

TESIS DEFENDIDA POR
Favio Cruz Hernández
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández

Co-director de tesis

M. C. José Douglas Frez Cárdenas

Co-director de tesis

Dr. Enrique Gómez Treviño

Miembro del Comité

M. C. José Guadalupe Acosta Chang

Miembro del Comité

Dr. Modesto Ortiz Figueroa

Miembro del Comité

Dr. Antonio González Fernández

*Coordinador del programa de posgrado
en Ciencias de la Tierra*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

11 de Junio de 2012

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN CIENCIAS DE LA TIERRA CON ORIENTACIÓN EN GEOFÍSICA APLICADA**

**Inversión conjunta de dispersión de ondas superficiales y
sondeos geoelectrónicos de corriente directa**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

FAVIO CRUZ HERNÁNDEZ

Ensenada, Baja California, México, Junio 2012.

RESUMEN de la tesis de **Favio Cruz Hernández**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada. Ensenada, Baja California. Junio 2012.

**Inversión conjunta de dispersión de ondas superficiales y sondeos
geoeléctricos de corriente directa**

Resumen aprobado por:

M. C. José Douglas Frez Cárdenas

Co-director de tesis

Dr. Francisco Javier Esparza Hernández

Co-director de tesis

Esta Tesis presenta dos métodos para invertir en forma conjunta dos tipos de datos: velocidades de fase de ondas superficiales Rayleigh y corriente directa en sondeos geoeléctricos. El objetivo principal es estimar resistividades y velocidades de onda S, a profundidades someras 1D con el propósito de aplicarlos en estudios de suelos en Ingeniería Civil.

La primera metodología, una inversión secuencial, supone que ambas funciones incógnitas son discontinuas a pedazos. Las discontinuidades estructurales se obtienen al optimizar con norma L1 el término de regularización de la función objetivo. Enseguida, las profundidades se fijan y la resistividad y la velocidad de onda S son estimadas para las pocas capas que resultan en el paso previo.

La segunda metodología, es una inversión regularizada conjunta. La función objetivo consta de cinco términos que se optimizan en norma L2. Dos de ellos corresponden al ajuste normalizado de los datos; otros dos se relacionan con la suavización de la dependencia de las incógnitas con la profundidad y el quinto término tiene que ver con la similaridad entre las dos funciones incógnitas. La similaridad se mide por el valor absoluto de la diferencia entre las primeras derivadas de ambas incógnitas con respecto a la profundidad.

La evaluación de las soluciones utiliza la sensibilidad de los datos a las incógnitas, el grado de ajuste (rms) y de estabilidad de las soluciones, la variancia de los modelos y su resolución en profundidad. Los códigos están escritos en MatLab y el procedimiento numérico-computacional es validado con datos sintéticos, con y sin ruido. Además, aplicamos los métodos a datos reales de dos sitios del Valle Mexicali-Imperial; los resultados son comparados con interpretaciones previas y estudios de mecánica de suelos.

Palabras Clave: inversión secuencial y conjunta, normas L1 y L2, estructuras superficiales 1D, resistividad y velocidad de onda S, evaluación de soluciones.

ABSTRACT of the thesis presented by **Favio Cruz Hernández** as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics. Ensenada, Baja California, México January 2012.

Joint inversion of dispersive surface waves and direct current resistivity soundings

This work presents two methods for joint inversion of two datasets: phase velocities of Rayleigh surface waves (from seismic noise) and direct current resistivity soundings. Main aim is to estimate electrical resistivity and S wave velocity at shallow 1-D earth structures with forward applications to soil studies in Civil Engineering.

The first method, sequential inversion, assumes that resistivity and S-velocity are piecewise continuous functions of depth. Structure discontinuities are detected by optimizing with L1 norm the regularizing term of the objective function; thereafter, these depths are fixed and electrical resistivity and S-velocity are estimated for a few layers.

The second method is a regularized, joint inversion of both data sets. The objective function consists of five terms, all optimized with L2-norm: two correspond to normalized data fitting; two others are related with depth smoothing of the unknown functions, and the fifth term takes into account structural similarity. Similarity is measured by the absolute values of the differences of both unknown function depth first derivatives.

Appraisal of sequential inversions is made by using model sensitivity of the data, the fitting (rms) and stability levels of the solutions, the variance of the models as well as their resolution at depth. MatLab codes are generated and the procedure is validated with synthetic data, with and without additional random noise. Besides, they are applied to data from two Mexicali-Imperial Valley sites; results are compared with previous interpretations and soil mechanics studies.

Keywords: sequential and joint inversion, L_1 and L_2 norms, shallow 1D structure, resistivity, S wave velocity, models appraisal.

Dedicatorias

*A la memoria de quien me dio la vida: Mama Rosita.
y de mis seres queridos que partieron: Abue Tere y Tía Mago.*

*A usted, por ser un ejemplo digno de sobriedad y honestidad; felices 24 horas
Papa.*

*A mi hermano Esteban por enseñarme el significado de vivir fuera del hogar y
motivarme a estudiar. Gracias por apoyarme en todo y cuidar de mí.*

*A mi hermano Gil y a su esposa Sofía por preocuparse, apoyarme y darme
posada; gracias por recordarme lo maravilloso que es vivir en Familia.*

*A mis sobrinas Daniela e Isabel por su cariño y por los ratos de diversión que
compartí con ellas.*

A Dios por darle rumbo a mi vida y por permitirme conocer a Jesy.

Agradecimientos

A mi co-director de Tesis, M. C. José Frez, por su disposición y entrega para desarrollar este trabajo. Gracias por su paciencia y tolerancia.

A mi co-director de Tesis, Dr. Francisco Javier Esparza Hernández, por su valiosa aportación en este trabajo. Gracias por su apoyo.

A los miembros del comité, por su valiosa colaboración y observaciones en este trabajo. Gracias M. C. José Guadalupe Acosta Chang, Dr. Enrique Gómez Treviño y Dr. Modesto Ortiz Figueroa.

Al M. C. Euclides Ruiz Cruz, por su apoyo en la instalación de programas.

A los profesores de los cuales aprendí mucho en mi primer año en CICESE.

Al Dr. Mario González Escobar y Dr. Marco Antonio Pérez Flores por sus consejos antes de iniciar esta Tesis.

Al Dr. José Manuel Romo Jones y M. C. Luis Humberto Mendoza Garcilazo, por el apoyo económico.

A Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado, por sus comentarios.

A Carpio y Selene por facilitar nuestra llegada a Ensenada. Gracias por darnos Trabajo.

Al personal administrativo de Ciencias de la Tierra: Lupita, María Barbará Uribe Martínez y Martha Elva Barrera López.

A Jessica por su apoyo incondicional y por ayudarme cada día. Gracias por compartir ambas nuestras alegrías y momentos difíciles. T. A. M.

A mis compañeros: Chanes, Nestor, Tere, Anaid, Cristina, Clemente, Dania, Amalia, Olaf, Mario y demás.

A mis compañeros que me han escuchado y comprendido. Gracias por enseñarme a enfrentar mis miedos y a vivir el “solo por hoy”.

A mis amigos de Ensenada: Toño e Isabel, Juan, Ermilo, Alma.

A Miguel Rodríguez, por su confianza y enseñanza.

Al Ingeniero Camargo, por brindarnos su apoyo a través de darnos trabajo.

A CONACYT, por el apoyo brindado como becario No. 237089.

A CICESE, por el apoyo brindado durante mi estancia.

CONTENIDO

	Página
RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
Dedicatorias	iii
Agradecimientos	iv
CONTENIDO	v
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABLAS	xiv
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1 Descripción breve del contenido de la tesis	1
I.2 Motivación.....	2
I.3 Inversión de datos geofísicos.....	3
I.3.1 El problema inverso	3
1.3.1.1 Normas	5
1.3.1.2 Estimador mínimo cuadrático	7
1.3.1.3 Métodos de estabilización	8
I.3.2 Inversión de problemas no-lineales	10
I.3.3 Evaluación de la solución	12
I.3.3.1 Resolución.....	13
I.3.3.2 Matriz de covarianzas.....	17
I.4 Antecedentes: inversión de curvas de dispersión de ondas superficiales y resistividad aparente	17
I.5 Antecedentes: inversión conjunta	19
I.6 Objetivos	24
II. INVERSIÓN SEPARADA DE CURVAS DE DISPERSIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES RAYLEIGH Y DE RESISTIVIDAD APARENTE	25
II.1 Dispersión de ondas superficiales Rayleigh.....	25
II.1.1 Aspectos generales	25
II.1.2 Descripción general del método	26

CONTENIDO (continuación)

	Página
II.1.3 El problema directo	30
II.1.3.1 El caso de un semi-espacio homogéneo	30
II.1.3.2 Dispersión para estructuras 1D	31
II.1.3.3 El caso de n capas elásticas, homogéneas e isotrópicas.....	33
II.1.4 Sensibilidad de la velocidad de fase a partir del problema directo	36
II.2 El método geoelectrico de corriente directa	38
II.2.1 Teoría básica	38
II.2.2 Descripción general del método	39
II.2.3 El problema directo	42
II.3 Análisis de sensibilidad a partir de las derivadas parciales.....	44
II.4 Inversión regularizada en norma L_2	45
III. DISEÑO DE ESQUEMAS DE INVERSIÓN SECUENCIAL Y CONJUNTA 1D DE CURVAS DE DISPERSIÓN DE ONDAS RAYLEIGH Y DE RESISTIVIDAD APARENTE	51
III.1 Inversión secuencial.....	51
III.1.1 Búsqueda de discontinuidades con uso de norma L_1 en el término de regularización	52
III.1.2 Validación con datos sintéticos	56
III.2 Inversión conjunta.....	59
III.2.1 Función objetivo o criterio	60
III.2.2 Solución, implementación y detalles numéricos	61
III.2.3 Validación de la metodología.....	64
III. 3 Conclusiones	68
III.3.1 Inversión secuencial	68
III.3.2 Inversión conjunta.....	68
IV. APLICACIONES A CASOS REALES.....	71
IV.1 Descripción general de los sitios	72
IV.2 Adquisición y procesado de datos.	72
IV.3 Sitio Río Nuevo.....	74

CONTENIDO (continuación)

	Página
IV.3.1 Diseño del experimento en campo	74
IV.3.2 Modelo inicial.....	74
IV.3.3 Resultados de la inversión secuencial	74
IV.3.3.1 Análisis de significación de resultados	76
IV.3.4 Resultados de la inversión conjunta.....	78
IV.3.5 Comparación de los modelos obtenidos por los métodos secuenciales y conjuntos con estudios previos.....	81
IV.3.6 Conclusiones.....	84
IV.4 Sitio Solidaridad.....	85
IV.4.1 Diseño del experimento en campo	85
IV.4.2 Modelo inicial.....	85
IV.4.3 Resultados de inversión secuencial	85
IV.4.3.1 Análisis de significación de resultados	88
IV.4.4 Resultados de inversión conjunta.....	90
IV.4.5 Comparación de los modelos obtenidos por los métodos secuenciales y conjuntos con estudios previos.....	91
IV.4.6 Conclusiones.....	93
V. CONCLUSIONES Y DISCUSIONES.....	95
V.1 Conclusiones generales	95
V.2 Discusión	97
V.3 Trabajos futuros.....	98
BIBLIOGRAFÍA	99
ANEXO	109

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Representación del problema directo e inverso para el caso de resistividad; x representa las resistividades del subsuelo en un medio 1D.	4
2	Comparación de ajuste de la norma L_1 , L_2 y L_∞ . Note que la solución en L_1 no es influenciada por el punto más desviado lo que produce la recta que pasa por los otros tres puntos. L_2 toma en cuenta todos los puntos con el mismo peso y L_∞ le da mayor ponderación al punto más alejado. Modificado de los Apuntes de Teoría de Inversión (Frez, 2010).	6
3	Resultados para datos de MT (Constable <i>et al.</i> , 1987). a) Derivadas parciales de los modelos ajustados en las últimas 2 iteraciones; b) funciones de resolución para la última iteración a diferentes profundidades. Tomado de Frez (2012).	16
4	Aplicación de la metodología de Parker (1994) a los datos de la Figura 3. Tomado de Frez (2012).	16
5	Curvas de resistividad aparente y dispersión de ondas superficiales Rayleigh en el sitio a) Río Nuevo y b) Solidaridad en Mexicali (Acosta-Chang, 2010 y 2011). Nótese un incremento positivo en la curvas de resistividad aparente a mayores aberturas $AB/2$; las velocidades de fase también crecen a los periodos más largos. Así, los datos indican un incremento en V_s y ρ a profundidad; sin embargo, esta tendencia no es clara a profundidades muy someras.	23
6	Onda Rayleigh.	26
7	Sismograma de ruido sísmico ambiental en a) y fuente controlada en b). La figura b) muestra muy claramente la onda directa y el tren de ondas superficiales dispersivas en el sitio Solidaridad, en Mexicali. Datos proporcionados por Acosta Chang (2010).	27

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
8	Amplitudes espectrales en el dominio del periodo contra la velocidad de fase; los sismogramas son de ruido sísmico ambiental. La curva de dispersión se obtiene por correlación de los máximos espectrales a partir del apilado de 10 ventanas de ruido y corresponde al modo fundamental de las ondas Rayleigh. En el procesado, se utiliza los datos del sitio Solidaridad en Mexicali proporcionados por Acosta Chang (2010).	29
9	Curva de dispersión correspondiente al sitio Solidaridad. La información a periodos cortos resulta del método de fuente controlada (MASW); su complemento a periodos largos del método pasivo (SPAC).	29
10	Curvas de dispersión correspondiente a una capa de líquido de espesor de 100 metros sobre un semi-espacio, graficadas en función del periodo. a) Es el modelo y en b) su respuesta donde $n=0$ es el modo fundamental y $n>0$ los modos superiores.	32
11	Modelo elástico 1D de n capas.	36
12	Respuesta en la velocidad de fase de onda Rayleigh debido a cambios de un 25% en cada propiedad del modelo; los resultados indican que V_s es el argumento más importante en este caso.	37
13	Distribución de los electrodos de medición y la curva de resistividad aparente.	40
14	Modelo geoelectrico 1D de n capas.	43
15	a) a) Datos observados de velocidades de fase para el modo fundamental y curva de resistividad aparente; b) derivadas parciales de cada conjunto de datos al modelo respectivo.	45
16	Diagrama de flujo del proceso de inversión regularizada en L_2 (corriente directa).	48

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
17	Ajuste después de 5 iteraciones. RMS normalizado por el error de los datos.	49
18	Comparación de modelos de resistividad.	50
19	Comparación de modelos de velocidad que resultan de diferentes algoritmos de inversión. Nótese de la figura que la línea continua corresponde al modelo estimado por el algoritmo diseñado y las líneas punteadas los modelos estimados por diferentes autores.	50
20	Diagrama de flujo del proceso de inversión que simula norma L_1 con datos de dispersión de ondas superficiales.	54
21	Convergencia en el ajuste de datos sintéticos después de 7 iteraciones.	55
22	Comparación de modelos a) de resistividades y b) velocidades estimados por inversión separada y secuencial a partir de datos sin ruido.	57
23	Comparación de modelos de a) resistividades y b) velocidades, ambas estimadas por inversión separada y secuencial. En este experimento, los datos están normalizados por los errores. $RMS=0.37$ (resistividad) y $RMS=0.35$ (ondas superficiales).	58
24	Diagrama de flujo del esquema de inversión conjunta.	63
25	Modelos estimados por inversión conjunta. Ajustes y modelos de a) resistividad, b) velocidad de onda S y c) evolución del RMS hasta 6 iteraciones. En este experimento, los datos no contienen errores.	65
26	Resultados de la inversión conjunta a) resistividades y b) velocidades; comparación con los obtenidos por inversión separada. A la izquierda el ajuste correspondiente de los datos; a la derecha, comparación con el modelo verdadero y los obtenidos por inversión separada. $RMS=0.1$ [Ω -m] y $RMS=0.5$ [m/s].	66

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
27	. Resultados de la inversión conjunta a) resistividades y b) velocidades; comparación con los obtenidos por inversión separada. A la izquierda el ajuste correspondiente de los datos; a la derecha, comparación con el modelo verdadero y los obtenidos por inversión separada. RMS=0.8 (resistividad) y RMS=0.9 (ondas superficiales).	67
28	Ubicación de los dos sitios.	71
29	Sismógrafo DAQLink II de Seismic Source.	73
30	Resistivímetro	73
31	Modelo de velocidades de onda S obtenido en la primera etapa de inversión secuencial por norma L1.	76
32	Modelos estimados en la segunda etapa de inversión secuencial. Sitio Río Nuevo. a) Curvas ajustadas (líneas discontinuas), b) modelos estimados y c) RMS=0.29 para datos de resistividad y RMS=0.44 para datos de ondas superficiales. El RMS está normalizado por el error de los datos; el número de iteraciones para los datos de resistividad y de dispersión, son 4 y 7, respectivamente.	75
33	De izquierda a derecha, variabilidad (barras horizontales de $\pm 1\sigma$) de los modelos, sensibilidad de los datos para diferentes aberturas AB/2 y periodos y funciones de resolución a diferentes profundidades de los modelos estimados por inversión secuencial en el sitio Río Nuevo. Modelos resultantes de a) resistividades y b) velocidades de onda S.	77
34	Evolución de los ajustes hasta 7 iteraciones. Nótese la disminución de γ (recuadro en el lado derecho de las figuras) a medida que aumenta el índice de la iteración. Los valores (constantes) de los parámetros de suavización son $\alpha_1=10$ (resistividad) y $\alpha_2=35$ (Velocidad). En a) datos de resistividad y b) de dispersión.	79

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
35	Datos, ajustes, modelos y RMS resultantes para resistividad y velocidad de onda S (sitio Río Nuevo). a) Datos, error y ajustes, b) modelos resultantes y c) RMS en función del índice de la iteración. RMS=0.27 (resistividad) y RMS=0.46 (ondas superficiales).	80
36	Sensibilidad de los datos para diferentes aberturas AB/2 y periodos de cada modelo estimado (sitio Río Nuevo). Modelo de a) resistividad y b) velocidad de onda S.	81
37	Comparación de modelos estimados por inversión secuencial (línea continua) y conjunta (línea discontinua) con la información obtenida por estudios de mecánica de suelos reportado a ~170 m del sitio de estudio en Río Nuevo. a) Modelo de resistividades, b) Modelo de velocidades de onda S, c) sondeo SPT y d) perfil estratigráfico.	82
38	Modelos estimados en la primera etapa secuencial por norma L1. a) resistividad y b) velocidad de onda S.	86
39	Modelos estimados en la segunda etapa secuencial, utilizando los espesores obtenidos de la inversión de los datos sísmicos. Para resistividad, RMS=2.35 con 7 iteraciones; para datos sísmicos, RMS=0.26 con 5 iteraciones.	87
40	Modelos estimados con la metodología de inversión secuencial. Sitio Solidaridad. a) Curvas ajustadas (líneas discontinuas), b) modelos estimados y c) RMS=0.81 en resistividad y RMS=0.24 en ondas superficiales. RMS normalizado por el error de los datos; el número de iteraciones para los datos de resistividad y de dispersión son 4.	88
41	De izquierda a derecha, variabilidad ($\pm 1\sigma$, barras horizontales en los modelos), sensibilidad de los datos para diferentes aberturas AB/2 y periodos y funciones de resolución a diferentes profundidades de los modelos estimados por inversión secuencial en el sitio Solidaridad. Modelo de a) resistividades y b) de velocidades de onda S.	89

LISTA DE FIGURAS (continuación)

Figura		Página
42	Modelos estimados de resistividad y velocidad de onda S con la metodología de inversión conjunta; sitio Solidaridad. a) Curvas ajustadas, b) modelos ajustados y c) variación del RMS y γ en función del índice de la iteración.	90
43	Modelos finales y sensibilidad de los datos; inversión conjunta; sitio Río Nuevo; a) resistividad y b) velocidad de onda S.	91
44	Modelos (de izquierda a derecha) estimados por inversión secuencial (línea continua) y conjunta (línea discontinua) con la información reportado por estudios de mecánica de suelos a ~80 m del sitio de estudio en el sitio Solidaridad. Modelos a) de resistividades, b) de velocidades de onda S, c) SPT y d) perfil estratigráfico.	92

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I	Métodos de estabilización.	9
II	Metodologías de inversión conjunta.	22
III	Métodos espectrales para obtener la curva de dispersión.	28
IV	Modificación de los códigos NEHRP y (EC- 8, 2004).	30
V	Resumen de métodos que resuelven el problema directo de ondas superficiales Rayleigh.	34
VI	Propiedades del modelo.	37
VII	Resistividades comunes de rocas y/o materiales y agua en diferentes estados.	41
VIII	Modelo 1D.	44
IX	Propiedades del modelo A. $V_p/V_s=3$, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ y $V_{s1} < V_{s2} < V_{s3}$.	56
X	Resumen de las resistividades y velocidades de onda S estimadas en el sitio Río Nuevo, por inversión secuencial y conjunta.	83
XI	Resistividades y velocidades de onda S estimadas en el sitio Solidaridad, por inversión secuencial y conjunta.	93

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Este capítulo describe en forma breve el contenido y la motivación de esta Tesis. Además, contiene los conceptos básicos de la teoría de inversión de datos geofísicos, los antecedentes de inversión conjunta y los objetivos de la Tesis.

I.1 Descripción breve del contenido de la tesis

El contenido de cada Capítulo de la Tesis se describe en forma breve.

Capítulo I. Contiene la motivación del trabajo, los conceptos básicos en teoría de inversión, los antecedentes sobre inversión separada y conjunta, así como el objetivo de la Tesis.

Capítulo II. Describe el problema directo para ambos tipos de datos, así como los esquemas de inversión separada.

Capítulo III. Contiene el esquema de inversión secuencial incorporando la simulación de la norma L_1 en el término de regularización de la función objeto o criterio cuya optimización produce el estimador. Además, presenta un esquema de inversión conjunta cuya función criterio contiene un término de regularización que describe la similitud entre las dos funciones incógnitas; todos los términos de la función criterio se optimizan en norma L_2 . Finalmente, se realizan experimentos con datos sintéticos para validar los paquetes computacionales resultantes.

Capítulo IV. Presenta dos aplicaciones con datos provenientes del Valle de Mexicali; los resultados se comparan con las mediciones de mecánica de suelos y con estudios previos de Geofísica.

Capítulo V. Conclusión y discusión.

I.2 Motivación

La necesidad de explorar el interior de la Tierra para conocer su estructura es de gran importancia en diversas áreas de Ciencias de la Tierra. La adquisición de datos se hace mediante el uso de métodos directos (pozos, pruebas de muestras in situ, sondeos geotécnicos, etc.) e indirectos (mediciones de prospección geofísica, en general). Las técnicas de interpretación pueden ser directas (uso de correlación en las curvas de camino-tiempo de arribos de ondas, curvas maestras de resistividad, etc.) o indirectas (uso de técnicas de inversión). La exploración geofísica aplicada a estudios de Ingeniería Sísmica, Geohidrología y Geofísica Ambiental (entre otras áreas), requieren caracterizar la estructura somera de la Tierra a escala de decenas o centenas de metros. Una opción es realizar una inversión por separado de los diferentes conjuntos de datos e integrar los resultados en un modelo geológico. Sin embargo, una alternativa es complementar las ventajas de los diferentes métodos y datos con el objeto de que prime la mejor información, se elimine o supere las incompatibilidades y el análisis sea tan objetivo como sea posible. En esta alternativa, los datos se combinan en una metodología global; es decir, en una *inversión conjunta*. Un sentido más restringido del concepto de “inversión conjunta” es el uso simultáneo de diferentes bases de datos en un mismo proceso de inversión; en este sentido, se opone a “inversión secuencial” que implica un uso escalonado de las bases de datos pero aún en un mismo algoritmo de inversión.

En el caso particular de ingeniería, las necesidades y retos actuales requieren el empleo de métodos indirectos eficientes que permitan obtener de forma rápida y económica los parámetros petrofísicos del subsuelo. Por tal razón y debido a la facilidad para adquirir los datos correspondientes en zonas urbanas y rurales, el trabajo de esta Tesis combina los datos obtenidos por el método sísmico de dispersión de ondas superficiales Rayleigh y el método eléctrico de sondeos geoelectrónicos de corriente directa en la modalidad de arreglo Schlumberger. El

resultado final consiste en modelos estimados 1D de resistividad (ρ) y velocidad de ondas S (V_s) en estructuras someras.

I.3 Inversión de datos geofísicos

Para entrar en el tema de la inversión de datos geofísicos y familiarizarse con algunos términos, esta sección define los conceptos básicos. El resumen se basa en las Notas del Curso de Teoría de Inversión (Frez, 2010) que se ofrece en el CICESE.

I.3.1 El problema inverso

Las observaciones geofísicas son tomadas, casi siempre, en la superficie y miden las variaciones de un campo físico inducido o producido de manera natural; ellas permiten estimar tanto las propiedades del interior de la Tierra (entre otras, la resistividad eléctrica, las velocidades de ondas sísmicas, la densidad y la susceptibilidad magnética) como la profundidad de las discontinuidades entre capas.

Demos por conocidas las propiedades de la fuente y del subsuelo así como las leyes físicas correspondientes; la determinación de la respuesta del campo correspondiente en la superficie constituye el problema conocido como *modelado* o *problema directo*; éste queda formalizado por la ecuación en variables continuas:

$$y = F(x) + e \quad (1)$$

donde y representa la función observable; $F(\cdot)$, al operador que resuelve el problema directo; x , la función que contiene las propiedades del subsuelo y e , al error en los datos. Suponiendo que la función $F(\cdot)$ es lineal, la ecuación se discretiza en el trabajo numérico como:

$$y = Ax + e \quad (2)$$

en que y es el vector de datos con elementos y_i ; $i = 1, 2, \dots, m$; x es un vector que contiene las propiedades del modelo con elementos x_j y $j = 1, 2, \dots, n$, A es la matriz de sensibilidad con elementos a_{ij} , m es el número de datos observados y n , el número de incógnitas del modelo.

La estimación de propiedades físicas a partir de los datos observados es conocida como la solución al *problema inverso* o de *inversión de datos* (ver Figura 1). El problema inverso en la forma sencilla se expresa como:

$$\hat{x} = A^{-1}(y) \quad (3)$$

donde A^{-1} es un operador inverso (o pseudo-inverso; ver más adelante), \hat{x} es la función incógnita que contiene las propiedades físicas estimadas del subsuelo e y es el vector de datos. En general, suponemos que la estimación es óptima, en el sentido de que optimiza el uso de la información contenida en los datos; por ello, \hat{x} significa el “valor óptimo estimado de x ”.

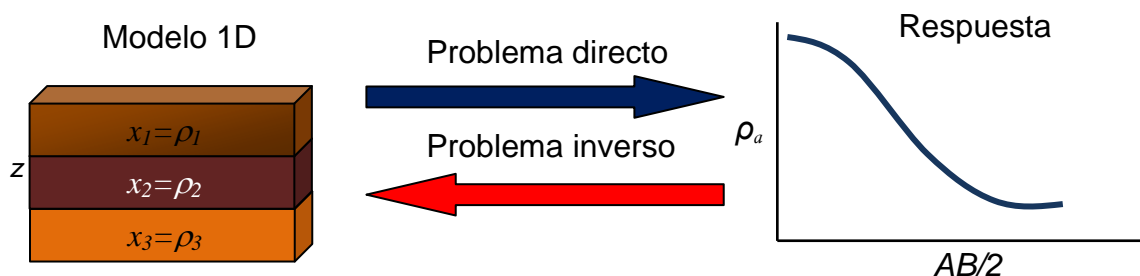


Figura 1. Representación del problema directo e inverso para el caso de resistividad; x representa las resistividades del subsuelo en un medio 1D.

1.3.1.1 Normas

La solución a problemas inversos puede ser a través de criterios óptimos (por minimización, casi siempre), probabilísticos o algebraicos. Los criterios que minimizan una norma p (norma L_p) de los residuales son los más comunes en la segunda categoría. Para el caso discreto y en el caso más simple, el criterio de optimización toma la forma:

$$\min \{ \|y - Ax\|_p \}, p = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$\|y - Ax\|_p = \left(\sum_i |y_i - A_{ij} x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5)$$

Cuando $p = 2$, se tiene el estimador de mínima norma cuadrática (L_2) de los residuales popularmente, llamado de “mínimos cuadrados” que es el más usado porque entrega una solución algebraicamente compacta en el caso lineal. Otra razón de la popularidad también resulta de la aplicación de un criterio de optimización probabilística si agregamos la hipótesis gaussiana para los errores.

Resulta fácil inferir que, a medida de que p decrece, tendemos a minimizar sólo los elementos de mayor magnitud del vector de residuales. Para $p = 1$, el algoritmo resultante tiende a darle poca importancia a los residuales de valores más grandes. Los estimadores que minimizan la norma L_1 de los residuales se llaman *robustos* por esta propiedad. Aquellos que hacen lo mismo con norma L_∞ (norma de Chebyshev) reciben el nombre de estimador minimax lo que resulta de la definición de optimizar en norma L_∞ : $\min \{ \max (|y_i - A_{ij} x_j|) \}$ que se aplica al conjunto de todos los residuales. La Figura 2 ejemplifica una comparación de los ajustes obtenidos por diferentes normas en la solución de la ecuación $y = a + bx$.

La robustez de los estimadores en L_1 resulta de que el método da el peso menor posible a aquellos datos con errores muy grandes, o sea, que se apartan de la

tendencia central de los otros. L_∞ le da mayor ponderación al punto más alejado. Este último criterio puede parecer extraño, pero hay varias áreas, por ejemplo en ingeniería, en que importa más mejorar la conducta extrema que la promedio (por ejemplo, minimizar los gastos más grandes), dando así base a la aplicación de este criterio.

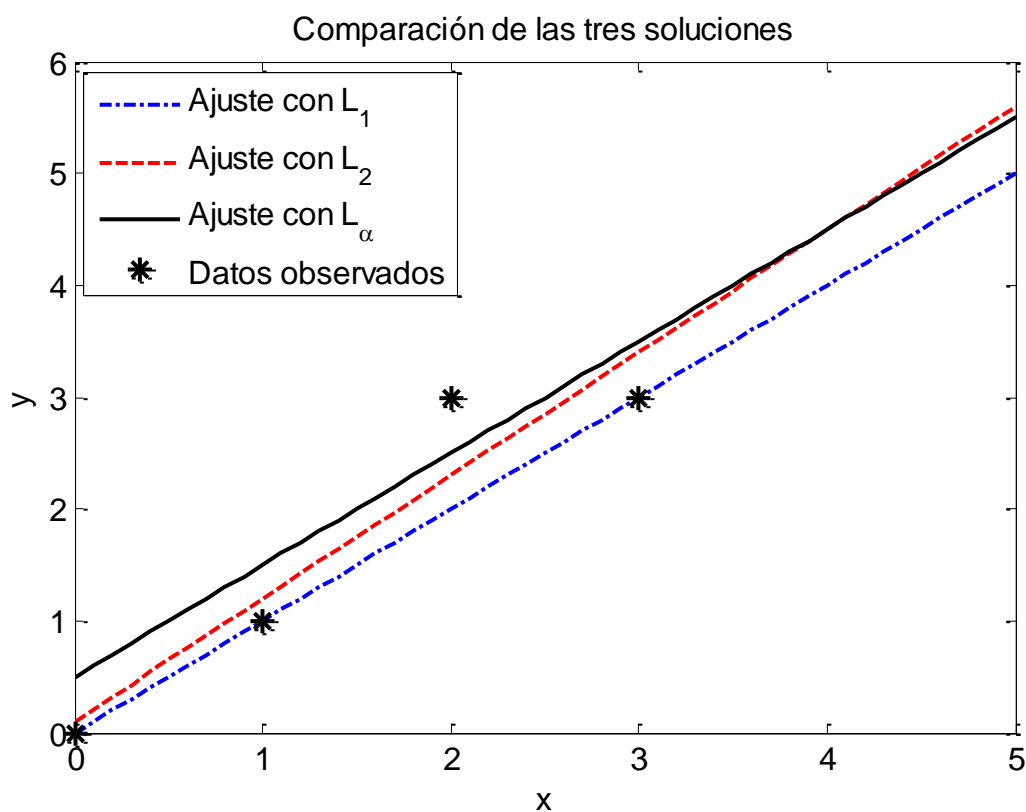


Figura 2. Comparación de ajuste de la norma L_1 , L_2 y L_∞ . Note que la solución en L_1 no es influenciada por el punto más desviado lo que produce la recta que pasa por los otros tres puntos. L_2 toma en cuenta todos los puntos con el mismo peso y L_∞ le da mayor ponderación al punto más alejado. Modificado de los Apuntes de Teoría de Inversión (Frez, 2010).

I.3.1.2 Estimador mínimo cuadrático

El método de mínimos cuadrados resuelve el problema de incompatibilidad causada por la componente de error en las observaciones si es que el problema es sobre-determinado (es decir $m > n$). En el caso más simple, la minimización de la función criterio:

$$\|y - A x\|^2 \quad (6)$$

produce el estimador mínimo cuadrático estándar:

$$\hat{x}_{mcs} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (7)$$

El estimador mínimo cuadrático ponderado usa el criterio:

$$\min \|y - A x\|_{C_{yy}}^2 = \min (y - A x)^T C_{yy}^{-1} (y - A x) \quad (8)$$

En esta Tesis, la matriz de covarianzas C_{yy} es una matriz diagonal que contiene la varianza de los errores en los datos observados. En el criterio (8), el vector de datos y la matriz de sensibilidad resultan normalizados por los errores de observación. El criterio tiene, así, sentido físico a la vez que estadístico y numérico puesto que da más importancia a los datos más precisos, los residuales se miden en “unidades de error” y se trabaja independientemente de las unidades físicas. La minimización produce:

$$\hat{x}_{mcp} = (A^T C_{yy}^{-1} A)^{-1} A^T C_{yy}^{-1} y \quad (9)$$

Es común que modifiquemos nuestras estimaciones a medida que recibimos más información. Para el caso de estimación en modelos lineales, el criterio a usar es la minimización del funcional:

$$\|y - A x\|_{C_{yy}}^2 + \|\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\|_{C_{i-1}}^2 \quad (10)$$

donde C_{i-1} representa la covariancia del error del estimador previo. La solución es el *estimador recursivo regularizado*:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i-1} + [A^T C_{ee}^{-1} A + C_{i-1}^{-1}]^{-1} A^T C_{ee}^{-1} [y - A \hat{x}_{i-1}] \quad (11)$$

donde necesitamos una buena estimación de la matriz de los errores de observación $C_{ee} = C_{yy}$. La expresión anterior es de gran uso cuando los datos llegan en paladas o cuando el número de datos es demasiado grande. En este segundo caso, la división en subconjuntos de datos permite resolver el problema con una capacidad de memoria pequeña en la computadora.

