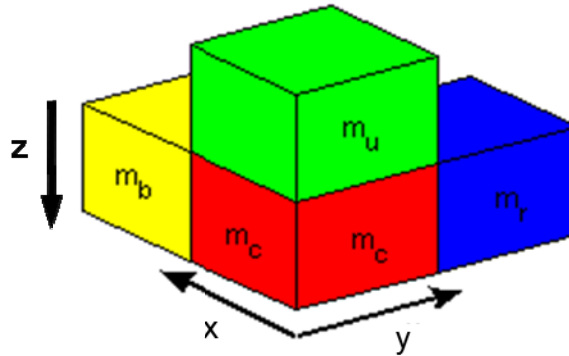


Figura 10. Esquema en diferencias adelantadas para la direcciones x , y y z usadas para definir la versión discreta 3D del vector de gradientes cruzados.

Las componentes en (49) forman parte del vector $\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k)$ de la formulación (42) y (43), aplicadas de acuerdo a la posición de los bloques en el dominio de parámetros. Las expresiones correspondientes a las derivadas discretizadas de la función de gradientes cruzados son obtenidas directamente de la ecuación (49) y constituyen la versión discreta de la matriz $\mathbf{B}$ de la formulación (ecuaciones 42 y 43). Esta matriz contiene seis elementos diferentes de cero en cada fila. Considerando los cuatro elementos involucrados en el esquema básico ilustrado en la Figura 10, la matriz $\mathbf{B}$ correspondiente contendrá los siguientes elementos

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2} \\ \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2} \\ \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial m_{1c}} & 0 & \frac{\partial t_x}{\partial m_{1b}} & \frac{\partial t_x}{\partial m_{1u}} & \frac{\partial t_x}{\partial m_{2c}} & 0 & \frac{\partial t_x}{\partial m_{2b}} & \frac{\partial t_x}{\partial m_{2u}} \\ \frac{\partial t_y}{\partial m_{1c}} & \frac{\partial t_y}{\partial m_{1r}} & 0 & \frac{\partial t_y}{\partial m_{1u}} & \frac{\partial t_y}{\partial m_{2c}} & \frac{\partial t_y}{\partial m_{2r}} & 0 & \frac{\partial t_y}{\partial m_{2u}} \\ \frac{\partial t_z}{\partial m_{1c}} & \frac{\partial t_z}{\partial m_{1r}} & \frac{\partial t_z}{\partial m_{1b}} & 0 & \frac{\partial t_z}{\partial m_{2c}} & \frac{\partial t_z}{\partial m_{2r}} & \frac{\partial t_z}{\partial m_{2b}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Aplicando la derivada de cada una de las componentes del vector de gradientes cruzados a los n parámetros del dominio, obtenemos una matriz con filas de la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2} \end{bmatrix} = \frac{4}{\Delta y \Delta z} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ \cdots & (m_{2b} - m_{2u}) & \cdots & 0 & \cdots & (m_{2u} - m_{2c}) & \cdots & (m_{2c} - m_{2b}) \\ & & & \ddots & & & & \\ \cdots & (m_{1u} - m_{1b}) & \cdots & 0 & \cdots & (m_{1c} - m_{1u}) & \cdots & (m_{1b} - m_{1c}) & \cdots \\ & & & \ddots & & & & & \end{bmatrix} \quad (51)$$

para las n primeras filas,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2} \end{bmatrix} = \frac{4}{\Delta x \Delta z} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ \cdots & (m_{2u} - m_{2r}) & \cdots & (m_{2c} - m_{2u}) & \cdots & 0 & \cdots & (m_{2r} - m_{2c}) \\ & & & \ddots & & & & \\ \cdots & (m_{1r} - m_{1u}) & \cdots & (m_{1u} - m_{1c}) & \cdots & 0 & \cdots & (m_{1c} - m_{1r}) & \cdots \\ & & & \ddots & & & & & \end{bmatrix} \quad (52)$$

para las filas $i = n+1, \dots, 2n$,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2} \end{bmatrix} = \frac{4}{\Delta x \Delta y} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ \cdots & (m_{2r} - m_{2b}) & \cdots & (m_{2b} - m_{2c}) & \cdots & (m_{2c} - m_{2r}) & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ \cdots & (m_{1b} - m_{1r}) & \cdots & (m_{1c} - m_{1b}) & \cdots & (m_{1r} - m_{1c}) & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & & & & & \end{bmatrix} \quad (53)$$

para las filas $i = 2n+1, \dots, 3n$.

En las fronteras, donde no es posible aplicar el esquema en diferencias adelantadas, no existe contribución a la matriz **B** en las posiciones que son obtenidas usando una discretización que involucra la misma dirección, únicamente contribuyen aquellas obtenidas a partir de direcciones perpendiculares. La Figura 11 muestra algunos bloques para los cuales es posible calcular elementos de la matriz **B** en las fronteras, usando diferencias finitas adelantadas. El bloque superior derecho, marcado con círculos rojos, no es utilizado para calcular la matriz, debido a que no es posible obtener una aproximación de la derivada en dos direcciones, en este caso en las direcciones x y z ; mientras que para los bloques marcados con círculos negros no existe aproximación a las derivadas en la dirección x , por lo que sólo calculamos los términos de **B** que involucran diferencias adelantadas en las direcciones y y z , que en este caso corresponden a términos de la ecuación (51).

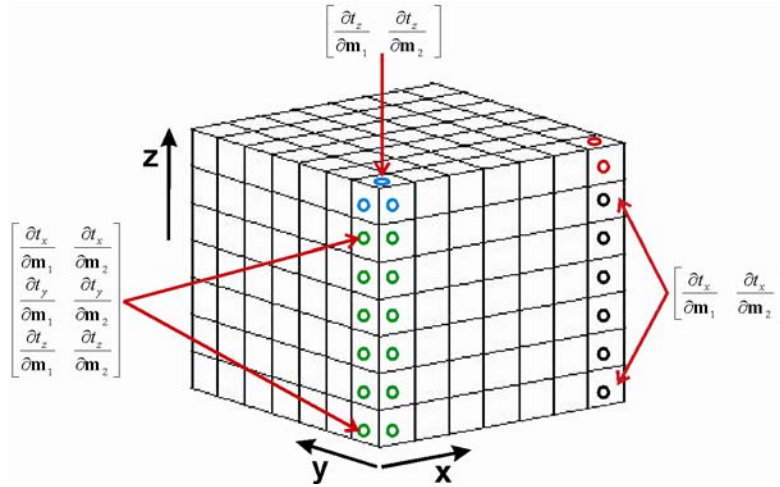


Figura 11. Malla con bloques cúbicos usada para representar el dominio de parámetros. Los bloques seleccionados en las fronteras, marcados con círculos, tienen asociados los elementos de la matriz **B** para los que contribuyen.

II. 4. 2. 2 Discretización de las matrices de suavidad

Como podemos observar en la formulación (ecuaciones 42 y 43), la matriz **G** involucra tanto matrices de sensibilidad como matrices de suavidad. La versión discreta de las matrices de sensibilidad depende de la aplicación geofísica específica, mientras que las matrices de suavidad, $\mathbf{Lm}_1$ y $\mathbf{Lm}_2$, son discretizadas por diferencias finitas centradas. En este caso usamos el operador de Laplace, el cual está definido como

$$\mathbf{Lm} = \nabla^2 \mathbf{m} = \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial z^2}. \quad (54)$$

La forma discreta de (54) es

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{m} = & (dr)m_r - (dr + dl)m_c + (dl)m_l \\ & + (db)m_b - (db + df)m_c + (df)m_f, \\ & + (dd)m_d - (dd + du)m_c + (du)m_u \end{aligned} \quad (55)$$

de acuerdo a la Figura 12, donde

$$\begin{aligned} dr &= \frac{8}{\omega_x(x_{j+2} - x_j)}, \\ dl &= \frac{8}{\omega_x(x_{j+1} - x_{j-1})} \quad y \\ \omega_x &= x_{j+2} + x_{j+1} - x_j - x_{j-1}. \end{aligned} \quad (56)$$

Expresiones similares se obtienen para db y df en la dirección y y para dd y du en la dirección z .

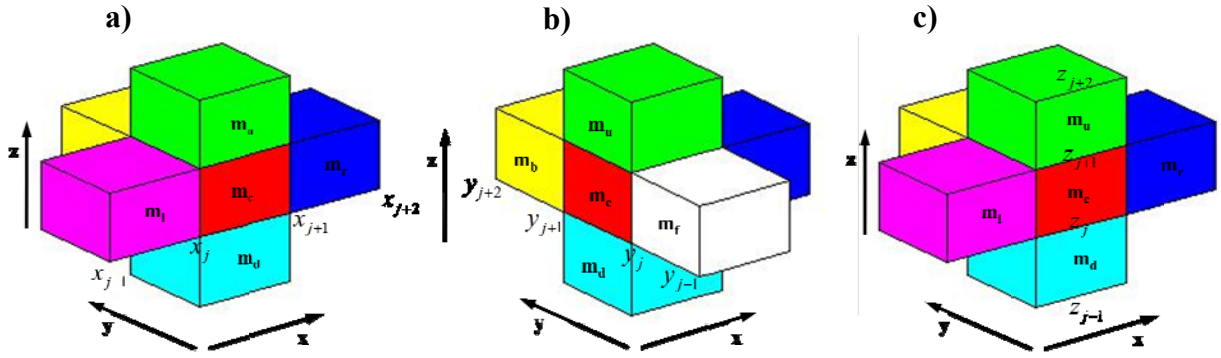


Figura 12. Esquemas en diferencias centradas usados en la discretización del operador de Laplace. a), b) y c) muestran los bloques utilizados en la dirección x , y y z , respectivamente.

A partir de (55) y (56) construimos la matriz $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ en el dominio de parámetros, requerida en (42) y (43). Se debe notar que para la aplicación de este esquema seleccionaremos las fronteras del dominio libres en las direcciones perpendiculares a ellas, como se muestra en la Figura 13.

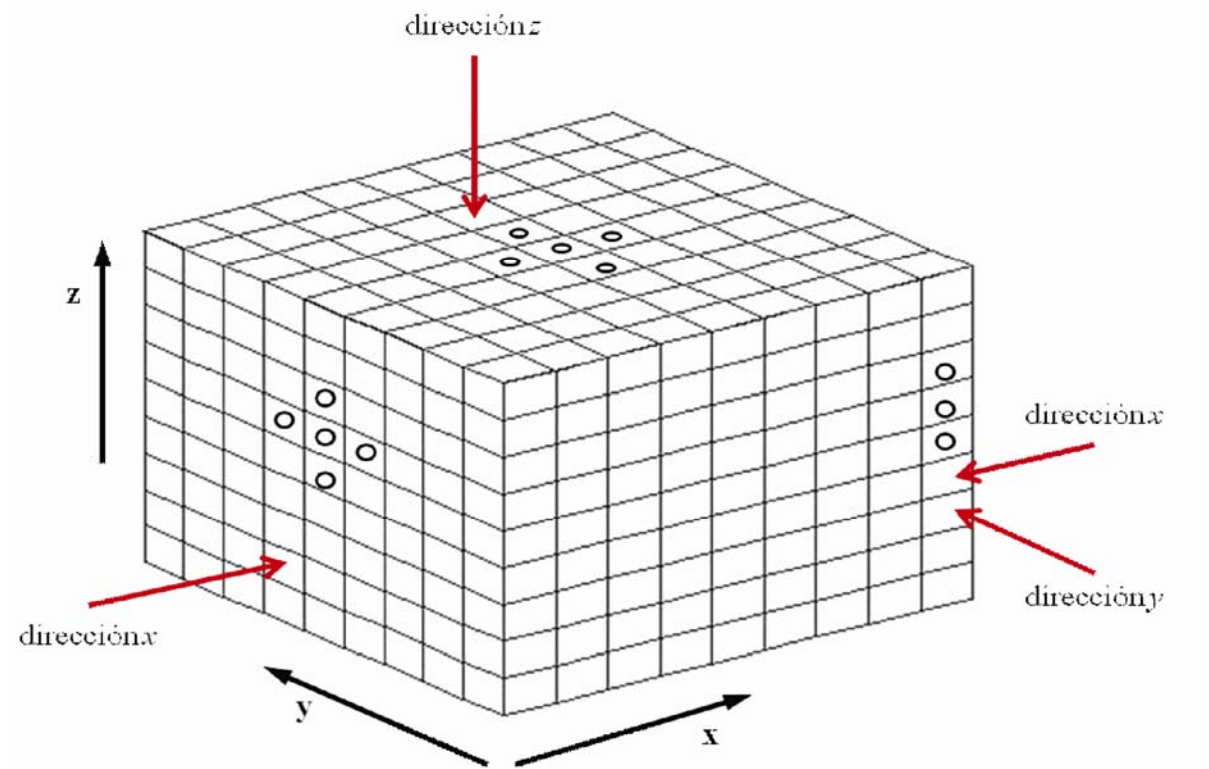


Figura 13. Malla con bloques cúbicos usada para representar el dominio de parámetros. Las posiciones de los círculos en los bloques de las fronteras corresponden a los bloques utilizados en el esquema de diferencias finitas del Laplaciano. Las flechas rojas muestran las direcciones de fronteras libres para el Laplaciano en cada caso.

II. 4. 2. 3. Cálculo numérico de la pseudoinversa

Como hemos mencionado en la Sección II.4.1., el cálculo de $\mathbf{N}_1^{-1}$ se lleva a cabo mediante un método de factorización y eliminación adecuados, dependiendo de $\mathbf{N}_1$. En este caso se utilizó el método de factorización $\mathbf{LU}$, donde $\mathbf{N}_1$ es factorizada como el producto de matrices $\mathbf{N}_1 = \mathbf{LU}$, donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior y $\mathbf{U}$ es una matriz triangular superior, de tal manera que el cálculo de la inversa de $\mathbf{N}_1$ se obtiene mediante $\mathbf{N}_1^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{L}^{-1}$.

Una vez que implementamos las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}_1^{-1}$ que aparecen en las ecuaciones (42) y (43), llevamos a cabo el producto $\mathbf{B}\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T$ el cual se puede escribir como en (48), o en forma desarrollada como

$$\mathbf{B}\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2} \\ \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2} \\ \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1}^T & \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1}^T & \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1}^T \\ \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2}^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2}^T \\ \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2}^T \\ \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_y}{\partial \mathbf{m}_2}^T & \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1} \mathbf{N}_1^{-1} \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_1}^T + \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2} \mathbf{N}_2^{-1} \frac{\partial t_z}{\partial \mathbf{m}_2}^T \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Como hemos visto en la Sección II.4.1 la matriz (57) es una matriz simétrica de rango incompleto, por lo que requiere de un método de regularización para poder calcular su inversa. En este trabajo utilizamos la descomposición en valores singulares para el cálculo de la pseudoinversa. Una parte fundamental de la solución del método de gradientes cruzados para el caso 3D, consiste en una buena elección del nivel de corte λ_p para cada experimento, para lo cual recurrimos a la gráfica de valores singulares. La Figura 14 muestra un ejemplo de la gráfica de valores singulares para diferentes iteraciones de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$. En este caso el experimento consta de $n=2048$ parámetros, por lo que el tamaño de la matriz es de $3n \times 3n = 6144 \times 6144$ y su rango es a lo más de $2n=4096$. Los círculos rojos indican el nivel de corte, λ_p , seleccionado en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo, $p \leq 4096$. Se puede ver en la Figura 14 que los valores singulares presentan una disminución significativa alrededor de $p = 2048$, por lo que tomamos en cuenta únicamente sus valores singulares correspondientes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2048}$.

La pseudoinversa $(\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^+$ es entonces calculada empleando los correspondientes vectores característicos asociados como $\mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{V}^T$, que utilizamos en el proceso iterativo (42) y (43). Más adelante veremos las implicaciones de usar diferentes niveles de corte en experimentos geofísicos particulares.

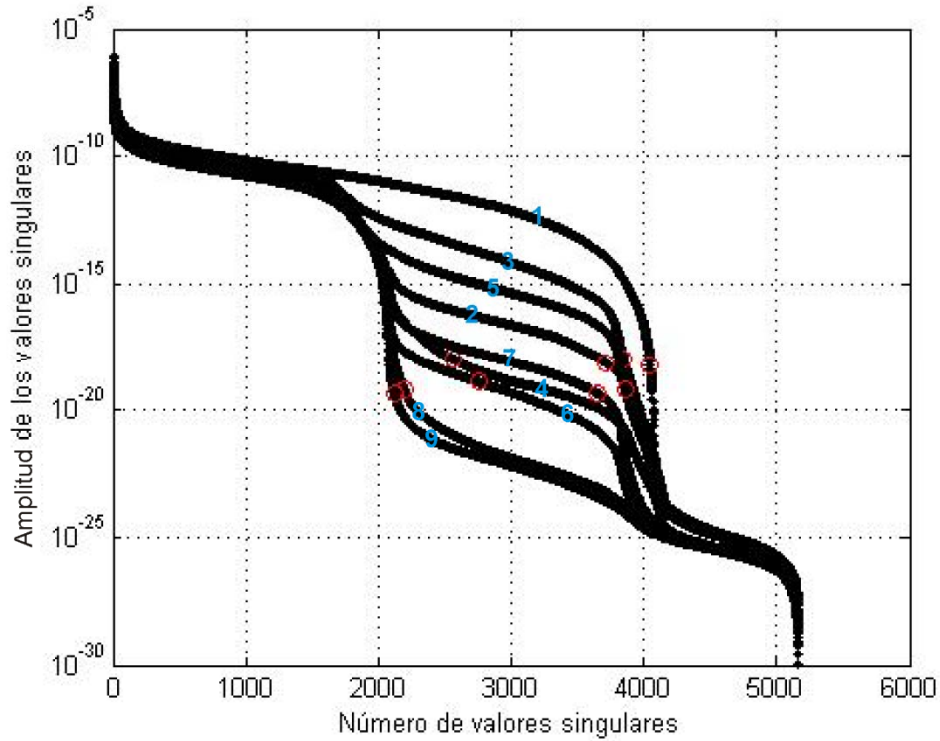


Figura 14. Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de (42) y (43). Las iteraciones son marcadas con números azules. Los círculos rojos indican el nivel de corte, λ_p , en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4096$. La disminución significativa de los valores singulares a partir de 2048 indica que este valor característico podría proporcionar una buena elección del nivel de corte.

II. 5. Análisis de la metodología de gradientes cruzados 3D en experimentos sintéticos

En las secciones anteriores describimos la metodología analítica y numérica para llevar a cabo inversión conjunta 3D de datos geofísicos mediante gradientes cruzados. Sin embargo, es importante conocer únicamente el efecto, en la formulación (42) y (43), tanto de la restricción de gradientes cruzados como de los términos de regularización en experimentos controlados. Para lo

cual, eliminamos los términos correspondientes a datos observados y calculados y las matrices de covarianza asociadas, obteniendo una formulación similar de la forma

$$\hat{\mathbf{m}}_{k+1} = \hat{\mathbf{m}}_k + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^{-1} (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_2 + \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k)) \quad (58)$$

donde

$$\mathbf{N}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 + \mathbf{C}_{\mathbf{m}_1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_2^2 \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_2 + \mathbf{C}_{\mathbf{m}_2}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (59)$$

y

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_1^2 \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 \mathbf{m}_1 + \mathbf{C}_{\mathbf{m}_1}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_1^k - \mathbf{m}_1^{\text{apr}}) \\ -\alpha_2^2 \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_2 \mathbf{m}_2 + \mathbf{C}_{\mathbf{m}_2}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_2^k - \mathbf{m}_2^{\text{apr}}) \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Las matrices $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ corresponden al operador Laplaciano, mientras que $\mathbf{C}_{\mathbf{m}_1}^{-1}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{m}_2}^{-1}$ son las matrices de covarianza para los parámetros de los modelos a priori. Similarmente, los términos restantes involucrados son definidos como antes.

II. 5. 1. Modelo con estructura vs. modelo plano

El siguiente experimento sintético consiste de dos modelos pequeños con 64 bloques. El modelo $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_1^{\text{apr}}$ consta de bloques homogéneos en la dirección vertical con valores 1.0 y 0, mientras que el modelo $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2^{\text{apr}}$ es homogéneo en todo el dominio de parámetros con valor de 0.2 en todos sus bloques, como se muestra en la Figura 15.

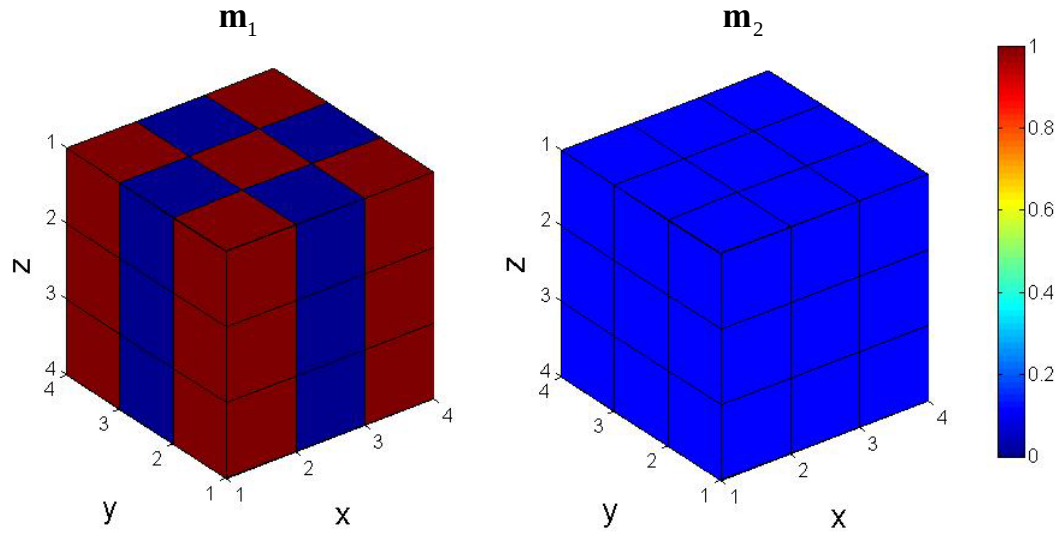


Figura 15. $\mathbf{m}_1$, modelo de bloques homogéneos en la dirección vertical. $\mathbf{m}_2$, modelo homogéneo en todos los bloques del dominio.

En este caso hemos asignado un valor constante $\mathbf{C}_{\mathbf{m}_1} = \mathbf{C}_{\mathbf{m}_2} = 1 \times 10^8 \mathbf{I}$, a las matrices de covarianza de los modelos a priori en la formulación (58) a (60). Además, seleccionamos un nivel de suavidad de los modelos $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1.0$ y la condición inicial del proceso iterativo fue considerada como $\mathbf{m}_1^0 = \mathbf{m}_2^0 = 0.5$. Los resultados obtenidos después de aplicar la formulación (58)-(60) se muestran en la Figura 16.

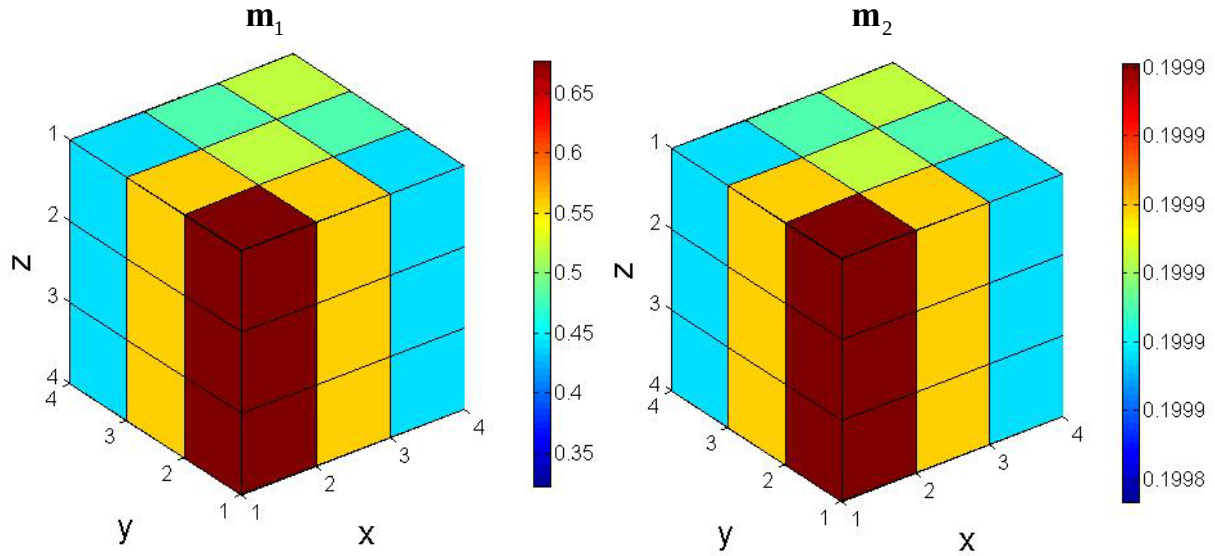


Figura 16. Resultados de la inversión conjunta de los modelos de la Figura 15.

Es claro que los modelos de la Figura 15 satisfacen la restricción de gradientes cruzados en todo el dominio. Sin embargo, los modelos de la Figura 16 tienen diferencias significativas con respecto a los modelos en la Figura 15. En este caso el término de suavidad evita recuperar los modelos originales. Aun así, el factor predominante es la similitud geométrica entre los modelos, ya que ambos fueron obligados a alejarse de sus modelos a priori correspondientes, por lo que, de acuerdo a nuestra formulación, los modelos únicamente cumplen con la restricción de gradientes cruzados y la condición de suavidad.

En casos reales podemos suponer que una técnica geofísica identifica la estructura del modelo $\mathbf{m}_1$, mientras que otra, la estructura del modelo $\mathbf{m}_2$. De esta manera, la incompatibilidad de los modelos sería mezclada estructuralmente, obteniendo modelos con similitud estructural que satisfacen las condiciones requeridas en la función objetivo. Este comportamiento permanecerá en casos reales siempre que se cumpla la condición adicional del ajuste a los datos. Por otro lado, el dominio de una u otra técnica geofísica dependerá del peso (matriz de covarianza de los datos) que sea aplicado a cada modelo. Asimismo, el peso sobre los modelos a priori (matriz de covarianza del modelo a priori) tenderá a mantener la estructura original de los modelos, en el caso de imponer desviaciones estándar pequeñas, y no mezclará las estructuras de

ambos modelos siempre y cuando se satisfaga el ajuste a los datos. De otra manera, la restricción de gradientes cruzados influirá en mayor medida en la determinación de modelos que satisfagan todas las condiciones impuestas en cada caso.

II. 5. 2. Modelos idénticos

El resultado anterior se puede generalizar para cualquier par de modelos que satisfacen la restricción de gradientes cruzados igual a cero. Por ejemplo, es el caso de los tableros de ajedrez de la Figura 17, donde hemos usado similarmente los valores $C_{m_1} = C_{m_2} = 1 \times 10^8 \mathbf{I}$ y $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$. El modelo inicial en este caso se consideró $\mathbf{m}_1^0 = \mathbf{m}_2^0 = 1$.

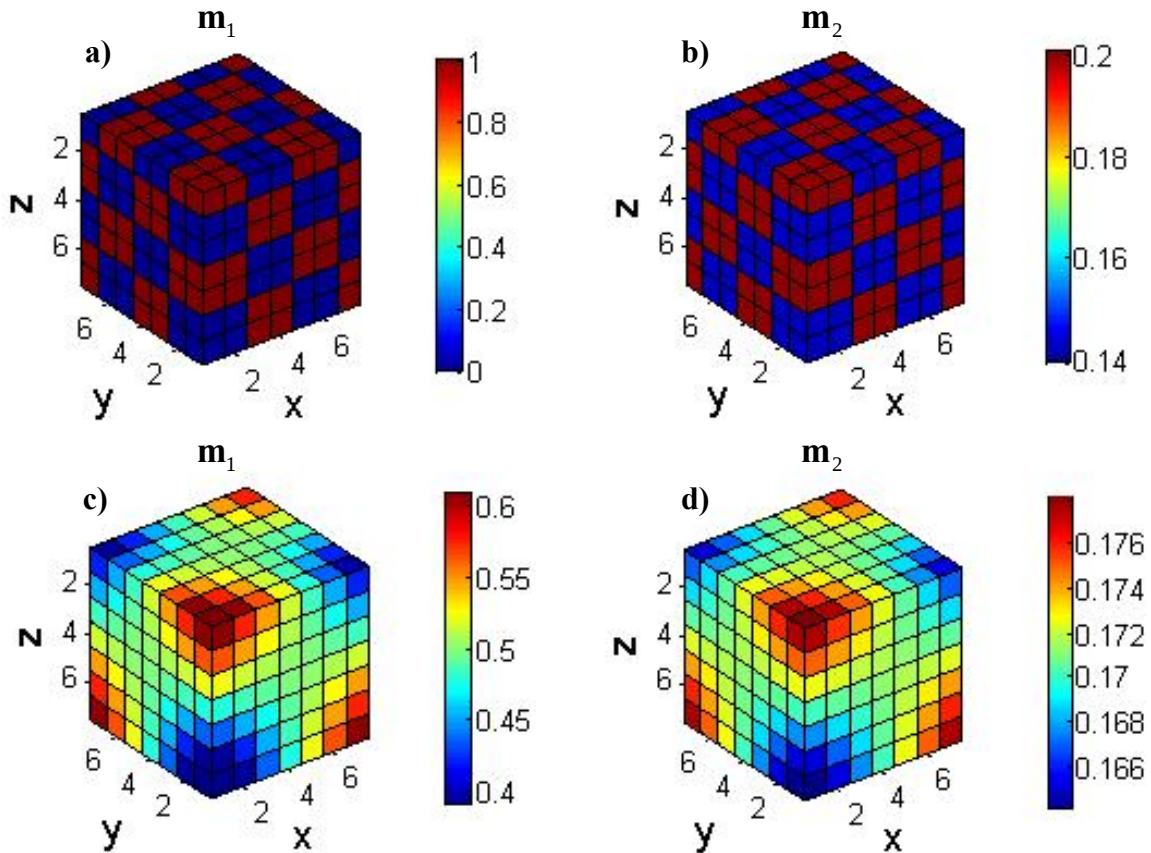


Figura 17. Las figuras a) y b) corresponden a los modelos a priori, mientras que c) y d) son el resultado de la inversión conjunta.

Nuevamente observamos modelos que satisfacen la restricción de gradientes cruzados igual a cero (Figuras 17a y 17b) y para las cuales se esperaba que los modelos de inversión (Figuras 17c y 17d) los pudieran reproducir. Sin embargo, las condiciones impuestas sobre las matrices de covarianza no permiten la recuperación de los modelos originales, aunque los modelos mantienen estructuras similares entre sí.

Cuando conocemos de alguna manera el valor y la distribución de los parámetros en el subsuelo, proponemos un modelo a priori apropiado y mediante valores pequeños de la matriz de covarianza, logramos que este modelo se mantenga sin cambio en todo el proceso iterativo. Un ejemplo que ilustra el efecto de la covarianza en los modelos lo podemos observar en la Figura 18, donde hemos obligado al modelo de la Figura 18a a permanecer sin cambio en todas las iteraciones a través de $\mathbf{C}_{m_1} = 0.1$, mientras que al modelo de la Figura 18b le hemos permitido cambiar a través de $\mathbf{C}_{m_2} = 1 \times 10^8 \mathbf{I}$. El modelo inicial en este caso es nuevamente $\mathbf{m}_1^0 = \mathbf{m}_2^0 = 1$. Las Figuras 18c y 18d muestran los resultados del proceso de inversión. Podemos observar que el modelo $\mathbf{m}_1$ permaneció sin cambio mientras que $\mathbf{m}_2$ es prácticamente constante (con el valor promedio de los valores máximo y mínimo del modelo a priori). En este caso el algoritmo convergió a un modelo constante ya que $\nabla m_2 = 0$ cumple que $\nabla m_1 \times \nabla m_2 = 0$. Además, dado que el modelo $\mathbf{m}_1$ está sujeto a permanecer sin cambio, la condición de suavidad requerida en el proceso inverso no permite obtener un modelo $\mathbf{m}_2$ tan heterogéneo como lo es el tablero de ajedrez cúbico, sino modelos con cambios espaciales suaves, por lo que el mejor modelo que satisface todas estas condiciones corresponde a uno homogéneo.

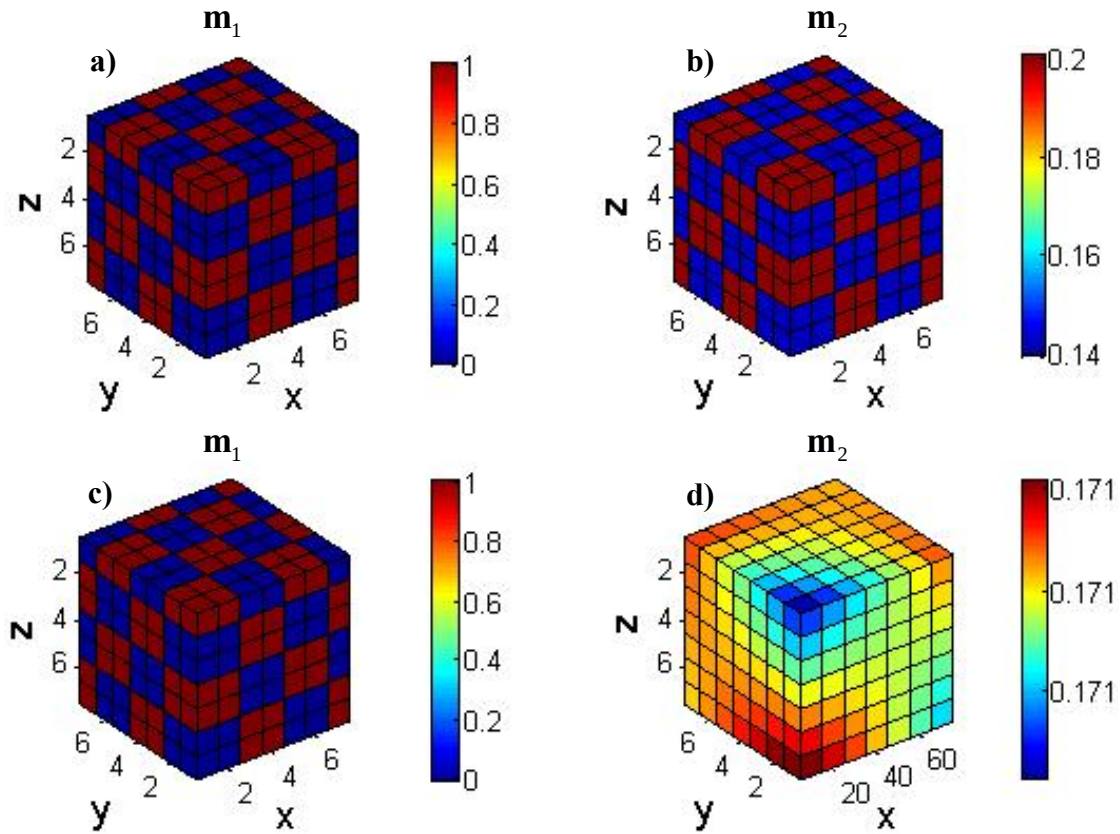


Figura 18. Las figuras a) y b) corresponden a los modelos a priori, mientras que c) y d) son el resultado de la inversión para el caso de un modelo fijo.

En casos reales podemos asociar este ejemplo con modelos obtenidos mediante una técnica geofísica de alta resolución donde confiamos en la precisión de los datos y por lo tanto le permitimos pocos cambios al modelo m_1 . El modelo m_2 es resultado de un método geofísico con poca precisión en sus mediciones por lo que permitimos que el modelo se ajuste a otras estructuras. Si el ajuste a los datos en ambos casos lo permite, se obtendrán modelos como los presentados en este ejemplo. De otra manera, los modelos asimilarán estructuras mutuas especialmente donde estos son poco precisos, semejante a lo que ocurre con modelos estructuralmente incompatibles, como lo son los ejemplos del volumen elipsoidal y esférico y con geometría cilíndrica y cúbica presentados en la Sección II.1.

En los siguientes capítulos veremos que la restricción del ajuste de los datos juega un papel principal en la búsqueda de modelos que satisfagan todas las condiciones requeridas en la formulación (42) y (43). Los ejemplos que analizaremos involucran modelos compatibles e incompatibles en el sentido de gradientes cruzados igual a cero. Analizaremos los cambios que presentan los modelos, bajo la influencia de los pesos aplicados a cada una de las condiciones de nuestra formulación.

Capítulo III

Modelado directo de datos gravimétricos y magnéticos

En el Capítulo II se desarrolló la formulación matemática para llevar a cabo inversión conjunta de datos geofísicos. Ahora, se validará la metodología usando datos gravimétricos y magnéticos en experimentos sintéticos y de campo. En este capítulo también se presentan las bases del modelado directo de ambas técnicas, el cual es fundamental en el proceso de inversión.

III. 1. Generalidades de los métodos gravimétrico y magnético

Sabemos que la aceleración gravitacional en cualquier punto sobre la superficie de la Tierra es alrededor de 9.8 m/s^2 . Sin embargo, al hacer mediciones del campo gravitacional en un sitio particular, se observan pequeñas variaciones en estos valores, debido a que la Tierra no es un elipsoide uniforme ni tampoco se encuentra estática en el espacio junto con los demás astros. Estas pequeñas diferencias, las cuales pueden ser del orden de 10^{-7} m/s^2 o menores, son conocidas como anomalías de gravedad y son las que nos interesa determinar ya que pueden significar importantes cambios de la densidad de las rocas en el subsuelo. La unidad más común que se utiliza en geofísica para referirnos a estas cantidades tan pequeñas de gravedad es el gal (en honor a Galileo), el cual se define como $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$. Dado que esta unidad es aún grande comparada con la magnitud de las anomalías de gravedad, resulta conveniente emplear subdivisiones como el miligal (mGal) o el microgal (μGal). Aunque no es muy común en algunos casos se emplea otra unidad llamada Unidad Gravimétrica (ug), la cual es equivalente a 0.1 mGal. Por otro lado, las variaciones de las densidades de las rocas en el subsuelo son pequeñas (Figura 19), estas pueden ser menores que 1.8 g/cm^3 para depósitos jóvenes no consolidados hasta mayores que 2.8 g/cm^3 en formaciones más antiguas (Sharma, 2004), mientras que en rocas ígneas y metamórficas con alto contenido de minerales ferro-magnesianos pueden alcanzar valores de 3.3 g/cm^3 .

Una vez que hacemos mediciones del campo gravitacional en la dirección vertical, llevamos a cabo correcciones de los datos, debido a varios efectos ajenos a la geología del

subsuelo. Las correcciones necesarias son: (1) *Corrección de la latitud*, esta corrección se hace para eliminar el efecto del incremento de la gravedad desde el ecuador a los polos, debido a que la rotación de la Tierra causa no sólo una fuerza centrífuga que disminuye la fuerza de atracción de la Tierra sino literalmente una redistribución de su masa. (2) *Corrección de aire libre*, esta corrección toma en cuenta que la gravedad disminuye con la distancia en la elevación, por lo que el valor de gravedad decrece cuando incrementamos la elevación y nos alejamos de la superficie de la Tierra. (3) *Corrección de Bouguer*, ésta se refiere al efecto de gravedad del material rocoso que se encuentra entre un nivel de referencia y la superficie del terreno.

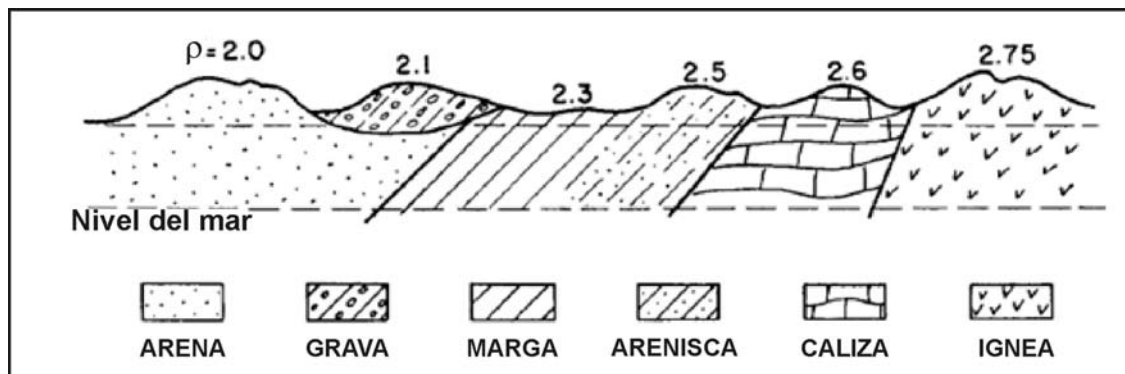


Figura 19. Ejemplos de rocas y sus valores de densidad asociados.

En general, el método gravimétrico se utiliza para identificar contrastes de densidades de las rocas en el subsuelo, por lo que la técnica es útil en la determinación de la profundidad del basamento en una cuenca sedimentaria, así como de cavidades en el subsuelo y concentraciones anómalas de materiales en el subsuelo en forma de depósitos minerales o de fluidos intersticiales. También se aplica en la identificación de estructuras geológicas tales como fallas, diques, domos salinos y cuerpos intrusivos. Algunos ejemplos de aplicaciones del método gravimétrico se encuentran en Sharma (2004).

El método magnético presenta muchas similitudes con el método gravimétrico, por ejemplo, las mediciones en la superficie de la Tierra en ambos, son de fuente natural. Sin embargo, a diferencia del campo gravitacional monopolar, el campo magnético de la Tierra es dipolar, por lo que es necesario medir un vector completo lo que hace la interpretación de las anomalías magnéticas más complejas. El parámetro fundamental que controla las variaciones del

campo magnético que nos interesa estudiar, es la *magnetización* ($\text{ampere} \cdot \text{metro}^{-1}$) o bien, la *susceptibilidad magnética* (adimensional) de las rocas en el subsuelo, la cual puede variar hasta cinco órdenes de magnitud incluso dentro de un mismo tipo de roca. Además, mientras que las mediciones del campo gravitacional se toman y son acordes a nuestro concepto de la dirección vertical; el campo magnético en cualquier punto sobre la superficie de la Tierra no sigue esta dirección vertical, por lo que se requiere una cantidad vectorial (Fowler (1994)) para describirlo. Convencionalmente, los términos que se usan para describir la dirección del campo magnético son: la componente vertical (Z), la componente horizontal (H) y la declinación (D). O bien, la intensidad del campo total (F), su inclinación (I) y la declinación, elementos que se muestran en la Figura 20.

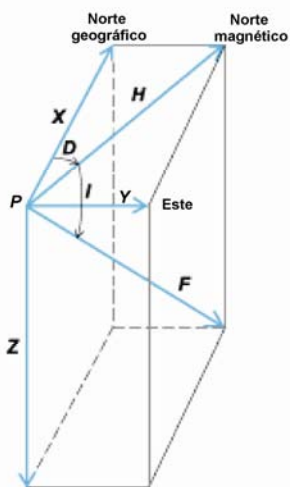


Figura 20. Elementos que describen la dirección del campo magnético en coordenadas cartesianas, para un punto P sobre la superficie de la Tierra.

Cuando las rocas del subsuelo se exponen al campo magnético de la Tierra (campo geomagnético), pueden adquirir una magnetización (J). Esta puede desaparecer cuando el campo externo desaparece (magnetización inducida, J_i) o bien, puede permanecer aún después de remover el campo externo (magnetización remanente, J_r). La intensidad de esta magnetización depende del contenido de minerales magnéticos en estas, tales como magnetita, hematita, pirrotina o pirita magnética, entre otros. Bajo la acción del campo geomagnético, las rocas adquieren entonces una magnetización total (J) la cual es expresada como $J = J_i + J_r$.

Las unidades asociadas con la intensidad del campo magnético son newtons por ampere·metro (N/Am), donde un $NA^{-1}m^{-1}$ es conocido como un tesla (T). En Geofísica, es común usar la unidad $10^{-9} T = 1nT$ (nanotesla).

Similarmente al caso gravimétrico, se requiere hacer correcciones a las observaciones del campo magnético, que aunque son pocas y más simples, son importantes en la determinación precisa de los valores de magnetización. Las correcciones que se aplican son: (1) *Correcciones diurnas*, las cuales toman en cuenta las variaciones temporales del campo geomagnético dependiendo de la hora del día. Estas variaciones del campo son asociadas con tormentas magnéticas provenientes del sol y otros fenómenos. (2) *Correcciones por variaciones espaciales*, esta corrección es requerida para tomar en cuenta la variación de la intensidad del campo geomagnético con la latitud y la longitud, por medio del Campo Geomagnético Internacional de Referencia (IGRF por sus siglas en inglés). (3) *Correcciones de elevación y del terreno*, estas son útiles únicamente en regiones donde se presentan cambios muy abruptos en la topografía.

Algunas de las aplicaciones del método magnético son similares a las del método gravimétrico, por ejemplo, se utiliza en la determinación de la profundidad del basamento, así como de cavidades y túneles en el subsuelo. También es usado en la identificación de estructuras geológicas tales como fallas, diques, fronteras litológicas, etc. Es particularmente aplicado en arqueología y minería para la detección de cuerpos metálicos y utensilios de arcilla. Algunos ejemplos de aplicaciones del método magnético se encuentran en Sharma (2004).

III. 2. Modelado 3D

Una parte fundamental en el proceso de inversión es conocer la respuesta de un modelo de una propiedad física del subsuelo (en este caso densidad y magnetización), con la cual se comparan los datos observados en la superficie. En la literatura (Grant y West, 1965; Telford et al., 1976; Dobrin y Savit, 1988; entre otros) es ampliamente descrita la respuesta analítica gravimétrica y magnética de algunas estructuras geométricas conocidas a diferentes profundidades y de distintas dimensiones, tales como la esfera (Figura 21), el cilindro, prismas rectangulares y losas. Sin embargo, debido a que en la naturaleza las formas que adquieren las diferentes estructuras de rocas son más complejas, usamos aproximaciones de éstas suponiendo

que el subsuelo consta de un agregado de formas geométricas conocidas. De esta manera, la respuesta gravimétrica y magnética será la suma de los campos producidos por cada cuerpo básico.

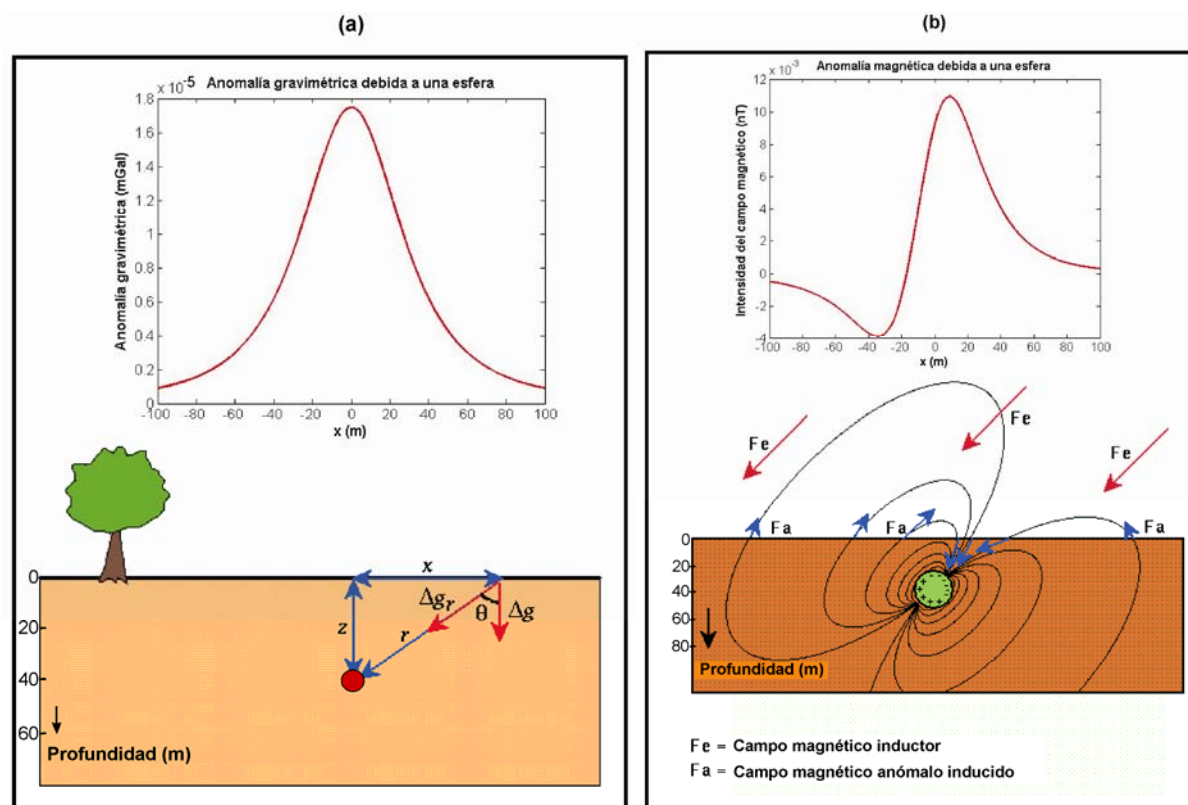


Figura 21. Ejemplos de la respuesta gravimétrica (a) y magnética (b) de una esfera enterrada a una profundidad de 40 m al centro de la esfera y radio de 10 m. El contraste de densidad entre la esfera y el medio circundante es de 1 kg/m^3 . La susceptibilidad magnética de la esfera es de 1 y la intensidad del campo magnético total de 10 nT. La anomalía gravimétrica es simétrica, mientras que la anomalía magnética es asimétrica debido a la dirección del campo principal de la Tierra o campo inductor, el cual, para este ejemplo, tiene una inclinación $I=45^\circ$.

Aunque cualquier medio o cuerpo puede ser dividido en elementos con formas geométricas arbitrarias para su modelado, una técnica muy utilizada en la práctica, debido a su relativa facilidad de visualización geométrica, planteamiento matemático y computacional, consiste en la discretización del medio en prismas rectangulares. En esta sección expondremos la respuesta gravimétrica y magnética de un prisma rectangular, basados en el desarrollo propuesto por Gallardo Delgado (1997). El campo gravitacional del paralelepípedo rectangular es

básicamente lo desarrollado por Banerjee y Gupta (1977).

Una vez obtenido el campo gravitacional producido por un prisma rectangular de densidad uniforme, así como el campo magnético producido por un prisma rectangular de magnetización uniforme, desarrollamos un esquema numérico con el cual se obtiene el campo gravitacional y magnético observado en superficie de estructuras geológicas más complejas. En este caso suponemos que el modelo de densidad y magnetización 3D se puede dividir en un conjunto de prismas que cubren el volumen total del modelo (Figura 22) y con ello la respuesta gravimétrica y magnética consiste de la suma de los campos producidos por cada prisma.

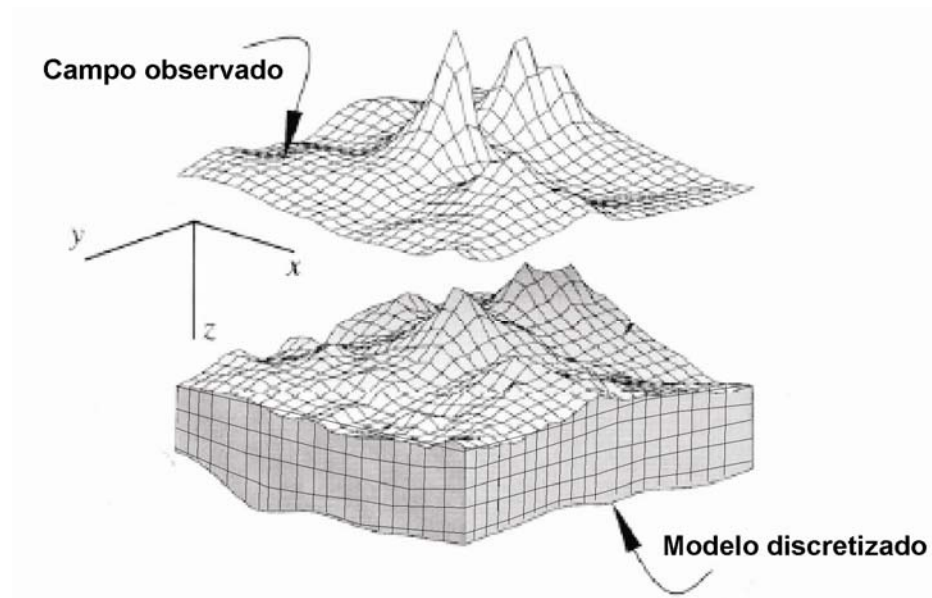


Figura 22. Esquema de un modelo de densidad o magnetización discretizado en paralelepípedos rectangulares y su campo observado en superficie. Figura modificada de Blakely (1996).

III. 2. 1. Modelado directo de datos gravimétricos

El efecto gravimétrico de un prisma rectangular con densidad uniforme, se obtiene de la ley de Newton de Gravitación Universal:

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\Delta \vec{r}|^2} \Delta \hat{r}, \quad (61)$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza de atracción entre las dos masas m_1 y m_2 , γ es la constante gravitacional y $|\Delta\vec{r}|$ es la distancia entre las dos masas m_1 y m_2 . Esta expresión se cumple cuando la distancia que separa a los cuerpos es relativamente más grande que las dimensiones de los mismos.

Combinando ahora la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m_2\vec{g}$ (que relaciona la fuerza con la aceleración), con la ley de atracción de masas (61) se tiene:

$$\vec{g} = \gamma \frac{m_1}{|\Delta\vec{r}|^2} \Delta\hat{r}. \quad (62)$$

Tomando en cuenta la Figura 23, considerando elementos diferenciales de volumen dv , con densidad ρ , la ecuación (62) se puede escribir como

$$\vec{dg}(\vec{r}) = \gamma \frac{\rho(\vec{r}')}{|\Delta\vec{r}|^2} \Delta\hat{r} dv. \quad (63)$$

El efecto total del prisma se obtiene integrando en todo el cuerpo. Tomando la componente vertical g_z como el valor a determinar se obtiene la expresión:

$$g_z(\vec{r}) = \gamma \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho(\vec{r}')(z'-z)}{|\Delta\vec{r}|^3} dx' dy' dz'. \quad (64)$$

Ahora, tomando en cuenta que el prisma tiene densidad constante, el término de la densidad sale de la integral y la ecuación (64) se simplifica. Resolviendo las integrales (Apéndice B) llegamos a una expresión para la componente vertical de la atracción gravitacional (g_z) de un prisma rectangular de densidad constante en un punto (x_0, y_0, z_0) :

$$g_z(x_0, y_0, z_0) = \gamma\rho \left\{ z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) - x \ln(r+y) - y \ln(r+x) \right\} \bigg|_{\Delta x_1}^{\Delta x_2} \bigg|_{\Delta y_1}^{\Delta y_2} \bigg|_{\Delta z_1}^{\Delta z_2}. \quad (65)$$

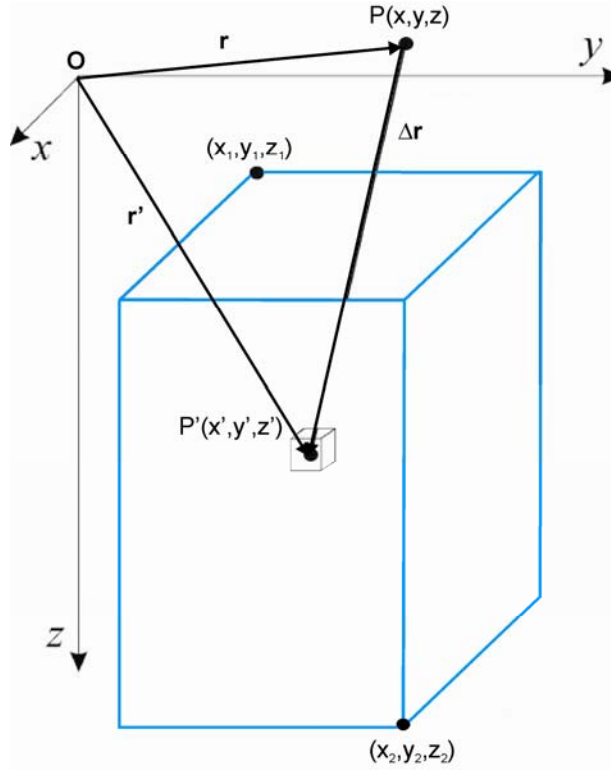


Figura 23. Prisma básico de densidad y magnetización uniforme. Los lados del prisma son paralelos a los ejes cartesianos, z_1 corresponde a la profundidad al techo del prisma y z_2 al piso de este.

Ahora, la ecuación que nos proporciona la respuesta gravimétrica de un conjunto de prismas está dada por:

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{m}_1, \quad (66)$$

donde $\mathbf{A}_1$ es la matriz que muestra el efecto de cada uno de los prismas sobre los datos y que coincide, debido a la linealidad sobre ρ en (65), con la matriz de derivadas parciales o matriz de sensibilidad entre los datos y parámetros que aparece en (34). En este caso $\mathbf{m}_1$ representa el modelo de densidad y $\mathbf{d}_1$ son los datos observados en superficie. Numéricamente, la matriz $\mathbf{A}_1$

se construye calculando la expresión $A_{ij} = \gamma \left\{ z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) - x \ln(r+y) - y \ln(r+x) \right\} \left| \begin{matrix} \Delta x_2^j \\ \Delta x_1^j \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \Delta y_2^j \\ \Delta y_1^j \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \Delta z_2^j \\ \Delta z_1^j \end{matrix} \right|$

para cada punto de observación i . Luego, multiplicamos la matriz obtenida por los valores propuestos de densidad ρ_j para cada prisma j .

III. 2. 2. Modelado directo de datos magnéticos

Similarmente al modelado directo de datos gravimétricos (Sección III.2.1.), desarrollaremos el esquema matemático para obtener una expresión del campo magnético de un prisma con magnetización uniforme, siguiendo el desarrollo propuesto por Gallardo Delgado (1997).

Primeramente consideramos la expresión del potencial magnético escalar $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ de un cuerpo como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = C \iiint_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) dv', \quad (67)$$

donde los factores que intervienen en (67) se definen siguiendo la notación de la Figura 23:

$\mathbf{r}$ es el radio vector al punto de análisis,

$\mathbf{r}'$ es el radio vector al elemento diferencial del cuerpo,

C es la constante magnética dada por $C = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$.

$\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ es el vector de magnetización del elemento diferencial del cuerpo.

El campo magnético $\mathbf{T}$ producido por un cuerpo es:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = -\nabla(\mathbf{A}(\mathbf{r})). \quad (68)$$

Sustituyendo (67) en (68) se tiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = -C \nabla \iiint_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) dv'. \quad (69)$$

De acuerdo a la Figura 23, suponiendo una magnetización uniforme en todo el cuerpo, el campo magnético $\mathbf{T}(x, y, z)$ en un punto cualquiera es:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = -C \nabla \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) dx' dy' dz', \quad (70)$$

la cual, después de resolver las integrales y emplear expresiones matriciales (Apéndice C) se puede escribir como

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = C \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \end{matrix} \begin{matrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix}, \quad (71)$$

donde

$$\Delta x = x' - x, \Delta y = y' - y, \Delta z = z' - z,$$

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

y J_x , J_y y J_z son las componentes del vector de magnetización en las direcciones x , y y z , respectivamente.

