

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación
en Instrumentación y Control**

Diseño de trayectorias caóticas en robots móviles

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Juan José Cetina Denis

Ensenada, Baja California, México

2017

Tesis defendida por

Juan José Cetina Denis

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. César Cruz Hernández

Codirector del Comité

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector del Comité

Dr. Vasili Spirine

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Gustavo Olague Caballero



Dr. Miguel Ángel Alonso Arevalo

Coordinador del Programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Juan José Cetina Denis © 2017

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor

Resumen de la tesis que presenta **Juan José Cetina Denis** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Diseño de trayectorias caóticas en robots móviles

Resumen aprobado por:

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de Tesis

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector de Tesis

En este trabajo de tesis se aborda el problema de diseño de trayectorias caóticas en robots móviles diferenciales. En particular, se utiliza como base el mapa caótico de Hénon, el cual induce comportamientos caóticos mediante sincronización a las velocidades lineales y angulares de un robot móvil diferencial tipo Khepera III. Una de las posibles aplicaciones, aprovechando las propiedades del caos, es el patrullaje. Se reportan tanto resultados numéricos como experimentales. Por último, se demuestra que las trayectorias resultantes de la sincronización entre los estados del mapa caótico de Hénon y las velocidades lineales y angulares del robot Khepera III son impredecibles.

Palabras Clave: **Caos, Robot móvil diferencial, Robot Khepera III, Trayectorias caóticas, Aplicación al patrullaje.**

Abstract of the thesis presented by **Juan José Cetina Denis** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Electronics and Telecommunications in Electronics and Telecommunications.

Chaotic trajectory design for mobile robots

Abstract approved by:

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

Dr. Adrián Arellano Delgado

Thesis Co-Director

In this work we approach the chaotic trajectory design for mobile robots problem. In particular, chaotic behavior is induced in a Khepera III differential robot by synchronizing the states of the Henon chaotic map with its linear and angular velocities. A possible application, using the properties of chaotic systems, is patrolling. In this work, numerical and experimental results are reported. In addition, we show that the resulting trajectories from the synchronization between the states of the Henon chaotic map and the linear and angular velocities of the Khepera III differential robot are unpredictable.

Keywords: Chaos, Differential mobile robot, Khepera III robot, Chaotic trajectories, Patrolling applications.

Dedicatoria

A mi madre y a mi futura esposa, los dos amores de mi vida.

Agradecimientos

A ...

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, que me dió la oportunidad de superarme y me permitió encontrar algo más a lo que aspirar.

A mi familia, cuyo apoyo incondicional fue indispensable. En especial a mi madre Cecilia Noemí por haber estado ahí siempre que lo necesité.

Al amor de mi vida y futura esposa, Mariana Alejandra Chan Ley, por todo el tiempo, paciencia, cariño, apoyo, consejos y momentos inolvidables que me ha brindado. Sin ella este trabajo no hubiera visto su fin.

A mis directores de tesis, el Dr. César Cruz Hernández y el Dr. Adrián Arellano Delgado, quienes me guiaron con paciencia a lo largo de este trabajo. Sus consejos y enseñanzas fueron invaluable y me inculcaron amor por el área y la investigación.

A los miembros de mi comité de tesis, Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez, Dr. Vasili Spirine y Dr. Gustavo Olague Caballero, por el tiempo, sugerencias y aportaciones que me permitieron realizar un trabajo de calidad.

A mis compañeros de estudio en CICESE, que recorrieron este arduo camino conmigo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) a través del proyecto de investigación en ciencia básica entre instituciones, Ref. 166654 "Sincronización de sistemas complejos y algunas aplicaciones".

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico necesario para realizar mis estudios de maestría.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	vii
Lista de tablas	ix
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	2
1.2 Justificación	3
1.3 Hipótesis	4
1.4 Objetivos	4
1.5 Organización de la tesis	5
Capítulo 2. Sistemas Caóticos	6
2.1 Características del caos	6
2.1.1 Mapa caótico de Hénon	7
2.2 Fractales	8
2.2.1 Dimensión fraccionaria	12
2.3 Aplicaciones de la teoría del caos en la ingeniería	13
2.4 Conclusiones del capítulo	15
Capítulo 3. Robot Móvil Diferencial	16
3.1 Modelo matemático del robot diferencial	16
3.1.1 Simulación de movimientos básicos	17
3.2 Conclusiones del capítulo	19
Capítulo 4. Resultados	20
4.1 Algoritmo generador de trayectorias caóticas	20
4.2 Resultados numéricos	25
4.2.1 Simulaciones	26
4.2.2 Porcentaje de cobertura del área de trabajo	28
4.2.3 Prueba 0-1 Gottwald-Melbourne para determinación de caos de la trayectoria del robot móvil	31
4.2.4 Prueba de conteo de cajas (“Box-Counting”)	33
4.2.5 Simulación: Aplicación a búsqueda y detección de objetos	39
4.3 Conclusiones del capítulo	44
Capítulo 5. Implementación experimental	45
5.1 Robot móvil Khepera III	45
5.2 Resultados experimentales	46
5.2.1 Porcentaje de cobertura experimental del área de trabajo	49
5.2.2 Prueba 0-1 Gottwald-Melbourne para resultados experimentales	50
5.2.3 Prueba de conteo de cajas (“Box-Counting”) para resultados experimentales	51
5.3 Conclusiones del capítulo	55
Capítulo 6. Conclusiones	56
6.1 Trabajo futuro	56
Literatura citada	58

Lista de figuras

Figura		Página
1	Serie de tiempo del primer estado de dos circuitos de Chua con diferentes condiciones iniciales.	7
2	Atractor de Lorenz.	8
3	Atractor caótico del mapa de Hénon generado con 1000 iteraciones.	9
4	Fractal de Mandelbrot.	9
5	Fractal natural formado por la línea divisoria entre el mar y la porción de tierra en una isla, Días Breca (2009).	10
6	Fractal sintético, Helecho de Barnsley.	11
7	Fractal generado por el método de Julia.	12
8	Vista superior de un robot móvil diferencial.	16
9	Movimientos básicos del robot diferencial.	18
10	Diagrama a bloques del algoritmo implementado para la generación de trayectorias caóticas para el robot móvil.	20
11	Histogramas de velocidades de las ruedas izquierda v_l y derecha v_r	22
12	Histogramas resultantes con dispersión de velocidades lineales de las ruedas izquierda vd_l y derecha vd_r	22
13	Trayectoria caótica del robot móvil generada por el algoritmo propuesto para $n = 20$	23
14	Delimitación del área de trabajo, mesa de 900 mm de ancho por 1500 mm de largo. Laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos.	24
15	Estrategia reflexiva de evasión de bordes del robot móvil diferencial.	25
16	Trayectoria del robot móvil con las mismas condiciones iniciales $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y diferente número de iteraciones: a) 10 iteraciones, b) 100 iteraciones, c) 300 iteraciones y d) 500 iteraciones.	27
17	Trayectorias generadas por el robot diferencial para diferentes condiciones iniciales con 100 iteraciones.	28
18	Porcentajes del área de trabajo cubiertas por el robot móvil diferencial para a) 100, b) 200 y c) 300 iteraciones.	29
19	Porcentajes del área de trabajo cubiertas por el robot móvil diferencial para diferentes condiciones iniciales arbitrarias para 200 iteraciones.	30
20	Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales $x_0 = 0, y_0 = 0$	32
21	Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales $x_0 = 0.01, y_0 = 0$	32
22	Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales $x_0 = 200, y_0 = 400$	32
23	Porcentajes de cobertura para diferentes tamaños de cuadro.	35

Figura	Página	
24	Resultado de la prueba de conteo de cajas para las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$	37
25	Resultado de la prueba de de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0$	38
26	Resultado de la prueba de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 200$, $y_0 = 400$	39
27	Resultados de búsqueda y detección de objetos para diferentes posiciones del objeto y condiciones iniciales del robot móvil: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$	40
28	Resultado de búsqueda y detección de un objeto con ubicación fija ($x_{obj} = 0$, $y_{obj} = 0$) y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial en el área de trabajo.	42
29	Resultado de búsqueda y detección de objeto con ubicación arbitraria y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial en el área de trabajo.	43
30	Robot móvil diferencial Khepera III, Laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos.	45
31	Software Motive ®.	47
32	Resultados experimentales: 3 diferentes trayectorias generadas por 3 diferentes condiciones iniciales del robot Khepera III.	48
33	Porcentajes del área de trabajo cubiertas por trayectorias del robot Khepera III generadas con diferentes condiciones iniciales.	49
34	Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales del inciso a).	50
35	Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales del inciso b).	50
36	Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales del inciso c).	51
37	Resultado experimental de la prueba de conteo de cajas del inciso a).	52
38	Resultado experimental de la prueba de conteo de cajas del inciso b).	53
39	Resultado experimental de la prueba de conteo de cajas del inciso c).	54

Lista de tablas

Tabla		Página
1	Porcentajes de cobertura del área de prueba con posiciones iniciales arbitrarias para 200 iteraciones.	31
2	Resultados numéricos de la prueba 0-1 de Gottwald-Melbourne.	33
3	Prueba de conteo de cajas para las condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 0$, $y_0 = 0$	36
4	Prueba de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0$	37
5	Prueba de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 200$, $y_0 = 400$	39
6	Resultados de búsqueda y detección de un objeto en diferentes posiciones y condiciones iniciales del robot móvil: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$	41
7	Resultados de búsqueda y detección de objeto con ubicación fija ($x_{obj} = 0$, $y_{obj} = 0$) y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial.	41
8	Resultados de búsqueda de objeto con ubicación y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial.	44
9	Resultados de la prueba 0-1 de Gottwald-Melbourne para resultados experimentales.	51
10	Prueba de conteo de cajas para experimento de las condiciones iniciales del inciso a).	51
11	Prueba de conteo de cajas para experimento de las condiciones iniciales del inciso b)).	53
12	Prueba de conteo de cajas para experimento de las condiciones iniciales del inciso c).	54

Capítulo 1. Introducción

En este capítulo se proporciona una introducción al estudio de los sistemas caóticos, así como el estado del arte y los objetivos generales y particulares de este trabajo de tesis. Se pretende dar al lector un panorama general de trabajos realizados en el pasado que involucran las propiedades de los sistemas caóticos y su importancia, de manera que se comprenda el alcance y la relevancia de esta tesis.

El caos es un término que ha acompañado a la humanidad desde el principio de su existencia. En el pensamiento popular, se asocia al caos con una situación azarosa que, generalmente, deriva en infortunio. El diccionario de la *Academia de la Lengua Española* define al caos como “estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la ordenación del cosmos; también lo define como confusión, desorden”.

La llamada teoría de caos nace de la mano de matemáticos interesados en la vinculación entre sistemas dinámicos y su topología, como Jules Henri Poincaré y Stephen Smale; de físicos de campos tan dispares como la meteorología o la astronomía, como Edward Lorenz y Michel Hénon, respectivamente; de biólogos estudiosos del crecimiento de poblaciones, como Robert May.

El estudio de la teoría de caos rápidamente se ha arraigado en la sociedad científica en las últimas décadas, al grado tal que se han creado diversas revistas científicas dedicadas al tema. Es una rama de las matemáticas que involucra el estudio de los sistemas dinámicos, los cuales se definen como un conjunto de elementos interconectados entre sí y destinados a cumplir una tarea específica. Este conjunto de elementos describe un comportamiento cuya evolución depende del tiempo, ya sea de forma explícita o implícita y de forma continua o discreta.

En la ciencia se aprovechan las características caóticas de algunos sistemas para crear caos y aplicarlo, por ejemplo, a las comunicaciones seguras Cruz-Hernández (2004), (Cruz-Hernández y Romero-Haros, 2008), el diseño de antenas o la planeación de trayectorias (Lazea y Lupu, 1997). Otros trabajos realizados en estas áreas se pueden ver en (Gámez-Guzmán *et al.*, 2009) y (Cardoza-Avenidaño *et al.*, 2012). Por otra parte, el uso de vehículos autónomos no tripulados es de gran interés en la sociedad y la comunidad científica ha encaminado sus esfuerzos para que estos autómatas sean capaces de realizar eficientemente tareas como el patrullaje, transportación, búsqueda, rescate, limpieza, entre otras (Khalil y Grizzle, 1996).

Por otra parte, la interacción entre la teoría del caos y la robótica móvil se estudió intensamente en la última década, debido a la riqueza de comportamientos dinámicos que caracterizan a los sistemas caóticos. Las dinámicas caóticas se pueden utilizar para guiar robots autónomos en exploración de terrenos, vigilancia, búsqueda, etc. La principal característica de los sistemas caóticos que se aprovecha para lograr estos objetivos eficientemente, es la sensibilidad a las condiciones iniciales, la cual permitirá al robot adoptar *trayectorias altamente impredecibles*.

En condiciones adversas, la impredecibilidad en la trayectoria de un robot es muy importante. Se puede diseñar una trayectoria caótica a un robot móvil para que éste siga una secuencia de puntos generados de manera aleatoria o de manera caótica. En ambos casos, entidades enemigas (en el caso de patrullaje) no podrían predecir la trayectoria futura, desconociendo las condiciones iniciales. Sin embargo, debido a su naturaleza determinista, el camino caótico representa una mejor opción. El motivo es que las entidades aliadas, conociendo las ecuaciones de estado y condiciones iniciales del sistema caótico, podrían predecir esta trayectoria y tomar las decisiones pertinentes para realizar la tarea que se requiera llevar a cabo.

1.1. Antecedentes

Los estudios de comportamientos de búsqueda de alimentos en grupos de animales (especialmente de las hormigas), son de gran ayuda en la solución de gran número de problemas abiertos, sobre todo de optimización. Recientemente, los biólogos han descubierto que las hormigas realizan actividades de búsqueda de manera caótica, ver por ejemplo (Li *et al.*, 2014), (Miramontes Vidal, 2000) y las referencias citadas dentro de este artículo.

Tratando de imitar este comportamiento caótico, se han realizado diversos trabajos en el diseño de trayectorias caóticas para robots móviles. En la literatura podemos encontrar diferentes soluciones al problema en cuestión. Nehmzow y Walker (Nehmzow y Walker, 2003) estudiaron el comportamiento de los robots móviles, aplicando algoritmos de evasión de obstáculos y seguimiento de paredes y observando cuantitativamente el movimiento de estos. Concluyeron que el comportamiento de estos robots es caótico.

Nakamura y Sekiguchi en (Nakamura y Sekiguchi, 2001) desarrollaron un método que integra las ecuaciones de movimiento del robot móvil y el sistema dinámico de Arnold para definir un sistema de control de lazo abierto utilizando variables de estado del sistema caótico. De manera similar, Bae, Lee y Gatton (Bae *et al.*, 2006) integraron los sistemas caóticos de *Lorenz*, *Hamilton* e *Hipercaótico* con el modelo matemático del robot diferencial para generar movimientos caóticos.

También, se ha estudiado el caso donde la trayectoria del robot consiste en una serie de puntos generada caóticamente. Volos, Kyprianidis y Stouboulos (Volos *et al.*, 2012), utilizando TRBG caótico (True Random Bit Generator) crearon puntos de seguimiento de manera caótica para ser seguidos por el robot y miden el porcentaje del terreno recorrido por sus sistemas dividiéndolo en celdas y midiendo la cantidad de veces que cada una es visitada, mientras que Filho y Macau (Martins-Filho *et al.*, 2005) (Martins-Filho y Macau, 2007) utilizan el mapa estándar (también conocido como el mapa de Taylor-Chirikov) para generar los puntos. Filho (Martins-Filho *et al.*, 2004) implementa los resultados obtenidos al utilizar el sistema de *Lorenz* en una simulación del robot móvil diferencial Khepera II.

Otro caso que se ha estudiado es cuando se requiere que el robot móvil siga, de manera caótica, la frontera de un área predeterminada para misiones de patrullaje (Curiac y Volosencu, 2014). En este caso, se utiliza el mapa de Hénon (adaptado utilizando transformaciones afines) para definir el movimiento caótico a través de la frontera.

De igual manera, se ha utilizado el mapa logístico como un generador de números aleatorios en (Li *et al.*, 2013) con el fin de definir la trayectoria del robot. En este caso, se mantiene la velocidad del robot constante, mientras que su dirección está determinada por el mapa logístico. Por otro lado, Lin y Huang (Lin *et al.*, 2009) combina los sistemas caóticos con *colmenas de abejas artificiales* (artificial bee colonies) para el diseño de trayectorias en robots móviles.

1.2. Justificación

En este trabajo de tesis se genera una trayectoria caótica en un robot móvil diferencial de manera numérica y experimental utilizando el mapa de Hénon para influir directamente en el comportamiento de las velocidades del robot. A diferencia de otros trabajos, en el algoritmo aquí propuesto no se hace uso directo del modelo matemático del robot móvil, si no que las trayectorias emergen del comportamiento de cada una de las entradas al sistema; en el caso del robot móvil diferencial estas entradas son las velocidades de los motores (como se describe en el capítulo 3). Una de las ventajas de este método es su sencillez y la facilidad que tiene de ser exportado hacia otros tipos de robots móviles, ya que solamente es necesario conocer el número de entradas que tenga el robot y un sistema caótico que cuente con esa misma cantidad de estados. Por ejemplo, un cuadracóptero que cuenta con cuatro motores necesitaría un sistema caótico de cuatro estados para poder aplicar este algoritmo.

1.3. Hipótesis

Es posible generar trayectorias no predecibles con base en sistemas caóticos, para robots móviles tipo Khepera III en aplicaciones prácticas de detección, búsqueda y rescate eficiente.

1.4. Objetivos

Con la realización de la presente tesis de maestría, se pretende alcanzar el siguiente objetivo general:

- Diseñar un algoritmo generador de trayectorias basadas en dinámicas caóticas para robots móviles tipo Khepera III con aplicaciones exploración eficiente de terrenos inhóspitos, detección rápida de objetos peligrosos y rescate de víctimas en catástrofes.

Objetivos particulares:

- Seleccionar el sistema caótico apropiado para el diseño de trayectorias en robots móviles tipo Khepera III.
- Realizar pruebas numéricas del comportamiento básico del modelo de robot móvil diferencial tipo Khepera III.
- Generar trayectorias basadas en dinámicas caóticas para robot móvil diferencial tipo Khepera III.
- Realizar aplicaciones en la exploración eficiente de terrenos inhóspitos, detección rápida de objetos peligrosos o rescate de víctimas en catástrofes.

Entre las contribuciones de este trabajo de tesis se encuentra el siguiente artículo:

J. J. Cetina-Denis, A. Arellano-Delgado, A. López-Parra, R. M. López-Gutiérrez, C. Cruz-Hernández
Diseño de trayectorias caóticas en robots móviles.
Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2016).
Medellín, Colombia. 12 - 15 de Octubre 2016. Pp 563-569.

Ademas de la participación en el evento:

J. J. Cetina-Denis, A. López-Parra, W. Pecasso-Rubio, E. Cosío.

Impartición del taller: *Sincronización de robots móviles*.

INGENIUM - Sexto Simposium Internacional Regional de Ingenieria Industrial.

Instituto Tecnológico Superior de Puerto Peñasco, Sonora. 12 - 15 de Abril 2016.

1.5. Organización de la tesis

Este trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 se discute acerca de los sistemas caóticos y sus propiedades, describiendo específicamente el mapa de Hénon y los fractales. En el capítulo 3 se describe el modelo matemático del robot diferencial, hablando particularmente de las características del robot Khepera III, el cual será utilizado en la etapa numérica y experimental de este trabajo. En el capítulo 4 se describen los experimentos realizados y se muestran los resultados numéricos obtenidos, demostrando la presencia de caos en las trayectorias generadas. En el capítulo 5 se muestran los experimentos y los resultados que se obtuvieron de manera experimental al aplicar el algoritmo diseñado en este trabajo de tesis al robot móvil diferencial Khepera III. Finalmente, en el capítulo 6 se mencionan las conclusiones y el trabajo futuro.

Capítulo 2. Sistemas Caóticos

En este capítulo se presentan las propiedades más importantes que distinguen a los sistemas caóticos. En particular, se describe el mapa caótico de Hénon y las ecuaciones de estado que rigen su comportamiento dinámico. Se habla también de los fractales, dando una definición de los mismos y sus características.

Para el lector interesado en profundizar en el tópico de caos, se recomienda consultar, por ejemplo, las referencias (Moon, 2008), (Williams, 1997), (Gleick, 1988), (Bertuglia y Vaio, 2005) y (Hilborn *et al.*, 1994).

2.1. Características del caos

La teoría de caos puede definirse como el estudio cualitativo del comportamiento dinámico aperiódico mostrado por algunos sistemas deterministas no lineales. Puede observarse su manifestación en gran cantidad de sistemas naturales e ingenieriles.

Los sistemas caóticos poseen características que los identifican, algunas de ellas son las siguientes:

- Presentan alta sensibilidad a las condiciones iniciales.
- Son deterministas, con comportamiento aparentemente aleatorio.
- Presentan transitividad topológica.
- Presentan comportamientos oscilatorios, pero no periódicos.

Alta sensibilidad a las condiciones iniciales implica que el mismo sistema caótico tendrá evoluciones temporales sumamente diferentes, a pesar de que éstas partan de condiciones iniciales ligeramente diferentes. Esta característica es altamente deseable en robots de patrullaje, ya que ocasionaría que la trayectoria generada caóticamente del mismo sea *altamente impredecible*.

Los sistemas caóticos son *deterministas* debido a que, conociendo las ecuaciones de estado, las condiciones iniciales del sistema y los valores de sus parámetros, es posible predecir su comportamiento.

