

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA, BAJA CALIFORNIA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
CON ORIENTACIÓN EN GEOFÍSICA APLICADA**

Modelado inverso de datos de tensor de gravedad

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

José Paúl Calderón Magallón

Ensenada, Baja California, México

2015

Tesis defendida por

José Paúl Calderón Magallón

y aprobada por el siguiente comité

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Director del Comité

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Miembro del Comité

Dr. José Manuel Romo Jones

Miembro del Comité

Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva

Miembro del Comité

Dr. Juan García Abdeslem

*Coordinador del Programa de
Posgrado en en Ciencias de la Tierra*

Dr. Jesús Favela Vara

Director de Estudios de Posgrado

Febrero, 2015

Resumen de la tesis presentada por José Paúl Calderón Magallón como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Modelado inverso de datos de tensor de gravedad

Resumen elaborado por:

José Paúl Calderón Magallón

El levantamiento aéreo de datos de tensor de gravedad (o gradiente de gravedad) es una de las técnicas más nuevas de datos geofísicos. El auge en la toma de este tipo de datos se debe en parte a que estos datos proveen información de la distribución de densidades de las rocas de una manera mucho más completa, extensa y resolutive que las mediciones convencionales de gravedad en tierra. Esto ha hecho a los levantamientos aéreos de gradiente de gravedad (AGG) se ubiquen entre los servicios geofísicos más solicitados por compañías mineras, inmediatamente después de los levantamientos aeromagnéticos y radiométricos. Debido a lo reciente de este auge, el uso de estos datos se ha limitado a mapeo geológico y poca atención se le ha dado a su interpretación más cuantitativa. En particular, ha habido un escaso desarrollo de software de inversión de datos AGG lo que ha restringido nuestro entendimiento del alcance de estos datos en la elucidación de objetivos tridimensionales del subsuelo. En esta tesis se plantea que los datos AGG efectivamente proporcionan información más detallada de las variaciones multidireccionales de la densidad del subsuelo. Para demostrar esta hipótesis se desarrolló un software de inversión de datos AGG basado en un esquema de gradientes conjugados tridimensionales. Este software se aplicó a datos sintéticos generados por diversas combinaciones de cuerpos tridimensionales. Los modelos resultantes muestran que, aunque la información proporcionada por los datos AGG es mayor que aquella proporcionada por datos convencionales de la componente vertical de gravedad, los datos de AGG tienen aún una muy limitada capacidad de resolución a profundidad.

Palabras Clave: **Tensor de gradiente de gravedad, gradientes conjugados, índices de convergencia, resolución lateral.**—

Abstract of the thesis presented by José Paúl Calderón Magallón as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics..

Inverse modelling of gravity tensor data

Abstract by:

José Paúl Calderón Magallón

Airborne gravity tensor (or gravity gradient) surveying is one of the newest techniques for geophysical data acquisition. The rise in the acquisition of this data type is partially due to the fact that these data provide much more complete, extensive and resolute information of rock density distribution than conventional land gravity data. This has positioned Airborne Gravity Gradient (AGG) surveys among the most requested geophysical services by mining companies, just after aeromagnetic and radiometric surveys. Due to this recent rise, the use of these data has been limited to geological mapping and little attention has been given to their quantitative interpretation. In particular, there has been a scarce development of AGG data inversion software, which has limited our understanding of the significance of these data for resolving three-dimensional subsurface targets. In this thesis we hypothesize that AGG data pose indeed more detailed information of the multidirectional variations of subsurface density. To prove this hypothesis, a conjugate gradient AGG-data inversion software for three-dimensional targets was developed. This software was applied to synthetic data generated by several assemblages of three-dimensional bodies. Resulting models show that, even though the information provided by AGG data is superior to that provided by conventional vertical gravity data, AGG data still have a very limited depth resolution power.

Keywords: Gravity gradient tensor, conjugate gradients, convergence rate, lateral resolution.

Dedicatoria

A mi madre María Lourdes Magallón, a mi padre Abel Calderón, mis hermanos, especialmente a Omar Calderón, a mis sobrinos, a Susana Gutiérrez y a Lizeth Mora.

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado por su inestimable ayuda, sus conocimientos compartidos y su valiosa asesoría (todos los errores en este trabajo son sólo míos).

A los miembros del comité por sus sugerencias y comentarios a este trabajo.

A Adrián León y Armando Calderón por su gran ayuda con los ciclos for; también a Margarita Salazar, José Montoya, al Dr. Enrique Gómez Treviño, Yohana, Clemente, Salvador, Juan Francisco Estrada, Jesse Martinez, Rocío, Lenna, Rosmeri, etc., por pasárnola lo mejor que pudimos en este tiempo.

A la secretaria de Ciencias de la Tierra Ana Rosa Soto por todas las veces que me ayudó en las cuestiones de papeleo; al técnico de Geofísica Aplicada Humberto Benítez por los programas y arreglar la computadora.

A ustedes que la vida les sonría y la suerte les sea propicia.

Finalmente quiero agradecer al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) y en especial a Ciencias de la Tierra, por haberme permitido estudiar en el mismo, y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyarme económicamente con los estudios.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	III
Resumen en inglés	IV
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Lista de figuras	x
1. Introducción	1
1.1. Hipótesis	2
1.2. Objetivos	2
2. Tensor de gradiente de gravedad	4
2.1. Potencial gravitacional	4
2.2. Componente vertical del campo de gravedad	5
2.3. El tensor de gravedad	6
2.3.1. Definición	6
2.3.2. Tensor de gravedad de un prisma recto	9
2.3.3. Gradiente de gravedad de un conjunto de prismas e integral de convolución	13
2.3.4. Implicaciones prácticas de la interpretación del tensor de gradiente de gravedad	14
2.4. Gradiómetros de gravedad	16
2.4.1. Equipos comerciales de levantamiento aéreo	16
2.4.2. Unidades y especificaciones de los datos	21
3. Planteamiento del problema directo	22
3.1. Parametrización del modelo de densidades	22
3.2. Datos observados	23
3.3. Solución del problema directo: cálculo de la matriz de sensibilidad	24
4. Planteamiento y solución del problema inverso	27
4.1. Planteamiento de la función objetivo	27
4.2. Regularización del problema inverso	28
4.3. Minimización de la función objetivo	28
4.4. Esquema de solución: gradientes conjugados precondicionados	30
4.5. Diseño del algoritmo de inversión	34

Tabla de contenido (continuación)

5.	Resultados	38
5.1.	Modelos $5 \times 5 \times 3$	38
5.2.	Modelo $5 \times 5 \times 3$, 1 prisma	38
5.3.	Modelo $5 \times 5 \times 3$, 3 prismas	45
5.3.1.	Inversión utilizando g_z	45
5.3.2.	Inversión utilizando todos los elementos del tensor de gravedad y g_z	47
5.4.	Prismas en forma de L ubicados de la tercera a la quinta capa del modelo	50
5.5.	Experimento para un cuerpo en forma de L ubicado de la primera a la tercera capa	54
5.5.1.	Inversión utilizando g_z	56
5.5.2.	Inversión utilizando todos los elementos del tensor de gravedad y g_z	59
5.6.	Experimento para un cuerpo en forma de L ubicado la superficie de un modelo de capas de ocho metros de espesor	62
5.7.	Modelo en forma de tablero de ajedrez con capas de 4m	67
5.8.	Modelo en forma de tablero de ajedrez con capas de 1m y grupos de prismas con igual densidad	73
5.8.1.	Inversión del tensor de gravedad y g_z	73
5.8.2.	Inversión de g_z	78
6.	Discusiones	81
6.1.	Sobre la solución del problema directo	81
6.2.	Sobre el planteamiento y solución del problema inverso	81
6.3.	Acerca de los modelos obtenidos de la inversión de datos generados por un cuerpo aislado y por un modelo tipo tablero de ajedrez	83
7.	Conclusiones	84
	Lista de referencias	86
A.	Tensor de Gravedad	89
A.1.	Componente vertical del campo de gravedad	89
A.2.	Cálculo de las componentes del Tensor de Gravedad	93
B.	Gradientes conjugados	102
B.1.	Gradientes conjugados	102
B.1.1.	La forma cuadrática	102
B.1.2.	El método del descenso más rápido (steepest descent)	104
B.1.3.	Vectores propios y valores propios	107
B.1.4.	Convergencia del método del descenso más rápido	107
B.1.5.	Conjugación	108
B.1.6.	Conjugación Gram-Schmidt	110
B.1.7.	Condición óptima del término de error	111
B.1.8.	El Método de los Gradientes Conjugados	112
B.1.9.	Análisis de la convergencia de gradientes conjugados	115
B.1.9.1.	Polinomios de Chebyshev	117

B.1.10. Preacondicionamiento 118

Lista de figuras

Figura	Página
2. Ilustración de un prisma recto	10
3. Gradiómetro de Gravedad	18
4. GGI's utilizados en gradiómetros de gravedad	19
5. Gradiómetro de tensor parcial del FTG	19
6. Ilustración del arreglo de tres GGI	20
7. Ilustración del dominio del modelo del subsuelo.	23
8. Diagrama $\mathbf{Am} = \mathbf{d}$	26
11. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión	36
12. Diagrama de flujo de la matriz \mathbf{F}	37
14. Respuesto del modelo (\mathbf{Am}_{sint})	40
15. Gráfica de indicadores de convergencia	41
16. Resultado de la inversión de los datos generados	44
18. Respuesto del modelo para 3 prismas	46
19. Comparación de criterios de convergencia	47
20. Indicadores de convergencia para dos modelos	49
22. Respuesto del modelo asociada a un cuerpo en forma de "L"	51
23. Gráfica de convergencia del modelo en forma de L	52
24. Modelo de densidades obtenido después de la inversión	53
27. Gráfica de convergencia del modelo en forma de L en capas superficiales para g_z	56
28. Modelo de densidades obtenido después de la inversión de datos para g_z	57
29. Modelo de densidades de una heterogeneidad en las primeras capas del modelo	58
30. Gráfica de convergencia del proceso de inversión correspondiente al caso de un modelo con prismas en forma de L ubicados las capas superficiales del modelo para todos los elementos en conjunto	59
31. Modelo de densidades obtenido por la inversión de datos del tensor de gradiente de gravedad y la componente vertical en las capas superficiales del modelo	60

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
32. Sección vertical del modelo obtenido de la inversión de todos los datos del tensor de gravedad asociados a un cuerpo en forma de L ubicados en las primeras capas del modelo	61
34. Gráfica de convergencia del proceso de inversión de los datos de tensor de gradiente de gravedad generados por un modelo con una heterogeneidad en forma de L ubicada en las capas superficiales del modelo	64
36. Sección vertical del modelo de densidades obtenido de la inversión de los datos del tensor de gravedad debidos a un cuerpo hipotético en forma de L ubicado en las primeras capas del modelo	66
38. Respuesta del modelo $\mathbf{A}m_{\text{sint}}$ para las distintas componentes del tensor de gradiente de gravedad y de campo de gravedad vertical debido a un modelo con arreglo en forma de tablero de ajedrez.	69
39. Gráfica de convergencia del proceso de inversión de los datos generados por un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de $4m$	70
41. Modelo de densidades obtenido de la inversión de los datos de tensor de gradiente de gravedad generados por un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de $4m$ de espesor	72
44. Gráfica de convergencia proceso de inversión de datos de tensor de gravedad generados para un modelo de tablero de ajedrez con capas de $1 m$	75
45. Modelo de densidades obtenido de la inversión de datos de tensor de gradiente de gravedad generados para un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de $1 m$ de espesor	76
46. Sección a profundidad del modelo de densidades obtenido de la inversión de datos de tensor de gradiente de gravedad para un modelo tipo tablero de ajedrez empleando bloques de densidad de $1 m$ de espesor y bloques alternantes de densidad de $6 \times 6 \times 3 m$	77
47. Gráfica de la evolución de los índices de convergencia del proceso de inversión de datos g_z generados para un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de $1 m$ de espesor	78
48. Modelo de densidades obtenido de la inversión de los datos g_z generados por un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de $1 m$ de espesor	79
49. Sección a profundidad del modelo de densidades de la Figura 41	80
50. Gráfica de la forma cuadrática $f(\mathbf{x})$ correspondiente a un paraboloides elíptico. El punto mínimo de esta superficie es la solución a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	103

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
51. Superfices de nivel del parabolide elíptico $f(\mathbf{x})$. Cada curva elipsoidal tiene una $f(\mathbf{x})$ constante y el punto en el origen es la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	104
52. El gradiente de f' es representado en algunas localidades a lo largo de la línea de búsqueda	106
53. Vectores <i>A-ortogonales</i>	110
54. En el método de los gradientes conjugados, cada nuevo residual es ortogonal a todos los residuales previos y direcciones de búsqueda	114

Capítulo 1. Introducción

La medición de la gravedad con fines económicos ha sido extensamente utilizada a lo largo del siglo XX en la prospección minera y de hidrocarburos (Nabighian *et al.*, 2005). La forma más utilizada para el estudio de los efectos del campo gravitatorio en geofísica es la medición de la intensidad(o cambio de intensidad) del campo gravitacional, convencionalmente referida como componente vertical del campo de gravedad g_z , a causa de la relativa facilidad de medirla mediante gravímetros.

La Gradiometría de Gravedad (Gravity Gradiometry, GG) tiene un desarrollo mucho más reciente. Consiste básicamente en la medición del gradiente del campo de gravedad en sus diferentes direcciones. El primer instrumento práctico para la medición de la derivada de la componente horizontal del campo de gravedad y la derivada de la componente vertical fue diseñado en 1886 por el Barón Loránd von Eötvös. Este instrumento conocido como balanza de torsión, tuvo su primer éxito con el descubrimiento del depósito Nash Dome en 1924 (Zhdanov *et al.*, 2004). El deseo de medir exactamente la desviación vertical del vector de gravedad para aplicaciones militares inauguró un renovado interés en la gradiometría de gravedad en los 1970s (DiFrancesco *et al.*, 2009).

Comparadas con los datos de gravedad, las mediciones de la Gradiente de Gravedad (GG) proveen una mayor sensibilidad en longitudes de onda cortas, y así, son adecuados para estudios en pequeña escala tales como la exploración minera. Aún así, los datos de GG también son apropiados para requerimientos de mayor escala en aplicaciones para prospección petróleo y gas (Pilkington, 2012).

Conforme los objetivos de exploración son más pequeños, se caracterizan por tener firmas de gravedad más sutiles, por ello surge un nuevo interés y un nuevo interés surgió en el mapeo directo de gradientes de gravedad en el campo. El beneficio de esta aproximación es que se mejora la resolución espacial y la sensibilidad de la señal del gradiente, comparada con la que

se obtiene con la simple componente vertical del campo de gravedad (Nabighian *et al.*, 2005).

El rápido desarrollo de tecnologías de adquisición de datos de gradiente de gravedad, no ha sido acompañado con el desarrollo de software requerido para la interpretación de los datos, por lo que su implementación en programas de computo comerciales como 3D Geomodeler(R), Oasis Montaj (R), entre otros, aún no está disponible. Todo esto ha llevado a que la práctica actual de interpretación de los datos sea cualitativa. Con ello se han desarrollado una serie de experiencias prácticas que atribuyen a los datos de gradiente de gravedad una resolución y sensibilidad muy superior a la de las mediciones convencionales de gravedad. Estas afirmaciones no se han comprobado en detalle debido a la falta de software especializado que permita hacerlo.

El desarrollo de algoritmos de inversión de datos de tensor de gradiente de gravedad es un área de desarrollo actual y resulta oportuno efectuar un análisis de la capacidad de resolución de los diferentes componentes del tensor de gravedad en el marco de teoría de inversión en medios tridimensionales.

1.1. Hipótesis

Aquí se postula que el uso combinado de los diferentes componentes del Tensor de Gradiente de Gravedad debe proveer una mayor resolución en la distribución de densidad de rocas en el subsuelo comparado con los datos usuales de la componente vertical del campo de gravedad g_z .

1.2. Objetivos

En esta tesis se plantea cumplir tres objetivos fundamentales

- Hacer una revisión del sistema de adquisición y procesado de datos de la Gradiometría Aérea de Gravedad (Airborne Gravity Gradiometry, AGG).

- Desarrollar un esquema robusto de inversión en 3D de los datos AGG.
- Determinar cuales son los elementos del subsuelo que los datos AGG resuelven mejor que los datos gravimétricos convencionales.

Capítulo 2. Tensor de gradiente de gravedad

2.1. Potencial gravitacional

La fuerza de gravedad en coordenadas cartesianas entre una partícula de masa m centrada en el punto $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ y una partícula de masa m_0 ubicada en $\mathbf{r} = (x, y, z)$ se expresa mediante la Segunda Ley de Newton

$$\mathbf{F} = \gamma \frac{mm_0}{\mathbf{r}^2}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{r} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ y γ es la constante de gravitación universal. Sea m_0 una partícula de prueba con una magnitud unitaria, entonces, dividiendo la fuerza de gravedad entre m_0 obtenemos la *aceleración gravitacional*, también conocida como *campo de gravedad* $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ producida por la masa m en la ubicación de la partícula de prueba

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m}{\mathbf{r}^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2)$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde la masa m al punto de observación \mathbf{r} . En nuestro caso particular $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ corresponde al campo de gravedad terrestre.

Sea una colección de masas m_i cuya suma es la masa total de un cuerpo, entonces, podemos definir el *Potencial Gravitacional* $U(\mathbf{r})$ de esta masa como la suma de los potenciales gravitacionales de las masas individuales (principio de superposición). De acuerdo a lo anterior, podemos representar el campo de gravedad de este cuerpo $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ como el negativo del gradiente del potencial $U(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}), \quad (3)$$

esta manera de ver al potencial nos enuncia que $U(\mathbf{r})$ es un potencial escalar y como consecuencia el campo $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ es conservativo. Por otra parte, el campo de gravedad también cumple

con la ecuación de Poisson para puntos dentro de la distribución de masa,

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi\gamma\rho(\mathbf{r}), \quad (4)$$

donde $\rho(\mathbf{r})$ es la densidad en el punto \mathbf{r} ; además, el campo gravitacional es irrotacional, es decir,

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0. \quad (5)$$

La ecuación (4) describe el gradiente del campo gravitacional a lo largo del espacio debido a una distribución de masa con densidad $\rho(\mathbf{r}')$; por lo tanto, podemos representar el potencial gravitacional de la forma siguiente:

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (6)$$

donde realizamos la integración sobre un dominio V' que corresponde a las dimensiones del cuerpo de masa que produce el potencial.

2.2. Componente vertical del campo de gravedad

El campo gravitacional está formado por tres componentes, que se pueden calcular a partir de la primera derivada del potencial gravitacional en cada una de las coordenadas cartesianas, esto es,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \right) = (g_x, g_y, g_z), \quad (7)$$

sin embargo, en los estudios geofísicos la componente que se utiliza de manera general por coincidir con nuestro concepto de verticalidad asociado al campo de gravedad terrestre es la componente "vertical" del campo $g_z(\mathbf{r})$. Para encontrar la forma que tiene $g_z(\mathbf{r})$ asociado a una distribución de masas $\rho(\mathbf{r}')$ en el sistema de coordenadas cartesianas, derivamos la ecuación (6) con respecto a la coordenada z

$$\begin{aligned}
g_z(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \\
&= -\gamma \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \rho(\mathbf{r}') \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dx' dy' dz',
\end{aligned} \tag{8}$$

donde $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{1/2}$.

Para el caso de un cuerpo definido por un volumen finito, se debe resolver la expresión integral correspondiente a la componente vertical de la gravedad (8). En nuestro caso, integramos dicha ecuación con respecto a las coordenadas del cuerpo con densidad $\rho(\mathbf{r}')$ (Apéndice A), para el caso de un cuerpo con densidad uniforme $\rho(\mathbf{r}') = \rho$. De donde se obtiene que g_z para un prisma recto es

$$\begin{aligned}
g_z(\mathbf{r}) &= \gamma \rho [(x - x') \ln((y - y') + r) + (y - y') \ln((x - x') + r)] \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&\quad - \gamma \rho (z - z') \tan^{-1} \left(\frac{(x - x')(z - z')}{(z - z')r} \right) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Sólo hemos calculado g_z pues las expresiones para las componentes del tensor de gravedad las encontramos integrando la ecuación (20).

2.3. El tensor de gravedad

2.3.1. Definición

La representación matemática del Gradiente de Gravedad (GG), es realizada por medio del Tensor de Gravedad (TG) que es el resultado directo de aplicar la segunda derivada del potencial gravitacional $U(\mathbf{r})$, el cual, al ser un potencial escalar es un tensor de orden cero; por su parte, el campo de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ es la primera derivada espacial del potencial gravitacional lo que lo convierte en un tensor de primer orden (un vector); finalmente, las derivadas

espaciales del vector $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ producen un tensor de segundo orden conocido como el Tensor de Gravedad.

Para nuestro caso de estudio, elegimos un sistema de coordenadas cartesiano cuyas componentes están establecidas de la siguiente manera: la componente x está al este, la componente y al norte y la componente z hacia arriba.

Podemos representar a las segundas derivadas espaciales del potencial $U(\mathbf{r})$ de la manera siguiente

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial\alpha\partial\beta}, \quad (10)$$

donde $\alpha, \beta = x, y, z$. Así, el Tensor de Gravedad $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ (Figura 1) cuyos elementos forman una matriz cuadrada tiene la forma implícita

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

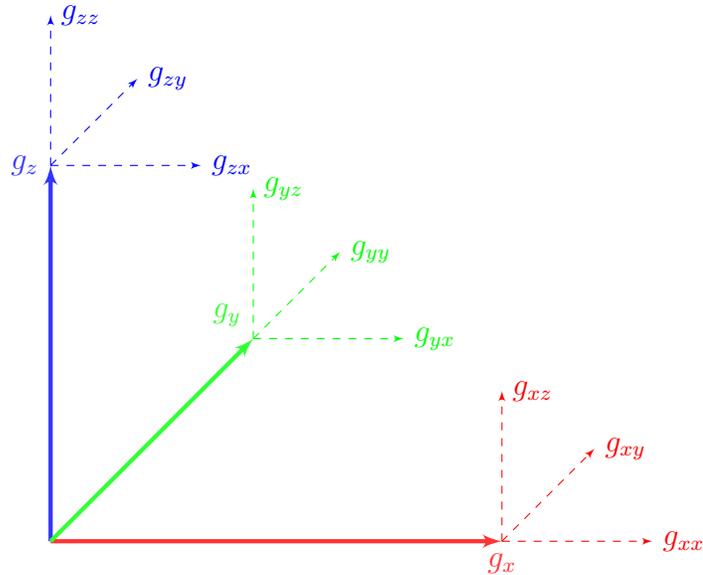


Figura 1: Ilustración de las tres componentes del campo de gravedad para un desplazamiento en cada una de las direcciones.

Como vimos anteriormente la ecuación de Poisson para el campo gravitacional se cumple para cualquier punto dentro de la distribución de masa (fuera de ella la ecuación que se cumple es la ecuación de Laplace), es

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi\gamma\rho(\mathbf{r}),$$

si calculamos el gradiente de la expresión anterior obtenemos la expresión siguiente

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})) = -4\pi\gamma (\nabla\rho(\mathbf{r})), \quad (12)$$

esta expresión nos da el TGG mostrado de una manera distinta

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) = -4\pi\gamma\nabla\rho(\mathbf{r}), \quad (13)$$

esta ecuación nos indica que el gradiente del tensor de gravedad está directamente relacionado con la forma en que varía la densidad en un cuerpo.

Al derivarse de un potencial escalar, el tensor de gravedad tiene la propiedad de simetría, es decir, las componentes producto de las derivadas cruzadas son las mismas: $g_{xy} = g_{yx}$,

$g_{xz} = g_{zx}$ y $g_{yz} = g_{zy}$, esto implica, que sólo es necesario calcular seis componentes para obtener la expresión completa del tensor como se ve en la ecuación (10).

Para un medio heterogéneo desarrollamos (10) y la expresamos de la siguiente manera

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\gamma \iiint_{V'} \left(\rho(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right) dv'. \quad (14)$$

Podemos observar en (14) que la integración respecto a \mathbf{r}' debemos realizarla sobre la densidad del cuerpo en estudio.

Ahora supongamos que tenemos un medio con densidad homogénea ρ , la expresión para el TG (14) se transforma a la manera siguiente

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\gamma\rho \iiint_{V'} \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right) dv', \quad (15)$$

donde ρ es la densidad constante del medio.

2.3.2. Tensor de gravedad de un prisma recto

Tenemos un elemento diferencial de prisma recto ubicado en las coordenadas cartesianas $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ y un punto de observación con coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (ver Figura 2); entonces, utilizamos la ecuación para el TG en un medio homogéneo (15). Donde se desprenden dos casos: el primero cuando se calcula la segunda derivada en la dirección de un eje cartesiano y el segundo cuando se calcula la segunda derivada respecto a dos ejes cruzados. Empezaremos analizando el primer caso empleando la componente xx . Para esto necesitamos calcular la segunda derivada en x del integrando $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

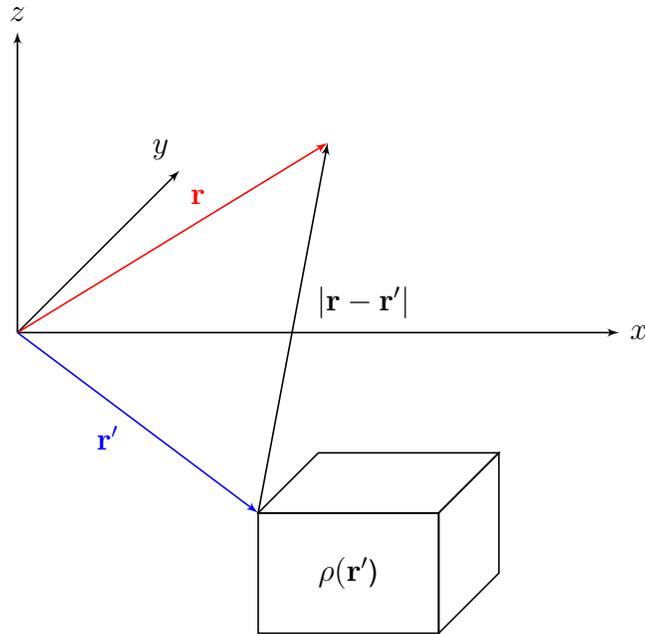


Figura 2: Ilustración de un prisma recto como modelo base para el modelado de los datos del tensor de gradiente de gravedad. Los lados del prisma son paralelos a los ejes de coordenadas.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 3 \frac{(x - x')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (16)$$

y realizamos el mismo procedimiento para las coordenadas y, z lo que nos lleva a la siguiente expresión para los elementos diagonales de la matriz del TG

$$T_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial \alpha^2} = -\gamma\rho \iiint_{V'} \left(3 \frac{(\alpha - \alpha')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv'. \quad (17)$$

Ahora, derivamos primeramente con respecto a x y después con respecto a y obtenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 3 \frac{(x - x')(y - y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}, \quad (18)$$

y hacemos lo mismo para todas las derivadas cruzadas, lo anterior nos conduce a la expresión general para los elementos fuera de la diagonal principal del TGG

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial \alpha \partial \beta} = -\gamma \rho \iiint_{V'} \left(3 \frac{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right) dv'. \quad (19)$$

Por lo tanto, la expresión general de las componentes del TG con base en (17) y (19) es

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\gamma \rho \iiint_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} K_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv', \quad (20)$$

donde ρ es la densidad del cuerpo y $K_{\alpha\beta}$ es el Kernel de la función que tiene la siguiente forma

$$K_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{3(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} & \alpha \neq \beta \\ \frac{3(\alpha - \alpha')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - 1 & \alpha = \beta. \end{cases} \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (21)$$

Sean $\alpha = \beta = x$ y de acuerdo a (20) y (21) podemos expresar este elemento diagonal del TG de la manera siguiente

$$T_{xx} = -\gamma \rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} 3 \frac{(x - x')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} dx' dy' dz' + \gamma \rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dx' dy' dz', \quad (22)$$

integrando sobre el volumen de masa V' obtenemos el siguiente resultado

$$T_{xx} = \gamma \rho \tan^{-1} \left(\frac{(y - y')(z - z')}{(x - x')r} \right) \Bigg|_{x'_1}^{x'_2} \Bigg|_{y'_1}^{y'_2} \Bigg|_{z'_1}^{z'_2}, \quad (23)$$

donde $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Realizando el mismo procedimiento para las coordenadas y, z con $\alpha = \beta$, tenemos

$$T_{yy} = \gamma \rho \tan^{-1} \left(\frac{(x - x')(z - z')}{(y - y')r} \right) \Bigg|_{x'_1}^{x'_2} \Bigg|_{y'_1}^{y'_2} \Bigg|_{z'_1}^{z'_2}, \quad (24)$$

además

$$T_{zz} = \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')(y-y')}{(z-z')r} \right) \left| \begin{array}{c} x'_2 | y'_2 | z'_2 \\ x'_1 | y'_1 | z'_1 \end{array} \right|. \quad (25)$$

Para los elementos no diagonales del tensor xy tenemos que (20) podemos expresarlo

$$T_{xy} = -3\gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \frac{(x-x')(y-y')}{r^5} dx' dy' dz', \quad (26)$$

integramos sobre todo el espacio y obtenemos

$$T_{xy} = -\gamma\rho \ln(r + (z-z')) \left| \begin{array}{c} x'_2 | y'_2 | z'_2 \\ x'_1 | y'_1 | z'_1 \end{array} \right|. \quad (27)$$

Realizamos el mismo procedimiento para las componentes xz y yz , tenemos

$$T_{xz} = -\gamma\rho \ln(r + (y-y')) \left| \begin{array}{c} x'_2 | y'_2 | z'_2 \\ x'_1 | y'_1 | z'_1 \end{array} \right|, \quad (28)$$

además

$$T_{yz} = -\gamma\rho \ln(r + (x-x')) \left| \begin{array}{c} x'_2 | y'_2 | z'_2 \\ x'_1 | y'_1 | z'_1 \end{array} \right|. \quad (29)$$

Por lo tanto, el TG para un prisma recto homogéneo descrito en coordenadas cartesianas de manera explícita es

$$\mathbf{T} = \gamma\rho \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{(z-z')(y-y')}{r(x-x')} \right) & -\ln(r + (z-z')) & -\ln(r + (y-y')) \\ -\ln(r + (z-z')) & \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')(z-z')}{r(y-y')} \right) & -\ln(r + (x-x')) \\ -\ln(r + (y-y')) & -\ln(r + (x-x')) & \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')(y-y')}{r(z-z')} \right) \end{bmatrix} \left| \begin{array}{c} x'_2 | y'_2 | z'_2 \\ x'_1 | y'_1 | z'_1 \end{array} \right|. \quad (30)$$

Para el caso de un prisma recto y utilizando los límites de la ecuación (25), calculamos la componente T_{zz} de la siguiente manera (Zhdanov *et al.*, 2004)

$$T_{zz} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \tan^{-1} \left(\frac{x_i y_j}{r_{ijk} z_k} \right), \quad (31)$$

donde $\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$, $x_i = x - x'$, $y_j = y - y'$, $z_k = z - z'$ son las coordenadas de los vértices del prisma. Este mismo procedimiento lo realizamos con todas las componentes del tensor y con g_z con el objetivo de poder llevar a cabo el cálculo computacional en el programa de inversión.

2.3.3. Gradiente de gravedad de un conjunto de prismas e integral de convolución

De acuerdo al principio de superposición del potencial gravitacional, generalizamos la expresión (20) para un conjunto finito de n prismas rectos como la suma de los efectos individuales de cada prisma en el medio homogéneo. Dicha generalización se expresa de la forma siguiente

$$T_{\alpha\beta l}(\mathbf{r}) = -\gamma\rho \sum_{l=1}^n \iiint_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_l^3} K_{\alpha\beta l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'_l, \quad (32)$$

donde n es el número de prismas rectos de la región de estudio y $K_{\alpha\beta l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es el kernel expresado en (21), el subíndice l que corresponde a un cierto prisma. La integración la realizamos individualmente para cada prisma y luego sumamos los efectos totales de los mismos.

Para el conjunto de prismas tenemos la expresión general de las componentes del tensor

$$\mathbf{T}_l = \gamma \rho \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{(z-z')_l (y-y')_l}{r_l (x-x')_l} \right) & -\ln(r_l + (z-z')_l) & -\ln(r_l + (y-y')_l) \\ -\ln(r_l + (z-z')_l) & \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')_l (z-z')_l}{r_l (y-y')_l} \right) & -\ln(r_l + (x-x')_l) \\ -\ln(r_l + (y-y')_l) & -\ln(r_l + (x-x')_l) & \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')_l (y-y')_l}{r_l (z-z')_l} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Igual que en el caso precedente (ecuación (31)), con el fin de poder realizar cálculos computacionales de un conjunto de prismas rectos, como ejemplo, escogemos el cálculo de la componente T_{zz} de acuerdo con la expresión (33), quedando como sigue

$$T_{zzl} = \gamma \rho \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijkl} \tan^{-1} \left(\frac{x_i y_j l}{r_{ijkl} z_{kl}} \right), \quad (34)$$

y así sucesivamente para cada elemento del tensor de los n prismas del sistema.

El tensor mostrado en (15) es una ecuación que representa la convolución de dos funciones. Para observar esta afirmación de manera más clara expresamos la ecuación (15) de la forma siguiente

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\gamma \iiint_{V'} \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} K_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv', \quad (35)$$

esta expresión nos indica que la derivada se desplaza con respecto a la distribución de densidades.

2.3.4. Implicaciones prácticas de la interpretación del tensor de gradiente de gravedad

El tensor de gradiente de gravedad nos ofrece una matriz de nueve componentes que dependen sólo de las coordenadas. Al ser el resultado de un potencial escalar, las componentes cruzadas del tensor son iguales, lo que nos arroja sólo seis componentes independientes, lo que simplifica de manera significativa el estudio del tensor. Sin embargo, la falta de aparatos que puedan medir las componentes del tensor, ha tenido como consecuencia que a lo largo

de la historia de la investigación geofísica, la mayoría de las ocasiones se haya trabajado só-
lamente con la aceleración vertical gravitacional.

La ventaja fundamental del TG con respecto al estudio de la componente vertical de la ace-
leración gravitatoria consiste en que, al ser el resultado de una segunda derivada, representa
la curvatura del potencial gravitacional.

Cerca de los bordes o contrastes de densidad esperamos que el campo potencial sea cur-
vado fuertemente y cuando estos cuerpos son alargados en cualquier dirección, esperamos
que la curvatura sea más grande en una dirección perpendicular a ésa dirección. Así, debería
existir una relación física clara entre el gradiente de gravedad y la estructura geológica expre-
sada en términos de la curvatura (Cevallos *et al.*, 2013).

Es notable que el tensor \mathbb{T} contiene la información de los gradientes verticales y horizon-
tales, así como de la curvatura del campo de gravedad (Jekeli, 2006). Mas notable aún, es el
hecho de que cada uno de estos elementos refleja, a su manera, el efecto de la distribución
de la densidad del punto fuente que se encuentra (en trabajos de prospección geofísica con-
vencionales) en el subsuelo (Zhdanov *et al.*, 2004).

