

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Programa de Posgrado en Ciencias en Física de Materiales

Excitaciones electrónicas en sistemas bidimensionales con interacción espín-órbita

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Elmer Cruz Mendoza

Ensenada, Baja California, México
2016

Tesis defendida por
Elmer Cruz Mendoza
y aprobada por el siguiente comité:

Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova
Director de comité

Dr. Ernesto Cota Araiza

Dra. Catalina López Bastidas

Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar

Dr. Claudio Ismael Valencia Yaves



Dr. Leonel Cota Araiza
Coordinador del Posgrado en Física de Materiales

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta **Elmer Cruz Mendoza** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Física de Materiales.

Excitaciones electrónicas en sistemas bidimensionales con interacción espín-órbita

Resumen aprobado por:

Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova
Director de tesis

El acoplamiento espín-órbita, es un fenómeno sumamente interesante, el cual permite acceder y manipular el espín de los electrones. Esta interacción, aunque pequeña, en sistemas semiconductores de baja dimensionalidad es lo suficientemente grande como para ser considerada un mecanismo útil en el desarrollo de dispositivos espintrónicos. La presencia de dicho acoplamiento, modifica las bandas de energía y los estados propios del sistema lo que, en conjunto con la interacción electrón-electrón, da lugar a interesantes cambios en la respuesta dieléctrica del medio. En consecuencia, se ven afectados tanto la relación de dispersión de los plasmones, el espectro de excitaciones de partícula independiente, así como la respuesta óptica. En este trabajo, se realizó un estudio sobre la respuesta dieléctrica, la conductividad óptica y el espectro de modos colectivos característicos de un gas electrónico bidimensional, el cual se encuentra bajo la acción simultánea de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus. A través del método de campo autoconsistente, se obtienen expresiones para la relación de dispersión de los plasmones intra- e inter-EO, de donde se demostró que, estos últimos, se encuentran dentro de la región de excitaciones de partícula independiente inter-EO. En cambio, el plasmón intra-EO es débilmente afectado por la presencia de la interacción EO y se encuentra fuera de la región de creación de pares electrón-hueco intra-EO. Por otro lado, como una consecuencia de la falta de simetría en las subbandas desdobladas en espín, se observó que la conductividad óptica longitudinal adquiere una dependencia con respecto a la dirección del potencial eléctrico aplicado. Esta dependencia, también es observada cuando se considera la contribución de la interacción EO de Dresselhaus cúbica en el momento, cuyos efectos son relevantes cuando los parámetros de los acoplamientos EO son tales que se recupera la simetría $SU(2)$. Estos resultados muestran que, además del control que se tiene a través de modular la frecuencia o por voltajes de compuerta, el nuevo aspecto en la absorción óptica puede ser de gran utilidad en aplicaciones espintrónicas.

Palabras Clave: plasmones 2D, interacción espín-órbita, semiconductores, espintrónica.

Abstract of the thesis presented by **Elmer Cruz Mendoza** as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Material Physics.

Abstract approved by:

Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova
Thesis Director

Electronic excitations in two-dimensional systems with spin-orbit interaction

Spin-orbit (SO) coupling in low dimensional systems is considered an important mechanism that allows the manipulation of the electron spin, which is fundamental for the development of spintronic semiconductor devices. This coupling produces notable modifications of the energies and states of the system which, in addition to the electron-electron interaction gives interesting changes in the dielectric response of the medium. Accordingly, the spectrum of single-particle excitations, the dispersion relation of collective modes, and the optical response, are also affected. In the present work, we investigate the dielectric response, the optical conductivity, and the plasmon spectrum of a two-dimensional electron gas with Rashba and Dresselhaus spin-orbit interaction. Using the self consistent field approach, we derive expressions for the dispersion relation of the intra- and inter-SO plasmons. We found that the latter is immersed within the continuum of inter-SO single-particle excitations. The intra-SO plasmons remain undamped and almost unaffected by the SO coupling. The longitudinal optical conductivity shows, however, a dependence on the direction of the externally applied potential caused by the anisotropic splitting of the spin states. This property, can also be observed, when the cubic in moment Dresselhaus coupling are taken into account. Its effects become relevant when the SO strengths are such that the $SU(2)$ symmetry is recovered. In addition to the control through the driving frequency or electrical gating, this new aspect of the optical absorption spectrum might be useful in spintronics applications.

Key words: plasmons, spin-orbit interaction, semiconductors, spintronics, optical conductivity.

Dedicatoria.

*A Alicia y Karmel por el
apoyo incondicional.*

A Dios por el dón de la vida.

*A mis padres por enseñarme
a vivir.*

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mi asesor Jesús Maytorena por el apoyo otorgado a lo largo todos estos años de trabajo. Gracias por la paciencia y por cada uno de los consejos obsequiados. También agradezco de manera especial a los profesores Ernesto Cota, Jorge villavicencio, Claudio Valencia y Catalina López por su participación en la realización de esta tesis. Pero sobre todo, les agradezco que hayan sido mis profesores y que me brindaran su amistad. Así mismo, agradezco a mi familia, mis padres, hermanos, a mi esposa e hija, ya que sin ellos no hubiera podido culminar este trabajo. Finalmente, agradezco a CICESE y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado durante el desarrollo de mi trabajo.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
1. Introducción	1
2. Interacción espín-órbita (IEO)	6
2.1 ¿Qué es la interacción espín-órbita?	6
2.2 Interacción espín-órbita en medios semiconductores	9
2.2.1 Efectos de la ausencia de simetría de inversión espacial	11
2.3 Interacción Espín-Órbita en un Gas bidimensional	12
2.4 Acoplamiento Dresselhaus	14
2.4.1 Caso $\beta \neq 0$ y $\beta_3 = 0$	15
2.4.2 caso $\beta \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$	19
2.5 Acoplamiento Rashba	21
2.6 Acoplamiento anisotrópico: Rashba + Dresselhaus	26
3. Excitaciones en gases de electrones	32
3.1 Plasmones desde el punto de vista clásico	32
3.1.1 Frecuencia de plasma: ecuación de movimiento	33
3.1.2 Modos longitudinales	34
3.2 Método de campo autoconsistente	37
3.3 Excitaciones electrónicas a partir de una función respuesta	39
3.4 El gas tridimensional	41

3.5	El gas bidimensional	44
4.	Excitaciones electrónicas en presencia de IEO	47
4.1	Continuo de transiciones electrón-hueco	47
4.1.1	Caso isotrópico: Rashba	48
4.1.2	Caso anisotrópico: Rashba + Dresselhaus	52
4.2	Cálculo de la Función dieléctrica	54
4.3	Elementos de matriz de la función dieléctrica.	63
4.4	Caso particular de IEO de Rashba y Dresselhaus lineal en el momento $\mathbf{k}$. .	66
4.5	Resultados	68
4.5.1	Excitaciones para el caso de Rashba	68
4.5.2	Excitaciones para el caso conjunto Rashba + Dresselhaus	71
4.6	Conclusiones	75
5.	Conductividad óptica en presencia de IEO	76
5.1	Conductividad eléctrica de un gas de electrones	76
5.2	Conductividad de un gas electrónico 2D con Interacción Espín-Órbita	78
5.3	Conductividad óptica en presencia de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus	81
5.3.1	Contribución intra-subbanda	83
5.3.2	Contribución inter-subbanda	83
5.3.3	Conductividad óptica inter-EO	85
5.4	Conductividad longitudinal y el tensor $\sigma_{ij}(\omega)$	86
5.5	Resultados de la Conductividad	87
5.5.1	Conductividad óptica	87
5.5.2	Conductividad a q finita	95
5.6	Conclusiones	101
6.	Conductividad óptica: términos de Rashba + Dresselhaus lineal y Dresselhaus cúbico en el momento $\mathbf{k}$	103
6.1	Propiedades del sistema	103
6.2	Conductividad óptica considerando términos cúbicos	105
6.2.1	Operador velocidad	106

6.3	Tensor de la conductividad óptica	107
6.4	Efecto de términos cúbicos	108
6.4.1	Caso $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$	108
6.4.2	Caso $\alpha = \beta$, $\beta_3 \neq 0$	114
6.5	Conclusiones	119
7.	Conclusiones	120
	Lista de referencias bibliográficas	122
Apéndice A.	Plasmón intra-sub-banda: aproximación de longitud de onda larga	126
Apéndice B.	Plasmón inter-sub-banda: aproximación de longitud de onda larga	131

Lista de figuras

Figura		Página
1	(a) Movimiento relativo del electrón cuando el sistema de referencia se encuentra montado sobre el núcleo. (b) sistema de referencia montado sobre el electrón. En este caso el que se mueve es el núcleo con respecto a la posición del electrón. . . .	7
2	Los materiales semiconductores, tales como GaAs, poseen estructura cristalina zincblenda.	14
3	Dispersión de la energía para electrones en un gas bidimensional en presencia de interacción espín-órbita. La dispersión parabólica para electrones libres se desdobra en dos subbandas, rompiendo la degeneración del sistema.	16
4	Corte transversal de las superficies mostradas en la figura 3. El desdoblamiento de la subbanda de conducción permite que para cada valor de k existan dos estados disponibles, uno en la subbanda ε_+ y otro en la subbanda ε_- . Por otra parte, el mínimo de la subbanda ε_- será $-E_D/2 = -\hbar^2 k_\beta^2/2m^*$ y los vectores k_F^+ y k_F^- satisfacen la condición $\varepsilon_\lambda(k_F^\lambda) = \varepsilon_F$	17
5	Distribución de espines en el espacio de momentos y en cada banda en un Gas 2D con IEO de Dresselhaus.	18
6	Densidad de estados para un GE2D normalizada a $D_0 = m^*/\pi\hbar^2$. La línea en azul corresponde a la subbanda ε_- , la línea en rojo para para la subbanda ε_+ y la línea negra corresponde al caso degenerado en espín. Se observa que la presencia de la IEO modifica el número de estados por unidad de energía con respecto al valor constante D_0	20
7	(a) Dispersión de la energía para electrones en un gas bidimensional en presencia de interacción espín-órbita de Dresselhaus, donde se ha tomado en cuenta el término cúbico y (b) contornos de Fermi.	21
8	Contornos de Fermi de las superficies de energía y orientación de los estados de espín para un GE2D con IEO de Dresselhaus considerando el término lineal más el cúbico . Se observa que la presencia del término cúbico produce pérdida de simetría en el desdoblamiento de las subbandas.	22
9	Gas de electrones bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor (Nitta et al., 1997). La asimetría en el potencial de confinamiento da lugar a una contribución a la IEO.	23
10	Se presentan resultados experimentales, en donde al variar el voltage de compuerta V_g es posible producir cambios en la intensidad de la IEO de Rashba, α , y en la diferencia de energía $\Delta_R = 2\alpha k_F$, la cual caracteriza la separación entre las subbandas desdobladas en espín (Nitta et al., 1997).	24

11	Distribución de los espines en un gas de electrones bidimensional con IEO de Rashba. El vector de polarización de espín es tangente al momento de los electrones. . . .	25
12	Desdoblamiento anisotrópico de la relación de dispersión de la energía como resultado de la coexistencia de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus.	27
13	Corte transversal de las superficies de energía. Se muestra la anisotropía como función del vector de onda, donde existen dos ejes de alta simetría localizados a ángulos $\theta_+ = \pi/4$ y $\theta_- = 3\pi/4$	28
14	Densidad de electrones en cada subbanda de espín como función del parámetro espín-órbita de Rashba para valores de $\beta = \beta_{[001]} = 0.5\alpha$ y $\beta_{[001]} = 0$. Se observa que la población en la banda ε_+ disminuye conforme aumenta α , mientras que en la banda ε_- , dicha población se incrementa.	29
15	Densidad de electrones para una subbanda desdoblada en espín como función de la densidad total de electrones. Se observa que la población en la banda ε_+ disminuye conforme disminuye la densidad total de electrones, mientras que en la banda ε_- , dicha población se incrementa.	30
16	Polarización de espín para un GE2D en presencia de IEO anisotrópica $R+D_\beta$. Las flechas indican la dirección del vector de momento magnético en cada subbanda para cada vector de onda $\mathbf{k}$	30
17	Polarización de espín de los electrones de un GE2D con IEO anisotrópica para el caso $\alpha = \beta$. Se observa que la polarización no depende de $\mathbf{k}$, por lo que los estados de espín no pueden ser dispersados y poseen un tiempo de vida más largo con respecto al caso $\alpha \neq \beta$	31
18	La acumulación de carga Q sobre la región R , contenida dentro de la superficie Σ , produce un campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (flechas anaranjadas) el cual induce una corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (flechas azules). Esto permite la oscilación del plasma (Mochán, 2005).	33
19	Esfera de Fermi que contiene un gas 3D degenerado. El proceso de excitación de un par electrón-hueco (e-h) conserva energía y momento, tal como se muestra. . . .	42
20	Las zonas de amortiguamiento de Landau o continuo de excitaciones de pares electrón-hueco (zona en gris), se originan por el hecho de que electrones inicialmente en un estado, pasan a un nuevo estado a través de la absorción de energía $\hbar\omega$	43
21	En los gases de electrones bidimensionales se crean zonas de amortiguamiento de Landau compuestas por transiciones intrabanda y zonas compuestas por transiciones interbanda (Jain y Das-Sarma, 1987).	45
22	Dirección de los vectores de onda que caracterizan el movimiento de los electrones ($\mathbf{k}$) y del momento de la onda electromagnética ($\mathbf{q}$).	49

23	Zonas de transiciones intra e inter-sub-banda para valores pequeños de q . Las transiciones ópticas ($q = 0$) se encuentran delimitadas por las frecuencia $\hbar\omega_{\pm}$	50
24	Transiciones intersubbanda presentes para valores pequeños de q . Las excitaciones a y d satisfacen la condición $\hbar\omega = \varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})$, mientras que las transiciones b y c cumplen la relación $\hbar\omega = \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_-(\mathbf{k})$	51
25	Las frecuencias permitidas a $\mathbf{q} = 0$ estarán contenidas en la <i>ventana óptica</i> $\omega_+ \leq \omega \leq \omega_-$	52
26	Regiones de amortiguamiento de Landau para el GE2D en presencia de IEO de Rashba.	68
27	Regiones de amortiguamiento de Landau y plasmón intra-EO (curva en rojo) para el GE2D en presencia de IEO de Rashba.	69
28	(a) Espectro de plasmones intra e inter-EO calculado por W. Xu y (b) espectro de plasmones calculado vía la ecuación (218), en donde se considera ω real y q compleja.	70
29	Regiones de amortiguamiento de Landau inter-EO para dos direcciones particulares caracterizadas por el ángulo γ . La zona gris contenida entre las líneas negras punteadas corresponde al caso $\gamma = \theta_- = 3\pi/4$, mientras que la zona cuadrículada delimitada por las líneas a trozos verde corresponde a $\gamma = \theta_+ = \pi/4$	72
30	Regiones de amortiguamiento de Landau y el plasmón intra-EO (curva en rojo).	73
31	(a) Espectro de plasmones inter-EO para $\gamma = \pi/2$. Se presenta el caso isotrópico de Rashba y el caso Rashba más Dresselhaus. (b) Plasmón inter-EO para $\gamma = \pi/4$ y $\gamma = 3\pi/4$. Nótese que la relación de dispersión de este plasmón presenta estructura justo a las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b . Se han utilizado los parámetros $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta = 0.1\alpha$, $n_e = 5 \times 10^{11}$ cm $^{-2}$ y $m^* = 0.055$	74
32	Las frecuencias permitidas a $\mathbf{q} = 0$, estarán contenidas en el intervalo $\omega_+(\theta) \leq \omega \leq \omega_-(\theta)$	88
33	Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y las elipses de energía constante $C_r(\omega)$ definidas mediante la diferencia $\varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k}) = \hbar\omega$. Se presentan las curvas para tres valores distintos de la energía del fotón, donde $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Las curvas $C_r(\omega)$ son elipses rotadas $\theta = \pi/4$ con respecto a los ejes k_x y k_y , además, posee semi-ejes $k_a = \hbar\omega/2 \mid \alpha - \beta \mid$ y $k_b = \hbar\omega/2 \mid \alpha + \beta \mid$, orientados a lo largo de las direcciones θ_+ y θ_- , respectivamente.	89
34	(a) Contribución a la conductividad óptica inter-EO, $\sigma(q = 0, \gamma = \pi/2, \omega)$ (ec. (276)), donde se ha considerado que la orientación del campo eléctrico aplicado está dada por el ángulo $\gamma = \pi/2$. (b) Región angular en el espacio de momentos en donde están permitidas las transiciones verticales, como función de la energía del fotón $\hbar\omega$. Cabe señalar que sólo la parte sombreada contribuirá a la absorción óptica. Las fronteras de estas regiones están dadas por $\hbar\omega_{\pm}(\theta) = 2k_F^{\pm}(\theta)\Delta(\theta)$. Nótese que la conductividad presenta resonancias a las frecuencias $\omega_a = \omega_-(\pi/4)$ y $\omega_b = \omega_+(3\pi/4)$	90

35	Conductividad inter-EO, $\sigma(q = 0, \gamma = \pi/2, \omega)$, para distintos valores de β . Se utilizan los mismos parámetros que en la gráfica anterior	91
36	Conductividad óptica para el caso en que sólo hay IEO de Rashba ($\beta = 0$) y para el caso de IEO Rashba + IEO de Dresselhaus $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega)$, para distintas orientaciones del vector de onda $\mathbf{q}$, $\gamma = \pi/4$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \pi$. Observe que la absorción óptica presenta máximos a las frecuencias ω_a y ω_b . Además, cabe destacar que estos máximos pueden obtenerse de manera selectiva al variar γ	91
37	Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y γ	92
38	Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y γ	92
39	Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y γ	93
40	Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y α/β , para $\gamma = \pi/4$. La absorción sigue la forma de las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_+ y ω_- y es máxima entre ω_- y ω_b	94
41	Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y α/β para $\gamma = \pi/2$. Se muestra que la absorción sigue la forma de las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b . Además de que hay máximos de absorción entre ω_- y ω_b y entre ω_+ y ω_a	94
42	Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y α/β , para $\gamma = 3\pi/4$. La absorción es significativa entre ω_+ y ω_a	95
43	Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y curvas de energía constante $C_r(q, \gamma, \omega) = \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_-(\mathbf{k})$. Dichas curvas son calculadas para q constante y para (a) $\gamma = \theta_-$ y (b) $\gamma = \theta_- + \pi$. Se presentan las curvas para tres valores distintos de la energía $\hbar\omega$ con $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Note que considerar $\gamma = \theta_-$ resulta en el desplazamiento de $C_r(q, \gamma, \omega)$ en la dirección $\gamma = \theta_- + \pi$, mientras que si $\gamma = \theta_- + \pi$, entonces el desplazamiento se da a lo largo $\gamma = \theta_-$	97
44	Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y curvas de energía constante $C_r(q, \gamma, \omega)$ para q constante con (a) $\gamma = \theta_+$ y (b) $\gamma = \theta_+ + \pi$. Se presentan las curvas para tres valores distintos de la energía $\hbar\omega$, donde $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Nótese que considerar q finita desplaza las curvas $C_r(q, \gamma, \omega)$ en sentido opuesto a $\mathbf{q}$	97
45	(a) Continuo de excitaciones de pares electrón-hueco inter-EO como función de q para $\gamma = \pi/4$. Se muestra que el espectro se encuentra acotado por las frecuencias $\omega'_+(q, \gamma = \pi/4)$ y $\omega'_-(q, \gamma = \pi/4)$. Así mismo se muestran las frecuencias intermedias $\omega'_a(q, \gamma = \pi/4)$ y $\omega'_b(q, \gamma = \pi/4)$. Las frecuencias $\omega'_\pm(q, \gamma)$ se modifican al variar γ ; en (b) se analizan los casos $\gamma = \pi/4$ y $\gamma = 3\pi/4$. Cabe notar que, a $q = 0$, $\omega'_\pm(q, \gamma) = \omega_\pm$ y $\omega'_a(q, \gamma) = \omega_a$, $\omega'_b(q, \gamma) = \omega_b$	98
46	Conductividad $\sigma_R(q, \omega)$ y la relación de dispersión del plasmón inter-EO en el límite de longitud de onda larga para el caso de IEO de Rashba. La region contenida entre ω_+ y ω_- corresponde a la zona de amortiguamiento de Landau a $q = 0$	99

47	(a) Conductividad inter-EO Vs la energía $\hbar\omega$ para diferentes valores de $\omega_p(\sim q^{1/2})$. (b) Mapa de la conductividad $\sigma(q, \gamma = \pi/2, \omega)$ y el plasmón inter-EO. Las conductividades se encuentran normalizadas a la conductividad de Rashba a $q = 0$	100
48	Mapa de la conductividad $\sigma(q, \gamma, \omega)$ para valores continuos de ω y $\hbar\omega_p$, así como el plasmón inter-EO para (a) $\gamma = \theta_+$ y (b) $\gamma = \theta_-$. La conductividad se encuentra normalizada a la conductividad de Rashba	100
49	Superficies de energía de un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus (incluyendo contribuciones cúbicas) como función del momento k_x y k_y normalizadas a $k_0 = \sqrt{2\pi n_e}$, donde n_e es la densidad electrónica.	104
50	Parte real de la conductividad óptica para distintas direcciones del campo eléctrico externo. Se grafican para $\gamma = \theta_+ = \pi/4$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \theta_- = 3\pi/4$ y se comparan con el caso $\beta_3 = 0$ a $\gamma = \pi/2$ (curva roja). Se utilizó $\beta = 2 \times 10^{-9}\text{eVcm}$, $\alpha = 0.25\beta$ y $\beta_3 = 2.5 \times 10^{-22}\text{eVcm}^3$ (La-Rocca y de Andrada e Silva, 1997). Las frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 están relacionadas con las curvas $C_r(\omega)$ mostradas en la figura 51.	109
51	Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO lineales de Rashba y Dresselhaus y Dresselhaus cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías (a) $\hbar\omega = 2.42\text{meV}$, (b) $\hbar\omega = 2.9\text{meV}$, (c) $\hbar\omega = 3.96\text{meV}$ y (d) $\hbar\omega = 5.4\text{meV}$. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 50.	110
52	Absorción óptica para de un GE2D con IEO lineal más Dresselhaus cúbico para distintos valores de γ , comparados con el caso anisotrópico $\beta_3 = 0$. Los espectros muestran la presencia de las frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 , las cuales están relacionadas con los procesos de absorción mostrados en la figura 53.	111
53	Contornos de Fermi y curvas $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO lineales de Rashba y Dresselhaus y Dresselhaus cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías (a) $\hbar\omega = 2.25\text{meV}$, (b) $\hbar\omega = 3.26\text{meV}$, (c) $\hbar\omega = 3.33\text{meV}$ y (d) $\hbar\omega = 4\text{meV}$. Se utilizó $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}\text{eVcm}$, $\beta = 0.5\alpha$ y $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-21}\text{eVcm}^3$, con $E_F = 0.3E(k_0)$	112
54	Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus lineal y cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías (a) $\hbar\omega_2 = 6.45\text{ meV}$, (b) $\hbar\omega_3 = 8.63\text{ meV}$, (c) $\hbar\omega_4 = 14.20\text{ meV}$ y (d) $\hbar\omega_1 = 5.8\text{ meV}$ y $\hbar\omega_5 = 20.65\text{ meV}$. Se utilizaron los parámetros $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}\text{eVcm}$, $\beta = 4\alpha$, $\beta_3 = 3 \times 10^{-21}\text{eVcm}^3$ y $\varepsilon_F = 0.3\varepsilon(k_0)$	113
55	Parte real de la conductividad óptica para distintas direcciones del campo eléctrico externo. Se grafican para $\gamma = \pi/4$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = 3\pi/4$ y se comparan con el caso $\beta_3 = 0$ a $\gamma = \pi/2$ (curva roja). Se utilizó $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}\text{eVcm}$, $\beta = 4\alpha$ y $\beta_3 = 3 \times 10^{-21}\text{eVcm}^3$. Las frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 y ω_5 están relacionadas con las curvas $C_r(\omega)$ mostradas en la figura 54.	114

56	Contornos de Fermi correspondientes a un GE2D en presencia de IEO de Rashba y Dresselhaus lineal (con $\alpha = \beta$) más Dresselhaus cúbico (caracterizado por β_3). (a) En $\beta_3 = 0$ se recuperan las simetrías SU(2) y las superficies de energía se vuelven degeneradas en la dirección θ_+ adquiriendo el aspecto de dos círculos desplazados del origen. (b) En el caso $\beta_3 \neq 0$ se rompe con las simetrías SU(2), lo cual se traduce en el rompimiento de la degeneración que se observa en el caso $\beta_3 = 0$ a lo largo de θ_+	115
57	(a) Absorción óptica de un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus considerando términos cúbicos para $\gamma = \theta_+$ (curva roja multiplicada por un factor de 10^3), $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \theta_-$. (b) Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y curvas de energía constante $C_r(\omega)$. En $\hbar\omega_1 = 0.25$ meV, se satisface la relación $C_r(\omega_1) = k_F^-(\theta_+)$, lo que da lugar al máximo que se observa en el espectro de absorción.	115
58	Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$. Se muestran los casos (a) $C_r(\omega_2) = k_F^+(\theta_-)$ y (b) $C_r(\omega_3) = k_F^-(\theta_-)$	116
59	Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO lineales de Rashba y Dresselhaus y Dresselhaus cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías características de la figura 60: (a) $\hbar\omega_1 = 0.98$ meV, (b) $\hbar\omega_2 = 1.23$ meV, (c) $\hbar\omega_3 = 4.45$ meV y (d) $\hbar\omega_1 = 5.56$ meV. Se utilizó $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta = \alpha$ y $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-21}$ eVcm ³ , con $E_F = 0.3E(k_0)$	117
60	Absorción óptica para un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus considerando términos cúbicos	118

Capítulo 1

Introducción

La continua disminución del tamaño de los dispositivos electrónicos, ópticos y optoelectrónicos, nos ha dejado ante la puerta de un mundo en el cual los fenómenos cuánticos son dominantes. Aquí la física clásica deja de ser totalmente aplicable ya que muchos de los fenómenos cuánticos no tienen un análogo clásico; tal es el caso del espín de las partículas. El hecho es que, las propiedades electrónicas de los materiales sintetizados nanométricamente cambian con respecto a las propiedades de los mismos materiales en bulto. Así mismo, los sistemas altamente confinados, como los gases electrónicos bidimensionales, alambres cuánticos y puntos cuánticos, permiten la aparición de estados energéticos asociados con el grado de confinamiento. Esto demuestra que los efectos cuánticos juegan un papel importante y no pueden ser ignorados.

Muchos sistemas cuánticos poseen propiedades físicas sumamente interesantes, lo que los hace buenos candidatos para el desarrollo de mejor y nueva tecnología, y son altamente atractivos desde el punto de vista teórico. Por dicho motivo existen ramas o áreas de la física del estado sólido encargadas de estudiar una o algunas de las propiedades de dichos sistemas, con la finalidad de entender y obtener un alto control sobre ellas. Un ejemplo, son las áreas de la *Espintrónica* y la *Plasmónica*, las cuales investigan dos características distintas de la materia.

La espintrónica, por un lado, es la rama de la Física cuyo objetivo principal es el acceso y control del momento dipolar magnético de las partículas, mejor conocido como *espín*. Los estudios que se realizan se encuentran enfocados en atender básicamente los siguientes tres puntos: i) generación , ii) transporte y iii) detección de corrientes con espín polarizado.

La espintrónica, abre la puerta a una nueva electrónica basada no sólo en la manipulación de la carga eléctrica sino también sustentada en el control del espín de las partículas (Ohno et al., 1999, 2000; Wolf et al., 2001; Awschalom y Flatté, 2007; Fert, 2008). Esto ha permitido la fabricación de algunos dispositivos entre las cuales podemos mencionar la contrucción de memorias no volátiles y el transistor de espín de Datta y Das (Datta y Das, 1990), así como aplicaciones en computación cuántica. Sin embargo, el control del espín de las partículas es un problema complicado que requiere de mecanismos que hagan posible su manipulación

(Datta y Das, 1990; Schliemann et al., 2003; Chaplik et al., 2002; Rashba, 2004). En este sentido la *Interacción Espín-Órbita* (IEO) ofrece una vía de acceso importante (Winkler, 2003a). Se ha demostrado que una IEO significativa se encuentra presente en ciertos sistemas metálicos (LaShell et al., 1996) así como en medios semiconductores. Particularmente, se ha prestado atención a los sistemas de baja dimensionalidad, entre los que destacamos los gases electrónicos bidimensionales (GE2D) formados en la interfase de una heteroestructura semiconductor. Aquí la IEO tiene su origen debido a dos causas: **(1)** falta de simetría de inversión espacial en la estructura cristalina subyacente al gas (IEO de Dresselhaus) (Dresselhaus, 1955) y **(2)** falta de simetría de inversión espacial en el potencial de confinamiento (IEO de Rashba). La primera de las contribuciones dado que se deriva de una asimetría en la estructura cristalina, es intrínseca del material y contiene un término que depende linealmente del momento $\mathbf{k}$ y otro de orden cúbico. Por otra parte, el término de Rashba se caracteriza por ser modulable a través de potenciales externos (Nitta et al., 1997). Esta propiedad ha sido fundamental para el desarrollo de dispositivos espintrónicos tales como el transistor de Datta y Das, en donde variar la intensidad del acoplamiento de Rashba permite manipular la orientación del espín de los electrones.

La IEO puede verse como un campo magnético efectivo dependiente del momento ($\Omega_{so}(\mathbf{k})$), el cual, aún en ausencia de campos magnéticos externos, se acopla con el momento dipolar magnético de las partículas produciendo un desdoblamiento en espín de las bandas de energía. Dicho acoplamiento ha permitido la observación de fenómenos tales como el efecto Hall de espín (Kato et al., 2004; Sih et al., 2007; Wunderlich et al., 2006), en donde un campo eléctrico paralelo al plano que define al GE2D genera corrientes transversales de espín polarizado. Así mismo, se ha observado polarización de espín inducida por campos eléctricos externos (Sih et al., 2007). De manera reciente, también se ha logrado la materialización del transistor de espín (Koo et al., 2009).

En una amplia variedad de estudios, se emplean Hamiltonianos de partícula independiente, en los cuales se ignora cualquier efecto derivado de la interacción entre partículas. Sin embargo, es bien sabido que en sistemas con alta densidad de electrones, la interacción entre ellos puede producir importantes cambios en las propiedades eléctricas, térmicas, etc. del sistema (Ando et al., 2006). Por ejemplo, la interacción electrón-electrón de tipo coulombiana, promueve la aparición de nuevas excitaciones electrónicas asociadas con la cuantización de las oscilaciones de la densidad de carga. A dichos modos colectivos se les conoce con el nombre de *plasmones* y junto con las transiciones de partícula independiente constituyen el espectro de excitaciones característico de un GE2D.

Los modos colectivos, por sí solos, constituyen uno de los problemas más importantes e interesantes que hoy en día se estudian. Actualmente, existe un área de la ciencia denominada *plasmónica* la cual surge de la convergencia entre la óptica y la física del estado sólido, en donde se investigan aspectos tales como la generación y manipulación del plasmón. El interés en este tipo de excitaciones, se origina debido a sus múltiples aplicaciones en áreas tales como telecomunicaciones, biología, medicina, etc. (Ebbesen et al., 1998; Barnes et al., 2003; Zia et al., 2006; Chang et al., 2007; García-Vidal y Matín-Moreno, 2008; Won, 2009). Un problema al que se le ha prestado especial atención, es el de la construcción de fuentes de radiación en el continuo de frecuencias de los THz. Se sabe, que a altas frecuencias los láseres semiconductores resultan convenientes para generar luz coherente que se utiliza en telecomunicaciones. En cambio, para generar radiación electromagnética de baja frecuencia se utilizan circuitos oscilantes que operan bajo el concepto de un transistor. Sin embargo, el rango de frecuencias en que operan el transistor y el láser, son completamente distintos, de manera que, entre ambas tecnologías existe una brecha de frecuencias inaccesibles localizadas en el intervalo de 0.3 THz a 30 THz (Sirtori, 2002). Sin embargo, se ha demostrado que los plasmones excitados en un GE2D son buenos candidatos para construir fuentes de estado sólido, cuya emisión se encuentra dentro de dicha brecha (Voßbünger et al., 1996).

Por otra parte, algunos estudios han considerado la interacción electrón-electrón y han explorado los efectos introducidos por la presencia de la IEO sobre los plasmones y sobre las regiones de amortiguamiento compuestas por el continuo de excitaciones de partícula independiente. Por ejemplo, en 2003 W. Xu (Xu, 2003), utilizando el método de campo auto-consistente y considerando IEO de Rashba, mostró la existencia de varias ramas de modos colectivos: plasmones intra-EO y plasmones inter-EO, donde los primeros (segundos) involucran procesos constituídos únicamente por transiciones intra-sub-banda (inter-sub-banda). Sin embargo, no analizaron las regiones de amortiguamiento de Landau. Posteriormente, M Kushwaha y S. Ulloa (Kushwaha y Ulloa, 2006), utilizando el mismo formalismo, observaron nuevamente la presencia de ramas de plasmones intra e inter-EO y probaron que la presencia de la IEO de Rashba induce regiones de amortiguamiento intra-EO y regiones inter-EO. Estas últimas conformadas por transiciones entre estados de las distintas subbandas desdobladas en espín. Cabe señalar, que los estudios mencionados fueron llevados a cabo mediante una función dieléctrica matricial, la cual permitió separar las contribuciones compuestas por transiciones intra-EO de las contribuciones que involucran únicamente excitaciones inter-EO.

Otros estudios similares fueron realizados por medio de una función dieléctrica escalar, la cual implica una suma sobre todas las contribuciones intra e inter-EO (Wang, 2005; Ple-

tyukhov y Gritsev, 2006). De estos trabajos se determinó la existencia de una sólo rama de plasmones, la cual es poco afectada por la presencia de la IEO de Rashba. Sin embargo, también calcularon regiones de amortiguamiento intra e inter-EO como resultado de la presencia de dicho acoplamiento.

Por otro lado, estudios recientes han enfatizado la importancia de considerar la IEO de Rashba y Dresselhaus (R+D) de manera simultánea. Se sabe que la presencia de los dos acoplamientos produce un desdoblamiento anisotrópico en las sub-bandas de energía. Consecuentemente, se ha observado que dicha falta de simetría da lugar a notables cambios en las propiedades electrónicas del sistema. Por ejemplo, el espectro de absorción óptica presenta marcadas modificaciones (Maytorena et al., 2006; Iglesias y Maytorena, 2010) con respecto al caso isotrópico de Rashba (Yuan et al., 2005). Así mismo, se sabe que en el caso en que la intensidad del acoplamiento de Rashba es igual a la intensidad de la IEO de Dresselhaus se produce una condición especial. En dicha situación los estados de espín se vuelven independientes del momento $\mathbf{k}$ y no pueden ser dispersados, de manera que poseen un tiempo de vida largo, lo cual resulta conveniente para la construcción de un transistor de espín en el régimen no balístico (Schliemann et al., 2003). Además, bajo dicha condición se ha demostrado que la absorción óptica del sistema se vuelve nula (Maytorena et al., 2006). Sin embargo, si adicionalmente se considera la contribución cúbica de Dresselhaus, entonces, es posible obtener una respuesta óptica distinta de cero (Li et al., 2013).

En vista de la importancia que representa el considerar la IEO R+D, algunos autores han realizado estudios para analizar el efecto que dicha interacción induce sobre el espectro de excitaciones del GE2D. Por ejemplo, Badalyan et al., (Badalyan et al., 2009), mediante una función dieléctrica escalar, calcularon una rama de plasmones la cual involucra la suma mezclada de transiciones intra-EO e inter-EO. Además, mostraron que las zonas de amortiguamiento pueden ser moduladas a través de la intensidad de la IEO anisotrópica. Así mismo, la presencia de este acoplamiento espín-órbita introduce una dependencia no sólo de la magnitud del vector de onda de los plasmones, sino también de su dirección. Esto abre la posibilidad de nuevas aplicaciones. Por ejemplo, la construcción de un filtro plasmónico que funcione según la dirección de propagación del modo colectivo, ya que en algunas direcciones éste se moverá libremente, fuera de las zonas de amortiguamiento, y en otras direcciones el plasmón entrará en dichas regiones y se amortiguará. También se ha propuesto la construcción de un transistor de efecto de campo, donde la propagación del plasmón es controlada a través del acoplamiento R+D, utilizando campos eléctricos externos (Li y Xu, 2008).

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo estudiar el efecto de una IEO anisotrópica

sobre las excitaciones características de un GE2D utilizando un formalismo matemático análogo al que utilizaron W. Xu y M. Kushwaha y S. Ulloa. La idea es demostrar que en presencia de IEO Rashba + Dresselhaus el espectro de los modos colectivos puede separarse en plasmones inter-EO y plasmones intra-EO, tal como sucedió en el caso de sólo Rashba. Así mismo, se explorarán las regiones de amortiguamiento inter-EO e intra-EO, en donde se analizarán sus características en función de los parámetros que definen la intensidad de la IEO, y se estudiará la dependencia con respecto a la dirección de propagación del plasmón.

Por otro lado, se examinará el espectro de absorción óptica de un GE2D. El estudio se llevará a cabo a través de la parte real de una conductividad longitudinal, la cual relaciona un campo eléctrico externo con una corriente eléctrica producida en el sistema. El objetivo es explorar la respuesta óptica para distintas orientaciones del campo eléctrico aplicado, así como analizar el efecto que produce la presencia de un acoplamiento EO anisotrópico. Aunado a esto, también se investigarán las propiedades del espectro de absorción al considerar la contribución cúbica en el momento $\mathbf{k}$ del acoplamiento Dresselhaus.

El presente escrito se estructurará de la siguiente manera: en el capítulo 2 se hará énfasis en explicar la física que hay detrás del acoplamiento espín-órbita, así mismo, se presentarán hamiltonianos y eigenenergías característicos del estado base de un electrón en GE2D dentro del esquema perturbativo de respuesta lineal. Posteriormente, en el capítulo 3 se mostrará una introducción a la teoría de respuesta lineal, a través de la cual se muestra el origen de los modos colectivos y de las excitaciones de partícula independiente. A manera de ejemplo se analizarán el Gas de electrones tridimensional y el GE2D, ambos sin IEO. También, se presentará el procedimiento para determinar la función dieléctrica de un medio a través del Método de Campo Autoconsistente. En el capítulo 4 se presenta el cálculo de la respuesta dieléctrica que permitirá obtener la relación de dispersión de los plasmones de un GE2D en presencia de IEO R+D. Allí mismo, se determinan las regiones de amortiguamiento o continuo de excitaciones de partícula independiente y se discuten los resultados. Para este mismo sistema, en el capítulo 5 se calcula la conductividad longitudinal óptica y presentan los resultados en donde se analiza el espectro de absorción óptica. Posteriormente, en el capítulo 6 se estudia el espectro de absorción óptica de un GE2D en presencia de IEO R+D tomando en cuenta la contribución cúbica del acoplamiento Dresselhaus. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Interacción espín-órbita (IEO)

El momento angular intrínseco, el *espín*, de los electrones es una propiedad de origen netamente cuántico sin análogo clásico. Surge de la necesidad de conservar el momento angular total en los sistemas atómicos, y su existencia fue comprobada en 1921 gracias al primer experimento realizado por O. Stern y W. Gerlach en 1921 (de la Peña, 1991).

Debido a que los electrones poseen un momento dipolar magnético intrínseco, son posibles una gran cantidad de fenómenos entre los cuales destacamos (por ser de nuestro interés particular) aquellos derivados de la interacción espín-órbita.

2.1 ¿Qué es la interacción espín-órbita?

Dicha interacción es un efecto de origen relativista que acopla el espín del electrón con un campo magnético asociado al movimiento relativo del electrón al rededor de un núcleo atómico (Eisberg y Resnick, 1999). Ésta, surge de manera natural de la ecuación de Dirac como una de las correcciones no relativistas a la ecuación de Schrödinger. Tal interacción puede entenderse de manera sencilla si nos planteamos el siguiente problema clásico.

Consideremos que el electrón de un átomo gira en su órbita alrededor del núcleo con una velocidad tangencial $\mathbf{v}$ (figura 1 (a)). Si ahora montamos nuestro sistema de referencia no sobre el núcleo, sino sobre el electrón mismo (figura 1 (b)), podemos decir que desde allí el electrón percibe que el núcleo con carga $+Ze$ se mueve a su alrededor con una velocidad tangencial $-\mathbf{v}$. Lo cual es equivalente a decir que hay una corriente $\mathbf{j} = -Ze\mathbf{v}$ girando en torno al electrón. De acuerdo con la ley de Ampere, debido a la corriente existe un campo magnético en la posición del electrón y está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\frac{Ze\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde μ_0 es la susceptibilidad magnética.

Por otra parte, al mismo tiempo que el electrón es afectado por el campo $\mathbf{B}$, siente la

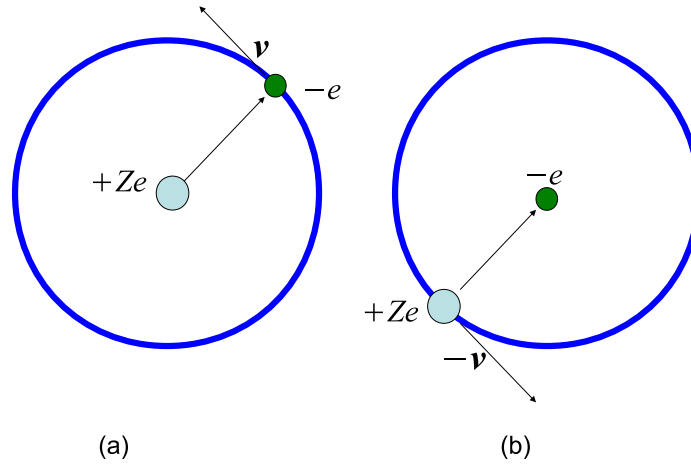


FIGURA 1.- (a) Movimiento relativo del electrón cuando el sistema de referencia se encuentra montado sobre el núcleo. (b) sistema de referencia montado sobre el electrón. En este caso el que se mueve es el núcleo con respecto a la posición del electrón.

presencia un campo eléctrico, $\mathbf{E}$ que es generado por la carga positiva del núcleo

$$\mathbf{E} = \frac{Ze\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2)$$

Así que sustituyendo la ecuación (2) en la expresión (1) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\epsilon_0\mu_0\mathbf{v} \times \mathbf{E} \\ &= -\frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3)$$

De esta ecuación se observa que $\mathbf{B}$ es el campo magnético que experimenta el electrón debido al campo eléctrico y al movimiento relativo del núcleo. Entonces, al acoplarse el momento magnético de espín, ($\boldsymbol{\mu}_s$) con dicho campo magnético, existirá una energía de interacción dada por

$$\Delta\epsilon = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}, \quad (4)$$

con

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{g_s\mu_B}{\hbar}\mathbf{S}, \quad (5)$$

donde $\mathbf{S}$ es el vector del momento angular intrínseco del electrón (espín), μ_B es el magnetón de Bohr y g_s es el factor de espín o factor de Landé.