I.3.1.3 Métodos de estabilización

La solución a los diversos problemas inversos en Geofísica (es decir, estimar las propiedades del interior de la Tierra) es indeterminada; ya que los datos contienen menos información de la que se necesita para determinar unívocamente las incógnitas del problema. Lo anterior se debe esencialmente a que utilizamos mediciones tomadas en la superficie de la Tierra y queremos obtener propiedades en su interior lo que implica pasar de un espacio 2D a uno superior, en 3D, lo que no es posible. Esto se traduce en inestabilidad en la determinación del vector de incógnitas. En el fondo, hay redundancia e insuficiencia de los datos lo que produce sobre-parametrización y correlación en las estimaciones de las incógnitas. Esta dificultad se resuelve: a) aplicando un criterio óptimo de optimización (generalmente, el de mínimos cuadrados) y b) agregando condiciones de estabilización a través de cierto conocimiento de la estructura a determinar (por ejemplo, existencia de discontinuidades, variación suave de las propiedades en función de las coordenadas espaciales entre discontinuidades, etc.). Cuando estas condiciones están explícitamente dentro de la función criterio, hablamos de métodos de regularización.

La diversidad de referencias acerca de los métodos de estabilización hace confuso diferenciar entre ellos. A modo de resumen, en la Tabla I se muestra una clasificación acerca de los métodos de estabilización.

Tabla I. Métodos de estabilización.

Estrategia de estabilización	Descripción	Función objetivo y estimador en el caso lineal
Método mínimo cuadrático amortiguado	Conocido en la literatura inglesa como <i>damped least squares</i> o <i>ridge regression</i> (Marquardt, 1970). La evolución de este método a problemas no lineales es conocido como el método de Levenberg–Marquardt–Fletcher (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963 y 1970; Fletcher, 1971).	$\Omega(x) = \ y - Ax\ ^2 + \varepsilon \ x_i - x_{i-1}\ ^2$ $\hat{x} = \hat{x}_{i-1} + [A^T A + \varepsilon I]^{-1} [y - A\hat{x}_{i-1}]$ <p>donde ε es el factor de amortiguamiento e I, la matriz identidad.</p>
Métodos de regularización	Utiliza un operador que suaviza al vector-solución y que, comúnmente, se puede expresar como un operador diferencial aplicado a la función-incógnita (Tikhonov, 1977; Constable <i>et al.</i> , 1987, entre muchos otros).	$\Omega(x) = \ y - Ax\ ^2 + \alpha \ D_p(x - x_{i-1})\ ^2$ $\hat{x} = \hat{x}_{i-1} + [A^T A + \alpha D_p^T D_p]^{-1} A^T [y - A\hat{x}_{i-1}]$ <p>donde α es el parámetro global de regularización y D_p es la matriz de derivadas; $p=1$ es la primera derivada y $p=2$ es la segunda derivada. El parámetro α balancea el ajuste y la estabilidad.</p>
Métodos espectrales	Conocido como el método de inversa generalizada ; aplica un desarrollo truncado a una descomposición espectral de la matriz rectangular A , la descomposición de valores singulares (DVS) que es una generalización de la descomposición de valores característico (DVC) , esta última válida sólo para matrices simétricas.	$\hat{x}(p) = \sum_{i=1}^p \frac{u_i^T y}{\lambda_i} v_i$ <p>donde u_i y v_i son vectores bases de la descomposición A, λ los valores característicos y el valor de $p \leq \min(m, n)$ indica el número de términos resultantes después de truncar el desarrollo para evitar la inestabilidad. El número p indica las dimensiones efectivas del problema después de eliminar la inestabilidad mientras que m y n son las dimensiones originales de los vectores de datos e incógnitas, respectivamente.</p>

I.3.2 Inversión de problemas no-lineales

Muy a menudo, la relación entre datos e incógnitas es no-lineal. La mayor parte de los problemas directos en Geofísica son *no-lineales*, entre los cuales están los de ondas superficiales y corriente directa.

Una primera opción para resolver los problemas no-lineales es la aplicación de métodos de búsqueda. Uno de los más exitosos es el evolutivo-genético. En realidad, no es un método sino una gran cantidad de ellos que compiten en cuanto a precisión, exactitud, tiempo de CPU, eficiencia computacional, etc. Otros métodos en esta línea son los métodos de búsqueda completa, de Monte Carlos, “simulated annealing”, simplex, y muchos otros. Su inconveniente es el rápido incremento en el volumen de cálculos a medida de que aumenta el número de incógnitas. En general, este método hace prohibitivo determinar más de unas 10 incógnitas en computadoras de fácil acceso.

Una alternativa, más económica computacionalmente, es linealizar el problema directo y aplicar las metodologías desarrolladas para el caso lineal; el esquema resultante se itera en busca de la convergencia del resultado. El tipo más socorrido de linealización utiliza la aproximación de una función por su plano tangente en un punto particular x_o (desarrollo de Taylor). En este caso, a partir de una relación no-lineal de $y = A(x)$ se obtiene la aproximación lineal (13).

$$y(x_o + \delta x) = A(x_o) + \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x_o} \cdot \delta x \quad (12)$$

$$\delta y_o = \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x_o} \cdot \delta x_o \quad (13)$$

La linealización se puede aplicar a toda la función objeto, lo que nos lleva al *método de Gauss-Newton*. Una segunda opción más simple es aplicar la aproximación (13) sólo en el término que describe la norma de los residuales en la función objeto; Frez (2012) ha comprobado que, para un problema cuasi-lineal,

como la inversión de datos MT, ambos métodos son numéricamente equivalentes. La segunda opción se aplica en esta Tesis; su aplicabilidad se comprueba por los ejercicios de simulación.

La simplicidad de la ecuación (13) anterior es sólo aparente. Por ejemplo, $A(x)$ puede ser un operador integral mientras que y y x pueden representar más de una función y estar sujetas a discontinuidades. En esos casos, es necesario definir cuidadosamente las derivadas parciales e incluir la posición de cada discontinuidad como incógnita. En (13), los datos δy_0 vienen a ser los residuales respecto a la solución inicial o previa x_0 y las incógnitas δx_0 son la perturbación a esa solución. La relación (linealizada) entre ambas está dada por la matriz de derivadas parciales; en particular, las derivadas de cada dato a cada propiedad del subsuelo. Esta matriz de sensibilidad es también referida como el jacobiano (generalmente, se usa el símbolo J) del problema. Las dimensiones de esta matriz es de $m \times n$ (número de datos por número de incógnitas).

Las dificultades asociadas a este método de linealización son: a) la obtención, por cálculo analítico o por diferencias finitas, de las derivadas parciales; b) la necesidad de hacer el cálculo anterior tantas veces como la convergencia de la solución lo indique; c) la construcción de una solución inicial que no debe estar muy lejos de la final para garantizar la convergencia del método a un mínimo absoluto de la función criterio; d) la posible influencia de los términos no-lineales que se desprecian en el desarrollo; e) la dependencia de la solución a la solución inicial. Lo último implica que diversas soluciones iniciales pueden producir diversas soluciones al finalizar el proceso iterativo. A ello, debemos agregar la posible inestabilidad del problema linealizado cuya fuente son las relaciones aproximadamente lineales entre los vectores columnas (equivalentemente, entre los vectores filas) de la matriz de derivadas parciales. El buen éxito de la aplicación de esta técnica depende de la bondad de la aproximación del plano tangente a la

función $y = A(x)$. En una forma más rigurosa, la linealización se aplica a la función criterio e, indirectamente, a la función que describe el problema directo. Si esta función no cambia muy rápidamente en las cercanías de la solución inicial y final, decimos que el problema es cuasi-lineal, en la escala de la perturbación que andamos buscando. Bajo la hipótesis de cuasi-linealidad, la *colinealidad* (relación lineal entre filas o entre columnas de la matriz de derivadas parciales) indica redundancia e inestabilidad en el problema inverso, por lo cual se recurre a técnicas de estabilización como las que se describieron en la sección anterior.

I.3.3 Evaluación de la solución

La evaluación de la solución a problemas inversos no-lineales ha sido abordada de diferentes maneras. Algunos autores discuten la importancia del modelo inicial en la solución del problema inverso linealizado (Tarantola, 2005).

En lo que concierne a la inversión de datos de ondas superficiales, diversos autores (Foti *et al.*, 2003; Strobbia, 2002; Orozco, 2003; Wathelet, 2005; Pei, 2007) analizan los factores que influyen en la estimación final. En particular, hay que tomar en cuenta la incertidumbre en los puntos seleccionados de la curva de dispersión, el número de capas, espesores, profundidad mínima y máxima del modelo inicial. Otros aspectos discutidos en la literatura es la evaluación de los parámetros de adquisición (muestreo espacial y temporal) y el procesado de datos para obtener las curvas de dispersión (Strobbia, 2002, entre otros).

En datos de corriente directa, es necesario considerar la profundidad máxima cuya estructura es necesario determinar (Barker, 1989; Oldenburg y Li, 1999), para lo cual es necesario elegir la configuración de los electrodos (Oldenburg, 1978); del mismo modo, el período máximo de una curva de dispersión indica la profundidad máxima que puede alcanzar la inversión.

Este trabajo utiliza dos formas cuantitativas de evaluar la bondad de la estimación de las propiedades geofísicas (resistividad y velocidad de onda S); ellas son el análisis de las matrices de resolución y de covarianzas del modelo estimado. Al respecto, se pueden encontrar antecedentes en la literatura; por ejemplo Iman *et al.* (1973), Tarantola (2005), Menke (1989), Parker (1994), Miller y Routh (2007), Xia *et al.* (2008 y 2010), entre otros.

I.3.3.1 Resolución

En la estimación de un modelo a partir de datos reales surge la cuestión de qué tan real es el modelo estimado respecto al verdadero. Si se elige una solución estable que ha convergido en el esquema iterativo, con residuales pequeños y estable, entonces es posible estimar la matriz de resolución de ese modelo. El concepto de resolución tiene que ver con la limitación para ver pequeñas características en el interior del Tierra; es decir, hay un límite inferior para el tamaño de una característica en la curva de la propiedad estimada; por ejemplo y obviamente, no es posible “ver” características menores a la longitud de onda mínima del tren de onda con que se esculta la estructura. Este concepto fue introducido en Geofísica por Backus-Gilbert (1967 y 1968) aunque proviene de la Estadística, donde está ligada al concepto del sesgo de una solución para un problema indeterminado. En problemas lineales generalmente una solución es evaluada a través de la matriz de resolución del modelo. Para problemas no-lineales, la matriz de resolución sólo puede ser calculada aproximadamente. En el caso lineal, podemos acoplar las dos ecuaciones que definen los problemas directo e inverso: $y = Ax + e$; $\hat{x} = Hy$ que producen $\hat{x} = HAx + He$. Esta última ecuación indica que la estimación contiene dos filtros que miden la bondad de la estimación; por un lado, el producto $R = HA$ (la matriz de resolución) que deforma el modo que \hat{x} ve a x (o sea, a la realidad) y el término He que trasmite la propagación del error a través de la matriz pseudo-inversa H . Obviamente, si $HA = I$ no existe error de resolución del mismo modo

de que, en el caso indeterminado, $H \rightarrow \infty$ y el error de propagación es máximo. De este modo, la ecuación que mide el error de una estimación es:

$$x - \hat{x} = (HA - I)x + He \quad (14)$$

Los dos términos representan el error de resolución o sesgo y el de transmisión del error observacional. Así, la estabilización de un problema inverso inestable (o indeterminado) consiste en balancear los dos tipos de errores: el de resolución o sesgo y el de propagación de los errores de medición. Se pierde resolución a costa de ganar estabilidad y viceversa.

Existen dos metodologías para obtener aproximadamente a la matriz de resolución en el caso no-lineal. El primer método es tomado del algoritmo de inversión regularizada Gauss-Newton y estimación de resolución en MT 1D (Frez, 2012). El cálculo aproximado de la matriz de resolución se basa en las siguientes relaciones aproximadas (Frez, 2012), donde los subíndices indican la última iteración que produjo un resultado convergente.

$$R = G_i J_i \quad (15)$$

$$G_i = (J_i^T J_i + \alpha D^T D)^{-1} J_i(\hat{x}_i)^T \quad (16)$$

donde R es la matriz de resolución, G_i es la pseudo-inversa, J_i , el Jacobiano, y \hat{x}_i es el estimador óptimo, donde el subíndice corresponde a la última iteración.

Cada fila de una matriz de resolución en la ecuación (15) se interpreta como los coeficientes de una combinación lineal de los “valores verdaderos” de las incógnitas que producen el valor estimado correspondiente a esa fila.

Para el caso no-lineal, el cálculo de la matriz de resolución es sólo aproximado si no se usa el método de Gauss-Newton; sin embargo, las equivalencias numéricas encontradas por Frez (2012) nos da confianza de que son suficientemente aproximadas. El error total no se puede conocer porque x no se conoce.

Una segunda metodología para calcular la resolución (Parker, 1994) consiste en usar una aproximación discreta de la matriz de resolución definida como:

$$R_i = H\{F[\delta(z - z_i)]\} \quad (17)$$

donde F es el operador directo, H el operador inverso y $\delta(z - z_i)$ un operador delta ubicado en la profundidad z_i . En la última iteración, el operador delta es aplicado al modelo a diferentes profundidades; con ello, se obtienen las filas de la matriz R_i .

La Figura 3 y Figura 4 (Frez, 2012) muestran las funciones de resolución obtenidas a partir de aplicar ambas metodologías en la inversión de datos magnetotelúricos (1D). Nótese de las figuras el aumento del ancho de las funciones de resolución. Este efecto puede ser cuantificado a través de la “longitud de resolución”, por ejemplo, (Ballard, 2009) utiliza la definición:

$$R_{L,i} = \frac{\sum_{j=1}^n r_{ij}^2}{r_{ii}^2} \Delta z \quad (18)$$

donde r_{ij} son las filas de matriz de resolución, r_{ii} la diagonal principal de la matriz y Δz el incremento en profundidad. Valores grandes de la longitud de resolución $R_{L,i}$, indican un rango grande en que el estimador es un promedio en profundidad de la solución “verdadera”.

En las aplicaciones que se presentan en el capítulo IV se aplica la metodología de Parker (1994) para el cálculo de resolución en los modelos estimados por inversión secuencial.

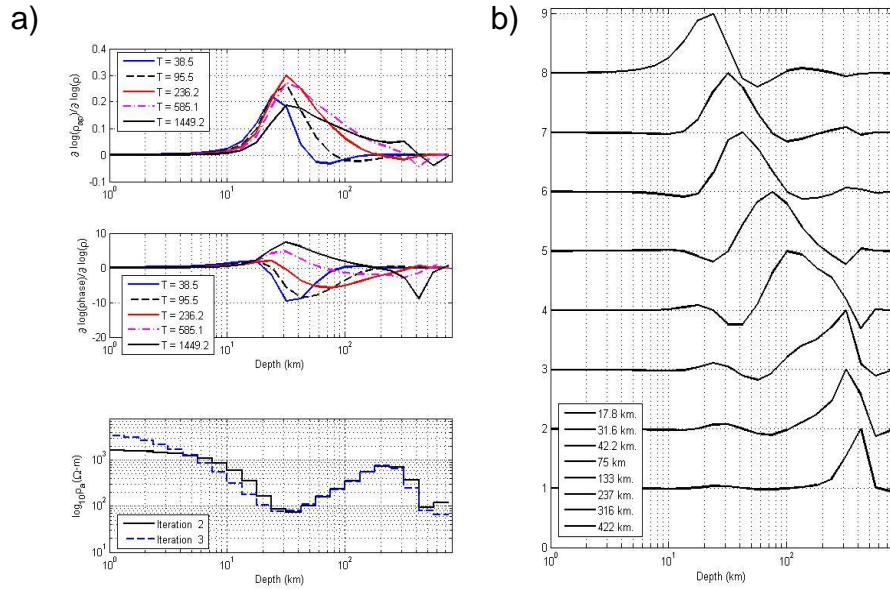


Figura 3. Resultados para datos de MT (Constable *et al.*, 1987). a) Derivadas parciales de los modelos ajustados en las últimas 2 iteraciones; b) funciones de resolución para la última iteración a diferentes profundidades. Tomado de Frez (2012).

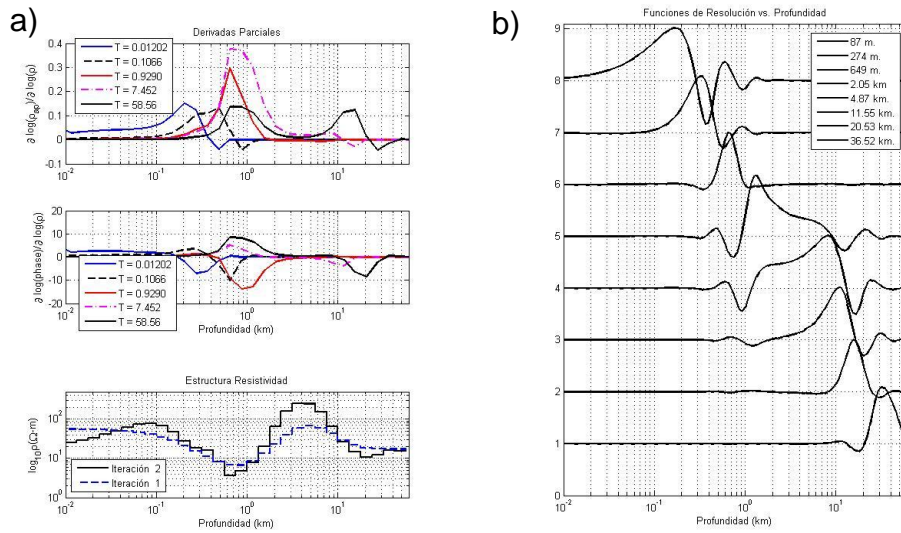


Figura 4. Aplicación de la metodología de Parker (1994) a los datos de la Figura 3. Tomado de Frez (2012).

I.3.3.2 Matriz de covarianzas

La variabilidad del modelo estimado es medida por la matriz de covarianzas de la solución. Este concepto cuantifica la transmisión del error observacional tal como fue explicado en la sección anterior. Las siguientes ecuaciones describen el cálculo de las barras de error del modelo estimado.

$$P = G_i C_{ee} G_i^T \quad (19)$$

$$\text{var}(x_j) = p_{jj}; \quad \sigma_j = \sqrt{p_{jj}} \quad (20)$$

Aquí, el subíndice i indica la última iteración mientras que j señala la componente del vector o matriz, según el caso; σ_j representa la desviación estándar como medida de variabilidad. Igualmente que para la resolución, este cálculo es aproximado en el caso no-lineal.

En el Capítulo IV (aplicaciones a datos reales), la evaluación de resultados se hace a partir de la resolución y la desviación estándar de los parámetros obtenidos por inversión secuencial, para cada tipo de datos con las expresiones aproximadas (15) o (17), para la matriz de resolución, y (20), para la desviación estándar.

I.4 Antecedentes: inversión de curvas de dispersión de ondas superficiales y resistividad aparente

El problema inverso para datos de dispersión de ondas superficiales Rayleigh o sondeos geoelectricos, tiene numerosas soluciones en la literatura (para referencias, ver más abajo).

El uso de ondas superficiales (SW) para la caracterización del interior de la Tierra fue introducido por los sismólogos para determinar la estructura cortical y del manto (Ewin, 1957; Dorman, 1960; Bullen, 1963; Knopoff, 1972; Kovach, 1978; entre muchos otros). Diversos autores han desarrollado la adquisición, procesado y técnicas de inversión, por mencionar algunos, McMechan y Yedlin (1981); Gabriels

(1987); Tokimatsu (1995); Tselentis y Delis (1998); Herrmann (2002); Park (1999); Xia *et al.* (1999); Louie (2001); Wathelet (2005).

Para el caso de aplicaciones a Ingeniería Civil, un método aplicado al estudio de pavimentos es el Análisis Espectral de Ondas Superficiales (SASW, por sus siglas en inglés), introducido por Nazarian y Stokoe (1984). El uso de ondas de Rayleigh para determinar el amortiguamiento de suelos fue discutido por Lai y Rix (1998). Park (1999) propone la técnica Análisis Multicanal de Ondas Superficiales (MASW, por sus siglas en inglés).

En la determinación de curvas de dispersión de ondas superficiales a partir de registros de ruido sísmico, se destacan los siguientes métodos: Autocorrelación Espacial (SPAC, por sus siglas en inglés) introducido por Aki (1957); Refracción de Microtremores (ReMi, por sus siglas en inglés) propuesto por Louie (2001); Fuente activa y pasiva (MASW y SPAC en línea) implementado por Hayashi (2003). Actualmente, se han desarrollado metodologías que permiten incrementar el alcance en profundidad a partir de arreglos circulares de dimensiones pequeñas sin estación en el centro (CCA, por sus siglas en inglés), una implementación de este método fue realizado por Rodríguez y Cruz Hernández (2010).

La mayoría de autores resuelve el problema inverso empleando el modo fundamental de propagación de ondas superficiales. El concepto de modos es explicado con más detalle en el Capítulo II. En general, es deseable obtener un conjunto de modos normales, desde el fundamental hasta el tercer o cuarto modo alto, ya que entrega mucha más información independiente en el proceso de inversión. Sin embargo, esta Tesis contiene sólo aplicaciones con el modo fundamental de Ondas Rayleigh lo que se debe a la dificultad para obtener mediciones de los modos altos. Para más detalles respecto a inversión de modos superiores ver los trabajos de Xia *et al.*, (2003).

En cuanto al método eléctrico, éste fue uno de las primeras técnicas introducidas en la exploración geofísica (Schlumberger y Wenner, 1915). Inicialmente, la forma de interpretar los datos medidos en campo se hacían con curvas patrones (Orellana y Mooney, 1966). Una diversidad de autores ha desarrollado técnicas automáticas de inversión de datos de resistividad aparente (Oldenburg, 1978; Inman, 1975; Parker, 1984; Constable *et al.*, 1987; Zohdy, 1989; Esparza y Gómez-Treviño, 1997; Muiuane y Pederson, 1999; Slaoui *et al.*, 2003; Vedanti *et al.*, 2005; Ekinci y Demirci, 2008, entre muchos).

I.5 Antecedentes: inversión conjunta

En general, buscamos utilizar varias mediciones geofísicas para que la información total: a) ayude a eliminar la indeterminación de la información separada y b) complemente la información individual de cada base de datos. Como resultado, se espera mejorar la unicidad del resultado. Es común, además, incorporar información adicional como la de pozos. Por otro lado, la incompatibilidad entre modelos obtenidos de manera separada por diferentes tipos de datos geofísicos, se debe a la diferencia en la física del modelado directo, errores en las observaciones, el grado de no unicidad en la solución de cada problema inverso y la calidad de los datos. Esta incompatibilidad se manifiesta, por ejemplo, en la determinación de profundidades distintas para una interface incluyendo la posibilidad de que un conjunto de datos no la vea. Una forma de reducir estas diferencias consiste en llevar a cabo un modelado conjunto de la información con la suposición de que la información de los datos puede complementarse y es suficiente. Un resultado ampliamente utilizado para conectar las inversiones separadas es la existencia de relaciones funcionales entre las funciones incógnitas; ellas se obtienen empíricamente (por ejemplo, entre V_p y densidad) o por consideraciones teóricas.

En los últimos años, han aparecido nuevas metodologías en la literatura que buscan complementar la información de bases de datos distintas; ellas se asocian

a los nombres de inversión simultánea, cooperativa, secuencial o conjunta. Por ejemplo, Lines *et al.* (1988) proponen una forma de invertir dos conjuntos de datos dentro de un mismo algoritmo, conocida como inversión secuencial. Esta se basa en la idea de que, por ejemplo, los contrastes de densidad y de velocidad de ondas sísmicas ocurren en fronteras comunes. De esta manera, la geometría y los valores de velocidad sísmica, obtenidos después de invertir datos sísmicos, son usados como información adicional en el algoritmo de inversión de datos gravimétricos. Una idea similar fue aplicada por Nath *et al.* (2000) y Saunders *et al.* (2005); ellos usan los resultados de la inversión de datos sísmicos de refracción para incorporarla en la inversión de datos de resistividad eléctrica. Así, la mejor resolución que tienen los datos sísmicos (reflexión y refracción) para determinar la existencia y posición de discontinuidades complementa a la inversión de otros datos, menos sensibles a la profundidad de las interfaces.

Haber y Oldenburg (1997) y Linde *et al.* (2008) proponen una metodología que denominan “inversión conjunta”. Estos autores la definen como la inversión simultáneamente de los datos combinados.

Otra técnica de inversión conjunta usa la restricción de que el producto cruz de los gradientes de cada incógnita sea nula (o mínima); ella fue desarrollada por Gallardo y Meju (2003, 2004). Este criterio de “similitud estructural” funge como información adicional (o restricción en forma de igualdad) en un esquema regularizado; los resultados han sido exitosos en aplicaciones para estructuras 2D (Gallardo, 2004; Saucedo Andrade, 2007) y 3D (Fregoso Becerra, 2010); obviamente, no se puede aplicar en el caso 1D.

A escala de corteza, se han aplicado recientemente algoritmos genéticos que combinan datos 1D de funciones receptor, ondas superficiales y sondeos magnetotolerúricos (Moorkamp *et al.*, 2010). Herrmann y Ammon (2002) combinan ondas superficiales con funciones receptor. Rix y Lai (1998) incorporan la atenuación en inversión de ondas superficiales. Moro y Pipan (2005) desarrollan un

algoritmo evolutivo para la inversión de curvas de dispersión y reflexión de tiempos de viaje. Piatti *et al.* (2010) invierten datos de ondas superficiales y sísmica refracción. Monteiro Santos *et al.* (1997), implementan un algoritmo de inversión 1D para datos AMT (Audiomagnetotelerico) y resistividad. Yang y Tong (1999) invierten conjuntamente datos de resistividad de corriente directa (DC), transitorios electromagnéticos (TEM) y magnetotelúricos (MT). A escala somera, se han desarrollado algoritmos 1D de inversión conjunta de datos de ondas superficiales y sondeos geoelectricos. En esta metodología el modelo inicial es común para cada conjunto de datos en cuanto al número de capas y la posición de las discontinuidades, en el proceso de inversión los datos son combinados en un mismo sistema de ecuaciones (Hering *et al.*, 1995; Comina *et al.*, 2002).

En resumen, para llevar a cabo la inversión conjunta es necesario establecer una característica o relación que sea común a los dos conjuntos de incógnitas ya sea una relación funcional entre ambas o coincidencia en discontinuidades o similitud estructural. La similitud implica una relación positiva entre ambas variables que puede llegar a un paralelismo en la variación; no es difícil tratar el caso de relación negativa. La Tabla II resume la situación actual en este campo.

Para el caso particular de inversión de V_s y ρ , que emplea relaciones entre las propiedades geofísicas del subsuelo en estructuras someras, tanto los estudios hechos (Comina *et al.*, 2002; Moorkamp *et al.* 2007, entre otros) como el realizado en esta Tesis, concluyen en que no existen relaciones universales entre V_s y ρ . En el capítulo siguiente, la Tabla IV y Tabla VII muestran valores medidos. Por otro lado, sabemos que la presencia de fluidos en rocas aumenta la conductividad eléctrica o disminuye la resistividad y que, también, incrementa la atenuación sísmica y disminuye V_s . Como resultado, tenemos una posible relación positiva entre V_s pero los datos empíricos no señalan una que sea universal.

Tabla II. Metodologías de inversión conjunta.

Metodologías para inversión conjunta	Descripción
Relaciones directas entre los incógnitas	Se acoplan las propiedades petrofísicas través de relaciones teóricas o empíricas (Nielsen y Jacobsen, 2000; Afnimar <i>et al.</i> , 2002; Musil <i>et al.</i> , 2003; Kowalsky <i>et al.</i> , 2006; Colombo y De Stefano, 2007; Jegen <i>et al.</i> , 2009).
Fronteras comunes	Posición de interfaces comunes, generalmente incorporado por métodos sísmicos (Lines <i>et al.</i> , 1988; Nath <i>et al.</i> , 2000; Saunders <i>et al.</i> , 2005).
Similitud en la dependencia espacial	Relaciona los conjuntos de datos a través de criterios estructurales entre las propiedades petrofísicas. La posición de los mayores cambios en las propiedades están señaladas por valores altos del operador Laplaciano (Zhang y Morgan, 1997; Haber y Oldenburg, 1997). Esta posición debería definir, en teoría, las fronteras estructurales de las unidades del subsuelo y por lo tanto deberían de hacerse coincidir en dos imágenes geofísicas. Otra técnica se concentra en analizar la dirección de los cambios en las propiedades físicas como indicadores de los cambios en la estructura del subsuelo. En esta aproximación, se toma el producto cruz de los gradientes de dos propiedades físicas como una medida cuantitativa de la similitud estructural de dos modelos geofísicos. Si este producto es cero, entonces los cambios en ambas propiedades físicas son colineales o existe paralelismo y por lo tanto se pueden definir como estructuralmente similares. Dado que no existe ningún requisito en la magnitud de los cambios en las propiedades físicas analizadas, el criterio de similitud resulta ser versátil, por lo que se puede aplicar a cualquier par de imágenes con pocas restricciones en su uso (Gallardo y Meju, 2003, 2004; Tryggvason y Linde, 2006; Monteiro Santos <i>et al.</i> , 2006; Pilkington, 2006; Gallardo, 2007; Linde <i>et al.</i> , 2008). Sin embargo, el criterio de similitud no es universal y debe ser comprobado en cada aplicación.

Para obtener relaciones empíricas entre las propiedades e incluirlas en el algoritmo de inversión; es necesario tener una gran cantidad de observaciones. Algunos autores (Carcione *et al.*, 2007; Jegen *et al.*, 2009) han formulado estas relaciones a partir de la información proporcionada por registros de pozo.

En conclusión, la similitud funcional entre estas dos propiedades (V_s y ρ) no es universal aunque se puede por lo menos usar como hipótesis de prueba para ser

contrastada con los resultados de la inversión. Los datos de la Figura 5 proporcionados por Acosta Chang (2010 y 2011) señalan similitud a periodos y aberturas mayores pero su existencia para valores más pequeños es dudosa.

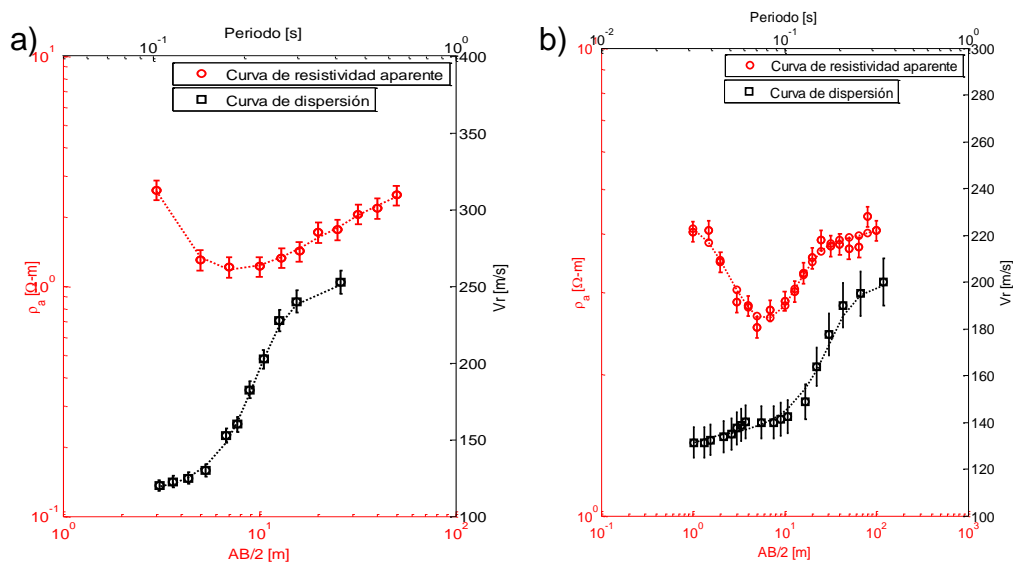


Figura 5. Curvas de resistividad aparente y dispersión de ondas superficiales Rayleigh en el sitio a) Río Nuevo y b) Solidaridad en Mexicali (Acosta-Chang, 2010 y 2011). Nótese un incremento positivo en la curvas de resistividad aparente a mayores aberturas $AB/2$; las velocidades de fase también crecen a los periodos más largos. Así, los datos indican un incremento en V_s y ρ a profundidad; sin embargo, esta tendencia no es clara a profundidades muy someras.

I.6 Objetivos

El propósito principal de esta Tesis es invertir en forma conjunta datos de dispersión de onda superficiales Rayleigh y sondeos geoelectricos de corriente directa, que permitan incorporar varios tipos de información en la exploración de estructuras someras y facilitar su interpretación. Para este propósito se implementará en lenguaje MatLab un esquema de inversión secuencial y de inversión conjunta en estructuras 1D. Para lograr esto, se plantearon los siguientes objetivos:

1. Recopilar códigos computacionales que resuelven el problema directo, incluyendo el cálculo de las derivadas parciales.
2. Desarrollar un algoritmo que resuelva el problema inverso por separado para cada conjunto de datos en un lenguaje común.
3. Desarrollar un esquema de inversión secuencial.
4. Desarrollar un método de inversión conjunta.
5. Comprobación de los métodos desarrollados con datos sintéticos sin y con ruido.
6. Aplicación de los métodos con datos reales que han sido utilizados previamente.

CAPÍTULO II

INVERSIÓN SEPARADA DE CURVAS DE DISPERSIÓN DE ONDAS SUPERFICIALES RAYLEIGH Y DE RESISTIVIDAD APARENTE

Este capítulo describe los aspectos generales del método sísmico de dispersión de ondas superficiales Rayleigh y el método geoelectrico de corriente directa en la modalidad de sondeo eléctrico vertical arreglo Schlumberger. Además, formula la inversión por separado (desacoplada) como primera etapa de esta Tesis.

II.1 Dispersión de ondas superficiales Rayleigh

II.1.1 Aspectos generales

Una perturbación en un medio infinito se propaga de acuerdo a las propiedades elásticas y no-elásticas del material. En la onda P (primaria o compresional), el movimiento de la partícula en el interior del cuerpo es paralelo a la dirección de propagación; el efecto que produce en el medio es un conjunto alternado de dilataciones y compresiones. Por otro lado, si el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación se trata de una onda S, también llamada transversal, de cizalla, secundaria, de corte o cortante. Las ondas P y S son conocidas como *ondas internas*.

Para un modelo de capas y de variación de las propiedades con la profundidad, la transmisión de los rayos sísmicos se describe con los principios de Fermat, Huygens y la Ley de Snell con lo que explicamos tanto la refracción como la reflexión de las ondas internas en cada interface de las capas.

Además de estos fenómenos, la energía sísmica puede quedar atrapada en la superficie de la Tierra debido al contraste de impedancias en cada frontera y al aumento de la velocidad con la profundidad. Esta energía se propaga como ondas

superficiales (Love y Rayleigh). La onda Rayleigh es una combinación de la componente vertical de la onda S (SV) y la onda P que se da en el plano vertical de propagación. Su movimiento es elíptico, retrógrado y la amplitud del modo fundamental de propagación decrece con la profundidad. En casos de capas internas de baja velocidad, la energía queda atrapada en el canal con muy poca transmisión de energía fuera de él; esto hace difícil detectar la existencia de capas de baja velocidad, particularmente con mediciones del modo fundamental.