Es bien sabido que los datos gravimétricos convencionales basados exclusivamente en la
componente g_z muestran una baja resolución no sólo con respecto a otras técnicas geofísicas
de fuente activa como las electromagnéticas y las sísmicas. Además, tienden a concentrar
la densidad cerca de la superficie, independientemente de la profundidad verdadera de los
cuerpos causales (Li y Oldenburg, 1998); sin embargo, el uso de datos gravimétricos en la
forma de tensor de gravedad tiene varias características que deberían mejorar notablemente
su resolución espacial (Barnes *et al.* 2011); también es de esperar que tenga otros atributos
como mejorar definición de contrastes laterales, discriminación de profundidades y mejores
indicadores estructurales o geométricos del campo (Butler, 1995). Primeramente, se cuenta
con al menos seis observaciones distintas del campo de gravedad en cada punto, lo cual es
estadísticamente deseable. Por otra parte, al ser resultado de las derivadas del campo de

gravedad se debería correlacionar con los contrastes direccionales de densidad; los cuales son el objetivo general de los trabajos de exploración geofísica. Finalmente, al ser observaciones de gradientes de gravedad, cancelan considerablemente efectos lejanos en los datos de gravedad, haciendo innecesarias las separaciones empíricas de campos regionales que contaminan considerablemente datos gravimétricos convencionales.

De igual manera, los gradiómetros de Gravedad son particularmente adecuados en prospección aérea porque la medición de una aceleración diferencial, los hace insensibles en gran medida a la aceleración de aeronaves (Barnes y Lumley, 2011), lo que permite lograr una mejor cobertura que los datos gravimétricos tradicionales.

Existen también algunas desventajas; por ejemplo, mientras la reducción del ruido intrínseco de los sensores del gradiente continuamente se perfecciona, la sensibilidad de otros factores de ruido también crece (DiFrancesco *et al.*, 2009), lo que trae como consecuencia conflictos al momento de analizar los datos y decidir qué cantidad son debidos al ruido o a la fuente, por lo que siempre debemos de tener presente el factor de sensibilidad del equipo para lograr un análisis e inversión adecuados.

2.4. Gradiómetros de gravedad

2.4.1. Equipos comerciales de levantamiento aéreo

Históricamente, los gravímetros de exploración geofísica sólo miden la intensidad total (o variación) del campo gravitacional terrestre, la cual es referida como la componente vertical del campo de gravedad g_z . Idealmente, para obtener el TG, se necesitaría medir las nueve componentes del vector de gravedad.

Hasta hace poco tiempo, la medición de datos del gradiente de gravedad en prospección geofísica era tecnológicamente imposible. Sin embargo, la recolección de estos datos es ya una realidad (Dransfield, 2007, van Kann, 2004, van Leeuwen, 2000). Actualmente existen en

el mercado varios equipos comerciales para la adquisición de datos del tensor gravimétrico. Entre ellos se encuentran

- El Gradiómetro de Tensor Total (Full Tensor Gradiometer, FTG) creado por la compañía Lockheed-Martin (ver Figura 3).
- AirFTG de la compañía Bell Geospace.
- El Gradiómetro Falcon de la compañía Fugro, originalmente creado por BHP (van Leeuwen, 2000).
- El prototipo VK1, diseñado por la Universidad de Australia Occidental bajo el auspicio de la compañía Rio Tinto (van Kann, 2004), el cual mide exclusivamente tres componentes del tensor de gravedad (el gradiente de la componente vertical del campo de gravedad).
- Gradiómetro de Gravedad de Exploración (ARKex Exploration Gravity Gradiometer, EGG), de la compañía ARKex Ltd.

Estos equipos no sólo son capaces de adquirir datos de las componentes del tensor gravimétrico, sino que son montables en plataformas móviles (particularmente aéreas) que permiten cubrir grandes extensiones de terreno y con ello obtener resolución y cobertura comparables a aquellas de datos magnéticos, i.e., buscar objetivos tanto someros como profundos y describirlos de forma más realista y detallada (Barnes y Lumley, 2011).

El Sistema de Tensor de Gravedad Total (Full Tensor Gravity (FTG) System) fue desarrollado y manufacturado por la compañía Lockheed Martin Federal Systems, sin embargo, la compañía Bell Geospace ha desarrollado aparatos para aplicaciones aéreas Air-FTG o marinas Marine-FTG.



Figura 3: Gradiómetro de Gravedad creado por la compañía Lockheed Martin. Tomado de <http://www.lockheedmartin.com/>.

Recientes mejoras a este instrumento incluyen la digitalización de las señales críticas para proveer menos ruido y más exactitud (DiFrancesco *et al.*, 2009).

El sistema FTG está formado por tres Instrumentos de Gradiómetros de Gravedad (Gravity Gradiometer Instruments, GGI's) (ver Figura 4). Dentro de cada GGI se encuentra rotando un disco con dos pares opuestos de acelerómetros. Los pares opuestos de acelerómetros están a 15 cm de distancia (ver Figura 5) . El disco rota a una velocidad determinada y los gradientes son medidos por la diferencia en las lecturas entre los pares opuestos de acelerómetros. Las lecturas de los cuatro acelerómetros se suman para medir las aceleraciones que determinan el gradiente con las aceleraciones lineales removidas. Los datos son muestreados con una frecuencia de 128 Hz.



Figura 4: GGI's utilizados en gradiómetros de gravedad: Full Tensor Gradiometer (arriba y centro) y CCG FalconTM (izquierda y derecha). Tomado de <http://www.lockheedmartin.com/>.

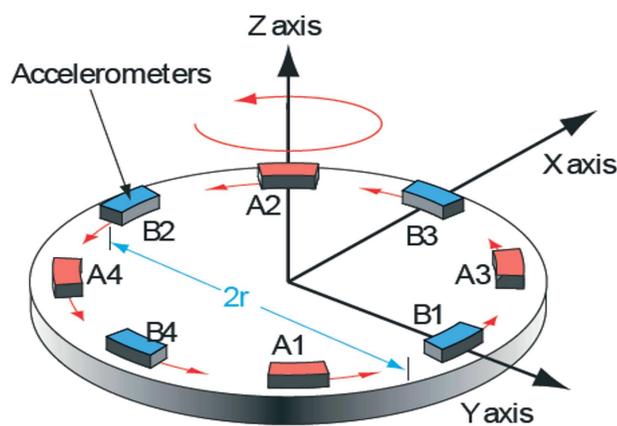


Figura 5: Ilustración del arreglo de acelerómetros que componen un gradiómetro de tensor parcial del FTG. Las distintas A's son acelerómetros Tomado de <http://www.arkex.com/instruments.html>.

Los GGI están montados en tres plataformas estabilizadas, orientadas a 120 grados respectivamente y a 54.74 grados de la vertical. Para estudios aéreos, la plataforma del Air-FTG está fija, pero la dirección de los GGI se gira 120 grados alternándola cada día de estudio con el fin de reducir el ruido (ver Figura 6).

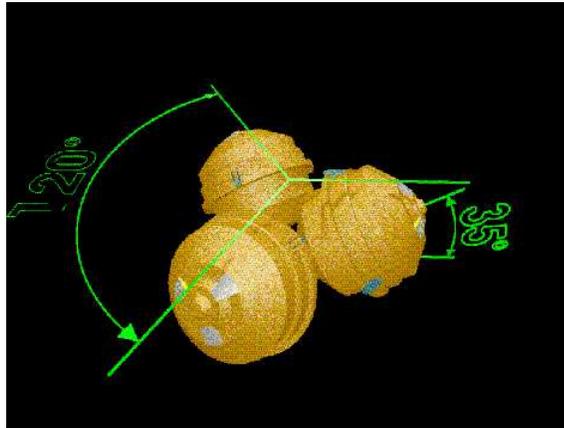


Figura 6: Ilustración del arreglo de los tres GGI. Tomado de <http://bellgeo.com/>.

Estos equipos no sólo son capaces de adquirir datos de las componentes del tensor de gravedad, sino que son montables en plataformas móviles (particularmente aéreas) que permiten cubrir grandes extensiones de terreno y con ello obtener resolución y cobertura comparables a aquellas de datos magnéticos, esto es, buscar objetivos tanto someros como profundos y describirlos de forma más realista y detallada (Barnes y Lumley, 2011).

La utilidad de este tipo de datos se ve reflejada en sectores de importancia económica como la prospección minera, de aguas subterráneas, geotermia e incluso en otras no económicas como la arqueología.

Comparado con los datos de gravedad, la medición del gradiente de gravedad (GG) provee una alta sensibilidad en longitudes de onda corta. Lo que los hacen adecuados tanto para estudios en escalas pequeñas tales como las prospección minera (e.g. Dransfield, 2007) y de aguas profundas y aplicaciones a larga escala como las aplicaciones de gas y petróleo (Pikington, 2012). A causa de lo anterior, se ha ido extendiendo el uso de los Gradiómetros Aéreos de Gravedad (Airborne Gravity Gradiometry, AGG) en la búsqueda de mejores modelos de densidades del subsuelo en 2D y 3D.

A pesar de la importancia que han adquirido este tipo de datos, existen pocos algoritmos

para la inversión de datos del tensor de gravedad. Se puede citar, por ejemplo, el software GeoModeller de la compañía Intrepid Geophysics. También podemos citar el desarrollado por Zhdanov (Zhdanov *et al.*, 2004), el cual puede invertir conjuntamente datos gravimétricos y datos del tensor de gravedad.

Los Gradiómetros de Gravedad son particularmente adecuados en prospecciones aéreas porque la medición de una aceleración diferencial, los hace insensibles en gran medida a la aceleración de la aeronave (Barnes y Lumley, 2011), además de tener una mejor cobertura que los datos aéreos gravimétricos tradicionales.

2.4.2. Unidades y especificaciones de los datos

En el Sistema Internacional de Unidades (SI), la atracción gravitacional se mide en m/s^2 y en el sistema de unidades cgs se mide en cm/s^2 denominada comúnmente Gal (llamada así en honor de Galileo), donde $1Gal = 1cm/s^2$, sin embargo, en los estudios geofísicos la unidad de atracción gravitacional es el $mGal$. La conversión entre los sistemas cgs y SI es $1mGal = 10^{-5}m/s^2$.

La constante de gravitación universal, γ en el SI es $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} m^3/kg s^2$ y en cgs $6.67 \times 10^{-8} cm^3/g s^2$.

Las unidades de los elementos de Tensor de Gravedad en cgs $(cm/s^2)/cm$ y en SI $(m/s^2)/m$, coinciden y pueden escribirse como $1/s^2$; esta unidad es denominada Eötvös (en honor a von Eötvös). Si la aceleración de la fuerza de atracción cambia linealmente, la variación de la aceleración en $0.1mGal$ a la distancia de $1km$ será de un Eötvös.

Capítulo 3. Planteamiento del problema directo

3.1. Parametrización del modelo de densidades

Para la determinación de las características del subsuelo a partir de datos geofísicos, el primer problema que surge es el de encontrar una representación matemática (modelo) que permita reproducir numéricamente las mediciones observadas en el terreno. El siguiente paso es encontrar un conjunto de parámetros que puedan caracterizar lo más completamente posible nuestro modelo matemático.

En nuestro caso proponemos un sistema de coordenadas cartesianas centrado en el origen situándose el eje x al Este, el eje y al Norte y eje z hacia arriba, elegimos un modelo m formado por un conjunto de prismas rectos con densidad constante y extensiones laterales idénticas (ver Figura 7). Con estas propuestas nos aseguramos simplificar nuestros grados de libertad del sistema sin que por ello la parametrización sea inadecuada. Además los lados de los prismas del modelo m son paralelos a los ejes de coordenadas y ningún prisma necesariamente tiene algún vértice en el origen de coordenadas.

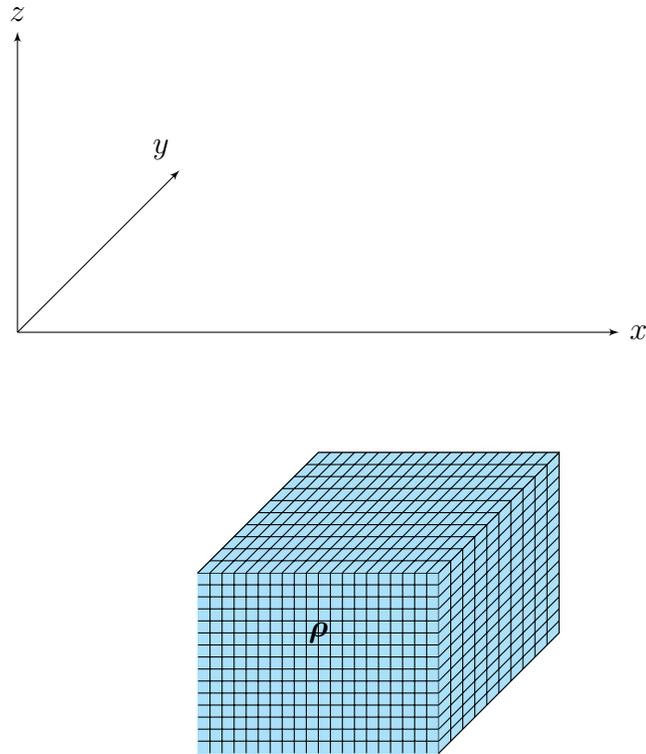


Figura 7: Ilustración del dominio del modelo del subsuelo. m. Los prismas en este modelo tienen la misma dimensión horizontal y densidad ρ constante.

3.2. Datos observados

El siguiente elemento necesario para plantear de manera completa nuestro problema consiste en la selección de los datos \mathbf{d} tanto del campo de gravedad g_z como de GG que serán utilizados en nuestro algoritmo de inversión.

De manera general se busca que los parámetros observados sean el resultado del campo físico asociado al modelo objetivo de nuestro estudio más una cantidad de error, indeterminable individualmente pero de distribución de probabilidad conocida e.g.,

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = \mathbf{d} + \mathbf{e}, \quad (36)$$

donde \mathbf{d}_{obs} es la componente dato observada en campo, \mathbf{d} es la componente producida por el modelo del subsuelo y \mathbf{e} es el error o diferencias entre observaciones y respuesta del modelo. ($\mathbf{e} = N(0, \sigma)$).

En nuestro trabajo, generamos datos sintéticos con el propósito de estudiar el desempeño del algoritmo de inversión de una manera más controlada. Como es requerido, los datos son generados a una altura constante con respecto al suelo y con un espaciamiento constante al norte y al este y extendiéndose más allá de los límites horizontales del modelo. Se generaron valores de ruido aleatorio de distribución normal, los cuales se agregaron a los datos sintéticos generados. La desviación estándar de la distribución del error agregado corresponde a 0.0001 mGal para g_z y 0.01 Eötvös para cada una de las componentes del gradiente de gravedad.

3.3. Solución del problema directo: cálculo de la matriz de sensibilidad

Como hemos visto anteriormente, la relación que existe entre el campo de gravedad (y el gradiente de gravedad) y la densidad del cuerpo causal (en nuestro caso el ensamble de prismas rectos) es lineal; por lo tanto, es de esperar que podamos expresar esta relación con arreglos matriciales y vectoriales y emplear operaciones básicas de álgebra lineal. La expresión para el efecto de la componente vertical del campo gravitatorio de un cuerpo \mathbf{m} con una densidad ρ constante sobre un punto de medición es

$$g_z(\mathbf{r}) = \gamma\rho [(x - x') \ln((y - y') + r) + (y - y') \ln((x - x') + r)] \left| \begin{array}{c} x'_2 | y'_2 | z'_2 \\ x'_1 | y'_1 | z'_1 \end{array} \right| - \gamma\rho(z - z') \tan^{-1} \left(\frac{(x - x')(z - z')}{(z - z')r} \right) \left| \begin{array}{c} x'_2 | y'_2 | z'_2 \\ x'_1 | y'_1 | z'_1 \end{array} \right|, \quad (37)$$

donde $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ es la coordenada en algún punto de modelo, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es la coordenada de un punto de medición y $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Por otra parte, el TGG en su forma matricial es expresado como

$$\mathbf{T} = \gamma\rho \begin{bmatrix} \tan^{-1}\left(\frac{(z-z')(y-y')}{r(x-x')}\right) & -\ln(r+(z-z')) & -\ln(r+(y-y')) \\ -\ln(r+(z-z')) & \tan^{-1}\left(\frac{(x-x')(z-z')}{r(y-y')}\right) & -\ln(r+(x-x')) \\ -\ln(r+(y-y')) & -\ln(r+(x-x')) & \tan^{-1}\left(\frac{(x-x')(y-y')}{r(z-z')}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Podemos ver que el tensor está formado por cotangentes y logaritmos, expresiones que normalmente demandan un tiempo de cómputo que podría resultar costoso para el cálculo reiterado en modelos con gran cantidad de prismas.

En nuestro trabajo, la relación entre parámetros y datos es lineal haciendo innecesaria cualquier tipo de linealización y permitiendo plantear directamente un problema del tipo de *mínimos cuadrados* lineales para resolver nuestro problema inverso. En este caso la relación matemática adoptada para describir nuestro problema directo es

$$\mathbf{F}\mathbf{m} = \mathbf{d}. \quad (39)$$

De acuerdo con (37) y (38), tenemos siete diferentes tipos (tp) de datos para modelar: g_z , T_{xx} , T_{yy} , T_{zz} , T_{xy} , T_{xz} y T_{zy} , es decir, nuestra matriz de sensibilidad depende tanto del tensor como de la componente vertical del campo gravitatorio.

En este trabajo se supondrá que:

- a) se puede tener cualquier combinación de datos de gravedad vertical y gradiente de gravedad,
- b) que los datos han sido tratados previamente para remover los efectos globales y locales que pueden presentar,
- c) contamos con una cantidad intrínseca de ruido que no obedece a algún efecto físico del sistema sino a otras razones como la calibración y exactitud de los aparatos y/o los errores

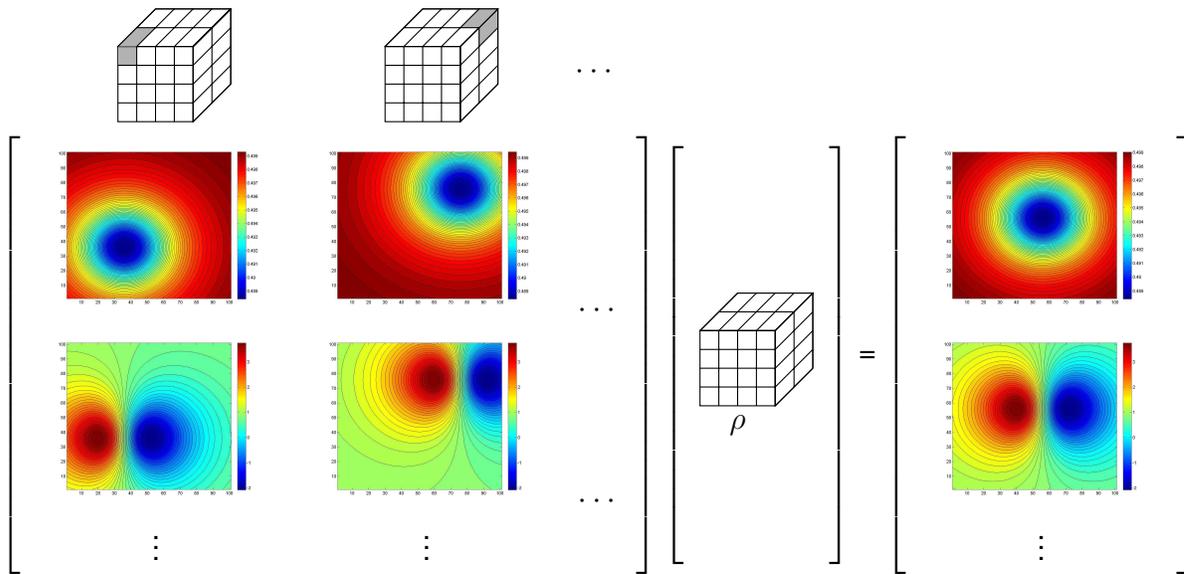


Figura 8: Despliegue gráfico de la información contenida en el sistema de ecuaciones lineales del problema directo. Se observa la relación entre la diferentes anomalías y el significado de la convolución para el cálculo de la anomalía de tensor de gradiente de gravedad para cada plano de z . Diagrama $F\mathbf{m} = \mathbf{d}$.

producto de la forma en que se tomaron los datos, los cuales se engloban con el parámetro estadístico de su desviación estándar (σ) a utilizar en la inversión y

- d) que los datos son preparados para colocarse en una rejilla regular en un plano horizontal. \mathbf{m} es el vector de densidades del modelo, el vector \mathbf{d} corresponde a los datos de g_z y del gradiente de gravedad que resultarían del modelo representado por los parámetros \mathbf{m} y \mathbf{F} es nuestra matriz de sensibilidad cuyos elementos están dados por la aplicación de (37) y (38) (ver Figura 8). Asumimos también que las predicciones teóricas hechas por (39) no contienen errores.

Capítulo 4. Planteamiento y solución del problema inverso

4.1. Planteamiento de la función objetivo

La solución del problema inverso requiere una función tal que involucre los datos observados \mathbf{d}_{obs} y los parámetros del modelo \mathbf{m} que nos represente al sistema en estudio de forma completa o en su defecto con las restricciones que sean aplicadas. Dicha función ϕ es denominada *función objetivo* que debe tener como propiedad que al reducir su valor la solución que arroje coincida cada vez más con nuestro concepto de sistema y nuestros datos geofísicos. Si los elementos en dicha función son seleccionados de modo que representen una variable aleatoria de distribución estadística conocida, entonces la función objetivo tiene la propiedad de producir un estimador de máxima verosimilitud. En nuestro caso, y siguiendo una formulación del tipo de mínimos cuadrados, resultaría ideal que los elementos involucrados (debidamente normalizados) fueran variables aleatorias de distribución normal de desviación unitaria.

La función objetivo ϕ tiene la siguiente forma estándar

$$\phi = \|\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{F}\mathbf{m}\|_{\mathbf{C}_{dd}^{-1}}^2 + \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\|_{\mathbf{C}_{00}^{-1}}^2 + \alpha \|\mathbf{D}\mathbf{m}\|^2, \quad (40)$$

donde \mathbf{C}_{dd} es la *matriz de covarianza* de los datos observados (la cual deber de representar el nivel de error en cada una de las mediciones) y la *respuesta del modelo* $\mathbf{F}\mathbf{m}$, $\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\|$ es la diferencia entre el modelo de densidades y un *modelo de regularización* \mathbf{m}_0 . En este caso se supone que está relacionado con una distribución aleatoria de los parámetros del modelo alrededor de \mathbf{m}_0 , con una dispersión medida por la matriz de covarianza \mathbf{C}_{00} , $\|\mathbf{D}\mathbf{m}\|$ es un elemento de regularización que, en nuestro caso, busca que la variación lateral de la densidad dentro del modelo sea gradual. Esta condición de “suavidad” contiene al *operador laplaciano* \mathbf{D} actuando sobre el modelo \mathbf{m} y α es término de ponderación. Es de notar que este caso es distinto a los demás elementos de la función objetivo, ya que α no se anuncia explícitamente como una medida de la dispersión estadística de la suavidad del modelo. En el sentido estricto, sería conveniente que fueran los datos geofísicos los únicos que determinaran si un modelo

“suave” es preferible a un modelo de más heterogeneidades; sin embargo, este generalmente no es el caso y el factor de regularización α debe ser en su mayoría encontrado a través de ensayos experimentales para diferentes casos.

4.2. Regularización del problema inverso

De manera general, en los sistemas geofísicos la cantidad de información que podemos obtener mediante las mediciones de un fenómeno no siempre es ideal como tampoco suficiente para poder representar al fenómeno perfectamente. Esto implica que la calidad de los datos es fundamental para conseguir los objetivos planteados en cada caso de estudio; es decir, si los niveles de error son relativamente grandes con respecto a los datos, pueden hacer que los modelos no converjan debido a la inestabilidad presentada en el cálculo del modelo. Otro problema intrínseco en los problemas de inversión es la no-unicidad del modelo, lo que implica que diferentes modelos nos pueden representar los datos obtenidos.

Con el fin de reducir estos problemas necesitamos imponer algunas condiciones en la función objetivo que la regularize sin que por ello pierda sentido físico. En nuestro caso tenemos el modelo de regularización \mathbf{m}_0 , ponderado por su matriz de covarianza \mathbf{C}_{00} , así como la matriz de suavidad \mathbf{D} y el término de penalización α para resolver estos problemas.

4.3. Minimización de la función objetivo

Resolver el problema inverso es, en nuestro caso, planteado como encontrar el modelo $\hat{\mathbf{m}}$ que minimiza la función objetivo (ϕ) dada por:

$$\min \phi = \|\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{m}}\|_{\mathbf{C}_{dd}^{-1}}^2 + \|\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0\|_{\mathbf{C}_{00}^{-1}}^2 + \alpha \|\mathbf{D}\hat{\mathbf{m}}\|^2. \quad (41)$$

Entre las ventajas de proponer una función objetivo basada en una norma cuadrática es que al minimizarla resulta en un sistema de ecuaciones lineales, el cual puede resolverse

siguiendo diferentes estrategias numéricas. Para encontrar este sistema de ecuaciones desarrollamos la expresión (41) y luego calculamos la derivada con respecto al vector $\hat{\mathbf{m}}$, lo cual resulta en el sistema:

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{C}_{00}^{-1} + \alpha^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{F}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{d}_{\text{obs}} + \mathbf{C}_{00}^{-1} \mathbf{m}_0, \quad (42)$$

donde T significa matriz transpuesta y $\hat{\mathbf{m}}$ es el *modelo estimado* que satisface esta ecuación y que por lo tanto minimiza (41) de acuerdo a los datos observados, la suavidad esperada en el modelo y el modelo de regularización empleados.

La ecuación (42) puede resolverse invirtiendo directamente la matriz Hessiana $(\mathbf{F}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{F} + \alpha^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mathbf{C}_{00}^{-1})$ empleando algún método de álgebra lineal. El cálculo de esta inversa está supeditado a varias limitantes:

- a) la matriz hessiana debe ser positiva definida para garantizar la existencia de su matriz inversa,
- b) se debe disponer de esta matriz y, por lo tanto, se debe contar con la capacidad de cómputo suficiente para almacenar todos sus elementos.

Este último requerimiento resulta bastante costoso en problemas inversos en modelos tridimensionales.

Una alternativa más viable a la inversión de la matriz es el uso de esquemas iterativos de solución del sistema de ecuaciones lineales. Si bien estos esquemas no necesariamente requieren almacenar la matriz hessiana completa (y por lo tanto pueden abordar problemas de mayor escala), aún requieren de que dicha matriz sea positiva definida para garantizar la convergencia del algoritmo iterativo. En este trabajo se plantea seguir uno de estos esquemas iterativos y para plantearlo, definiremos más precisamente el sistema de ecuaciones lineales a resolver.

Es notable que aunque nuestro planteamiento del problema es lineal, a primera vista la

expresión (42) no parece tener esta característica; sin embargo, si relacionamos los diferentes elementos matriciales con la forma estándar de la ecuación lineal obtenemos

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{b}, \quad (43)$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{C}_{00}^{-1} + \alpha^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D}, \quad (44)$$

y

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{C}_{00}^{-1} \mathbf{m}_0. \quad (45)$$

Observemos que la expresión (43) es un sistema de ecuaciones lineales ya que todas las relaciones funcionales dentro de los términos cuadráticos de la función objetivo son lineales.

4.4. Esquema de solución: gradientes conjugados preconditionados

Dadas las características de la adquisición de los datos de gradiente de tensor de gravedad en plataformas aéreas, se sabe que tienen una cobertura horizontal amplia con un muestreo denso de datos. Como se planteó, es de esperar que esto se refleje en modelos tridimensionales de gran detalle. Todo esto nos lleva invariablemente a un problema de inversión de gran escala; al tener esto en cuenta, lo primero que consideramos es recurrir a los métodos iterativos de solución del sistema de ecuaciones lineales resultantes (43) dado que estos algoritmos no requieren de la inversión explícita de la matriz de coeficientes y ni siquiera requieren del conocimiento simultáneo de todos los coeficientes de dicha matriz.

De los diferentes métodos iterativos que existen, en este trabajo elegimos el *Método de los Gradientes Conjugados* (Apéndice B, Schewcuk, 1994, Nocedal, 2006).

La diferencia fundamental entre el método de los gradientes conjugados con otros métodos

de descenso es el concepto de *A-ortogonalidad*, el cual es más específico que la ortogonalidad común y tiene como consecuencia la selección de las direcciones de búsqueda ortogonales para encontrar una solución en menos pasos iterativos (Apéndice B, Schewcuk, 1994, Nocedal, 2006).

Entre las ventajas más importantes del método de los gradientes conjugados tenemos

1. No es necesario guardar todos los vectores viejos para asegurar la *A-ortogonalidad* de los nuevos vectores de búsqueda, es decir, no tenemos que guardar todos los cálculos llevados a cabo con anterioridad para realizar una nueva iteración.
2. No necesitamos calcular explícitamente la inversa de A . Además, cuando se emplean preconditionadores apropiados, ayuda a reducir el número de pasos iterativos (que siempre será menor al número de incógnitas).
3. En nuestro caso, dadas las características de la integral de convolución descrita en el capítulo anterior, la matriz F no necesita guardarse de modo completo, lo que implica ahorro en las capacidades de almacenamiento.
4. A tampoco se guarda y se aplica la convolución para recuperar los valores de F . De igual manera que F , ahorramos capacidad de almacenamiento y además no tenemos que calcular toda la región en estudio, sino que dependiendo de la simetría del problema con calcular una región es suficiente.
5. Otra ventaja que hace al Método de los Gradientes Conjugados un algoritmo popular es que (cuando se emplean preconditionadores apropiados) reduce la complejidad del espacio (y del tiempo de iteración) de $O(n^2)$ a $O(m)$, donde m es el número de entradas diferentes de cero de F , siendo $m < n$.

Una de las principales restricciones del los gradientes conjugados es que la matriz A sea positiva definida, esto implica que puede ser descrita geoméricamente como un paraboloides elíptico (Apéndice B); cuya propiedad principal para su utilización es que sólo posee un mínimo, que al resultar de un problema lineal es un mínimo global. Encontrar este mínimo es el

objetivo del método.

Decimos que dos vectores son A-ortogonales o conjugados si cumplen

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j = 0, \quad (46)$$

donde \mathbf{p}_i y \mathbf{p}_j son vectores que pueden ser usados como *direcciones de búsqueda*. Notamos que en (46) la aplicación secuencial de esta ortogonalidad implica que cada paso sólo depende del vector actual y del vector anterior, es por esta causa que no necesitamos guardar todos los vectores para encontrar la solución.

Como todos los métodos iterativos, nuestro elemento principal de medida de convergencia del método es el concepto del residual, el cual nos indica qué tan lejos estamos de que el vector que encontramos en realidad sea una solución de nuestro sistema de ecuaciones lineales original \mathbf{b} (Schewchuck, 1994) y tiene la forma

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{m}}_i. \quad (47)$$

Observemos también que en cada paso que damos tenemos cierto *error* $\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{m}}_i - \hat{\mathbf{m}}$, que es un vector que nos indica qué tan lejos está nuestro modelo iterativo $\hat{\mathbf{m}}_i$ de la solución al sistema $\hat{\mathbf{m}}$ (Schewchuck, 1994).

Supongamos que comenzamos en un punto $\hat{\mathbf{m}}_0$. Nuestro primer paso a lo largo de la dirección del descenso más rápido, es decir, elegimos el punto

$$\hat{\mathbf{m}}_1 = \hat{\mathbf{m}}_0 + \alpha \mathbf{r}_0, \quad (48)$$

donde α es una constante que calculamos con la fórmula

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}_0^T \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0}, \quad (49)$$

en la que observamos que sólo depende del paso anterior; esta α nos minimiza ϕ a lo largo de una línea, llamada *línea de búsqueda* (search line).

Podemos calcular α_i mediante \mathbf{e}_{i+1} y un conjunto de direcciones de búsqueda $\{\mathbf{p}_i\}$ que sean A-ortogonales a vectores previos. Calculamos este conjunto por medio del *proceso de conjugación Gram-Schmidt* y encontramos una constante β_i .

$$\beta_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{r}_{i-1}^T \mathbf{r}_{i-1}}. \quad (50)$$

Y así, el algoritmo del método de los gradientes conjugados es (Figura 9):

Figura 9: Algoritmo del método de los gradientes conjugados.

<i>Método de los gradientes conjugados</i>
$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{m}}_0,$
$\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i},$
$\hat{\mathbf{m}}_{i+1} = \hat{\mathbf{m}}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i,$
$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{p}_i,$
$\beta_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i},$
$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1} \mathbf{p}_i.$

en el que podemos observar que el primer paso es el residual del vector \mathbf{b} con $\mathbf{A}\hat{\mathbf{m}}_0$ y lo que ya hemos mencionado: los movimientos a dar sólo dependen del paso actual y del anterior. Observemos también que el método lleva a cabo iteraciones del tipo $\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{r}_0$ cuya estructura corresponde a un *subespacio de Krylov* (Apéndice B).

Por otra parte, existen otras condiciones que mejoran el funcionamiento del algoritmo como que los valores propios de la matriz \mathbf{A} estén agrupados y sobre todo, el *preacondicionamiento*

de la matriz A que consiste en encontrar una matriz M lo más parecida a A . Existen diferentes formas de encontrar esta matriz siendo los más populares la factorización incompleta de Cholesky y el preconditionamiento de Jacobi. En este trabajo elegimos M como la matriz diagonal de A .

Utilizando la matriz de preconditionamiento, el algoritmo del método de los gradientes conjugados se transforma de la siguiente manera (Figura 10):

Figura 10: Algoritmo del método de los gradientes conjugados preconditionado.

<i>Método de los Gradientes Conjugados Preacondicionado</i>
$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{m}_0,$
$\mathbf{p}_0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0,$
$\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i},$
$\hat{\mathbf{m}}_{i+1} = \hat{\mathbf{m}}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i,$
$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{p}_i,$
$\beta_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_i},$
$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1} \mathbf{p}_i.$

Observemos que la diferencia sustancial es que el primer vector de búsqueda \mathbf{p}_0 es diferente que \mathbf{r}_0 y M siempre aparece multiplicando a M .

4.5. Diseño del algoritmo de inversión

El algoritmo del método de los gradientes conjugados desarrollado para este trabajo se muestra en la Figura 11. La parte izquierda de la figura nos muestra el algoritmo general y cada uno de los pasos a llevar a cabo; el primer paso es dimensionar arreglos y variables, esto es, especificamos las dimensiones espaciales tanto de los datos como del modelo y las dimensiones de las rejillas de los datos y los prismas del modelo. En este trabajo proponemos que la dimensión en superficie de los datos es dos veces mayor que la dimensión superficial del modelo. Nuestros datos tienen una dimensión de 101×101 m y una distancia entre rejillas en $\Delta x_d, \Delta y_d$ de 1 m ; las dimensiones superficiales del modelo son 50×50 m con una distancia

entre cada celda de $2 m$ tanto en x como en y , con una distancia entre la parte superior de cada capa z_{top} y la inferior z_{bot} de $8 m$.

Después, procedemos a la lectura de los datos, esto es, observamos el tipo de datos t_p , el número de los mismos nt_p así como también las matrices de covarianza C_{dd}^{-1} de los distintos tipos de datos. Asimismo, proponemos un modelo a priori m_0 .

Elegimos que el modelo de inicio es el mismo que el modelo a priori m_0 .

Posteriormente, calculamos los elementos que contenga la matriz F , donde nos aseguramos el tipo y la cantidad de datos que tenemos (como está ilustrado en el pseudocódigo de la Figura 12); también calculamos la matriz de preconditionamiento M . Asimismo, calculamos el vector b , para con ello calcular el primer vector residual r_0 y F .