Sustituyendo (5) en (4), tenemos que la energía puede escribirse de la siguiente forma:

$$\Delta\varepsilon = \frac{g_s\mu_b}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}, \quad (6)$$

lo que también puede ser reescrito como

$$\Delta\varepsilon = -\frac{g_s\mu_b}{c^2\hbar} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \quad (7)$$

que nos da el acoplamiento entre el espín y el campo magnético inducido por el movimiento del electrón alrededor de su órbita.

A continuación escribiremos la energía $\Delta\varepsilon$ en términos del momento angular orbital $\mathbf{L}$. Para ello consideremos el hecho de un electrón que gira alrededor del núcleo se encuentra sujeto a una fuerza dada por $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, la cual está relacionada con el gradiente de la energía potencial que mantiene sujeto el electrón al núcleo, es decir, $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$. Sin embargo, dado que $\mathbf{F}$ es una fuerza central, el gradiente puede expresarse simplemente como:

$$\mathbf{F} = -\frac{dV(r)}{dr} \hat{\mathbf{r}}, \quad (8)$$

donde $V(r)$ es el potencial (central) al que se encuentra sujeto el electrón en la posición $\mathbf{r}$. Sin embargo, como la fuerza también es $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, entonces, igualando con (8), se puede obtener una expresión para el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{1}{e} \frac{dV(r)}{dr} \hat{\mathbf{r}}, \quad (9)$$

Por tanto, si sustituímos (9) en la ecuación (3) se obtiene que:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{ec^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}). \quad (10)$$

Sin embargo, si recordamos que el vector de momento angular se encuentra definido como $\mathbf{L} = m\mathbf{v} \times \mathbf{r}$, entonces, el campo magnético inducido puede escribirse como:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{emc^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L}. \quad (11)$$

De esta manera, podemos rescribir la energía potencial para el espín del electrón en presencia de un campo magnético com sigue:

$$\Delta\varepsilon = \frac{g_s\mu_b}{\hbar emc^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (12)$$

Es claro ver de la ecuación (11) cómo es que el espín de un electrón puede acoplarse con el movimiento que éste realiza alrededor del núcleo. A esto se le conoce como Interacción Espín-

órbita, siendo la ecuación (12) el término correspondiente a la energía de dicha interacción. Cabe recordar que esta derivación se llevó a cabo desde un punto de vista clásico aún cuando la IEO es púramente cuántica. Sin embargo, haciendo las aproximaciones adecuadas es posible derivarla a partir de la teoría cuántica relativista, salvo por un factor de Thomas igual a 2.

Para un electrón que se mueve en el vacío, en el límite no relativista, es posible reducir la ecuación de Dirac a la conocida ecuación de Pauli (Foldy y Wouthuysen, 1950; Winkler, 2004). Esta última, es una generalización de la ecuación de Schrödinger en cuya estructura aparecen nuevas contribuciones a la energía, como son el término de Zeeman (si hay campos magnéticos externos) y el término correspondiente a la interacción espín-órbita, entre otros. Para el caso en que el electrón no interacciona con campos electromagnéticos, la contribución más importante, de las dos mencionadas, es la del acoplamiento espín-órbita. Dicho término está dado de la siguiente forma

$$H_{SO}^{vac} = \lambda_{vac} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla \tilde{V}), \quad (13)$$

donde el factor de acoplamiento $\lambda_{vac} = -\hbar^2/4m_0^2c^2 \approx -3.7 \times 10^{-6} \text{ \AA}^2$, m_0 es la masa del electrón, c es la velocidad de la luz, $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de matrices de Pauli, el cual se relaciona con el operador de espín a través de $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ es el vector de onda de los electrones; $\mathbf{p}$ es el operador de momento. Como se puede ver de la ecuación (13), la interacción espín-órbita depende del vector de onda $\mathbf{k}$ y del gradiente del potencial en que se mueve el electrón. Por tanto, si no existe una variación espacial de tal potencial, el término de IEO desaparece.

2.2 Interacción espín-órbita en medios semiconductores

Cuando el electrón se mueve a través de un medio semiconductor (Winkler, 2004) el potencial $\tilde{V}$ de la ecuación (13) puede descomponerse en dos partes, esto es, $\tilde{V} = V_{cr} + V$, donde V_{cr} corresponderá al potencial que la partícula percibe como resultado de la periodicidad del cristal y V refleja la parte no periódica. Este último término contiene el potencial debido a impurezas, confinamientos, fronteras, así como la contribución debida a campos eléctricos externos. Si consideramos que el potencial cristalino es lo suficientemente pequeño, entonces, es posible describir el movimiento de los electrones, en estos medios, a través de la estructura de bandas. Estos sistemas simples pueden ser ejemplificados a través de los semiconductores cúbicos de “brecha” (“*gap*”) directa. Para tales materiales, usualmente, el mínimo de la energía se encuentra cerca del centro de la zona de Brillouin y el espectro es degenerado únicamente a $k = 0$. Si se consideran argumentos de simetría así como la condición de que

el potencial V varíe suavemente con relación al parámetro de red, se obtiene que el Hamiltoniano efectivo para electrones que se mueven en un cristal y para partículas en sistemas bidimensionales es:

$$H_{eff} = \epsilon_k + V + H_{int} + H_{ext} \quad (14)$$

$$H_{int} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (15)$$

$$H_{ext} = \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla V), \quad (16)$$

donde ϵ_k es el término de energía cinética y H_{int} es la contribución al hamiltoniano efectivo denominado término intrínseco, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es el vector de matrices de Pauli para partículas con espín 1/2 y $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ es el campo espín-órbita intrínseco. En el caso de un medio 3D, el campo $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ tiene su origen en el rompimiento de la simetría de inversión en la estructura cristalina. A la IEO que resulta de esto se le conoce como *acoplamiento de Dresselhaus* de la cual hablaremos en la sección 2.4. Por otro lado, en sistemas 2D tal campo espín-órbita se debe también a la falta de simetría en el confinamiento y se le conoce como *acoplamiento de Rashba*; esta contribución será estudiada con más detalle en la sección 2.5.

El término H_{ext} es la contribución extrínseca al hamiltoniano efectivo. En contraste con (15), no requiere el rompimiento de simetría en la estructura cristalina y se encuentra asociado a campos eléctricos generados por impurezas así como a campos eléctricos externos. Aquí, el potencial V contiene la información de dichos campos y la constante de acoplamiento λ se encuentra dada por

$$\lambda \sim \frac{1}{E_g}, \quad (17)$$

donde E_g es la energía de la brecha prohibida (Winkler, 2004). Note que la forma de la expresión (16) es la misma que se obtiene para el acoplamiento espín-órbita en el vacío. Sin embargo, $\lambda \gg \lambda_{vac}$ hasta en seis ordenes de magnitud. Por ejemplo, se ha encontrado que para GaAs $\lambda \approx 5.3 \text{ \AA}^2$ y para InAs $\lambda \approx 120 \text{ \AA}^2$. Este incremento en la IEO es de gran utilidad para producir corrientes eléctricas extrínsecas. Por otra parte, en sistemas bidimensionales para obtener la parte extrínseca, el potencial V se promedia a lo largo de la dirección $\hat{\mathbf{z}}$. Por ello, tanto ∇V como el vector de onda $\mathbf{k}$ se encuentran contenidos en el plano, obteniendo que $H_{ext,e} = \lambda \sigma_z (\mathbf{k} \times \nabla V)_z$, donde el subíndice e indica que es la expresión para electrones en la banda de conducción.

2.2.1 Efectos de la ausencia de simetría de inversión espacial

La degeneración de espín de los estados electrónicos en un semiconductor se debe al efecto combinado de las simetrías de inversión espacial y temporal. Un sistema con simetría de inversión temporal permite que un electrón con vector de onda $\mathbf{k}$ y espín $\uparrow$ tenga igual energía que otro electrón con vector de onda $-\mathbf{k}$ y espín $\downarrow$ es decir, $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(-\mathbf{k}, \downarrow)$.

Por otro lado, la simetría de inversión espacial hace posible el hecho de que un electrón con vector de onda $\mathbf{k}$ y espín $\uparrow$ tenga igual energía que un electrón con vector de onda $-\mathbf{k}$ y de espín similar, esto es, $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(-\mathbf{k}, \uparrow)$. En sistemas donde coexisten los dos tipos de simetrías de inversión, se crea una degeneración en la energía, ya que cada estado caracterizado por un vector de onda $\mathbf{k}$, puede estar ocupado por dos electrones de espín contrario, esto es, $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(\mathbf{k}, \downarrow)$. Tal degeneración, ocasiona que los semiconductores no presenten el fenómeno del magnetismo, ya que al promediar sobre todos los estados del sistema, el valor esperado del momento magnético es cero.

En medios donde se rompe la simetría de inversión espacial, es posible tener una contribución a la interacción espín-órbita. Dicho acoplamiento, puede interpretarse como un campo magnético efectivo dependiente del momento, $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ (ecuación (15)), que se acopla con el espín de los electrones (Winkler, 2003b). Este hecho permite la ruptura de la degeneración en energía (para $\mathbf{k} \neq 0$) aún en ausencia de $\mathbf{B}_{ext}$, siendo posible diferenciar la energía para un mismo vector de onda $\mathbf{k}$ por el sólo hecho de estar en uno u otro estado de espín, esto es, $E(\mathbf{k}, \uparrow) \neq E(\mathbf{k}, \downarrow)$. Tal efecto, es de suma importancia, ya que es una forma de generar densidades de electrones con espín polarizado (sin campos magnéticos externos), que es una de las condiciones inevitables en el desarrollo de los dispositivos espintrónicos.

En el caso tridimensional de un material semiconductor tipo zincblenda, la IEO se manifiesta como el resultado de una falta de simetría de inversión en la estructura cristalina. A tal contribución se le conoce como interacción espín-órbita de Dresselhaus. Por otra parte, en el caso de sistemas confinados, como son los gases electrónicos formados en heteroestructuras semiconductoras, se hace notar la interacción espín-órbita que se origina de la falta de simetría de inversión del potencial que confina a los electrones. Este acoplamiento es conocido en la literatura como IEO de Rashba. Aunque las dos IEO pueden estudiarse de manera separada, en el caso de los sistemas confinados es posible tener la contribución de ambas. En las siguientes secciones se describirán cada uno de los acoplamientos espín-órbita, dando a conocer Hamiltonianos, energías propias, eigenestados, densidades electrónicas, etc.

2.3 Interacción Espín-Órbita en un Gas bidimensional

Como se mostró anteriormente, la IEO viene de la combinación entre el rompimiento de simetría de inversión espacial y la presencia de simetría de inversión temporal. Esta última simetría de inversión puede romperse al aplicar un campo magnético externo.

En sistemas confinados, específicamente, los GE2D formados en la interfase de una heteroestructura semiconductor, el rompimiento de simetría espacial tiene varias fuentes, entre las cuales se pueden mencionar: (1) asimetría de inversión de la estructura cristalina subyacente al GE2D, (2) asimetría del potencial de confinamiento, así como (3) asimetría debido a efectos de esfuerzos aplicados en la estructura de los materiales semiconductores.

La IEO se encuentra caracterizada por un campo megnético efectivo Espín-Órbita dependiente del momento, $\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})$, el cual se acopla con el espín de los electrones. Dicha interacción puede representarse a través de una expresión tipo Zeeman, de manera que el Hamiltoniano para un electrón en el GE2D estará dado por:

$$H = \varepsilon_0 + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{k}), \quad (18)$$

donde $\varepsilon_0 = \hbar^2 k^2 / 2m^*$ es el término parabólico que describe el movimiento de electrón libre en el plano del gas, m^* es la masa efectiva y $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Por otro lado $\mathbf{\Omega}(\mathbf{k}) = (\Omega_x(\mathbf{k}), \Omega_y(\mathbf{k}), \Omega_z(\mathbf{k}))$ es el campo efectivo espín-órbita tridimensional y $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es el vector de matrices de pauli.

Las eigenenergías para estos sistemas se encuentran dadas por:

$$\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \lambda \frac{\hbar}{2} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})|, \quad (19)$$

con $\lambda = \pm 1$ y $|\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$.

Los eigenestados serán:

$$|\mathbf{k}, z, \lambda\rangle = \Psi(\mathbf{r}) \phi(z) \chi_\lambda(\mathbf{k}), \quad (20)$$

donde $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{2\pi}$ es la parte de onda plana que describe el movimiento del electrón en el plano del GE2D. La función $\phi(z)$ es la función a lo largo de la confinamiento, mientras que el espinor $\chi_\lambda(\mathbf{k})$ que define el estado de espín y se encuentra dado por

$$|\lambda\rangle = \chi_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s_{\lambda} \\ \lambda Q(\mathbf{k}) s_{\lambda}^{-1} e^{i\phi(\mathbf{k})} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

donde $\mathcal{Q}(\mathbf{k}) = |\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}(\mathbf{k})|/|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})|$, en la cual $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}(\mathbf{k}) = (\Omega_x(\mathbf{k}), \Omega_y(\mathbf{k}))$ y $s_{\lambda}^{-1} = 1/s_{\lambda}$, con

$$s_{\lambda} = \frac{|\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}(\mathbf{k})|}{\sqrt{|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})|^2 - \lambda|\boldsymbol{\Omega}|\Omega_z}}. \quad (22)$$

y

$$\tan(\phi(\mathbf{k})) = \frac{\Omega_y(\mathbf{k})}{\Omega_x(\mathbf{k})}. \quad (23)$$

En la situación en que el campo espín-órbita posee componente $\Omega_z = 0$, como es caso de la IEO de Rashba o la de Dresselhaus a lo largo de la cara cristalográfica [001], se tiene que $\mathcal{Q}(\mathbf{k}) = s_{\lambda} = 1$, por lo cual el espinor puede escribirse simplemente como

$$|\lambda\rangle = \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\phi(\mathbf{k})} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

La polarización de espín en la subbanda λ se encuentra definida como el valor esperado

$$\langle \lambda | \boldsymbol{\sigma} | \lambda \rangle = \lambda \delta(\mathbf{k}) \left[\frac{\Omega_x(\mathbf{k})\hat{\mathbf{x}} + \Omega_y(\mathbf{k})\hat{\mathbf{y}}}{|\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}(\mathbf{k})|} \right] + \frac{1}{2} \left[s_{\lambda}^2 - \delta^2(\mathbf{k})s_{\lambda}^{-2} \right] \hat{\mathbf{z}}. \quad (25)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$ son vectores unitarios que definen el plano del GE2D y $\hat{\mathbf{z}}$ define la dirección perpendicular. En el caso particular en que $\Omega_z = 0$, se tiene que $s_{\lambda} = 1$, $\delta(\mathbf{k}) = 1$, de manera que la polarización de espín puede escribirse simplemente como

$$\langle \lambda | \boldsymbol{\sigma} | \lambda \rangle = \lambda \left[\frac{\Omega_x(\mathbf{k})\hat{\mathbf{x}} + \Omega_y(\mathbf{k})\hat{\mathbf{y}}}{|\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}(\mathbf{k})|} \right] \parallel \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}). \quad (26)$$

Por otro lado, la Densidad de Estados por cada sub-banda de espín se encuentra definida como

$$D_{\lambda}(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \delta(\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon) \quad (27)$$

donde $\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})$ es la energía para la subbanda λ como función del vector de onda $\mathbf{k}$ y ε es un valor constante de energía. Las expresión (27) cuenta todos los vectores de onda que se encuentran dentro de una cierta área en el espacio de momentos delimitada por el valor de ε . Una manera alternativa de representar la ecuación (27) es la siguiente

$$D_{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{C_r(\varepsilon)} \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon(\mathbf{k})|} \quad (28)$$

donde la integral que se muestra es una integral a lo largo de la longitud de arco de curvas de energía constante $C_r(\{\mathbf{k}|\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon\})$. Esto nos proporciona el número de vectores de onda que, a esa energía, se encuentran presentes. La expresión (28) presentará singularidades justo cuando $|\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon(\mathbf{k})| = 0$.

Las propiedades que se han expuesto en esta sección son válidas para cualquier sistema, siempre y cuando el Hamiltoniano pueda escribirse igual que en la ecuación (18). En las siguientes secciones utilizaremos los resultados generales, aquí mostrados, para derivar expresiones particulares para los casos de las contribuciones a la IEO que son de nuestro interés; como es el caso del acoplamiento Rashba y de Dresselhaus.

2.4 Acoplamiento Dresselhaus

De la falta de simetría de inversión en el bulto que se presenta en materiales semiconductores que poseen estructura zincblenda (ver figura 2), como es el caso de los semiconductores constituidos por elementos de los grupos III y V, surge una importante contribución espín-órbita a la energía conocida como *acoplamiento de Dresselhaus* (Dresselhaus, 1955). Es una interacción de orden cúbico en el momento, cuyo hamiltoniano está dado por la expresión

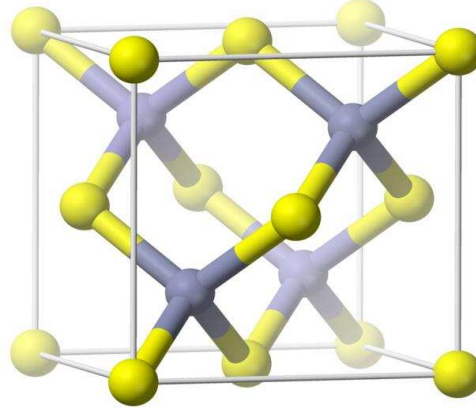


FIGURA 2.- Los materiales semiconductores, tales como GaAs, poseen estructura cristalina zincblenda.

$$H_D = -\beta_3 \left[\sigma_x k_x (k_y^2 - k_z^2) + \sigma_y k_y (k_z^2 - k_x^2) + \sigma_z k_z (k_x^2 - k_y^2) \right], \quad (29)$$

donde σ_i representan las matrices de Pauli, y β_3 es un parámetro intrínseco al material que caracteriza la intensidad del acoplamiento espín-órbita (La-Rocca y de Andrada e Silva, 1997), cuyos valores típicos son 20 eVÅ³ para GaAs y de 150-250 eVÅ³ para InAs, InSb y GaSb (Rashba, 2004). Por último, k_i representa las componentes del vector de onda del electrón.

Para sistemas cuasi-bidimensionales, como es el caso de un gas de electrones formado en la interfase de una heteroestructura semiconductor, el término de Dresselhaus puede ser

simplificado al tomar el valor promedio de las componentes de momento a lo largo de la dirección z (Winkler, 2003c). De aquí se obtiene que $\langle k_z \rangle = 0$ y $\langle k_z^2 \rangle \neq 0$, con lo cual el Hamiltoniano de Dresselhaus se reduce a

$$H_D^{2d} = \beta (k_x \sigma_x - k_y \sigma_y) - \beta_3 (\sigma_x k_x k_y^2 - \sigma_y k_y k_x^2). \quad (30)$$

Note que el primer factor del Hamiltoniano es lineal en k , en el cual $\beta = \beta_3 \langle k_z^2 \rangle$ mide la intensidad de dicha contribución ¹. El segundo término de la IEO de Dresselhaus es proporcional a k^3 .

El Hamiltoniano (30) puede ser escrito como una interacción tipo Zeeman

$$H_D^{2d} = \frac{\hbar}{2} \mathbf{\Omega}_D(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (31)$$

donde $\mathbf{\Omega}_D(\mathbf{k})$ es el campo efectivo espín-órbita y posee componentes

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2} \Omega_{Dx}(\mathbf{k}) &= \beta k_x - \beta_3 k_x k_y^2 \\ \frac{\hbar}{2} \Omega_{Dy}(\mathbf{k}) &= \beta k_y + \beta_3 k_y k_x^2. \end{aligned} \quad (32)$$

De manera que el campo magnético efectivo se encuentra localizado en el plano que define el GE2D, es decir, que la componente z es igual a cero.

Las energías y eigenespinores ya han sido definidos en la sección 2.3 a través de las ecuaciones (19) y (24) y para este caso en particular las eigenenergías serán:

$$\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 + \lambda \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega_{Dx}^2(\mathbf{k}) + \Omega_{Dy}^2(\mathbf{k})}. \quad (33)$$

y los eigenespinores

$$\chi_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\varphi(\mathbf{k})} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

donde $\tan(\varphi(\mathbf{k})) = \frac{\Omega_{Dy}(\mathbf{k})}{\Omega_{Dx}(\mathbf{k})}$, con $\lambda = \pm 1$

2.4.1 Caso $\beta \neq 0$ y $\beta_3 = 0$

En el caso particular en que el pozo cuántico que confina al gas es muy angosto, la contribución de los términos cúbicos es pequeña comparada con la contribución lineal, de forma que el campo espín-órbita se simplifica a:

$$\frac{\hbar}{2} \mathbf{\Omega}_D(\mathbf{k}) = \beta (k_x \hat{\mathbf{x}} - k_y \hat{\mathbf{y}}). \quad (35)$$

¹Para un pozo cuántico de ancho ~ 100 Å los valores típicos del parámetro β se encuentran en el rango de 2×10^{-10} - 2×10^{-9} eVcm y decrece rápidamente con el ancho del pozo (Rashba, 2004).

Para esta situación, el Hamiltoniano completo que describe a un electrón en el GE2D estará dado por

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 + H_D^{2d}, \quad (36)$$

cuyos espinores se encuentran definidos a través de la ecuación (34) utilizando las componentes del campo espín-órbita (35).

Las energías propias del sistema estarán dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \lambda \beta k \\ &= \frac{\hbar^2}{2m^*} (k + \lambda k_\beta)^2 - \frac{\hbar^2 k_\beta^2}{2m^*}. \end{aligned} \quad (37)$$

donde $k_\beta = m^* \beta / \hbar^2 \ll k_F$, donde k_F es la magnitud de la $\mathbf{k}$ que caracteriza la energía de Fermi. Si graficamos la relación (37), es posible observar que la dispersión parabólica correspondiente a un gas de electrones degenerado en espín, se desdobla en dos subbandas no parabólicas caracterizadas por el subíndice $\lambda = \pm 1$ (Figura 3). De esta manera, por cada

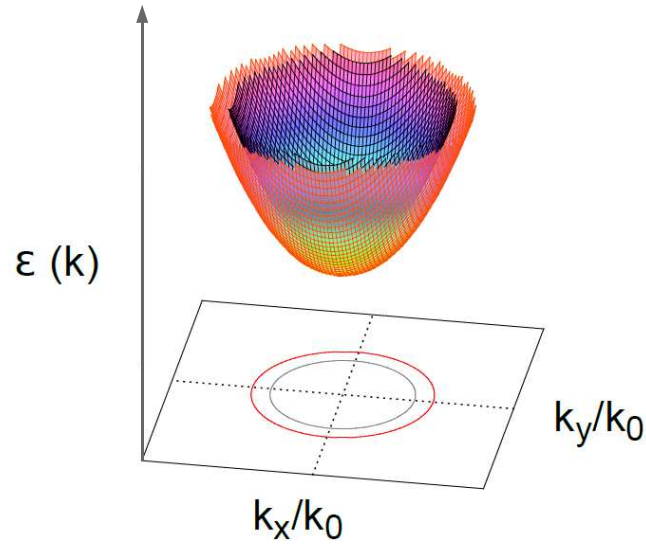


FIGURA 3.- Dispersión de la energía para electrones en un gas bidimensional en presencia de interacción espín-órbita. La dispersión parabólica para electrones libres se desdobla en dos subbandas, rompiendo la degeneración del sistema.

vector de onda se tienen dos estados electrónicos disponibles, separados por la diferencia de energía $\varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k}) = 2\beta k$ y caracterizados, cada uno, por la polarización de espín $\langle \psi_\lambda | \boldsymbol{\sigma} | \psi_\lambda \rangle$. Lo anterior se ilustra en la figura 4, donde se muestra un corte transversal de las superficies de energía, para un vector de onda $\mathbf{k}$ arbitrario.

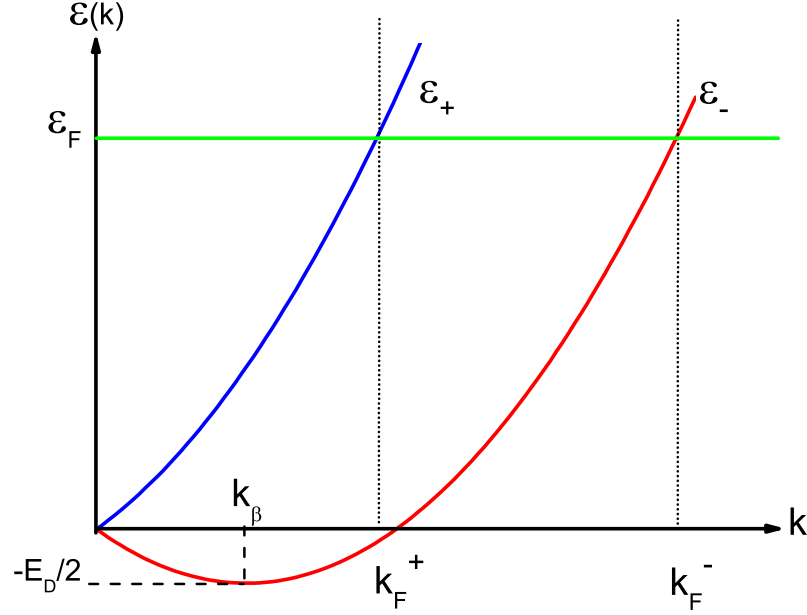


FIGURA 4.- Corte transversal de las superficies mostradas en la figura 3. El desdoblamiento de la subbanda de conducción permite que para cada valor de k existan dos estados disponibles, uno en la subbanda ε_+ y otro en la subbanda ε_- . Por otra parte, el mínimo de la subbanda ε_- será $-E_D/2 = -\hbar^2 k_\beta^2/2m^*$ y los vectores k_F^+ y k_F^- satisfacen la condición $\varepsilon_\lambda(k_F^\lambda) = \varepsilon_F$.

La densidad de electrones en cada una de las subbandas (n_λ) a temperatura cero se encuentra sumando sobre todos los estados ocupados hasta la misma energía de Fermi ε_F , es decir,

$$n_\lambda = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon_\lambda(\mathbf{k})], \quad (38)$$

donde $\Theta[\varepsilon_F - \varepsilon_\lambda(\mathbf{k})]$ es la función escalón unitaria, cuyo valor es cero si $\varepsilon_\lambda > \varepsilon_F$. Por tanto, la anterior integral se llevará a cabo en el intervalo que va de cero hasta el vector de onda que caracteriza el nivel de Fermi. Sin embargo, cada subbanda poseerá diferente vector $k_F^\lambda = \sqrt{\frac{2m^*\varepsilon_F}{\hbar^2} + k_\beta^2} - \lambda k_\beta$ determinado mediante la condición $\varepsilon_\lambda(k_F^\lambda) = \varepsilon_F$ (ver figura 4). Así, la densidad n_λ puede ser expresada como

$$n_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{k_F^\lambda} k dk d\theta. \quad (39)$$

de donde al considerar que el número total de electrones n_e se debe conservar, es decir,

$$n_e = n_+ + n_-, \quad (40)$$

se obtiene que la energía de Fermi será $\varepsilon_F = \hbar^2(2\pi n_e - 2k_\beta^2)/2m^*$. Por tanto, utilizando ésto

se obtiene que la densidad electrónica en cada subbanda estará dada por

$$n_\lambda = \frac{n_e}{2} - \lambda \frac{k_\beta}{2\pi} k_F, \quad (41)$$

donde hemos definido $k_F = \sqrt{2\pi n_e - k_\beta^2}$.

Una pregunta interesante es, ¿en qué dirección apunta el espín cuando el electrón está en el estado $\psi_{\lambda,\mathbf{k}}$? Para responder a tal cuestión es posible calcular el vector de polarización, donde la dirección de éste indica el eje de cuantización en cada subbanda para cada valor de $\mathbf{k}$. El vector de polarización estará dado como el valor de expectación del vector de matrices de Pauli y está definido a través de la ecuación (26). De aquí se obtiene que dicho vector estará expresado de la siguiente manera:

$$\langle \lambda_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\sigma} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle = \lambda \frac{k_x \hat{\mathbf{x}} - k_y \hat{\mathbf{y}}}{k} = \lambda (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}). \quad (42)$$

Analizando la anterior ecuación, podemos ver que el vector de polarización de espín se encontrará sobre el plano de GE2D, tal como se muestra en la figura 5. De manera que para cada dirección del vector de onda $\mathbf{k}$ existirán dos estados con energías ε_+ y ε_- ; tales estados manifiestan una diferencia en la polarización de espín. Con esto, es posible explicar porqué los GE2D son medios no magnéticos aún cuando la IEO está presente.

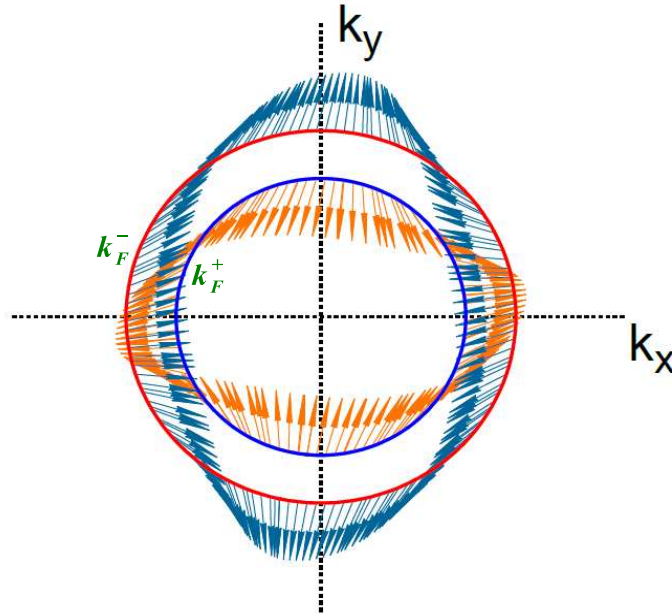


FIGURA 5.- Distribución de espines en el espacio de momentos y en cada banda en un Gas 2D con IEO de Dresselhaus.

Dado un valor de la energía, E , la Densidad de Estados correspondiente a la subbanda λ es

$$D(E) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta[E - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})] = D_+(E) + D_-(E), \quad (43)$$

en donde

$$D_{\lambda}(E) = \int \frac{d^2k}{2\pi} \delta[E - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})], \quad (44)$$

que para el caso de un gas degenerado en espín resulta ser $D_0 = (m^*/\pi\hbar^2)$. De esta forma se obtiene que para el caso de la subbanda más, la densidad de estados normalizada a $D_0(E)$, es:

$$\frac{D_+(E)}{D_0} = \Theta(E) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{1 + 2E/E_D} \right)^{1/2} \right], \quad (45)$$

donde $E_D = m^*\beta^2/\hbar^2$ y $\Theta(E)$ es una función escalón que adquirirá el valor de uno si $E \geq 0$, pero cuando $E < 0$ se vuelve cero. De manera similar al caso anterior, es posible obtener una expresión para la densidad de estados en la subbanda menos

$$\frac{D_-(E)}{D_0} = \Theta(E) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{1 + 2E/E_D} \right)^{1/2} \right] + \Theta(-E)\Theta(E + E_D/2) \left(\frac{1}{1 + 2E/E_D} \right)^{1/2}. \quad (46)$$

El segundo término del lado derecho representa la densidad de estados para energías negativas, expresado por $\Theta(-E)$. Tales energías se encuentran acotadas mediante la relación $-E_D/2 \leq E \leq 0$, condición que se incluye en la ecuación (46) a través de la función $\Theta(E + E_D/2)$.

Al graficar las expresiones para las densidades D_+ , D_- y D_0 , es posible observar que la presencia del acoplamiento espín-órbita de Dresselhaus introduce importantes cambios (ver figura 6), con respecto al caso del Gas degenerado en espín, donde la densidad de estados es una constante. En los GE2D con IEO la densidad puede descomponerse como la densidad de estados en cada una de las subbandas. Estas nuevas densidades poseen la propiedad de que que al sumarse, considerando solamente el caso $E > 0$, se recupera la densidad de estados para un sistema sin IEO, es decir, $D_+ + D_- = m^*/\pi\hbar^2$. Así mismo, podemos ver que la densidad de estados correspondiente a la subbanda ε_- siempre será mayor que la asociada a la subbanda ε_+ .

2.4.2 caso $\beta \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$

Por otra parte, en algunos materiales (InAs), la contribución cúbica en el momento de la interacción de Dresselhaus resulta relevante. Por lo tanto, el término de acoplamiento espín-

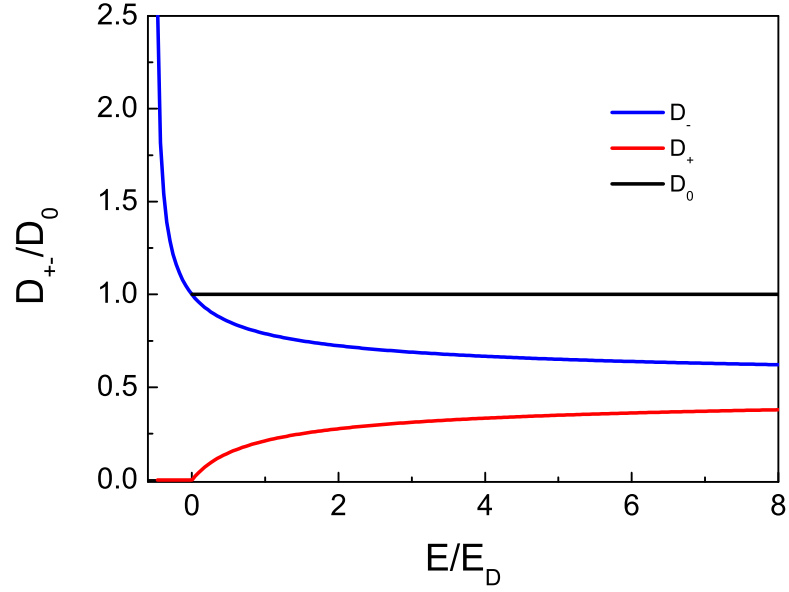


FIGURA 6.- Densidad de estados para un GE2D normalizada a $D_0 = m^*/\pi\hbar^2$. La línea en azul corresponde a la subbanda ε_- , la línea en rojo para para la subbanda ε_+ y la línea negra corresponde al caso degenerado en espín. Se observa que la presencia de la IEO modifica el número de estados por unidad de energía con respecto al valor constante D_0 .

órbita estará dado completamente por la expresión (30), de tal manera que las energías y espinores se encuentran definidos a través de las ecuaciones (33) y (34) respectivamente.

Si se grafican las superficies de energía se puede observar que en principio las subbandas reflejan el carácter cúbico de los términos de la IEO (ver figura 7(a)). Esto, se puede apreciar a través de los contornos de Fermi, los cuales sufren pérdida de simetría con respecto al caso en que sólo se considera el término lineal de Dresselhaus. Ver figura 7(b). La deformación de la subbandas de energía depende de la intensidad del término cúbico, lo cual está asociado al tipo de material que se utilice, ya que la IEO de Dresselhaus es intrínseca al sistema. Esta anisotropía se verá reflejada en propiedades de transporte (conductividad de carga y de espín, termopotencia, etc.) de los GE2D, las cuales dependen de los estados energéticos en cada una de las subbandas, tal como se verá en la sección 6, donde se analizará la conductividad óptica.

Por otro lado, la orientación del espín en cada banda se verá tal como se muestra en la figura 8, en donde el vector de polarización tendrá unicamente componentes x, y .

Con todo lo comentado en esta sección es posible notar que la presencia del acoplamiento espín-órbita de Dresselhaus en los gases de electrones bidimensionales, introduce una serie

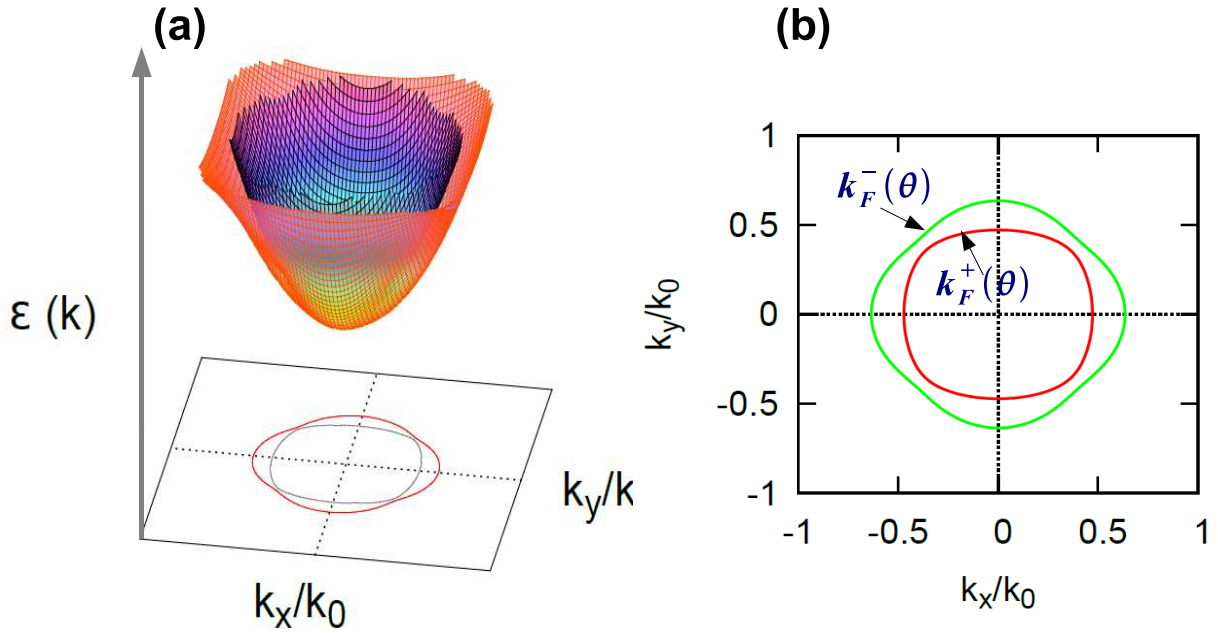


FIGURA 7.- (a) Dispersión de la energía para electrones en un gas bidimensional en presencia de interacción espín-órbita de Dresselhaus, donde se ha tomado en cuenta el término cúbico y (b) contornos de Fermi.

de efectos importantes como son el rompimiento de la degeneración en espín, el cambio en la densidad de estados (con respecto al caso sin IEO), etc. De esta forma, dichos sistemas adquieren características que podrían ser útiles en el desarrollo de dispositivos espintrónicos. No obstante, es necesario recordar que ésta no es la única contribución a la IEO, ya que existe otra cuyo origen proviene de la falta de simetría de inversión en un potencial de confinamiento (como ya se mencionó) y de la que hablaremos en la siguiente sección.

2.5 Acoplamiento Rashba

Otra contribución a la IEO que ha sido ampliamente estudiada, es la conocida como interacción de Rashba (Rashba, 2004). Esta, se origina por la asimetría de inversión espacial del pozo de potencial que confina al gas de electrones (figura 9). Un aspecto notable, muy

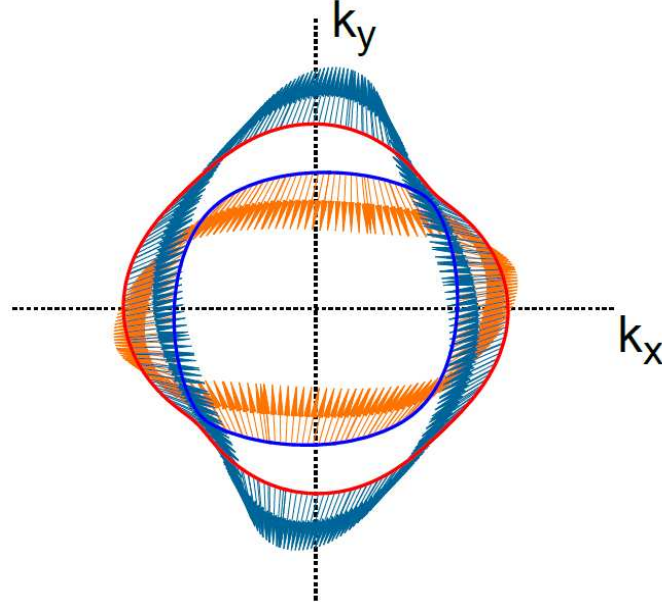


FIGURA 8.- Contornos de Fermi de las superficies de energía y orientación de los estados de espín para un GE2D con IEO de Dresselhaus considerando el término lineal más el cúbico . Se observa que la presencia del término cúbico produce pérdida de simetría en el desdoblamiento de las subbandas.

importante para propósitos espintrónicos, es el hecho de que la IEO de Rashba puede ser modulada a través de un potencial externo (“voltajes de compuerta”) (Nitta et al., 1997), el cual permite deformar el potencial de confinamiento y con ello variar la intensidad de dicho acoplamiento (ver figura 10). El hamiltoniano que representa dicha interacción es:

$$H_R = \alpha (\sigma_y k_x - \sigma_x k_y), \quad (47)$$

donde la intensidad del acoplamiento es $\alpha \sim \langle \mathbf{E}^V \rangle = -\langle \nabla V_0 \rangle$, y en la que V_0 representa el potencial de la banda de valencia. Los valores típicos de α para materiales basados en InAs, están en el rango de 1×10^{-9} a 6×10^{-9} eV cm, tal como ha sido reportado (Cui et al., 2002).