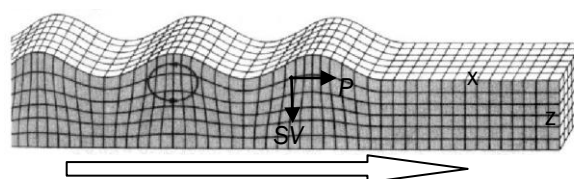


Figura 6. Onda Rayleigh.

II.1.2 Descripción general del método

Un sismograma es un registro de la propagación de las ondas en el tiempo en un punto espacial, generalmente, en la superficie. La velocidad de propagación de una componente monocromática de un arribo es la velocidad de fase (V_r) mientras que aquella que mide la propagación de un grupo de ondas es la velocidad de grupo (U). Las velocidades de ondas superficiales son, en medios estratificados, dispersivas; es decir, su velocidad depende del periodo (o frecuencia) al revés de las velocidades de ondas internas en que no existe dispersión salvo efectos menores debido a la atenuación. La inversión de las mediciones de estas velocidades permite obtener la velocidad de la onda S y, en casos particulares, la de la onda P .

Las velocidades de fase de ondas superficiales Rayleigh que se utilizan en esta Tesis resultan de métodos pasivos; es decir del análisis de registros de ruido sísmico ambiental (Aki, 1957; Louie, 2001; Hayashi, 2003; Rodríguez y Cruz

Hernández, 2010; entre otros) y/o de métodos activos, es decir, de fuente controlada (Nazarian y Stokoe, 1984; Park, 1999). La combinación de ambos permite estimar la estructura de velocidad de corte mediante un análisis del campo de ondas superficiales contenido en los registros sísmicos. La Figura 7 muestra sismogramas que contienen ondas Rayleigh.

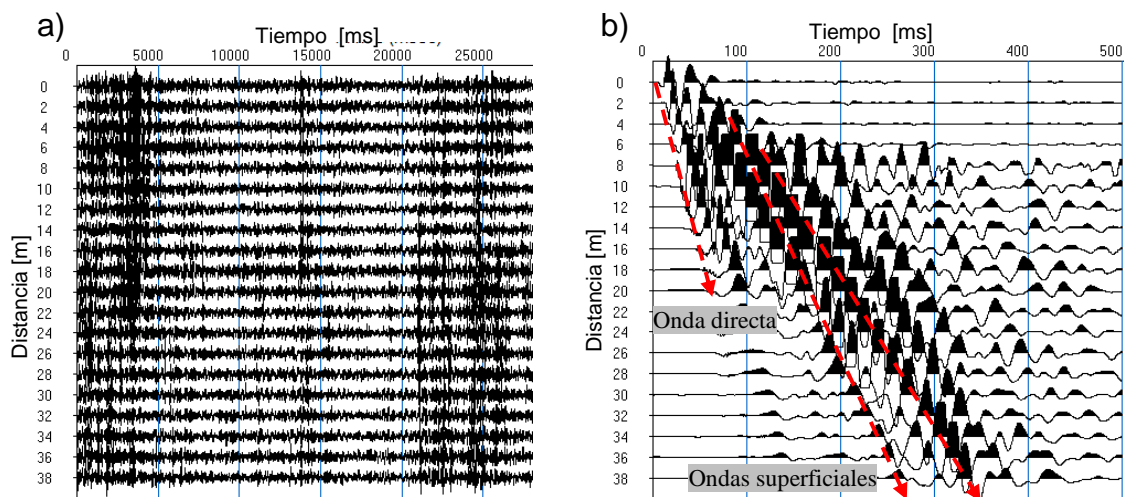


Figura 7. Sismograma de ruido sísmico ambiental en a) y fuente controlada en b). La figura b) muestra muy claramente la onda directa y el tren de ondas superficiales dispersivas en el sitio Solidaridad, en Mexicali. Datos proporcionados por Acosta Chang (2010).

Un adecuado registro temporal y espacial de ondas superficiales para propósitos de inversión de estructura requiere tomar en cuenta varios factores; específicamente, el objetivo del estudio, la geometría del arreglo, el número de sensores, su frecuencia natural, la duración de los registros y el número de muestras por segundo.

Debido al carácter dispersivo de las ondas superficiales, es necesario utilizar técnicas espectrales que transforman los registros sísmicos al dominio de velocidad de fase (o número de onda) contra frecuencia (McMechan y Yedlin, 1981). (Dominio $\{f,k\}$, en la nomenclatura usual de la literatura). La correlación de los máximos espectrales produce una o varias **curvas de dispersión** (V_r) y, como

resultado, se obtiene la dependencia de la velocidad de propagación con la frecuencia o el periodo (Figura 8). La Tabla III entrega detalles de estas técnicas.

Tabla III. Métodos espectrales para obtener la curva de dispersión.

Método	Sísmica	Autores
Análisis de ondas superficiales	Activa	Herrmann y Ammon, 2002.
Autocorrelación espacial (SPAC, por sus siglas en inglés)	Pasiva	Aki, 1957; Hayashi, 2003, Okada, 2003;
Transformación al dominio F-K (Frecuencia contra número de onda)	Pasiva	Lacoss <i>et al.</i> , 1969; Kvaerna y Ringdahl, 1986; Capon, 1969.
Refracción de microtremores (ReMi)	Pasiva	Louie, 2001; García Puertos, 2005.
Análisis espectral de ondas superficiales (SASW, por sus siglas en inglés)	Activa	Nazarian y Stokoe, 1984
Análisis multicanal de ondas superficiales (MASW, por sus siglas en inglés)	Activa	Park <i>et al.</i> , 1999
Arreglos circulares sin estación central (CCA, por sus siglas en inglés)	Pasiva	Cho <i>et al.</i> , 2004; Rodríguez y Cruz Hernández, 2010.

La Figura 9 presenta la curva de dispersión correspondiente que resulta del procedimiento bosquejado anteriormente. Los datos fueron proporcionados por Acosta Chang (2010), y son empleados en esta Tesis en el capítulo IV.

La curva de dispersión se interpreta de la siguiente manera. Las velocidades de fase de onda Rayleigh de menor periodo corresponde también a menores longitudes de onda (λ); por lo tanto al detalle somero de la estructura. Los datos a periodos más grandes indican longitudes de onda mayor y se asocian a la estructura más profunda. En una etapa final, se estiman modelos de velocidades de onda de corte del subsuelo.

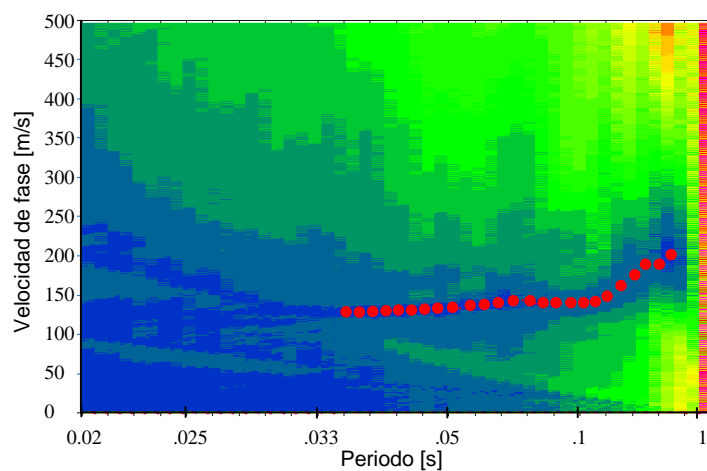


Figura 8. Amplitudes espectrales en el dominio del periodo contra la velocidad de fase; los sismogramas son de ruido sísmico ambiental. La curva de dispersión se obtiene por correlación de los máximos espectrales a partir del apilado de 10 ventanas de ruido y corresponde al modo fundamental de las ondas Rayleigh. En el procesado, se utiliza los datos del sitio Solidaridad en Mexicali proporcionados por Acosta Chang (2010).

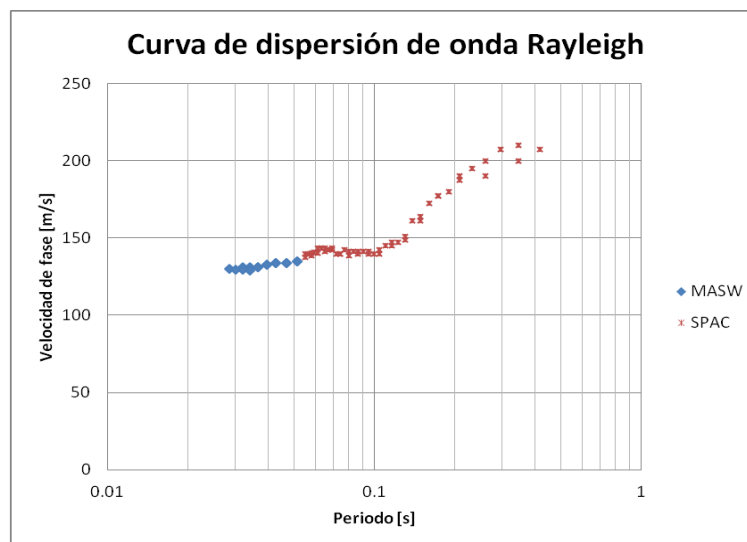


Figura 9. Curva de dispersión correspondiente al sitio Solidaridad. La información a periodos cortos resulta del método de fuente controlada (MASW); su complemento a periodos largos del método pasivo (SPAC).

La siguiente tabla muestra a modo de resumen un rango de valores típicos de velocidades promedio de onda S a 30 m conocido como V_{s30} , reportados por la

National Earthquake Hazards Reduction Program (NEHRP por sus siglas en inglés, 1993). La clasificación de tipos suelos descrita en esta tabla será utilizada posteriormente en esta Tesis.

Tabla IV. Modificación de los códigos NEHRP y (EC- 8, 2004).

Tipo de suelo	Descripción	Vs30 [m/s]
A	Roca dura	>1500
B	Roca	760-1500
C	Suelo muy denso	360-760
D	Suelos arenosos	180-360
E	Suelos blandos	<180
S1	Depósitos de suelos con arcillas tipo zona del lago de la cuenca de México	<100

II.1.3 El problema directo

Dada una estructura sísmica, el problema directo consiste en calcular tanto las velocidades de fase como las derivadas parciales correspondientes; la metodología matemática y las ecuaciones o procedimientos correspondientes forman el núcleo de los paquetes de computación correspondientes.

II.1.3.1 El caso de un semi-espacio homogéneo

En un semi-espacio elástico, homogéneo e isótropo, la velocidad de fase de ondas Rayleigh sólo depende de las velocidades de ondas P (V_p) y S (V_s); lo anterior implica dependencia de la relación de Poisson (σ) o, lo que es equivalente, de la razón de velocidades V_p/V_s . La velocidad de fase, V_r , es ligeramente inferior a la velocidad de la onda S, aproximadamente $0.9194V_s$ cuando $\sigma = 0.25$. La ecuación a resolver fue descubierta por John W. Strutt, Lord Rayleigh, en 1887 y es la siguiente:

$$\left(2 - \frac{Vr^2}{Vs^2}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{Vr^2}{Vp^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{Vr^2}{Vs^2}\right)^{1/2} \quad (21)$$

donde Vr es la velocidad de fase de la onda Rayleigh, Vs la velocidad de la onda S y Vp , la velocidad de la onda P. La solución satisface la condición $0 < Vr < Vs < Vp$.

II.1.3.2 Dispersión para estructuras 1D

En la realidad, el subsuelo suele estar formado por capas de diversas propiedades elásticas y, en una primera aproximación, se le considera como un medio elástico estratificado de capas planas (caso especial de modelos 1D). Bajo estas condiciones, la solución se complica ya que se introduce la dependencia de Vr con el periodo o la frecuencia. Un ejemplo básico para visualizar de manera sencilla este fenómeno es la propagación de ondas guiadas en una capa de fluido de espesor (h) y densidad (d) sobre un semiespacio elástico, homogéneo e isótropo. En la superficie libre ($z = h$) la componente normal del esfuerzo es nulo. En la base de la capa ($z = 0$), la componente vertical del desplazamiento también es cero. Al considerar las condiciones limítrofes y resolviendo en términos de los potenciales escalares y vectoriales, se obtiene la ecuación de dispersión.

$$Vr(\omega) = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{Vp^2} - \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 \frac{1}{h^2 \omega^2} \right\}^{1/2}} \quad (22)$$

En la expresión anterior, ω es la frecuencia angular, Vp la velocidad de la onda P, h el espesor de la capa superficial. Contrario al caso de un semi-espacio elástico, homogéneo e isótropo que corresponde a la ecuación (21), la ecuación (22) implica que la velocidad de fase depende de la frecuencia lo que justifica el término “onda dispersiva”. La ecuación de dispersión es una consecuencia de introducir una capa de dimensiones finitas (espesor finito, h) dentro del problema, ya que la velocidad dependerá de la longitud de onda y del espesor de la capa. Esta situación resulta

cada vez que V_s crece con la profundidad lo que produce el atrapamiento de energía sísmica en las capas superiores; además, puede haber atrapamiento de energía sísmica en zonas de baja velocidad.

La ecuación (22) contiene el entero n que toma un número creciente de valores discretos. Para cada valor de n , la relación entre V_r y ω es diferente; lo que significa que se tienen modos diferentes de propagación. El caso $n=0$ corresponde al *modo fundamental*; los demás se llaman *modos altos*. Las curvas $V_r(\omega)$ son llamadas curvas de dispersión.

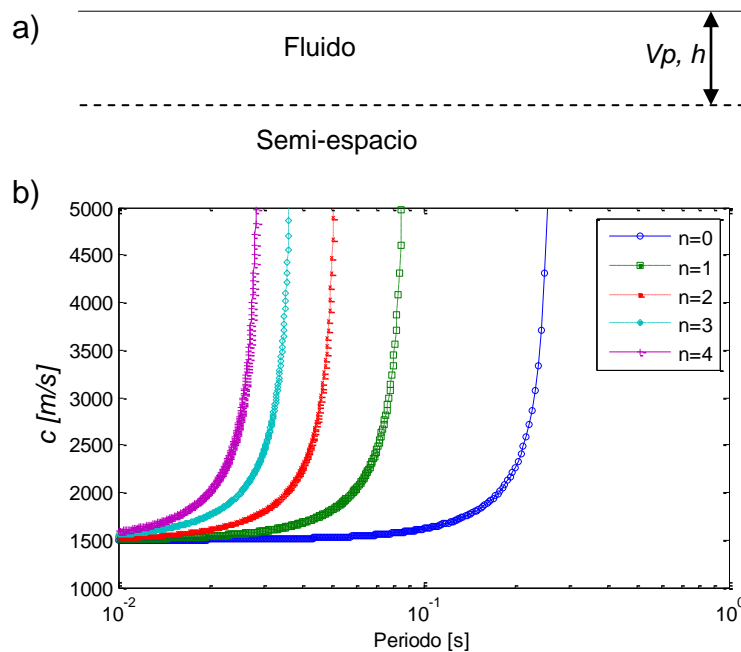


Figura 10. Curvas de dispersión correspondiente a una capa de líquido de espesor de 100 metros sobre un semi-espacio, graficadas en función del periodo. a) Es el modelo y en b) su respuesta donde $n=0$ es el modo fundamental y $n>0$ los modos superiores.

La Figura 10 muestra un ejemplo de la respuesta de un medio compuesto por una capa sobre un medio semi-infinito que viene a ser el caso más simple de una estructura 1D. Ambas capas son homogéneas.

II.1.3.3 El caso de n capas elásticas, homogéneas e isotrópicas

En el caso de n capas elásticas para la propagación de ondas Rayleigh, el procedimiento es más complicado al explicado anteriormente y se resuelve a través de formulaciones matriciales. Las primeras soluciones a este problema fueron entregadas por Thomson (1950) y Haskell (1953). Subsecuentemente, el método ha sido modificado por diversos autores (Dorman y Ewing, 1962; Knopoff, 1964; Herrmann, 2002; Dunkin, 1965; y muchos otros) y, esencialmente, corresponde al método de matrices de propagación que es de uso común para integrar numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales (Thomson, 1950 y Haskell, 1953).

Las ecuaciones de la elastodinámica son en derivadas parciales que se reducen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para el caso en que la estructura es 1D, o sea sólo dependiente de la profundidad, y después de aplicar las transformadas integrales adecuadas en el tiempo y en la coordenada espacial paralela a la superficie de la Tierra. La integración de este sistema se realiza más frecuentemente con los métodos de matrices de propagación aunque existe la opción de integrar directamente el sistema de ecuaciones (ver ambas opciones en, por ejemplo, Takeuchi y Saito, 1972). Para el más complicado caso de estructuras en 2D o 3D, se debe acudir a métodos de diferencias finitas o de elementos finitos. Esta Tesis sólo trata el caso de estructuras 1D.

La solución del problema directo corresponde a un problema de valores característicos para el sistema de ecuaciones diferenciales donde los valores característicos corresponden a las frecuencias de vibración de los modos normales y los vectores característicos, a los modos o desplazamientos de la vibración en función de la profundidad. Lo anterior resulta porque el problema matemático-numérico es de dos fronteras con condiciones limítrofes de esfuerzos nulos en la superficie de la Tierra y de desplazamientos nulos en profundidad; en las interfaces, se aplica condiciones de continuidad adecuadas. Al satisfacer

numéricamente ambas condiciones de frontera resulta el problema de valores característicos; es decir, aparece una restricción que implica una relación funcional entre la frecuencia y el número de onda ω , o, alternativamente, entre la velocidad de fase y la frecuencia para el modo fundamental y los modos altos. El aumento de una unidad en el modo implica una oscilación de cada vector o función característica (es decir, en desplazamiento y esfuerzo) en función de la profundidad; El caso P - SV (ondas Rayleigh) está sujeto a inestabilidad numérica que básicamente implica que una de las soluciones básicas del sistema domina numéricamente a las otras tres en el sistema de dimensiones 4×4 de ecuaciones diferenciales. Este problema fue resuelto de varios modos en la década de los 60s del siglo pasado y todos los programas de cómputos existentes controlan la inestabilidad numérica para los primeros modos y, con mayor razón, para el modo fundamental que es el único utilizado en este trabajo de Tesis.

Tabla V. Resumen de métodos que resuelven el problema directo de ondas superficiales Rayleigh.

Métodos de propagación de matrices	Métodos de integración estándar
Matriz de transferencia (Thomson, 1950; Haskell, 1953)	Elemento finito (Lysmer y Drake, 1972)
Matrices de propagación (Gilbert y Backus, 1966)	
Matriz de rigidez (Kausel y Roesset, 1981)	Diferencia finita (Boore, 1972)
Coeficientes de reflexión y transmisión (Kennett, 1983; Luco y Aspel, 1983)	Integración numérica (Takeuchi y Saito, 1972)

En general, los modelos de estructura de la Tierra se describen con funciones continuas sujetas a un número finito de discontinuidades finitas (interfaces). Los

métodos de matrices de propagación discretizan la dependencia continua de tal modo de que se forman capas tan delgadas como se quiera o necesite. La integración de una capa homogénea se realiza analíticamente con funciones cosenos y senos; el resto consiste en aplicar las condiciones de continuidad en las interfaces y en la doble frontera para resolver el problema de valores característicos. Los métodos de integración completa aplican métodos estándares como el de Runge-Kutta o el predictor-corrector en vez de aproximar por capas delgadas homogéneas.

La solución al procedimiento explicado anteriormente es conocida como la solución a la ecuación de dispersión (ecuación del periodo, secular o característica) la cual queda representada como una función implícita de la frecuencia, velocidad de fase, espesor y velocidad de onda P y S. La ecuación característica es no-lineal, en su forma implícita se representa como:

$$F(f_i, Vr_i, Vs_j, Vp_j, d_j, h) = 0, (i=1,2,\dots,m) \text{ y } (j=1,2,\dots,n) \quad (23)$$

donde f_i es el vector frecuencia; Vr_i , al vector de velocidad de fase de onda Rayleigh; m es el número de datos en la curva de dispersión; Vs_j y Vp_j son vectores que contienen las velocidades de onda S y P; d_j , al vector de densidades; n es el número de capas incluyendo el semiespacio; h_j , el vector de espesores donde j toma valores desde 1 hasta $n-1$.

Los códigos numéricos que resuelven el problema directo han sido escritos en lenguaje FORTRAN (Saito, 1988; Herrmann, 2002; Zeng y Anderson, 1995), C++ (Wathelet, 2005), y MatLab (Lai y Rix, 1998; Chapman, 2003). Este trabajo emplea el código de Lai y Rix (1998) basado en el método modificado de coeficientes de reflexión y transmisión generalizado (Hisada, 1994); las derivadas parciales se calculan usando el método variacional (Takeuchi y Saito, 1972). Este último cálculo fue comprobado por el método de cociente de diferencias usando varios casos.

También se comprobaron los cálculos comparando resultados con los programas de SDISP96 (Herrmann, 2002) y GEOPSY (Wathelet, 2005). Las comprobaciones no están reportadas en esta Tesis.

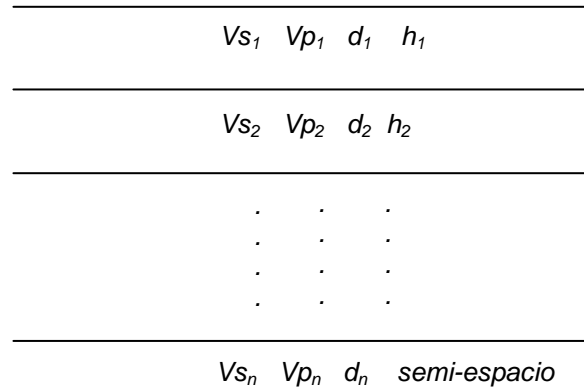


Figura 11. Modelo elástico 1D de n capas.

II.1.4 Sensibilidad de la velocidad de fase a partir del problema directo

El problema directo de dispersión de ondas superficiales Rayleigh depende de las propiedades que caracterizan al subsuelo; es decir, cómo V_s , V_p y la densidad varían con la profundidad así como de la posición y contrastes de las interfaces. La mayor parte de la literatura señala que las variaciones en V_s son más importantes que las de V_p y de la densidad (Garland, 1979; Carmichael, 1989; Xia *et al.*, 1999) para producir variaciones en las velocidades de fase. Por ejemplo, Xia *et al.* (1999) entrega resultados en que se examina la variación de las velocidades de fases que resultan de cambios de un 25% en cada propiedad del medio. La Tabla VI entrega el modelo utilizado y la Figura 12, los resultados.

Tabla VI. Propiedades del modelo.

No. Capa	Vp [m/s]	Vs [m/s]	d [gr/cm ³]	h [m]
1	650	194	1.82	5
2	750	270	1.86	5.3
3	1400	367	1.91	5.5
4	1800	485	1.96	5.8
5	2150	603	2.02	6.2
Semi-espacio	2800	740	2.09	0

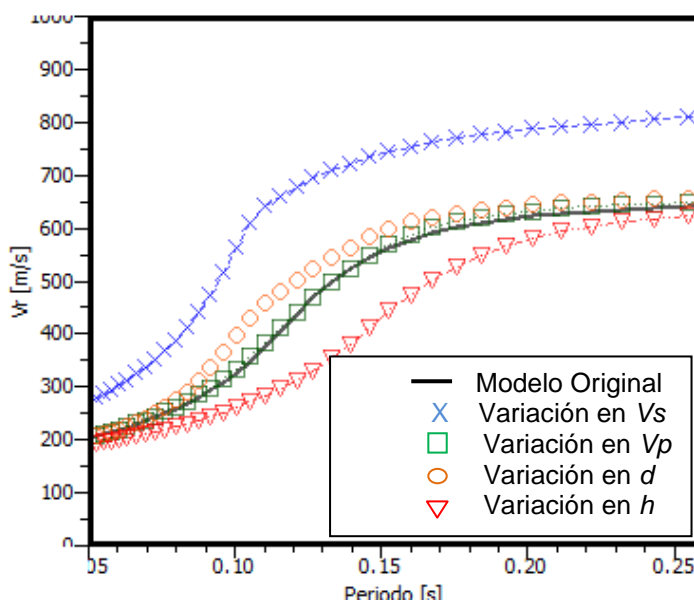


Figura 12. Respuesta en la velocidad de fase de onda Rayleigh debido a cambios de un 25% en cada propiedad del modelo; los resultados indican que Vs es el argumento más importante en este caso.

La curva de dispersión muestra mayor diferencia respecto al modelo original debido al cambio en la estructura de velocidades de onda S; las variaciones en las otras propiedades no producen cambios significantes. Sin embargo, hay casos en los cuales la velocidad de la onda P es importante en la determinación de la velocidad de fase. La ecuación (21) presenta un caso extremo al respecto. En este sentido, el análisis de sensibilidad de Frez y Cruz (2011) indican que, en estructuras someras típicas como un medio semi-infinito homogéneo y en medios estratificados donde $V_p/V_s > 3$, la velocidad de fase de las ondas Rayleigh no

depende de V_p . En general, es preferible contrastar la importancia de V_p en la inversión con el cálculo de las derivadas parciales. Por ejemplo, la estructura utilizada para generar la Figura 12 tiene $V_p/V_s > 3$. Es necesario recordar al respecto que ningún experimento numérico puede probar o demostrar un resultado general.

En Ingeniería Civil, el mayor interés corresponde a la respuesta de suelos sedimentarios. Los ejercicios de aplicación en esta Tesis son para el Valle Mexicali y corresponden a ambientes sedimentarios para los cuales $V_p/V_s > 3$; por lo tanto, V_p no se incluye en la inversión.

II.2 El método geoelectrico de corriente directa

II.2.1 Teoría básica

La propagación de campos electromagnéticos en el interior de la Tierra se basa en las ecuaciones de Maxwell. El método geoelectrico de corriente directa con fuente controlada es un caso especial de métodos electromagnéticos de frecuencia nula. La ley de Ohm en medios continuos describe el fenómeno de corriente directa.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (24)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente, σ la conductividad (su inverso es la resistividad ρ) y \mathbf{E} el campo eléctrico. La densidad de corriente en un punto tiene la misma dirección que el campo eléctrico, siendo proporcional a él. Si el campo es conservativo, \mathbf{E} se expresa a través del gradiente de un potencial escalar V .

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (25)$$

Entonces, la ecuación (24) se expresa como:

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\rho} \nabla V \quad (26)$$

Al aplicar la ecuación de continuidad ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$) e identidades vectoriales, se obtiene la ecuación fundamental de corriente directa en medios heterogéneos (modelos 2D y 3D).

$$\nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \nabla V \right) = \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \nabla V + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla V = 0 \quad (27)$$

En medios homogéneos e isótropos la ecuación (27) y la distribución del potencial eléctrico satisfacen la ecuación de Laplace. En el caso de modelos 1D, la ecuación a resolver es de la forma:

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 V = 0 \quad (28)$$

La solución de la ecuación (28) para una fuente puntual de corriente en la superficie de un subsuelo homogéneo e isótropo en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$V(r) = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (29)$$

donde I representa la corriente y r el radio. Al inyectar corriente con una fuente A y un sumidero B, entonces la resistividad en un medio homogéneo se puede obtener directamente al medir la diferencia de potencial (ΔV), la corriente inyectada (I) y las distancias de las fuentes (r).

II.2.2 Descripción general del método

En los métodos geoelectrónicos de corriente directa, las corrientes eléctricas fluyen en el terreno mediante arreglos electródicos; la resistencia al paso de la corriente es función de la resistividad del material que es una propiedad intrínseca del mismo (Orellana, 1982). Así, por medio del registro de las resistividades, se puede inferir las condiciones generales de litología, distribución geológico-estructural, humedad y saturación de agua de las capas del subsuelo en el área circundante al sitio del registro eléctrico.

Esta Tesis emplea los datos proporcionados por el arreglo electródico Schlumberger ampliamente usado en exploración geoelectrónica y conocido como sondeo eléctrico vertical. La técnica consiste en un arreglo tetraelectródico en el cual se hace circular corriente eléctrica a través de dos electrodos (A y B) al interior del subsuelo, dicha corriente genera un campo eléctrico que se distorsiona según las características de los materiales del subsuelo, el efecto de esta se mide en la diferencia de potencial entre dos electrodos receptores (M y N). La corriente viajando en el terreno cubre una amplia zona en pseudo-profundidad del orden de la mitad de distancia entre el primer electrodo de corriente y el último ($AB/2$). El experimento se repite aumentando la separación entre electrodos de corriente generando un nuevo dato que conforman la **curva de resistividad aparente** (ρ_a).

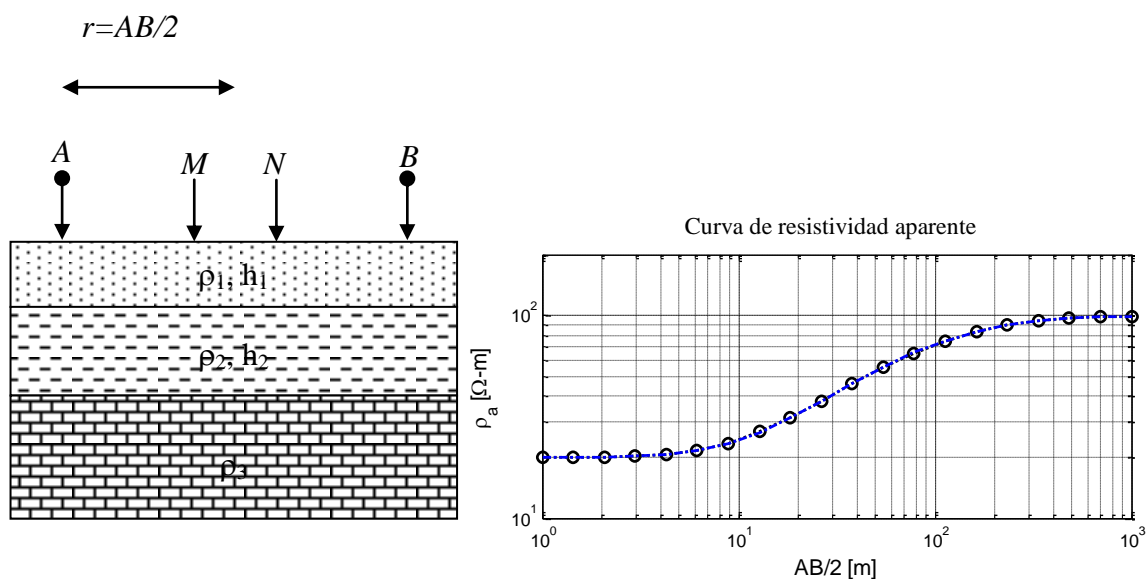


Figura 13. Distribución de los electrodos de medición y la curva de resistividad aparente.

Los valores de resistividad de una roca están determinados fundamentalmente por la porosidad y por la salinidad del agua más que por su composición mineralógica, granulometría, cantidad y calidad del agua de formación. Todo esto hace que la resistividad de cada tipo de roca presente una gran variación. En campo

encontramos valores que se encuentran en los intervalos que se muestran en la Tabla VII.

Tabla VII. Resistividades comunes de rocas y/o materiales y agua en diferentes estados.

Roca/Mineral/Material/Agua	Resistividad Ω-m
Arcillas	1 - 20
Arenas	50 - 500
Areniscas	50 - 5,000
Arenas y gravas secas	1,000 -10,000
Arenas y gravas con agua dulce	50 - 500
Arenas y gravas con agua salada	0.5 - 5
Arenas arcillosas	50 - 300
Arenas de cuarzo	30 -10,000
Aguas subterráneas en granito y rocas metamórficas.	20 - 100
Aguas subterráneas en calizas y acarreos	20 - 50
Aguas salobres	1 -10
Agua potable superficial	20 - 300
Agua de mar	<.02
Conglomerado	1,000 - 10,000
Calizas	300 - 10,000
Brecha volcánica	100 - 2000
Esquistos grafitosos	0.5 - 5
Esquistos arcillosos o alterados	100 - 300
Esquistos sanos	300 - 3,000
Granito	300 - 10,000
Gneiss y granito alterado	100 - 1,000
Gneiss sano	1,000 - 10,000
Gravas	100 - 10,000
Basaltos	300 - 10,000
Limos	30 - 500
Margas	50 - 5,000
Pizarras	100 - 1,000
Tobas volcánicas	20 - 100

En la práctica, la resistividad aparente para una apertura entre los electrodos de corriente se calcula mediante la ecuación:

$$\rho_a = K \frac{\Delta V}{I} \quad (30)$$

donde ρ_a es la resistividad aparente en $\Omega\text{-m}$, K es el factor geométrico en metros que depende de la separación tetra-electródica para este tipo de arreglos, ΔV es el diferencia de voltaje en volts provocado por el paso de la corriente e I la intensidad de corriente suministrada al terreno en Amperes.

II.2.3 El problema directo

En medios estratificados la resistividad aparente es el resultado de resolver la ecuación de Laplace en cada interfase al considerar las siguientes condiciones: el potencial es continuo, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al cruzar una frontera, la componente paralela de la densidad de corriente es discontinua, la componente normal de la densidad de corriente es continua y la componente normal del campo eléctrico es discontinua. La expresión que resulta al considerar las condiciones de contorno para un arreglo Schlumberger es (Koefoed, 1970):

$$\rho_a(r) = r^2 \int_0^{\infty} T(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (31)$$

donde r es la separación $AB/2$ de los electrodos de corriente, J_1 la función Bessel de primer orden, λ la variable de integración y T la transformada de la resistividad calculada por la ecuación recursiva:

$$T_j(\lambda) = \frac{T_{j+1}(\lambda) + \rho_j \operatorname{tgh}(\lambda h_j)}{1 + \frac{T_{j+1}(\lambda)}{\rho_j} \operatorname{tgh}(\lambda h_j)}, (j = n-1, \dots, 1) \quad (32)$$

donde ρ_j y h_j son las resistividades y espesores de la j -ésima capa, n el numero de capas incluyendo el semiespacio. En la última capa se cumple $T_n = \rho_n$.

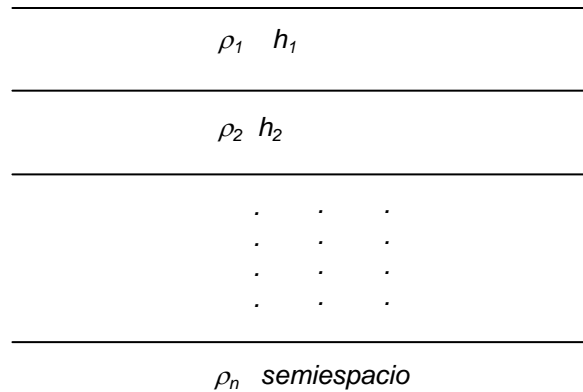


Figura 14. Modelo geoelectrico 1D de n capas.