Entramos al ciclo iterativo descrito en la parte derecha de la Figura 11. En el mismo, calculamos α y así calculamos el nuevo modelo \hat{m}_i que tiene la forma

$$\hat{m}_i = \hat{m}_0 + \alpha p_i. \quad (51)$$

El segundo miembro de la parte derecha de esta expresión al aplicarse iterativamente nos lleva a una multiplicación anidada, que es concepto fundamental de los métodos basados en los subespacios de Krylov. Es entonces una multiplicación anidada de la forma $A^{i-1}r_0$, donde i es la iteración actual.

Ya que tenemos \hat{m}_1 encontramos β y con ello una nueva dirección de búsqueda. Finalmente, aplicamos varios criterios de convergencia y, dependiendo de éstos, seguiremos a la siguiente iteración o paramos el proceso.

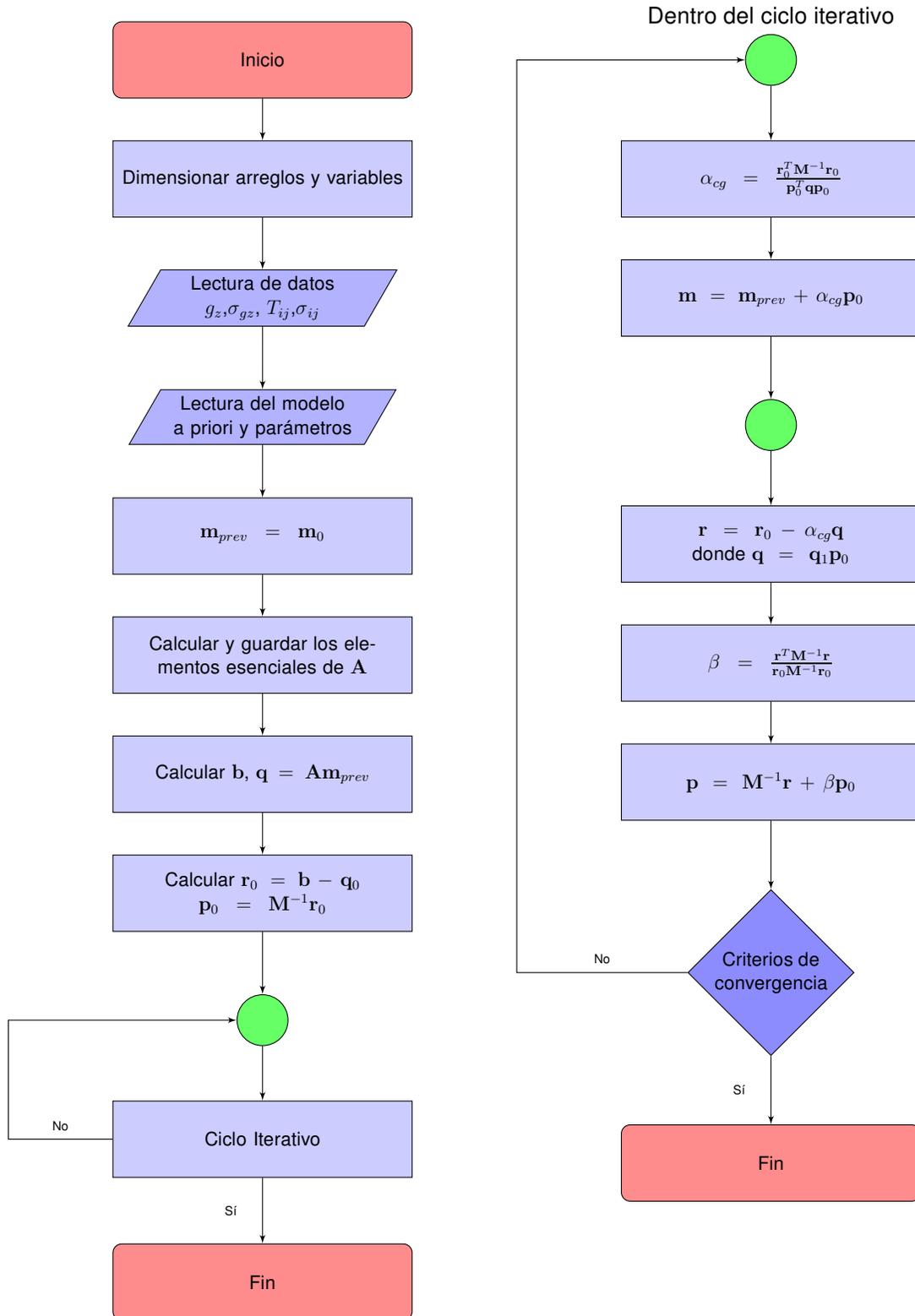


Figura 11: Diagrama de flujo del algoritmo de inversión basado en gradientes conjugados preconditionados.

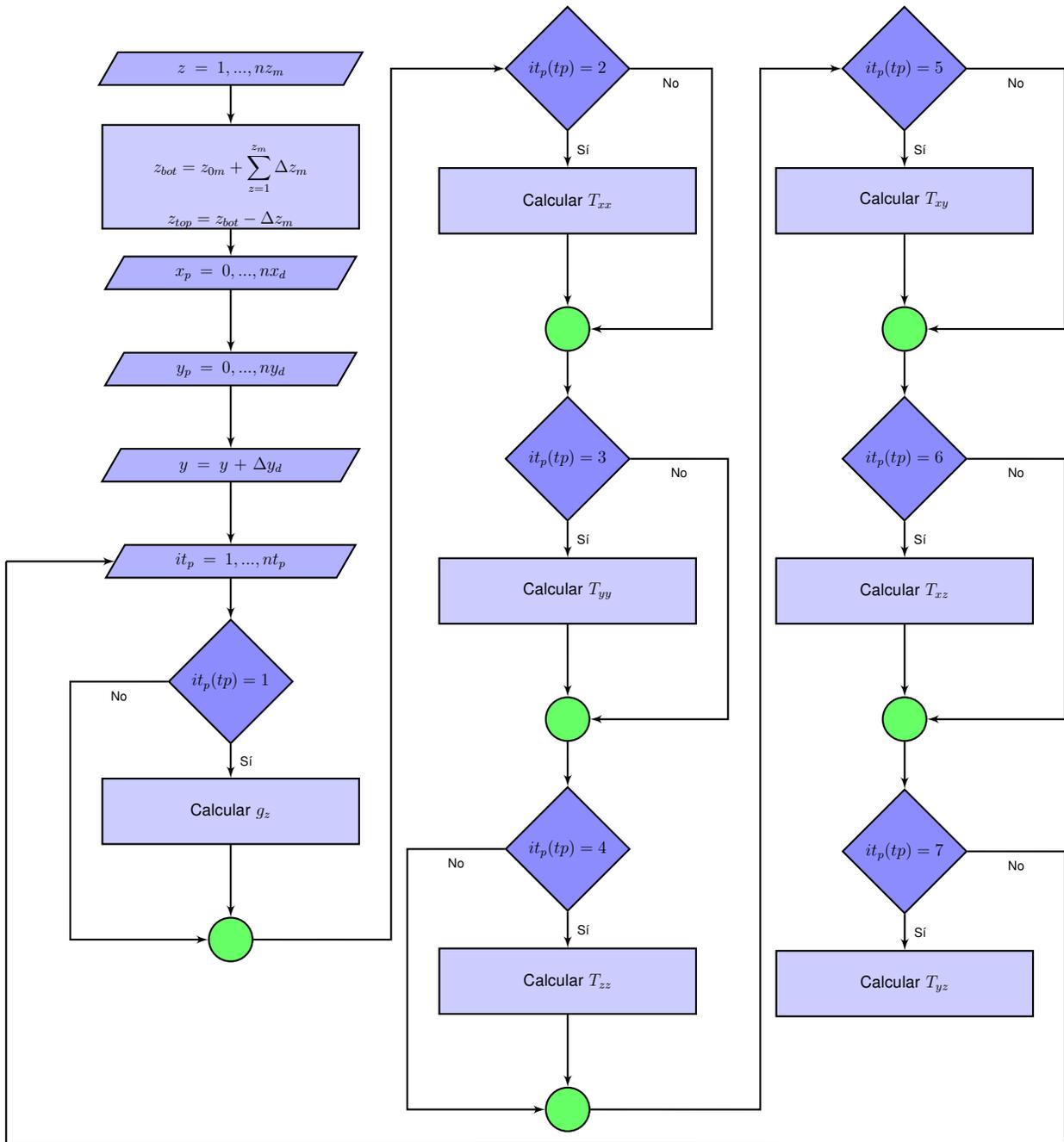


Figura 12: Diagrama de flujo del algoritmo de cálculo de la matriz de sensibilidad F.

Capítulo 5. Resultados

Los experimentos sintéticos mostrados aquí son el resultado de la inversión realizada mediante el algoritmo de inversión desarrollado. Los experimentos tienen por objetivo tanto el calibrar los diferentes parámetros empleados en el algoritmo de inversión como el evaluar las ventajas del uso de los diferentes elementos del tensor de gradiente de gravedad. Los casos consisten en cuatro modelos diferentes en que se varían las dimensiones del modelo en cuanto a las dimensiones de las capas, así como el número de celdas y de capas. En el modelo se incluyen heterogeneidades tanto aisladas como agrupadas, las cuales van aumentando su complejidad según los resultados obtenidos de cada experimento. En todos los casos la extensión lateral del modelo es la misma (de 30 m a 80 m de acuerdo con el origen de nuestro sistema de referencia), mientras que los datos se generan en una rejilla regular equiespaciada a cada metro en ambas direcciones x e y los cuales cubren una extensión más allá de los límites del volumen de prismas seleccionados (0 m – 100 m en x y en y), esto garantiza la cobertura completa de los datos y provee una rejilla apropiada para aplicar los principios de convolución descritos en los capítulos anteriores sin necesidad de suposiciones de interpolación adicionales. Las alturas de las tomas de los datos fueron de 1 m arriba del nivel de la capa de los prismas superiores del modelo tanto en x como en y .

5.1. Modelos $5 \times 5 \times 3$

El primer caso consiste en un modelo de $5 \times 5 \times 3$ prismas, las celdas el plano xy tienen las mismas dimensiones tanto en x como en y , variando la dimensión en z de cada prisma, sin embargo, las distintos prismas tienen la misma dimensión en profundidad.

5.2. Modelo $5 \times 5 \times 3$, 1 prisma

El primer caso a estudiar consiste en un modelo sintético de $5 \times 5 \times 3$ prismas rectangulares como se muestra en la Figura 13; la dimensión de cada prisma en el plano xy es 10 $m \times 10 m$ y el espesor es de 20 m . Todos los prismas tienen las mismas dimensiones. El medio es homogéneo con contraste de densidad nulo (0 gr/cm^3) a excepción de un prisma ubicado en

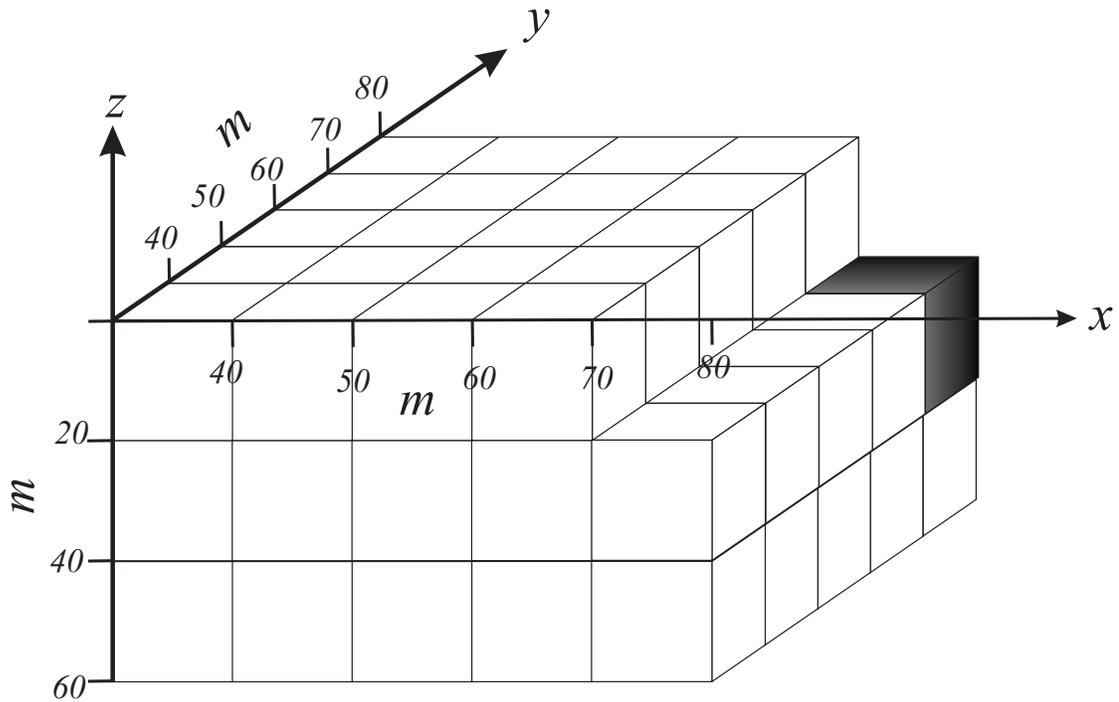


Figura 13: Gráfica del modelo inicial m_0 $5 \times 5 \times 3$ con sólo un prisma con densidad de 1 g/cm^3 .

la segunda capa que tiene una densidad de $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$. Este modelo es bastante simple ya que tiene como finalidad la depuración del programa de inversión. La matriz de suavidad tiene un término de penalización de $\alpha = 0.01$ y cada elemento de la diagonal de la matriz de covarianza C_{00} , que corresponde a una desviación estándar de 0.1 g/cm^3 para el valor de densidad de 0.0 g/cm^3 asignado a cada celda de manera a priori.

Con el modelo sintético propuesto se calculó la respuesta para cada elemento del tensor de gradiente de gravedad, así como de la componente vertical del vector de gravedad. La Figura 14, muestra las distintas respuestas del modelo ($\mathbf{A}m_0$) para dichos elementos. El primer elemento de la primera fila corresponde a T_{xx} , el segundo a T_{xy} y así sucesivamente para cada elemento del tensor. En esta figura, como en las subsecuentes, la componente vertical g_z se muestra en la parte inferior izquierda del arreglo, lugar que correspondería a la componente T_{zx} del tensor de gradiente de gravedad. El efecto de la geometría rectangular del prisma en el tensor de gradiente de gravedad y en la componente vertical de la gravedad del prisma es casi imperceptible en las gráficas del arreglo, que puede deberse al débil efecto de tener un sólo cuerpo con densidad unitaria a la profundidad propuesta. Dicho efecto asemeja más bien

al de una masa puntual equivalente.

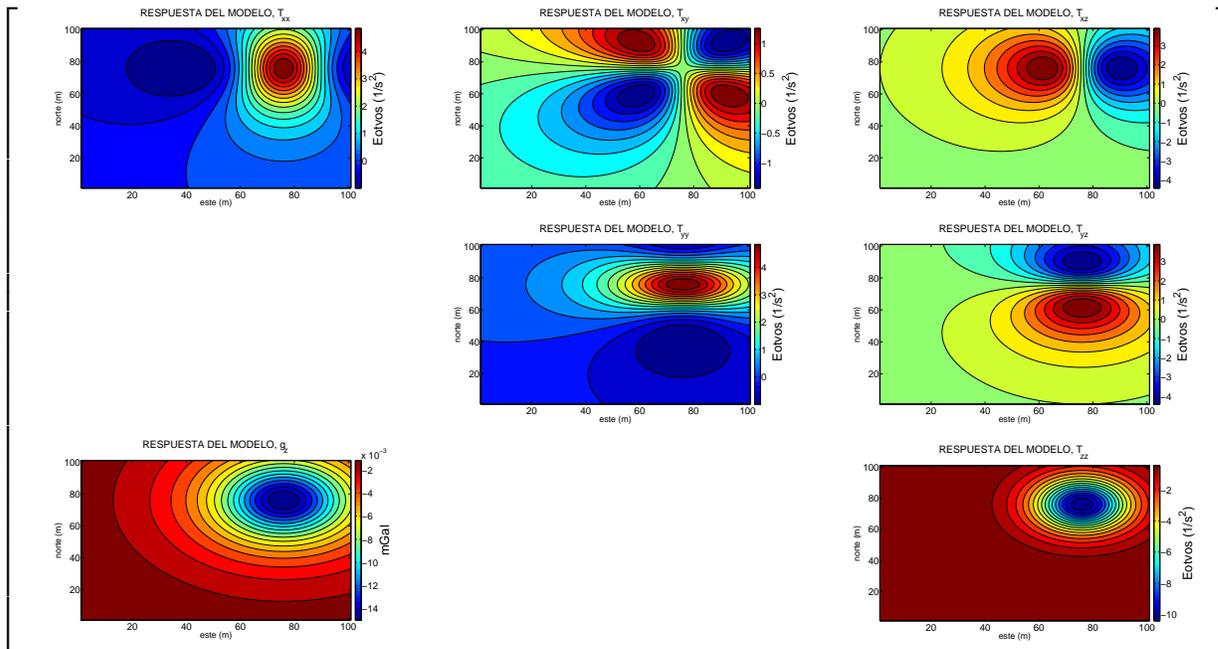


Figura 14: Respuesta del modelo $A_{m_{sint}}$ para los distintos elementos del tensor de gravedad y g_z .

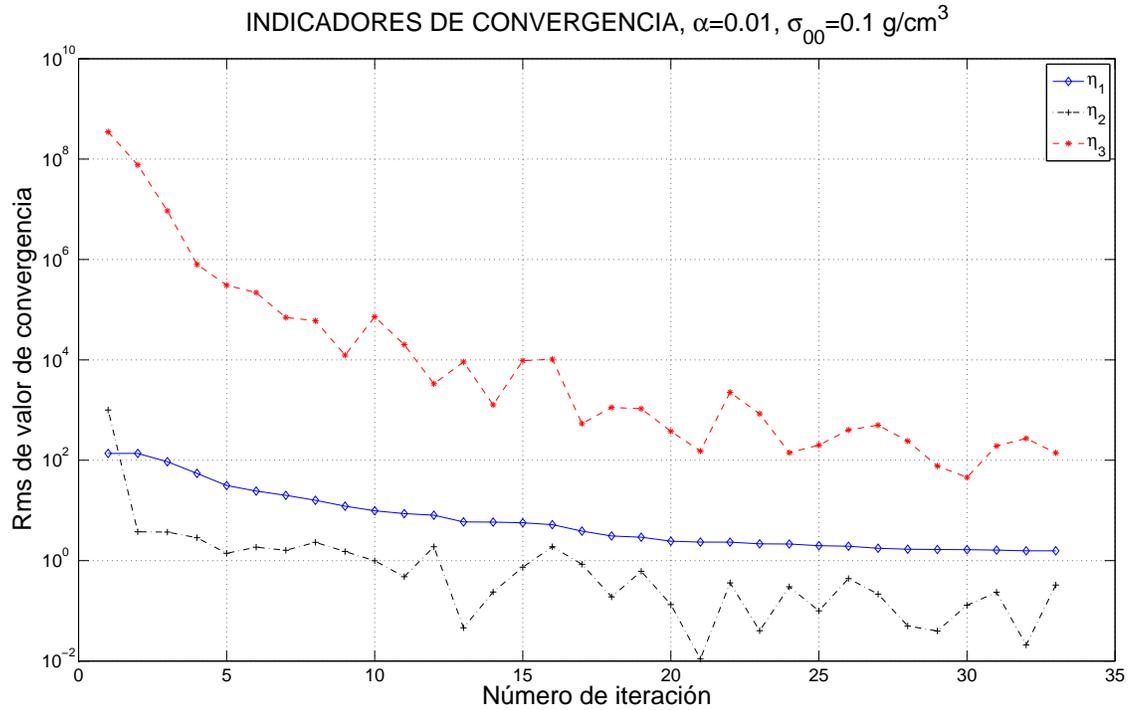


Figura 15: Gráfica de indicadores de convergencia contra el número de iteraciones. El número de iteraciones mostrado corresponde a los pasos realizados para lograr la convergencia del modelo en términos del ajuste de los datos. El eje del valor rms de convergencia está en escala logarítmica.

Para evaluar el desempeño del algoritmo en cada paso iterativo, se calcularon diferentes valores rms indicativos de la convergencia del proceso:

- η_1 - el valor rms normalizado del desajuste de los datos, medido como:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\sum \left(\frac{d_{obs} - d_{cal}}{\sigma_d} \right)^2}{n_d}}, \quad (52)$$

donde n_d es el número total de datos; dicho parámetro tiene la finalidad de evaluar la capacidad del modelo de reproducir los datos geofísicos originales.

- η_2 - el valor rms normalizado de los parámetros del modelo, respecto al modelo a priori, dado por:

$$\eta_2 = \sqrt{\sum \left(\frac{m_i - m_{i-1}}{\sigma_{00}} \right)^2}, \quad (53)$$

donde σ_{00} es la matriz de covarianza de las densidades del modelo y m_i es el i -ésimo

modelo. Este estadístico tiene la finalidad de evaluar la estabilidad del modelo en términos de la magnitud total de vector de solución.

- η_3 - el valor RMS normalizado de los residuales lineales en el esquema de gradientes conjugados dado por:

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{\sum r^T M^{-1} r}{n_m}}, \quad (54)$$

donde n_m es el producto del número de celdas al este, norte y profundidad del modelo. Este indicador evaluaría la convergencia del esquema de gradientes conjugados en comparación con los parámetros de preconditionamiento empleados.

El número de datos en este caso es de $101 \times 101 \times 7$, correspondiendo el último dígito (7) al número de elementos del tensor de gravedad y/o g_z . Como utilizamos todos los elementos del tensor y g_z , el número de datos es de 71,407.

En la Figura 15, podemos observar la evolución de los indicadores de convergencia seleccionados de acuerdo al número de iteración del proceso de búsqueda de gradientes conjugados. Podemos ver que, el criterio de convergencia que se comporta de manera estable y que es responsable de detener el proceso corresponde al ajuste de datos (color azul), el cual alcanza el valor cercano a 1 en la iteración 33; por otra parte, el criterio de los gradientes conjugados (color rojo) decae de forma estable hasta la séptima iteración, siendo inestable en lo que resta del proceso. De la misma manera, el criterio del ajuste del modelo (color negro), es estable hasta la séptima iteración e inestable hacia el fin del proceso. Como podemos observar, el programa converge de manera rápida, debido a la cantidad reducida de parámetros del modelo.

La Figura 16 nos muestra el resultado de la inversión del modelo del caso actual. La escala de valores mostrada en la parte derecha de la gráfica va de -1 g/cm^3 a 1 g/cm^3 . En el corte realizado a 20 m de profundidad (al inicio de la segunda capa), se observa que el prisma de densidad anómala (5, 5, 2) es el único que alcanza el valor esperado de 1 g/cm^3 . Si bien los demás prismas deberían tener una densidad nula, observamos que este no es el caso, por

ejemplo, el par de prismas adyacentes al prisma objetivo tienen una densidad alrededor de 0.4 g/cm^3 , y los prismas alrededor de éstos también tienen una densidad distinta de cero. De igual manera, los demás prismas del modelo tienen valores alrededor de cero, ya sean valores de densidad positiva o negativa. De manera general se puede decir que el algoritmo funciona correctamente, ya que:

- el proceso convergió a un modelo cercano al modelo de prueba en un número limitado de iteraciones,
- a pesar de las oscilaciones en la búsqueda, todos los modelos obtenidos fueron justificando los datos geofísicos satisfactoriamente (lo que corresponde a la acción de la primera parte de la función objetivo),
- el prisma de densidad más anómala encontrado corresponde a aquel propuesto en el modelo de prueba y
- todos los demás prismas variaron gradualmente hasta alcanzar valores cercanos a cero, entre más se alejaron del modelo de prueba, lo que confirma la acción de la segunda parte de la función objetivo (i.e., la minimización de los operadores de segunda derivada).

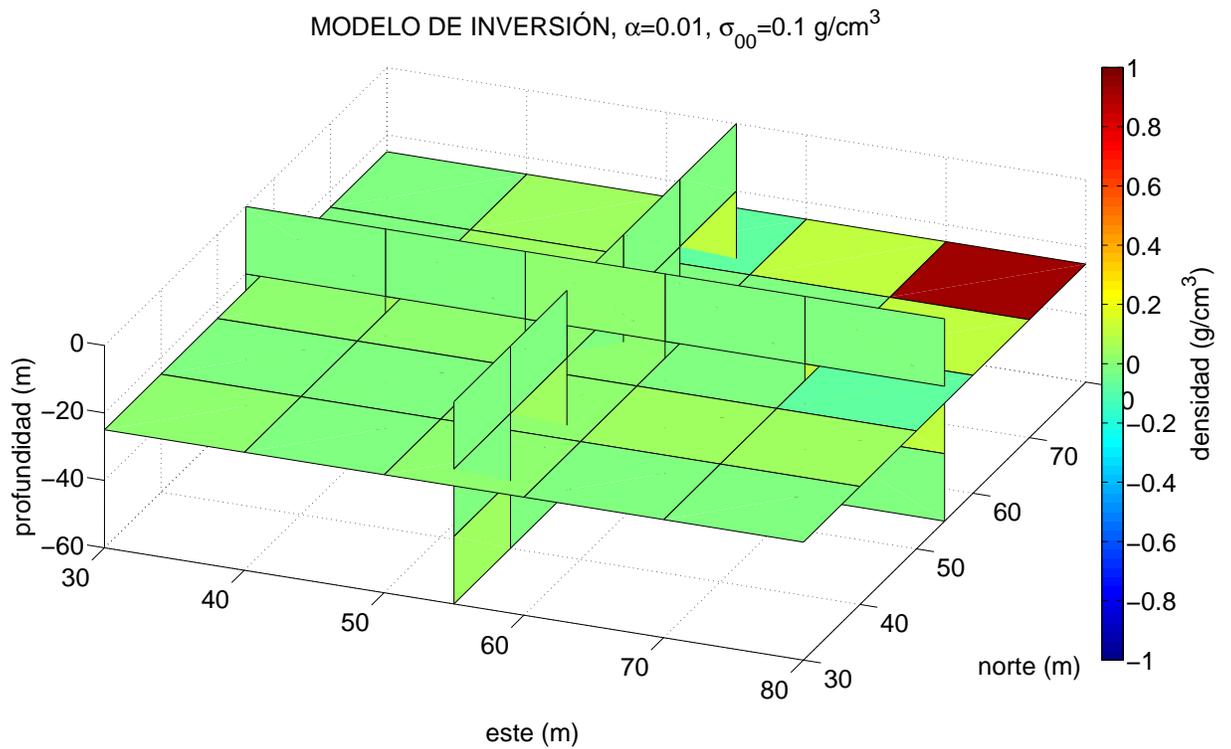


Figura 16: Resultado de la inversión de los datos generados con un modelo de $5 \times 5 \times 3$ prismas con un prisma con densidad de 1 g/cm^3 .

5.3. Modelo $5 \times 5 \times 3$, 3 prismas

5.3.1. Inversión utilizando g_z

Resulta claro que el primer experimento se formuló con el modelo más simple que se pudo proponer, sin embargo, este tipo de experimento difícilmente nos permitirá evaluar la acción de la información contenida en los diferentes elementos del tensor de gravedad especialmente en relación con la geometría de los cuerpos anómalos en el subsuelo. Para evaluar este aspecto con más detalle en un modelo de escala pequeña, se propone un modelo de $5 \times 5 \times 3$ prismas con las mismas dimensiones tanto en superficie como en profundidad, sin embargo, la diferencia radica en que escogemos tres prismas ubicados en la primera capa del modelo como se muestra en la Figura 17 y con una densidad de 1 g/cm^3 ; los demás prismas tienen una densidad nula. La elección de este modelo tienen como finalidad calibrar los parámetros de regularización de la función objetivo y observar el comportamiento del mismo con varios prismas activos bajo la acción de la componente convencional de g_z , en comparación con la acción de todos los elementos del tensor de gravedad. Mostramos los criterios de convergencia y las gráficas de la inversión para todos los elementos en conjunto y la componente vertical g_z para dos términos distintos de penalización de la matriz de suavidad ($\alpha = 0.1$ y $\alpha = 1000$) y una matriz de covarianza $\sigma_{00} = 0.1 \text{ g/cm}^3$.

El número de datos en este caso es de $101 \times 101 \times 1$, pues sólo utilizamos g_z , así, el número total de datos es de 10,201.

La Figura 18 nos muestra la respuesta del modelo para todos los elementos en conjunto. Tenemos una buena definición de la extensión lateral de los prismas activos pues se definen muy bien sus límites. En todos los casos, fuera de los prismas, los valores están alrededor de cero y vemos que las curvas de nivel se prolongan fuera de los prismas debido a la naturaleza misma del decaimiento de los campos,

La Figura 19 nos muestra los indicadores de convergencia con los términos de penalización $\alpha = 0.01$ y $\alpha = 1000$ así como el resultado del modelo de inversión para g_z . En general,

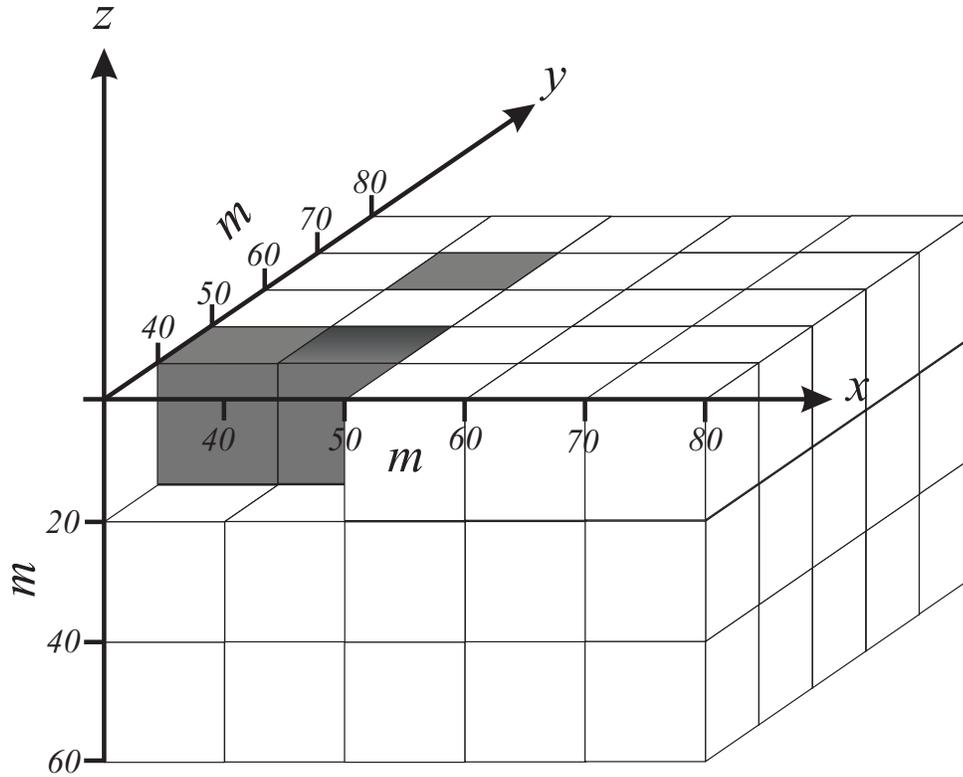


Figura 17: Gráfica del modelo inicial m_0 $5 \times 5 \times 3$ con 3 prismas con densidad de 1 g/cm^3 .

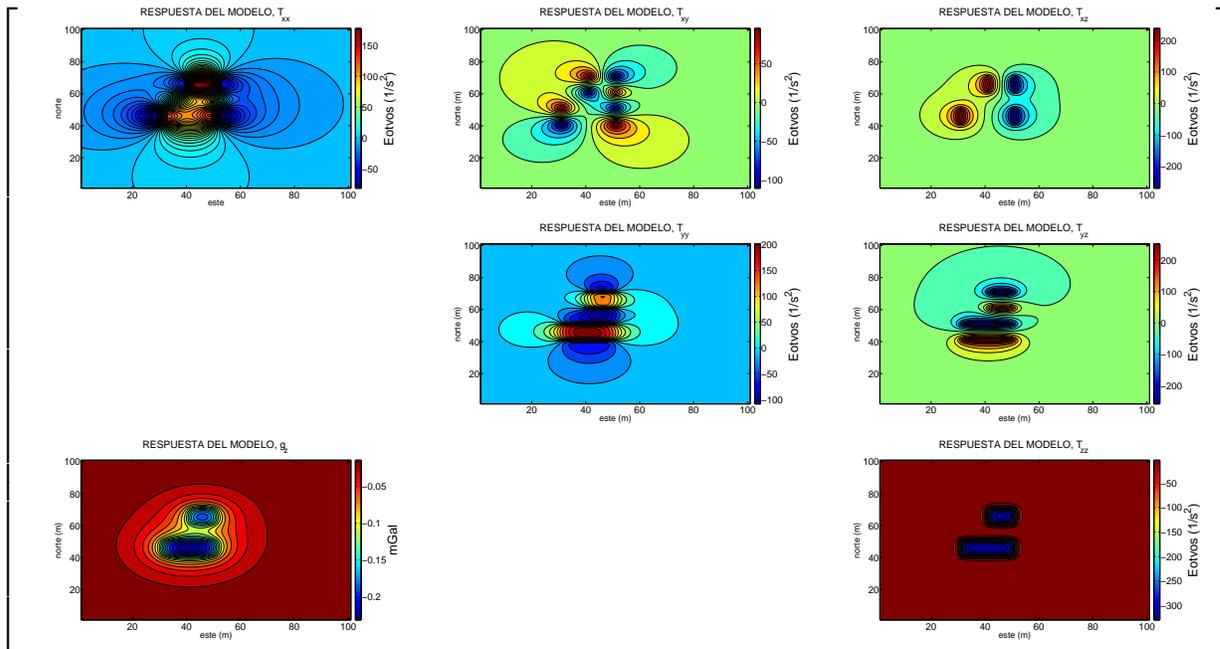


Figura 18: Respuesta del modelo ($A_{m_{sint}}$) para los distintos elementos en un caso con 3 prismas con densidad distinta de cero.