La *transitividad topológica* implica la existencia de valores de entrada en un sistema que, dadas ciertas iteraciones, pueden moverse entre diferentes conjuntos abiertos. Es debido a esta última propiedad, que se puede garantizar que un robot móvil pueda recorrer un espacio cerrado de trabajo por completo. En la figura 1 se pueden apreciar estas propiedades en el sistema caótico de Chua, en especial la sensibilidad a las condiciones iniciales.

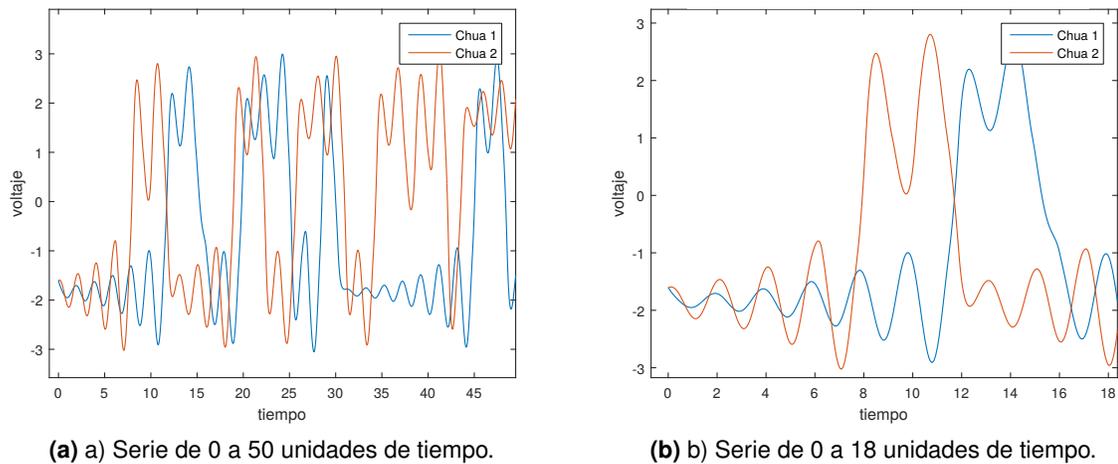


Figura 1. Serie de tiempo del primer estado de dos circuitos de Chua con diferentes condiciones iniciales.

Tomando en cuenta las características anteriormente mencionadas, podemos decir que un robot cuya trayectoria sea caótica será altamente impredecible para el observador externo, pero transparente para el diseñador y para cualquier observador autorizado que tenga conocimiento de las ecuaciones de estado del sistema, los valores de los parámetros y los valores iniciales utilizados para su diseño. También sería sensible a las condiciones iniciales, que en el caso del robot móvil serían las posiciones en x y y en las que este iniciaría su recorrido.

También, se puede identificar a un sistema caótico por la presencia de un atractor extraño, como el de la figura 2. De forma general, se puede decir que un atractor es una región o conjunto cerrado en el espacio de fase, al cual convergen las trayectorias de un sistema, entendiéndose por trayectoria la evolución temporal del sistema a partir de una condición inicial específica (Martínez-Clark, 2016). Por último, los sistemas caóticos poseen al menos un exponente de Lyapunov positivo.

2.1.1. Mapa caótico de Hénon

El mapa de Hénon es un sistema dinámico en tiempo discreto. Es uno de los ejemplos de sistemas dinámicos más estudiado que muestra comportamiento caótico. El mapa de Hénon toma

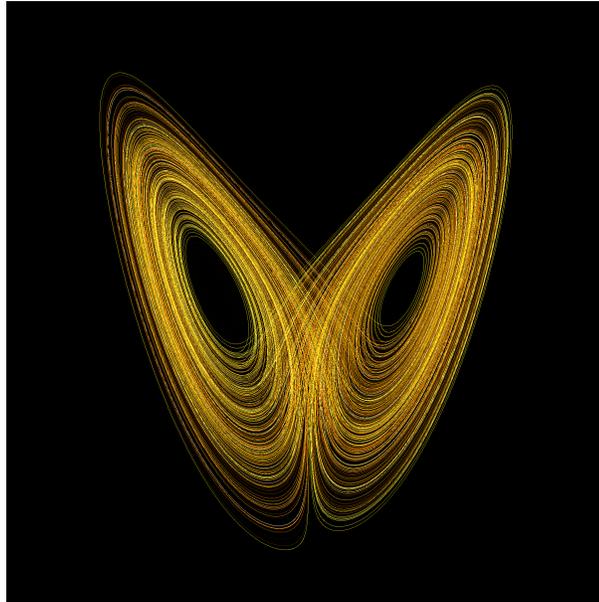


Figura 2. Atractor de Lorenz.

un punto $(x_h(n), y_h(n))$ en el plano y lo mapea a un nuevo punto. Está representado por las siguientes ecuaciones de estado no lineales en diferencias (Hénon, 1976):

$$\begin{aligned} x_h(n+1) &= 1 - ax_h^2(n) + y_h(n+1), \\ y_h(n+1) &= bx_h(n). \end{aligned} \tag{1}$$

El mapa depende de dos parámetros a y b , los cuales, para el mapa clásico de Hénon tiene valores de $a = 1.4$ y $b = 0.3$. Para los valores clásicos, el mapa de Hénon (1) es caótico. Para otros valores de a y b el mapa puede presentar otras dinámicas, por ejemplo converger a un ciclo límite o presentar un punto fijo. Una visión general del tipo de comportamiento del mapa de Hénon en valores de parámetros diferentes puede obtenerse de su diagrama de fase, ver figura 3.

2.2. Fractales

Siempre que un sistema manifiesta dinámica caótica, ésta aparece asociada con un tipo de objetos geométricos caracterizados por su dimensión no entera, los objetos fractales. El término *fractal* fue acuñado por el matemático francés de origen polaco Benoit Mandelbrot (Torres, 2005). En sus propias palabras: “Acuñé la palabra *fractal* del latín *fractus*, que proviene del verbo *frangere*, quebrar: crear fragmentos irregulares. Es por esto especialmente adecuado, puesto que además de rotura, *fractus* alude a irregular, siendo esta una característica presente en cada fragmento”. En la figura 4 se observa el famoso fractal generado por Mandelbrot.

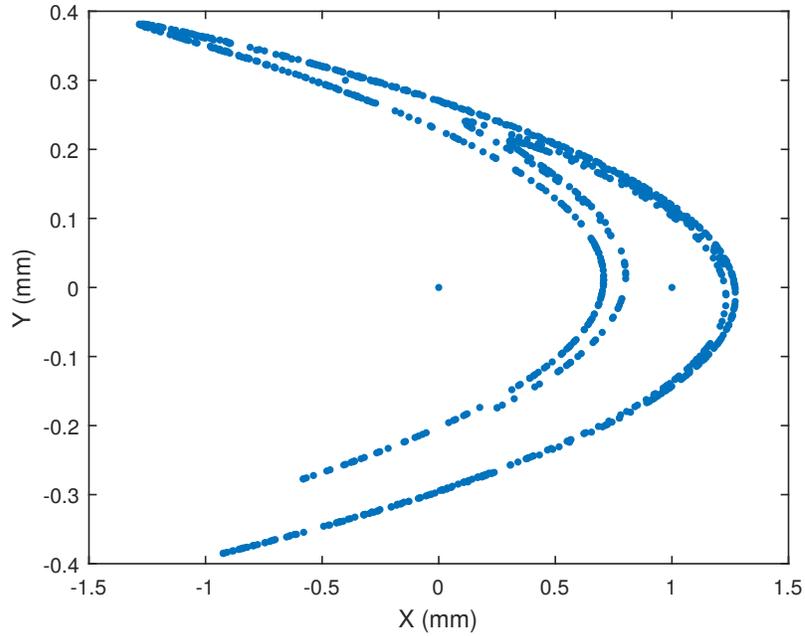


Figura 3. Atractor caótico del mapa de Hénon generado con 1000 iteraciones.

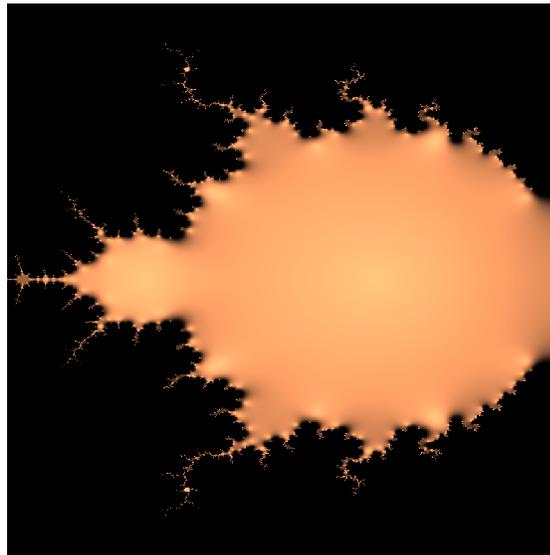


Figura 4. Fractal de Mandelbrot.

La *Real Academia Española* define a los fractales como “Figura plana o espacial, compuesta de infinitos elementos, que tiene como propiedad que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con que se observe”. Los llamados *objetos fractales* son pues, figuras geométricas sumamente complejas y detalladas. Si amplificamos una sección de las mismas nos encontramos con tanta complejidad y detalle como en la situación anterior, de tal

manera que las secciones más pequeñas son similares a las grandes (Torres, 2005).

Son muchas las entidades que presentan esta estructura, algunas son las galaxias, montañas, al igual que los bosques, también las líneas divisorias entre países y las plumas de las aves (Barnsley, 2014). A manera de ejemplo, a través de los fractales se puede estudiar la forma de las nubes, o ¿es qué son círculos perfectos? cuando nos acercamos visualmente a una nube, observamos que está formada por muchos fragmentos de nubes y estos fragmentos a su vez en otros y así sucesivamente (Días Brecia, 2009). Se puede considerar también, la línea que se forma en las costas, en donde se une la tierra con el mar, en gran escala se puede observar que la línea divisoria esta formada por penínsulas (entradas de tierra en el mar) y ensenadas (partes del mar que entran en la tierra) y a medida que la escala se hace más pequeña se observa que cada península y ensenada están formadas por penínsulas y ensenadas más pequeñas y, si se reduce aún más la escala, se observa el mismo fenómeno, ver figura 5.



Figura 5. Fractal natural formado por la línea divisoria entre el mar y la porción de tierra en una isla, Días Brecia (2009).

Los fractales tienen tres propiedades definitorias (Torres, 2005):

- *Autosimilaridad.* Sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo.
- *Autorreferencia.* Determina que el propio objeto aparece en la definición de sí mismo.
- *Dimensión fraccionaria.*

La primera propiedad se manifiesta en que las sucesivas ampliaciones del objeto fractal de cualquier detalle de la misma son indistinguibles de los originales, es decir, son semejantes. La segunda propiedad implica que la forma de generar un fractal es mediante un algoritmo recurrente o regla de construcción. Por último, la dimensión fraccionaria alude al hecho de que los objetos fractales se encuentran en un espacio geométrico de dimensión no entera (Torres, 2005).

Es posible encontrar objetos fractales en la naturaleza, por ejemplo, las hojas de los helechos, el brócoli, copos de nieve, la corteza de los árboles y la coliflor, o el caso del helecho sintético creado por computadora de Barnsley (figura 6). Además de esto, es posible generarlos mediante algoritmos iterativos, como los generados por medio del método de Julia (figura 7), los cuales se generan mediante un algoritmo computacional.

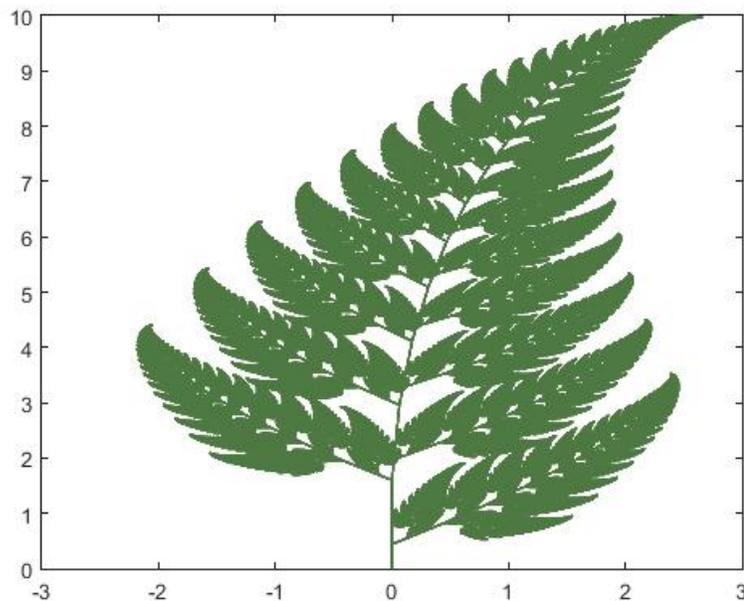


Figura 6. Fractal sintético, Helecho de Barnsley.

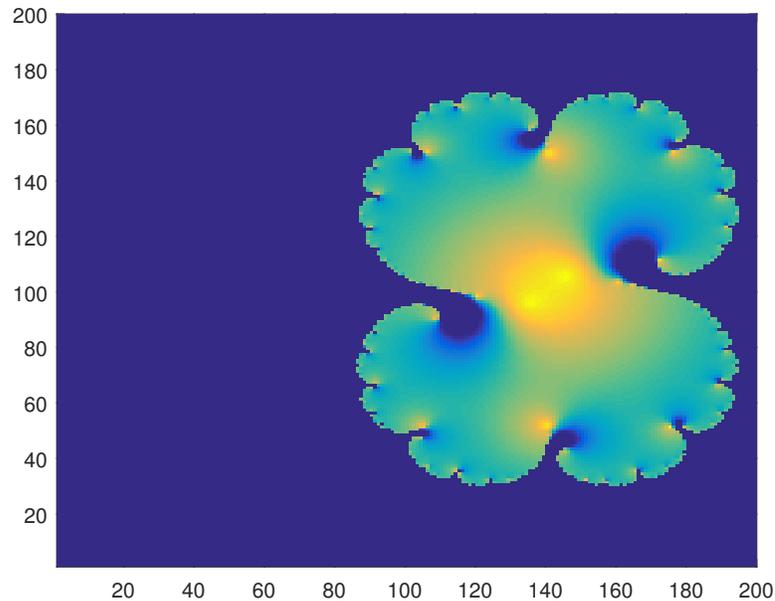


Figura 7. Fractal generado por el método de Julia.

2.2.1. Dimensión fraccionaria

Desde un punto de vista topológico sabemos que la circunferencia y un segmento rectilíneo son la misma curva y encierran el mismo tipo de superficie (pues es posible transformar una en la otra mediante una deformación continua, es decir, sin que sea preciso someter a ninguna de las dos a manipulaciones “no topológicas”).

Ahora bien, desde un punto de vista métrico no son la misma curva, ya que la circunferencia y el área que encierra el círculo, son finitos y en cambio, el segmento, aunque es finito, no encierra con su borde un área finita.

Analicemos brevemente lo que significa la dimensión topológica, que es un término que introdujo Henri Poincaré para discernir sobre cuestiones de este tipo. La definición inductiva dada por Poincaré al introducir este concepto fue la siguiente:

- El conjunto vacío tiene dimensión -1 .
- Si los bordes de los entornos pequeños de todos los puntos del ente son espacios $(n-1)$ -dimensionales, decimos que el espacio que consideramos es n -dimensional

Así, según Poincaré, se tiene:

- Conjunto vacío: Dimensión topológica: $D=-1$.
- Punto: Dimensión topológica: $D=0$.
- Segmento de línea: Dimensión topológica: $D=1$.
- Cuadrado: Dimensión topológica: $D=2$.
- Cubo: Dimensión topológica: $D=3$.
- Hipercubo: Dimensión topológica: $D=4$.

Una definición distinta de dimensión topológica es la definición por semejanza, llamada también de *autosemejanza*, que sugirió Felix Hausdorff en 1919 (Hausdorff, 1919), readaptada posteriormente por Besicovich (dimensión de Hausdorff-Besicovich) (Besicovitch, 1929):

Si al obtener desde un ente H , N entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza l , entonces la dimensión topológica de H es el número real D que verifica,

$$N + l^D = 1. \quad (2)$$

Es decir,

$$D = \frac{\log(N)}{\log \frac{1}{l}}. \quad (3)$$

La dimensión topológica en el sentido de Poincaré coincide en general con la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich. Pero hay ciertos objetos geométricos en los que no ocurre así. A estos objetos geométricos los denominaremos, usando la terminología de Benoit Mandelbrot, fractales. Diremos que la dimensión definida por Poincaré o Devlin es su dimensión topológica, la cual siempre es un entero y que la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich es su *Dimensión Fraccionaria*, la cual será utilizada en capítulos posteriores de este trabajo de tesis.

2.3. Aplicaciones de la teoría del caos en la ingeniería

En esta última sección se mencionan algunas aplicaciones del caos en la ingeniería. El lector interesado puede revisar la fuente bibliográfica (Martínez-Clark, 2016).

En los casos presentados hasta este momento, el papel de la teoría del caos es el de explicar un fenómeno que se presenta naturalmente, el cual no puede ser entendido por técnicas convencionales. La mayoría de estas aplicaciones involucran el análisis de series de datos obtenidos en los experimentos para buscar por ejemplo, un atractor extraño o calcular la dimensión fraccionaria y los exponentes de Lyapunov positivos.

En el caso de la ingeniería, se aprovechan las características caóticas de algunos sistemas para crear caos y aplicarlo por ejemplo a las comunicaciones seguras, el diseño de antenas o la planeación de trayectorias. A continuación se presentan algunos casos en los que se aplica la teoría del caos en sistemas de ingeniería.

- **Diseño de radares.** La baja predictibilidad, característica de los sistemas caóticos, es deseable en el diseño de antenas. La teoría del caos se utiliza para procesar la señal de regreso, generar códigos binarios, implementar sistemas codificados e implementar radares de señal ruidosa (NSR por sus siglas en inglés). Ejemplo de esto se puede encontrar en (Liu *et al.*, 2007) y (Lin y Liu, 2004).
- **Control de movimiento en robots móviles.** Los sistemas caóticos, aplicados a la robótica móvil, son utilizados para guiar robots autónomos para exploración de terrenos, vigilancia, búsqueda y desactivación de bombas. Existen trabajos que reportan todo tipo de resultados, tanto numéricos como experimentales, empleando diversas metodologías. Algunos ejemplos se pueden encontrar en (Volos *et al.*, 2012) y (Zhu y Leung, 2007).
- **Sistemas de comunicaciones seguras.** En este caso, la sensibilidad a las condiciones iniciales y la “semejanza al ruido” de los sistemas caóticos permite el cifrado de mensajes para su envío por canales públicos. La ventaja principal es la baja probabilidad de decodificación del mensaje en caso de interceptación. Ejemplos de estas aplicaciones las podemos encontrar en (Cruz-Hernández, 2004), (Cruz-Hernández y Romero-Haros, 2008), (Gámez-Guzmán *et al.*, 2009), (Trejo-Guerra *et al.*, 2009), (Stavrinides *et al.*, 2009) y (Cuomo *et al.*, 1993),
- **Diseño de antenas fractales.** La evolución de los sistemas de comunicación obligan a los dispositivos manejar antenas multibanda. La limitante en tamaño de antenas, dictada por los dispositivos móviles, han obligado a los científicos a cambiar el enfoque en el diseño de éstas. Una de las soluciones que mejor desempeño presentan es el uso de antenas con patrones fractales. En (Batra *et al.*, 2012) podemos encontrar un ejemplo.

2.4. Conclusiones del capítulo

Este capítulo se concentró en describir las principales propiedades del caos, como la sensibilidad a las condiciones iniciales y su naturaleza determinista, así como diferentes aplicaciones del caos a diversas ramas de la ciencia y de la ingeniería. En particular, se describieron las ecuaciones de estado en diferencias del mapa caótico de Hénon y sus propiedades básicas. También se describieron los fractales y sus principales características.

Capítulo 3. Robot Móvil Diferencial

En este capítulo se describe de manera general el robot móvil diferencial, mencionando sus características y las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento dinámico. Se habla en particular del robot móvil diferencial Khepera III, el cual será utilizado para la validación experimental de este trabajo.

3.1. Modelo matemático del robot diferencial

Un robot móvil diferencial es aquel cuyo desplazamiento está basado en dos ruedas de tracción independientes colocadas en ambos lados del cuerpo del robot, ver figura 8. El movimiento se consigue aplicando velocidades a cada una de las ruedas motrices. De esta forma, podemos hacer que el robot avance en línea recta fijando ambos motores a la misma velocidad, puede girar en una u otra dirección aplicando velocidades diferentes, y haciéndolas girar en sentido inverso una rueda respecto a la otra, el robot girará sobre su eje.

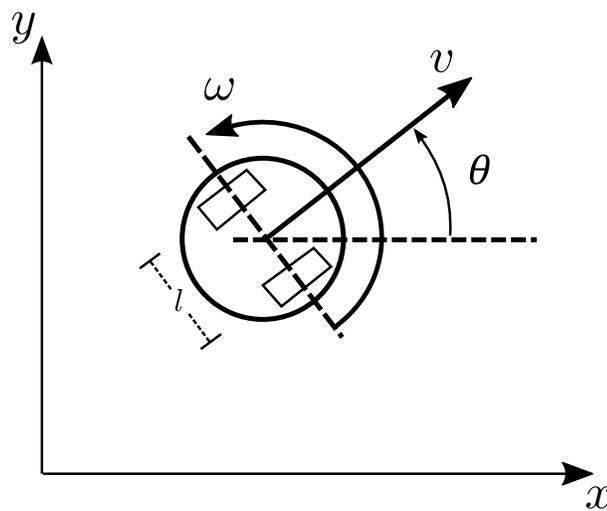


Figura 8. Vista superior de un robot móvil diferencial.