Para un electrón el hamiltoniano completo, al igual que (36), estará dado por la parte cinética más el término (47). Por tanto, los eigenestados correspondientes tendrán la forma de la expresión (20) presentando únicamente diferencias en la parte que contine la información del espín, que en este caso será

$$\chi_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(k_y - ik_x)/k \end{pmatrix}. \quad (48)$$

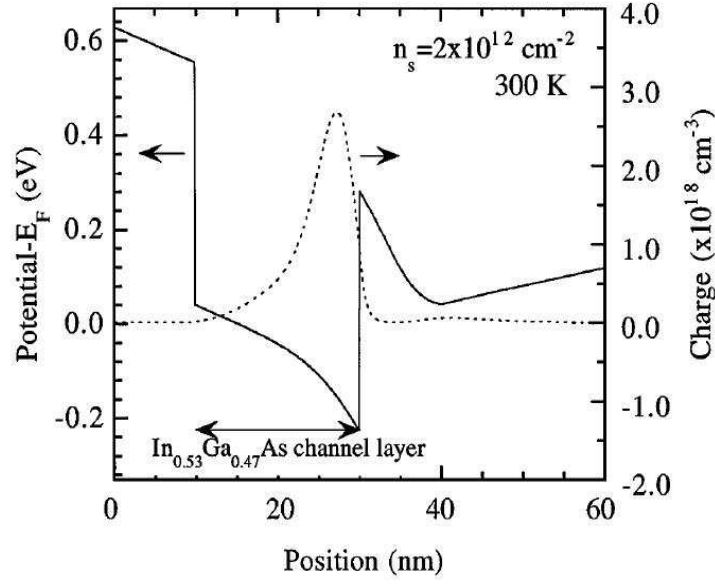


FIGURA 9.- Gas de electrones bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor (Nitta et al., 1997). La asimetría en el potencial de confinamiento da lugar a una contribución a la IEO.

Las energías propias estarán dadas por la expresión

$$\varepsilon_{\lambda}^R = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 + \lambda \alpha k, \quad (49)$$

mismas que al ser graficadas como función del vector de onda $\mathbf{k}$, muestran un desdoblamiento isotrópico de la subbanda de conducción igual al que se presenta cuando se tiene únicamente IEO de Dresselhaus (ver figura 3).

A $T = 0$, la subbanda λ estará ocupada hasta el nivel de Fermi, y los estados se caracterizarán por el vector de Fermi $k_F^{\lambda} = \sqrt{\frac{2m^*\varepsilon_F}{\hbar^2} + k_{\alpha}^2} - \lambda k_{\alpha}$, con $k_{\alpha} = m^*\alpha/\hbar^2$. La densidad de electrones en cada una de las subbandas n_{λ} puede ser determinada por medio de la ecuación (38), en donde se debe cumplir que $n_e = n_+ + n_-$. De esto se obtiene que $\varepsilon_F = \hbar^2(2\pi n_e - 2k_{\alpha}^2)/2m^*$ y que la densidad para la subbanda λ estará dada por

$$n_{\lambda} = \frac{n_e}{2} - \lambda \frac{k_{\alpha}}{2\pi} k_F, \quad (50)$$

donde se ha definido $k_F = \sqrt{2\pi n_e - k_{\alpha}^2}$.

Un dato interesante de la expresión (50), es su dependencia de cantidades que pueden ser moduladas, como la intensidad de IEO α y la densidad total de electrones ($n_{\lambda}(n_e, \alpha)$). Este

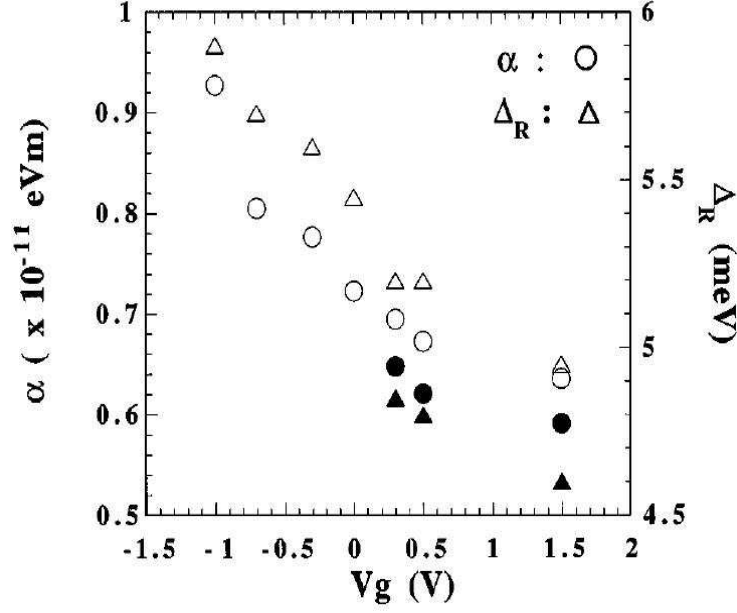


FIGURA 10.- Se presentan resultados experimentales, en donde al variar el voltage de compuerta V_g es posible producir cambios en la intensidad de la IEO de Rashba, α , y en la diferencia de energía $\Delta_R = 2\alpha k_F$, la cual caracteriza la separación entre las subbandas desdobladas en espín (Nitta et al., 1997).

hecho, hace posible la manipulación del número de electrones que ocupan cada subbanda; tal efecto se puede observar en las figuras 14 y 15. La gráfica 14, muestra las densidades para la subbanda n_+ y n_- como función del parámetro de Rashba (curva en color rojo). En dicha figura se aprecia un aumento en n_- y una disminución en n_+ conforme el parámetro α se incrementa. Un efecto similar se observa al graficar n_λ como función de la densidad total de electrones n_e , se aprecia que la densidad n_+ será menor que n_- conforme disminuimos n_e , tal como se muestra en la figura 15. Ambos efectos aquí mencionados, se deben a que al disminuir la densidad total de electrones o al aumentar la intensidad de la IEO, se traduce directamente en una disminución del nivel de Fermi, de tal manera que el número de electrones que ocupan la subbanda ε_+ llega a ser mucho menor que la cantidad de electrones que se encuentran en la subbanda ε_- .

El vector de polarización en el estado $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ (ecuación (48)) es ahora

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\sigma} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle &= \lambda \frac{-k_y \hat{\mathbf{x}} + k_x \hat{\mathbf{y}}}{k} \\
 &= \lambda \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \lambda [-\sin\theta \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \hat{\mathbf{y}}].
 \end{aligned} \tag{51}$$

En la figura 11 se muestra el campo de polarización de espín correspondiente a los estados de Rashba (48). De tal representación es posible ver la diferencia que existe con el esquema presentado en la sección anterior para IEO de Dresselhaus (figura 5), no obstante, en ambos casos, el momento magnético total es cero.

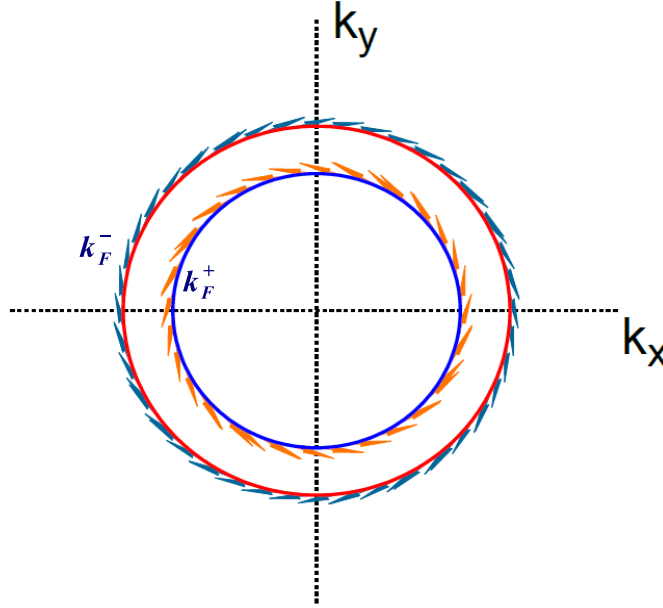


FIGURA 11.- Distribución de los espines en un gas de electrones bidimensional con IEO de Rashba. El vector de polarización de espín es tangente al momento de los electrones.

Para un sistema donde la IEO de Rashba es significativa, el número de estados por unidad de energía estarán determinados por la expresión (44). En el presente caso las densidades de estados $D_\lambda(E)$ están dadas por las expresiones obtenidas para el caso de IEO de Dresselhaus, donde únicamente se realiza el cambio $E_D \rightarrow E_R$, con $E_R \equiv m^* \alpha^2 / \hbar^2$. De esta manera, la densidad de estados presentará el mismo comportamiento mostrado en la figura 6. Sin embargo, recordemos que la IEO de Rashba puede ser modulada a través de potenciales externos; tal cosa no es cierta para la interacción espín-órbita de Dresselhaus. Dicho control, abre la posibilidad de modificar algunas propiedades de los sistemas, como función del parámetro de IEO α .

Hasta el momento hemos hablado de las principales contribuciones a la IEO de manera independiente, cabe señalar que en sistemas confinados podemos tener la participación conjunta de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus. Esto trae consigo un cambio importante del que hablaremos en la siguiente sección.

2.6 Acoplamiento anisotrópico: Rashba + Dresselhaus

Algunos autores han expresado especial interés en considerar la coexistencia de ambos acoplamientos. Por ejemplo, J. Schliemann et al. (Schliemann et al., 2003), mostraron que la presencia conjunta de la IEO de Rashba y Dresselhaus lineal en el momento ($R+D_\beta$), permite realizar una modificación importante al transistor de espín de Datta y Das (Datta y Das, 1990). En dicho trabajo se señala la importancia de tener $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \beta$ para construir los estados de encendido (1) y apagado (0) del transistor en el régimen no balístico. Por otra parte, estudios realizados han demostrado que la presencia $R+D_\beta$ introduce nuevas características a la polarización de espín inducida vía campos eléctricos (Iglesias y Maytorena, 2010), así como sobre las conductividades ópticas de carga y de espín (Erlingsson et al., 2005; Maytorena et al., 2006) etc. Estos son tan sólo algunos de los trabajos que muestran la importancia de considerar Rashba y Dresselhaus simultáneamente.

En esta sección, revisaremos cómo se modifican las propiedades del gas por la presencia del acoplamiento $R+D_\beta$. El hamiltoniano estará definido como:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 + H_R + H_D^{2d}. \quad (52)$$

Los eigenestados tienen la forma de la expresión (20), en la cual el espinor se encuentra dado por

$$\chi_\lambda(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

donde $\tan(\varphi(\mathbf{k})) = (\alpha k_x - \beta k_y)/(\alpha k_y - \beta k_x)$ y $\lambda = \pm 1$.

Las eigenenergías están dadas por

$$\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \lambda \frac{\hbar}{2} |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})|, \quad (54)$$

donde

$$\frac{\hbar}{2} |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})| = \sqrt{(\beta k_x - \alpha k_y)^2 + (\alpha k_x - \beta k_y)^2}, \quad (55)$$

que en coordenadas polares se escribe como

$$\frac{\hbar}{2} |\boldsymbol{\Omega}(k, \theta)| = k \Delta(\theta), \quad (56)$$

con

$$\Delta(\theta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin(2\theta)}. \quad (57)$$

La figura 12 muestra las superficies definidas por (54), en ella se observa una separación entre las energías que varía según la dirección de $\mathbf{k}$. Este efecto puede notarse con mayor claridad

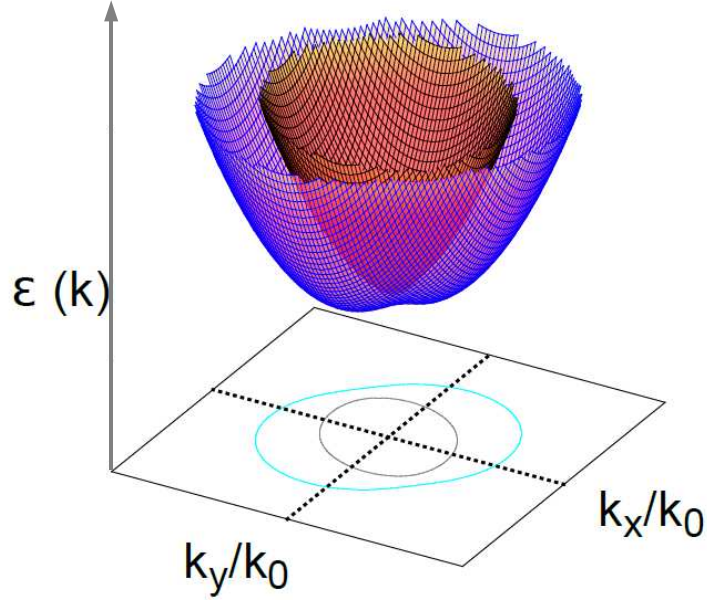


FIGURA 12.- Desdoblamiento anisotrópico de la relación de dispersión de la energía como resultado de la coexistencia de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus.

al obtener las curvas de contorno para la energía de Fermi ε_F (ver la figura 13), de donde podemos apreciar la existencia de ejes de alta simetría localizados a ángulos $\theta_+ = \pi/4$ y $\theta_- = 3\pi/4$, correspondientes a las direcciones $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.

El nivel de Fermi para la subbanda λ se encuentra caracterizado por el vector

$$k_F^\lambda(\theta) = \sqrt{2\pi n_e - 2q_{so}^2 + k_{so}^2(\theta)} - \lambda k_{so}(\theta), \quad (58)$$

donde n_e es la densidad total de electrones, $q_{so} = m\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/\hbar^2$ y $k_{so} = m\Delta(\theta)/\hbar^2$. De esta manera, utilizando la expresión (38), se obtiene que a $T = 0$ la densidad electrónica en la subbanda λ es

$$n_\lambda = \frac{n_e}{2} - \lambda \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta k_{so}(\theta) \sqrt{2\pi n_e - 2q_{so}^2 + k_{so}^2(\theta)}, \quad (59)$$

La figura 14 muestra las densidades electrónicas n_+ y n_- como función de la intensidad de IEO α , manteniendo $\beta = 0.5\alpha$ (curvas en rojo). Gracias a la presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus al aumentar la intensidad α se produce una disminución en el nivel de Fermi mayor que el que se presenta cuando sólo se tiene IEO de Rashba. Por dicho motivo, es posible apreciar que la densidad electrónica total, n_e , se encontrará contenida en la subbanda ε_- para valores de α menores que los que se presentan

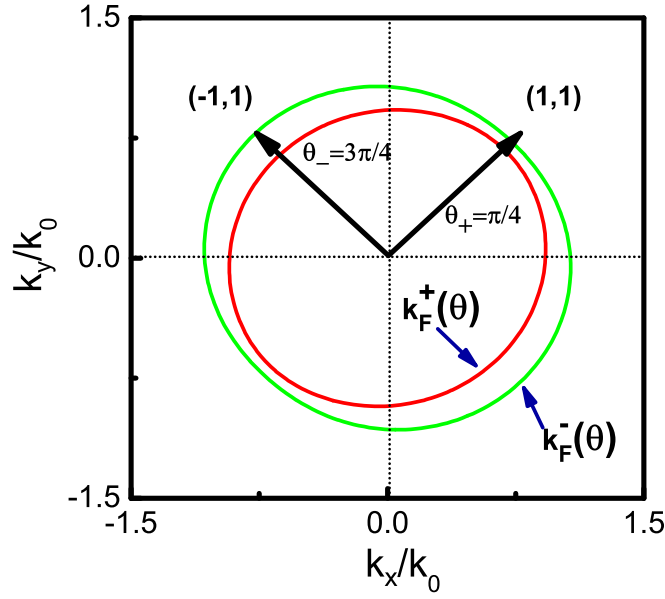


FIGURA 13.- Corte transversal de las superficies de energía. Se muestra la anisotropía como función del vector de onda, donde existen dos ejes de alta simetría localizados a ángulos $\theta_+ = \pi/4$ y $\theta_- = 3\pi/4$

en el caso $\beta = 0$ (curvas en azul). Un comportamiento similar al anterior se obtiene al disminuir la densidad total de electrones n_e , tal como se ilustra en la figura 15.

Por otra parte, el vector de polarización de espín estará dado por:

$$\langle \lambda_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\sigma} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle = \lambda \frac{(-\alpha k_y + \beta k_x) \hat{\mathbf{x}} + (\alpha k_x - \beta k_y) \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{(\alpha k_y - \beta k_x)^2 + (\alpha k_x - \beta k_y)^2}} = \lambda [\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} - \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}], \quad (60)$$

cuyas componentes se encuentran contenidas en el plano que forma el gas de electrones bidimensional. La ilustración del campo de polarización resultante puede ser observada en la figura 16. En ella es posible notar que cada estado caracterizado por el vector de onda $\mathbf{k}$ se desdobra en dos estados con espín contrario. Por tanto, no hay magnetización espontánea neta causada por el campo espín-órbita.

De manera particular, se ha prestado especial atención al caso $\alpha = \beta$. La razón, es que bajo esta condición el Hamiltoniano recobra la simetría SU(2) (Bernevig et al., 2006), lo cual da lugar a la conservación del eje de cuantización del espín. De acuerdo con J. Schieman et al., tener $\alpha = \beta$ suprime el mecanismo de decaimiento de D'yakonov-Perel (Schieman et al., 2003), por lo que un estado de espín inyectado al sistema se conserva. Cabe mencionar, que la primer demostración experimental acerca de este incremento en el tiempo de vida del espín

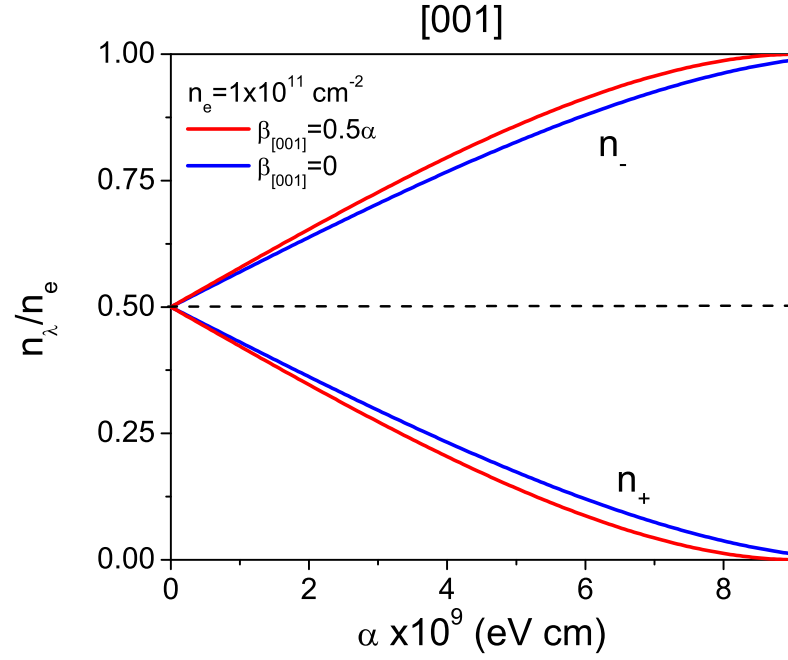


FIGURA 14.- Densidad de electrones en cada subbanda de espín como función del parámetro espín-órbita de Rashba para valores de $\beta = \beta_{[001]} = 0.5\alpha$ y $\beta_{[001]} = 0$. Se observa que la población en la banda ε_+ disminuye conforme aumenta α , mientras que en la banda ε_- , dicha población se incrementa.

fue realizada por J. D. Kolarek et al. (Kolarek et al., 2009). En la figura 17 se muestran los contornos de Fermi para esta situación de alta simetría. Se observa que las superficies de energía se caracterizan por presentar degeneración en estados a lo largo de las direcciones $\theta = \pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$, así mismo la orientación del espín se vuelve independiente del vector de onda de los electrones ($\mathbf{k}$), de manera que no puede ser dispersado y mantiene su polarización por un tiempo mayor que el caso $\alpha \neq \beta$.

Hasta aquí, se han presentado algunos efectos importantes que se producen sobre los estados electrónicos de un GE2D debido a la existencia de la IEO. Estos, inducirán cambios en todas aquellas propiedades del sistema que depende de dichos estados de energía. De manera muy particular, afectarán el espectro de excitaciones elementales del GE2D constituido por plasmones y el continuo de transiciones de partícula independiente o regiones de amortiguamiento de Landau, de las cuales se hablará en los siguientes capítulos.

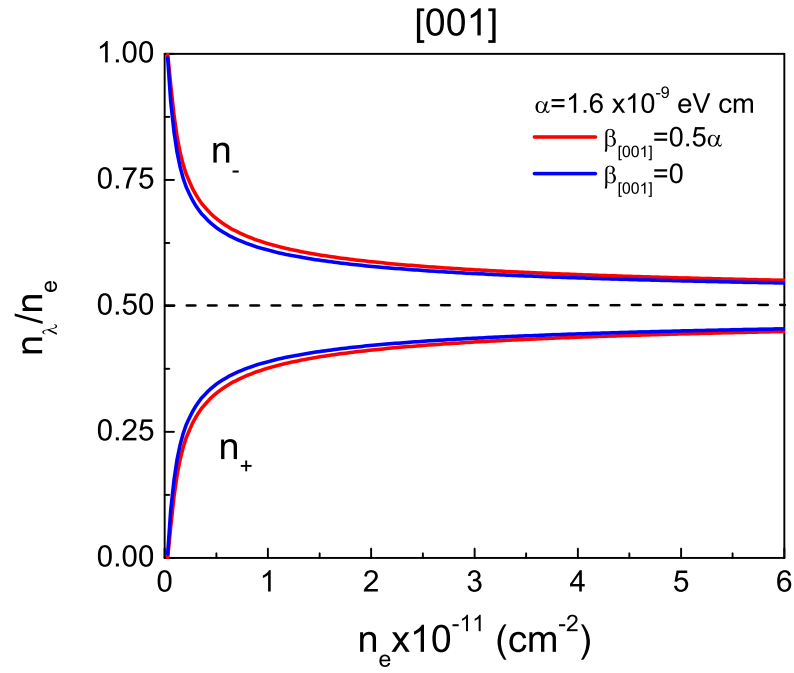


FIGURA 15.- Densidad de electrones para una subbanda desdoblada en espín como función de la densidad total de electrones. Se observa que la población en la banda ε_+ disminuye conforme disminuye la densidad total de electrones, mientras que en la banda ε_- , dicha población se incrementa.

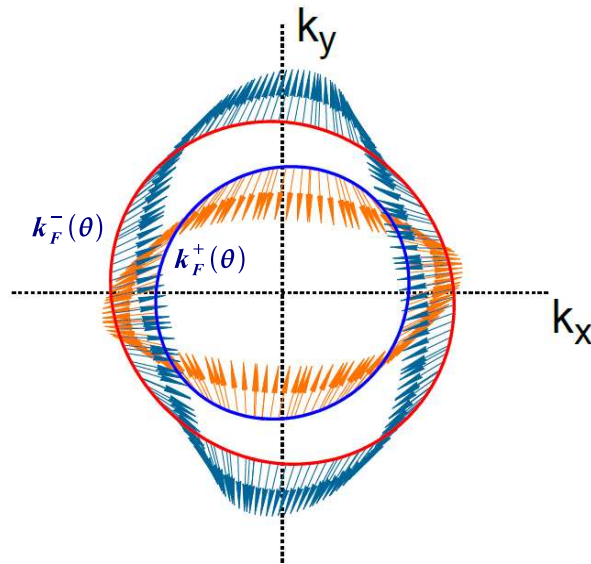


FIGURA 16.- Polarización de espín para un GE2D en presencia de IEO anisotrópica $R+D_\beta$. Las flechas indican la dirección del vector de momento magnético en cada subbanda para cada vector de onda $\mathbf{k}$.

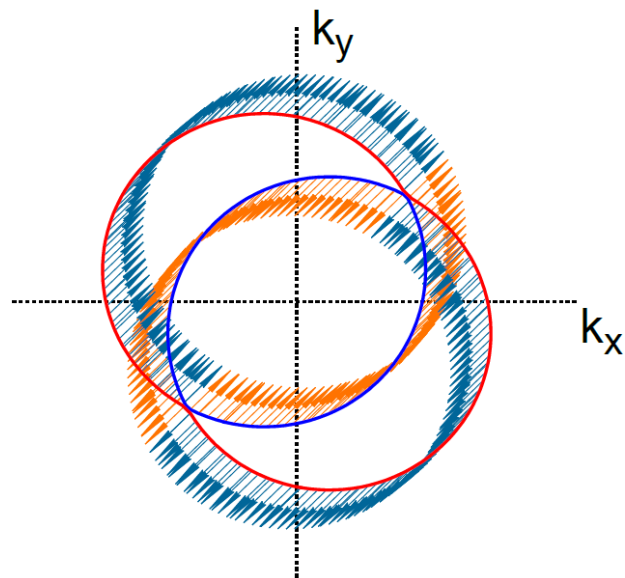


FIGURA 17.- Polarización de espín de los electrones de un GE2D con IEO anisotrópica para el caso $\alpha = \beta$. Se observa que la polarización no depende de $\mathbf{k}$, por lo que los estados de espín no pueden ser dispersados y poseen un tiempo de vida más largo con respecto al caso $\alpha \neq \beta$.

Capítulo 3

Excitaciones en gases de electrones

En un gas de electrones degenerado en espín las excitaciones electrónicas son, en general, de dos tipos: (1) excitaciones de partícula individual, dadas por las excitaciones incoherentes de pares electrón-hueco, y (2) modos colectivos que corresponden a oscilaciones de densidad de carga (oscilaciones de plasma o “plasmones”), que pueden interpretarse también como una oscilación coherente de pares electrón-hueco (Mochán, 2005). En el presente capítulo revisaremos las características de cada una de estas excitaciones. En la sección 3.1, se estudiarán las oscilaciones de plasma desde el punto de vista de la Electrodinámica Macroscópica, en donde aparecen como modos longitudinales a frecuencias tales que la función dieléctrica del medio se anula. En la sección 3.2 se analiza el *Método de Campo Autoconsistente* que se utiliza para calcular funciones respuesta tales como la función dieléctrica, la susceptibilidad eléctrica o conductividad eléctrica en términos de las propiedades microscópicas del medio en equilibrio. En la sección 3.3, se muestra cómo la presencia de la interacción electrón-electrón da lugar a una respuesta apantallada que permite, como consecuencia, la aparición de excitaciones colectivas. En las secciones 3.4 y 3.5 analizaremos el espectro de excitaciones electrónicas del gas de electrones tridimensional y el bidimensional, respectivamente.

3.1 Plasmones desde el punto de vista clásico

Consideremos un medio metálico, en el que los electrones de conducción se mueven de manera libre. En el equilibrio la carga negativa se verá compensada con la carga positiva correspondiente a los átomos ionizados. No obstante, dicho balance puede romperse al incrementarse la densidad electrónica sobre cierta región R . En consecuencia, dicha región se vuelve más negativa, por lo que los electrones se alejarán de ella por la repulsión coulombiana. Sin embargo, debido a la inercia de las partículas, no es posible recuperar inmediatamente el equilibrio, esto ocasiona que los electrones permanezcan en movimiento incluso después de que el sistema se ha vuelto eléctricamente neutro. De esta forma, los electrones continúan su camino alejándose de R hasta que en determinado momento dicha región en el espacio adquiere una carga neta positiva que obligará a las partículas negativas a retornar. Esto generará nuevamente un exceso de electrones dentro de R por lo que se repite el proceso anteriormente

descrito, volviéndose algo cíclico (hasta que la energía asociada a dicho movimiento se disipa). Lo anterior puede interpretarse como oscilaciones de la densidad de carga dentro del medio conductor y a las que se les conoce como “oscilaciones de plasma”. Estas se encuentran caracterizadas por la “frecuencia de plasma” ω_p que depende de la densidad total de electrones y de la carga de éstos. Al “quantum” de tal campo de oscilaciones se le da el nombre de *plasmón* y la energía que se le asocia es $E_p = \hbar\omega_p$ (Mochán, 2005).

3.1.1 Frecuencia de plasma: ecuación de movimiento

Consideremos que el gas de electrones con densidad n_e , se mueve libremente sobre un fondo homogéneo positivo e interacciona con un campo total (autoconsistente) $\mathbf{E}$. Si debido a una “compresión” se genera una acumulación de carga negativa Q en una región $\mathbf{R}$ (Figura 18), entonces, los electrones percibirán una fuerza de repulsión generada por

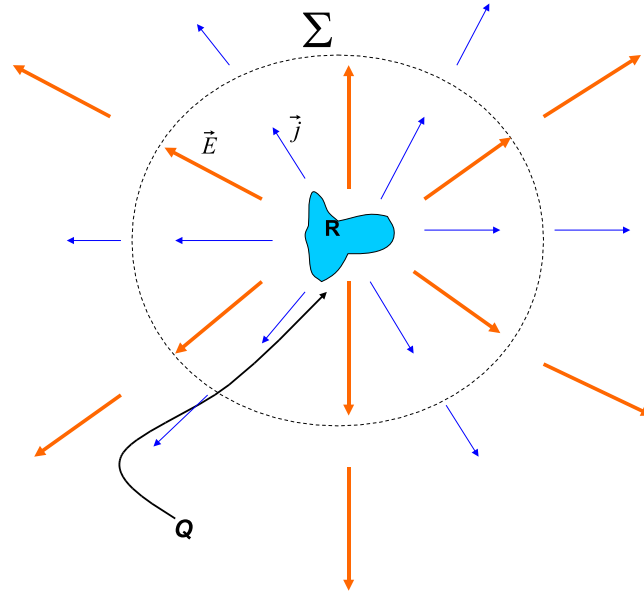


FIGURA 18.- La acumulación de carga Q sobre la región R , contenida dentro de la superficie Σ , produce un campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (flechas anaranjadas) el cual induce una corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (flechas azules). Esto permite la oscilación del plasma (Mochán, 2005).

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}, \quad (61)$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición que va de la región R a un punto arbitrario en el espacio. Por tanto, los electrones percibirán dicho campo y se acelerarán obedeciendo la ecuación

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (62)$$

donde m y e son la masa y carga electrónica respectivamente. Si ahora multiplicamos ambos lados de esta ecuación por la densidad de carga $\rho = -en_e$ e integramos sobre la superficie Σ que encierra la carga Q (como se muestra en la figura 18), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 n_e}{m} \int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (63)$$

en la que $\mathbf{j} = -en_e d\mathbf{r}/dt$. Al introducir la ecuación de continuidad ($\int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = -dQ/dt$) así como la ley de Gauss ($\int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q$), se obtiene que la expresión (63) puede reescribirse como

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{4\pi n_e e^2}{m} Q, \quad (64)$$

que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico, que indica el movimiento oscilatorio de la densidad de carga a una frecuencia

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m} \right)^{1/2}, \quad (65)$$

a la que se le conoce como frecuencia de plasma de bulto. La energía de la onda de plasma cuantizada E_p , típicamente se encuentra en el rango de 5 a 15 eV (Mochán, 2005).

3.1.2 Modos longitudinales

Los modos colectivos se obtienen de manera natural a partir de la ecuación de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (66)$$

en ausencia de cargas externas, donde $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ es el vector de desplazamiento eléctrico; aquí $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico externo y $\mathbf{P}$ es la polarización. En un medio lineal, homogéneo e isotrópico, el vector de desplazamiento eléctrico se puede escribir en términos del campo eléctrico como sigue

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (67)$$

donde ϵ es una propiedad del material y es conocida como la función dieléctrica del sistema. Sustituyendo la ecuación (67) en la ecuación (66), tenemos que

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (68)$$

La solución de esta ecuación plantea dos posibilidades

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \epsilon \neq 0 \quad (69)$$

o

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0, \quad \epsilon = 0. \quad (70)$$

La ecuación (69) es la solución trivial a la ecuación (68) e indica la existencia de campos eléctricos transversales ¹ así como la ausencia de densidad de carga dentro del sistema homogéneo. La segunda solución indica la posibilidad de tener campos eléctricos longitudinales asociados a fluctuaciones de la densidad de carga ².

Cabe mencionar que la respuesta que presenta la materia es diferente para los diferentes colores de la luz. En consecuencia, la función dieléctrica dependerá de la frecuencia, es decir $\epsilon \rightarrow \epsilon(\omega)$. Así, de acuerdo con lo anteriormente discutido las oscilaciones de la densidad de carga se presentarán únicamente para frecuencias a las cuales

$$\epsilon(\omega) = 0. \quad (71)$$

Como una aplicación de ésto, consideremos el modelo de Drude, en el cual se asume que los electrones responden de manera libre e independientemente a un campo eléctrico externo. Es posible pensar, que dado que se trata de un conjunto de partículas no interactuantes, la generación de modos colectivos se vuelve no factible. Sin embargo, en realidad, el campo al que obedecen las partículas no es puramente el campo externo, sino un campo efectivo constituido por el campo externo más un campo inducido por una fluctuación en la densidad de carga. La función dieléctrica de Drude es (Halevi, 1992; Mochán, 2005; Wooten, 1972)

$$\epsilon^D(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (72)$$

de donde podemos ver la dependencia como función de la frecuencia. Las oscilaciones de plasma tendrán lugar a frecuencias a las cuales se hace cero la anterior ecuación, obteniendo

$$\omega = \omega_p \quad (73)$$

¹Por definición, un campo se dice que es transversal si su divergencia es cero. En componentes de Fourier, $\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}$. En el caso de una onda electromagnética $\mathbf{q}$ representa la dirección de propagación, la cual es perpendicular al vector de campo eléctrico, de manera que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{E} = 0$. Este es un ejemplo de un campo transversal.

²Un campo longitudinal se define como aquel que satisface la condición $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. En componentes de Fourier $\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{q} \times \mathbf{E} = 0$, donde $\mathbf{q}$ es el momento que dicho campo puede transferir y el cual cumple que $\mathbf{q} \parallel \mathbf{E}$. Un ejemplo de esto es el campo eléctrico generado por una distribución de carga, en donde una carga de prueba tendrá una velocidad y un momento paralelos a las líneas de campo eléctrico.

A ésta se le conoce como frecuencia de plasma de Drude. Los efectos de disipación pueden ser incorporados al cambiar $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + i\omega/\tau$ en la ecuación (72), donde τ es el tiempo medio entre colisiones electrónicas.

La excitación de los plasmones en un sólido se debe a la dispersión temporal que presenta la función dieléctrica correspondiente. Ésta se anula para ciertos valores de la frecuencia, pero nunca ocurre en el límite estático. Lo anterior puede entenderse al introducir de manera explícita la frecuencia en la ecuación (67), es decir, $\mathbf{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega)$, donde al tomar la transformada de Fourier (utilizando el teorema de convolución) se obtiene que

$$\mathbf{D}(t) = \int dt' \epsilon(t - t') \mathbf{E}(t'), \quad (74)$$

donde la transformada de Fourier de $\epsilon(\omega)$ es función de la diferencia de tiempos $t - t'$, lo cual mide la respuesta $\mathbf{D}(t)$ a un tiempo t después de haber aplicado un campo perturbativo $\mathbf{E}(t')$ a un tiempo anterior t' . A esto se le conoce como el *principio de causalidad*, donde la respuesta no puede anteceder a la acción que la origina. En la situación en que la respuesta del sistema en el punto $\mathbf{r}$ depende de la excitación generada en el punto $\mathbf{r}'$, podemos escribir la ecuación (74) de manera generalizada como

$$\mathbf{D}(t) = \int dt' \int d^3r' \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (75)$$

La dependencia de ϵ de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ es conocida como *dispersión espacial* o *no localidad espacial*. En el caso de sistemas homogéneos ϵ depende únicamente del intervalo $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, que son el punto donde se perturba el medio y el punto de observación. En el espacio de Fourier, la ecuación (75) se transforma en una simple relación algebraica, que puede ser escrita como

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega). \quad (76)$$

La no localidad introduce, además de la dependencia en la frecuencia, una dependencia en el vector de onda $\mathbf{q}$. Así, debido a la no localidad, $\mathbf{q}$ introduce direcciones privilegiadas aún en sistemas isotrópicos. De aquí que la respuesta de un sistema pueda descomponerse en parte transversal ($\mathbf{E}^T(\mathbf{q}, \omega) \perp \mathbf{q}$) y longitudinal ($\mathbf{E}^L(\mathbf{q}, \omega) \parallel \mathbf{q}$), es decir,

$$\mathbf{D}^T(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon^T(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{E}^T(\mathbf{q}, \omega), \quad (77)$$

y

$$\mathbf{D}^L(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon^L(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{E}^L(\mathbf{q}, \omega). \quad (78)$$

derivadas de la ecuación (76).

Si relacionamos $\nabla \rightarrow i\mathbf{q}$ en el espacio de Fourier, entonces, de la ecuación (66) es posible obtener una relación de dispersión $\omega_{\mathbf{q}}$ vs $\mathbf{q}$ dada implícitamente por

$$\epsilon^L(\mathbf{q}, \omega) = 0, \quad (79)$$

es decir, que los modos colectivos harán su aparición cuando la parte longitudinal de la función dieléctrica es cero.

Para conocer la relación de dispersión de los plasmones, se recurre a la construcción de un modelo de la materia, a partir del cual se obtiene la respuesta del sistema ante una perturbación. Por ello, a continuación presentamos un esquema muy utilizado para calcular la respuesta dieléctrica de un medio en términos de sus propiedades microscópicas de estado base.

3.2 Método de campo autoconsistente

Esta aproximación, conocida también como *Self-Consistent Field Method* (SCF) en inglés, se utiliza para obtener la respuesta de un medio ante una perturbación externa tomando en cuenta la interacción coulombiana entre partículas eléctricamente cargadas (Ehrenreich y Cohen, 1959). Presentaremos las ecuaciones como expresiones algebraicas que involucran componentes de Fourier y no como operadores integrales, como sería el caso de la respuesta en sistemas inhomogéneos (superficies, partículas, etc) (Halevi, 1992; Ansgar, 1997).

Para ejemplificar el método SCF, considérese un gas electrónico bajo la acción de una perturbación externa que varía en el tiempo con una frecuencia ω y espacialmente con vector de onda $\mathbf{q}$. De acuerdo con la teoría de respuesta lineal, la presencia del potencial externo inducirá una densidad de partículas $\delta n(\mathbf{q}, \omega)$, que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \Pi(\mathbf{q}, \omega) V_{ext}(\mathbf{q}, \omega), \quad (80)$$

donde $V_{ext}(\mathbf{q}, \omega)$ es la energía asociada a la perturbación y $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ es una susceptibilidad que contiene toda la información relacionada con la interacción entre partículas (polarización en el medio) y para la que la teoría cuántica de perturbaciones proporciona expresiones en términos de funciones de onda y espectros de energía. La función $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ de un sistema electrónico interactuante, dado el gran número de partículas involucradas, resulta un problema imposible de resolver, por tanto, debemos acudir a algún tipo de aproximación o aproximaciones. *El Método de Campo Autoconsistente se basa en cambiar nuestro sistema de partículas interactuantes por otro sin interacción, donde cada electrón se mueve de manera*

independiente, pero respondiendo no al potencial externo, sino a un potencial efectivo,

$$V_{tot}(\mathbf{q}, \omega) = V_{ext}(\mathbf{q}, \omega) + V_{ind}(\mathbf{q}, \omega), \quad (81)$$

donde $V_{ind}(\mathbf{q}, \omega)$ es la energía asociada al potencial inducido. Esta energía inducida está dada por la ecuación de Poisson

$$V_{ind}(\mathbf{q}, \omega) = V_q \delta n(\mathbf{q}, \omega), \quad (82)$$

en donde V_q es la transformada de Fourier del kernel de la energía asociada a la interacción coulombiana. De esta manera la ecuación (80) es sustituida por la expresión

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \Pi_0(\mathbf{q}, \omega) V_{tot}(\mathbf{q}, \omega) \quad (83)$$

donde $\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)$ ³ es la función respuesta para un sistema de partículas no interactuantes y $V_{tot}(\mathbf{q}, \omega)$ es la energía del potencial al que responderán efectivamente los electrones.

Al sustituir las ecuaciones (81) y (82) en la ecuación (83) llegamos a una relación de autoconsistencia para la densidad electrónica inducida, dada por

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \Pi_0(\mathbf{q}, \omega) V_{ext}(\mathbf{q}, \omega) + \Pi_0(\mathbf{q}, \omega) [V_q \delta n(\mathbf{q}, \omega)]. \quad (84)$$

De aquí podemos escribir una ecuación similar a la expresión (80), esto es,

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{[1 - V_q \Pi_0(\mathbf{q}, \omega)]} V_{ext}(\mathbf{q}, \omega), \quad (85)$$

de donde al comparar (85) con (80) se observa que la $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ de muchos cuerpos se convierte en la $\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)$ “apantallada” por el factor $1 - V_q \Pi_0(\mathbf{q}, \omega)$, es decir,

$$\Pi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{[1 - V_q \Pi_0(\mathbf{q}, \omega)]}, \quad (86)$$

lo que define a la función dieléctrica precisamente como ⁴

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V_q \Pi_0(\mathbf{q}, \omega). \quad (87)$$

³Es una función de correlación densidad-densidad, dada por $\Pi_0(\mathbf{q}, t) = -i\Theta(t) \frac{1}{V} \langle [\hat{n}(\mathbf{q}, t), \hat{n}(-\mathbf{q}, 0)] \rangle$ (Bruus y Flensberg, 2005a), donde $\hat{n}$ es el operador densidad. La transformada de Fourier inversa es $\Pi_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i\Theta(t - t') \langle [\hat{n}(\mathbf{r}, t), \hat{n}(-\mathbf{r}', t')] \rangle$, donde Θ es la función escalón unitaria la cual se anula para $t' > t$.