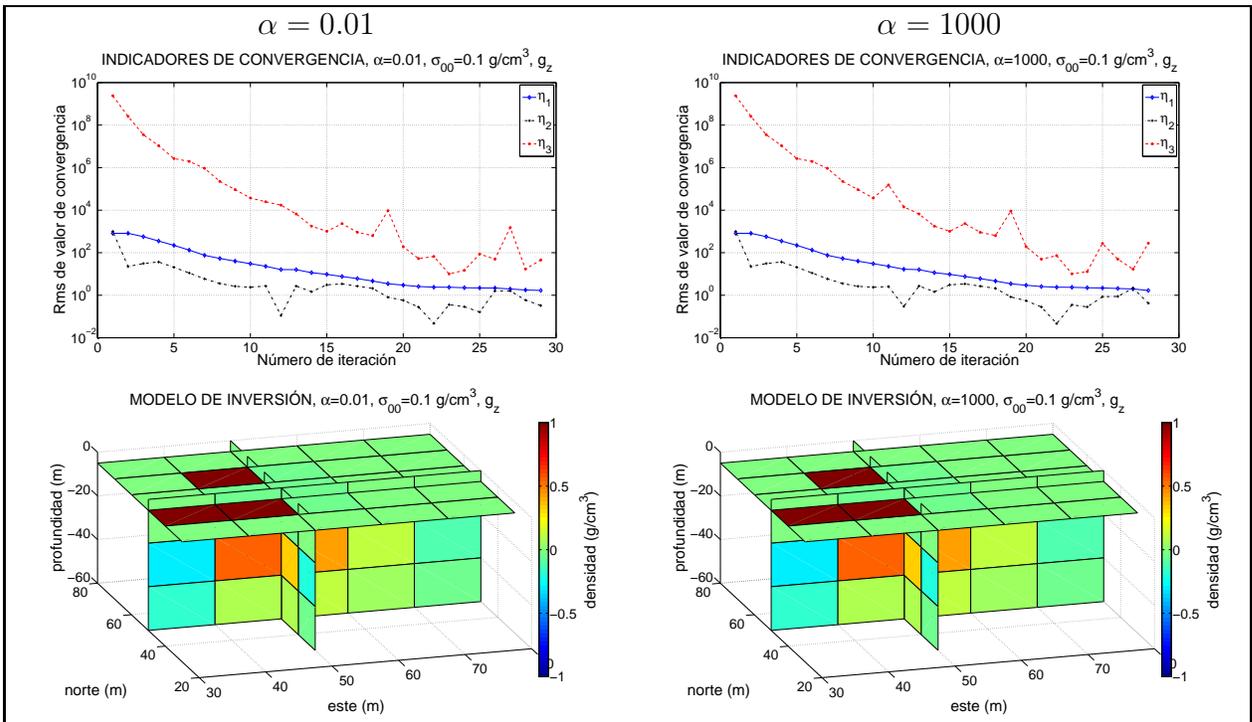


Figura 19: Comparación de los criterios de convergencia y los modelos de inversión para distintos términos de penalización α obtenidos para el experimento de inversión que incluye tres prismas anómalos y únicamente datos tipo g_z .

se observa que los resultados de ambos experimentos son muy parecidos, para $\alpha = 0.01$ el programa se detiene en la iteración 29 mientras que para $\alpha = 1000$ en la iteración 28; siendo el cumplimiento del criterio de ajuste de los datos (color azul) el que detiene al programa para ambos casos. Si bien el comportamiento general de los criterios de convergencia para los dos términos de penalización es convergente, sólo varían poco en el criterio de los gradientes conjugados. Los resultados de la inversión para los dos casos, muestra de forma clara los tres prismas activos aunque prácticamente son iguales, esto se debe a la matriz de suavidad, dado que el estencil abarca tres celdas en la dirección vertical y como, en este caso sólo tenemos los tres prismas activos en la primera capa, la matriz de suavidad prácticamente no actúa en ellos.

5.3.2. Inversión utilizando todos los elementos del tensor de gravedad y g_z

En un segundo conjunto de experimentos, se siguieron las mismas características del proceso, pero incluyendo todas las demás componentes del tensor de gravedad, por lo tanto el

número de datos es de $101 \times 101 \times 7$ que es igual a 71,407.

En la Figura 20, observamos los criterios de convergencia y los resultados de la inversión de todos los datos en conjunto con $\alpha = 0.01$ y $\alpha = 1000$. El cumplimiento del criterio de ajuste de los datos (color azul), detiene al programa en la iteración 59 para $\alpha = 0.01$ y en la iteración 57 para $\alpha = 1000$. Igual que en el caso anterior, sólo el criterio de gradientes conjugados (color rojo) presenta pequeños cambios en su comportamiento, mientras que el criterio del ajuste del modelo (color negro) no tiene cambios. Las gráficas de inversión no presentan cambios entre ellas; los prismas están bien definidos y la mayoría de los valores en los demás prismas están alrededor de cero. Este fenómeno se debe al igual que en el caso anterior, a la forma del stencil de la matriz de suavidad. Es notable en este experimento que el proceso convergió más lentamente requiriendo casi el doble de pasos iterativos que en el caso anterior. Sin embargo, esto se compensa con la definición más detallada de los prismas objetivo de la inversión. Los cuales están mucho mejor resueltos en este segundo experimento. Es de destacar que tanto el modelo apriori como las condiciones de suavidad fueron las mismas y que éstas, como se mostró en el ejemplo anterior prácticamente no actúan en las inmediaciones de los prismas objetivo. Esto significa que la diferencia es exclusivamente derivada de la cantidad de información disponible en los elementos y que la extracción de esta información por el algoritmo de gradientes conjugados es mucho más costosa que lo que lo fue el extraer la información de la componente vertical de g (g_z).

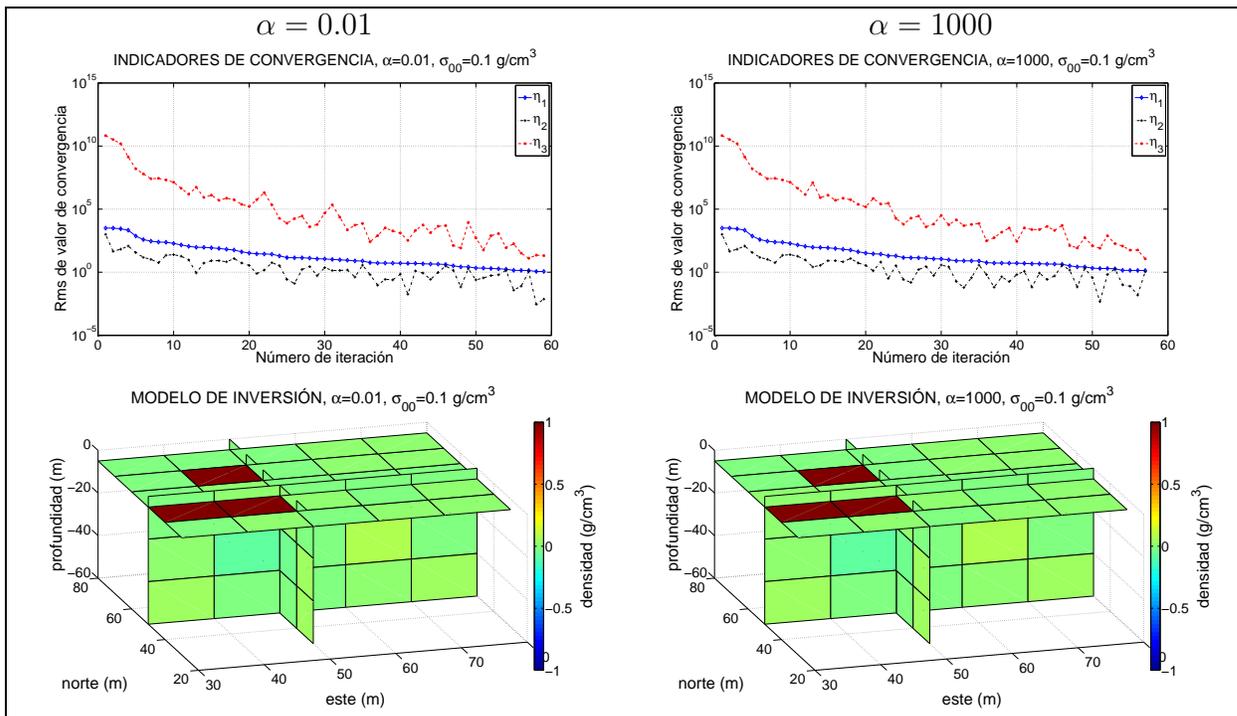


Figura 20: Indicadores de convergencia y los modelos de inversión para dos términos de penalización en un experimento de inversión que considera tres prismas anómalos y todas las componentes del tensor de gravedad además de g_z como datos de entrada para todos los elementos en conjunto.

5.4. Prismas en forma de L ubicados de la tercera a la quinta capa del modelo

Para evaluar el desempeño del algoritmo de inversión en problemas de mayor escala se propuso un modelo consistente de $25 \times 25 \times 15$ prismas rectangulares y utilizamos todos los elementos del tensor y g_z ; la dimensión de cada prisma en el plano xy es de $2 m \times 2 m$ y el espesor de cada prisma es de $4 m$. Todos los prismas tienen las mismas dimensiones. Como modelo sintético, de la tercera a la quinta capa, colocamos un cuerpo en forma de L formado con 192 prismas con una densidad de $1 g/cm^2$ en cada prisma como se ve en la Figura 21. La matriz de suavidad tiene un término de penalización $\alpha = 10$, además de una matriz de covarianza de $\sigma_{00} = 0.1 g/cm^3$. Este modelo tiene como finalidad el observar la eficiencia del programa en un problema de mayor escala, así como la contribución más detallada de los diferentes componentes del tensor de gradiente de gravedad ante un cuerpo tridimensional aislado de dimensiones finitas. El número de datos es de $101 \times 101 \times 7$ es decir, 71,407.

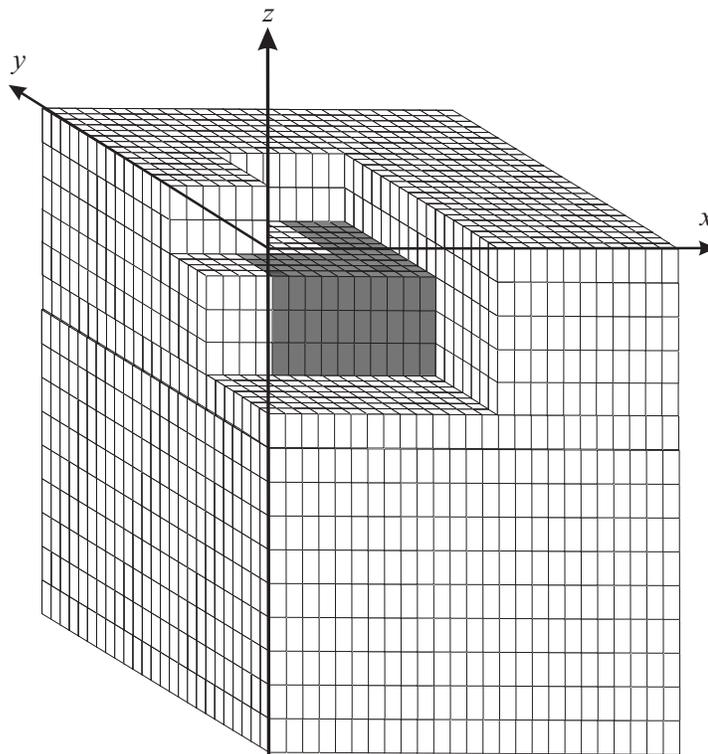


Figura 21: Gráfica del modelo inicial m_0 correspondiente al caso de un modelo con prismas con densidad de $1 g/cm^3$ en forma de L ubicados de la tercera a la quinta capa del modelo. Cada prisma tiene una dimensión de $2 m \times 2 m \times 4 m$.

La respuesta del modelo sintético para los diferentes elementos del tensor de gradiente de gravedad en este arreglo se muestra en la Figura 22, en ella observamos que el efecto del cuerpo sobre la superficie del modelo sería casi igual que el presentado por un sólo prisma a profundidad a no ser por unas pequeñas distorsiones en las líneas de los campos que podemos observar en las distintas gráficas; lo que nos indica que la forma de la anomalía deja de reflejarla geometría del cuerpo que la origina conforme éste se aleja. Igual que en el caso anterior, el efecto de este cuerpo aislado bien puede asemejarse al efecto de un objeto puntual a profundidad.

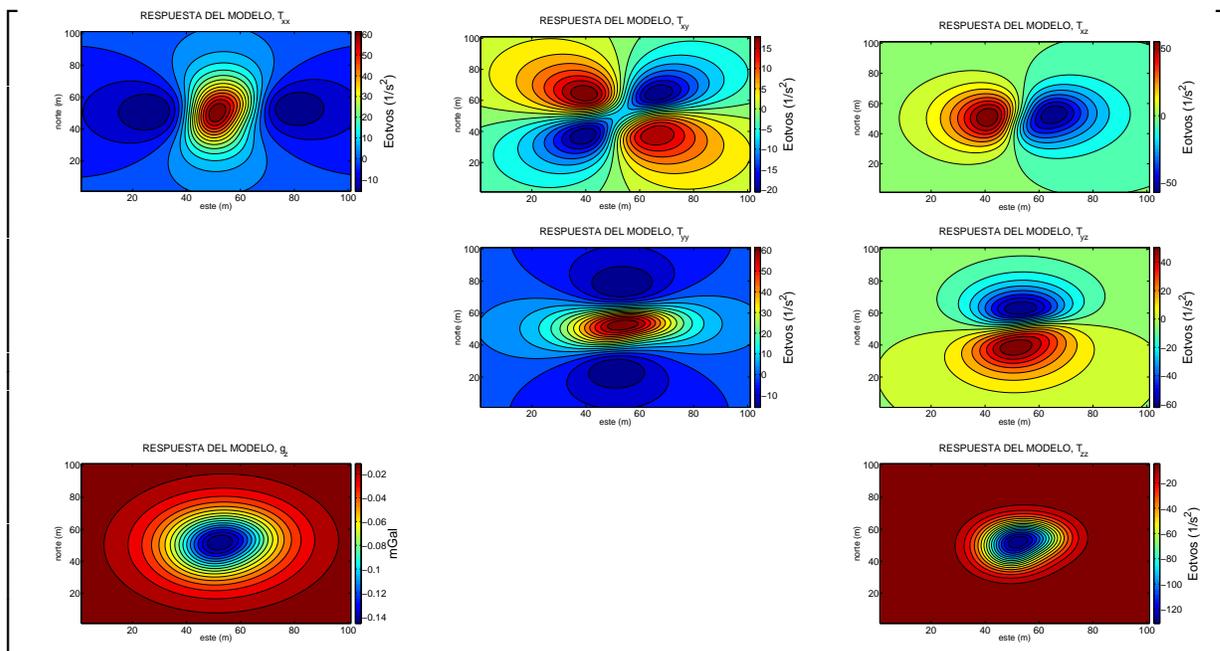


Figura 22: Respuesta del modelo correspondiente a todas las componentes del tensor de gradiente de gravedad asociado a un cuerpo de forma de “L” en el subsuelo. Nótese que ninguno de los campos refleja la forma original del cuerpo causante en el subsuelo.

La Figura 23 nos muestra los indicadores de convergencia del proceso de inversión de todos las componentes del tensor de gradiente de gravedad asociados al cuerpo en forma de L. Se observa que el programa se detiene en la iteración 13, es decir, converge rápidamente. Esta rápida convergencia tiene como causa el cumplimiento del criterio de ajuste de datos (color azul), los cuales carecían de las variaciones características de anomalías asociadas a cuerpos más complejos. El criterio de los gradientes conjugados (color rojo), decae rápidamente durante todo el proceso y el criterio de convergencia del modelo (color negro), decae también

de manera rápida, aunque presenta una oscilación en su valor alrededor de la iteración 10.

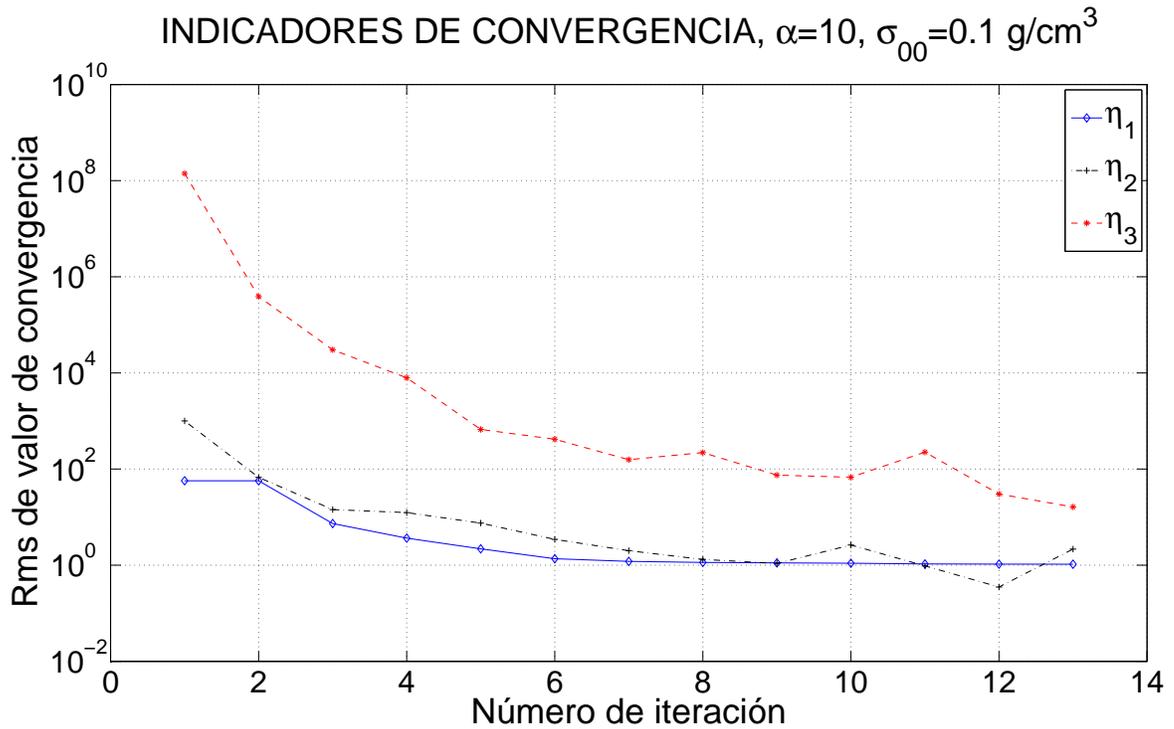


Figura 23: Gráfica de convergencia del proceso de inversión correspondiente al caso de un modelo con prismas en forma de L ubicados en el centro del modelo. El eje de las ordenadas está en escala logarítmica.

La Figura 24 nos muestra una vista en perspectiva resultado de la inversión de este esquema, la escala de valores mostrada en la parte derecha de la gráfica se encuentra entre -1 g/cm^3 y 1 g/cm^3 . Claramente, con esta escala no es posible definir un cuerpo aislado, además, todos los valores mostrados están muy cercanos a cero. Una primer conclusión de este experimento sería que el factor de peso de la función de suavidad es muy alto, lo que lleva a un modelo resultante carente de heterogeneidades. Esta conclusión, sin embargo, se puede descartar fácilmente al observar que el modelo realmente ajusta los datos como lo ilustra la Figura 24, significando esto que el proceso de inversión realmente encontró un modelo que satisface todas las condiciones impuestas. Para indagar esta conclusión, antes de proceder a otros experimentos nos permitimos analizar las características del modelo obtenido con más detalle.

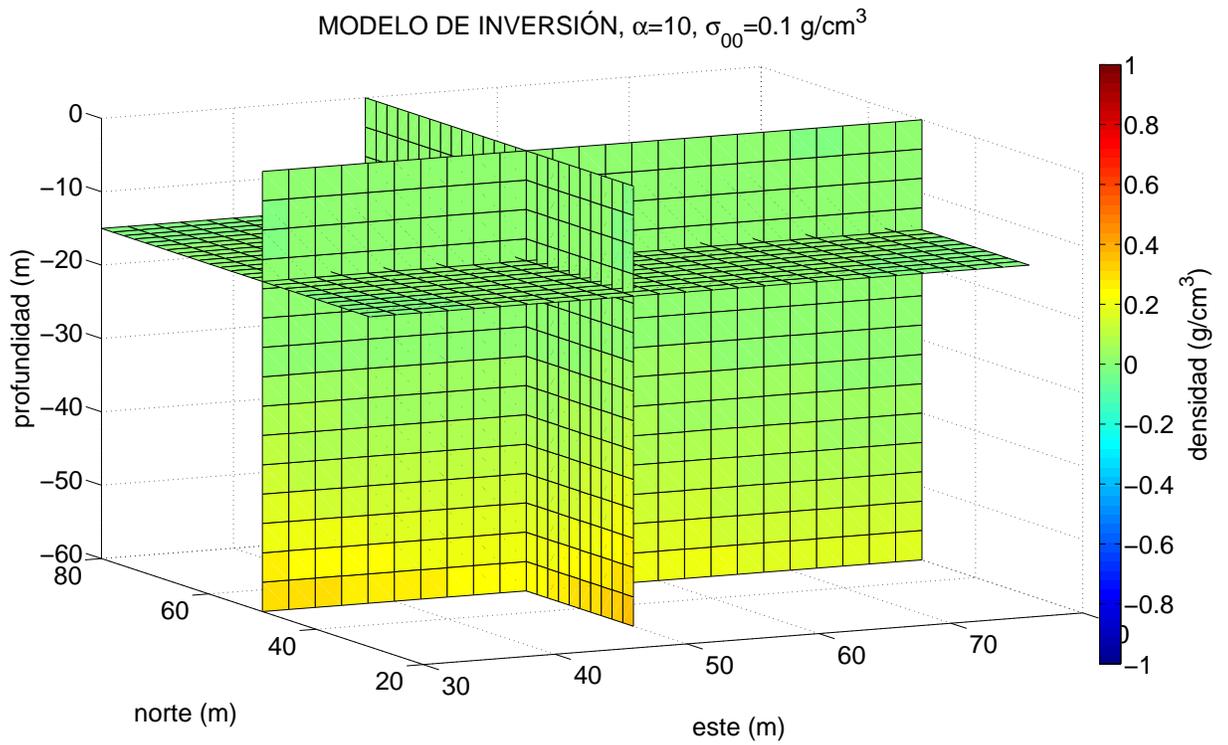


Figura 24: Modelo de densidades obtenido después de la inversión de los datos mostrados en la Figura 22, asociado a un conjunto de prismas prismas en forma de L ubicados en el centro del modelo con una escala de valores de densidad de -1 a 1 g/cm^3 .

Primeramente, para que el modelo pueda ajustar los datos, es necesario que este tenga heterogeneidades. Para analizar esto con más detalle, los límites de la escala de valores entre -0.01 g/cm^3 y 0.01 g/cm^3 . Después de llevar a cabo este acercamiento de la escala, tenemos que entre las capas tercera y quinta existe una agrupación de valores positivos (en donde originalmente se propuso la heterogeneidad del modelo sintético) y alrededor de ésta los valores son positivos y cercanos a cero. Después de estas capas, los valores positivos se prolongan hasta el fin del modelo. Es decir, nuestro programa trabaja correctamente y la baja resolución tanto lateral como en profundidad se debe al débil efecto del campo de gradiente de gravedad que estos producen (ver Figura 25).

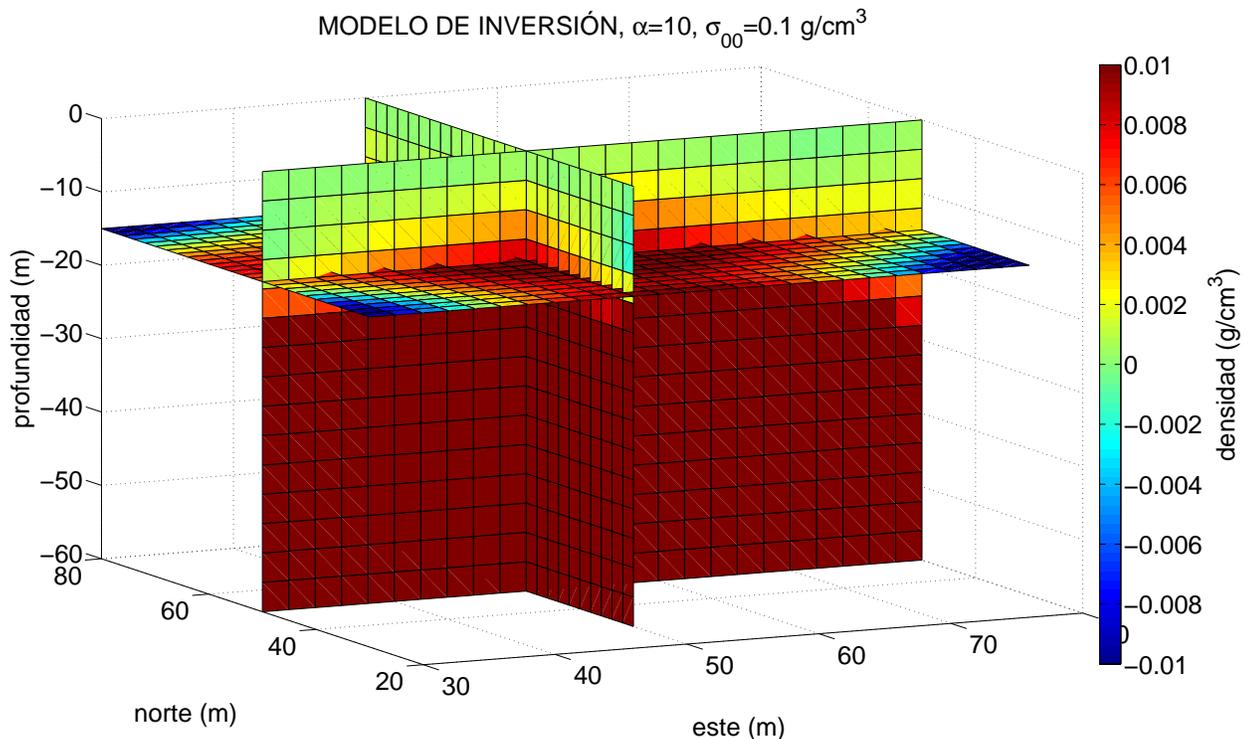


Figura 25: Modelo de densidades obtenido después de la inversión de los datos mostrados en la Figura 22, asociado a un conjunto de prismas en forma de L ubicados en el centro del modelo con escala de valores de densidad de -0.01 a 0.01 g/cm^3 .

5.5. Experimento para un cuerpo en forma de L ubicado de la primera a la tercera capa

Dados los resultados del experimento anterior, procedimos a proponer un modelo con un cuerpo aislado (en forma de L) pero a una profundidad menor. En este caso, esperamos que

la cercanía entre los datos y el cuerpo nos permita determinar mejor su geometría en el experimento de inversión. El modelo utilizado en este apartado tiene el mismo número de celdas en el plano xy , pero varía en el número de capas, en este caso siete con un espesor de 8 m cada capa, es decir, 192 prismas con una densidad de 1 g/cm^3 , y está localizado en las primeras tres capas del modelo (ver Figura 26). Para este modelo también se generaron datos sintéticos de g_z y de cada una de las componentes del tensor de gradiente de gravedad. A estos datos se les agregó nuevamente ruido aleatorio de distribución gaussiana y se utilizaron para llevar a cabo dos experimentos de inversión: uno empleando exclusivamente datos de g_z y otro empleando todas las componentes del tensor de gradiente de gravedad. El número de datos para el caso de inversión de g_z es de $101 \times 101 \times 1$, es decir, 10201 y para el experimento con todos los elementos del tensor de gravedad y g_z es de $101 \times 101 \times 7$ es decir, 71,407. En la Figura 22 de los datos generados, es de notar que los mapas de las diferentes anomalías reflejan más fielmente la geometría del cuerpo original propuesto, y por lo tanto se espera que estos experimentos permitan estudiar el desempeño del programa de inversión con respecto a la resolución lateral de cuerpos someros.

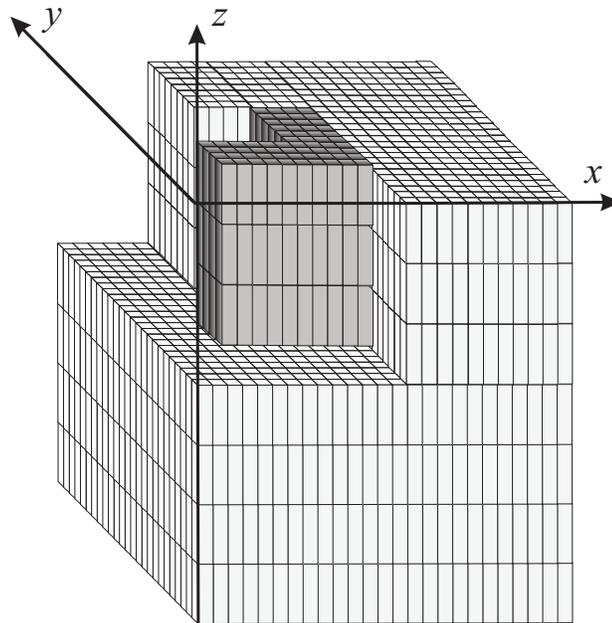


Figura 26: Gráfica del modelo inicial m_0 correspondiente al caso de un modelo con prismas con densidad de 1 g/cm^3 en forma de L ubicados de la primera a la tercera capa. Cada prisma tiene una dimensión de $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 8\text{ m}$.

5.5.1. Inversión utilizando g_z

La Figura 27, muestra los valores obtenidos de los indicadores de convergencia para g_z y nos indica que el programa tuvo una convergencia rápida ya que se detuvo en la iteración 70 (comparado con los $25 \times 25 \times 7$ prismas que componen la totalidad del modelo); el indicador del ajuste de los datos (color azul), muestra un comportamiento asintótico y su valor decrece sistemáticamente con el número de iteración. Indicando que el algoritmo evoluciona positivamente al encontrar modelos que incrementan el ajuste en los datos. El indicador relacionado a los gradientes conjugados (color rojo), decae rápidamente, sin embargo, a partir de la iteración 19 presenta variaciones más irregulares; en cambio, el criterio del ajuste del modelo (color negro), inmediatamente presenta variaciones mayores y sigue así durante todo el proceso.

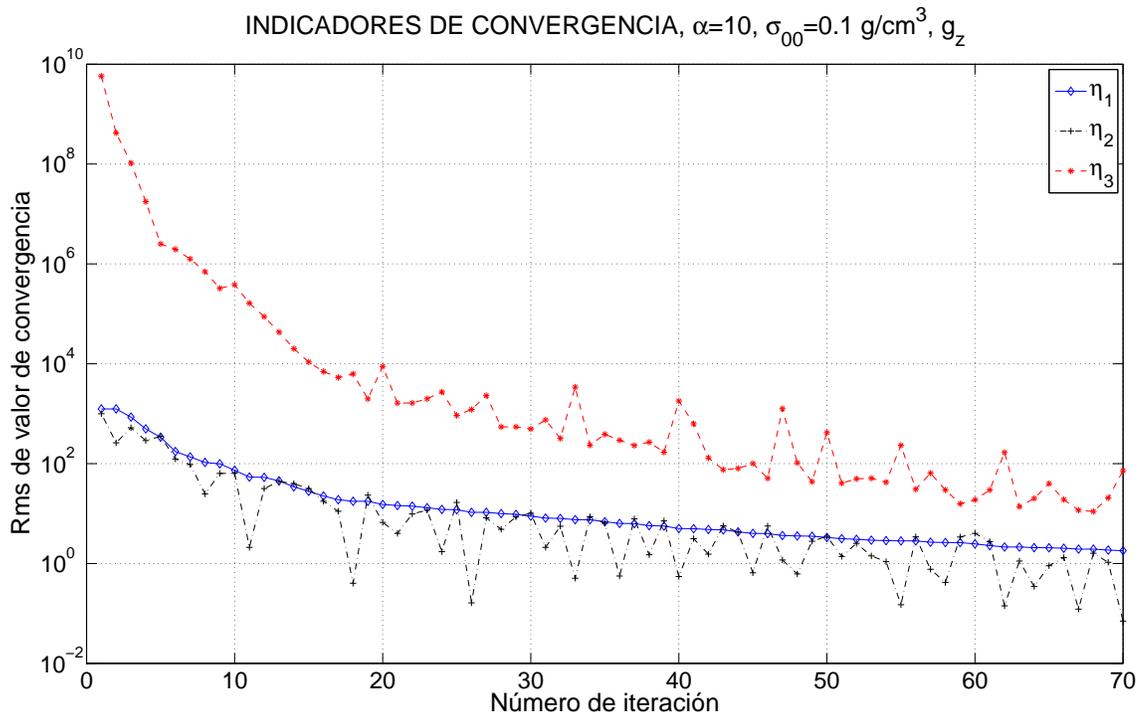


Figura 27: Gráfica de convergencia del proceso de inversión correspondiente al caso de un modelo con prismas en forma de L ubicados las capas superficiales del modelo para g_z . El eje de las ordenadas está en escala logarítmica.

La Figura 28 muestra el modelo final obtenido en la iteración 70 empleando una escala de colores que van de 1 g/cm^3 a -1 g/cm^3 . En esta gráfica observamos que el contorno de nuestro cuerpo está bien delineado, sin embargo, existe una región alrededor de los prismas

que corresponde a valores negativos de densidad (color azul). Después de esta región de valores negativos, el resto de la capa superficial del modelo se comporta adecuadamente.

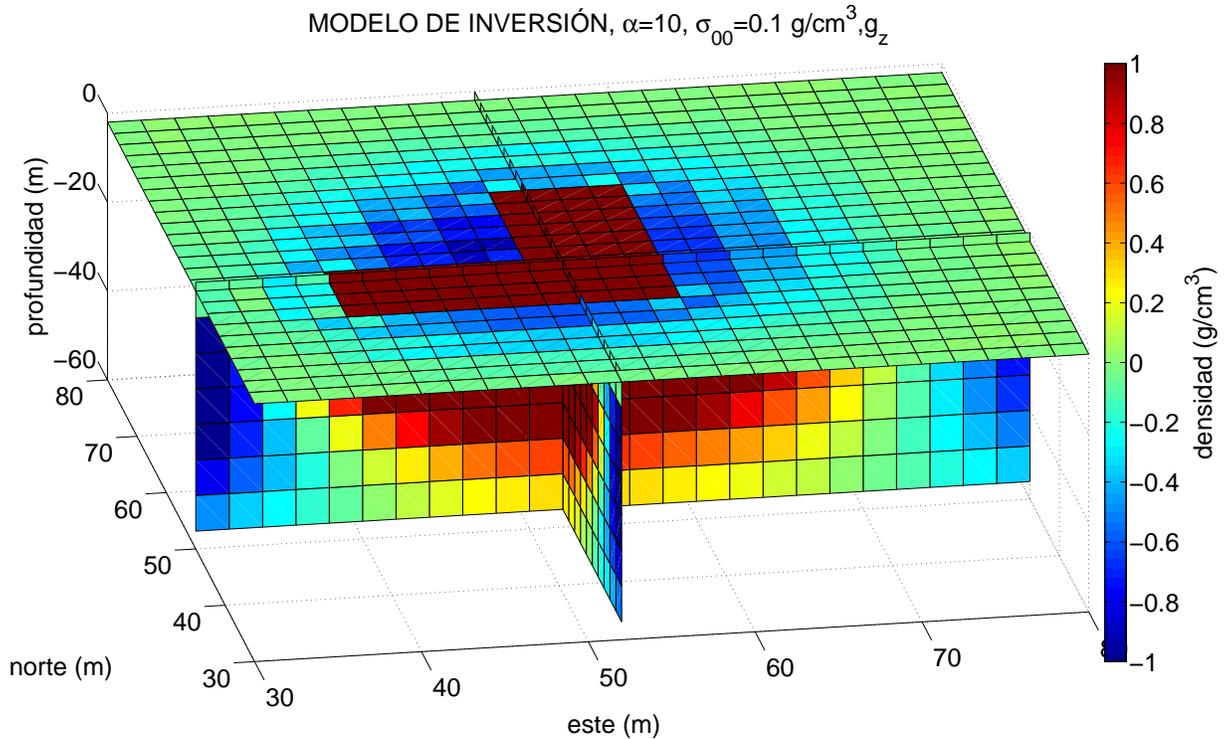


Figura 28: Modelo de densidades obtenido después de la inversión de los datos mostrados en la Figura 22 para g_z , asociado a un conjunto de prismas en forma de L ubicados en las capas superficiales del modelo con escala de valores de densidad de -1 a 1 g/cm^3 .