En el trabajo (Suster, 2010) se reporta un modelo matemático para un robot móvil diferencial, tomando en cuenta las siguientes consideraciones, ver figura 8:

- El robot se mueve en una superficie perfectamente plana sin deslizamiento, despreciando la resistencia de las llantas.
- La posición del robot está determinada por las coordenadas x , y y un ángulo θ , el cual representa la rotación del robot en relación al sistema de coordenadas.

La posición y la rotación del robot en el plano están basadas en las siguientes ecuaciones, formando el modelo cinemático del robot (Kumar-Malu y Majumdar-Jharna, 2014):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (4)$$

con v y ω definidas como:

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_l + v_r}{2}, \\ \omega &= \frac{v_r - v_l}{l}, \end{aligned} \quad (5)$$

donde:

v : Velocidad lineal del robot móvil.

ω : Velocidad angular del robot móvil.

θ : Ángulo de orientación del robot móvil.

l : Distancia entre las ruedas.

v_r : Velocidad de la rueda derecha.

v_l : Velocidad de la rueda izquierda.

Despejando v_l y v_r de la ecuación (5) obtenemos:

$$\begin{aligned} v_l &= v - (l * \omega), \\ v_r &= v + (l * \omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Estas ecuaciones (6) serán útiles para realizar las simulaciones numéricas reportadas en secciones y capítulos posteriores de la tesis.

3.1.1. Simulación de movimientos básicos

Utilizando el programa Matlab se realizaron simulaciones del modelo matemático (con las ecuaciones (4) y (6)) del robot móvil diferencial para tres casos:

- a) $v_l = 20 \text{ mm/s}$, $v_r = 10 \text{ mm/s}$ y $l = 88.41 \text{ mm}$.

- b) $v_l = 10 \text{ mm/s}$, $v_r = 20 \text{ mm/s}$ y $l = 88.41 \text{ mm}$.
- c) $v_l = 20 \text{ mm/s}$, $v_r = 20 \text{ mm/s}$ y $l = 88.41 \text{ mm}$.

Estas velocidades se ingresan al modelo matemático mostrado en la ecuación (4) por medio de (5). En la figura 9 se muestran los resultados de estas simulaciones numéricas. Se puede apreciar que el robot móvil diferencial (ecuaciones (4)-(6)), se comporta según lo descrito al inicio de la sección 3.1.

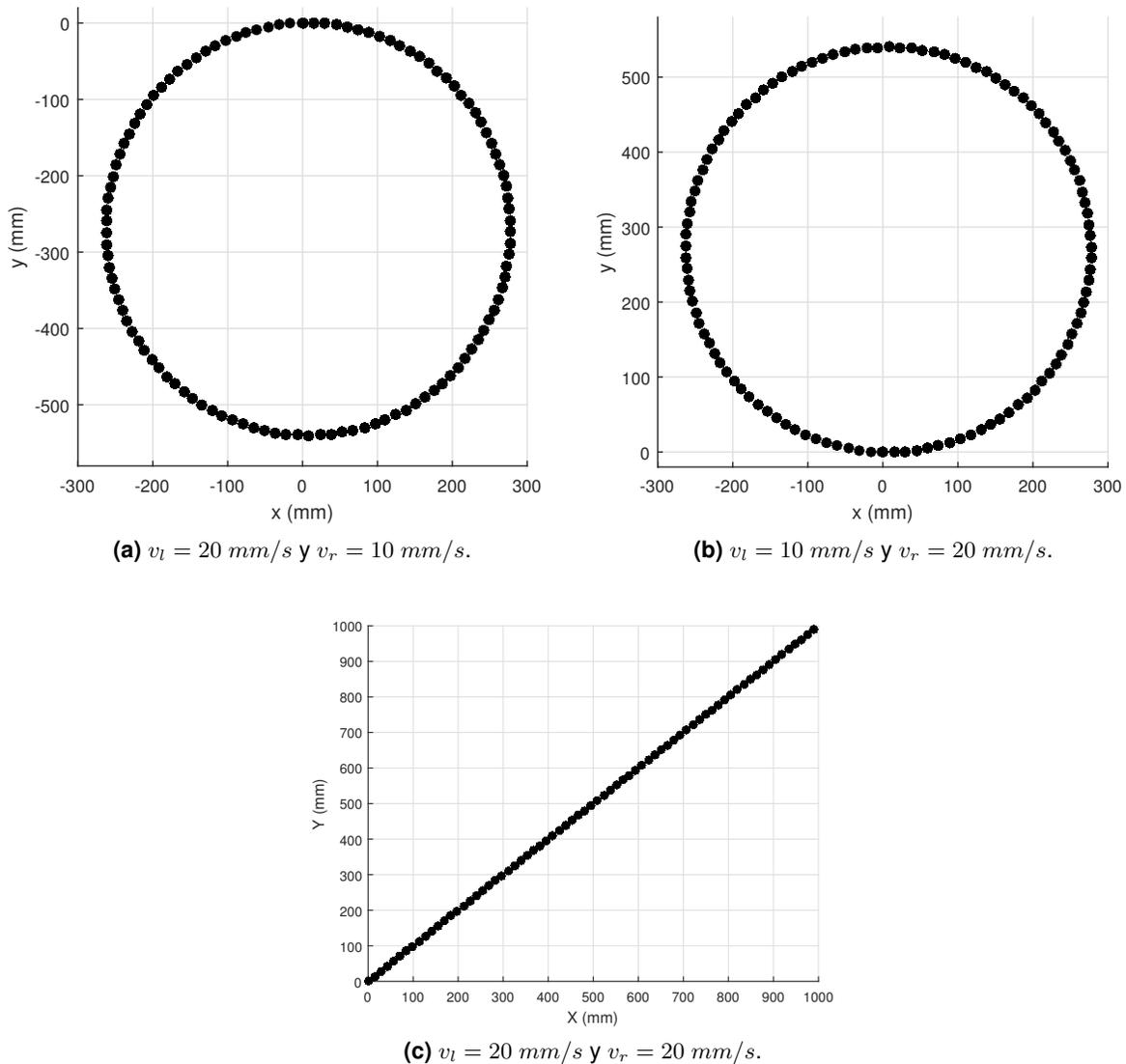


Figura 9. Movimientos básicos del robot diferencial.

3.2. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se describió de manera general el modelo matemático del robot móvil diferencial y algunas de sus características, mostrando sus ecuaciones de movimiento y la manera en las que sus entradas (velocidades de las ruedas) afectan su comportamiento realizando algunas simulaciones básicas de movimiento. Este modelo será empleado en capítulos posteriores para el diseño, simulación numérica y experimentación del algoritmo generador de trayectorias caóticas para un robot móvil diferencial.

Capítulo 4. Resultados

En este capítulo se describe el proceso realizado para llevar a cabo la generación de trayectorias no predecibles con base en sistemas caóticos para robots móviles diferenciales. Se describe el algoritmo propuesto y las consideraciones que se tomaron para elaborarlo. Se muestran resultados numéricos de algunas aplicaciones, así como un análisis de éstos para poder determinar si las trayectorias generadas en el robot son efectivamente caóticas y si presentan las propiedades deseadas del caos en ellas.

4.1. Algoritmo generador de trayectorias caóticas

Para lograr la generación de trayectorias caóticas en el robot móvil diferencial, en esta tesis se propone el diseño del siguiente algoritmo (ver figura 10) tanto para las simulaciones numéricas como para el proceso experimental.

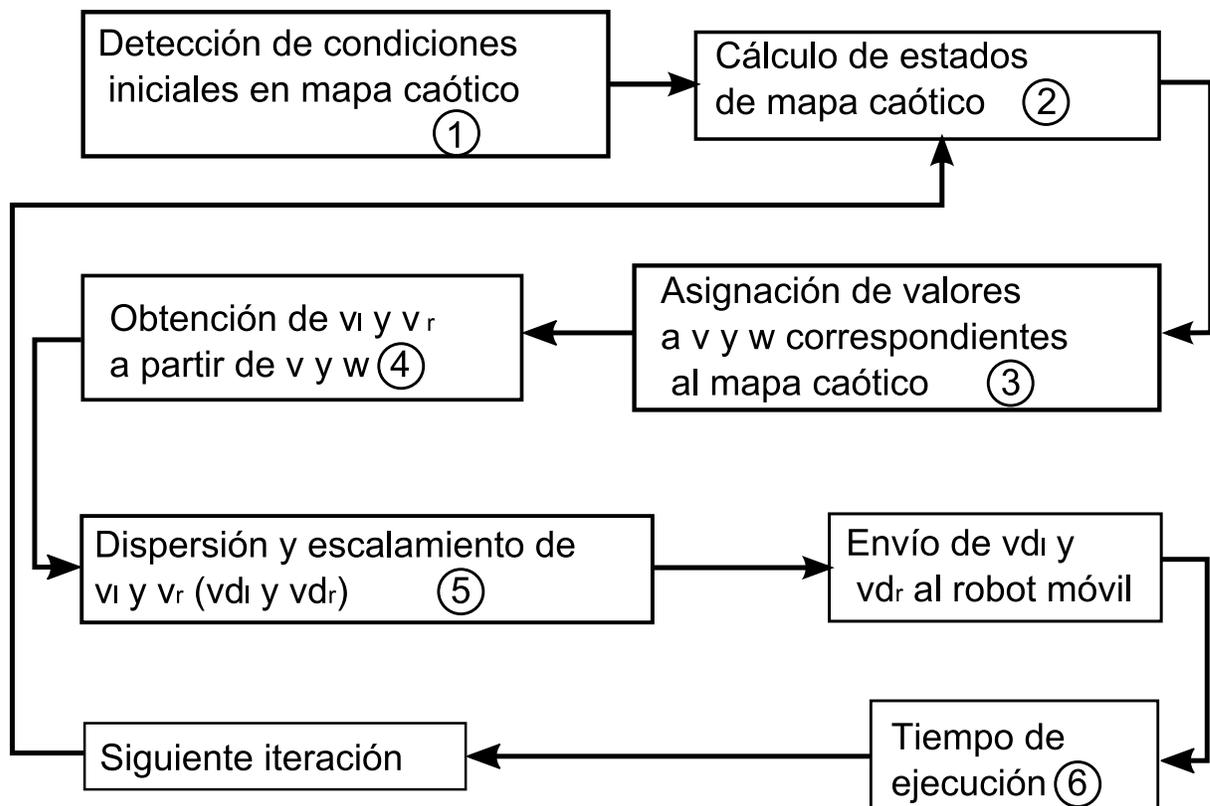


Figura 10. Diagrama a bloques del algoritmo implementado para la generación de trayectorias caóticas para el robot móvil.

Las ecuaciones correspondientes a las etapas del diagrama de bloques de la figura 10 son las siguientes:

Paso 1 x_0 : Posición inicial x del robot móvil,

y_0 : Posición inicial y del robot móvil,

$$x_h(0) = x(0)/1000,$$

$$y_h(0) = y(0)/1000,$$

$$n = 0.$$

Paso 2 $x_h(n + 1) = 1 - ax_h^2(n) + y_h(n),$

$$y_h(n + 1) = bx_h(n).$$

Paso 3 $v(n) = x_h(n + 1),$

$$\omega(n) = y_h(n + 1).$$

Paso 4 $v_l = v(n) - (l\omega(n)),$

$$v_r = v(n) + (l\omega(n)).$$

Paso 5 $vd_l = \text{floor}(((100v_l) - \text{floor}(100v_l))180) + 20,$

$$vd_r = \text{floor}(((100v_r) - \text{floor}(100v_r))180) + 20.$$

Paso 6 $t = 2$ segundos.

El proceso seguido por el algoritmo generador de trayectorias caóticas propuesto es el siguiente: En el paso 1 se toman las condiciones iniciales del robot móvil diferencial en el plano x - y y las utiliza como condiciones iniciales para el mapa de Hénon (ecuación (1)). El motivo de la división por 1000 es dar mayor énfasis en la sensibilidad a las condiciones iniciales. Por ejemplo, si el robot comienza en la posición $(x_0, y_0) = (1, 1)$ mm, las condiciones iniciales del mapa caótico de Hénon serán $x_h(0) = 0.001$ y $y_h(0) = 0.001$.

Con las condiciones iniciales obtenidas, en el paso 2 se calculan los valores actuales de los estados del mapa caótico de Hénon (iteración n), los cuales se asignan a las velocidades lineal y angular en el paso 3. De esta manera, los estados del mapa de Hénon influyen en su totalidad en el comportamiento de las velocidades del robot móvil diferencial.

Posteriormente, en el paso 4, se calculan las velocidades de las ruedas izquierda v_l y derecha v_r del robot. Es en este paso donde se obtienen los histogramas mostrados en la figura 11. En el

paso 5 se realiza la dispersión de los datos de manera homogénea obteniendo los histogramas mostrados en la figura 12. Esta dispersión nos permite realizar un escalamiento de los datos para ajustar las velocidades obtenidas a los valores máximos y mínimos soportados por el robot móvil diferencial. A estas velocidades dispersas las llamaremos vd_l y vd_r .

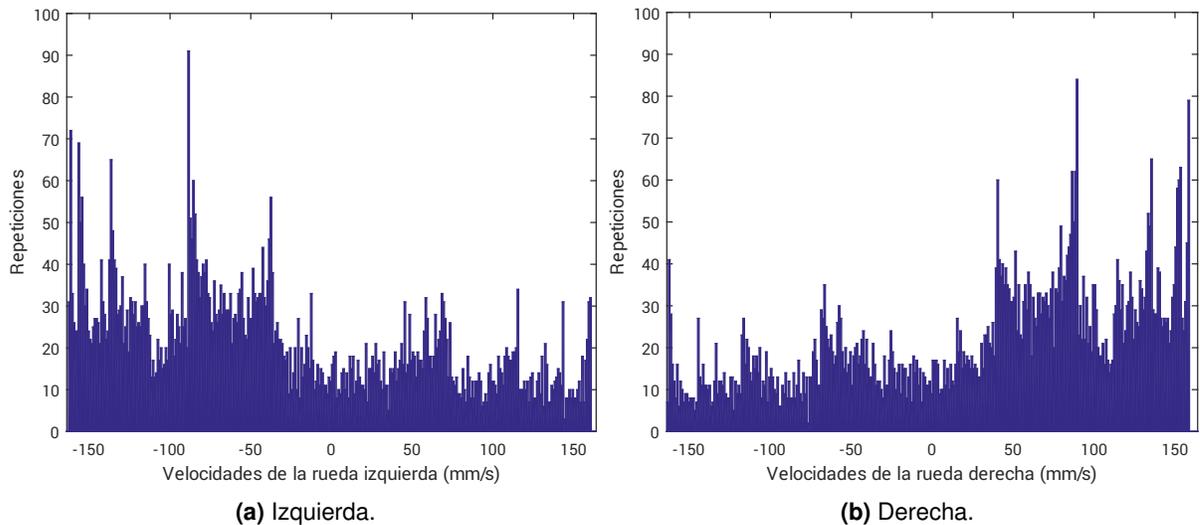


Figura 11. Histogramas de velocidades de las ruedas izquierda v_l y derecha v_r .

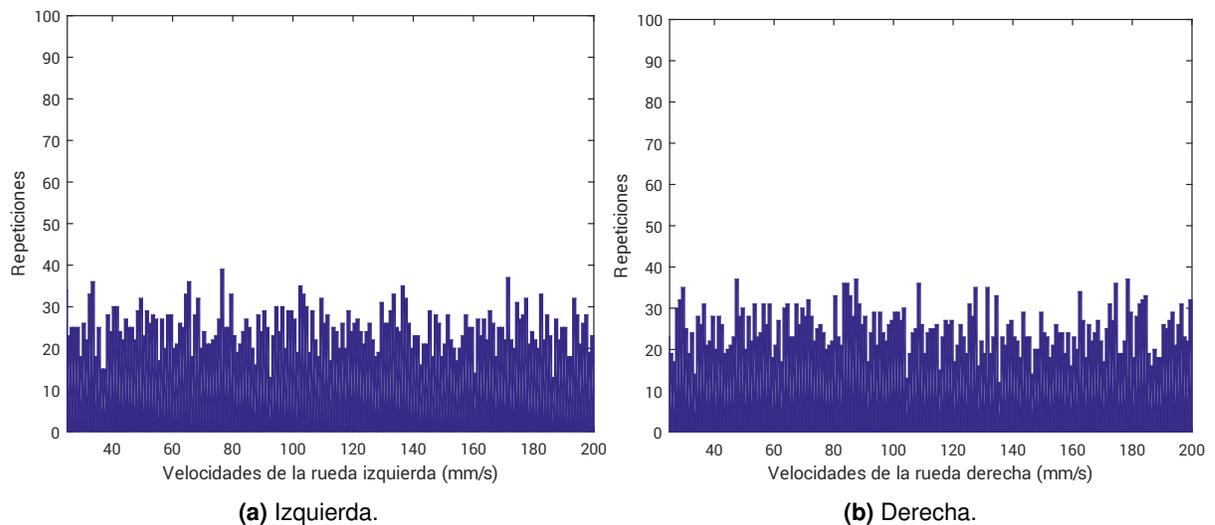


Figura 12. Histogramas resultantes con dispersión de velocidades lineales de las ruedas izquierda vd_l y derecha vd_r .

Por último, se envían estas velocidades al robot móvil diferencial y se deja en ejecución por dos segundos. El tiempo de ejecución de dos segundos en el paso 6, es para permitir que el robot tenga la oportunidad de desplazarse pertinentemente y pueda tener mayor cobertura del área de trabajo.

Despejando las velocidades de las ruedas izquierda (v_l) y derecha (v_r) del sistema de ecuaciones (5), descrito en la sección 3.1, obtenemos los histogramas mostrados en la figura 11. Se puede observar que los valores de v_l son mayormente negativos y que los de v_r son principalmente positivos, lo cual es indicio de que las trayectorias del robot se basarán principalmente en giros cerrados hacia la izquierda. Debido a esto, a los valores de v_l y v_r se les realiza una dispersión de manera que el histograma de las velocidades de las ruedas sea uniforme, como se mostró en la figura 12. Además, la dispersión permite realizar un re-escalamiento de los valores a un rango utilizable por el robot móvil diferencial, limitando sus velocidades mínimas y máximas que puede alcanzar.

Intencionalmente el rango de velocidades no incluye velocidades negativas, de manera que el robot no se mueva en reversa, así, la trayectoria generada abarcará una mayor área de cobertura en menor tiempo.

Al realizar las simulaciones numéricas del algoritmo, realizando 20 iteraciones del mismo, obtenemos un resultado mostrado en la figura 13. La línea de colores representa la trayectoria generada, donde cada color representa un segmento de la trayectoria recorrida por el robot móvil, generado por cada iteración del algoritmo.

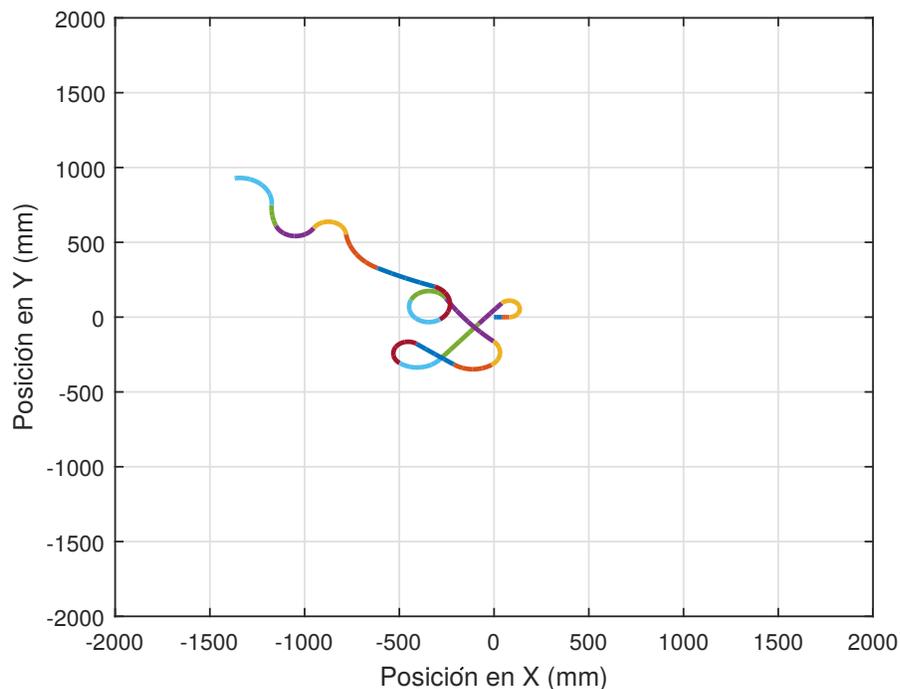


Figura 13. Trayectoria caótica del robot móvil generada por el algoritmo propuesto para $n = 20$.