Si se trabaja con mediciones en la dirección del campo magnético terrestre, la componente del campo medido en esta dirección (T) será:

$$T = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}), \quad (72)$$

donde $\mathbf{U}^T = (l \ m \ n)$ y l, m, n son los cosenos directores del vector del campo magnético terrestre, quedando así

$$T(x_0, y_0, z_0) = C [l \ m \ n] \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \end{matrix} \begin{matrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \quad (73)$$

Para simplificar el problema suponemos que no hay magnetización remanente y por lo tanto que $\mathbf{J}$ es paralela a la dirección del campo geomagnético dada por los mismos cosenos directores (l, m, n) . Bajo esta suposición la ecuación (73) se simplifica a:

$$T(x_0, y_0, z_0) = CJ[l \ m \ n] \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \\ \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (74)$$

donde J es la magnetización total en la dirección del campo geomagnético.

Las ecuaciones (65) y (74) son las expresiones básicas que utilizaremos para encontrar la respuesta gravimétrica y magnética de los modelos de densidad y magnetización, respectivamente, que se muestran en la siguiente sección. Similarmente a la ecuación (66) para el caso gravimétrico, la ecuación

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{m}_2 \quad (75)$$

proporciona la respuesta magnética de un conjunto de prismas representados por $\mathbf{m}_2$, donde $\mathbf{A}_2$ es también la matriz que muestra el efecto de cada uno de los prismas sobre los datos $\mathbf{d}_2$ y que es calculada numéricamente como

$$A_{ij} = [l \ m \ n] \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta x_2^j \\ \Delta y_2^j \\ \Delta z_2^j \\ \Delta x_1^j \\ \Delta y_1^j \\ \Delta z_1^j \end{matrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (76)$$

para cada prisma j y observación i .

III. 2. 3. Ejemplos del modelado directo de datos gravimétricos y magnéticos

Dado que el principal propósito de este trabajo es aplicar y validar el método de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados en modelos con estructuras geométricas simples y complejas, seleccionamos algunos modelos de densidad y magnetización que serán utilizados para este fin en el proceso de inversión y para lo cual es necesario conocer primeramente la

respuesta del modelado directo. Los modelos son presentados de acuerdo a sus heterogeneidades estructurales tridimensionales comenzando con un modelo de prueba simple que consiste de un cubo enterrado, hasta estructuras mayormente heterogéneas como lo es un dique intruido. Estos modelos son una representación simplificada de aquellos que podemos encontrar en el subsuelo real.

El primer modelo de densidad y magnetización 3D que presentamos, consiste de un cubo de 20 m por cada lado enterrado a una profundidad de 30 m, como el que se muestra en la Figura 24. El cubo de densidad y magnetización con valor de 1.0 g/cm^3 y 1.0 A/m , respectivamente, se encuentra enterrado en un medio de densidad y magnetización igual a 0, por lo que en términos geofísicos suponemos que los valores están relacionados a un contraste de densidad y magnetización. Las dimensiones de todo el dominio son de 80 m por cada lado.

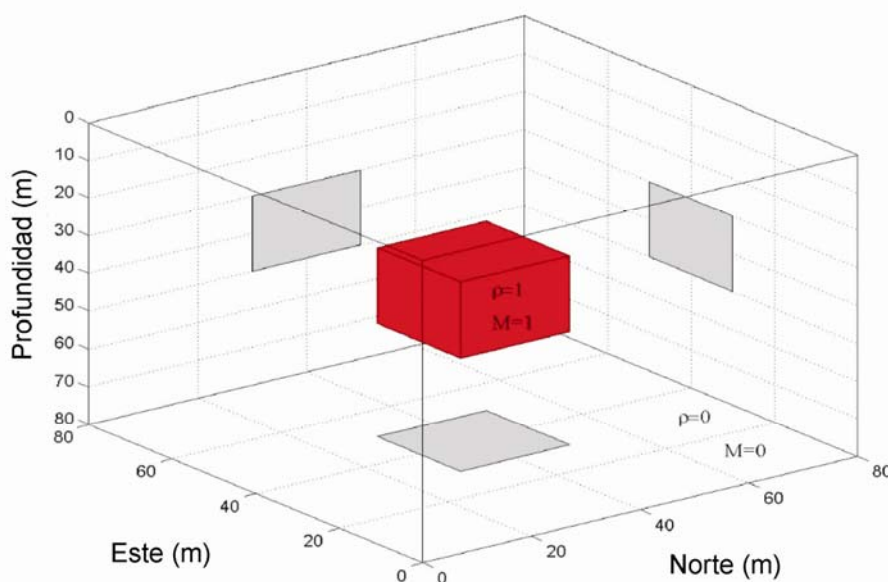


Figura 24. Modelo de un cubo con contraste de densidad y magnetización de 1.0 g/cm^3 y 1.0 A/m , respectivamente. Los cuadros en gris son las proyecciones de las caras del cubo.

Se consideraron 1681 mediciones de gravedad y campo magnético sobre la superficie del modelo, espaciadas cada 2 m. El experimento consistió de un agregado de 2048 prismas rectangulares de 5 m por cada lado y 10 m en profundidad. Las anomalías gravimétrica y magnética calculadas para el modelo de la Figura 24, se muestran en la Figura 25.

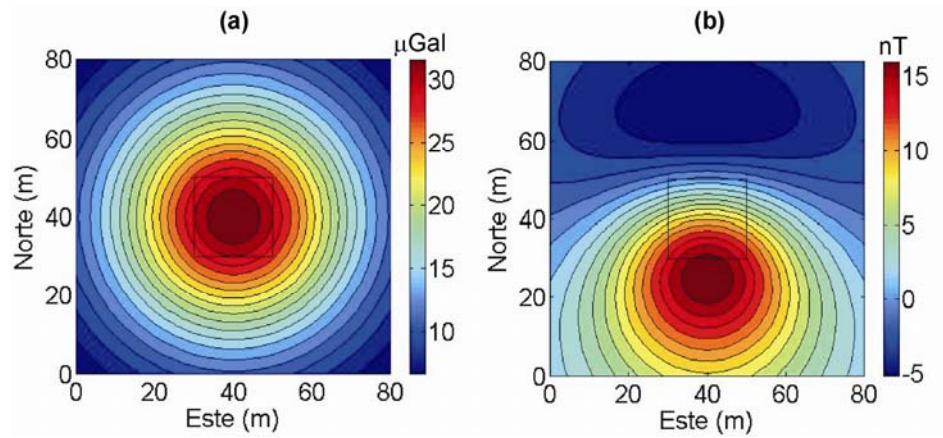


Figura 25. Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b), producidas por el modelo del cubo presentado en la Figura 21. La línea continua representa la proyección del cubo en superficie.

En la Figura 25a se observa una anomalía gravimétrica positiva y simétrica, con valores de gravedad más altos en la región de mayor densidad, lo cuales decaen hacia las fronteras del dominio. La Figura 25b muestra la anomalía magnética calculada, para la cual la dirección del campo magnético inductor se consideró como $D=0^\circ$ e $I=51^\circ$, por lo tanto la anomalía aparece asimétrica en la dirección sur a norte con valores positivos y negativos. En este caso es posible hacer un comparativo con el efecto de un prisma de densidad 1.0 g/cm^3 , magnetización 1.0 A/m y dimensiones como las mostradas en la Figura 24, usando las ecuaciones analíticas (65) y (74) para un punto de observación. El valor observado de gravedad en el punto $g_z(x_0, y_0, z_0) = g_z(40, 40, 80) = 33.20 \mu\text{Gal}$, mientras que el valor del campo magnético en el mismo punto es de $T(40, 40, 80) = 10.01 \text{ nT}$, los cuales coinciden con los valores en la misma posición de los campos mostrados en la Figura 25, con lo que podemos concluir que para estos ejemplos, el efecto de muchos prismas rectangulares que forman el cuerpo cúbico es congruente con el efecto de uno solo que cubre la totalidad del cuerpo.

Es de notar que las anomalías mostradas en la Figura 25 se ven truncadas debido a que las observaciones en superficie no estuvieron suficientemente alejadas de la fuente. De esta manera, si extendemos las mediciones fuera del dominio de estudio, las anomalías que se observan aparecen mayormente extendidas como las mostradas en la Figura 26, mostrando claramente su comportamiento entre los valores máximo y mínimo. Aplicando la ley de Gauss

para campos gravimétrico y magnético $\oint_s \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi Gm$ y $\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ respectivamente, vemos que el campo calculado es más preciso conforme aumenta el área en la superficie s , ya que es posible recuperar e integrar mayor información de los campos $\vec{g}$ y $\vec{B}$.

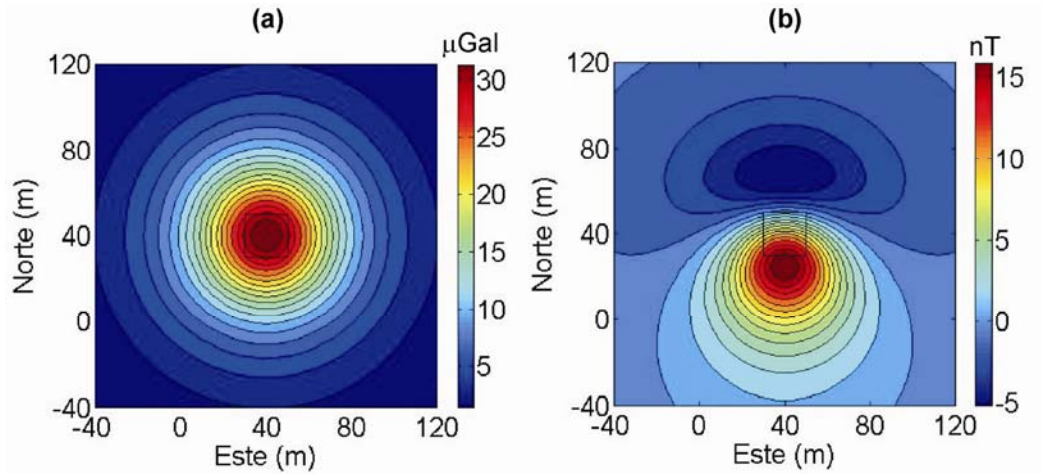


Figura 26. Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b), producidas por el modelo del cubo de la Figura 21, con datos de gravedad y campo magnético medidos fuera del dominio de interés (obsérvense las dimensiones este y norte). La línea continua representa la proyección del cubo en superficie.

Dado que se trabajará con medios heterogéneos en casos reales, es conveniente analizar el resultado de un agregado de prismas cuyo efecto se interfiere positiva y negativamente. La capacidad de desacoplar esta interferencia será la clave de la recuperación de la distribución de densidad y magnetización en el problema inverso. La interferencia destructiva representa varios retos tales como: anomalías gravimétricas y magnéticas menos intensas y cambios más contrastantes en los modelos del subsuelo que serán contrarios a las hipótesis de suavidad y difícilmente recuperados por la condición de gradientes cruzados, como se mostró en la Sección II.5., para los ejemplos sintéticos sin datos geofísicos.

Para analizar los casos en que ocurre dicha interferencia mostramos el siguiente ejemplo que consiste de dos cubos con diferentes contrastes de densidad y magnetización, *caso 1*: contrastes positivos con respecto al medio circundante (Figura 27a), *caso 2*: contrastes positivo y negativo para cada uno de los bloques (Figura 27b) y *caso 3*: contrastes negativos de los bloques con respecto al medio circundante (Figura 27c). Las características de los modelos son similares

al ejemplo anterior en cuanto al número y posición de los datos medidos en superficie, número de prismas que conforman la discretización del dominio, dimensiones de los bloques de densidad y magnetización y la dirección del campo magnético inductor.

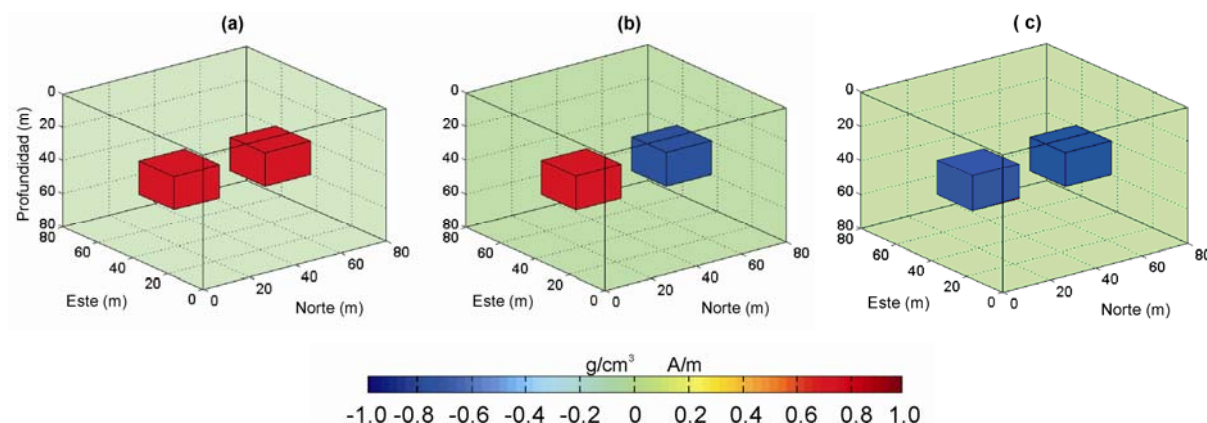
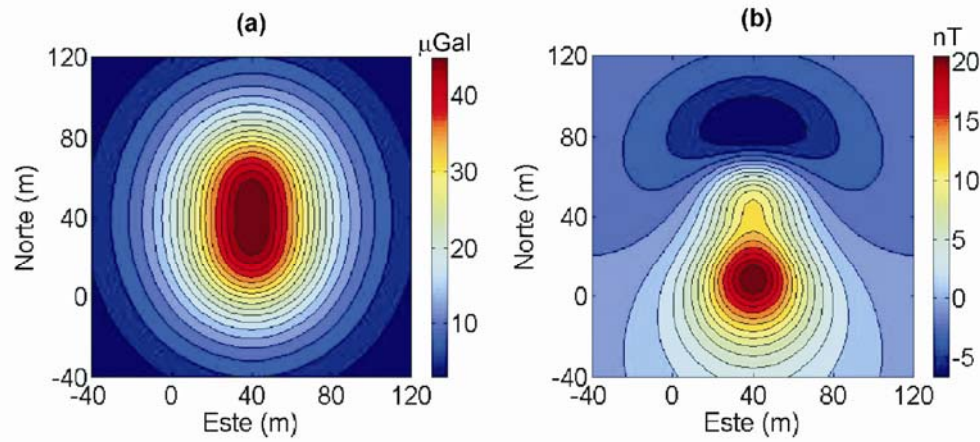


Figura 27. (a) *Caso 1*: modelo de dos cubos con contrastes de densidad y magnetización positivos, 1.0 g/cm^3 y 1.0 A/m , respectivamente; (b) *caso 2*: modelo con un bloque con contraste positivo y otro negativo y (c) *caso 3*: representa un contraste de los parámetros físicos negativo (-1.0 g/cm^3 y -1.0 A/m).

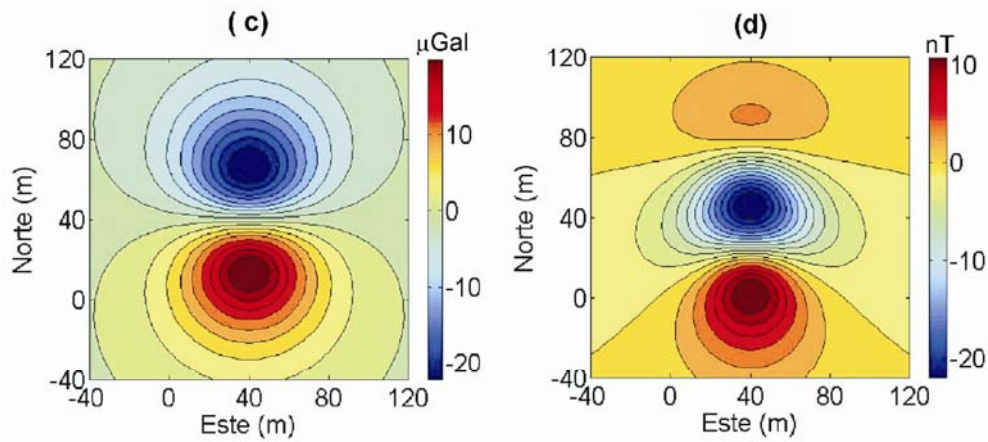
Las anomalías gravimétrica y magnética calculadas para cada caso son mostradas en la Figura 28. En el caso de contrastes positivos de los bloques (*caso 1*) vemos que la anomalía gravimétrica (Figura 28a) no detecta las estructuras individualmente sino la contribución de los dos bloques, lo que representa una desventaja en el proceso inverso para identificar si ésta es debida a un solo cuerpo o son dos con sus efectos sumados. Aunque la anomalía magnética (Figura 28b) presenta mayor complejidad en su forma, ésta es útil para identificar los diferentes cuerpos que producen la anomalía, aunque puede confundirse aún el tamaño o la profundidad de éstos. El caso del modelo con un contraste positivo y otro negativo (*caso 2*) muestra dos cuerpos productores de las anomalías a través de los cambios positivos y negativos de ésta (Figuras 28c y d). En este caso puede ser más fácil recuperar los cuerpos productores en un problema inverso. Sin embargo, el criterio de suavidad es un aniquilador de heterogeneidades en la estructura de los modelos, pero la búsqueda de modelos con gradientes cruzados igual a cero es mucho más estable en un medio con pocas heterogeneidades estructurales. El caso del modelo con contrastes negativos (*caso 3*) (Figuras 28e y f) es similar al comportamiento de las anomalías producidas

por dos bloques con contrastes positivos. Igualmente, ambos contrastes de densidad y magnetización suman su efecto para obtener un valor negativo dos veces mayor que el producido por uno solo de los bloques.

Caso 1: contraste positivo de ambos bloques



Caso 2: contraste positivo y negativo



Caso 3: contrastes negativos de ambos bloques

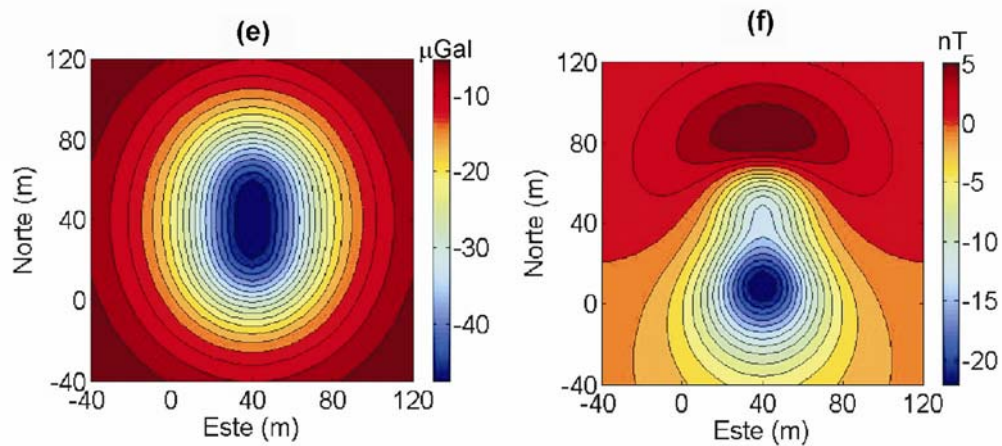


Figura 28. Anomalías gravimétricas (a, c y e) y magnéticas (b, d y f) producidas por los modelos de dos cubos mostrados en la Figura 27, con datos de gravedad y campo magnético medidos fuera del dominio (obsérvense las dimensiones este y norte).

El tercer experimento que presentamos consiste de un dique enterrado a una profundidad de 50 m (Figura 29), el cual coincide con el presentado por Li y Oldenburg (1998). En este caso el modelo presenta más heterogeneidades tridimensionales que los modelos anteriores por lo que su estudio representa un mayor reto en el proceso inverso. Además, puede ser comparado con modelos complejos que podemos encontrar en casos reales.

Similarmente a los casos presentados anteriormente, los valores de densidad y magnetización para el dique se consideraron 1.0 g/cm^3 y 1.0 A/m , respectivamente y valores nulos para el medio que lo contiene. El modelo tiene dimensiones de 1000 m en las direcciones norte y este y 500 m en profundidad. La Figura 29 muestra secciones del modelo del dique 3D.

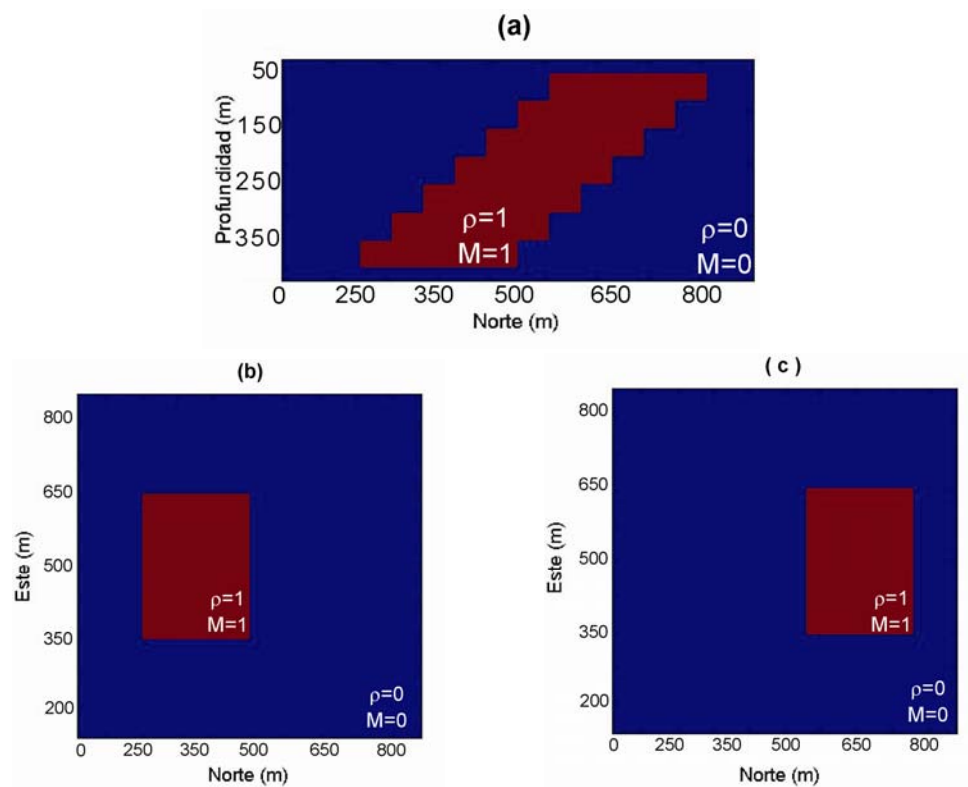


Figura 29. Secciones del modelo de un dique 3D: (a) muestra una sección de la profundidad en la posición este = 500 m, (b) es una sección en planta sobre la base del dique (profundidad = 400 m) y (c) es una vista en planta en la cima del dique (profundidad = 50 m). La densidad está representada por ρ (g/cm^3) y la magnetización por M (A/m).

En este experimento se consideraron 2016 prismas rectangulares en una malla no homogénea con un arreglo de $16 \times 14 \times 9$ en la dirección norte, este y profundidad, respectivamente. La dirección del campo inductor se consideró como $D=45^\circ$ y $I=45^\circ$. Los datos en superficie se tomaron dentro de una malla homogénea cada 50 m. De esta manera las anomalías producidas por el modelo del dique se muestran en la Figura 30.

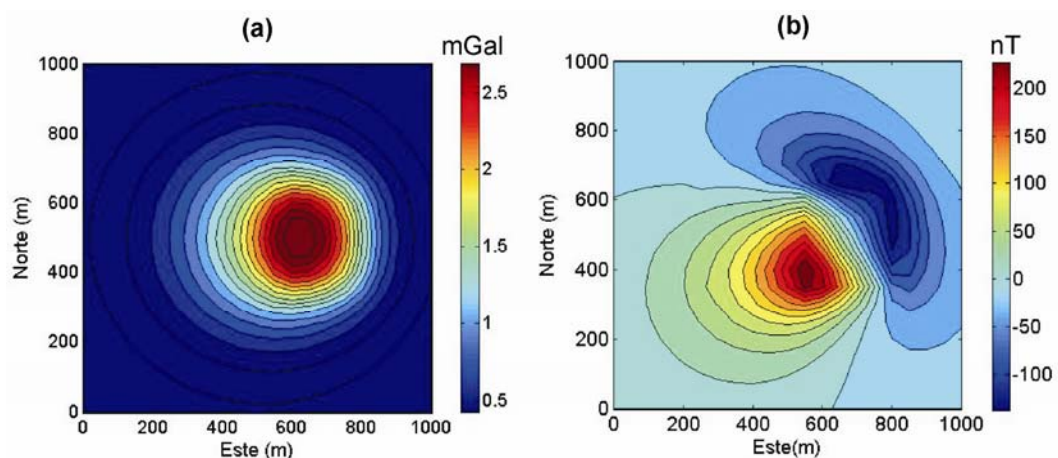


Figura 30. Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b) producidas por el modelo del dique mostrado en la Figura 29.

Debido a la asimetría del modelo del dique y en el caso de la anomalía magnética, a la influencia de la dirección del campo inductor, las anomalías de la Figura 30 se ven asimétricas con mayor contribución de la parte superficial del dique, lo que también ocasiona que aparezcan los rasgos superficiales del dique en la anomalía debido a la cercanía donde fueron tomadas las observaciones. Las anomalías coinciden en su forma y posición a las obtenidas por Li y Oldenburg (1998) siendo estas últimas contaminadas por ruido.

El análisis de las anomalías es útil como primera aproximación al conocimiento de las estructuras de parámetros físicos en el subsuelo. Por ejemplo, la información que proporcionan acerca de los contrastes positivos y negativos de las estructuras ayuda a tener idea de los tipos de materiales que podrían ser encontrados. Estudiar casos sintéticos despierta la sensibilidad para determinar factores y condiciones que deben ser considerados en un problema real y permite comprobar el funcionamiento de los algoritmos desarrollados. Más aún, el modelado directo es un requisito indispensable para llevar a cabo la inversión de datos.

Capítulo IV

Inversión conjunta 3D de datos gravimétricos y magnéticos mediante gradientes cruzados

En el Capítulo II desarrollamos la formulación matemática a partir de la cual podemos llevar a cabo experimentos de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados para dos conjuntos de datos geofísicos. Después, en el Capítulo III describimos la metodología para obtener los campos producidos, observados en la superficie de la Tierra, por diferentes modelos 3D de densidad y magnetización. Con estas herramientas básicas, analizaremos en el presente capítulo los resultados de la aplicación del proceso de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados en experimentos controlados y de campo. En los experimentos sintéticos (Sección IV.1.) se analizan modelos en los que los cambios litológicos se manifiestan en ambas propiedades físicas, mientras que en el experimento con datos de campo (Sección IV.2.) se discute el caso donde un cambio litológico va acompañado de un cambio en sólo una de las propiedades físicas.

IV. 1. Experimentos sintéticos

Llevamos a cabo diversos experimentos sintéticos con el fin de validar la formulación propuesta, así como analizar el papel que juegan varios criterios de regularización, comúnmente empleados en la inversión de datos gravimétricos y magnéticos, al invertirlos conjuntamente empleando gradientes cruzados y de esta manera observar las ventajas y limitaciones de la técnica de gradientes cruzados 3D para cada uno de ellos. Analizaremos los resultados de la inversión conjunta de los modelos presentados en el Capítulo III. El primer caso consiste de un experimento sencillo (modelo del cubo), con el cual mostramos el alcance de la técnica de gradiente cruzados para determinar profundidad de estructuras someras, dimensión y posición en el espacio 3D. Asimismo, establecemos los factores principales que intervienen en la buena determinación de estas características. También, es interesante conocer en qué casos esta

técnica proporciona valores realistas de los parámetros, lo cual queda mejor determinado en el segundo experimento sintético. El tercer y cuarto experimentos (modelo de un dique y modelo del cubo, respectivamente) ayudarán en el análisis de modelos más complejos con diferentes simetrías y con efectos en profundidad. Añadimos también un quinto experimento, con el modelo del cubo, para mostrar formas alternativas de restringir algunas zonas de los modelos en profundidad y lateralmente. Concluimos este capítulo aplicando la metodología de gradientes cruzados a un experimento con datos reales y observamos los alcances de la técnica de inversión en un medio donde las técnicas geofísicas utilizadas reconocen diferentes estructuras, por lo que su estudio resulta de mayor interés.

IV. 1. 1. Experimento I. Modelo de un cubo con suavidad homogénea.

Como en la mayoría de los casos en que se propone una nueva formulación teórica, para validar los resultados de la formulación de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados, comenzamos con un modelo simple en su estructura como el mostrado en la Figura 24 (Capítulo III). Este modelo ha sido usado para validar otras metodologías de inversión como las propuestas por Li y Oldenburg (1996, 1998) así como Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002).

Características de los datos

El proceso de inversión se llevó a cabo considerando una discretización del modelo de inversión, similar a la discretización utilizada para el modelado directo, es decir, el experimento consistió de un agregado de 2048 prismas rectangulares de 5 m por cada lado y 10 m en profundidad. Se agregó ruido aleatorio Gaussiano a los datos de la Figura 25, con desviación estándar del 2% de la máxima amplitud de cada anomalía, quedando como datos observados los mostrados en la Figura 31. Las características de estas anomalías fueron descritas en la Sección III.2.3., para las cuales cabe resaltar que se aprecian anomalías truncadas hacia las fronteras del dominio.

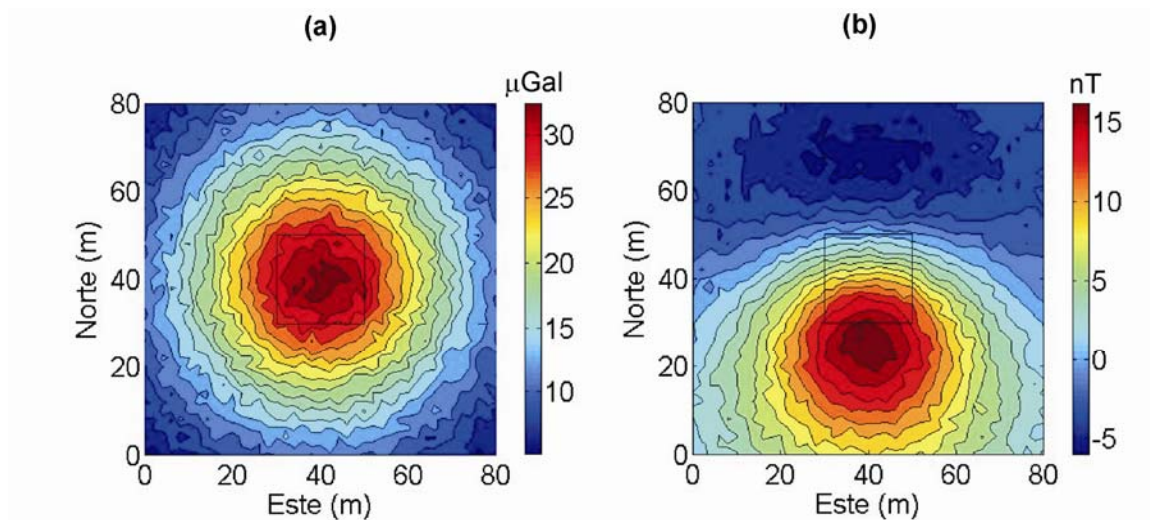


Figura 31. Anomalía gravimétrica (a) y magnética (b), producidas por el modelo del cubo de la Figura 24. Los datos fueron contaminados por ruido aleatorio Gaussiano. En ambos conjuntos de datos la desviación estándar del ruido agregado es del 2% de la máxima amplitud de la anomalía. La línea continua representa la proyección del cubo en superficie.

Descripción de los parámetros de inversión

La Tabla II muestra los factores de peso y parámetros de control que fueron utilizados y establecidos en cada experimento. Tomando en cuenta los parámetros establecidos para el Experimento I, obtuvimos los modelos mostrados en la Figura 32. En este caso seleccionamos parámetros de regularización del término de suavidad (α_g^2 y α_m^2) tales que proporcionaron un adecuado ajuste a los datos así como modelos con mejores rasgos característicos del cubo, como se muestra en el caso de inversión separada en la Figura 32. Sin embargo, si seleccionamos valores más pequeños para α_g^2 y α_m^2 , obtenemos modelos rugosos que si bien ajustan los datos, distorsionan las características estructurales del cubo y del medio homogéneo, alejándose también de valores realistas de las propiedades físicas. Lo contrario sucede si seleccionamos valores más grandes para dichos coeficientes de regularización, en este caso obtenemos modelos muy suaves, llegando a ser planos, que no distinguen las fronteras de las principales estructuras y el ajuste a los datos llega a ser siete unidades superior al valor normalizado. Este

comportamiento es estándar para todos los experimentos, de acuerdo a las hipótesis de suavidad impuestas en el problema de optimización.

La elección de modelos a priori nulos está asociada con los casos reales en que no tenemos información sobre la distribución de los parámetros y sus valores en el subsuelo, por lo que en muchos casos es conveniente proponer un valor constante. El grado de desconocimiento de dichos modelos a priori nos conduce a establecer los valores de covarianza de dichos modelos. En este caso, los valores de covarianza del modelo a priori (σ_g^2 y σ_m^2), permiten que los modelos estimados en el proceso de inversión no presenten sesgo o tendencia hacia los modelos a priori establecidos, imponiendo menores restricciones en la estimación de los modelos.

Tabla II: Factores de peso y parámetros de control establecidos en cada experimento de prueba de la formulación de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados.

No. Exp.	Covarianza de la suavidad C_{L_1} y C_{L_2}	Modelo a priori $\mathbf{m}_1^{\text{apr}}$ y $\mathbf{m}_2^{\text{apr}}$	Covarianza del modelo a priori C_{m_1} y C_{m_2}	Nivel de corte de la DVS
I	$\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^6$	$\mathbf{m}_g^{\text{apr}} = \mathbf{0}$ $\mathbf{m}_m^{\text{apr}} = \mathbf{0}$	$\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$
II	$\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^4$	$\mathbf{m}_g^{\text{apr}} = \mathbf{0}$ $\mathbf{m}_m^{\text{apr}} = \mathbf{0}$	$\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-10}$
III	$\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^9$	$\mathbf{m}_g^{\text{apr}} = \mathbf{0}$ $\mathbf{m}_m^{\text{apr}} = \mathbf{0}$	$\sigma_g^2(z) = \sigma_m^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 450 \\ 0.01, & 450 \leq z \leq 500 \end{cases}$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$
IV	$\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 0$	$\mathbf{m}_g^{\text{apr}} = \mathbf{0}$ $\mathbf{m}_m^{\text{apr}} = \mathbf{0}$	$\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$
V	$\alpha_g^2(z) = \alpha_m^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 70 \\ 100, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases}$	$\mathbf{m}_g^{\text{apr}} = \mathbf{0}$ $\mathbf{m}_m^{\text{apr}} = \mathbf{0}$	$\sigma_g^2(z) = \sigma_m^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 70 \\ 1 \times 10^{-4}, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases}$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$

Nota: Los subíndices 1 y 2 de la formulación teórica presentada en el Capítulo II, representan específicamente gravimetría y magnetometría mediante el subíndice “g” y “m”, respectivamente. Si no se especifica otra cosa, los valores son interpretados como constantes para todo el espacio del modelo.

Descripción de los modelos

Los modelos de la Figura 32 muestran una comparación entre resultados obtenidos con inversión separada y conjunta, con el propósito de evaluar las principales ventajas de la formulación de inversión conjunta 3D. Podemos observar que los modelos de densidad y magnetización, obtenidos después de inversión separada, muestran una

distribución de los parámetros físicos extendida hacia el fondo. Sin embargo, el modelo de magnetización comienza a determinar algunos rasgos estructurales del cubo. Los modelos de inversión separada muestran una distribución de los parámetros desviada del modelo real. Comparativamente, los resultados de inversión conjunta mejoran notablemente las características estructurales principales, disminuyendo el exceso de masa en profundidad y ubicando el cubo más cerca de su posición original. Podemos observar también que en ambos casos sólo es alcanzado el 10% del valor real de la densidad y magnetización del cubo.

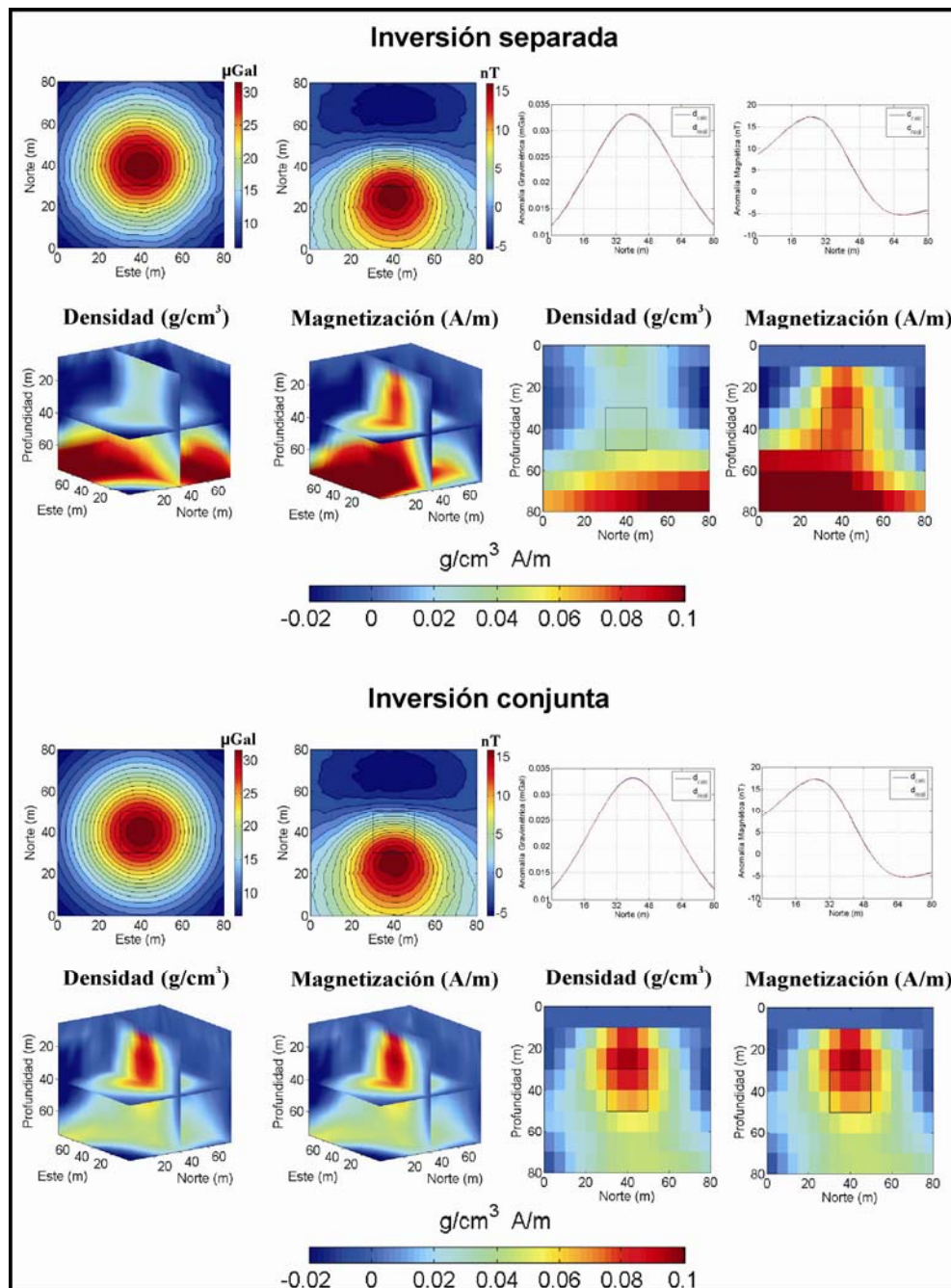


Figura 32. Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta. Los modelos 3D tienen asociado su campo gravimétrico y magnético correspondiente sobre la superficie. Las secciones de los modelos son tomadas en la posición *este* = 40 m y muestran asimismo la anomalía producida sobre dicha sección. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Ajuste a los datos

Para mostrar evidencia del nivel de estabilidad del proceso iterativo de inversión conjunta, mostramos gráficas del ajuste de los datos (Figura 33a) en cada iteración, así como de la convergencia (Figura 33b). El ajuste de los datos fue calculado con las ecuaciones

$$\text{rms}_g = \sqrt{\frac{[\mathbf{d}_g - \mathbf{f}_g(\mathbf{m}_g)]^T \mathbf{C}_{d_g}^{-1} [\mathbf{d}_g - \mathbf{f}_g(\mathbf{m}_g)]}{md_g}} \quad (77)$$

y

$$\text{rms}_m = \sqrt{\frac{[\mathbf{d}_m - \mathbf{f}_m(\mathbf{m}_m)]^T \mathbf{C}_{d_m}^{-1} [\mathbf{d}_m - \mathbf{f}_m(\mathbf{m}_m)]}{md_m}}, \quad (78)$$

donde los subíndices g y m se refieren a gravimetría y magnetometría y md_g y md_m corresponden al número de datos gravimétricos y magnéticos, respectivamente. La convergencia es obtenida como un porcentaje, usando:

$$\text{conv}_g(\%) = 100 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left((\mathbf{m}_g^k)_i - (\mathbf{m}_g^{k-1})_i \right)^2}{(\mathbf{m}_g^{k-1})_i^2 + \varepsilon}}{n}} \quad (79)$$

y

$$\text{conv}_m(\%) = 100 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left((\mathbf{m}_m^k)_i - (\mathbf{m}_m^{k-1})_i \right)^2}{(\mathbf{m}_m^{k-1})_i^2 + \varepsilon}}{n}}. \quad (80)$$

En la Figura 33a se observa que comenzamos con modelos de inversión separada que ajustan bien los datos, lo cual se comprueba con el valor rms de la primera iteración. En la segunda iteración vemos que el modelo gravimétrico sufre una modificación significativa adoptando la estructura del modelo magnético, que lo lleva a un modelo que no ajusta los datos ($\text{rms} \approx 2$) y se aleja del modelo anterior ($\text{conv}_g > 200\%$), mientras

que el modelo magnético permanece sin cambios significativos. En esta etapa la restricción de la nulidad de gradientes cruzados comienza la búsqueda de modelos estructuralmente similares. A partir de la tercera iteración los modelos obtenidos ajustan los datos dentro de un nivel adecuado. Sin embargo, comienzan a modificarse tratando de reducir la estructura anómala en el fondo y por lo tanto alternando modelos que se parezcan o se desvíen del anterior, lo cual se observa en los cambios de convergencia de la Figura 33b, hasta llegar a un nivel más estable. Podemos decir que estos brincos se asocian a incertidumbre en los modelos (ya que todos ellos ajustan en promedio los datos) y dado que todos los modelos son compatibles estructuralmente, todas estas inestabilidades también son estructuralmente compatibles. Es decir, como si nos moviéramos en un espacio de ambigüedades restringido a sólo aquéllas en donde los modelos son estructuralmente compatibles.

En este caso, los modelos de inversión conjunta analizados corresponden a la 6ª iteración del proceso y en cualquier caso son seleccionados de acuerdo al mejor ajuste de los datos y al menor porcentaje de convergencia alcanzado simultáneamente por los dos modelos, ya que en realidad este criterio se puede interpretar más como una medida de la divergencia entre el modelo actual y el modelo previo.

Este comportamiento de inestabilidad del proceso ocurre en algunos casos donde se toma en cuenta un nivel de corte (λ_p) variable, relacionado con el rango máximo de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$. Como se mencionó en el Capítulo II, si se consideran valores λ_p fijos asociados al número de parámetros se llega a una mayor estabilidad del proceso iterativo, como se muestra en las Figuras 33c y 33d para $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$, permitiendo que ambos modelos se sujeten a un rango de variación menor preservando el ajuste de los datos. Aunque el modelo de densidades muestra un valor de convergencia alrededor del 200% en la primera iteración del proceso de inversión conjunta (Figura 33d), el modelo de magnetización también presenta cambios significativos en esta etapa, mientras que el ajuste de los datos es adecuado en ambos casos (Figura 33c). Esto muestra la relevancia de hacer una buena elección de los valores singulares no nulos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ que

permitan cambios en ambos modelos sin sacrificar en gran medida uno en particular y donde en cada paso iterativo los modelos presentan poca divergencia respecto al modelo anterior.

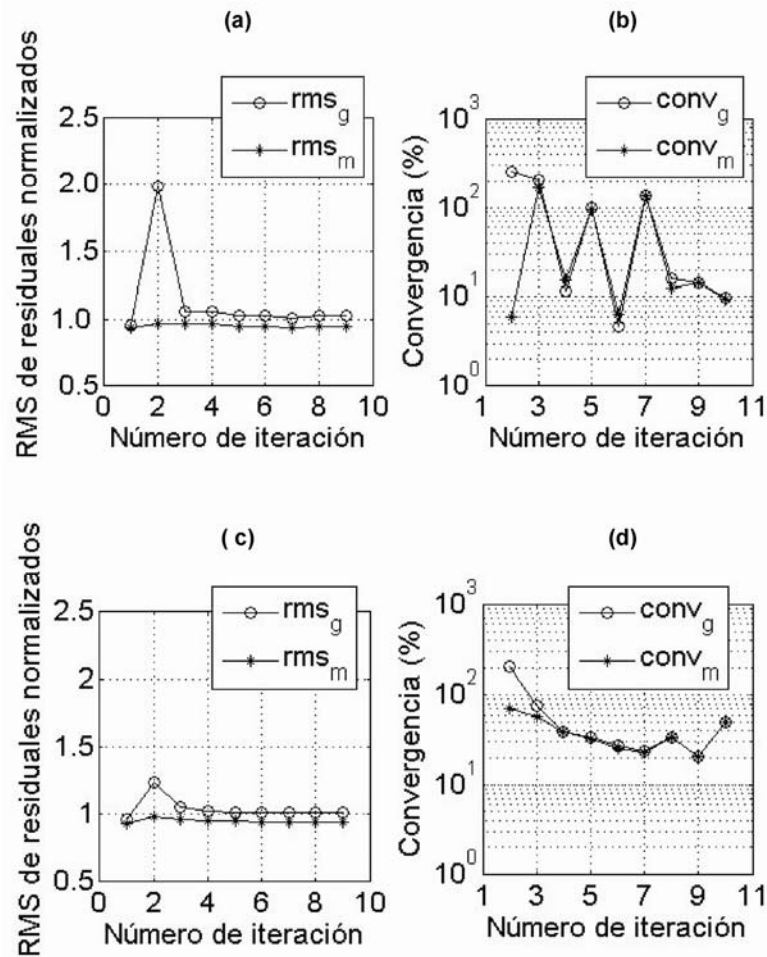


Figura 33. La figura (a) muestra el ajuste de los datos y (b) la convergencia del modelo para $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$, correspondiente a las ecuaciones del ajuste (77) y (78) así como (79) y (80) de la convergencia, para cada paso del proceso iterativo de inversión conjunta del modelo del cubo. Las figuras (c) y (d) muestran el ajuste de los datos y la convergencia respectivamente, para $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$.

La condición de no unicidad, inherente en inversión de datos geofísicos, nos lleva a obtener un ajuste adecuado de los datos con modelos de los parámetros físicos alejados

del modelo cúbico esperado, como lo muestran los modelos de inversión separada de la Figura 32. Podemos comparar los modelos de inversión conjunta de la Figura 32 con los mostrados en la Figura 34, donde hemos llevado a cabo el proceso de inversión usando el valor $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$, seleccionado a partir de la gráfica de valores singulares que aparece en la Figura 14. De la comparación de estos modelos, notamos que el proceso inverso en ambos casos converge a soluciones análogas. Es decir, que la restricción de gradientes cruzados es suficientemente estable para partir de modelos con diferencias estructurales significativas y encontrar los rasgos que los hagan compatibles y similares siempre y cuando se preserve el ajuste de los datos.

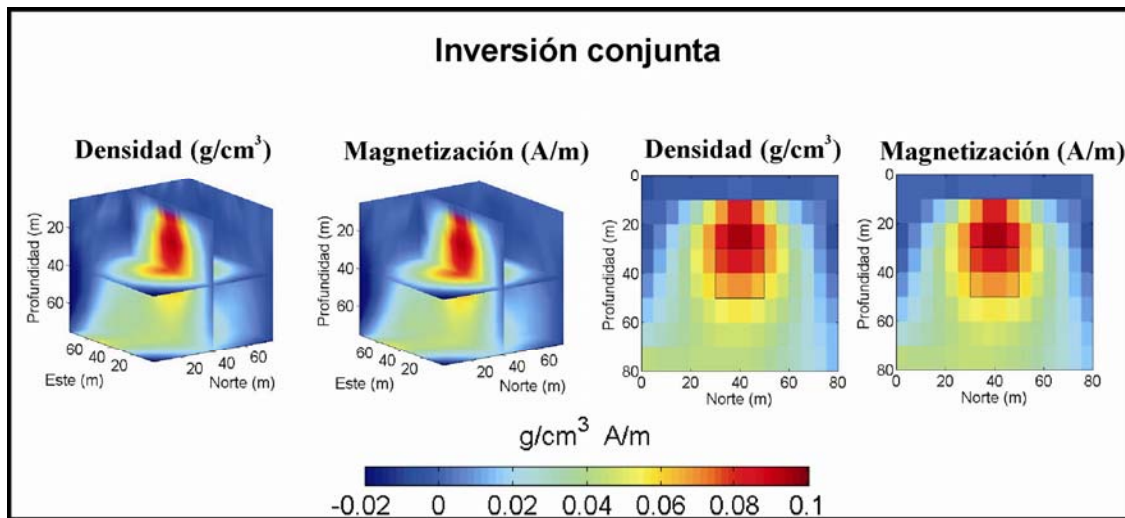


Figura 34. Modelos de densidad y magnetización obtenidos después de 9 iteraciones del proceso de inversión conjunta usando un nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$. Los modelos de inversión separada, a partir de los cuales se obtienen estos modelos, son mostrados en la Figura 32. Las secciones de los modelos 3D son tomadas en la posición *este* = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Descripción de la suavidad en los modelos

Como hemos mencionado, para obtener modelos suaves y estabilizar la solución, usamos los factores de regularización $\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^6$. Tomando en cuenta valores más

pequeños se obtienen modelos rugosos, que si bien ajustan los datos, no proporcionan estructuras compatibles con el modelo real.

Descripción del efecto del modelo a priori y sus valores de covarianza

Para los modelos de la Figura 32, los valores seleccionados de las matrices de covarianza de los modelos a priori ($\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$) dieron modelos extendidos en profundidad, los cuales estuvieron principalmente controlados por el término de suavidad. En este caso el propósito era mostrar el efecto de la restricción de gradientes cruzados, por lo que no introdujimos términos de regularización adicionales. Sin embargo, como también veremos en el Experimento III, si se imponen restricciones en los modelos, controladas mediante valores pequeños en las matrices de covarianza para algunas regiones conocidas, es posible eliminar la estructura en el fondo de los modelos. Esta elección de los valores puede hacerse siempre y cuando se tenga alguna certeza del tipo de material, su distribución en el subsuelo y los procesos físicos que influyen en este.

Por ejemplo, si seleccionamos valores pequeños de σ_g y σ_m para los bloques de la base de los modelos de la Figura 32, de tal forma que

$$\sigma_g^2(z) = \sigma_m^2(z) = \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 70 \\ 1 \times 10^{-4}, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases} \quad (\text{con la distancia en profundidad } [z] = \text{m}), \text{ las}$$

soluciones del proceso de inversión permanecen cercanas a los modelos a priori propuestos, en este caso $\mathbf{m}_g^{\text{apr}}(z) = \mathbf{m}_m^{\text{apr}}(z) = \mathbf{0}$ para $70 \leq z \leq 80 \text{ m}$, quedando las soluciones mostradas en la Figura 35. Cabe mencionar que en este caso usamos valores singulares $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$, para los cuales el ajuste de los datos se mantiene nuevamente estable con valores adecuados, mientras que la convergencia presenta un decrecimiento estable con valores menores al 20%.

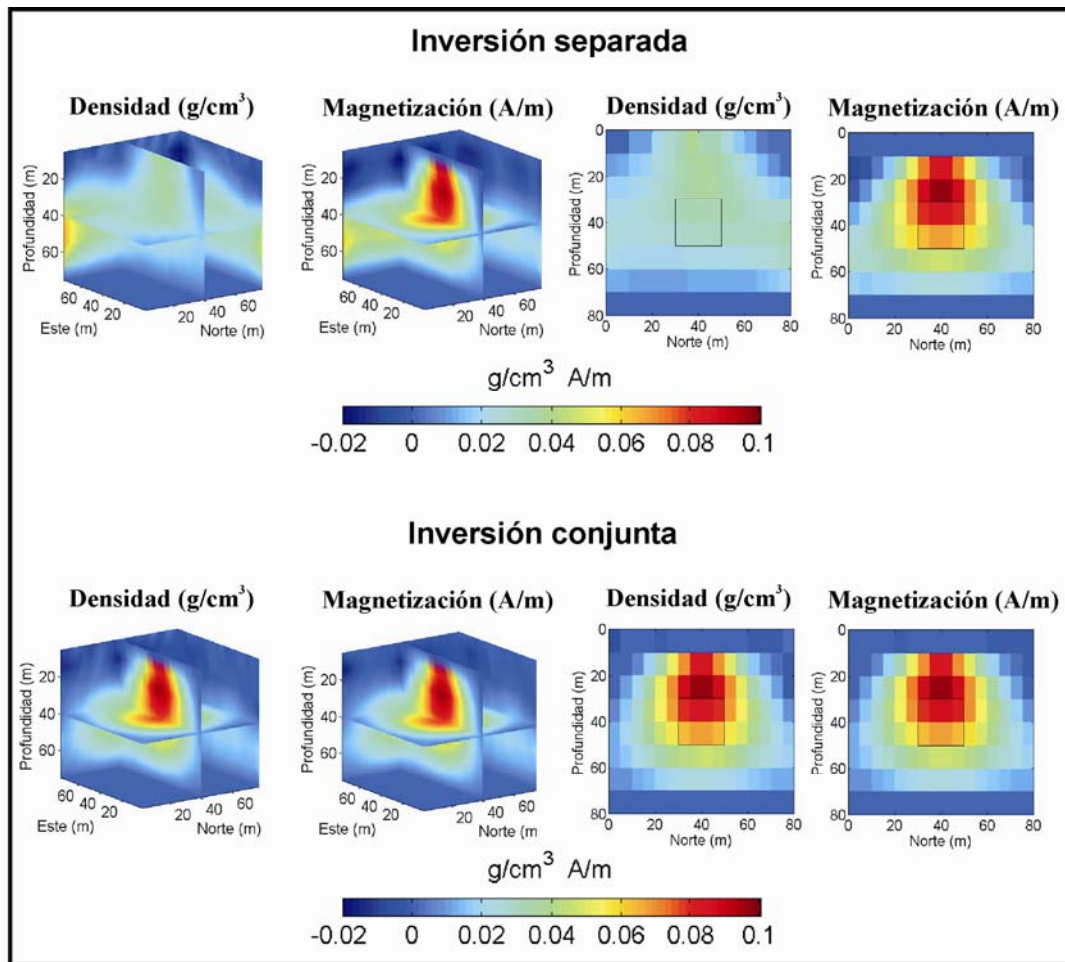


Figura 35. Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta imponiendo fondo fijo. Los modelos de inversión conjunta fueron obtenidos después de 6 iteraciones. Las secciones de los modelos 3D son tomadas en la posición *este* = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Es notable la reducción de masa en profundidad y cómo ésta es distribuida principalmente en las direcciones este-oeste y norte-sur en el caso de inversión separada, mientras que los modelos de inversión conjunta nuevamente reducen la cantidad de masa incompatible con el modelo real y encuentran las similitudes estructurales.

Similitud estructural

Podemos observar, en la Figura 32, que las mayores diferencias estructurales en los modelos de densidad y magnetización de inversión separada se concentran

principalmente hacia el fondo. Esto se puede notar por las componentes del vector de gradientes cruzados $\mathbf{t}$ de la Figura 36, en el caso de inversión separada, donde se observan los valores más altos en las tres componentes (t_x , t_y , t_z). Cabe resaltar que alrededor del bloque enterrado se tienen valores cercanos a cero para las tres componentes, lo que resulta debido al cuerpo homogéneo identificado en ambos modelos. Aunque la magnitud de las componentes del vector $\mathbf{t}$ es pequeña, del orden 1×10^{-6} , en el caso de inversión separada, indicando el grado de similitud estructural entre los modelos, es notable la diferencia en el caso de inversión conjunta, siendo cuatro órdenes de magnitud menor. Las secciones con valores nulos, por ejemplo las secciones de la frontera *este* = 80 m para las componentes t_x y t_z , siendo $t_y \neq 0$, indican un comportamiento bidimensional de los modelos en esa zona, con cambios en las direcciones *norte* y en *profundidad* únicamente.

Las componentes del vector de gradientes cruzados, que muestran la similitud estructural entre los modelos de inversión conjunta en la Figura 36, presentan claramente mayor similitud en todas las zonas del dominio con respecto a inversión separada.

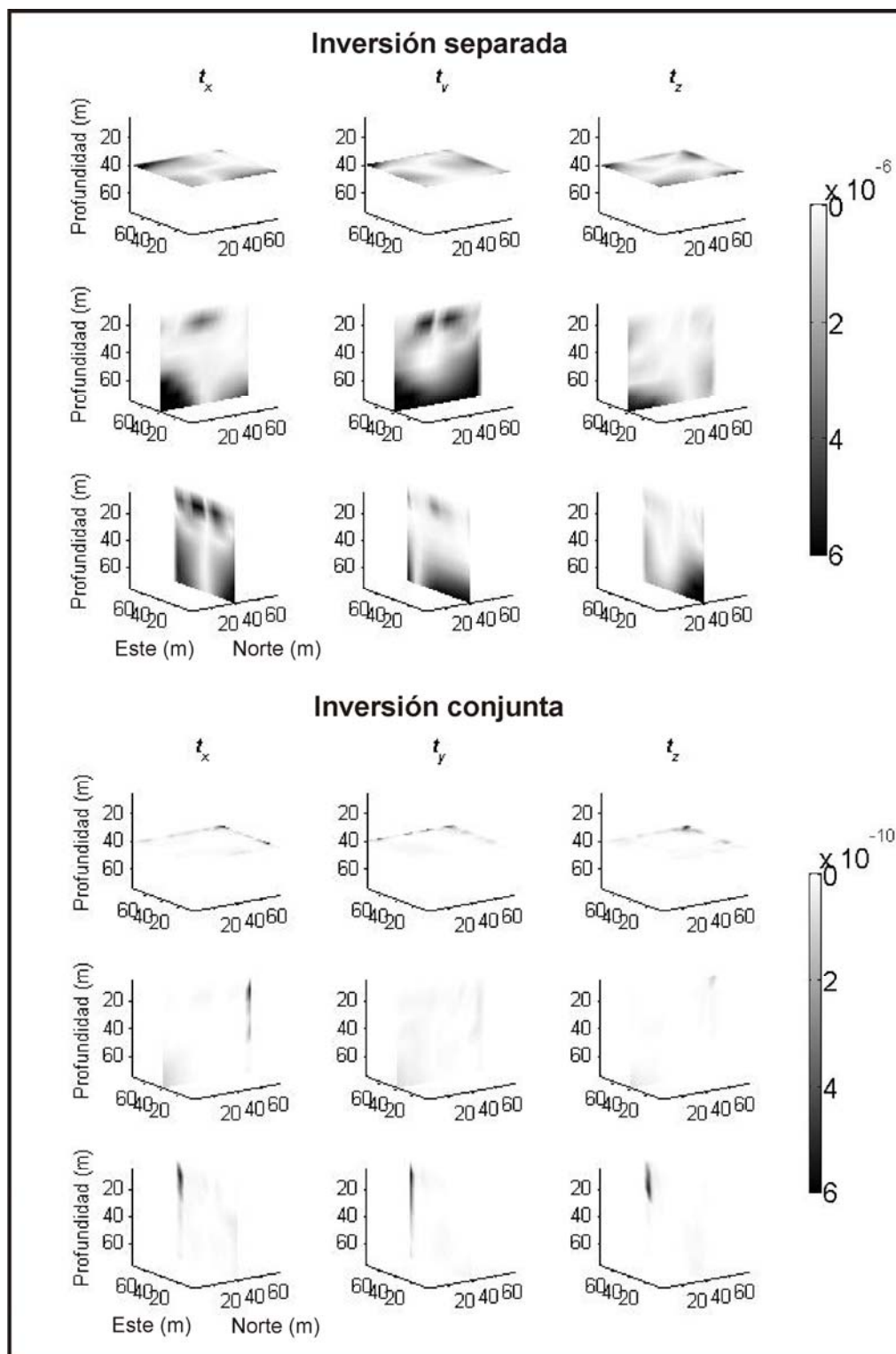


Figura 36. Imágenes de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 32. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.