⁴Esta relación puede obtenerse a partir del vector de desplazamiento $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico externo y $\mathbf{P}$ es el vector de polarización. Este último se relaciona con el campo externo a través de $\mathbf{P} = \Pi \mathbf{E}$, donde Π es la susceptibilidad de polarización. De esta forma, $\mathbf{D} = (1 + 4\pi\Pi)\mathbf{E}$. Si embargo, por otro lado $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, por lo que $\epsilon = 1 + 4\pi\Pi$. Esta última es la función dieléctrica.

Nótese que si se ignora la interacción coulombiana ($V_q = 0$) todo efecto de apantallamiento desaparece.

En términos de potenciales tenemos

$$V_{tot}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{V_{ext}(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (88)$$

lo cual nos indica que los electrones sienten un potencial apantallado como resultado de la interacción electrostática, caracterizado por el término $1/\epsilon$. De esta última expresión es posible ver que aunque la perturbación externa sea infinitesimalmente pequeña de modo que $V_{ext} \sim 0$, si la función dieléctrica del sistema es cero, existirá $V_{tot} \neq 0$ que se asocia con la existencia de modos propios de la densidad de carga inducida. Esto, se encuentra en concordancia con la expresión (79) presentada en la sección anterior.

Se verá a continuación que este apantallamiento dinámico lleva consigo la existencia de ondas de plasma.

3.3 Excitaciones electrónicas a partir de una función respuesta

Para ver cómo es que de una función respuesta es posible obtener información concerniente a los distintos tipos de excitaciones electrónicas, a continuación nos enfocaremos en la parte real de la conductividad, la cual está relacionada con la parte imaginaria de la susceptibilidad eléctrica a través de la relación (Bruus y Flensberg, 2005b)

$$\text{Re}(\sigma(\mathbf{q}, \omega)) = -\frac{\omega e^2}{q^2} \text{Im}(\Pi(\mathbf{q}, \omega)) = -\frac{\omega e^2}{q^2} \text{Im} \left[\frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{1 - V_q \Pi_0(\mathbf{q}, \omega)} \right]. \quad (89)$$

La parte imaginaria de esta ecuación puede ser escrita como

$$\text{Im} \left[\frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{1 - V_q \Pi_0(\mathbf{q}, \omega)} \right] = \frac{1}{V_q} \text{Im} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = -\frac{1}{V_q} S(\mathbf{q}, \omega), \quad (90)$$

donde $\epsilon = 1 - V_q \Pi_0(\mathbf{q}, \omega)$. La función $S(\mathbf{q}, \omega)$ es conocida como el *factor de estructura dinámica*. De esta ecuación, las excitaciones electrónicas son posibles siempre que $S \neq 0$, lo cual puede suceder de dos diferentes maneras: (1) **si la parte real de la función dieléctrica es cero** y la parte imaginaria es infinitesimalmente pequeña, o (2) si la parte imaginaria de $\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)$ es finita. Las excitaciones de tipo (1), los modos colectivos de la densidad de carga, se obtienen al calcular el límite del factor de estructura cuando la parte imaginaria de la función dieléctrica tiende a cero, esto es

$$\lim_{\mathbf{Im}[\epsilon] \rightarrow 0} S(\mathbf{q}, \omega) = - \lim_{\mathbf{Im}[\epsilon] \rightarrow 0} \mathbf{Im} \left(\frac{1}{\mathbf{Re}(\epsilon) + i\mathbf{Im}(\epsilon)} \right), \quad (91)$$

donde hemos escrito la función dieléctrica en términos de sus componentes real e imaginaria.

Aplicando la identidad

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \pm i\eta} \right) = P \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi \delta(x), \quad (92)$$

se obtiene

$$S(\mathbf{q}, \omega) \approx \pi \delta(\mathbf{Re}[\epsilon(\mathbf{q}, \omega_q)]), \quad (93)$$

donde $\delta(\mathbf{Re}[\epsilon])$ es la función delta de Dirac, cuyo valor será cero si $\mathbf{Re}[\epsilon] \neq 0$. *Dicha ecuación, indica que habrá una contribución a la disipación de energía a frecuencias para las cuales la parte real de la función dieléctrica sea igual a cero.* Esta, es la condición fundamental que implica la existencia de los plasmones.

Por otra parte, las excitaciones de tipo (2), excitaciones de pares electrón-hueco, se derivan de la posibilidad de que la parte imaginaria de la función $\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)$ sea distinta de cero. Dicha condición permite que el factor de estructura dinámica sea no nulo, tal como puede verse de la relación

$$S(\mathbf{q}, \omega) = -V(q) \mathbf{Im} \left(\frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{1 - V(q)\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)} \right) = \frac{-V(q)}{|\epsilon|^2} \mathbf{Im}(\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)), \quad (94)$$

donde la función Π_0 , obtenida mediante un cálculo microscópico tiene la forma

$$\Pi_0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_0(E(\mathbf{k})) - f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}))}{E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar(\omega + i\eta)}. \quad (95)$$

Aquí dicha función tiene información acerca de las bandas de energía del sistema a través de $E(\mathbf{k})$ y $E(\mathbf{k} + \mathbf{q})$, donde $\mathbf{k}$ es el vector de onda y $\mathbf{q}$ es el momento adquirido por los electrones dispersados. La función $f_0(E(\mathbf{k}))$ es la función de distribución de Fermi. El término $\hbar\eta$ es un factor empírico que se introduce para contemplar efectos de disipación. Entonces, en el límite en que la energía disipada es muy pequeña comparada con la energía de Fermi, de tal manera que $\eta \rightarrow 0$, la expresión (95) puede escribirse como

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \Pi_0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} (f_0(E(\mathbf{k})) - f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}))) \left(\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega) + i\hbar\eta} \right) \quad (96)$$

en donde, al utilizar la identidad (92), se obtiene que

$$S(\mathbf{q}, \omega) \approx \sum_{\mathbf{k}} [f_0(E(\mathbf{k})) - f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}))] \delta(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}) - \hbar\omega). \quad (97)$$

La función δ expresa conservación de energía en el proceso de absorción y podemos ver que ésta será diferente de cero cuando

$$E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}) = \hbar\omega. \quad (98)$$

Tal expresión es la condición que representa la transición entre dos niveles de partícula simple por medio de la absorción de la energía $\hbar\omega$ y el intercambio de momento $\mathbf{q}$.

En las siguientes secciones analizaremos los casos del gas electrónico 3D y el 2D, para los cuales existen expresiones sencillas para las energías $E(\mathbf{k})$.

3.4 El gas tridimensional

Este gas de electrones constituye uno de los sistemas básicos de estudio. Se trata de un medio en el cual los electrones pueden moverse en cualquier dirección sin restricción alguna. Su espectro de energías es simplemente

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \quad (99)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el vector de onda tridimensional que caracteriza los estados electrónicos $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, que son ondas planas. Al ser sistemas de muchas partículas interactuantes, estos gases exhiben el grupo de excitaciones electrónicas anteriormente mencionadas en la sección 3.3. Por un lado, las transiciones de pares electrón-hueco se obtienen a partir de la ecuación (98), de la que al introducir explícitamente la energía dada por la ecuación (99), se obtiene que

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 - \frac{\hbar^2}{2m} k^2. \quad (100)$$

Las soluciones, $(\mathbf{q}, \omega)$, que satisfacen la anterior expresión forman un continuo de excitaciones, cuyas fronteras estarán determinadas por los valores máximo y mínimo que adquieren los vectores de onda que caracterizan los estados electrónicos ocupados. Si consideramos que las partículas ocupan todos los estados hasta el nivel de Fermi, entonces, el valor máximo del momento se encontrará en $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$, mientras que cuando $\mathbf{q}$ es antiparalelo a $\mathbf{k}$ el momento será mínimo, esto para $k = k_F$ que caracteriza el nivel de Fermi. Por tanto, a partir de la ecuación (100) se obtienen que la solución para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$ es

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{m} q k_F + \frac{\hbar^2}{2m} q^2, \quad (101)$$

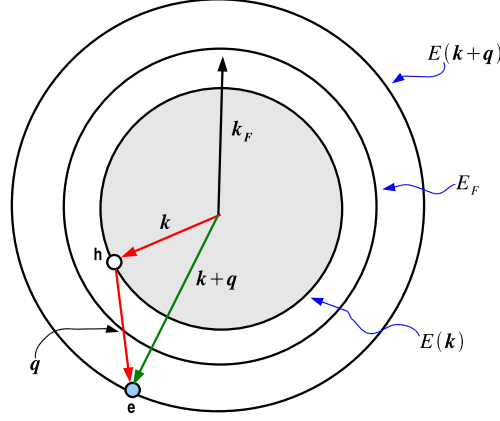


FIGURA 19.- Esfera de Fermi que contiene un gas 3D degenerado. El proceso de excitación de un par electrón-hueco (e-h) conserva energía y momento, tal como se muestra.

mientras que para $\mathbf{q}$ antiparalelo a $\mathbf{k}$ se obtiene

$$\hbar\omega = -\frac{\hbar^2}{m}qk_F + \frac{\hbar}{2m}q^2, \quad (102)$$

donde $q = |\mathbf{q}|$ es la magnitud del vector de onda transferido a los electrones (ver figura 19). De las ecuaciones (101) y (102) es posible ver que las excitaciones que componen el continuo de transiciones de pares electrón-hueco cumplen con la condición

$$(k_F^2 + 2m\omega/\hbar)^{1/2} - k_F \leq q \leq (k_F^2 + 2m\omega/\hbar)^{1/2} + k_F. \quad (103)$$

Por otro lado, en tales gases electrónicos, también se hacen presente las excitaciones colectivas de la densidad de carga. El tratamiento microscópico se lleva a cabo a través del cálculo de la bien conocida función dieléctrica de Lindhard (Ehrenreich y Cohen, 1959) (ecuación (95)). Dicha función se obtiene aplicando el método de campo autoconsistente discutido en la sección 3.2, de manera que la ecuación (87) se expresa de la siguiente forma

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - f_0(E(\mathbf{k}))}{E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}) - \hbar\omega}, \quad (104)$$

donde $V_q = 4\pi e^2/q^2$.

Al resolver la ecuación (104), la función dieléctrica puede escribirse como (Halevi, 1992)

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \left(\frac{3\omega_p^2}{q^2 v_F^2} \right) f_L, \quad (105)$$

donde $v_F = \hbar k_F/m$ es la velocidad de Fermi, ω_p es la frecuencia de plasma definida mediante

la expresión (65) y

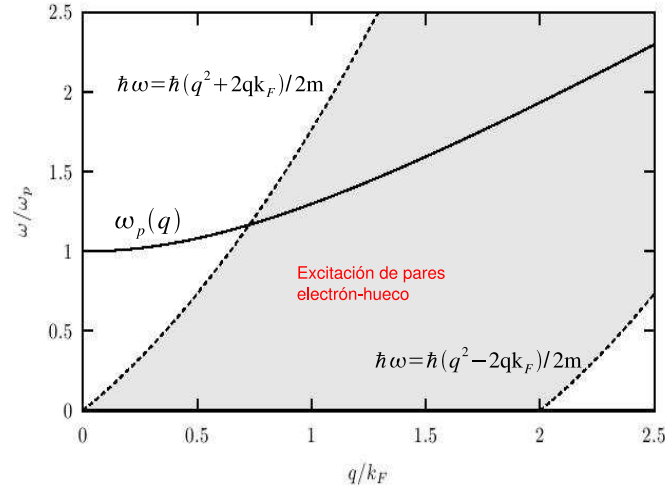


FIGURA 20.- Las zonas de amortiguamiento de Landau o continuo de excitaciones de pares electrón-hueco (zona en gris), se originan por el hecho de que electrones inicialmente en un estado, pasan a un nuevo estado a través de la absorción de energía $\hbar\omega$.

$$f_L = \frac{1}{2} + \frac{1}{8w} \left[(1 - (w - u)^2) \ln \left(\frac{w - u + 1}{w - u - 1} \right) + (1 - (w + u)^2) \ln \left(\frac{w + u + 1}{w + u - 1} \right) \right] \quad (106)$$

con $w = q/2k_F$ y $u = \omega/qv_F$. Esta última expresión, puede simplificarse al pasar al régimen clásico; tal situación se presentará si $q \ll k_F$ ($w \ll 1$). Por tanto, al tomar el límite cuando $w \rightarrow 0$ se obtiene que la función dieléctrica de Lindhard se reduce a

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - (\beta q)^2), \quad (107)$$

donde $\beta = \sqrt{3/5}v_F$. Al igualar a cero la expresión (107) se obtiene la siguiente relación de dispersión para los modos colectivos

$$\omega = (\omega_p^2 + \beta^2 q^2)^{1/2}. \quad (108)$$

En el límite de $\mathbf{q}$ pequeña, la ecuación (107) se reduce al resultado que se conoce como función dieléctrica de Drude ($\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$). En la figura 20, se muestra precisamente el comportamiento de la relación de dispersión obtenida a partir de la expresión (107). Así mismo, se presenta la región de transiciones entre estados de partícula individual; tal región, recordemos, estará delimitada por las fronteras (101) y (102).

3.5 El gas bidimensional

Gracias a las técnicas de deposición de materiales, tales como Epitaxia de Haces Moleculares, en las últimas décadas ha sido posible la fabricación de estos gases de electrones 2D en la interfase de las heteroestructuras semiconductoras (por ejemplo los realizados en sistemas GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs). Estos sistemas cuasi-2D, poseen altas densidades electrónicas por lo que exhiben (i) transiciones de partícula individual y (ii) plasmones. El continuo de transiciones formado por las excitaciones de tipo (i), pueden obtenerse a partir de la relación (98), donde la energía para un electrón dentro del sistema estará dada por

$$E_l(k) = \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2 + \varepsilon_l. \quad (109)$$

Aquí el primero de los términos es la energía correspondiente al movimiento de los electrones en el plano de confinamiento. Esta cantidad se encuentra caracterizada por el vector bidimensional $\mathbf{k} = k(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Por otra parte, debido al confinamiento de los electrones en una de las direcciones (digamos la dirección z), se crean subbandas en la banda de conducción. De ello, se deriva el segundo término en la ecuación (109) (ε_l), que indica la energía que tendrá un electrón que ocupa la subbanda l . En consecuencia, en este tipo de sistemas, las excitaciones de pares electrón-hueco se dividirán naturalmente en dos tipos: (1) transiciones intrasubbanda e (2) intersubbanda, dando como resultado un espectro diferente al exhibido en el caso del gas de electrones 3D (figura 20), tal como se muestra en la figura 21. Cabe mencionar, que cuando el pozo cuántico que confina el GE2D es suficientemente angosto, de manera que sólo posee una sola subbanda de energía, entonces, las transiciones intersubbanda desaparecen quedando únicamente las transiciones intrasubbanda.

Para obtener la relación de dispersión de plasmones de un gas estrictamente 2D podemos utilizar (104) con algunas modificaciones (Stern, 1967; Mendoza y del Castillo-Mussot, 1993; Jain y Das-Sarma, 1987). Ahora el término V_q será la transformada de Fourier 2D de la interacción coulombiana, es decir $V_q = 2\pi e^2/\epsilon_s q$, donde ϵ_s es el valor de la constante dieléctrica del medio que rodea al plano del gas. En el caso en que el GE2D es un sistema multisubbanda, los modos colectivos del sistema pueden clasificarse en intra-subbanda e inter-subbanda, tal como lo muestra el trabajo de J. Jain y S. Das Sarma (Jain y Das-Sarma, 1987). Sin embargo, en el caso en que el sistema posee solamente una subbanda de energía, las eigenenergías estarán dadas por $E(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2/2m^*$, donde m^* es la masa efectiva. Para esta situación, la función dieléctrica puede escribirse como

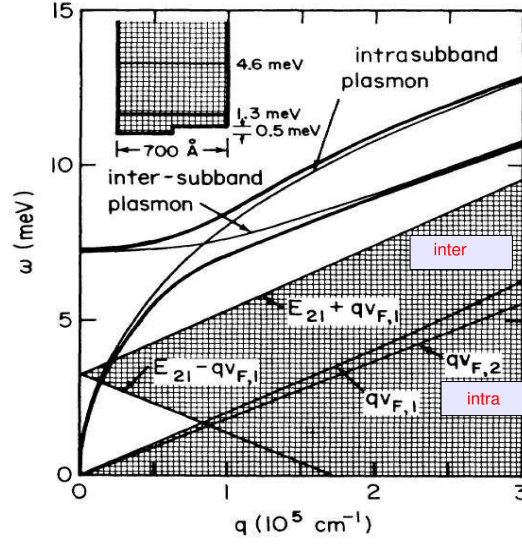


FIGURA 21.- En los gases de electrones bidimensionales se crean zonas de amortiguamiento de Landau compuestas por transiciones intrabanda y zonas compuestas por transiciones interbanda (Jain y Das-Sarma, 1987).

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} 2f_0(E(\mathbf{k})) \left[\frac{E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k})}{(\hbar\omega)^2 - (E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}))^2} \right] \quad (110)$$

con $E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \hbar^2|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2/2m^*$, donde $\mathbf{q}$ es el momento adquirido por los electrones dispersados. A $T = 0$ la función de distribución de Fermi se reduce a la función escalón

$$\Theta(E(\mathbf{k}) - E_F) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(\mathbf{k}) \leq E_F \\ 0 & \text{si } E(\mathbf{k}) > E_F \end{cases}, \quad (111)$$

donde $E_F = \hbar^2 k_0^2/2m^*$ es la energía al nivel de Fermi, con $k_0 = \sqrt{2\pi n_0}$, siendo n_0 la densidad electrónica del gas. Entonces

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - 2V_q \sum_{\mathbf{k}} \Theta(E(\mathbf{k}) - E_F) \left[\frac{E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k})}{(\hbar\omega)^2 - (E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}))^2} \right] \quad (112)$$

Ahora, debido a que los modos colectivos son el resultado de la interacción electrón-electrón de largo alcance, entonces, dichos modos de resonancia se encontrarán mejor definidos en el límite de longitud de onda larga. Esto equivale a considerar la aproximación de q pequeña, de donde se obtiene que

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - V_q \Xi(q). \quad (113)$$

donde

$$\Xi(q) = \left(\frac{1}{m^* \omega^2} \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_0} k dk \Theta(E(\mathbf{k}) - E_F) [2kq \cos(\theta) + q^2]. \quad (114)$$

En esta expresión se ha intercambiado la sumatoria por una integral bidimensional, la cual ha sido expresada en coordenadas polares.

De la anterior ecuación el primer término es una función par en el ángulo, por lo que al realizar la integral el resultado será cero. Mientras tanto, el segundo término implica $\sum_{\mathbf{k}} f_0(\mathbf{k}) = n_0$, donde n_0 es la densidad electrónica del sistema. Así, finalmente la ecuación (113) puede reescribirse como

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - \left(\frac{n_0 q^2}{m^* \omega^2} \right) V_q = 1 - \frac{2\pi n_0 e^2}{\epsilon_s m^*} \frac{q}{\omega^2}, \quad (115)$$

de donde la relación de dispersión de los plasmones se obtiene al hacer que la parte real de la función dieléctrica sea cero. Al aplicar esta condición sobre la ecuación (115) se obtiene que

$$\omega_p^{2D}(q) = \sqrt{2\pi n_0 e^2 q / \epsilon_s m^*}, \quad (116)$$

Como podemos observar de la anterior ecuación, existe una dependencia en el vector de onda del plasmón que va como $q^{1/2}$. Tal comportamiento puede ser visualizado en la figura 21 a través de la rama que corresponde al plasmón intrasubbanda.

Cabe mencionar, que este modo colectivo ha sido observado experimentalmente en distintos sistemas. Por ejemplo, S. Allen et al., utilizando una heteroestructura basada en silicio, estudiaron la relación de dispersión del plasmón como función de la densidad electrónica del medio, y observaron que la frecuencia de plasma concuerda con lo que establece la teoría (Allen et al., 1977). Por otro lado, M. Voßebürger et al. demostraron que los modos colectivos excitados en un GE2D formado en la estructura AlGaAs/GaAs, decaen emitiendo radiación con frecuencias en la región de los THz (Voßebürger et al., 1996). Por este motivo, dichas excitaciones son consideradas como un mecanismo viable para la construcción de fuentes y detectores de radiación electromagnética (Köhler et al., 2002; Otsuji et al., 2006; Shaner et al., 2007).

Excitaciones electrónicas en presencia de IEO

En el presente capítulo se estudia el espectro de excitaciones características de un GE2D que se encuentra bajo la acción de un campo efectivo, $\Omega(\mathbf{k})$, originado por la presencia de la IEO. En la sección 4.1 se analiza la región de transiciones de partícula independiente para dos casos: (1) cuando se encuentra presente la IEO de Rashba y (2) para cuando en el GE2D actúan los acoplamientos Rashba y Dresselhaus de manera simultánea. Posteriormente, en la sección 4.2, se presenta el cálculo generalizado de la función dieléctrica mediante el Método SCF, esto para un gas bajo la acción de un $\Omega(\mathbf{k})$ arbitrario. Dicha función será retomada en 4.3, y se reducirá al caso de un campo efectivo paralelo al plano del gas. Mientras tanto, en la sección 4.4, se obtendrá la relación de dispersión de los modos longitudinales para el sistema con acoplamiento Rashba + Dresselhaus. Finalmente, en las secciones 4.5 y 4.6 se presentan la discusión de resultados y las conclusiones, respectivamente.

4.1 Continuo de transiciones electrón-hueco

A continuación consideremos un GE2D en presencia de IEO, el cual se encuentra fuertemente confinado a través de un potencial. La dispersión de la energía posee sólo una sub-banda de conducción, la que, de acuerdo con el capítulo 2, se desdobra en espín debido a la IEO. También, considérese un campo electromagnético externo que varía con el tiempo con frecuencia ω y que posee vector de onda $\mathbf{q}$. Esta perturbación interacciona con el gas electrónico proporcionando energía $\hbar\omega$ y momento $\hbar\mathbf{q}$ a los electrones. Por dicho motivo un electrón inicialmente en el estado caracterizado por la energía $\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})$ puede pasar a otro estado energético $\varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})$, donde λ y λ' indican la sub-banda o el estado de espín en el cual se encuentra la partícula.

En las siguientes sub-secciones se verá que el desdoblamiento en espín de la sub-banda de conducción hace posible la aparición de transiciones inter-sub-banda. En la sub-sección 4.1.1 se presentan resultados para el caso en que sólo se considera la IEO de Rashba, mientras que en la sub-sección 4.1.2 se analizan los efectos introducidos debido a una dispersión de las

energías de tipo anisotrópica.

4.1.1 Caso isotrópico: Rashba

Las posibles transiciones de partícula independiente se presentarán siempre que la diferencia de energías entre un estado ocupado y un estado desocupado sea igual a $\hbar\omega$. Esta condición fue obtenida en la sección 3.3 al analizar los efectos de disipación de energía a través del factor de estructura dinámica (ecuación (97)). Cabe mencionar que las transiciones estarán constituidas principalmente por excitaciones que van de estados que están por debajo de la energía de Fermi a los estados desocupados, por encima del nivel de Fermi. Estas transiciones se presentarán de dos maneras posibles, la primera, cuando el electrón gana momento $\mathbf{q}$, está dada por la relación

$$\hbar\omega = \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}), \quad \text{para} \quad \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) < \varepsilon_F < \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (117)$$

en donde $\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})$ está dada por (49) y

$$\varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2}{2m^*} + \lambda' |\mathbf{k} + \mathbf{q}|, \quad (118)$$

con $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| = \sqrt{q^2 + k^2 + 2kq \cos(\theta - \gamma)}$. Aquí θ y γ denotan la dirección de los vectores de onda $\mathbf{k}$ y $\mathbf{q}$ respectivamente, tal como se muestra en la figura 22. Sin embargo, en este caso, donde las subbandas de energía se desdoblan en espín isotrópicamente en el espacio de momentos, podemos elegir la dirección de $\mathbf{q}$ de manera arbitraria, ya que el intercambio de momento depende de la magnitud de $\mathbf{q}$, no de su dirección. Particularmente, tomaremos $\gamma = 0$ que coincide con el eje k_x .

Utilizando (49) y (118) en (117), obtenemos:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 kq}{m^*} \cos \theta + \alpha (\lambda' |\mathbf{k} + \mathbf{q}| - \lambda k), \quad (119)$$

El otro caso de las transiciones de partícula simple es cuando el electrón pierde momento $\mathbf{q}$ y está dado por la relación:

$$\hbar\omega = \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad \text{para} \quad \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) < \varepsilon_F < \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k}), \quad (120)$$

de lo que se obtiene

$$\hbar\omega = -\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 kq}{m^*} \cos \theta + \alpha (\lambda' k - \lambda |\mathbf{k} + \mathbf{q}|), \quad (121)$$

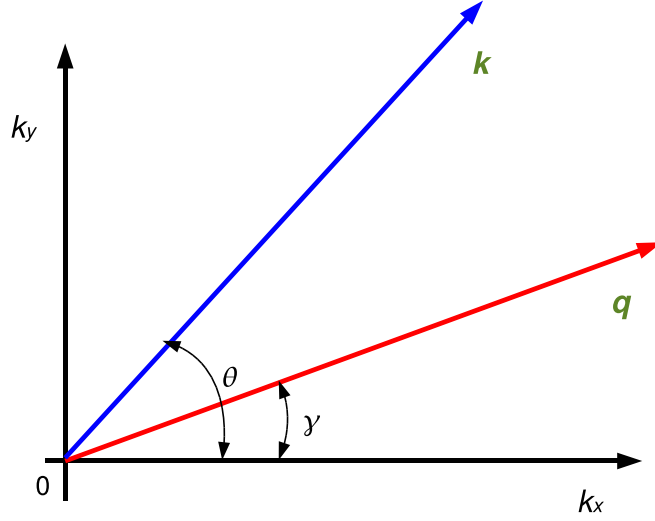


FIGURA 22.- Dirección de los vectores de onda que caracterizan el movimiento de los electrones ($\mathbf{k}$) y del momento de la onda electromagnética ($\mathbf{q}$).

De las ecuaciones (119) y (121), es posible ver que existirán dos tipos de excitaciones: (i) cuando $\lambda\lambda' = 1$, de donde se derivan las transiciones conocidas como intrasubbanda o intra-espín-órbita (intra-EO) y (ii) excitaciones intersubbanda o inter-espín-órbita (inter-EO), que se obtienen bajo la condición $\lambda\lambda' = -1$. Estas últimas, surgen como una consecuencia del desdoblamiento en espín de la sub-banda de conducción. Por lo tanto, si la IEO fuera nula, entonces las transiciones inter-EO desaparecerían. En la figura 23 se muestra el espectro de excitaciones de partícula simple para valores pequeños de q , constituido por transiciones intra-EO (zona en gris claro) y por excitaciones inter-EO (región en gris oscuro).

En el caso de las intra-EO, están constituidas por transiciones dentro de la sub-banda ε_+ ($\lambda = \lambda' = 1$) y por excitaciones dentro de la subbanda ε_- ($\lambda = \lambda' = -1$). La frontera que delimita la parte superior de éstas, está dada por

$$\hbar\omega_{max}^{intra} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2}{2m^*} k_F^+ q + \alpha q^2, \quad (122)$$

obtenida de (119) y que corresponde a transiciones en la subbanda ε_+ , para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$ ($\cos \theta = 1$), con $k = k_F^+$; las demás transiciones intra-EO quedarán contenidas dentro la región en gris oscuro.

Las excitaciones inter-EO representadas por la región en gris claro, corresponderán a

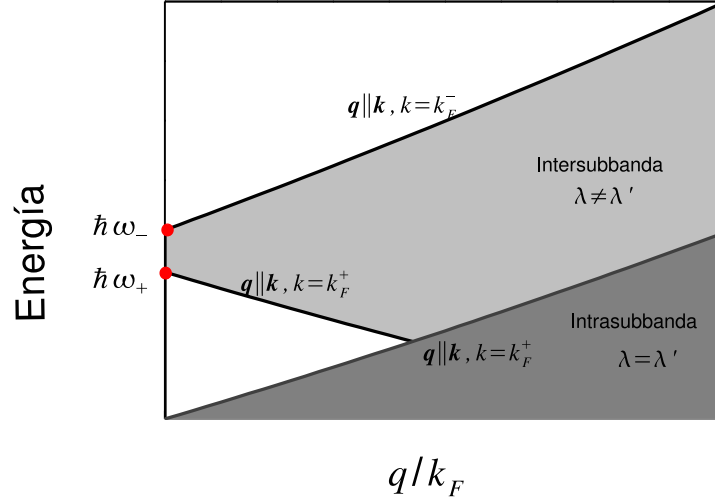


FIGURA 23.- Zonas de transiciones intra e inter-sub-banda para valores pequeños de q . Las transiciones ópticas ($q = 0$) se encuentran delimitadas por las frecuencia $\hbar\omega_{\pm}$.

transiciones $\varepsilon_- \rightarrow \varepsilon_+$ alrededor de k_F^+ y k_F^- , tal como se muestra en la figura 24. Por ejemplo, la frontera inferior que delimita a este continuo estará determinada por las excitaciones de tipo **a** para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$ y $k = k_F^+$. Éstas transiciones se encuentran definidas a través de la expresión (121), en donde se debe considerar $\lambda = -\lambda' = -1$. De manera que las excitaciones de tipo **a**, mostradas en la figura 24, pueden escribirse como

$$\hbar\omega_{min}^{inter} = \varepsilon_F - \varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})|_{k=k_F^+, \mathbf{k} \parallel \mathbf{q}}, \quad (123)$$

de donde se obtiene que

$$\hbar\omega_{min}^{inter} = \hbar\omega_+ - \varepsilon_F \left[2 \frac{q}{k_F} \left(1 - 2 \frac{k_{\alpha}}{k_F} \right) + \left(\frac{q}{k_F} \right)^2 \right]. \quad (124)$$

Mientras tanto, la frontera máxima se encuentra caracterizada por las transiciones **b**, las cuales se encuentran definidas a través de la ecuación (119) para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$, con $k = k_F^-$. De tal forma que estas excitaciones pueden expresarse como

$$\hbar\omega_{max}^{inter} = \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q})|_{k=k_F^-, \mathbf{k} \parallel \mathbf{q}} - \varepsilon_F, \quad (125)$$

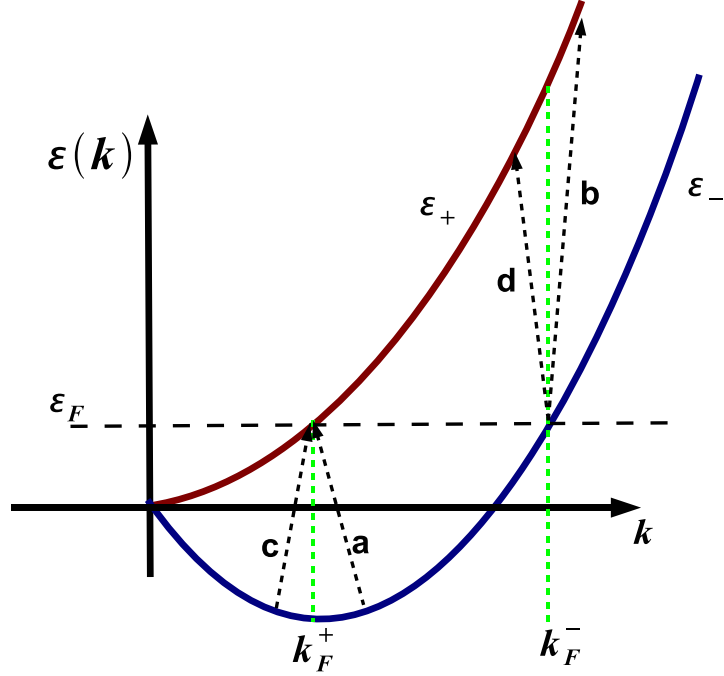


FIGURA 24.- Transiciones intersubbanda presentes para valores pequeños de q . Las excitaciones **a** y **d** satisfacen la condición $\hbar\omega = \varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})$, mientras que las transiciones **b** y **c** cumplen la relación $\hbar\omega = \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_-(\mathbf{k})$

la cual puede escribirse como

$$\hbar\omega_{max}^{inter} = \hbar\omega_- - \varepsilon_F \left[2\frac{q}{k_F} \left(1 + 2\frac{k_\alpha}{k_F}\right) + \left(\frac{q}{k_F}\right)^2 \right], \quad (126)$$

donde $\hbar\omega_+$ y $\hbar\omega_-$ son las energías para las transiciones verticales mostradas en la figura 25 y están definidas como sigue

$$\begin{aligned} \hbar\omega_+ &= \varepsilon_F - \varepsilon_-(k_F^+) \\ &= 2\alpha k_F^+ \\ &= 2\alpha k_F - 2m^* \alpha^2 / \hbar^2 \end{aligned} \quad (127)$$

y

$$\begin{aligned} \hbar\omega_- &= \varepsilon_+(k_F^-) - \varepsilon_F \\ &= 2\alpha k_F^- \\ &= 2\alpha k_F + 2m^* \alpha^2 / \hbar^2, \end{aligned} \quad (128)$$

con $k_F = \sqrt{\frac{2m^* \varepsilon_F}{\hbar^2} + k_\alpha^2}$ y $\varepsilon_F = \sqrt{2\pi n_e - 2k_\alpha^2}$. Las transiciones inter-EO denotadas por **c** y **d** en la figura 24, también se obtienen de las expresiones (119) y (121), respectivamente. Sin embargo, quedan contenidas dentro de la región acotada por las fronteras $\hbar\omega_{min}^{inter}$ y $\hbar\omega_{max}^{inter}$.

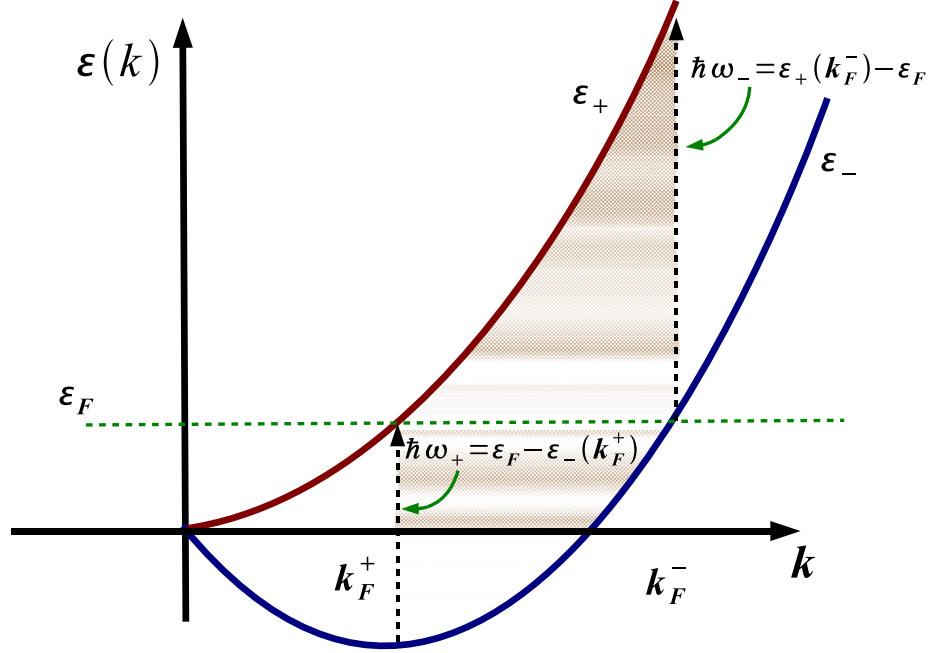


FIGURA 25.- Las frecuencias permitidas a $\mathbf{q} = 0$ estarán contenidas en la *ventana óptica* $\omega_+ \leq \omega \leq \omega_-$.

4.1.2 Caso anisotrópico: Rashba + Dresselhaus

A diferencia del caso de la IEO de Rashba, donde no importaba la dirección del vector de onda $\mathbf{q}$, cuando tenemos Rashba y Dresselhaus simultáneamente aquí sí es necesario especificar dicha dirección. Esto, debido a que la relación de dispersión de la energía presenta una anisotropía como función de la dirección del vector de onda; tal como se muestra en la sección 2.6, particularmente en la figura 13.

Para calcular el continuo de transiciones de partícula simple se procede de la misma forma que con el caso isotrópico de Rashba ($\beta = 0$), sin embargo, para $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ las expresiones para la energía cambian, ya que ahora $\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})$ estará dada por la ecuación (54).

A continuación analizaremos las mismas transiciones vistas en la sección anterior. Primero tenemos el caso

$$\hbar\omega = \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}), \quad \text{para} \quad \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) < \varepsilon_F < \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (129)$$

con

$$\varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2}{2m^*} + \lambda \frac{\hbar}{2} |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})|. \quad (130)$$

Sustituyendo (54) y (130) en ecuación (129) obtiene:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2}{m^*} kq \cos(\theta - \gamma) + \frac{\hbar}{2} (\lambda' |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})| - \lambda |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})|), \quad (131)$$

donde $\frac{\hbar}{2} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})|$ está dada por la expresión (55) y

$$\frac{\hbar}{2} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})| = \sqrt{[\beta(k_x + q_x) - \alpha(k_y + q_y)]^2 + [\alpha(k_x + q_x) - \beta(k_y + q_y)]^2}, \quad (132)$$

que en coordenadas polares puede reescribirse como

$$\frac{\hbar^2}{4} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})|^2 = k^2 \Delta^2(\theta) + q^2 \Delta^2(\gamma) + 2kq [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)]. \quad (133)$$

θ y γ representan los ángulos que determinan la dirección de $\mathbf{k}$ y $\mathbf{q}$, respectivamente, como se muestra en la figura 22. Nótese que en estas expresiones la presencia de la IEO anisotrópica introduce el término $q^2 \Delta^2(\gamma)$, a través del cual las transiciones dependen de la dirección y de la magnitud del vector de onda $\mathbf{q}$. En el caso de IEO isotrópica sólo existe dependencia de la magnitud q (Ec. 119).

El segundo caso es el de las transiciones del tipo

$$\hbar\omega = \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad \text{para} \quad \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) < \varepsilon_F < \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k}), \quad (134)$$

de lo que se obtiene

$$\hbar\omega = -\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2}{m^*} kq \cos(\theta - \gamma) + \frac{\hbar}{2} (\lambda' |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})| - \lambda |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})|). \quad (135)$$

De las ecuaciones (131) y (135), nuevamente, es posible observar que existirán dos casos: (i) cuando $\lambda\lambda' = 1$, de donde se derivan las transiciones conocidas como intra-EO y (ii) excitaciones inter-EO, que se obtienen bajo la condición $\lambda\lambda' = -1$.

Como se hizo notar en la expresión (133), la presencia de la IEO anisotrópica induce una dependencia de la dirección del vector de onda $\mathbf{q}$. Por lo tanto las zonas de transiciones de pares electrón-hueco derivadas a partir de la expresiones (131) y (135) serán diferentes para los distintos valores de γ . Para determinar las fronteras de dichas zonas, se evaluarán las expresiones en los vectores de onda de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$, los cuales, para este caso, son función del ángulo θ . Por dicho motivo, para un vector $\mathbf{q}$ fijo se calculará el ángulo θ en el que las expresiones (131) y (135) alcanzan su máximo y su mínimo.

Los resultados obtenidos de las ecuaciones (131) y (135) serán mostrados en la subsección 4.5, donde se analizarán junto con el espectro de plasmones de el GE2D.

En el caso de transiciones verticales ($\mathbf{q} = 0$), representadas a través del esquema de la figura 25, se pierde la dependencia del ángulo γ , de tal forma que es posible derivar de expresiones analíticas para las fronteras de la ventana óptica. Al igual que en el caso isostrópico de Rashba, dichas fronteras estarán relacionadas con aquellas transiciones alrededor de $k_F^\lambda(\theta)$. De manera que para una dirección de $\mathbf{k}$, caracterizada por el ángulo θ , la mínima energía que se necesita para realizar una transición de la subbanda $\varepsilon_-(\mathbf{k})$ a la $\varepsilon_+(\mathbf{k})$ estará dada por

$$\hbar\omega_+(\theta) = 2k_F^+(\theta)\Delta(\theta) \quad (136)$$

y para la misma dirección de $\mathbf{k}$, la máxima energía necesaria para realizar una transición es:

$$\hbar\omega_-(\theta) = 2k_F^-(\theta)\Delta(\theta), \quad (137)$$

de tal suerte que el máximo de máximos (mínimo de mínimos) se encontrará en $\theta_- = 3\pi/4$ ($\theta_+ = \pi/4$), lo que define las frecuencias especiales

$$\begin{aligned} \hbar\omega_+(\theta_+) &= 2k_F^+(\theta_+)\Delta(\theta_+) \\ &= 2k_F \mid \alpha - \beta \mid - 2m^*(\alpha - \beta)^2/\hbar^2 \end{aligned} \quad (138)$$

y

$$\begin{aligned} \hbar\omega_-(\theta_-) &= 2k_F^-(\theta_-)\Delta(\theta_-) \\ &= 2k_F \mid \alpha + \beta \mid + 2m^*(\alpha + \beta)^2/\hbar^2, \end{aligned} \quad (139)$$

donde el intervalo de energía en que se encuentran contenidas todas las excitaciones verticales es (Maytorena et al., 2006)

$$\Delta\varepsilon(\alpha, \beta, n_e) = \hbar\omega_- - \hbar\omega_+ = \begin{cases} 4\beta k_F + \frac{4m^*}{\hbar^2}(\alpha^2 + \beta^2) & (\alpha > \beta) \\ 4\alpha k_F + \frac{4m^*}{\hbar^2}(\alpha^2 + \beta^2) & (\alpha < \beta) \end{cases}, \quad (140)$$

donde $k_F = \sqrt{2\pi n_e - q_{so}^2}$. En el caso de $\beta = 0$ las expresiones (138) y (139) se reducen a las ecuaciones (127) y (128), respectivamente.