La Figura 29 también nos muestra una vista en profundidad del modelo de inversión y notamos que, los valores debajo de las primeras tres capas van decreciendo su densidad gradualmente, hasta llegar a tener valores negativos en los bordes laterales del modelo y a profundidad. Notablemente, los valores de densidades positivas debajo de estas capas tienden a agruparse en el centro del modelo, donde el cuerpo de prueba se encontraba originalmente. Lo anterior puede deberse al factor de suavidad $\alpha = 10$ que promueve la formación de una tendencia monótonica de disminución de la densidad con la distancia.

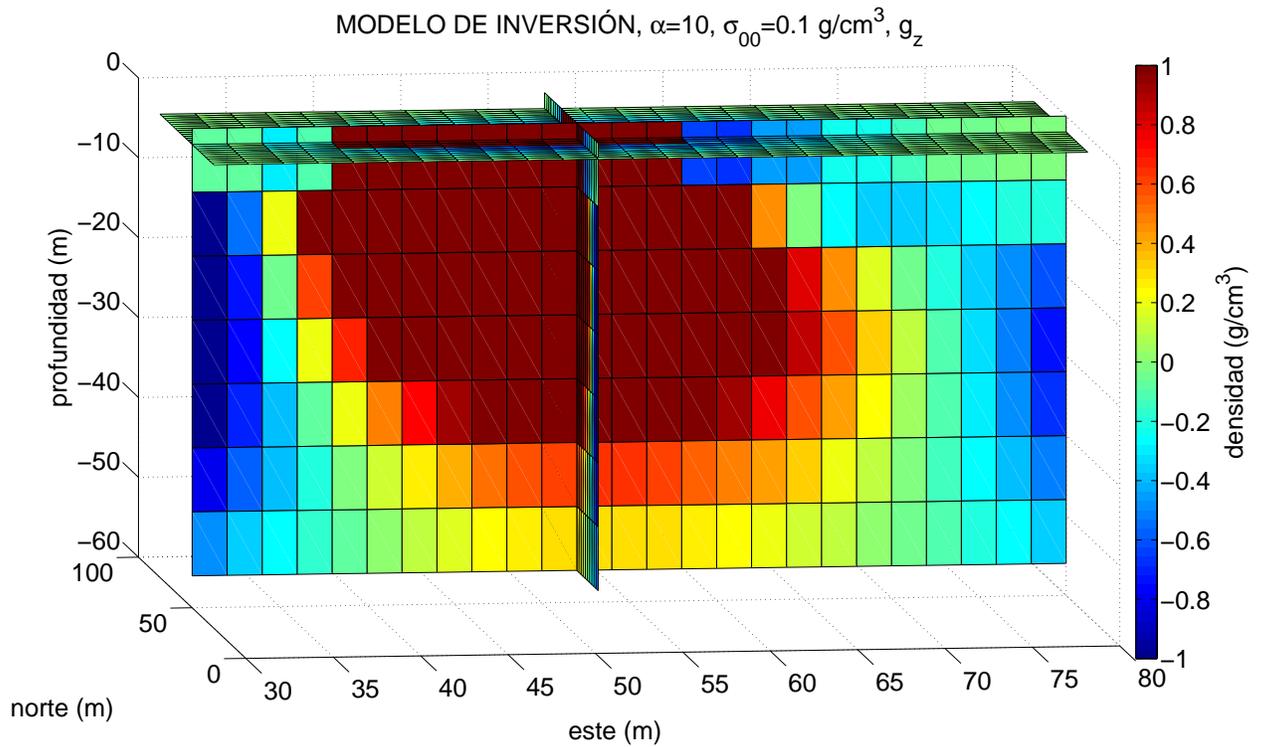


Figura 29: Modelo de densidades obtenido partir de los datos generados por una heterogeneidad en forma de L ubicada en las primeras capas del modelo sintético.

5.5.2. Inversión utilizando todos los elementos del tensor de gravedad y g_z

El siguiente experimento corresponde a la inversión de todos los datos del tensor de gradiente de gravedad en conjunto. En este caso, vemos que el programa se detiene en la iteración 1233, una vez que el indicador de convergencia del residual de gradientes conjugados que alcanza el valor límite propuesto (color rojo) (ver Figura 30). Es notable que en las primeras setenta iteraciones, el indicador de ajuste de datos decae rápidamente, pero después de ahí, decae lentamente hasta el fin del proceso. Los otros dos criterios tienen un comportamiento similar, sin embargo, se mantienen oscilantes durante el resto del proceso.

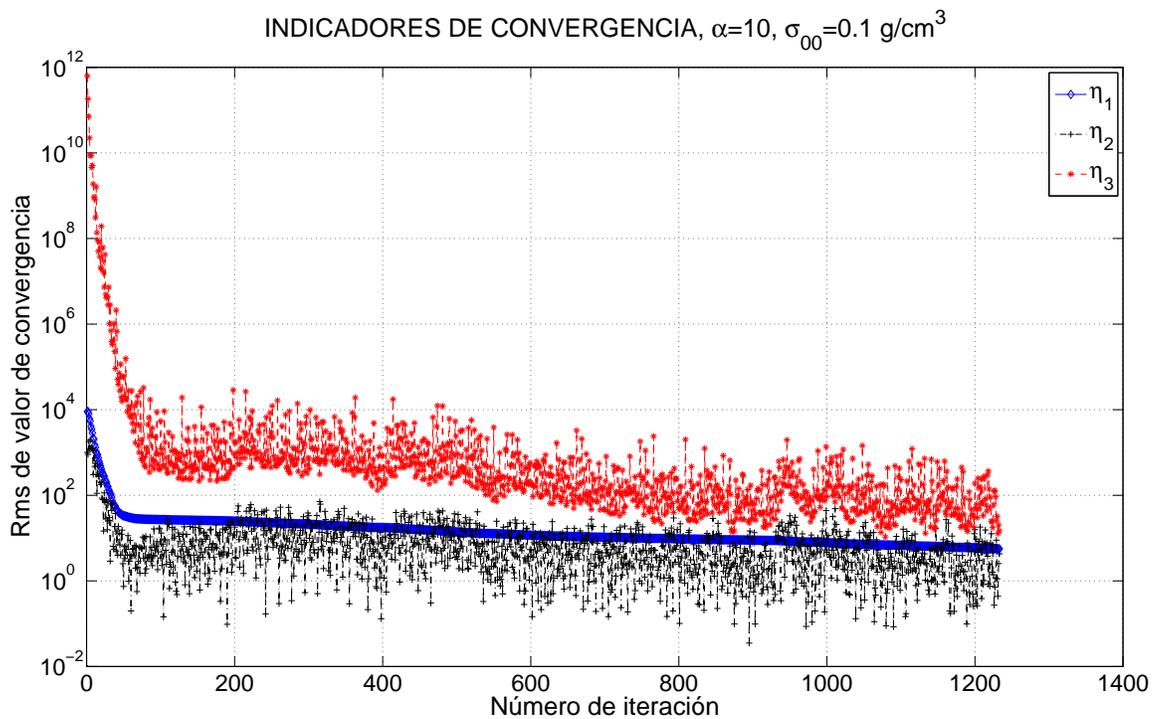


Figura 30: Gráfica de convergencia del proceso de inversión correspondiente al caso de un modelo con prismas en forma de L ubicados las capas superficiales del modelo para todos los elementos en conjunto. El eje de las ordenadas está en escala logarítmica.

El modelo obtenido de la inversión de todos los datos del tensor de gradiente de gravedad se muestra en la Figura 31. El modelo obtenido, nos muestra el conjunto de prismas de densidad unitaria en la capa más superficial completamente coincidentes con la posición de los prismas en el modelo sintético original. Al igual que el caso de la inversión de datos g_z existe una región de valores negativos que rodea a los prismas, sin embargo, es más tenue

con respecto al caso anterior y decae gradualmente con la distancia.

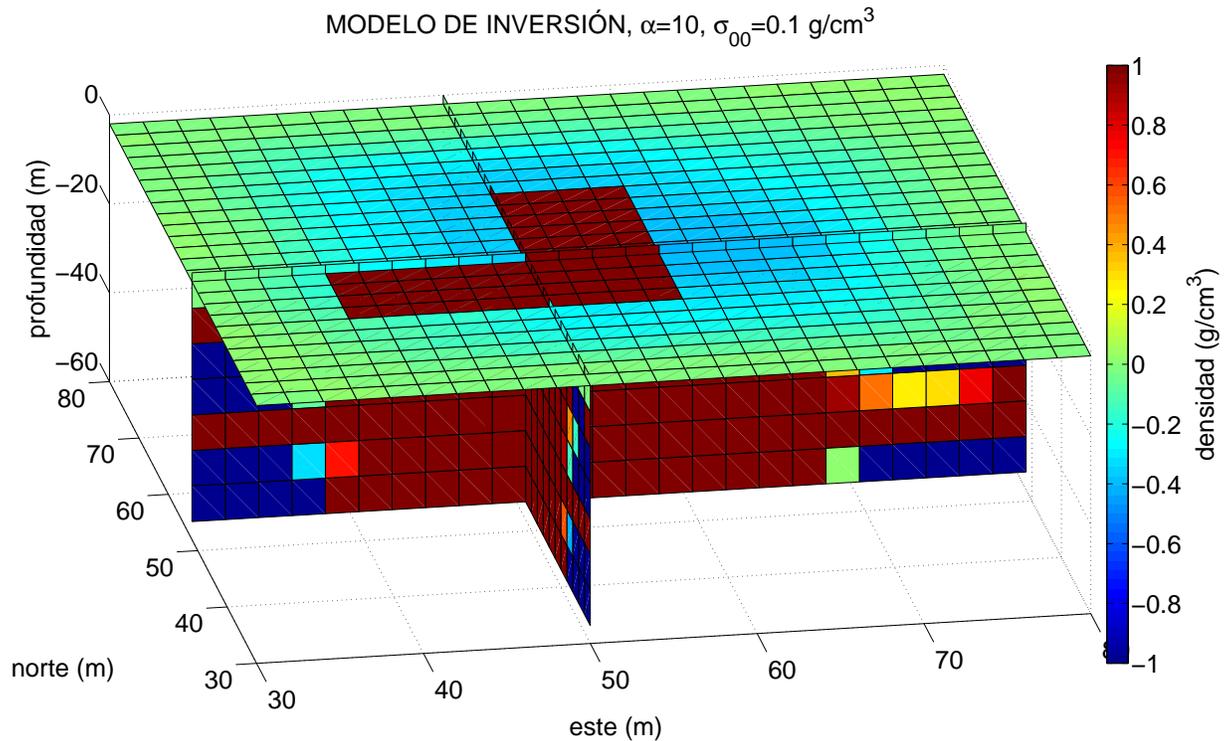


Figura 31: Modelo de densidades obtenido por la inversión de datos del tensor de gradiente de gravedad además de la componente vertical del vector de gravedad generados para un cuerpo en forma de L ubicado en las capas superficiales del modelo con escala de valores de densidad de -1 a 1 g/cm^3 .

En la Figura 32, se muestra una sección en profundidad del modelo de la Figura 26; la zona correspondiente a los prismas superficiales se ubica en el lugar exacto de acuerdo al modelo sintético. Sin embargo, a partir de la segunda capa, observamos que el modelo no está bien definido. En este ejemplo la falta de continuidad del modelo a profundidad se puede atribuir al efecto combinado del mayor peso asignado al ajuste de los datos geofísicos (por su cantidad) y a la pérdida de su resolución con la profundidad.

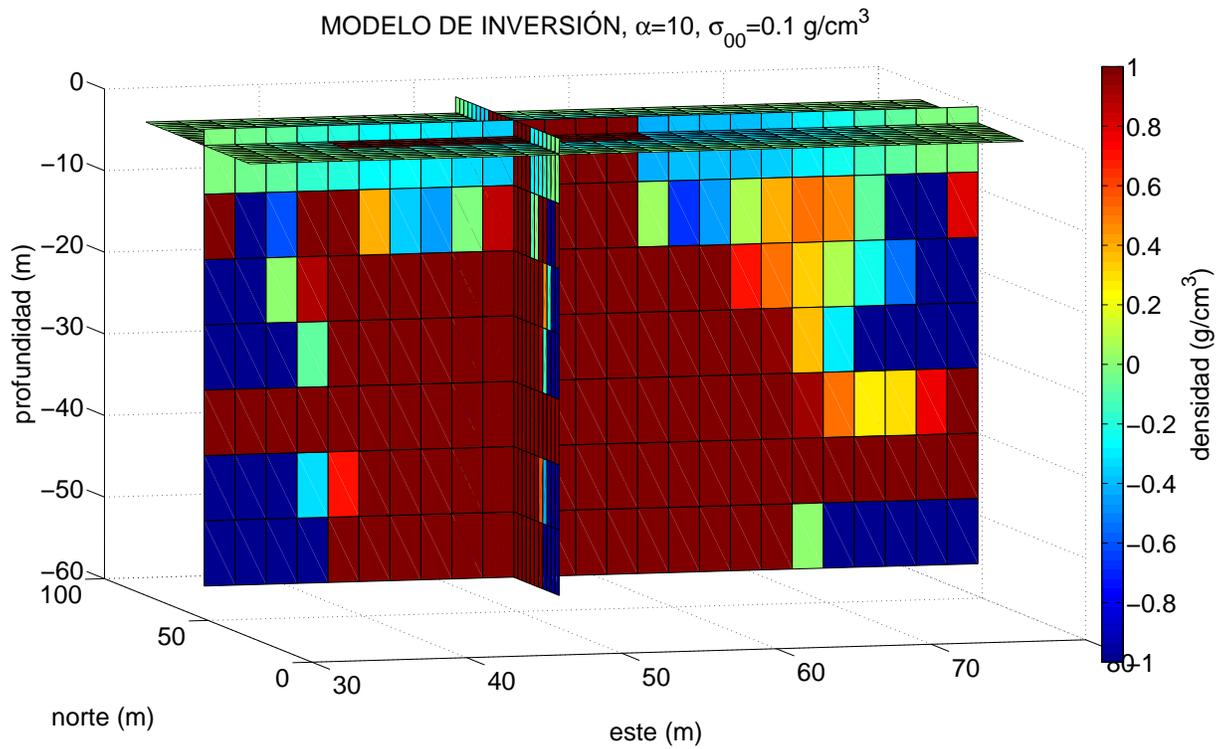


Figura 32: Sección vertical del modelo obtenido de la inversión de todos los datos del tensor de gravedad asociados a un cuerpo en forma de L ubicados en las primeras capas del modelo. Los valores de densidad son escalados de -1 a 1 g/cm^3 para todos los elementos.

5.6. Experimento para un cuerpo en forma de L ubicado la superficie de un modelo de capas de ocho metros de espesor

Con base a los resultados del modelo precedente y con el objetivo de explorar la sensibilidad a los cambios de profundidad, conservamos el modelo anterior con una heterogeneidad conformada por un grupo de prismas de densidad unitaria distribuidos en forma de L pero realizamos el cambio tanto en el número de capas (15 en este caso) y la dimensión de las capas a un espesor de 8 m , como vemos en la Figura 33; además, cambiamos el valor del término de penalización a $\alpha = 1000$. El número de datos es de $101 \times 101 \times 7$, es decir, 71,407 pues se utilizan todos los elementos del tensor y g_z .

La Figura 34 nos muestra los valores de convergencia para este caso; de nueva cuenta, el indicador del ajuste de datos (color azul) logra llegar a su objetivo, en este caso, en la iteración 607. Se observa que desde el inicio del proceso hasta aproximadamente la iteración 50 en que el valor de este índice decae rápidamente y a partir de ahí decae lentamente. Un comportamiento similar salvo variadas oscilaciones, tiene el criterio de los gradientes conjugados (color rojo); el criterio del ajuste del modelo (color negro) presenta oscilaciones mayores durante todo el proceso, indicando cierta inestabilidad en la búsqueda del modelo óptimo.

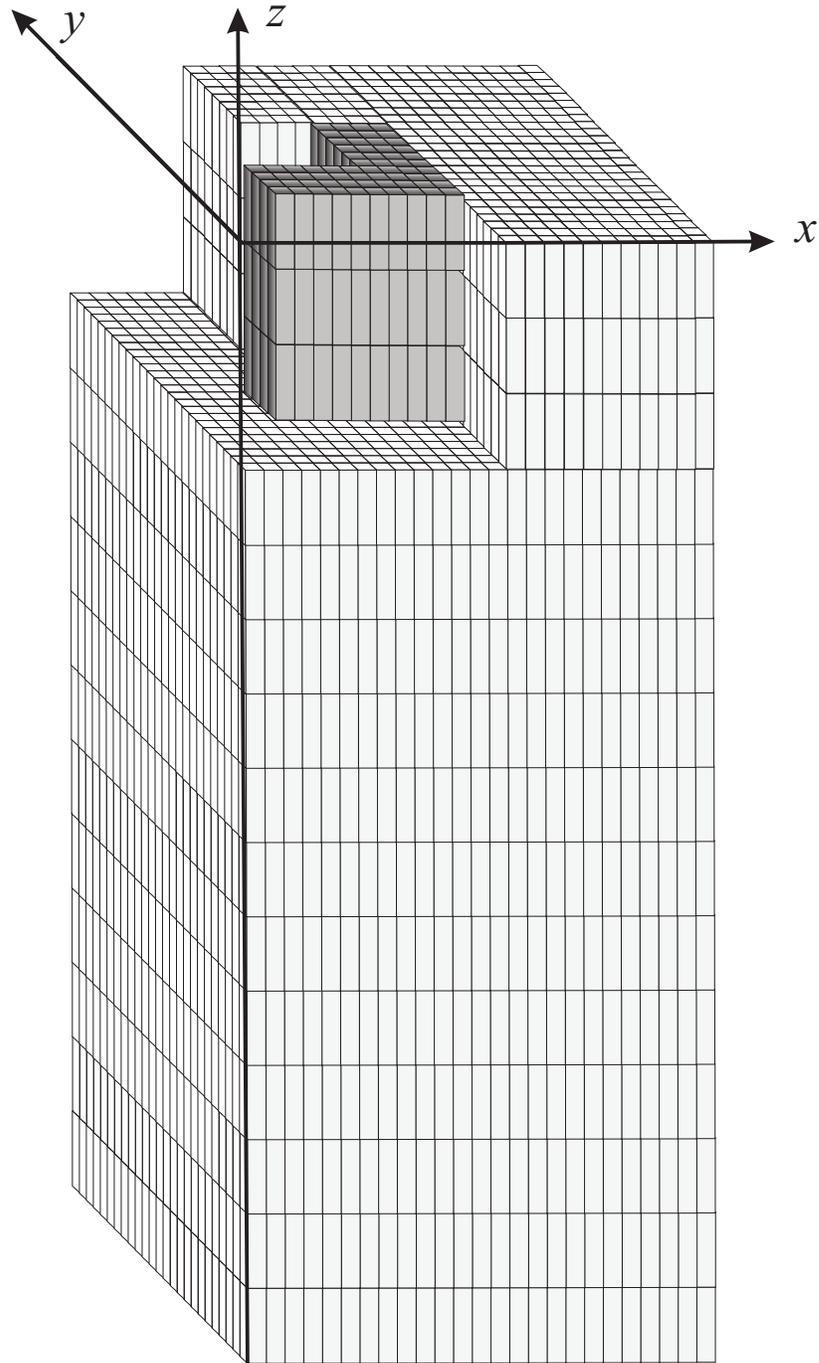


Figura 33: Gráfica del modelo inicial m_0 correspondiente al caso de un modelo con prismas con densidad de 1 g/cm^3 en forma de L ubicados de la primera a la tercera capa. El modelo tiene 15 capas y cada prisma tiene una dimensión de $2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 8 \text{ m}$.

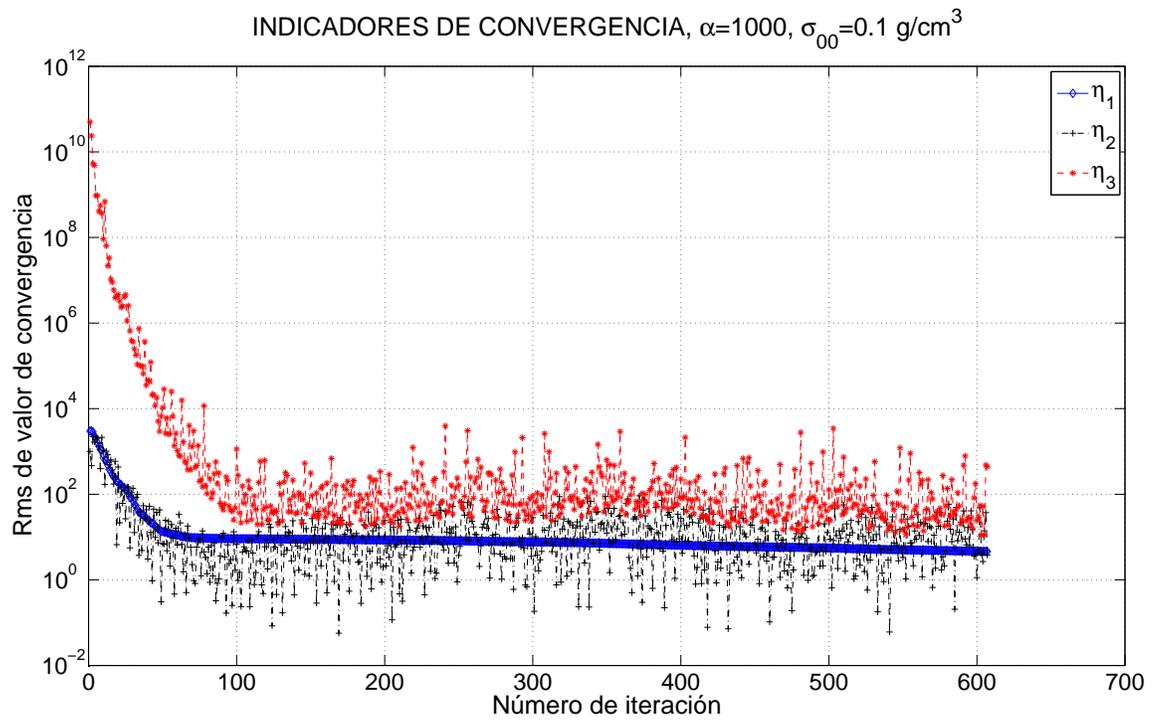


Figura 34: Gráfica de convergencia del proceso de inversión de los datos de tensor de gradiente de gravedad generados por un modelo con una heterogeneidad en forma de L ubicada en las capas superficiales del modelo. El modelo está conformado por 15 capas de profundidad de 8 m de espesor. El eje de las ordenadas está en escala logarítmica.

En la Figura 35, observamos que como en los casos anteriores, la región de los prismas activos está claramente definida. También se observa que los valores de densidad son menores que en casos anteriores y que existe una región alrededor de la misma con valores de densidad mucho menores que en los experimentos con prismas de mayor espesor. La región fuera de las dos anteriores, tiene valores de densidad cercanos a cero y concuerdan con lo definido anteriormente.

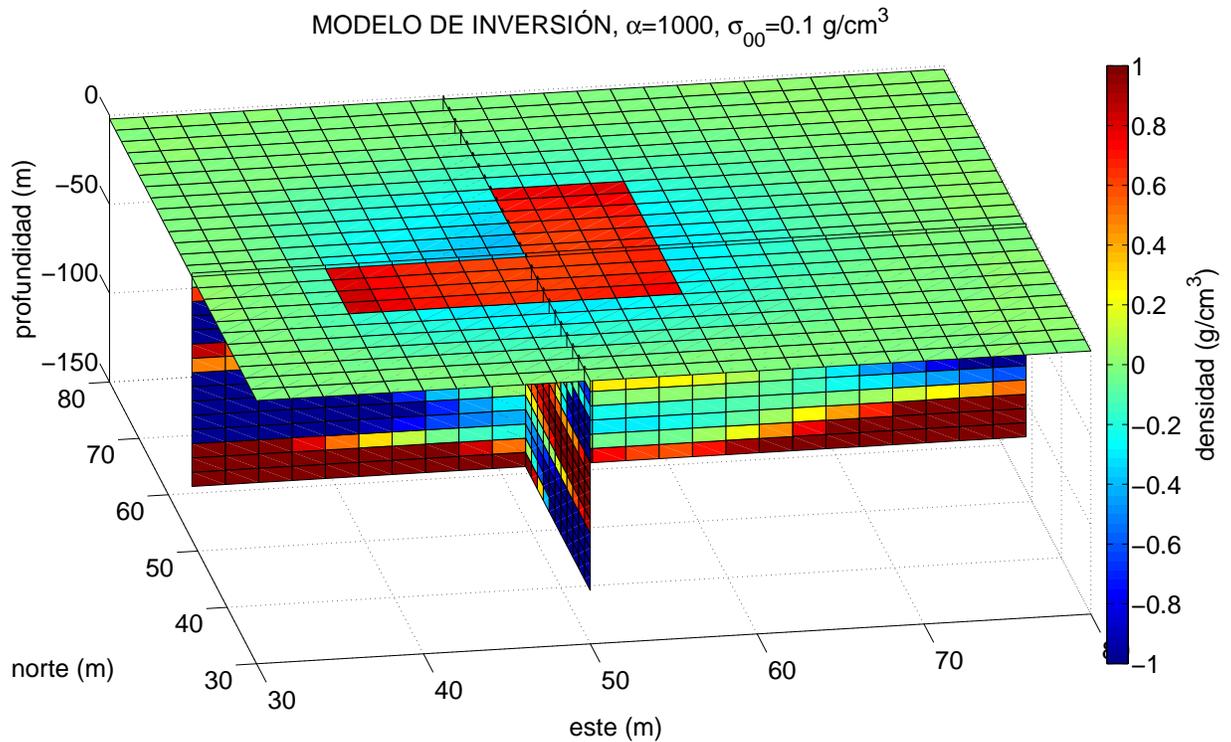


Figura 35: Modelo de densidades obtenido de la inversión de todos los componentes del tensor de gradiente de gravedad obtenidos para un modelo de un cuerpo aislado en forma de L ubicado en las capas superficiales del modelo con escala de valores de densidad de -1 a 1 g/cm^3 . El espesor de todas las capas del modelo es de 8 m .

Una sección a profundidad del modelo obtenido de la inversión se muestra en la Figura 36. En ella podemos observar la forma en que los valores debajo de la primera capa, forman regiones de densidad consistente de los mismos. También se observa que, los valores correspondientes al conjunto de prismas a mayor profundidad se comportan de manera sistemática variando gradualmente de la zona debajo de la heterogeneidad propuesta originalmente hacia los bordes del modelo observándose una región de valores cercanos a uno entre la tercera y la sexta capa. Este comportamiento puede justificarse con la suavidad regulada por el factor

de suavidad α y la falta de acción de esta suavidad en las capas a los bordes del modelo, donde el operador de suavidad no se aplica. En todos los casos es claro que la resolución de rasgos del modelo a profundidad no es muy buena.

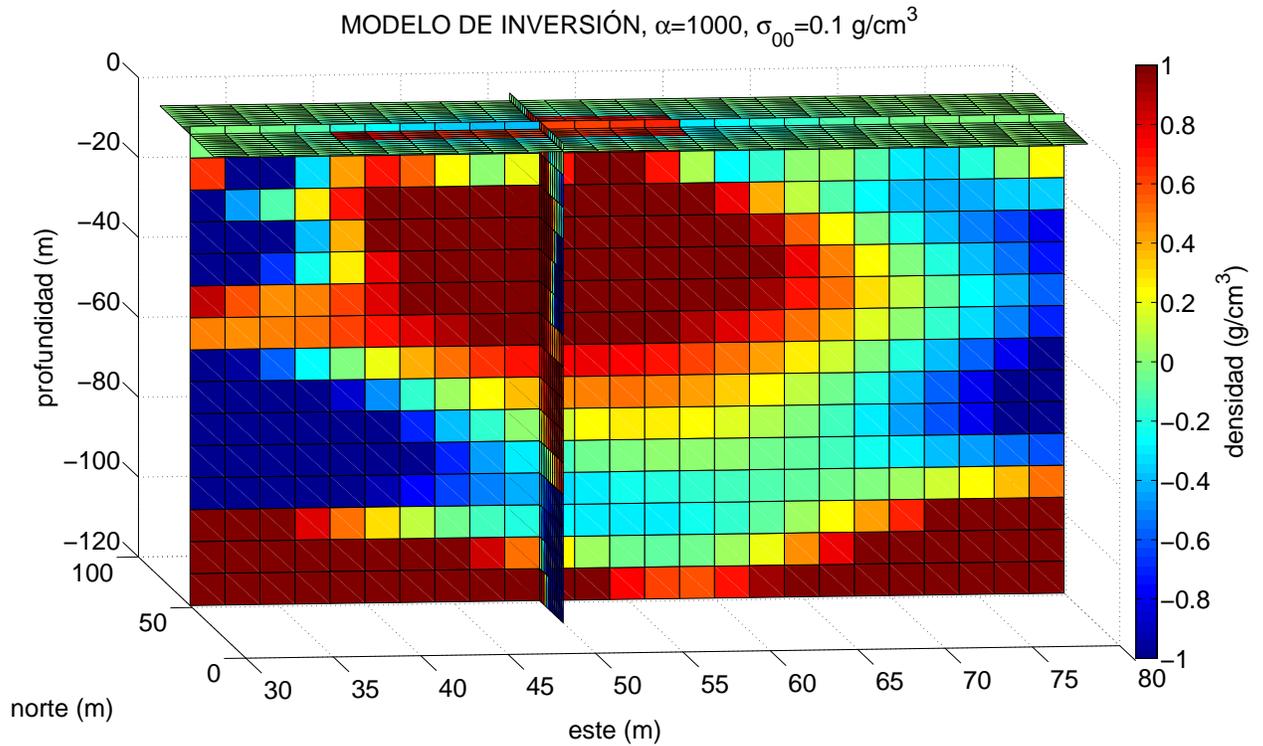


Figura 36: Sección vertical del modelo de densidades obtenido de la inversión de los datos del tensor de gravedad debidos a un cuerpo hipotético en forma de L ubicado en las primeras capas del modelo. Todas las capas del modelo tienen un metro de espesor y la sección esta representada en una escala de valores de densidad de -0.01 a 0.01 g/cm^3 .

5.7. Modelo en forma de tablero de ajedrez con capas de 4m

El siguiente modelo de prueba es planteado en forma de tablero de ajedrez y tiene como finalidad explorar la resolución espacial de los datos en el proceso de inversión. El tablero de ajedrez consiste en un arreglo de $27 \times 27 \times 15$ prismas. 27×27 celdas en el plano xy con dimensiones de $2m \times 2m$ y 15 capas con un espesor de $4m$ cada una. Para darle la forma de tablero de ajedrez, agrupamos los prismas en cuerpos homogéneos de $3 \times 3 \times 3$ prismas con la misma densidad, alternándose con prismas de densidad diferente. El primer grupo, al cual se le asignó una densidad de $1 g/cm^3$ corresponde a los primeros tres prismas de la esquina inferior izquierda sobre el eje x y a los primeros tres prismas sobre el eje y , además se toman las primeras tres capas del modelo para formar nuestro grupo de prismas; el segundo grupo de prismas es adyacente al anterior, tiene las mismas dimensiones pero una densidad de $-1 g/cm^3$, como vemos en la Figura 37. Debajo de cada grupo de densidades existe un grupo con densidad distinta; debajo de este segundo grupo existe un tercer grupo de densidad distinta a la del segundo grupo y así sucesivamente para todo el modelo de tal forma que dos grupos con igual densidad no sean vecinos. Con este modelo se calculó su campo de gravedad vertical, así como cada una de las componentes del tensor de gradiente de gravedad sobre un plano de datos equiespaciado a un metro arriba de la última capa del modelo y extendiéndose lateralmente 30 metros más allá del borde del modelo del subsuelo. El término de penalización de $\alpha = 10$ y una matriz de covarianza diagonal con desviación estándar $\sigma_{00} = 0.1 g/cm^3$ para cada prisma del modelo. El número de datos es de $101 \times 101 \times 7$ es decir, 71,407 pues se utilizan todos los elementos del tensor y g_z .

La Figura 38, nos muestra la respuesta del modelo sobre la primera capa para todos los elementos. Como en gráficas anteriores, la gráfica de g_z se ilustra en la esquina inferior izquierda del arreglo. En cada una de las componentes del tensor podemos observar las variaciones asociadas al modelo tipo tablero de ajedrez; observamos también que existen valores distintos de cero fuera de los límites del modelo, debido a que los prismas perimetrales no tienen en su frontera algún elemento que interactúe con los mismos, cosa que es distinta en el interior de la región, cuyas líneas de contorno están muy cercanas.

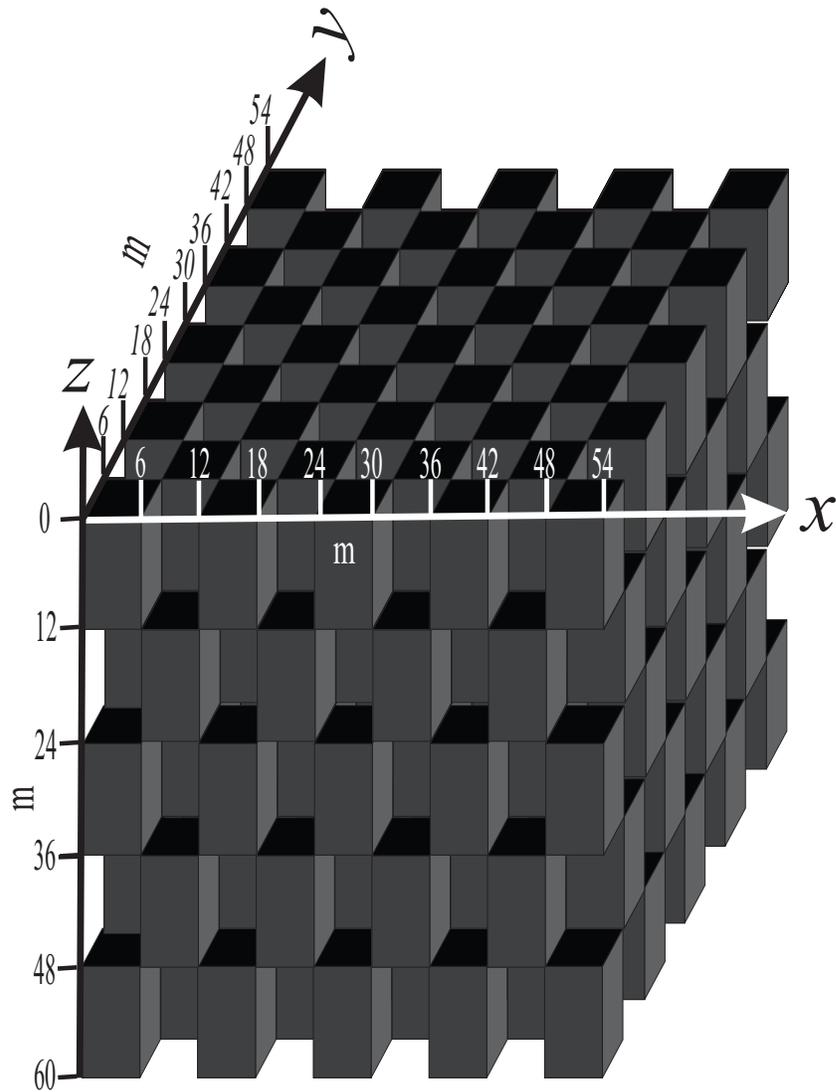


Figura 37: Gráfica del modelo inicial m_0 correspondiente al caso de un modelo tipo de tablero de ajedrez con prismas con densidad de 1 g/cm^3 y -1 g/cm^3 . El modelo tiene 15 capas y cada prisma tiene una dimensión de $2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 4 \text{ m}$. Los grupos de prismas con densidad positiva se encuentran en gris.