Se puede observar que la trayectoria obtenida es impredecible. Sin embargo, en una aplica-

ción real existen límites físicos (muros, puertas, obstáculos, etc.) que impiden un movimiento libre del robot. El siguiente paso es determinar una superficie de trabajo en la que el robot desempeñe su trayectoria. El área de trabajo elegida es una mesa que se encuentra en el *Laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos* (Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, CICESE) de 900 mm de ancho por 1500 mm de largo que cuenta con bordes de 35 mm de altura. La mesa se muestra en la figura 14.



Figura 14. Delimitación del área de trabajo, mesa de 900 mm de ancho por 1500 mm de largo. Laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos.

El objetivo es que el robot móvil diferencial se desplace sobre la superficie de esta mesa de manera caótica. El robot debe cambiar su trayectoria cuando llega a alguno de los límites del área de trabajo (bordes de la mesa) para evitar colisionar con ellos. En este caso, se adopta un movimiento reflexivo. Cuando el robot sensa una aproximación a uno de estos límites, el robot cambia su dirección de movimiento siguiendo la estrategia mostrada en la figura 15. Es decir, toma una trayectoria de salida en un ángulo α que refleja el de entrada, donde α es el ángulo formado entre el frente del robot móvil y el borde el área de trabajo.

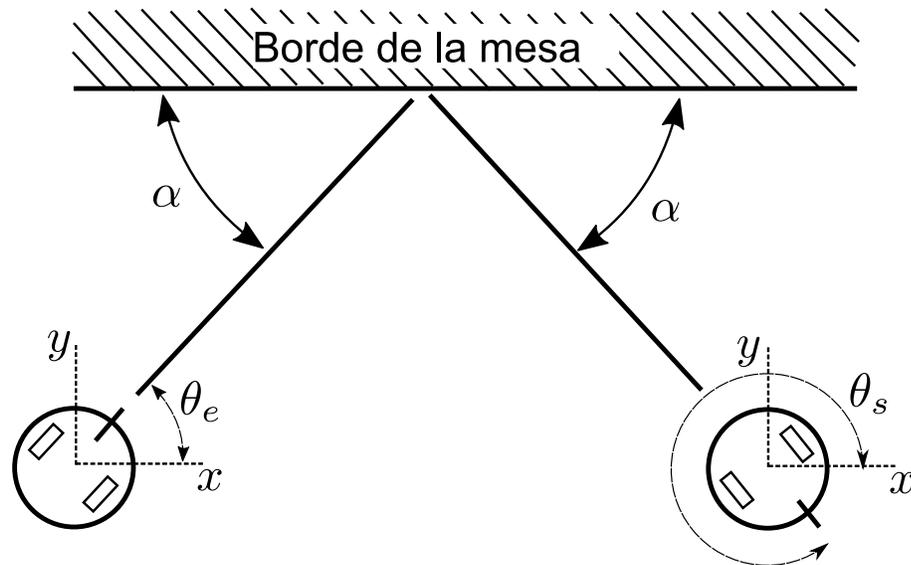


Figura 15. Estrategia reflexiva de evasión de bordes del robot móvil diferencial.

Tomando θ_e como el ángulo de entrada formado entre el frente del robot móvil y el eje horizontal tenemos:

$$\alpha = \theta_e, \quad (7)$$

Por lo tanto, el ángulo de salida θ_s del robot móvil será:

$$\theta_s = 270 + \alpha. \quad (8)$$

De manera similar se realiza la operación para todos los límites del área de trabajo.

4.2. Resultados numéricos

En esta sección se reportan los resultados de las simulaciones numéricas obtenidos al implementar el algoritmo generador de trayectorias caóticas, descrito en la sección anterior (figura

10), así como diferentes pruebas que nos indican, entre otras cosas, el porcentaje de cobertura del área de trabajo realizada por el robot móvil diferencial al seguir la trayectoria generada y determinar si existe o no caos en ellas.

4.2.1. Simulaciones

Una vez considerados los límites del área de trabajo, se realizaron simulaciones numéricas del algoritmo generador de trayectorias caóticas propuesto en esta tesis. Iniciando la trayectoria del robot móvil diferencial en el origen $(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0^\circ)$, se realizan simulaciones numéricas del algoritmo generador de trayectorias caóticas para 10, 100, 300 y 500 iteraciones.

El cuadro en negro representa los límites del área de trabajo (mesa en el laboratorio) descrita anteriormente (figura 14). En las trayectorias del robot móvil, cada color representa un lapso de tiempo de dos segundos durante el cual, el robot utiliza las velocidades obtenidas del mapa caótico de Hénon, esto por cada iteración antes de pasar a las siguientes.

En la figura 16 se aprecia que la trayectoria del robot es impredecible y que con 300 iteraciones cubre (patrulla) gran parte del área de trabajo.

Se puede observar también de estos resultados (figura 16), que las trayectorias descritas con determinado número de iteraciones, en todos los casos bajo las mismas condiciones iniciales, es la misma, confirmando la *naturaleza determinista del caos en el desplazamiento del robot*.

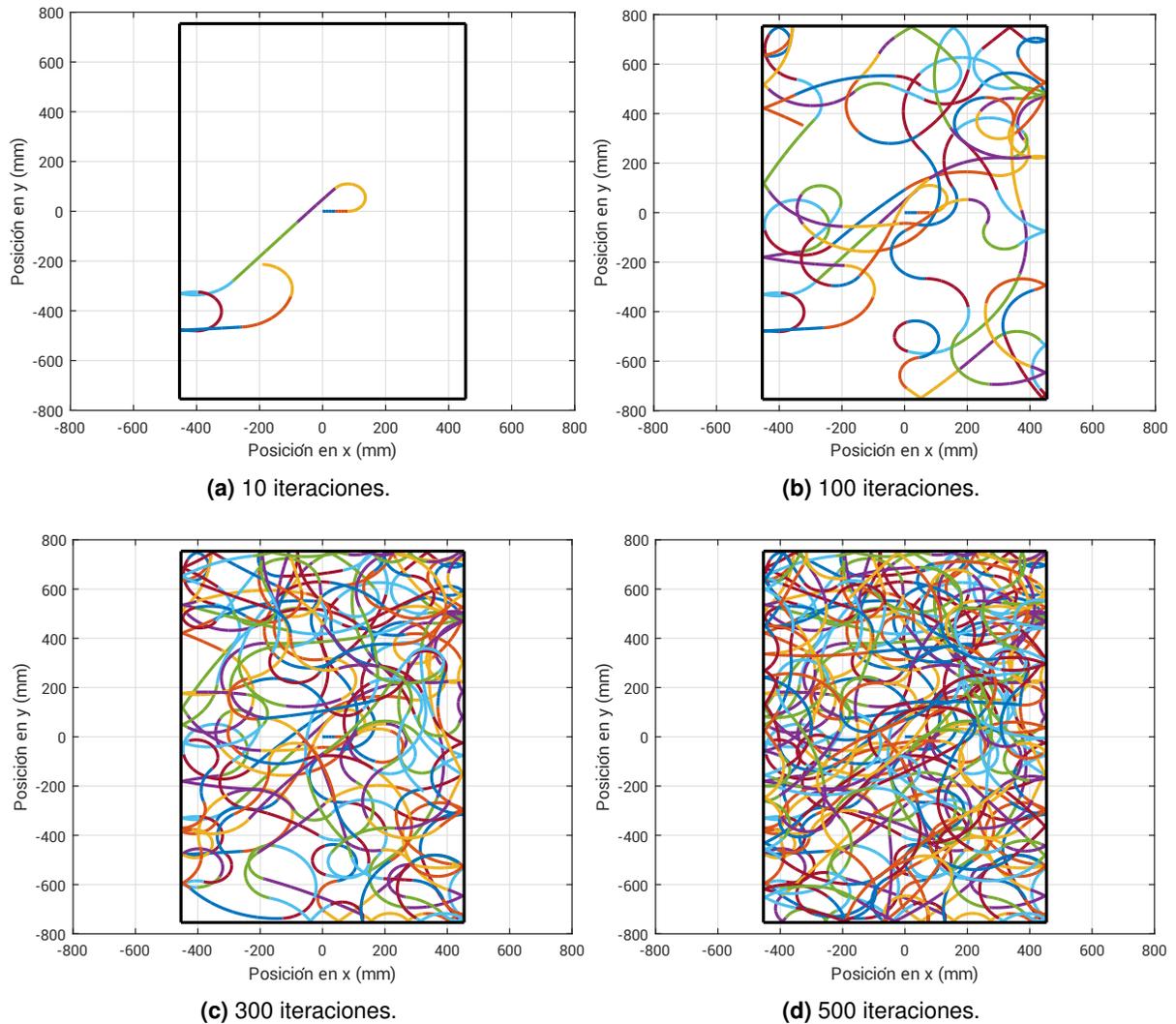


Figura 16. Trayectoria del robot móvil con las mismas condiciones iniciales $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y diferente número de iteraciones: a) 10 iteraciones, b) 100 iteraciones, c) 300 iteraciones y d) 500 iteraciones.

Por otra parte, se realiza la simulación utilizando tres diferentes posiciones iniciales (en milímetros) con la misma orientación ($\theta_0 = 0^\circ$) en los casos a) $x_0 = 0, y_0 = 0$; b) $x_0 = 0.01, y_0 = 0$ y c) $x_0 = 200, y_0 = 400$. Para cada caso, se realizan 100 iteraciones del algoritmo con el fin de comparar las trayectorias generadas por estas condiciones iniciales. Los resultados se muestran en la figura 17.

Como se puede observar en la figura 17, las trayectorias cambian drásticamente a pesar de tener un cambio de únicamente 0.1 milímetros en el eje x , verificando así la propiedad de *sensibilidad a condiciones iniciales* en las trayectorias del robot, característica de un *sistema caótico*.

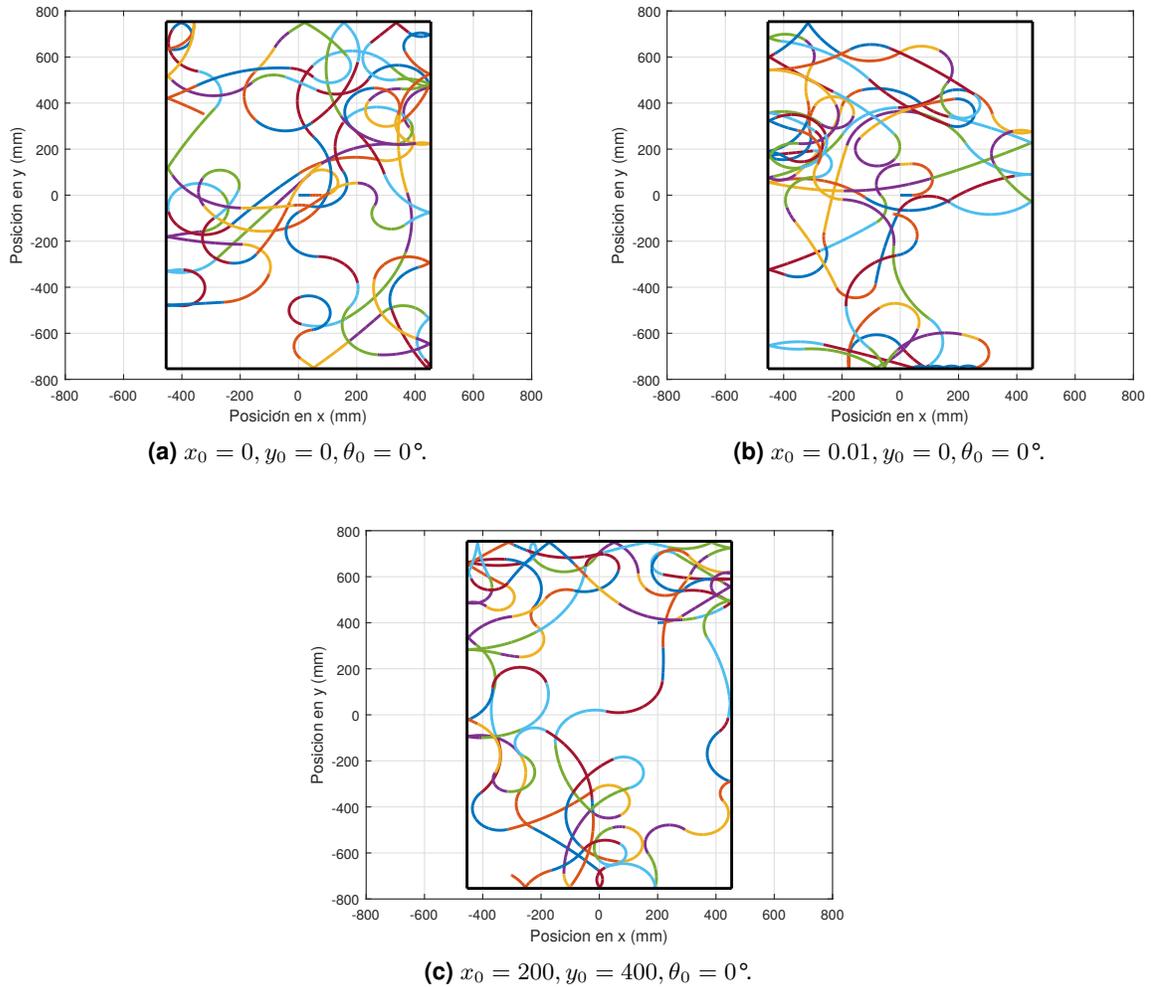


Figura 17. Trayectorias generadas por el robot diferencial para diferentes condiciones iniciales con 100 iteraciones.

4.2.2. Porcentaje de cobertura del área de trabajo

Para poder estimar el área de trabajo cubierta por las trayectorias caóticas impuestas al robot móvil, se dividió el área de trabajo en una cuadrícula de 12×20 (240) cuadros con medidas laterales de 76.66 mm, esto para tener una idea más precisa de la efectividad de cobertura del algoritmo propuesto en aplicaciones a tareas de exploración o búsqueda.

En la figura 18 se muestra el porcentaje de cobertura del área de prueba por el robot móvil diferencial para 100, 200 y 300 iteraciones del algoritmo, cuando las condiciones iniciales son $x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0^\circ$. Podemos observar que apenas con 100 iteraciones el robot patrulla más de la mitad del área de prueba y con 300 iteraciones cubrió casi en su totalidad la superficie de trabajo.

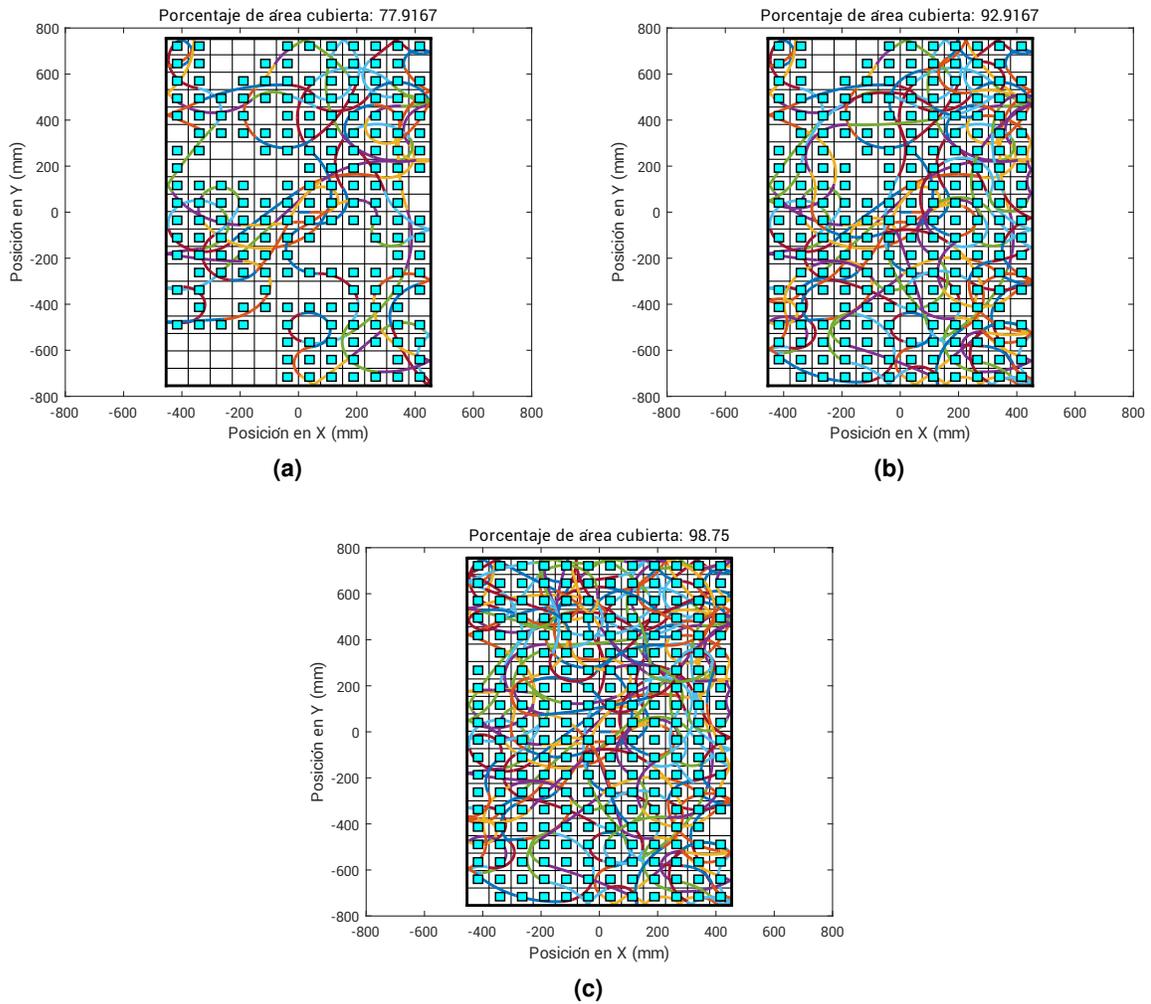


Figura 18. Porcentajes del área de trabajo cubiertas por el robot móvil diferencial para a) 100, b) 200 y c) 300 iteraciones.

En la figura 19 se muestran los resultados numéricos obtenidos utilizando trayectorias generadas por 200 iteraciones del algoritmo con posiciones iniciales elegidas arbitrariamente para el robot móvil diferencial.

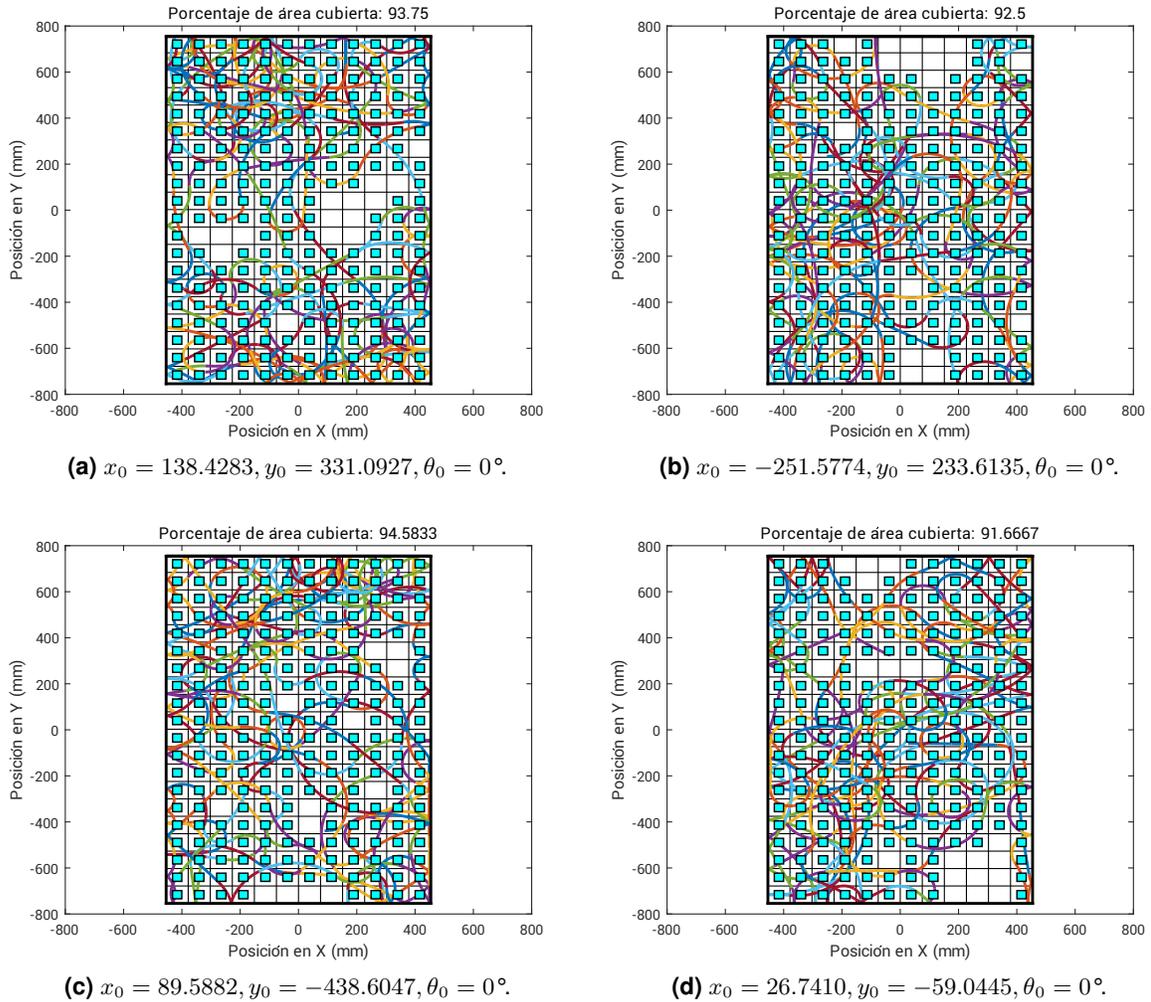


Figura 19. Porcentajes del área de trabajo cubiertas por el robot móvil diferencial para diferentes condiciones iniciales arbitrarias para 200 iteraciones.