4.2 Cálculo de la Función dieléctrica

La idea básica del cálculo es obtener una expresión que relacione a un potencial externo (V_{ext}) con un potencial total (V_{tot}), donde dicho potencial total estará compuesto por la suma del potencial externo más un potencial inducido (V_{ind}). Tal relación de proporcionalidad será escrita como $V_{ext} = \epsilon V_{tot}$, donde el factor ϵ define la función dieléctrica del sistema (Dressel y Güner, 2003). Para llegar a ello, partiremos de la idea de que existe una densidad de carga

inducida $n_{ind}(\mathbf{r}, t)$ que se encuentra relacionada con la parte perturbativa a primer orden de la matriz densidad ($\rho^{(1)}(t)$). No obstante, debido a que hay una relación de proporcionalidad entre el potencial inducido y la $n_{ind}(\mathbf{r}, t)$, se derivará una expresión para el potencial inducido en función de $\rho^{(1)}(t)$ ($V_{ind} \sim \rho^{(1)}(t)$). Sin embargo, la teoría de perturbaciones muestra que $\rho^{(1)}(t) \sim V_{tot}$. Finalmente, utilizando el hecho de que el potencial total es $V_{tot} = V_{ext} + V_{ind}$, se encontrará la ecuación que relaciona al potencial externo con el potencial total y con ello se hallará la función dieléctrica como en el capítulo anterior.

Cuando un sistema de partículas interactuantes es perturbado a través de un potencial externo dependiente del tiempo, se genera una densidad de partículas inducida, n_{ind} . Desde el punto de vista cuántico, dicha cantidad puede obtenerse al calcular el valor de espectación del operador densidad definido a través de la función delta de Dirac $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$, donde $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}'$ son vectores de posición en tres dimensiones. Entonces, obteniendo el valor promedio por medio de la matriz densidad, se tiene que la densidad inducida será:

$$n_{ind}(\mathbf{R}', t) = Tr \{ \rho^{(1)}(t) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \}, \quad (141)$$

donde $\rho^{(1)}(t) = \rho - \rho^0$ es la parte de la matriz densidad que contiene información de la perturbación en el sistema; ρ representa a la matriz densidad total y ρ^0 es la matriz densidad del sistema en equilibrio (II'inskii y Keldysh, 1994).

Desarrollando la traza en la ecuación (141), se obtiene que

$$n_{ind}(\mathbf{R}', t) = \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)} \right| \mathbf{k}', n', \lambda'_{\mathbf{k}'} \right\rangle \left\langle \mathbf{k}', n', \lambda'_{\mathbf{k}'} \left| \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \right| \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \right\rangle, \quad (142)$$

donde el “braket” $\langle \dots \rangle$ involucra integración espacial. Los eigenestados $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ son los correspondientes al GE2D con IEO, los cuales de manera general pueden expresarse como:

$$\Psi_{n, \mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{R}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \phi_n(z) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}), \quad (143)$$

donde $\psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, y corresponde al movimiento de los electrones en el plano x, y ; $\mathbf{r}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores bidimensionales de posición y de momento, respectivamente. $\phi_n(z)$ surge del confinamiento de los electrones a lo largo de la dirección z y está directamente relacionada con la cuantización de las bandas de energía en el sistema, y $\chi_{\lambda}(\mathbf{k})$ define el estado de espín de las partículas.

Sustituyendo la ecuación (143) en (142), y considerando que $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(z - z')$, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) &= \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \\
&\times \int d\mathbf{r} \int dz \phi_{n'}^*(z) \phi_n(z) \delta(z - z') \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{144}$$

donde $\rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) = \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) = \langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} | \rho^{(1)}(t) | \mathbf{k}', n', \lambda'_{\mathbf{k}'} \rangle$. De la anterior ecuación, al realizar la integral en z se llega a

$$\begin{aligned}
n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) &= \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) \left[\int d\mathbf{r} \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \\
&\times [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z')].
\end{aligned} \tag{145}$$

Si a continuación reescribimos la función delta de la siguiente manera

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^2q, \tag{146}$$

e introducimos explícitamente la forma de la función $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, resulta que la densidad de partículas inducida puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned}
n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) &= \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) \left[\int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \right] \\
&\times [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z')].
\end{aligned} \tag{147}$$

Sin embargo,

$$\int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}'), \tag{148}$$

de donde se deduce que $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. Por tanto, al realizar la suma en $\mathbf{k}'$, la ecuación (147) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \\
&\times [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z')].
\end{aligned} \tag{149}$$

De esta última expresión se obtiene que

$$n_{ind}(\mathbf{q}, z', t) = \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z'). \tag{150}$$

El hecho de que el potencial externo aplicado sobre el sistema genere una redistribución de la carga, da lugar a un potencial inducido cuya energía se puede expresar como

$$V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) = \int d\mathbf{r}' \int dz' V_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z, z') n_{ind}(\mathbf{r}', z', t), \tag{151}$$

donde $V_{ee} = \frac{e^2}{\epsilon_0} [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{-1/2}$ es la energía potencial de interacción entre dos electrones y ϵ_0 es la constante dielectrica promedio del medio en el que se encuentra inmerso el GE2D. Si introducimos explícitamente V_{ee} en la ecuación (151), tenemos que

$$V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) = \int d\mathbf{r}' \int dz' \frac{e^2}{\epsilon_0} [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{-1/2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} n_{ind}(\mathbf{q}, z', t). \quad (152)$$

Además, si sustituímos la ecuación (150) en la ecuación (152), tenemos la siguiente expresión para el potencial inducido

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) &= \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \\ &\times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \frac{e^2}{\epsilon_0} \int dz' \frac{\phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}}{[|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (153)$$

Por otra parte, el término de la interacción coulombiana puede ser escrito como una transformada de Fourier 2D, es decir,

$$\frac{1}{4\pi [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{1/2}} = \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-q'|z-z'|} e^{i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{2q'}. \quad (154)$$

Sustituyendo la ecuación (154) en (153) y realizando un poco de álgebra, se obtiene

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \int dz' \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \\ &\times \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} V_{q'} \left[\int d\mathbf{r}' e^{-i(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}'} \right] e^{i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} e^{-q'|z-z'|}, \end{aligned} \quad (155)$$

donde $V_{q'} = (2\pi e^2)/q'\epsilon_0$. Sin embargo, sabemos que $\int d\mathbf{r}' e^{-i(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}'} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}')$, por lo que $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$. Al sustituir en la ecuación (155) y realizar la suma sobre $\mathbf{q}'$, llegamos a

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \\ &\times \left[V_q \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \right] \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (156)$$

de donde

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{q}, z, t) &= V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \\ &\times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z'). \end{aligned} \quad (157)$$

Cálculo de los elementos de matriz para el potencial inducido $V_{ind}(\mathbf{q}, z, t)$

A continuación, tomaremos los elementos de matriz del potencial inducido utilizando los eigen-estados del estado base $|\mathbf{k}, m, \lambda''_{\mathbf{k}}\rangle$ y $|\mathbf{k} + \mathbf{q}, m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle$, los cuales se encuentran definidos por la ecuación (143)

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{k}, m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\ \left\langle \mathbf{k}, m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k})] \right. \right. \\ \left. \times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (158)$$

Al utilizar la definición de los estados electrónicos, la ecuación (158) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\ \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k})] \right. \right. \\ \left. \times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (159)$$

donde $|m, \lambda''_{\mathbf{k}}\rangle$ es el “ket” del estado $\Phi(z, \lambda'') = \phi_m(z) \chi_{\lambda''}(\mathbf{k})$. De aquí, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\ \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k})] \right. \right. \\ \left. \times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (160)$$

Sin embargo, la ecuación (160) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{q}, t) = \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \\ \times F_{nn'mm'} [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \chi_{\lambda''}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'''}(\mathbf{k} + \mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (161)$$

Aquí hemos definido el término $F_{nn'mm'}$ como

$$F_{nn'mm'} = \int dz \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \phi_m^*(z) \phi_{m'}(z) \quad (162)$$

La expresión (161) depende de funciones conocidas, a excepción del término $\rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} +$

$\mathbf{q}; t)$, el cual calcularemos a continuación.

Cálculo de los elementos de la matriz densidad

Para encontrar dicho factor, partiremos de la ecuación de Liouville

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho(t)] \quad (163)$$

con $\rho(t)$ como la matriz de densidad. H es el hamiltoniano de partícula independiente definido como

$$H = H_0 + V(\mathbf{r}, z, t), \quad (164)$$

donde H_0 es el hamiltoniano del sistema sin perturbar, y estará constituido por la energía correspondiente al movimiento del electrón libre en el gas, más la contribución al acoplamiento espín-órbita, e.i. $H_0 = \hbar^2 k^2 / 2m + H_{so}$. Por otra parte, $V(\mathbf{r}, z, t)$ es el potencial autoconsistente dependiente del tiempo, ante el cual los electrones responden. Dicho potencial estará constituido por el potencial externo más el potencial inducido

$$V(\mathbf{r}, z, t) = V_{in}(\mathbf{r}, z, t) + V_{ex}(\mathbf{r}, z, t). \quad (165)$$

Si tomamos los elementos de matriz de la ecuación (163) entre los estados $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ y $|\mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle$, obtenemos

$$i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| [H, \rho] \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \quad (166)$$

Por otro lado, el operador de la matriz densidad, de acuerdo con la teoría de perturbaciones, puede ser escrito como

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t), \quad (167)$$

donde $\rho^{(0)}$ es el operador correspondiente a la matriz densidad de un sistema sin perturbar, mientras que $\rho^{(1)}(t)$ es el operador de la matriz densidad correspondiente al sistema perturbado y que depende linealmente del campo externo. De esta manera, la ecuación (166) se transforma en

$$i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t))}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| [(H_0 + V(\mathbf{r}, z, t)), (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t))] \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \quad (168)$$

Desarrollando el conmutador de la expresión (168), y tomando únicamente los términos

que dependen linealmente del campo, llegamos a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial \rho^{(1)}(t)}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\
\left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| H_0 \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
- \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) H_0 \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
+ \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \rho^{(0)} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
- \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(0)} V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{169}$$

Además, sabemos que $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ satisfacen la ecuación de eigenvalores

$$H_0 |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle = E_n^\lambda(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{170}$$

donde $E_n^\lambda(\mathbf{k})$ representa la energía característica del estado $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$. De la misma manera,

$$\rho^{(0)} |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle = f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{171}$$

donde $f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k}))$ es la función de distribución de Fermi correspondiente a la energía $E_n^\lambda(\mathbf{k})$. Por tanto, si aplicamos las relaciones (170) y (171) en la expresión (169), llegamos a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial \rho^{(1)}(t)}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\
\left(E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right) \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
+ \left[f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) \right] \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{172}$$

Si suponemos que la dependencia temporal de todas las cantidades es de la forma $e^{-i(\omega+i\eta)t}$, entonces la relación (165) puede ser expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\hbar(\omega + i\eta) \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\
\left(E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right) \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
+ \left[f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) \right] \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle,
\end{aligned} \tag{173}$$

donde η es un parámetro fenomenológico que se introduce para tomar en cuenta efectos de disipación.

De la ecuación (173) finalmente se obtiene que

$$\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \frac{[f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) - f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}))]}{E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}} \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle, \quad (174)$$

donde $\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle$ y $\tilde{\omega} = \omega + i\eta$.

Por otra parte si el potencial autoconsistente se escribe como una transformada de Fourier

$$V(\mathbf{r}, z, t) = \sum_{\mathbf{q}'} e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{q}', z, t), \quad (175)$$

entonces, la ecuación (174), al expresar los elementos de matriz del potencial autoconsistente en su forma integral, puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) &= \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) \sum_{\mathbf{q}'} \int dz \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} \psi_{\mathbf{k}}^* \\ &\times \phi_n^*(z) \chi_{\lambda}^*(\mathbf{k}) V(\mathbf{q}', z) \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \phi_{n'}(z) \chi_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (176)$$

con

$$\Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) = \frac{f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) - f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}))}{E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}}. \quad (177)$$

Si consideramos el hecho de que $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (\frac{1}{2\pi})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ y $\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = (\frac{1}{2\pi})e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}}$, entonces la fórmula (176) puede escribirse como sigue

$$\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) \sum_{\mathbf{q}'} \left\langle n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{q}', z, t) \right| n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}}, \quad (178)$$

donde $\left\langle n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{q}', z) \right| n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \chi_{\lambda}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \langle n | V(\mathbf{q}', z) | n' \rangle$. Sin embargo, la anterior expresión es posible reducirla, al tomar en cuenta que $\int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$. Por tanto, al considerar la anterior igualdad y al realizar la suma sobre $\mathbf{q}'$, finalmente se obtiene que

$$\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \left\langle n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{q}, z, t) \right| n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \quad (179)$$

Esta última expresión nos permitirá obtener una relación entre el potencial inducido y el potencial autoconsistente.

Deducción de la función dieléctrica

Para obtener la función dieléctrica del sistema es necesario encontrar la relación que existe entre el potencial inducido y el potencial autoconsistente. Para ello, se sustituye la expresión (179) en (161), de donde se encuentra la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} | V_{in}(\mathbf{q}, z, t) | m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle &= V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{n, n'}^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) F_{nn' mm'} \\ &\times [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \chi_{\lambda''}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'''}(\mathbf{k} + \mathbf{q})] \left\langle n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{q}, z) \right| n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle, \end{aligned} \quad (180)$$

en la cual, por simplicidad, se realizará el siguiente cambio de notación $\nu = m\lambda''$, $\nu' = m'\lambda'''$, $\mu = n\lambda$ y $\mu' = n'\lambda'$, de manera que la ecuación (180) puede ser reescrita como:

$$\langle \nu | V_{in}(\mathbf{q}, z, t) | \nu' \rangle = V_q \sum_{\mu, \mu'} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu, \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) N_{\mu\mu'\nu\nu'} \left\langle \mu \left| V(\mathbf{q}, z) \right| \mu' \right\rangle, \quad (181)$$

con $\Lambda_{\mu, \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) = \Lambda_{n, n'}^{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega)$ y

$$N_{\mu\mu'\nu\nu'} = F_{nn' mm'} M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}, \quad (182)$$

donde

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \chi_{\lambda''}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'''}(\mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (183)$$

Este último término contiene únicamente información relacionada con los estados de espín en las distintas subbandas. De manera que, si la IEO desaparece, entonces $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = 1$ y se recuperaría la expresión para un GE2D sin IEO.

Por otra parte, como el potencial total es la suma del potencial inducido más el potencial externo, entonces $\langle \nu | V_{in} | \nu' \rangle = \langle \nu | V - V_{ex} | \nu' \rangle$. De esta manera, la ecuación (181) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\langle \nu | V(\mathbf{q}, z, t) - V_{ex}(\mathbf{q}, z, t) | \nu' \rangle = V_q \sum_{\mu, \mu'} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu, \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{\mu\mu'\nu\nu'} \left\langle \mu \left| V(\mathbf{q}, z, t) \right| \mu' \right\rangle. \quad (184)$$

Si ponemos los elementos de matriz del potencial externo como función del potencial auto-consistente, se llega a la siguiente expresión

$$\langle \nu | V_{ex}(\mathbf{q}, z, t) | \nu' \rangle = \sum_{\mu, \mu'} \left[\delta_{\nu, \mu} \delta_{\nu', \mu'} - V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu, \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{\mu\mu'\nu\nu'} \right] \left\langle \mu \left| V(\mathbf{q}, z, t) \right| \mu' \right\rangle. \quad (185)$$

Sin embargo, el potencial externo se relaciona con el potencial total a través de la función dieléctrica, i.e. $V_{ex} = \epsilon V$, por tanto, de la ecuación (185), la función dieléctrica puede ser definida como

$$\epsilon_{\mu\mu'\nu\nu'} = \delta_{\nu, \mu} \delta_{\nu', \mu'} - V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu, \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{\mu\mu'\nu\nu'}, \quad (186)$$

en la cual se ha suprimido la sumatoria sobre μ y μ' , de manera que la expresión (186) posee

una representación matricial que se deriva de la combinación de los subíndices μ, μ', ν y ν' . Si el estudio se realiza sobre sistemas donde el pozo cuántico que confina al gas de electrones es muy angosto, de tal manera que sólo existe una subbanda de conducción, entonces se tiene que $n = n' = m = m' = 0$. Además, si la coordenada en la dirección z es casi cero, se llega a que $F_{nn'mm'} = 1$, debido a la ortonormalidad de las funciones envolventes $\phi(z)$. Por tanto, el término $N_{\mu\mu'\nu\nu'}$ se colapsa a $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$. Por dicho motivo, la ecuación (186) se puede reescribir de manera simplificada como

$$\epsilon_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \delta_{\lambda,\lambda''}\delta_{\lambda',\lambda'''} - V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} \quad (187)$$

En el caso en que la interacción espín-órbita desaparece, el término $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$ se vuelve la unidad, de tal manera que se recupera la función dieléctrica de Lindhard para el gas degenerado en espín (Stern, 1967).

La ecuación (187) puede representarse en forma matricial al considerar todas las posibles combinaciones de los subíndices $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''' = \pm 1$ de la siguiente manera

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{q}, \omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_{++++} & \epsilon_{+++-} & \epsilon_{++-+} & \epsilon_{++--} \\ \epsilon_{+--+} & \epsilon_{+-+-} & \epsilon_{+-- +} & \epsilon_{+---} \\ \epsilon_{-+++} & \epsilon_{-++-} & \epsilon_{-+-+} & \epsilon_{-+--} \\ \epsilon_{----+} & \epsilon_{---+} & \epsilon_{--++} & \epsilon_{----} \end{pmatrix}, \quad (188)$$

en donde los renglones ($\langle \dots |$) y las columnas ($| \dots \rangle$) siguen el orden $\langle ++|, \langle +-|, \langle -+|, \langle --|$ y $| ++\rangle, | +- \rangle, | - + \rangle, | -- \rangle$, respectivamente.

4.3 Elementos de matriz de la función dieléctrica.

Para encontrar los elementos que componen la matriz (188), es necesario calcular el término $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$ dado por la ecuación (183). Este se encuentra definido a través de los estados de espín de los electrones, por lo que es necesario conocer cuáles son los espinores del sistema.

A continuación se considerará un GE2D cuyo Hamiltoniano se encuentra determinado por la expresión (18) y de donde se tomará $\Omega_z(\mathbf{k}) = 0$. Como se vió con anterioridad, el espinor $\chi_\lambda(\mathbf{k})$ estará definido por la ecuación (24), mientras que su transpuesto conjugado será

$$\chi_\lambda^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda e^{-i\phi(\mathbf{k})} \end{pmatrix}. \quad (189)$$

De manera similar, $\chi_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ puede expresarse como

$$\chi_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\phi(\mathbf{k} + \mathbf{q})} \end{pmatrix}, \quad (190)$$

donde

$$\tan \phi(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{\Omega_y(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\Omega_x(\mathbf{k} + \mathbf{q})}. \quad (191)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (24), (190) y aplicando (189) para resolver la expresión (183), se obtiene

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \frac{1}{4} \left(1 + \lambda\lambda' e^{-i\phi(\mathbf{k}+\mathbf{q})} e^{i\phi(\mathbf{k})} \right) \left(1 + \lambda''\lambda''' e^{-i\phi(\mathbf{k})} e^{i\phi(\mathbf{k}+\mathbf{q})} \right). \quad (192)$$

Así, al desarrollar esta expresión se llega a que

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \frac{1}{4} \left[1 + \lambda''\lambda''' e^{-i\phi(\mathbf{k})} e^{i\phi(\mathbf{k}+\mathbf{q})} + \lambda\lambda' e^{-i\phi(\mathbf{k}+\mathbf{q})} e^{i\phi(\mathbf{k})} + \lambda\lambda'\lambda''\lambda''' \right]. \quad (193)$$

con

$$\begin{aligned} e^{\pm i\phi(\mathbf{k})} &= \cos(\phi(\mathbf{k})) \pm i \operatorname{sen}(\phi(\mathbf{k})) \\ e^{\pm i\phi(\mathbf{k}+\mathbf{q})} &= \cos(\phi(\mathbf{k} + \mathbf{q})) \pm i \operatorname{sen}(\phi(\mathbf{k} + \mathbf{q})), \end{aligned} \quad (194)$$

de donde al utilizar la definición del ángulo $\phi(\mathbf{k})$, podemos escribir

$$\begin{aligned} e^{\pm i\phi(\mathbf{k})} &= \frac{\Omega_x(\mathbf{k}) \pm i\Omega_y(\mathbf{k})}{|\Omega(\mathbf{k})|} \\ e^{\pm i\phi(\mathbf{k}+\mathbf{q})} &= \frac{\Omega_x(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \pm i\Omega_y(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{|\Omega(\mathbf{k} + \mathbf{q})|}, \end{aligned} \quad (195)$$

$|\Omega(\mathbf{k})|^2 = \Omega_x^2(\mathbf{k}) + \Omega_y^2(\mathbf{k})$ y $|\Omega(\mathbf{k} + \mathbf{q})|^2 = \Omega_x^2(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \Omega_y^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})$. Si ahora se sustituye la ecuación (195) en (193) se obtiene

$$\begin{aligned} M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} &= \frac{1}{4} [1 + \lambda\lambda'\lambda''\lambda'''] + \frac{1}{4} [\lambda''\lambda''' + \lambda\lambda'] \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \\ &\quad + i \frac{1}{4} [\lambda\lambda' - \lambda''\lambda'''] \mathcal{B}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (196)$$

donde se ha definido a

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{\Omega_x(\mathbf{k} + \mathbf{q})\Omega_x(\mathbf{k}) + \Omega_y(\mathbf{k} + \mathbf{q})\Omega_y(\mathbf{k})}{|\Omega(\mathbf{k})| |\Omega(\mathbf{k} + \mathbf{q})|} \quad (197)$$

y

$$\mathcal{B}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{\Omega_x(\mathbf{k} + \mathbf{q})\Omega_y(\mathbf{k}) - \Omega_y(\mathbf{k} + \mathbf{q})\Omega_x(\mathbf{k})}{|\Omega(\mathbf{k})| |\Omega(\mathbf{k} + \mathbf{q})|}. \quad (198)$$

Nótese de (198) que si $\Omega_x(\mathbf{k} + \mathbf{q})\Omega_y(\mathbf{k}) = \Omega_y(\mathbf{k} + \mathbf{q})\Omega_x(\mathbf{k})$, entonces $\mathcal{B} = 0$.

Ahora, las soluciones para $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$ como función de los sub-índices de banda se clasifican en cuatro casos generales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \lambda\lambda' = \lambda''\lambda''' = 1 \\ (2) & \lambda\lambda' = \lambda''\lambda''' = -1 \\ (3) & \lambda\lambda' = 1, \lambda''\lambda''' = -1 \\ (4) & \lambda\lambda' = -1, \lambda''\lambda''' = 1. \end{array} \right. \quad (199)$$

Si aplicamos estas condiciones sobre la ecuación (196) se obtiene que

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{q})) & \lambda = \lambda' \text{ y } \lambda'' = \lambda''' \\ \frac{1}{2}(1 - \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{q})) & \lambda \neq \lambda' \text{ y } \lambda'' \neq \lambda''' \\ \frac{i}{2}\mathcal{B}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) & \lambda = \lambda' \text{ y } \lambda'' \neq \lambda''' \\ -\frac{i}{2}\mathcal{B}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) & \lambda \neq \lambda' \text{ y } \lambda'' = \lambda''' \end{cases} \quad (200)$$

Para obtener los elementos de la matriz dieléctrica, será necesario analizar los casos presentados en (200), pero utilizando la ecuación (187). De aquí se obtiene que los elementos de la matriz dieléctrica para los distintos casos serán:

$$\epsilon_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \begin{cases} 1 - \epsilon_{\lambda\lambda}(\mathcal{A}) & \lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' \\ -\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathcal{A}) & \lambda = \lambda', \lambda'' = \lambda''' \text{ con } \lambda \neq \lambda'' \text{ y } \lambda' \neq \lambda''' \\ 1 - \epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathcal{A}) & \lambda \neq \lambda', \lambda'' \neq \lambda''' \text{ con } \lambda = \lambda'' \text{ y } \lambda' = \lambda''' \\ -\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathcal{A}) & \lambda \neq \lambda', \lambda'' \neq \lambda''' \text{ con } \lambda \neq \lambda'' \text{ y } \lambda' \neq \lambda''' \\ -i\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathcal{B}) & \lambda = \lambda' \text{ y } \lambda'' \neq \lambda''' \\ i\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathcal{B}) & \lambda \neq \lambda' \text{ y } \lambda'' = \lambda''' \end{cases}, \quad (201)$$

en donde

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathcal{A}) = \frac{V_q}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) [1 + \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})]. \quad (202)$$

Note que sólo depende de los subíndice λ , por lo tanto este elemento se encuentra compuesto únicamente por transiciones intra-subbanda. Por otra parte, el término

$$\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathcal{A}) = \frac{V_q}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) [1 - \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})]. \quad (203)$$

se encuentra constituido únicamente por procesos que involucran transiciones inter-subbanda.

Finalmente, los términos restantes

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathcal{B}) = \frac{V_q}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \mathcal{B}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (204)$$

y

$$\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathcal{B}) = \frac{V_q}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \mathcal{B}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (205)$$

ambos vienen de considerar procesos en los que se mezclan transiciones intra-subbanda con transiciones inter-subbanda. A continuación, utilizando los elementos mostrados (201) se obtiene que la matriz dieléctrica será:

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{q}, \omega) = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_{++}(\mathcal{A}) & -i\epsilon_{++}(\mathcal{B}) & -i\epsilon_{++}(\mathcal{B}) & -\epsilon_{++}(\mathcal{A}) \\ i\epsilon_{+-}(\mathcal{B}) & 1 - \epsilon_{+-}(\mathcal{A}) & -\epsilon_{+-}(\mathcal{A}) & i\epsilon_{+-}(\mathcal{B}) \\ i\epsilon_{-+}(\mathcal{B}) & -\epsilon_{-+}(\mathcal{A}) & 1 - \epsilon_{-+}(\mathcal{A}) & i\epsilon_{-+}(\mathcal{B}) \\ -\epsilon_{--}(\mathcal{A}) & -i\epsilon_{--}(\mathcal{B}) & -i\epsilon_{--}(\mathcal{B}) & 1 - \epsilon_{--}(\mathcal{A}) \end{pmatrix}. \quad (206)$$

La relación de dispersión de los plasmones se obtendrá al pedir que el determinante de la matriz dieléctrica sea igual a cero.

Dado que hasta el momento no se han especificado de que tipo de sistema se trata, la expresión (206) pueden aplicarse sin pérdida de generalidad, siempre y cuando el Hamiltoniano del estado base pueda escribirse de la forma genérica (18) (pero $\Omega_z = 0$).

4.4 Caso particular de IEO de Rashba y Dresselhaus lineal en el momento $\mathbf{k}$

A continuación considere un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus. El Hamiltoniano para este caso se encuentra dado por

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 + \alpha (k_x \sigma_y - k_y \sigma_x) + \beta (k_x \sigma_x - k_y \sigma_y), \quad (\beta_3 = 0). \quad (207)$$

Si lo expresamos tal como se muestra en la ecuación (18), entonces las componentes del campo espín-órbita resultan ser:

$$\frac{\hbar}{2} \Omega_x(\mathbf{k}) = \beta k_x - \alpha k_y, \quad \frac{\hbar}{2} \Omega_y(\mathbf{k}) = \alpha k_x - \beta k_y. \quad (208)$$

de tal manera que la magnitud del campo efectivo será

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \right|^2 &= \Omega_x^2(\mathbf{k}) + \Omega_y^2(\mathbf{k}) \\ &= (\beta k_x - \alpha k_y)^2 + (\alpha k_x - \beta k_y)^2, \end{aligned} \quad (209)$$

la cual en coordenadas polares está definida por la ecuación (56).

Si se sustituyen las componentes definidas en la expresión (208) en las fórmulas (197) y (198), se obtiene que las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ pueden expresarse en coordenadas polares como:

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{k^2 \Delta^2(\theta) + kq [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)]}{\left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(k, \theta; q, \gamma) \right| \left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(k, \theta) \right|}. \quad (210)$$

y

$$\mathcal{B}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) qk \sin(\theta - \gamma)}{\left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(k, \theta; q, \gamma) \right| \left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(k, \theta) \right|}, \quad (211)$$

donde $\left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(k, \theta; q, \gamma) \right|$ es la representación del término $\left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right|$ en coordenadas polares. Este se encuentra definido como:

$$\left| \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Omega}(k, \theta; q, \gamma) \right|^2 = k^2 \Delta^2(\theta) + q^2 \Delta^2(\gamma) + 2kq [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)], \quad (212)$$

donde $\Delta(\gamma) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin(2\gamma)}$.

Las ecuaciones (210) y (211) son las expresiones reportadas para el caso del GE2D con

IEO R+D $_{\beta}$ (Cruz et al., 2015).

Función dieléctrica

La función dieléctrica tendrá la forma de la ecuación (206), donde, para este caso, los elementos de matriz se encuentran determinados por las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ definidas mediante las expresiones (210) y (211). Ahora considerando que $\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathcal{B})$ y $\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathcal{B})$ son cero, entonces la matriz dieléctrica puede escribirse como

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{q}, \omega) = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_{++} & 0 & 0 & -\epsilon_{++} \\ 0 & 1 - \epsilon_{+-} & -\epsilon_{+-} & 0 \\ 0 & -\epsilon_{-+} & 1 - \epsilon_{-+} & 0 \\ -\epsilon_{--} & 0 & 0 & 1 - \epsilon_{--} \end{pmatrix}. \quad (213)$$

La relación de dispersión de los plasmones estará dada por:

$$\det[\tilde{\epsilon}(\mathbf{q}, \omega)] = \overbrace{[1 - \epsilon_{++} - \epsilon_{--}]}^{\text{intra-EO}} \overbrace{[1 - \epsilon_{+-} - \epsilon_{-+}]}^{\text{inter-EO}} = 0, \quad (214)$$

donde $\epsilon_{\pm\pm}(\mathcal{A})$ y $\epsilon_{\pm\mp}(\mathcal{A})$ se encuentran definidas en las ecuaciones (202) y (203), respectivamente.

Si analizamos la expresión (214), se puede observar que, la condición se satisface cuando cualquiera de los dos factores es cero. Cabe mencionar que debido a la forma de la matriz, el primer (segundo) factor contiene términos que involucran únicamente transiciones intra-subbanda (inter-subbanda) y de él se obtendrán los plasmones correspondientes intrasubbanda (inter-subbanda).

En el régimen de longitud de onda larga se pueden obtener expresiones para los plasmones a partir de los factores intra-EO e inter-EO mostrados en la ecuación (214). De tal manera que, para el caso del plasmón intra-EO, se tiene que

$$\omega = \omega_p^{2D}(q) \left[1 - \frac{m^{*2}(\alpha^2 - \beta^2)/\hbar^4}{2\pi n_e} \text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2) \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \text{sen} 2\gamma}{2\alpha\beta} \right) \right]^{1/2}, \quad (215)$$

donde $\text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2)$ es la función signo, la cual vale 1 si $\alpha^2 > \beta^2$ y -1 si $\alpha^2 < \beta^2$. Por otra parte, $\omega_p^{2D}(q) = \sqrt{2\pi n_o e^2 q / \epsilon_s m^*}$ corresponde a la frecuencia del plasmón de un gas degenerado en espín (ec. (116)).

Para el plasmón inter-EO se obtiene que la relación de dispersión puede ser expresada como:

$$\frac{(qe^2/\epsilon_s)(\alpha^2 - \beta^2)^2}{8\hbar\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\text{sen}^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{(\omega + \omega_-(\theta))(\omega - \omega_+(\theta))}{(\omega - \omega_-(\theta))(\omega + \omega_+(\theta))} \right) = 1. \quad (216)$$

La derivación de las ecuaciones (215) y (216) se presenta en los apéndices A y B, respectivamente. Mientras tanto, los resultados derivados de dichas expresiones se analizarán en la siguiente sección.

4.5 Resultados

En esta sección se presentan el espectro de excitaciones electrónicas de un GE2D con IEO, el cual resulta del análisis de las expresiones matemáticas obtenidas para el continuo de transiciones de pares electrón-hueco y los modos colectivos. Los cálculos se realizarán utilizando parámetros que concuerden con lo reportado experimentalmente.

4.5.1 Excitaciones para el caso de Rashba

Considerese el caso de un GE2D formado en una heteroestructura semiconductor del tipo InAs/In_{1-x}Ga_xAs crecida a lo largo de la dirección [001], en donde existe una densidad de electrones de $5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, con una masa efectiva de $m^* = 0.055 m_0$.

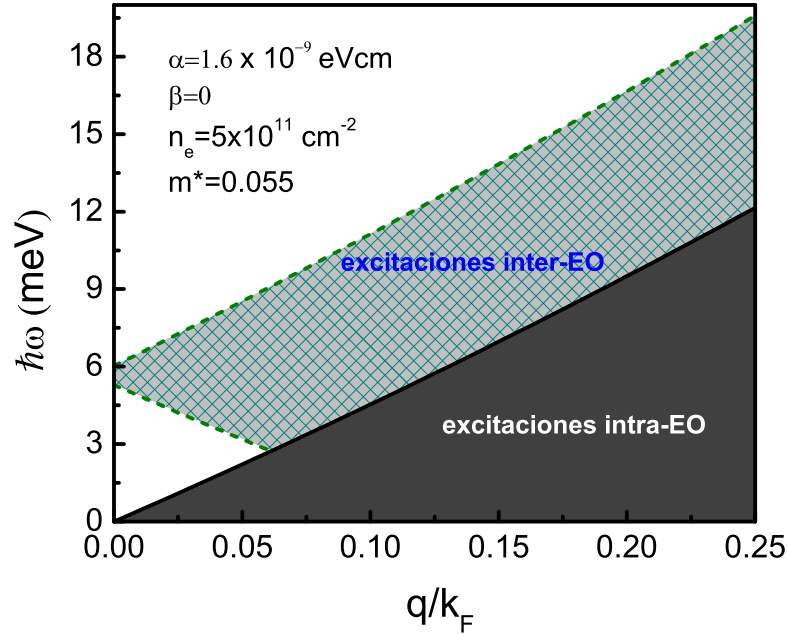


FIGURA 26.- Regiones de amortiguamiento de Landau para el GE2D en presencia de IEO de Rashba.

El desdoblamiento en espín de la banda de conducción debido a la presencia de la IEO, hace posible tener transiciones de partícula independiente intra-EO e inter-EO. Esto puede apre-

ciarse en la figura 26, en donde se presentan las regiones de amortiguamiento de un sistema bidimensional que se encuentra bajo la acción de un campo efectivo generado únicamente por la presencia del acoplamiento Rashba, en donde $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm. Estas regiones se encuentran determinadas por las expresiones (122), (124) y (126).

Las excitaciones se caracterizan por un intercambio de momento $\mathbf{q}$ y energía $\hbar\omega$, por lo que en la gráfica 26 se muestra las regiones de transiciones de pares electrón-hueco a través de una relación $\mathbf{q}$ Vs $\hbar\omega$, donde $\mathbf{q} = q(\cos\gamma, \sin\gamma)$. Nótese que el ángulo γ caracteriza la dirección de $\mathbf{q}$. Sin embargo, dada la isotropía que exhibe el desdoblamiento en espín de las subbandas de energía para este caso (ver figura 11), las regiones de amortiguamiento inter-EO e intra-EO dependen únicamente de la magnitud de $\mathbf{q}$ y no de su dirección.

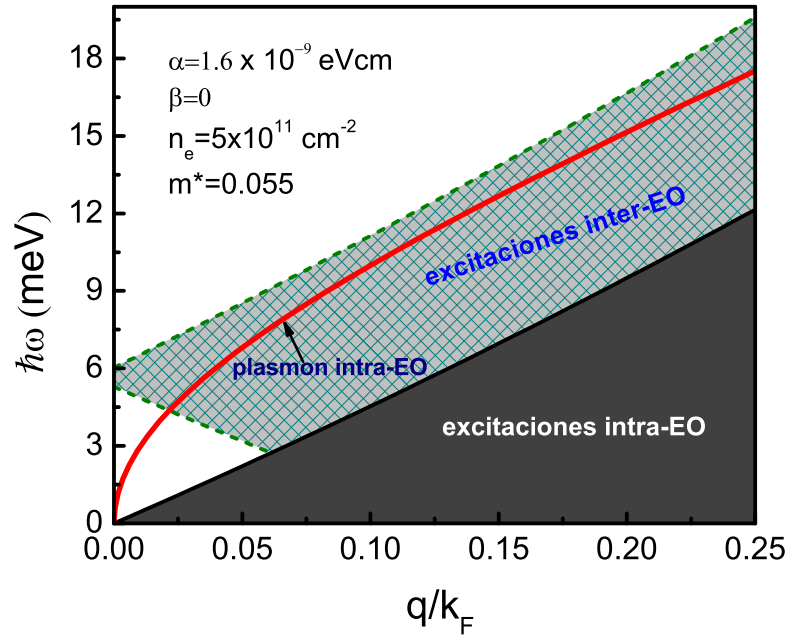


FIGURA 27.- Regiones de amortiguamiento de Landau y plasmón intra-EO (curva en rojo) para el GE2D en presencia de IEO de Rashba.

La figura 27 muestra las zonas de amortiguamiento de Landau y el plasmón intra-EO, el cual se encuentra determinado por la expresión (214). En dicha gráfica se puede apreciar que, para el rango de k mostrado, el plasmón intra-EO se introduce en la zona de amortiguamiento inter-EO. Sin embargo, el plasmón no se disipará debido a que se encuentra constituido únicamente por transiciones coherentes intra-EO. Por tanto, su naturaleza es distinta a la de la región inter-EO. El efecto del acoplamiento de Rashba sobre el plasmón intra-EO se

puede apreciar al realizar la aproximación en límite de longitud de onda larga (q pequeña) dada por la ecuación (215). De donde se obtiene que para este caso,

$$\omega = \omega_p^{2D}(q) \left(1 - \frac{m^* \alpha^2 / \hbar^4}{2\pi n_e} \right)^{1/2}, \quad (217)$$

donde recordemos que $\omega_p^{2D}(q)$ es la frecuencia de plasma de un GE2D en ausencia de IEO. La expresión (217) es la misma que fue reportada por W. Xu y por M. Kushwaha y Sergio Ulloa (Xu, 2003; Kushwaha y Ulloa, 2006). Nótese que la frecuencia del plasmón intra-EO posee un término de corrección itroducido por la IEO. Este término es $\left(\frac{m^* \alpha^2 / \hbar^4}{2\pi n_e} \right)$, el cual es del orden de 10^{-3} . Por dicho motivo, el modo colectivo intra-EO será muy similar al plasmón intra-subbanda de un GE2D degenerado en espín. Además en el caso en que $\alpha = 0$ recuperamos totalmente el caso $\omega = \omega_p^{2D}(q)$.

Por otra parte, de la ecuación (216) es posible calcular las ramas de plasmones inter-EO. Para el acoplamiento isotrópico de Rashba dicha expresión se reduce a

$$8 \frac{\hbar \omega}{q(e^2 / \epsilon_s)} = \log \frac{(\omega + \omega_-)(\omega - \omega_+)}{(\omega - \omega_-)(\omega + \omega_+)}, \quad (218)$$

donde $\hbar \omega_+$ y $\hbar \omega_-$ se encuentran definidas a través de las ecuaciones (127) y (128). Cabe mencionar, que la ecuación (218) es la misma que reportaron W. Xu y M. Kushwaha y S. Ulloa (Xu, 2003; Kushwaha y Ulloa, 2006).

En la figura 28 (a) se presentan las ramas de plasmones intra-EO e inter-EO obtenidas por W. Xu como función de $\omega_p = \omega_p^{2D} \sim q^{1/2}$. Estos resultados fueron calculados considerando

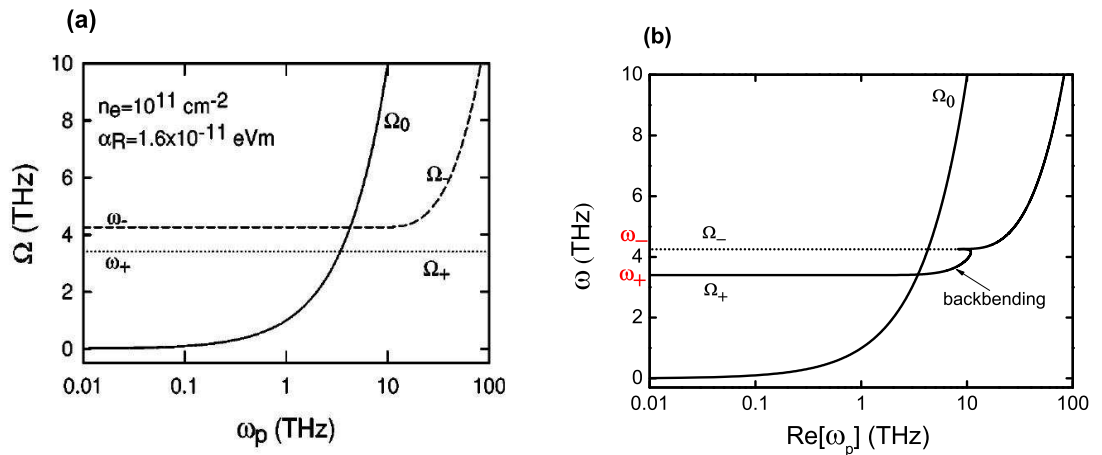


FIGURA 28.- (a) Espectro de plasmones intra e inter-EO calculado por W. Xu y (b) espectro de plasmones calculado vía la ecuación (218), en donde se considera ω real y q compleja.

una densidad electrónica $n_e = 1 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, $m^* = 0.055$ y $\alpha = 1.6 \times 10^{-9} \text{ eV cm}$. Allí mismo,

en la figura 28(b) se muestra la rama del plasmón intra-EO obtenida a partir de (217) y las ramas de plasmones inter-EO calculadas a partir de (218). En esta última gráfica, se presenta la relación entre la energía $\hbar\omega$ Vs q compleja, lo cual trae como consecuencia que las ramas de plasmones inter-EO, Ω_+ y Ω_- , presenten lo que en inglés se conoce como “back-bending”. Dicho comportamiento indica la existencia de límites de difracción asociados a las ramas de plasmones (Archambault et al., 2009). Específicamente, nos indica que el plasmón inter-EO no puede tomar valores de q muy grandes.