Aunque en las fórmulas (34) y (35) no recurrimos a la norma (magnitud) del vector de gradientes cruzados ($\|\mathbf{t}\|$), podemos observar que cada una de las componentes contribuye con la imagen de la norma (Figura 37) y de esta manera se tiene una representación global de la similitud estructural entre los modelos. Sin embargo, el análisis detallado de cada una de las componentes del vector de gradientes cruzados proporciona mayor información sobre su comportamiento y la contribución de cada una de éstas en el proceso de inversión.

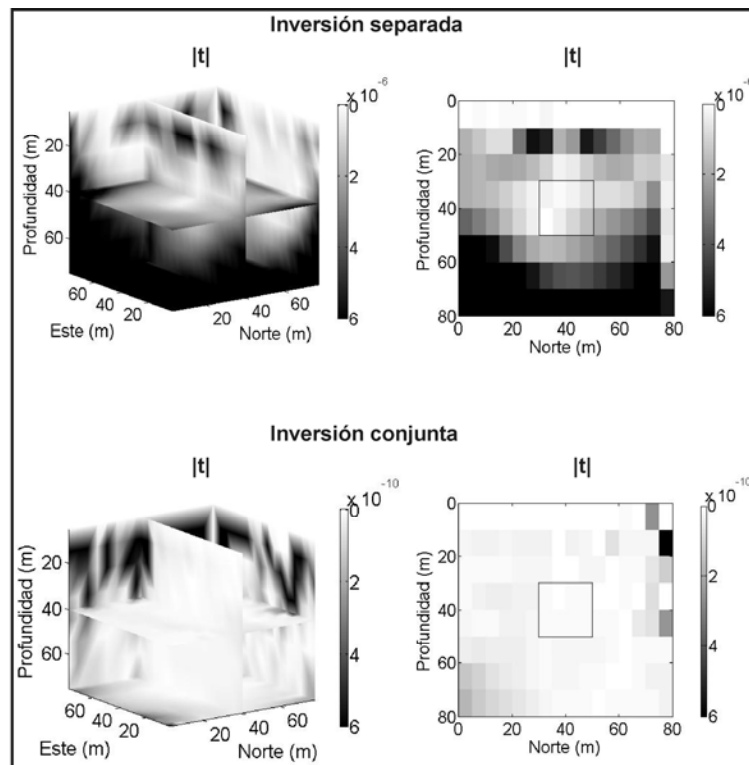


Figura 37. Figuras comparativas de la magnitud del vector de gradientes cruzados ($\|\mathbf{t}\|$) para los modelos de la Figura 32 de inversión separada y conjunta. Las secciones son tomadas en la posición *este* = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Otra forma de comparar la similitud estructural entre los modelos de inversión separada y conjunta, pero que principalmente nos proporciona información sobre las zonas con valores predominantes, las cuales se pueden clasificar directamente en los modelos, consiste en graficar la correlación entre los valores de densidad y magnetización (Figura 38). Además, dicha correlación nos muestra la tendencia de

algunos valores hacia un valor específico. La Figura 38a muestra la correlación entre los modelos obtenidos después de inversión separada de la Figura 32. La mayor dispersión corresponde a los bloques del fondo, mientras que las agrupaciones de puntos están asociadas con los bloques de las regiones superiores del dominio, particularmente sobre los bloques del cubo. Sin embargo, los valores esperados corresponderían a una acumulación de puntos alrededor de los valores 0 y 1.0 pero el criterio de suavidad tiende a incluir bloques de transición, como se muestra en la Figura 38a, donde además se observa una gran discordancia estructural entre los modelos.

La Figura 38b muestra la correlación entre los modelos de la Figura 32 obtenidos después de inversión conjunta. En ésta se observa que los bloques de transición muestran una clara tendencia hacia los valores reales del modelo. Aunque más que una tendencia lineal se esperaría también una acumulación de puntos alrededor de los valores reales 0 y 1.0. Esto nos muestra evidencia de la similitud estructural alcanzada por los modelos, así como de la capacidad de resolución aún sin imponer condiciones adicionales que nos lleven a determinar de forma más precisa los valores reales.

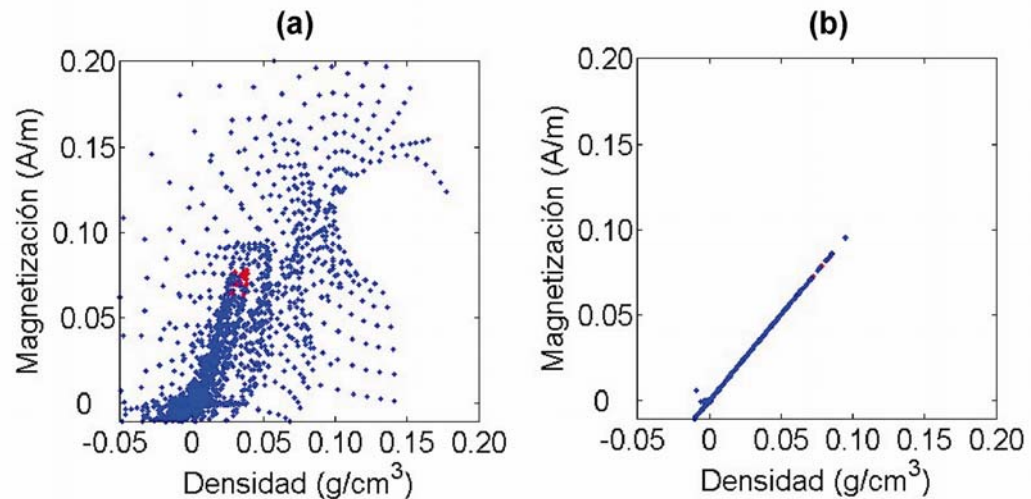


Figura 38. Figuras de la correlación entre los modelos de densidad y magnetización obtenidos de inversión separada (a) y conjunta (b) para el modelo del cubo de la Figura 32. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región del cubo enterrado, mientras que los azules corresponden al medio circundante.

Como hemos mencionado, en este experimento la influencia de las fronteras sobre los datos observados exactamente sobre la superficie del dominio de inversión, es un factor importante en la obtención de modelos con mayor estructura extendida hacia el fondo. Para reducir este efecto usamos los campos observados gravimétrico y magnético mostrados en la Figura 26. Para este experimento se consideraron 1681 datos equiespaciados cada 4 m, agregando ruido aleatorio Gaussiano con desviación estándar del 2% de la máxima amplitud de cada anomalía. Los resultados obtenidos después de aplicar estos cambios en las observaciones se muestran en los modelos de inversión separada de la Figura 39.

Descripción de los parámetros de inversión

Los parámetros de control establecidos en el proceso de inversión para este experimento no se modificaron del experimento anterior, por lo que corresponden con los mostrados en el Experimento I de la Tabla II. Sin embargo, un segundo inconveniente que analizamos en los resultados del experimento anterior es el proceso de convergencia, el cual muestra inestabilidad. Como hemos visto, este efecto es reducido seleccionando un valor fijo $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$, el cual es utilizado en todas las iteraciones del proceso de inversión conjunta para este experimento y está asociado con el número de parámetros físicos.

Descripción de los modelos

Podemos notar que los modelos de inversión separada reducen significativamente la concentración de estructura en profundidad (Figura 39), distribuyéndola en mayor medida hacia las partes superiores. Aún así, el modelo de densidad no recupera la estructura del bloque, contrario al modelo de magnetización para el cual el mayor contraste se localiza alrededor del cubo. Los modelos de inversión conjunta seleccionados nuevamente mejoran la similitud y características estructurales respecto a los modelos de inversión separada. Asimismo, los modelos de inversión conjunta determinan mejor las estructuras en profundidad comparados con los resultados de la Figura 32. Cabe hacer notar el rasgo estructural con contraste significativo que aparece en profundidad en ambos modelos de inversión separada, el cual es efecto del ruido en los

datos. Sin embargo, éste no desaparece en los modelos de inversión conjunta y más aún, es resaltado, lo que indica que ambos modelos pueden resaltar estructuras inexistentes con tal que satisfagan las restricciones de ajuste a los datos y similitud estructural requeridas en la formulación.

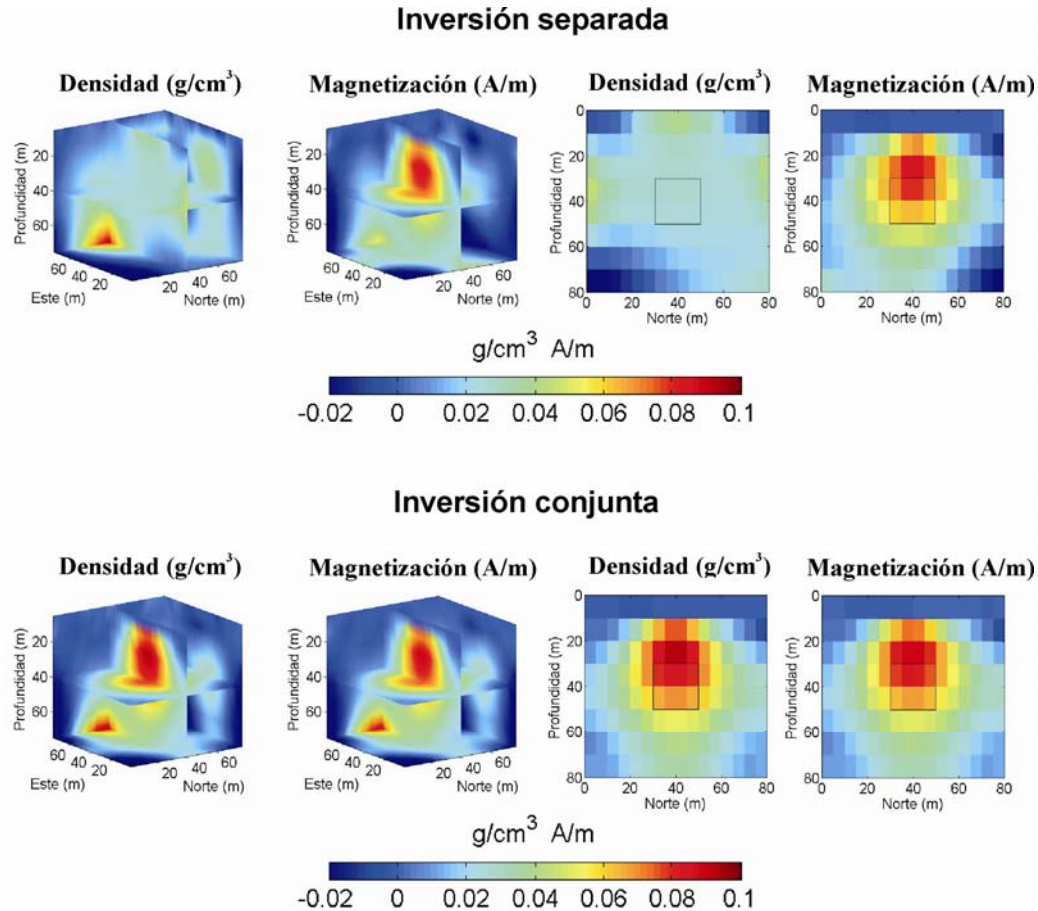


Figura 39. Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta para el experimento del cubo con observaciones en superficie extendidas, asociadas con la Figura 26. Las secciones de los modelos son tomadas en la posición este = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Ajuste a los datos

Los resultados del ajuste a los datos y la convergencia del proceso iterativo se muestran en la Figura 40. El ajuste a los datos en todo el proceso iterativo se muestra en la Figura 40a y la convergencia en la Figura 40b. El ajuste a los datos es adecuado en

todas las iteraciones para ambos conjuntos de datos, aunque se observa mejor ajuste de los datos gravimétricos con valores rms más cercanos a la unidad. Los valores de convergencia, aunque presentan algunas oscilaciones, éstas se encuentran dentro de un rango pequeño entre 10 y 30%. Luego, las últimas iteraciones presentan mayor estabilidad. En este experimento seleccionamos los modelos de inversión conjunta obtenidos en la 8ª iteración.

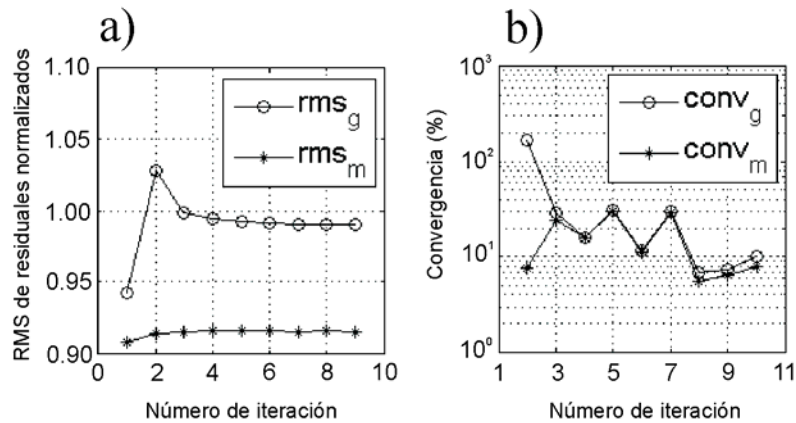


Figura 40. Ajuste de los datos (a) y convergencia del modelo (b), correspondientes a las ecuaciones del ajuste (77) y (78) así como (79) y (80) de la convergencia. Los resultados de las iteraciones son obtenidos a partir del experimento del cubo enterrado con observaciones extendidas en superficie.

Vemos nuevamente que el factor $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$ nos permite obtener modelos poco oscilantes entre iteraciones consecutivas, donde los bloques del fondo presentan las mayores diferencias entre dichas iteraciones y debido a éstos, el criterio de convergencia alcanza valores del 30%. Sin embargo, si eliminamos los bloques en profundidad, correspondientes a la última capa y aplicamos nuevamente las ecuaciones de convergencia (79) y (80) para los primeros 1792 bloques, los valores de convergencia que se obtienen, por ejemplo en la 7ª iteración, son: $conv_g = 15\%$ y $conv_m = 14\%$. Esto indica una reducción del 50% en la discrepancia entre los modelos, comprobando así que los bloques de la región más profunda admiten pequeños cambios que producen modelos que reproducen los datos en superficie con un nivel de error adecuado. Sin embargo, en la 2ª

iteración, nuevamente el modelo gravimétrico se acopla completamente al modelo magnético con buen ajuste en los datos. Si observamos los modelos obtenidos de inversión separada (Figura 39), es de esperar que el modelo de densidad adquiriera características estructurales similares, a través de la restricción de gradientes cruzados, al modelo de magnetización, ya que éste define mejor los rasgos estructurales del cubo. Aún así, es posible seleccionar un valor más pequeño para λ_p que elimine aún más la redundancia en las restricciones de gradientes cruzados y restrinja los grados de libertad del modelo gravimétrico.

Descripción de la suavidad en los modelos, el efecto del modelo a priori y sus valores de covarianza

Similarmente al caso anterior, los valores $\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^6$ proporcionaron modelos que satisfacen la condición de suavidad, es decir, modelos con gradientes continuos y un ajuste adecuado a los datos. Establecimos asimismo modelos a priori nulos con valores de covarianza suficientemente grandes, tal que no restringen o desvían los modelos hacia un modelo predefinido.

Similitud estructural

Como en el experimento anterior, analizamos las componentes del vector de gradientes cruzados como una medida de la similitud estructural entre los modelos de densidad y magnetización (Figura 41). Podemos decir que en el caso de las componentes asociadas a los modelos de inversión separada, no existe un predominio de las diferencias estructurales hacia alguna zona en particular, observando la magnitud de las componentes del mismo orden casi en todos lados. Para el caso de las componentes de t correspondientes a los modelos de inversión conjunta, observamos nuevamente que las zonas con mayor contraste estructural corresponden a las fronteras.

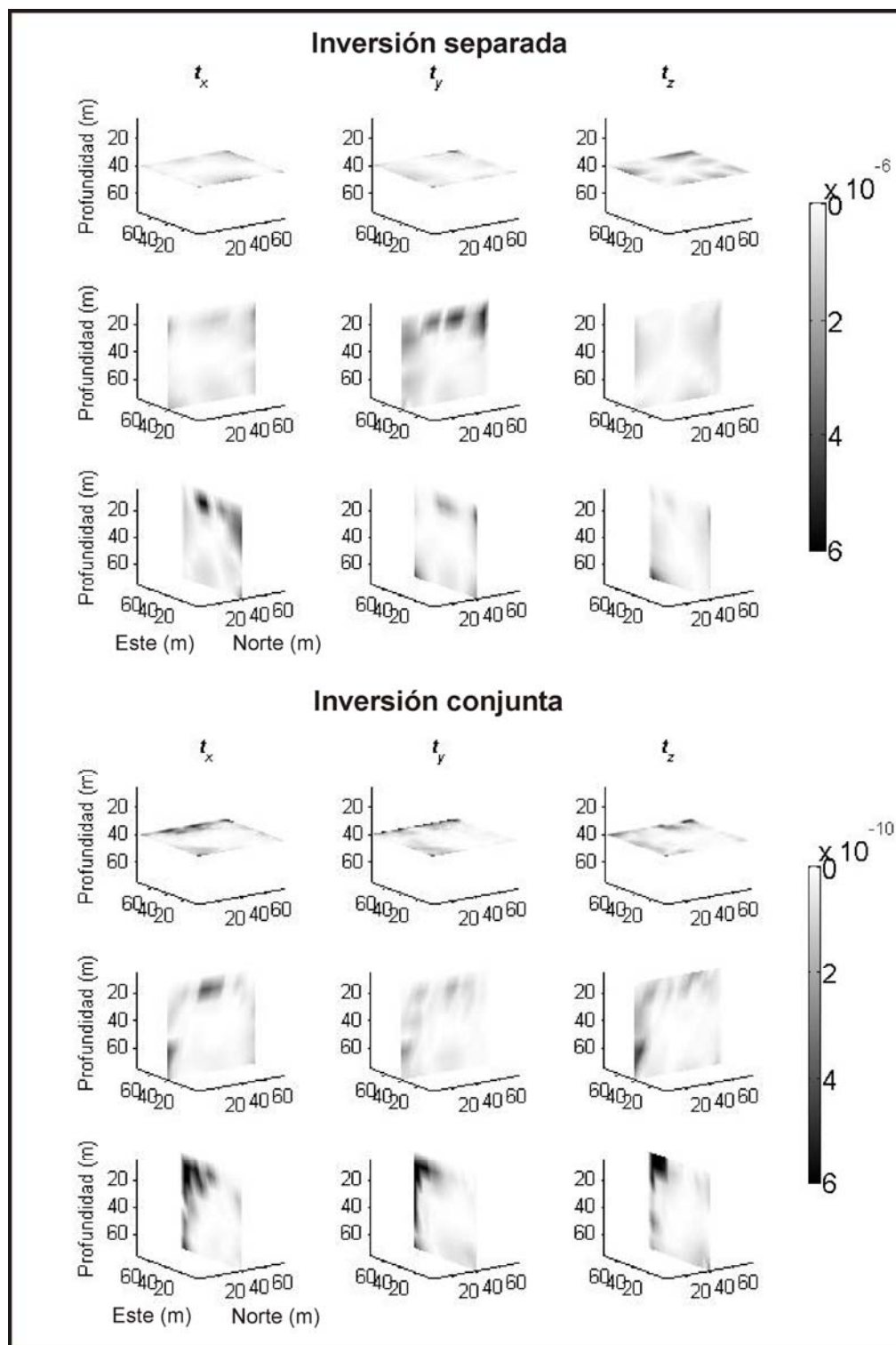


Figura 41. Imágenes de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 39. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.

La norma del vector de gradientes cruzados ($\|\mathbf{t}\|$) se muestra en la Figura 42. En ésta se observa mayor similitud estructural que en los modelos del experimento anterior. Los resultados de inversión conjunta muestran nuevamente cuatro órdenes de magnitud menor que los resultados de inversión separada, resaltando la similitud estructural lograda después de la inversión conjunta.

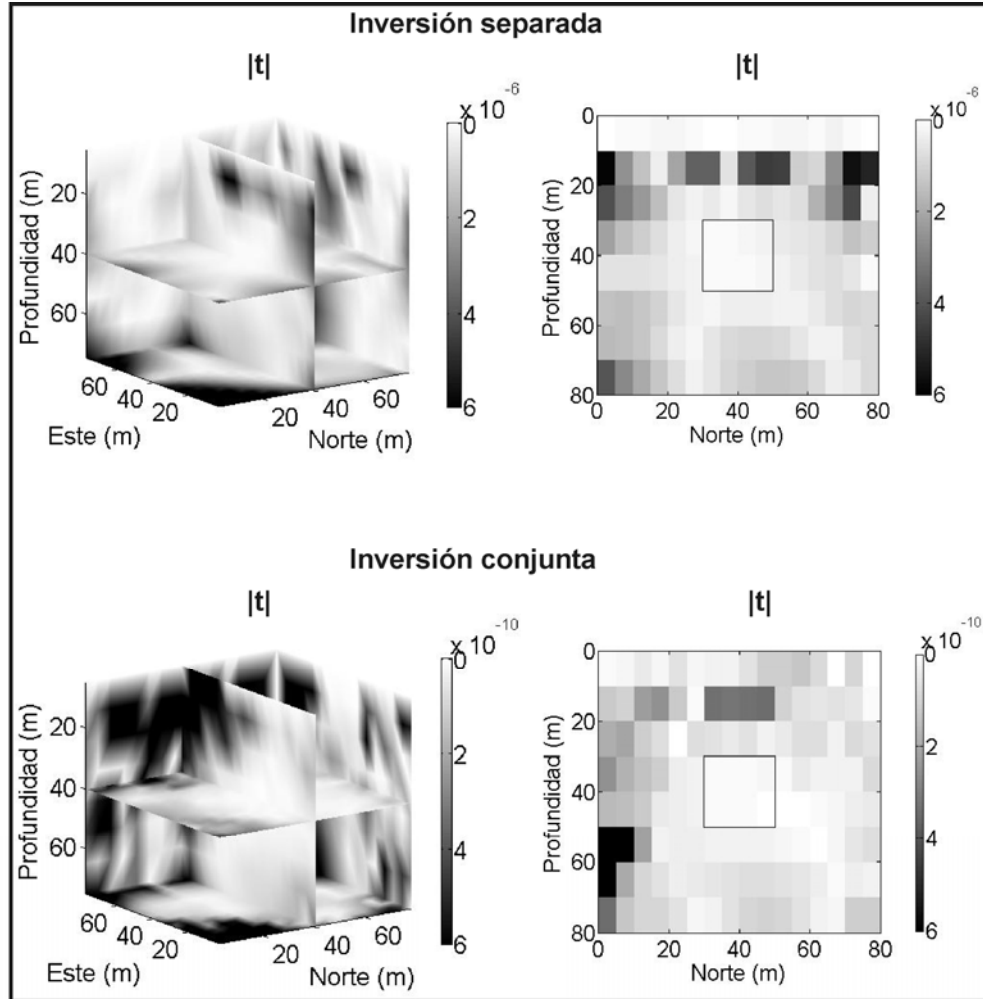


Figura 42. Figuras comparativas de la magnitud del vector de gradientes cruzados ($\|\mathbf{t}\|$) para los modelos de la Figura 39 de inversión separada y conjunta. Las secciones son tomadas en la posición este = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Asimismo mostramos la correlación entre los parámetros obtenidos. La Figura 43a muestra la correlación entre los parámetros de densidad y magnetización para el caso

de inversión separada mientras que la Figura 43b muestra la correlación para el caso de inversión conjunta. Se observa nuevamente menor dispersión y una mayor tendencia hacia los valores reales en el caso de inversión conjunta. La mayor dispersión de puntos en el caso de inversión separada está relacionada con los bloques del fondo, mientras que los bloques de las capas superiores presentan una tendencia en dirección vertical, donde los parámetros que muestran mayores cambios corresponden a los parámetros de magnetización.

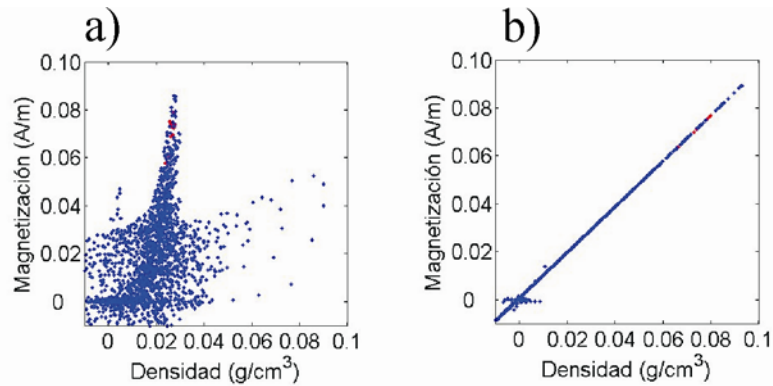


Figura 43. Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b) 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del cubo enterrado, con observaciones extendidas en superficie. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región del cubo enterrado, mientras que los azules corresponden al medio circundante.

El análisis de los modelos y factores que intervienen en el proceso de inversión conjunta en un modelo sencillo, como lo es el de un cubo enterrado, nos permite conocer y entender de qué manera deben ser seleccionados dichos factores, con el propósito de obtener resultados compatibles con la distribución de propiedades físicas y geológicas realistas en un caso más complejo. Por ejemplo, hemos analizado la importancia de seleccionar un nivel de corte λ_p adecuado, para lograr mayor estabilidad en el proceso de convergencia. Asimismo, observamos las ventajas de extender las observaciones en superficie, para lograr modelos con mayor resolución de las estructuras y que no se vean afectados por la influencia de las fronteras. Estas características que hemos analizado, así como los términos que intervienen en la formulación de inversión conjunta, serán

aplicadas a estructuras más complejas en las siguientes secciones y veremos de qué manera influyen en estas.

IV. 1. 2. Experimento II. Modelo de dos cubos someros con suavidad homogénea.

Un experimento más complejo en su estructura y valores consta de dos cubos enterrados como el que se muestra en la Figura 27. Podemos notar que la anomalía gravimétrica producida por el modelo de la Figura 27a, la cual se muestra en la Figura 28a, no distingue los bloques individualmente sino que es la suma del efecto de ambos, por lo que es de esperar que los modelos de inversión separada resultantes tendrán mayor dificultad en identificar los bloques y colocarlos en su posición original. En este caso, no hemos impuesto condiciones adicionales para reducir este efecto. Es por esto que invertimos los datos con ruido de los cubos con las mismas dimensiones y características del experimento mostrado en la Figura 27, pero colocados a una profundidad de 10 m, a partir de los cuales obtenemos las anomalías mostradas en la Figura 44. Los datos que se muestran tienen ruido aleatorio Gaussiano y desviación estándar del 2% de la máxima amplitud de cada anomalía.

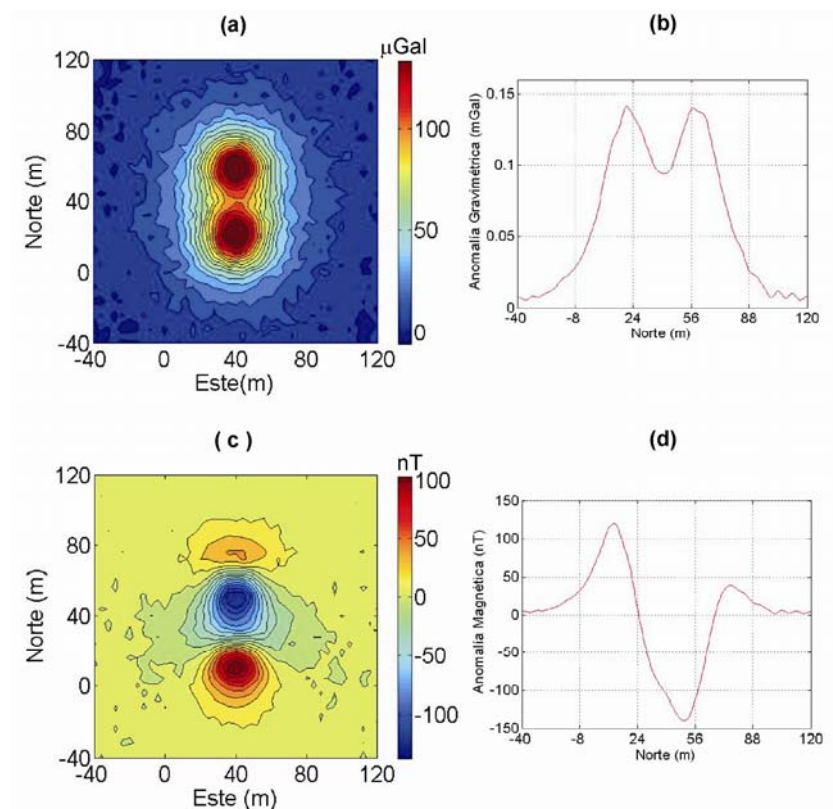


Figura 44. Anomalia gravimétrica (a) y magnética (c), producidas por el modelo de dos cubos de la Figura 27, colocados a una profundidad de 10 m. Las Figuras (b) y (d) muestran una sección sur a norte colocada en la posición $\text{este} = 40\text{m}$ de las Figuras (a) y (c), respectivamente. Los datos fueron contaminados por ruido aleatorio Gaussiano. En ambos conjuntos de datos la desviación estándar del ruido agregado es del 2% de la máxima amplitud de la anomalía.

Características de los datos

En este experimento hemos extendido las observaciones en superficie alejándonos de las fronteras del dominio, como se muestra en la Figura 44. Sin embargo, son tomadas sobre la cima de los modelos. Esto nos permite conocer el decaimiento más completo de las anomalías.

Descripción de los parámetros de inversión

Las características de los parámetros de inversión consisten de un agregado de 2048 prismas, de dimensiones $5 \times 5 \times 10\text{ m}$ en las direcciones *este*, *norte* y *profundidad*, respectivamente. Los factores seleccionados que intervienen en la formulación se

muestran en el Experimento II de la Tabla II. Nuevamente, seleccionamos valores $\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^4$ que nos dan modelos suaves, con buen ajuste a los datos y características de los modelos estimados compatibles con el modelo real. La nulidad de los modelos a priori y sus valores de covarianza ($\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$), proporciona modelos sin sesgo hacia un modelo predefinido.

En este caso el valor de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-10}$ fue obtenido de la gráfica de valores singulares para cada iteración que se muestra en la Figura 45, donde se observa una caída alrededor de la intersección entre este valor y 2048 (correspondiente al número de parámetros de inversión). Como se explicó en el Capítulo II, los círculos rojos muestran los valores λ_p que se usarían si tomamos en cuenta el rango máximo de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$. La disminución en la amplitud de los valores singulares alrededor de 2048, indica que $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-10}$ es una buena elección del nivel de corte.

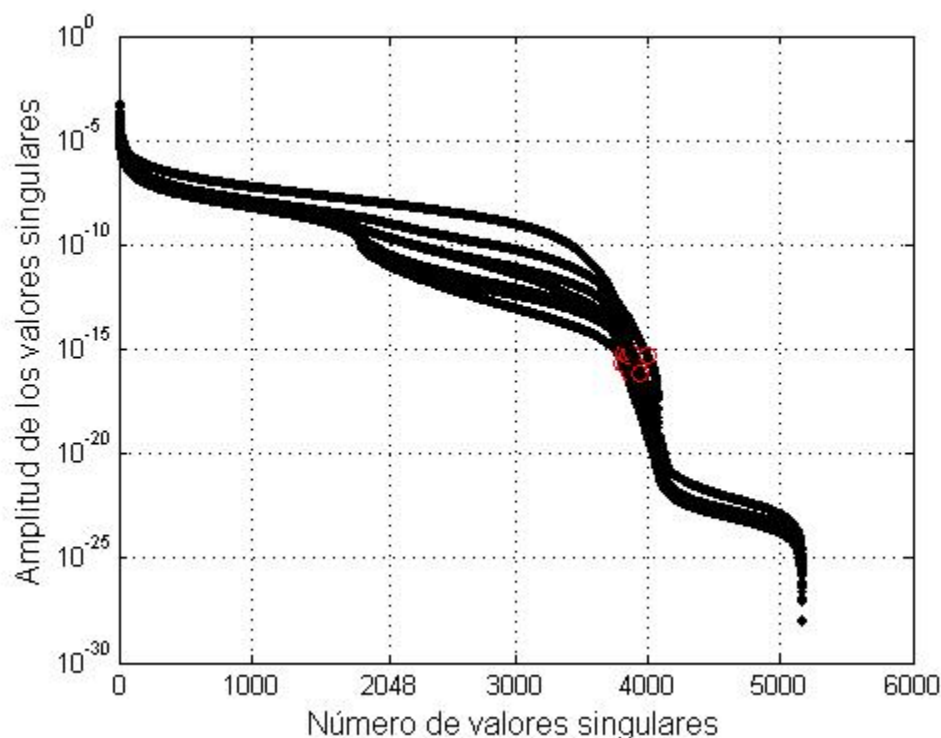


Figura 45. Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento de dos cubos colocados a 10 m de profundidad con observaciones extendidas en superficie. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4096$.

Descripción de los modelos

Los modelos de inversión separada y conjunta son mostrados en la Figura 46. En ésta, se observa que el modelo de densidad de inversión separada distingue ambas estructuras, aunque éstas son colocadas por arriba de su nivel superior sin determinar la base. Más aún, se extienden hacia el fondo de las fronteras del dominio. El modelo de magnetización presenta mayor resolución de las estructuras y los bloques son colocados en su posición original sobre la cima y lateralmente, extendiéndose un poco hacia el fondo. Las estructuras que aparecen en el fondo de los modelos de densidad y magnetización y sobre las secciones verticales en los extremos de la frontera *norte*, son debidas al ruido, similarmente a lo que ocurrió en el experimento anterior. Esto puede ser observado invirtiendo únicamente el ruido en los datos. Hemos visto también que es

posible eliminar la estructura incompatible en el fondo, imponiendo condiciones a través de la matriz de covarianza del modelo a priori, como se discutió en los resultados de la Figura 35. Sin embargo, en este caso nuevamente queremos observar los resultados del algoritmo de inversión usando únicamente la restricción de gradientes cruzados y la condición de suavidad en los modelos en un caso mayormente heterogéneo.

Haciendo el comparativo con los modelos resultantes de inversión conjunta, observamos que el modelo de densidad mejora notablemente las características estructurales de los bloques, ubicándolos en su posición original y eliminando los efectos del ruido en profundidad. Similarmente, el modelo de magnetización es mejorado en profundidad desde el fondo hasta la base de los bloques. Es de notar también que mientras el modelo de densidad no alcanza el valor real 1.0 g/cm^3 , el modelo de magnetización distingue los contrastes positivo y negativo reales, -1.0 y 1.0 A/m . Este efecto aparece cuando la mayor distribución de la estructura se concentra principalmente alrededor del objetivo, mientras que si la estructura se encuentra dispersa en todo el dominio, la magnitud de las propiedades disminuye, manteniendo el principio de conservación de masa.

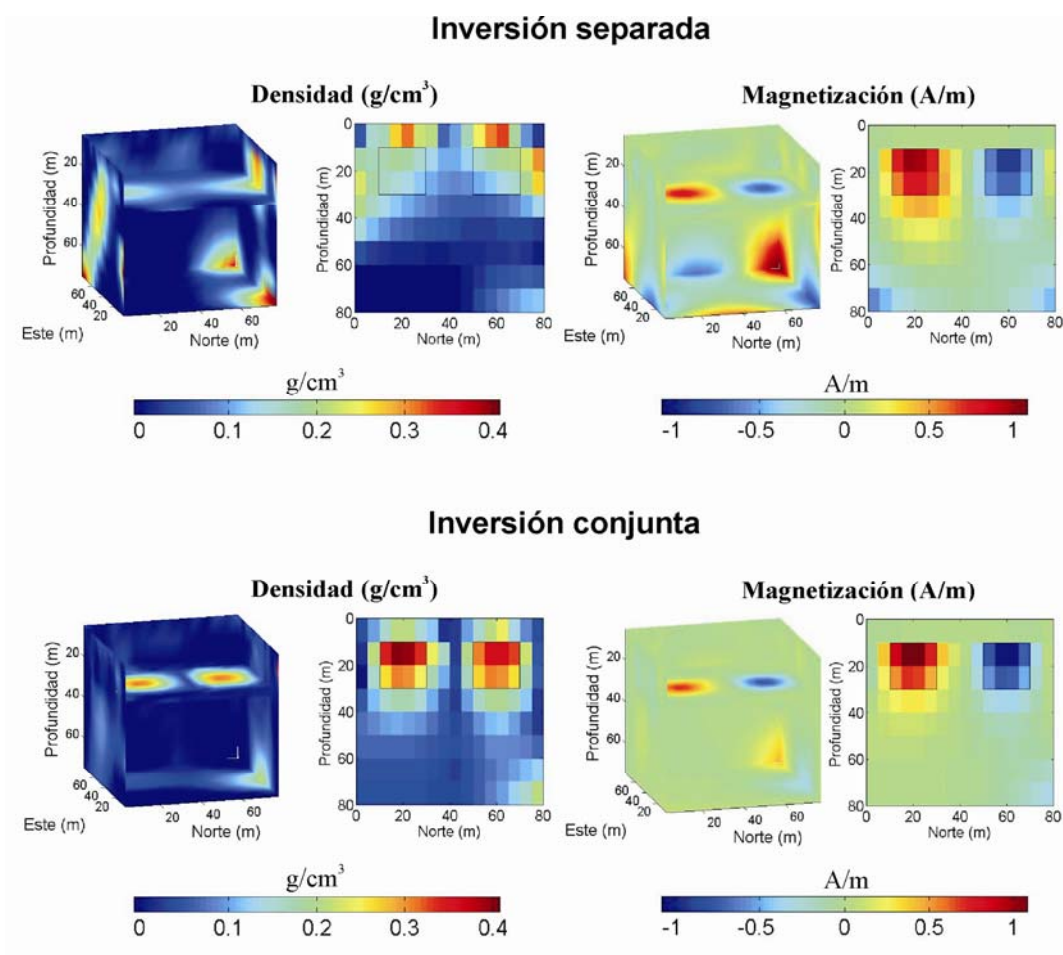


Figura 46. Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición *este* = 40 m que corta los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas.

Ajuste a los datos

El ajuste de los datos y la convergencia de los modelos que surgen en el proceso iterativo de inversión conjunta se muestran en las gráficas de la Figura 47. Notamos un ajuste adecuado de los datos (Figura 47a), con valores cercanos a la unidad en ambos modelos. Observando los resultados de inversión separada mostrados en la Figura 46, así como los resultados de experimentos anteriores, es de esperar que el modelo gravimétrico se acople al modelo magnético en la segunda iteración, correspondiente a los modelos iniciales del proceso de inversión conjunta. El grado de no unicidad de los datos

gravimétricos permite transformaciones significativas en los modelos preservando el ajuste, lo cual es notado en la primera iteración de la Figura 47b, donde ambos modelos sufren transformaciones significativas aunque en mayor medida el modelo gravimétrico.

El proceso de convergencia indica cada vez menores cambios en los modelos en general, mostrando un comportamiento ideal en un proceso iterativo. En 20 iteraciones, se alcanzó un valor de convergencia cercano al 30% con tendencia decreciente, lo que indica que los cambios en los modelos entre iteraciones consecutivas se mantienen estables.

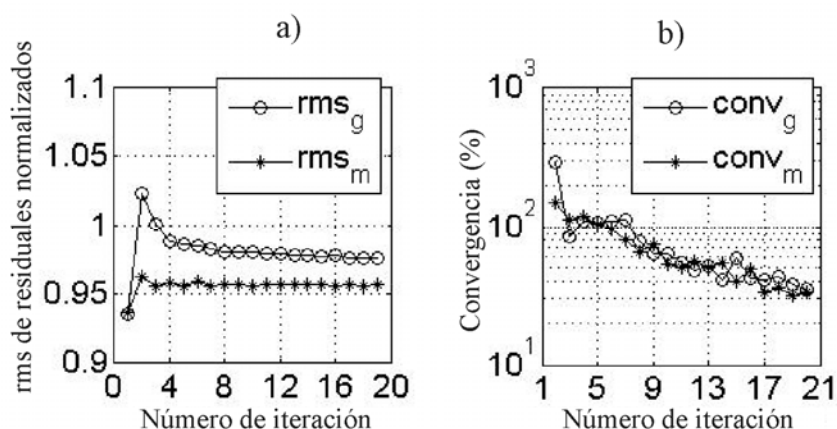


Figura 47. Ajuste de los datos (a) y convergencia del modelo (b), correspondientes a las ecuaciones del ajuste (77) y (78) así como (79) y (80) de la convergencia. Los resultados de las iteraciones son obtenidos a partir del experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad con observaciones extendidas en superficie.

Similitud estructural

Analizando las componentes del vector de gradientes cruzados para los modelos de inversión separada (Figura 48), vemos que los modelos de densidad y magnetización presentan diferencias estructurales alrededor de los cubos enterrados, lo cual se observa en el corte horizontal en cada componente, colocado sobre la sección intermedia de los cubos. Las imágenes sobre la sección $este = 40$ m muestran también diferencias en la región superior de los cubos, a través de las componentes t_x y t_y . Estas características resultan fácilmente distinguibles en los modelos de la Figura 46. De igual manera, la

sección ubicada en *norte* = 40 m refleja una zona homogénea localizada entre los cubos, por lo que obtenemos valores de $\mathbf{t}$ más cercanos a 0.

Las imágenes de las componentes del vector $\mathbf{t}$ para el caso de inversión conjunta, muestran mayor similitud entre los modelos. Las secciones horizontales parecen identificar únicamente ruido numérico y donde se observan mayores diferencias en los modelos de la Figura 46, éstas también son resaltadas por las componentes de $\mathbf{t}$, tal es el caso de la capa superior que se distingue por la componente t_z sobre la sección *este* = 40 m.

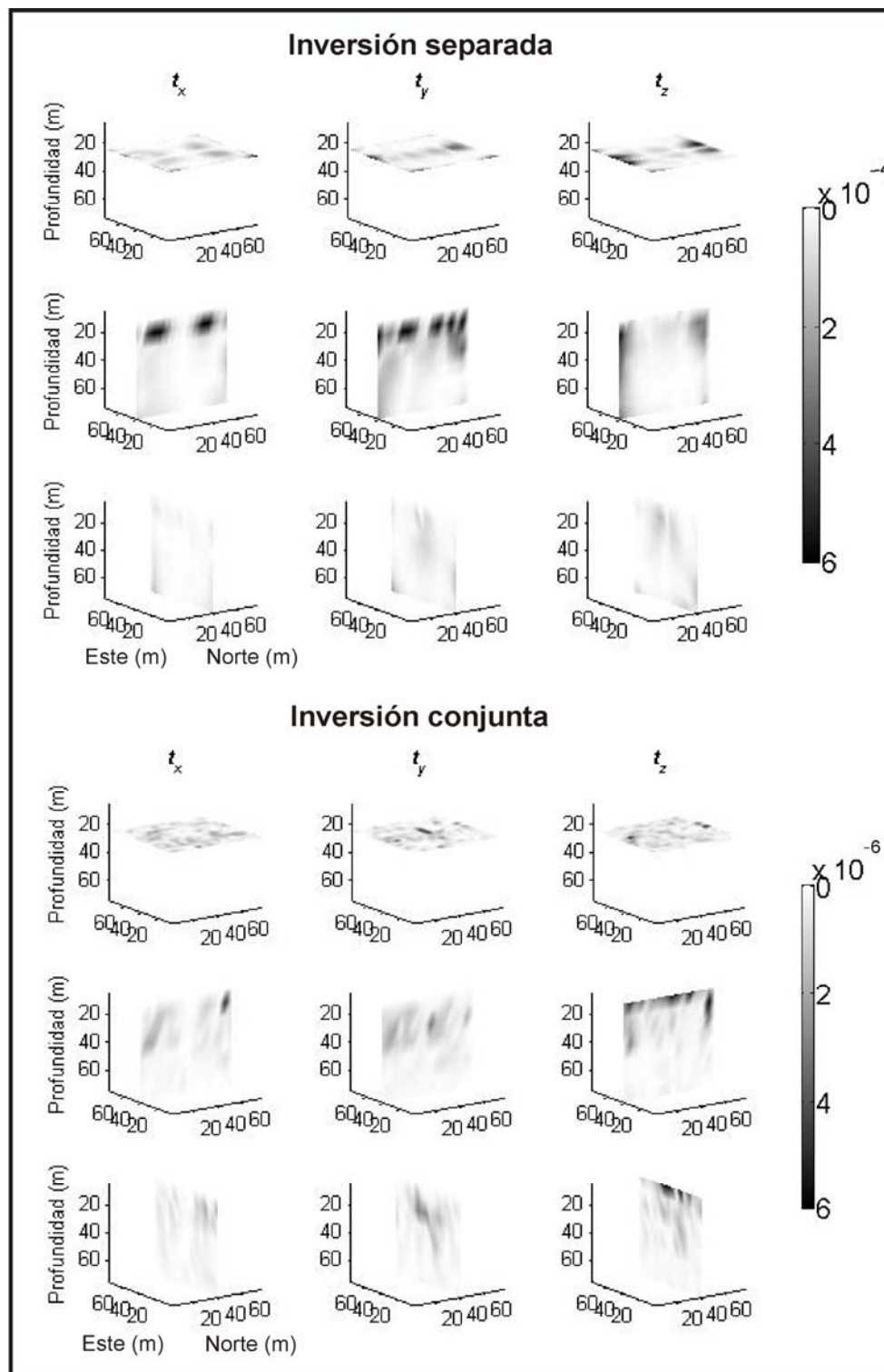


Figura 48. Imágenes de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 46. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.

La norma del vector de gradientes cruzados se muestra en la Figura 49. Las imágenes muestran una diferencia en $\|\mathbf{t}\|$ para el caso de inversión separada y conjunta de dos órdenes de magnitud y nos indican, de manera global, el comportamiento de las estructuras descrito anteriormente. En estas imágenes se puede observar más claramente que aún cuando los modelos de la Figura 46 de inversión separada, no muestran similitud estructural en la región superior del dominio (capa superior), los valores de $\|\mathbf{t}\|$ para esta zona son cercanos a cero. Esto indica que la losa homogénea que aparece en el modelo de magnetización hace la componente $t_z \approx 0$, la cual es la única que contribuye en este caso. Esto es debido a que la discretización en diferencias adelantadas de los términos que forman las componentes t_x y t_y (Ec. 13) sobre la losa se anulan, puesto que en esta zona particularmente $\partial m_{\text{grav}} / \partial z = \partial m_{\text{mag}} / \partial z = 0$. Con esta discretización, el análisis del vector de gradientes cruzados debe ser minucioso en las fronteras.

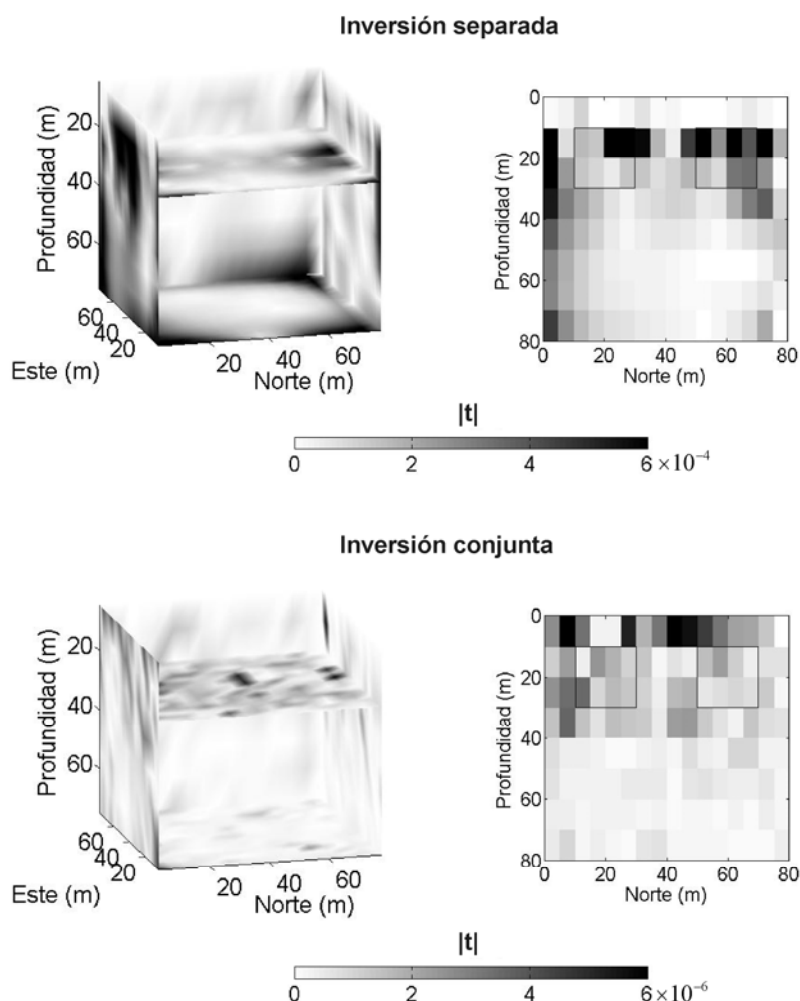


Figura 49. Figuras comparativas de la magnitud del vector de gradientes cruzados ($\|\mathbf{t}\|$) para los modelos de inversión separada y conjunta de la Figura 46. La magnitud fue calculada a partir de los valores para cada componente mostrados en la Figura 48. Las secciones son tomadas en la posición este = 40 m. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas.

La Figura 50a muestra la correlación entre densidad y magnetización para el caso de inversión separada, mientras que 50b muestra la correlación para el caso de inversión conjunta. Los colores de puntos rojo y azul corresponden a los bloques estimados localizados dentro de los cubos, mientras que los puntos en verde corresponden a la región circundante. Con esto, podemos distinguir claramente los valores alcanzados en cada una de las regiones así como su comportamiento. Observamos nuevamente mayor

tendencia hacia los valores reales en el caso de inversión conjunta. La línea horizontal que se forma a lo largo de la magnetización 0 A/m, la podemos asociar con bloques localizados en la cima del dominio donde la magnetización asigna una losa plana mientras que el modelo de densidad asigna valores mayores que 0 g/cm^3 , como se muestra en las secciones de la Figura 46. Esta línea de puntos vislumbra también la zona de menor similitud estructural.

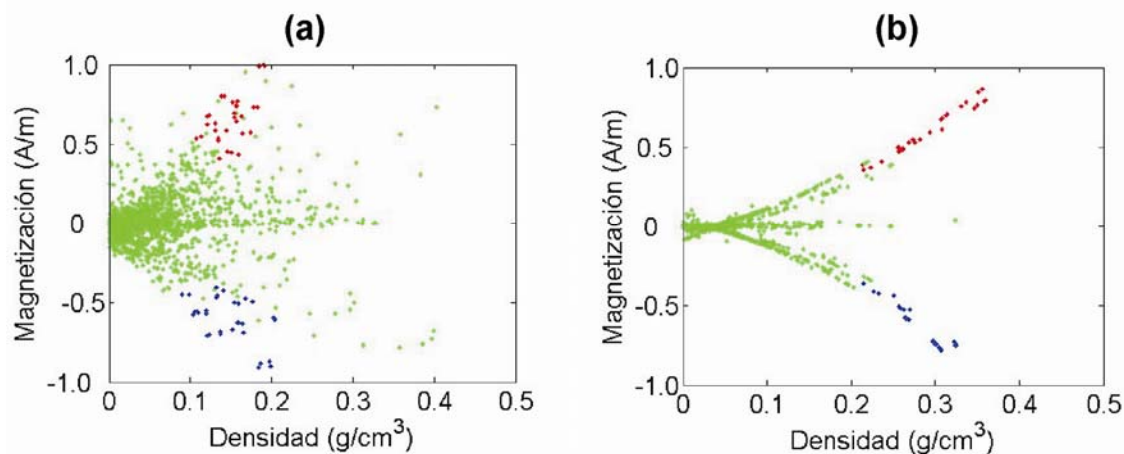


Figura 50 Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b) 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad con observaciones extendidas en superficie. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región del cubo con contraste de magnetización positiva, mientras que los azules corresponden al cubo con contraste de magnetización negativa y los puntos en verde están asociados al medio que los contiene.

IV. 1. 3. Experimento III. Modelo de un dique con efecto en profundidad usando una losa.

En los experimentos anteriores hemos observado el efecto de la restricción de gradientes cruzados en modelos suavizados a través del Laplaciano, siguiendo la filosofía propuesta por Gallardo y Meju (2003, 2004). También analizamos el ejemplo del cubo enterrado imponiendo condiciones adicionales sobre la base del dominio, y observamos que los datos admiten estructuras de los modelos mayormente concentradas o distribuidas en su posición original. En métodos potenciales comúnmente se requiere imponer en la

formulación restricciones adicionales en profundidad, debido a su inherente no unicidad, que permite obtener infinitas distribuciones de densidad y magnetización, que reproducen los campos observados en superficie. Es de esperar que dichas condiciones ayuden a determinar la distribución de las estructuras en el fondo de los modelos, de manera compatible con características reales.

Algunos autores tales como Li y Oldenburg (1996, 1998) así como Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002) han implementado diferentes funcionales en distintos esquemas de inversión, que mejoran la resolución de los modelos en profundidad y en su posición original para datos gravimétricos y magnéticos. El interés por estas metodologías es que pueden ser fácilmente incorporadas en nuestro algoritmo de inversión conjunta además que han sido aplicadas a datos gravimétricos y magnéticos individualmente. También, nos dan idea del tipo de funciones que pueden ser incorporadas en un problema de inversión donde los datos no proporcionan información suficiente acerca de la distribución de estructura en profundidad.

Una forma simple de implementar una restricción en profundidad (que ya hemos utilizado en el experimento del cubo enterrado), la cual no requiere modificaciones adicionales en la formulación de gradientes cruzados, consiste de considerar el fondo de los modelos como una losa con valor constante, para lo cual es necesario únicamente establecer un valor muy pequeño en las matrices de covarianza del modelo a priori. Esto permite que los valores de los bloques en profundidad permanezcan cercanos a los correspondientes en el modelo a priori. Esta restricción sólo es aplicable en casos donde se tiene un buen reconocimiento de las características geológicas y físicas del material en el fondo, el cual puede ser obtenido de información de pozos, estudios geológicos o mediante otras técnicas geofísicas que aportan información. El siguiente ejemplo muestra este efecto sobre el modelo mostrado en la Figura 29.

Características de los datos

Para este experimento tomamos en cuenta datos observados sobre la superficie, comenzando en 0 m hasta 1000 m en las direcciones este y norte, como se muestra en la

Figura 30, tomados sobre una malla regular cada 50 m. Nuevamente, el ruido agregado a estos datos es alrededor del 2% del valor máximo de cada anomalía. Como ya hemos mencionado, la dirección del campo inductor se consideró como $D=45^\circ$ y $I=45^\circ$. Los detalles del modelado y las anomalías fueron discutidos la Sección III.2.3 del Capítulo III.

Descripción de los parámetros de inversión

El proceso de inversión fue desarrollado tomando en cuenta una discretización irregular del dominio, como la que se muestra en la Figura 51. Esto con la finalidad de obtener una malla más fina sobre los bloques que conforman el dique, permitiendo prismas más grandes en la región homogénea que lo contiene. Se satisface además el requerimiento del número de parámetros que pueden ser utilizados con nuestro algoritmo, el cual para este caso es de 2016.

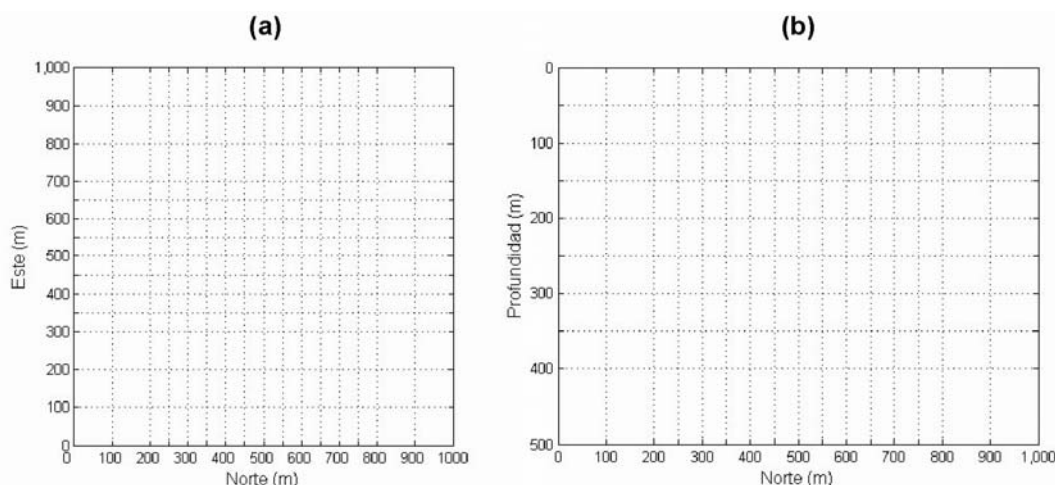


Figura 51. Malla utilizada en el proceso de inversión para el experimento del dique. Los bloques utilizados en las direcciones horizontales son mostrados en (a), mientras que la malla utilizada en profundidad se muestra en (b).

También, usamos valores $\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^8$, modelos a priori homogéneos con valores nulos y $\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$, con los cuales obtuvimos los modelos de inversión separada que se muestran en la Figura 52.