No existe solución analítica de (32) para la resistividad aparente. El método más usado es el filtraje digital. La solución al problema directo con filtros lineales fue propuesto por Ghosh (1971a y 1971b) mediante una integral de convolución al hacer la transformada de Hankel de la función $T(\lambda)$. La resistividad aparente ahora puede ser escrita como:

$$\rho_a = \sum_k T(\lambda_k) f_k \quad (33)$$

donde f_k es el k -ésimo elemento del filtro.

Para propósitos de esta Tesis, el modelado directo y derivadas parciales programado en Fortran por Esparza y Gómez-Treviño (1997) es modificado y codificado a lenguaje MatLab. El algoritmo numérico utiliza filtros de Johansen (1975) debido a que son filtros relativamente largos que tienen una mejor precisión global.

II.3 Análisis de sensibilidad a partir de las derivadas parciales

Esta sección, analiza la sensibilidad de los datos observados (curva de dispersión y/o curva de resistividad aparente) a las propiedades del subsuelo (Velocidad de onda S y/o resistividad) en la aproximación lineal, para un modelo sintético, con el fin de probar la estabilidad numérica de las derivadas parciales.

La sensibilidad de los datos a las incógnitas en la aproximación lineal se mide en las derivadas parciales de las velocidades de fase de ondas superficiales Rayleigh con respecto a los cambios en velocidades de onda S (matriz de sensibilidad, J).

En corriente directa la sensibilidad se mide en las derivadas parciales de la resistividad aparente con respecto a las resistividades del subsuelo. En algunos casos es preferible trabajar con el logaritmo de la resistividad.

Para examinar la sensibilidad de los diferentes datos a cada una de las propiedades (V_s y ρ) se construyó un modelo sintético con valores típicos de velocidades de ondas de corte de suelos blandos y resistividades de materiales areno-arcillosos. Las derivadas parciales correspondientes a esta estructura están representadas en la Figura 15.

Tabla VIII. Modelo 1D.

Espesor [m]	ρ [Ω -m]	V_s [m/s]	V_p [m/s]	V_p/V_s	d [gr/cm ³]
2	10	100	300	3	1.1
6	20	150	450	3	1.1
8	40	200	600	3	1.1
semi-espacio	80	300	900	3	1.3

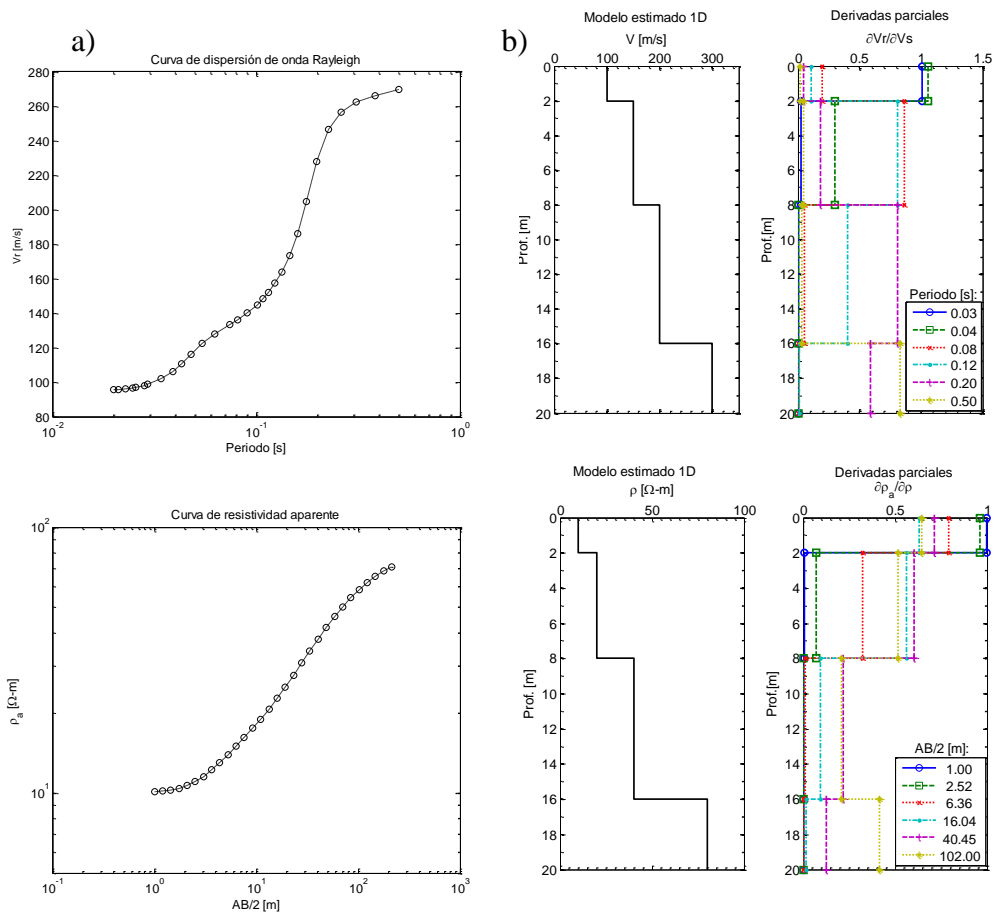


Figura 15. a) Datos observados de velocidades de fase para el modo fundamental y curva de resistividad aparente; b) derivadas parciales de cada conjunto de datos al modelo respectivo.

En las gráficas de la Figura 15b los datos de dispersión de onda Rayleigh a diferentes periodos muestran mejor sensibilidad para determinar la estructura hasta una profundidad de 16 metros. En los datos de resistividad aparente, la sensibilidad a la estructura de resistividades para diferentes aberturas (AB/2) disminuye a partir de los 8 metros.

II.4 Inversión regularizada en norma L_2

Se diseñó el algoritmo de inversión regularizada (optimización de los términos de la función objeto en norma L_2) por separado para ambos conjuntos de datos. A continuación, se explica la estrategia de solución para el caso de datos de

resistividad aparente que, en igual forma, se aplicó a los datos de dispersión de ondas superficiales.

La idea básica de este método de inversión es la suposición de suavidad en la variación de la resistividad del subsuelo. Numéricamente, la variación continua se representa por capas delgadas homogéneas. El objetivo de la inversión es encontrar un modelo que tenga mejor ajuste y suavidad (o rugosidad) óptimos; esto significa balancear dos características que tienen un efecto opuesto en la función criterio que necesitamos optimizar. Bajo estas condiciones se necesita definir cuáles son las características deseables en el modelo para cuantificarlas e introducirlas en la función criterio a optimizar. La función criterio es de la forma:

$$\min \left\{ \|y - F(x)\|_{C_{yy}^{-1}}^2 + \alpha \|D_p x\|^2 \right\} \quad (34)$$

donde, y representa el vector de datos observados; $F(x)$, la función del problema directo; x , a los parámetros del modelo; C_{yy}^{-1} , a la matriz diagonal de covarianzas que contiene el cuadrado de la desviación estándar de los datos en cada elemento de la diagonal principal; α es el parámetro global de regularización y D_p es la matriz de primera ($p=1$) o segunda ($p=2$) derivada. El primer término corresponde a la norma cuadrática de los residuales con lo cual se controla el ajuste de los datos; el segundo término representa el criterio de regularización a través de la suavidad del modelo. Cuando α toma valores grandes se le da más importancia a la suavidad que al ajuste; en caso contrario el ajuste tendrá mayor peso. En general la solución a la expresión anterior se resuelve linealizando el problema directo, el estimador es de la forma:

$$\hat{x}_{i+1} = (J^T J + \alpha D_1^T D_1)^{-1} J^T (y + J\hat{x}_i - \hat{y}_i) \quad (35)$$

donde J es la matriz de sensibilidad; D_1 es la matriz de primeras derivadas; y , los datos observados; \hat{x}_i corresponde al modelo estimado y \hat{y}_i , a su respuesta calculada en la iteración previa. La matriz de sensibilidad, los datos observados y la respuesta calculada están normalizados por los errores de observación.

El criterio de convergencia y ajuste se determina al calcular el residual cuadrático medio (*RMS*) definido como:

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - F(x_j))^2 / m} \quad (36)$$

La expresión anterior es normalizada por el error de los datos para trabajar independientemente de las unidades físicas y dar más peso a las mejores observaciones.

La solución se obtiene mediante un proceso iterativo siguiendo los siguientes pasos:

- 1) El algoritmo parte con un modelo inicial homogéneo de n capas con resistividad constante en profundidad.
- 2) Se calcula la respuesta del modelo y la matriz de sensibilidad.
- 3) Se define el rango del parámetro de regularización global espaciado a iguales pasos en escala logarítmica.
- 4) Para cada parámetro de regularización se calcula y actualiza el nuevo modelo y su correspondiente *RMS*.
- 5) En esta etapa se tiene en cuenta que el modelo con menor *RMS* sea estable. Se elige un *RMS* cercano a 1 pero que produzca una solución estable y residuales con conducta aleatoria.
- 6) Si se cumple un criterio de convergencia, donde la solución ya no cambia; entonces, se termina el proceso; en caso contrario, se actualiza el modelo y se repiten los pasos desde el paso 2).

En el siguiente diagrama se muestra en forma esquemática el proceso de inversión regularizada para el caso de corriente directa.

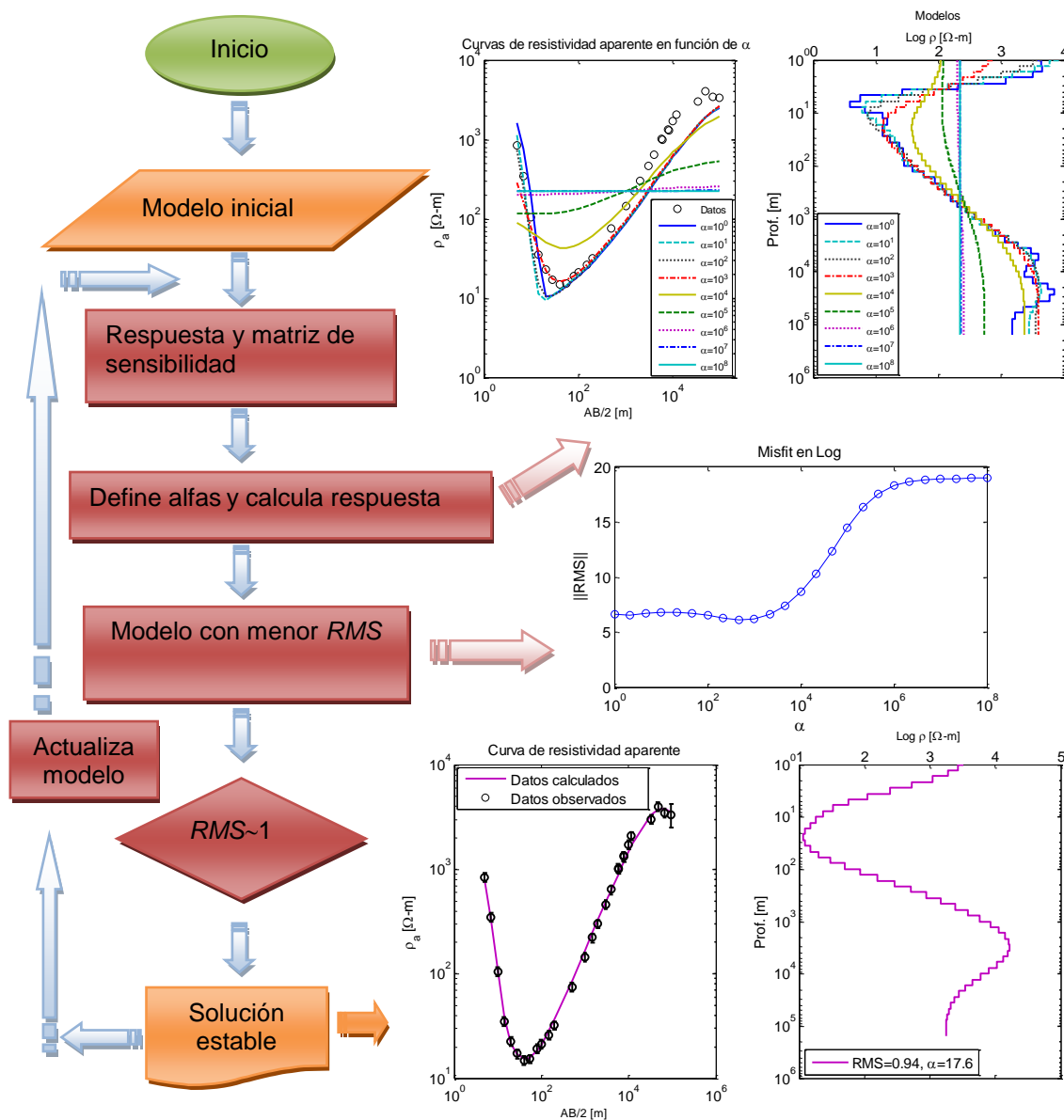


Figura 16. Diagrama de flujo del proceso de inversión regularizada en L_2 (corriente directa).

Con el propósito de validar la metodología descrita anteriormente, se estimó un modelo de resistividad a partir de los datos de Constable *et al.* (1987, Tabla 2). En la Figura 17 se observan los ajustes después de cinco iteraciones, así como el

RMS. El modelo inicial es un semi-espacio homogéneo de resistividad igual a 10^5 Ω -m. La Figura 18 compara nuestro resultado con el de Constable *et al.* (1987).

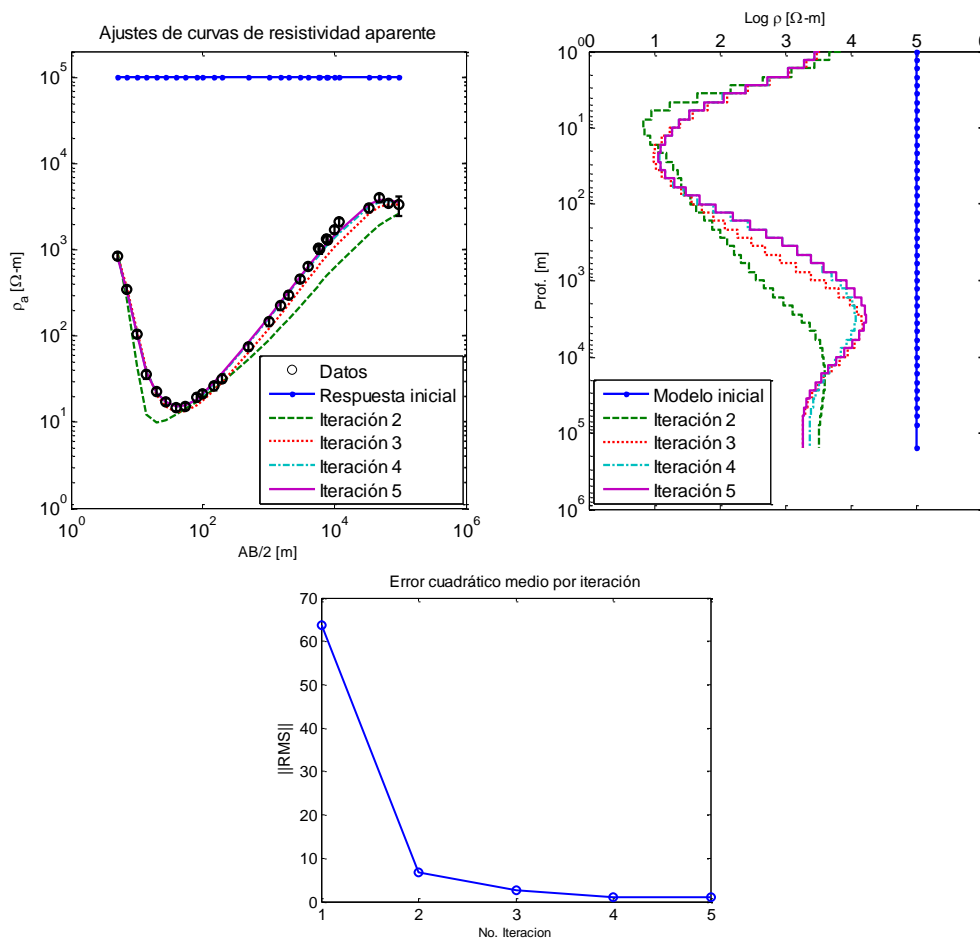


Figura 17. Ajuste después de 5 iteraciones. RMS normalizado por el error de los datos.

El algoritmo de inversión de datos de dispersión de ondas Rayleigh sigue el mismo procedimiento explicado anteriormente; la velocidad de onda P y la densidad se consideran fijos o se calculan a partir de relaciones empíricas a partir de la velocidad de onda S que es estimada en cada iteración. La Figura 19 muestra nuestros resultados con el de Frez (2010) y con el programa de SURF96 (Herrmann, 2002), para datos recopilados en Mexicali por Acosta Chang.

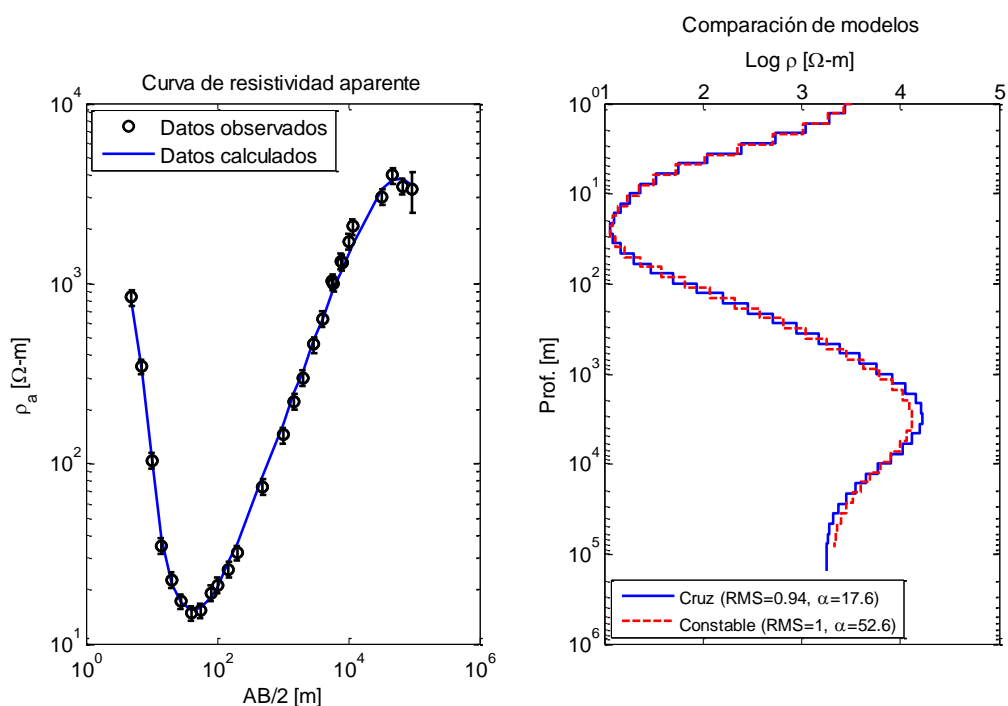


Figura 18. Comparación de modelos de resistividad.

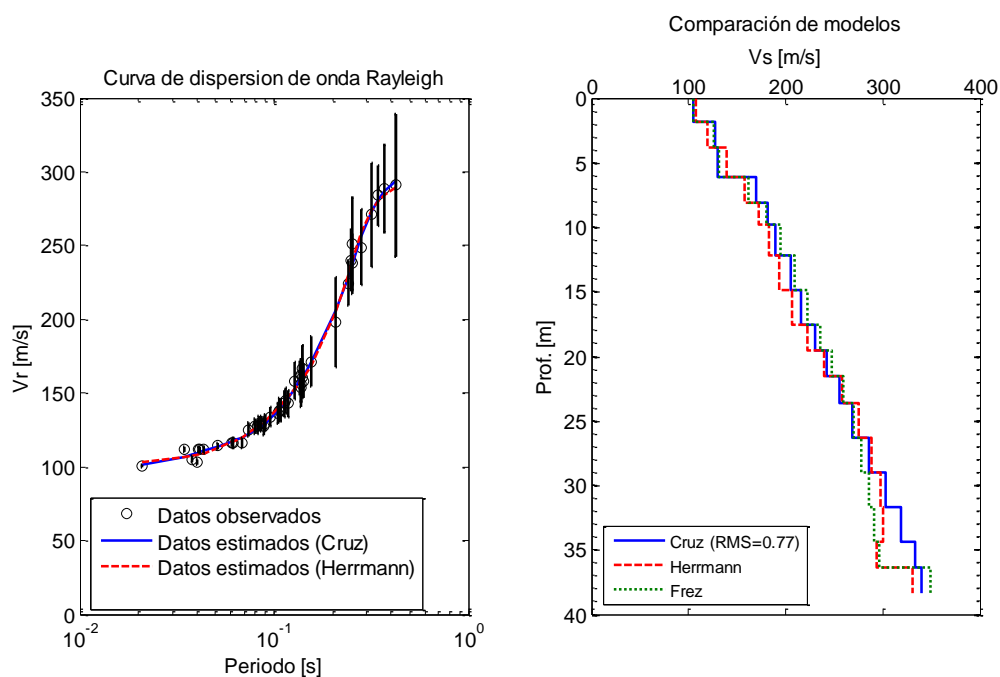


Figura 19. Comparación de modelos de velocidad que resultan de diferentes algoritmos de inversión. Nótese de la figura que la línea continua corresponde al modelo estimado por el algoritmo diseñado y las líneas punteadas los modelos estimados por diferentes autores.

CAPÍTULO III

DISEÑO DE ESQUEMAS DE INVERSIÓN SECUENCIAL Y CONJUNTA 1D DE CURVAS DE DISPERSIÓN DE ONDAS RAYLEIGH Y DE RESISTIVIDAD APARENTE

Este capítulo desarrolla los esquemas de inversión secuencial y conjunta implementados para esta Tesis; además, se explica el algoritmo numérico y se realizan pruebas de validación con modelos sintéticos.

III.1 Inversión secuencial

La necesidad de un esquema de inversión secuencial de dos tipos de datos, resistividad aparente y curvas de dispersión de ondas Rayleigh, se plantea ya que no existe una relación funcional entre las incógnitas correspondientes. La opción consiste en suponer que uno de los tipos de datos es más sensible a una incógnita común como lo es la profundidad de las interfaces que separan las capas. Por lo tanto, un análisis preliminar determina la sensibilidad de los dos conjuntos de datos a la presencia de discontinuidades y escoge aquel conjunto cuya sensibilidad produzca resultados suficientemente confiables. En el paso siguiente, la inversión fija los valores de las profundidades según lo encontrado en el primer paso. Obviamente, el procedimiento no funciona bien si es que la determinación de las profundidades que se obtiene en el primer paso no es confiable. Ejemplos de aplicación de este procedimiento son realizados, entre otros, por Lines *et al.* (1988), Nath *et al.* (2000), Saunders *et al.* (2005), Frez y Cruz (2011). Una complicación adicional es que la inversión con un término de regularización que usa norma L_2 enfatiza suavidad de curvatura y no la presencia de discontinuidades; la solución obvia es regularizar con norma L_1 . La optimización del término de regularización con norma L_1 enfatiza simplicidad de la pendiente de la función incógnita en su dependencia con la profundidad; es decir, enfatiza la presencia de capas homogéneas. Numéricamente, pareciera que este camino nos

lleva al uso de técnicas de programación lineal (Esparza y Gómez-Treviño, 1997) pero es posible eliminar esta complicación acudiendo a un método recursivo y reponderado con norma L_2 como se explica en la sección III.1.1.

Puede suceder que ambos tipos de datos sean igualmente sensibles a la profundidad de las discontinuidades y que produzcan las mismas profundidades; en particular, en el caso de experimentos con datos sintéticos sin ruido (16 cifras decimales significativas). En este caso, el carácter desacoplado se aplica a la inversión de cada conjunto de datos que se hace independientemente. Para casos de datos reales, con ruido típicamente de, digamos 5%, esto tiende a no suceder, como se reporta en los ejercicios de aplicación correspondientes.

III.1.1 Búsqueda de discontinuidades con uso de norma L_1 en el término de regularización

El procedimiento que se ha bosquejado ha sido utilizado por Frez y Cruz (2011) y proviene de la generalización de una metodología estándar (Watson, 1980) que se aplica comúnmente en la literatura (Weiszfeld, 1937; Watson, 2002; Haney, 2010; Borsic y Adler; 2012). En el cálculo iterativo, se pondera cada elemento del término de regularización con el correspondiente valor absoluto e inverso de la derivada obtenida en la iteración previa; con ello, se enfatiza los valores extremos de las derivadas, cero e infinito, y consecuentemente la presencia de capas homogéneas. El algoritmo numérico implementado funciona muy bien y en pocas iteraciones se obtiene convergencia. Este método, que simula norma L_1 se llama en la literatura “método de reponderación” (Gersztenkorn *et al.*, 1986). La función objetivo es de la forma:

$$\min \left\{ \|y - F(x)\|_{c_{y^1}}^2 + \alpha \|D_1 x\|_Q^2 \right\} \quad (37)$$

donde Q es el factor de ponderación para simular la norma L_1 a partir de la segunda iteración (Q es una matriz diagonal; cada elemento es el valor inverso de la derivada correspondiente en la iteración anterior). El diagrama de flujo es similar

al explicado en el capítulo anterior; en el proceso iterativo, se resuelve la función objetivo siguiendo los siguientes pasos:

- 1) El algoritmo inicia con un modelo homogéneo o lineal con la profundidad de n capas delgadas y de espesor constante.
- 2) Se calcula la respuesta del modelo y la matriz de sensibilidad, o sea, de derivadas parciales, en la aproximación lineal.
- 3) Definimos el rango del parámetro de regularización global, espaciado logarítmicamente.
- 4) Para cada parámetro de regularización, se calcula y actualiza el nuevo modelo y su correspondiente *RMS* que ya está normalizado por el error de los datos.
- 5) Elegimos aquel que balancea las características de estabilidad y de ajuste, generalmente con la inspección de gráficas de las soluciones y del ajuste (residuales).
- 6) Se aplica la ponderación al término de regularización a partir de la segunda iteración.
- 7) Si se cumple un criterio de convergencia, donde la solución ya no cambia; entonces, se termina el proceso; en caso contrario, se actualiza el modelo y se repiten los pasos desde el paso 2).

El siguiente diagrama representa en forma esquemática el proceso de inversión con simulación de norma L_1 . El ejemplo sintético muestra la discontinuidad a ~12 metros de profundidad.

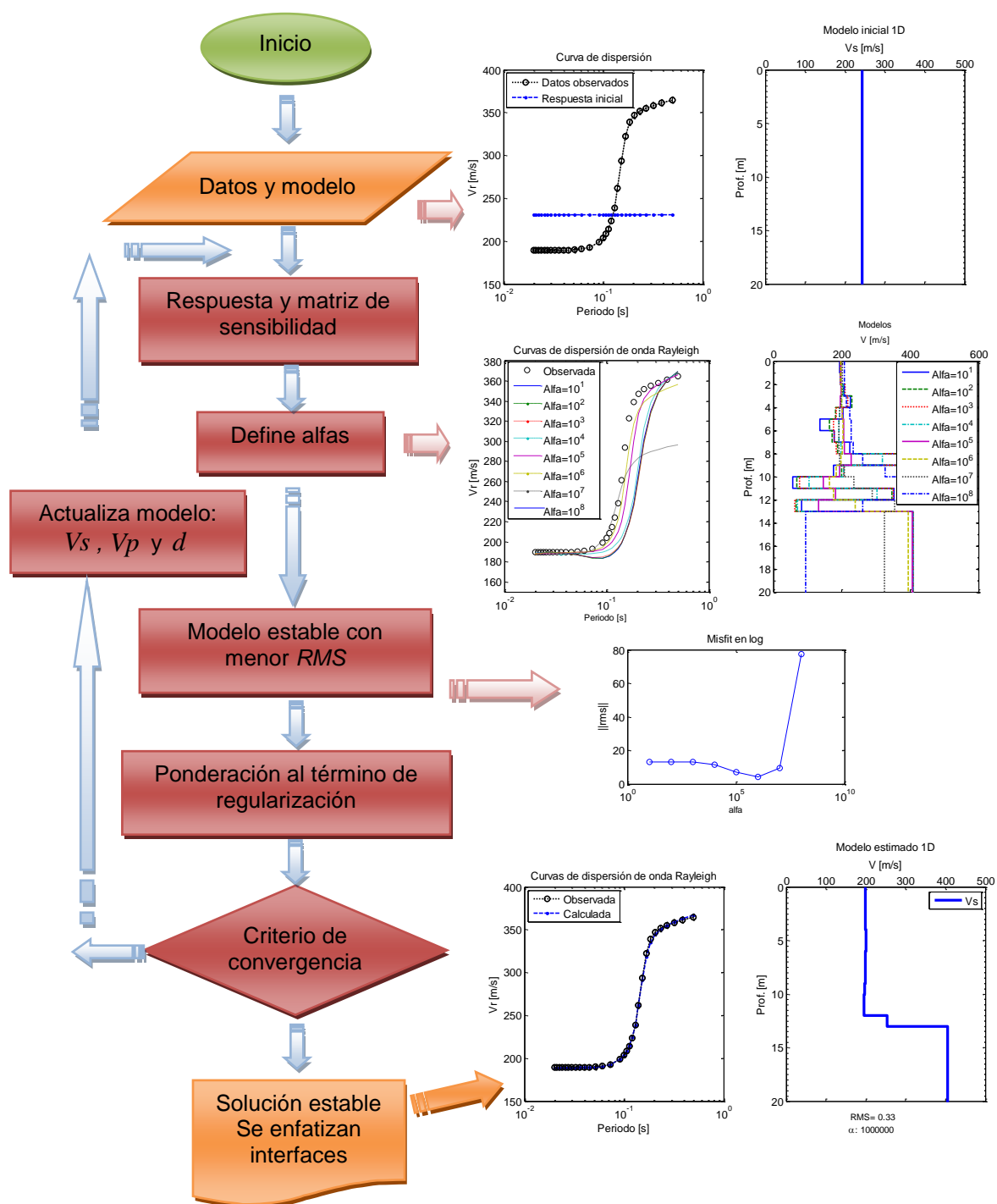


Figura 20. Diagrama de flujo del proceso de inversión que simula norma L_1 con datos de dispersión de ondas superficiales.

La gráfica siguiente muestra la evolución del ajuste de simulación de norma L_1 a partir de un modelo homogéneo de 12 capas sobre un semi-espacio. Nótese la convergencia del ajuste después de 5 iteraciones y la presencia de la discontinuidad. Los datos sintéticos no tienen ruido; o sea, tienen una exactitud de 16 cifras significativas.

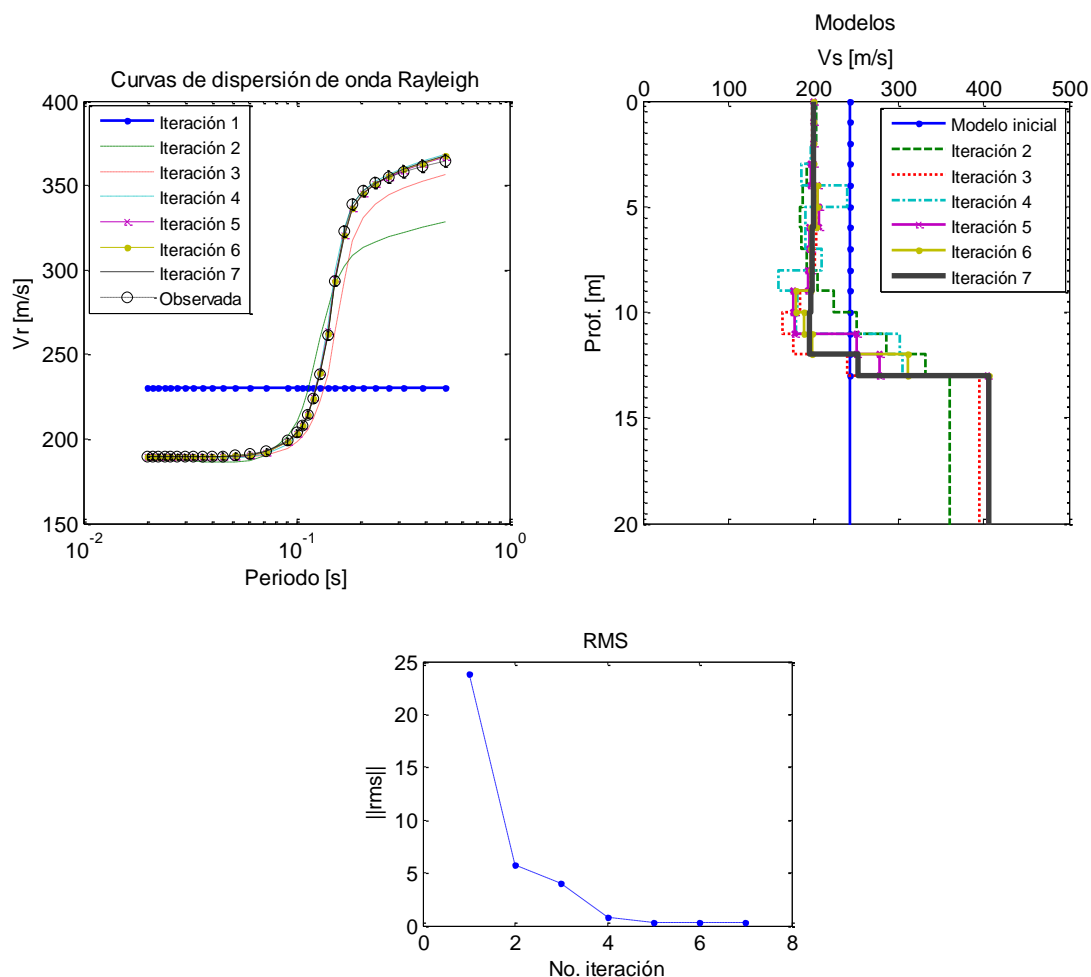


Figura 21. Convergencia en el ajuste de datos sintéticos después de 7 iteraciones.

En el segundo paso secuencial, es decir, después de que los espesores comunes para ambos datos quedan fijos, se ajustan los parámetros del subsuelo para cada capa. En esta última etapa, no se requiere estabilizar (regularizar) ya que el número de incógnitas se ha reducido drásticamente.

III.1.2 Validación con datos sintéticos

En la validación de esta metodología y estabilidad del algoritmo numérico, se realizaron pruebas con un modelo sintético. Los resultados obtenidos por la inversión separada de los datos (simulación norma L_1) se comparan con los resultados obtenidos después de obtener los espesores comunes de ambas estructuras en el primer paso.

a) Modelo A

El modelo “verdadero” consiste de 4 capas incluyendo el semi-espacio; la resistividad y las velocidades de ondas de corte varían de capa en capa. Los valores de las propiedades petrofísicas corresponden a valores típicos de sedimentos. La respuesta generada por ambos modelos consiste de 30 datos. No se agregó ruido; por lo tanto, los “datos” tienen 16 cifras significativas. La Tabla IX muestra las propiedades del modelo.

Tabla IX. Propiedades del modelo A. $V_p/V_s=3$, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ y $V_{s1} < V_{s2} < V_{s3}$.