De acuerdo con lo reportado por W. Xu, habrá dos modos plasmónicos inter-EO que pueden ser excitados a $q = 0$ con energías $\hbar\omega_+$ y $\hbar\omega_-$. Si comparamos estos resultados (figura 28 (a)) con los nuestros (figura 28 (b)), podemos apreciar que efectivamente a las frecuencias $\omega_{\pm}$ existirán modos colectivos. Por lo tanto, de nuestra figura con back-bendig podemos concluir, de igual manera que W. Xu, que a las frecuencias $\hbar\omega_{\pm}$ a $q = 0$ existirán dos modos plasmónicos que pueden ser excitados ópticamente.

4.5.2 Excitaciones para el caso conjunto Rashba + Dresselhaus

En esta subsección analizaremos los resultados para un GE2D en presencia de un campo magnético efectivo, $\hbar\Omega(\mathbf{k})/2$, originado por la presencia conjunta de la IEO de Rashba y Dresselhaus. Se estudiará el continuo de transiciones de pares electrón hueco o regiones de amortiguamiento de Landau, las cuales se obtendrán numéricamente a través de las expresiones (131) y (135). Así mismo, se calcularán las ramas de plasmones intra-EO e inter-EO vía las ecuaciones (215) y (216), respectivamente.

Si se analizan las expresiones (131) y (135), se puede apreciar que las zonas de amortiguamiento de Landau presentan dependencia con respecto a la magnitud del vector de onda $\mathbf{q}$ y con respecto de su dirección a través del ángulo γ . Sin embargo, las regiones de amortiguamiento intra-EO no se ven afectadas de manera considerable. De hecho, si se comparan estas regiones con las que se obtuvieron para el caso isotrópico de Rashba, ambos casos se verán iguales. En cambio, las regiones inter-EO sí presentarán una fuerte dependencia con respecto al ángulo γ . Por ejemplo, la figura 29 muestra las regiones de amortiguamiento inter-EO para dos direcciones muy particulares del vector de onda $\mathbf{q}$. Las direcciones que se han escogido son $\gamma = \theta_+ = \pi/4$ y $\gamma = \theta_- = 3\pi/4$, las cuales coinciden con las direcciones en las cuales las subbandas de energía sufren el mínimo y el máximo desdoblamiento en espín (sec. 2.6), respectivamente (ver figura 13). Las regiones inter-EO son calculadas considerando una densidad electrónica $n_e = 5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, masa efectiva $m^* = 0.055 m_0$ e intensidades de IEO $\alpha = 1.6 \times 10^{-9} \text{ eVcm}$ y $\beta = 0.1\alpha$. Sin embargo, la región sobreada en gris y que se encuentra

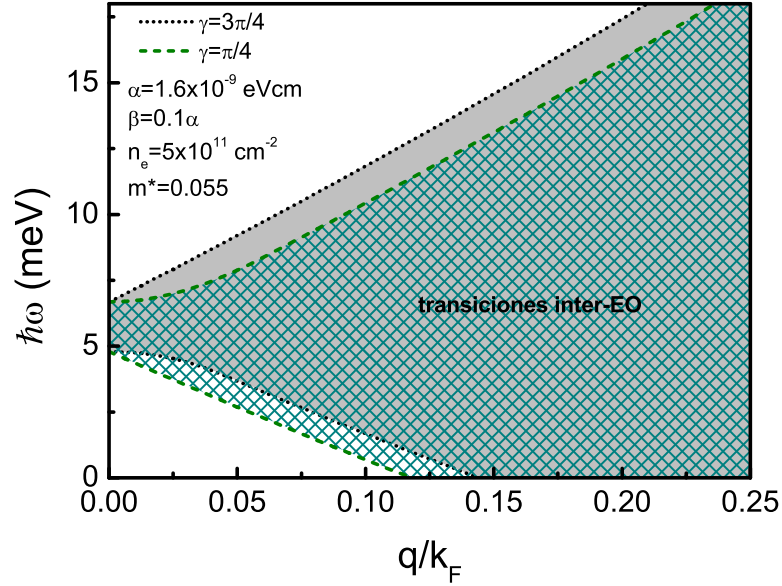


FIGURA 29.- Regiones de amortiguamiento de Landau inter-EO para dos direcciones particulares caracterizadas por el ángulo γ . La zona gris contenida entre las líneas negras punteadas corresponde al caso $\gamma = \theta_- = 3\pi/4$, mientras que la zona cuadriculada delimitada por las líneas a trozos verde corresponde a $\gamma = \theta_+ = \pi/4$.

delimitada por las curvas negras punteadas corresponde a $\gamma = \theta_-$. Mientras tanto, la zona cuadriculada contenida entre las líneas verdes a trozos corresponde al caso $\gamma = \theta_+$. Nótese que por el simple hecho de considerar distinto ángulo γ es posible modificar el espectro de excitaciones de pares electrón-hueco. Esto es una consecuencia directa de la anisotropía que presenta el desdoblamiento de las subbandas de energía debido a la presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus. Este resultado contrasta con lo obtenido en el caso $\alpha \neq 0, \beta = 0$, en donde a causa de un desdoblamiento en espín independiente de θ , las regiones de amortiguamiento inter-EO no dependen de γ (ver la figura 26).

En la figura 30, junto a las regiones de amortiguamiento inter-EO se presentan las zonas de transiciones intra-EO y el plasmón intra-EO. Este último, obtenido a partir de la expresión (215). Estos resultados son similares a los reportados por Badalyan et al. (Badalyan et al., 2009). Ellos también mostraron que la regiones inter-EO dependen de la dirección del vector de onda $\mathbf{q}$ a través del ángulo γ . Sin embargo, cabe mencionar que existe una diferencia sumamente importante en cuanto al plasmón respecta. Mientras que en nuestro caso, el plasmón mostrado en la figura 30 corresponde al plasmón intra-EO derivado a partir de la expresión (214), ellos obtienen un plasmón en el cual se suman sobre todas las posibles

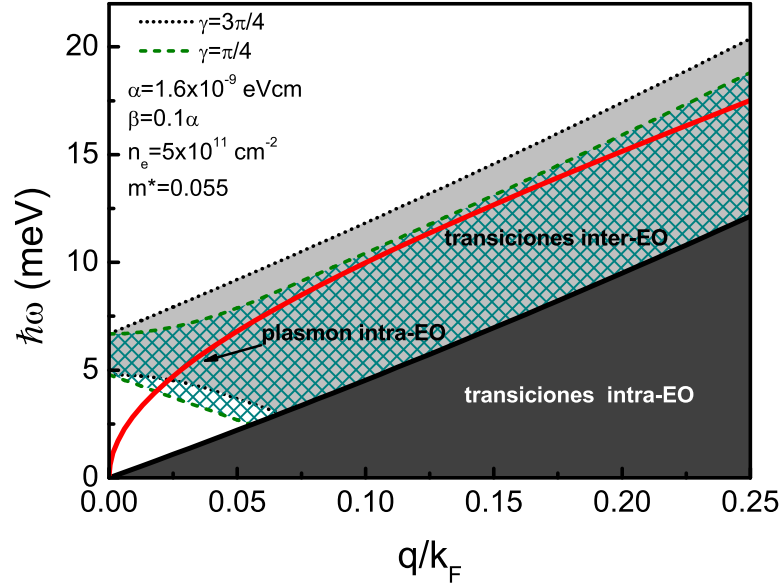


FIGURA 30.- Regiones de amortiguamiento de Landau y el plasmón intra-EO (curva en rojo).

transiciones inter e intra-EO de manera simultánea. Por dicho motivo, este plasmón puede amortiguarse al entrar en la región de excitaciones inter-EO. En contraste con este resultado, el plasmón intra-EO calculado en este trabajo se encuentra constituido por procesos que involucran únicamente la presencia de transiciones intra-subbanda. Por lo tanto, al igual que en el caso isotrópico de Rashba, el plasmón intra-EO no se amortiguará al entrar en las zonas inter-EO, ya que la naturaleza de las excitaciones que componen tanto al plasmón como a la región de amortiguamiento son distintas.

Otra diferencia importante que existe entre el presente trabajo y lo reportado por Badalyan et al. es que ellos calculan una sola rama de plasmones, mientras que en nuestro caso, de acuerdo con la expresión (214), existen dos: i) el plasmón intra-EO y ii) el plasmón inter-EO.

A continuación se discutirán los resultados obtenidos para el plasmón inter-EO. Esto, a través del análisis de la relación entre la energía $\hbar\omega$ y el vector de onda $\mathbf{q}$ complejo. La figura 31 (a) muestra la relación de dispersión para el caso isotrópico de Rashba y para el caso Rashba más Dresselhaus. En ella se pueden apreciar que las ramas de los plasmones presentan backbending. Esto nos indica que el plasmón no puede ser excitado a cualquier vector de onda, sino que hay un valor máximo, es decir, se establece un límite de difracción. De hecho, dado que los valores de q son muy pequeños ($q/k_F \ll 1$), podemos decir que el plasmón inter-EO se encuentra bien definido a $q = 0$. Por lo tanto, estamos hablando de

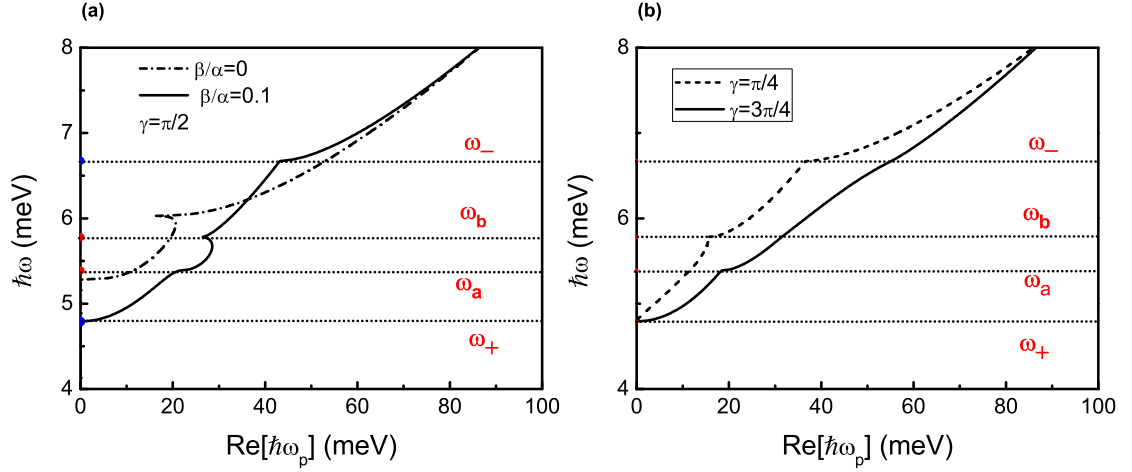


FIGURA 31.- (a) Espectro de plasmones inter-EO para $\gamma = \pi/2$. Se presenta el caso isotrópico de Rashba y el caso Rashba más Dresselhaus. (b) Plasmón inter-EO para $\gamma = \pi/4$ y $\gamma = 3\pi/4$. Nótese que la relación de dispersión de este plasmón presenta estructura justo a las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b . Se han utilizado los parámetros $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta = 0.1\alpha$, $n_e = 5 \times 10^{11}$ cm $^{-2}$ y $m^* = 0.055$.

modos ópticos, los cuales pueden ser excitados a frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b . Nótese que aparecen cuatro frecuencias, lo cual contrasta notablemente con la relación de dispersión cuando $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$, en donde sólo existen dos frecuencias características dadas por las ecuaciones (127) y (128). Las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b se obtienen a partir de las expresiones (136) y (137), para distintos ángulos θ , de tal forma que,

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{\pm} &= 2k_F^{\pm}(\theta_{\pm})\Delta(\theta_{\pm}) \\ &= 2k_F|\alpha \mp \beta| \mp \frac{2m^*}{\hbar^2}|\alpha \mp \beta|^2 \end{aligned} \quad (219)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \hbar\omega_a &= 2k_F^-(\theta_+)\Delta(\theta_+) \\ &= 2k_F|\alpha - \beta| + \frac{2m^*}{\hbar^2}|\alpha - \beta|^2 \end{aligned} \quad (220)$$

y

$$\begin{aligned} \hbar\omega_b &= 2k_F^+(\theta_-)\Delta(\theta_-) \\ &= 2k_F|\alpha + \beta| - \frac{2m^*}{\hbar^2}|\alpha + \beta|^2, \end{aligned} \quad (221)$$

con $k_F = \sqrt{2\pi n_e - q_{so}^2}$, con $q_{so} = \frac{m^*}{\hbar^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Otro punto interesante, es que el espectro del plasmón inter-EO también presenta dependencia de la dirección del vector de onda $\mathbf{q}$. De forma que, es posible modificar la relación de dispersión al variar γ . Esto, puede apreciarse a través de las figuras 31 (a) y 31 (b), en donde se han graficado las ramas de dichos modos colectivos para las direcciones $\gamma = \pi/2$,

$\gamma = \theta_+$ y $\gamma = \theta_-$.

Por otro lado, cabe mencionar que la frecuencia del plasmón inter-EO se encuentra entre ω_+ y ω_- , y en general caen dentro de la región de amortiguamiento, en cuyo caso tales plasmones no constituirían modos colectivos bien definidos.

4.6 Conclusiones

Se presentó el estudio del continuo excitaciones de partícula simple y el espectro de plasmones en presencia de IEO anisotrópica Rashba + Dresselhaus. El análisis se efectuó mediante una función dieléctrica matricial derivada bajo el esquema del Método de Campo Auto-Consistente, a través del cual, se consideró la interacción electrón-electrón de manera efectiva. Esta matriz dieléctrica permitió separar la contribución compuesta por excitaciones intra-EO de los términos constituidos por transiciones inter-EO.

Los resultados demuestran que, la presencia de la IEO da lugar a la aparición de modos colectivos intra-EO e inter-EO, así como a regiones de amortiguamiento inter e intra-EO constituidas por transiciones de partícula simple entre las subbandas de espín. Este espectro de excitaciones contrasta notablemente con el correspondiente al Gas de electrones degenerado en espín.

Se observó que en la acción conjunta de los acoplamientos R+D, la dependencia que la superficies de energía $\epsilon_{\pm}(\mathbf{k})$ adquieren del ángulo θ (dirección en el espacio $\mathbf{k}$) causa que el espectro de excitaciones presente una dependencia del ángulo γ , que determina la dirección de propagación del plasmón. En un estudio realizado por Badalyan et al. (Badalyan et al., 2009), se probó que el continuo de creación de pares electrón-hueco inter-EO se modifica al variar γ . Sin embargo, nuestros resultados demuestran que no sólo la región de amortiguamiento sino también la relación de dispersión de los plasmones inter-EO presentan dependencia de la dirección de $\mathbf{q}$, mientras que las excitaciones intra-EO (plasmones y región de amortiguamiento) no son afectadas significativamente.

Un análisis realizado en el régimen de longitud de onda larga (q pequeña), demuestra que la frecuencia de excitación del plasmón intra-EO corresponde a la frecuencia de plasma asociada a un GE2D degenerado en espín, ω_p^{2D} , más una pequeña corrección debida a la IEO. Así mismo, se concluye que los modos colectivos inter-EO son plasmones ópticos situados en la vecindad de la región de amortiguamiento inter-EO.

Conductividad óptica en presencia de IEO

En este capítulo, se mostrará el desarrollo matemático empleado para determinar la conductividad longitudinal de un GE2D utilizando el método de campo auto-consistente. Primeramente, en la sección 5.1 se presenta el desarrollo mediante el cual se obtiene la conductividad para un gas electrónico degenerado en espín. Posteriormente, en la sección 5.2 se mostrará el cálculo de la conductividad de un GE2D con IEO. El resultado obtenido se particularizará al caso en que se encuentra presente el acoplamiento $R+D_\beta$ (sección 5.3), en donde se derivarán expresiones para la conductividad óptica. En la sección 5.4 dicha conductividad longitudinal se relacionará con las componentes cartesianas del tensor de conductividad σ_{ij} definido en algunos trabajos (Maytorena et al., 2006; Li et al., 2013). Mientras tanto, en 5.5 se presentan los resultados obtenidos para el caso óptico y para $q \sim 0$. Finalmente en 5.6 se presentan las conclusiones del capítulo

5.1 Conductividad eléctrica de un gas de electrones

El cálculo de la conductividad de un gas de electrones puede realizarse utilizando diferentes formalismos, por ejemplo con la formula de Kubo o a través del Método SCF descrito en la sección 3.2. La diferencia entre estos dos métodos es que, el SCF da lugar a una función respuesta dependiente de $\mathbf{q}$ y de la frecuencia, mientras que la formula de Kubo permite calcular funciones de correlación dependientes únicamente de la frecuencia (Bruus y Flensberg, 2005c). En nuestro caso, dado que se desea obtener información acerca de los modos colectivos, se utilizará la Aproximación de Campo Auto-Consistente.

De acuerdo con el Método SCF, cuando un potencial externo, V_{ext} , actúa sobre un sistema de muchas partículas interactuantes (por ejemplo un Gas electrones 3D), se genera una densidad inducida determinada por la ecuación (85). Dicha expresión puede reescribirse como

$$\delta n(q, t) = \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} V_{ext}(\mathbf{q}, t), \quad (222)$$

en donde $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ es la función dieléctrica y se encuentra definida mediante la ecuación (87).

A continuación, relacionaremos esta densidad de electrones con la densidad de corriente a través de la ecuación de continuidad. Para ello, primero multiplicamos a (222) por la carga del electrón ($-e$) y tomaremos la parcial con respecto al tiempo, de lo que se obtiene que

$$-e \frac{\partial \delta n(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = -e \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} \frac{\partial V_{ext}(\mathbf{q}, t)}{\partial t}. \quad (223)$$

Sin embargo, la dependencia temporal de δn y V_{ext} es de la forma $e^{-i\omega t}$. Por dicho motivo, la ecuación anterior podemos expresarla de la siguiente manera

$$e\omega \delta n(\mathbf{q}, t) = e\omega \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} V_{ext}(\mathbf{q}, t). \quad (224)$$

Ahora, la ecuación de continuidad en componentes de Fourier posee la forma $e\omega \delta n_e(q, t) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(q, t)$, de tal suerte que la ecuación (224) se puede escribir como:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(q, t) = -e\omega \frac{\Pi_0(q, \omega)}{\epsilon(q, \omega)} V_{ext}(q, t), \quad (225)$$

la cual puede expresarse también como

$$q^2 \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) = e^2 \omega \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} \mathbf{q} \phi_{ext}(\mathbf{q}, t) \quad (226)$$

al multiplicar por el vector $\mathbf{q}$ y considerar que $V_{ext} = -e\phi_{ext}$, donde ϕ_{ext} es el potencial electrostático. Cabe mencionar que el término $\mathbf{q}\phi_{ext}(q, t)$ puede relacionarse con el gradiente del potencial ϕ_{ext} y en componentes de Fourier dicha relación se expresa como $F\{\nabla \phi_{ext}\} \equiv i\mathbf{q}\phi_{ext}$. Esto, permite escribir (226) en términos del campo eléctrico externo, el cual se encuentra definido como $\mathbf{E}_{ext} = -\nabla \phi_{ext} \equiv -i\mathbf{q}\phi_{ext}$. Por tanto realizando algunas simplificaciones se obtiene que

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, t) = i \frac{e^2 \omega}{q^2} \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} \mathbf{E}_{ext}. \quad (227)$$

Ahora, de las relaciones constitutivas se sabe que la conductividad, σ , relaciona la densidad de corriente con el campo eléctrico externo a través de la expresión lineal $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_{ext}$. Si comparamos esta relación con la ecuación (227) se puede ver que

$$\sigma(\mathbf{q}, \omega) = i \frac{e^2 \omega}{q^2} \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (228)$$

Esta función se conoce con el nombre de *conductividad longitudinal*, debido a que la respuesta, $\mathbf{J}$, posee la misma dirección que la perturbación $\mathbf{E}_{ext}$.

De particular importancia, es la parte real de dicha conductividad

$$\text{Re}[\sigma(\mathbf{q}, \omega)] = -\frac{e^2 \omega}{q^2} \text{Im} \left\{ \frac{\Pi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} \right\}, \quad (229)$$

ya que, como se vió en la sección 3.3, está relacionada con procesos de absorción de energía (plasmones y transiciones de partícula simple) (Bruus y Flensberg, 2005b).

5.2 Conductividad de un gas electrónico 2D con Interacción Espín-Órbita

A continuación, se presenta la derivación de la conductividad longitudinal para un GE2D en presencia de IEO. El cálculo se llevará a cabo bajo el esquema de la aproximación SCF (sec. 3.2), tal como se mostró en la sección anterior.

Considérese el Hamiltoniano generalizado de la sección 2.3 dado por la ecuación (18)

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2 + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}), \quad (230)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ y $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ es el campo efectivo espín-órbita. Las eigenenergías y eigenestados para estos sistemas se encuentran determinados por las ecuaciones (19) y (20), respectivamente.

A continuación, partiendo de la relación entre los elementos de matriz del potencial externo y el potencial autoconsistente obtenida en la sección 4.2 (ec. 185), se calculará una expresión para la densidad inducida de electrones δn . Para ello, conviene reescribir a (185) de la siguiente forma

$$V_l^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = \sum_l \epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega) V_j(\mathbf{q}, z, t), \quad (231)$$

en donde hemos realizado el siguiente cambio en los sub-índices: $l = \{\nu, \nu'\}$, $j = \{\mu, \mu'\}$, $V_j = \langle \mu | V(\mathbf{q}, z, t) | \mu' \rangle$ y $V_l^{ext} = \langle \nu | V_{ext}(\mathbf{q}, z, t) | \nu' \rangle$. Cabe recordar que $\mu = \{\lambda, n\}$, $\mu' = \{\lambda', n'\}$, $\nu = \{\lambda'', m\}$, $\nu' = \{\lambda''', m'\}$, donde $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' = \pm 1$ y n, n', m, m' denotan las subbandas de conducción que participan en el proceso de dispersión. Por otro lado, $\epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega)$ representa la función dieléctrica del medio, la cual se encuentra definida por medio de la expresión (186) y que puede ser reescrita como:

$$\epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega) = \delta_{lj} - V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_l(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{lj} \quad (232)$$

en donde $\delta_{lj} \equiv \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu'\nu'}$, mientras que $\Lambda_j \equiv \Lambda_{\mu\mu'}$ y $N_{lj} \equiv N_{\nu\nu'\mu\mu'}$ se encuentran definidas por las ecuaciones (177) y (182), respectivamente.

Si consideramos que el potencial total puede escribirse como $V_j(\mathbf{q}, z, t) = V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t) + V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t)$, entonces (231) puede ser expresada como

$$V_l^{ext}(\mathbf{q}, z, t) - \sum_j \epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = \sum_j \epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t), \quad (233)$$

la cual puede simplificarse a:

$$\sum_j [\delta_{lj} - \epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega)] V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = \sum_j \epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t). \quad (234)$$

Si sustituímos (232) en el lado izquierdo de (234) se obtiene que

$$\sum_j \left[V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_j(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{lj} \right] V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = \sum_j \epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t). \quad (235)$$

De esta ecuación puede verse que se debe satisfacer la relación

$$V_q \Pi_{lj}^0 V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = \epsilon_{lj}(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t), \quad (236)$$

en donde se ha definido

$$\Pi_{lj}^0 = \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_j(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{lj}. \quad (237)$$

Si ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación (236) por la *inversa de la matriz dieléctrica*, ϵ^{-1} , y con siderando que $\sum_l \epsilon_{jl}^{-1} \epsilon_{lj} = \delta_{j'j}$, se obtiene

$$V_q \sum_l \epsilon_{jl}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \Pi_{lj}^0(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = \delta_{j'j} V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t), \quad (238)$$

sin embargo, debido a que la matriz inversa debe cumplir con la condición $\epsilon^{-1} \epsilon = \epsilon \epsilon^{-1} = \mathbf{1}$ (igual a la matriz identidad), sólo participan aquellos elementos donde j' sea igual a j . De esta manera tenemos que en la ecuación (238) $\delta_{j'j} = 1$, por lo que dicha ecuación puede ser reescrita como

$$V_q \sum_l \epsilon_{jl}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \Pi_{lj}^0(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t). \quad (239)$$

y se obtiene que

$$V_q \Pi_j V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t) = V_j^{ind}(\mathbf{q}, z, t). \quad (240)$$

en donde se ha definido

$$\Pi_j(\mathbf{q}, \omega) = \sum_l \epsilon_{jl}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \Pi_{lj}^0(\mathbf{q}, \omega), \quad (241)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (86), se puede observar que Π_j es la función respuesta de muchos cuerpos, la cual de acuerdo con la ecuación (80), relaciona el potencial externo con la densidad inducida de la siguiente manera

$$\delta n_j(\mathbf{q}, z, t) = \Pi_j(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t). \quad (242)$$

Esta, es la densidad de partículas caracterizada por el subíndice j , de manera que es inducida por los electrones dispersados dentro de las distintas subbandas. Por lo tanto, la contribución

total a la densidad, $\delta n(\mathbf{q}, z, t)$, se define como la suma sobre j , es decir que

$$\delta n(\mathbf{q}, z, t) = \sum_j \delta n_j(\mathbf{q}, z, t) = \sum_j \Pi_j(q, \omega) V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t). \quad (243)$$

Si ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por la carga del electrón ($-e$) y derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$e \frac{\partial \delta n(\mathbf{q}, z, t)}{\partial t} = e \sum_j \Pi_j(\mathbf{q}, \omega) \frac{\partial V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t)}{\partial t}, \quad (244)$$

en donde la parte temporal del potencia externo posee la forma $\sim e^{-i\omega t}$ con lo que la ecuación (244) se reduce a

$$e \frac{\partial \delta n(\mathbf{q}, z, t)}{\partial t} = -ie\omega \sum_j \Pi_j(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t). \quad (245)$$

A continuación relacionaremos la densidad inducida de partículas con la densidad de corriente. Esto, utilizando la ecuación de continuidad, la cual puede expresarse en componentes de Fourier de la siguiente manera

$$i\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, z, t) = e \frac{\partial \delta n(\mathbf{q}, z, t)}{\partial t} \quad (246)$$

Si sustituímos (246) en (245) se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, z, t) = -e\omega \sum_j \Pi_j(\mathbf{q}, \omega) V_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t). \quad (247)$$

Ahora, multiplicando por $\mathbf{q}$ ambos lados de (247) y utilizando la relación que hay entre la energía potencial, V_j^{ext} , y el potencial escalar ϕ_j^{ext} , es decir $V_j^{ext} = -e\phi_j^{ext}$, se llega a

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, z, t) = \frac{e^2\omega}{q^2} \sum_j \Pi_j(q, \omega) \mathbf{q} \phi_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t). \quad (248)$$

Pero, en componentes de Fourier el término $\mathbf{q} \phi_j^{ext}$ se relaciona con el gradiente de un potencial, lo que a su vez tiene que ver con un campo eléctrico definido como $\mathbf{E}_j^{ext} = -i\mathbf{q} \phi_j^{ext}$. Si utilizamos esta relación, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, z, t) = \frac{ie^2\omega}{q^2} \sum_j \Pi_j(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{E}_j^{ext}(\mathbf{q}, z, t), \quad (249)$$

donde $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_j^{ext} = -\sigma \nabla \phi_{ext} = -i\mathbf{q} \sigma \phi_{ext}$, por tanto, la conductividad (longitudinal) que

determina la corriente a lo largo de $\mathbf{q} = q(\cos \gamma, \sin \gamma)$ será:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{ie^2\omega}{q^2} \sum_j \Pi_j(\mathbf{q}, \omega) \\ &= \frac{ie^2\omega}{q^2} \sum_j \sum_l [\epsilon_{jl}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \Pi_{lj}^0(\mathbf{q}, \omega)]\end{aligned}\quad (250)$$

Como ya se vió en el capítulo anterior, cuando sólo hay una banda de conducción se tiene que $n = n' = m = m' = 0$, entonces los índices l y j sólo dependerán de $\lambda, \lambda', \lambda''$ y λ''' , de tal suerte que la conductividad puede escribirse como

$$\sigma(\mathbf{q}, \omega) = \frac{ie^2\omega}{q^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\lambda''\lambda'''} [\epsilon_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \Pi_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}^0(\mathbf{q}, \omega)], \quad (251)$$

de donde

$$\Pi_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) M_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}, \quad (252)$$

y en la que $M_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}$ se encuentra definida mediante la ecuación (183).

En la siguiente sección la expresión (251) se aplicará al caso particular de IEO anisotrópica, en donde se obtendrán soluciones en el límite de longitud de onda larga para obtener información de las excitaciones a $q \sim 0$.

5.3 Conductividad óptica en presencia de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus

La absorción de energía está determinada por la parte real de la conductividad (251)

$$\text{Re}[\sigma(\mathbf{q}, \omega)] = -\frac{e^2\omega}{q^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\lambda''\lambda'''} \text{Im} [\epsilon_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}^{-1}(\mathbf{q}, \omega) \Pi_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}^0(\mathbf{q}, \omega)]. \quad (253)$$

En donde $\epsilon_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}^{-1}$ son los elementos de la inversa de la matriz (213)

$$[\tilde{\epsilon}(\mathbf{q}, \omega)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_{++}^* & 0 & 0 & \epsilon_{++}^* \\ 0 & 1 + \epsilon_{+-}^* & \epsilon_{+-}^* & 0 \\ 0 & \epsilon_{-+}^* & 1 + \epsilon_{-+}^* & 0 \\ \epsilon_{--}^* & 0 & 0 & 1 + \epsilon_{--}^* \end{pmatrix}, \quad (254)$$

donde

$$\epsilon_{\pm\pm}^* = \frac{\epsilon_{\pm\pm}(\mathcal{A})}{1 - \epsilon_{++}(\mathcal{A}) - \epsilon_{--}(\mathcal{A})} \quad (255)$$

y

$$\epsilon_{\pm\mp}^* = \frac{\epsilon_{\pm\mp}(\mathcal{A})}{1 - \epsilon_{+-}(\mathcal{A}) - \epsilon_{-+}(\mathcal{A})}. \quad (256)$$

Los elementos $\epsilon_{\pm\pm}(\mathcal{A})$ y $\epsilon_{\pm\mp}(\mathcal{A})$ se definen mediante las ecuaciones (202) y (203), y son función de $\mathcal{A}$, la cual está determinada por medio de la ecuación (210). Mientras tanto, la función $\Pi_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}^0$ definida por la expresión (252), se encuentra caracterizada por las soluciones del término $M_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}$, las cuales, de acuerdo con la sección 4.3, se clasifican en cuatro casos: (1) $\lambda = \lambda'$ y $\lambda'' = \lambda'''$, (2) $\lambda \neq \lambda'$ y $\lambda'' \neq \lambda'''$ (3) $\lambda \neq \lambda'$ y $\lambda'' = \lambda'''$ y (4) $\lambda = \lambda'$ y $\lambda'' \neq \lambda'''$. Los casos (3) y (4) son cantidades que involucran procesos conformados por la mezcla de transiciones intra-EO e inter-EO y para estos resulta que $\Pi_{\lambda''\lambda'''\lambda\lambda'}^0 = 0$, lo cual puede comprobarse numéricamente. Sin embargo, para el caso (1) se tiene que

$$\Pi_{\lambda''=\lambda''',\lambda=\lambda'}^0(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{V_q}\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathbf{q},\omega), \quad (257)$$

en donde $\lambda = \pm 1$ y $\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathbf{q},\omega)$ está definida por medio de la expresión (202). De igual forma, para el caso (2), se obtiene que

$$\Pi_{\lambda''\neq\lambda''',\lambda\neq\lambda'}^0(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{V_q}\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathbf{q},\omega), \quad (258)$$

en donde $\lambda \neq \lambda' = \pm 1$, mientras que $\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathbf{q},\omega)$ se encuentra definida a través de la ecuación (203).

La conductividad puede expresarse como

$$\mathbf{Re}[\sigma(\mathbf{q},\omega)] = \mathbf{Re}[\sigma_{intra}(\mathbf{q},\omega)] + \mathbf{Re}[\sigma_{inter}(\mathbf{q},\omega)], \quad (259)$$

en donde σ_{intra} involucra únicamente procesos constituidos por transiciones intra-EO y σ_{inter} está constituida por transiciones de tipo inter-EO.

Si se suma sobre los subíndices de la ecuación (253) para obtener las contribuciones a la conductividad se obtiene que las partes intra e inter estarán dadas por

$$\mathbf{Re}[\sigma_{intra}] = -\frac{e^2\omega}{q^2}\mathbf{Im}\left\{\epsilon_{++++}^{-1}\Pi_{++++}^0 + \epsilon_{--++}^{-1}\Pi_{++--}^0 + \epsilon_{+-+-}^{-1}\Pi_{-++-}^0 + \epsilon_{----}^{-1}\Pi_{----}^0\right\} \quad (260)$$

y

$$\mathbf{Re}[\sigma_{inter}] = -\frac{e^2\omega}{q^2}\mathbf{Im}\left\{\epsilon_{+-+-}^{-1}\Pi_{+-+-}^0 + \epsilon_{-++-}^{-1}\Pi_{-++-}^0 + \epsilon_{+--+}^{-1}\Pi_{+--+}^0 + \epsilon_{-+-+}^{-1}\Pi_{-+-+}^0\right\}, \quad (261)$$

5.3.1 Contribución intra-subbanda

Para calcular esta contribución es necesario obtener los elementos de la función dieléctrica inversa involucrados. De la matriz (254) es posible apreciar que tales elementos son:

$$\begin{aligned}\epsilon_{++++}^{-1} &= 1 + \epsilon_{++}^* \\ \epsilon_{++--}^{-1} &= \epsilon_{--}^* \\ \epsilon_{--++}^{-1} &= \epsilon_{++}^* \\ \epsilon_{----}^{-1} &= 1 + \epsilon_{--}^*.\end{aligned}\tag{262}$$

Si utilizamos la relación (257) y (262) en (260), la conductividad intra-sub-banda puede reescribirse como:

$$\mathbf{Re}[\sigma_{intra}(q, \omega)] = -\frac{e^2 \omega}{q^2 V_q} \mathbf{Im} \left\{ (1 + \epsilon_{++}^*) \epsilon_{++} + \epsilon_{++}^* \epsilon_{--} + \epsilon_{--}^* \epsilon_{++} + (1 + \epsilon_{--}^*) \epsilon_{--} \right\} \tag{263}$$

donde $\epsilon_{\pm\pm}^*$ está definida a través de la ecuación (255), de manera que

$$\mathbf{Re}[\sigma_{intra}(q, \omega)] = -\frac{e^2 \omega}{q^2} \frac{1}{V_q} \mathbf{Im} \left\{ \frac{1}{1 - \epsilon_{++} - \epsilon_{--}} \right\} \tag{264}$$

Para obtener una expresión en el límite de longitud de onda larga, se utilizarán las expresiones para q pequeña de las funciones ϵ_{++} y ϵ_{--} , las cuales son calculadas en el apéndice A y están dadas por la ecuación (324). De aquí que el factor $1 - \epsilon_{++} - \epsilon_{--}$ pueda expresarse como sigue

$$(1 - \epsilon_{++} - \epsilon_{--}) = 1 - 2 \frac{V_q}{(\hbar \omega)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} (n_+ + n_-) - \right. \tag{265}$$

$$\left. \frac{q^2}{4\pi} \frac{m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{\hbar^2} \text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2) \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \sin(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right) \right\}. \tag{266}$$

Como podemos ver, este factor es real para q y ω real, por lo que $\mathbf{Im} \left[\frac{1}{1 - \epsilon_{++} - \epsilon_{--}} \right] = 0$, lo cual lleva a la conclusión de que no contribuye a la absorción óptica.

5.3.2 Contribución inter-subbanda

Por otro lado, la conductividad inter-sub-banda se encuentra definida mediante la ecuación (261). Para poder simplificar esta relación es necesario identificar los elementos inter-EO de la inversa de la matriz dieléctrica (ecuación (254)), de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon_{+-+-}^{-1} &= 1 + \epsilon_{+-}^* \\ \epsilon_{-++-}^{-1} &= \epsilon_{-+}^* \\ \epsilon_{+--+}^{-1} &= \epsilon_{+-}^* \\ \epsilon_{-+-+}^{-1} &= 1 + \epsilon_{-+}^*\end{aligned}\tag{267}$$

en la que $\epsilon_{\pm\mp}^*$ está definida por la expresión (256). Si combinamos las ecuaciones (258) y (267) con (261), llegamos a que la parte real de la conductividad inter-EO puede expresarse de la siguiente manera

$$\mathbf{Re}[\sigma_{inter}(\mathbf{q}, \omega)] = -\frac{e^2\omega}{q^2 V_q} \mathbf{Im} \left\{ (1 + \epsilon_{+-}^*)\epsilon_{+-} + \epsilon_{-+}^*\epsilon_{+-} + \epsilon_{+-}^*\epsilon_{-+} + (1 + \epsilon_{-+}^*)\epsilon_{-+} \right\}, \quad (268)$$

en donde $\epsilon_{\pm\mp}^*$ está definida mediante la ecuación (256). De manera que la ecuación (268) puede reescribirse como

$$\mathbf{Re}[\sigma_{inter}(\mathbf{q}, \omega)] = -\frac{e^2\omega}{q^2} \frac{1}{V_q} \mathbf{Im} \left\{ \frac{1}{1 - \epsilon_{+-} - \epsilon_{-+}} \right\}. \quad (269)$$

Conductividad en el límite de q pequeña

A continuación se obtendrán expresiones para la parte real de la conductividad en el límite de longitud de onda larga, para lo que se utilizarán las funciones $\epsilon_{\pm\mp}$ en régimen de q pequeña (calculadas en el apéndice B), las cuales están dadas por

$$\epsilon_{\pm\mp} \approx \frac{(qe^2/\epsilon_s)(\alpha^2 - \beta^2)^2}{8\hbar\omega} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{\omega_{\pm}(\theta)}{\omega_{\mp}(\theta)} \cdot \frac{\omega \pm \omega_{\mp}(\theta)}{\omega \pm \omega_{\pm}(\theta)} \right), \quad (270)$$

en donde ϵ_s es la constante dieléctrica promedio del GE2D, mientras que las frecuencias, $\omega_{\pm}(\theta) = 2k_F^{\pm}(\theta)\Delta(\theta)$ se encuentran definidas en las sección 4.1.2 a través de las ecuaciones (136) y (137).

Si se utiliza la ecuación (270), es posible notar que el factor $(1 - \epsilon_{+-} - \epsilon_{-+})$ será complejo debido a que la función ϵ_{-+} es compleja. De tal forma, que la ecuación (269) puede escribirse como

$$\mathbf{Re}[\sigma_{inter}(\mathbf{q}, \omega)] = -\frac{e^2\omega}{q^2} \frac{1}{V_q} \left\{ \frac{-\mathbf{Im}(-\epsilon_{-+})}{(1 - \epsilon_{+-} + \mathbf{Re}(-\epsilon_{-+}))^2 + (\mathbf{Im}(-\epsilon_{-+}))^2} \right\}, \quad (271)$$

donde

$$\mathbf{Re}(-\epsilon_{-+}) \approx -\frac{\omega_p^2}{\omega_0\omega} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{\omega_{-}(\theta)}{\omega_{+}(\theta)} \cdot \frac{|\omega - \omega_{+}(\theta)|}{|\omega - \omega_{-}(\theta)|} \right) \quad (272)$$

y

$$\mathbf{Im}(-\epsilon_{-+}) \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0\omega} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \Theta(\omega - \omega_{+})\Theta(\omega_{-} - \omega) \right\}, \quad (273)$$

en donde las funciones escalón $\Theta(\omega - \omega_{+})$ y $\Theta(\omega_{-} - \omega)$ especifican que la parte imaginaria de $-\epsilon_{\mp}$ será diferente de cero sólo para $\omega_{+}(\theta) \leq \omega \leq \omega_{-}(\theta)$.

De la ecuación (271), podemos ver que en el denominador aparece el factor $(\mathbf{Re}[1 - \epsilon_{+-} - \epsilon_{-+}])$, del cual se obtiene la relación de dispersión de los plasmones cuando es igual a cero.

Note que cuando dicho factor se anula, el denominador de (271) se hace más chico, por lo que la conductividad puede volverse máxima justo a las frecuencias y vectores de onda a los cuales se excita el plasmon inter-EO.

Si ahora se utilizan las expresiones anteriores para reescribir (271), se obtiene que

$$\mathbf{Re}[\sigma_{inter}(\mathbf{q}, \omega)] = \frac{e^2}{16\hbar} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\pi} \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \Theta(\omega - \omega_+(\theta)) \Theta(\omega_-(\theta) - \omega)}{(1 - \epsilon_{+-} + \text{Re}(-\epsilon_{-+}))^2 + (\text{Im}(-\epsilon_{-+}))^2} \right\}. \quad (274)$$

Esta expresión corresponde al caso en que se tiene un campo eléctrico no uniforme que apunta en la dirección de $\mathbf{q}$. Además, como $\mathbf{q}$ es diferente de cero, entonces, la conductividad estará constituida por transiciones verticales (caso óptico) y excitaciones en las que hay intercambio de momento $\hbar\mathbf{q}$.

A continuación se obtendrá un caso particular para la expresión de la conductividad, la cual es conocida como la conductividad óptica debido a que sólo se tomarán en cuenta las transiciones a $q = 0$.

5.3.3 Conductividad óptica inter-EO

Para obtener la conductividad óptica se tomará el límite cuando $q \rightarrow 0$ de $\sigma_{inter}(q, \omega)$, es decir,

$$\sigma_{inter}(\omega) = \lim_{q \rightarrow 0} \sigma_{inter}(q, \omega) \quad (275)$$

Después de tomar dicho límite, la parte real puede escribirse como

$$\mathbf{Re}[\sigma_{inter}(\omega)] = \frac{e^2}{16\hbar} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \Theta(\omega - \omega_+(\theta)) \Theta(\omega_-(\theta) - \omega). \quad (276)$$

Nótese, que nuevamente aparece dependencia en γ , como en el caso de los plasmones (sec. 4.5.2). Sin embargo cuando $\beta = 0$ se reduce a

$$\mathbf{Re}[\sigma_R(\omega)] = \frac{e^2}{16\hbar} \Theta(\omega - \omega_+) \Theta(\omega_- - \omega) \quad (277)$$

la cual corresponde al caso isotrópico de Rashba, en donde $\omega_{\pm}$ se encuentran definidas a través de las ecuaciones (127) y (128).