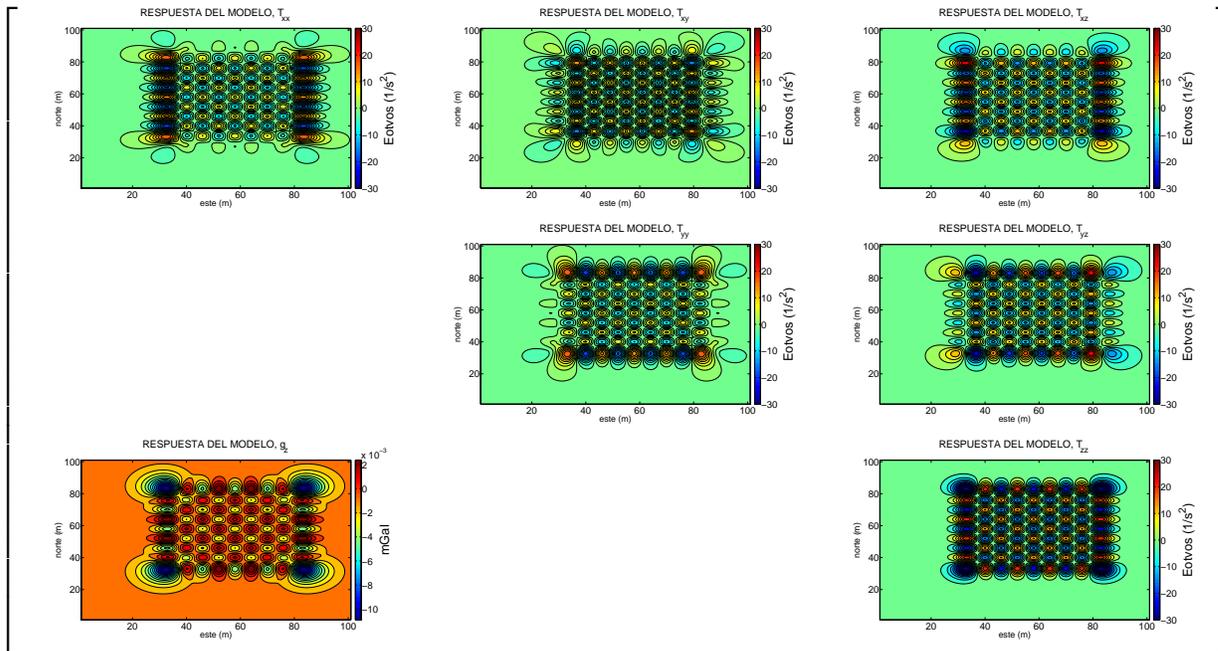


Figura 38: Respuesta del modelo $A_{m_{sint}}$ para las distintas componentes del tensor de gradiente de gravedad y de campo de gravedad vertical debido a un modelo con arreglo en forma de tablero de ajedrez.

El comportamiento de los indicadores de convergencia se muestra en la Figura 39. En esta gráfica se puede observar que el programa se detuvo en la iteración 98 cuando el modelo resultante satisfizo al criterio impuesto sobre el ajuste de los datos. A diferencia de los experimentos anteriores, el índice de ajuste del modelo se mantuvo oscilante durante todo el proceso. De la misma manera, el índice de convergencia de los gradientes conjugados se muestra inestable a partir de la quinta iteración.

La Figura 40, nos muestra una sección en profundidad del resultado de la inversión de todos los datos en conjunto para el tablero de ajedrez. La escala de valores va de 1 g/cm^3 a -1 g/cm^3 donde el máximo valor positivo de densidad corresponde al color rojo y a su contraparte negativa le corresponde el color azul. La primeras dos capas tienen una resolución aceptable dado que, aunque las tonalidades son distintas, caen en el rango de los valores predefinidos y se alternan de forma adecuada. No sucede lo mismo con las demás capas que no presentan buena resolución, pues, al menos esperaríamos que la tercera capa delimitara las mismas heterogeneidades que las dos primeras, cosa que no sucede. Es decir, no tenemos resolución en profundidad, quizá debido al decaimiento de los datos del gradiente de gravedad

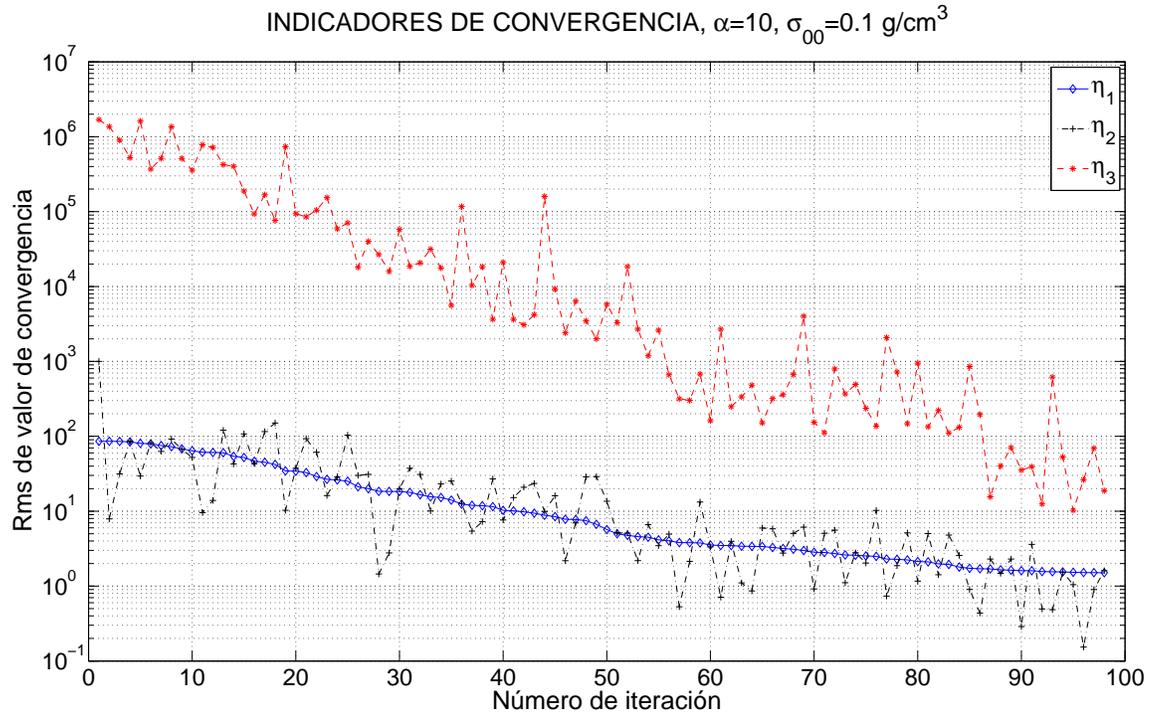


Figura 39: Gráfica de convergencia del proceso de inversión de los datos generados por un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de 4m. El eje de las ordenadas está en escala logarítmica.

y la interferencia de celdas contiguas lateralmente.

Si bien la inversión del modelo de tablero de ajedrez mostrada anteriormente sugiere una escasa resolución a profundidad, todavía podemos inferir algunos otros elementos sobre el mismo modelo. Para realizarlo, escogemos un escala de valores con límites más cercanos, en este caso, 0.01 g/cm^3 a -0.01 g/cm^3 . Con el término mayor en color rojo y el menor en color azul. Los resultados de este pequeño cambio los podemos ver en la Figura 41. En este caso, podemos ver que las primeras tres capas cumplen con los valores de densidad predefinidos y se alternan de tres en tres con los valores negativos. De la cuarta capa y hasta el final del modelo, los prismas tienen el mismo valor positivo en las orillas, sin embargo, en el centro del modelo tienden a agruparse con distintos valores paulatinamente hasta la capa once, después de la cual todos los valores son iguales y positivos.

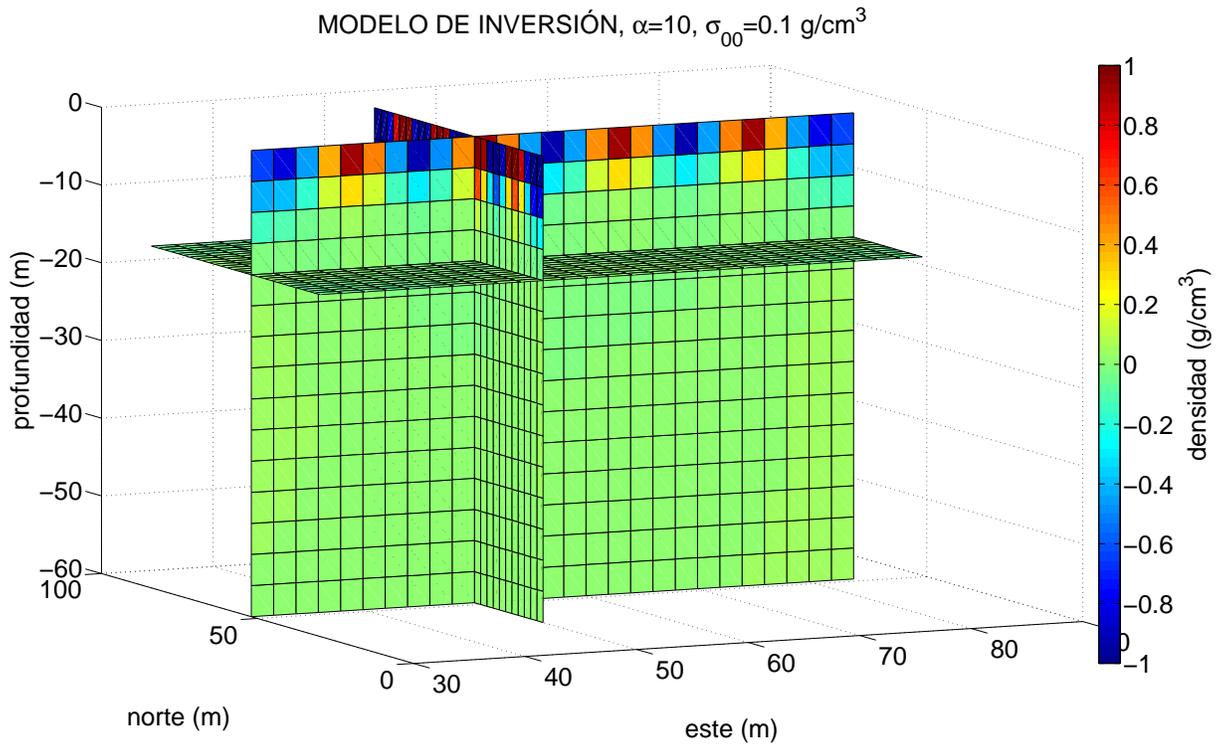


Figura 40: Modelo de densidades obtenido de la inversión de los datos generados por un modelo sintético tipo tablero de ajedrez con capas de 4m.

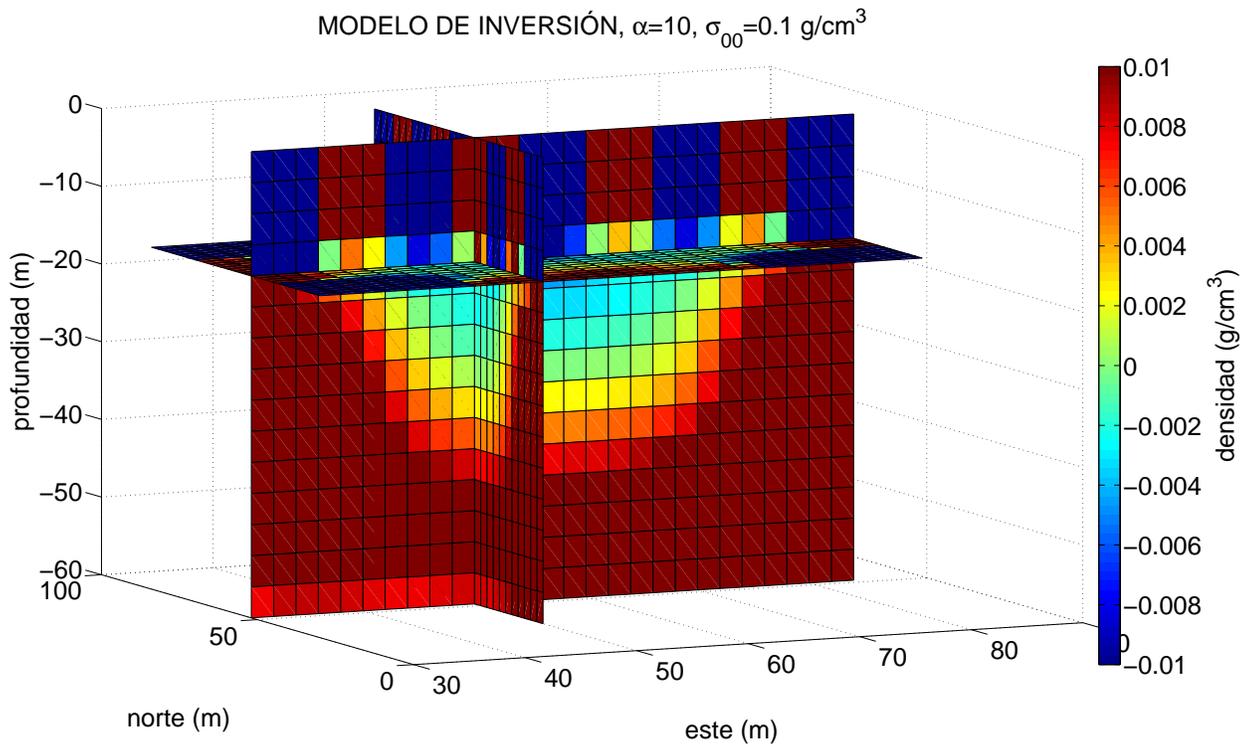


Figura 41: Modelo de densidades obtenido de la inversión de los datos de tensor de gradiente de gravedad generados por un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de 4m de espesor. El modelo se presenta con escala de valores de densidad de -0.01 a 0.01 g/cm^3 .

5.8. Modelo en forma de tablero de ajedrez con capas de 1m y grupos de prismas con igual densidad

Con la intención de explorar aún más la resolución de los datos en el proceso de inversión, conservamos el arreglo de tablero de ajedrez con los mismos parámetros para la matriz de suavidad, la matriz de covarianza, la dimensión del plano xy de cada prisma, así como el número de capas y celdas del modelo cambiando exclusivamente las dimensiones de las capas, las cuales reducimos a 1 m de espesor, como vemos en la Figura 42. El número de datos para el caso en que se utilizan todos los elementos del tensor de gravedad y g_z es de $101 \times 101 \times 7$ es decir 71,407 y para el caso en que sólo se utiliza g_z es de $101 \times 101 \times 1$ es decir, 10,201.

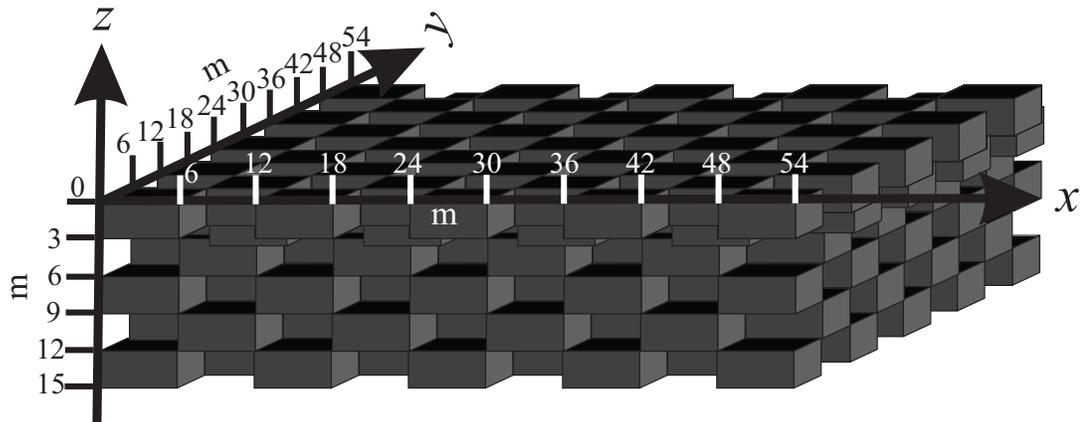


Figura 42: Gráfica del modelo inicial m_0 correspondiente al caso de un modelo tipo de tablero de ajedrez con prismas con densidad de 1 g/cm^3 y -1 g/cm^3 . El modelo tiene 15 capas y cada prisma tiene una dimensión de $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Los grupos de prismas con densidad positiva se encuentran en gris.

La respuesta del modelo para este caso se muestra en la Figura 43; observamos que no existe un cambio notable con respecto a la forma que presentan las anomalías en el caso anterior, sólo una diferencia del valor que toma la región externa al modelo en g_z y T_{zz} .

5.8.1. Inversión del tensor de gravedad y g_z

La Figura 44, nos muestra el comportamiento de los diferentes índices de convergencia del proceso de inversión; el modelo de inversión se detuvo en la iteración 303 a diferencia del caso

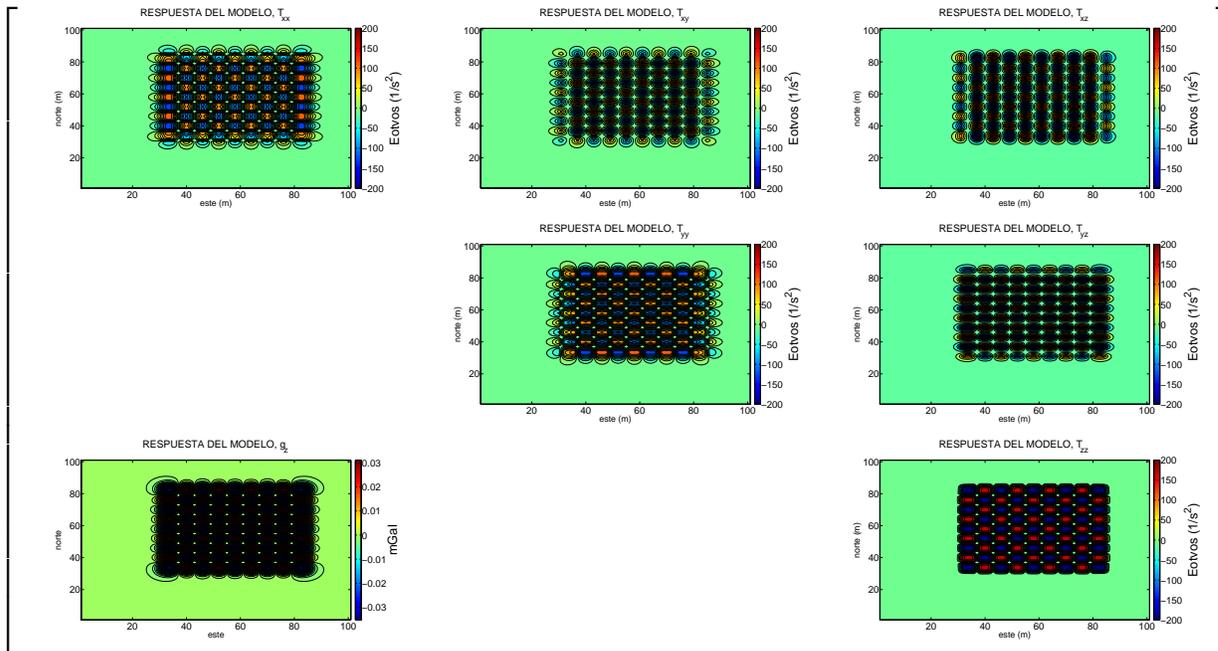


Figura 43: Anomalías de tensor de gradiente de gravedad y de campo vertical de gravedad debidas a un modelo tipo tablero de ajedrez $A_{\text{ sint}}$ agrupados en prismas con igual densidad de 6 m de ancho y capas de 1 m .

anterior del tablero de ajedrez que se detuvo antes (iteración 98), sin embargo, este número es mucho menor que el número total de parámetros del modelo (9375). El índice de convergencia que alcanzó el criterio propuesto es el que corresponde al ajuste de datos (en color azul), que tiene una rápida convergencia hasta la iteración 50 y después decae más lentamente; el índice de los gradientes conjugados (en color rojo), se comporta estable y decae rápidamente hasta aproximadamente la iteración 70, después de esta iteración, sigue decayendo pero presenta las oscilaciones características a lo largo de todo el proceso. Por otra parte, el comportamiento neto del índice del ajuste del modelo (en color negro) es descendente, durante todo el proceso incrementos y decrementos graduales, lo que significa que el modelo se mantuvo variando en algunos de sus valores entre iteraciones.

Una vista en planta del modelo resultado de la inversión en conjunto de todos los datos, la tenemos en la Figura 45. Donde tenemos un corte a 2 m de profundidad y observamos que tenemos buena resolución lateral pues se definen claramente los distintos grupos de prismas en la superficie, si bien los valores de densidad de los mismos no corresponden exactamente al valor predefinido (los prismas en un grupo tienen diferentes tonalidades), ninguno de ellos

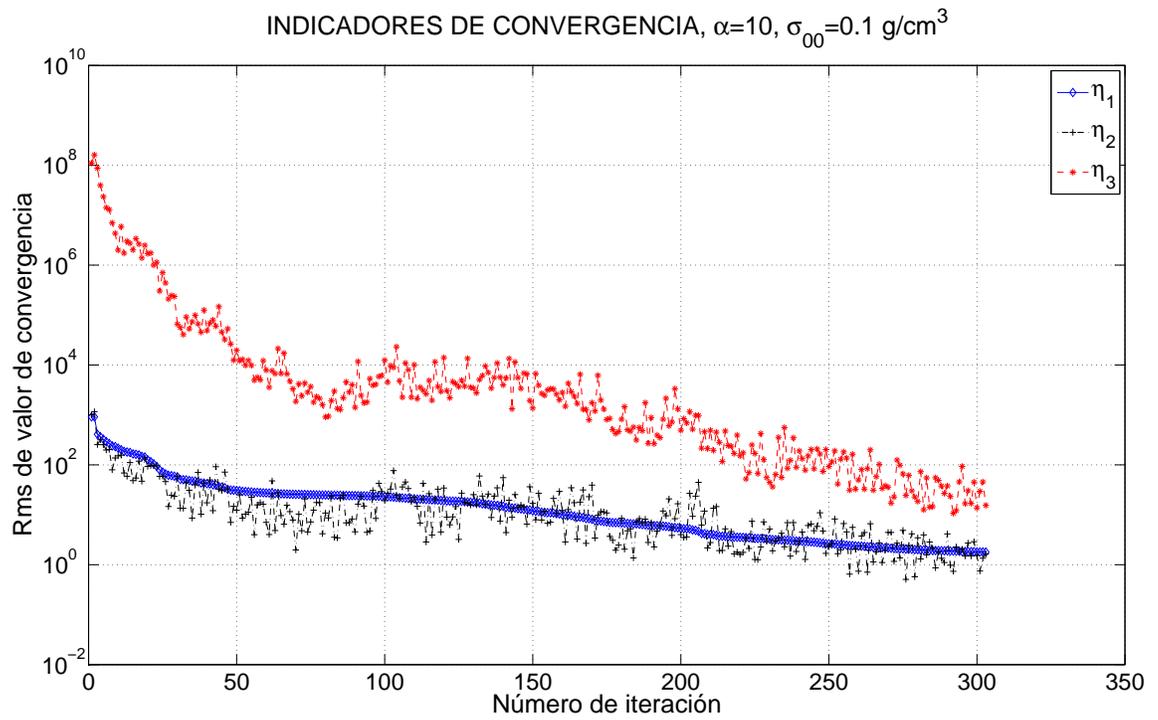


Figura 44: Gráfica de convergencia proceso de inversión de datos de tensor de gravedad generados para un modelo de tablero de ajedrez con capas de 1 m de espesor. El eje de las ordenadas está en escala logarítmica.

tiene un valor con un signo que no le corresponde. Vemos los prismas que se encuentran en el centro de un grupo de igual densidad, tienen un valor menor que los circundantes en el centro del modelo, mientras que en la región perimetral presentan un comportamiento distinto, los valores de densidad del prisma central de cada grupo son mayores que los circundantes.

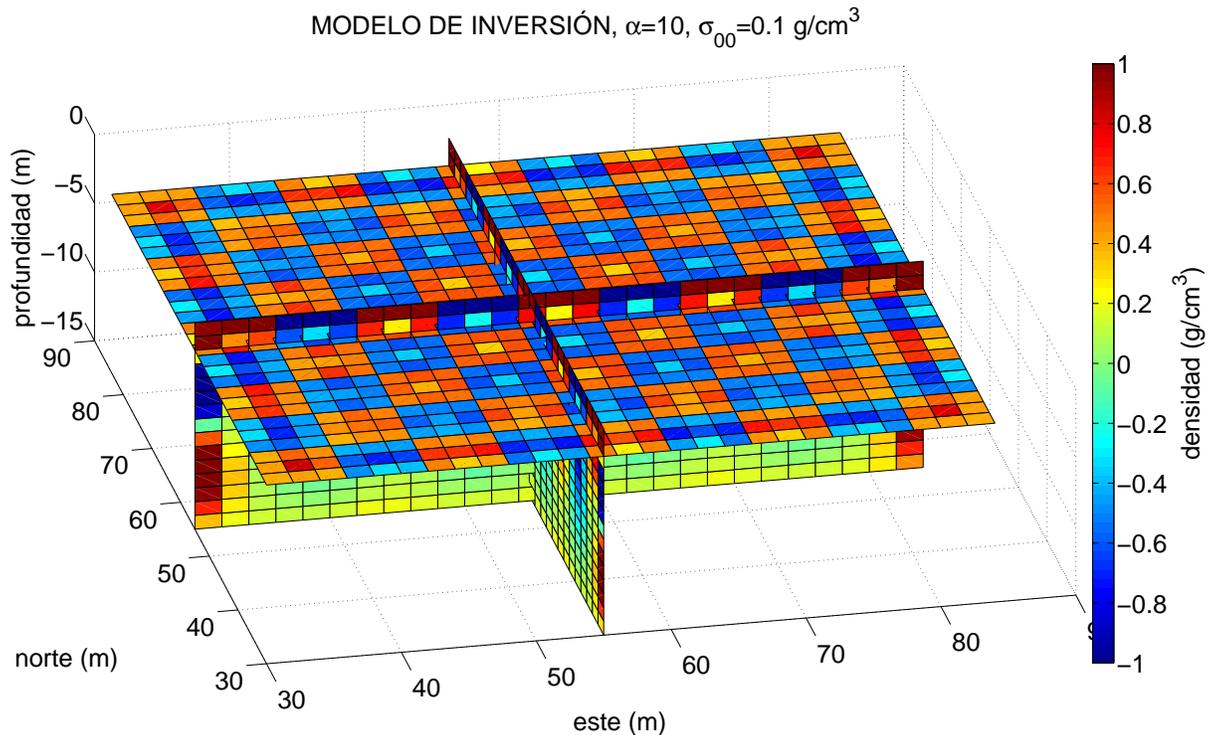


Figura 45: Modelo de densidades obtenido de la inversión de datos de tensor de gradiente de gravedad generados para un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de 1 m de espesor.

La Figura 46, muestra una sección a profundidad del modelo obtenido de la inversión de todos los datos de tensor de gradiente de gravedad. Las primeras tres capas correspondientes a la primera capa de bloques con igual densidad, tienen un comportamiento de acuerdo con lo esperado, sin embargo, debajo de éstas tres capas más superficiales, los valores de densidad van decayendo gradualmente a cero, a excepción de los prismas de la cuarta a la sexta capa de los bordes del modelo, los cuales sí invierten el signo de la densidad en miras a detectar la capa siguiente del modelo de densidades. En general, al interior del modelo los valores de densidad en profundidad tienden a uniformarse alrededor de cero, lo que nos indica que no tenemos una buena resolución en profundidad.

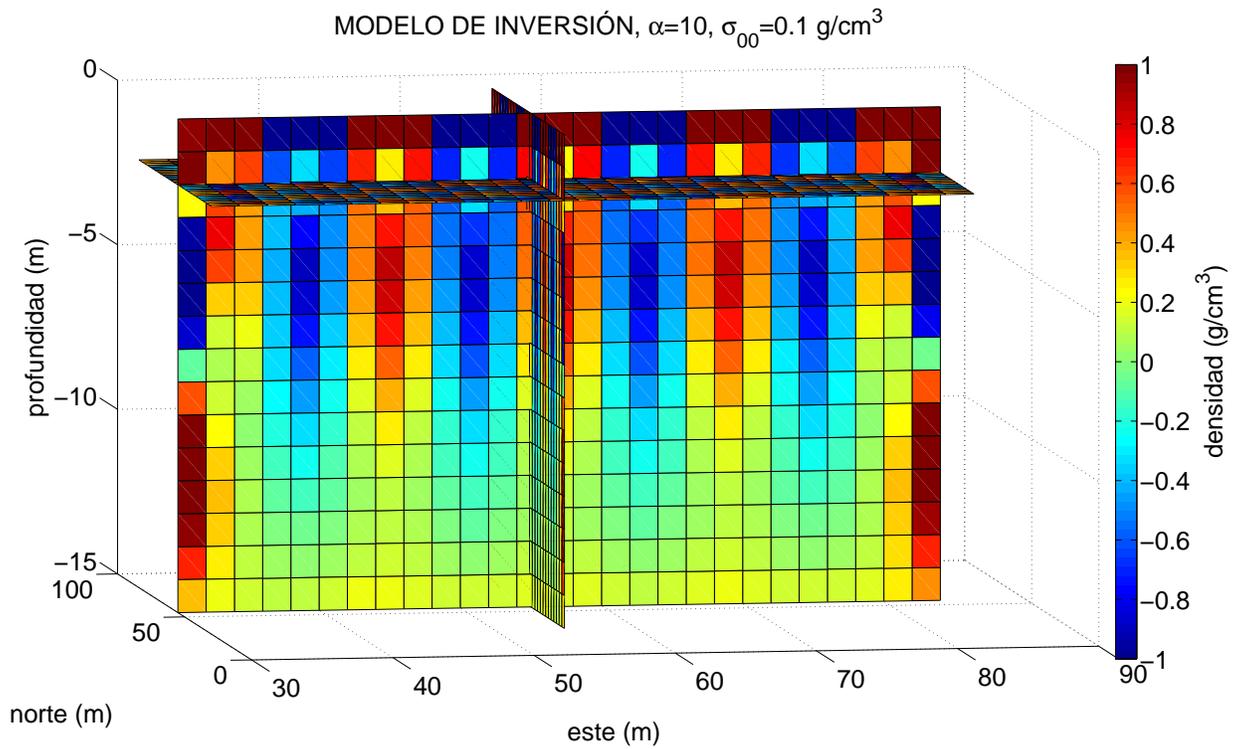


Figura 46: Sección a profundidad del modelo de densidades obtenido de la inversión de datos de tensor de gradiente de gravedad para un modelo tipo tablero de ajedrez empleando bloques de densidad de 1 m de espesor y bloques alternantes de densidad de $6 \times 6 \times 3 \text{ m}$.

5.8.2. Inversión de g_z

La Figura 47, nos muestra el comportamiento de los índices de convergencia durante el proceso de inversión de g_z . En este experimento, la convergencia fue rápida pues sólo se necesitaron 63 iteraciones para lograrla cuando el ajuste de datos (color azul) llegó al valor requerido en el proceso. El criterio de los gradientes conjugados tuvo un comportamiento neto de decaimiento, sin embargo, se comportó muy inestable desde la iteración 33 hasta el final del proceso. El índice de ajuste del modelo (color negro) se mantuvo oscilante desde el principio del proceso, si bien su comportamiento global también fue de decaimiento. Lo anterior nos indica que, para este caso, la componente vertical es más fácil de ajustar que todos los datos en conjunto.

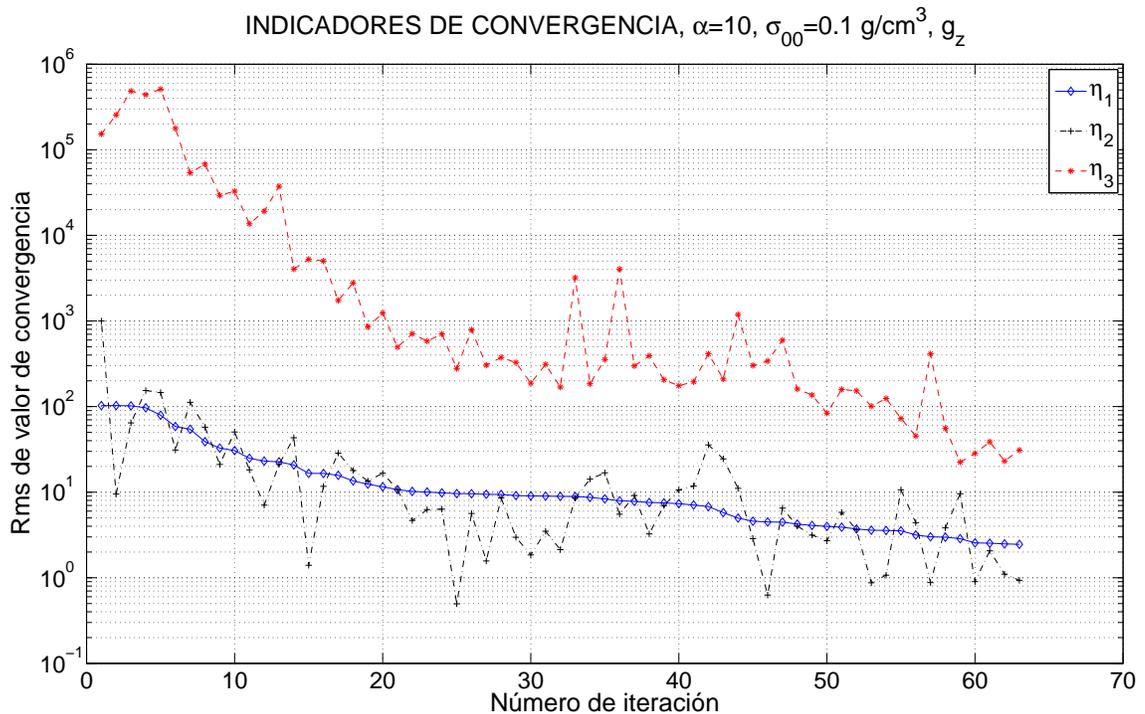


Figura 47: Gráfica de la evolución de los índices de convergencia del proceso de inversión de datos g_z generados para un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de 1 m de espesor. El eje de las ordenadas está en escala logarítmica.