Descripción de los modelos

En la Figura 52 mostramos resultados de inversión separada del dique sin incorporar restricciones adicionales en profundidad, donde el ajuste a los datos es $\text{rms}_g = 0.8$ y $\text{rms}_m = 0.6$. Como en experimentos anteriores, observamos que el modelo de densidad no distingue la estructura del dique, justificando los datos con un modelo superficial, contrario al modelo de magnetización el cual distribuye gran parte de la propiedad física hacia el fondo. De acuerdo a lo observado en experimentos anteriores, esta característica podría estar asociada con la anomalía observada en superficie, la cual aparece truncada (Figura 30). Sin embargo, en este experimento queremos analizar cómo son recuperados los modelos cuando imponemos una losa en profundidad, sin incluir extensión de las observaciones más allá de los límites del dominio.

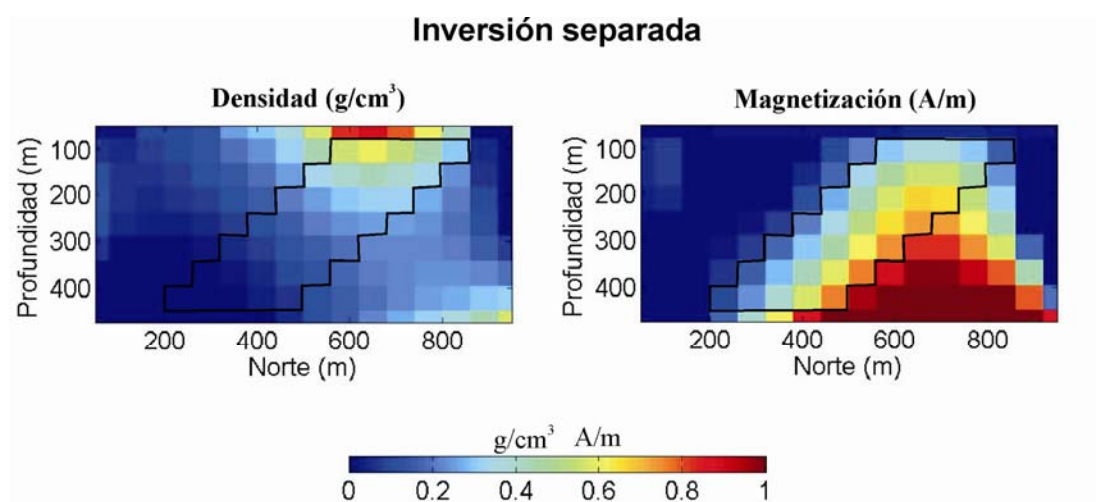


Figura 52. Modelos de densidad y magnetización de inversión separada del dique mostrado en la Figura 26, sin restricciones en profundidad. La sección que se muestra corta el dique en la posición *este* = 500 m. La posición real del dique es delimitada por las líneas negras continuas.

Podemos observar que el valor máximo de densidad (1.0 g/cm^3) y magnetización (1.0 A/m) es alcanzado, lo cual es justificado nuevamente debido a que los modelos no se encuentran dispersos a lo largo de todo el dominio, sino concentrados en regiones específicas.

Descripción de los parámetros de inversión

Comparativamente, la Figura 54 muestra los resultados de inversión separada y conjunta del dique con las características del Experimento III dado en la Tabla II, las cuales se refieren a valores $\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 1 \times 10^9$, modelos a priori nulos, valores

$$\sigma_g^2(z) = \sigma_m^2(z) = \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 450 \\ 0.01, & 450 \leq z \leq 500 \end{cases} \text{ y nivel de corte } \lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}. \text{ Además hemos}$$

fijado una losa en profundidad (a través de la matriz de covarianza del modelo a priori) con valores 0 g/cm^3 y 0 A/m , los cuales coinciden con los valores reales de los parámetros en el fondo.

El valor mínimo $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$ fue seleccionado a partir de las curvas de valores singulares mostradas en la Figura 53, el cual es un valor que coincide con el número de parámetros y el inicio de un decrecimiento drástico de la magnitud de dichos valores, por lo que este resulta un valor adecuado. Nuevamente mostramos en círculos rojos los valores λ_p que se usarían si tomáramos en cuenta el rango máximo de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$. Notamos que para las primeras iteraciones del proceso de inversión conjunta comenzamos con un nivel de corte λ_p asociado al doble del número de parámetros (4032), cuya amplitud se mantiene fija en todas las iteraciones, al mismo tiempo que en correspondencia con una disminución del rango de la matriz, hasta 2016.

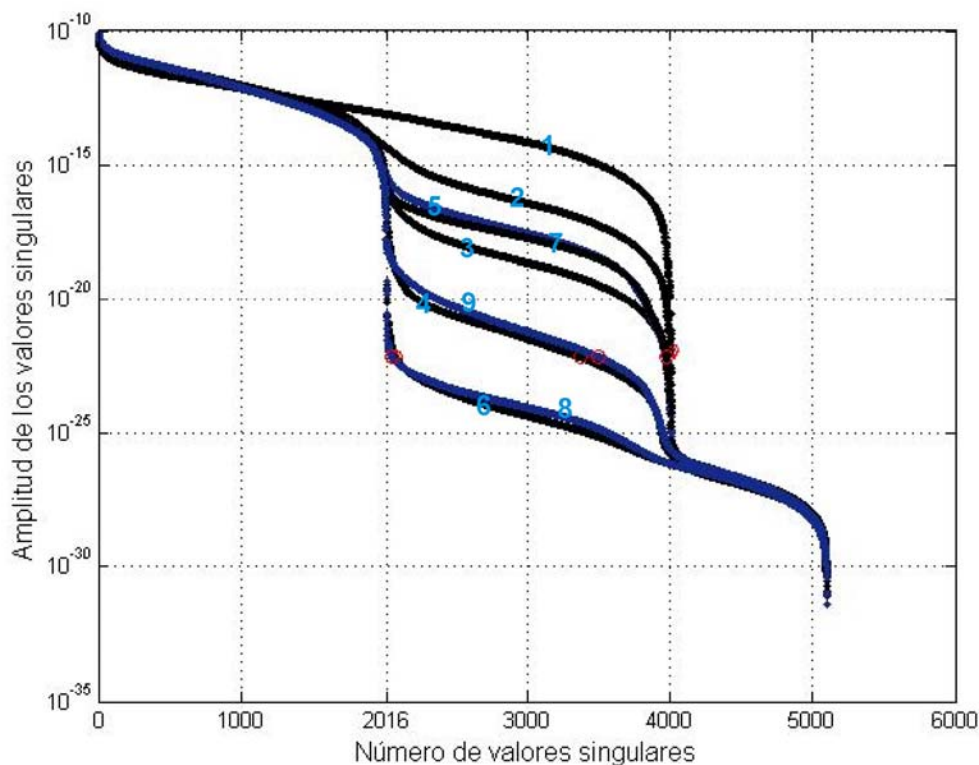


Figura 53. Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento del dique con una losa en profundidad. Las iteraciones son marcadas con números azules. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4032$.

Descripción de los modelos

En ambos experimentos (inversión separada y conjunta) de la Figura 54, observamos que la restricción impuesta en el fondo es satisfecha. Esta restricción fuerza a tener una estructura más superficial y elimina incompatibilidades en el fondo. Observamos también que el modelo de magnetización de inversión separada queda mejor distribuido sobre el modelo real. Luego, los modelos de inversión conjunta resaltan estas características y cumplen la condición de gradientes cruzados de la similitud estructural.

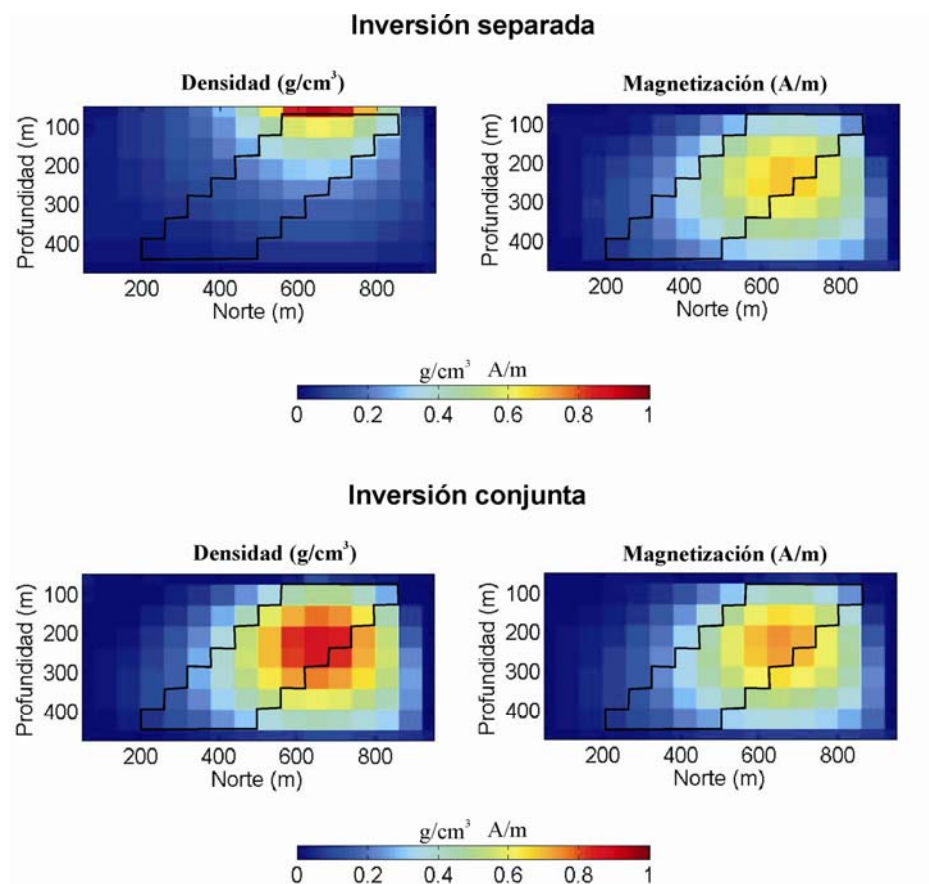


Figura 54. Modelos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta del dique mostrado en la Figura 29, imponiendo restricciones en profundidad. La sección que se muestra corta el dique en la posición este = 500 m. La posición real del dique es delimitada por las líneas negras continuas.

Ajuste a los datos

La Figura 55 muestra el ajuste y la convergencia de todo el proceso iterativo de inversión. Como en casos anteriores, podemos notar en la Figura 55a que el modelo gravimétrico sacrifica en mayor medida su ajuste en la segunda iteración acoplándose al modelo magnético desde el primer paso del proceso de inversión, lo que también se observa en la gráfica de convergencia (Figura 55b). Como ya hemos visto, la elección del nivel de corte λ_p y la capacidad de los datos gravimétricos de ajustarse a diferentes modelos, así como también el hecho de que el modelo magnético queda mejor

determinado en el caso de inversión separada, son los factores que influyen para que se dé este comportamiento. Esto es, encontrar un valor adecuado de λ_p que implique un compromiso entre el mejor ajuste de los datos y modelos estructuralmente similares.

En todo el proceso iterativo, el nivel de ajuste de los datos es ligeramente sobrestimado, mientras que la convergencia tiene un comportamiento decreciente, lo que indica que los modelos no presentan grandes cambios entre iteraciones consecutivas. Los modelos de inversión conjunta seleccionados, corresponden a la 20ª iteración, con una convergencia cercana al 20%.

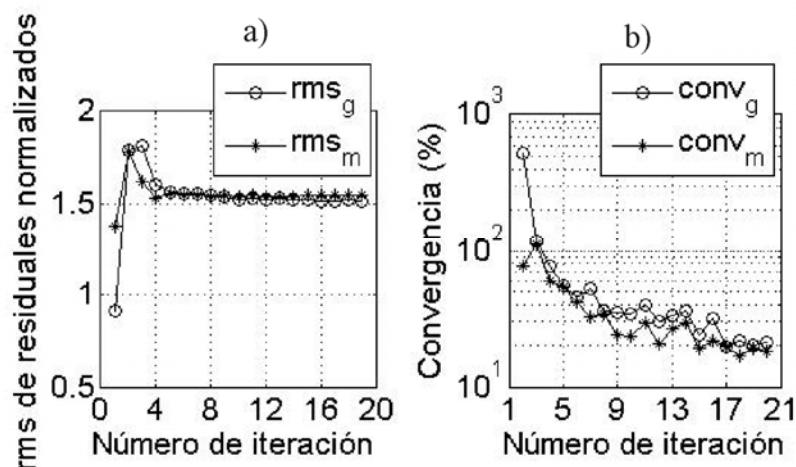


Figura 55. La Figura (a) muestra el ajuste de los datos y (b) la convergencia de los modelos 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del dique con fondo plano.

Similitud estructural

La similitud estructural alcanzada es observada en los modelos de inversión conjunta, mostrados en la Figura 54, mientras que su cuantificación es mostrada en la Figura 56. En ésta se observa menor similitud estructural hacia la parte superficial de los modelos para el caso de inversión separada. Las zonas asociadas a valores nulos corresponden a regiones homogéneas de los modelos cercanas a 0 g/cm^3 y 0 A/m . También se observa menor variación de los modelos en las direcciones horizontales, puesto que la componente t_z presenta valores cercanos a 0. En el caso de inversión

conjunta, las componentes del vector de gradientes cruzados muestran una clara similitud estructural entre los modelos casi en todas partes, donde resalta únicamente el ruido numérico.

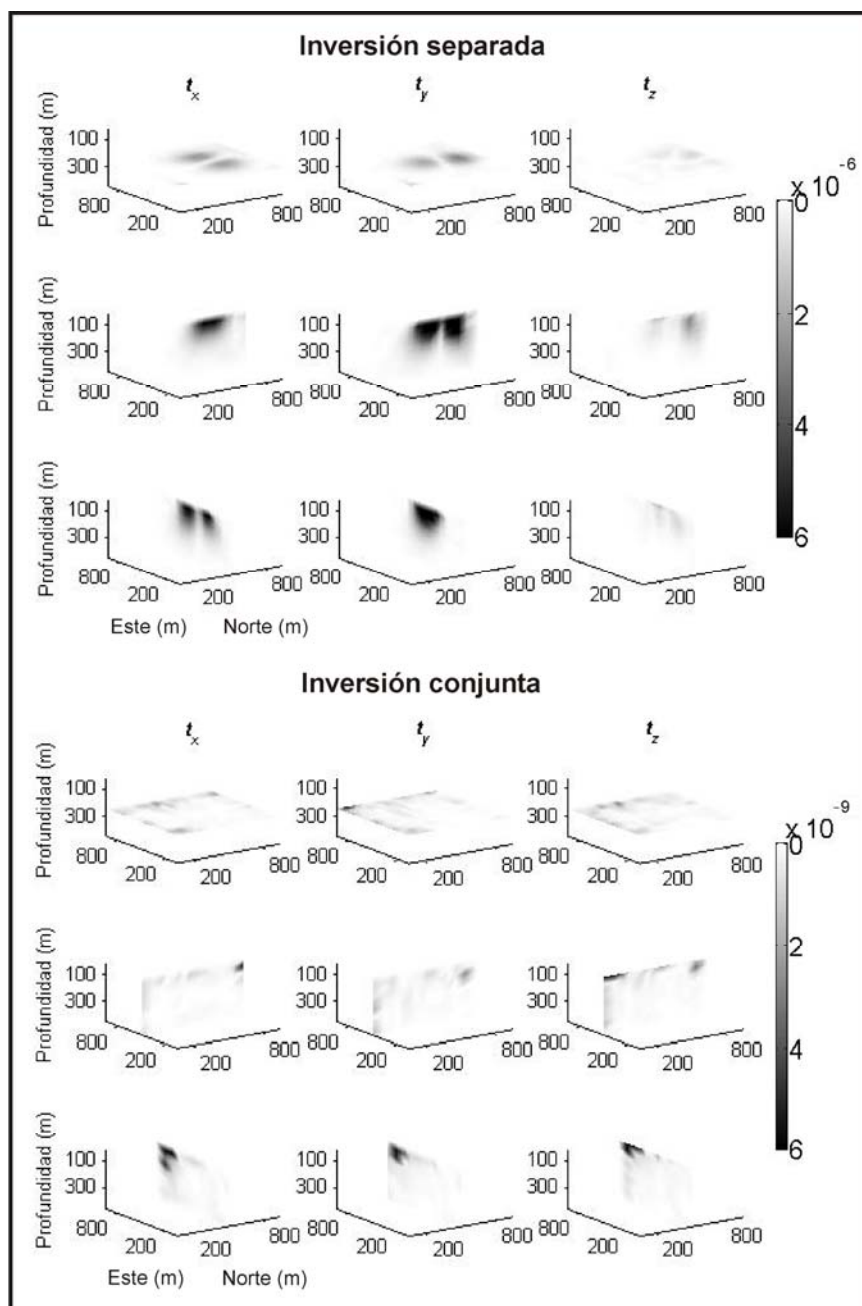


Figura 56. Imágenes 3D de las componentes del vector de gradientes cruzados obtenido numéricamente a partir de los modelos de la Figura 54. Las imágenes muestran cada una de las componentes t_x , t_y y t_z desde diferentes perspectivas.

Las gráficas que nos permiten analizar el comportamiento de los modelos de manera conjunta y detallada son mostradas en la Figura 57. La Figura 57a, correspondiente a inversión separada, muestra cómo los valores estimados de los parámetros se concentran en gran parte alrededor de 0, mientras que la dispersión observada es asociada a las capas horizontales. La dispersión comienza a partir de las capas inferiores y, observando en el mismo sentido de las manecillas del reloj, se ven valores de densidad mayormente homogéneos comparados con el rango de valores de magnetización hasta la capa superior, donde se muestra mayor variación de los valores de densidad y una capa cuasi homogénea de magnetización.

La forma de la gráfica de la Figura 57b nos indica nuevamente mayor similitud estructural de los modelos de inversión conjunta. En este caso observamos un rango de valores amplio para los elementos que conforman el dique.

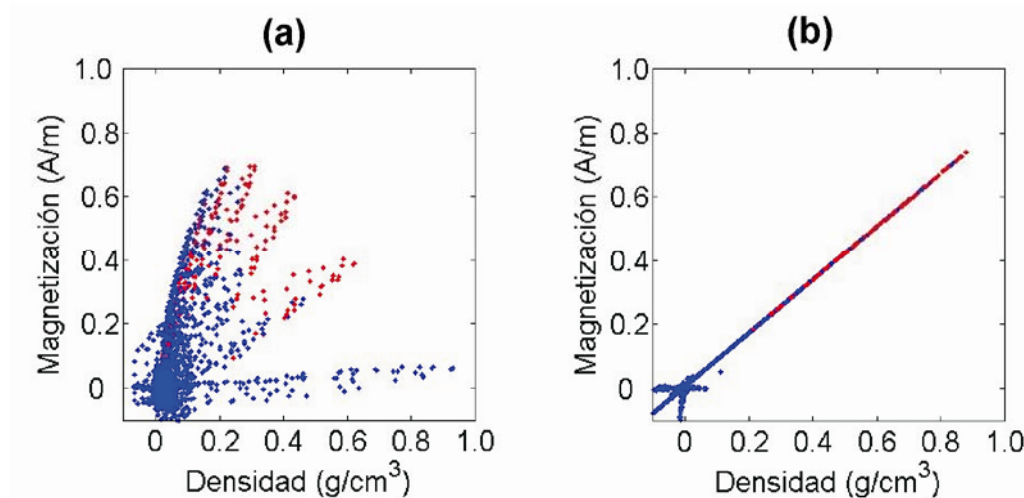


Figura 57. Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b) 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del dique. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región que conforma el dique, mientras que los azules corresponden al medio circundante.

Hasta aquí hemos visto que aunque el método de gradientes cruzados proporciona información suficiente para reducir las incompatibilidades entre los modelos, en los casos en que contamos con información adicional, por ejemplo en profundidad, los modelos

recuperan en mayor medida las características reales. Como ya hemos mencionado, dicha información adicional puede ser inferida de observaciones en el sitio de estudio, de otras técnicas geofísicas, o bien de metodologías matemáticas que se apegan a la física del problema. El siguiente experimento combina la metodología de gradientes cruzados para un medio 3D estructuralmente simple, con una formulación matemática que, junto con penalizaciones sobre los valores de los parámetros, determina y ubica mejor las estructuras (Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002)) principalmente en modelos que describen dos materiales geológicos, uno correspondiente a la zona homogénea y otro que caracteriza el cuerpo anómalo. Este método es compatible con el tipo de estructuras que usamos en nuestros experimentos sintéticos, además que ha sido aplicado a métodos potenciales.

IV. 1. 4. Experimento IV. Modelo de un cubo con efecto en profundidad conocido como *soporte gradiente mínimo*.

Comenzamos describiendo la formulación propuesta por Li y Oldenburg (1996, 1998), la cual involucra, además de la minimización de la suma cuadrática de los residuales gravimétricos o magnéticos, la minimización de un funcional de la forma

$$\begin{aligned}\Phi_m(m) = & \alpha_s \int_V w_s \{w(z)[m(\mathbf{r}) - m_0]\}^2 dv \\ & + \alpha_x \int_V w_x \left\{ \frac{\partial w(z)[m(\mathbf{r}) - m_0]}{\partial x} \right\}^2 dv \\ & + \alpha_y \int_V w_y \left\{ \frac{\partial w(z)[m(\mathbf{r}) - m_0]}{\partial y} \right\}^2 dv \\ & + \alpha_z \int_V w_z \left\{ \frac{\partial w(z)[m(\mathbf{r}) - m_0]}{\partial z} \right\}^2 dv,\end{aligned}\tag{81}$$

en el cual, además de información de un modelo de referencia m_0 también se requiere que el modelo sea relativamente suave en tres direcciones espaciales, lo que da lugar a cuatro funciones de peso espaciales (w_s , w_x , w_y y w_z) y cuatro coeficientes (α_s , α_x , α_y y α_z) que afectan la relativa importancia de las diferentes componentes en la función objetivo. Además, $w(z) = (z + z_0)^{-\beta/2}$ es una función de peso que ayuda a distribuir el parámetro físico (en este caso susceptibilidad magnética y densidad) en profundidad, para

el cual se requiere determinar z_0 y β . De esta manera, incorporar la función objetivo (81) en la solución de problemas inversos 3D con datos potenciales implica la habilidad para seleccionar diez factores de peso adecuados, por lo que preferimos usar otra metodología que no involucre demasiados parámetros de control y que sea compatible con la filosofía de gradientes cruzados, tal es el caso de la metodología propuesta por Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002).

Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002) proponen una función objetivo de la forma

$$P^\alpha(m) = \|Am - d\|_2^2 + \alpha s(m) \quad (82)$$

donde el primer término del lado derecho corresponde a la norma de la diferencia entre datos observados y predichos mientras que $s(m)$ es un funcional de estabilización dado

por $s(m) = \left\| \frac{\nabla m}{(\nabla m \cdot \nabla m + \beta^2)^{1/2}} \right\|_2^2$, al cual se le imponen además penalizaciones (cotas

superiores e inferiores) sobre los valores de los parámetros, las cuales se suponen conocidas. En este caso β es un número pequeño necesario para evitar la singularidad cuando $\nabla m \cdot \nabla m = 0$. Aunque los resultados obtenidos por estos autores mejoran con respecto a otros funcionales de estabilización de la solución, con los cuales son comparados, se requiere información que no siempre está disponible en casos reales, por lo que en nuestra formulación no incorporamos tales penalizaciones.

Para observar el efecto de combinar la técnica de gradientes cruzados y los métodos que involucran funcionales que reducen las incompatibilidades de estructura en profundidad, recurrimos a la metodología propuesta por Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002). Incorporando el término de regularización $s(m)$ definido en (82), tenemos que el vector de valores esperados definido en (25) se ve como

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 \\ \hat{\mathbf{L}}_1 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 \\ \hat{\mathbf{S}}_1 \\ \hat{\mathbf{S}}_2 \\ \hat{\mathbf{m}}_1 \\ \hat{\mathbf{m}}_2 \end{bmatrix} \quad (83)$$

donde $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ representan los valores del gradiente aplicados a los parámetros de los modelos, usados en la formulación de Portniaguine y Zhdanov (1999) conocida como *soporte gradiente mínimo* (β MGS), el resto de las componentes del vector $\hat{\mathbf{x}}$ son definidas en el Capítulo II.

La información a priori $\mathbf{x}_0$ es establecida en este caso como

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{\text{obs}} \\ \mathbf{d}_2^{\text{obs}} \\ \mathbf{L}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{L}_2^{\text{apr}} \\ \mathbf{S}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{S}_2^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{bmatrix} \quad (84)$$

donde, así como los valores de suavidad a priori $\mathbf{L}_1^{\text{apr}}$ y $\mathbf{L}_2^{\text{apr}}$, $\mathbf{S}_1^{\text{apr}}$ y $\mathbf{S}_2^{\text{apr}}$ son definidos como cero.

La matriz de covarianza $\mathbf{C}_0$ se ve ahora como:

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_1} & & & & & & & \\ & \mathbf{C}_{d_2} & & & & & & \\ & & \mathbf{C}_{L_1} & & & & & \\ & & & \mathbf{C}_{L_2} & & & & \\ & & & & \mathbf{C}_{S_1} & & & \\ & & & & & \mathbf{C}_{S_2} & & \\ & \mathbf{0} & & & & & \mathbf{C}_{m_1} & \\ & & & & & & & \mathbf{C}_{m_2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

donde las matrices de covarianza $\mathbf{C}_{S_1}$ y $\mathbf{C}_{S_2}$ son definidas por Portniaguine y Zhdanov (1999) como

$$\mathbf{C}_{S_1} = \frac{\gamma_1^2}{(\nabla m_1 \cdot \nabla m_1 + \beta_1^2)} \text{ y } \mathbf{C}_{S_2} = \frac{\gamma_2^2}{(\nabla m_2 \cdot \nabla m_2 + \beta_2^2)}, \quad (86)$$

el resto de las matrices de covarianza son definidas en el Capítulo II. Las expresiones en (86) son funciones de peso que regulan el nivel de suavidad y la resolución en profundidad, a través del gradiente, requerido por los modelos.

La ecuación no lineal

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \quad (87)$$

queda descrita como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_1 - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{m}}_1) &= 0 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 - \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{m}}_2) &= 0 \\ \hat{\mathbf{L}}_1 - \nabla^2 \hat{\mathbf{m}}_1 &= 0 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 - \nabla^2 \hat{\mathbf{m}}_2 &= 0 \\ \hat{\mathbf{S}}_1 - \nabla \hat{\mathbf{m}}_1 &= 0 \\ \hat{\mathbf{S}}_2 - \nabla \hat{\mathbf{m}}_2 &= 0 \\ \mathbf{0} - \mathbf{t}_x(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) &= 0 \\ \mathbf{0} - \mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) &= 0 \\ \mathbf{0} - \mathbf{t}_z(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Finalmente, la solución general encontrada es de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{m}}_{k+1} = & \hat{\mathbf{m}}_k + \mathbf{N}_1^{-1} \left[\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k)) - \mathbf{C}_{m_0}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_k - \mathbf{m}_0) \right] \\ & - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T)^{-1} \left\{ \mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \left[\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k)) - \mathbf{C}_{m_0}^{-1} (\hat{\mathbf{m}}_k - \mathbf{m}_0) \right] \right. \\ & \left. + \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k) \right\}\end{aligned}\quad (89)$$

donde

$$\mathbf{N}_1 = (\mathbf{G}_k^T \mathbf{C}_{d_0}^{-1} \mathbf{G}_k + \mathbf{C}_{m_0}^{-1}). \quad (90)$$

La expresiones (89) y (90) comprenden las matrices:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{Df}_1(\mathbf{m}_1) & 0 \\ 0 & \mathbf{Df}_2(\mathbf{m}_2) \\ \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{m}_1(\mathbf{m}_1) & 0 \\ 0 & \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{m}_2(\mathbf{m}_2) \\ \mathbf{D}\nabla \mathbf{m}_1(\mathbf{m}_1) & 0 \\ 0 & \mathbf{D}\nabla \mathbf{m}_2(\mathbf{m}_2) \end{bmatrix}, \quad (91)$$

$$\mathbf{C}_{d_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_1} & & & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}_{d_2} & & & & \\ & & \mathbf{C}_{L_1} & & & \\ & & & \mathbf{C}_{L_2} & & \\ & & & & \mathbf{C}_{S_1} & \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{C}_{S_2} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}_{m_0}$ definidas en el Capítulo II. El vector $(\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k))$ toma ahora la forma

$$\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{\text{obs}} - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{m}}_1^k) \\ \mathbf{d}_2^{\text{obs}} - \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{m}}_2^k) \\ \mathbf{L}_1^{\text{apr}} - \nabla^2 \hat{\mathbf{m}}_1^k \\ \mathbf{L}_2^{\text{apr}} - \nabla^2 \hat{\mathbf{m}}_2^k \\ \mathbf{S}_1^{\text{apr}} - \nabla \hat{\mathbf{m}}_1^k \\ \mathbf{S}_2^{\text{apr}} - \nabla \hat{\mathbf{m}}_2^k \end{bmatrix} \quad (93)$$

y $\mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}}_k)$ contiene las componentes del vector de gradientes cruzados definido en (41).

También $\hat{\mathbf{m}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}}_1^k \\ \hat{\mathbf{m}}_2^k \end{bmatrix}$ son los modelos previos después de k iteraciones y $\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{bmatrix}$

son los modelos a priori.

Características de los datos y parámetros de inversión

Aplicamos la nueva formulación (89) y (90) a un experimento de prueba que consiste del cubo con campos observados, gravimétrico y magnético, extendidos fuera de las fronteras del dominio, el cual fue utilizado en el Experimento I donde las características del modelo respecto a las dimensiones y valores de los parámetros son similares. Los valores de los parámetros de control para este experimento se muestran en el Experimento IV de la Tabla II, donde no hemos considerado el término de regularización del Laplaciano, para observar únicamente el efecto de las funciones de soporte gradiente mínimo $s(m)$, de esta manera $\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 0$. Además, hemos establecido los parámetros $\gamma_g^2 = 10$, $\gamma_m^2 = 1$, $\beta_g^2 = 1 \times 10^{-6}$ y $\beta_m^2 = 1 \times 10^{-4}$ que aparecen en (86). Los modelos a priori fueron considerados modelos homogéneos con valores nulos ($\mathbf{m}_g^{\text{apr}} = \mathbf{m}_m^{\text{apr}} = \mathbf{0}$) y matrices de covarianza suficientemente grandes ($\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$) para no sesgar los modelos estimados hacia un valor fijo en el proceso de inversión.

Descripción de los modelos

Podemos observar, en los modelos de la Figura 58, que usando una regularización sobre la estructura reduce los valores de densidad y magnetización a profundidad, comparativamente con los modelos de la Figura 39. Sin embargo, la ubicación del cubo es localizada arriba de su posición original en profundidad, tanto en el modelo de densidad como en el de magnetización, donde comparativamente, este último quedó ubicado alrededor de su posición original para el caso usando regularización por medio del Laplaciano, como se observa en la Figura 39. Estos resultados son comparables a los obtenidos por Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002), quienes usando un criterio de suavidad como estabilizador de la solución, obtuvieron modelos suavizados y extendidos en las tres direcciones alrededor del cuerpo anómalo, mientras que usando el estabilizador de soporte gradiente mínimo (86), se obtuvieron modelos con mayor definición de las fronteras del cuerpo anómalo, tendiendo a producir el dominio anómalo más pequeño posible. Como ya hemos mencionado, en la formulación desarrollada (89) y (90) no incluimos penalizaciones sobre los valores de los parámetros como las propuestas por Portniaguine y Zhdanov (1999, 2002).

La restricción de gradientes cruzados nos lleva a encontrar modelos con mayor similitud estructural, como lo muestran los modelos de inversión conjunta de la Figura 58, pero sabemos que no es un factor suficiente para situar las estructuras en su posición original cuando ambas presentan características desviadas del objetivo.

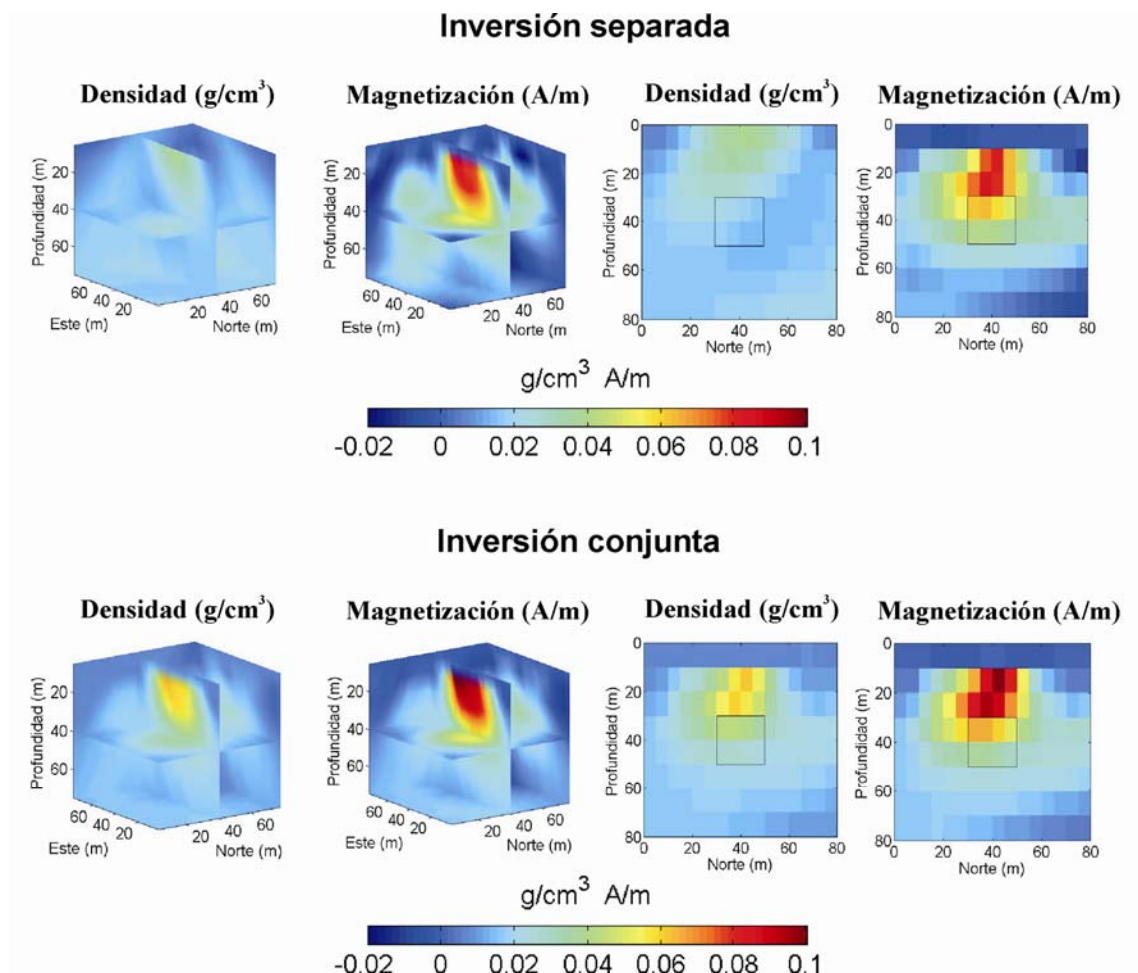


Figura 58. Modelos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta del cubo mostrado en la Figura 24, usando restricciones en profundidad a través de β MGS para valores de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$. La sección que se muestra corta el cubo en la posición *este* = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Hemos visto que un factor importante en el proceso de inversión conjunta para lograr obtener modelos que satisfagan todas las características requeridas dentro de un nivel adecuado, como son: un buen ajuste a los datos, pequeños cambios en los modelos entre iteraciones consecutivas (estabilidad del proceso iterativo) y similitud estructural entre los modelos; radica en la elección del valor de corte λ_p . En este caso hemos usado los valores $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$. Sin embargo, usando valores $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$ observamos menor similitud estructural entre los modelos, como se muestra en la Figura 59, siendo mejores el ajuste a los datos y la estabilidad del proceso iterativo, como veremos a continuación.

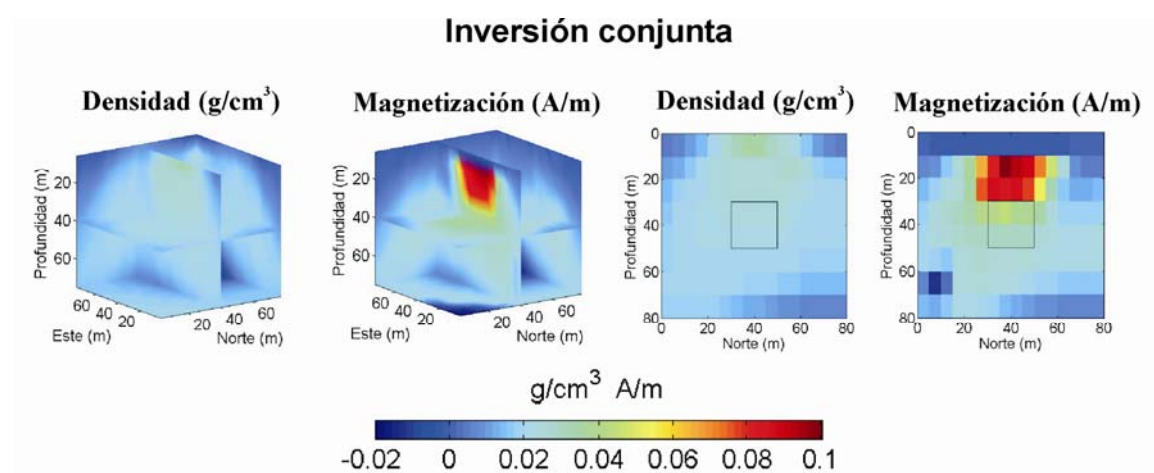


Figura 59. Modelos de densidad y magnetización de inversión conjunta comparativos con los modelos mostrados en la Figura 58, usando un nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$. La sección que se muestra corta el cubo en la posición *este* = 40 m. La posición real del cubo es delimitada por las líneas negras continuas.

Ajuste a los datos

Los resultados comparativos del proceso de inversión conjunta para los modelos obtenidos con ambos niveles de corte son mostrados en la Figura 60, donde a) y b) corresponden al nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$, mientras que c) y d) a $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$. Como en resultados anteriores, el ajuste a los datos y la convergencia son mejor estimados usando un nivel de corte correspondiente al número de parámetros, en este caso

$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$, y no el que corresponde al rango máximo de la matriz ($\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$). Para este último valor vemos un comportamiento oscilante de los modelos y un mayor desajuste de los datos gravimétricos en el modelo de inversión conjunta (10ª iteración), mientras que el ajuste de los datos magnéticos se mantiene prácticamente constante pero con mayores variaciones en la convergencia, estabilizándose en las últimas iteraciones. En el caso de los modelos obtenidos usando $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$, vemos un comportamiento similar al que hemos encontrado en otros casos, buen ajuste a los datos en todo el proceso iterativo (particularmente en la 9ª iteración seleccionada) y un proceso de convergencia más estable. Esto muestra la estrecha relación entre el ajuste de los datos, estabilidad en el proceso de convergencia y modelos estructuralmente similares.

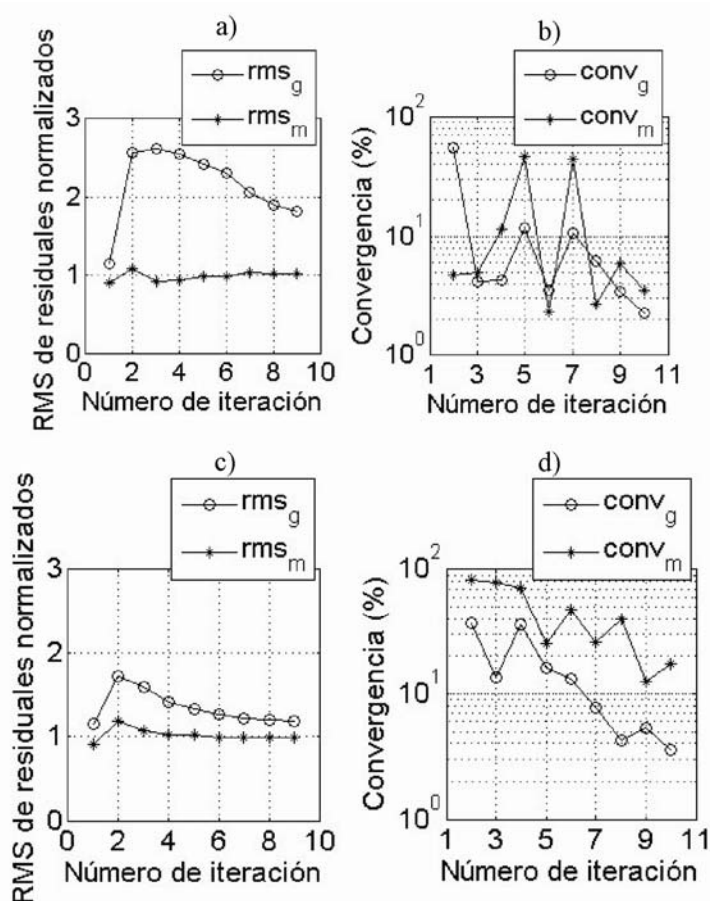


Figura 60. Gráficas comparativas entre el ajuste de los datos (a) y (c) y la convergencia (b) y (d) de los modelos 3D de datos gravimétricos y magnéticos del experimento del cubo con *soporte gradiente mínimo*. Las figuras (a) y (b) corresponden a un nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$ mientras que (c) y (d) a los valores $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$.

Similitud estructural

La correlación entre ambos parámetros, como se muestra en la Figura 61, nos permite conocer además de los valores alcanzados en cada región, el comportamiento de los parámetros. También nos permite inferir acerca de la similitud geométrica entre ellos. La Figura 61a muestra la correlación de los modelos de inversión separada y la Figura 61b la correlación de los modelos de inversión conjunta, mostrados en la Figura 58, mientras que la Figura 61c corresponde a la correlación de los modelos de inversión

conjunta mostrados en la Figura 59. En éstas vemos un comportamiento casi homogéneo del modelo de densidad de inversión separada el cual es mayormente resaltado usando $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$. La similitud estructural, como en casos anteriores, es caracterizada por una línea recta, ya que los datos observados corresponden a modelos con la misma estructura y valores idénticos, lo cual se logra en mayor medida para los modelos usando $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$. La similitud geométrica es confirmada por el valor rms de la función de gradientes cruzados, el cual es tres órdenes de magnitud menor que el obtenido por los modelos estimados separadamente, para el caso $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$, mientras que es dos órdenes de magnitud menor para $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$.

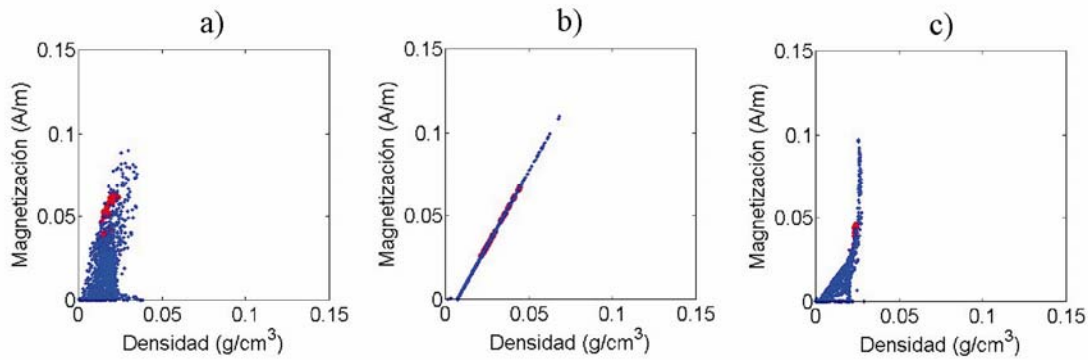


Figura 61. Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b) con nivel de corte $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-20}$ correspondientes a los modelos de la Figura 58 y (c) con $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$, correspondiente a los modelos de la Figura 59. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región que incluye al cubo, mientras que los azules corresponden al medio circundante.

Los Experimentos III y IV muestran que la combinación de diferentes metodologías que restringen el fondo de los modelos imponiendo directamente valores sobre los parámetros, o bien a través de funcionales sobre su estructura, con la restricción de gradientes cruzados, proporciona en algunos casos modelos mayormente concordantes con el modelo real. Como ya hemos visto, existen otras metodologías de inversión 3D para datos potenciales como la propuesta por Li y Oldenburg (1996, 1998), las cuales se pueden incorporar en nuestra formulación de inversión conjunta 3D mediante gradientes

cruzados y en algunos casos lograr reducir los efectos incompatibles en profundidad. La desventaja con estas técnicas es que aparecen muchos factores que debemos seleccionar cuidadosamente para llegar a una solución que consideramos “la mejor”. En el siguiente experimento analizamos los resultados combinando la restricción de gradientes cruzados con una técnica que involucra pesos en profundidad de forma más natural y simple para nuestra formulación.

IV. 1. 5. Experimento V. Modelo de un cubo con efecto en profundidad usando una losa y Laplaciano variable.

La técnica consiste en que cuando tenemos, de alguna manera, mayor certidumbre sobre los valores de los parámetros en alguna región particular, podemos ponderar el nivel de ajuste a los datos y la suavidad para cada región, considerando el término de regularización del Laplaciano como función de la profundidad, a través de $\alpha_g^2 = \alpha_g^2(z)$ y $\alpha_m^2 = \alpha_m^2(z)$. Imponiendo valores pequeños para una región determinada con respecto a otra, esperamos mejor ajuste a los datos en dicha región. A esto podemos agregar imponer restricciones sobre los valores en dicha región (por ejemplo, el caso de una losa plana en profundidad), lo que implica que los modelos no se alejarán mucho de los valores establecidos y tendremos un buen ajuste en dicha región.

Características de los datos

El modelo usado en este ejemplo consiste del cubo enterrado con dimensiones y valores de los parámetros dados en los Experimentos I y IV, sin embargo, para este caso usamos observaciones de los campos gravimétrico y magnético sobre la región de estudio, es decir, no extendemos las observaciones fuera del dominio, como aparecen en la Figura 31.

Descripción de los parámetros de inversión

Los parámetros de control son mostrados en el Experimento V de la Tabla II, donde $\alpha_g^2(z) = \alpha_m^2(z) = \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 70 \\ 100, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases}$, lo que implica mayor ajuste de los datos

sobre los bloques de la base de los modelos, mientras que el valor de suavidad en el fondo permite modelos rugosos. Los bloques por arriba de la sección horizontal del fondo tienen estructuras más suaves. Por otro lado, restringimos los bloques del fondo a mantener fijos los valores nulos de los modelos a priori ($\mathbf{m}_g^{\text{apr}} = \mathbf{m}_m^{\text{apr}} = \mathbf{0}$) mediante

$$\sigma_g^2(z) = \sigma_m^2(z) = \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 70 \\ 1 \times 10^{-4}, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases}. \quad \text{Usamos también un nivel de corte}$$

$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-15}$ de acuerdo a las curvas de valores singulares.

Descripción de los modelos

La Figura 62 muestra los resultados de la inversión separada y conjunta en la 7ª iteración, donde se observa el efecto de la losa en profundidad a través de los valores $\sigma_g^2(z)$ y $\sigma_m^2(z)$ establecidos, dando mayor importancia al ajuste de los datos en estos bloques, lo cual queda determinado por los valores $\alpha_g^2(z)$ y $\alpha_m^2(z)$. Haciendo una comparación con el Experimento I (Figura 35) vemos similarmente una significativa reducción en profundidad de la distribución de las propiedades físicas, la cual se concentra lateralmente. El Laplaciano como función de la profundidad, también contribuye con este efecto. Luego, la restricción de gradientes cruzados concentra mejor ambas estructuras en su posición original. Sin embargo, vemos que los valores son determinados por debajo del 10% de su valor original y que aunque la estructura del cubo enterrado es recuperada en el modelo de densidad de inversión conjunta, la región superficial no recupera la estructura plana del modelo magnético. Asimismo, la estructura en ambos modelos es distribuida lateralmente de manera significativa.

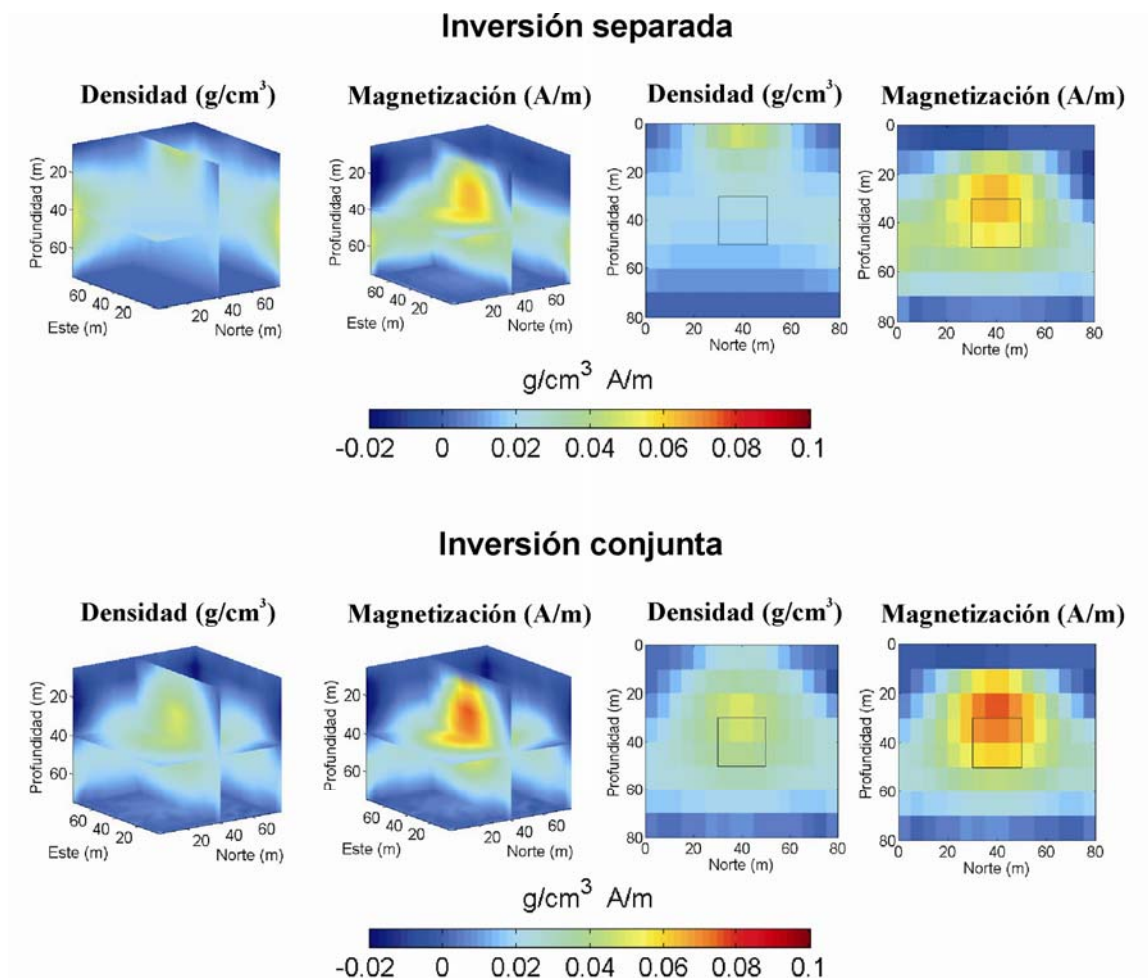


Figura 62. Modelos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta del cubo usado en los Experimentos I y IV, usando restricciones en profundidad a través de una losa y Laplaciano variable. La sección que se muestra corta el cubo en la posición *este* = 40 m. Las secciones muestran la posición real del cubo delimitada por las líneas negras continuas.

Ajuste a los datos

Si comparamos los resultados del ajuste de los datos y la convergencia del proceso iterativo, con los resultados del experimento mostrado en la Figura 35, donde únicamente imponemos condiciones sobre los valores de los parámetros en el fondo a través de $\sigma_g^2(z)$ y $\sigma_m^2(z)$ y no sobre el Laplaciano o el ajuste, surgen los resultados mostrados en la Figura 63. En ésta observamos que mientras la convergencia muestra un

comportamiento estable en ambos casos (figuras b y d), el ajuste de los datos es más inestable cuando incorporamos Laplaciano variable (figura a). Aquí, el ajuste de los datos magnéticos no mejora significativamente con las iteraciones, mientras que en la figura c, se observa un buen ajuste en ambos casos.

En este caso, sería conveniente usar diferentes funciones de peso en el Laplaciano para el modelo gravimétrico y magnético, sobre todo considerando que ambos campos decaen de forma diferente con la profundidad. También notamos que mientras incorporamos más condiciones adicionales, es difícil encontrar modelos que satisfagan todas las características requeridas.

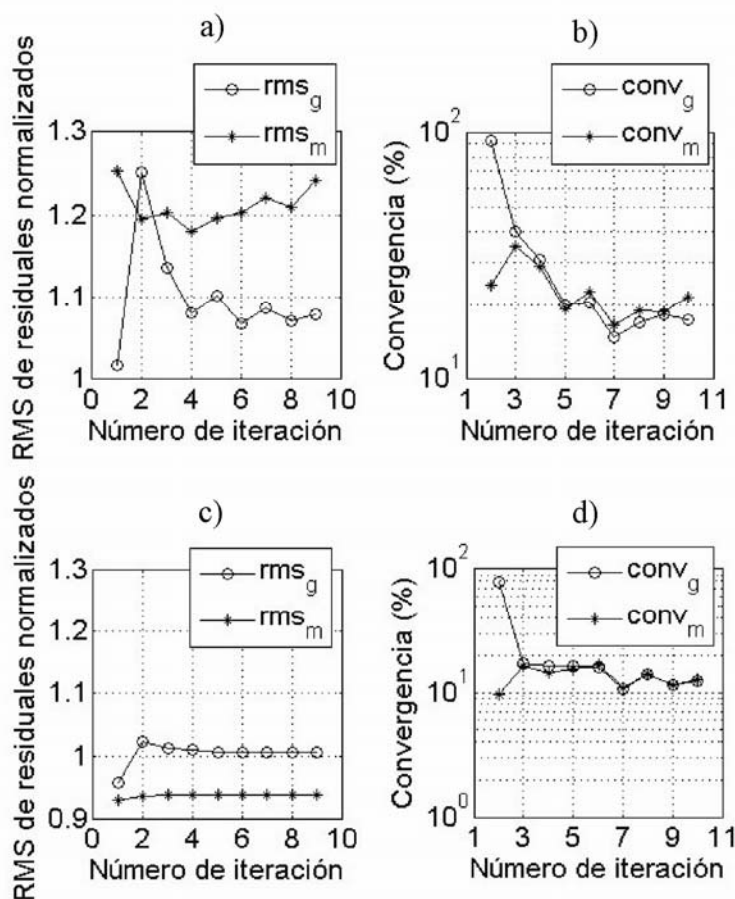


Figura 63. La figura (a) muestra el ajuste de los datos y (b) la convergencia del modelo para el experimento con fondo plano y Laplaciano variable de los modelos de la Figura 62. Las figuras (c) y (d) muestran el ajuste de los datos y la convergencia respectivamente, usando únicamente fondo plano, correspondiente a los modelos de la Figura 35.

Similitud estructural

El comportamiento y valores de los parámetros dentro y fuera del cubo lo podemos analizar en la Figura 64. En ésta se observan modelos de densidad cuasi homogéneos principalmente alrededor del cubo enterrado, para los casos de inversión separada, en los experimentos con fondo plano y Laplaciano variable (a) y con fondo plano únicamente (b). Los valores reales son mejor estimados en los casos de inversión conjunta (b) y (d), notando mayor similitud estructural cuando imponemos únicamente fondo plano (d), mientras que el efecto del peso muestra una correlación más curvada (b), que en este caso representa menor similitud estructural comparada con (d).

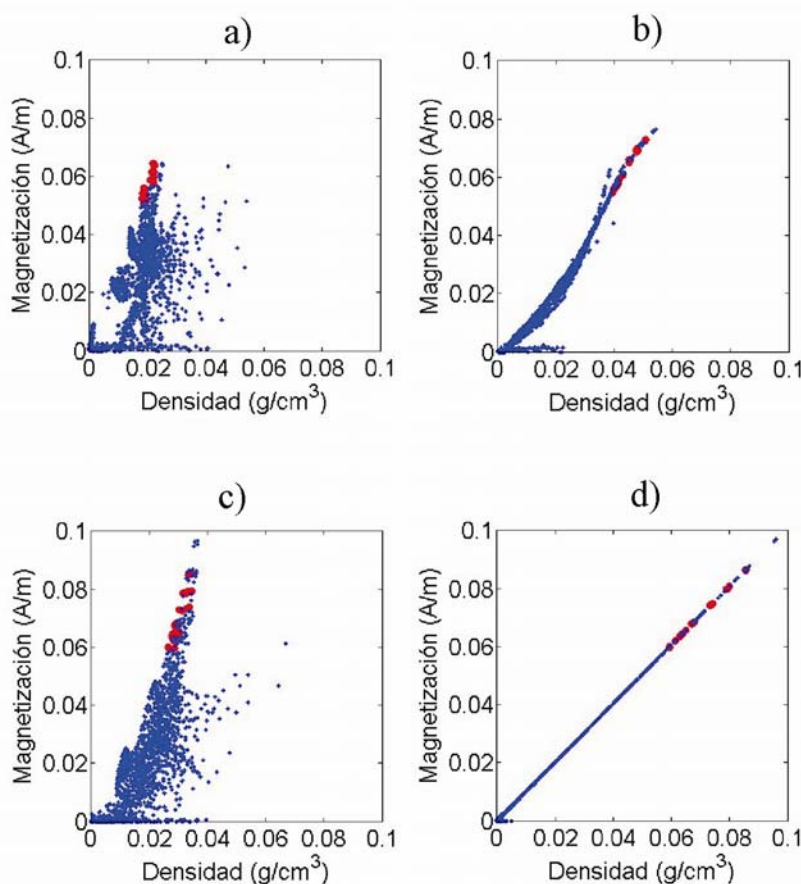


Figura 64. Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b), correspondientes a los modelos de la Figura 62 con fondo plano y Laplaciano variable. Las figuras (c) y (d) muestran la correlación de los parámetros físicos correspondiente a los modelos de la Figura 35, donde hemos usado la restricción de una losa en profundidad (fondo plano). Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región que incluye al cubo, mientras que los azules corresponden al medio circundante.

Hasta aquí hemos analizado cómo se aplica la restricción de gradientes cruzados en modelos tridimensionales controlados, con estructuras simples y complejas sobre datos potenciales. Observamos cómo influyen cada uno de los factores que intervienen en la formulación para obtener modelos con características reales. Notamos que en general la inversión de datos gravimétricos presenta mayores problemas de no unicidad en los modelos, comparada con los modelos magnéticos, por lo que en la mayoría de los experimentos los modelos gravimétricos se sujetan al comportamiento y estructura de los modelos magnéticos en el proceso de inversión conjunta. Aunque éste no es un comportamiento ideal en una técnica de inversión conjunta, es un factor que ayuda en la recuperación de los modelos cuando una técnica geofísica es débil.

Para obtener un balance entre las características requeridas en la formulación como lo es el ajuste de los datos, un proceso iterativo estable, suavidad en los modelos con características reales y similitud estructural, es muy importante la selección del nivel de corte λ_p de la descomposición en valores singulares. Observamos también que los modelos son mejor recuperados cuando imponemos condiciones adicionales directamente sobre los valores de los parámetros (por ejemplo en el fondo), lo cual no siempre es posible en un caso real. Sin embargo, las metodologías que usamos para restringir el fondo de los modelos y que podrían ser utilizadas para casos más generales, no satisficieron todas las características impuestas en la formulación, sacrificando por ejemplo la similitud estructural.