Espesor [m]	ρ [Ω -m]	V_s [m/s]	V_p [m/s]	Densidad [g/cm^3]
2	10	100	300	1.1
6	20	150	450	1.1
8	40	200	600	1.1
semi-espacio	80	300	900	1.3

Los modelos iniciales son homogéneos, con valores de $\rho=30 \Omega-m$ y $V_s=151 m/s$, con 16 capas de espesor constante de 1 m. En la etapa de inversión en que se determina la profundidad de las discontinuidades, los modelos se recuperan después de 10 iteraciones con un $RMS=0.02$ en unidades físicas para cada tipo de dato (m/s y Ω -m, respectivamente). El modelo de resistividades corresponde al sintético (Figura 22a) y el modelo de velocidades muestra una

pequeña variación de velocidad a 8 m de profundidad con respecto al sintético (Figura 22b). Las dos inversiones recuperan al modelo sintético.

En la siguiente etapa de inversión secuencial, las profundidades quedan fijas a 2, 8 y 16 metros. Los modelos estimados recuperan totalmente al modelo sintético de resistividad en 5 iteraciones y el de velocidades de onda S, en 6 iteraciones.

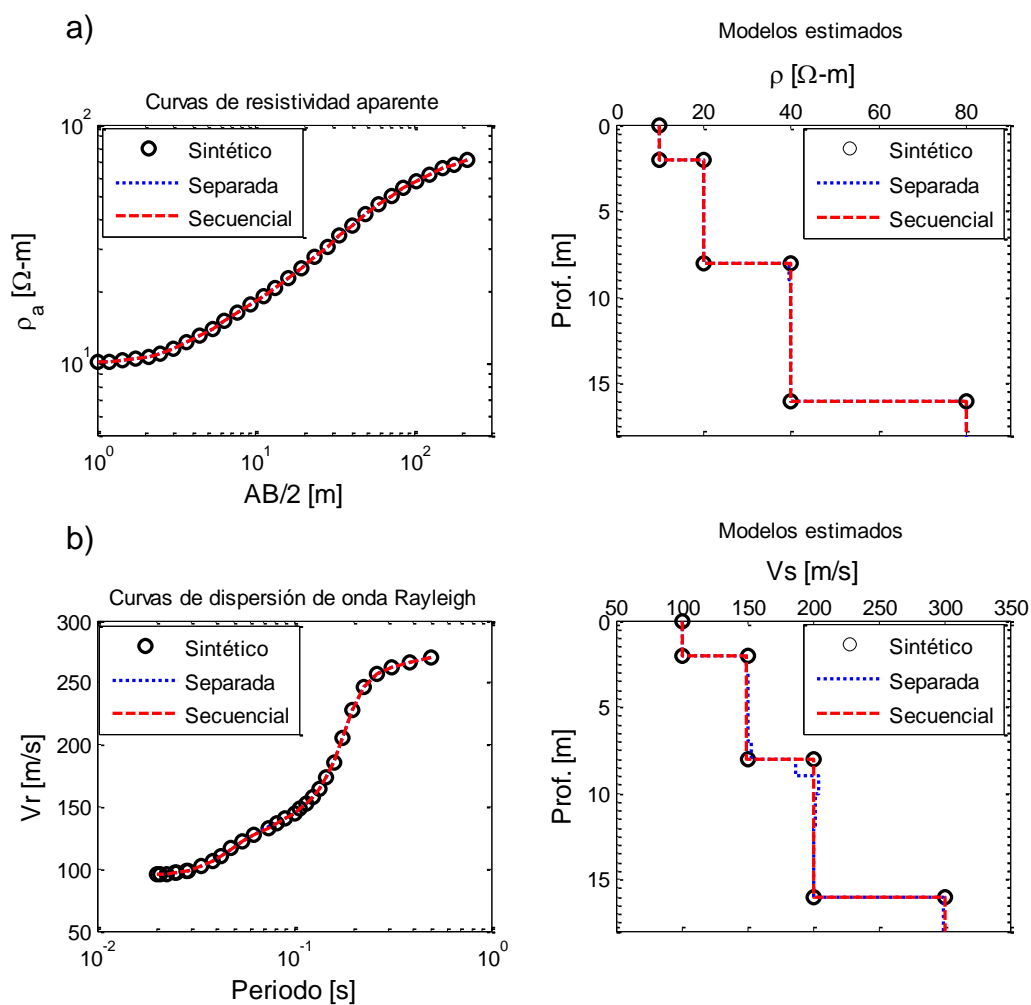


Figura 22. Comparación de modelos a) de resistividades y b) velocidades estimados por inversión separada y secuencial a partir de datos sin ruido.

En un segundo experimento, decidimos agregar ruido gaussiano del 5% a cada conjunto de datos. Los resultados de este experimento muestran que los datos de ondas superficiales tienen mayor sensibilidad a la posición de cada interface (Figura 23b). El modelo estimado con los datos de resistividad muestran la profundidad de la segunda capa a 6 m y el semi-espacio a 14 m (Figura 23a). Este experimento sugiere que la inversión secuencial fija los espesores mejor que los datos de resistividad.

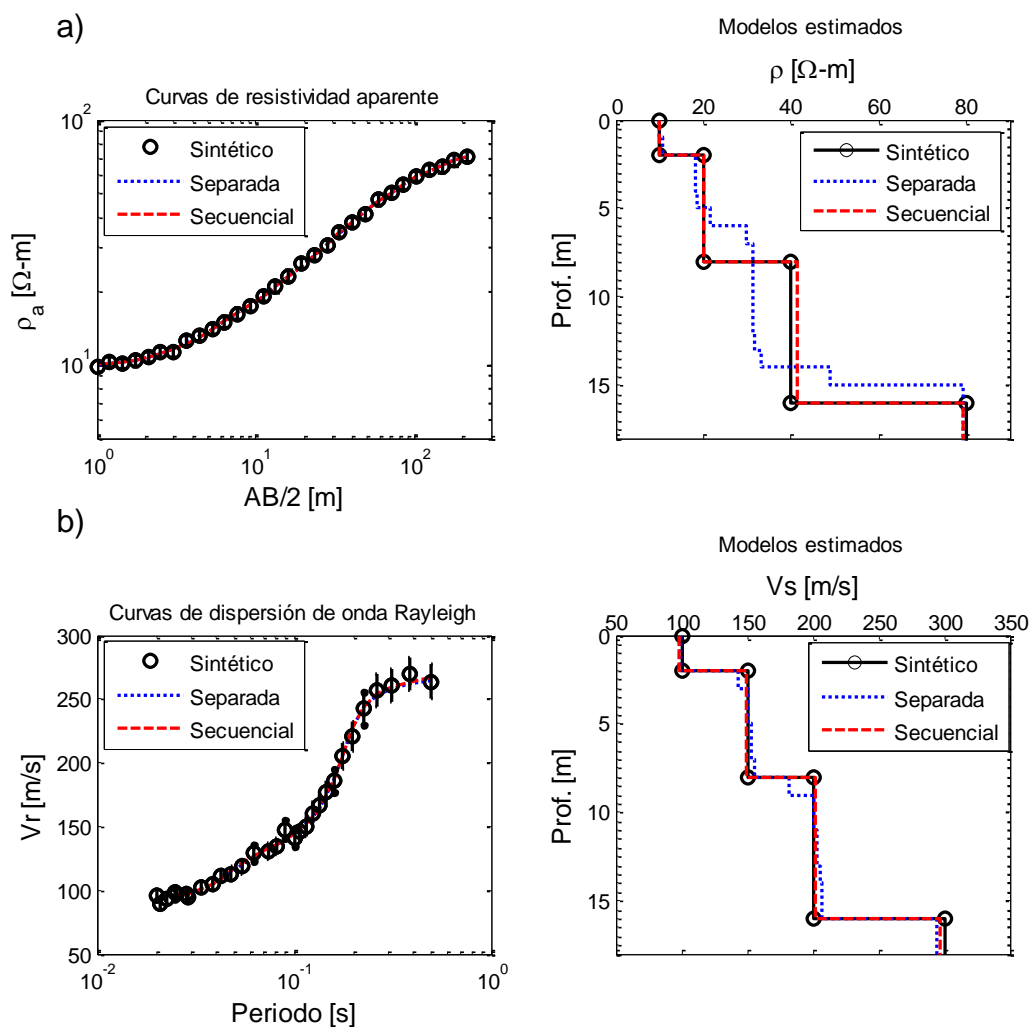


Figura 23. Comparación de modelos de a) resistividades y b) velocidades, ambas estimadas por inversión separada y secuencial. En este experimento, los datos están normalizados por los errores. $RMS=0.37$ (resistividad) y $RMS=0.35$ (ondas superficiales).

III.2 Inversión conjunta

Han surgido diversas metodologías de inversión conjunta basadas en la hipótesis de similitud estructural (Zhang y Morgan, 1997; Haber y Oldenburg, 1997; Gallardo y Meju, 2003, 2004; Saunders *et al.*, 2005). Zhang y Morgan (1997) utilizan la minimización simultánea de dos funcionales mientras que Haber y Oldenburg (1997) proponen cuantificar la diferencia de operadores diferenciales de las propiedades físicas distintas. Otra metodología es la propuesta por Gallardo y Meju (2003, 2004). Estos autores miden la similitud a través del producto cruz de gradientes de las incógnitas:

$$t(x, y, z) = \nabla p(x, y, z) \times \nabla q(x, y, z) \quad (38)$$

cuyo valor óptimo es nulo y en que $p(x, y, z)$ y $q(x, y, z)$ son propiedades como la resistividad o una velocidad sísmica como se aplica en esta Tesis. $t(x, y, z)$ es el vector de gradientes cruzados. Cuando $t(x, y, z) = 0$, las líneas (2D) o superficies (3D) de nivel para p y q son paralelas. Obviamente, la metodología de gradientes cruzados no se puede aplicar para estructuras 1D.

En el fondo, la hipótesis de similitud indica una función positiva (o negativa, con algún cambio de variables) entre la dependencia espacial de cada función incógnita que hace “conjunta” a la inversión. La discusión siguiente es si esta dependencia es exacta o aproximada, Si es exacta, las líneas (2D) o superficies (3D) de nivel deben ser paralelas para ambas estructuras. Si la dependencia es aproximada, el paralelismo es también sólo una aproximación. Lo anterior tiene que ver si la restricción (38) se aplica en forma exacta (técnica de coeficientes de Lagrange) o aproximada (como otro término de regularización).

Proponemos el siguiente método de inversión conjunta con una restricción de similitud estructural aproximada. Suponemos que esta similitud se introduce aproximadamente con un término de regularización que tenga la norma cuadrática

de la diferencia de la derivada de los parámetros físicos. Esta función es de la forma:

$$v = \|Dx_1 - Dx_2\|^2 \quad (39)$$

donde x_1 y x_2 representan, en nuestro caso, a la resistividad y la velocidad de onda S, D representa el operador de primera derivada. Para $v=0$, se tiene paralelismo en los perfiles en profundidad correspondientes. Con esta restricción, se pretende encontrar modelos que sean similares en profundidad. Lo anterior implica la introducción en la función objeto de un nuevo parámetro global de regularización γ . Valores grandes de γ dan más importancia relativa a la similitud.

III.2.1 Función objetivo o criterio

El siguiente criterio incorpora los criterios de ajuste, suavidad y similitud de los modelos.

$$\min \left\{ \|y_1 - F(x_1)\|_{C_{y_1y_1}^{-1}}^2 + \alpha_1 \|D_1x_1\|^2 + \|y_2 - F(x_2)\|_{C_{y_2y_2}^{-1}}^2 + \alpha_2 \|D_1x_2\|^2 + \gamma \|D_1x_1 - D_1x_2\|^2 \right\} \quad (40)$$

donde y_1 y y_2 son los datos observados; $F(x_1)$ y $F(x_2)$, la respuesta del modelo del problema directo; x_1 y x_2 , las propiedades del modelo (ρ y V_s , respectivamente); D_1 es la matriz de primera derivada; $C_{y_1y_1}^{-1}$ y $C_{y_2y_2}^{-1}$ son las inversas de las matrices de covarianzas del error de las resistividades aparentes y las velocidades de fases, respectivamente (en la práctica, ambas matrices son diagonales); α_1 y α_2 , son coeficientes que ponderan relativamente al nivel de suavidad de cada modelo (ρ y V_s); y γ es el parámetro de regularización que pondera la importancia del criterio de similitud. La ecuación (40) supone que la importancia del ajuste de ambos tipos de datos es la misma; esto es aproximadamente exacto si los datos se ponderan con el error correspondiente y es importante porque reduce el número de parámetros de regularización a 3, lo que todavía presentará dificultades para implementar el esquema numérico.

Introduciendo linealización, la función objetivo a optimizar es la siguiente:

$$U = \|y_1 - J_1 x_1\|_{C_{y_1}^{-1}}^2 + \alpha_1 \|D_1 x_1\|^2 + \|y_2 - J_2 x_2\|_{C_{y_2}^{-1}}^2 + \alpha_2 \|D_1 x_2\|^2 + \gamma \|D_1 x_1 - D_1 x_2\|^2 \quad (41)$$

donde J_1 y J_2 representan a las matrices de derivadas parciales correspondientes.

Al minimizar la expresión (41), resultan los siguientes estimadores:

$$\hat{x}_1 = (I - \gamma^2 H_1 D_1^T D_1 H_2 D_1^T D_1)^{-1} (H_1 J_1^T y_1 + \gamma H_1 D_1^T D_1 H_2 J_2^T y_2) \quad (42)$$

$$\hat{x}_2 = (I - \gamma^2 H_2 D_1^T D_1 H_1 D_1^T D_1)^{-1} (H_2 J_2^T y_2 + \gamma H_2 D_1^T D_1 H_1 J_1^T y_1) \quad (43)$$

donde \hat{x}_1 y \hat{x}_2 son las funciones incógnitas, I es la matriz identidad, H_1 y H_2 son matrices inversas. Para mayor detalle, ver el Anexo A.

Debido a la diferencia que puede existir en el orden de magnitud en los valores de resistividad y velocidad de onda S , es preferible trabajar con el logaritmo de los datos en el proceso de inversión.

III.2.2 Solución, implementación y detalles numéricos

La solución numérica de la expresión (41) ofrece dificultades ya que la búsqueda de la solución depende del valor de los coeficientes (α_1 , α_2 y γ). Recordemos que ya eliminamos un coeficiente con la suposición de que el ajuste de cada tipo de dato tiene la misma ponderación. Si la búsqueda es completa dentro de rangos y pasos de discretización dados, deben emplearse tres ciclos en el programa de cómputo; suponiendo diez pasos de búsqueda, ello implica la inspección de 2000 soluciones (estabilidad) y 2000 gráficas de residuales (ajuste) para cada iteración. Esto hace que, en la práctica, la selección de la solución óptima se haga imposible.

Una opción, consiste en hacer la inversión separada de los datos y elegir el valor de α_1 y α_2 óptimo para la ponderación de la suavidad de cada tipo de datos. Este procedimiento fue probado con datos sintéticos, sin embargo, los valores de α_1 y α_2 , no siempre estabilizaban el proceso en la inversión conjunta.

En una primera versión del algoritmo de inversión conjunta, realizamos diversas pruebas numéricas. Por ejemplo, se utilizó $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma = 1$, como valores fijos en cada iteración. Sin embargo, los modelos resultantes de estas pruebas tienen un ajuste deficiente.

En lo siguiente, se resumen los resultados de un gran número de experimentos numéricos. Los rangos útiles de los parámetros de regularización son los siguientes: $\alpha_1 = [0.1 - 10]$ y $\alpha_2 = [10 - 1000]$; $\alpha_1 < \alpha_2$. Estos valores se mantienen constantes de iteración a iteración como se hace en algunos esquemas de inversión (Rodi y Mackie, 2001). Respecto al parámetro γ , resultó aconsejable que disminuya de iteración a iteración a partir de valores tan altos como 10^5 .

La Figura 24, representa en forma esquemática, los siguientes pasos que explican el procedimiento numérico del algoritmo propuesto.

- 1) El modelo inicial tiene n capas de espesor y valores de resistividad y V_s constantes; además, los modelos pueden ser homogéneos o con un incremento lineal con la profundidad.
- 2) La respuesta de los modelos, así como las matrices de sensibilidad son calculadas. En este paso los datos son normalizados por la covarianza de los errores de observación y se trabaja con el logaritmo de los datos.
- 3) Se aplica la estrategia para elegir los coeficientes α_1 y α_2 y γ que se describió en más arriba en esta misma sección.
- 4) Se calcula y actualiza el nuevo modelo, así como su correspondiente *RMS*.
- 5) Para la selección adecuada del modelo, se toma en cuenta su similitud y el balance entre ajuste y estabilidad.

- 6) Si se cumple el criterio de convergencia, entonces se termina el proceso. En caso contrario, se actualiza el modelo y se repite el proceso desde el paso 2).

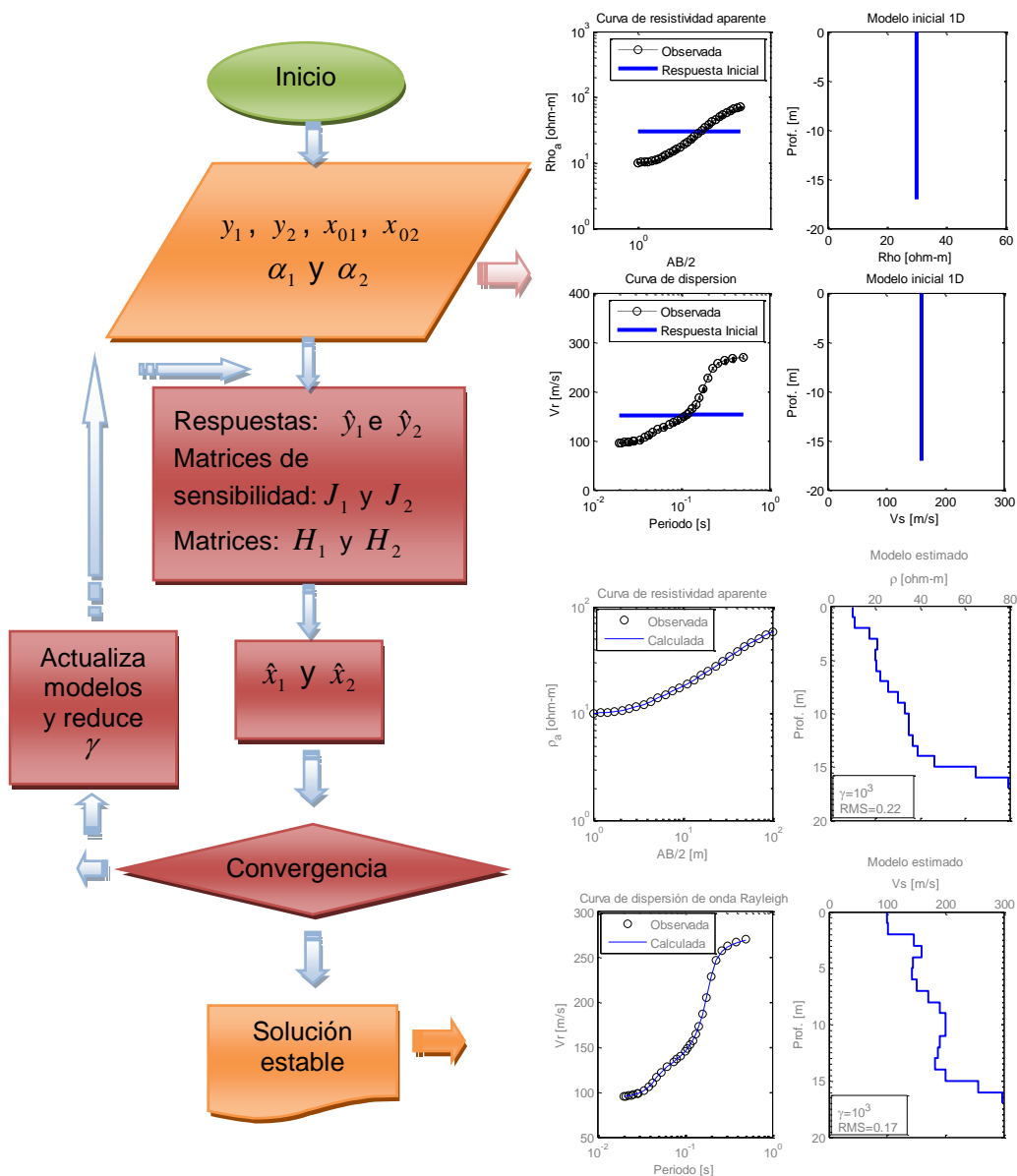


Figura 24. Diagrama de flujo del esquema de inversión conjunta.

III.2.3 Validación de la metodología

La metodología propuesta se valida al utilizar el modelo sintético descritos en la Tabla IX de la sección II.1.2. Los modelos recuperados por inversión conjunta y separada (tal como se describe al final del Capítulo II) se comparan entre ellos.

Para el modelo A (Tabla IX), la inversión conjunta se inicia con un modelo homogéneo ($\rho = 30 \Omega m$ y $V_s = 151 m/s$) de 16 capas, de espesor constante de 1 m, colocadas sobre un semi-espacio. Después de algunos experimentos numéricos, se eligieron los valores de $\alpha_1 = 1$ (resistividad) y $\alpha_2 = 100$ (ondas superficiales) que permanecieron constantes en la inversión. El valor de γ toma un valor inicial de 10^4 y disminuye en las siguientes iteraciones en un orden de magnitud por iteración hasta alcanzar un valor de 10^0 . La convergencia se consigue en 6 iteraciones con un $RMS=0.5$ en m/s para datos de ondas superficiales y 0.1 en $\Omega\text{-m}$ para resistividad. La Figura 25 representa la evolución de los ajustes. Los modelos de resistividad y de velocidades de onda S presentan similitud estructural.

Las estructuras de resistividad y de velocidad de onda S que resultan de la conjunta se parece mejor al modelo sintético, que las obtenidas por inversión separada (Figura 26a y Figura 26b, respectivamente).

El segundo experimento aplica un 5% de ruido gaussiano a los datos. Los modelos obtenidos siguen preservando la suavidad. La Figura 27a y Figura 27b comparan los modelos de resistividades y velocidades recuperados por inversión conjunta (6 iteraciones) y los obtenidos por la inversión separada (4 y 6 iteraciones, respectivamente). Los coeficientes de suavidad y los valores de γ son los mismos que utilizamos en el ejercicio anterior.

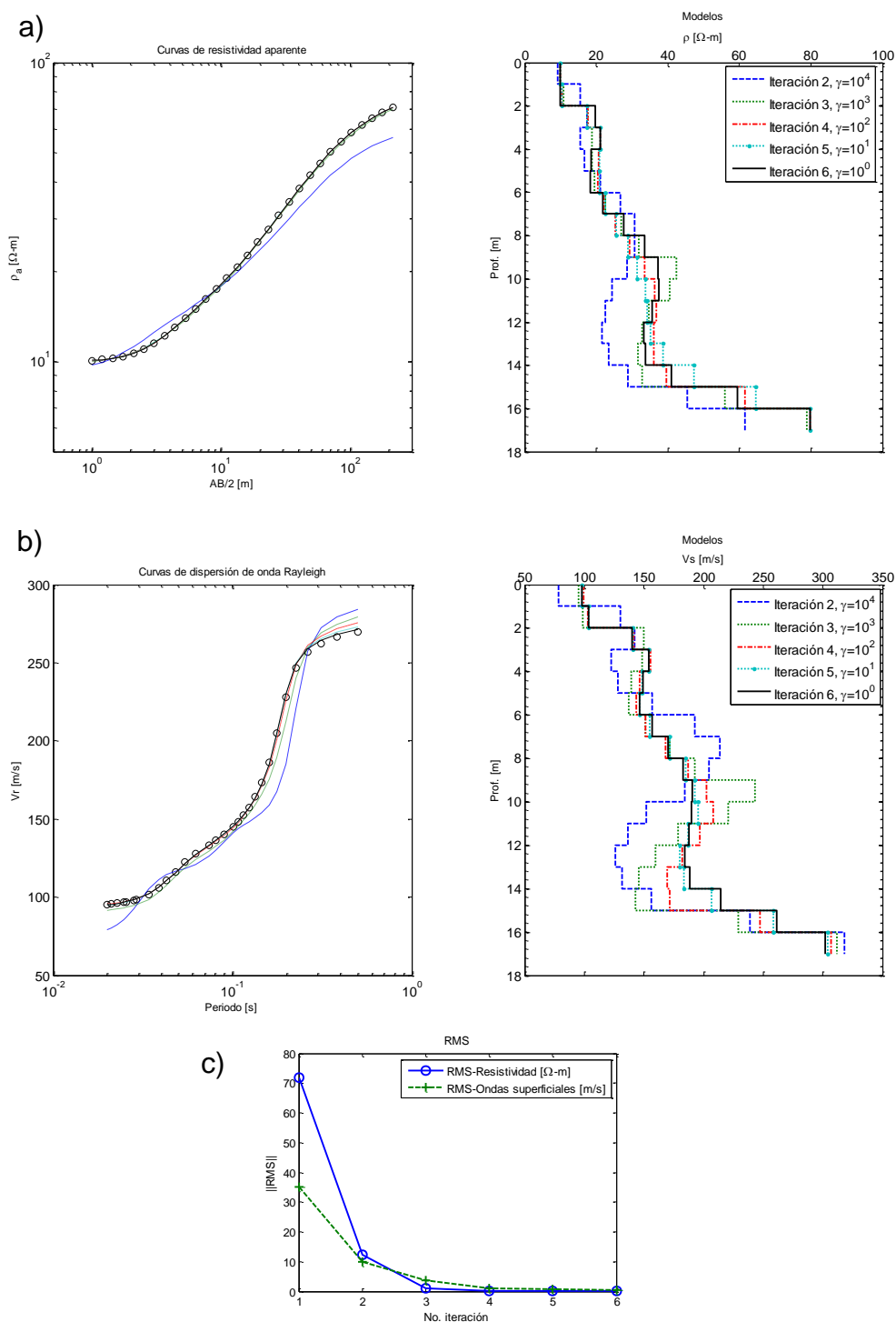


Figura 25. Modelos estimados por inversión conjunta. Ajustes y modelos de a) resistividad, b) velocidad de onda S y c) evolución del *RMS* hasta 6 iteraciones. En este experimento, los datos no contienen errores.

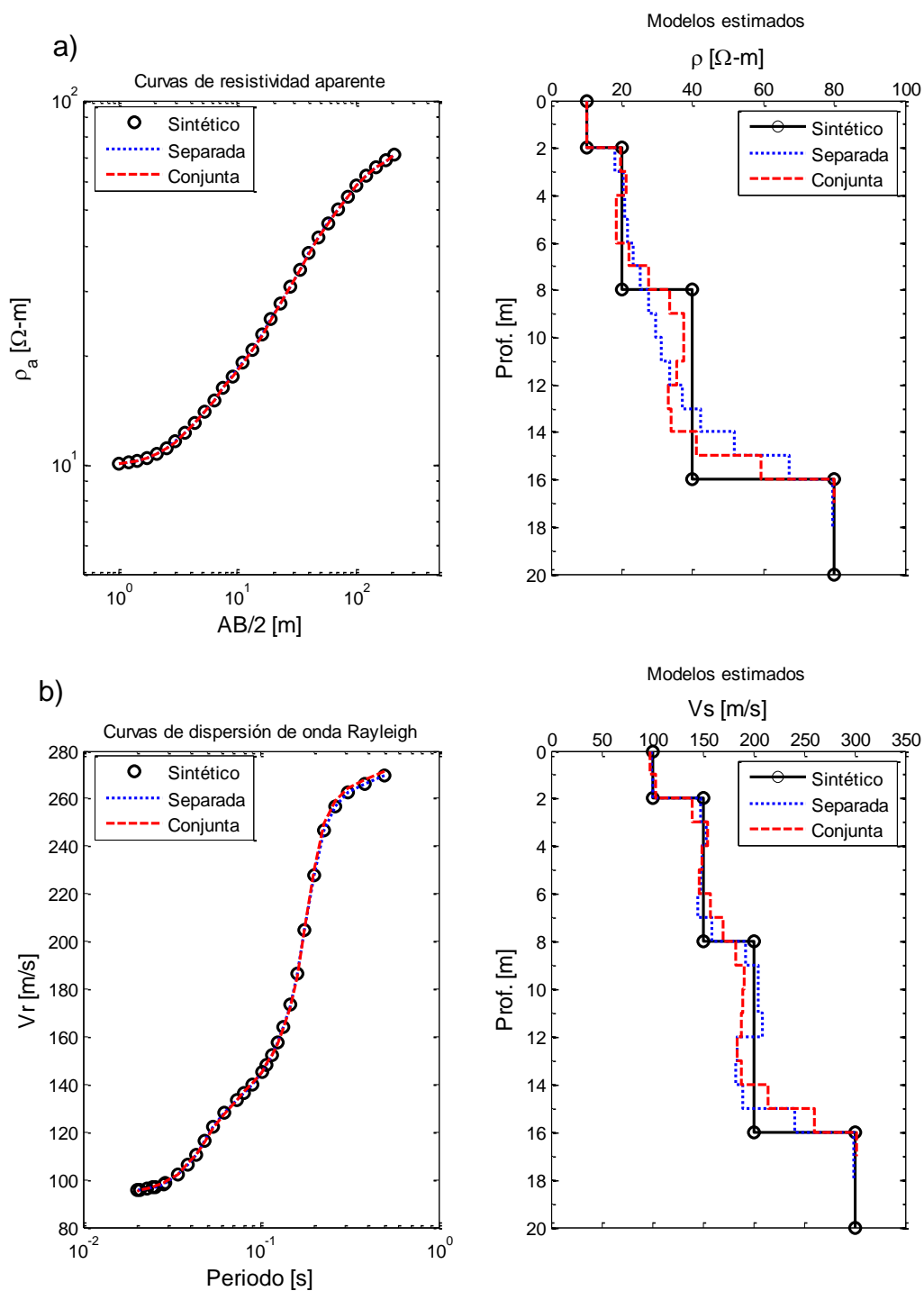


Figura 26. Resultados de la inversión conjunta a) resistividades y b) velocidades; comparación con los obtenidos por inversión separada. A la izquierda el ajuste correspondiente de los datos; a la derecha, comparación con el modelo verdadero y los obtenidos por inversión separada. $RMS=0.1$ [Ω -m] y $RMS=0.5$ [m/s].

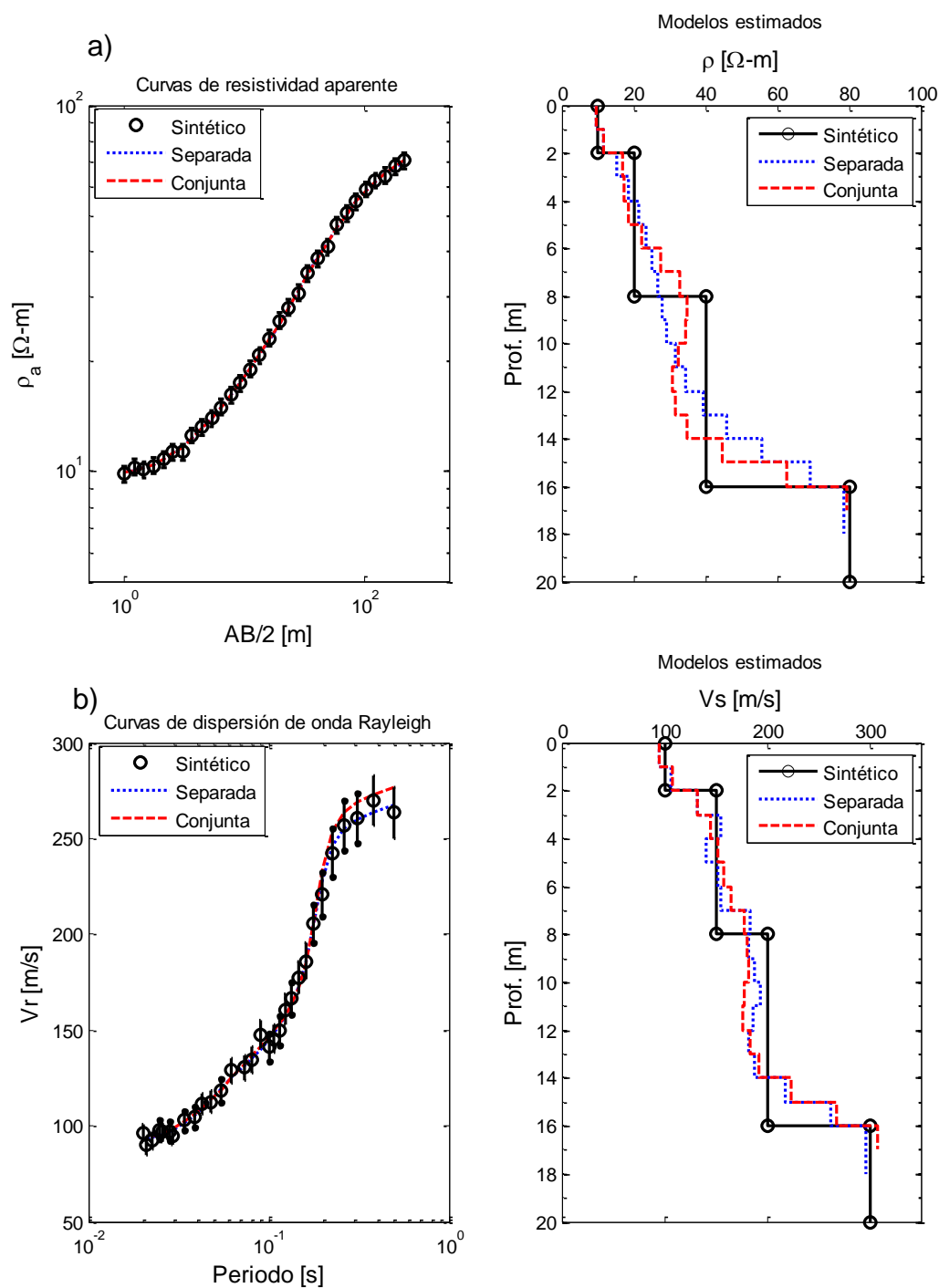


Figura 27. Resultados de la inversión conjunta a) resistividades y b) velocidades; comparación con los obtenidos por inversión separada. A la izquierda el ajuste correspondiente de los datos; a la derecha, comparación con el modelo verdadero y los obtenidos por inversión separada. RMS=0.8 (resistividad) y RMS=0.9 (ondas superficiales).