Como podemos ver en la Figura 48, los distintos grupos de prismas están bien definidos a una profundidad de 2 m y se comportan de acuerdo con lo esperado; a diferencia de la inversión de todas las componentes de tensor de gradiente de gravedad en conjunto, para

la inversión de g_z , los valores de los prismas que se encuentran en el centro de cada grupo, tienen un valor más cercano al predefinido que los circundantes, a excepción de los prismas de las esquinas del modelo que tienen una densidad de diferente signo de que les corresponde.

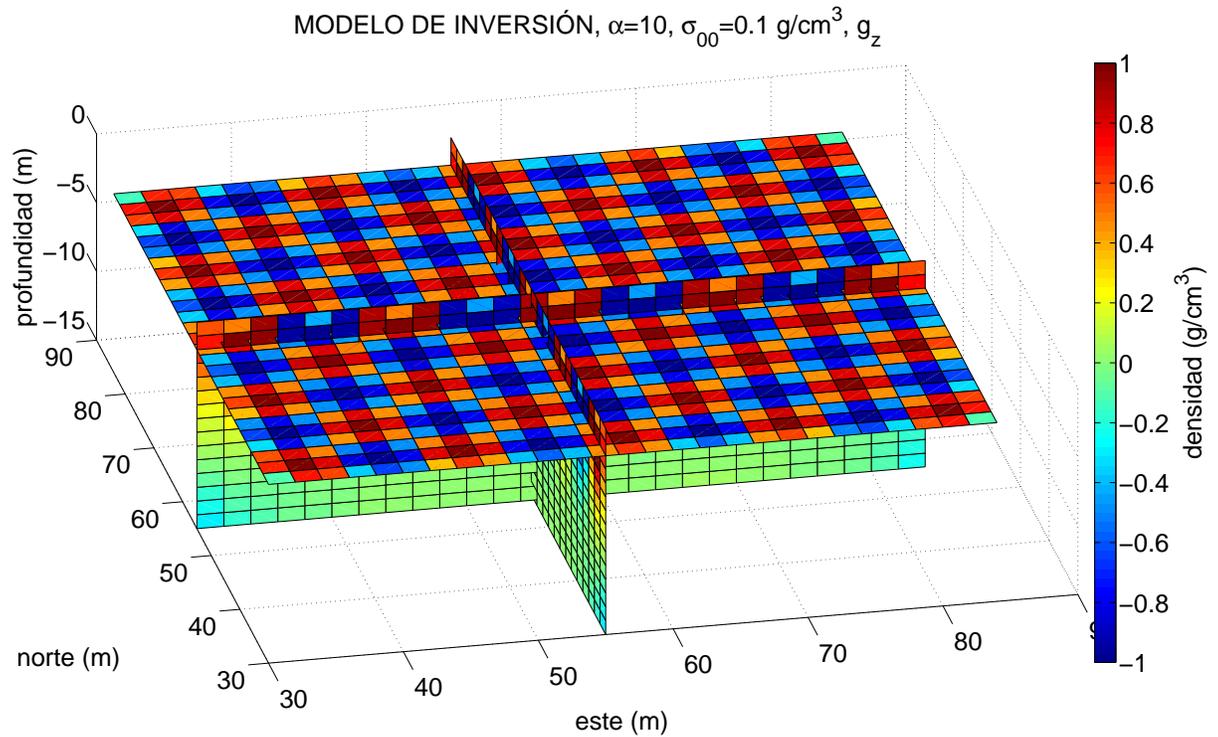


Figura 48: Modelo de densidades obtenido de la inversión de los datos g_z generados por un modelo tipo tablero de ajedrez con capas de 1 m de espesor.

La vista en profundidad de este caso es mostrada por la Figura 49; como en la inversión de todos los datos, también tenemos buen comportamiento en las primeras tres capas y después de éstas, los valores de densidades decaen monótonicamente a cero con la profundidad, a excepción de los valores en los bordes del modelo que, en las últimas capas, invierten el signo de la densidad.

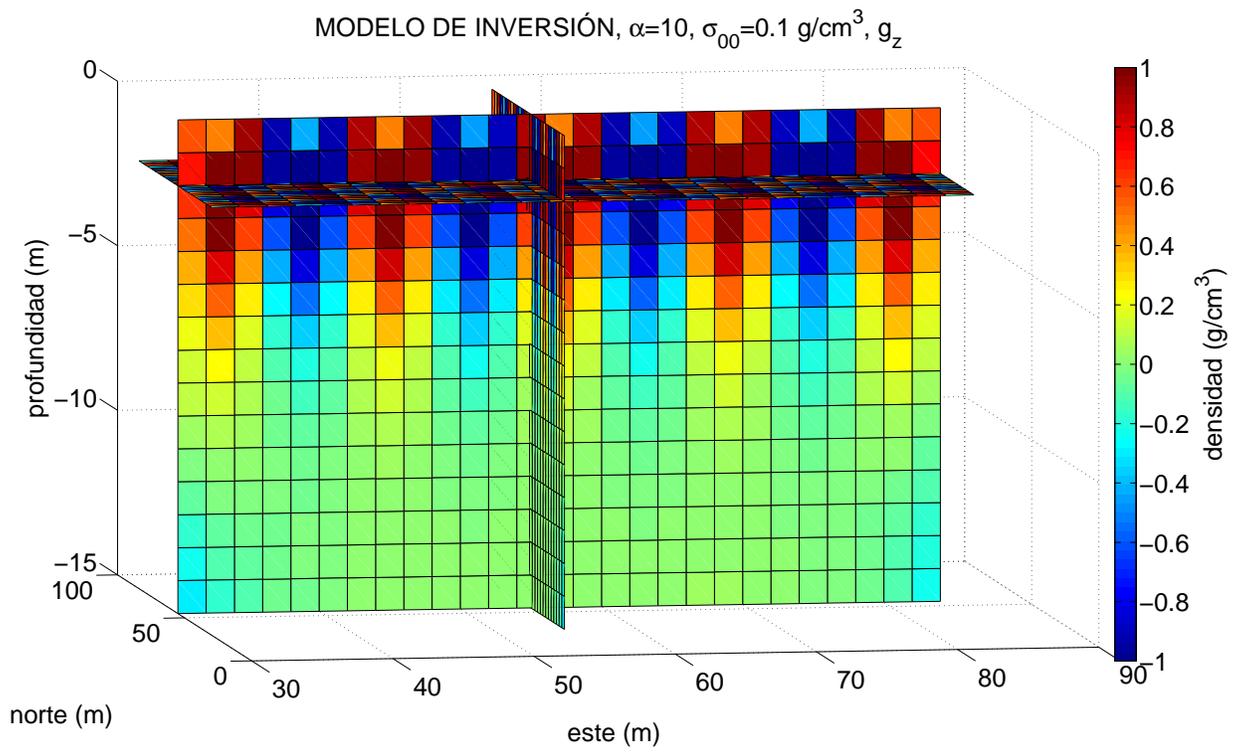


Figura 49: Sección a profundidad del modelo de densidades de la Figura 41.

Capítulo 6. Discusiones

En el presente capítulo se presenta un breve discusión de algunos de los aspectos teóricos y prácticos derivados del desarrollo mismo del algoritmo de inversión y del análisis de los resultados obtenidos en los diferentes experimentos. Estas discusiones se agrupan de acuerdo a las diferentes fases de desarrollo de esta tesis.

6.1. Sobre la solución del problema directo

Mientras que el cálculo de cualquier componente del tensor de gravedad para el modelo básico que se seleccionó en este trabajo (un prisma recto) ya ha sido resuelto analíticamente desde hace varias décadas, el uso reiterado de esta fórmula (ecuación 32) directamente en problemas de optimización con estrategias iterativas es prohibitivo cuando se trabaja con un gran número de datos. De igual manera el almacenamiento de los coeficientes lineales, que podría evitar el uso reiterado de esta fórmula, sobrepasa rápidamente las capacidades de almacenamiento en equipos de cómputo estándar en problemas de gran escala. En este caso, la formulación de un esquema basado en convolución (ecuación 35) y en el almacenamiento selectivo de los coeficientes de la matriz de sensibilidad mínimos indispensables para realizar esta convolución (cf. Figura 8) hizo posible la formulación del problema inverso donde este cálculo resultó reducido a la velocidad de la multiplicación matricial $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

6.2. Sobre el planteamiento y solución del problema inverso

El funcionamiento del algoritmo de inversión basado en gradientes conjugados demuestra su funcionalidad en varios aspectos:

1. Para todos los experimentos mostrados, el número de iteraciones necesarias para converger a una solución es mucho menor que el número de incógnitas, significando que los preconditionadores implementados cumplen su función de acelerar el proceso de búsqueda.

2. Todos los procesos tuvieron un comportamiento convergente, es decir, en promedio tanto el residual del vector de gradientes conjugados como el desajuste de los datos geofísicos disminuía conforme avanzaban las iteraciones.
3. El indicador más estable del proceso fue el del ajuste de los datos, pues en todos los casos, mostró un decremento continuo y en la mayoría de ellos llegó al nivel impuesto para detener el proceso.
4. Aunque el comportamiento global de los indicadores de convergencia seleccionados es descendente, en la mayoría de los procesos el rms de los residuales de GC decayó rápidamente y luego tendió a oscilar. Esto se observa en las Figuras 15, 19, 20, 23, etc., las cuales muestran que este índice tiene un decaimiento del orden de décadas en las primeras 10 a 20 iteraciones y posteriormente empieza a oscilar. En cuanto al indicador de la convergencia del modelo, este tuvo un comportamiento más inestable. Generalmente decayó en los primeros pasos iterativos, después no desciende más y presenta variaciones sistemáticas mayores y saltos. Como una interpretación del comportamiento de estas curvas, se puede pensar que en las primeras iteraciones se resuelve la parte estable del modelo ya sea la geometría de los cuerpos someros o bien la solución a un modelo geoméricamente simple (véase Figura 27) en que el programa converge casi instantáneamente. La región de lento decaimiento se asocia a la etapa del proceso que busca elementos del modelo al que los datos son menos sensibles. Si bien, esta zona también depende de nuestra selección particular de la matriz de preacondicionamiento.

Otro punto a resaltar es que el programa encuentra una solución de forma más rápida cuando se invierte solamente la componente vertical de la gravedad g_z que cuando se invierten todas las componentes del tensor junto con g_z . Sin embargo, los resultados muestran que es más conveniente invertir todos los elementos del tensor de forma conjunta ya que los modelos obtenidos se aproximan más a los modelos sintéticos originales. Además, en comparación con experimentos donde sólo se invierte una de las componentes del tensor, el invertir todos los elementos en conjunto compensa la falta de elementos en una dirección para calcular los residuales con los elementos de otra, logrando con esto converger más rápidamente a una solución.

En los modelos resultado de la inversión, la parte más superficial resultaba mejor resuelta tanto en la geometría del cuerpo de prueba como en la magnitud de los valores de densidad de las celdas. La parte inferior de las heterogeneidades resultó en cuerpos de geometría simple y de baja densidad, el modelo en esta región era entonces dominado principalmente por la condición de suavidad impuesta. En todos los casos las celdas en los bordes del modelo siempre presentaron más heterogeneidades debido a que estas zonas no fueron restringidas por el operador laplaciano de regularización. Muchos de estos rasgos se pueden observar solamente en las figuras de los modelos con un rango estrecho de la escala de valores de densidad.

6.3. Acerca de los modelos obtenidos de la inversión de datos generados por un cuerpo aislado y por un modelo tipo tablero de ajedrez

Todos los ejemplos muestran una buena resolución lateral, como podemos ver en todos los casos someros en que los contornos de los cuerpos están bien definidos, sin embargo, en profundidad los valores de densidad varían sólo en magnitud y no en signo. Esta falta de resolución vertical se ve claramente en los modelos obtenidos tanto para el cuerpo aislado en forma L como para el tablero de ajedrez.

En los experimentos sobre un modelo tipo tablero de ajedrez existe una interferencia notable entre los datos, lo cual se propaga en los modelos que resultan de su inversión. Este efecto acentúa aún más la falta de resolución de los modelos que resultan de la inversión a profundidad, que inmediatamente (después de la segunda capa) nos lleva a un modelo homogéneo en profundidad. Inclusive, este efecto es menos notorio en los bordes del modelo, donde la interferencia es menor (cf. Figura 46 y Figura 49).

Capítulo 7. Conclusiones

En general, la aplicación del método GC para la inversión del tensor de gradiente de gravedad en este trabajo, resultó aceptable en lo referente a la resolución lateral de los cuerpos y a la convergencia del método; sin embargo, un punto débil es la falta de resolución en profundidad que limita en gran medida a esta aplicación del método, independientemente del esquema adoptado de solución del problema inverso.

Tenemos un gran ahorro de recursos computacionales por el cálculo único de la matriz de sensibilidad y su almacenamiento selectivo. La mayor desventaja resultó en el costo computacional (tiempo) del cálculo de la matriz $A^T A$. En este caso, si este cálculo pudiera simplificarse a uno sólo, reduciría significativamente el tiempo del cálculo computacional.

La técnica de GC y su combinación con convolución resultó en un algoritmo eficiente para la inversión de datos en modelos 3D de tamaño aceptable a un bajo costo computacional; sin embargo, en nuestra aplicación, el uso de Matlab resultó ser una limitante en tiempo de cómputo. Igualmente, el uso de un preconditionador tipo jacobi llevó a un proceso de búsqueda oscilante y de convergencia relativamente lenta (de comportamiento asintótico).

A pesar de estar constituido por varias componentes, el tensor de gradiente de gravedad (\mathbf{T}) aún tiene una baja resolución a una segunda capa de material, esto es, la base de un cuerpo finito o bien una segunda capa de modelo tipo tablero de ajedrez. Sin embargo:

1. El uso de \mathbf{T} resultó en mejores modelos que la inversión exclusiva de datos tipo g_z especialmente en resolución lateral.
2. \mathbf{T} requirió un mayor número de iteraciones para resolver esos rasgos menores adicionales en el modelo, por lo que el desarrollo de mejores preconditionadores o simplificación de cálculos iterativos sería una necesidad en modelos de mayor escala.

No es claro si la limitación en profundidad se debe a las propiedades intrínsecas del método, a la implementación del mismo (la elección de los parámetros de la matriz de suavidad) o a las características de los datos; además la regularización empleando condiciones de suavidad no favoreció el incremento de resolución en profundidad y en algunos casos se contrapuso a la resolución propia del método en profundidad. Esto nos lleva a concluir que se necesita una implementación más detallada de la matriz de covarianza y una mejor matriz de precondicionamiento; si bien, la buena resolución lateral obtenida mediante la inversión nos demuestra que este método es muy bueno para delinear aceptablemente rasgos superficiales.

Es aconsejable invertir todos los datos disponibles de manera conjunta, pues el programa encuentra la solución relativamente rápido cuando más tipos de datos tenga que invertir que si se invierten por separado, con la excepción de la inversión de la componente g_z que tiene un comportamiento similar.

Es significativo que en ninguno de los casos invertidos, el número de iteraciones llevadas a cabo por el programa para llegar a la solución, se haya acercado al número límite establecido por la teoría, esto nos demuestra la gran capacidad del método para encontrar una solución en un reducido número de pasos lo que conlleva un ahorro en los tiempos de cálculo computacional.

Lista de referencias

- Banerjee, B. y Das Gupta, S. (1977). Gravitational attraction of a rectangular parallelepiped. *Geophysics*, **42**(5): 1053–1055.
- Barnes, G. (2012). Interpolating the gravity field using full tensor gradient measurements. *First Break*, **30**(4): 97–101.
- Barnes, G. y Barraud, J. (2012). Imaging geologic surfaces by inverting gravity gradient data with depth horizons. *Geophysics*, **77**(1): G1–G11.
- Barnes, G. y Lumley, J. (2011). Processing gravity gradient data. *Geophysics*, **76**(2): I33–I47.
- Beiki, M. (2010). Analytic signals of gravity gradient tensor and their application to estimate source location. *Geophysics*, **75**(6): I59–I74.
- Blakely, R. J. (1996). *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press.
- Butler, D. K. (1984). Interval gravity-gradient determination concepts. *Geophysics*, **49**(6): 828–832.
- Butler, D. K. (1995). Generalized gravity gradient analysis for 2-d inversion. *Geophysics*, **60**(4): 1018–1028.
- Cevallos, C., Kovac, P., y Lowe, S. J. (2013). Application of curvatures to airborne gravity gradient data in oil exploration. *Geophysics*, **78**(4): G81–G88.
- Commer, M. (2011). Three-dimensional gravity modelling and focusing inversion using rectangular meshes. *Geophysical Prospecting*, **59**(5): 966–979.
- DiFrancesco, D., Grierson, A., Kaputa, D., y Meyer, T. (2009). Gravity gradiometer systems—advances and challenges. *Geophysical Prospecting*, **57**(4): 615–623.
- Dransfield, M. (2007). Airborne gravity gradiometry in the search for mineral deposits. En: *Proceedings of exploration*. Vol. 7, pp. 341–354.
- Dransfield, M. y Zeng, Y. (2009). Airborne gravity gradiometry: Terrain corrections and elevation error. *Geophysics*, **74**(5): I37–I42.
- Forsberg, R. (1984). A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Reporte técnico, DTIC Document.
- Götze, H.-J. y Lahmeyer, B. (1988). Application of three-dimensional interactive modeling in gravity and magnetics. *Geophysics*, **53**(8): 1096–1108.
- Gradshteyn, I. y Ryzhik, I. (2007). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, seventh edición.
- Jekeli, C. (2006). Airborne gradiometry error analysis. *Surveys in geophysics*, **27**(2): 257–275.

- LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, Vol. 98. Siam.
- Li, Y. y Oldenburg, D. W. (1998). 3-d inversion of gravity data. *Geophysics*, **63**(1): 109–119.
- Martinez, C., Li, Y., Krahenbuhl, R., y Braga, M. A. (2012). 3d inversion of airborne gravity gradiometry data in mineral exploration: A case study in the cuadrilátero ferrífero, brazil. *Geophysics*, **78**(1): B1–B11.
- Menke, W. (2012). *Geophysical data analysis: discrete inverse theory*. Academic press.
- Mickus, K. L. y Hinojosa, J. H. (2001). The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: a fourier transform technique. *Journal of Applied Geophysics*, **46**(3): 159–174.
- Nabighian, M., Grauch, V., Hansen, R., LaFehr, T., Li, Y., Peirce, J., Phillips, J., y Ruder, M. (2005). The historical development of the magnetic method in exploration. *Geophysics*, **70**(6): 33ND–61ND.
- Nocedal, J. y Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer, segunda edición. pp. 100–132.
- Pedersen, L. y Rasmussen, T. (1990). The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps. *Geophysics*, **55**(12): 1558–1566.
- Pilkington, M. (2012). Analysis of gravity gradiometer inverse problems using optimal design measures. *Geophysics*, **77**(2): G25–G31.
- Portniaguine, O. y Zhdanov, M. S. (1999). Focusing geophysical inversion images. *Geophysics*, **64**(3): 874–887.
- Saad, A. H. (2006). Understanding gravity gradients-a tutorial. *The Leading Edge*, **25**(8): 942–949.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. siam. pp. 1–37.
- Uieda, L. y Barbosa, V. C. (2012). Robust 3d gravity gradient inversion by planting anomalous densities. *Geophysics*, **77**(4): G55–G66.
- Van Kann, F. (2004). Requirements and general principles of airborne gravity gradiometers for mineral exploration. En: *Airborne Gravity, the ASEG-PESA Airborne Gravity Workshop, Australia, Extended Abstracts*. pp. 1–6.
- Van Leeuwen, E. H. (2000). Bhp develops airborne gravity gradiometer for mineral exploration. *The Leading Edge*, **19**(12): 1296–1297.
- Zhang, J., Mackie, R. L., y Madden, T. R. (1995). 3-d resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients. *Geophysics*, **60**(5): 1313–1325.

Zhdanov, M. S. (2009). New advances in regularized inversion of gravity and electromagnetic data. *Geophysical Prospecting*, **57**(4): 463–478.

Zhdanov, M. S., Ellis, R., y Mukherjee, S. (2004). Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data. *Geophysics*, **69**(4): 925–937.

Apéndice A. Tensor de Gravedad

A.1. Componente vertical del campo de gravedad

A causa de su naturaleza vectorial, el campo gravitacional está formado por tres componentes que son el resultado de la primera derivada del potencial gravitacional en cada una de las coordenadas cartesianas, esto es,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y}, -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \right) = (g_x, g_y, g_z),$$

sin embargo, en los estudios geofísicos la componente que se utiliza de manera general por ser la más indicada en el estudio de las densidades del subsuelo es la componente vertical del campo o $g_z(\mathbf{r})$. Para encontrar la forma que tiene $g_z(\mathbf{r})$ en el sistema de coordenadas cartesianas, primeramente derivamos la ecuación (6) con respecto a la coordenada z

$$\begin{aligned} g_z(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\gamma \iiint_D \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \right) \\ &= -\gamma \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \rho(\mathbf{r}') \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dx' dy' dz', \end{aligned} \quad (55)$$

donde $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{1/2}$.

Para un cuerpo prismático con caras paralelas a los planos coordenados y con densidad uniforme $\rho(\mathbf{r}') = \rho$, siguiendo el procedimiento de Banerjee y Das Gupta (1977), integramos con respecto a z' y obtenemos

$$g_z(\mathbf{r}) = -\gamma\rho \int_{x'} \int_{y'} \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2}} \Big|_{z'_1}^{z'_2}. \quad (56)$$

Para integrar (56) con respecto a y' nos ayudamos de la siguiente fórmula que se encuentra en tablas de integrales

$$\int \frac{dx}{u} = \frac{1}{c^{1/2}} \ln(xc^{1/2} + u), \quad (57)$$

donde $u = (a + cx^2)^{1/2}$. En nuestro caso $u = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2}$, $c = 1$ y $a = (x-x')^2 + (z-z')^2$, por lo tanto

$$g_z(\mathbf{r}) = \gamma\rho \int_{x'} \ln \left((y-y') + \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{1/2} \right) \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}. \quad (58)$$

Integrando por partes (58) tenemos

$$g_z(\mathbf{r}) = \gamma\rho(x-x') \ln((y-y') + r) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} + \gamma\rho \int_{x'} \frac{(x-x')^2}{(y-y') + r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}, \quad (59)$$

donde $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Renombramos al segundo término de la ecuación (59) como $g_{z1}(\mathbf{r})$ y lo multiplicamos por la unidad, además arreglamos la expresión

$$\begin{aligned} g_{z1}(\mathbf{r}) &= \gamma\rho \int_{x'} \frac{(x-x')^2 (r - (y-y'))}{(r - (y-y')) (r + (y-y')) r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\ &= \gamma\rho \int_{x'} \frac{(x-x')^2 (r - (y-y'))}{(r^2 - (y-y')^2) r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\ &= \gamma\rho \int_{x'} \frac{(x-x')^2}{(x-x')^2 + (z-z')^2} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\ &\quad - \gamma\rho \int_{x'} \frac{(y-y')(x-x')^2}{((x-x')^2 + (z-z')^2) r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}. \end{aligned} \quad (60)$$

La primera integral se hace cero cuando evaluamos en y' , integrando la segunda expresión, tenemos

$$\begin{aligned}
g_{z1}(\mathbf{r}) &= -\gamma\rho(y-y') \int_{x'} \frac{(x-x')^2 + (z-z')^2 - (z-z')^2}{((x-x')^2 + (z-z')^2) r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= -\gamma\rho(y-y') \int_{x'} \frac{1}{r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&\quad + \gamma\rho(y-y')(z-z')' \int_{x'} \frac{1}{((x-x')^2 + (z-z')^2) r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= \gamma\rho(y-y') \ln((x-x') + r) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&\quad + \gamma\rho(y-y')(z-z') \int_{x'} \frac{1}{((x-x')^2 + (z-z')^2) r} dx' \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}. \tag{61}
\end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral de (61), primero la renombramos como $g_{z2}(\mathbf{r})$ y hacemos el siguiente cambio de variable $x-x' = \sqrt{b} \tan \theta$, donde $b = (y-y')^2 + (z-z')^2$ y así

$$\begin{aligned}
g_{z2}(\mathbf{r}) &= -\gamma\rho \int_{\theta} \frac{(y-y')(z-z') \sqrt{b} \sec^2 \theta}{(b + b \tan^2 \theta)^{1/2} ((z-z')^2 + b \tan^2 \theta)} d\theta \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= -\gamma\rho \int_{\theta} \frac{(y-y')(z-z') \sqrt{b} \sec^2 \theta}{(b(1 + \tan^2 \theta))^{1/2} ((z-z')^2 + b \tan^2 \theta)} d\theta \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= -\gamma\rho \int_{\theta} \frac{(y-y')(z-z') \sec \theta}{(z-z')^2 + ((y-y')^2 + (z-z')^2) \tan^2 \theta} d\theta \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= -\gamma\rho \int_{\theta} \frac{(y-y')(z-z') \cos \theta}{(z-z')^2 + (y-y')^2 \sin^2 \theta} d\theta \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}, \tag{62}
\end{aligned}$$

realizamos el cambio de variable $\omega = (y-y') \sin \theta$ en (62) tenemos

$$\begin{aligned}
g_{z2}(\mathbf{r}) &= -\gamma\rho \int_{\theta} \frac{(y-y')(z-z') \cos \theta}{(z-z')^2 + (y-y')^2 \sin^2 \theta} d\theta \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= -\gamma\rho \int_{\omega} \frac{(z-z')}{\omega^2 + (z-z')^2} d\omega \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= -\gamma\rho(z-z') \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{z-z'} \right) \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \Big|_{\omega'_1}^{\omega'_2}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Efectuando la sustitución a las variables originales en (63), tenemos

$$\begin{aligned}
g_{z2}(\mathbf{r}) &= -\gamma\rho(z-z') \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{z-z'} \right) \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \Big|_{\omega'_1}^{\omega'_2} \\
&= -\gamma\rho(z-z') \tan^{-1} \left(\frac{(y-y') \sin \theta}{z-z'} \right) \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \Big|_{\theta'_1}^{\theta'_2} \\
&= -\gamma\rho(z-z') \tan^{-1} \left(\frac{(y-y')}{(z-z')} \left(\frac{\frac{x-x'}{\sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{\frac{(x-x')^2}{(y-y')^2 + (z-z')^2} + 1}} \right) \right) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&= -\gamma\rho(z-z') \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')(y-y')}{(z-z')r} \right) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Y así, obtenemos la expresión para la componente vertical del campo de gravedad $g_z(\mathbf{r})$ (Banerjee y Das Gupta, 1977),

$$\begin{aligned}
g_z(\mathbf{r}) &= \gamma\rho(x-x') \ln(y-y'+r) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} + g_{z1}(\mathbf{r}) + g_{z2}(\mathbf{r}) \\
&= \gamma\rho[(x-x') \ln((y-y') + r) + (y-y') \ln((x-x') + r)] \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\
&\quad -\gamma\rho(z-z') \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')(z-z')}{(z-z')r} \right) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}.
\end{aligned} \tag{65}$$

A.2. Cálculo de las componentes del Tensor de Gravedad

Podemos representar a las segundas derivadas espaciales del potencial $U(\mathbf{r})$ de la manera siguiente

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial\alpha\partial\beta}, \quad (66)$$

donde $\alpha, \beta = x, y, z$. El resultado de la segunda derivada del potencial gravitacional es lo que se denomina en la literatura como Tensor de Gradiente de Gravedad $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ o Tensor de Gravedad, cuyos elementos forman una matriz cuadrada que representamos en su forma implícita como sigue

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Como vimos anteriormente la ecuación de Poisson para el campo gravitacional es

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi\gamma\rho(\mathbf{r}'),$$

que se cumple sólo para puntos dentro de la distribución de masa, para puntos afuera (como es el caso general en gravimetría), la ecuación que se cumple es la ecuación de Laplace. Si calculamos el gradiente de la expresión anterior obtenemos la expresión siguiente

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})) = -4\pi\gamma(\nabla\rho(\mathbf{r}')), \quad (68)$$

esta expresión nos da el Tensor de Gradiente Gravedad mostrado de una manera distinta

$$\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) = -4\pi\gamma\nabla\rho(\mathbf{r}'), \quad (69)$$

esta ecuación nos indica que el gradiente del Tensor de Gravedad está directamente relacio-

nado con la forma en que varía la densidad en un cuerpo.

Al derivarse de un potencial escalar, el Tensor de Gravedad tiene la propiedad de simetría, es decir, las componentes producto de las derivadas cruzadas con respecto a las coordenadas son las mismas: $g_{xy} = g_{yx}$, $g_{xz} = g_{zx}$ y $g_{yz} = g_{zy}$, por lo tanto, sólo es necesario calcular seis componentes para obtener la expresión completa del tensor.

De acuerdo con la ecuación (3) tenemos que la distancia entre la coordenada de un punto con densidad $\rho(\mathbf{r}')$ dentro de un cuerpo y la coordenada de un punto de medición es

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (70)$$

Calculando la primera derivada con respecto a la coordenada x de (70) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \quad (71)$$

La segunda derivada con respecto a x de (70) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= 3 \frac{(x - x')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \\ &\quad - \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= 3 \frac{(x - x')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (72)$$

y así sucesivamente para las coordenadas y, z . Entonces la expresión del Tensor de Gravedad para las componentes de la diagonal es

$$\mathbf{T}_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}) = \gamma \iiint_D \rho(\mathbf{r}') \left(3 \frac{(\alpha - \alpha')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv'. \quad (73)$$

Para las derivadas cruzadas respecto a x, y , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= 3 \frac{(x - x')(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \\ &= 3 \frac{(x - x')(y - y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}, \end{aligned} \quad (74)$$

y así sucesivamente. Entonces, las componentes fuera de la diagonal de la matriz del Tensor de Gravedad tienen la siguiente representación

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \gamma \iiint_D \rho(\mathbf{r}') \left(3 \frac{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right) dv'. \quad (75)$$

Por lo tanto, de acuerdo con (73) y (75), la expresión general para las componentes matriciales del Tensor de Gravedad es

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \gamma \iiint_D \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} K_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv', \quad (76)$$

donde $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad del cuerpo y $K_{\alpha\beta}$ es el Kernel de la función que tiene la siguiente forma:

$$K_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{3(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} & \alpha \neq \beta \\ \frac{3(\alpha - \alpha')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - 1 & \alpha = \beta. \end{cases} \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (77)$$

De acuerdo con (76) para una densidad $\rho(\mathbf{r}')$ constante en todo el cuerpo y con $\alpha = \beta = x$ tenemos

$$T_{xx} = \gamma \rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} 3 \frac{(x - x')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} dx' dy' dz' - \gamma \rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dx' dy' dz'. \quad (78)$$

Tomando por separado la ecuación (78), tenemos la primera integral del lado derecho

$$\gamma\rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} 3 \frac{(x-x')^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} dx' dy' dz', \quad (79)$$

que integramos primeramente con respecto a la coordenada x' realizando el cambio de variable $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r$ y además, nos ayudamos con la siguiente fórmula integral ya resuelta en tablas de integrales

$$\int \frac{x^2}{u^5} dx = \frac{1}{3} \frac{x^3}{au^3}, \quad (80)$$

donde $u = \sqrt{a + cx^2}$, a y c son constantes y x es la variable sobre la que se integra. Así,

$$\gamma\rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} 3 \frac{(x-x')^2}{r^5} dx' dy' dz' = -\gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{(x-x')^3}{r^3 a} \Big|_{x'_1}^{x'_2} dy' dz', \quad (81)$$

donde $u = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, $a = (y-y')^2 + (z-z')^2$ y $c = 1$.