Cabe mencionar que la conductividad a $q = 0$ caracteriza a una corriente generada por un campo eléctrico externo uniforme y cuya dirección se encuentra dada por γ

5.4 Conductividad longitudinal y el tensor $\sigma_{ij}(\omega)$

El resultado obtenido (ec. (276)), como hemos visto, corresponde a una respuesta de caracter longitudinal. No obstante, puede ser relacionada con las componentes cartesianas del tensor σ_{ij} estudiado, por ejemplo, por Maytorena et al. (2006). Esta conexi3n, se da a trav3s del producto $\sigma_{ij}\hat{q}_j\hat{q}_i$, donde $i, j = x, y$, con $\hat{q}_x = \cos \gamma$ y $\hat{q}_y = \sin \gamma$. De dicho producto, se obtiene que la conductividad longitudinal, escrita de manera general es:

$$\sigma(\gamma, \omega) = \cos^2(\gamma)\sigma_{xx} + \sin^2(\gamma)\sigma_{yy} + \frac{1}{2}\sin(2\gamma)\sigma_{xy} + \frac{1}{2}\sin(2\gamma)\sigma_{yx} \quad (278)$$

en donde σ_{xx} y σ_{yy} representan respuesta longitudinal y σ_{xy} con σ_{yx} corresponden a respuesta transversal.

En el caso particular $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ y $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, que corresponder3a a la situaci3n en que se tiene IEO Rashba+Dresselhaus, la ecuaci3n (278) se reduce a

$$\sigma(\gamma, \omega) = \sigma_{xx} + \sin(2\gamma)\sigma_{xy}, \quad (279)$$

en donde las componentes cartesianas del tensor de conductividad estar3an dadas de la siguiente manera (Maytorena et al., 2006):

(i) las componentes diagonales

$$\sigma_{xx}(\omega) = \frac{e^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2}{32\pi\hbar} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\Delta^4(\theta)} \Theta(\omega - \omega_+(\theta)) \Theta(\omega_-(\theta) - \omega). \quad (280)$$

y (ii) la componentes fuera de la diagonal

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{e^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2}{32\pi\hbar} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin(2\theta)}{\Delta^4(\theta)} \Theta(\omega - \omega_+(\theta)) \Theta(\omega_-(\theta) - \omega). \quad (281)$$

Si comparamos la expresi3n (279) con la conductividad logitudinal (276), es posible demostrar que, efectivamente, existe una equivalencia entre ellas. Esto puede comprobarse al utilizar la identidad $\sin^2(\theta - \gamma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\gamma \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\gamma \sin 2\theta$ en la ecuaci3n (279) de lo que se obtiene que

$$\text{Re} [\sigma_{inter}(\omega)] = \sigma_{xx} + \sin(2\gamma)\sigma_{xy} + \cos(2\gamma)I_1(\omega), \quad (282)$$

donde

$$I_1(\omega) = -\frac{e^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2}{32\pi\hbar} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(2\theta)}{\Delta^4(\theta)} \Theta(\omega - \omega_+(\theta)) \Theta(\omega_-(\theta) - \omega). \quad (283)$$

Sin embargo, esta 3ltima integral resulta ser cero, de manera que se demuestra la equivalencia

entre la relación (279) y la conductividad longitudinal (276).

Cabe mencionar que la expresión (278) será utilizada en el capítulo 6 para calcular la conductividad óptica longitudinal considerando la contribución cúbica del acoplamiento Dresselhaus.

5.5 Resultados de la Conductividad

En esta sección se obtendrán una serie de resultados derivados del estudio de la conductividad óptica y a q finita. Específicamente se observará el efecto que introduce la presencia de la IEO anisotrópica sobre el espectro de absorción determinado por la parte real de la conductividad.

5.5.1 Conductividad óptica

A continuación se llevará a cabo el estudio de la conductividad a $q = 0$. Esta condición, como ya se mencionó en la sección 5.3.3, implica que el espectro de absorción estará compuesto por excitaciones inter-EO, en las cuales no hay intercambio de momento. Sin embargo, las transiciones se llevarán a cabo a través del intercambio de energía $\hbar\omega$. Además, la condición $q = 0$, sugiere la posibilidad de producir dichas transiciones a través de campos electromagnéticos, como es el caso de un campo eléctrico uniforme con dirección a lo largo del vector de onda $\mathbf{q} = q(\cos \gamma, \sin \gamma)$.

Las transiciones que contribuirán son aquellas que van de la banda ε_- a la banda ε_+ para una misma $\mathbf{k}$ y que se encuentren dentro del rango $[\hbar\omega_+(\theta), \hbar\omega_-(\theta)]$ (ver figura 32), donde $\hbar\omega_+(\theta) = \varepsilon_F - \varepsilon_-(k_F^+(\theta))$ y $\hbar\omega_-(\theta) = \varepsilon_+(k_F^-(\theta)) - \varepsilon_F$. Esto, también puede entenderse a través de la figura 33, en donde las transiciones inter-EO que se generan a una energía constante $\hbar\omega$, están dadas por la relación $\hbar\omega = \varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k})$. Para una frecuencia fija, la condición $\hbar\omega = \varepsilon_+ - \varepsilon_-$ define una curva $C_r(\omega)$ en el espacio $\mathbf{k}$, cuyos puntos son todos aquellos valores de momento para los cuales las transiciones son posibles a la energía $\hbar\omega$. Sin embargo, las transiciones que participan a la absorción óptica son sólo aquellas que se encuentran dentro de la ventana óptica, la cual se representa a través de los contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$. De esta manera, cada punto de la curva $C_r(\omega)$ que cae dentro de región contenida entre los contornos $k_F^+(\theta)$ y $k_F^-(\theta)$, es un valor de $\mathbf{k}$ que contribuirá a la absorción. Cabe señalar que para el caso en que se tiene la contribución de la IEO de Rashba y Dresselhaus, simultáneamente, las curvas $C_r(\omega)$ son elipses inclinadas cuyos semiejes son $k_a = \frac{\hbar\omega}{2} |\alpha - \beta|$ y $k_b = \frac{\hbar\omega}{2} |\alpha + \beta|$ orientados a lo largo de las direcciones $\theta_+ = \pi/4$ y $\theta_- = 3\pi/4$, respectivamente.

A continuación mostramos resultados obtenidos en base a la expresión (276) en donde emplearán los siguientes parámetros: una intensidad de los acoplamientos de Rashba y Dres-

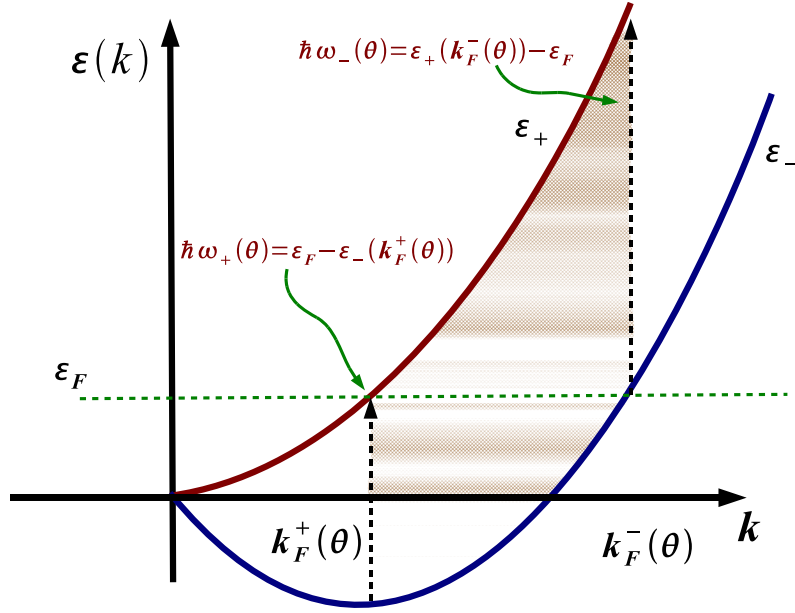


FIGURA 32.- Las frecuencias permitidas a $\mathbf{q} = 0$, estarán contenidas en el intervalo $\omega_+(\theta) \leq \omega \leq \omega_-(\theta)$.

selhaus dados por $\alpha = 1.6 \times 10^{-9} \text{eVcm}$ y $\beta = 0.1\alpha$, respectivamente. Además, se considera una densidad electrónica $n_e = 5 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$ y una masa efectiva $m^* = 0.055 m_0$, donde m_0 es la masa del electrón.

En la figura 34 se presentan los resultados obtenidos para el caso en que el campo eléctrico externo y la corriente inducida se encuentran dirigidos en la dirección del ángulo $\gamma = \pi/2$ con respecto a la dirección k_x . En la figura 34(b) se observan, para una frecuencia fija, las regiones angulares que contribuirán con la integral (276). Tales regiones se encuentran delimitadas por las frecuencias $\hbar\omega_+(\theta) = k_F^+(\theta)\Delta(\theta)$ y $\hbar\omega_-(\theta) = k_F^-(\theta)\Delta(\theta)$, definidas por las ecuaciones (136) y (137). Mientras tanto, la figura 34(a) muestra que el espectro de absorción óptica, calculado a partir de (276), se encuentra acotado por las frecuencias $\hbar\omega_+ \equiv \hbar\omega_+(\theta_+)$ (ec. (138)) y $\hbar\omega_- \equiv \hbar\omega_-(\theta_-)$ (ec. (139)). Así mismo, se observa la presencia de máximos de absorción situados en las frecuencias especiales ω_a y ω_b , las cuales se encuentran definidas por medio de las ecuaciones (220) y (221). Cabe mencionar, que los bordes de la absorción $\omega_{\pm}$ y las frecuencias críticas ω_a y ω_b representan las principales características espectrales de la Densidad conjunta de estados (Maytorena et al., 2006). Así mismo, justo a estas frecuencias, las curvas $C_r(\omega)$ y los contornos de Fermi mostrados en la figura 33, cumplen con $C_r(\omega) = k_F^\lambda(\theta)$ para θ fijo, de manera que en $\omega_{\pm}$ $C_r(\omega_{\pm}) = k_F^\pm(\theta_{\pm})$, mientras que para ω_a y ω_b se satisfacen $C_r(\omega_a) = k_F^-(\theta_+)$ y $C_r(\omega_b) = k_F^+(\theta_-)$. Cabe señalar que tales frecuencias características son de

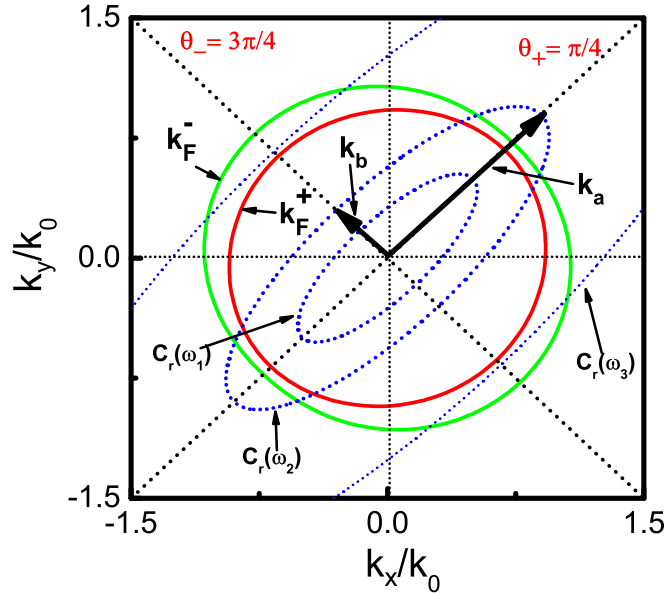


FIGURA 33.- Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y las elipses de energía constante $C_r(\omega)$ definidas mediante la diferencia $\varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k}) = \hbar\omega$. Se presentan las curvas para tres valores distintos de la energía del fotón, donde $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Las curvas $C_r(\omega)$ son elipses rotadas $\theta = \pi/4$ con respecto a los ejes k_x y k_y , además, posee semi-ejes $k_a = \hbar\omega/2 \mid \alpha - \beta \mid$ y $k_b = \hbar\omega/2 \mid \alpha + \beta \mid$, orientados a lo largo de las direcciones θ_+ y θ_- , respectivamente.

especial importancia, ya que experimentalmente podrían ser de gran ayuda para determinar cantidades espintrónicas tales como los parámetros de la intensidad de la IEO (Maytorena et al., 2006).

Por otra parte, en la figura 35 se presenta la parte real de la conductividad óptica calculada a partir de la ecuación (276) como función de la energía del fotón, $\hbar\omega$, para distintos valores del cociente β/α . Nótese, para α fija, que el espectro de absorción óptica es sensible a la variación del parámetro de acoplamiento Dresselhaus (β). Por ejemplo, se puede apreciar que conforme β aumenta, el espectro de absorción se abre en frecuencia. En cambio, conforme $\beta \rightarrow 0$ se recupera espectro para el caso isotrópico de Rashba, en donde las fronteras estarán dadas por $\omega_\pm \approx 2\alpha k_0 \mp 2m^*\alpha^2/\hbar^2$ con $k_0 = \sqrt{2\pi n_e}$. Estos resultados concuerdan con los reportados por J. Maytorena et al. (Maytorena et al., 2006), quienes estudiaron la componente σ_{yy} del tensor de conductividad $\sigma_{ij}(\omega)$, del cual se habló en la sección 5.4.

A continuación, se utilizará la conductividad longitudinal (276) para estudiar la evolución del espectro de absorción como función de γ . Cabe señalar, que este es un aspecto no explorado (ni por (Maytorena et al., 2006) ni por (Li et al., 2013)) que merece especial

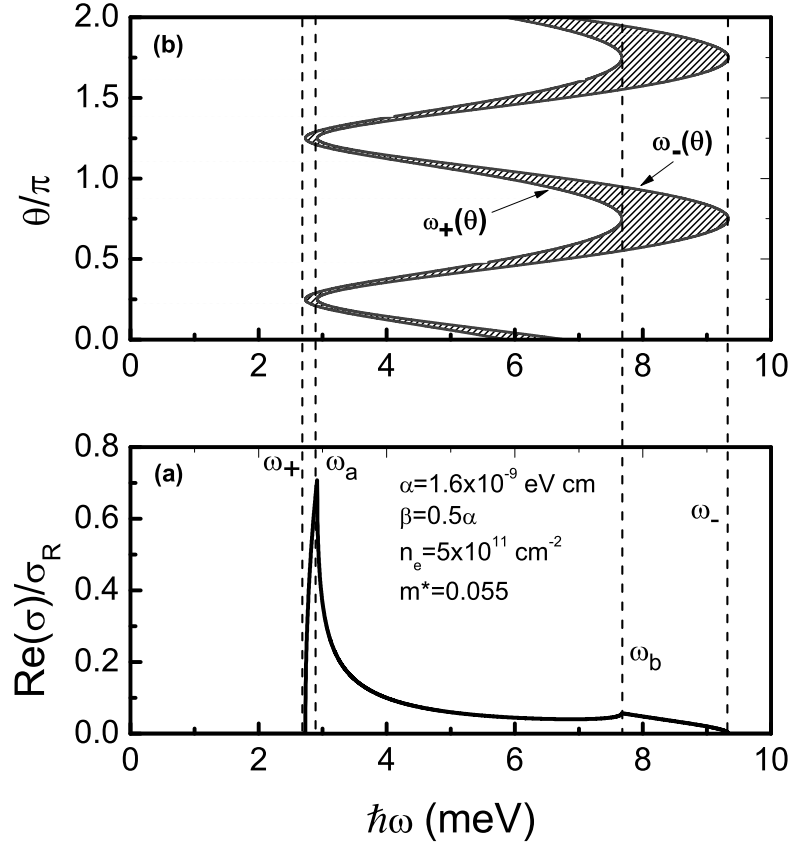


FIGURA 34.- (a) Contribución a la conductividad óptica inter-EO, $\sigma(q=0, \gamma=\pi/2, \omega)$ (ec. (276)), donde se ha considerado que la orientación del campo eléctrico aplicado está dada por el ángulo $\gamma = \pi/2$. (b) Región angular en el espacio de momentos en donde están permitidas las transiciones verticales, como función de la energía del fotón $\hbar\omega$. Cabe señalar que sólo la parte sombreada contribuirá a la absorción óptica. Las fronteras de estas regiones están dadas por $\hbar\omega_{\pm}(\theta) = 2k_F^{\pm}(\theta)\Delta(\theta)$. Nótese que la conductividad presenta resonancias a las frecuencias $\omega_a = \omega_{-}(\pi/4)$ y $\omega_b = \omega_{+}(3\pi/4)$

atención.

La figura 36 muestra el espectro de absorción correspondiente a un campo eléctrico externo orientado a ángulos $\gamma = \theta_{+}$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \theta_{-}$. En ella se observa que la conductividad $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega)$ presenta una fuerte dependencia con respecto a γ . Cabe mencionar que dicha dependencia en la dirección de $\mathbf{q}$ se introduce debido a la competencia entre los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus. De tal manera que, a $\beta = 0$ se recupera el espectro de absorción representativo de la IEO de Rashba.

La figura 37 muestra el espectro de absorción como función de la frecuencia y de la dirección de propagación γ para el caso en que el Hamiltoniano posee únicamente IEO de Rashba. En ella se observa que el espectro es constante entre $\omega_{+}(\theta_{+})$ y $\omega_{-}(\theta_{-})$, y también

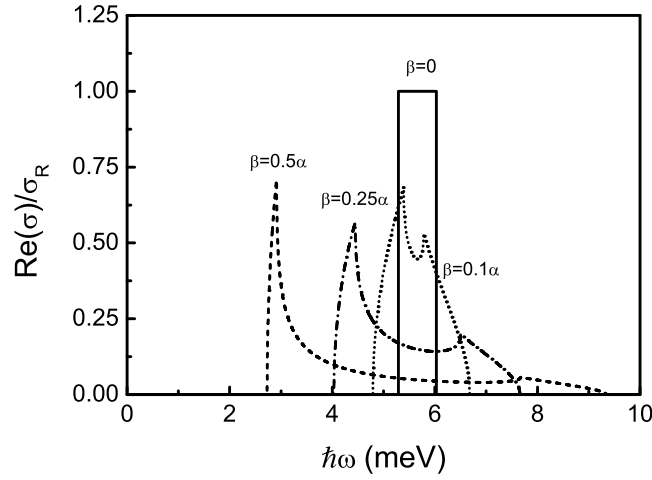


FIGURA 35.- Conductividad inter-EO, $\sigma(q=0, \gamma = \pi/2, \omega)$, para distintos valores de β . Se utilizan los mismos parámetros que en la gráfica anterior

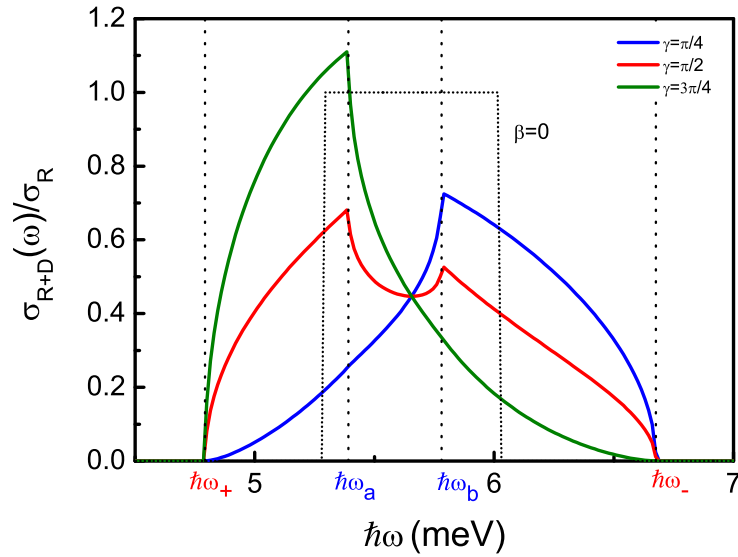


FIGURA 36.- Conductividad óptica para el caso en que sólo hay IEO de Rashba ($\beta = 0$) y para el caso de IEO Rashba + IEO de Dresselhaus $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega)$, para distintas orientaciones del vector de onda $\mathbf{q}$, $\gamma = \pi/4$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = 3\pi/4$. Observe que la absorción óptica presenta máximos a las frecuencias ω_a y ω_b . Además, cabe destacar que estos máximos pueden obtenerse de manera selectiva al variar γ .

es independiente de γ . En contraste, en la figura 38 se presenta el espectro de absorción para el GE2D en presencia de IEO de Rashba + Dresselhaus; dicho espectro es notablemente diferente al caso isotrópico. De la sección 5.4, se sabe que la conductividad longitudi-

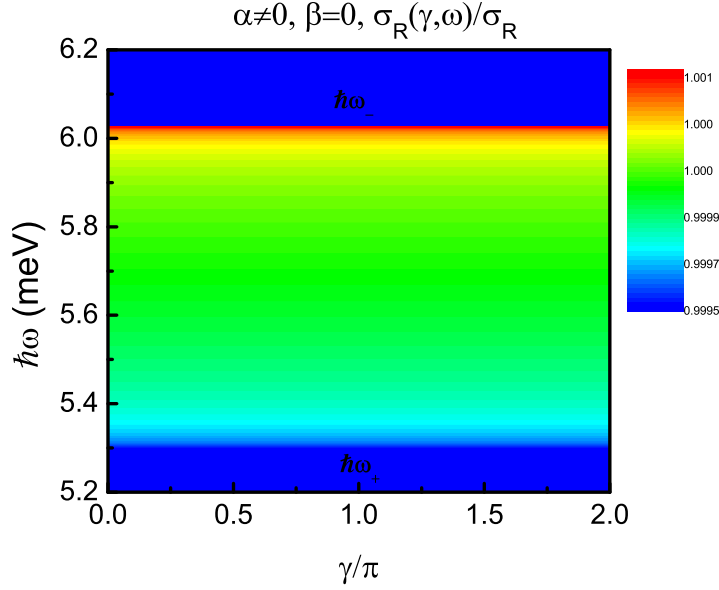


FIGURA 37.- Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y γ .

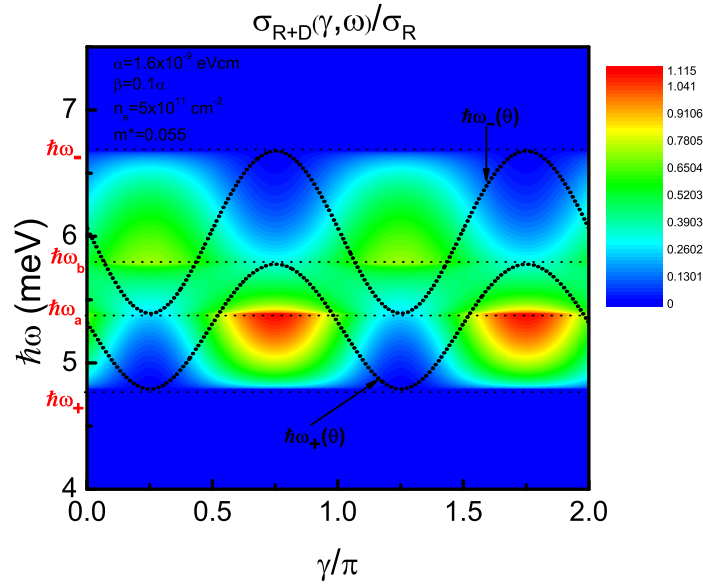


FIGURA 38.- Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y γ .

nal $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega)$ se encuentra relacionada con las componentes del tensor $\sigma_{ij}(\omega)$ mediante la fórmula $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega) = \sigma_{xx}(\omega) + \sigma_{xy}(\omega)\sin 2\gamma$, donde σ_{xx} y σ_{xy} se encuentran definidos a través de las ecuaciones (280) y (281), respectivamente. De acuerdo con esto, es posible apreciar que a la frecuencia ω_a y $\gamma = \theta_+$, $\sigma_{xx} \approx -\sigma_{xy}$, de manera que $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega)$ es pequeña. Así

mismo, se puede notar que $\sigma_{R+D} \approx 0$ en ω_b y $\gamma = \theta_-$, para las cuales sucede que $\sigma_{xx} \approx \sigma_{xy}$. Sin embargo, conforme se varía la frecuencia, $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega)$ cambia significativamente. Estas propiedades sugieren que, en presencia de IEO de Rashba y Dresselhaus, el espectro de absorción óptica puede ser modulado a través de un potencial eléctrico externo aplicado.

Las propiedades del espectro de absorción antes mencionadas, se deben a la anisotropía que presentan las subbandas de energía debido a la competencia entre los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus. Una medida de dicha anisotropía puede ser la cantidad

$$\frac{\sigma_{R+D}(\gamma = \theta_-, \omega)}{\sigma_{R+D}(\gamma = \theta_+, \omega)} = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{xy})}{(\sigma_{xx} + \sigma_{xy})}. \quad (284)$$

La gráfica 39 exhibe el comportamiento del cociente (284) para los parámetros utilizados en los resultados anteriormente presentados. Note que esta razón presenta estructura a las

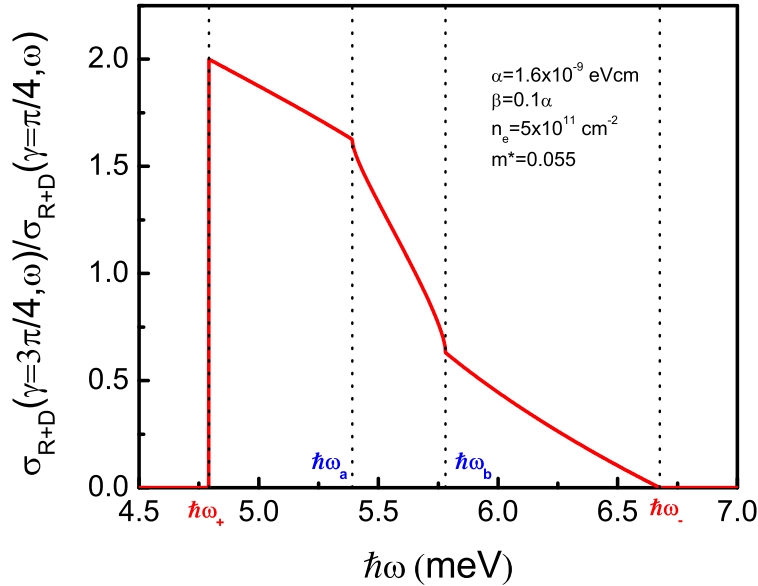


FIGURA 39.- Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y γ .

frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b , las cuales se modifican al variar la IEO. Además, cabe mencionar que en el caso isotrópico de Rashba $\sigma_{xy} = 0$ de manera que $\sigma_{R+D}(\gamma = \theta_-, \omega)/\sigma_{R+D}(\gamma = \theta_+, \omega) = 1$, es decir, será constante para toda frecuencia ω .

Con la finalidad de estudiar el efecto que introduce la variación de la IEO de Rashba sobre el espectro de absorción anisotrópico, a continuación se presentan los resultados que se obtienen para valores continuos del cociente (α/β) para γ fija.

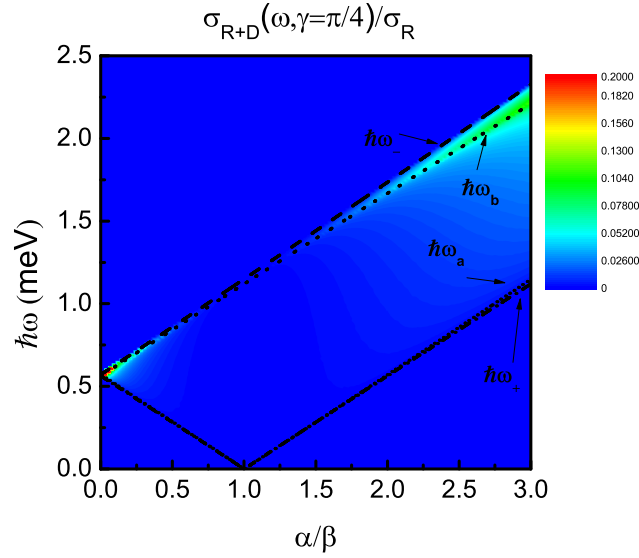


FIGURA 40.- Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y α/β , para $\gamma = \pi/4$. La absorción sigue la forma de las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_+ y ω_- y es máxima entre ω_- y ω_b .

Las figuras 40, 41 y 42 muestran $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega)$ para $\gamma = \pi/4$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = 3\pi/4$, las cuales entre sus principales características muestran que el espectro sigue el comportamiento de las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b .

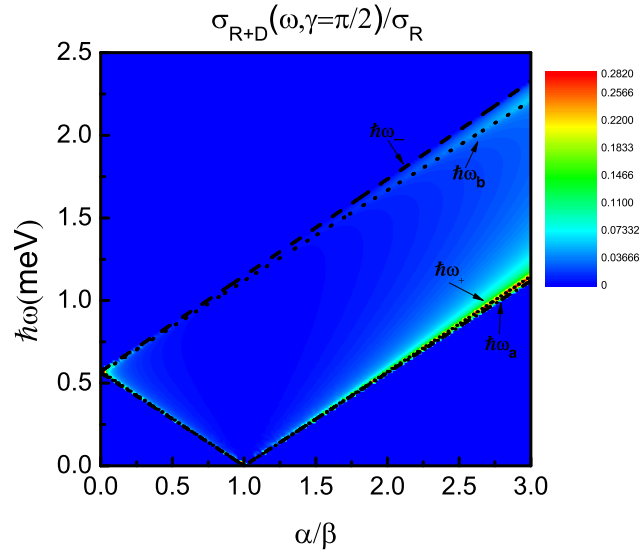


FIGURA 41.- Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y α/β para $\gamma = \pi/2$. Se muestra que la absorción sigue la forma de las frecuencia $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b . Además de que hay máximos de absorción entre ω_- y ω_b y entre ω_+ y ω_a .

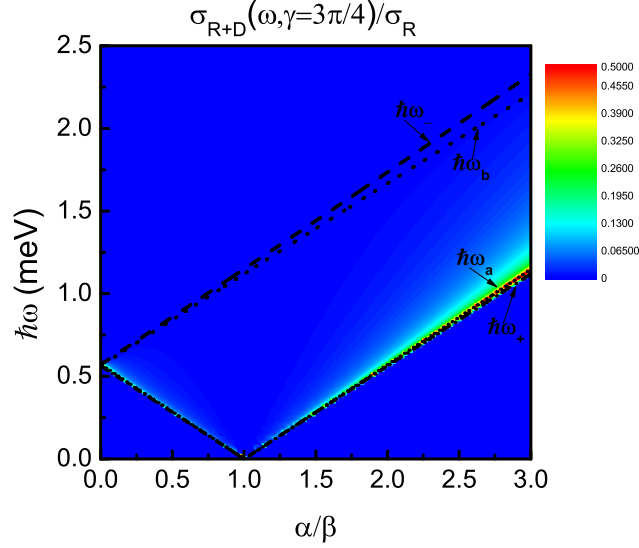


FIGURA 42.- Mapa de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ como función de $\hbar\omega$ y α/β , para $\gamma = 3\pi/4$. La absorción es significativa entre ω_+ y ω_a .

Particularmente, para el caso $\gamma = \pi/4$ se observa que el máximo de la absorción se encuentra entre ω_- y ω_b , mientras que para $\gamma = 3\pi/4$ la máxima absorción se sitúa entre ω_a y ω_+ . No obstante, en $\gamma = \pi/2$ se tiene respuesta a todas las frecuencias. Un caso especial que se puede notar es cuando $\alpha = \beta$, ya que es cuando la absorción óptica es cero. Esto se debe a que en esta situación se recupera la simetría SU(2) (Li et al., 2013). Bajo esta condición la polarización de espín se vuelve independiente del momento de los electrones, lo cual permite suprimir el mecanismo de relajación de espín de Dyakonov y Perel (Raichev, 2007).

5.5.2 Conductividad a q finita

En esta sección se estudiará la absorción óptica a q pequeña, por medio del cálculo de la parte real de la conductividad longitudinal, $\sigma_{R+D}(q, \gamma, \omega)$ (274), obtenida mediante el Método de Campo Autoconsistente, de manera que, a través de ella es posible extraer información acerca de los plasmones en el régimen de longitud de onda larga. En los cálculos se utilizarán los parámetros $\alpha = 1.6 \times 10^{-9} \text{eVcm}$, $\beta = 0.1\alpha$, $n_e = 5 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$ y $m^* = 0.055$.

La conductividad longitudinal, $\sigma(\mathbf{q}, \omega)$, relaciona una densidad de carga, $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)$, con un campo eléctrico externo, $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{q}, \omega) = -i\mathbf{q}\phi_{ext}$. La dependencia en $\mathbf{q}$ introduce no localidad espacial. Sin embargo, a q pequeña, el campo externo varía en el espacio con una longitud de onda característica mayor que las dimensiones del sistema con el que interactúa. Por lo

tanto, para propósitos generales, dicho campo externo puede ser considerado como uniforme en todo el espacio. La competencia de IEO de Rashba y Dresselhaus en el gas de electrones, introduce dependencia con respecto a la dirección de $\mathbf{q} = q(\cos \gamma, \sin \gamma)$ en la respuesta óptica del sistema. Esto, contrasta notoriamente con el caso particular de Rashba, ya que ésta no privilegia ninguna dirección en el espacio de momentos.

Tal como se vió en la sección anterior, el espectro de absorción óptica se encontrará constituida por excitaciones de tipo inter-EO. Sin embargo, a q finita aparecerán excitaciones en las que hay intercambio de momento y que de acuerdo con la sección 4.1.2 se clasifican en dos tipos: (1) excitaciones en las que el electrón gana momento $\hbar \mathbf{q}$ dadas por $\varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_-(\mathbf{k}) = \hbar \omega$, en donde $\varepsilon_-(\mathbf{k}) < \varepsilon_F < \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ y (2) transiciones en las que el electrón pierde momento, estas estaran dadas por $\varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \hbar \omega$, con $\varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) < \varepsilon_F < \varepsilon_+(\mathbf{k})$; para una descripción gráfica de estas transiciones revisar la figura 24.

Las excitaciones de tipo (1) y (2) pueden ser representadas a través de curvas de energía constante para un vector de onda $\mathbf{q} = q(\cos \gamma, \sin \gamma)$ fijo. Dichas curvas se definen como $C_r(q, \gamma, \omega) = \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_-(\mathbf{k})$, de donde cuando $\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} = qk$ se obtienen las excitaciones de tipo (1) y cuando $\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} = -qk$ se obtienen las transiciones de tipo (2).

Las figuras 43(a) y 43(b) muestran los contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y las curvas $C_r(q, \gamma, \omega)$ para los ángulos $\gamma = \theta_-$ y $\gamma = \theta_- + \pi$, respectivamente. Dichas curvas se grafican para tres valores distintos de la frecuencia ω_1, ω_2 y ω_3 , en donde $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. En ambas figuras, las transiciones que contribuirán a la absorción de energía, se encuentran representadas por aquellos puntos de las curvas $C_r(q, \gamma, \omega)$ que caen dentro de la región contenida entre $k_F^+(\theta)$ y $k_F^-(\theta)$. Nótese que al considerar q finita, el centro de las curvas $C_r(q, \gamma, \omega)$ se desplaza del origen. Este desplazamiento depende de la dirección de $\mathbf{q}$ definida por el ángulo γ . Por ejemplo en la gráfica 43(a) se aprecia que si se tiene $\gamma = \theta_-$, entonces el desplazamiento se da en la dirección $\gamma = \theta_- + \pi$. Similarmente, en la figura 43(b), la dirección de $\mathbf{q}$ se encuentra definida por $\gamma = \theta_- + \pi$ y el desplazamiento de las curvas $C_r(\mathbf{q}, \omega)$ se da a lo largo de la dirección $\gamma = \theta_-$. Nótese, que el arco de $C_r(\omega_3)$ que cae dentro de los contornos de Fermi es diferente en los cuadrantes 2do. y 4to., cosa que no sucede cuando $q = 0$ donde los contornos son simétricos (ver figura 33)

Por otro lado, la figura 44 (a) y 44 (b) exhiben los contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y las curvas $C_r(\mathbf{q}, \omega)$ para (a) $\gamma = \theta_+$ y (b) $\gamma = \theta_+ + \pi$. En estas figuras se observa nuevamente que la dirección de $\mathbf{q}$ determina el desplazamiento de las curvas de energías constante. De manera que si se escoge $\gamma = \theta_+$, la curva $C_r(\mathbf{q}, \omega)$ se desplaza en la dirección de $\gamma = \theta_+ + \pi$, mientras que si se toma $\gamma = \theta_+ + \pi$, entonces, $C_r(\mathbf{q}, \omega)$ se desplaza a lo largo de la dirección $\gamma = \theta_+$.

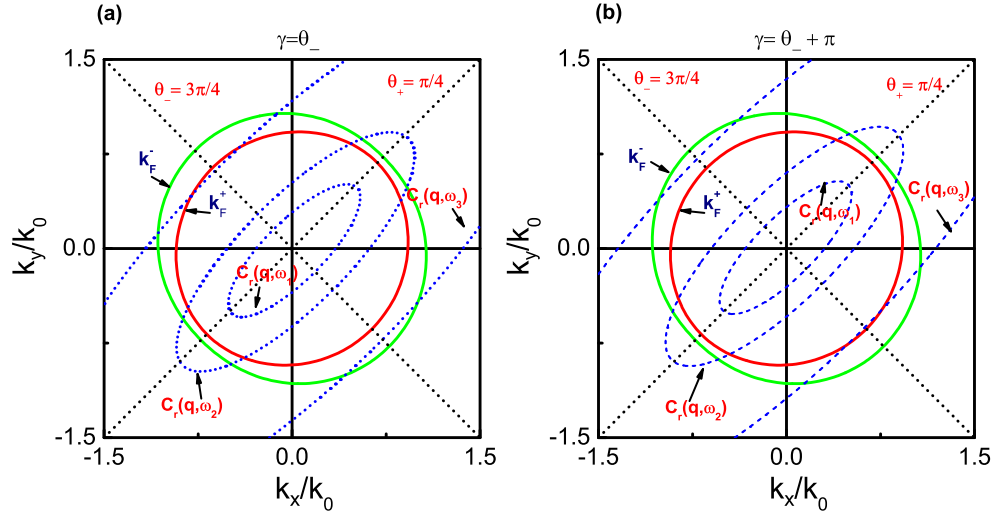


FIGURA 43.- Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y curvas de energía constante $C_r(q, \gamma, \omega) = \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_-(\mathbf{k})$. Dichas curvas son calculadas para q constante y para (a) $\gamma = \theta_-$ y (b) $\gamma = \theta_- + \pi$. Se presentan las curvas para tres valores distintos de la energía $\hbar\omega$ con $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Note que considerar $\gamma = \theta_-$ resulta en el desplazamiento de $C_r(q, \gamma, \omega)$ en la dirección $\gamma = \theta_- + \pi$, mientras que si $\gamma = \theta_- + \pi$, entonces el desplazamiento se da a lo largo $\gamma = \theta_-$.

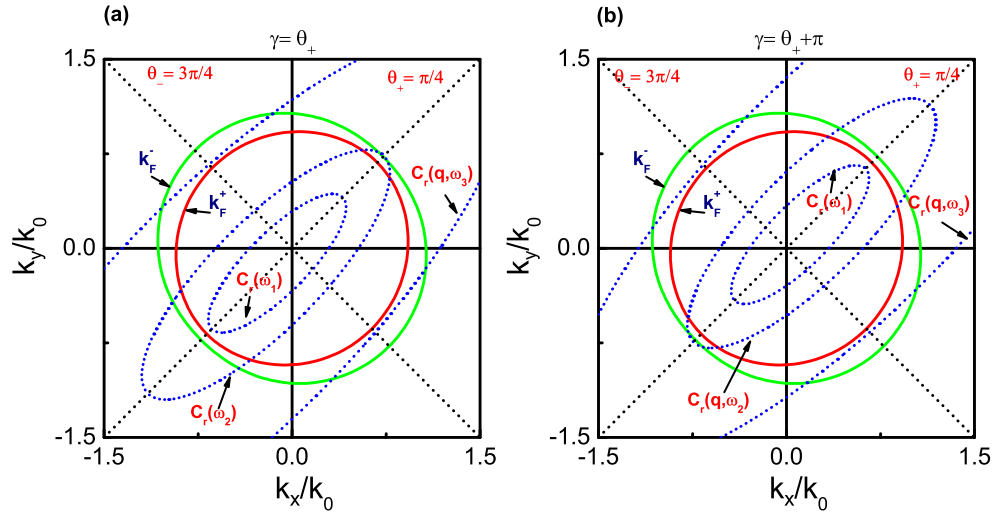


FIGURA 44.- Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y curvas de energía constante $C_r(q, \gamma, \omega)$ para q constante con (a) $\gamma = \theta_+$ y (b) $\gamma = \theta_+ + \pi$. Se presentan las curvas para tres valores distintos de la energía $\hbar\omega$, donde $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Nótese que considerar q finita desplaza las curvas $C_r(q, \gamma, \omega)$ en sentido opuesto a $\mathbf{q}$.

En consecuencia, el arco de $C_r(\omega)$ que cae dentro de los contornos $k_F^\pm$ es diferente en los cuadrantes 1o. y 3ro. Esto puede apreciarse claramente con $C_r(\omega_3)$.

Cabe señalar, que para q y γ fijos, la mínima energía en la cual habrá una contribución a la absorción se presentará a la frecuencia $\omega'_+(q, \gamma)$, definida por $C_r(q, \gamma, \omega'_+) = k_F^+(\theta)$. Similar-

mente, la máxima energía en la que se produce una contribución al espectro de absorción será a la frecuencia $\omega'_-(q, \gamma)$, para la que se cumple $C_r(q, \gamma, \omega'_-) = k_F^-(\theta)$. También habrá otras dos frecuencias, $\omega'_a(q, \gamma)$ y $\omega'_b(q, \gamma)$, las cuales satisfacen las relaciones $C_r(q, \gamma, \omega'_a) = k_F^-(\theta)$ y $C_r(q, \gamma, \omega'_b) = k_F^+(\theta)$.