III. 3 Conclusiones

III.3.1 Inversión secuencial

1. La metodología de inversión secuencial procesa dos tipos de datos geofísicos sin necesidad de una relación funcional entre las incógnitas (resistividad y velocidad de onda S, en nuestro caso). El resultado del análisis de la sensibilidad de los dos tipos de datos (resistividad aparente y curva de dispersión) a la profundidad de las interfaces se utiliza en la etapa siguiente, en la cual se determinan las resistividad y la velocidad de onda S. En esta etapa el número de incógnitas se ha reducido y no es necesario regularizar.
2. La inversión secuencial elimina la necesidad de calcular las derivadas parciales de los datos con respecto a los espesores (o a la posición de discontinuidades). Otra ventaja de este algoritmo secuencial es que evita el uso de técnicas de programación lineal para optimizar el término de regularización de la función objeto en L_1 .
3. Las estructuras estimadas a partir de datos sin ruido recuperan completamente los modelos sintéticos en la primera etapa de la inversión secuencial (Figura 22).
4. En presencia de datos contaminados por ruido, los resultados muestran mejor sensibilidad de los datos sísmicos a la determinación de las profundidades de interfaces (Figura 23). La incorporación de los datos de dispersión en inversión secuencial agregan confiabilidad a los modelos de resistividad obtenidos por inversión separada.

III.3.2 Inversión conjunta

1. Este segundo esquema ofrece la posibilidad de invertir en forma conjunta basados en el concepto de similitud estructural. Proponemos que esta

similitud se puede controlar, en nuestro caso (1D), con la condición de minimizar la norma cuadrática de la diferencia de la primera derivada de los parámetros físicos (resistividad y velocidad de onda S). Esta restricción es incluida dentro de la función objetivo y es regularizada a través de un parámetro global γ .

2. La optimización de la función objetivo propuesta, consiste de 5 términos que cuantifican el ajuste y suavidad de cada conjunto de datos y un último término que controla la similitud de los modelos. La ecuación (41) representa estos criterios.
3. La inversión consiste en optimizar la función criterio a través de una minimización en norma L_2 de los 5 términos. Al mismo tiempo, es necesario “balancear” sus 5 términos a través de los coeficientes de suavidad (α_1 y α_2) y el parámetro de regularización global (γ). El uso de tres coeficientes ofrece dificultades, ya que la búsqueda de cada uno de ellos en un algoritmo iterativo, implica explorar una diversidad de valores. En el algoritmo numérico que proponemos, los coeficientes de suavidad son elegidos a prueba y error a través de diversos experimentos numéricos. Una vez elegidos los valores, estos permanecen fijos y el ajuste de los datos es controlado por el término γ . Valores grandes de γ permite la búsqueda de modelos similares, bajo el costo de un menor ajuste; en el esquema numérico, el valor de γ es reducido en cada iteración dándole más importancia al ajuste de los datos.
4. Si $\gamma \cong 0$, resulta que la condición de similitud no se cumple ya sea porque la física del problema lo requiere o porque los balanceos utilizados en el detalle de la inversión lo producen. De tal modo que es muy importante determinar con cuidado dicho coeficiente de regularización.

5. Si $\gamma = 0$, tenemos el caso de inversión simultánea sin la restricción de similitud.
6. Los coeficientes de suavidad explorados a prueba y error para datos de corriente directa están en un rango de $\alpha_1 = [0.1-10]$ y en ondas superficiales $\alpha_2 = [10-1000]$. Para valores mayores a este rango, la suavidad de los modelos predomina y el ajuste de los datos es deficiente. Este mismo experimento para elegir los coeficientes es utilizado en las aplicaciones con datos reales.
7. La comparación de resultados obtenidos por inversión conjunta a partir de los datos sintéticos del modelo A sin ruido (Figura 26), muestran estructuras suaves con se acercan más al modelo verdadero que aquellas recuperadas por inversión separada. Para este ejercicio, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 100$. Y γ toma un valor inicial de 10^4 que disminuye en las siguientes iteraciones en un orden de magnitud hasta alcanzar un valor de 10^0 . Las estructuras también se recuperan en presencia de ruido (Figura 27).
8. La discretización muy fina en profundidad puede producir capas de baja velocidad en la estimación por efecto de inestabilidad; como consecuencia, se puede incrementar el espesor de la capa o el valor del coeficiente de suavidad (α_1 y α_2) en la inversión.

CAPÍTULO IV

APLICACIONES A CASOS REALES

Este capítulo describe la aplicación de los métodos de inversión secuencial y conjunta a datos adquiridos e interpretados previamente por el Grupo de Sismología Aplicada a la Ingeniería (GSAI) del CICESE, bajo la dirección del Investigador José Acosta Chang, en los proyectos “Estudio Geofísico y Geológico en la Colonia Solidaridad Social, Mexicali Baja California” (Acosta Chang, 2010) y “Estudio Geofísico en los Polígonos 8-3 y 7-5 R2, de Rio Nuevo, Mexicali, Baja California” (Acosta Chang, 2011).

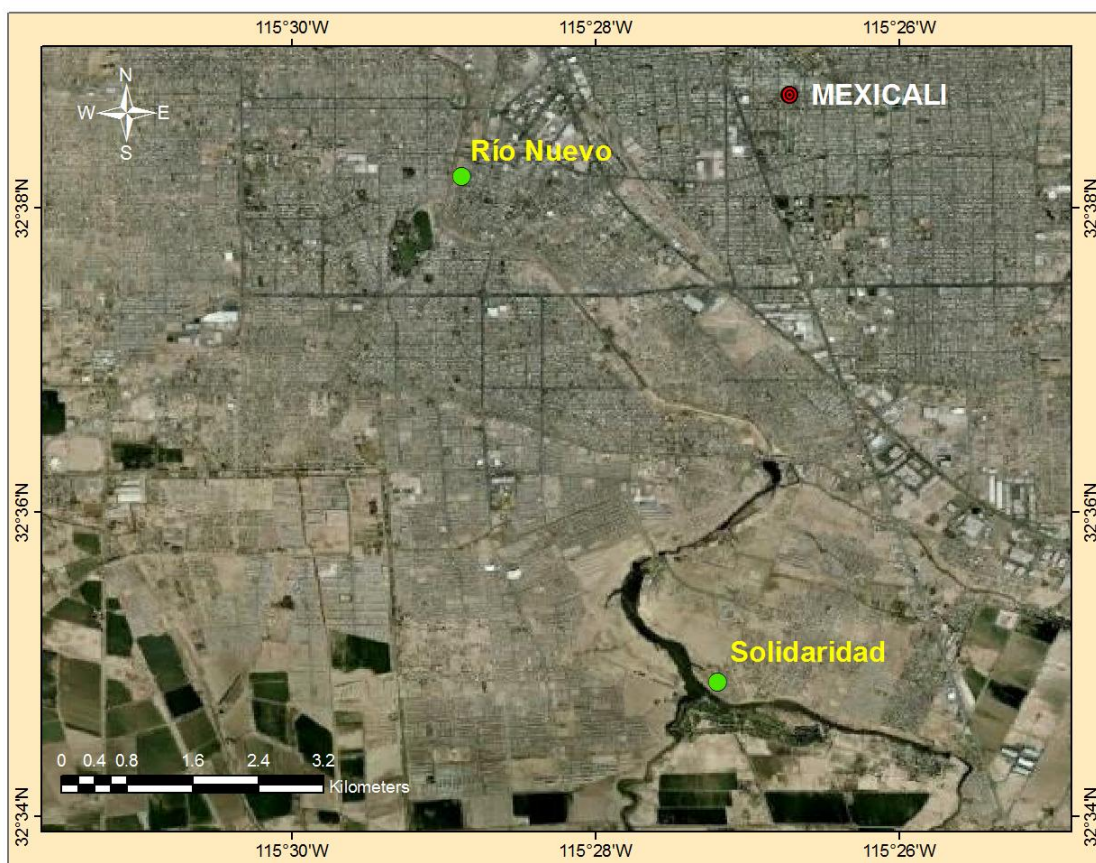


Figura 28. Ubicación de los dos sitios.

Finalmente, los resultados son comparados con los obtenidos en dichos estudios y con la información de la mecánica de suelos.

IV.1 Descripción general de los sitios

Las aplicaciones que se presentan corresponden a dos sitios cercanos a la ciudad de Mexicali en Baja California. El sitio 1, al que denominamos Río Nuevo, se localiza aproximadamente a 3.5 Km al oeste de la ciudad de Mexicali. El sitio 2, designado Río Nuevo, se localiza a ~7.1 Km al suroeste de la misma ciudad. Geológicamente, las zonas de estudio se caracterizan por depósitos sedimentarios principalmente de composición arcillosa.

IV.2 Adquisición y procesamiento de datos.

De la base de datos sísmicos y eléctricos existentes para ambos sitios, fueron seleccionados aquellos de mejor calidad. La adquisición y procesamiento de datos sísmicos para extraer la curva de dispersión empleó las técnicas de Análisis Multicanal de Ondas Superficiales (MASW, por sus siglas en inglés; Park, 1999) y Autocorrelación Espacial en Línea (SPAC, por sus sigla en inglés; Hayashi, 2003). El método MASW utiliza registros típicos de refracción; la transformación de los registros al dominio frecuencia contra velocidad de fase permite identificar la curva de dispersión a periodos cortos. SPAC utiliza registros de ruido sísmico; el método se basa en calcular coeficientes de correlación que dependen de la frecuencia, la distancia entre estaciones y la velocidad de fase de ondas Rayleigh; Aki (1957) desarrolló una teoría que interpreta los resultados anteriores. La información proporcionada por SPAC completa la curva de dispersión a periodos largos (ver Figura 9 del Capítulo II). El paquete comercial empleado en la etapa de procesamiento de datos es conocido como SEISIMAGER comercializado por GEOMETRICS.

Para el registro de datos sísmicos se utilizó un sismógrafo DAQLink II de 24 canales comercializado por SEISMIC SOURCE.



Figura 29. Sismógrafo DAQLink II de Seismic Source.

El levantamiento de los datos de corriente directa consiste en un sondeo geoelectrico vertical en la modalidad de arreglo Schlumberger. Para calcular la curva de resistividad aparente, se necesita la medición del voltaje y de la corriente inyectada al terreno para cada abertura de electrodos de corriente ($AB/2$).

El equipo utilizado para la obtención de datos es un resistivímetro con una corriente de salida máxima de 10 Amperes y 1100 volts distribuidos en 11 pasos de 100 volts, conectado a un moto generador de 2500 Watts de potencia. El receptor es un multímetro digital e incluye los accesorios respectivos al equipo de campo (cables de conducción, carretes, electrodos no polarizables, barras de acero, etc.).



Figura 30. Resistivímetro.

IV.3 Sitio Río Nuevo

IV.3.1 Diseño del experimento en campo

Se empleó un arreglo lineal de 24 geófonos verticales de frecuencia natural de 2.5 Hz, separados cada 3 m y alcanzando una extensión máxima de 69 m. Con esta configuración, la mayor longitud de onda que puede muestrearse adecuadamente es de aproximadamente $\lambda_{\max}^1 \approx 34.5$ m. Sin embargo, la longitud de onda que se mide apropiadamente es menor, ya que dependerá de la frecuencia natural de los sensores (2.5 Hz) y de las velocidades de fase de onda Rayleigh del sitio. El muestreo en tiempo es $\Delta t = 0.002$ segundos con una duración total de 300 segundos. La curva de dispersión elegida se obtuvo con el método SPAC a partir del apilado de 10 ventanas de 30 segundos. El sondeo eléctrico vertical se localizó en el centro del tendido de sísmico, con una abertura máxima $AB/2$ de 50 m. Las curvas de dispersión y de resistividad aparente consisten, cada una, de 11 observaciones.

IV.3.2 Modelo inicial

El modelo inicial de velocidades y resistividades consiste de 9 capas colocadas sobre un semi-espacio a 23 metros de profundidad. La primera capa es de 1 m de espesor y las 8 restantes de 2.75 m. La posición del semi-espacio puede variar en la inversión. La velocidad de onda S es constante e igual a 200 m/s en cada capa, la densidad de 1.2 gr/cm^3 y, además, $V_p/V_s=4$; mientras que la resistividad tiene un valor de $2 \Omega\text{-m}$ en cada capa. En las metodologías de inversión, secuencial y conjunta, el algoritmo numérico utiliza el mismo modelo inicial.

IV.3.3 Resultados de la inversión secuencial

Como fue explicado en el capítulo anterior, el esquema de inversión secuencial obtiene los espesores en un primer paso en inversiones separadas. Generalmente, una de las dos bases de datos resulta ser más sensible a la presencia de las interfaces.

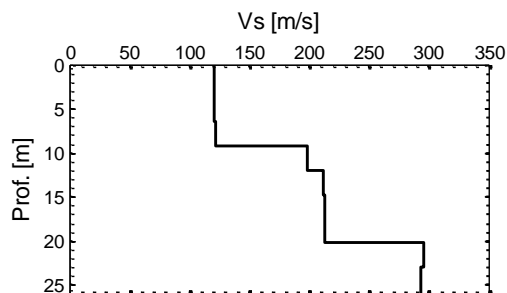


Figura 31. Modelo de velocidades de onda S obtenido en la primera etapa de inversión secuencial por norma L_1 .

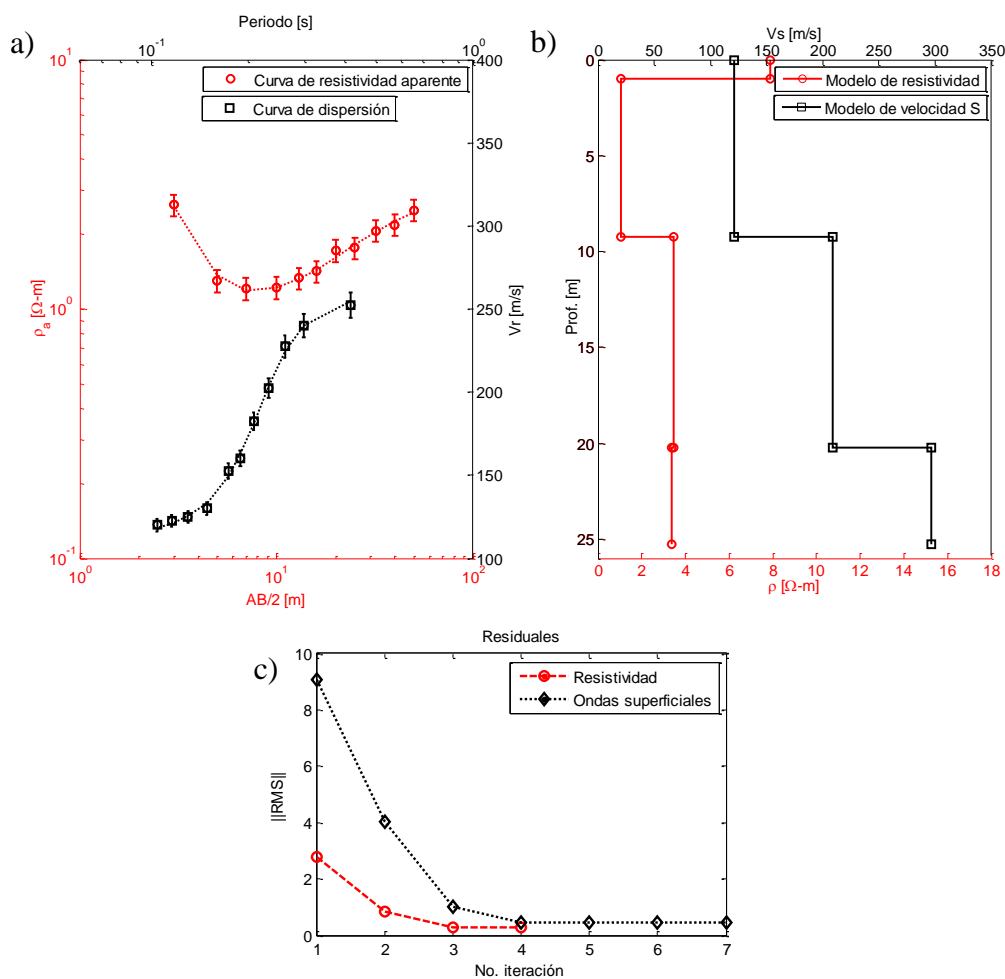


Figura 32. Modelos estimados en la segunda etapa de inversión secuencial. Sitio Rio Nuevo. a) Curvas ajustadas (líneas discontinuas), b) modelos estimados y c) $RMS=0.29$ para datos de resistividad y $RMS=0.44$ para datos de ondas superficiales. El RMS está normalizado por el error de los datos; el número de iteraciones para los datos de resistividad y de dispersión, son 4 y 7, respectivamente.

La segunda etapa del proceso secuencial utiliza estas profundidades y determina la resistividad y velocidad de onda S en las capas resultantes.

En la primera etapa de la inversión, ambos tipos de datos muestran sensibilidad a una interface colocada a 9.2 m. Los datos de resistividad muestran inestabilidad en la estructura estimada debajo de esta interface. Los datos sísmicos identifican una segunda interface a 20.2 m de profundidad y los datos de resistividad encuentran otra a 1 m de profundidad. La Figura 31 muestra las interfaces estimadas que utilizaremos en la siguiente etapa. La Figura 32 muestra los resultados de la segunda etapa, en la cual las discontinuidades a 1 m y a 20.2 m, no fueron encontrados por los datos de dispersión y de resistividad, respectivamente.

IV.3.3.1 Análisis de significación de resultados

Llamare de aquí en adelante “variabilidad” al resultado del siguiente proceso: a) calculamos la matriz de covariancia que mide la propagación del error observacional, definida por la ecuación (20); b) calculamos la desviación estándar (σ) como la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal y c) llamamos “variabilidad” a la variación de $\pm 1\sigma$ para el valor de cada incógnita estimada (ρ y V_s) en cada capa. Es necesario recalcar que estas barras no son de error ya que el error (total) es la suma del error de propagación del error observacional y el error de sesgo o resolución. Como este último no se puede calcular, no se puede conocer el error total del resultado.

Para calcular las funciones de resolución, los modelos resultantes (Figura 32) se discretizan en las 9 capas del modelo inicial con lo cual agregamos continuidad suave a las funciones.

La sensibilidad de cada conjunto de datos (ρ_a y V_r) a los modelos estimados (ρ y V_s , respectivamente) es medida por las derivadas parciales.

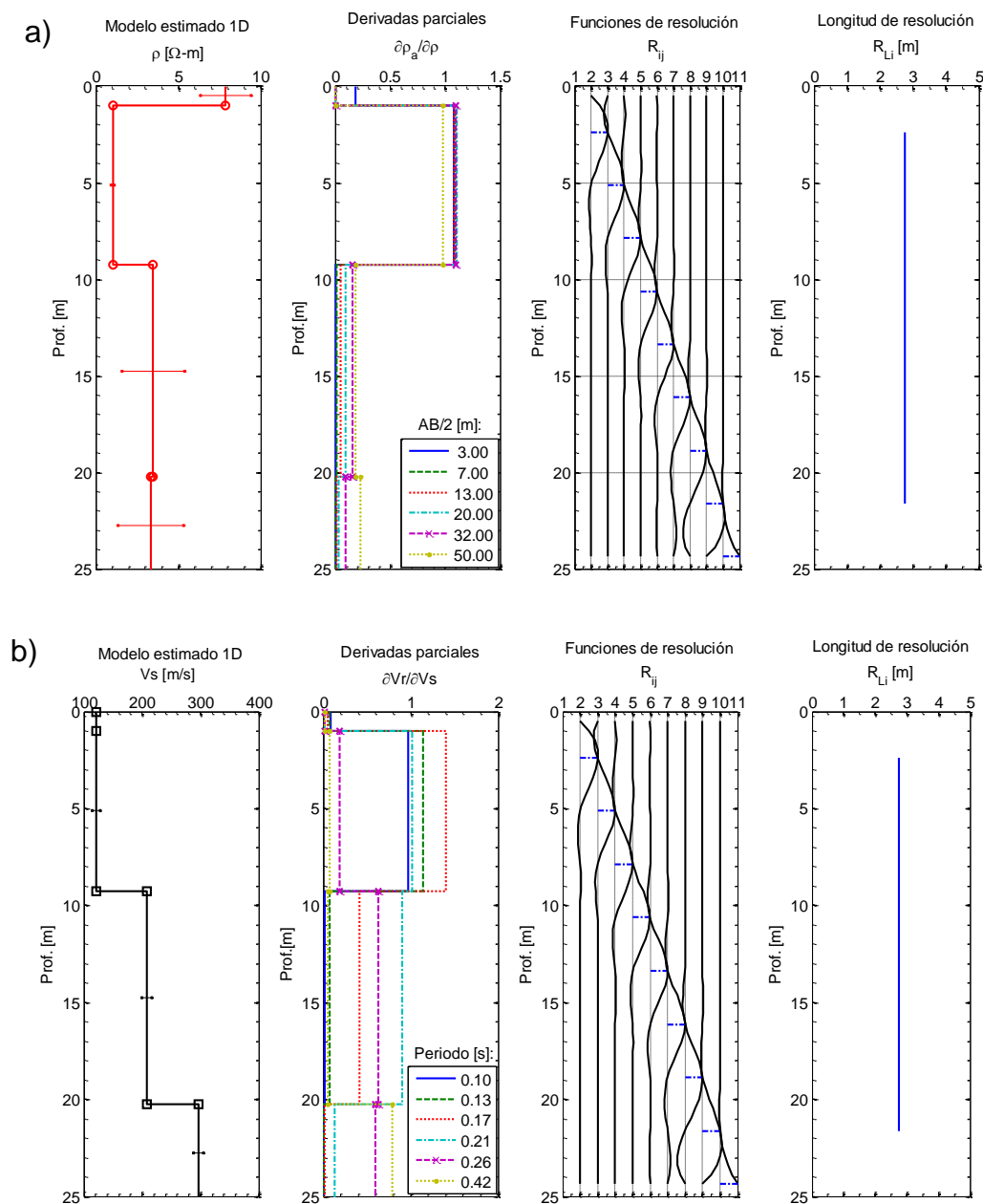


Figura 33. De izquierda a derecha, variabilidad (barras horizontales de $\pm 1\sigma$) de los modelos, sensibilidad de los datos para diferentes aberturas $AB/2$ y periodos y funciones de resolución a diferentes profundidades de los modelos estimados por inversión secuencial en el sitio Río Nuevo. Modelos resultantes de a) resistividades y b) velocidades de onda S.

La Figura 33 muestra la variabilidad, sensibilidad de los datos y la resolución a diferentes profundidades de cada modelo. La Figura 33a muestra una variabilidad

de la resistividad mayor en la primera y la tercera capa. El modelo de velocidades muestra menor variabilidad. La sensibilidad de los datos de resistividad aparente disminuye a partir de 9.2 m, mientras que en los datos de dispersión de velocidades de fase es a partir de 20.2 m para un periodo de 0.25 segundos. Las funciones de resolución del modelo de resistividades y de velocidades tienen una longitud de resolución de ~ 2.75 m en todas las profundidades.

Los resultados de este análisis indican mayor resolución en profundidad de la estructura de velocidades respecto a la de resistividad lo que es esperable dado que los datos sísmicos tienen mayor sensibilidad; en particular, a la presencia de discontinuidades. Además, la abertura máxima del arreglo sísmico es mayor que el arreglo de resistividad, lo que implica una mayor profundidad de investigación.

IV.3.4 Resultados de la inversión conjunta

En este esquema, el algoritmo invierte simultáneamente los datos con los mismos modelos iniciales de la inversión secuencial. Para buscar los modelos finales (Figura 35), aplicamos las reglas de selección de los coeficientes de suavidad (α_1 y α_2) y el de similitud γ descritos en la sección III.2.2. En esta aplicación, el parámetro de regularización γ se inicia con 10^4 . La Figura 34 muestra la evolución de los ajustes; en ella, se observan estructuras similares en las primeras iteraciones; después de 7 iteraciones, se obtiene un buen ajuste con un RMS ~ 0.27 en resistividad y RMS ~ 0.46 en ondas superficiales.

La estructura de resistividad estimada muestran contrastes a 1 m y un incremento gradual a partir de 9.2 m. Por otro lado, las velocidades cambian poco en los primeros metros y empieza a incrementarse después de 9.2 m. Los dos modelos son similares (relación positiva) a partir de los 9.2 m (Figura 35).

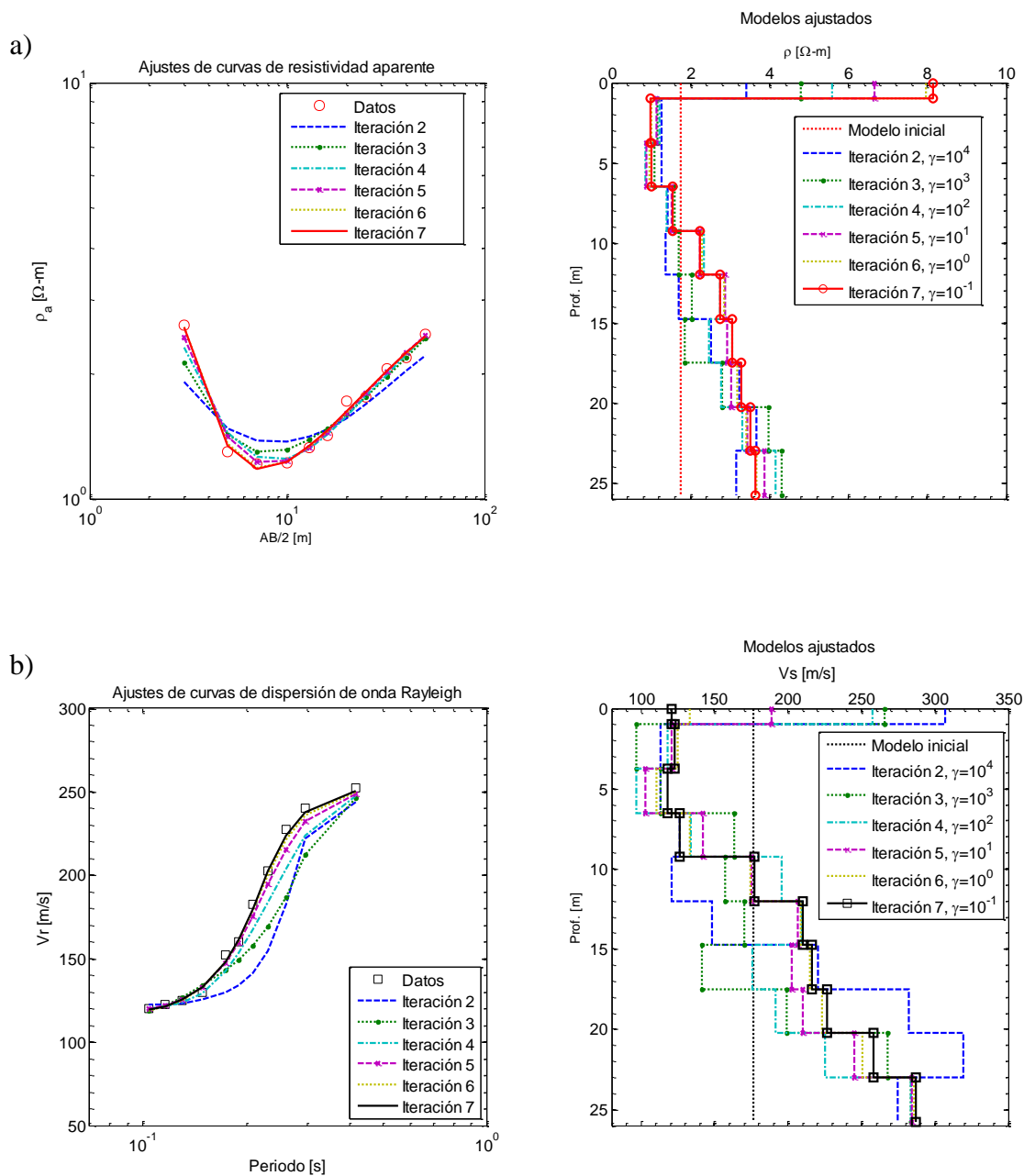


Figura 34. Evolución de los ajustes hasta 7 iteraciones. Nótese la disminución de γ (recuadro en el lado derecho de las figuras) a medida que aumenta el índice de la iteración. Los valores (constantes) de los parámetros de suavización son $\alpha_1=10$ (resistividad) y $\alpha_2=35$ (Velocidad). En a) datos de resistividad y b) de dispersión.

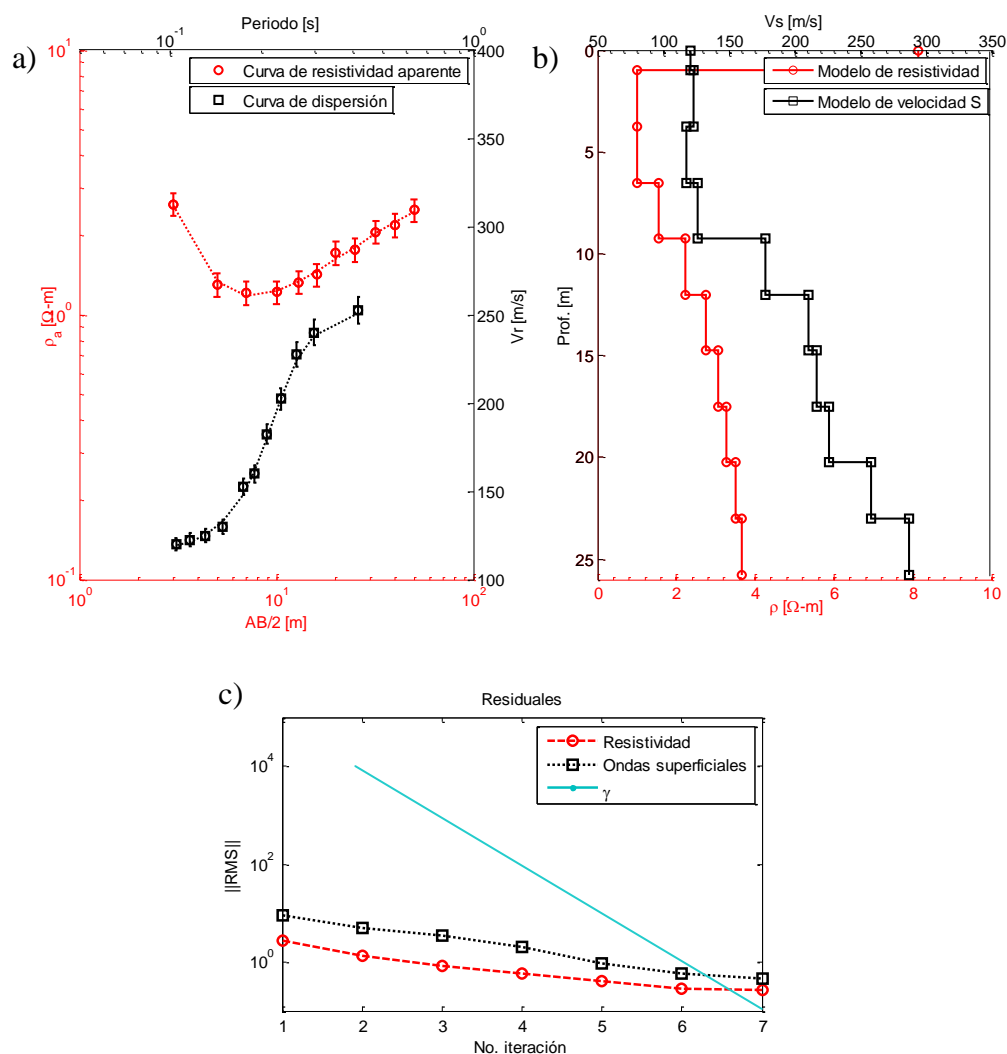


Figura 35. Datos, ajustes, modelos y RMS resultantes para resistividad y velocidad de onda S (sitio Río Nuevo). a) Datos, error y ajustes, b) modelos resultantes y c) RMS en función del índice de la iteración. RMS=0.27 (resistividad) y RMS=0.46 (ondas superficiales).

Una vez obtenido los modelos de resistividades y velocidades, calculamos las derivadas parciales correspondientes. Los datos de resistividad aparente sólo son sensibles para profundidades menores a 9.2 m mientras que los de dispersión dependen de la estructura en todo el rango de profundidades, excepto las muy someras (1 m o menos).

La metodología aproximada para el cálculo de la variabilidad y la resolución explicada en la sección I.3.3, sólo es aplicada para el caso de inversión secuencial donde la inversión se hace separadamente.

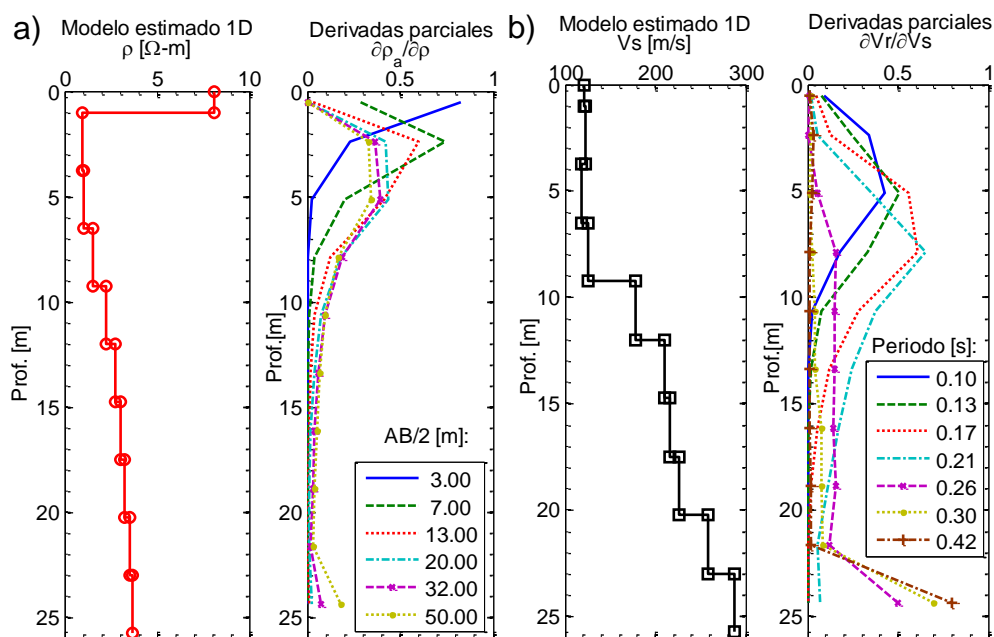


Figura 36. Sensibilidad de los datos para diferentes aberturas $AB/2$ y periodos de cada modelo estimado (sitio Río Nuevo). Modelo de a) resistividad y b) velocidad de onda S.

IV.3.5 Comparación de los modelos obtenidos por los métodos secuenciales y conjuntos con estudios previos

Es conocido que valores bajos de resistividad (Tabla VII; sección II.2.2) indican la presencia de material arcilloso y de velocidad baja de onda S (Tabla IV; sección II.1.2) corresponden a suelos blandos lo que es importante con la comparación de resultados de mecánica de suelos.

La Figura 37 compara los resultados de la inversión secuencial y conjunta, de los sondeos de penetración estándar (SPT) y de columnas estratigráficas. Los modelos obtenidos por la inversión secuencial pueden ser interpretados como un

promedio para capas delgadas obtenidos por el método de inversión conjunta. Como se puede ver en las figuras, dicha equivalencia se verifica con buena aproximación. Esto implica que parámetros de amplio uso en Ingeniería como Vs30 pueden ser calculados con ambos métodos; sin embargo, es obvio que resulta más fácil y claro hacerlo con el método secuencial.