En la tabla 1 se reportan los porcentajes de cobertura por el robot móvil diferencial obtenidos en 10 trayectorias diferentes generadas con condiciones iniciales elegidas arbitrariamente.

Repitiendo 100 veces el proceso anterior, se obtuvo un promedio de 92.7083 % de área cubierta. Si tomáramos en consideración las medidas reales del robot Khepera III, el área cubierta por 200 iteraciones sería prácticamente del 100 %.

Tabla 1. Porcentajes de cobertura del área de prueba con posiciones iniciales arbitrarias para 200 iteraciones.

Porcentajes de área de cobertura		
x_0	y_0	% de área de cobertura
168.8192	-140.1049	89.1667
89.9301	-427.4573	92.9167
135.4415	-608.6173	97.0833
-250.7693	-589.9773	93.7500
-412.5814	420.4952	92.5000
125.3458	-237.7700	95.0000
355.1998	-605.2201	97.0833
-105.1301	-153.9740	94.1667
188.9651	383.7599	91.2500
-98.9724	190.2068	90.4167

4.2.3. Prueba 0-1 Gottwald-Melbourne para determinación de caos de la trayectoria del robot móvil

Para comprobar que las trayectorias generadas por el algoritmo propuesto en esta tesis para el robot, son efectivamente caóticas, utilizamos la prueba 0-1 Gottwald-Melbourne (Gottwald y Melbourne, 2004). Ellos describen una prueba para determinar si un sistema dinámico determinista discreto es caótico o no. Al contrario del método usual de calcular el máximo exponente de Lyapunov, este método se aplica directamente a la serie de tiempo y no requiere reconstrucción espacio-fase. Además, la dimensión del sistema dinámico y la forma de sus ecuaciones son irrelevantes.

La entrada son los datos de la serie de tiempo y la salida se encuentra en el rango entre 0 y 1, dependiendo si la dinámica es caótica o no, siendo 0 *no caótica* y 1 *totalmente caótica*. La prueba se aplica a cualquier sistema dinámico determinista, ver detalles de la prueba en (Gottwald y Melbourne, 2004).

Para realizar la prueba se ejecutan 1000 iteraciones del algoritmo generador de trayectorias caóticas al robot móvil con 3 condiciones iniciales diferentes: a) $x_0 = 0, y_0 = 0$; b) $x_0 = 0.01, y_0 = 0$ y c) $x_0 = 200, y_0 = 400$, que son las mismas que se mostraron en la figura 17. De igual manera, en los tres casos tenemos un ángulo inicial ($\theta_0 = 0^\circ$). Tomando en consideración los datos de las series de tiempo de los estados x y y del modelo del robot diferencial, obtenidos de los resultados de las simulaciones numéricas realizadas (mostrados en la figuras 20, 21 y 22) podemos realizar la prueba 0-1 para verificar evidencia de caos en las trayectorias del robot móvil generadas por el

algoritmo.

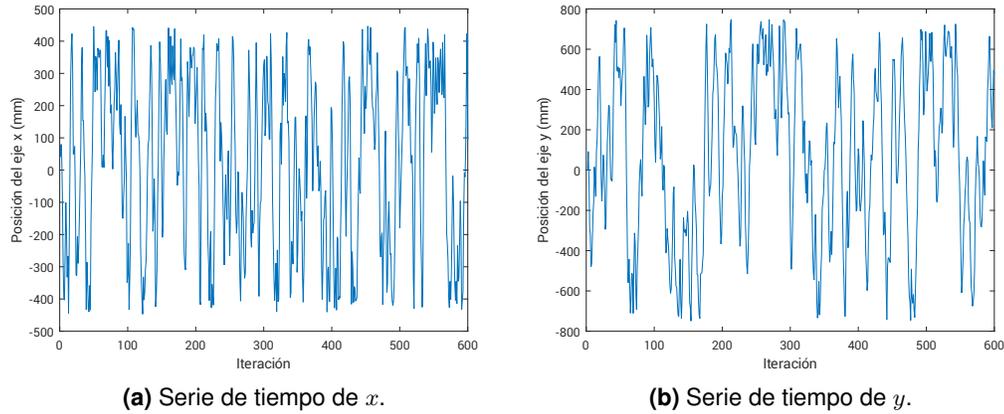


Figura 20. Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales $x_0 = 0, y_0 = 0$.

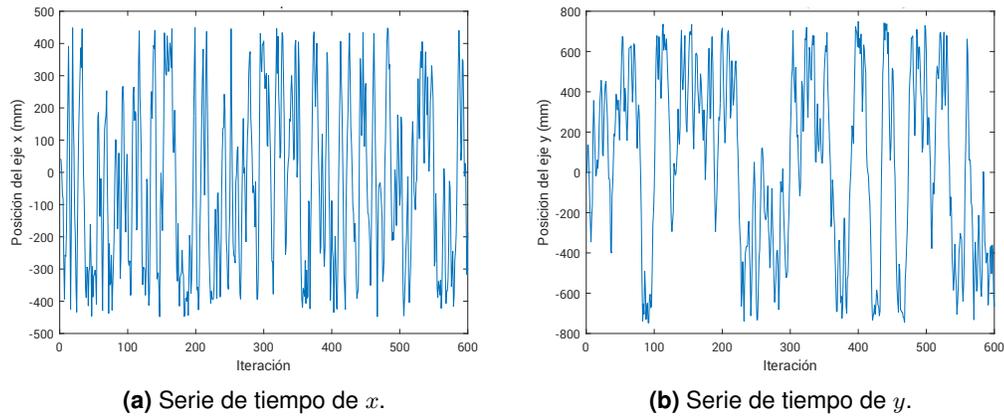


Figura 21. Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales $x_0 = 0.01, y_0 = 0$.

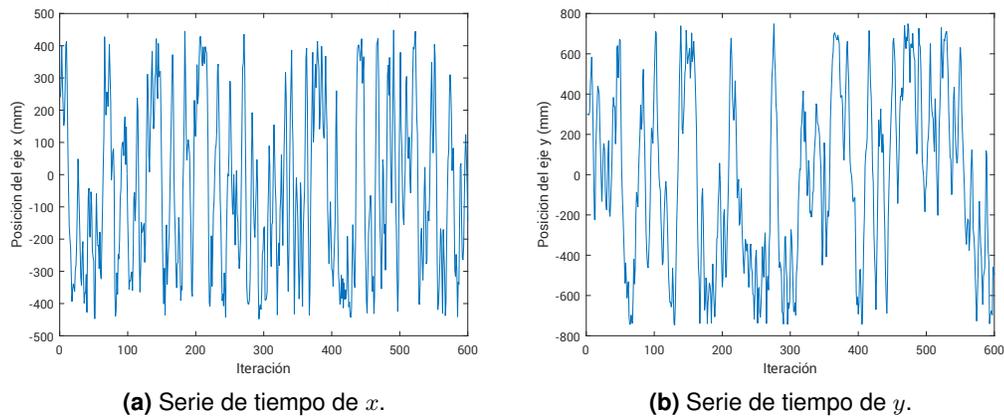


Figura 22. Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales $x_0 = 200, y_0 = 400$.

Los resultados que arroja la prueba, considerando las series de tiempo a), b) y c), se reportan en la tabla 2. El número cercano a 1 es un indicio claro de que la prueba concluye que dichas

series de tiempo son efectivamente caóticas.

Tabla 2. Resultados numéricos de la prueba 0-1 de Gottwald-Melbourne.

Resultados de la prueba 0-1 de Gottwald-Melbourne		
Condiciones iniciales	Valor de la prueba obtenido para x	Valor de la prueba obtenido para y
$x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0^\circ$	0.9968	0.9703
$x_0 = 0.01, y_0 = 0, \theta_0 = 0^\circ$	0.9963	0.9665
$x_0 = 200, y_0 = 400, \theta_0 = 0^\circ$	0.9952	0.9430

Al realizar un promedio de los resultados obtenidos de esta prueba para 100 trayectorias generadas por condiciones iniciales elegidas arbitrariamente del robot móvil diferencial, obtenemos valores para el eje x de 0.9982 y para el eje y de 0.9733. En la siguiente subsección se reportará otra prueba más de la existencia de caos en estas trayectorias.

4.2.4. Prueba de conteo de cajas (“Box-Counting”)

La geometría fractal provee un modelo matemático para muchos objetos complejos encontrados en la naturaleza (Mandelbrot, 1983), tales como costas, montañas y nubes. Estos objetos son demasiado complejos para poseer medidas típicas y ser descritos por la geometría tradicional euclidiana. Como se mencionó en la sección 2.2, la autosimilaridad es una propiedad esencial de los fractales en la naturaleza y puede ser cuantificada por la *dimensión fraccionaria*.

Algunas técnicas utilizadas para estimar la dimensión fraccionaria (no entera) de un objeto geométrico fueron discutidas por Mandelbrot (Mandelbrot, 1983). En este trabajo de tesis, el método de conteo de cajas (“box-counting”) fue utilizado debido a que es sencillo, automáticamente calculable con el uso de computadora y aplicable para patrones con o sin autosimilaridad (Peitgen *et al.*, 2006). En este método de conteo de cajas, cada imagen u objeto geométrico es cubierto por una secuencia de cuadrículas de medidas descendientes y para cada una de las cuadrículas se almacenan dos valores: el número de cuadros (cajas) intersectadas por la imagen $N(l)$ y la longitud lateral de cada cuadro l . La pendiente de regresión D de la línea recta formada por la gráfica de $\log(N(l))$ contra $\log(\frac{1}{l})$ indica el grado de complejidad (o dimensión fraccional) entre 1 y 2; $1 \leq D \leq 2$ (Mandelbrot, 1983). Una imagen con dimensión fraccional de 1 ó 2, se considera completamente diferenciable. La regresión lineal usada para estimar la dimensión fraccional

(Foroutan-Pour *et al.*, 1999) está dada por

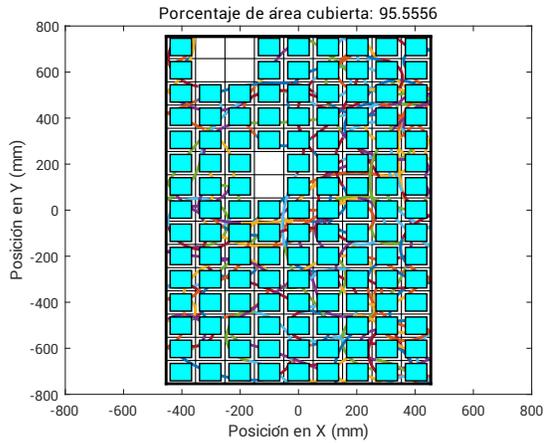
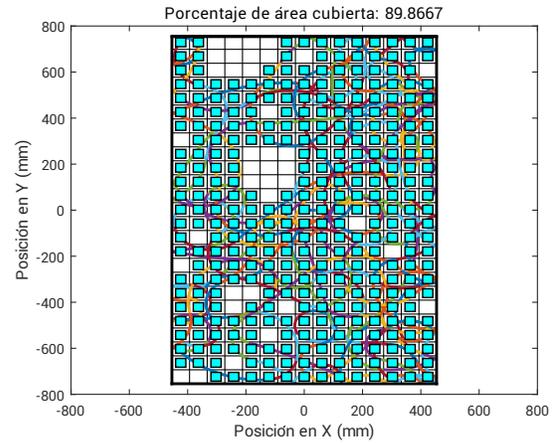
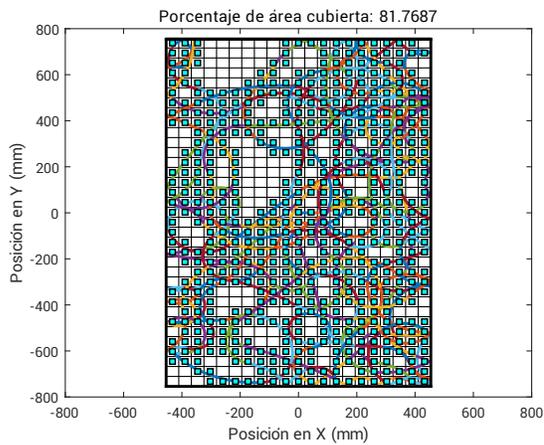
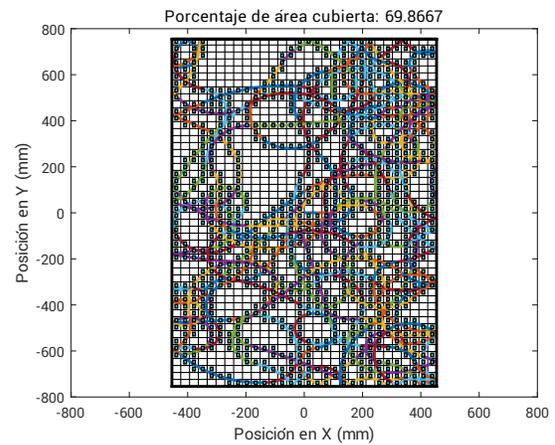
$$\log(N(l)) = \log(K) + D \log\left(\frac{1}{l}\right) \quad (9)$$

Donde K es una constante y $N(s)$ es proporcional a $\frac{1}{l}^{-D}$ (Mandelbrot, 1983). Despejando D de (9) obtenemos la siguiente expresión,

$$D = \frac{\log(N(l))}{\log\frac{1}{l}}. \quad (10)$$

Para realizar esta prueba, retomamos la cuadrícula realizada en la sección 4.2.2, la cual fue utilizada para calcular el porcentaje de área cubierta por las trayectorias del robot móvil generadas por el algoritmo diseñado en este trabajo de tesis. El tamaño de la cuadrícula con $l = 1$, se tomará para el caso en el que el largo del área de trabajo (recordamos que las dimensiones del área de prueba son 900 x 1500 mm) es igual a la longitud de un cuadro de la cuadrícula. Comenzamos con cuadros de tamaño $l = 0.111$, las cuales se irán reduciendo hasta obtener cuadrículas muy pequeñas de tamaño $l = 0.0200$.

Como primera prueba se toma la trayectoria del robot móvil generada por las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$. En la figura 23 se muestran los porcentajes de área cubierta por el robot móvil para 4 diferentes tamaños de cuadrícula para el área de trabajo propuesta: a) 135 cuadros de $l = 0.0667$, b) 375 cuadros de $l = 0.0400$, c) 735 cuadros de $l = 0.0286$ y d) 1500 cuadros de $l = 0.0200$.

(a) 135 cuadros de $l = 0.0667$.(b) 375 cuadros de $l = 0.0400$.(c) 735 cuadros de $l = 0.0286$.(d) 1500 cuadros de $l = 0.0200$.**Figura 23.** Porcentajes de cobertura para diferentes tamaños de cuadro.

En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos para 25 reducciones de la cuadrícula. La última columna muestra el resultado de D después de aplicar la expresión (10).

Tabla 3. Prueba de conteo de cajas para las condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Datos para la prueba de conteo de cajas				
N	l	$\log(N)$	$\log(\frac{1}{l})$	D
59	0.1000	4.0775	2.3026	1.7709
81	0.0833	4.3944	2.4849	1.7685
108	0.0714	4.6821	2.6391	1.7742
129	0.0667	4.8598	2.7081	1.7946
164	0.0588	5.0999	2.8332	1.8000
194	0.0526	5.2679	2.9444	1.7891
223	0.0500	5.4072	2.9957	1.8050
262	0.0455	5.5683	3.0910	1.8014
303	0.0417	5.7137	3.1781	1.7979
337	0.0400	5.8201	3.2189	1.8081
378	0.0370	5.9349	3.2958	1.8007
421	0.0345	6.0426	3.3673	1.7945
457	0.0333	6.1247	3.4012	1.8007
510	0.0313	6.2344	3.4657	1.7989
557	0.0294	6.3226	3.5264	1.7929
601	0.0286	6.3986	3.5553	1.7997
643	0.0270	6.4661	3.6109	1.7907
700	0.0256	6.5511	3.6636	1.7882
740	0.0250	6.6067	3.6889	1.7910
792	0.0238	6.6746	3.7377	1.7858
848	0.0227	6.7429	3.7842	1.7819
885	0.0222	6.7856	3.8067	1.7826
943	0.0213	6.8491	3.8501	1.7789
993	0.0204	6.9007	3.8918	1.7731
1048	0.0200	6.9546	3.9120	1.7778

Al graficar $\log(N(s))$ contra $\log(\frac{1}{l})$ y realizar la regresión lineal a los datos mostrados obtenemos la figura 24. Se puede apreciar un comportamiento muy similar al de la recta dada por la ecuación $y = 1.7815x + 0.0276$.

Notamos que la pendiente de esta recta (1.7815) es muy similar a los valores de D obtenidos con la expresión (10). Lo anterior comprueba que la trayectoria descrita por el robot móvil tiene una *dimensión fraccional* y por lo tanto es *caótica*.

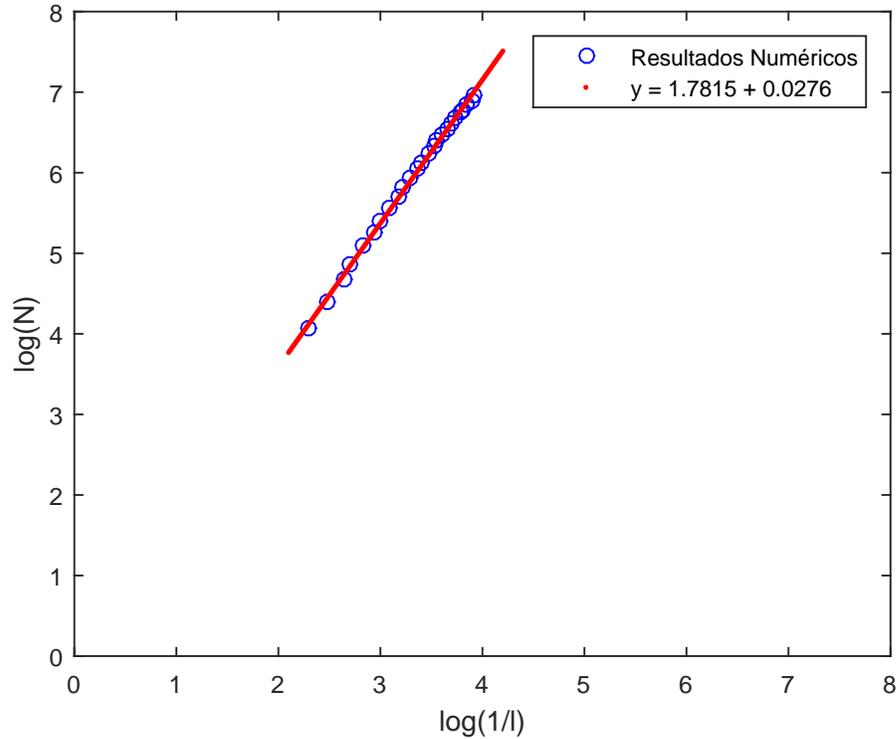


Figura 24. Resultado de la prueba de conteo de cajas para las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

En el caso de la trayectoria del robot móvil generada por las condiciones iniciales $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0$ y $\theta_0 = 0^\circ$, consideramos ahora 12 valores de l y medimos los valores correspondientes de $\log(N)$, $\log(\frac{1}{l})$ y D . Los valores obtenidos se reportan en la tabla 4.

Tabla 4. Prueba de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0$.

Datos para la prueba de conteo de cajas				
N	l	$\log(N)$	$\log(\frac{1}{l})$	D
70	0.0833	4.2485	2.4849	1.7097
117	0.0667	4.7622	2.7081	1.7585
172	0.0526	5.1475	2.9444	1.7482
231	0.0455	5.4424	3.0910	1.7607
291	0.0400	5.6733	3.2189	1.7625
369	0.0345	5.9108	3.3673	1.7554
445	0.0313	6.0981	3.4657	1.7595
515	0.0286	6.2442	3.5553	1.7563
610	0.0256	6.4135	3.6636	1.7506
702	0.0238	6.5539	3.7377	1.7535
780	0.0222	6.6593	3.8067	1.7494
880	0.0204	6.7799	3.8918	1.7421

La figura 25 nos muestra la gráfica de $\log(N(s))$ contra $\log(\frac{1}{l})$. Al realizar la regresión lineal a los datos mostrados obtenemos la ecuación de la recta $y = 1.7761x - 0.0831$, lo cual comprueba que la trayectoria descrita por el robot a partir de $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0$ y $\theta_0 = 0^\circ$ tiene una *dimensión fractal* y por lo tanto es *caótica* también.