Una vez analizados todos los factores que intervienen en la metodología de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados, en experimentos sintéticos con datos potenciales, el siguiente paso consiste en aplicar la metodología usando datos reales, donde el control sobre los parámetros de regularización y condiciones adicionales es más complejo y depende en gran medida de las características geológicas y geofísicas observables en el sitio.

IV. 2. Experimento con datos reales

Aplicamos la metodología a datos de campo en la Bahía de Todos Santos, localizada en la costa noroeste de México ($31^{\circ} 55' - 31^{\circ} 45' \text{ N}$, $116^{\circ} 50' - 116^{\circ} 35' \text{ W}$). En los trabajos de Gallardo-Delgado et al. (2003) y Pérez-Flores et al. (2004) se describe la zona a detalle además de las características geológicas de la misma. La Figura 65 muestra la localización de la zona de estudio y los diferentes tipos de roca observados en superficie. Podemos decir que la zona está formada básicamente de un basamento de rocas ígneas andesíticas y graníticas el cual es sobreyacido por depósitos aluviales. El basamento es extensivamente expuesto en las regiones norte y sur del área de estudio y se estima que se profundiza hasta 1650 m debajo del nivel del mar (Gallardo-Delgado et al., 2003).

Características de los datos

La prospección del área se realizó mediante técnicas terrestres, marinas y aéreas con un total de 978 datos gravimétricos y 812 datos magnéticos incluidos en nuestro experimento de inversión con datos de campo, como se muestra en la Figura 67. La descripción detallada de los datos se encuentra en Pérez-Flores et al. (2004) donde se refiere que los datos gravimétricos terrestres fueron tomados de Vázquez (1980), Cruz-Falcón (1986) y Agüero-Madero (1986). Los datos de gravimetría marina se obtuvieron de González-Serrano (1977) y los magnéticos marinos de González-Fernández et al. (2000). Los datos aeromagnéticos son del Consejo de Recursos Naturales No Renovables (1962) y los magnéticos terrestres de González-Fernández et al. (2000). La dirección del campo magnético inductor se consideró con componentes $D=8^{\circ}$ y $I=56.9^{\circ}$. La desviación estándar considerada fue de 0.1 y 3 mGal para datos gravimétricos, dependiendo si éstos fueron terrestres o marinos, respectivamente. La desviación estándar para datos magnéticos terrestres, marinos y aéreos fue de 50, 60 y 100 nT, respectivamente.

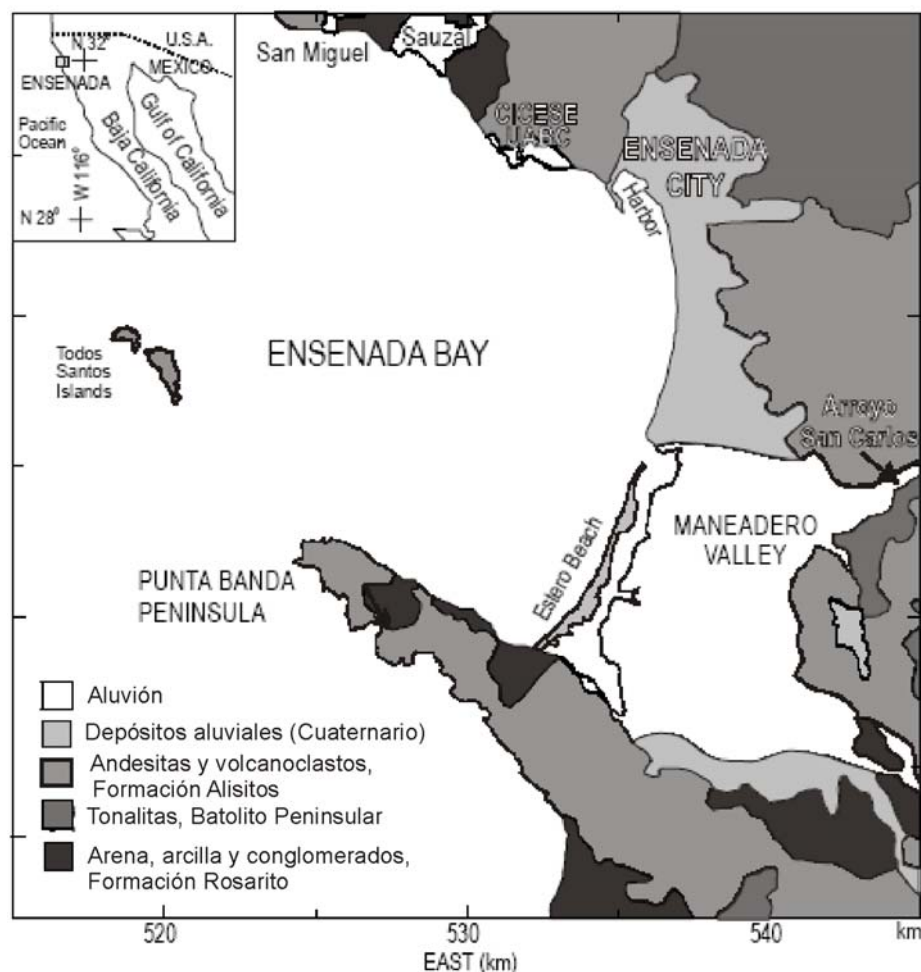


Figura 65. Localización de la Bahía de Todos Santos, México y su geología superficial, tomada de Pérez-Flores et al. (2004).

Descripción de los parámetros de inversión

Para el proceso de inversión seleccionamos la región mostrada en la Figura 67, la cual fue rotada para optimizar la distribución de los bloques y discretizada con una malla de $14 \times 14 \times 10$ bloques, los cuales tienen dimensiones de 2 km de ancho, 1 km de largo y 200 m de espesor. El área en la parte sur fue excluida dado que comprende una región de montaña estrecha la cual no puede ser mapeada con precisión, debido al tamaño de celda seleccionado para el modelo, además de que no se tiene cobertura de datos gravimétricos en esta zona. Para definir un modelo a priori para el volumen estudiado, se consideró lo encontrado por Gallardo-Delgado et al. (2003), quienes determinaron la existencia de un

solo basamento gravimétrico y magnético y un relleno sedimentario con un contraste de densidad de -0.7 g/cm^3 y un contraste de magnetización de -1.4 A/m . Valiéndonos de esta información, establecimos los modelos a priori $\mathbf{m}_g^{\text{apr}}$ y $\mathbf{m}_m^{\text{apr}}$ como se muestra en la Figura 66. Sin embargo, las matrices de covarianza de dichos modelos fueron seleccionadas suficientemente grandes en todo el dominio ($\sigma_g^2 = \sigma_m^2 = 1 \times 10^8$), para no sesgar los modelos estimados a estructuras planas definidas en los modelos a priori y permitir estructuras mayormente heterogéneas que delimiten los diferentes materiales geológicos antes mencionados. En cuanto a los demás parámetros de inversión, utilizamos suavidad homogénea, los modelos iniciales fueron medios homogéneos con contrastes de densidad y magnetización nulos, seleccionamos $\alpha_g^2 = \alpha_m^2 = 10$, tomando en cuenta el nivel de rugosidad de los modelos así como el ajuste de los datos.

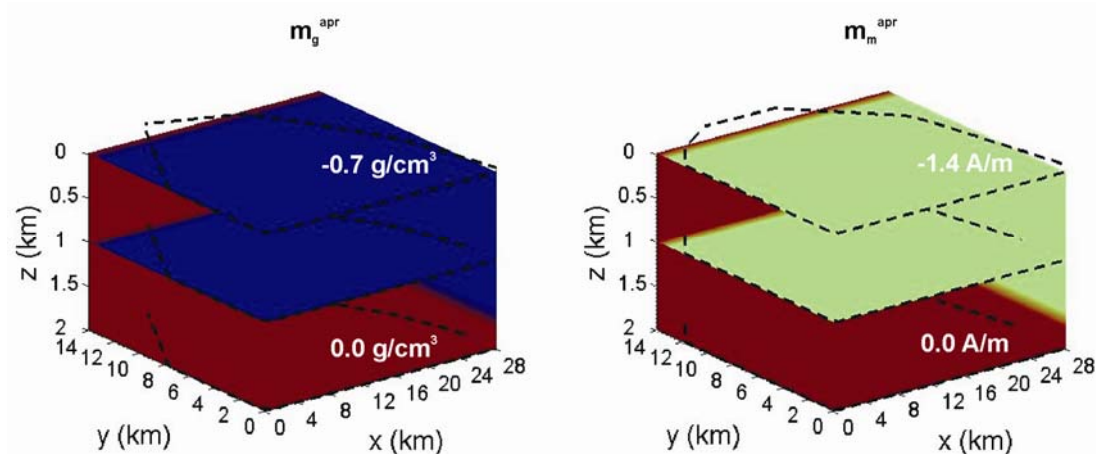


Figura 66. Modelos a priori seleccionados. La región en rojo muestra un contraste de densidad y magnetización nulos, mientras que las regiones azul y verde muestran contrastes negativos de densidad y magnetización, respectivamente. Las líneas negras discontinuas delimitan la región cubierta por datos en cada caso y sirven de marco de referencia.

Interpretación de las anomalías

En la región delimitada observamos que la anomalía gravimétrica (Figura 67a), al ser negativa, distingue una deficiencia de masa, la cual se puede asociar con un cuerpo con contraste de densidad negativo (material menos denso) extendido hacia la parte centro y sur, lo cual correspondería a los depósitos sedimentarios en el centro de la Bahía.

La anomalía magnética (Figura 67b) presenta una anomalía dipolar positiva a lo largo de la Península de Punta Banda, la cual determinaría la deficiencia de material magnético inmediatamente al norte de esta Península (al sur de la Bahía). A diferencia de la anomalía gravimétrica, esta anomalía se encuentra limitada al norte por otra anomalía positiva de menor intensidad. Esta anomalía menor hacia el centro-oeste de la Bahía, parece dar evidencia de la existencia de material magnético en el área y probablemente un adelgazamiento localizado de los depósitos sedimentarios.

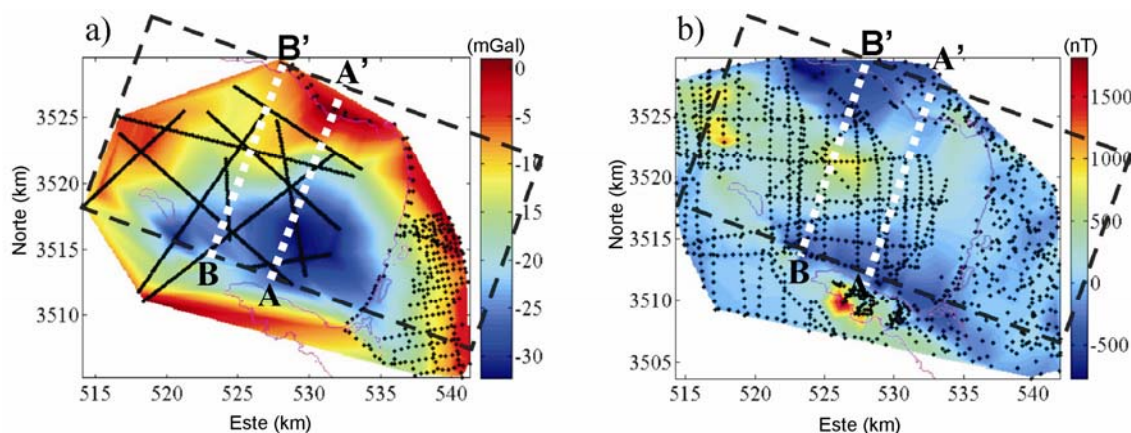


Figura 67. Distribución de los datos gravimétricos terrestres y marinos (a) y los datos magnéticos terrestres, marinos y aéreos (b) en la Bahía de Todos Santos, México. La dirección considerada del campo magnético inductor es $D=8^\circ$ and $I=56.9^\circ$. Las líneas negras discontinuas delimitan la región seleccionada en el proceso de inversión, mientras que las líneas blancas punteadas son la posición de las secciones transversales usadas para ilustrar los resultados de inversión separada y conjunta en la Figura 69. La línea continua morada indica la línea de costa y el mapa de coordenadas corresponde a UTM-11.

Descripción de los modelos

Los resultados de inversión separada y conjunta son mostrados en las Figuras 68 y 69. En la Figura 68 se muestran secciones horizontales de los modelos de densidad y magnetización 3D, delimitando las regiones cubiertas por los datos medidos en cada caso, lo que delimita al mismo tiempo las regiones más confiables del proceso inverso. Sin embargo, eliminando las secciones verticales correspondientes a los bloques del intervalo $26 \leq x \leq 28$ (km) y $12 \leq y \leq 14$ (km), las cuales consideramos que son las menos confiables, notamos que el proceso de convergencia no cambia y tiene un

comportamiento similar al mostrado en la Figura 71, donde son considerados todos los bloques. Esto demuestra que dichas regiones no son las causantes de la dificultad en la convergencia, aún así, concentramos nuestro análisis en las regiones del interior de los datos.

En la Figura 68 cada modelo muestra su efecto en superficie a través de los datos calculados en mGal y nT, respectivamente. Podemos notar que las anomalías calculadas gravimétrica y magnética describen las características principales de los datos observados, mostrados en la Figura 67. Aunque observamos una recuperación adecuada de los datos, los modelos resaltan estructuras distintas. Como en experimentos sintéticos, la inversión separada, especialmente en el caso gravimétrico, tiene muy mala resolución en profundidad, invirtiendo los contrastes de densidad. Luego, en inversión conjunta, el modelo magnético influye sobre el gravimétrico y se logra delimitar el basamento.

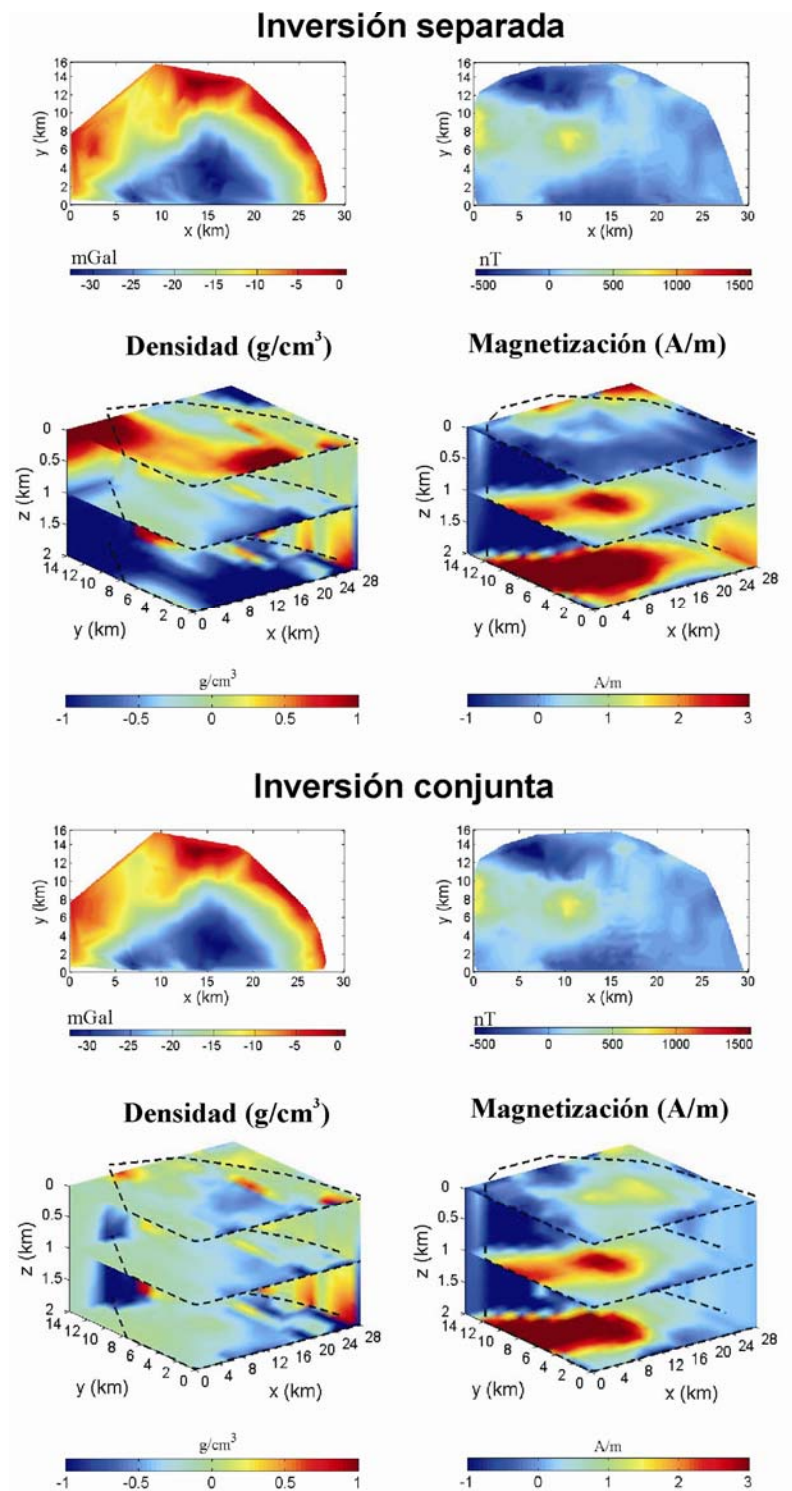


Figura 68. Modelos comparativos de densidad y magnetización de inversión separada y conjunta. Los modelos 3D tienen asociado su campo gravimétrico y magnético correspondiente sobre la superficie. Las líneas negras discontinuas delimitan la región cubierta por datos en cada caso.

La Figura 69 es tomada de Fregoso y Gallardo (2009) y muestra los resultados obtenidos en las secciones representativas A-A' y B-B' indicadas en la Figura 67. Las Figuras 69a a 69d corresponden a los resultados de la inversión separada y las Figuras 69e a 69h a los de inversión conjunta. Además, mostramos perfiles comparativos de datos observados y calculados para cada sección, para dar cuenta de la respuesta del modelo y nivel de ajuste obtenido. Los modelos encontrados después de la inversión conjunta incrementan su similitud geométrica como lo prueba el valor rms de la función de gradientes cruzados, el cual es un orden de magnitud menor que el obtenido por los modelos estimados separadamente. Como se esperaba, los datos de campo gravimétricos caracterizan el basamento sedimentario (con valores de contraste de densidad menores que -0.4 g/cm^3) mientras que los datos de campo magnéticos identifican un basamento magnético (magnetización superior a 3 A/m), lo cual se observa también en la Figura 68. Aún cuando los datos de campo gravimétricos y magnéticos caracterizan diferentes fuentes, la restricción de gradientes cruzados proporciona una determinación conjunta de fronteras comunes entre el basamento sedimentario y el basamento magnético y, simultáneamente, permite la ocurrencia de basamento no magnético el cual no es individualmente distinguido por los datos gravimétricos.

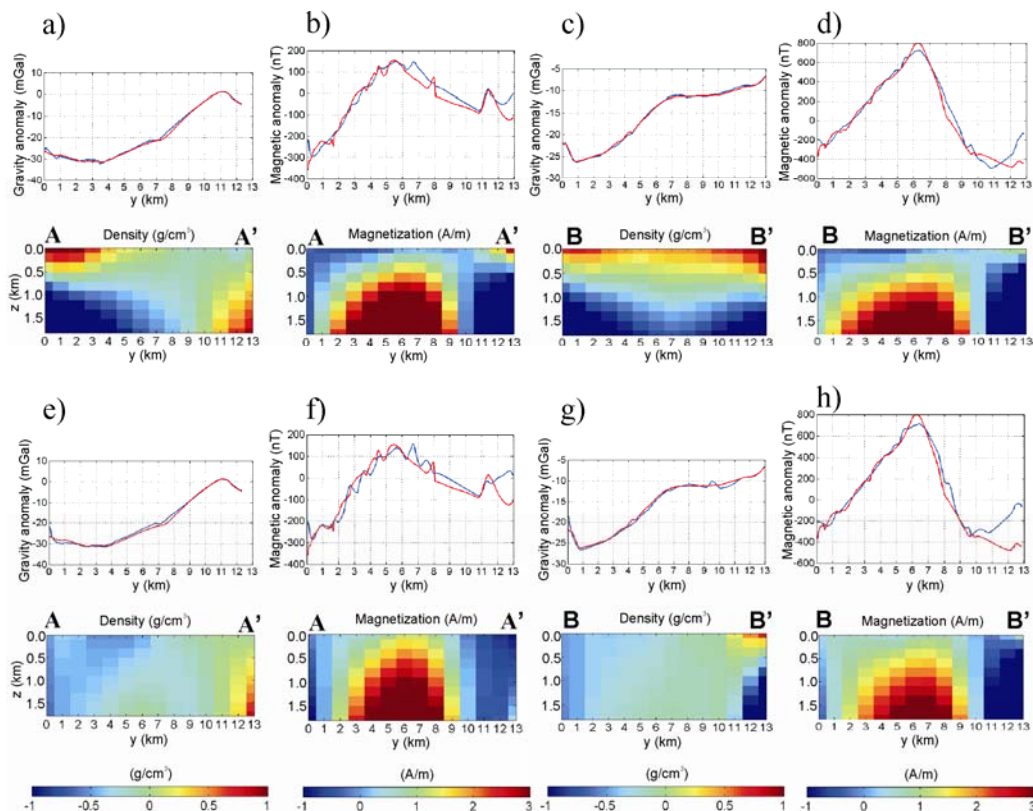


Figura 69. Modelos de las dos secciones paralelas señaladas en la Figura 67, obtenidos después de inversión separada ((a) a (d)) y conjunta ((e) a (h)) de los datos de la Bahía de Todos Santos con su correspondiente perfil de datos. Las líneas rojas de las anomalías asociadas corresponden a datos observados comparativamente a las líneas azules de los datos calculados.

A partir de las Figuras 68 y 69, se pueden delimitar 3 elementos principales: 1) material de contraste de densidad -0.5 g/cm^3 a -1.0 g/cm^3 y magnetización de -0.2 A/m a -1.0 A/m , el cual se puede correlacionar con depósitos sedimentarios. 2) Material con contraste de densidad 0 g/cm^3 y magnetización 2.0 A/m a 3.0 A/m , el cual parece ser un basamento magnético que se presenta en medio de la Bahía. 3) Material con contraste de densidad de 0.2 g/cm^3 a 1.0 g/cm^3 y magnetización -1.0 A/m , el cual se podría correlacionar con un basamento no magnético al norte de la zona.

Podemos ver que las estructuras delimitan la zona donde se espera el máximo espesor de la cuenca como una cuenca similarmente profunda y menos amplia que lo determinado por Gallardo-Delgado et al. (2003), lo cual parece coincidir con ambas

anomalías gravimétrica y magnética y que coincide con el escarpe de la falla de Agua Blanca. Al ser menos amplia, sugiere que existen depósitos muy profundos (mayores de 1.5 km) en la zona más profunda de la cuenca.

Debido a que no se incluyó la Península de Punta Banda, no se puede hacer una correlación directa con los materiales expuestos ahí, pero podría esperarse que fueran similares a la zona 1. La distribución horizontal de estas zonas se correlacionó en buena medida con las principales tendencias de las fallas geológicas y afloramientos en la región. Sin embargo, una interpretación más detallada del significado de estas estructuras queda fuera de los objetivos de la presente tesis.

Ajuste a los datos

Como en experimentos sintéticos, para la inversión conjunta de estos datos de campo, seleccionamos $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-2}$ en base a las curvas de valores singulares mostradas en la Figura 70. De acuerdo al criterio que hemos utilizado para seleccionar el valor λ_p en los experimentos anteriores, éste correspondería a $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-5}$, sin embargo este valor produce modelos poco realistas, incompatibles con la geología observada y con las características geofísicas esperadas. De esta manera comenzamos la búsqueda de un nuevo valor de corte cercano al valor seleccionado inicialmente, generalmente mayor y encontramos que el valor óptimo en este experimento con datos reales corresponde a $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-2}$.

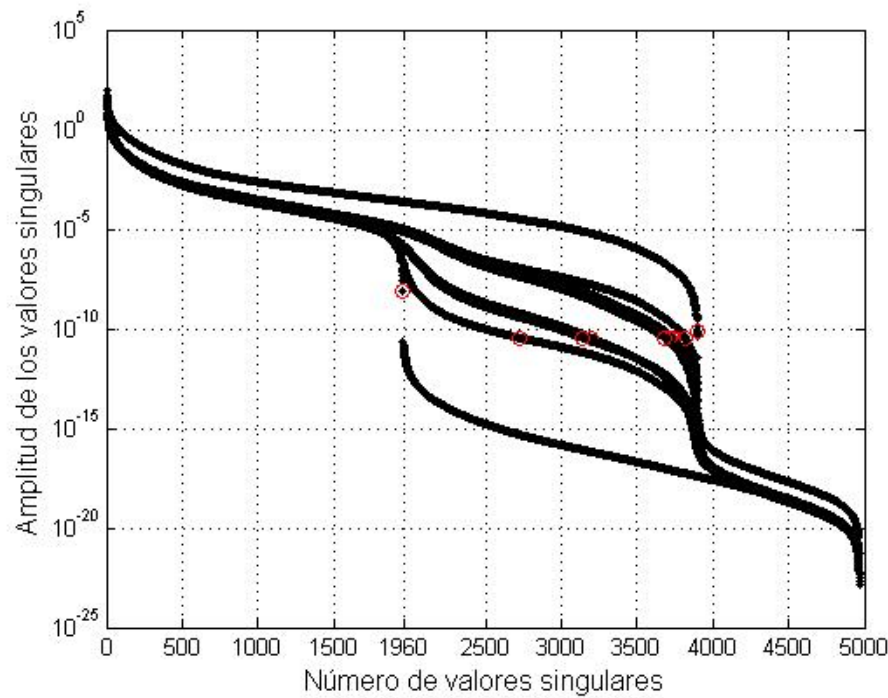


Figura 70. Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento con datos de campo. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 3920$.

La Figura 71 muestra el rms y valores de convergencia alcanzados en cada iteración, donde se observa que el ajuste de los datos alcanzado es alrededor de dos veces más grande que el error esperado, el cual es cercano a la unidad. Esto es razonable de acuerdo al tamaño de malla establecido en nuestros modelos. La Figura 71a muestra que, aunque la inversión conjunta ajusta los datos al mismo nivel de inversión separada, el nivel de convergencia, superior al 50%, muestra (Figura 71b) diferencias en todos los parámetros y no se observa el dominio de alguna zona en particular que influya sobre los valores del proceso de convergencia. Cabe resaltar que la estructura de los modelos no es modificada significativamente, sino que los valores de convergencia son producto de pequeños cambios en los valores de los parámetros. El modelo óptimo fue seleccionado de acuerdo al menor valor de convergencia en ambas iteraciones simultáneamente (18ª iteración en este caso).

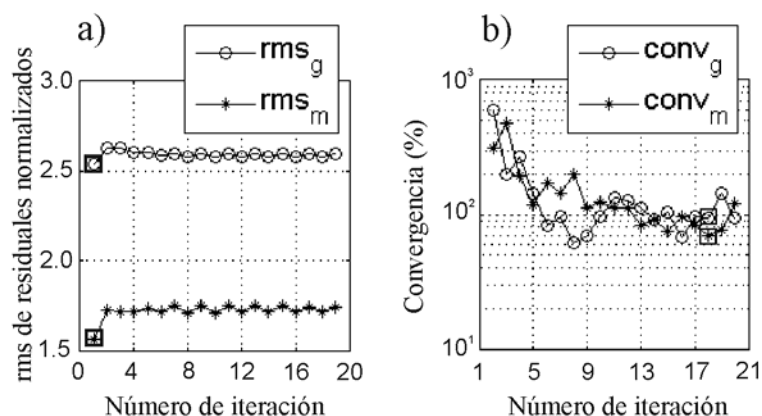


Figura 71. Ajuste de los datos (a) y convergencia (b) para cada iteración del experimento de inversión conjunta con datos reales, usando $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-2}$. Los cuadrados en (a) indican el rms de la primera iteración (inversión separada) mientras que los cuadrados en (b) indican el número de iteración para el modelo seleccionado.

Similitud estructural

La Figura 72 muestra la correlación entre los resultados de densidad y magnetización de inversión separada (a) y conjunta (b), donde la alineación vertical en rojo, corresponde con la descripción del basamento magnético principalmente hacia el fondo, mientras que la dispersión lateral que aparece en azul, es relacionada con las oscilaciones de los valores de densidad superficiales. Nuevamente estas figuras proporcionan evidencia de mayor similitud estructural alcanzada con inversión conjunta.

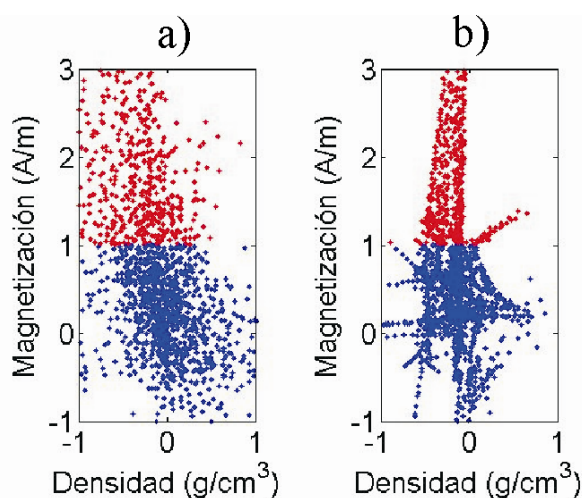


Figura 72. Correlación entre los parámetros de densidad y magnetización obtenidos después de inversión separada (a) y conjunta (b), correspondientes a los modelos de las Figuras 68 y 69. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región que forma la cuenca, mientras que los azules estarían asociados con el basamento.

Podemos observar que para este experimento no se consideraron funciones de peso en profundidad, ya que la estructura gruesa del basamento magnético se observó principalmente hacia el fondo, por lo que imponer una losa plana en dicha zona impediría delimitar su estructura. Tampoco se utilizó ninguna función de sesgo y aunque minimizamos la diferencia entre nuestros modelos estimados y modelos a priori no homogéneos, los valores de covarianza de éstos permitieron la búsqueda de modelos con rango de variación mayor. De esta manera, usamos únicamente los términos de ajuste a los datos, suavidad en los modelos y la restricción de gradientes cruzados, con lo cual logramos obtener una interpretación realista de nuestros modelos.

Capítulo V

Modelado directo de datos sísmicos

Debido a que la inversión de datos potenciales presenta limitaciones para proporcionar información del interior de la Tierra en estructuras profundas, requiriendo funciones adicionales de regularización para determinar dichas estructuras, recurrimos a datos de *sísmica de refracción*. Al incorporar datos sísmicos en el esquema de inversión conjunta, esperamos observar estructuras más profundas y con mayor detalle. Además, los métodos sísmicos son aplicados en una gran variedad de estudios geofísicos, tanto a niveles de la corteza-manto como en estudios someros, como veremos en la siguiente sección.

Hemos visto que una parte fundamental en el proceso de inversión es el modelado directo de los datos, por lo que es necesario: a) definir cuál será el tipo de información sísmica que deseamos considerar como nuestras observaciones, b) definir cómo deseamos parametrizar un modelo sísmico del subsuelo y c) determinar una metodología de modelado directo de dichos datos con la cual se pueda, no sólo demostrar que un modelo del subsuelo es capaz de reproducir los datos, sino que permita predecir cómo es que un modelo debe ser modificado para este propósito. En este capítulo presentamos una descripción general de los métodos sísmicos y particularmente de la importancia, los principios y expectativas de la técnica de *sísmica de refracción*. En la Sección V.1., puntualizamos el tipo de información que será considerada para inversión y cómo es que el modelo del subsuelo será parametrizado. La Sección V.2., describe una metodología de modelado directo de datos sísmicos basada en la *técnica de Vidale* (1988, 1990), para obtener el tiempo de primeros arribos de ondas sísmicas que viajan por el interior de la tierra. La Sección V.3., describe la técnica de *trazado de rayos* que permite determinar qué regiones específicas del subsuelo adelantaron o retrasaron el arribo de una onda sísmica a cada uno de los receptores, trazando la trayectoria que conecta el receptor con la fuente. En la Sección V.4., presentamos la validación y aplicaciones de la metodología

de modelado directo y trazado de rayos en experimentos sintéticos. Finalmente concluimos en la Sección V.5.

V. 1. Generalidades de los métodos sísmicos

Para estudiar el interior de la Tierra, en Geofísica se han desarrollado diferentes metodologías sustentadas en diferentes fenómenos físicos. Cada una de ellas nos permite estudiar alguna característica física de los materiales en el subsuelo. Una metodología basada en el estudio del desplazamiento de ondas elásticas (también llamadas ondas sísmicas) a través de los diferentes materiales que se encuentran en el interior de la Tierra es conocida como *sísmica*. Para analizar y cuantificar este desplazamiento, se requiere de un punto de excitación (conocido como la *fente*) ya sea natural, como en el caso de un foco sísmico, o inducido. Esta excitación se propaga a través de la Tierra sufriendo a su paso cambios en el mecanismo y velocidad de su propagación, así como en su intensidad. Finalmente, esta excitación se registra en sensores sísmicos, generalmente desplegados en superficie, conocidos como receptores. Con esta información es posible inferir la posición de interfases en el subsuelo así como las velocidades de propagación de las ondas sísmicas en los diferentes materiales que lo componen y, por lo tanto, inferir acerca de las propiedades físicas y geológicas del subsuelo. Para estudiar la información registrada en los sensores sísmicos, resulta conveniente distinguir las diferentes características de propagación de las ondas sísmicas, lo que incluye el mecanismo de viaje así como su transformación al alcanzar una interfase en el subsuelo.

Propagación de ondas sísmicas

Existen dos tipos principales de ondas sísmicas que atraviesan un medio conocidas como *ondas de cuerpo* y *ondas de superficie*. En este caso nos interesa estudiar las ondas que atraviesan el interior de la Tierra (ondas de cuerpo) y no las que viajan por la superficie de ésta. Las ondas de cuerpo se clasifican a su vez en *ondas P* y *ondas S*. En las ondas P o primarias las partículas del medio se mueven en la dirección de la onda viajera comprimiendo y expandiendo el medio. En las ondas S o secundarias, el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección del viaje de la onda (Dobrin y Savit, 1988; Sharma, 2004). Una comparación frecuente que se hace del movimiento de

ondas P es con el movimiento de un resorte, el cual se expande y se comprime en una dirección, mientras que las ondas S son comparadas con el movimiento de una cuerda que es excitada por un extremo y tiene un movimiento ondulatorio perpendicular a la dirección del desplazamiento, como se observa en la Figura 73.

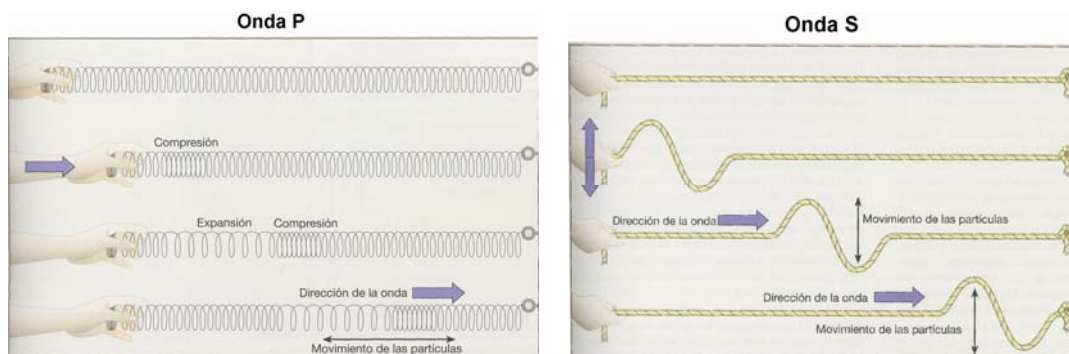


Figura 73. Experimento comparativo de las ondas P y S que ocurren en el interior de la Tierra. A medida que se desplazan las ondas P, comprimen y expanden el material haciendo que vibre hacia atrás y hacia adelante en una dirección paralela al movimiento de la onda. Las ondas S, son de cizalla y hacen que las partículas vibren en ángulos rectos con respecto a la dirección del movimiento de la onda (figura tomada de Tarbuck y Lutgens, 2004).

Existen varias características de las ondas de cuerpo que pueden ser estudiadas, tales como la dispersión de la onda, su atenuación, cambio de polaridad, conversiones de ondas, entre otras. En el presente estudio consideraremos exclusivamente el tiempo que tarda una onda sísmica en ser registrada en los receptores, información que es comúnmente considerada en la gran mayoría de los estudios sísmicos. El tiempo de viaje de una onda sísmica depende de la velocidad de la propagación de la onda en los diferentes materiales del subsuelo. Las velocidades de propagación de las ondas P y S (v_p y v_s , respectivamente) son controladas por la densidad y características elásticas del medio, cuantificadas en un conjunto de constantes llamadas parámetros elásticos de la forma:

$$v_p = \sqrt{\left(\frac{K + 4\mu/3}{\rho}\right)}, \quad (94)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (95)$$

donde ρ es la densidad del material, K es el coeficiente de compresibilidad que relaciona esfuerzos normales con cambios de volumen, mientras que μ es el módulo de cizalla que relaciona esfuerzo y deformaciones cortantes. Algunas consecuencias importantes de las ecuaciones (94) y (95) son que si $\mu = 0$ (como es el caso para medios líquidos y gaseosos) entonces $v_s = 0$, lo que implica que las ondas S no pueden ser propagadas a través de fluidos. También observamos que dado que los parámetros elásticos son positivos entonces $v_p > v_s$, por lo que las ondas P son las primeras en ser registradas en los receptores.

Reflexión, refracción y difracción de ondas sísmicas

Para entender el viaje de las ondas sísmicas en el subsuelo y cómo es posible registrar su arribo en la superficie de la Tierra, estudiaremos los diferentes fenómenos que modifican las características de una onda al contacto con medios de diferentes propiedades elásticas. Sabemos que si el medio por donde se propaga una onda es homogéneo, conforme la onda se aleja de su fuente, la energía es distribuida como un frente de onda esférico (Figura 74). Sin embargo, si la onda encuentra una interfase de mayor o menor velocidad ocurrirán *reflexiones*, *refracciones* y *difracciones* de la onda. Como ocurre en otros campos de la física, la propagación de la energía de una onda es descrita comúnmente por la trayectoria de un *rayo* perpendicular al frente de onda, como se muestra en la Figura 74.

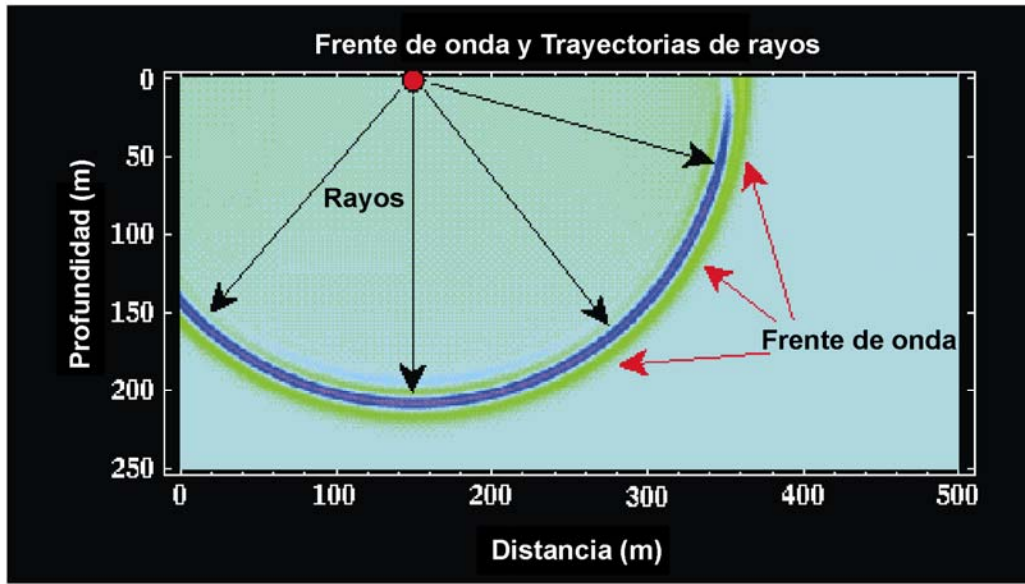


Figura 74. Sección de un frente de onda esférico que se propaga por un medio homogéneo y las trayectorias de los rayos perpendiculares (figura modificada de: Lecture Notes Course ES304, University of Melbourne: <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/SEIS/NOTES/raypath.html>).

Para estudiar estos fenómenos, podemos considerar el principio de Fermat; el cual establece que el tiempo de viaje de la onda en la trayectoria del rayo es mínimo. En el caso particular de un rayo incidiendo en una interface plana, podemos considerar un rayo que sale del punto P en un medio de velocidad v_1 el cual se propaga a un medio de velocidad v_2 (Figura 75). El tiempo de viaje entre el punto P y P' es

$$T_{P-P'} = \frac{d}{v_1} + \frac{e}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}. \quad (96)$$

La trayectoria de tiempo mínimo debe satisfacer

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0, \quad (97)$$

pero $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin i_1$ y $\frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \sin i_2$. Así, de (97) se tiene que

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}, \quad (98)$$

relación conocida como la Ley de Snell. Luego, los rayos reflejados y refractados son gobernados por esta ley.

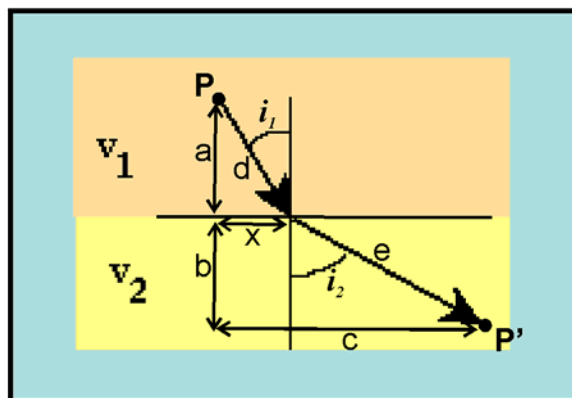


Figura 75. Ley de Snell. Se muestra el rayo que conecta dos puntos en cada lado de una frontera para $v_1 < v_2$.

Cuando un rayo choca con una interface con cambio en la velocidad sísmica, la energía en la onda es particionada entre un rayo reflejado y uno refractado (Figura 76). En ambos casos, la ley de Snell se cumple y da información suficiente para estudiar el cambio en la trayectoria de un rayo, aun cuando la amplitud de la onda o inclusive el tipo de propagación (P o S) cambie.

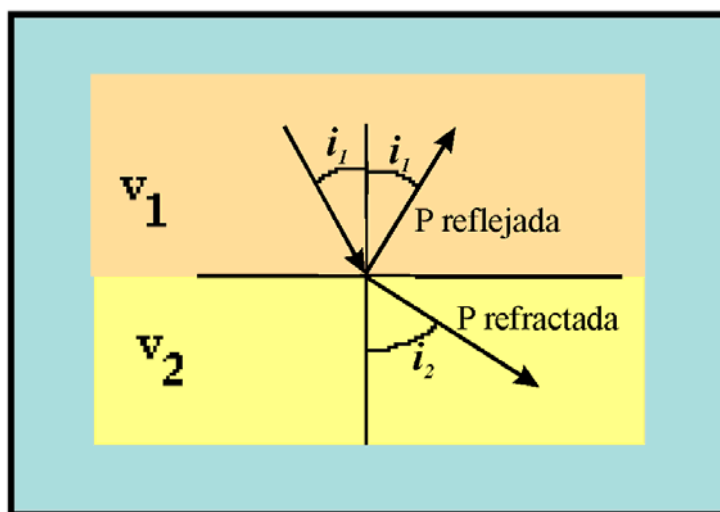


Figura 76. Comportamiento de una onda P incidente en una frontera entre materiales con diferentes propiedades elásticas, para $v_1 < v_2$.

Las ondas reflejadas son aquellas que regresan por el medio de velocidad v_1 sin transmitirse a través del medio v_2 . Este mecanismo propicia el regreso de ondas sísmicas a la superficie de la Tierra, i.e. su detección en sensores sísmicos. La *sísmica de reflexión* es la técnica geofísica que emplea este tipo de información para explorar el subsuelo. Las ondas refractadas viajan por el semiespacio (capa con velocidad v_2) de acuerdo a la Ley de Snell, con ángulo de refracción dado por $i_2 = \sin^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1} \sin i_1\right)$. Si la velocidad en el semiespacio es mayor que la velocidad en la capa superior, entonces $i_2 > i_1$. Conforme

$i_2 \rightarrow 90^\circ$, la ley de Snell predice una *refracción crítica* $\frac{\sin i_c}{v_1} = \frac{\sin 90^\circ}{v_2} = \frac{1}{v_2}$. Esta

refracción crítica está asociada con una onda que está viajando horizontalmente (paralela a la interfase entre las capas) justo debajo de la interfase. La onda críticamente refractada tiene la propiedad de transmitir la energía de regreso a la capa superior de manera continua conforme viaja a lo largo de la interfase. Esta energía es irradiada de vuelta al medio de velocidad v_1 con el mismo ángulo de incidencia (i_c) llamado el *ángulo crítico*:

$i_c = \sin^{-1}(v_1/v_2)$ (Figura 77). Este segundo mecanismo también permite el regreso de la

onda sísmica a la superficie y, por ende, su detección en los sensores. La metodología geofísica que explora el subsuelo basada en esta información es conocida como *sísmica de refracción*.

En un medio simple que consiste de dos capas de materiales de diferentes velocidades sísmicas v_1 y v_2 , donde no ocurre conversión de ondas sísmicas, se puede registrar, en la superficie, información de tres rayos sísmicos: (1) el arribo directo, el cual viaja en línea recta conectando la fuente y el receptor, (2) un arribo reflejado y (3) uno críticamente refractado. Para el desarrollo de la metodología sobre tiempos de arribo, en este trabajo tomaremos en cuenta únicamente el menor tiempo, de las tres ondas que se presentan, registrado en un receptor. Puesto que parte del viaje de las ondas críticamente refractadas se lleva a cabo en la capa de mayor velocidad, es común que estas ondas sean registradas antes que las ondas directas, a partir de cierta distancia.

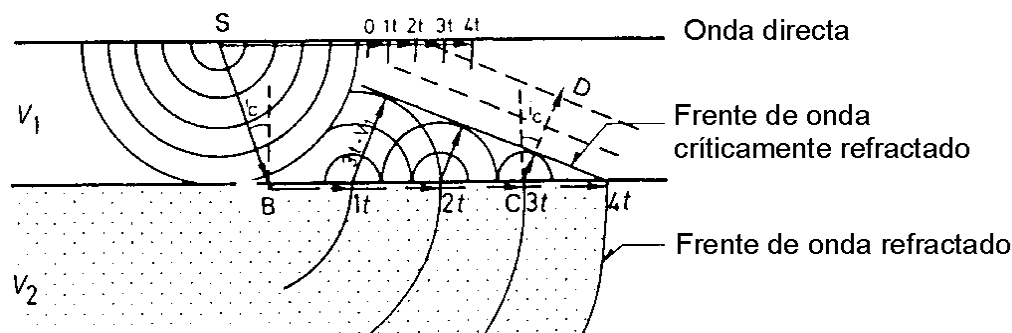


Figura 77. Ilustración esquemática que muestra la trayectoria del rayo, con ángulo crítico (i_c), de la onda incidente (SB) al contacto con una frontera de mayor velocidad ($v_2 > v_1$) y la onda refractada (BC) viajando a lo largo de la frontera. Esta última es también refractada a la capa superior con el mismo ángulo i_c y emerge con una trayectoria de rayo tal como CD. Se muestran también avances de los frentes de onda a partir del instante $t = 0$ cuando el rayo incidente intersecta la frontera en B (figura tomada de Sharma, 2004).

Las difracciones se presentan cuando una frontera tiene escarpes o fallas en su estructura, en este caso la onda incidente es difractada en la esquina de la discontinuidad (Figura 78). Este fenómeno también constituye un mecanismo de retorno de la energía sísmica a la superficie, i.e. puede ser también registrada en los receptores. La rapidez en la llegada de esta información depende de la profundidad de la discontinuidad y de la

velocidad de propagación de la onda en la capa superior. El estudio de estas ondas es llevado a cabo en ambas, sísmica de reflexión y refracción.

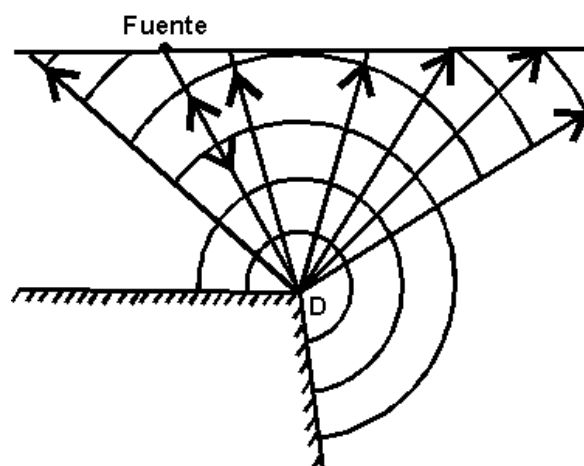


Figura 78. Frentes de onda difractados desde una esquina, D, a partir de ondas que provienen de la Fuente (figura tomada de Sharma, 2004).

V. 1. 1. El método de refracción sísmica

Para llevar a cabo la metodología de inversión conjunta usando datos sísmicos, recurrimos a la técnica de sísmica de refracción, la cual se basa en el registro de los tiempos de primeros arribos, a diferentes distancias, de las ondas que se propagan por el subsuelo cuando este es perturbado. Con esta información es posible interpretar el subsuelo en términos de profundidades de las interfases y sus velocidades. En nuestro caso, estamos interesados en conocer la estructura de velocidades en medios tridimensionales.

Existen algunas aproximaciones analíticas para interpretar los datos de sísmica de refracción en casos específicos, como son medios unidimensionales con capas horizontales de diferentes velocidades, las cuales aumentan conforme las capas son más profundas. O bien, en casos con capas inclinadas o con escarpes, así como para modelos de capas irregulares (no planas). Sin embargo, la interpretación de modelos de velocidades heterogéneos tridimensionales requiere aproximaciones numéricas mediante métodos en diferencias finitas o elemento finito. La técnica de Vidale (Vidale 1988,

1990) utiliza un esquema en diferencias finitas que facilita la interpretación de la estructura de velocidades en medios heterogéneos.

La Figura 79 muestra un ejemplo de una estructura de velocidades del subsuelo heterogénea para un caso bidimensional y cómo se transmiten las ondas sísmicas, observadas a través del trazado de los rayos, así como también vemos las curvas de tiempo-distancia que son graficadas a partir de los tiempos de primeros arribos registrados en la superficie de la Tierra, que proporciona el método de sismica de refracción.

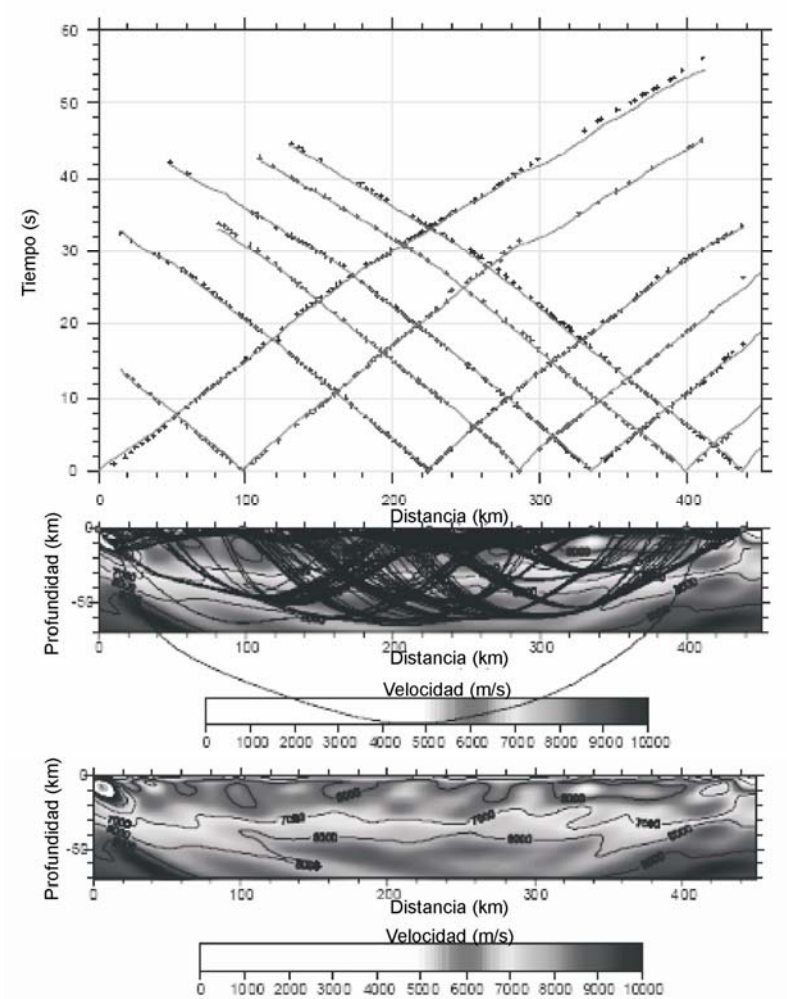


Figura 79. Ejemplo de un modelo de velocidades heterogéneo para el cual se muestra la trayectoria de las ondas refractadas, por el método de sismica de refracción, a través del trazado de los rayos. También se observan las curvas de tiempo-distancia que describen este modelo en superficie.

El método de sismica de refracción tiene la importante característica de ser una técnica muy versátil en su aplicación ya que es utilizada para estudios someros en problemas ambientales, de construcción de edificaciones, de explotación de recursos naturales (acuíferos, hidrocarburos, minería, etc.), así como en investigaciones que implican mayor profundidad como estructura de la corteza y la litósfera, entre otros.

V. 2. La técnica de Vidale para tiempos de arribo

Para el modelado directo de datos sísmicos queremos conocer el tiempo t que tarda una onda, a partir de la fuente, en viajar por los diferentes materiales en el subsuelo y ser registrada en los receptores. La trayectoria de la onda desde la fuente a un receptor específico es seguida por un rayo L . El tiempo que tarda la onda en llegar al receptor, viajando a través de un campo de velocidad continuo $v(x, y, z)$, está dado por la ecuación

$$t = \int_L \frac{1}{v(x, y, z)} dl. \quad (99)$$

Sin embargo, en la mayoría de los problemas geofísicos se tiene un conjunto finito de observaciones y parámetros, por lo que resulta conveniente discretizar la ecuación (99), quedando de la forma

$$t_i = \sum_{j=1}^p \frac{L_{ij}}{v_j}. \quad (100)$$

En este caso el tiempo de viaje no es directamente proporcional a los parámetros del modelo (v). Esta relación se dice que es no lineal en v . Sin embargo, si definimos los parámetros del modelo como $s = \frac{1}{v}$, donde s es conocida como la *lentitud* de la onda sísmica, entonces el problema se convierte en un problema lineal (siempre y cuando la trayectoria del rayo sea conocida) de la forma

$$t_i = \sum_{j=1}^p L_{ij} s_j, \quad (101)$$

el cual se puede expresar de manera general como

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm}. \quad (102)$$

El problema directo queda entonces establecido como: dados los parámetros (lentitudes) $\mathbf{m}$ en el subsuelo y conociendo una relación $\mathbf{G}$ entre los datos (tiempos de arribo) y los parámetros, en este caso la trayectoria de la onda, podemos determinar el tiempo de arribo de la onda sísmica desde la fuente a los receptores.

Resolver la ecuación (99) o cualquiera de sus variantes discretas (100-102), resulta sencillo una vez que la trayectoria del rayo (L), sobre la cual se debe evaluar la integral, es dada. El resolver esta trayectoria es un problema clásico en sismología y existe toda una *teoría de rayos* dedicada al estudio de estas trayectorias (véase por ejemplo Červený et al., 1977). En el caso más simple de un medio homogéneo, la solución de la ecuación de un rayo son líneas rectas, como se ilustra en la Figura 80.

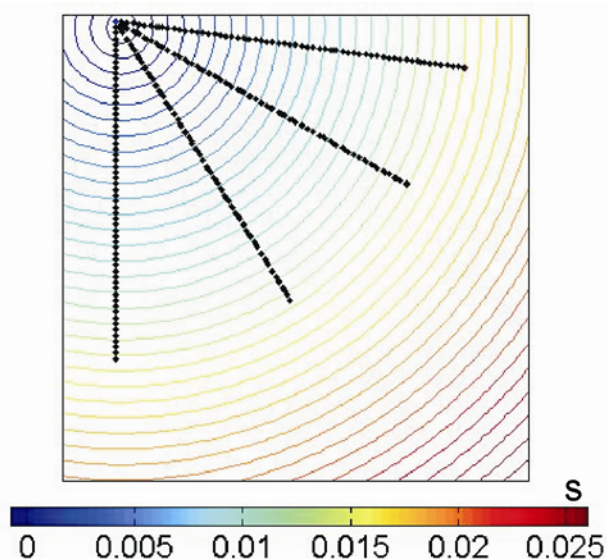


Figura 80. Frentes de onda para una sección de un modelo de velocidades homogéneo 3D, donde la dirección está representada por rayos, en este caso son líneas rectas desde la fuente a cada receptor.

En un medio heterogéneo, resulta complicado determinar el camino más corto que sigue la onda sísmica desde la fuente al receptor, por lo que se buscan algoritmos numéricos eficientes que permitan llevar a cabo el cálculo automático. Existen varias

técnicas clásicas para determinar la trayectoria de un rayo desde la fuente a un receptor específico.

El *método de disparo* (shooting) consiste en escoger, a partir de un punto fuente, un conjunto de posibles ángulos. Una cobertura inicial óptima se puede determinar si se conoce el rango de la variación de velocidad de la onda. Luego, se usan las ecuaciones de rayo $\left(\frac{d}{dl} \left(\frac{1}{v} \frac{d\mathbf{x}}{dl} \right) = \nabla \left(\frac{1}{v} \right) \right)$, como un problema de valor inicial, para trazar los rayos en cada uno de estos ángulos en la vecindad del receptor de interés, resolviendo las ecuaciones por métodos iterativos. Normalmente ninguno de los ángulos iniciales llega al receptor deseado, pero éste queda encerrado entre dos de estos rayos. Luego, por interpolación, se puede encontrar un siguiente conjunto de ángulos y trazar los rayos, este proceso es continuado hasta alcanzar la cercanía deseada al receptor. Un inconveniente en el método de disparo es que las ondas críticamente refractadas no son consideradas, ya que esta técnica sólo supone una trayectoria entre la fuente y el receptor y encuentra problemas en situaciones de múltiples trayectorias. Otra desventaja de la técnica está relacionada con el tiempo de cómputo requerido para modelos discretizados por celdas (Matsuoka y Ezaka, 1992).

El *método de doblado* comienza con un rayo entre la fuente y el receptor (una línea recta) y después se usa algún método para doblar o mover el rayo con el propósito de reducir y minimizar el tiempo de viaje a lo largo del rayo. Estos métodos están basados en el principio de Fermat de mínimo tiempo; la minimización de los rayos es efectuada esencialmente por prueba y error.