La figura muestra también un modelo de resistividad reportado por Acosta Chang *et al.* (2011), un sondeo SPT, un perfil estratigráfico de resultados de mecánica de suelos a ~ 170 m del sitio; el perfil indica la presencia de tres unidades litológicas (arcilla-arenosa, arena y arcilla). El sondeo es un tipo de prueba de penetración dinámica, que consiste en medir el número de golpes necesarios para que se introduzca a una determinada profundidad un barreno.

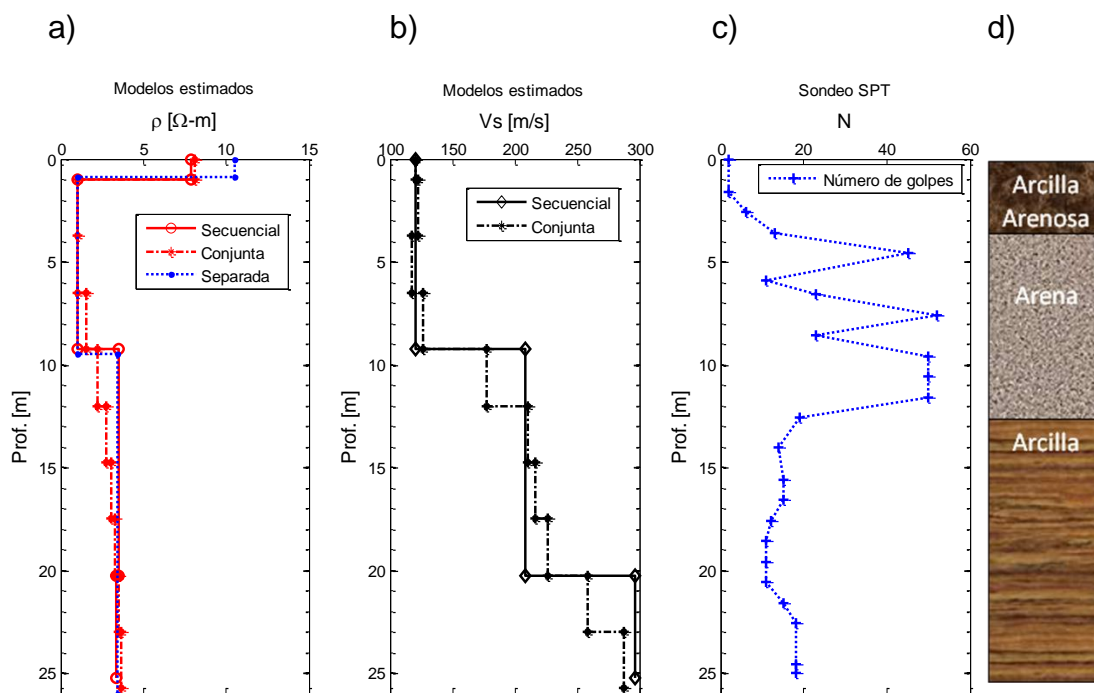


Figura 37. Comparación de modelos estimados por inversión secuencial (línea continua) y conjunta (línea discontinua) con la información obtenida por estudios de mecánica de suelos reportado a ~170 m del sitio de estudio en Río Nuevo. a) Modelo de resistividades, b) Modelo de velocidades de onda S, c) sondeo SPT y d) perfil estratigráfico.

A modo de resumen, la Tabla X entrega los valores de resistividad y velocidades de onda S obtenidos, así como su interpretación. También, incluye la comparación de los valores estimados por inversión secuencial con el rango de valores obtenidos por inversión conjunta a las profundidades correspondientes a las capas.

Tabla X. Resumen de las resistividades y velocidades de onda S estimadas en el sitio Río Nuevo, por inversión secuencial y conjunta.

Espesor obtenido por inversión secuencial [m]	ρ [Ω -m]		Vs [m/s]		Descripción
	Secuencial	Conjunto (rango)	Secuencial	Conjunto (rango)	
1	7.8	8.14	120.8	120.7	Cubierta superficial de materiales arcillo-arenosos
8.25	1.0	1-1.5	120.8	118-126	Arenas finas limosas
11	3.4	2.2-3.2	208.5	177-226	Arcillas
semi-espacio	3.3	3.2-3.5	296.3	258-287	Arcillas compactas

IV.3.6 Conclusiones

1. Los modelos estimados por inversión secuencial resultan de las interfaces identificadas por los datos de dispersión de ondas superficiales. El análisis de los resultados indica una menor variabilidad, mejor resolución y sensibilidad de los datos sísmicos, los datos de resistividad sólo producen una buena estimación cerca de la superficie (Figura 33).
2. Los modelos resultantes de inversión conjunta no indican similitud estructural en los primeros 9 m; después de 9 m, ambas propiedades crecen con la profundidad (Figura 35).
3. Los esquemas de inversión secuencial y conjunta entregan modelos equivalentes. Los valores de *RMS* indican que el ajuste es similar en ambos tipos de inversión. Las interfaces identificadas por el esquema secuencial corresponden a cambios fuertes (en función de la profundidad) de los modelos estimados por inversión conjunta (Figura 37).
4. La interpretación de los modelos obtenidos por inversión secuencial indican que el perfil de resistividad estimado corresponde a una intercalación de arenas y arcillas en los primeros 20 m. La velocidad de onda S no rebasa los 208.5 m/s, por lo tanto, los materiales pueden ser clasificados como suelos arenosos (Tabla IV). La información de mecánica de suelos corrobora la presencia de tres unidades litológicas a ~170 m del sitio y la presencia de materiales arcillosos en profundidad (Figura 37).

IV.4 Sitio Solidaridad

Para este sitio, se presentan los modelos finales obtenidos por inversión conjunta y secuencial. Los detalles en cada tipo de inversión siguen el mismo procedimiento descrito anteriormente.

IV.4.1 Diseño del experimento en campo

En este experimento la separación mínima entre geófonos es de 2 m y la máxima de 46 m. La mayor longitud de onda que puede muestrearse adecuadamente es de aproximadamente $\lambda_{\max}^1 \approx 23$ m. Los parámetros de grabación para los registros de ruido sísmico fueron iguales al experimento en el sitio Rio Nuevo. Para el análisis MASW se utilizó el sismograma de disparo lateral con marro, la duración del registro es de 0.5 segundos y muestreo de 0.125 ms. La curva de dispersión seleccionada se consiguió a partir del método MASW y SPAC. La abertura máxima AB/2 del sondeo eléctrico es de 100 m. El número de datos seleccionados para ambos esquemas de inversión es de 17 observaciones.

IV.4.2 Modelo inicial

El modelo inicial consiste de 10 capas, la primera de 1 m de espesor y las siguientes de 2.1 m, todo sobre un semi-espacio. Para construir el modelo inicial, tomo en cuenta que los datos sugieren una velocidad promedio de onda S de 150 m/s y una resistividad aparente de 3 Ω -m. La densidad utilizada es de 1.2 gr/cm³ y la relación $Vp/Vs=4$, estos dos valores se mantienen fijos en la inversión.

IV.4.3 Resultados de inversión secuencial

En la primera etapa del esquema secuencial, los datos de resistividad identifican 4 interfaces colocadas a 1, 7.3 13.8 y 20 m de profundidad sobre un semi-espacio (Figura 38a). Los datos de dispersión de ondas superficiales indican que la velocidad de onda S cambia significativamente sólo a partir de ~12 m de profundidad (Figura 38b).

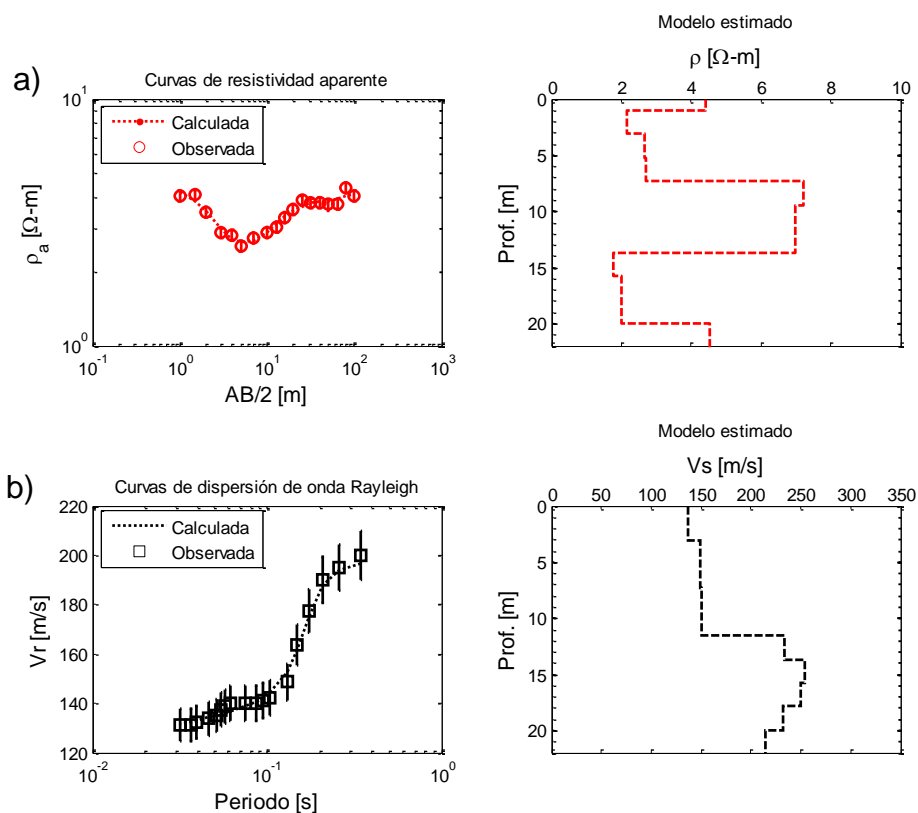


Figura 38. Modelos estimados en la primera etapa secuencial por norma L_1 . a) resistividad y b) velocidad de onda S.

En una primera prueba, los espesores obtenidos por los datos sísmicos (3 y 12 m) quedan fijos en ambos datos. El modelo secuencial de resistividad no muestra un buen ajuste de la curva de resistividad aparente, después de 7 iteraciones. La Figura 39 muestra estos resultados.

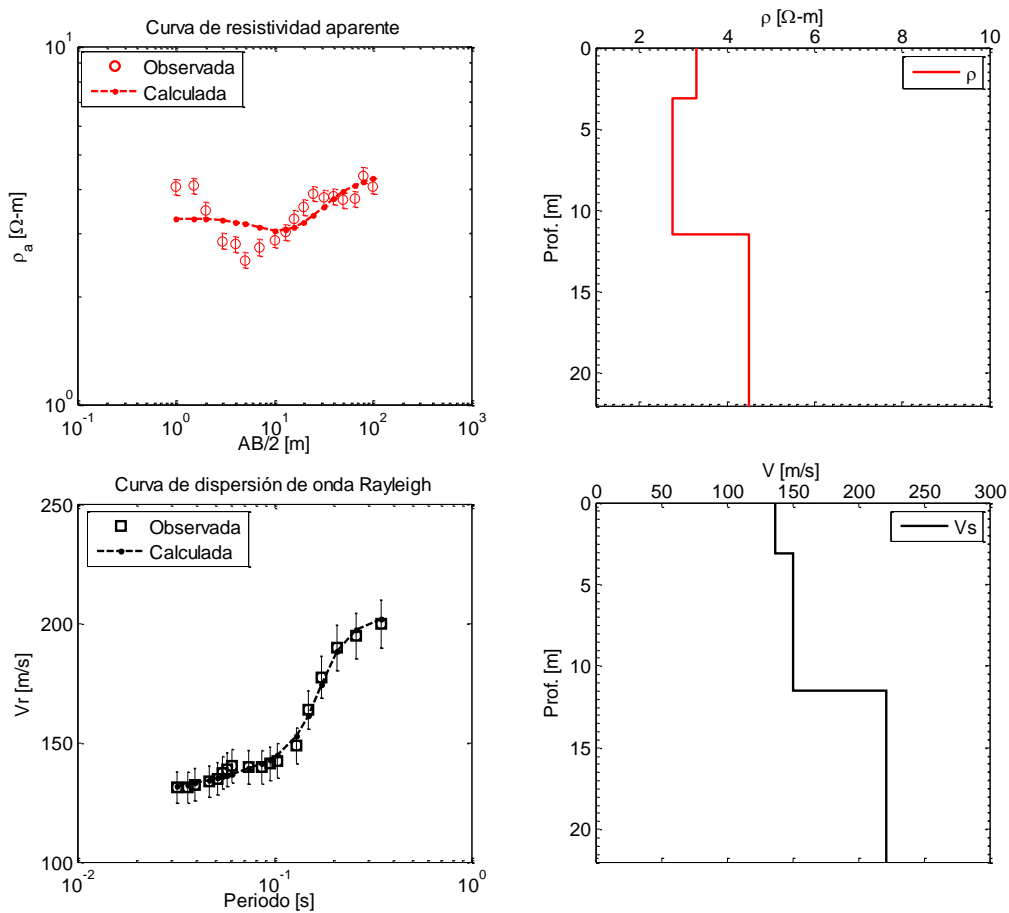


Figura 39. Modelos estimados en la segunda etapa secuencial, utilizando los espesores obtenidos de la inversión de los datos sísmicos. Para resistividad, RMS=2.35 con 7 iteraciones; para datos sísmicos, RMS=0.26 con 5 iteraciones.

Debido a la deficiencia del ajuste a los datos de resistividad, utilicé alternativamente las interfaces obtenidas por los datos de resistividad (1, 7.3 y 13.8 m); la Figura 40 muestra los resultados.

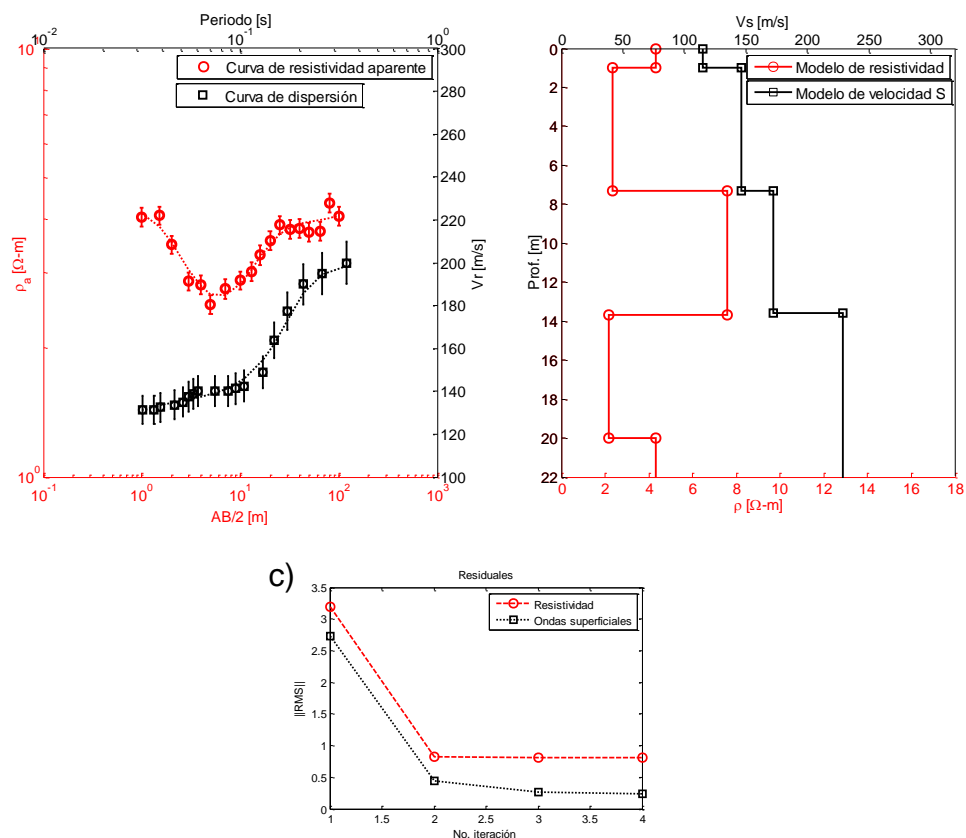


Figura 40. Modelos estimados con la metodología de inversión secuencial. Sitio Solidaridad. a) Curvas ajustadas (líneas discontinuas), b) modelos estimados y c) $RMS=0.81$ en resistividad y $RMS=0.24$ en ondas superficiales. RMS normalizado por el error de los datos; el número de iteraciones para los datos de resistividad y de dispersión son 4.

Dada la calidad de los ajustes para ambos experimentos, se concluye que los modelos mostrados en la Figura 40 son mejores que los de la Figura 39.

IV.4.3.1 Análisis de significación de resultados

Para las diferentes aberturas $AB/2$ del sondeo geoelectrico, los datos de resistividad muestran menor sensibilidad al tercer espesor (~ 10 m), la variabilidad es mayor en esta capa (ver primera Figura 41a). Los datos de dispersión de ondas superficiales son menos sensibles al primer espesor. Las derivadas parciales de cada conjunto de datos, indican sensibilidades similares a los modelos a

profundidades mayores de ~ 14 m. La longitud de resolución para cada tipo de datos es de ~ 2 m.

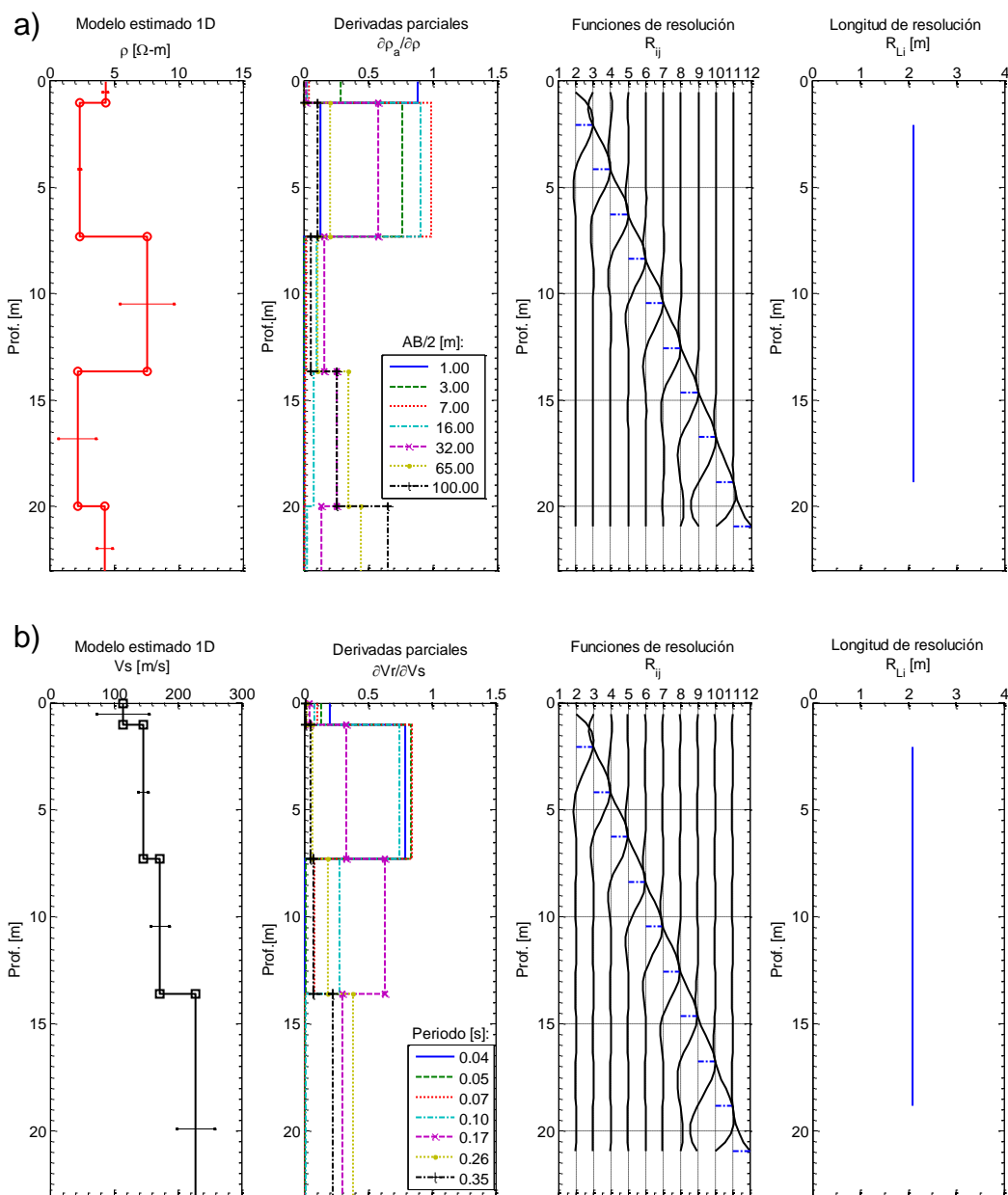


Figura 41. De izquierda a derecha, variabilidad ($\pm 1\sigma$, barras horizontales en los modelos), sensibilidad de los datos para diferentes aberturas AB/2 y periodos y funciones de resolución a diferentes profundidades de los modelos estimados por inversión secuencial en el sitio Solidaridad. Modelo de a) resistividades y b) de velocidades de onda S.

IV.4.4 Resultados de inversión conjunta

La Figura 42 despliega el ajuste y los modelos estimados; $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 100$, valores constantes para todas las iteraciones; valor inicial de γ igual a 10^3 . Después de 4 iteraciones, RMS=0.77 (datos de resistividad) y RMS=0.26 (datos de ondas superficiales).

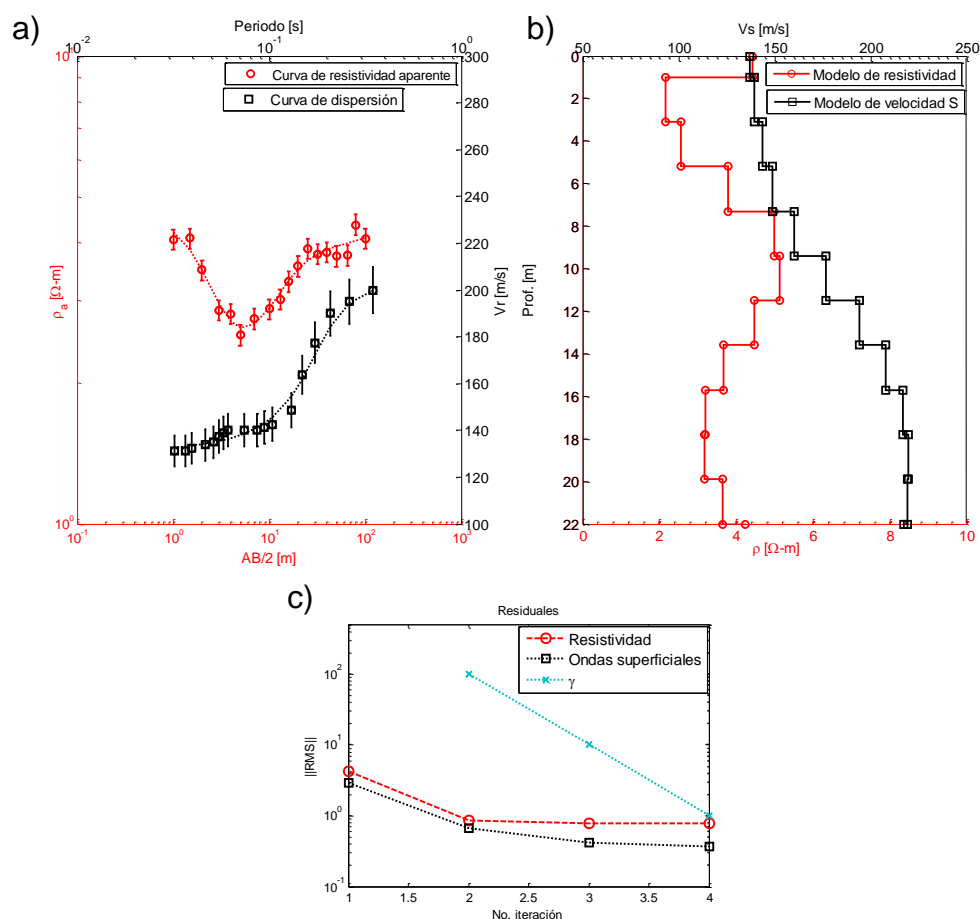


Figura 42. Modelos estimados de resistividad y velocidad de onda S con la metodología de inversión conjunta; sitio Solidaridad. a) Curvas ajustadas, b) modelos ajustados y c) variación del RMS y γ en función del índice de la iteración.

La sensibilidad de los datos de resistividad disminuye a partir de ~ 8 m y de los datos de ondas superficiales, a partir de 15 m (Figura 43).

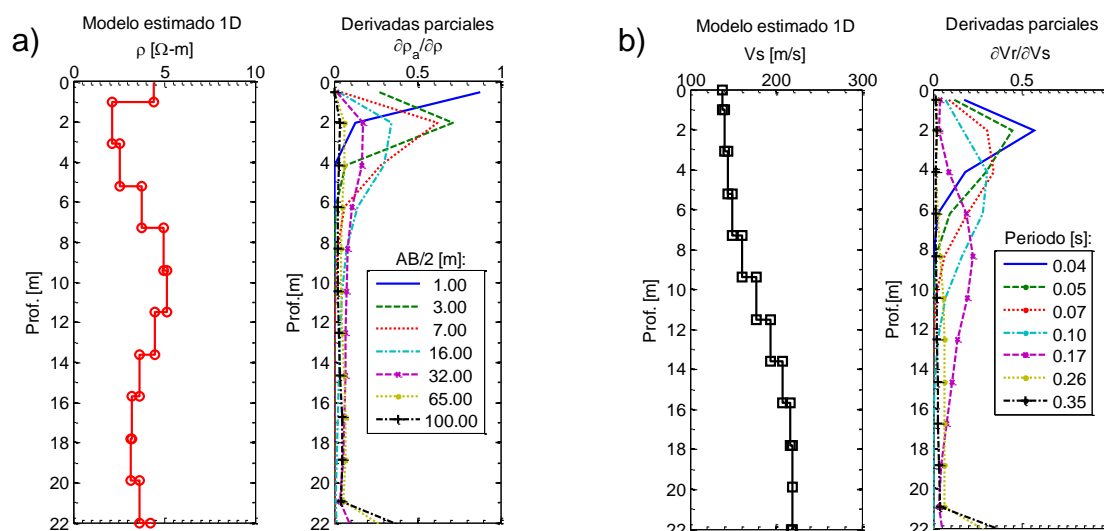


Figura 43. Modelos finales y sensibilidad de los datos; inversión conjunta; sitio Río Nuevo; a) resistividad y b) velocidad de onda S.

IV.4.5 Comparación de los modelos obtenidos por los métodos secuenciales y conjuntos con estudios previos

Las estructuras estimadas por inversión secuencial identifican tres discontinuidades a 1, 7.3, 13.6 y 20 m. La metodología de inversión conjunta entrega modelos suaves los cuales no señalan una relación positiva entre la resistividad y la velocidad de onda S. La Figura 44a y Figura 44b comparan los resultados de ambos tipos de inversión para los datos de resistividad y para los de dispersión de ondas Rayleigh, respectivamente. El RMS es similar para los modelos de resistividad (secuencial: 0.81; conjunta: 0.77) y de velocidades de onda S (secuencial: 0.24 y conjunta: 0.36).

En este sitio, ambos tipos de datos (sísmicos y resistividad) presentan sensibilidad y resolución similar al aplicar la inversión secuencial (Figura 41a y Figura 41b). Para la inversión conjunta, los datos sísmicos tienen mayor sensibilidad que los de resistividad (Figura 43a y Figura 43b).

La Figura 44a y Figura 44b muestran los resultados de inversión secuencial, conjunta además de los reportados en este sitio (Acosta-Chang *et al.* 2010). La

inversión secuencial produce dos discontinuidades a 7.3 y 13.6 m de profundidad, las cuales no aparecen en la inversión separada. La presencia de la capa conductora entre los 13.6 y 20 m resulta de las características a aperturas mayores de la curva de resistividad aparente (Figura 42a).

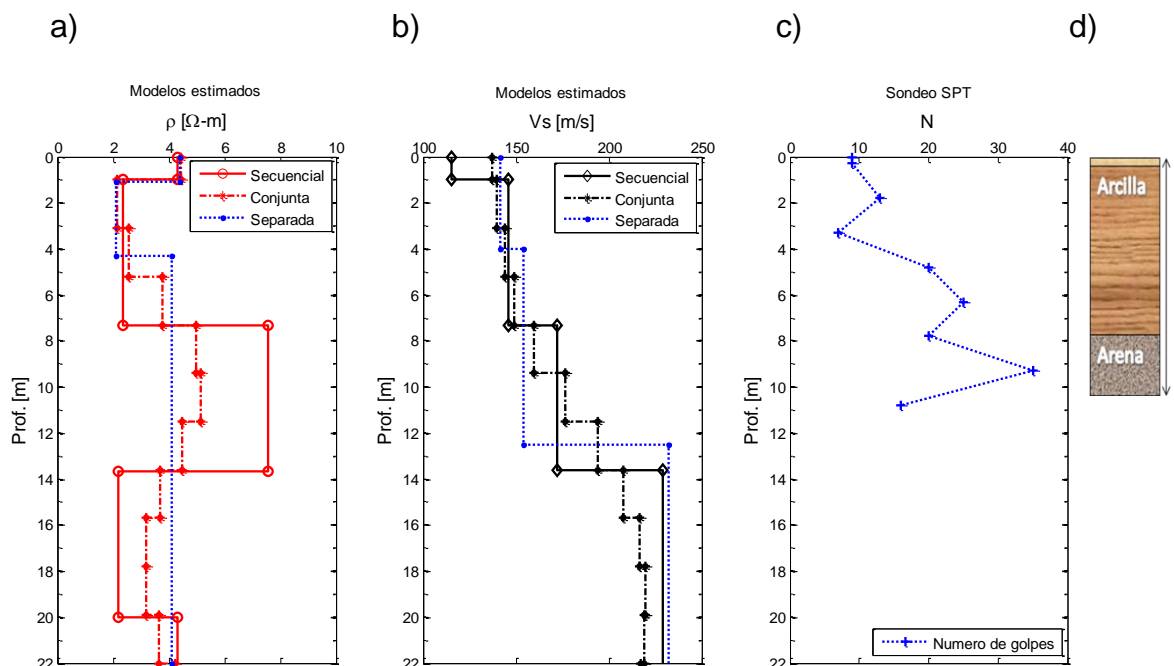


Figura 44. Modelos (de izquierda a derecha) estimados por inversión secuencial (línea continua) y conjunta (línea discontinua) con la información reportado por estudios de mecánica de suelos a ~80 m del sitio de estudio en el sitio Solidaridad. Modelos a) de resistividades, b) de velocidades de onda S, c) SPT y d) perfil estratigráfico.

La Figura 44c y Figura 44d muestran el perfil estratigráfico y el sondeo de penetración estándar (SPT), respectivamente. Esta información fue obtenida a ~80 m del sitio del levantamiento de los datos. La información de mecánica de suelos indica la existencia de materiales arcillosos en los primeros 8 metros seguido de la presencia de arenas de grano fino. El sondeo SPT reporta un incremento en la compactación de los materiales a partir de los 5 m.

Con los resultados de las inversiones y la información de suelos, la Tabla XI resume los valores de resistividad y V_s , así como la interpretación correspondiente. Ella contiene los valores de cada propiedad estimada por inversión secuencial y el rango correspondiente de valores obtenidos en inversión conjunta.

Tabla XI. Resistividades y velocidades de onda S estimadas en el sitio Solidaridad, por inversión secuencial y conjunta.

Espesor obtenido por inversión secuencial [m]	ρ [Ω -m]		V_s [m/s]		Descripción
	Secuencial	Conjunto (rango)	Secuencial	Conjunto (rango)	
1	4.3	4.4	115	137	Cubierta superficial de materiales arcillo-arenosos
6.3	2.3	2.1-3.8	146	139-149	Arcillas
6.3	7.5	4.5-5.1	172	160-194	Arena de grano fino
6.3	2.1	3.6-3.2	228	207-219	Arcillas semi-compactas
semi-espacio	4.3	3.6	228	219	

IV.4.6 Conclusiones

1. En cuanto al modelo resistivo resultante, los datos indican claramente la existencia de la capa conductora entre 1 m y 7.3 m donde además hay mayor sensibilidad de los datos. El modelo contiene un resistivo entre los 7.3 m y 13.6 m. La capa conductora entre los 13.6 m y 20 m resulta de las características de la curva de resistividad aparente a las aberturas máximas. Con respecto a la estructura de V_s , no hay señales de baja velocidad que correspondan a las zonas conductoras; la curva de velocidad de fase indican un crecimiento de V_s con la profundidad excepto posiblemente en las capas muy someras.
2. El análisis de significación del modelo de resistividad para la inversión secuencial indica menor variabilidad y mayor sensibilidad para el modelo en los

primeros 7.3 m en particular para la capa conductora con respecto a las capas más profundas (Figura 41a). Para el modelo de V_s , la estructura mejor determinada está entre 1 m y 13.6 m (Figura 41b).

3. Es obvio que las curvas de dispersión y de resistividad aparente no describen un comportamiento similar en la resistividad y velocidad de onda S en el sitio debido a la presencia de capas conductoras (Figura 42).
4. Los esquemas de inversión secuencial y conjunta entregan modelos equivalentes que satisfacen las observaciones. Los valores de *RMS* indican ajustes similares.
5. Los resultados para resistividad parecen concordar con la presencia de una secuencia de intercalaciones de materiales arcillosos y arenosos que aparece en el perfil estratigráfico reportado a ~80 m. La velocidad de onda S estimada no rebasa los 228 m/s en los primeros 20 m, por lo cual el terreno puede ser clasificado como suelo arenoso (Tabla IV).

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y DISCUSIONES

V.1 Conclusiones generales

1. Esta Tesis utiliza y desarrolla metodologías para la inversión de datos de velocidad de fase de ondas Rayleigh y de sondeos geoelectricos de corriente directa; el objetivo es estimar resistividades y velocidades de onda S a profundidades someras en 1D. El propósito general es la aplicación a estudios de ingeniería.
2. Ambos problemas directos, que están resueltos en la literatura, son no-lineales por lo cual aplicamos linealización (desarrollo de Taylor) para resolver los problemas inversos correspondientes. El lenguaje computacional utilizado es MatLab. Un conjunto de pruebas numéricas validan la exactitud y estabilidad de los algoritmos.
3. La primera etapa de este trabajo consiste en diseñar y probar algoritmos de inversión regularizada separados para ambos tipos de datos. Ellos optimizan, en norma L_2 , los términos de ajuste y de regularización de la función criterio.
4. La primera metodología que utiliza, en un mismo algoritmo, a ambos tipos de datos, *inversión secuencial*, supone que existen discontinuidades comunes para ambas estructuras y que ambos (o uno) tipos de datos son sensibles a la profundidad de esas interfaces. La optimización en norma L_1 del término de regularización de la función criterio permite detectar las discontinuidades. Después de este primer paso de inversión separada, las profundidades resultantes se fijan para ambas estructuras y se estima la resistividad y la velocidad de onda S. Típicamente, se obtiene convergencia

en el primer paso en 5 a 10 iteraciones y en 3 a 5, en el segundo. Los algoritmos numéricos son validados con datos sintéticos, con y sin ruido.