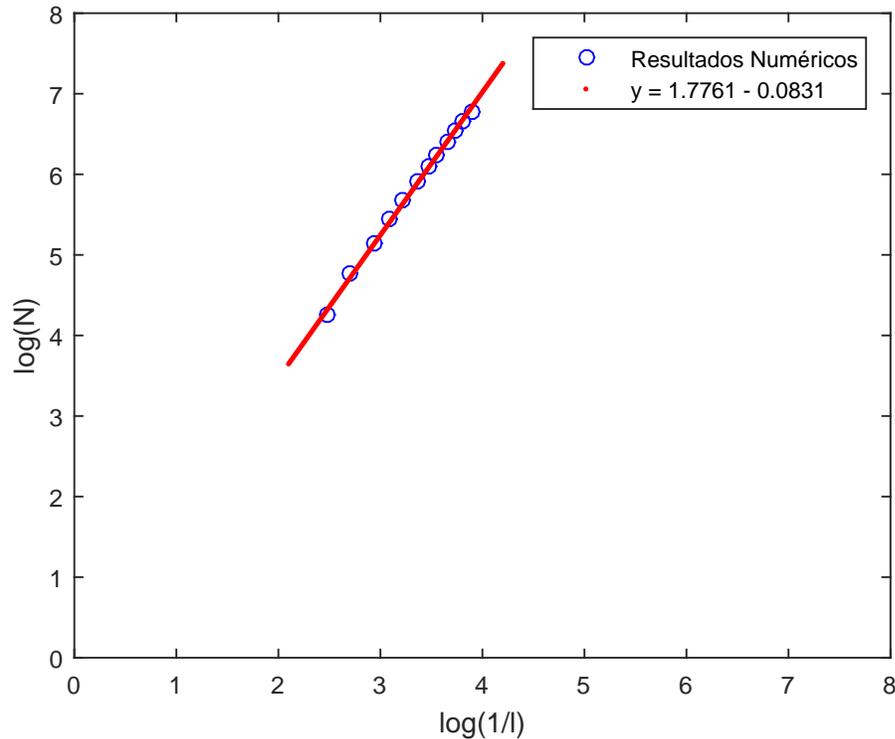


Figura 25. Resultado de la prueba de de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0$.

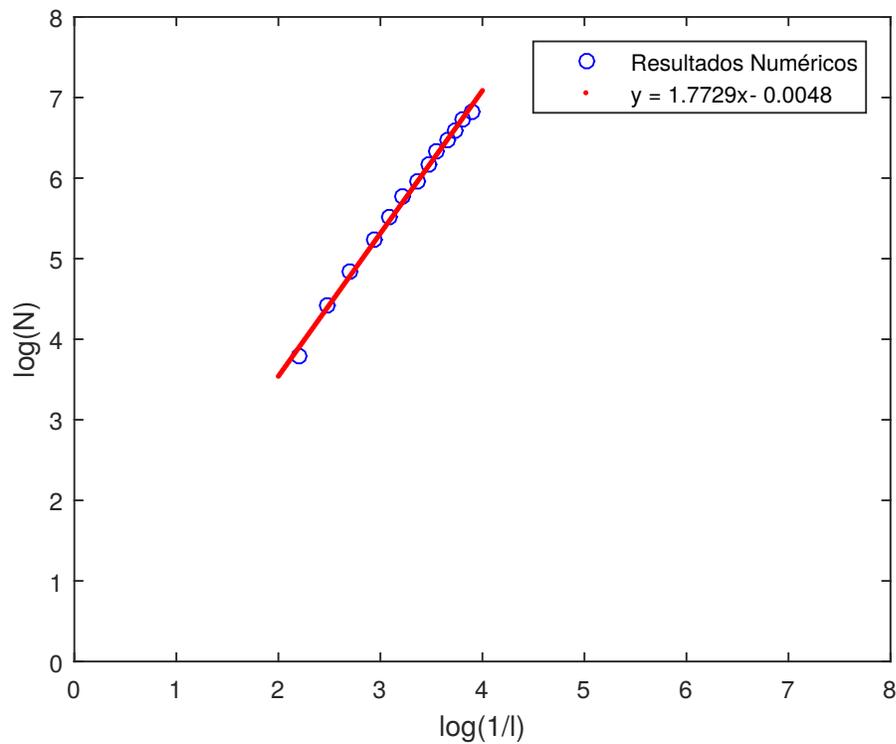
Por último, realizamos la prueba de conteo de cajas para la trayectoria descrita por el robot generada por las condiciones iniciales $x_0 = 200$, $y_0 = 400$ y $\theta_0 = 0^\circ$. los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5

Finalmente, la gráfica de $\log(N(s))$ contra $\log(\frac{1}{l})$ se muestra en la figura 26. Al realizar la regresión lineal a los datos obtenemos la ecuación de la recta $y = 1.7729x - 0.0048$, lo cual comprueba que la trayectoria descrita por el robot móvil es *caótica* también.

Podemos afirmar que la prueba de conteo de cajas concluye que las trayectorias descritas por el robot móvil, generadas por el algoritmo propuesto en esta tesis, son efectivamente caóticas.

Tabla 5. Prueba de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 200$, $y_0 = 400$.

Datos para la prueba de conteo de cajas				
N	l	$\log(N)$	$\log(\frac{1}{l})$	D
83	0.0833	4.4188	2.4849	1.7783
127	0.0667	4.8442	2.7081	1.7888
187	0.0526	5.2311	2.9444	1.7766
247	0.0455	5.5094	3.0910	1.7824
318	0.0400	5.7621	3.2189	1.7901
391	0.0345	5.9687	3.3673	1.7726
473	0.0313	6.1591	3.4657	1.7771
566	0.0286	6.3386	3.5553	1.7828
651	0.0256	6.4785	3.6636	1.7684
723	0.0238	6.5958	3.7377	1.7647
833	0.0222	6.7250	3.8067	1.7666
915	0.0204	6.8189	3.8918	1.7521

**Figura 26.** Resultado de la prueba de conteo de cajas para condiciones iniciales del robot móvil $x_0 = 200$, $y_0 = 400$.

4.2.5. Simulación: Aplicación a búsqueda y detección de objetos

Adicionalmente, se simuló numéricamente una posible aplicación para las trayectorias caóticas generadas en robots móviles: la búsqueda y detección de objetos dentro de una superficie.

Para alcanzar este objetivo, se colocó un objeto en el área de trabajo con ubicación en el plano (x_{obj}, y_{obj}) elegida de manera arbitraria y se almacenó la información referente al tiempo que tarda el robot móvil diferencial en encontrarlo (como se muestra en la figura 27). El robot inicia su curso normal en las mismas condiciones iniciales $(x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0^\circ)$ para todos los casos.

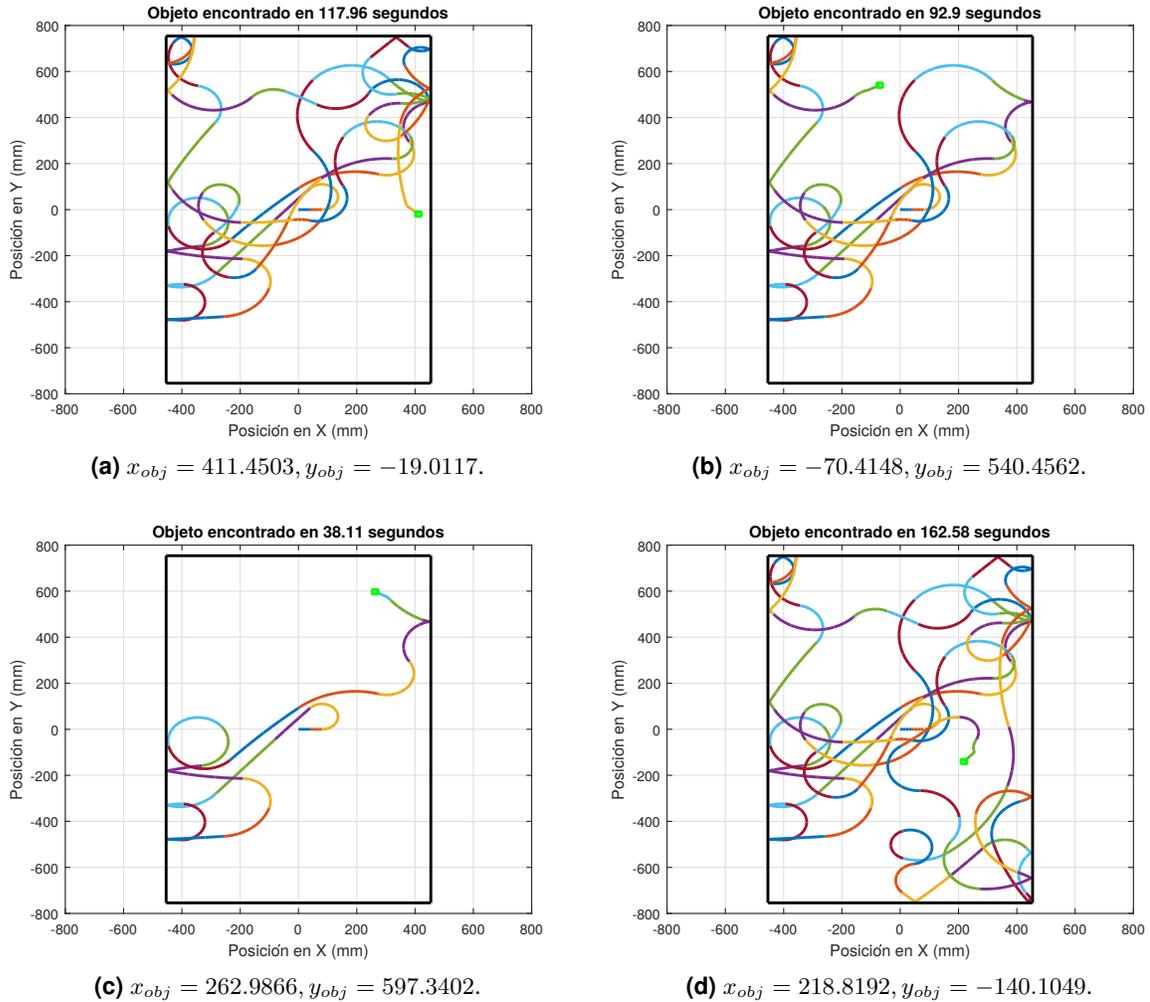


Figura 27. Resultados de búsqueda y detección de objetos para diferentes posiciones del objeto y condiciones iniciales del robot móvil: $x_0 = 0, y_0 = 0$.

En la tabla 6 se muestran los resultados obtenidos para 10 repeticiones del algoritmo generador de trayectorias caóticas.

Tabla 6. Resultados de búsqueda y detección de un objeto en diferentes posiciones y condiciones iniciales del robot móvil: $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Resultados de búsqueda de objetos en el área de trabajo		
x_{obj}	y_{obj}	Tiempo de detección (s)
185.4415	-608.6173	131.79
-362.5814	420.4952	90.37
188.4283	331.0927	67.37
139.5882	-438.6027	126.85
-342.9021	-2.1267	48.06
413.7696	-207.4986	119.36
390.6096	-481.1219	134.85
-304.0359	382.5699	79.74
-243.9207	537.3386	81.25
285.5729	479.3031	98.07

Al realizar 1000 repeticiones del algoritmo se obtuvo que, en promedio el robot móvil diferencial tarda 96.94 segundos en encontrar el objeto ubicado en el área de trabajo.

De igual manera, se realizó la simulación para el caso en el que el robot inicia su recorrido con condiciones iniciales elegidas de manera arbitraria y el objeto a encontrar se mantiene en la misma posición ($x_{obj} = 0, y_{obj} = 0$) para todos los casos, como se muestra en la figura 28.

En la tabla 7 se reportan los resultados obtenidos para 10 repeticiones del algoritmo generador de trayectorias caóticas del robot móvil diferencial.

Tabla 7. Resultados de búsqueda y detección de objeto con ubicación fija ($x_{obj} = 0, y_{obj} = 0$) y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial.

Resultados de búsqueda de objetos en el área de trabajo		
x_0	y_0	Tiempo de detección (s)
143.2002	-66.0764	60.86
28.1356	-55.7375	71.19
360.4146	478.5965	139.4
-264.2510	522.1088	134.33
188.2259	-478.4909	105.25
-67.3158	209.8807	52.8
-260.41767	-403.4963	84.11
-16.4184	-363.1242	38.76
-177.7508	-465.6737	70.1
-253.1433	543.8407	94.72

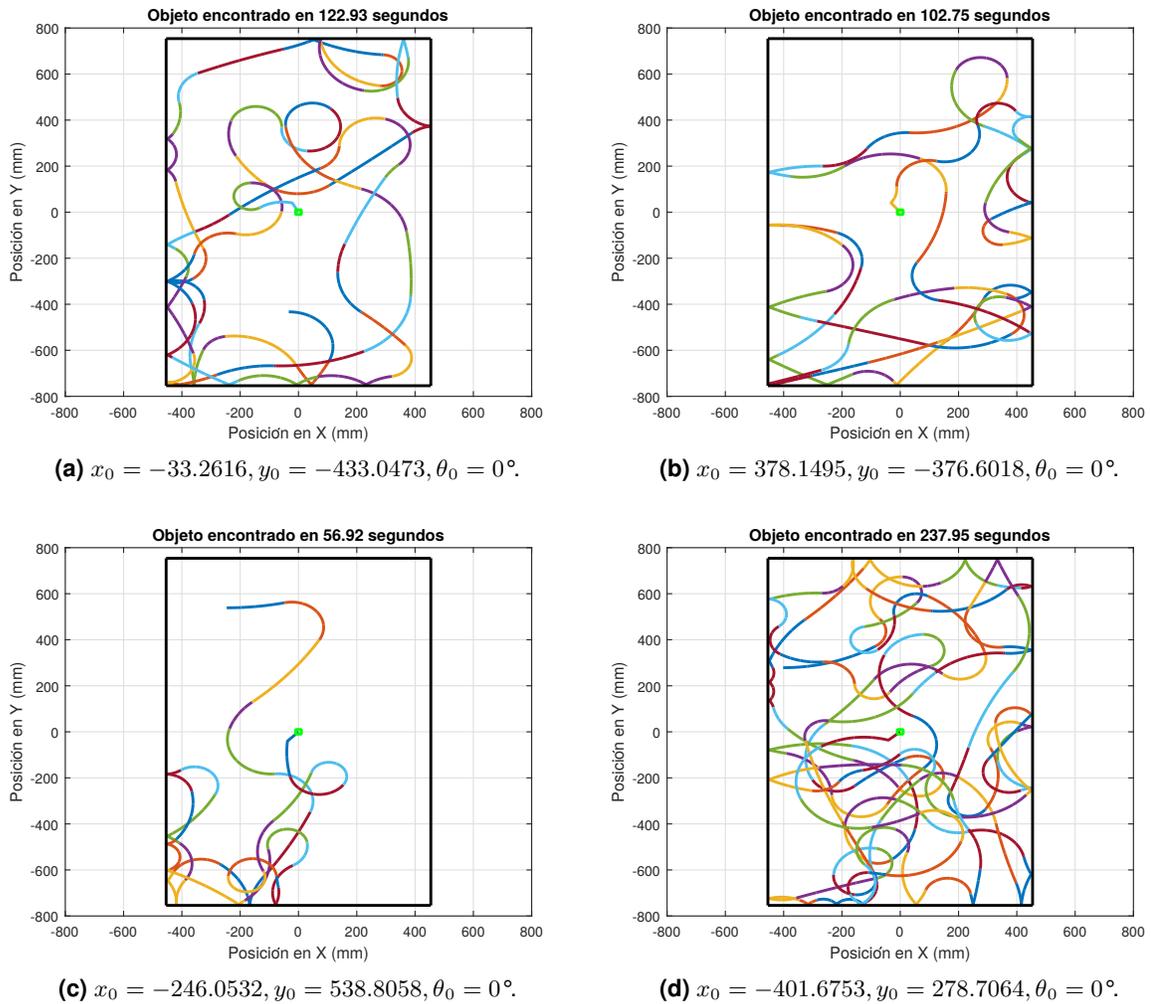


Figura 28. Resultado de búsqueda y detección de un objeto con ubicación fija ($x_{obj} = 0, y_{obj} = 0$) y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial en el área de trabajo.

Al repetir el proceso 1000 veces, se obtuvo un promedio de 84.77 segundos para encontrar el objeto por el robot móvil diferencial en el área de trabajo en este escenario.

Por último, en la figura 29 se muestran resultados de la simulación para el caso en que tanto el robot como el objeto a encontrar inician en posiciones arbitrarias.

En la tabla 8 se muestran los resultados obtenidos para 10 repeticiones del algoritmo.

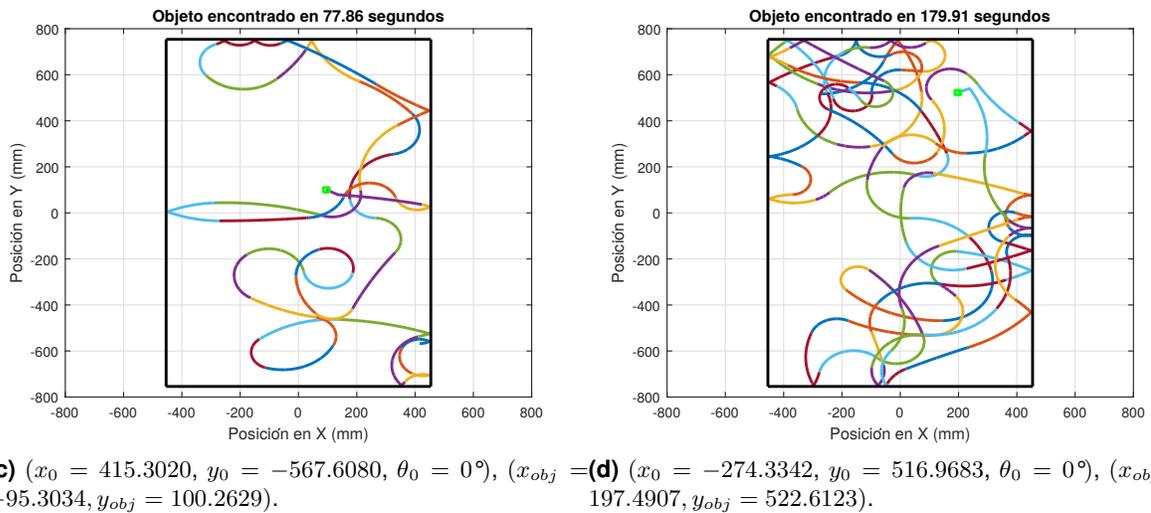
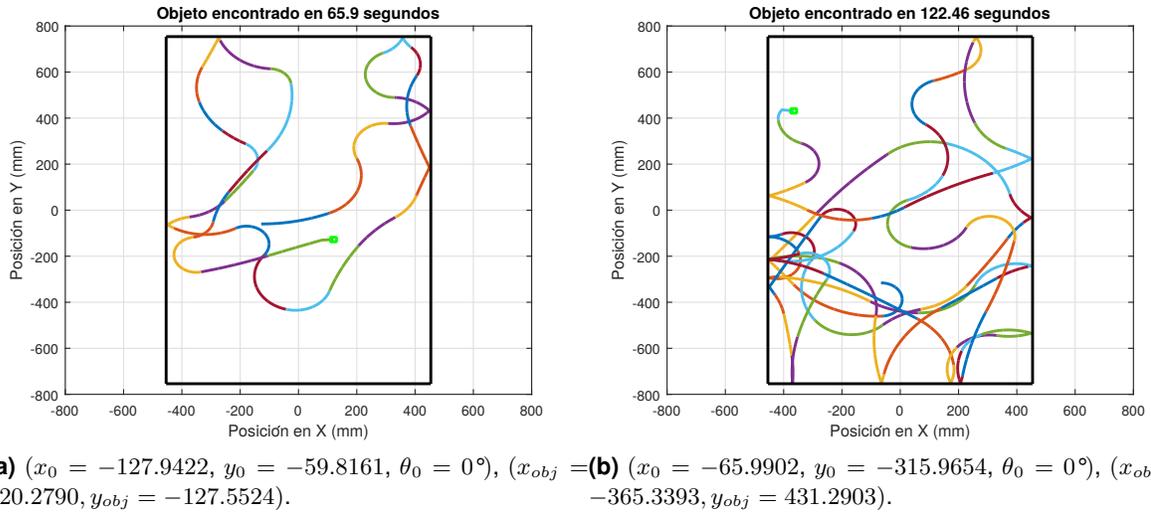


Figura 29. Resultado de búsqueda y detección de objeto con ubicación arbitraria y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial en el área de trabajo.

Finalmente, se obtuvo un promedio de tiempo de búsqueda de 96.17 segundos después de repetir el procedimiento 1000 veces. Se puede apreciar en todos los casos que el robot móvil diferencial Khepera III es capaz de encontrar el objeto en el área de trabajo propuesta en un período pequeño de tiempo.

Tabla 8. Resultados de búsqueda de objeto con ubicación y condiciones iniciales arbitrarias del robot móvil diferencial.

Resultados de búsqueda de objetos en el área de trabajo				
x_0 robot	y_0 robot	x_{obj} objeto	y_{obj} objeto	Tiempo de detección (s)
-345.6779	631.4614	89.2485	491.3595	120.84
156.0968	-478.5885	-443.4993	-364.0416	39.52
-124.0528	1601.3787	183.9127	-129.6489	81.29
-78.6440	265.1067	-371.1880	-317.6409	97.93
243.1153	417.6995	-176.1055	580.0826	195.55
83.3384	-636.1013	-346.6957	-385.6962	68.1
269.0843	339.0313	179.8035	-352.1774	97.55
187.9034	-121.6191	-143.3225	-349.6585	81.28
-264.2920	653.5212	2177.7217	-509.8866	165.04
38.1595	-644.3030	-265.7645	-597.3148	104.53

4.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se propuso y describió un algoritmo para la generación de trayectorias caóticas en un robot móvil diferencial. Con ayuda del software Matlab R2015b®, se realizaron simulaciones numéricas que nos permitieron visualizar las propiedades del caos en dichas trayectorias. Se realizaron también algunas pruebas que nos permitieron determinar numéricamente la presencia de caos en ellas. Se concluyó que, efectivamente, las trayectorias obtenidas en diferentes condiciones iniciales son caóticas y que son capaces de cubrir prácticamente en su totalidad el área de trabajo propuesta, confirmando que las trayectorias del robot son impredecibles y, por tanto, son altamente atractivas para ser aplicadas a tareas de patrullaje. Además, se realizaron simulaciones numéricas para el caso de la aplicación de búsqueda y detección de objetos, obteniendo resultados satisfactorios ya que el robot móvil diferencial es capaz de encontrar el objeto en cuestión en un plazo corto de tiempo.