Una filosofía diferente para estudiar el tiempo de arribo de ondas sísmicas y que no involucra trazado de rayos, consiste en determinar el campo de tiempo de viaje ($t(x, y)$) de un frente de onda específico usando series de potencias, como se explica en Hernández-Jaime (2001) y las referencias ahí mencionadas. Una vez determinados los tiempos de recorrido en series de potencias, la velocidad del medio se obtiene utilizando la ecuación eikonal:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y)}. \quad (103)$$

Una de las técnicas de solución de la ecuación eikonal, en diferencias finitas, que ha adquirido gran popularidad, es la desarrollada por Vidale (1988, 1990), la cual es una técnica eficiente y robusta para el cálculo de tiempos de arribo que será fácilmente adaptada al esquema de inversión conjunta mediante gradientes cruzados. El objetivo del *método de Vidale* (1988, 1990) es encontrar los tiempos de viaje en todos los puntos de una malla mediante la solución de la ecuación eikonal en diferencias finitas. Una vez que el campo de tiempo de viaje es determinado, el trazado de rayos es obtenido usando la propiedad básica de que los rayos sísmicos son perpendiculares a los frentes de onda. Un rayo con tiempo de viaje mínimo desde la fuente al receptor, se puede encontrar siguiendo el gradiente en los datos de tiempos de viaje en sentido contrario, desde el receptor hacia la fuente.

V. 2. 1. La técnica de Vidale para medios 3D

La ecuación eikonal en 3D tiene la forma

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = s^2(x, y, z) \quad (104)$$

donde t es el tiempo de viaje, los ejes de coordenadas cartesianas son x , y y z y s es la lentitud. Se observa en (104) que la ecuación eikonal relaciona el gradiente de los tiempos de viaje con la velocidad o lentitud. La ecuación eikonal se puede demostrar a partir de la ecuación de onda (Apéndice D) y para la cual no se consideran efectos de atenuación.

La técnica de Vidale (1990) resuelve la ecuación eikonal de manera progresiva, partiendo de un sistema causal, con lo cual es determinado el campo de tiempos de arribo de las ondas sísmicas en un volumen cúbico. Esto permite que el rayo de tiempo de viaje mínimo entre dos puntos sea determinado unívocamente aun cuando existen diferentes trayectorias entre ellos, como son: la onda directa, refracciones críticas y difracciones.

Otra ventaja respecto a otras técnicas de trazado de rayos como las mencionadas anteriormente, es que admite estructuras de velocidad complejas para las cuales el trazado de rayos es mayormente estable con la técnica de Vidale (1990). También, el escaso costo computacional y la rapidez del algoritmo representan una ventaja (Matsuoka y Ezaka, 1992; Hole y Zelt, 1995).

Siguiendo la metodología de Vidale (1990) comenzamos dividiendo el dominio 3D en bloques cúbicos, donde cada bloque es homogéneo y tiene asignado un valor de lentitud. El primer paso del algoritmo consiste en calcular, para cada una de las fuentes sísmicas, el tiempo de viaje del frente de onda más rápido en cada nodo dentro del subespacio de modelado directo y de esta manera resulta inmediato conocer el tiempo de viaje en puntos específicos de la malla o receptores. La Figura 81 muestra los elementos necesarios para llevar a cabo este proceso.

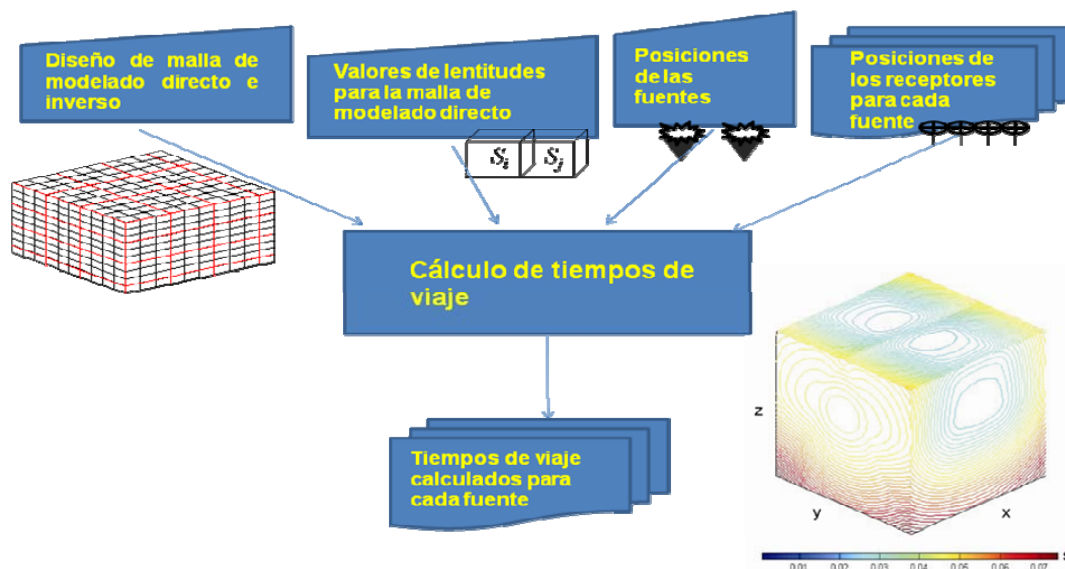


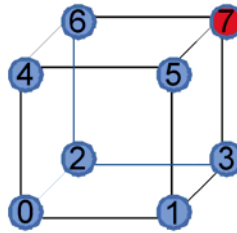
Figura 81. Diagrama de flujo de los elementos requeridos por el esquema de Vidale para el cálculo de tiempos de viaje de los frentes de onda sísmicos. Mostramos el diseño de la malla de modelado directo e inverso para distinguir entre una malla más fina de modelado directo (malla en negro) y una mayormente espaciada para el modelado inverso (malla en rojo). El resultado del proceso es un volumen de tiempos de viaje calculados en todos los puntos de la malla para una fuente particular.

Para lograr esto recurrimos a la discretización en diferencias finitas de la ecuación (104), con los tres diferentes esquemas propuestos por Vidale (1990) cuya geometría y

ecuaciones se muestran en la Figura 82. Cada uno de estos esquemas está relacionado con un arreglo de nodos con tiempos conocidos previamente (nodos azules numerados) y uno por determinar (nodos rojos) a través de una ecuación explícita, donde $t_i, i = 1, \dots, 7$ son los tiempos de viaje, h el espaciado de la malla y s es la lentitud.

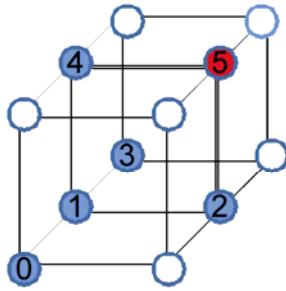
Geometría de los puntos de malla

Esquema A



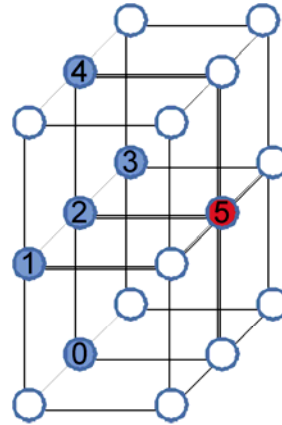
$$t_7 = t_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6h^2s^2 - (t_1 - t_2)^2 - (t_2 - t_4)^2 - (t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_5)^2 - (t_5 - t_6)^2 - (t_6 - t_3)^2}$$

Esquema B



$$t_5 = t_1 + \sqrt{2h^2s^2 - 0.5(t_0 - t_3)^2 - (t_2 - t_4)^2}$$

Esquema C



$$t_5 = t_2 + \sqrt{h^2s^2 - 0.25[(t_1 - t_3)^2 - (t_0 - t_4)^2]}$$

Figura 82. Esquemas de Vidale para el cálculo de tiempos de arribo en medios 3D, Vidale (1990). Los puntos azules numerados indican los nodos conocidos previamente, mientras que los nodos rojos indican el nodo por determinar a partir de las ecuaciones indicadas. En blanco se muestran los nodos que no son usados en cada esquema.

De acuerdo a lo demostrado por Vidale (1988, 1990), estos esquemas son más exactos cuando:

- 1) se cumple el principio de causalidad donde, en general, el tiempo a determinar es mayor que cualquiera de los tiempos ya existentes,
- 2) el frente de onda es plano,
- 3) cuando no existen distorsiones en el dominio del esquema, i.e. cuando no existe un contraste grande de velocidad sísmica y
- 4) la exactitud de cada esquema de manera individual depende de la dirección de incidencia de la onda (véanse las Figuras 2-5 en Vidale (1990)).

Para cada uno de estos problemas, han existido diferentes propuestas para mejorar la exactitud del cálculo:

- 1) Vidale (1990) propone hacer un ordenamiento de los tiempos de arribo sobre una de las caras de propagación, e iniciar los cálculos en aquellos nodos donde es más probable tener un arribo más rápido y seguir resolviendo a los nodos restantes en forma progresiva. Para evitar violaciones del principio de causalidad dentro de una misma cara plana, Qin et al. (1992) proponen el uso de frentes de propagación no planos, lo cual lleva a un incremento considerable en el tiempo de proceso. Como alternativa Hole y Zelt (1995) proponen un proceso iterativo donde puntos de retorno críticos de la onda son usados para iniciar una nueva propagación en un esquema iterativo.
- 2) Se utilizan esquemas alternativos en áreas cerca de la fuente donde los frentes de onda tienen una curvatura mayor.
- 3) Se proponen esquemas alternativos en medios 2D y 1D donde a un rayo se le permite viajar sobre la superficie o arista de un bloque, a manera de un rayo críticamente refractado.
- 4) Se calcula la precisión como función de la dirección y curvatura de la onda incidente y se selecciona el esquema que resulta más exacto.

En nuestro caso, realizamos las modificaciones que a continuación se describen para mejorar las metodologías propuestas a partir de los esquemas de Vidale de la Figura

82, para el cálculo de tiempos de arribo y trazado de rayos. Como hemos mencionado, debido a que el algoritmo de Vidale (1990) con estos esquemas falla cuando se presentan contrastes de velocidad grandes o abruptos, limitando la técnica en regiones de los frentes de onda críticamente refractados, recurrimos a los operadores adicionales propuestos por Hole y Zelt (1995) los cuales se muestran en la Figura 83 y que son utilizados en el cálculo de tiempos de arribo para medios 2D en Vidale (1988). Más tarde fueron implementados por Afnimar y Koketsu (2000).

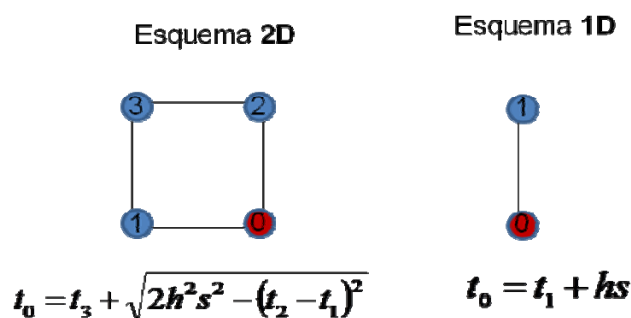


Figura 83. Esquemas propuestos por Hole y Zelt (1995) para complementar los esquemas de Vidale en el cálculo de tiempos de arribo en medios 3D (Figura 82).

Usando los esquemas mostrados en la Figura 82, los tiempos de viaje en cualquier punto sobre la cara del volumen cúbico son calculados sólo a partir de tiempos en puntos de la malla dentro del volumen. Sin embargo, al considerar los esquemas 2D y 1D de la Figura 83 tomamos en cuenta las ondas que viajan paralelas a las caras del volumen en expansión, lo cual ocurre principalmente en los frentes de onda que viajan por la interfase. Un ejemplo de este caso lo podemos observar (Hole y Zelt, 1995) considerando el caso 2D, suponiendo que la arista del fondo en el esquema 2D de la Figura 83 está localizada sobre una discontinuidad de velocidad, con la velocidad debajo de los nodos 0 y 1 mayor que la velocidad de la celda. La trayectoria del rayo de menor velocidad será la línea recta desde el nodo 1 al 0, con lo que t_0 llegará a ser menor que t_2 y por lo tanto se violará el principio de causalidad produciendo un tiempo en el nodo 0 menor que uno en los nodos usados para calcularlo (nodo 2), lo que al mismo tiempo ocasiona que la ecuación asociada produzca un número negativo dentro de la raíz. Como lo proponen

(Hole y Zelt, 1995), una solución es calcular el tiempo de viaje usando un operador en 1D. Así, las configuraciones usadas en este trabajo se muestran en la Figura 84.

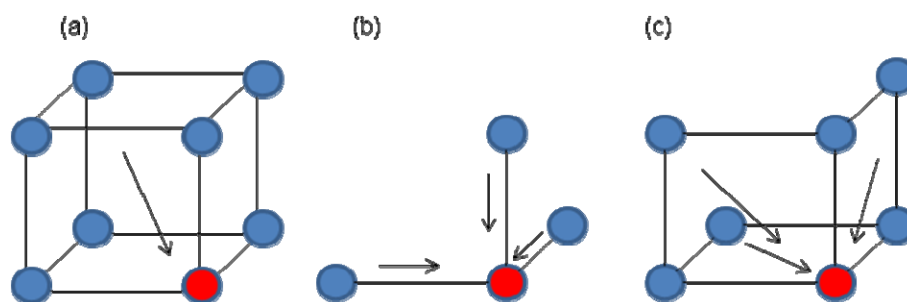


Figura 84. Configuraciones usadas para el cálculo de tiempos de viaje 3D. (a) corresponde a los esquemas de Vidale, (b) operadores en 1D y (c) esquemas de Vidale en 2D.

Metodología para el cálculo de tiempos de arribo

La propagación de tiempos de viaje usando los esquemas de Vidale comienza a partir de los tiempos calculados en un dominio inicial compuesto por al menos 27 bloques con un arreglo de $3 \times 3 \times 3$ bloques que rodean una fuente sísmica. La forma de calcular estos tiempos de viaje es suponiendo un medio homogéneo alrededor de la fuente y usando los rayos directos entre nodos. Una vez que los tiempos de viaje han sido calculados en este volumen inicial, el proceso continúa sistemáticamente después de seleccionar una de las caras planas rectangulares que fue primeramente alcanzada por el frente de onda (con el tiempo de viaje más corto). Una nueva cara es seleccionada para expandir el volumen, actualizando los tiempos de viaje adyacentes en toda la cara del volumen mediante los esquemas de Vidale. Un proceso general es mostrado en el ejemplo de la Figura 85, donde se observa que si se quisiera continuar con la propagación del frente de onda, ésta se llevaría a cabo hacia la cara superior del cubo, donde claramente se observa el menor tiempo de viaje de las seis caras del cubo. De esta manera, a partir de los tiempos en la cara superior del cubo se calculan los nuevos tiempos de la sección horizontal.

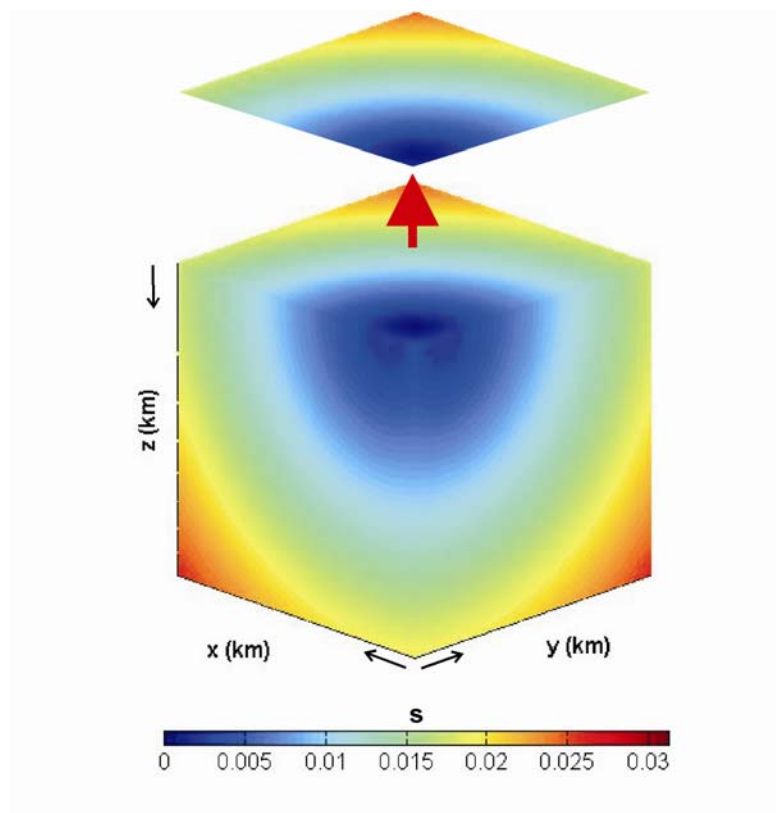


Figura 85. Proceso para el cálculo de tiempos de viaje usando la metodología de Vidale (1990). La flecha roja indica la dirección que seguiría la expansión del cubo en una siguiente iteración, mientras que la sección horizontal son los tiempos calculados a partir de los tiempos de la cara superior. En este ejemplo se muestra un medio homogéneo con la fuente cercana a la superficie.

Los tiempos de viaje de la cara previamente calculada son ordenados de acuerdo a los arribos más rápidos y los tiempos para el nuevo frente son calculados en el mismo orden para reducir la ocurrencia de violaciones causales. Los esquemas de Vidale en 3D son aplicados conforme al número de nodos previamente calculados y su arreglo alrededor del punto de propagación. En una segunda corrida, se sigue un procedimiento similar para todos los esquemas 2D posibles. A partir de estos esquemas 3D y 2D, se selecciona solamente aquél con el mínimo error de predicción, el cual describiremos más adelante. En una tercera corrida se toma en cuenta el tiempo de viaje de las ondas directas desde los nodos vecinos. Los tiempos calculados a partir de los esquemas 3D, 2D y 1D son comparados a partir del error obtenido y únicamente es reportado aquél con el tiempo

de viaje más rápido. En el caso poco común en que no es posible obtener un error de predicción debido a que no se encontró la posición de la fuente ficticia, se selecciona automáticamente el tiempo de viaje más rápido entre todos los esquemas.

Error de predicción

El error de predicción es calculado basado en la curvatura del frente de onda y su dirección de incidencia. Esto es, una vez que hemos aplicado uno de los esquemas de Vidale para un punto sobre una cara de propagación, obtenemos el tiempo de viaje t_i . Luego comparamos este valor con el obtenido para una fuente artificial o ficticia que se construye a lo más con 17 nodos alrededor del punto de propagación, como se muestra en la Figura 86, suponiendo que el medio alrededor del punto de propagación $(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ es homogéneo. La Figura 86 presenta un ejemplo en el caso en que se conocen únicamente 7 nodos alrededor del nodo de propagación, para lo cual se resuelve un sistema de ecuaciones no lineal por el método de Newton de la forma

$$\begin{aligned} t_0 &= r_0 s = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2} s \\ &\vdots \\ t_6 &= r_6 s = \sqrt{(x_6 - a)^2 + (y_6 - b)^2 + (z_6 - c)^2} s \end{aligned} \quad (105)$$

con el cual se quiere determinar la posición (a, b, c) de la fuente.

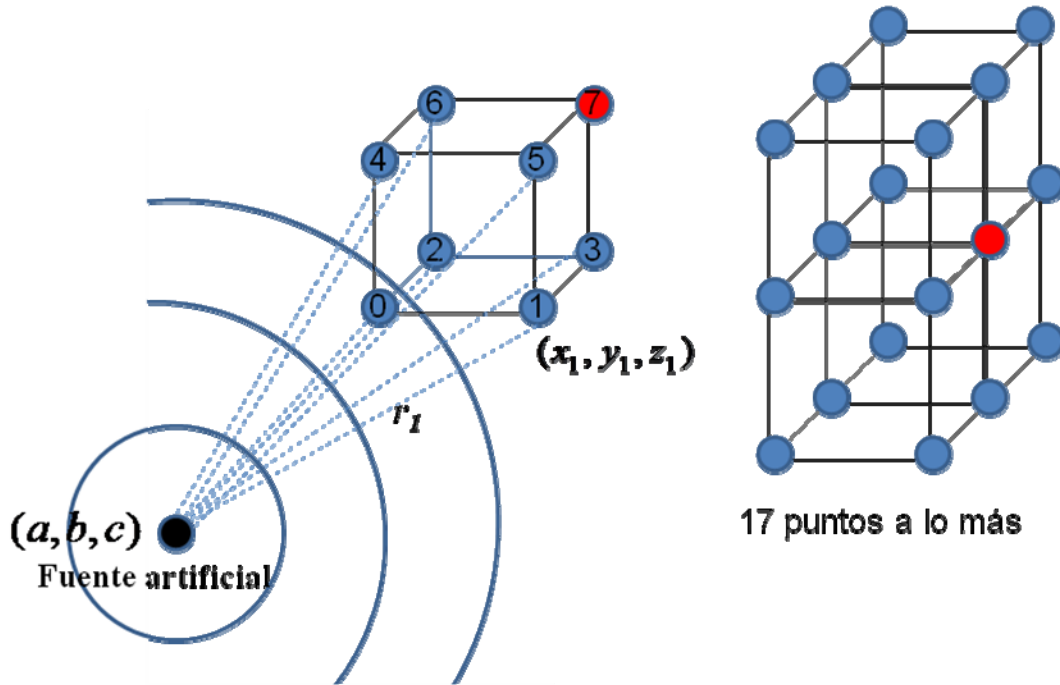


Figura 86. Ejemplo para el cálculo de la posición de la fuente artificial (centro de curvatura para un frente esférico) usando 7 nodos alrededor del punto de propagación previamente calculados. En caso de estar disponibles, se emplean los 17 nodos que rodean al punto que se está propagando para la estimación del centro de curvatura.

De esta manera el valor del tiempo de viaje t_i es comparado con el tiempo de viaje t_i^a calculado desde la fuente artificial al nodo de propagación, usando el porcentaje de error E definido por

$$E = \frac{t_i - t_i^a}{hs} \quad (106)$$

donde h es el espaciado de la malla y s es la lentitud promedio entre los 4 bloques que rodean el punto de propagación.

Detección de una onda que regresa al interior del volumen de tiempos ya calculado

En lugares donde la trayectoria de los rayos corresponde a refracciones críticas o difracciones que ocurren sobre el frente plano de propagación (Figura 87), se colocan marcas o banderas que indican que dichos puntos serán tratados como puntos de inicio de una nueva propagación una vez que se concluye el cálculo de tiempos de arribo en todo el dominio. Luego, en una segunda iteración se vuelven a calcular los tiempos de viaje en

todo el dominio 3D a partir de una fuente marcada. El proceso iterativo continúa en todo el volumen para todas las fuentes marcadas. La Figura 87 muestra una sección con puntos considerados como fuentes marcadas (F1 y F2), donde los rayos cambian de dirección. También es posible tener banderas después de que la propagación es continuada a partir de fuentes marcadas previamente.

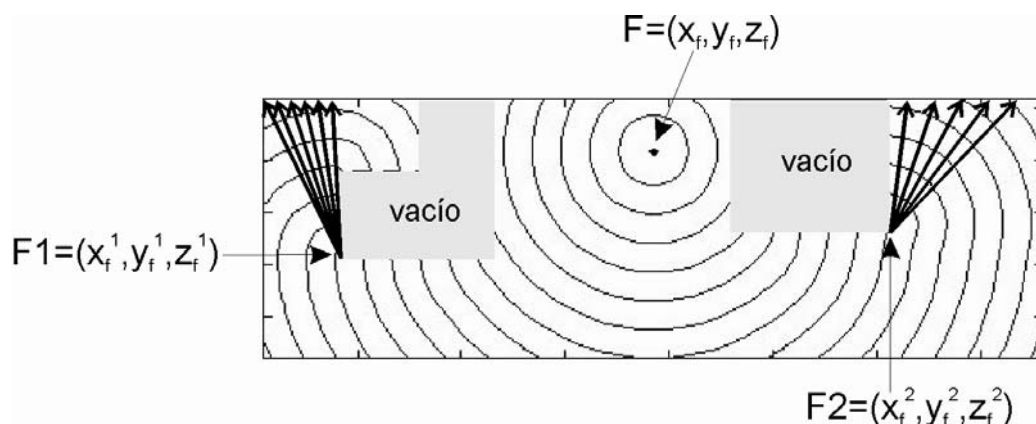


Figura 87. Contornos de tiempos de arribo a partir de la fuente F , donde se señalan puntos ($F1$ y $F2$) que deben ser marcados para considerarlos como fuentes en iteraciones posteriores. Los rayos muestran el cambio de dirección de los frentes de onda.

V. 3. Trazado de rayos

Como hemos mencionado, una vez que calculamos los tiempos de viaje de los frentes de onda en todo el dominio 3D mediante la técnica de Vidale (1990), podemos conocer la trayectoria de los rayos con el mínimo tiempo de viaje siguiendo el gradiente en los datos desde el receptor hacia la fuente. Este proceso de propagación permite trazar rayos provenientes de refracciones y difracciones, cuyas trayectorias no pueden ser encontradas trazando el rayo directamente desde la fuente al receptor, aún si se conocen los tiempos de viaje, ya que sus trayectorias divergen en forma de abanico. El diagrama general de los elementos requeridos para el trazado de rayos se muestra en la Figura 88.

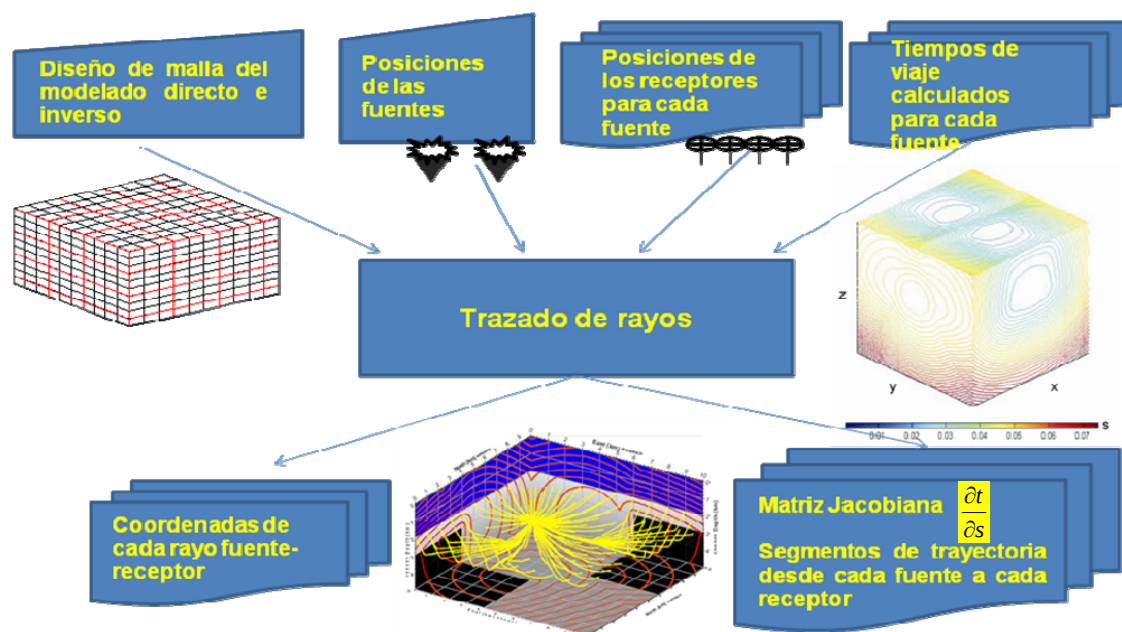


Figura 88. Esquema general para el trazado de rayos. Una vez calculados los tiempos de viaje en todo el dominio 3D (contornos 3D), trazamos la trayectoria de los frentes de onda a través de los rayos desde la fuente a los receptores.

Para el trazado de rayos desarrollamos un algoritmo que consiste en determinar el rayo que cruza un bloque cúbico de modelado directo entrando por una posición dada, viajando por la dirección del gradiente del tiempo de viaje, que es ortogonal al frente de onda y saliendo en otro punto para volver a entrar a un nuevo bloque de modelado directo (Figura 89). Cada punto de cruce del bloque es reportado para su posterior graficado.

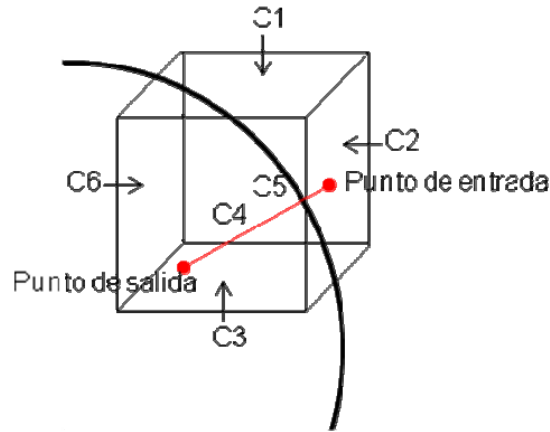


Figura 89. Esquema de un frente de onda esférico atravesando un cubo de modelado directo, donde se muestra el rayo perpendicular que entra por un punto en la cara 2 (C2) y sale por un punto en la cara 3 (C3).

Las componentes $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ y $\frac{\partial t}{\partial z}$ del gradiente dentro de un bloque son calculadas

como un promedio pesado de las correspondientes aristas de los bloques, de la siguiente manera: supongamos un bloque como el que se muestra en la Figura 90, las componentes del gradiente son calculadas a partir de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta t}{\Delta x} &= \frac{(t_5 - t_1)}{h} \frac{(h - dz)}{h} \frac{(h - dy)}{h} + \frac{(t_6 - t_2)}{h} \frac{(h - dz)}{h} \frac{dy}{h} + \\
 &\quad + \frac{(t_8 - t_4)}{h} \frac{dz}{h} \frac{(h - dy)}{h} + \frac{(t_7 - t_3)}{h} \frac{dz}{h} \frac{dy}{h}, \\
 \frac{\Delta t}{\Delta y} &= \frac{(t_2 - t_1)}{h} \frac{(h - dx)}{h} \frac{(h - dz)}{h} + \frac{(t_3 - t_4)}{h} \frac{dz}{h} \frac{(h - dx)}{h} + \\
 &\quad + \frac{(t_6 - t_5)}{h} \frac{dx}{h} \frac{(h - dz)}{h} + \frac{(t_7 - t_8)}{h} \frac{dx}{h} \frac{dz}{h}, \\
 \frac{\Delta t}{\Delta z} &= \frac{(t_4 - t_1)}{h} \frac{(h - dx)}{h} \frac{(h - dy)}{h} + \frac{(t_3 - t_2)}{h} \frac{(h - dx)}{h} \frac{dy}{h} + \\
 &\quad + \frac{(t_8 - t_5)}{h} \frac{dx}{h} \frac{(h - dy)}{h} + \frac{(t_7 - t_6)}{h} \frac{dx}{h} \frac{dy}{h},
 \end{aligned} \tag{107}$$

donde se observa que la ponderación es 1 en cada caso. Por ejemplo, para $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{(h-dz)(h-dy)}{h} + \frac{(h-dz)dy}{h} + \frac{dz(h-dy)}{h} + \frac{dzdy}{h} = \\
& = \frac{1}{h^2} (h^2 - hdy - hdz + dzdy + hdy - dzdy + hdz - dzdy + dzdy) = 1.
\end{aligned}
\tag{108}$$

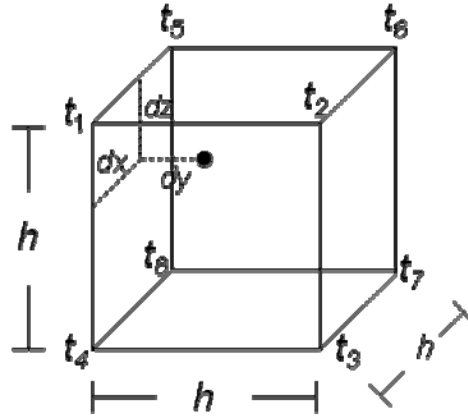


Figura 90. Bloque de modelado directo para el cálculo del gradiente.

Una vez que se conoce la posición del punto de entrada por una cara del bloque, el algoritmo determina el punto de salida a partir de una recta paralela al vector gradiente

$c\nabla t = c\left(\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}\right)$. Puesto que la recta intersecta una cara del cubo con un arreglo

como se muestra en la Figura 89 y, basados en los tiempos de viaje, con un arreglo como se muestra en la Figura 90, seleccionamos el punto por el cual el rayo cruzará los seis planos que coinciden con las caras del cubo usando las ecuaciones:

C1: punto de intersección = (x, y, z_0)

$$\Rightarrow (dx - x) = c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (dy - y) = c \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (dz - z_0) = c \frac{\Delta t}{\Delta z} \Rightarrow c = \frac{(dz - z_0)}{\frac{\Delta t}{\Delta z}}$$

$$\Rightarrow x = dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta t}{\Delta z}}(dz - z_0), \quad y = dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta t}{\Delta z}}(dz - z_0), \quad z = z_0$$

C2: punto de intersección = $(x, y_0 + h, z)$

$$\Rightarrow (dx - x) = c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (dy - (y_0 + h)) = c \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (dz - z) = c \frac{\Delta t}{\Delta z} \Rightarrow c = \frac{(dy - (y_0 + h))}{\frac{\Delta t}{\Delta y}}$$

$$\Rightarrow x = dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta t}{\Delta y}}(dy - (y_0 + h)), \quad y = y_0 + h, \quad z = dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta t}{\Delta y}}(dy - (y_0 + h))$$

C3: punto de intersección = $(x, y, z_0 + h)$

$$\Rightarrow (dx - x) = c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (dy - y) = c \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (dz - (z_0 + h)) = c \frac{\Delta t}{\Delta z} \Rightarrow c = \frac{(dz - (z_0 + h))}{\frac{\Delta t}{\Delta z}}$$

$$\Rightarrow x = dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta t}{\Delta z}}(dz - (z_0 + h)), \quad y = dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta t}{\Delta z}}(dz - (z_0 + h)), \quad z = z_0 + h$$

C4: punto de intersección = (x_0, y, z)

$$\Rightarrow (dx - x_0) = c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (dy - y) = c \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (dz - z) = c \frac{\Delta t}{\Delta z} \Rightarrow c = \frac{(dx - x_0)}{\frac{\Delta t}{\Delta x}},$$

$$\Rightarrow x = x_0, \quad y = dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}(dx - x_0), \quad z = dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}(dx - x_0)$$

C5: punto de intersección = $(x_0 + h, y, z)$

$$\Rightarrow (dx - (x_0 + h)) = c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (dy - y) = c \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (dz - z) = c \frac{\Delta t}{\Delta z} \Rightarrow c = \frac{(dx - (x_0 + h))}{\frac{\Delta t}{\Delta x}},$$

$$\Rightarrow x = x_0 + h, \quad y = dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}(dx - (x_0 + h)), \quad z = dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}(dx - (x_0 + h))$$

C6: punto de intersección = (x, y_0, z)

$$\Rightarrow (dx - x) = c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (dy - y_0) = c \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (dz - z) = c \frac{\Delta t}{\Delta z} \Rightarrow c = \frac{(dy - y_0)}{\frac{\Delta t}{\Delta y}}$$

$$\Rightarrow x = dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}(dy - y_0), \quad y = y_0, \quad z = dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}(dy - y_0).$$

(109)

Después, calculamos los tiempos en cada punto de intersección a estos planos con el propósito de obtener el correspondiente al punto de salida del rayo del cubo en análisis, observando que éste corresponde en cualquier caso al tercer punto encontrado, una vez que se han ordenado en tiempos de cruce ascendentes. Esto es, nos quedamos con la trayectoria dentro del bloque de tiempo mínimo. El cálculo de dichos tiempos se lleva a cabo usando la aproximación de Taylor de primer orden:

$$T = t - t_0 = \frac{\Delta t}{\Delta x}(x - dx) + \frac{\Delta t}{\Delta y}(y - dy) + \frac{\Delta t}{\Delta z}(z - dz). \quad (110)$$

De esta manera los tiempos en cada punto de salida están dados por:

C1: punto de intersección = (x, y, z_0)

$$T_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta y}} (dz - z_0) - dx \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta x}} (dz - z_0) - dy \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (z_0 - dz)$$

C2: punto de intersección = $(x, y_0 + h, z)$

$$T_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta y}} (dy - (y_0 + h)) - dx \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (y_0 + h - dy) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} (dy - (y_0 + h)) - dz \right)$$

C3: punto de intersección = $(x, y, z_0 + h)$

$$T_3 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta y}} (dz - (z_0 + h)) - dx \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta x}} (dz - (z_0 + h)) - dy \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} (z_0 + h - dz)$$

C4: punto de intersección = (x_0, y, z)

$$T_4 = \frac{\Delta t}{\Delta x} (x_0 - dx) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta x}} (dx - x_0) - dy \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} (dx - x_0) - dz \right)$$

C5: punto de intersección = $(x_0 + h, y, z)$

$$T_5 = \frac{\Delta t}{\Delta x} (x_0 + h - dx) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(dy - \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta x}} (dx - (x_0 + h)) - dy \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} (dx - (x_0 + h)) - dz \right)$$

C6: punto de intersección = (x, y_0, z)

$$T_6 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(dx - \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta y}} (dy - y_0) - dx \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (y_0 - dy) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(dz - \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} (dy - y_0) - dz \right).$$

(111)

Una vez que se tiene un punto de entrada y salida del rayo a un cubo, se puede calcular la longitud de un rayo en cada bloque de modelado directo. Esta longitud es sumada con todas las longitudes de los rayos que caen dentro del mismo bloque de inversión, considerando que varios bloques de modelado directo son un subconjunto de

un bloque de inversión, como se muestra en la Figura 91. Esto proporciona la longitud del rayo en un bloque de inversión y de esta manera se calcula la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{s}}\right)$, realizando este proceso para cada fuente-receptor.

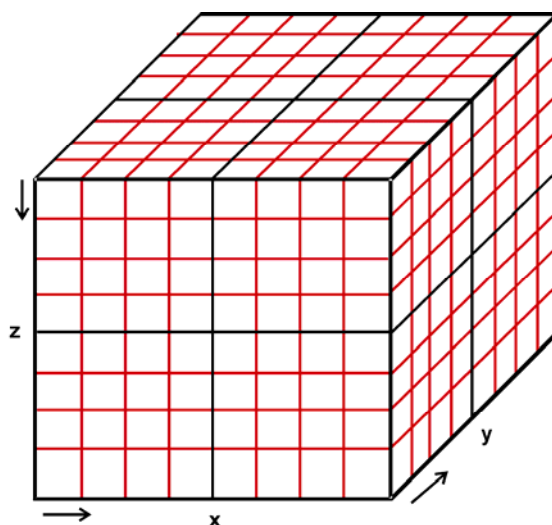


Figura 91. Malla uniforme de modelado directo (en rojo) contenida en una malla más grande (en negro), correspondiente a la discretización del modelo inverso, que admite bloques de diferentes tamaños.

Antes de aplicar el algoritmo en el esquema de inversión conjunta se procedió a analizar la validez y los alcances del método desarrollado, para lo cual llevamos a cabo diferentes pruebas con medios que contienen diversas heterogeneidades, los cuales son descritos en la siguiente sección.

V. 4. Ejemplos de modelado directo y trazado de rayos

En esta sección analizamos las características y desempeño del algoritmo de modelado directo y trazado de rayos. Comenzamos con un modelo sencillo de dos capas con el cual es posible validar el método, comparándolo con resultados analíticos. Una vez obtenida esta validación numérica, aplicamos la metodología a modelos de velocidades más complejos con los cuales observamos los alcances de la técnica y para los cuales es posible validar los resultados de una forma heurística.

V. 4. 1. Modelo de una capa

Un caso muy estudiado en la literatura consiste de un modelo de una capa, o bien, una capa y un semiespacio, con mayor velocidad en la capa inferior. Aunque este es un modelo unidimensional, es un experimento adecuado para probar el buen funcionamiento del algoritmo ya que es posible conocer, mediante la Ley de Snell, los ángulos de incidencia y las posiciones espaciales a partir de las cuales ocurren refracciones y refracciones críticas y con ello determinar el tiempo de viaje a los receptores, con lo cual se puede evaluar la exactitud del algoritmo.

En este caso presentamos un modelo contenido en un bloque de $10 \text{ km} \times 10 \text{ km} \times 5 \text{ km}$, como se muestra en la Figura 92. Suponemos 2 fuentes superficiales sobre una sección del modelo, colocadas en las posiciones:

Fuente 1 : $x = 5, y = 3, z = 0.002 \text{ (km)}$ y

Fuente 2 : $x = 5, y = 7, z = 0.002 \text{ (km)}$

para observar el principio de reciprocidad. Además, suponemos 121 receptores para cada fuente con un equiespaciamento de 1 km cubriendo toda la superficie.

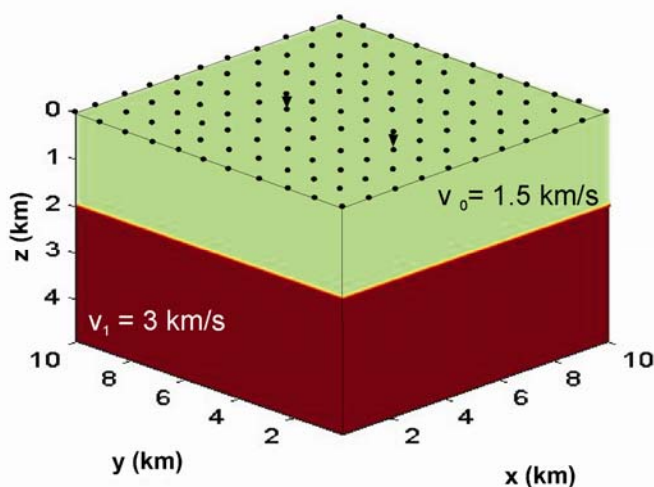


Figura 92. Modelo de una capa empleado para calcular los tiempos de primeros arribos y trayectorias de rayos sísmicos. Los puntos denotan la posición de los receptores y los triángulos invertidos la posición de las fuentes sísmicas.

En este caso consideramos una malla fina de modelado directo con un equiespaciamento de 40 m por cada lado, formando un arreglo de $251 \times 251 \times 126$ nodos. La Figura 93 muestra los tiempos de viaje calculados en todos los nodos del volumen para cada fuente. Debido a la simetría de las fuentes y al modelo de velocidades, observamos también ondas viajeras simétricas. A partir de los tiempos de viaje 3D así como de las secciones mostradas, observamos que las ondas directas llegan más rápido a los receptores y únicamente los receptores más alejados de las fuentes detectan ondas críticamente refractadas que viajan por la capa de mayor velocidad y regresan a la superficie, como lo muestra la trayectoria de los rayos en la Figura 93. Esto es debido a que el contraste de velocidad entre las capas no es muy grande para las dimensiones del modelo. Sin embargo, es un buen modelo para llevar a cabo la comparación con los tiempos de viaje calculados analíticamente.

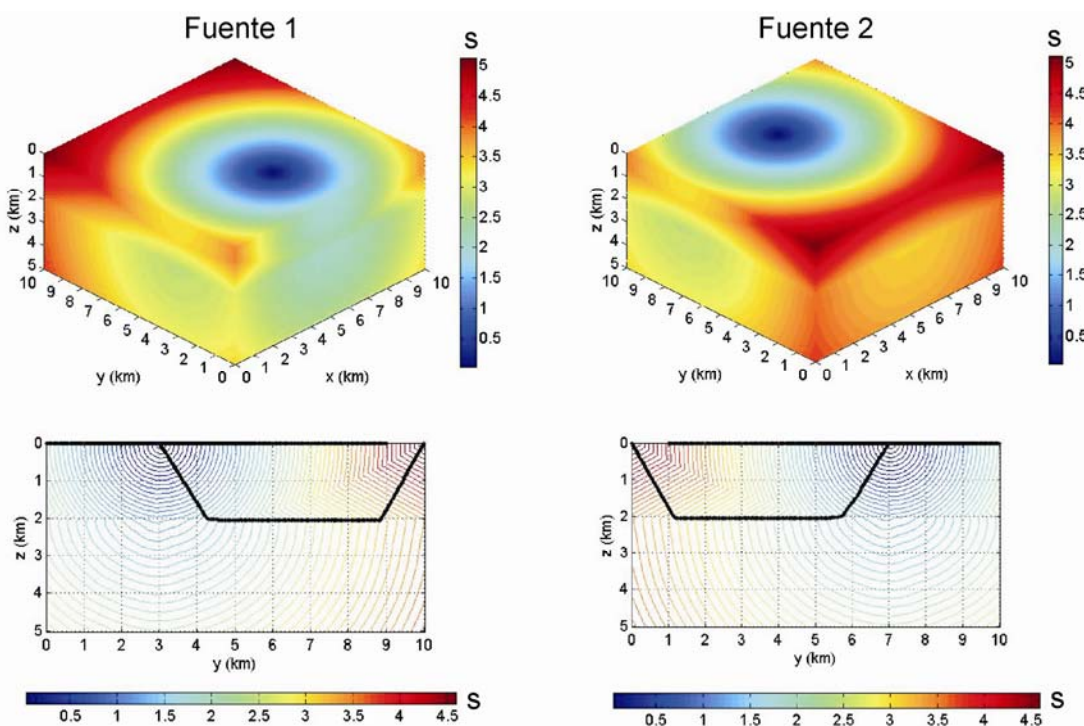


Figura 93. Tiempos de viaje calculados para el modelo de dos capas de la Figura 92. Las secciones están ubicadas en las posiciones de las fuentes, esto es, en $x = 5$ km.

Es posible notar en las secciones verticales de la Figura 93, pequeñas imperfecciones en el cálculo de tiempos de viaje principalmente en la zona donde las ondas penetran en la capa inferior, alrededor de $x = 3$ km. Esto es debido al tamaño de la malla seleccionado para la discretización del modelo. En este caso requerimos un tamaño de malla más fino, para lograr reducir dichas anomalías.

El cálculo analítico de los tiempos de viaje de las ondas directas es obtenido usando la ecuación

$$t = d/v_0, \quad (112)$$

mientras que las ondas críticamente refractadas son calculadas usando la ecuación:

$$t = \frac{d}{v_1} + \frac{2h\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}{v_1 v_0} \quad (113)$$

para un modelo de dos capas horizontales (Sharma, 2004). Donde d es la distancia entre la fuente y el receptor; h es el espesor de la capa superior, en este caso $h = 2$ km; v_0 y v_1 corresponden a las velocidades de la capa superior e inferior, respectivamente. Con esta información es posible calcular el error

$$E = |t^r - t^c|, \quad (114)$$

entre el tiempo estimado con el método desarrollado (t^c) y el tiempo real (t^r), usando las ecuaciones (112) y (113), en los receptores del modelo. La Figura 94 muestra los valores de E obtenidos para cada una de las fuentes. En ésta se observa que las mayores diferencias ocurren en los receptores más alejados de las fuentes, donde las ondas llegan críticamente refractadas. Sin embargo, el porcentaje máximo de error es menor al 1% en ambos casos.

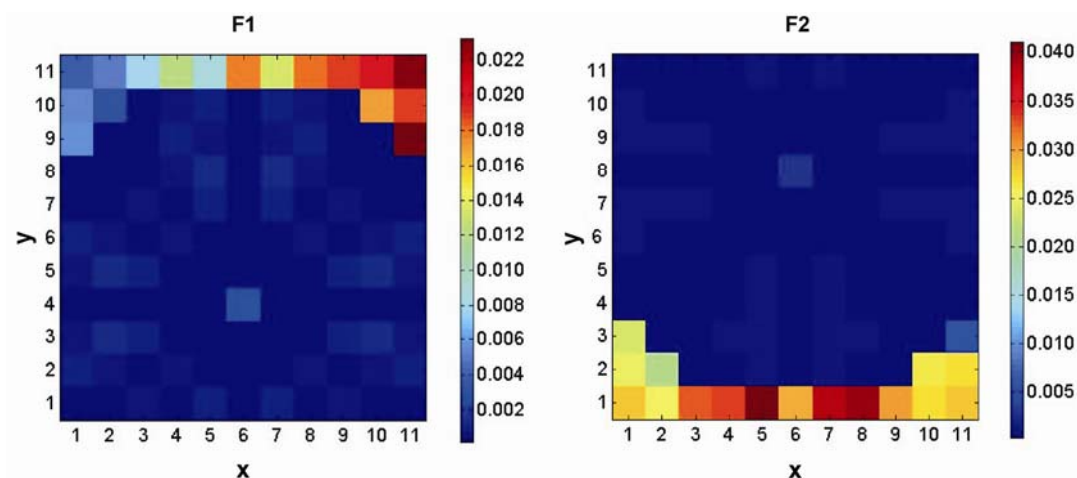


Figura 94. Error calculado en los receptores para cada una de las fuentes (F1, F2) a partir de la ecuación (114). Los receptores están numerados en ambas direcciones.

En el Apéndice E se muestra el análisis de errores de tiempos de arribo para este modelo de una capa, con el propósito de ilustrar la validación de la metodología en todos los puntos del dominio.

Como hemos mencionado, a partir de los rayos desde la fuente a los receptores construimos la matriz Jacobiana que interviene en el proceso de inversión conjunta mediante gradientes cruzados.

V. 4. 2. Modelo de un cubo enterrado

Un experimento simple en su estructura pero que nos proporciona información importante sobre la trayectoria de los frentes de onda y sus efectos en medios 3D acotados, consiste de un cubo enterrado en un medio homogéneo de menor velocidad, como el que se muestra en la Figura 95, el cual coincide en su posición y dimensiones con el presentado en la Figura 24 para el análisis de datos gravimétricos y magnéticos.

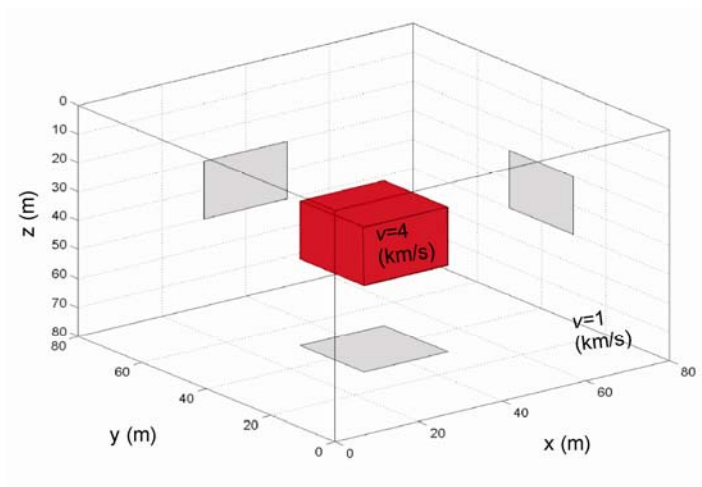


Figura 95. Modelo de velocidades de un cubo enterrado en un medio de menor velocidad.

En este caso se escogió una malla de modelado directo con un equiespaciamiento de 1 m por cada lado, formando un arreglo de $81 \times 81 \times 81$ nodos. Para conocer los efectos de los frentes de onda a partir de fuentes colocadas en la superficie hasta el fondo del dominio, simulando un pozo, se colocaron 3 fuentes en las posiciones:

Fuente 1 : $x = 40, y = 10, z = 2$ (m) ,

Fuente 2 : $x = 40, y = 10, z = 50$ (m) y

Fuente 3 : $x = 40, y = 10, z = 70$ (m) .

Los receptores fueron colocados cercanos a la superficie espaciados cada 10 m con un total de 81 receptores para cada fuente.

La Figura 96 muestra los tiempos de viaje para cada fuente en todo el dominio 3D y secciones verticales en $x = 40$ m , con los rayos generados por el algoritmo para cada fuente-receptor. Las ondas que viajan desde la Fuente 1 (fuente superficial) a todos los receptores lo hacen a través de ondas directas, lo cual se observa con la trayectoria de los rayos en la sección correspondiente. Suponiendo una fuente a la misma profundidad del cubo (Fuente 2), observamos ondas directas y ondas refractadas lo que permitirá determinar de mejor manera la posición del cubo. Similarmente, para la Fuente 3 los rayos atraviesan el cubo aunque la base de éste no es delimitada.

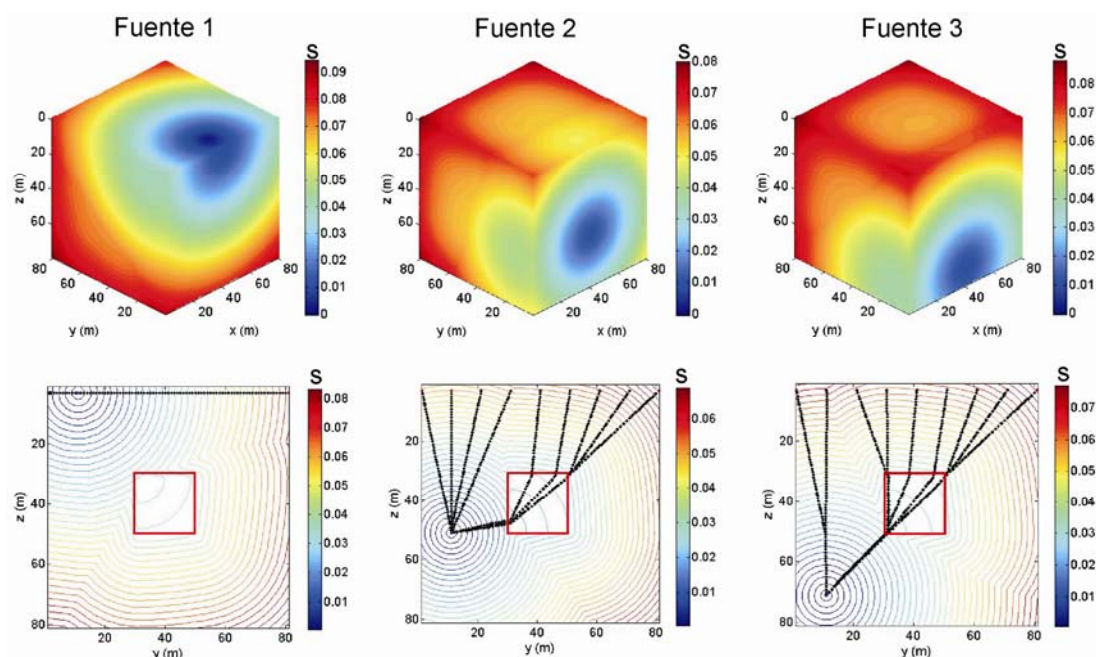


Figura 96. Tiempos de viaje calculados para tres fuentes colocadas sobre una línea vertical a un costado del cubo, hacia el fondo del dominio. Las secciones corresponden a cada fuente en la posición $x=40$ m que atraviesa el cubo. Los rayos mostrados sobre las secciones indican el comportamiento de las ondas viajeras a lo largo de secciones paralelas.

Además de validar la formulación de modelado directo de una forma intuitiva en un modelo de velocidades con características 3D, con este experimento podemos analizar la capacidad de resolución de las estructuras incorporando fuentes profundas. Para ello notamos que la característica homogénea del medio circundante no permite delimitar en ningún caso la base del cubo, lo que podría cambiar considerando ya sea un medio no homogéneo con un gradiente de velocidades, que para algunos ambientes podría resultar un caso más realista, o bien situando las fuentes a mayor distancia.

V. 4. 3. Modelo de dos cubos enterrados

Siguiendo con el Experimento II de la Sección IV.1.2., calculamos los tiempos de viaje para el modelo de dos cubos enterrados a una profundidad de 10 m en un medio homogéneo de velocidad 1 km/s, mientras que los cubos presentan velocidades altas de 4 km/s. En este caso suponemos dos fuentes, una colocada 2 m por debajo de la superficie y otra a 30 m de profundidad, con el propósito de restringir las fronteras superior e

inferior de los bloques. Los receptores son colocados 2 m por debajo de la superficie con un equiespaciamiento de 10 m en las direcciones x y y . La Figura 97 muestra una sección del modelo 3D con el arreglo de fuentes y receptores. Para este experimento utilizamos también una malla de modelado directo de $81 \times 81 \times 81$ nodos.

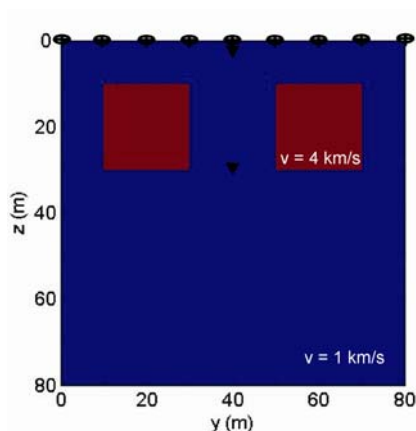


Figura 97. Modelo de velocidades de dos cubos enterrados a una profundidad de 10 m en un medio homogéneo. Las fuentes están representadas por los triángulos invertidos mientras que los receptores se observan sobre la superficie con forma oval.

La Figura 98 muestra los tiempos de viaje en todo el dominio 3D para cada una de las fuentes. También se muestran secciones verticales en $x = 40$ m y la dirección de propagación a través de los rayos sobre dichas secciones. Para la Fuente 1, podemos observar las ondas directas indicadas por los rayos horizontales cercanos a la superficie; ondas refractadas que atraviesan los bloques de mayor velocidad mostradas a través del mayor espaciamiento entre los contornos. Sin embargo, debido a la homogeneidad de los medios y a la posición de la fuente y los receptores, los rayos sólo describen la trayectoria de las ondas críticamente refractadas, con lo cual se distingue la parte superior de los cubos con contraste de velocidad positivo. Debido a que la Fuente 2 se encuentra a la misma profundidad que el fondo de los bloques, los rayos atraviesan los bloques para llegar a los receptores, proporcionando una mayor descripción de la posición y dimensiones de éstos.

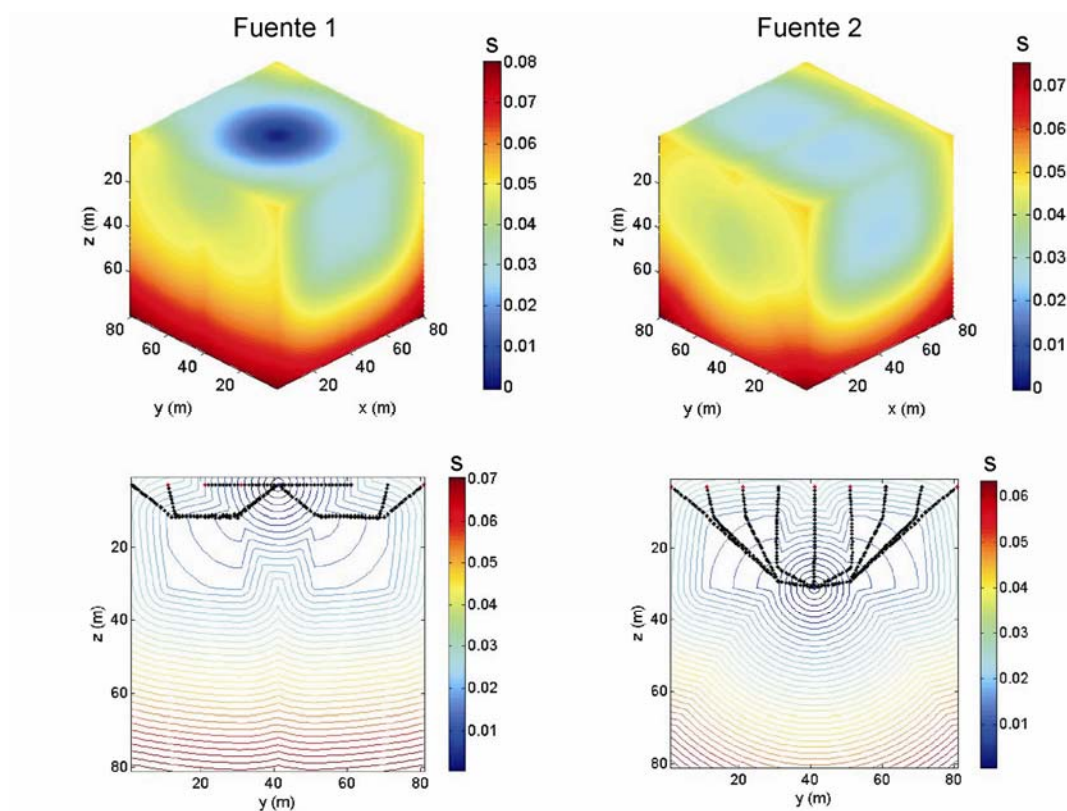


Figura 98. Tiempos de viaje para el modelo 3D descrito en la Figura 97. También mostramos contornos para una sección intermedia en la posición $x=40$ m y las trayectorias de los frentes de onda a través de los rayos.