Sumando y restando a y reacomodando la integral (81)

$$\begin{aligned} -\gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{((x-x')^2 + a - a)(x-x')}{r^3 a} \Big|_{x'_1}^{x'_2} dy' dz' &= -\gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{x-x'}{ra} \Big|_{x'_1}^{x'_2} dy' dz' \\ &+ \gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{x-x'}{r^3} dy' dz' \Big|_{x'_1}^{x'_2}. \end{aligned} \quad (82)$$

La segunda integral del lado derecho de (78) con respecto a x' la resolvemos con ayuda de la siguiente fórmula integral

$$\int \frac{dx}{u^3} = \frac{1}{a} \frac{x}{u}. \quad (83)$$

Así

$$-\gamma\rho \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dx' dy' dz' = \gamma\rho \int_{z'} \int_{z'} \frac{x-x'}{ra} \Big|_{x'_1}^{x'_2} dy' dz'. \quad (84)$$

Entonces, utilizando (82) y (84), la integral (78) queda:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= -\gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{x-x'}{ra} \Big|_{x'_1}^{x'_2} dy' dz' + \gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{x-x'}{r^3} dy' dz' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \\ &\quad + \gamma\rho \int_{z'} \int_{z'} \frac{x-x'}{ra} \Big|_{x'_1}^{x'_2} dy' dz' \\ &= \gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{x-x'}{r^3} dy' dz' \Big|_{x'_1}^{x'_2}. \end{aligned} \quad (85)$$

Utilizando de nueva cuenta (83) e integrando con respecto a y' , tenemos que (85) queda

$$T_{xx} = -\gamma\rho \int_{z'} \frac{(x-x')(y-y')}{ra} \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2}. \quad (86)$$

Para integrar (86) con respecto a z' realizamos el siguiente cambio de variable de manera semejante que en la sección anterior $z-z' = \sqrt{b} \tan \theta$, donde $b = (x-x')^2 + (y-y')^2$; por lo que (86) queda

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= \gamma\rho \int_{\theta} \frac{(x-x')(y-y')\sqrt{b}\sec^2\theta}{(b+b\tan\theta)^{1/2}((x-x')^2+b\tan^2\theta)} d\theta \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \\
&= \gamma\rho \int_{\theta} \frac{(x-x')(y-y')\sqrt{b}\sec^2\theta}{(b(1+\tan^2\theta))^{1/2}((x-x')^2+b\tan^2\theta)} d\theta \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \\
&= \gamma\rho \int_{\theta} \frac{(x-x')(y-y')\sec\theta}{(x-x')^2+((x-x')^2+(y-y')^2)\tan^2\theta} d\theta \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \\
&= \gamma\rho \int_{\theta} \frac{(x-x')(y-y')\cos\theta}{(x-x')^2+(y-y')^2\sin^2\theta} d\theta \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2}.
\end{aligned} \tag{87}$$

Haciendo el cambio de variable $\omega = (y - y') \sin \theta$ en (87) tenemos

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= \gamma\rho \int_{\theta} \frac{(x-x')(y-y')\cos\theta}{(x-x')^2+(y-y')^2\sin^2\theta} d\theta \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \\
&= \gamma\rho \int_{\omega} \frac{(x-x')}{\omega^2+(x-x')^2} d\omega \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \\
&= \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{x-x'} \right) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{\omega'_1}^{\omega'_2}.
\end{aligned} \tag{88}$$

Efectuando la sustitución a las variables originales en (88)

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{x-x'} \right) \left| \begin{array}{c} x_2' | y_2' | \omega_2' \\ x_1' | y_1' | \omega_1' \end{array} \right| \\
&= \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{(y-y') \sin \theta}{x-x'} \right) \left| \begin{array}{c} y_2' | \theta_2' \\ y_1' | \theta_1' \end{array} \right| \\
&= \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{(y-y')}{(x-x')} \left(\frac{\frac{z-z'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{\frac{(z-z')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2} + 1}} \right) \right) \left| \begin{array}{c} x_2' | y_2' | z_2' \\ x_1' | y_1' | z_1' \end{array} \right| \\
&= \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{(y-y')(z-z')}{(x-x')r} \right) \left| \begin{array}{c} x_2' | y_2' | z_2' \\ x_1' | y_1' | z_1' \end{array} \right|.
\end{aligned} \tag{89}$$

Realizando el mismo procedimiento para las coordenadas y, z con $\alpha = \beta$, tenemos

$$T_{yy} = \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')(z-z')}{(y-y')r} \right) \left| \begin{array}{c} x_2' | y_2' | z_2' \\ x_1' | y_1' | z_1' \end{array} \right|, \tag{90}$$

además

$$T_{zz} = \gamma\rho \tan^{-1} \left(\frac{(x-x')(y-y')}{(z-z')r} \right) \left| \begin{array}{c} x_2' | y_2' | z_2' \\ x_1' | y_1' | z_1' \end{array} \right|. \tag{91}$$

Para el caso de las derivadas $\alpha \neq \beta$ tenemos que (76) se expresa como

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = 3\gamma\rho \iiint_D \frac{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} dv'. \tag{92}$$

En el caso de las coordenadas cruzadas xy , tenemos que (92) es

$$T_{xy} = 3\gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \frac{(x-x')(y-y')}{r^5} dx' dy' dz'. \tag{93}$$

Podemos expresar (93) de la siguiente manera

$$T_{xy} = 3\gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \frac{(x-x')(y-y')}{r} \frac{1}{r^4} dx' dy' dz', \quad (94)$$

integrando (94) con respecto a x' tenemos que

$$T_{xy} = \gamma\rho \int_{z'} \int_{y'} \frac{(y-y')}{r^3} \Big|_{x'_1}^{x'_2} dy' dz'. \quad (95)$$

Integrando ahora (95) con respecto a z' y con ayuda de la fórmula (83) tenemos que

$$T_{xy} = -\gamma\rho \int_{y'} \frac{(y-y')(z-z')}{r((x-x')^2 + (y-y')^2)} dy' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}. \quad (96)$$

Arreglando el integrando (96) tanto arriba como abajo en tenemos

$$\begin{aligned} T_{xy} &= \gamma\rho \int_{y'} \frac{(y-y')(r - (z-z') - r)}{r((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (z-z')^2)} dy' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\ &= \gamma\rho \int_{y'} \frac{(y-y')(r - (z-z'))}{r(r^2 - (z-z')^2)} dy' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} - \gamma\rho \int_{y'} \frac{(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\ &= \gamma\rho \int_{y'} \frac{(y-y')}{r(r + (z-z'))} dy' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} - \gamma\rho \int_{y'} \frac{(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dy' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}, \quad (97) \end{aligned}$$

la segunda integral de la parte derecha es igual a cero al evaluarse en z' , por lo tanto, integrando con respecto a y' la ecuación (97) queda

$$\begin{aligned} T_{xy} &= \gamma\rho \int_{y'} \frac{(y-y')}{r(r + (z-z'))} dy' \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2} \\ &= -\gamma\rho \ln(r + (z-z')) \Big|_{x'_1}^{x'_2} \Big|_{y'_1}^{y'_2} \Big|_{z'_1}^{z'_2}. \quad (98) \end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento para las componentes xz y yz , tenemos

$$T_{xz} = -\gamma\rho \ln(r + (y - y')) \left| \begin{array}{c|c|c} x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ \hline x'_1 & y'_1 & z'_1 \end{array} \right|, \quad (99)$$

además

$$T_{yz} = -\gamma\rho \ln(r + (x - x')) \left| \begin{array}{c|c|c} x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ \hline x'_1 & y'_1 & z'_1 \end{array} \right|. \quad (100)$$

Por lo tanto, el Tensor de Gradiente de Gravedad en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{T} = \gamma\rho \begin{bmatrix} \tan^{-1}\left(\frac{(z-z')(y-y')}{r(x-x')}\right) & -\ln(r + (z - z')) & -\ln(r + (y - y')) \\ -\ln(r + (z - z')) & \tan^{-1}\left(\frac{(x-x')(z-z')}{r(y-y')}\right) & -\ln(r + (x - x')) \\ -\ln(r + (y - y')) & -\ln(r + (x - x')) & \tan^{-1}\left(\frac{(x-x')(y-y')}{r(z-z')}\right) \end{bmatrix} \left| \begin{array}{c|c|c} x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ \hline x'_1 & y'_1 & z'_1 \end{array} \right|. \quad (101)$$

Apéndice B. Gradientes conjugados

B.1. Gradientes conjugados

El método de los gradientes conjugados es uno más de los diferentes métodos iterativos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales grandes de la forma estándar

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (102)$$

donde \mathbf{x} es un vector desconocido, \mathbf{b} es un vector conocido y \mathbf{A} es una matriz simétrica positiva definida conocida.

Una matriz positiva definida es un tipo especial de matriz que cumple estrictamente la siguiente definición:

- Una matriz \mathbf{A} es positiva definida si, para cualquier vector diferente de cero \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0. \quad (103)$$

Es decir, resultado del producto interior en (103) debe ser un número real positivo y diferente de cero. Para entender este concepto más detalladamente revisemos un poco la teoría que lo sustenta.

B.1.1. La forma cuadrática

Una forma cuadrática es una función cuadrática de un vector con la forma

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}, \quad (104)$$

donde A es una matriz, x y b son vectores. La idea de las formas cuadráticas es introducida y usada para derivar los métodos del descenso más rápido (steepest descent), direcciones conjugadas (conjugate directions) y gradientes conjugados (conjugate gradients), (Shewchuck, 1994).

$$f'(x) = Ax - b. \quad (105)$$

Para obtener la ecuación (102), sólo tenemos que igualar a cero el gradiente definido en (105); esto significa $Ax = b$ es un punto crítico de $f(x)$, es decir, $Ax = b$ puede resolverse encontrando un vector x tal que minimice a $f(x)$.

La figura geométrica que describe la forma cuadrática representada por la ecuación (104) corresponde a una paraboloides elíptico que mostramos en la Figura 50.

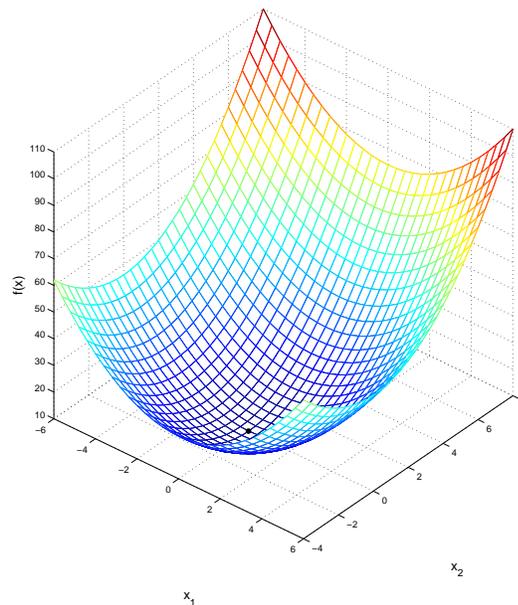


Figura 50: Gráfica de la forma cuadrática $f(x)$ correspondiente a un paraboloides elíptico. El punto mínimo de esta superficie es la solución a $Ax = b$.

La razón principal por la que un paraboloides elíptico es la forma cuadrática que representa adecuadamente la minimización de (104) consiste en que a diferencia de otras formas cuadráticas (por ejemplo la silla de montar) sólo tiene un punto mínimo, siendo este punto tanto el mínimo global como el mínimo local, esto implica que no tenemos que preocuparnos por otros criterios de minimización como por ejemplo el criterio de la segunda derivada para encontrar el punto que minimice a (105).

La Figura 51 nos muestra un mapa de contorno correspondiente a la Figura 50 y en ella podemos observar las superficies de nivel y el punto solución del sistema representado en la ecuación (102)

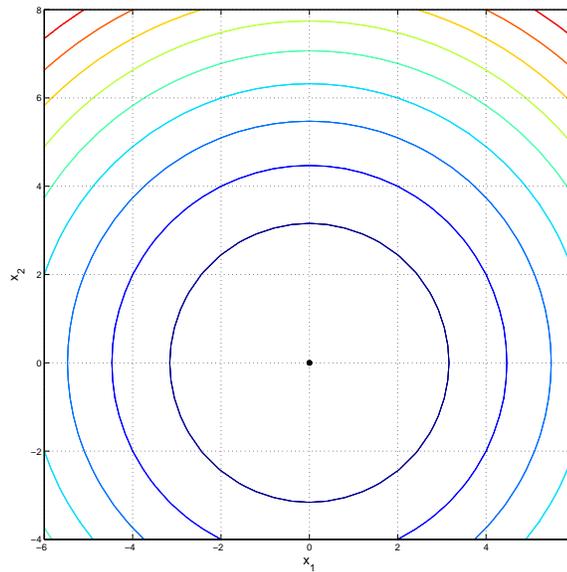


Figura 51: Superficies de nivel del paraboloides elíptico $f(x)$. Cada curva elipsoidal tiene una $f(x)$ constante y el punto en el origen es la solución de $Ax = b$

B.1.2. El método del descenso más rápido (steepest descent)

El método de los gradientes conjugados está basado en el método de descenso más rápido (steepest descent) y como en éste la idea principal es encontrar un mínimo que sea la solución del sistema de la manera más eficiente mediante el menor número de operaciones posibles para llegar a una solución satisfactoria.

En el método del descenso más rápido, comenzamos en un punto arbitrario x_0 y nos deslizamos hacia abajo al fondo del paraboloide. Tomamos una serie de pasos x_1, x_2, \dots , hasta que estamos suficientemente cerca de la solución. Tenemos que la dirección en que f decrece más rápidamente es la opuesta a $f'(\mathbf{x})$ y de acuerdo con la ecuación (105), esta dirección es $-f'(\mathbf{x}_i) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i$ (Schewchuck, 1994).

Observemos también que en cada paso que damos tenemos cierto *error* $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}$, que es un vector que nos indica qué tan lejos estamos de la solución. También contamos con el *residual* $\mathbf{r}_i = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i$ indica qué tan lejos estamos del valor correcto de \mathbf{b} (Schewchuck, 1994). Estas propiedades nos llevan a enunciar que

- $\mathbf{r}_i = -\mathbf{A}\mathbf{e}_i = -f'(\mathbf{x}_i)$ es la dirección del descenso más rápido.

Supongamos que comenzamos en un punto x_0 . Nuestro primer paso a lo largo de la dirección del descenso más rápido, es decir, elegimos el punto

$$x_1 = x_0 + \alpha r_0. \quad (106)$$

Necesitamos dar un paso que nos deje en la mejor dirección posible, así que elegimos α tal que minimice f a lo largo de una línea, este procedimiento se llama *línea de búsqueda* (search line).

Tenemos que α minimiza a $f(\mathbf{x})$ cuando la *derivada direccional* es igual a cero. Por la regla de la cadena tenemos que $\frac{d}{d\alpha} f(\mathbf{x}_1) = f'(\mathbf{x}_1)^T \frac{d}{d\alpha} \mathbf{x}_1 = f'(\mathbf{x}_1)^T \mathbf{r}_0$; igualando esta expresión a cero nos resulta que α puede elegirse de tal forma que \mathbf{r}_0 y $f'(\mathbf{x}_1)$ son ortogonales.

Existe una razón por la que esperamos que estos vectores sean ortogonales en el mínimo; en este punto $f(\mathbf{x})$ es minimizada donde la proyección es cero, esto es, el punto en que el gradiente es ortogonal a la línea de búsqueda como podemos ver en la Figura 52.

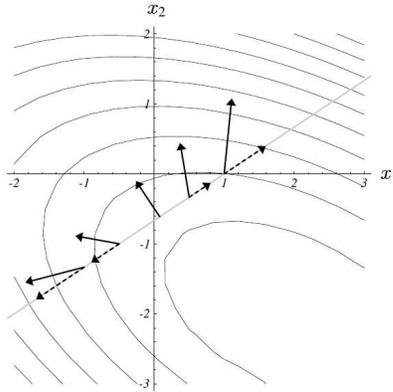


Figura 52: El gradiente de f' es representado en algunas localidades a lo largo de la línea de búsqueda (flechas sólidas). Cada proyección del gradiente en la línea también se muestra (flechas punteadas). Los vectores de gradiente representan la dirección del incremento máximo de f' , y las proyecciones representan la velocidad de una línea de búsqueda transversa. En la búsqueda de línea, f es minimizada donde el gradiente es ortogonal a la línea de búsqueda. Tomada de Schewchuck, 1994.

Para determinar α , notamos que $f'(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{r}_1$, y así

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}_0^T \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0}.$$

Utilizando todo lo mencionado anteriormente, podemos escribir el algoritmo para el método del descenso más rápido

Método del Descenso más Rápido

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i,$$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{A} \mathbf{r}_i},$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{r}_i.$$

El algoritmo anterior requiere dos multiplicaciones matriz-vector por cada iteración; afortunadamente, una puede eliminarse. Premultiplicando ambos lados la tercera ecuación por $-\mathbf{A}$ y sumando \mathbf{b} , tenemos

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{r}_i. \quad (107)$$

Si bien el residual sigue siendo necesario para calcular r_0 , la ecuación (107) puede usarse para cada iteración de aquí en adelante. La desventaja del uso de esta recurrencia es que la secuencia definida por la ecuación (107) es generada sin realimentación del valor de x_i , así que la acumulación del redondeo del error del punto flotante puede causar que x_i converja a algún punto ya sea cerca o lejos de la solución x .

B.1.3. Vectores propios y valores propios

Los métodos iterativos frecuentemente dependen de la aplicación de una matriz B a un vector propio v una y otra vez; cuando esto sucede puede pasar una de dos cosas

- Si $|\lambda| < 1$, entonces $B^i v = \lambda^i v$ se desvanecerá cuando i se aproxime al infinito.
- Si $|\lambda| > 1$, entonces $B^i v$ crecerá al infinito

La primera de estas condiciones implica que si las magnitudes de todos los valores propios son más pequeñas que uno, $B^i v$ convergerá a cero, a causa de que los vectores propios que componen x convergen a cero cuando B es aplicada repetidamente. La segunda condición nos dice que si uno de los valores propios tiene una magnitud más grande que uno, x divergirá al infinito. Por lo tanto, es necesario que además de ser menores en magnitud que la unidad, los valores propios de una matriz positiva definida sean todos positivos pues sólo así podemos asegurar que el sistema converge.

B.1.4. Convergencia del método del descenso más rápido

Para señalar el límite del método del descenso más rápido en el caso general, definiremos la *norma de energía (energy norm)* $\|e\|_A = (e^T A e)^{1/2}$. Minimizar $\|e_i\|_A$ es equivalente a minimizar $f(x_i)$. Con esta norma tenemos que

$$\begin{aligned} \|e_{i+1}\|_A^2 &= e_{i+1}^T A e_{i+1} \\ &= \|e_i\|_A^2 \omega^2, \quad \omega^2 = 1 - \frac{\left(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^2\right)^2}{\left(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j^3\right) \left(\sum_j \xi_j^2 \lambda_j\right)}. \end{aligned} \tag{108}$$

El análisis consiste en encontrar un límite superior para ω , esto significa que el término que se encuentra después del signo negativo debe ser lo más cercano a cero posible, esto nos asegura que el error actual es igual al error anterior y con ello tenemos la solución o en su defecto un resultado cercano.

Definamos el *número de condición espectral (spectral condition number)* de \mathbf{A} como $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min} \geq 1$.

La pendiente de e_i (relativa al sistema coordenado definido por los vectores propios), que depende del punto de inicio, es denotada por $\mu = \xi_{max}/\xi_{min}$. Así, tenemos

$$\omega^2 = 1 - \frac{(\kappa^2 + \mu^2)^2}{(\kappa + \mu^2)(\kappa^3 + \mu^2)}. \quad (109)$$

Manteniendo κ constante observamos que (109) es máxima cuando $\mu \geq \kappa$. Un límite superior para ω (correspondiente al peor caso de puntos de inicio) se encuentra poniendo $\mu^2 = \kappa^2$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{(\kappa - 1)^2}{(\kappa + 1)^2}, \\ \omega &\leq \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}. \end{aligned} \quad (110)$$

Los resultados para la convergencia del método de descenso más rápido son

$$\|e_i\|_{\mathbf{A}} \leq \|e_0\|_{\mathbf{A}}, \quad (111)$$

y

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{f(x_0) - f(x)} \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{2i}.$$

B.1.5. Conjugación

Con el fin de tener una dirección adecuada para el descenso más rápido y así evitar dar dos o más pasos en la misma dirección que pasos anteriores, elegimos un conjunto ortogonal de *direcciones de búsqueda (search directions)* $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}$. En cada dirección de búsqueda

da, tomamos un paso que es la longitud adecuada para alinearlo igualmente con \mathbf{x} y así hasta n pasos. El problema con esta técnica es que tenemos que saber previamente la forma de \mathbf{e}_i para calcular α_i , lo que generalmente no es posible.

La solución a este problema es hacer las direcciones de búsqueda *A-ortogonales* en lugar de ortogonales. Dos vectores \mathbf{d}_i y \mathbf{d}_j son *A-ortogonales* o *conjugados* si

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = 0. \quad (112)$$

La Figura 53 muestra cómo se ven los vectores *A-ortogonales*.

La condición de *A-ortogonalidad* expresada en (112) es más general que la ortogonalidad que utilizamos comúnmente, la diferencia fundamental consiste en que la matriz \mathbf{A} es una matriz identidad en la ortogonalidad común y en la *A-ortogonalidad* la matriz es no identidad. Una manera sencilla de explicarlo consiste en imaginar que podemos estirar las elipses correspondientes a las superficies de nivel en la Figura 53.a hasta lograr convertirlas en círculos concéntricos como los de la Figura 53.b, es decir, de alguna manera podemos hacer que la matriz \mathbf{A} expresada en (112) se convierta en una matriz identidad.

Necesitamos que \mathbf{e}_{i+1} sea *A-ortogonal* a \mathbf{d}_i . Esta condición de ortogonalidad es equivalente a encontrar el punto mínimo a lo largo de las direcciones de búsqueda \mathbf{d}_i .

Tenemos que α_i cuando las direcciones de búsqueda son *A-ortogonales* es

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_i} \\ &= \frac{\mathbf{d}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_i}. \end{aligned} \quad (113)$$

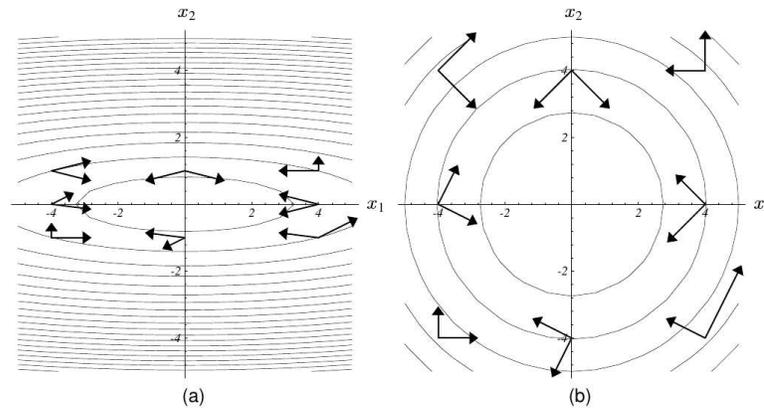


Figura 53: Vectores *A-ortogonales*.

B.1.6. Conjugación Gram-Schmidt

Sabemos que podemos calcular α_i mediante \mathbf{e}_{i+1} y un conjunto de direcciones de búsqueda *A-ortogonales* $\{\mathbf{d}_i\}$. Para calcular este conjunto, nos ayudamos de un proceso ampliamente utilizado en el álgebra lineal; el denominado *proceso de conjugación Gram-Schmidt*.

Supongamos que tenemos un conjunto de n vectores linealmente independientes $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$. Para construir \mathbf{d}_i tomamos \mathbf{u}_i y quitamos cualquier componente que no sea *A-ortogonal* a los i vectores previos. En otras palabras, sea $\mathbf{d}_0 = \mathbf{u}_0$, y para $i > 0$, tenemos

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{u}_i + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} \mathbf{d}_k, \quad (114)$$

donde los β son definidos para $i > k$. Su expresión es

$$\beta_{ij} = -\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j}. \quad (115)$$

La dificultad de usar la conjugación de Gram-Schmidt es que todos los vectores anteriores deben guardarse en la memoria para construir otro nuevo, y además son requeridas $O(n^3)$ operaciones para generar el conjunto completo.

B.1.7. Condición óptima del término de error

Para encontrar el valor e_i que sea la mejor solución en el espacio de configuraciones en que se encuentra, necesitamos encontrar el valor que minimiza a $\|e_i\|_A$.

Sea D_i el subespacio i -dimensional $\text{span}\{\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{i-1}\}$; el valor e_i se elige de $e_0 + D_i$, el cual es el valor de $e_0 + D_i$ que minimiza a $\|e_i\|_A$.

Podemos expresar el término del error como una combinación lineal de direcciones de búsqueda $(e_i = e_0 + \sum_{j=i}^{n-1} \delta_j \mathbf{d}_j)$ y con ello su norma energética como una sumatoria

$$\begin{aligned} \|e_i\|_A &= \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \delta_j \delta_k \mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_k \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j^2 \mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j. \end{aligned}$$

Cada término de esta sumatoria se asocia con una dirección de búsqueda que aún no ha sido atravesada. Cualquier otro vector elegido e de $e_0 + D_i$ debe tener estos mismos términos en su expansión.

En cada paso, el hiperplano $x_0 + D_i$ es tangente al elipsoide en el cual x_0 se encuentra, también el residual en cualquier punto es ortogonal a la superficie elipsoidal en ese punto. Se sigue que r_i también es ortogonal a D_i , es decir,

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{r}_j = 0, \quad i < j. \quad (116)$$

Es decir, el residual $r_i = -\mathbf{A}e_i$ es siempre ortogonal a todas las direcciones de búsqueda anteriores y también es ortogonal a los residuales previos.

A consecuencia de que las direcciones de búsqueda son construidas de los vectores \mathbf{u} , el subespacio abarcado por $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$ es \mathbf{D}_i , y el residual \mathbf{r}_i es ortogonal a esos vectores previos \mathbf{u} como lo demuestra el producto interior de la ecuación (114) y \mathbf{r}_j :

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{r}_j = \mathbf{u}_i^T \mathbf{r}_j + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} \mathbf{d}_k^T \mathbf{r}_j \quad (117)$$

$$0 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{r}_j \quad i < j \quad (118)$$

De la ecuación (117)

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{r}_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{r}_i. \quad (119)$$

Nótese que el número de productos matriz-vector por iteración puede reducirse a uno por el uso de una recurrencia para encontrar el residual:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1} &= -\mathbf{A}\mathbf{e}_{i+1} & (120) \\ &= -\mathbf{A}(\mathbf{e}_i + \alpha_i \mathbf{d}_i) \\ &= \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{d}_i. \end{aligned}$$

B.1.8. El Método de los Gradientes Conjugados

El método de los gradientes conjugados es simplemente el método de direcciones conjugadas donde las direcciones de búsqueda son construidas por la conjugación de los residuales (esto es, poniendo $\mathbf{u}_i = \mathbf{r}_i$) (Schewchuk, 2004).

A causa de que los vectores de búsqueda se forman de los residuales, el subespacio $\text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}\}$ es igual a \mathbf{D}_i . Cada residual es ortogonal a cada dirección de búsqueda previa así, la ecuación (118) se transforma en

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = 0, \quad i \neq j. \quad (121)$$

La ecuación (120) muestra que cada nuevo residual \mathbf{r}_i es la combinación lineal de los

residuales previos $\mathbf{A}\mathbf{d}_{i-1}$ y $\mathbf{d}_{i-1} \in \mathbf{D}_i$, esto implica que cada nuevo subespacio \mathbf{D}_{i+1} es formado de la unión del subespacio previo \mathbf{D}_i y el subespacio $\mathbf{A}\mathbf{D}_i$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_i &= \text{span}\{\mathbf{d}_0, \mathbf{A}\mathbf{d}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{d}_0\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{r}_0\},\end{aligned}$$

además la demostración de esta ecuación nos asegura que la secuencia \mathbf{x}_k converge a un punto solución en a lo sumo en n pasos (ver Nocedal, 2006).

Este subespacio es llamado un *subespacio de Krilov*, un subespacio creado por la aplicación repetitiva de una matriz a un vector. $\mathbf{A}\mathbf{D}_i$ está incluida en \mathbf{D}_{i+1} y con ello el residual \mathbf{r}_{i+1} es ortogonal a \mathbf{D}_{i+1} (ecuación (116)), lo que implica que \mathbf{r}_{i+1} es *A-ortogonal* a \mathbf{D}_i . La conjugación Gram-Schmidt se vuelve sencilla porque \mathbf{r}_{i+1} ya es *A-ortogonal* a todas las direcciones de búsqueda previas excepto a \mathbf{d}_i .

De la ecuación (115) tenemos que las constantes de Gram-Schmidt son $\beta_{ij} = -\mathbf{r}_i^T \mathbf{A}\mathbf{d}_j / \mathbf{d}_j^T \mathbf{A}\mathbf{d}_i$ y tomando el producto interior de \mathbf{r}_i y la ecuación (120) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_{j+1} &= \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{r}_i^T \mathbf{A}\mathbf{d}_j \\ \alpha_j \mathbf{r}_i^T \mathbf{A}\mathbf{d}_j &= \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_{j+1}\end{aligned}$$

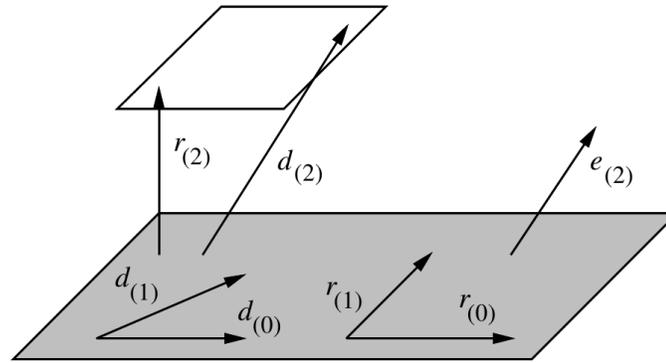


Figura 54: En el método de los gradientes conjugados, cada nuevo residual es ortogonal a todos los residuales previos y direcciones de búsqueda; cada nueva dirección de búsqueda es construida (del residual) para ser *A-ortogonal* a todos los previos residuales y direcciones de búsqueda. Los puntos finales de r_2 y d_2 están en un plano paralelo a D_2 (el subespacio sombreado). En gradientes conjugados, d_2 es una combinación lineal de r_2 y d_1 . Tomado de Schewchuk, 1994.

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i, & i = j, \\ -\frac{1}{\alpha_{i-1}} \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i, & i = j + 1, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

$$\therefore \beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i-1}} \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_{i-1}^T \mathbf{A} \mathbf{d}_{i-1}}, & i = j + 1, \\ 0, & i > j + 1. \end{cases}$$

La mayoría de los términos de β_{ij} desaparecen.

No es necesario guardar todos los vectores viejos para asegurar la *A-ortogonalidad* de los nuevos vectores de búsqueda. La mayor ventaja es que hace a CG un algoritmo importante, porque la complejidad del espacio y del tiempo de iteración son reducidas de $O(n^2)$ a $O(m)$, donde m es el número de entradas diferentes de cero de A .

Si $\beta_i = \beta_{i,i-1}$ y simplificando

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_{i-1}^T \mathbf{r}_{i-1}} \\ &= \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{r}_{i-1}^T \mathbf{r}_{i-1}}.\end{aligned}$$

Poniendo todo junto el Método de los Gradientes Conjugados es:

Gradiente Conjugado

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0,$$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{A}\mathbf{d}_i},$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{d}_i,$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{d}_i,$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{d}_i,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i},$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1} \mathbf{d}_i.$$

B.1.9. Análisis de la convergencia de gradientes conjugados

El análisis de convergencia es importante porque gradientes conjugados es usado comúnmente en problemas muy grandes que no es factible correr hasta n iteraciones.

En cada paso de gradientes conjugados, el valor de \mathbf{e}_i es elegido de $\mathbf{e}_0 + \mathbf{D}_i$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_i &= \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{r}_0\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{A}\mathbf{e}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{e}_0, \mathbf{A}^3\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{A}^i\mathbf{e}_0\},\end{aligned}$$

los subespacios de Krilov tal como este tienen como propiedad que para una i fija el término

de error tiene la forma

$$\mathbf{e}_i = \left(\mathbf{I} + \sum_{j=1}^i \psi_j \mathbf{A}^j \right) \mathbf{e}_0. \quad (122)$$

La expresión entre paréntesis de (122) puede expresarse como un polinomio. Sean $P_i(\lambda)$ un polinomio de grado i .

Ahora, expresamos el término de error como

$$\mathbf{e}_i = P_i(\mathbf{A})\mathbf{e}_0, \quad (123)$$

$P_i(0) = 1$. Gradientes conjugados elige este polinomio cuando elige los coeficientes ψ_j . Examinemos el efecto de aplicar este polinomio a \mathbf{e}_0 . Expresamos \mathbf{e}_0 como una combinación lineal de vectores propios unitarios

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{v}_j,$$

y encontramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \sum_j \xi_j P_i(\lambda_j) \mathbf{v}_j \\ \|\mathbf{e}_i\|_A^2 &= \sum_j \xi_j^2 [P_i(\lambda_j)]^2 \lambda_j. \end{aligned} \quad (124)$$

Gradientes conjugados encuentra el polinomio que minimiza (124), pero la convergencia es solamente tan buena como la convergencia del peor vector propio. Sea $\Lambda(\mathbf{A})$ el conjunto de los valores propios de \mathbf{A} , tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_i\|_A^2 &\leq \min_{P_i} \max_{\lambda \in \Lambda(A)} [P_i(\lambda)]^2 \sum_j \xi_j^2 \lambda_j \\ &= \min_{P_i} \max_{\lambda \in \Lambda(A)} [P_i(\lambda)]^2 \|\mathbf{e}_0\|_A^2, \end{aligned} \quad (125)$$

es decir,

- El número de iteraciones requeridas para calcular una solución exacta es a lo sumo el número de distintos valores propios (Nocedal, 2006).
- CG converge más rápidamente cuando los valores propios están agrupados juntos que cuando están distribuidos irregularmente entre λ_{min} y λ_{max} porque le es más fácil a gradientes conjugados elegir un polinomio que haga a la ecuación (125) pequeña (Nocedal, 2006).

B.1.9.1. Polinomios de Chebyshev

Una aproximación más útil es minimizar la ecuación (125) sobre el rango $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ que en un número infinito de puntos. Los polinomios que cumplen esto están basados en los Polinomios de Chebyshev.

Los Polinomios de Chebyshev tienen la propiedad $|T_i(\omega)| \leq 1$ en el dominio $\omega \in [-1, 1]$, además que $|T_i(\omega)|$ es máximo en el dominio $\omega \notin [-1, 1]$.

La ecuación (125) es minimizada si elegimos

$$P_i(\lambda) = \frac{T_i\left(\frac{\lambda_{max} + \lambda_{min} - 2\lambda}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right)}{T_i\left(\frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right)}.$$

Este polinomio tiene las propiedades oscilantes de los Polinomios de Chebyshev en el dominio $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$.

El denominador impone que $P_i(0) = 1$. El numerador tiene un valor mínimo en el intervalo entre λ_{min} y λ_{max} , así, de la ecuación (125) tenemos

$$\begin{aligned} \|e_i\|_A &\leq T_i \left(\frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} \right)^{-1} \|e_0\|_A \\ &= T_i \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right)^{-1} \|e_0\|_A \\ &= 2 \left[\left(\frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1} \right)^i + \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^i \right]^{-1} \|e_0\|_A. \end{aligned} \quad (126)$$

La segunda suma dentro de los corchetes cuadrados converge a cero como i se incrementa por lo que expresamos la convergencia de gradientes conjugados con la desigualdad

$$\|e_i\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^i \|e_0\|_A. \quad (127)$$

En la práctica, gradientes conjugados usualmente converge más rápidamente que lo que sugeriría la ecuación (127), a causa de la cercanía o repetición de valores propios o buenos puntos de comienzo.

B.1.10. Preacondicionamiento

El Preacondicionamiento es una técnica para mejorar el número de condición de una matriz. Supongamos que \mathbf{M} es una matriz simétrica y positiva definida que se aproxima a \mathbf{A} pero que es más fácil de invertir. Podemos resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ indirectamente resolviendo

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}. \quad (128)$$

Si $\kappa(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}) \ll \kappa(\mathbf{A})$, o los valores propios de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ están mejor agrupados que los de \mathbf{A} , podemos resolver iterativamente la ecuación (128) más rápidamente que en el problema original. La trampa es que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ generalmente no es simétrica o definida aún si \mathbf{M} y \mathbf{A} lo son.

Podemos salvar esta dificultad a causa de que para cada matriz \mathbf{M} simétrica y positiva definida existe (no necesariamente única) una matriz \mathbf{E} que tiene la propiedad $\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{M}$. (Tal matriz \mathbf{E} puede obtenerse, por ejemplo, por factorización de Cholesky). Las matrices $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ y $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}$ tienen los mismos valores propios.

Esto es cierto a causa de que si \mathbf{v} es un vector propio de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ con valor propio λ , entonces $\mathbf{E}^T\mathbf{v}$ es un vector propio de $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}^{-T}$ con valor propio λ .

El sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se transforma en

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}^T\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{b}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{E}^T\mathbf{x},$$

que podemos resolver primero para $\hat{\mathbf{x}}$ y luego para \mathbf{x} . A causa de que $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}^T$ es simétrica y positiva definida, $\hat{\mathbf{x}}$ puede encontrarse por gradientes conjugados.

Usando las identidades $\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{E}^T\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{E}^{-T}\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}$, podemos derivar *Método de Gradiente Conjugado Preacondicionado*:

Gradiente Conjugado Preacondicionado

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0,$$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_i^T\mathbf{A}\mathbf{d}_i},$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i\mathbf{d}_i,$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i\mathbf{A}\mathbf{d}_i,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_i},$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1}\mathbf{d}_i.$$

La *efectividad* de un *preacondicionador* M es determinada por el número de condición de $M^{-1}A$ y ocasionalmente por sus valores propios agrupados. El problema reside en encontrar un *preacondicionador* que aproxime A suficientemente bien para mejorar la convergencia lo suficiente para reducir el costo del producto $M^{-1}r_i$ una vez por iteración.

Intuitivamente, el *preacondicionamiento* es un intento para estirar la forma cuadrática para hacerla parecer más esférica, tal que los valores propios estén más cerca uno del otro.

El *preacondicionador* más simple es una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son idénticas a los de A . El proceso de aplicación de este *preacondicionador* conocido *preacondicionamiento diagonal* o *preacondicionamiento de Jacobi* es equivalente a escalar la forma cuadrática a lo largo de los ejes coordenados. Invertir una matriz diagonal es trivial pero frecuentemente es un pobre *preacondicionador*.

Un *preacondicionador* más elaborado es el *preacondicionador* incompleto de Cholesky. La *factorización de Cholesky* es una técnica para factorizar una matriz A en la forma LL^T , donde L es una matriz triangular inferior. A es aproximada por el producto $\hat{L}\hat{L}^T$ donde \hat{L} puede restringirse para tener el mismo patrón de elementos como A ; otros elementos de L son desechados. Desafortunadamente, este *preacondicionador* es no siempre estable (Shewchuk, 1994).