Capítulo 5. Implementación experimental

En este capítulo se presentan resultados experimentales de la implementación del algoritmo de generación de trayectorias caóticas a un robot móvil propuesto en este trabajo de tesis. Se habla en particular de la implementación del algoritmo en el robot móvil diferencial Khepera III, del cual se describen sus principales características.

5.1. Robot móvil Khepera III

El Khepera III (figura 30) es un robot circular y pequeño que tiene dos ruedas y un soporte deslizante. El diámetro es de aproximadamente 130 mm, una altura de 70 mm y un peso de 650 gramos. Cuenta con 11 sensores infrarrojos (9 alrededor y 2 por debajo) y 5 ultrasónicos que le permiten detectar objetos y obstáculos que se encuentran alrededor de él. Las ruedas cuentan con encoders incrementales. Permite la comunicación vía Serial, USB y Bluetooth.



Figura 30. Robot móvil diferencial Khepera III, Laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos.

Por medio de cualquiera de sus opciones de comunicación es posible conectarse al robot móvil diferencial con una computadora para obtener los valores de los sensores. Obteniendo las mediciones de los encoders podemos estimar la posición del robot Khepera III. Sin embargo, este método obliga a depender de una computadora para realizar las operaciones necesarias para la localización del robot.

El Khepera III cuenta con diferentes accesorios, el principal de ellos recibe el nombre de Kore-Bot II. Este dispositivo provee al robot Khepera III con un sistema Linux embebido que le permite

utilizar todos los demás accesorios y también, ser programado en diversos lenguajes, entre ellos C, C++, Lua, etc. y le otorga además la capacidad de comunicación vía Wi-fi. Entre los demás accesorios existentes para el robot Khepera III se encuentran los Grippers, cámaras y sensores láser.

Entre las características principales del robot móvil Khepera III se encuentran las siguientes:

- Diámetro de las ruedas: 41 mm.
- Encoder: 4191 mediciones por revolución (0.001499 *radianes* por medición).
- Rango de velocidades de las ruedas: [-200 a -20] y [20 a 200] mm/s.

Este robot es ampliamente utilizado en diferentes trabajos de investigación que involucran el uso de robots móviles de tipo diferencial, ver por ejemplo (Volos *et al.*, 2012) y (Martins-Filho *et al.*, 2004).

5.2. Resultados experimentales

Para la fase experimental, se necesita una manera de conocer la posición del robot móvil diferencial Khepera III en todo momento. En este trabajo de tesis se utilizaron las cámaras Flex 13 con el software Motive ® (figura 31) de la marca Optitrack. Estas cámaras y software son especializados en la ubicación de marcadores reflectivos de infrarrojos en el espacio. Se utilizan en numerosas universidades y centros de investigación para diferentes áreas que necesitan estudio de movimientos como en robótica, movimiento del cuerpo humano, estudio de expresiones faciales, etc.

Se utilizó el programa MATLAB R2015b ® para hacer los cálculos de los estados del mapa caótico de Hénon, calcular las velocidades lineal y angular y las velocidades de las ruedas izquierda y derecha. Esta información la envía al robot Khepera III por medio de bluetooth. La retroalimentación la recibe Matlab a través del sistema de cámaras. Esta información se grafica en tiempo real para su presentación.

Se colocaron marcadores reflectivos en el robot Khepera III para conocer su posición en todo momento. Además, se colocaron marcadores en los extremos de la mesa de trabajo para identificar los límites de la misma, representados por el cuadro negro visible en las figuras. Para la estrategia de movimiento reflectivo para la evasión de límites del área de trabajo, el programa

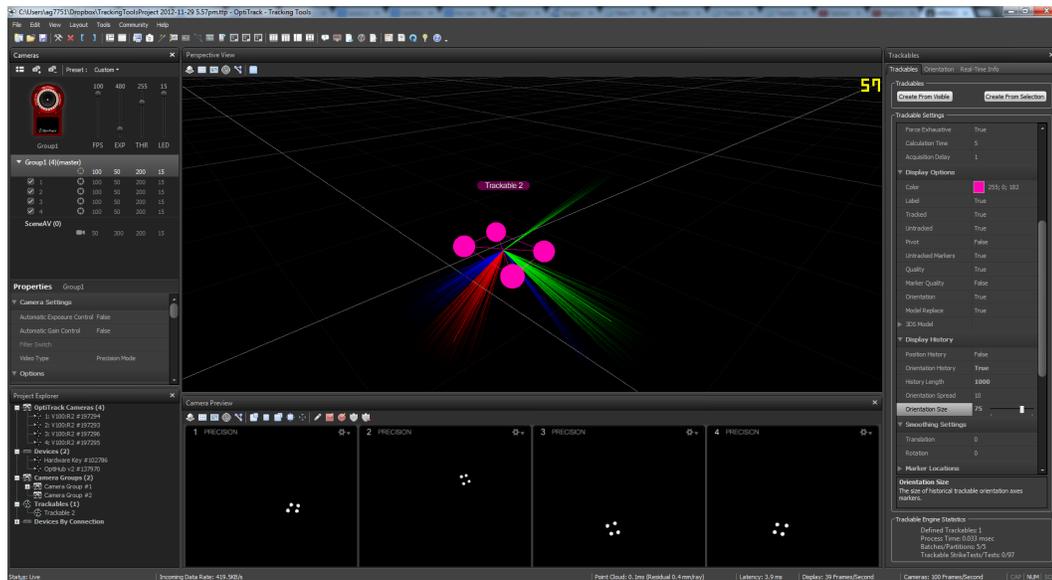


Figura 31. Software Motive ®.

detecta el momento en el que el robot diferencial se aproxima a los bordes de la mesa gracias a que las cámaras infrarrojas detectan los marcadores colocados en la misma y se toman acciones evasivas descritas en la sección 4.1. Gracias a esto, se obtuvieron gráficas en tiempo real de la trayectoria seguida por el robot móvil Khepera III al emplear el algoritmo generador de trayectorias caóticas descrito anteriormente.

Se realizaron tres experimentos con el robot diferencial Khepera III, utilizando diferentes condiciones iniciales (obtenidas directamente de la posición real del robot) con 100 iteraciones para cada uno de los siguientes casos:

- a) $x_0 = 1.1, y_0 = -0.9, \theta_0 = 1.8^\circ$,
- b) $x_0 = -0.5, y_0 = -1.3, \theta_0 = 359.1^\circ$,
- c) $x_0 = -31.4, y_0 = -254.8, \theta_0 = 238.6^\circ$.

Los resultados experimentales obtenidos se muestran en la figura 32. Se puede observar que un pequeño cambio en milímetros en las condiciones iniciales produce en el robot, trayectorias completamente diferentes e impredecibles, demostrando experimentalmente que la *propiedad caótica de sensibilidad a las condiciones iniciales* se cumple. Se puede ver también, que con 100 iteraciones queda cubierta - por el patrullaje del robot Khepera III- la mayor parte del área de trabajo.

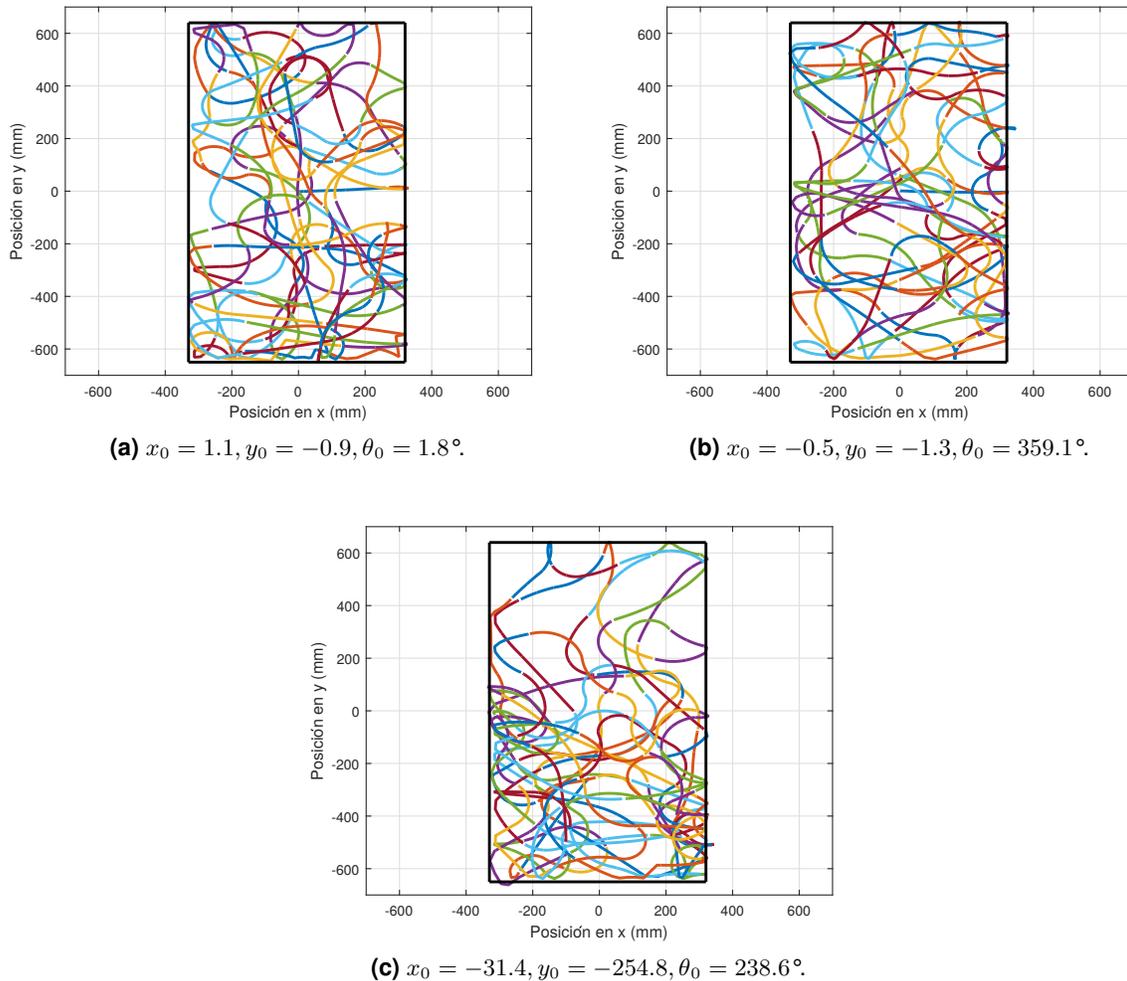


Figura 32. Resultados experimentales: 3 diferentes trayectorias generadas por 3 diferentes condiciones iniciales del robot Khepera III.

Cabe mencionar que el recorrido marcado por las líneas corresponde al camino seguido por el centro del robot. El cuadro negro que delimita el área de trabajo es visiblemente más pequeña que la mostrada en las figuras correspondientes a las simulaciones. Esto es debido a la anchura de los bordes de la mesa y a la distancia existente entre la periferia del robot Khepera III y el centro de sus ruedas.

En las siguientes subsecciones se reportan los resultados de las pruebas correspondientes para comprobar la presencia de caos en las trayectorias generadas por el algoritmo propuesto en este trabajo, en aplicaciones experimentales con datos obtenidos en tiempo real.

5.2.1. Porcentaje de cobertura experimental del área de trabajo

Para verificar el porcentaje de cobertura de las trayectorias caóticas del Khepera III, se repite el procedimiento utilizado en la sección 4.2.2, el cual consiste en dividir el área de trabajo en cuadros y midiendo la cantidad de éstos por los que el robot Khepera III pasa durante el recorrido de su trayectoria.

En la figura 33 se muestran los resultados obtenidos para los 3 recorridos del robot Khepera III, obtenidos experimentalmente mostrados en la sección anterior.

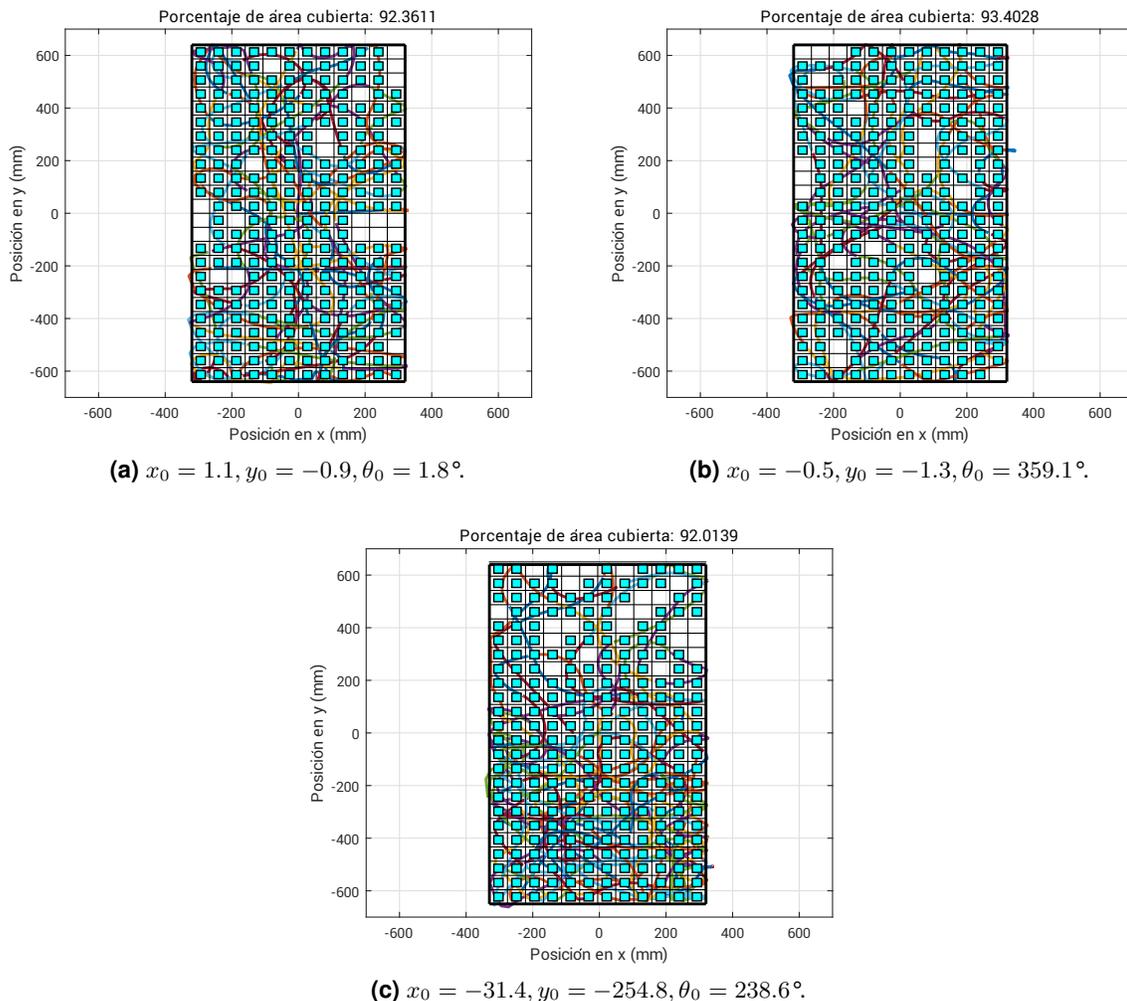


Figura 33. Porcentajes del área de trabajo cubiertas por trayectorias del robot Khepera III generadas con diferentes condiciones iniciales.

Podemos apreciar que, con tan solo 200 iteraciones del algoritmo generador de trayectorias caóticas, se cubre casi en su totalidad el área de prueba de manera experimental. Cabe recordar que no se toma en cuenta el área que ocupa el robot ni el alcance de sus sensores.

5.2.2. Prueba 0-1 Gottwald-Melbourne para resultados experimentales

Repitiendo el proceso seguido en la sección 4.2.3, utilizamos los valores obtenidos experimentalmente para realizar la prueba Gottwald-Melbourne para determinar la presencia de caos en la trayectoria generada. En las figuras 34, 35 y 36 se muestran las series de tiempo de las coordenadas x y y para cada uno de los casos experimentales obtenidos.

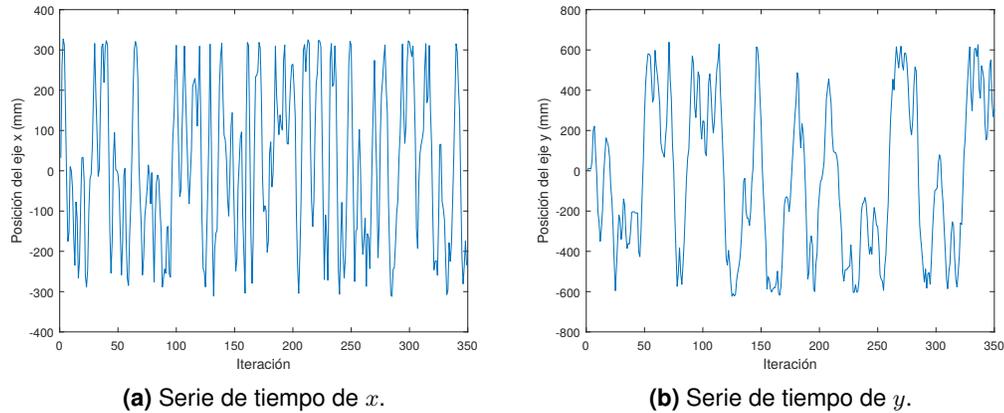


Figura 34. Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales del inciso a).

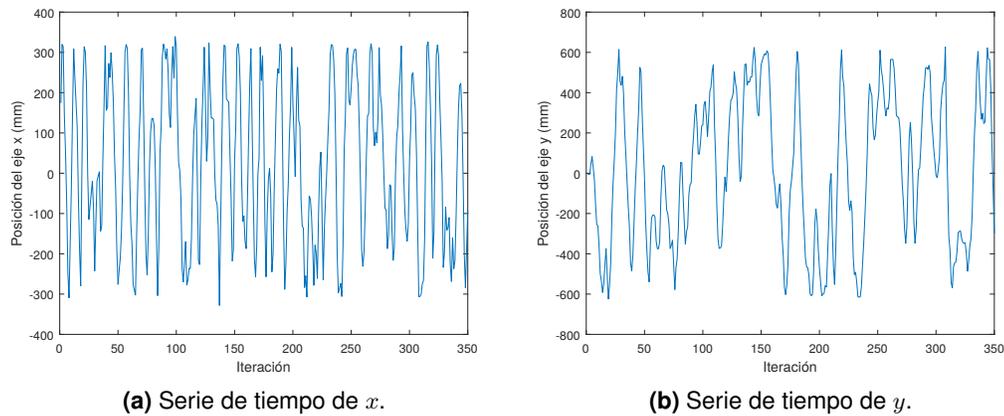


Figura 35. Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales del inciso b).

En la tabla 9 se presentan los valores resultantes de la prueba. Se aprecia en estos resultados experimentales la presencia de *caos*.

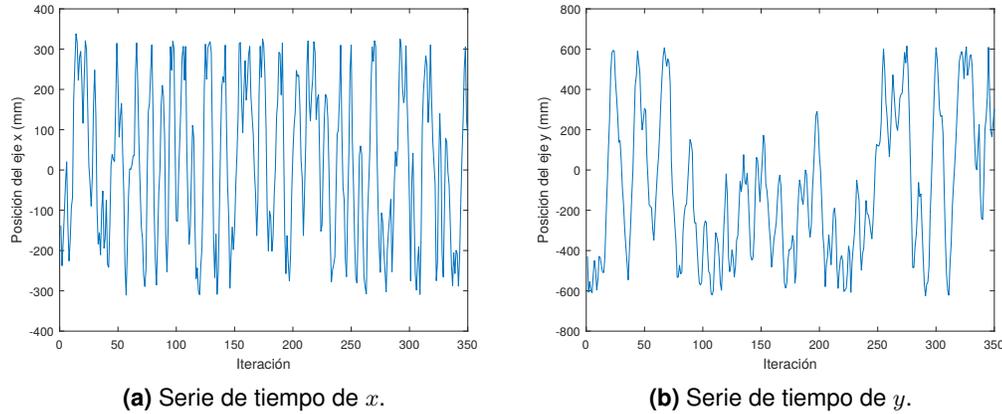


Figura 36. Series de tiempo resultantes con condiciones iniciales del inciso c).

Tabla 9. Resultados de la prueba 0-1 de Gottwald-Melbourne para resultados experimentales.