De los resultados de estos experimentos, podemos observar que la trayectoria de los rayos viajando a través de medios homogéneos, está limitada por la posición de la fuente y los receptores. En los casos de medios completamente heterogéneos con gradientes tridimensionales podemos esperar una buena cobertura de rayos para experimentos típicos de refracción sísmica, aunque, en general, el método tendrá más resolución en trabajos de tomografía de pozo.

V. 5. Conclusiones

La metodología desarrollada de modelado directo de ondas sísmicas nos permite determinar con buen nivel de precisión, como se observó en la estimación del error para un medio de una capa, la estructura de medios complejos 3D. Asimismo, los rayos proporcionan información adecuada sobre la trayectoria de viaje, fuente-receptor, de

dichas ondas. Sin embargo, en los modelos mostrados en este capítulo, el medio circundante se consideró homogéneo, lo que limita la trayectoria de los rayos a penetrar más y observar el viaje de las ondas más alejadas o en otras direcciones. Para reducir esta dificultad, comúnmente se considera el medio circundante con gradiente de velocidades en alguna dirección espacial, generalmente en profundidad y con ello se obtiene información de la trayectoria y tiempos de viaje de las ondas sísmicas en gran parte del volumen.

Para tener una mejor cobertura de las fronteras con contrastes de velocidad, es importante considerar las fuentes en posiciones estratégicas sobre la superficie y en profundidad ya que, al no considerar un “ancho” de rayo en nuestra aproximación, las áreas no cubiertas por rayos sísmicos no tendrán ninguna contribución y por lo tanto no podrán ser resueltas por el algoritmo de inversión. La existencia de gradientes de velocidad en el modelo nos permitirá distribuir la trayectoria de los rayos en un mayor volumen y por lo tanto permitirá una mejor resolución del modelo a profundidad durante la inversión.

Como en la mayoría de las aproximaciones por métodos numéricos, para obtener mayor precisión en los resultados es conveniente discretizar los modelos con mallas finas. En este sentido, para la malla propuesta en el modelo de una capa se requirió un tiempo de cómputo considerable (mayor a 5 horas) con un procesador de 1.67 GHz.

Capítulo VI

Inversión conjunta 3D de datos potenciales y sísmicos mediante gradientes cruzados

Sabemos que para mejorar la resolución e interpretación de las características estructurales, físicas y geológicas del subsuelo, es conveniente recurrir a una mayor cantidad de datos geofísicos que resalten, desde diferentes perspectivas, todas estas características, como lo han propuesto diferentes autores (Gallardo, 2007; Colombo y De Stefano, 2007; entre otros). Es por esto que ahora incorporamos datos de sísmica de refracción y llevamos a cabo la inversión conjunta combinando pares de datos tanto gravimétricos y sísmicos como magnéticos y sísmicos. En el Capítulo IV, hemos visto que la inversión conjunta usando datos potenciales requiere mayor información, dentro del esquema de inversión, para distinguir algunos rasgos esenciales de los modelos, principalmente en profundidad. Los datos sísmicos tienen la ventaja de detectar cambios de velocidad laterales y en profundidad con mayor resolución. De esta manera, es de esperar que la combinación de datos potenciales y sísmicos mejorará la interpretación de las características físicas, geológicas, petrofísicas y estructurales del subsuelo.

Como hemos visto en el Capítulo V, la velocidad sísmica es una función de la densidad del material de las rocas en el subsuelo y de las propiedades elásticas de ese material. Resultaría natural incorporar en nuestra formulación la relación física entre la velocidad de onda P y la densidad, sin embargo sería necesario hacer ciertas suposiciones en cuanto a las otras constantes elásticas involucradas. Más aún, se podrían considerar algunas relaciones petrofísicas que involucran la porosidad, el fracturamiento, el contenido de fluido y composición del material sólido de la roca. Sin embargo, la principal ventaja de la metodología de gradientes cruzados es que aun cuando se desconozca o no exista una relación entre los parámetros, como es el caso de magnetización y velocidad, la inversión conjunta permite resaltar los contrastes de cada una de dichas propiedades físicas. Sin embargo, es importante hacer notar que aunque la metodología de inversión conjunta mediante gradientes cruzados tiene la ventaja de conjuntar datos geofísicos

mediante una relación estructural y no recurrir a relaciones entre los parámetros, cualquier dependencia existente entre los parámetros físicos (como la que ocurre entre densidad y velocidad) presenta una ventaja adicional al invertir conjuntamente datos sísmicos y gravimétricos.

En el presente capítulo mostraremos la aplicación del método usando datos potenciales y sísmicos en experimentos sintéticos. En la Sección VI.1., describimos el proceso de inversión conjunta adaptado para la combinación de datos potenciales y sísmicos. En la Sección VI.2., analizamos los resultados de la aplicación del método en un modelo sintético superficial, combinando datos potenciales y sísmicos con diferentes restricciones sobre los modelos. Finalmente en la Sección VI.3., presentamos las conclusiones, resumiendo las ventajas y desventajas observadas de la metodología.

VI. 1. Proceso de inversión conjunta usando datos potenciales y sísmicos

Como se demostró en el capítulo anterior, la relación entre el tiempo de arribo de una onda sísmica y las características elásticas del modelo (lentitud) son no lineales (véase ecuación 99). Es por esto que requerimos de un proceso iterativo para su solución, a diferencia de lo requerido para el modelado inverso de datos potenciales (Ecs. 65 y 74). De esta manera, el procedimiento de inversión conjunta es adaptado para permitir un proceso iterativo para el modelado inverso de la información sísmica, quedando establecido como se muestra en la Figura 99:

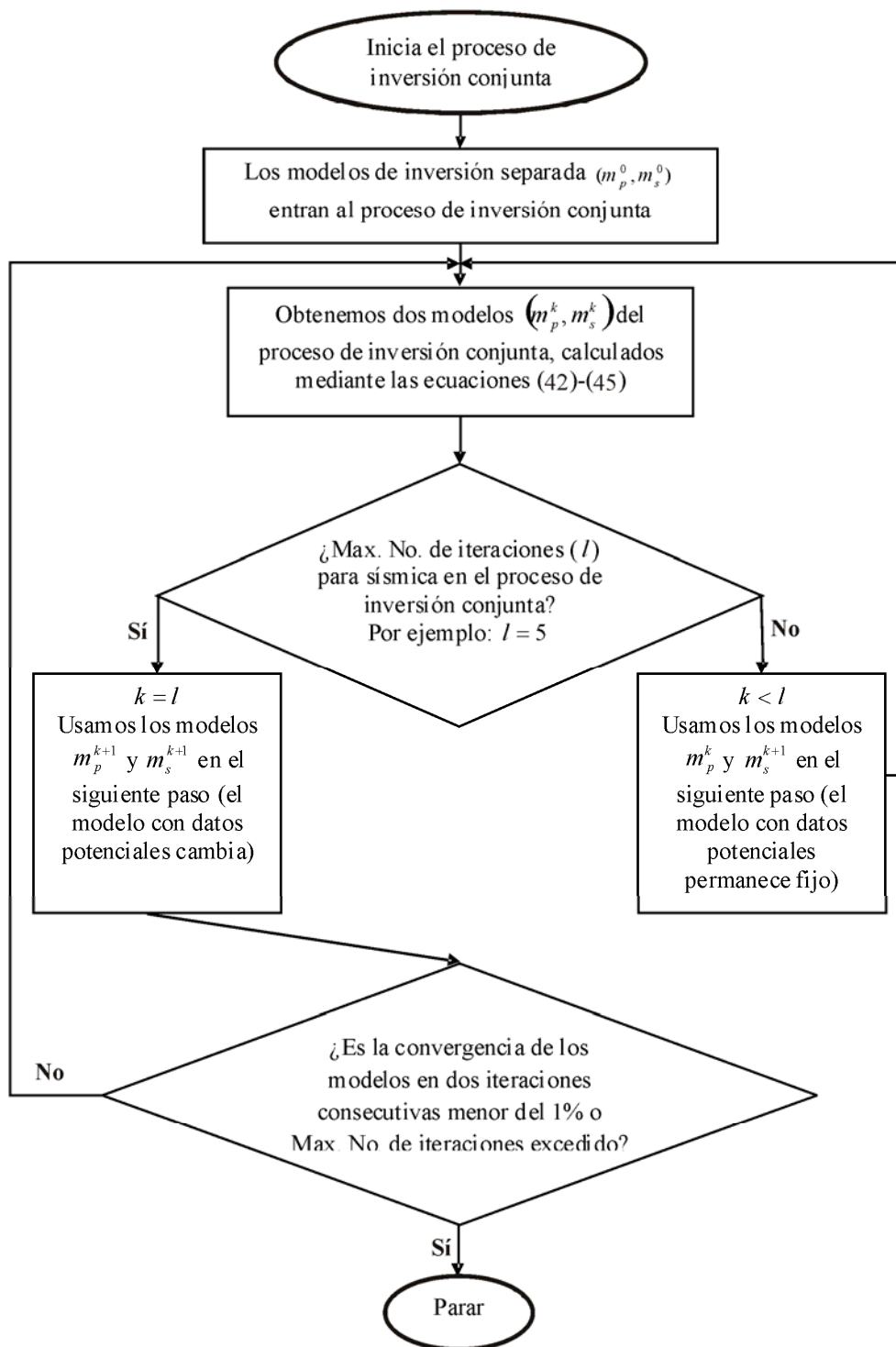


Figura 99. Diagrama de flujo que muestra el proceso de inversión conjunta usando datos de campo potencial (m_p) y de sísmica (m_s). El índice k indica las iteraciones.

VI. 2. Experimentos sintéticos

En esta sección presentamos los resultados del método de inversión conjunta mediante gradientes cruzados en experimentos sintéticos. Recurrimos a un modelo de prueba simple que consiste de dos cubos enterrados en un medio homogéneo y observamos las diferencias estructurales al aplicar distintas condiciones. Describimos dos experimentos con datos gravimétricos y sísmicos y uno con datos magnéticos y sísmicos.

VI. 2.1. Experimento I. Modelo de dos cubos enterrados en un medio homogéneo.

A manera comparativa con los resultados obtenidos en la Sección IV.1.2., consideramos el experimento de dos cubos enterrados a una profundidad de 10 m, similar al descrito en la Sección V.4.3., para el cual los bloques tienen una velocidad de 4 km/s y un contraste de densidad de 1 g/cm³, mientras que el medio homogéneo tienen una velocidad de 1 km/s y contraste de densidad de 0 g/cm³.

Tabla III: Factores de peso y parámetros de control establecidos en cada experimento de prueba de la formulación de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados, para experimentos con datos tanto gravimétricos y sísmicos como magnéticos y sísmicos.

No. Exp.	Covarianza de la suavidad C_{L_1} y C_{L_2}	Modelo a priori m_1^{apr} y m_2^{apr}	Covarianza del modelo a priori C_{m_1} y C_{m_2}	Nivel de corte de la DVS
I	$\alpha_g^2 = \alpha_s^2 = 1 \times 10^4$	$m_g^{apr} = 0$ $m_s^{apr} = 1$	$\sigma_g^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^8, & 0 \leq z < 70 \\ 1 \times 10^{-4}, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases}$ $\sigma_s^2 = 0.01$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-16}$
II	$\alpha_g^2 = \alpha_s^2 = 1 \times 10^4$	$m_g^{apr} = 0$ $m_s^{apr} = 1$	$\sigma_g^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^{-4}, & 0 \leq z \leq 10 \\ 1 \times 10^8, & 10 < z < 70 \\ 1 \times 10^{-4}, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases}$ $\sigma_s^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^{-6}, & 0 \leq z \leq 10 \\ 1 \times 10^{-2}, & 10 < z \leq 80 \end{cases}$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-17}$
III	$\alpha_m^2 = \alpha_s^2 = 1 \times 10^4$	$m_m^{apr} = 0$ $m_s^{apr} = 1$	$\sigma_m^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^{-4}, & 0 \leq z \leq 10 \\ 1 \times 10^8, & 10 < z < 70 \\ 1 \times 10^{-4}, & 70 \leq z \leq 80 \end{cases}$ $\sigma_s^2(z) =$ $= \begin{cases} 1 \times 10^{-6}, & 0 \leq z \leq 10 \\ 1 \times 10^{-2}, & 10 < z \leq 80 \end{cases}$	$\lambda_p \geq 1 \times 10^{-17}$

Nota: Los subíndices 1 y 2 de la formulación teórica presentada en el Capítulo II, son sustituidos aquí por los índices g , m y s , para referir específicamente a gravimetría, magnetometría o sísmica. Si no se especifica otra cosa, los valores son interpretados como constantes para todo el espacio del modelo.

Características de los datos

Para el caso gravimétrico se consideró la anomalía mostrada en la Figura 44a con observaciones en superficie extendidas, sobrepasando las fronteras del dominio. La discretización utilizada en el modelado directo para la obtención de esta anomalía consistió de un agregado de 2048 prismas rectangulares de 5 m por cada lado y 10 m en profundidad y que coincide con la discretización del modelo de inversión. El modelado directo de sismica de refracción fue descrito en la Sección V.4.3., donde se pueden observar los tiempos de viaje en algunos receptores, considerados como los datos sísmicos en el proceso inverso. El ruido Gaussiano agregado a estos datos corresponde al 0.4% del promedio de los valores de tiempos de arribo en los receptores.

Descripción de los parámetros de inversión

Las características de los parámetros de inversión coinciden con los bloques de discretización del modelado directo del modelo gravimétrico, el cual hemos descrito en las *Características de los datos*. La Figura 101 muestra los resultados de la inversión separada y conjunta de datos gravimétricos y sísmicos con valores de los parámetros de control y factores de peso dados en el Experimento I de la Tabla III. En este caso seleccionamos, después de varias pruebas, parámetros de regularización del término de suavidad (α_g^2 y α_m^2) tales que proporcionaron un adecuado ajuste a los datos principalmente en el caso gravimétrico y, en ambos casos, se obtuvieron modelos suaves con características de los modelos originales. El modelo a priori de sismica ($\mathbf{m}_s^{\text{apr}} = \mathbf{1}$) se consideró homogéneo con un valor realista de la velocidad. Formamos una losa en profundidad para el caso gravimétrico a través de la matriz de covarianza, con valores muy pequeños para los bloques del fondo, indicando que la confiabilidad de los valores del modelo a priori en esos bloques es grande. Para el caso de sismica, otorgamos el mismo peso a todos los bloques del dominio. El valor asignado indica poca confiabilidad del modelo a priori y permite alejarnos de su valor constante en el proceso inverso. El nivel de corte (λ_p) seleccionado corresponde a un número de ecuaciones de gradientes cruzados cercana al doble del número de parámetros, a partir del cual se observa una caída en los valores singulares, como se muestra en la gráfica de la Figura 100.

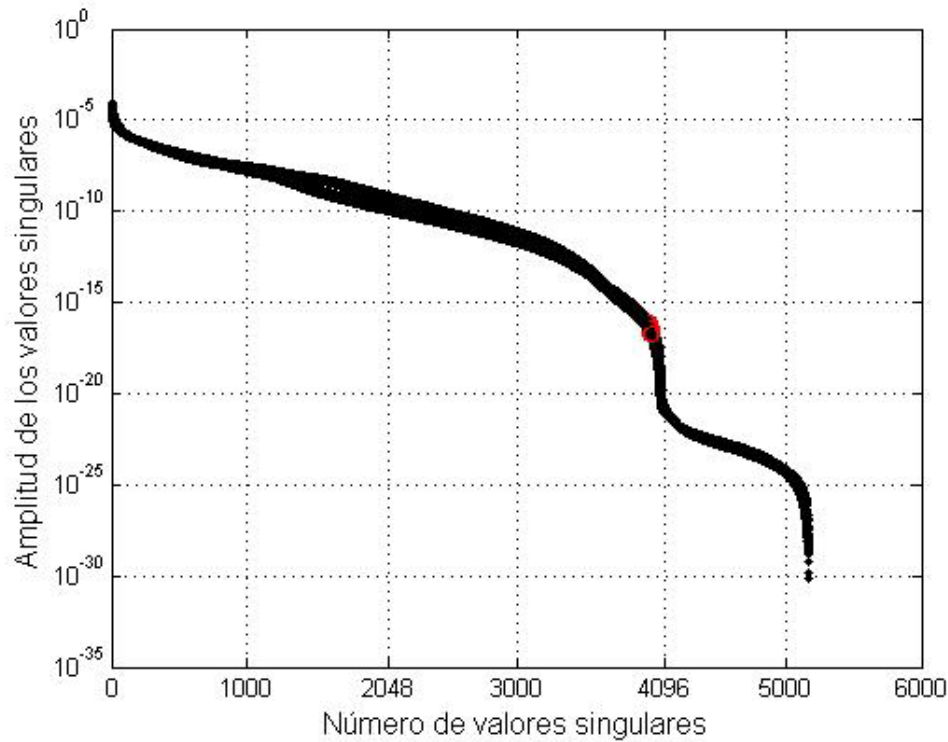


Figura 100. Valores singulares de la matriz $\mathbf{B}_k \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}_k^T$ para cada paso iterativo de la formulación (42) y (43), aplicada al experimento de dos cubos colocados a 10 m de profundidad. Los círculos rojos indican el nivel de corte en cada iteración suponiendo un λ_p correspondiente al valor del rango máximo de la matriz, $p \leq 4096$.

Descripción de los modelos

Como hemos mencionado, para este experimento consideramos una losa en el fondo en todo el proceso iterativo de inversión únicamente en el caso de datos gravimétricos, con valor fijo de 0 g/cm^3 , con el propósito de evitar la formación de estructuras ficticias a profundidad, como ocurrió en los resultados del Capítulo IV. Además, sabemos que esta hipótesis es válida en una variedad de situaciones reales donde se tiene conocimiento a priori del material existente en el sitio y de sus características físicas.

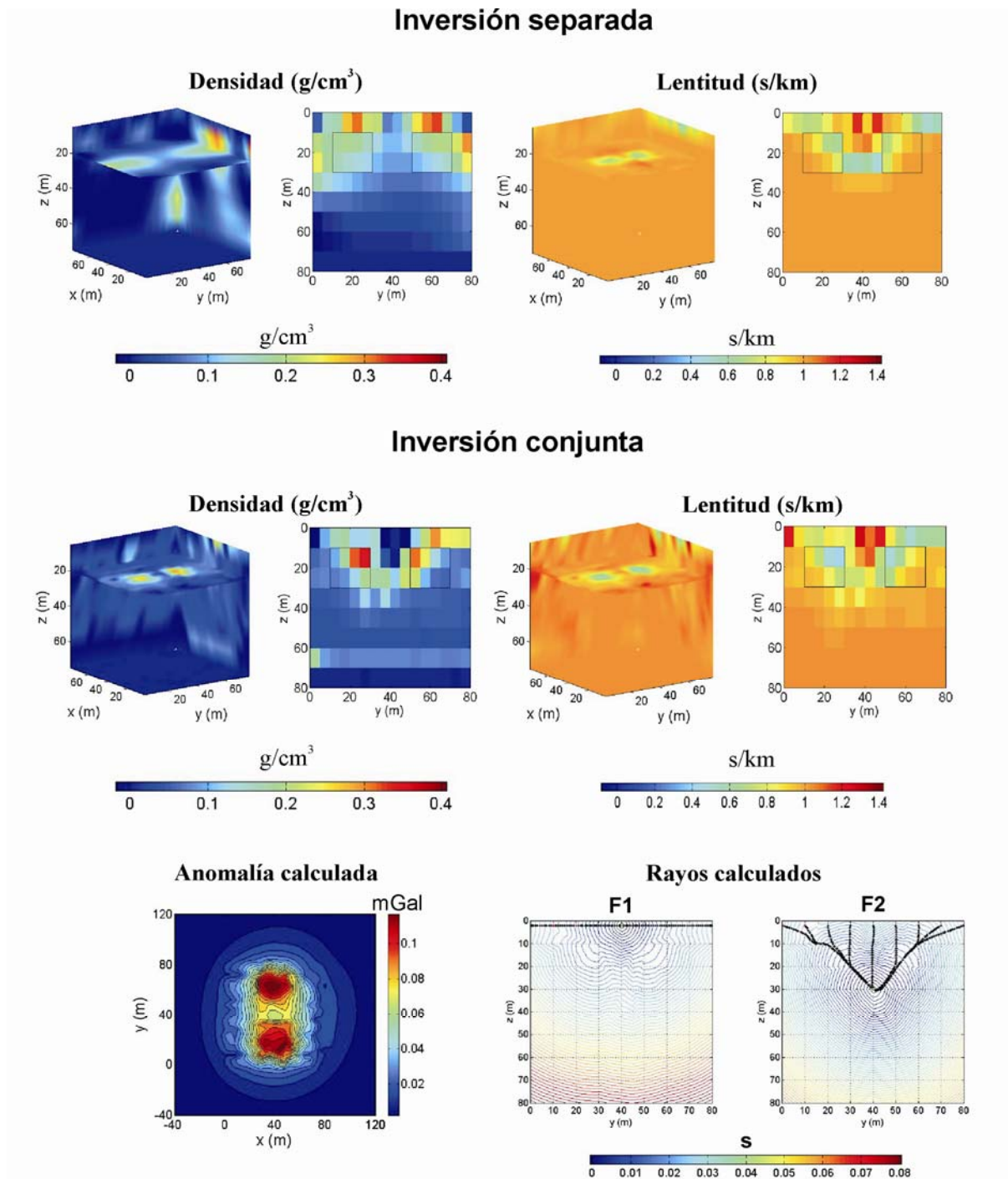


Figura 101. Modelos comparativos de densidad y lentitud de inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad, con una losa en profundidad para el modelo de densidad. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición $x = 40$ m que atraviesa los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas. Se muestran, en la base de la figura, la anomalía gravimétrica calculada de los modelos de inversión conjunta, así como los rayos sísmicos para ambas fuentes (F1 y F2), sobrepuestos a los tiempos de viaje calculados.

Como se puede observar en la Figura 101 el modelo de densidad de inversión separada no delimita los bloques en profundidad, sin embargo se observan dos estructuras extendidas lateralmente en las posiciones originales de los bloques. Aún cuando algunos de los rayos para la Fuente 1 son refractados en la cima de los bloques como se muestra en la Figura 102, el modelo de lentitud de inversión separada sólo detecta la parte de los bloques que es atravesada por los rayos a partir de la Fuente 2, restringiendo parcialmente el cuerpo de los bloques. Al igual que en los casos anteriores, los datos sísmicos y gravimétricos en el proceso de inversión conjunta generaron modelos con mayor similitud estructural. En este caso, los valores de lentitud resultaron adecuados dentro de los bloques y el modelo de densidad resultó beneficiado con una mejor resolución lateral y en profundidad con respecto al modelo de inversión separada. En ambos modelos de inversión conjunta la cima de los bloques no es resuelta con precisión, debido a que ninguno de los modelos de inversión separada resuelve esta zona adecuadamente y las heterogeneidades requeridas por el modelo de velocidad para reproducir los tiempos de arribo de ondas críticamente refractadas están siendo ubicadas en la superficie. De esta manera, los modelos obtenidos después de inversión conjunta no restringen la parte superior de los bloques como una superficie plana y produce heterogeneidades superficiales inexistentes. También mostramos, en la misma figura, la anomalía gravimétrica calculada del modelo de inversión conjunta, donde se distinguen los efectos de los bloques, comparable a la anomalía observada mostrada en la Figura 44. Como era de esperar para el modelo de lentitudes obtenido después de inversión conjunta, los rayos calculados muestran que las ondas viajan sobre la superficie (Fuente 1) casi en todas partes, lo cual representa una desventaja para el método. La fuente profunda (Fuente 2) atraviesa los bloques en una cuarta parte de éstos, por lo que la información proporcionada por estos datos fuera de estas trayectorias es nula y por lo tanto podemos concluir que no existe información suficiente por ninguna de las técnicas que permita resolver los bloques en la cima y lateralmente. A pesar de estas diferencias con el modelo sintético, aún se puede observar que el modelo original es mayormente aproximado con los modelos de inversión conjunta que con los de inversión separada, lo cual es más notable en el caso gravimétrico.

Ajuste a los datos

La Figura 102 muestra el proceso iterativo de ajuste y convergencia de inversión conjunta. Para el caso gravimétrico, la iteración 1 del ajuste corresponde al valor rms de los datos usados en inversión separada, los cuales resultan después ser mayores a la unidad en todo el proceso de inversión conjunta (a partir de la segunda iteración). Aún así, los valores de la anomalía gravimétrica calculada son aceptables como se muestra en la Figura 101. Por otra parte, para los datos sísmicos, los valores rms de los residuales normalizados alcanzan un valor mínimo de 5.58 donde las mayores diferencias en los tiempos se pueden observar en la Figura 103, que principalmente corresponden a la región sobre los receptores de la sección $x = 40$ m, para ambas fuentes. También, los valores rms reflejan una diferencia en los tiempos que corresponden a rayos que no son refractados críticamente, únicamente ocurren refracciones críticas en la región para $40 \leq x \leq 80$ m y $40 \leq y \leq 80$ m para la fuente 1. Para la fuente 2, los rayos siguen trayectorias adecuadas aunque con mayor curvatura debido a pequeñas heterogeneidades en el modelo. Es notable que a pesar de estos valores, el proceso mantiene una tendencia decreciente del rms. Aún cuando la gráfica 102a evidencia en parte la historia del proceso, la gráfica 102b, muestra con mejor detalle la historia de convergencia del proceso. Aquí se puede observar que el modelo sísmico gradualmente fue produciendo un modelo consistente como el óptimo, mientras que el modelo gravimétrico se mantuvo cambiando constantemente, más probablemente tratando de asimilar las estructuras dictadas por el modelo sísmico, lo que se puede demostrar en los modelos finales obtenidos de la Figura 101, donde el modelo gravimétrico de la inversión separada y conjunta varió notablemente. Esta diferencia en convergencia se puede explicar por las diferencias en capacidad de resolución de ambos tipos de datos. El proceso de convergencia para el caso gravimétrico muestra inicialmente valores alrededor del 100% y en la última iteración seleccionada el valor es cercano al 60%, estos valores resultan del cálculo del valor de convergencia utilizado (Ecs. 79 y 80), puesto que es suficiente que para pocos parámetros

puntuales (digamos $i = 1, \dots, 5$) el cociente
$$\frac{\left(\left(\mathbf{m}^k \right)_i - \left(\mathbf{m}^{k-1} \right)_i \right)^2}{\left(\mathbf{m}^{k-1} \right)_i^2 + \varepsilon}$$
 en dichas ecuaciones sea muy

grande y por lo tanto el promedio crece en estos porcentajes.

También mostramos la correlación entre los valores de densidad y lentitud para inversión separada y conjunta (Figuras 102c y 102d, respectivamente). Se observa, al igual que en experimentos anteriores, una mayor dispersión de los puntos en el caso de inversión separada, como resultado de la similitud estructural de los modelos, mientras que la correlación de los modelos de inversión conjunta seleccionados presentan una tendencia lineal hacia los valores reales.

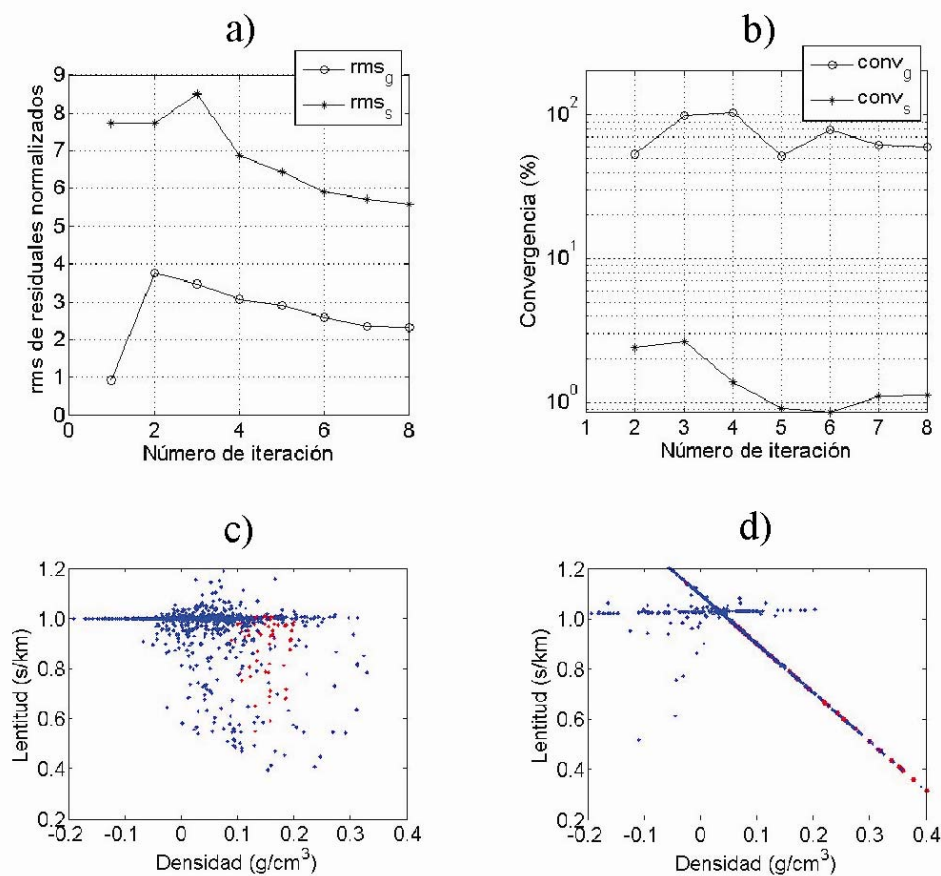


Figura 102. La Figura (a) muestra el ajuste de los datos gravimétricos -g- y sísmicos -s- y (b) la convergencia del proceso iterativo. Estos valores fueron calculados usando las expresiones (77)-(80). La correlación entre los parámetros de densidad y lentitud obtenidos después de inversión separada es mostrada en (c) y después de inversión conjunta en (d), para el Experimento I. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región de los cubos, mientras que los puntos azules corresponden a los valores del medio circundante.

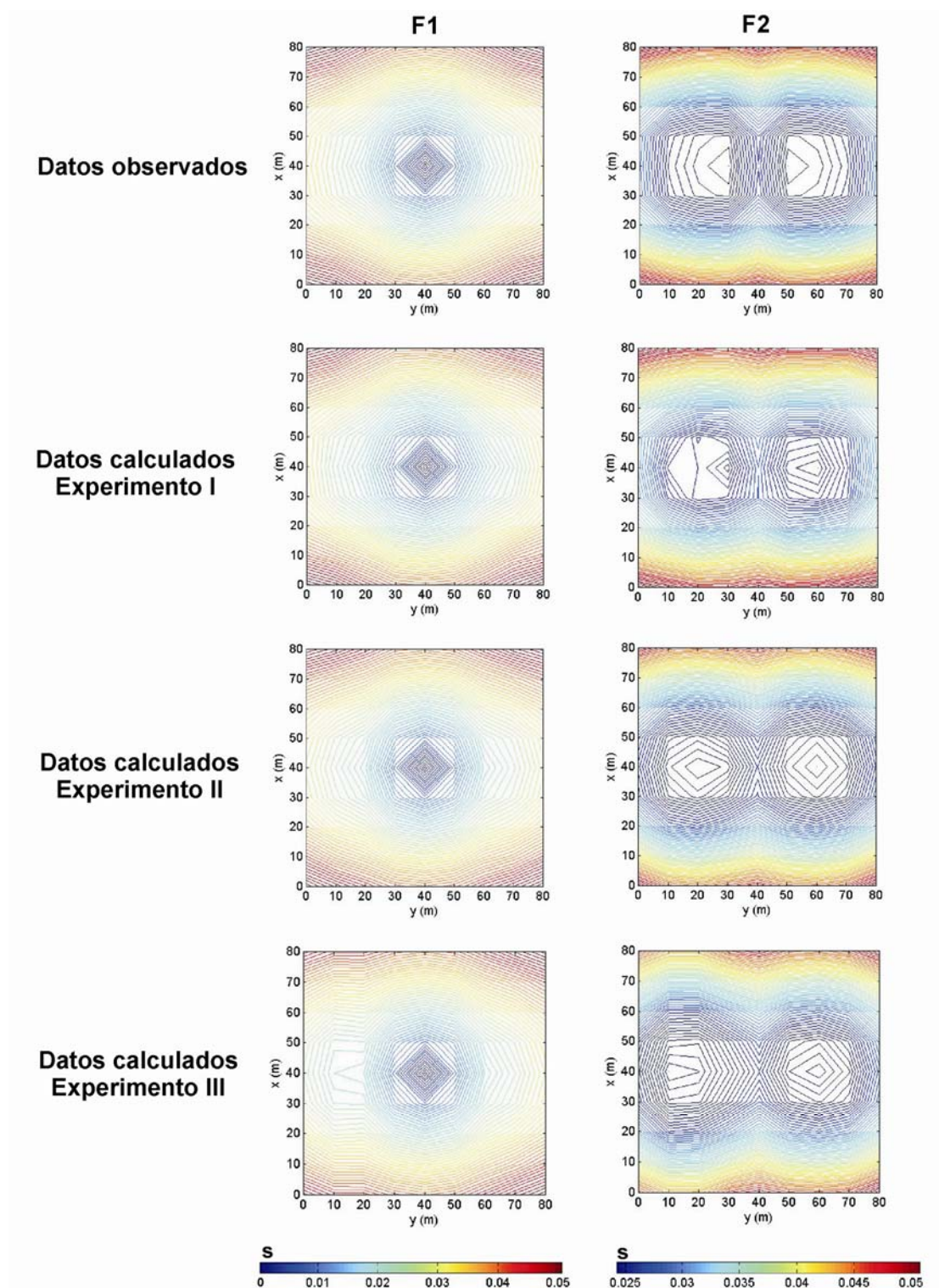


Figura 103. Contornos de los tiempos de arribo (sin ruido) observados en superficie para cada fuente F1 y F2. Comparativamente se muestran contornos de los tiempos de arribo calculados para cada experimento del modelo de lentitudes obtenido por inversión conjunta.

VI. 2.2. Experimento II. Modelo de dos cubos enterrados restringiendo los valores en la superficie y fondo del volumen estudiado.

Para reducir las heterogeneidades en la superficie de los modelos presentados en el Experimento I, donde ninguno de ellos permitió resolver dicha zona con precisión, restringimos los valores de la capa superficial de ambos modelos a través de las matrices de covarianza del modelo a priori C_{m_g} y C_{m_s} empleando los valores mostrados en la Tabla III. Esta condición tiene un sentido más realista, debido a que se puede interpretar como información observada sobre la superficie en el sitio de estudio, lo cual es generalmente posible.

Descripción de los modelos

En la Figura 104 mostramos los modelos obtenidos después de la inversión separada y conjunta con la condición impuesta sobre la superficie del modelo de densidad y lentitud. Observamos que la cima de los bloques es bien delimitada en ambos casos, como se esperaba, y continúa de esta manera en todo el proceso de inversión conjunta. En esta etapa, el modelo de densidad presenta mayor resolución en profundidad comparado con el modelo de inversión separada, asimismo el modelo de lentitud. Además, este último asigna valores más realistas en todo el volumen de los bloques. Debido a la capa superficial impuesta en ambos casos, el modelo de lentitud mejora notablemente su resolución comparado con el modelo de densidad, en el caso de inversión separada. En el proceso de inversión conjunta se observa la influencia de ambos conjuntos de datos para obtener características estructurales comunes.

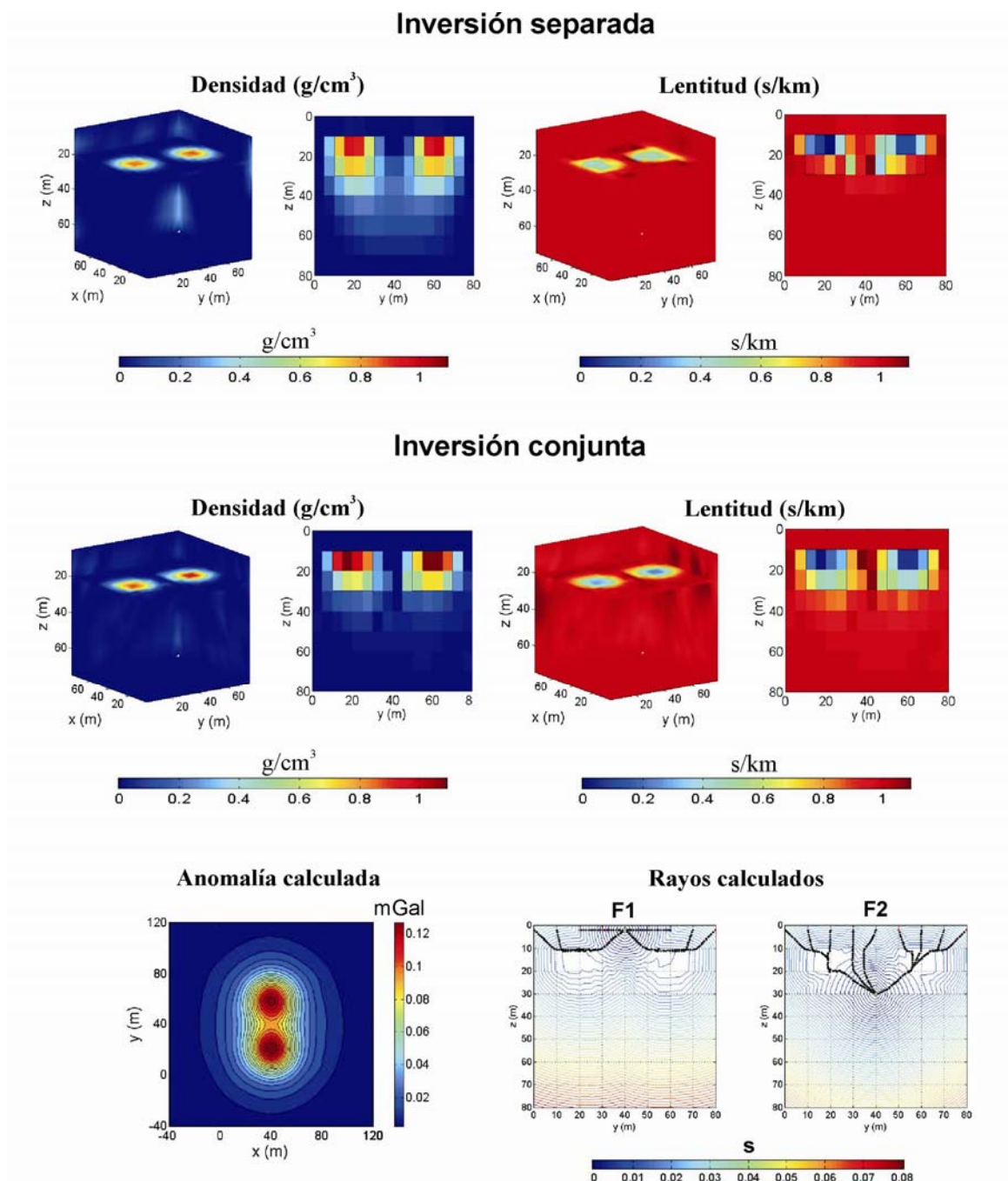


Figura 104. Modelos comparativos de densidad y lentitud de inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad, restringiendo los valores de la capa superficial de ambos modelos y en profundidad para el modelo de densidad. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición $x = 40$ m que atraviesa los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas. Se muestran, en la base de la figura, la anomalía gravimétrica calculada de los modelos de inversión conjunta así como los rayos del modelo de lentitud para ambas fuentes (F1 y F2), superpuestos a los tiempos de viaje calculados.

Ajuste a los datos

La respuesta gravimétrica y sísmica de los modelos de inversión conjunta se muestra en las anomalías calculadas de las Figuras 103 y 104. En este caso, se observan los rayos críticamente refractados (Figura 104) para la fuente 1, los cuales son ajustados en toda la capa superficial debido a la buena estimación de la cima de los bloques. La fuente 2 presenta mayores deformaciones en los rayos debido a pequeñas heterogeneidades alrededor de los bloques. Similarmente, mostramos en la Figura 105a los valores rms de los residuales gravimétricos y sísmicos donde los datos sísmicos muestran mayores cambios comparados con los datos gravimétricos. Aunque comenzamos el proceso de inversión conjunta con un modelo de lentitudes con insuficiente ajuste a los datos, la información proporcionada por el modelo de densidades, con un valor de $\text{rms}_g^k = 1.0$ para $k=1,\dots,8$ permite cambios en los modelos de lentitudes hasta obtener un valor de $\text{rms}_s = 7.4$ en la 8ª iteración. La convergencia mostrada en la Figura 105b indica que mientras el ajuste permanece constante en el caso gravimétrico, los modelos presentan algunos cambios, mientras que la convergencia de los modelos de lentitud no presenta cambios abruptos. Esta gráfica da evidencia del intercambio de información entre los modelos, el modelo sísmico en un principio, parece cambiar poco mientras que el gravimétrico presenta variaciones. En las etapas finales, el modelo gravimétrico tiende a permanecer más estable y permite al modelo sísmico algunas variaciones para asimilar rasgos del modelo gravimétrico (iteración 7). El intercambio de información estructural es notable desde la Figura 104 donde ambos modelos iniciales (de inversión separada para el caso gravimétrico) son modificados para alcanzar similitud estructural. Luego, La Figura 105c muestra dispersión en los valores de los parámetros pero con tendencia hacia los valores reales, la cual es claramente definida después del proceso de inversión conjunta, en la Figura 105d.

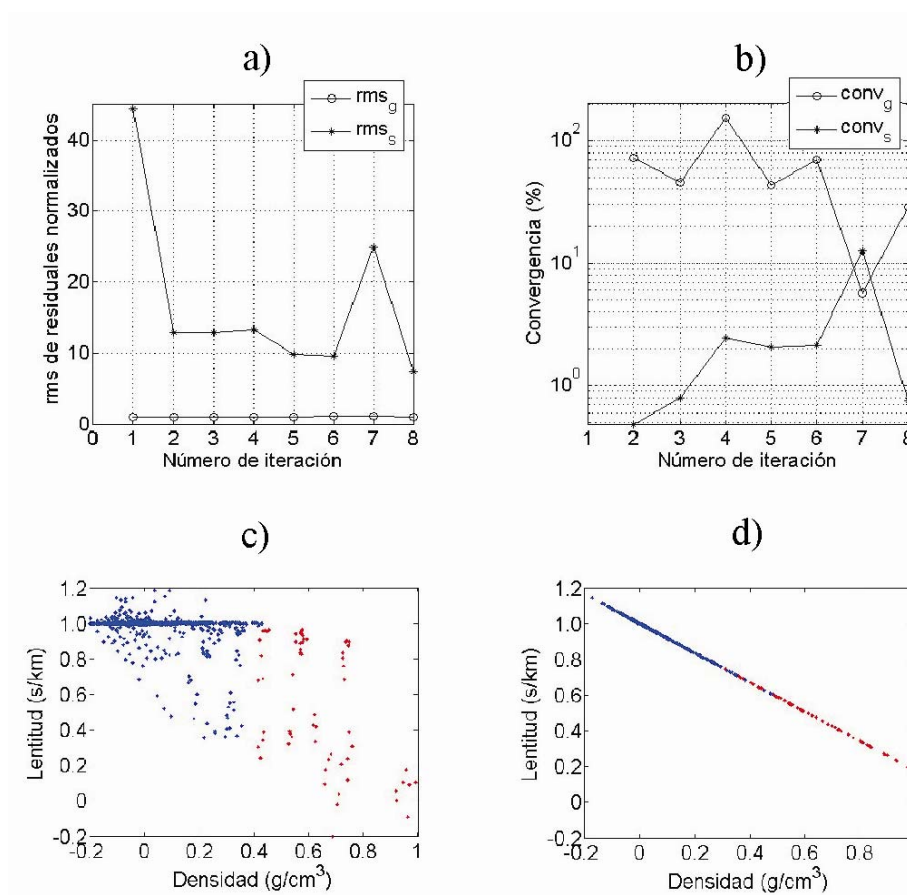


Figura 105. La Figura (a) muestra el ajuste de los datos gravimétricos - g - y sísmicos - s - y (b) la convergencia del proceso iterativo. Estos valores fueron calculados usando las expresiones (77)-(80). La correlación entre los parámetros de densidad y lentitud obtenidos después de inversión separada es mostrada en (c) y después de inversión conjunta en (d), para el Experimento II. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región de los cubos, mientras que los puntos azules corresponden a los valores del medio circundante.

VI. 2.3. Experimento III. Modelo de dos cubos enterrados restringiendo los valores en la superficie y el fondo, usando datos magnéticos y sísmicos.

Similarmente al experimento anterior, imponemos una losa en el fondo del modelo de magnetización y en la capa superficial de ambos modelos (magnetización y lentitud), con el propósito de eliminar estructura artificial en esta zona causada por la poca resolución de los datos. Las características de los modelos corresponden también a las usadas en el experimento anterior con valores de magnetización de 1 A/m y 0 A/m para los bloques y el medio

circundante, respectivamente. La Figura 106 muestra los resultados obtenidos de inversión separada y conjunta. De igual manera la Tabla III muestra los parámetros de control y factores de peso utilizados en este experimento, que en este caso coinciden con los establecidos en el Experimento II. Además, la orientación del campo inductor para los datos magnéticos se consideró como $D=0^\circ$ y $I=51^\circ$.

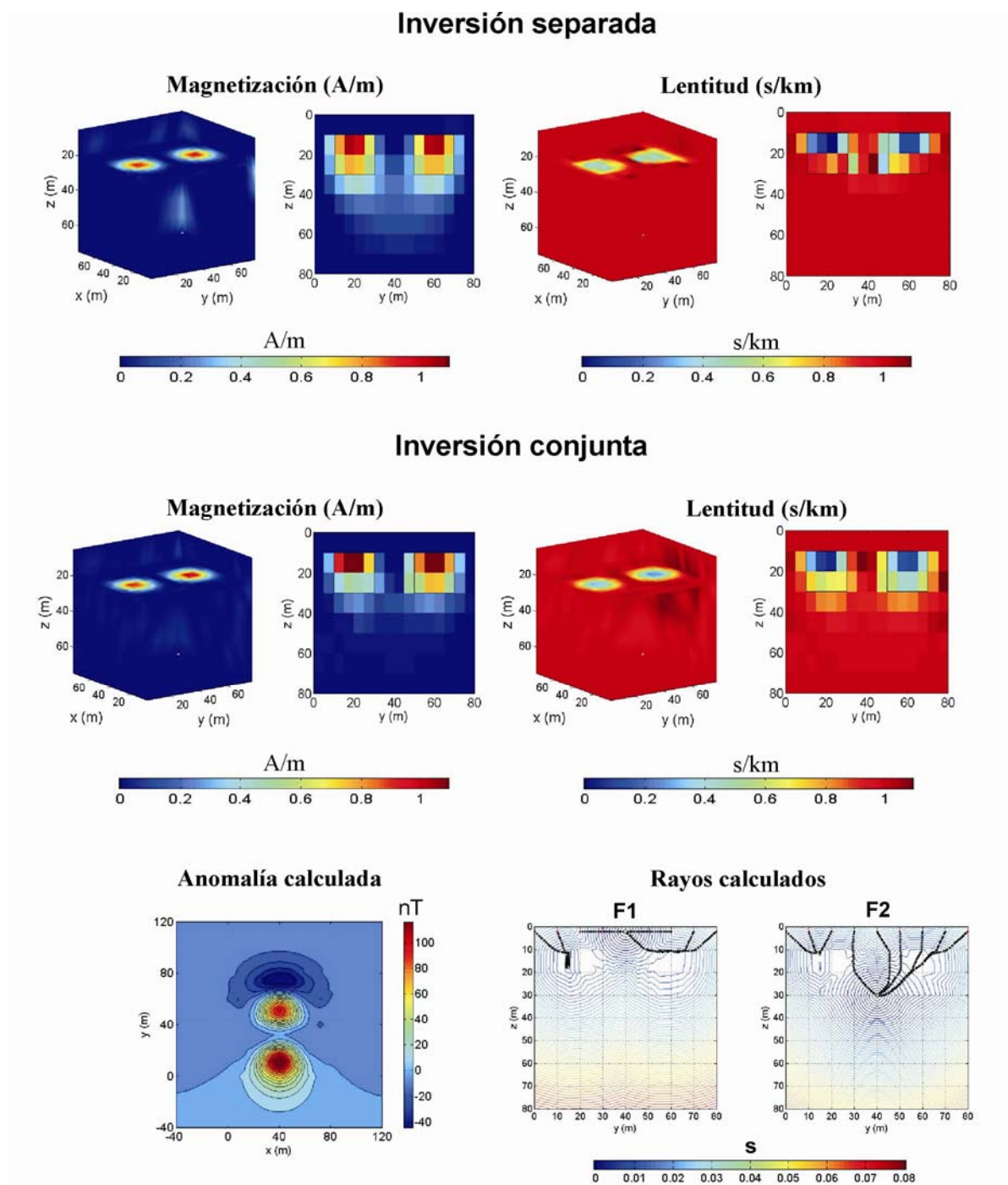


Figura 106. Modelos comparativos de magnetización y lentitud obtenidos de la inversión separada y conjunta para el experimento de dos bloques colocados a 10 m de profundidad, restringiendo sobre la capa superficial de ambos modelos y en profundidad para el modelo de magnetización. Los modelos 3D tienen asociada una sección 2D en la posición $x = 40$ m que atraviesa los bloques. La posición real de los bloques es delimitada por las líneas negras continuas. Se muestran, en la base de la figura, la anomalía magnética calculada de los modelos de inversión conjunta así como los rayos del modelo de lentitud para ambas fuentes (F1 y F2), superpuestos a los tiempos de viaje calculados.

Descripción de los modelos

A los resultados de este experimento se les puede dar una interpretación similar a la descrita en el Experimento II, en el sentido que la cima de los bloques es bien delimitada en ambos casos y la base queda mejor determinada en los modelos obtenidos después de inversión conjunta. Además, la inversión conjunta asigna valores más realistas en todo el volumen de los bloques y ambos modelos comparten características estructurales, a diferencia de la inversión conjunta de datos potenciales, donde en la mayoría de los casos los modelos gravimétricos eran influenciados por características estructurales de los modelos magnéticos. Ambos modelos adquieren rasgos afines que los hacen más cercanos a los modelos sintéticos reales.

Ajuste a los datos

La anomalía magnética calculada muestra un buen ajuste a los datos como se observa en la Figura 106, mientras que los datos sísmicos calculados (Experimento III, Figura 103) muestran diferencias significativas alrededor del bloque colocado en $10 \leq y \leq 30$ m. Los rayos de la Figura 106 muestran que éstos fueron mejor ajustados para la región $40 \leq y \leq 80$ m, mientras que para $0 \leq y \leq 40$ m las heterogeneidades en el modelo no permitieron buen ajuste de los datos y, aparentemente, se generaron alrededor de dichas heterogeneidades fuentes ficticias que describieron trayectorias de los rayos de estructuras inexistentes. Ambos modelos modifican su estructura durante el proceso de inversión conjunta para compensar el ajuste y la convergencia, como se muestra en las Figuras 107a y 107b. En éstas observamos que mientras el modelo de lentitudes adquiere pequeños cambios en su estructura, el ajuste de los datos diverge, debido a la existencia de alguna estructura anómala en el modelo que provoca que los rayos se desvíen como se muestra en la Figura 108 para el modelo de la 7ª iteración. Aún así, la información proporcionada por el modelo magnético permite reducir la singularidad y llevar al modelo de lentitudes a un mejor ajuste. El valor alcanzado en la 10ª iteración es $rms_s = 11.9$ y $rms_m = 1.0$ para los datos magnéticos. Sin embargo, los modelos magnéticos sufren mayores cambios en cada paso iterativo, tratando de acoplarse a las heterogeneidades propuestas por el modelo de lentitud. La correlación (Figuras 107c y 107d) se observa también con una perfecta distribución de los parámetros hacia sus valores reales en los modelos de inversión conjunta.

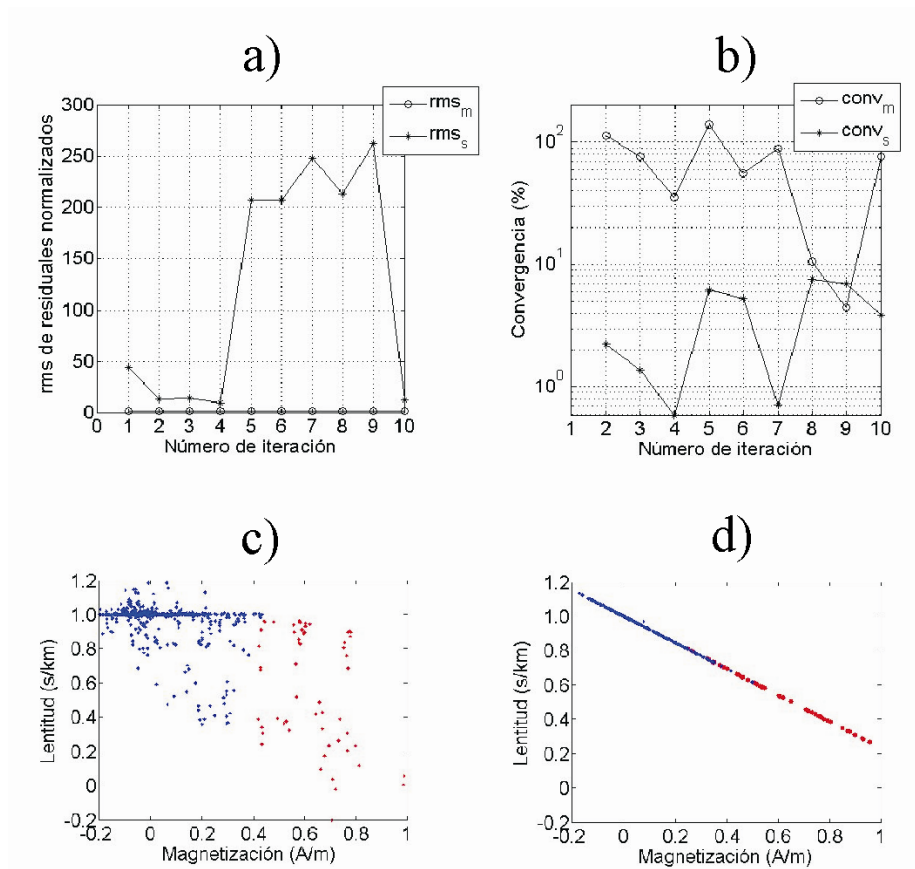


Figura 107. La Figura (a) muestra el ajuste de los datos magnéticos - m - y sísmicos - s - y (b) la convergencia del proceso iterativo. Estos valores fueron calculados usando las expresiones (77)-(80). La correlación entre los parámetros de magnetización y lentitud obtenidos después de inversión separada es mostrada en (c) y después de inversión conjunta en (d), para el Experimento III. Los puntos rojos muestran las estimaciones en la región de los cubos, mientras que los puntos azules corresponden a los valores del medio circundante.

La Figura 108 muestra la región que ocasiona el mayor desajuste de los datos sísmicos en todas las iteraciones del proceso de inversión conjunta. Como hemos mencionado, estos tiempos de arriba calculados corresponden al modelo de la 7ª iteración con valor del $rms_s = 248.56$.

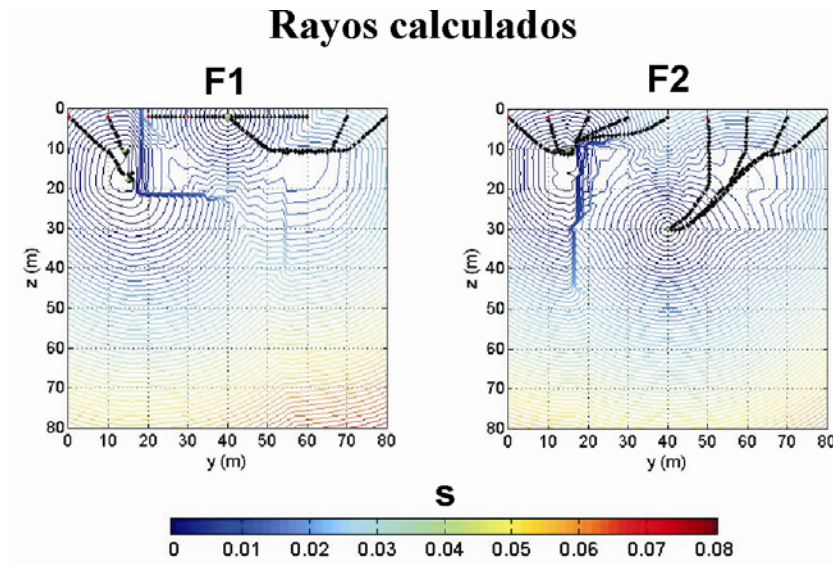


Figura 108. Secciones de los tiempos de arribo calculados y los rayos asociados en $x = 40$ m, para el modelo 3D de lentitudes obtenido en la 7ª iteración del proceso de inversión conjunta.

VI. 3. Discusión y Conclusiones

La búsqueda del modelo de lentitudes óptimo que se toma en cuenta en el proceso de inversión conjunta con datos potenciales, se realizó estableciendo un número de iteraciones fijo, en los experimentos realizados este valor fue de 5 y 6 iteraciones. Sin embargo, el proceso de búsqueda puede mejorarse llevando a cabo iteraciones de acuerdo al valor de rms, donde el modelo seleccionado para sismica corresponda con un valor del error adecuado que podría coincidir con el número de iteraciones establecido o bien ser mayor o menor a éste.

El nivel de corte λ_p seleccionado correspondió, en todos los experimentos realizados, con un valor cercano al doble del número de parámetros, debido a que se observó un comportamiento homogéneo en las curvas de valores singulares, esto es, sin caídas abruptas de dichos valores anteriores al valor seleccionado. Sin embargo, el análisis realizado en los experimentos de inversión conjunta con datos potenciales sugiere que es conveniente restringir el nivel de corte para que coincida con el número de parámetros y de esta manera favorecer la búsqueda de modelos que no admitan grandes cambios entre iteraciones consecutivas, satisfaciendo además el compromiso entre un mejor ajuste a los datos y modelos

estructuralmente similares. Con esta hipótesis, un valor adecuado para el nivel de corte en los experimentos anteriores será $\lambda_p \geq 1 \times 10^{-10}$.