5. La función objeto de la segunda metodología, denominada *inversión conjunta*, optimiza en norma L_2 cinco términos: dos de ajuste, dos de suavidades y un término de similitud estructural. La similitud se mide la diferencia entre las primeras derivadas de cada propiedad.
6. Es extremadamente difícil explorar numéricamente en forma completa los valores de los cuatro coeficientes; por lo tanto, se debe aplicar criterios de simplificación. En primer lugar suponemos que ambos conjuntos de datos tiene la misma ponderación en la inversión. Para manejar los tres restantes, aplicamos métodos de prueba y error. La función criterio es:

$$U = \|y_1 - J_1 x_1\|_{C_{y_1}^{-1}}^2 + \alpha_1 \|D_1 x_1\|^2 + \|y_2 - J_2 x_2\|_{C_{y_2}^{-1}}^2 + \alpha_2 \|D_1 x_2\|^2 + \gamma \|D_1 x_1 - D_1 x_2\|^2$$

Valores muy grandes de α_1 , α_2 y γ implican que la regularización correspondiente predomina sobre el ajuste y viceversa.

7. Con respecto a los valores de γ , las pruebas indican que es preferible, como criterio pragmático, utilizar en las primeras iteraciones valores grandes de γ que decrecen posteriormente. Los valores típicos para α_1 y α_2 tienen un rango de [0.1–10] y [10–1000], respectivamente; una vez seleccionados, permanecen fijos a través de todas las iteraciones. Típicamente la convergencia se consigue de 5 a 7 iteraciones. Los algoritmos numéricos son validados con datos sintéticos con y sin ruido.
8. El examen de la significación de los resultados de la inversión secuencial utiliza medidas de la sensibilidad, resolución y variabilidad ($\pm 1\sigma$) del modelo estimado. Dada la no-linealidad del problema, el cálculo de resolución y la

variabilidad es aproximado. La sensibilidad de los resultados de inversión conjunta son medidos por las derivadas parciales correspondientes.

9. Los resultados de la aplicación de ambas metodologías en el sitio Río Nuevo producen modelos equivalentes, en el sentido de que la velocidad promedio del resultado de la inversión conjunta en un rango de profundidad corresponde al valor estimado para la capa correspondiente en la inversión secuencial. Los modelos secuenciales están de acuerdo en los primeros 20 m con el perfil estratigráfico con diferencias en la profundidad de las discontinuidades de ± 3 m. Este perfil está situado a una distancia de ~ 180 m.
10. En el sitio Solidaridad, la información obtenida por mecánica de suelos coinciden bien (± 1 m) con los resultados de la inversión secuencial para los primeros 8 m. Los valores estimados de resistividad y de velocidad corresponden a un suelo arenoso.
11. Los estudios de Ingeniería Civil usan, para describir el tipo de suelos, el parámetro Vs30 (Vs a 30 metros de profundidad). Las metodologías propuestas entregan este parámetro; la información de resistividad complementa la descripción de la estructura.

V.2 Discusión

La inversión conjunta necesita la determinación de cuatro coeficientes de regularización que ponderan en forma relativa los cinco términos de la función criterio: dos de ajuste de los datos, dos de regularización por conducta suave con la profundidad y uno que regulariza por similitud. En la práctica, no es posible explorar todas las soluciones dentro de rangos y pasos realistas de discretización para estos parámetros; en esta Tesis, aplicamos algunas reglas encontradas por prueba y error. Al respecto, la inversión secuencial es más fácil implementar

numéricamente; además, produce una drástica reducción de incógnitas por la reducción de la estructura a unas pocas capas.

La metodología desarrollada muestra que el uso de dos tipos de datos mejora la inversión separada de ellos al complementar la información correspondiente especialmente a la diferencia de sensibilidad para detectar, en profundidad, a discontinuidades.

En general, es necesario realizar inversión 1D en diversos sitios para detectar posibles variaciones laterales; si ellas existen, la exploración debe utilizar técnicas de inversión 2D o 3D.

V.3 Trabajos futuros

Un problema interesante, no cubierto en esta Tesis, es la detección de zonas saturadas de agua en capas intermedias, lo que implica zonas de baja velocidad de onda S. La incorporación de datos de resistividad puede ayudar a la detección de estas zonas. Esta Tesis no contiene ejercicios con datos sintéticos para detectar la presencia de zonas de baja velocidad.

El método de dispersión de ondas superficiales con datos de ruido sísmico ofrece la ventaja de estimar de forma rápida las velocidades de ondas S en zonas urbanas. Por lo cual, es necesario explorar nuevas técnicas de modelado e inversión conjunta 2D con datos de dispersión de ondas superficiales y de otro tipo, como refracción sísmica y métodos eléctricos.

Es posible incorporar en inversión conjunta a otro tipo de datos para determinar estructuras someras; por ejemplo, cocientes espectrales, georadar, refracción y reflexión sísmica, AMT y polarización inducida.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta Chang, J. G., E. Ruiz Cruz, L. H. Mendoza Garcilazo, R. Reyes Serrano, G. A. Arellano Zepeda, S. Vazquez Hernandez, I. Mendez Figueroa y O. Granados Hernandez. 2011. Estudio geofísico en los polígonos 8-3 y 7-5 R2, de Río Nuevo, Mexicali, Baja California. Informe técnico. Ensenada. CICESE-GOBIERNO DE BAJA CALIFORNIA (Proyecto #641603). 55 pp., informe #PA:101342.

Acosta Chang, J. G., S. Vázquez Hernández, L. H. Mendoza Garcilazo, F. Cruz Hernández, J. J. Salas Ariza, E. Ruiz Cruz, G. A. Arellano Zepeda, R. Reyes Serrano y O. Granados Hernández. 2010. Estudio geofísico y geológico en la colonia Solidaridad Social. Informe técnico. Ensenada, B.C., México. CICESE-AYUNTAMIENTO DE MEXICALI: Contrato de servicios de consultoría especializada No. 01-AYTO-MXL-OM-ADQ-08-10. 107 pp., informe #PA:101087.

Afnimar, K. Koketsu and K. Nakagawa. 2002. Joint inversion of refraction and gravity data for the three-dimensional topography of a sediment-basement interface. *Geophysical Journal International*. 151: 243-254 p.

Aki, K. 1957. Space and time spectra of stationary stochastic waves, with special reference to microtremors. *Tokyo University, Bull. Earthquake Res. Inst.* 25: 415–457 p.

Backus, G. E. and J. F. Gilbert. 1967. Numerical application of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 13: 247-276 p.

Backus, G. E., and J. F. Gilbert. 1968. The resolving power of gross earth data. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 16: 169-205 p.

Ballard, M. S. 2009. Optimized constraints for the linearized geoacoustic inverse problem. Thesis the Pennsylvania, State University, Pennsylvania. 203 p.

Barker, R. D. 1989. Depth of investigation of collinear symmetrical four-electrode arrays. *Geophysics*. 54(8): 1031-1037 p.

Boore, D. M. 1972. Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. *Methods in computational physics*. B. A. Bolt.

Borsic, A. and A. Adler. 2012. A Primal Dual - Interior Point Framework for Using the L1-Norm or the L2-Norm on the Data and Regularization Terms of Inverse Problems. Department of Systems and Computer Engineering Carleton University. Colonel By Drive Ottawa. Ontario. 10 p.

- Bullen, K. E. and B. A. Bruce. 1963. An introduction to the theory of seismology. Cambridge. Cuarta edición. University Cambridge. 520 p.
- Capon, J. 1969. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. Proc. IEEE. 57: 1408-1418 p.
- Carcione, J. M., B. Ursin and J. I. Nordskag. 2007. Cross-property relations between electrical conductivity and the seismic velocity of rocks. Geophysics. 72: E193–E204 p.
- Carmichael, R. S. 1989. Practical handbook of physical properties of rocks and minerals. CRC Press. Sexta edición. Boca Raton, Fla. 741 p.
- Chapman, C. H. 2003. Yet another elastic plane-wave, layer-matrix algorithm. Geophysical Journal International , 154, 212-223.
- Cho, I., T. Tada and Y. Shinozaki. 2004. A new method to determine phase velocities of Rayleigh waves from microseisms. Geophysics. 69: 1535-1551 p.
- Colombo, D. and M. D. Stefano. 2007. Geophysical modeling via simultaneous joint inversion of seismic, gravity, and electromagnetic data: Application to prestack depth imaging. The Leading Edge 326-331 p.
- Comina C., S. Foti, L. Sambuelli, L. V. Socco and C. Strobbia. 2002. Joint inversion of VES and surface wave data. Proc. SAGEEP, Las Vegas. 1-12 p.
- Constable, S. C. 1987. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. Geophysics: 52(3): 289-300 p.
- Dorman J. and M. Ewing. 1962. Numerical Inversion of seismic surface waves dispersion data and crust-mantle structure in the New York-Pennsylvania area. J. Geophysical Research. 67: 5227-5241 p.
- Dorman J., M. Ewing and J. Olivier. 1960. Study of the shear-velocity distribution in the upper mantle by mantle Rayleigh waves. Bulletin of the Seismological Society of America. 50: 87-115 p.
- Dunkin, J. 1965. Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. Bulletin of Seismological Society of America. 55: 335-358 p.
- Ekinci, Y. L. and A. Demirci. 2008. A damped least-squares inversion program for the interpretation of Schlumberger sounding curves. Journal of Applied Sciences. 8(22): 4070-4078 p.
- Esparza, F. and E. Gómez-Treviño. 1997. 1-D inversion of resistivity and induced polarization data for the least number of layers. Geophysics. 62(6): 1724–1729 p.

Ewing, W. M., W. S. Jardetzky and F. Press. 1957. Elastic waves in layered media. McGraw Hill Book Co. Inc. Primera edición. New York. 375 p.

Fletcher, R. 1971. A modified Marquardt subroutine for nonlinear least squares. Atomic Energy Research Establishment report R6799. Harwell, England. 24 p.

Foti S., L. Sambuelli, V. L. Socco and C. Strobbia. 2003. Experiments of joint acquisition of seismic refraction and surface wave data. Near Surface Geophysics. 119-129 p.

Fregoso Becerra, E. 2010. Inversion conjunta 3D de multiples datos geofisicos usando restricciones de gradientes cruzados. Tesis Doctoral. CICESE, Ensenada, Baja California, México. 243 p.

Frez, J. 2010. Notas del Curso de Teoría de Inversión. CICESE, Ciencias de la Tierra, Ensenada, B. C. México. Inédito.

Frez, J. 2012. On the regularized Gauss-Newton method and resolution estimation. En proceso. CICESE, Ciencias de la Tierra, Ensenada, B. C. México. 10 p.

Frez, J. y F. Cruz. 2011. Estimación conjunta de velocidades sísmicas (V_p y V_s) de suelos con datos de velocidad de fase de onda Rayleigh. Congreso: Unión Geofísica Mexicana, Puerto Vallarta, México.

Gabriels P., R. Snieder and G. Nolet. 1987. In situ measurement of shear wave velocity in sediments with higher-mode rayleigh waves. Geophysical prospecting. 35: 187-196 p.

Gallardo, L. A. 2007. Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging. Geophysical Research Letters. 34: 1-5 p.

Gallardo, L. A. y M. A. Meju. 2004. Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. Journal of Geophysical Research. 109: 1-11 p.

Gallardo, L. A. y M. A. Meju. 2003. Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data. Geophysical Research. 30(13): 1-4 p.

García Puertos, R. 2005. Estimación de velocidad de cortante usando sísmica de dispersión de ondas superficiales. Tesis Licenciatura, IPN, ESIA, Ticoman, México D. F. 60 p.

Garland, G. D. 1979. Introduction to geophysics: Mantle, core and crust. Saunders. Segunda edición. EUA. 420 p.

Gersztenkorn, A., J. B. Bednar, and L. R. Lines. 1986. Robust iterative inversion for the one-dimensional acoustic wave equation. *Geophysics*. 51: 357-368.

Ghosh, D. P. 1971b. Inverse filter coefficients for computation of apparent resistivity standard curves for horizontally stratified earth. *Geophys. Prospect.* 19: 769-775 P.

Ghosh, D. P. 1971a. The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements. *Geophysical Prospecting*. 19: 192–217 p.

Gilbert, F. and G. Backus. 1966. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*. 31: 326–332 p.

Haber, E. y D. Oldenburg. 1997. Joint inversion: a structural approach: Inverse Problems. Department of Geophysics, University of British Columbia, Vancouver, Canada. 1-21 p.

Haney, M. M. 2010. Rayleigh Wave Dispersion Curve Inversion: Occam Versus the L1-Norm. Boise State University. 1870-1876 p.

Haskell, N. 1953. The dispersion of surface waves on Multilayered Media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 43: 17-34.

Hayashi, K. 2003. Data acquisition and analysis of active and passive surface wave methods. Sort course by OYO coporation. 106 p.

Hering, A., R. Misiek, Y. Lai, A. Ormos, G. T. Dobroka and L. Dresen. 1995. A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data. *Geophysical Prospecting*. 43: 135-156 p.

Herrmann, R. B. and C. J. Ammon. 2002. Surface waves, receiver functions and crustal structure. Department of Earth and Department of Geosciences, Atmospheric Sciences, Saint Louis University PennState University, Version 3.30. 110 p.

Hisada, Y. 1994. An Efficient Method for Computing Green's Functions for a Layered Half-Space with Sources and Receivers at Close Depths. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 84(5): 1456-1472.

Inman, J. R., J. Ryu. and S. H. Ward. 1973. Resistivity inversion. *Geophysics*. 38: 1088-1108 p.

Inman, J. R. 1975. Resistivity inversion with ridge regression. *Geophysics*. 40: 798-817 p.

Jegen, M. D., R. W. Hobbs, P. Tarits and A. Chave. 2009. Joint inversion of marine magnetotelluric and gravity data incorporating seismic constraints Preliminary results of sub-basalt imaging off the Faroe Shelf. *Earth and Planetary Science Letters*. 282: 47–55 p.

Johansen, H. K. 1975. An interactive computer/graphic-display terminal system for interpretation of resistivity soundings. *Geophys. Prosp.* 23: 449–458 p.

Kausel, E. A., and J. M. Roesset. 1981. Stiffness matrices for layered soils. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 71: 1743-1761 p.

Kennett, B. L. 1983. *Seismic wave propagation in stratified media*. University Press. Primera edición. Cambridge. 207 p.

Knopoff, L. 1972. Observation and Inversion of Surface wave dispersion. *Tectonophysics*. 13: 497-519 p.

Koefoed, O. 1970. A fast method for determining the layer distribution from the raised kernel function. *Geophys. Prosp.* 18: 564-570 p.

Konopoff, K. 1964. A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the seismological society of America*. 54: 431-438 p.

Kovach, R. L. 1978. Seismic surface waves and crust and upper-mantle structure. *Geophys and Space Phys.* 16: 1-13 p.

Kowalsky, M. B., J. Chen and S. S. Hubbard. 2006. Joint inversion of Geophysical and hydrological data for improved subsurface characterization. *The Leading Edge*. 25(6): 730-734 p.

Kvaerna, T. and F. Ringdahl. 1986. Stability of various fk-estimation techniques. In *NORSAR Scientific Report*, Kjeller, Norway. 29–40 p.

Lacoss, R. T., E. J. Kelly and M. N. Toksoz. 1969. Estimation of seismic noise structure using arrays. *Geophysics*. 34: 21–38 p.

Lai, C. G. and G. J. Rix. 1998. *Simultaneous Inversion of Rayleigh Phase Velocity and Attenuation for Near-Surface Site Characterization*. PhD. Diss., Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, USA. 370 p.

Levenberg, K. 1944. A method for the solution of certain non-linear problems in least-squares. *Qu. App. Maths.* 2: 164 p.

- Linde, N., A. Binley, A. Tryggvason, L. B. Pedersen, and A. Revil. 2006. Improved hydrogeophysical characterization using joint inversion of crosshole electrical resistance and ground penetrating traveltime data. *Water Resources Research*. 42: 10 p.
- Linde, N., A. Tryggvason, J. E. Peterson and S. S. Hubbard. 2008. Joint inversion of crosshole radar and seismic traveltimes acquired at the South Oyster Bacterial Transport Site. *Geophysics*. 73: 29-37 p.
- Lines, L.R., A. K. Schultz and S. Treitel. 1988. Cooperative inversion of geophysical data. *Geophysics*. 53: 8-20 p.
- Louie, J. N. 2001. Faster, Better: Shear-Wave Velocity to 100 meters Depth from Refraction Microtremor Arrays. *Bulletin of the Seismological Society of the America*. 13 p.
- Luco, J. E. and R. J. Apsel. 1983. On the Green's function for a layered half-space, Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 73: 909-929 p.
- Lysmer, J. and L. A. Drake. 1972. A finite element method for seismology, in *Methods in computational physics*. 181-216 p.
- Marquandt, D. 1963. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *SIAM J. Appl. Math.* 11: 431-441 p.
- Marquandt, D. 1970. Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation and non-linear estimation. *Technometrics*. 12: 591-612 p.
- Marquardt, D. 1970. Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation. *Technometrics*. 12: 591-612 p.
- McMechan, G. A. and M. J. Yedlin. 1981. Analysis of dispersive waves by wave field transformation. *Geophysics*. 46: 869-874 p.
- Menke, W. 1989. *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic Press Inc. Primera edición. San Diego. 289 p.
- Miller, C. R. and P. S. Routh. 2007. Resolution analysis of geophysical images: Comparison of point spread function and region of data influence measures. *Geophysical Prospecting*. 55(6): 835-852 p.
- Monteiro Santos, F. A., A. R. Andrade Afonso y L. A. Mendes Victor. 1997. 1D Joint inversion of AMT and resistivity data acquired over a graben. *Journal of Applied Geophysics*. 38(2): 115-129 p.

Monteiro Santos, F. A., S. A. Sultan, P. Represas and A. L. El Sorady. 2006. Joint inversion of gravity and geoelectrical data for groundwater and structural investigation: application to the northwestern part of Sinai, Egypt. *Geophysical Journal International*. 165: 705-718 p.

Moorkamp, M., A. G. Jones and S. Fishwick. 2010. Joint inversion of receiver functions, surface wave dispersion, and magnetotelluric data. *Journal of Geophysical Research*. 115: 23 p.

Moorkamp, M., A. G. Jones and D. W. Eaton. 2007. Joint inversion of teleseismic receiver functions and magnetotelluric data using a genetic algorithm: Are seismic velocities and electrical conductivities compatible?. *Geophysical Research Letters*. 34: 5 p.

Moro, G. D. and M. Pipan. 2005. Joint inversion of surface wave dispersion curves and reflection travel times via multi-objective evolutionary algorithms. *Journal of Applied Geophysics*. 61: 56–81 p.

Muiuane, E. A. and L. B. Pederson. 1999. Automatic 1D interpretation of DC resistivity sounding data. *Journal of Applied Geophysics*. 42: 35–45 p.

Musil, M., H. R. Maurer and A. G. Green. 2003. Discrete tomography and joint inversion for loosely connected or unconnected physical properties: application to crosshole seismic and georadar data sets. *Geophysical Journal International*. 153: 389-402 p.

Nath, S. K., S. Shahid and P. Dewangan. 2000. SEISRES - a Visual C++ program for the sequential inversion of seismic re-refraction and geoelectric data. *Computers and Geosciences*. 26: 177-200 p.

Nazarian, S. and K. H. Stokoes. 1984. In situ shear wave velocity from spectral analysis of surface waves. *Proc 8th Conference on Earthquake engineering- St Francisco*. 3: 31-38 p.

Nielsen, L. y B. H. Jacobsen. 2000. Integrated gravity and wide-angle seismic inversion for two-dimensional crustal modeling. *Geophysical Journal International*. 140: 222-232 p.

Okada, H. 2003. *The Microtremor Survey Method*. Geophysical monographs serie No. 12 SEG. 150 p.

Oldenburg, D. W. and Y. Li. 1999. Estimating depth of investigation in dc resistivity and IP surveys. *Geophysics*. 64(2): 403-416 p.

Oldenburg, D. W. 1978. The interpretation of direct current resistivity measurements. *Geophysics*. 43: 610-625 p.

- Orellana, E. y H. M. Mooney. 1966. Master tables and curves for Electrical Soundings. Interciencia. Primera edición. Madrid. 125 p.
- Orellana, E. 1982. Prospección geoelectrica por corriente continua. Paraninfo. Segunda edición. Madrid, España. 580 p.
- Orozco, M. C. 2003. Inversion Method For Spectral Analysis Of Surface Waves (SASW). A thesis presented to the academic faculty Georgia Institute of technology. 287 p.
- Park, C.B., R. D. Miller and J. Xia. 1999. Multichannel analysis of surface waves. Geophysics. 64(3): 800-808 p.
- Parker, R. L. 1984. The inverse problem of resistivity sounding. Geophysics. 49(12): 2143-2158 p.
- Parker, R. L. 1994. Geophysical Inverse Theory. Princeton University Press. Primera edición. United States of America. 386 pp.
- Pei, D. 2007. Modeling and Inversion of Dispersion Curves of Surface Waves in Shallow Site Investigations. Thesis of doctor, University of Nevada, Reno. 165 p.
- Piatti, C., L. V. Socco, S. Foti and D. Boiero. 2010. 1D Joint inversion of surface waves and p-wave refraction traveltimes. Politecnico di Torino, Italy. 521-523 p.
- Pilkington, M. 2006. Joint inversion of gravity and magnetic data for two-layer models. Geophysics. 71(3): L35-L42 p.
- Rodi, W. and R. L. Mackie. 2001. Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversion. Geophysics. 66: 174-187 p.
- Rodríguez M. y F. Cruz Hernández. 2010. Shallow structure of shear velocity in sediments using ambient seismic noise, comparison between SPAC and CCA. 9Th International Workshop on Seismic Microzoning and Risk Reduction; Cuernavaca, México. 8 p.
- Saito, M. 1988. DISPER80: a subroutine package for calculation of seismic normal-mode solutions: in Seismological algorithms; computational methods and computer programs. Doornbos, D.J., Academic Press. Primera edición. New York. 469 p.
- Saucedo Andrade, T. 2007. Inversión conjunta de datos electromagnéticos a bajo número de inducción y sísmica de refracción. Tesis de Maestria, CICESE, Ensenada, Baja California, México. 150 p.

Saunders, J. H., J. V. Herwanger, C. C. Pain, M. H. Worthington and C. R. E. de Oliveira. 2005. Constrained resistivity inversion using seismic data. *Geophysical Journal International*. 160: 785-796 p.

Slaoui, F. H., S. Georges, P. J. Lagace and X. D. Do. 2003. The inverse problem of Schlumberger resistivity sounding measurements by ridge regression. *Electric Power Systems Research*. 67: 109-114 p.

Strobbia, C. 2002. Surface Wave Methods in shallow geophysics. PhD dissertation, Politecnico di Torino, Italy. 317 p.

Takeuchi, H. and M. Saito. 1972. Seismic surface waves. *Methods in Computational Physics*. 11: 217–295 p.

Tarantola, A. 2005. Inverse problem theory and method for model parameter estimation. SIAM. Primera edición. Paris, France. 342 p.

Thomson, W. 1950. Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium. *Journal of Applied Physics*. 21: 89-93 p.

Tikhonov, A. N. y V. Y. Arsenin. 1977. Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley. Cuarta edición. Washington. 272 p.

Tokimatsu, K. 1995. Geotechnical Site characterisation using surface waves. Int. Conf. on Earth. Geotechn. Eng. IS-Tokio, Balkema. 1333-1368 p.

Tryggvason, A. and N. Linde. 2006. Local earthquake (LE) tomography with joint inversion for P- and S-wave velocities using structural constraints. *Geophysical Research Letters*. 33: 5 p.

Tselentis, G.A. and G. Delis. 1998. Rapid assessment of S-wave profiles from the inversion of multichannel surface wave dispersion data. *Annali di Geofisica*. 41: 1-15 p.

Vedanti, N., R. P. Srivastava, J. Sagode and V. P. Dimi. 2005. An efficient 1D OCCAM'S inversion algorithm using analytically computed first- and second-order derivatives for DC resistivity soundings. *Computers and Geosciences*. 31: 319–328 p.

Wathelet, M. 2005. Array recordings of ambient vibrations: surface-wave inversión. PhD Thesis, Université de Liège Faculté des Sciences Appliquées. Belgium. 177 p.

Watson, G. 1980. Approximation Theory and Numerical Methods. John Wiley y Sons. Primera edición. Chicago. 229 p.

- Watson, G. 2002. On the Gauss-Newton method for L1 orthogonal distance regression. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 22: 345-357 p.
- Weiszfeld, E. 1937. Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. *Print. Tohoku Imp. Univ.*
- Wenner, F. 1915. A method of measuring earth resistivity. *U. S. Bur. Standards Bull.* 12: 469-478.
- Xia, J., R. D. Miller and C. B. Park. 1999. Estimation of near-surface shear-wave velocity by inversion of Rayleigh waves. *Geophysics*. 64(3): 691–700 p.
- Xia, J., R. D. Miller and Y. Xu. 2008. Data-resolution Matrix and Model-resolution Matrix for Rayleigh-wave. *Pure appl. geophys.* 165: 1227–1248 p.
- Xia, J., Y. Xu, R. D. Miller and C. Zeng. 2010. A Trade-Off Solution between Model Resolution and Covariance in Surface-Wave Inversion. *Pure Appl. Geophys.* 167: 1537–1547 p.
- Xia, J., R. D. Miller, C. B. Park and G. Tian. 2003. Inversion of high frequency surface waves with fundamental and higher modos. *Journal of Applied Geophysics*. 52: 45-57 p.
- Yang, C. H. and L. T. Tong. 1999. A Study of Joint Inversion of Direct Current Resistivity, Transient Electromagnetic and Magnetotelluric Sounding Data. *TAO*. 10(1): 293-301 p.
- Zeng, Y. and J. G. Anderson. 1995. A method for direct computation of the differential seismograms with respect to the velocity change in a layered elastic solid. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 85: 300-307 p.
- Zhang, J. y F. D. Morgan. 1997. Joint seismic and electrical tomography. *Annual Symposium: Environmental y Engineering Geophysical Society (SAGEEP)*. 391-395 p.
- Zhody, A. R. 1989. A new method for the automatic interpretation of Schlumberger and Wenner sounding curves. *Geophysics*. 54: 245-253 p.

ANEXO

A. Desarrollo de las ecuaciones de inversión conjunta

Sea y_1^o e y_2^o los datos de corriente directa y de ondas superficiales respectivamente, en la aproximación lineal el operador directo $F(x_1)$ es:

$$F(x_1) \approx F(x_0) + J_1(x_1 - x_0) \quad (1)$$

$$\|y_1^o - F(x_1)\|^2 \quad (2)$$

$$\|y_1^o - F(x_0) - J_1 x_1 + J_1 x_0\|^2 \quad (3)$$

$$\|y_1^o + J_1 x_0 - F(x_0) - J_1 x_1\|^2 \quad (4)$$

Al definir $y_1 = y_1^o + J_1 x_0 - F(x_0)$ y sustituyendo en (4) $\|y_1 - J_1 x_1\|^2$, siguiendo el mismo procedimiento para el segundo conjunto de datos se obtiene $\|y_2 - J_2 x_2\|^2$.

Sea la función objetivo a minimizar:

$$\min \left\{ \|y_1 - F(x_1)\|_{C_{y_1 y_1}^{-1}}^2 + \alpha_1 \|D_1 x_1\|^2 + \|y_2 - F(x_2)\|_{C_{y_2 y_2}^{-1}}^2 + \alpha_2 \|D_1 x_2\|^2 + \gamma \|D_1 x_1 - D_1 x_2\|^2 \right\} \quad (5)$$

En la aproximación lineal $F(x_1) \approx J_1 x_1$ y $F(x_2) \approx J_2 x_2$, sustituyendo en (5):

$$U = \|y_1 - J_1 x_1\|_{C_{y_1 y_1}^{-1}}^2 + \alpha_1 \|D_1 x_1\|^2 + \|y_2 - J_2 x_2\|_{C_{y_2 y_2}^{-1}}^2 + \alpha_2 \|D_1 x_2\|^2 + \gamma \|D_1 x_1 - D_1 x_2\|^2 \quad (6)$$

Resolviendo los términos cuadráticos:

$$U = (y_1^T - x_1^T J_1^T)(y_1 - J_1 x_1) + \alpha_1 (D_1 x_1)^T (D_1 x_1) + (y_2^T - x_2^T J_2^T)(y_2 - J_2 x_2) + \alpha_2 (D_1 x_2)^T (D_1 x_2) + \gamma (x_1 - x_2)^T (D_1^T D_1)(x_1 - x_2) \quad (7)$$

Donde el quinto término se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \gamma (x_1 - x_2)^T (D_1^T D_1)(x_1 - x_2) &= \gamma (x_1^T - x_2^T)(D_1^T D_1)(x_1 - x_2) \\ \gamma (x_1^T - x_2^T)(D_1^T D_1)(x_1 - x_2) &= \gamma (x_1^T D_1^T D_1 x_1 - x_1^T D_1^T D_1 x_2 - x_2^T D_1^T D_1 x_1 + x_2^T D_1^T D_1 x_2) \end{aligned} \quad (8)$$

Haciendo las multiplicaciones correspondientes y agrupando términos:

$$\begin{aligned} U &= y_1^T y_1 - 2y_1^T J_1 x_1 + x_1^T J_1^T J_1 x_1 + \alpha_1 x_1^T D_1^T D_1 x_1 + y_2^T y_2 - 2y_2^T J_2 x_2 + x_2^T J_2^T J_2 x_2 + \alpha_2 x_2^T D_1^T D_1 x_2 \\ &\quad \gamma (x_1^T D_1^T D_1 x_1 - x_1^T D_1^T D_1 x_2 - x_2^T D_1^T D_1 x_1 + x_2^T D_1^T D_1 x_2) \end{aligned} \quad (9)$$

La parcial respecto de x_1 del término con γ :

$$\gamma(2D_1^T D_1 x_1 - D_1^T D_1 x_2 - D_1^T D_1 x_2) = 2\gamma(D_1^T D_1 x_1 - D_1^T D_1 x_2) = 2\gamma D_1^T D_1 (x_1 - x_2) \quad (10)$$

La parcial completa de U respecto de x_1 es:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -2J_1^T y_1 + 2J_1^T J_1 x_1 + 2\alpha_1 D_1^T D_1 x_1 + 2\gamma D_1^T D_1 (x_1 - x_2) \quad (11)$$

La parcial respecto de x_2 del término con γ :

$$\gamma(2D_1^T D_1 x_2 - D_1^T D_1 x_1 - D_1^T D_1 x_1) = 2\gamma(D_1^T D_1 x_2 - D_1^T D_1 x_1) = -2\gamma D_1^T D_1 (x_1 - x_2) \quad (12)$$

La parcial completa de U respecto de x_2 es:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -2J_2^T y_2 + 2J_2^T J_2 x_2 + 2\alpha_2 D_1^T D_1 x_2 - 2\gamma D_1^T D_1 (x_1 - x_2) \quad (13)$$

La parcial de U respecto de x_1 es cero:

$$-2J_1^T y_1 + 2J_1^T J_1 x_1 + 2\alpha_1 D_1^T D_1 x_1 + 2\gamma D_1^T D_1 (x_1 - x_2) = 0 \quad (14)$$

$$(J_1^T J_1 + \alpha_1 D_1^T D_1 + \gamma D_1^T D_1) x_1 = J_1^T y_1 + \gamma D_1^T D_1 x_2 \quad (15)$$

$$[J_1^T J_1 + (\alpha_1 + \gamma) D_1^T D_1] x_1 = J_1^T y_1 + \gamma D_1^T D_1 x_2 \quad (16)$$

$$H_1 = [J_1^T J_1 + (\alpha_1 + \gamma) D_1^T D_1]^{-1} \quad (17)$$

$$x_1 = H_1 (J_1^T y_1 + \gamma D_1^T D_1 x_2) = H_1 J_1^T y_1 + \gamma H_1 D_1^T D_1 x_2 \quad (18)$$

La parcial de U respecto de x_2 es cero:

$$-2J_2^T y_2 + 2J_2^T J_2 x_2 + 2\alpha_2 D_1^T D_1 x_2 - 2\gamma D_1^T D_1 (x_1 - x_2) = 0 \quad (19)$$

$$(J_2^T J_2 + \alpha_2 D_1^T D_1 + \gamma D_1^T D_1) x_2 = J_2^T y_2 + \gamma D_1^T D_1 x_1 \quad (20)$$

$$[J_2^T J_2 + (\alpha_2 + \gamma) D_1^T D_1] x_2 = J_2^T y_2 + \gamma D_1^T D_1 x_1 \quad (21)$$

$$H_2 = [J_2^T J_2 + (\alpha_2 + \gamma) D_1^T D_1]^{-1} \quad (22)$$

$$x_2 = H_2 (J_2^T y_2 + \gamma D_1^T D_1 x_1) = H_2 J_2^T y_2 + \gamma H_2 D_1^T D_1 x_1 \quad (23)$$

Sustituyendo (23) en (18):

$$x_1 = H_1 J_1^T y_1 + \gamma H_1 D_1^T D_1 (H_2 J_2^T y_2 + \gamma H_2 D_1^T D_1 x_1) \quad (24)$$

Reduciendo términos:

$$(I - \gamma^2 H_1 D_1^T D_1 H_2 D_1^T D_1) x_1 = H_1 J_1^T y_1 + \gamma H_1 D_1^T D_1 H_2 J_2^T y_2 \quad (25)$$

Sustituyendo (18) en (23):

$$x_2 = H_2 J_2^T y_2 + \gamma H_2 D_1^T D_1 (H_1 J_1^T y_1 + \gamma H_1 D_1^T D_1 x_2) \quad (26)$$

Reduciendo términos:

$$(I - \gamma^2 H_2 D_1^T D_1 H_1 D_1^T D_1) x_2 = H_2 J_2^T y_2 + \gamma H_2 D_1^T D_1 H_1 J_1^T y_1 \quad (27)$$

Finalmente la solución a la ecuación (6) son los siguientes estimadores:

$$\hat{x}_1 = (I - \gamma^2 H_1 D_1^T D_1 H_2 D_1^T D_1)^{-1} (H_1 J_1^T y_1 + \gamma H_1 D_1^T D_1 H_2 J_2^T y_2) \quad (28)$$

$$\hat{x}_2 = (I - \gamma^2 H_2 D_1^T D_1 H_1 D_1^T D_1)^{-1} (H_2 J_2^T y_2 + \gamma H_2 D_1^T D_1 H_1 J_1^T y_1) \quad (29)$$