Resultados experimentales de la prueba 0-1 de Gottwald-Melbourne			
x_0	y_0	Valor de la prueba obtenido para x	Valor de la prueba obtenido para y
1.1	-0.9	0.9968	0.9703
-0.5	-1.3	0.9963	0.9665
-31.4	-254.8	0.9952	0.9430

5.2.3. Prueba de conteo de cajas (“Box-Counting”) para resultados experimentales

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.2.4, tomamos en primer lugar el recorrido del robot Khepera III generado con las condiciones iniciales $x_0 = 1.1, y_0 = -0.9, \theta_0 = 1.8^\circ$. En la tabla 10 se muestran los valores medidos de $N, l, \log(N), \log(\frac{1}{l})$ y D para este caso.

Tabla 10. Prueba de conteo de cajas para experimento de las condiciones iniciales del inciso a).

Datos experimentales para la prueba de conteo de cajas				
N	l	$\log(N)$	$\log(\frac{1}{l})$	D
194	0.0500	5.2679	2.9957	1.7585
274	0.0417	5.6131	3.1781	1.7662
369	0.0367	5.9108	3.3322	1.7738
469	0.0313	6.1506	3.4657	1.7747
579	0.0278	6.3613	3.5835	1.7752
694	0.0250	6.5425	3.6889	1.7736
796	0.0233	6.6796	3.7612	1.7759
935	0.0213	6.8405	3.8501	1.7767
1063	0.0196	6.9689	3.9318	1.7724
1200	0.0182	7.0901	4.0074	1.7693
1319	0.0169	7.1846	4.0775	1.7620

Al graficar $\log(N(s))$ contra $\log(\frac{1}{l})$ y realizar la regresión lineal a los datos mostrados obtenemos la figura 37. Se puede apreciar un comportamiento muy similar al de la recta dada por la ecuación $y = 1.7837x - 0.0462$.

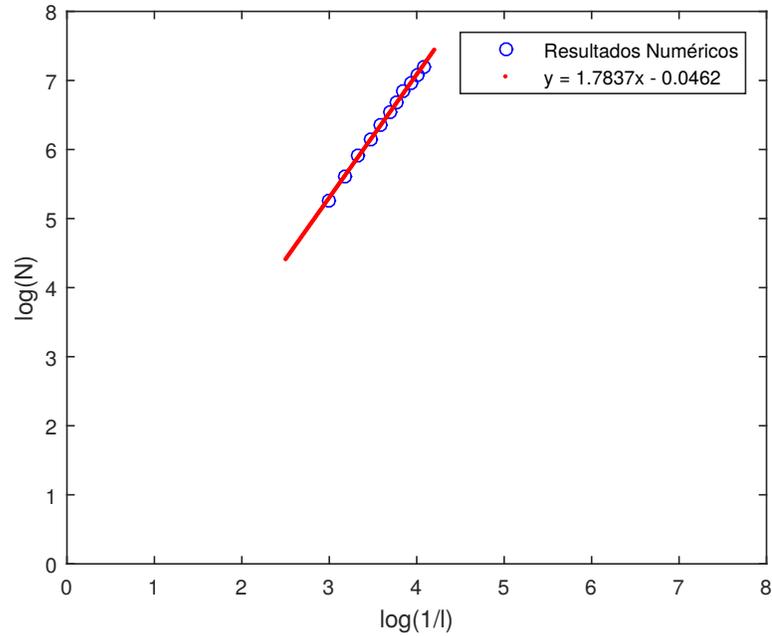


Figura 37. Resultado experimental de la prueba de conteo de cajas del inciso a).

Notamos que la pendiente de esta recta (1.7837) es muy similar a los valores de D obtenidos con la expresión (10). Lo anterior comprueba que la trayectoria tiene una *dimensión fraccional* y , por lo tanto, es *caótica*.

En el caso de la trayectoria del robot móvil generada por las condiciones iniciales $x_0 = -0.5, y_0 = -1.3, \theta_0 = 359.1^\circ$ tomamos ahora 11 valores de l y medimos los valores correspondientes de $\log(N)$, $\log(\frac{1}{l})$ y D . Los valores obtenidos se muestran en la tabla 11.

Tabla 11. Prueba de conteo de cajas para experimento de las condiciones iniciales del inciso b)).

Datos experimentales para la prueba Box-Counting				
N	l	$\log(N)$	$\log(\frac{1}{l})$	D
198	0.0500	5.2883	2.9957	1.7653
281	0.0417	5.6384	3.1781	1.7742
377	0.0367	5.9322	3.3322	1.7803
479	0.0313	6.1717	3.4657	1.7808
587	0.0278	6.3750	3.5835	1.7790
704	0.0250	6.5568	3.6889	1.7774
828	0.0233	6.7190	3.7612	1.7864
948	0.0213	6.8554	3.8501	1.7803
1073	0.0196	6.9782	3.9318	1.7748
1206	0.0182	7.0951	4.0074	1.7704
1347	0.0169	7.256	4.0775	1.7672

La figura 38 nos muestra la gráfica de $\log(N(s))$ contra $\log(\frac{1}{l})$. Al realizar la regresión lineal a los datos mostrados obtenemos la ecuación de la recta $y = 1.7750x + 0.0037$, comprueba que la trayectoria tiene *dimensión fraccionaria* y, por lo tanto, es *caótica* también.

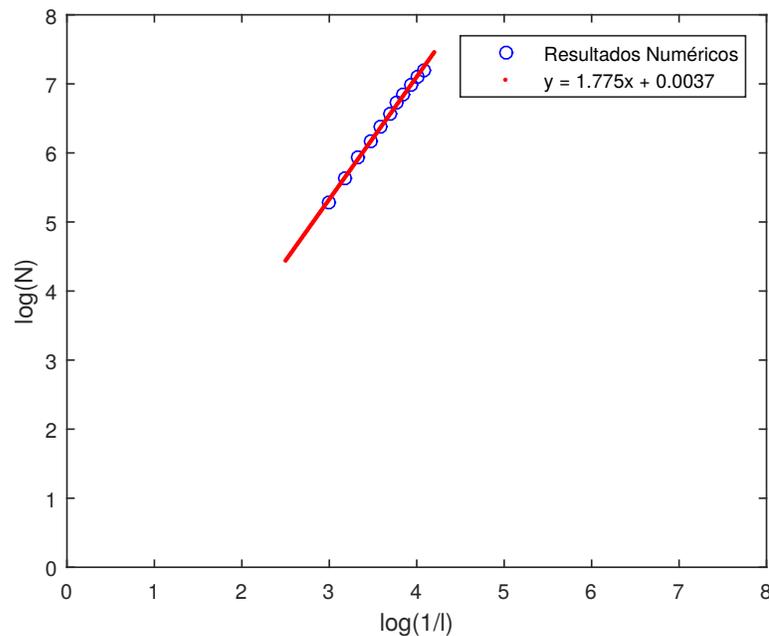


Figura 38. Resultado experimental de la prueba de conteo de cajas del inciso b).

Por último, realizamos la prueba para la trayectoria generada por las condiciones iniciales $x_0 = -31.4, y_0 = -254.8, \theta_0 = 238.6^\circ$. los datos obtenidos se muestran en la tabla 12

Tabla 12. Prueba de conteo de cajas para experimento de las condiciones iniciales del inciso c).

Datos experimentales para la prueba Box-Counting				
N	l	$\log(N)$	$\log(\frac{1}{l})$	D
199	0.0500	5.2933	2.9957	1.7669
284	0.0417	5.6490	3.1781	1.7775
377	0.0367	5.9322	3.3322	1.7803
479	0.0313	6.1717	3.4657	1.7808
592	0.0278	6.3835	3.5835	1.7814
708	0.0250	6.5624	3.6889	1.7790
829	0.0233	6.7202	3.7612	1.7867
970	0.0213	6.8774	3.8501	1.7862
1093	0.0196	6.9967	3.9318	1.7795
1249	0.0182	7.1301	4.0074	1.7793
1381	0.0169	7.2306	4.0775	1.7733

Finalmente, la gráfica de $\log(N(s))$ contra $\log(\frac{1}{l})$ se muestra en la figura 39. Al realizar la regresión lineal a los datos obtenemos la ecuación de la recta $y = 1.7975x - 0.0656$, lo cual comprueba que la *trayectoria es caótica* también.

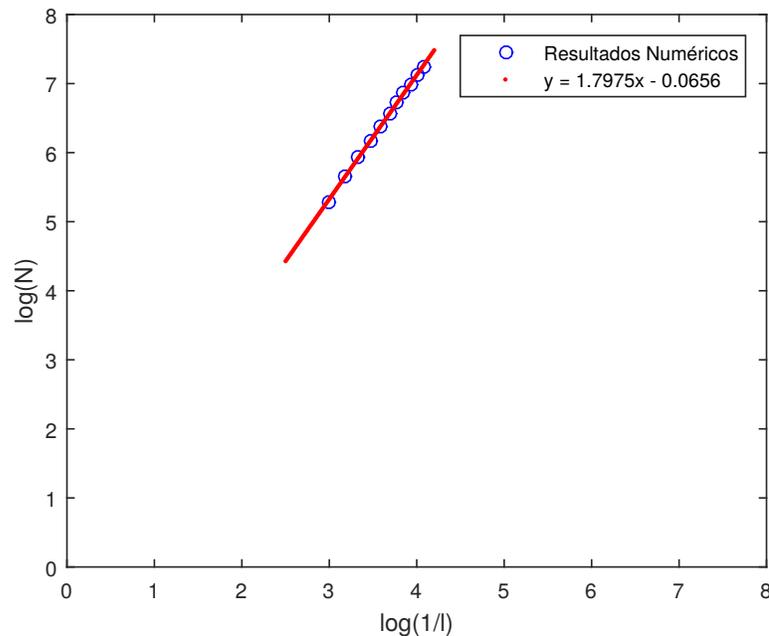


Figura 39. Resultado experimental de la prueba de conteo de cajas del inciso c).

Podemos afirmar que la prueba de conteo de cajas concluye que las trayectorias generadas por el algoritmo son efectivamente caóticas.

Es importante mencionar, que en las gráficas no se consideran las dimensiones reales del robot móvil diferencial Khepera III ni el alcance de sus sensores, por lo que en realidad el área cubierta por éste es mucho mayor que la mostrada.

5.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se reportaron los resultados experimentales obtenidos por la implementación del algoritmo de generación de trayectorias caóticas propuesto en este trabajo de tesis. Se utilizó un robot móvil diferencial Khepera III y la mesa de trabajo descrita en la sección 4.1. Se presentaron las trayectorias caóticas generadas para diferentes condiciones iniciales del robot móvil Khepera III y se realizaron pruebas descritas en el capítulo anterior para determinar la presencia de caos en ellas. Se llegó a la conclusión de que las trayectorias generadas con el algoritmo propuesto para el robot Khepera III son caóticas, cumpliendo el objetivo de este trabajo de tesis.

Cabe mencionar que estos resultados experimentales son preliminares, es necesario mejorar el algoritmo de evasión de bordes para que el ángulo de reflexión sea más preciso y utilizar otros sistemas caóticos para comparar su desempeño. De igual manera, es necesario ajustar algunos detalles del área de trabajo y del programa generador de trayectorias caóticas. Sin embargo, los resultados experimentales obtenidos son satisfactorios y congruentes con los numéricos. Entre las condiciones que afectan los resultados experimentales se encuentran las limitaciones físicas intrínsecas del robot Khepera III, así como algunas características del área de trabajo.

Capítulo 6. Conclusiones

En este capítulo final se presentan las conclusiones acerca del presente trabajo de tesis realizado, así como una mención del trabajo a futuro que se genera a partir de los resultados obtenidos.

En este trabajo de tesis se empleó el mapa caótico de Hénon para inducir comportamientos caóticos en las velocidades lineales y angulares de un modelo matemático de un robot móvil diferencial, con aplicaciones de patrullaje, búsqueda y detección de objetos en un área de trabajo, aprovechando las propiedades del caos.

Como contribución de esta tesis, se diseñó un algoritmo que produce una trayectoria caótica en un robot diferencial, tanto en simulaciones numéricas como en aplicación práctica empleando un robot móvil tipo Khepera III y se realizaron simulaciones y experimentos prácticos que demuestran su validez.

Las trayectorias generadas cumplen los objetivos de ser *impredecibles* para los observadores externos y cumplen la misión de patrullar un área de trabajo de *manera eficiente*. Además, se demostró que dichas trayectorias son altamente sensibles a las condiciones iniciales y que tienen un comportamiento determinista. Todas estas características son propiedades intrínsecas de los sistemas caóticos.

Se realizaron pruebas numéricas para determinar la existencia de caos en las trayectorias generadas en el robot móvil Khepera III. La prueba de Gottwald-Melbourne concluye que las series de tiempo obtenidas son efectivamente caóticas; mientras que la prueba de conteo de cajas muestra que la trayectoria final como tal, también lo es.

Los resultados experimentales están en concordancia con los resultados numéricos, lo que implica que la metodología aplicada se encuentra bien encaminada.

Con los resultados numéricos y experimentales obtenidos y mostrados durante esta tesis, podemos concluir que los objetivos planteados se cumplieron en su totalidad y de manera exitosa.

6.1. Trabajo futuro

Este trabajo de tesis se enfocó en el diseño de un algoritmo capaz de generar trayectorias caóticas en robots móviles diferenciales y en el análisis de dichas trayectorias para determinar la presencia de caos en ellas. Además, se realizó una aplicación de búsqueda de objetos por el

robot móvil en un área de trabajo. Sin embargo, existen muchas otras tareas por realizar para profundizar en el tópico de este trabajo de tesis:

- Mejorar el algoritmo de evasión de bordes con ángulo de reflexión.
- Emplear otros sistemas caóticos en el algoritmo.
- Estudio e implementación en otras aplicaciones prácticas de las trayectorias caóticas del robot móvil diferencial, como búsqueda y rescate, exploración con obstáculos en el área de trabajo, etc.
- Implementación del algoritmo propuesto en otro tipo de robots móviles, como por ejemplo cuadracópteros.
- Evasión de obstáculos en el área de trabajo.
- Completar las pruebas de caos, en particular el cálculo de los exponentes de Lyapunov, tanto para los casos numéricos como experimentales.
- Grupos de robots caóticos.

Literatura citada

- Bae, Y., Lee, M., y Gatton, T. M. (2006). An obstacle avoidance method for chaotic robots using angular degree limitations. En: *International Conference on Computational Science and Its Applications*. Springer, pp. 244–250.
- Barnsley, M. F. (2014). *Fractals everywhere*. Academic Press.
- Batra, R., Zade, P., y Sagne, D. (2012). Design and implementation of Sierpinski Carpet fractal antenna for wireless communication. *International Journal of Scientific Research Engineering & Technology (IJSRET)*, **1**: 043–047.
- Bertuglia, C. S. y Vaio, F. (2005). *Nonlinearity, chaos, and complexity: the dynamics of natural and social systems*. Oxford University Press on Demand.
- Besicovitch, A. (1929). On linear sets of points of fractional dimension. *Mathematische Annalen*, **101**(1): 161–193.
- Cardoza-Avendaño, L., López-Gutiérrez, R., Cruz-Hernández, C., Spirin, V., Chávez-Pérez, R., y Arellano-Delgado, A. (2012). Encrypted audio transmission via synchronized chaotic Nd: Yag lasers. *Revista Mexicana de Física*, **58**(6): 472–480.
- Cruz-Hernández, C. (2004). Synchronization of time-delay Chua's oscillator with application to secure communication. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **4**(1): 1–13.
- Cruz-Hernández, C. y Romero-Haros, N. (2008). Communicating via synchronized time-delay Chua's circuits. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **13**(3): 645–659.
- Cuomo, K. M., Oppenheim, A. V., y Strogatz, S. H. (1993). Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Transactions on circuits and systems II: Analog and digital signal processing*, **40**(10): 626–633.
- Curiac, D.-I. y Volosencu, C. (2014). A 2d chaotic path planning for mobile robots accomplishing boundary surveillance missions in adversarial conditions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**(10): 3617–3627.
- Días Brecia, S. (2009). Primeras reflexiones de los fractales, la teoría del caos y su aplicación en el aula. *Revista Red Visual*, pp. 9–10.
- Foroutan-Pour, K., Dutilleul, P., y Smith, D. (1999). Advances in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation. *Applied Mathematics and Computation*, **105**(2): 195–210.
- Gleick, J. (1988). *Caos: la creación de una ciencia*. Seix Barral.
- Gámez-Guzmán, L., Cruz-Hernández, C., López-Gutiérrez, R., y García-Guerrero, E. (2009). Synchronization of Chua's circuits with multi-scroll attractors: application to communication. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**(6): 2765–2775.
- Gottwald, G. A. y Melbourne, I. (2004). A new test for chaos in deterministic systems. En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, Vol. 460, pp. 603–611.
- Hausdorff, F. (1919). Dimension und äußeres Maß. *Mathematische Annalen*, **79**(1-2): 157–179.

- Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, **50**(1): 69–77.
- Hilborn, R. C., Coppersmith, S., Mallinckrodt, A. J., McKay, S., *et al.* (1994). Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. *Computers in Physics*, **8**(6): 689–689.
- Khalil, H. K. y Grizzle, J. (1996). *Nonlinear systems*, Vol. 3. Prentice Hall New Jersey.
- Kumar-Malu y Majumdar-Jharna (2014). Kinematics, location and control of differential drive mobile robot. *Global Journal of Researchers in Engineering: Robotics and Nano-Tech*, **14**(1).
- Lazea, G. y Lupu, A. E. (1997). Aspects on path planning for mobile robots. *TEMPUS M-JEP 11467: Intensive Course on Computer Aided Engineering in Flexible Manufacturing*, pp. 19–23.
- Li, C., Wang, F., Zhao, L., Li, Y., y Song, Y. (2013). An improved chaotic motion path planner for autonomous mobile robots based on a logistic map. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, **10**(273).
- Li, L., Peng, H., Kurths, J., Yang, Y., y Schellnhuber, H. J. (2014). Chaos–order transition in foraging behavior of ants. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **111**(23): 8392–8397.
- Lin, F.-Y. y Liu, J.-M. (2004). Chaotic radar using nonlinear laser dynamics. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **40**(6): 815–820.
- Lin, J.-H., Huang, L.-R., *et al.* (2009). Chaotic bee swarm optimization algorithm for path planning of mobile robots. En: *Proceedings of the 10th WSEAS international conference on evolutionary computing*. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), pp. 84–89.
- Liu, Z., Zhu, X., Hu, W., y Jiang, F. (2007). Principles of chaotic signal radar. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **17**(05): 1735–1739.
- Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature*, Vol. 173. Macmillan.
- Martins-Filho, L. S. y Macau, E. E. (2007). Patrol mobile robots and chaotic trajectories. *Mathematical Problems in Engineering*, **2007**.
- Martins-Filho, L. S., Machado, R. F., Rocha, R., y Vale, V. (2004). Commanding mobile robots with chaos. En: *ABCAM Symposium Series in Mechatronics*. Vol. 1, pp. 40–46.
- Martins-Filho, L. S., Macau, E. E., Rocha, R., Machado, R. F., y Hirano, L. A. (2005). Kinematic control of mobile robots to produce chaotic trajectories. En: *Proc. of the 18th Int. Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto*.
- Martínez-Clark, R. (2016). Aplicaciones del caos. *CICESE*.
- Miramontes Vidal, O. (2000). Orden y caos en la organización social de las hormigas. *Departamento de Sistemas Complejos. Instituto de Física, UNAM*, (059).
- Moon, F. C. (2008). *Chaotic and Fractal Dynamics: Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons.
- Nakamura, Y. y Sekiguchi, A. (2001). The chaotic mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **17**(6): 898–904.
- Nehmzow, U. y Walker, K. (2003). The behaviour of a mobile robot is chaotic. *AISB Journal*, **1**(4): 373–388.

- Peitgen, H.-O., Jurgens, H., y Saupe, D. (2006). *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer Science & Business Media.
- Sira-Ramírez, H. y Cruz-Hernández, C. (2001). Synchronization of chaotic systems: A generalized hamiltonian systems approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(05): 1381–1395.
- Stavrínides, S., Anagnostopoulos, A., Miliou, A., Valaristos, A., Magafas, L., Kosmatopoulos, K., y Papaioannou, S. (2009). Digital chaotic synchronized communication system. *J. Eng. Sci. Techn. Rev*, **2**: 82–86.
- Suster, J. (2010). Neural tracking trajectory of the mobile robot Khepera II internal model control structure. *International Conference Process Control*, **9**: C153a 1–13.
- Torres, N. (2005). Caos en sistemas biológicos. *Matematicalia: Revista Digital de Divulgación Matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, **1**(3).
- Trejo-Guerra, R., Tlelo-Cuautle, E., Cruz-Hernández, C., y Sánchez-López, C. (2009). Chaotic communication system using Chua's oscillators realized with CCII+ s. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **19**(12): 4217–4226.
- Villaseñor-Carrillo, Pérez-Aguerrín, T.-A. (Noviembre 2011). Robot móvil de tracción diferencial con plataforma de control modular para investigación y desarrollo ágil de proyectos. *10º Congreso Nacional de Mecatrónica. Puerto Vallarta, Jalisco*, **10**: 78–85.
- Volos, C. K., Kyprianidis, I. M., y Stouboulos, I. N. (2012). A chaotic path planning generator for autonomous mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, **60**(4): 651–656.
- Williams, G. P. (1997). *Chaos Theory Tamed*. Joseph Henry Press.
- Wu, B. y Zhao, M. (2014). Bifurcation and chaos of a biped robot driven by coupled elastic actuation. En: *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2014 11th World Congress on*. IEEE, pp. 1905–1910.
- Zhu, A. y Leung, H. (2007). Cooperation random mobile robots based on chaos synchronization. En: *2007 IEEE International Conference on Mechatronics*. IEEE, pp. 1–5.