La inclusión de datos sísmicos en la metodología de inversión conjunta permite aprovechar la ubicación de las fuentes sísmicas de tal manera que la base de las estructuras sea mayormente resaltada, o bien, observar las estructuras desde diferentes perspectivas con mayor resolución, por lo que la combinación de datos potenciales y sísmicos llega a ser un buen complemento para interpretar y analizar medios desde la superficie hasta zonas más profundas.

En los ejemplos sintéticos pudimos demostrar que aun cuando los datos potenciales pueden ser considerados en general de menor resolución que los sísmicos, éstos pueden ayudar a resolver aquellas estructuras de los modelos sísmicos que presentan una cobertura incompleta o deficiente. Más aún, cuando los datos potenciales fueron restringidos en otras áreas por los mismos datos sísmicos o simples hipótesis como aquellas de homogeneidad mostradas en los experimentos numéricos.

La restricción impuesta sobre la superficie de los modelos permitió eliminar rasgos estructurales ficticios en dicha región que eran justificados por los datos. Notamos que, similarmente a las restricciones impuestas en el fondo de los modelos, éste puede ser un recurso conveniente en el caso en que ambas técnicas geofísicas presenten problemas de resolución, como puede ser el caso de técnicas que utilicen bajas frecuencias como son los métodos electromagnéticos o resistividad eléctrica. Como las restricciones impuestas en el fondo de los modelos, las restricciones sobre la superficie son fácilmente incorporadas en el algoritmo de inversión. Sin embargo, para estas últimas, resulta más evidente y natural proponer una distribución de las propiedades físicas para pocos metros de profundidad.

La funcionalidad del algoritmo es demostrada a partir de los resultados obtenidos en los experimentos sintéticos, los cuales se mostraron satisfactorios. De esta manera, el programa está preparado para su futura aplicación en datos reales de primeros arribos de ondas P o S con potencial en estudios de tomografía de terremotos y experimentos de fuente controlada.

Capítulo VII

Conclusiones generales

Desarrollamos una metodología para invertir conjuntamente dos tipos de datos geofísicos asociados con modelos 3D, mediante una relación estructural analítica entre los parámetros físicos que toma en cuenta la dirección de los cambios de dichos parámetros para cada posición espacial, conocida como gradientes cruzados. La inversión conjunta de datos tridimensionales permitió obtener modelos realistas de la distribución de parámetros físicos en el subsuelo, con rasgos estructurales afines, así como analizar posibles causas de diferencias estructurales tales como efectos tridimensionales, errores numéricos o algún otro factor dentro la formulación, lo cual resulta difícil determinar en algoritmos de inversión basados en modelos bidimensionales. Observamos que, aun cuando la similitud estructural en modelos bidimensionales puede ser alcanzada por una metodología de inversión basada solamente en una de las componentes del vector de gradientes cruzados, estos modelos no necesariamente conducen a una interpretación realista del subsuelo. Para esto resultó necesaria la consideración de las tres componentes del vector de gradientes cruzados, las cuales describen la similitud estructural en las tres direcciones y con ello permiten delimitar estructuras tridimensionales con mayor detalle. El uso de estas tres componentes permitió, además de encontrar modelos estructuralmente compatibles en 3D, analizar las zonas de conflicto estructural y proponer metodologías de solución para mejorar nuestra interpretación de las características del subsuelo.

Aun cuando la filosofía de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados ha sido utilizada por diversos autores en diferentes tipos de datos geofísicos (Ej. Tryggvason y Linde, 2006; Linde et al., 2006), la metodología de inversión desarrollada en este trabajo es diferente ya que restringe la función de gradientes cruzados a ser igual a cero en lugar de minimizarla. En la mayoría de los experimentos realizados podemos decir que esta restricción fue asimilada por los modelos. En casos donde la distribución de los parámetros presentó mayores heterogeneidades estructurales tridimensionales que no fueron bien determinadas por los datos geofísicos, la metodología de inversión conjunta permitió recuperar gran parte de la estructura original de los modelos, obteniendo modelos con buen ajuste a los datos y similitud estructural, siendo ésta en

algunos casos dos órdenes de magnitud mayor que en los casos de modelos que presentaron pocas heterogeneidades. De esta manera, concluimos que el método propuesto puede funcionar aún en modelos con poca resolución que identifican características estructurales diferentes para cada parámetro estimado y en base al ajuste de los datos la condición de similitud estructural es asimilada en mayor o menor medida.

Un aspecto importante en el algoritmo de inversión en 3D resulta ser la eficiencia del algoritmo, para lo cual, reducir la cantidad de restricciones empleadas es importante. A través del análisis de valores singulares, fue posible demostrar que el uso de las tres componentes del vector de gradientes cruzados podría ser efectivamente reducido a por lo menos dos de ellas en todos los casos. Sin embargo, la selección de componentes específicas depende del sistema de coordenadas empleado y de la geometría de las estructuras en cada par de modelos en particular.

La formulación del problema de inversión conjunta basada en la solución generalizada de Tarantola y Valette (1982) permitió observar el problema y las variables involucradas desde una perspectiva estadística y al mismo tiempo desarrollar una metodología robusta en el sentido que admite, de una forma práctica, cualquier tipo de información a priori que implique relaciones entre los dos parámetros físicos involucrados o bien, información no geofísica como son los términos que regulan el nivel de suavidad o la resolución en alguna dirección específica. La formulación desarrollada proporciona un soporte sólido para la evaluación del modelo, ya que involucra relaciones funcionales lineales y no lineales entre datos y parámetros bajo un esquema estadístico.

Aunque la metodología de gradientes cruzados puede ser aplicada a cualquier conjunto de datos geofísicos sin restringir su aplicación a aquellos para los cuales existen relaciones analíticas o empíricas entre los parámetros, en este trabajo invertimos únicamente datos gravimétricos, magnéticos y de sísmica de refracción. La combinación de dos de estas metodologías geofísicas permitió reducir la falta de resolución inherente y específica en cada una de ellas. Para este fin, desarrollamos las metodologías de modelado directo 3D en cada caso. Las técnicas de modelado directo a partir del campo producido en superficie por un prisma rectangular con densidad y magnetización homogéneas, permitieron relaciones lineales entre la

propiedad física y el campo gravimétrico y magnético, respectivamente, para las cuales la matriz Jacobiana permanece constante y puede ser calculada de forma analítica. Esto contrasta con el uso de estructuras geométricas como poliedros o funciones analíticas de distribuciones de densidad y magnetización, que conllevan a soluciones numéricas o no lineales. Así, la rapidez de cálculo depende únicamente del número de observaciones y parámetros considerados para cada modelo, lo cual permitió el desarrollo de algoritmos eficientes en *Matlab*. Notamos que, en general, las anomalías gravimétricas y magnéticas son sensibles a diferentes aspectos de las estructuras individuales, por lo que la inclusión de ambas metodologías en el proceso de inversión conjunta permite complementar mutuamente información suficiente para determinar mejor la geometría de los cuerpos productores.

El modelado directo 3D de tiempos de arribo a partir de la ecuación eikonal llevó al desarrollo de una técnica de modelado sísmico basada en una relación no lineal entre la velocidad sísmica del modelo y los tiempos de arribo, lo que implica que la matriz Jacobiana debe ser actualizada para cada modelo en un proceso iterativo. El algoritmo numérico de solución implementado resultó eficiente y permitió una mayor precisión en el cálculo de tiempos de arribo a través de una mayor discretización de los modelos. Los tiempos de viaje así calculados permitieron el trazado de rayos de una forma simple y con éstos el cálculo de la matriz Jacobiana. Aunque el algoritmo de inversión puede resolver exitosamente difracciones y refracciones críticas, otro tipo de problemas inherentes a la metodología de sísmica de refracción tales como zonas de baja velocidad sísmica, zonas homogéneas o con contrastes negativos, no pueden ser resueltos por el algoritmo. Para esto, se debe poner especial atención a aspectos como el arreglo y posición de las fuentes sísmicas si se quiere delimitar efectivamente las estructuras de velocidad en las tres direcciones en el proceso de inversión. Una técnica que podría resolver este tipo de problemas son los métodos que involucran diferentes aspectos de la señal sísmica, como estudio de ondas reflejadas o amplitudes de las trazas sísmicas. Sin embargo, se requiere primeramente el desarrollo de la metodología de modelado directo en 3D, lo cual no es una tarea sencilla. Luego, en un segundo paso, se debe acoplar a nuestra formulación de inversión conjunta.

Después de haber calibrado el proceso de modelado directo de sísmica de refracción, implementamos la metodología de inversión conjunta con datos sísmicos y potenciales. Aquí resaltamos la importancia de que al menos una de las metodologías geofísicas involucradas, tenga suficiente resolución ya sea en profundidad, en superficie o lateralmente, con lo cual la metodología de inversión conjunta pueda complementar la información de los diferentes tipos de datos y de esta manera encontrar una estructura común que caracterice adecuadamente la distribución de ambas propiedades físicas. La ventaja de incorporar la técnica de fuente controlada (sísmica de refracción) es que permite diseñar arreglos de fuentes y receptores que enfoquen específicamente las regiones de interés y de esta manera favorecer las condiciones involucradas en el proceso de inversión conjunta.

El algoritmo computacional de inversión conjunta para las metodologías de modelado implementadas mostró eficiencia en modelos de mediana escala (con una discretización de alrededor de 2000 bloques para un procesador con 8GB de memoria RAM). En este algoritmo la descomposición en valores singulares (DVS) truncada resultó ser importante, porque además de eliminar la redundancia de las restricciones de gradientes cruzados 3D, también permitió la exploración de modelos 3D acoplados estructuralmente, lo cual reforzó nuestra selección de modelos geológicamente adecuados. Al mismo tiempo, fue un factor determinante para lograr un procedimiento de búsqueda de solución más estable. Aunque el número de parámetros es suficiente en algunos casos para obtener información del subsuelo, el uso de la DVS restringe el número de bloques o parámetros de inversión que pueden ser utilizados en problemas de mayor escala, por lo que es conveniente seguir explorando estrategias para reducir el número de restricciones del problema sobredeterminado de gradientes y reformular el problema de optimización de gradientes cruzados, a través de metodologías de solución iterativas para problemas de optimización restringida no lineal como son *gradientes conjugados*. Comparado con procedimientos individuales de inversión en 3D en sísmica o potenciales, con tiempo de cómputo de 1 minuto, el uso de la DVS en el proceso de inversión conjunta requirió un tiempo de cómputo de alrededor de 25 minutos en cada paso iterativo.

El proceso de búsqueda de la solución en inversión conjunta consistió primeramente de restringir el espacio de soluciones a modelos con similitud estructural. Una vez que esto fue

logrado, los demás elementos involucrados en la función objetivo (ajuste a los datos, suavidad y características del modelo a priori) fueron satisfechos de acuerdo a valores (pesos) establecidos por el usuario, tomando en cuenta el sentido geológico y geofísico de cada problema. Podemos decir que en general fueron satisfechas estas condiciones y que los pesos, aunque fueron seleccionados empíricamente, estuvieron restringidos a obtener modelos acorde a un conocimiento previo del sitio de estudio y, en casos extremos, a observaciones directas en la superficie. Cuando los modelos presentaron incompatibilidades que no permitían resolver simultáneamente la similitud estructural y el ajuste a los datos, recurrimos a la búsqueda del nivel de corte óptimo de la DVS, que en este caso realiza un papel de peso para restringir a un nivel específico la similitud estructural y dar prioridad a un mejor ajuste de los datos o al sentido geofísico. En los experimentos realizados, las diferencias en estructura encontradas en algunos ejemplos no dependieron del tipo de propiedad física ni tampoco de la técnica lineal o no lineal de modelado. Sin embargo, es posible que en modelos de alguna propiedad física para los cuales no se cumple la restricción gradientes cruzados, la similitud estructural dependa de la accesibilidad de los datos para la imposición de una dirección de cambio común en ambos modelos.

Resulta notable que la inversión separada de los datos gravimétricos presentó mayores problemas de resolución que su contraparte magnética, principalmente en profundidad, en aplicaciones a modelos sintéticos y de campo. Sin embargo, la falta de resolución fue resuelta con inversión conjunta incorporando datos magnéticos. Los resultados sugieren que los modelos invertidos conjuntamente muestran mejor definición de las características estructurales y, en combinación con términos de regularización convencionales, es posible eliminar la inherente falta de resolución en profundidad de datos gravimétricos y magnéticos. La resolución lateral alcanzada con datos potenciales también facilita la búsqueda de modelos con similitud geométrica lateral y la restricción de gradientes cruzados mejora algunos problemas de resolución en profundidad. En el caso con datos reales, el procedimiento además de caracterizar unidades sedimentarias similares, también desacopló dos unidades de basamento caracterizadas por diferente magnetización, sin variación significativa de la densidad, conservando aun así similitud estructural de acuerdo a la función de gradientes cruzados. Esto demuestra que la metodología de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados es robusta en su aplicación,

aún cuando un conjunto de datos permite identificar heterogeneidades dentro de lo que el otro conjunto de datos percibe como una sola unidad.

La metodología de inversión conjunta mediante gradientes cruzados permitió obtener, como se esperaba, modelos 3D estructuralmente similares con una magnitud variable de la similitud estructural para cada par de modelos 3D específicos. Esto redujo las ambigüedades presentadas en los modelos de parámetros físicos producidos por inversión de datos individuales, a través de la asimilación de estructuras mutuas que mejoran la ubicación, extensiones laterales y en profundidad de los parámetros, así como su forma y en general, sus características estructurales, contribuyendo así en la interpretación de las características físicas, geológicas y petrofísicas del subsuelo. Aunque existen muchas ventajas de tipo estructural al aplicar la formulación de gradientes cruzados, el valor numérico de los parámetros estimados no depende de la formulación, sino de la capacidad de resolución de los datos, por lo que resulta importante dejar abierta la posibilidad de incorporar información sensible a los mismos parámetros, ya sea geofísica, petrofísica u observaciones geológicas.

Trabajo futuro

Basados en los resultados de inversión de datos gravimétricos y magnéticos 3D obtenidos por diferentes autores (Ej. Li y Oldenburg 1996, 1998; Portniaguine y Zhdanov 1999, 2002) en experimentos de inversión separada, resulta conveniente explorar metodologías que determinen individualmente y con buena resolución las características estructurales de los parámetros físicos, con el propósito de acoplar los términos involucrados a la formulación de inversión conjunta 3D con gradientes cruzados y mejorar aún más los resultados de inversión conjunta con datos potenciales. Aunque esto podría resultar una tarea fácil, encontrar una forma práctica de incorporar los factores involucrados, reduciendo el número de valores de peso requeridos, podría significar un reto mayor.

Los resultados de inversión conjunta que incluyen datos sísmicos en experimentos sintéticos muestran la validez del algoritmo, por lo que es de esperar que al aplicar la metodología a datos de campo, ésta proporcionará información relevante para obtener una mejor interpretación de las características del subsuelo en medios heterogéneos 3D. Este mismo

objetivo se puede lograr combinando diferentes tipos de datos como son: datos geofísicos (resistividad eléctrica), geohidrológicos o petrofísicos.

Aun cuando la validez de la solución de nuestra formulación fue demostrada a través de análisis básico de valores singulares y comparaciones con experimentos sintéticos conocidos, es conveniente obtener información más rigurosa para este fin que nos permita conocer de antemano la resolución de los parámetros del modelo, como son las *matrices de covarianza o de resolución*. Aunque para problemas de inversión separada estos entes matemáticos pueden ser calculados, en problemas de inversión conjunta no han sido reportados. De igual manera sucede con la curva que proporciona un valor óptimo del parámetro de regularización, conocida como *curva L*, la cual sería útil determinar de forma equivalente en problemas de inversión conjunta.

Dadas las ventajas que presenta la metodología de inversión conjunta mediante gradientes cruzados en modelos 3D, que hemos descrito en este trabajo, resulta conveniente extender la función de gradientes cruzados tal que permita invertir simultáneamente más de dos conjuntos de datos.

Referencias

Afnimar y K. Koketsu. 2000. Finite difference travelttime calculation for head waves travelling along an irregular interface. *Geophysical Journal International*. 143: 729-734 p.

Afnimar, K. Koketsu y K. Nakagawa. 2002. Joint inversion of refraction and gravity data for the three-dimensional topography of a sediment-basement interface. *Geophysical Journal International*. 151: 243-254 p.

Aguero-Madero, G. A. 1986. Características estructurales de la Bahía Todos Santos y áreas costeras adyacentes. Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma de Baja California. Ensenada, B. C., México. 40 p.

Aster, R. C., B. Borchers, y C. H. Thurber. 2005. Parameter estimation and inverse problems. Elsevier Academic Press. Primera edición. Amsterdam. 301 p.

Banerjee, B. y S. P. D. Gupta. 1977. Gravitational attraction of a rectangular parallelepiped. *Geophysics*. 42(5): 1053-1055 p.

Bedrosian, P. A. 2006. MT⁺, Integrating magnetotellurics to determine earth structure, composition, and processes. En: 18th IAGA WG 1.2 Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth. El Vendrell, España, Septiembre 17-23.

Birch, F. 1961(a). Composition of the Earth's mantle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. 4: 295-311 p.

Birch, F. 1961(b), The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars, Part 2. *Journal of Geophysical Research*. 66: 2199-2224 p.

Blakely, R. J. 1996. Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press. Primera edición. Cambridge. 441 p.

Bosch, M. 1999. Lithologic tomography: From plural geophysical data to lithology estimation. *Journal of Geophysical Research*. 104: 749-766 p.

Bosch, M. y J. McGaughey. 2001. Joint inversion of gravity and magnetic data under lithologic constraints. *The Leading Edge*. 877-881 p.

Červený, V., I. A. Molotkov, I. Pšenčík. 1977. Ray method in Seismology. Univerzita Karlova Praha. 214 p.

Colombo, D. y M. De Stefano. 2007. Geophysical modeling via simultaneous joint inversion of seismic, gravity, and electromagnetic data: Application to prestack depth imaging. *The Leading Edge*. 326-331 p.

Consejo de Recursos Naturales No Renovables. 1962. Aeromagnetic data base from Continental México. Actualmente: Consejo de Recursos Minerales de México.

Constable, S. C., R. L. Parker y C. G. Constable. 1987. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*. 52: 289-300 p.

Cruz-Falcón, A. 1986. Gravimetría de la cuenca del arroyo San Carlos, Ensenada, B. C. Tesis de maestría. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México. 82 p.

deGroot-Hedlin, C. y S. Constable. 1990. Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *Geophysics*. 55: 1613-1624 p.

Dobrin, M. B. y C. H. Savit. 1988. *Introduction to Geophysical Prospecting*. McGraw-Hill. Cuarta edición. New York. 867 p.

Farquharson, C. G. 2008. Constructing piecewise-constant models in multidimensional minimum-structure inversions. *Geophysics*. 73: K1-K9 p.

Farquharson, C. G. y D. W. Oldenburg. 1998. Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure. *Geophysical Journal International*. 134: 213-227 p.

Fowler, C. M. R., 1994, *The Solid Earth. An introduction of Global Geophysics*: Cambridge University Press. Primera edición. Cambridge. 472 p.

Fregoso, E. y L. A. Gallardo. 2009. Cross-gradients joint 3D inversion with applications to gravity and magnetic data. *Geophysics*. 74 (4): L31-L42 p.

Gallardo, L. A. 2007. Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging. *Geophysical Research Letters*. 34: L19301. doi: 10.1029/2007GL030409.

Gallardo, L. A. y M. A. Meju. 2003. Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data. *Geophysical Research Letters*. 30(13): 1658. doi: 10.1029/2003GL017370.

Gallardo, L. A. y M. A. Meju. 2004. Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *Journal of Geophysical Research*. 109: B03311. doi: 10.1029/2003JB002716.

Gallardo, L. A., M. A. Meju, y M. A. Perez-Flores. 2005. A quadratic programming approach for joint image reconstruction: mathematical and geophysical examples. *Inverse Problems*. 21: 435-452 p.

Gallardo-Delgado, L. A. 1997. Inversión 3D de datos gravimétricos y magnéticos aplicando condiciones de acotamiento y suavidad: Tesis de Maestría en Ciencias. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. Ensenada, Baja California, México. 131 p.

Gallardo-Delgado, L. A., M. A. Pérez-Flores, y E. Gómez-Treviño. 2003. A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data. *Geophysics*. 68: 949-959 p.

García-Abdeslem, J. 2008. 3D forward and inverse modeling of total-field magnetic anomalies caused by a uniformly magnetized layer defined by a linear combination of 2D Gaussian functions. *Geophysics*. 73(1): L11-L18 p.

Gardner, G.H.F., L.W. Gardner y A. R. Gregory. 1974. Formation velocity and density – the diagnostic basics for stratigraphic traps. *Geophysics*. 39: 770-780 p.

Glasko, V. B. 1988. Inverse problems of mathematical physics. American Institute of Physics. Primera edición. New York. 258 p.

González-Fernández, A., B. Martín-Atienza y S. Paz-López. 2000. Identificación de fallamiento en la península de Punta Banda, B. C., a partir de datos de topografía, magnetometría y gravimetría. *GEOS*. 20: 98-106 p.

González-Serrano, A. 1977. Anomalías gravimétricas y magnéticas de la Bahía de Todos los Santos. Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma de Baja California. Ensenada, B. C. México. 52 p.

Grant, F. S. y G. F. West. 1965. Interpretation theory in applied geophysics. McGraw-Hill. Primera edición. New York. 584 p.

Haber, E. y D. Oldenburg. 1997. Joint inversion: a structural approach: *Inverse Problems*. 13: 63-77 p.

Hernández-Jaime, J. G. 2001. Tomografía sísmica sin trazado de rayos utilizando series de potencias. Tesis de maestría. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. Ensenada, B. C. México. 96 p.

Hole, J. A. y B. C. Zelt. 1995. 3-D finite-difference reflection traveltimes. *Geophysical Journal International*. 121: 427-434 p.

Infante, V., L. A. Gallardo, J. C. Montalvo-Arrieta y I. Navarro de León. 2009. Lithological classification assisted by the joint inversion of electrical and seismic data at a control site in northeast Mexico. *Artículo en prensa en: Journal of Applied Geophysics*.

Inman, J. R., J. Ryu, y S. H. Ward. 1973. Resistivity inversion. *Geophysics*. 38: 1088-1108 p.

Kowalsky, M. B., J. Chen y S. S. Hubbard. 2006. Joint inversion of Geophysical and hydrological data for improved subsurface characterization. *The Leading Edge*. 25(6): 730-734 p.

Last, B. J. y K. Kubik. 1983. Compact gravity inversion. *Geophysics*. 48: 713-721 p.

Lanczos, C. 1996. *Linear Differential Operators*. SIAM. United States of America. 564 p.

Lay, T., y T. C. Wallace. 1995. *Modern Global Seismology*: Academic Press. Primera edición. San Diego, California. 521 p.

Li, Y. y D. W. Oldenburg. 1996. 3-D inversion of magnetic data. *Geophysics*. 61: 394-408 p.

Li, Y. y D. W. Oldenburg. 1998. 3-D inversion of gravity data. *Geophysics*. 63: 109-119 p.

Linde, N., A. Binley, A. Tryggvason, L. B. Pedersen, y A. Revil. 2006. Improved hydrogeophysical characterization using joint inversion of crosshole electrical resistance and ground penetrating traveltime data. *Water Resources Research*. 42: W12404. doi: 12410.11029/12006WR005131.

Linde, N., A. Tryggvason, J. E. Peterson y S. S. Hubbard. 2008. Joint inversion of crosshole radar and seismic traveltimes acquired at the South Oyster Bacterial Transport Site. *Geophysics*. 73: G29-G37 p.

Lines, L.R., A. K. Schultz y S. Treitel. 1988. Cooperative inversion of geophysical data. *Geophysics*. 53: 8-20 p.

Lines, L.R., y S. Treitel. 1984. Tutorial: A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems. *Geophysical Prospecting*. 32: 159-186 p.

Marquardt, D.W. 1970. Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation. *Technometrics*. 12: 591-612 p.

Matsuoka, T. y T. Ezaka. 1992. Ray tracing using reciprocity. *Geophysics*. 57(2): 326-333 p.

Meju, M. A. 1994. *Geophysical data analysis: understanding inverse problem theory and practice*. Course Notes Series. Tulsa, OK. Society of Exploration Geophysicists. S. N. Domenico, Editor. 296 p.

Meju, M. A. y V. Sakkas. 2007. Heterogeneous crust and upper mantle across southern Kenya and the relationship to surface deformation as inferred from magnetotelluric imaging. *Journal of Geophysical Research*. 112: B04103.

Menke, W. 1989. *Geophysical data analysis: discrete inverse theory*. Academic Press. Primera edición. San Diego. 289 p.

Monteiro Santos, F. A., S. A. Sultan, P. Represas y A. L. El Sorady. 2006. Joint inversion of gravity and geoelectrical data for groundwater and structural investigation: application to the northwestern part of Sinai, Egypt. *Geophysical Journal International*. 165: 705-718 p.

Muñoz, G. y V. Rath. 2006. Beyond smooth inversion: the use of nullspace projection for the exploration of non-uniqueness in MT. *Geophysical Journal International*. 164: 301-311 p.

Musil, M., H. R. Maurer y A. G. Green. 2003. Discrete tomography and joint inversion for loosely connected or unconnected physical properties: application to crosshole seismic and georadar data sets. *Geophysical Journal International*. 153: 389-402 p.

Nielsen, L. y B. H. Jacobsen. 2000. Integrated gravity and wide-angle seismic inversion for two-dimensional crustal modeling. *Geophysical Journal International*. 140: 222-232 p.

Oldenburg, D. W. 1974. The inversion and interpretation of gravity anomalies. *Geophysics*. 39: 526-536 p.

Oristaglio, M. L. y M. H. Worthington. 1980. Inversion of surface and borehole electromagnetic data for two-dimensional electrical conductivity models. *Geophysical Prospecting*. 28: 633-657 p.

Paasche, H. y Tronicke. 2007. Cooperative inversion of 2D geophysical data sets: A zonal approach based on fuzzy c-means cluster analysis. *Geophysics*. 72: A35-A39 p.

Pérez-Flores M. A., F. Suárez-Vidal, L. A. Gallardo-Delgado, A. González-Fernández, and R. Vázquez. 2004. Structural pattern of the Todos Santos Coastal Plain, based on geophysical data. *Ciencias Marinas*. 30: 349-364 p.

Pilkington, M. 2006. Joint inversion of gravity and magnetic data for two-layer models. *Geophysics*. 71(3): L35-L42 p.

Portniaguine, O. y M. S. Zhdanov. 1999. Focusing geophysical inversion images. *Geophysics*. 64: 874-887 p.

Portniaguine, O. y M. S. Zhdanov. 2002. 3-D magnetic inversion with data compression and image focusing. *Geophysics*. 67: 1532-1541 p.

Qin, F., Y. Luo, K. B. Olsen, W. Cai y G. T. Schuster. 1992. Finite-difference solution of the eikonal equation along expanding wavefronts. *Geophysics*. 57: 478-487 p.

Saunders, J. H., J. V. Herwanger, C. C. Pain, M. H. Worthington y C. R. E. de Oliveira. 2005. Constrained resistivity inversion using seismic data. *Geophysical Journal International*. 160: 785-796 p.

Sharma, P. V. 2004. *Environmental and Engineering Geophysics*. Cambridge University Press. Primera edición. Cambridge. 475 p.

Skeels, D. C., 1947. Ambiguity in gravity interpretation. *Geophysics*. 12: 43-56 p.

Strang, G. 1986. *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana. Segunda edición. 453 p.

Tarantola, A., y B. Valette. 1982. Generalized Non-Linear Inverse Problems Solved Using The Least- Squares Criterion. *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 20: 219-232 p.

Tarbuck, E. J., y F. K. Lutgens. 2004. Ciencias de la Tierra una introducción a la Geología Física. Pearson Prentice Hall. Sexta edición. 540 p.

Telford, W. M., L. P. Geldart, R. E. Sheriff, y D. A. Keys. 1976. Applied Geophysics. Cambridge University Press. Primera edición. Cambridge. 860 p.

Tryggvason, A. y N. Linde. 2006. Local earthquake (LE) tomography with joint inversion for P- and S-wave velocities using structural constraints. Geophysical Research Letters. 33: L07303. doi:10.1029/2005GL025485.

Vázquez, G. R. 1980. Estudio de métodos potenciales con aplicación a geohidrología del valle de Maneadero, B. C. Tesis de maestría. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. Ensenada, B. C., México. 108 p.

Vidale, J. 1988. Finite-difference calculation of travel times. Bulletin of the Seismological Society of America. 78: 2062-2076 p.

Vidale, J. E. 1990. Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions. Geophysics. 55: 521-526 p.

Zeyen, H. y J. Pous. 1991. A new 3-D inversion algorithm for magnetic total field anomalies. Geophysical Journal International. 104: 583-591 p.

Zhang, J. y F. D. Morgan. 1997. Joint seismic and electrical tomography. Annual Symposium: Environmental & Engineering Geophysical Society (SAGEEP). Expanded Abstract. 391-395 p.

Apéndice A

Formulación matemática para la solución del problema de inversión conjunta 3D mediante gradientes cruzados

Con el propósito de demostrar las ecuaciones (34) y (35), comenzamos definiendo la matriz de derivadas parciales que aparece en (24) a partir del sistema de ecuaciones homogéneo (29) obteniendo

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cccc|cc} \mathbf{I}_{d1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{d2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{L1} & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{L2} & \mathbf{0} & -\mathbf{D}_2 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{1x} & -\mathbf{B}_{2x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{1y} & -\mathbf{B}_{2y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{1z} & -\mathbf{B}_{2z} \end{array} \right], \quad (\text{A-1})$$

donde las derivadas son calculadas con respecto a las variables aleatorias en $\mathbf{x}$. Las matrices involucradas en (A-1) son definidas como

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_1^{ij} = \partial f_1^i / \partial m_1^j, & i = 1, \dots, md_1; j = 1, \dots, n \\ A_2^{rj} = \partial f_2^r / \partial m_2^j, & r = 1, \dots, md_2; j = 1, \dots, n \\ D_1^{sj} = \partial (\mathbf{D}m_1)^s / \partial m_1^j, & s = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \\ D_2^{pl} = \partial (\mathbf{D}m_2)^p / \partial m_2^l, & p = 1, \dots, n; l = 1, \dots, n \\ \mathbf{I}_{d1} = \mathbf{I}_{md_1 \times md_1}, \\ \mathbf{I}_{d2} = \mathbf{I}_{md_2 \times md_2}, \\ \mathbf{I}_{L1} = \mathbf{I}_{n \times n}, \\ \mathbf{I}_{L2} = \mathbf{I}_{n \times n}, \end{array} \right. ,$$

mientras que $\mathbf{B}_{1x}$, $\mathbf{B}_{1y}$, $\mathbf{B}_{1z}$, $\mathbf{B}_{2x}$, $\mathbf{B}_{2y}$, $\mathbf{B}_{2z}$ son definidas como $B_{1x}^{qj} = \partial t_x^q / \partial m_1^j$, $q = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$. Para estas matrices, md_1 y md_2 es el número de datos observados

asociados al modelo $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$, respectivamente, mientras que n es el número de parámetros del modelo.

La matriz $\mathbf{F}$ puede ser particionada en sub matrices como se indica. Llamamos $\mathbf{I}$ al bloque de matrices identidad, $\mathbf{O}$ a las matrices nulas del bloque inferior izquierdo y $\mathbf{G}$ a la matriz definida como

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A-2})$$

Podemos observar que $\mathbf{G}$ contiene a las matrices de sensibilidad para ambos modelos, así como

matrices de derivadas del operador de suavidad o Laplaciano. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1x} & \mathbf{B}_{2x} \\ \mathbf{B}_{1y} & \mathbf{B}_{2y} \\ \mathbf{B}_{1z} & \mathbf{B}_{2z} \end{bmatrix}$ es una matriz que

contiene las derivadas de la función vectorial de gradientes cruzados ($\mathbf{t}$) con respecto a ambos parámetros del modelo.

Para encontrar la expresión correspondiente a la ecuación (23), dividimos esta ecuación en los siguientes tres elementos

- i) $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}),$
- ii) $\mathbf{C}_0 \mathbf{F}^T$ y
- iii) $\mathbf{F} \mathbf{C}_0 \mathbf{F}^T.$

- i) Para nuestra aplicación

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 - \mathbf{d}_1^{\text{obs}} \\ \hat{\mathbf{d}}_2 - \mathbf{d}_2^{\text{obs}} \\ \hat{\mathbf{L}}_1 - \mathbf{L}_1^{\text{apr}} \\ \hat{\mathbf{L}}_2 - \mathbf{L}_2^{\text{apr}} \\ \hat{\mathbf{m}}_1 - \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \hat{\mathbf{m}}_2 - \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{m}}_1) \\ \hat{\mathbf{d}}_2 - \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{m}}_2) \\ \hat{\mathbf{L}}_1 - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_1 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_2 \\ -\mathbf{t}(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{\text{obs}} - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{m}}_1) + \mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{m}}_1 - \mathbf{m}_1^{\text{apr}}) \\ \mathbf{d}_2^{\text{obs}} - \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{m}}_2) + \mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{m}}_2 - \mathbf{m}_2^{\text{apr}}) \\ \mathbf{L}_1^{\text{apr}} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_1 + \mathbf{D}_1(\hat{\mathbf{m}}_1 - \mathbf{m}_1^{\text{apr}}) \\ \mathbf{L}_2^{\text{apr}} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{m}}_2 + \mathbf{D}_2(\hat{\mathbf{m}}_2 - \mathbf{m}_2^{\text{apr}}) \\ -\mathbf{t}(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2) + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{m}}_1 - \mathbf{m}_1^{\text{apr}} \\ \hat{\mathbf{m}}_2 - \mathbf{m}_2^{\text{apr}} \end{pmatrix} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A-3}$$

En notación compacta

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = - \begin{bmatrix} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \\ (\mathbf{0} - \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \end{bmatrix}. \tag{A-4}$$

- ii) Para encontrar una expresión para $\mathbf{C}_0 \mathbf{F}^T$, sustituimos $\mathbf{C}_0$ de la ecuación (27) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_0 \mathbf{F}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_1} & & & & & \\ & \mathbf{C}_{d_2} & & & & \\ & & \mathbf{C}_{L_1} & & & \\ & & & \mathbf{C}_{L_2} & & \\ \hline & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{C}_{m_1} \\ & & & & & & \mathbf{C}_{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{d_0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{m_0} \mathbf{G}^T & -\mathbf{C}_{m_0} \mathbf{B}^T \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A-5}$$

- iii) Resolviendo $\mathbf{F} \mathbf{C}_0 \mathbf{F}^T$ para nuestra formulación particular

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\mathbf{C}_0\mathbf{F}^T &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{B} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{d_1} & & \\ & \mathbf{C}_{d_2} & \\ & & \mathbf{C}_{L_1} \end{array} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \begin{array}{cc} \mathbf{C}_{m_1} & \\ & \mathbf{C}_{m_2} \end{array} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \hline -\mathbf{G}^T & -\mathbf{B}^T \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{B} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_{d_0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & -\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & \mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \end{array} \right].
\end{aligned} \tag{A-6}$$

Luego,

$$\left(\mathbf{F}\mathbf{C}_0\mathbf{F}^T \right)^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & \mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \end{array} \right]^{-1}. \tag{A-7}$$

Las identidades (A-4), (A-5) y (A-7) son sustituidas en la ecuación (23) para obtener una expresión para los parámetros estimados $\hat{\mathbf{d}}$ y $\hat{\mathbf{m}}$ dados por:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}} \\ \hat{\mathbf{m}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{d_0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T & \mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T \end{array} \right]^{-1} \\
&\quad \begin{bmatrix} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \\ (\mathbf{0} - \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A-8}$$

Re escribimos esta expresión como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}} \\ \hat{\mathbf{m}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{d_0}\mathbf{H}_1 & -\mathbf{C}_{d_0}\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T\mathbf{H}_1 + \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T\mathbf{H}_3 & \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T\mathbf{H}_2 + \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T\mathbf{H}_4 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \\ (\mathbf{0} - \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{d_0}\mathbf{H}_1[(\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0)] \\ -\mathbf{C}_{d_0}\mathbf{H}_2[(\mathbf{0} - \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0)] \\ [\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T\mathbf{H}_1 + \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T\mathbf{H}_3][(\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_D(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0)] \\ + [\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T\mathbf{H}_2 + \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T\mathbf{H}_4][(\mathbf{0} - \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0)] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(A-9)

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 &= (\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1} + (\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) \\
 &\quad \left((\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) - (\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)(\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) \right)^{-1} \\
 &\quad (\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)(\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}, \\
 \mathbf{H}_2 &= -(\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) \\
 &\quad \left((\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) - (\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)(\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) \right)^{-1}, \\
 \mathbf{H}_3 &= -\left((\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) - (\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)(\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) \right)^{-1} \\
 &\quad (\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)(\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}, \\
 \mathbf{H}_4 &= \left((\mathbf{B} \ \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) - (\mathbf{B}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)(\mathbf{C}_{d_0} + \mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T)^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T) \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

(A-10)

Los parámetros estimados de interés a partir de (A-9) son

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{m}} &= \mathbf{m}_0 + [\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T\mathbf{H}_1 + \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T\mathbf{H}_3][(\mathbf{d}_0 - \mathbf{g}_d(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0)] \\
 &\quad + [\mathbf{C}_{m_0}\mathbf{G}^T\mathbf{H}_2 + \mathbf{C}_{m_0}\mathbf{B}^T\mathbf{H}_4][(\mathbf{0} - \mathbf{g}_m(\hat{\mathbf{m}})) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0)].
 \end{aligned}$$

(A-11)

Luego, sustituyendo (A-10) en (A-11) y aplicando A20 a A22 de Tarantola y Valette (1982), obtenemos las expresiones (34) y (35).

Apéndice B

Ecuación de la atracción gravitacional de un prisma rectangular

Siguiendo el desarrollo presentado en Gallardo-Delgado (1997), supongamos que (x_0, y_0, z_0) es un punto de evaluación cualquiera y tomando un elemento diferencial en (x', y', z') , el campo gravitacional de un prisma recto con densidad constante es de la forma

$$g_z(x_0, y_0, z_0) = \gamma \rho \int_{x'_1 - x_0}^{x'_2 - x_0} \int_{y'_1 - y_0}^{y'_2 - y_0} \int_{z'_1 - z_0}^{z'_2 - z_0} \frac{(z' - z_0) dx' dy' dz'}{\left((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2\right)^{3/2}}. \quad (\text{B-1})$$

Para simplificar los cálculos se traslada el origen al punto de evaluación, que de acuerdo a la Figura 23 esto se logra haciendo:

$$\begin{aligned} x &= x' - x_0, \quad y = y' - y_0, \quad z = z' - z_0, \\ r &= \sqrt{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2}. \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

De esta manera, (B-1) se transforma en

$$g_z(0,0,0) = \gamma \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{r^3} dz dy dx. \quad (\text{B-3})$$

Integramos sobre z , usando la fórmula de integración $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, y renombramos los límites de integración como X, Y y Z , obteniendo

$$g_z(0,0,0) = -\gamma \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy dx}{r} \Big|_z. \quad (\text{B-4})$$

La integral de (B-4) con respecto a y se obtiene considerando la fórmula de integración

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C, \quad (\text{B-5})$$

donde u es una función de valor real y a es una constante. De esta manera, (B-4) toma la forma de

$$g_z(0,0,0) = -\gamma\rho \int_{x_1}^{x_2} \ln(y+r) dx \Big|_z \Big|_y. \quad (\text{B-6})$$

Para resolver la integral con respecto a x integramos por partes, haciendo

$$\begin{aligned} u &= \ln(y+r), \quad dv = dx \\ du &= \frac{x dx}{r(y+r)}, \quad v = x. \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

De esta manera, (B-6) se ve como

$$g_z(0,0,0) = -\gamma\rho \left\{ x \ln(y+r) - \int_X \frac{x^2 dx}{r(y+r)} \right\} \Big|_z \Big|_y. \quad (\text{B-8})$$

Para resolver la integral en (B-8) llevamos a cabo los pasos siguientes:

$$\int_X \frac{x^2 dx}{r(y+r)} = \int_X \frac{x^2(r-y)}{r(r^2-y^2)} dx = \int_X \frac{x^2 dx}{(r^2-y^2)} - \int_X \frac{yx^2 dx}{r(r^2-y^2)} = \int_X \frac{x^2 dx}{x^2+z^2} - y \int_X \frac{x^2 dx}{r(r^2-y^2)}. \quad (\text{B-9})$$

Donde $\int_X \frac{x^2 dx}{x^2+z^2} = \left(x - z \tan^{-1} \frac{x}{z} \right) \Big|_z \Big|_x = 0$ para los límites de evaluación sobre y . Así,

$$\begin{aligned} \int_X \frac{x^2 dx}{r(y+r)} &= -y \int_X \frac{x^2 dx}{r(r^2-y^2)} \\ &= -y \int_X \frac{(x^2+z^2) - z^2}{r(x^2+z^2)} dx \\ &= -y \int_X \frac{dx}{r} + yz^2 \int_X \frac{dx}{r(x^2+z^2)} \\ &= -y \ln(x+r) + yz^2 \int_X \frac{dx}{r(x^2+z^2)}. \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

Ahora, para resolver la integral en (B-10) se realiza la siguiente sustitución:
 $x = \sqrt{y^2 + z^2} \tan \theta$, $dx = \sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta$. Así, la última integral en (B-10) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{X r(x^2 + z^2)} &= \int \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{\theta [(y^2 + z^2) \tan^2 \theta + y^2 + z^2]^{1/2} [(y^2 + z^2) \tan^2 \theta + z^2]} \\
 &= \int \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{\theta [y^2 (1 + \tan^2 \theta) + z^2 (1 + \tan^2 \theta)]^{1/2} [y^2 \tan^2 \theta + z^2 (1 + \tan^2 \theta)]} \\
 &= \int \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{\theta [y^2 \sec^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta]^{1/2} [y^2 \tan^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta]} \\
 &= \int \frac{\sqrt{y^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta}{\theta [(y^2 + z^2) \sec^2 \theta]^{1/2} [y^2 \tan^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta]} = \int \frac{\sec \theta d\theta}{\theta y^2 \tan^2 \theta + z^2 \sec^2 \theta} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\theta y^2 \sec^2 \theta + z^2}.
 \end{aligned} \tag{B-11}$$

Para resolver la última integral en (B-11), recurrimos a la fórmula de integración

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C. \text{ De esta manera,}$$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{\theta y^2 \sec^2 \theta + z^2} = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \frac{y \sec \theta}{z}. \tag{B-12}$$

Se puede demostrar, usando identidades trigonométricas, que $\sec \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ por lo

que (B-12) se puede escribir como

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{\theta y^2 \sec^2 \theta + z^2} = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \right). \tag{B-13}$$

Luego, regresando a la notación original $\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$, por lo que (B-13) toma la

forma

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos \theta d\theta}{\theta y^2 \sin^2 \theta + z^2} &= \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2 + z^2}}} \right) = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2 + z^2}}} \right) \\
&= \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
&= \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right).
\end{aligned}
\tag{B-14}$$

Por lo tanto de (B-11) a (B-14) tenemos que

$$\int_X \frac{dx}{r(x^2 + z^2)} = \frac{1}{yz} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) \Big|_x. \tag{B-15}$$

Luego, de (B-10) y (B-15) se tiene que

$$\int_X \frac{x^2 dx}{r(y+r)} \Big|_Z \Big|_Y = \left[-y \ln(x+r) + z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) \right] \Big|_Z \Big|_Y \Big|_X. \tag{B-16}$$

Finalmente, de (B-8) y (B-16) tenemos una expresión más simple para el campo gravitacional de un prisma recto con densidad constante, dada por

$$g_z(0,0,0) = \gamma \rho \left[z \tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) - x \ln(y+r) - y \ln(x+r) \right] \Big|_Z \Big|_Y \Big|_X. \tag{B-17}$$

Apéndice C

Ecuación del campo magnético de un prisma rectangular.

(Tomado de Gallardo-Delgado, 1997).

Nuevamente supongamos que (x_0, y_0, z_0) es un punto de evaluación cualquiera y tomando un elemento diferencial en (x', y', z') , el potencial magnético escalar de un prisma recto con magnetización constante (Ec. 67) es de la forma

$$A(x_0, y_0, z_0) = c \int_{x'_1 - x_0}^{x'_2 - x_0} \int_{y'_1 - y_0}^{y'_2 - y_0} \int_{z'_1 - z_0}^{z'_2 - z_0} \mathbf{J} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{\left((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 \right)^{1/2}} \right\} dx' dy' dz'. \quad (C-1)$$

De acuerdo a las ecuaciones (68) y (69), $\mathbf{T}(x_0, y_0, z_0) = -\nabla_0 A(x_0, y_0, z_0)$ y

$$\mathbf{T}(x_0, y_0, z_0) = -c \nabla_0 \int_{x' - x_0} \int_{y' - y_0} \int_{z' - z_0} \mathbf{J} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{\left((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 \right)^{1/2}} \right\} dx' dy' dz'. \quad (C-2)$$

Para simplificar los cálculos se traslada el origen al punto de evaluación, que de acuerdo a la Figura 23 esto se logra haciendo:

$$\begin{aligned} x &= x' - x_0, \quad y = y' - y_0, \quad z = z' - z_0, \\ r &= \sqrt{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2}. \end{aligned} \quad (C-3)$$

Además, se cumple que $\nabla_0 f(x' - x_0) = -\nabla f(x)$ y $\nabla' f(x' - x_0) = \nabla f(x)$ para una función escalar f . De esta manera el campo magnético está dado por

$$\mathbf{T}(0,0,0) = c \nabla \int \int \int_{x' y' z'} \mathbf{J} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{r} \right\} dx dy dz, \quad (C-4)$$

y usando condiciones de continuidad y diferenciabilidad adecuadas, podemos intercambiar la operación de integración y derivación:

$$\mathbf{T}(0,0,0) = c \int \int \int_{XYZ} \nabla \left[\mathbf{J} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right] dx dy dz. \quad (\text{C-5})$$

Usando notación indicial y suma de Einstein (C-5) se puede expresar como:

$$T_i(0) = c \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ J_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dV. \quad (\text{C-6})$$

Considerando J_k constante escribimos (C-6) como

$$T_i(0) = c J_k \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) dV. \quad (\text{C-7})$$

Luego, $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_k}{r^3}$ por lo que, usando la regla del cociente de la derivada (C-7) se puede expresar como

$$\begin{aligned} T_i(0) &= c J_k \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{x_k}{r^3} \right) dV = -c J_k \int \int \int_V \left[\frac{r^3 \frac{\partial x_k}{\partial x_i} - x_k \frac{\partial r^3}{\partial x_i}}{r^6} \right] dV = -c J_k \int \int \int_V \left[\frac{r^3 \delta_{ik} - 3r^2 x_k \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^6} \right] dV \\ &= c J_k \int \int \int_V \left[\frac{3r x_k x_i}{r^6} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right] dV, \end{aligned} \quad (\text{C-8})$$

esto es

$$T_i(0) = c J_k \int \int \int_V \left[\frac{3r x_k x_i}{r^6} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right] dV. \quad (\text{C-9})$$

De (C-9) se tienen dos casos

Caso A: cuando $i = k$,

Caso B: cuando $i \neq k$.

CASO A

Nombramos el término de la integral en (C-9) como

$$t_{ik} = \int \int \int_V \left[\frac{3x_k x_i}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right] dV. \quad (\text{C-10})$$

Luego, haciendo $i = k$ lo cual, sin pérdida de generalidad, se puede considerar como

$i = k = 1$, se tiene

$$t_{xx} = \int_Z \int_Y \int_X \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) dx dy dz, \quad (C-11)$$

donde para resolver la integral con respecto a x usamos la fórmula de integración

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{u}{2(n-1)a^2(u^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} \quad \text{con la que resolvemos la integral}$$

$$\int_x \frac{dx}{r^3} = \frac{x}{r(y^2 + z^2)}. \quad (C-12)$$

Integrando por partes tenemos

$$u = \frac{x^2}{r^2}, \quad dv = \frac{dx}{r^3} \Rightarrow du = \frac{2x(x^2 + y^2 + z^2) - x^2(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2x(y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad v = \frac{x}{r(y^2 + z^2)},$$

$$\text{con lo que } \int_x \frac{x^2}{r^5} dx = \frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)} - \int_x \frac{2x^2}{r(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx = \frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)} - \int_x \frac{2x^2}{r^5} dx. \text{ Por lo tanto,}$$

$$\int_x \frac{x^2}{r^5} dx + \int_x \frac{2x^2}{r^5} dx = \frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)} \Rightarrow \int_x \frac{3x^2}{r^5} dx = \frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)}. \text{ Así,}$$

$$\int_x \frac{x^2}{r^5} dx = \frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)}. \quad (C-13)$$

Por lo que aplicando (C-12) y (C-13) en (C-11) se tiene

$$\begin{aligned} t_{xx} &= \int_Z \int_Y \left\{ \frac{x^3}{r^3(y^2 + z^2)} - \frac{x}{r(y^2 + z^2)} \right\} \Big|_x dy dz \\ &= \int_Z \int_Y \left\{ \frac{x[(x^2 + y^2 + z^2) - (y^2 + z^2)]}{r^3(y^2 + z^2)} - \frac{x}{r(y^2 + z^2)} \right\} \Big|_x dy dz, \\ &= \int_Z \int_Y \left\{ \frac{x}{r(y^2 + z^2)} - \frac{x}{r^3} - \frac{x}{r(y^2 + z^2)} \right\} \Big|_x dy dz \\ &= - \left[x \int_Z \int_Y \frac{dy}{r^3} dz \right]_x. \end{aligned} \quad (C-14)$$

La última integral se resuelve empleando (C-12), con lo que obtenemos

$$t_{xx} = - \left[xy \int_z \frac{dz}{r(x^2 + z^2)} \right] \Big|_x \Big|_y, \quad (C-15)$$

luego, la integral en (C-15) se resuelve usando la identidad (B-15) obteniendo

$$t_{xx} = -xy \left[\frac{1}{xy} \tan^{-1} \left(\frac{yz}{xr} \right) \right] \Big|_x \Big|_y \Big|_z = -\tan^{-1} \left(\frac{yz}{xr} \right) \Big|_x \Big|_y \Big|_z. \quad (C-16)$$

Sin pérdida de generalidad se puede determinar que

$$t_{yy} = -\tan^{-1} \left(\frac{xz}{yr} \right) \Big|_x \Big|_y \Big|_z \quad (C-17)$$

y

$$t_{zz} = -\tan^{-1} \left(\frac{xy}{zr} \right) \Big|_x \Big|_y \Big|_z. \quad (C-18)$$

CASO B

Para el caso en que $i \neq k$, supongamos $i = 1$ y $k = 2$, entonces de (C-9) se tiene

$$t_{xy} = \int_z \int_y \int_x \left(\frac{3xy}{r^5} \right) dx dy dz = 3 \int_z \int_y y \int_x \frac{x}{r^5} dx dy dz \quad (C-19)$$

donde la integral $\int_x \frac{x}{r^5} dx$ se resuelve usando la fórmula de integración

$$\int \frac{udu}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(u^2 + a^2)^{n-1}} + C. \text{ Así,}$$

$$t_{xy} = 3 \int_z \int_y y \int_x \frac{x}{r^5} dx dy dz = - \int_z \int_y \frac{y}{r^3} \Big|_x dy dz. \quad (C-20)$$

De la fórmula de integración anterior se tiene

$$t_{xy} = - \int_z \int_y \frac{y}{r^3} \Big|_x dy dz = \int_z \frac{dz}{r} \Big|_x \Big|_y = \ln(z + r) \Big|_x \Big|_y \Big|_z \quad (C-21)$$

donde hemos usado la fórmula de integración $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C.$

Similarmente se tiene

$$t_{xz} = \ln(y+r) \Big|_x \Big|_y \Big|_z \quad (C-22)$$

$$t_{yz} = \ln(x+r) \Big|_x \Big|_y \Big|_z . \quad (C-23)$$

Finalmente, de (C-9) se tiene que el campo magnético de un prisma de magnetización uniforme está dado por: $T_i(0) = c J_k t_{ik}$. Aplicando la definición de campo total como la componente de T_i en la dirección $\mathbf{u}_i$ del campo magnético regional

$$T(0) = c \mathbf{u}_i J_k t_{ik} . \quad (C-24)$$

Expresando finalmente la ecuación (C-24) en notación matricial, empleando los cosenos directores de $\mathbf{u}$ tenemos:

$$T(0) = c \begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) & \ln(r+z) & \ln(r+y) \\ \ln(r+z) & -\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) & \ln(r+x) \\ \ln(r+y) & \ln(r+x) & -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \end{bmatrix} \Big|_x \Big|_y \Big|_z \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} . \quad (C-25)$$

Apéndice D

Demostración de la ecuación eikonal

(tomada de Lay y Wallace, 1995).

Supongamos que se tiene la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (\text{D1})$$

para la cual podemos suponer una solución de la forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)}, \quad (\text{D2})$$

donde $W(\mathbf{x}) \cdot \omega/c_0$ es una función de la posición y c_0 es una velocidad de referencia. La ecuación de onda no incluye ningún efecto de atenuación, i.e. el coeficiente $A(\mathbf{x})$ es sólo función de la posición (dispersión geométrica). De esta manera,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A(\mathbf{x}) e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{A(\mathbf{x}) i\omega}{c_0} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \right) e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \right] \\
&= \left(\frac{A(\mathbf{x}) i\omega}{c_0} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} + \\
&\quad + e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \left[\frac{i\omega}{c_0} \left(A(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 W(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 A(\mathbf{x})}{\partial x^2} \right] \\
&= \left[\frac{i\omega}{c_0} \left(A(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 W(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 A(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \left(\frac{i\omega}{c_0} A(\mathbf{x}) \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \right] e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \\
&= \left[\frac{i\omega}{c_0} A(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 W(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial^2 A(\mathbf{x})}{\partial x^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega^2}{c_0^2} A(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \frac{i\omega}{c_0} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \right] e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \\
&= \left[\frac{\partial^2 A(\mathbf{x})}{\partial x^2} - \frac{\omega^2 A(\mathbf{x})}{c_0^2} \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + i \left(\frac{2\omega}{c_0} \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + A(\mathbf{x}) \frac{\omega}{c_0} \frac{\partial^2 W(\mathbf{x})}{\partial x^2} \right) \right] e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)}. \tag{D3}
\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$, obtenemos expresiones similares con parte real e imaginaria.

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-A(\mathbf{x}) i\omega e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \right] = \\
&= -\omega^2 A(\mathbf{x}) e^{i\omega(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \tag{D4}
\end{aligned}$$

De esta manera, agrupando términos a partir de (D3) e igualando términos semejantes en (D3) y (D4) se tiene

$$\nabla^2 A(\mathbf{x}) - \frac{\omega^2 A(\mathbf{x})}{c_0^2} \left[\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial z} \right)^2 \right] = -\frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} A(\mathbf{x}) \quad (\text{D5})$$

y

$$2 \left(\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial z} \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial z} \right) + A(\mathbf{x}) \nabla^2 W(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{D6})$$

Luego, multiplicando (D5) por el término $-\frac{c_0^2}{\omega^2 A(\mathbf{x})}$ obtenemos

$$\left[\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{c_0^2}{\omega^2 A(\mathbf{x})} \nabla^2 A(\mathbf{x}) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{x})}. \quad (\text{D7})$$

Podemos ver en (D7) que el término $\frac{c_0^2}{\omega^2 A(\mathbf{x})} \nabla^2 A(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, es decir, para

frecuencias altas. Si esto sucede, la ecuación (D7) toma la forma de la ecuación

$$\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial z} \right)^2 = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{x})} \quad (\text{D8})$$

llamada ecuación eikonal.

Apéndice E

Análisis de errores de tiempos de arribo para el modelo de una capa

En este apéndice analizaremos las diferencias de tiempos de viaje de las ondas sísmicas, entre los resultados obtenidos mediante fórmulas analíticas y los resultados numéricos de nuestro algoritmo, para el modelo de una capa y un semiespacio descrito en el Capítulo 5, con el propósito de validar la metodología desarrollada y conocer los posibles factores que causan dichas diferencias.

Las Figuras 109 a, d y g muestran contornos comparativos de tiempos de viaje en la capa superficial ($z=0.0$ km), en la interface ($z=2.0$ km) y en la sección vertical $x=5.0$ km, respectivamente. Los contornos marcados con líneas negras corresponden a los tiempos calculados numéricamente con nuestro algoritmo (t_c), mientras que los contornos de colores corresponden a los tiempos calculados analíticamente (t_r). Las Figuras 109 b, e y h son las diferencias de tiempos entre los valores analíticos y numéricos, obtenidas usando $E = t_c - t_r$. Las Figuras 109 c, f e i muestran los esquemas utilizados en cada uno de los bloques de cada sección siguiendo la convención que se muestra en la Tabla IV.

Tabla IV: Esquemas utilizados en el proceso de modelado de tiempos de primeros arribos.

Descripción	No. Esquema
Propagación inicial	0
Esquema 3D tipo A (Figura 82 EA)	1
Esquema 3D tipo B (Figura 82 EB)	2
Esquema 3D tipo C (Figura 82 EC)	3
Esquema 2D (Figura 83 E2D)	4
Esquema 2D con el rayo refractándose al interior del volumen en expansión (Figura 83 E2D)	5
Esquema 1D (Figura 83 E1D)	6
Esquema 1D con el rayo refractándose al interior del volumen en expansión (Figura 83 E1D)	7
Selección del tiempo más rápido de todos los esquemas	8

Podemos observar en las Figuras 109 a y b que las ondas cercanas a la fuente son bien determinadas mostrando las menores diferencias en tiempo de viaje de todo el dominio. En la Figura 109 c se muestra que, en este caso, el esquema más utilizado corresponde al esquema bidimensional mostrado en la Figura 83. La figura también muestra que en las direcciones x - y , que coinciden exactamente con la fuente, el esquema más utilizado corresponde al esquema unidimensional (también ilustrado en la Figura 83). Ambos casos son empleados en la onda directa que va viajando en la superficie del terreno. Las Figuras 109 d, e, g y h muestran que los tiempos t_c sobre la interface así como en la sección vertical, son menores a los tiempos reales, lo que indica que la onda sísmica está llegando un poco adelantada. Este adelanto en tiempos de viaje es asociado al efecto acumulado de los esquemas de Vidale (1988,1990) empleados durante la propagación en el medio tridimensional. Las Figuras 109 b, c; e, f y h, i muestran la importancia del fenómeno de la primera refracción crítica en la superficie de contacto entre las dos unidades, como el punto de inicio de las mayores discrepancias en los tiempos calculados con el algoritmo. Aunque esto es reducido con el empleo de un proceso iterativo en ondas críticamente refractadas, las diferencias serán más notables en contrastes de velocidad sísmica mayores. En este ejemplo, sin embargo, las diferencias encontradas, comparadas con los tiempos reales son menores al 3%. Además, la forma de los frentes de las ondas directas, refractadas y refractadas críticamente, es determinada con buen nivel de precisión como se observa en las Figuras 109 a, d y g.