Las frecuencias $\omega'_+(q, \gamma)$ y $\omega'_-(q, \gamma)$ definen las fronteras de mínima y máxima energía de la zona de amortiguamiento inter-EO estudiada en la subsección 4.5.2. En la figura 45 se expone el comportamiento de dichas frecuencias como función de q para distintos valores de γ . Los resultados demuestran que $\omega'_\pm(q, \gamma)$, $\omega'_a(q, \gamma)$ y $\omega'_b(q, \gamma)$ pueden modificarse al variar γ , lo cual implica que el espectro de absorción también se modificará. Esto contrasta con el caso en que sólo se tiene IEO de Rashba, ya que debido a la isotropía que presentan las bandas de energía las frecuencias son independientes de la dirección de $\mathbf{q}$, de manera que $\omega'_\pm(q, \gamma) \rightarrow \omega_\pm(q)$. Estas últimas definidas por las ecuaciones (124) y (126). Cabe

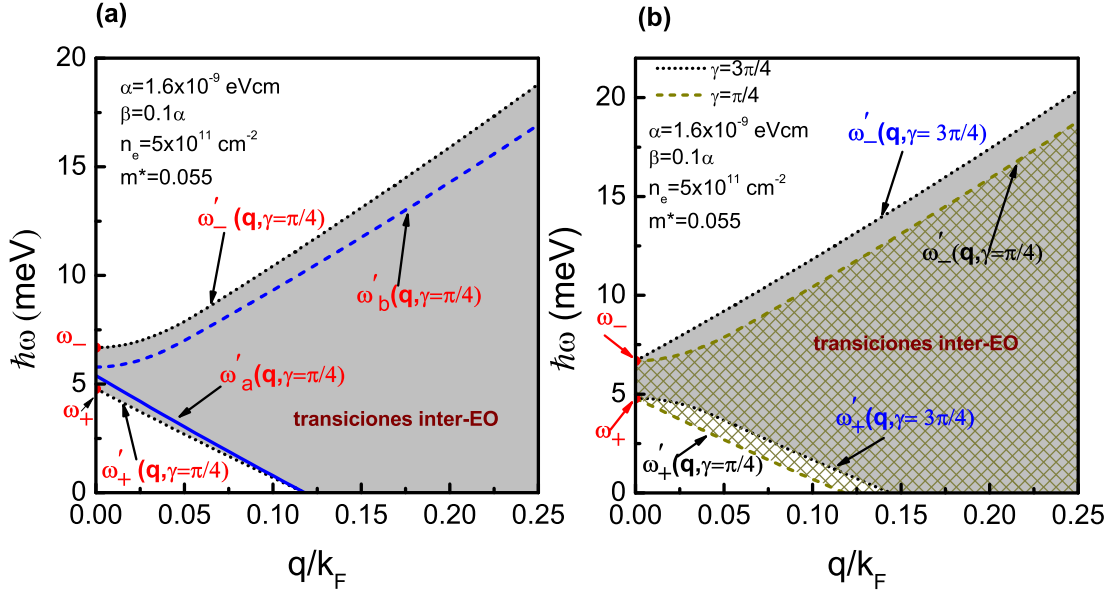


FIGURA 45.- (a) Continuo de excitaciones de pares electrón-hueco inter-EO como función de q para $\gamma = \pi/4$. Se muestra que el espectro se encuentra acotado por las frecuencias $\omega'_+(q, \gamma = \pi/4)$ y $\omega'_-(q, \gamma = \pi/4)$. Así mismo se muestran las frecuencias intermedias $\omega'_a(q, \gamma = \pi/4)$ y $\omega'_b(q, \gamma = \pi/4)$. Las frecuencias $\omega'_\pm(q, \gamma)$ se modifican al variar γ ; en (b) se analizan los casos $\gamma = \pi/4$ y $\gamma = 3\pi/4$. Cabe notar que, a $q = 0$, $\omega'_\pm(q, \gamma) = \omega_\pm$ y $\omega'_a(q, \gamma) = \omega_a$, $\omega'_b(q, \gamma) = \omega_b$.

mencionar, que tanto en el caso isotrópico como en el anisotrópico, cuando $q \rightarrow 0$ se obtiene que $\omega'_\pm(q, \gamma) \approx \omega_\pm$, $\omega'_a(q, \gamma) \approx \omega_a$ y $\omega'_b(q, \gamma) \approx \omega_b$, las cuales son las frecuencias característica del espectro de absorción óptico estudiado en la sección anterior (ecuaciones (219), (220) y (221))

Para entender el efecto de $\mathbf{q}$ sobre el espectro de absorción, se presentarán una serie de

estudios en los cuales se calcula la parte real de $\sigma(q, \gamma, \omega)$, normalizada al valor constante $\sigma_R = e^2/16\hbar$. Los resultados serán expresados en función de $\omega_p = (2\pi n_e e^2 q / \epsilon_s m^*)^{1/2}$, la cual es proporcional a $q^{1/2}$. La intención es poder comparar los resultados que se deriven con los que se obtuvieron al analizar los plasmones en la sección 4.5.

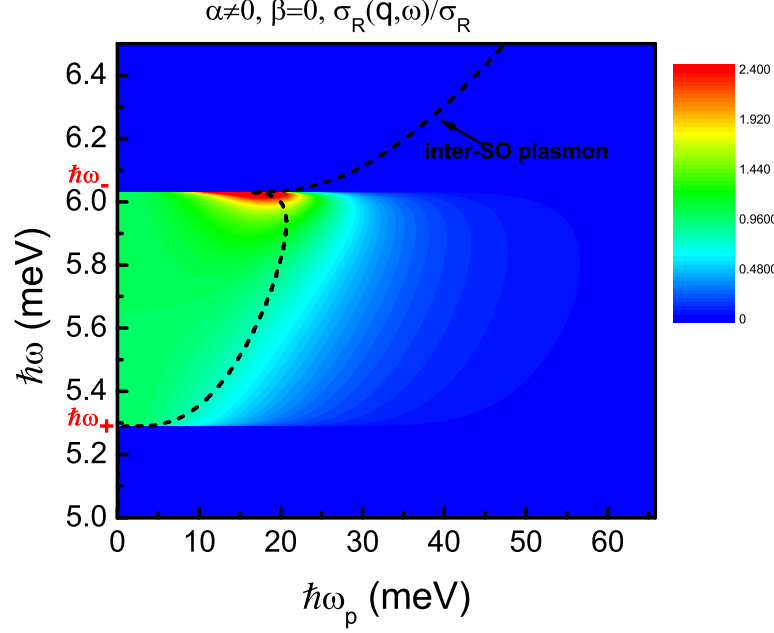


FIGURA 46.- Conductividad $\sigma_R(q, \omega)$ y la relación de dispersión del plasmón inter-EO en el límite de longitud de onda larga para el caso de IEO de Rashba. La region contenida entre ω_+ y ω_- corresponde a la zona de amortiguamiento de Landau a $q = 0$.

La figura 46 muestra el espectro de absorción de un GE2D bajo la acción del campo espín-órbita de Rashba. Así mismo, se exhibe la relación de dispersión con backbending de los plasmones-IEO en el límite de longitud de onda larga, discutidos en la subsección 4.5.1. Los resultados muestran que la absorción es distinta de cero para valores de ω_p tales que $q \sim 0$. Por lo tanto, las características del espectro de absorción serán muy parecidas a las del caso óptico. De esto se deriva que las fronteras del espectro serán $\omega'_\pm(q) \approx \omega_\pm$ (para $\beta = 0$), las cuales definen la frontera de la zona de amortiguamiento de Landau inter-EO a $q = 0$. Además, es posible observar que dichas frecuencias corresponden a las frecuencias de dos plasmones ópticos inter-EO, tal como se ha reportado (Yuan et al., 2005).

En el caso de IEO con $\Omega(\mathbf{k})$ Rashba + Dresselhaus, la respuesta es anisotrópica y depende de γ . En la figura 47 (a) se presenta el espectro de absorción para $\gamma = \pi/2$ y para distintos valores de $\hbar\omega_p$. Como se puede apreciar, dicho espectro se encuentra delimitado por las frecuencias ω_+ y ω_- , así mismo, se observa que la absorción es máxima a las frecuencias ω_a y

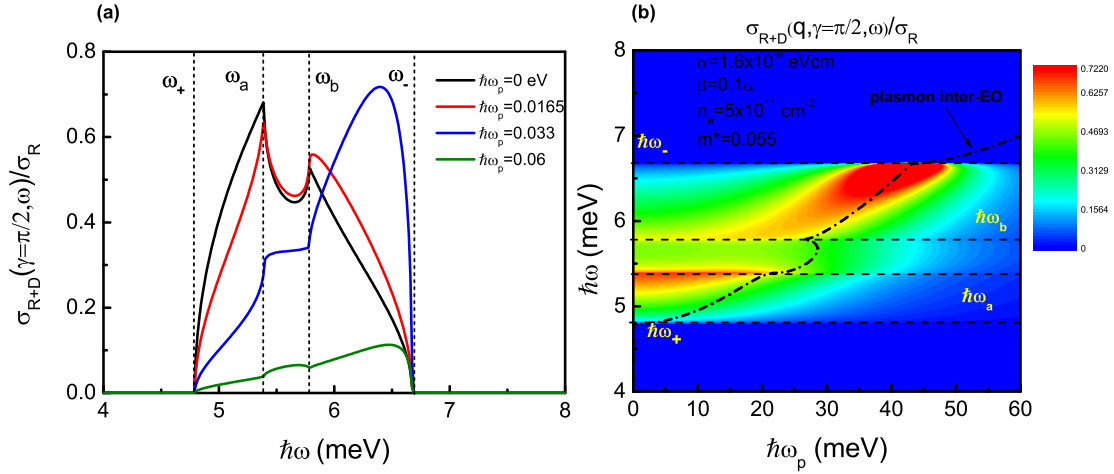


FIGURA 47.- (a) Conductividad inter-EO Vs la energía $\hbar\omega$ para diferentes valores de ω_p ($\sim q^{1/2}$). (b) Mapa de la conductividad $\sigma(q, \gamma = \pi/2, \omega)$ y el plasmón inter-EO. Las conductividades se encuentran normalizadas a la conductividad de Rashba a $q = 0$.

ω_b . En la gráfica 47 (b) se presenta $\sigma_{R+D}(q, \gamma = \pi/2, \omega)$ para valores continuos de ω_p y se ha superpuesto la relación de dispersión con *backbendig* de los plasmones inter-EO para el caso anisotrópico. De esta gráfica, puede verse que la absorción es maxima para $q \sim 0$. Además, $\omega_{\pm}$, $\omega_{a,b}$ corresponden a frecuencias a las cuales se excitan los plasmones ópticos inter-EO característicos del GE2D en presencia de IEO anisotrópica.

Las figuras 48 (a) y 48 (b) exhiben el espectro de absorción y la relación de dispersión de los plasmones inter-EO para $\gamma = \pi/4$ y $\gamma = 3\pi/4$, respectivamente. De estas figuras es

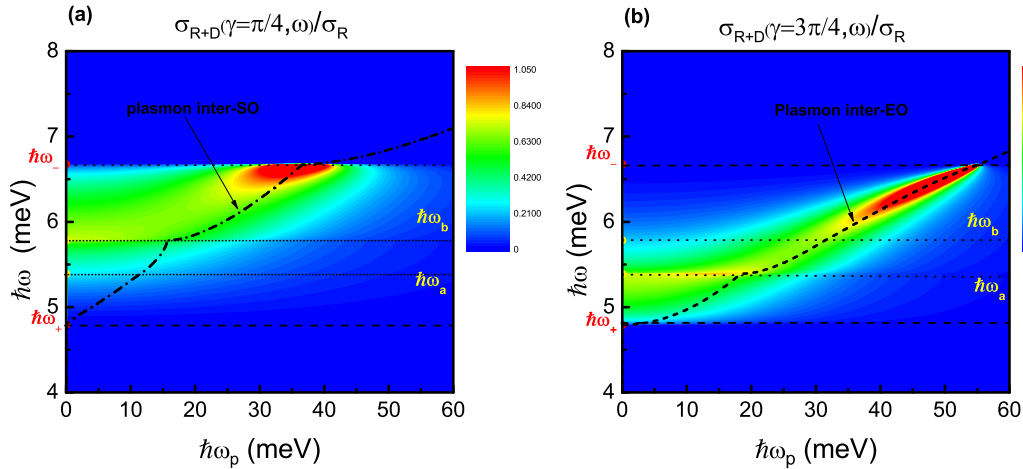


FIGURA 48.- Mapa de la conductividad $\sigma(q, \gamma, \omega)$ para valores continuos de ω y $\hbar\omega_p$, así como el plasmón inter-EO para (a) $\gamma = \theta_+$ y (b) $\gamma = \theta_-$. La conductividad se encuentra normalizada a la conductividad de Rashba

posible apreciar que la absorción puede modificarse al variar la dirección del campo eléctrico

externo. Para el caso $\gamma = \pi/4$ se observa que la absorción presentará un máximo en ω_b , mientras que en $\gamma = 3\pi/4$ el máximo se encuentra en ω_a , donde ω_a y ω_b corresponden a frecuencias de plasmones ópticos inter-EO. Este hecho abre la posibilidad de seleccionar la frecuencia del plasmón (amortiguados) inter-EO a través de variar la dirección de potenciales eléctricos externos.

5.6 Conclusiones

En este capítulo se estudió el espectro de absorción para un GE2D en presencia de IEO mediante la conductividad eléctrica. Para ello, se calculó una expresión generalizada para la conductividad longitudinal por medio del Método de Campo Autoconsistente, el cual permite tomar en cuenta la interacción electrón-electrón de manera efectiva.

Se observó que el espectro de absorción óptica en el caso de interacción anisotrópica ($\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$) se encuentra acotado por las frecuencias ω_+ y ω_- , las cuales dependen de α y β y caracterizan la mínima y la máxima energía que se necesita para realizar una transición óptica. Además, se demostró la existencia de máximos de absorción a las frecuencias ω_a y ω_b , cuya posición también depende de las intensidades de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus. Así mismo, se observó que la intensidad de dichos máximos puede modularse variando el ángulo γ . Este, es un resultado nunca antes explorado, el cual abre la posibilidad de manipular la respuesta óptica a través de potenciales eléctricos externos.

Cabe mencionar, que la conductividad longitudinal puede escribirse en términos del tensor de conductividad en la forma $\sigma(\gamma, \omega) = \sigma_{ij}\hat{q}_j\hat{q}_i$, donde $\hat{q}_x = \cos\gamma$ y $\hat{q}_y = \sin\gamma$, de lo cual se obtiene que $\sigma_{R+D}(\gamma, \omega) = \sigma_{xx}(\omega) + \sigma_{xy}(\omega)\sin 2\gamma$. En el caso particular de $\gamma = \pi/2$ se reproducen los resultados obtenidos por Maytorena et al. (Maytorena et al., 2006).

La dependencia en γ en el espectro de absorción se debe a la anisotropía que presentan las subbandas de energía como consecuencia de la IEO Rashba + Dresselhaus. Esta anisotropía se hace evidente de manera óptica a través del cociente $\sigma_{R+D}(\gamma = \theta_-, \omega)/\sigma_{R+D}(\gamma = \theta_+, \omega) = (\sigma_{xx} - \sigma_{xy})/(\sigma_{xx} + \sigma_{xy})$, esto es, la comparación entre σ_{R+D} en la dirección θ_+ de mínimo splitting y la dirección θ_- de máximo splitting. Cuando $\beta = 0$, dicho cociente es 1.

De los resultados obtenidos del estudio a q pequeña, se demostró que las frecuencias $\omega_{\pm}$, ω_a y ω_b que caracterizan al espectro de absorción óptica también corresponden a las frecuencias de excitación de plasmones ópticos inter-EO, los cuales se encuentran en la vecindad del continuo de transiciones de pares electrón-hueco inter-EO.

Los resultados obtenidos muestran que la respuesta óptica anisotrópica causada por la presencia de Rashba+Dresselhaus, puede ser modulada a través de variar la dirección de

potenciales eléctricos externos y no sólo variando α , o bien la frecuencia. Esto, sugiere nuevas formas de manipulación que podrían ser de gran utilidad en el desarrollo de aplicaciones espintrónicas.

Conductividad óptica: términos de Rashba + Dresselhaus lineal y Dresselhaus cúbico en el momento $\mathbf{k}$

Es bien sabido que la presencia de la IEO de Rashba y Dresselhaus lineal en el momento, $\mathbf{k}$, introducen interesantes efectos sobre las eigenenergías de un GE2D. Específicamente, causan un desdoblamiento anisotrópico de las subbandas de espín, lo cual se ve reflejado en el continuo de transiciones de partícula simple, los plasmones y el espectro de absorción óptica. Sin embargo, en el caso $\alpha = \beta$, la absorción óptica es cero y la relación de dispersión de los plasmones desaparece. Esto, debido a que en $\alpha = \beta$ los estados de espín son independientes del momento, por lo que no sufren dispersión (Bernevig et al., 2006). Sin embargo, estudios recientes (Li et al., 2013) han demostrado que dicho fenómeno cuántico puede ser suprimido al considerar la contribución cúbica en el momento de la IEO de Dresselhaus.

En este capítulo presentaremos el estudio de la conductividad óptica cuando la IEO tiene las contribuciones de Rashba + Dresselhaus completa (ec. (30), $\beta \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$). Se analizará la conductividad óptica longitudinal (278) para distintas direcciones del campo eléctrico externo. Así mismo, se presentarán los resultados para distintos valores de los parámetros de acoplamiento espín-órbita.

6.1 Propiedades del sistema

El Hamiltoniano que describe la dinámica de un electrón en el medio será:

$$H = \varepsilon_0 + H_R + H_D, \quad (285)$$

donde $\varepsilon_0 = \hbar^2 k^2 / 2m^*$; H_R y H_D representan los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus (ecuaciones (47) y (30)). El campo efectivo espín-órbita, $\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})$, que caracteriza a ésta interacción tendrá componentes

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2}\Omega_x &= (\beta k_x - \alpha k_y - \beta_3 k_x k_y^2) \\ \frac{\hbar}{2}\Omega_y &= (\alpha k_x - \beta k_y + \beta_3 k_y k_x^2), \end{aligned} \quad (286)$$

Las cuales en coordenadas polares pueden se escritas de la siguiente forma:

$$\frac{\hbar}{2}\Omega_x(k, \theta) = k [\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta - \beta_3 k^2 \cos \theta \sin^2 \theta], \quad (287)$$

$$\frac{\hbar}{2}\Omega_y(k, \theta) = k [\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta + \beta_3 k^2 \cos^2 \theta \sin \theta], \quad (288)$$

De mananera, que la magnitud $|\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})|$ puede expresarse como

$$\left| \frac{\hbar}{2}\mathbf{\Omega}(k, \theta) \right|^2 = k^2 \left[\Delta^2(\theta) - \beta_3 k^2 (\beta \sin^2(2\theta) - \alpha \sin(2\theta)) + \frac{\beta_3^2 k^4}{4} \sin^2(2\theta) \right], \quad (289)$$

donde $\Delta(\theta)$ está definida por la expresión (57). Cabe mencionar que cuando $\beta_3 = 0$, se recuperan el caso $\frac{\hbar}{2}\mathbf{\Omega}_{\beta_3=0}$ definido por la ecuación (55).

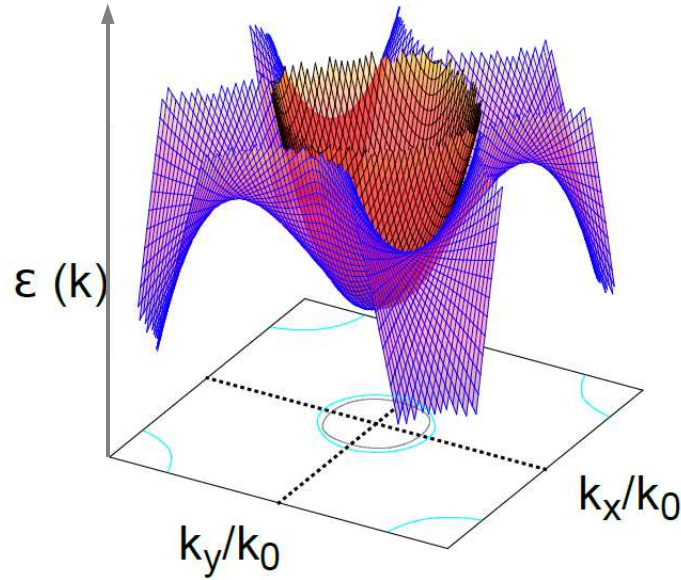


FIGURA 49.- Superficies de energía de un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus (incluyendo contribuciones cúbicas) como función del momento k_x y k_y normalizadas a $k_0 = \sqrt{2\pi n_e}$, donde n_e es la densidad electrónica.

Las igenenergías y espinores, se encuentran definidos a través de las relaciones (19) y (24), respectivamente. De manera que, las subbandas de energía se verán tal como se muestra en la figura 49 como función de las componentes de momento k_x y k_y , de donde es posible apreciar el efecto de β_3 .

Utilizando las propiedades del estado base, en la siguiente sección, se calculará el tensor σ_{ij} , que nos permitirá evaluar la conductividad longitudinal (278).

6.2 Conductividad óptica considerando términos cúbicos

El tensor de conductividad óptica, de acuerdo con el formalismo de Kubo, se expresa como

$$\sigma_{jk}(\omega) = \frac{1}{\hbar\tilde{\omega}} \int_0^\infty dt e^{i\tilde{\omega}t} \langle [j_j(t), j_k(0)] \rangle, \quad (290)$$

donde $j_j(t)$ ($j_k(0)$) es el operador de corriente dependiente del tiempo (independiente del tiempo) en la representación de interacción y $j = k = \{x, y\}$. El término $\langle [j_j(t), j_k(0)] \rangle$ representa un promedio estadístico y cuántico del conmutador y está definido como

$$\langle [j_j(t), j_k(0)] \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) \langle k, \lambda | [j_j(t), j_k(0)] | k, \lambda \rangle \quad (291)$$

Utilizando operadores unitarios definidos como $\sum_{\mathbf{k}} |k, \lambda\rangle \langle k, \lambda|$, entonces, la ecuación (291) puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle [j_j(t), j_k(0)] \rangle &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) \langle k, \lambda | j_j(t) | k', \lambda' \rangle \langle k', \lambda' | j_k(0) | k, \lambda \rangle \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) \langle k, \lambda | j_k(0) | k', \lambda' \rangle \langle k', \lambda' | j_j(t) | k, \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (292)$$

Sin embargo, como estamos estudiando el caso óptico, entonces sólo participan transiciones inter-sub-banda y no existe intercambio de momento, por lo que al realizar la suma sobre $\mathbf{k}'$ sólo nos queda el término $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, mientras que al realizar la suma sobre λ' sólo contribuirá el caso en que $\lambda' = -\lambda$. De acuerdo con esto, la ecuación (292) se simplifica a

$$\begin{aligned} \langle [j_j(t), j_k(0)] \rangle &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) \langle k, \lambda | j_j(t) | k, -\lambda \rangle \langle k, -\lambda | j_k(0) | k, \lambda \rangle \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}, \lambda} f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) \langle k, \lambda | j_k(0) | k, -\lambda \rangle \langle k, -\lambda | j_j(t) | k, \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (293)$$

Ahora, de acuerdo con la representación de Heisenberg, la evolución temporal de un operador está dada de la siguiente forma:

$$j(t) = e^{iHt/\hbar} j(0) e^{-iHt/\hbar}. \quad (294)$$

Además de la ecuación de eigenvalores

$$\begin{aligned} e^{-iHt/\hbar} |k, \lambda\rangle &= e^{-i\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})t/\hbar} |k, \lambda\rangle \\ \langle k, \lambda | e^{iHt/\hbar} &= \langle k, \lambda | e^{i\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})t/\hbar}. \end{aligned} \quad (295)$$

Entonces, utilizando (294) y (295) en (293), obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle [j_j(t), j_k(0)] \rangle &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) e^{i(\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k}))} \langle k, \lambda | j_j(t) | k, -\lambda \rangle \langle k, -\lambda | j_k(0) | k, \lambda \rangle \\ &\quad - e^{i(\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}))} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) \langle k, \lambda | j_k(0) | k, -\lambda \rangle \langle k, -\lambda | j_j(t) | k, \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (296)$$

Si sustituimos (296) en (290), considerando que el operador de corriente $j = e\hat{v}$, donde $\hat{v}$ es el operador de velocidad, y realizando la integral en el tiempo, llegamos a que la conductividad

óptica puede expresarse de la siguiente manera

$$\sigma_{jk}(\omega) = -\frac{ie^2}{\tilde{\omega}} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda} f(\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})) \left\{ \frac{\langle k, \lambda | \hat{v}_j(0) | k, -\lambda \rangle \langle k, -\lambda | \hat{v}_k(0) | k, \lambda \rangle}{\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k})} - \frac{\langle k, \lambda | \hat{v}_k(0) | k, -\lambda \rangle \langle k, -\lambda | \hat{v}_j(0) | k, \lambda \rangle}{\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})} \right\} \quad (297)$$

Ahora, al calcular los elementos de matriz, por ejemplo $\langle k, \lambda | \hat{v}_k(0) | k, -\lambda \rangle$, donde los eigenestados se encuentran determinados por la ecuación (20), se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle k, \lambda | \hat{v}_k(0) | k, -\lambda \rangle &= \int d^2k \psi(r) \int dz \phi(z) \langle \lambda | v_k(0) | -\lambda \rangle \\ &= \langle \lambda | v_k(0) | -\lambda \rangle, \end{aligned} \quad (298)$$

donde se ha considerado que $\psi(r)$ y $\phi(z)$ son ortonormales. Por lo tanto, los elementos de matriz $\langle k, \lambda | \hat{v}_k(0) | k, -\lambda \rangle \langle k, -\lambda | \hat{v}_j(0) | k, \lambda \rangle = \langle \lambda | \hat{v}_k(0) | -\lambda \rangle \langle -\lambda | \hat{v}_j(0) | \lambda \rangle$. Con esto, la ecuación (297) se simplifica a:

$$\sigma_{jk}(\omega) = -\frac{ie^2}{\tilde{\omega}} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda} f(\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})) \left\{ \frac{\langle \lambda | \hat{v}_j(0) | -\lambda \rangle \langle -\lambda | \hat{v}_k(0) | \lambda \rangle}{\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k})} - \frac{\langle \lambda | \hat{v}_k(0) | -\lambda \rangle \langle -\lambda | \hat{v}_j(0) | \lambda \rangle}{\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})} \right\}, \quad (299)$$

donde $|\lambda\rangle$ son los espinores definidos por la ecuación (24).

6.2.1 Operador velocidad

Por otra parte, el operador velocidad se define como

$$\hat{v}_l = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k_l} H(\mathbf{k}), \quad (300)$$

aquí el sub-índice l representa las componentes x y y del operador.

Para un Hamiltoniano de la forma (18) se obtiene

$$\hat{v}_l = \frac{\hbar}{m^*} k_l + \frac{1}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial k_l} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \right). \quad (301)$$

Si ahora tomamos los elementos de matriz $\langle \lambda | \hat{v}_l | -\lambda \rangle$, llegamos a

$$\langle \lambda | \hat{v}_l | -\lambda \rangle = \frac{1}{\hbar} \left\{ \langle \lambda | \sigma_x | -\lambda \rangle \frac{\partial}{\partial k_l} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_x \right) + \langle \lambda | \sigma_y | -\lambda \rangle \frac{\partial}{\partial k_l} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_y \right) \right\} \quad (302)$$

donde σ_x y σ_y son las matrices de Pauli y Ω_x y Ω_y están definidas por la ecuación (287) y

(288). Si realizamos un poco de álgebra, es posible demostrar que

$$\begin{aligned}\langle \lambda | \sigma_x | -\lambda \rangle &= -i\lambda \sin(\varphi) = -i\lambda \frac{\Omega_y}{|\mathbf{\Omega}|} \\ \langle \lambda | \sigma_y | -\lambda \rangle &= i\lambda \cos(\varphi) = i\lambda \frac{\Omega_x}{|\mathbf{\Omega}|}.\end{aligned}\quad (303)$$

para lo cual hemos utilizado la definición (23). Entonces, utilizando (303), podemos expresar los elementos de matriz como

$$\langle \lambda | \hat{v}_l | -\lambda \rangle = -\frac{i\lambda}{\hbar|\mathbf{\Omega}|} \left\{ \Omega_y \frac{\partial}{\partial k_l} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_x \right) - \Omega_x \frac{\partial}{\partial k_l} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_y \right) \right\}. \quad (304)$$

Siguiendo un procedimiento similar, es posible demostrar que $\langle -\lambda | \hat{v}_l | \lambda \rangle = -\langle \lambda | \hat{v}_l | -\lambda \rangle$.

Entonces, de manera directa de la ecuación (304) se puede ver que los elementos de matriz para los operadores de matriz $\hat{v}_x$ y $\hat{v}_y$ serán

$$\langle \lambda | \hat{v}_x | -\lambda \rangle = -\frac{i\lambda}{\hbar|\mathbf{\Omega}|} \left\{ \Omega_y \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_x \right) - \Omega_x \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_y \right) \right\}. \quad (305)$$

y

$$\langle \lambda | \hat{v}_y | -\lambda \rangle = -\frac{i\lambda}{\hbar|\mathbf{\Omega}|} \left\{ \Omega_y \frac{\partial}{\partial k_y} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_x \right) - \Omega_x \frac{\partial}{\partial k_y} \left(\frac{\hbar}{2} \Omega_y \right) \right\}. \quad (306)$$

6.3 Tensor de la conductividad óptica

De la ecuación (299) podemos obtener las cuatro componentes de la conductividad óptica. Primeramente calcularemos el caso $j \neq k$. Si consideramos que $\langle -\lambda | \hat{v}_l | \lambda \rangle = -\langle \lambda | \hat{v}_l | -\lambda \rangle$, entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{jk}(\omega) &= -\frac{ie^2}{\tilde{\omega}} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda} f(\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})) \langle \lambda | \hat{v}_j | -\lambda \rangle \langle -\lambda | \hat{v}_k | \lambda \rangle \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k})} - \frac{1}{\hbar\tilde{\omega} + \varepsilon_{-\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})} \right\},\end{aligned}\quad (307)$$

donde al utilizar la definición de las energías (ecuación (19)) se obtiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{jk}(\omega) &= -\frac{ie^2}{\tilde{\omega}\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} k dk \sum_{\lambda} \lambda f(\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})) \langle \lambda | \hat{v}_j | -\lambda \rangle \langle \lambda | \hat{v}_k | -\lambda \rangle \\ &\quad \times \frac{\frac{\hbar}{2} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})|}{(\hbar\tilde{\omega})^2 - 4 \left(\frac{\hbar}{2} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})| \right)^2}\end{aligned}\quad (308)$$

de esta ecuación se obtienen σ_{xy} y σ_{yx} al sustituir $\langle \lambda | \hat{v}_x | -\lambda \rangle$ y $\langle \lambda | \hat{v}_y | -\lambda \rangle$, respectivamente. Note que dada la simetría de la ecuación $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

Al considerar el caso $j = k$, la ecuación (308) se puede expresar como:

$$\sigma_{kk}(\omega) = -\frac{ie^2}{\tilde{\omega}\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty kdk \sum_\lambda \lambda f(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) \langle \lambda | \hat{v}_k | -\lambda \rangle^2 \frac{\frac{\hbar}{2} |\Omega(\mathbf{k})|}{(\hbar\tilde{\omega})^2 - 4 \left(\frac{\hbar}{2} |\Omega(\mathbf{k})|\right)^2} \quad (309)$$

De aquí se obtienen σ_{xx} y σ_{yy} .

6.4 Efecto de términos cúbicos

A continuación se presenta la respuesta óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ (ec. 278), para dos casos de particular interés: (i) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$ y (ii) $\alpha = \beta \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$.

6.4.1 Caso $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$

Al considerar los términos cúbicos de Dresselhaus las características generales del sistema cambian. Para empezar, la relación de dispersión de las energías es diferente a la que caracteriza el caso de Rashba y Dresselhaus lineal. Esto ocasiona que la contribución de los estados a la absorción óptica sea distinta. La figura 50 muestra el espectro de absorción óptica de un GE2D con IEO de Rashba e IEO de Dresselhaus lineal y cúbica. Los resultados fueron obtenidos utilizando valores realistas de IEO, así como densidades electrónicas y masas efectivas característicos de materiales basados en InGaAs. Particularmente se utilizaron los parámetros $\beta = 2 \times 10^{-9}$ eVcm, $\alpha = \beta/4$, $m^* = 0.055$ y $\varepsilon_F = 0.3\varepsilon(k_0)$. Aquí se ha definido $\varepsilon(k_0) = \hbar^2 k_0^2 / 2m^*$, la cual corresponde a la energía de Fermi de un GE2D sin IEO, donde $k_0 = \sqrt{2\pi n_e}$, siendo $n_e = 5 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$ la densidad electrónica del medio. En esta gráfica se presentan los resultados obtenidos para distintas orientaciones del campo eléctrico aplicado y son comparados con el caso $\beta_3 = 0$ (curva negra punteada); La curva en rojo corresponde al caso $\gamma = \theta_+$, la verde representa el caso $\gamma = \pi/2$ y la azul corresponde al caso $\gamma = \theta_-$.

Los resultados demuestran que la respuesta óptica es notablemente afectada por la presencia de la contribución cúbica. Así mismo, se observa que el espectro de absorción se puede modificar al variar la dirección del campo eléctrico externo. Dicho espectro se encuentra acotado por las frecuencias ω_1 y ω_4 , y presenta máximos de absorción a las frecuencias ω_2 y ω_3 . Estas frecuencias caracterizan energías en las cuales las curvas de energía constante $C_r(\omega)$ (definidas en la subsec. 5.5.1) intersectan los contornos de Fermi $k_F^+(\theta)$ y $k_F^-(\theta)$. Esto, puede apreciarse de manera clara en la figura 51, en donde se presentan las curvas $C_r(\omega)$, para los valores de energía (a) $\hbar\omega_1 = 2.42 \text{meV}$, (b) $\hbar\omega_2 = 2.9 \text{meV}$, (c) $\hbar\omega_3 = 3.96 \text{meV}$ y (d) $\hbar\omega_4 = 5.4 \text{meV}$. En cada uno de los casos se satisface la relación $C_r(\omega_i) = k_F^\lambda(\theta)$ para algunos valores de θ , donde $i = 1, 2, 3, 4$.

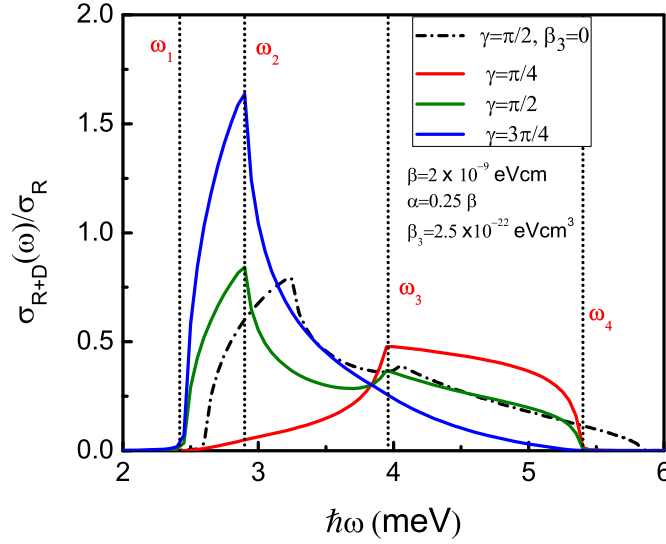


FIGURA 50.- Parte real de la conductividad óptica para distintas direcciones del campo eléctrico externo. Se grafican para $\gamma = \theta_+ = \pi/4$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \theta_- = 3\pi/4$ y se comparan con el caso $\beta_3 = 0$ a $\gamma = \pi/2$ (curva roja). Se utilizó $\beta = 2 \times 10^{-9}$ eVcm, $\alpha = 0.25\beta$ y $\beta_3 = 2.5 \times 10^{-22}$ eVcm³ (La-Rocca y de Andrada e Silva, 1997). Las frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 están relacionadas con las curvas $C_r(\omega)$ mostradas en la figura 51.

Cabe notar, que las curvas $C_r(\omega)$ reflejan el efecto de los términos cúbicos sobre las subbandas de energía. Esto puede apreciarse ya que dichas curvas contrastan con el caso de Rashba + Dresselhaus lineal, en donde las curvas $C_r(\omega)$ son elipses (ver figura 33).

La posición de las frecuencias características en el espectro de absorción depende del valor relativo de los parámetros utilizados. Esto puede comprobarse al calcular la conductividad óptica para valores distintos de α , β y β_3 , manteniendo la energía de Fermi constante, $\varepsilon_F = 0.3\varepsilon(k_0)$. La figura 52 presenta los resultados obtenidos para la absorción óptica utilizando $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, con $\beta = 0.5\alpha$ y $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-21}$ eVcm³. Aquí se ha considerado β_3 un orden de magnitud más grande que los valores típicos reportados, la intención es hacer más notorios los efectos derivados de los términos cúbicos. En dicha gráfica se analizan los espectros para las direcciones $\gamma = \theta_+$ (curva en rojo), $\gamma = \pi/2$ (curva verde) y $\gamma = \theta_-$ (curva en azul). Los resultados obtenidos son comparados con el caso anisotrópico (Rashba + Dresselhaus lineal) (curva en negro).

Para este nuevo conjunto de valores, se aprecia la aparición de frecuencias (ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4) distintas a las que se distinguen en la figura 50. El origen de dichas frecuencias puede caracterizarse a través de los contornos $C_r(\omega)$ que se presentan en la figura 53. Por ejemplo,

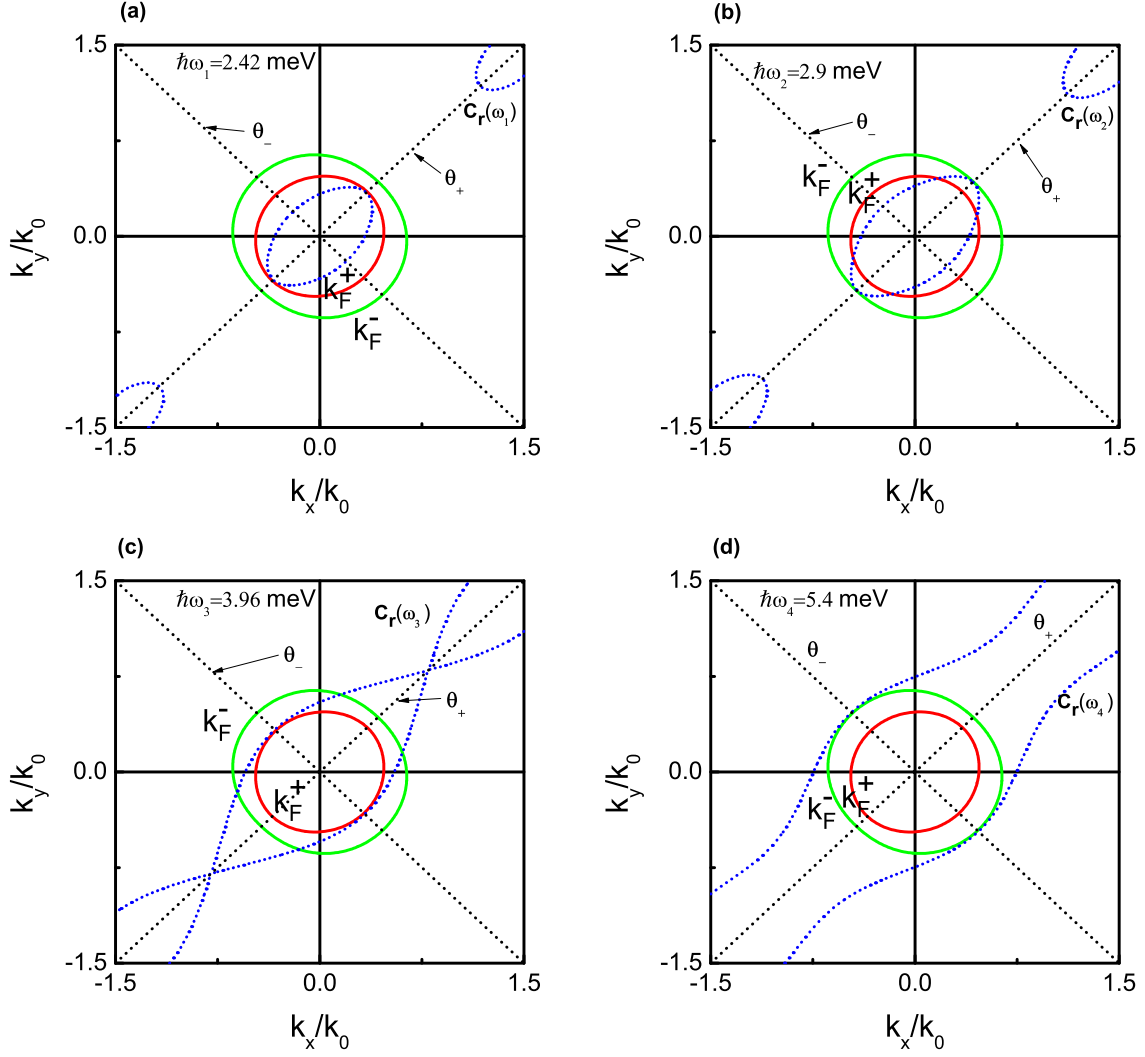


FIGURA 51.- Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO lineales de Rashba y Dresselhaus y Dresselhaus cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías (a) $\hbar\omega = 2.42\text{meV}$, (b) $\hbar\omega = 2.9\text{meV}$, (c) $\hbar\omega = 3.96\text{meV}$ y (d) $\hbar\omega = 5.4\text{meV}$. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 50.

de la gráfica 53(a) se puede ver que ω_1 aparece cuando la curva $C_r(\omega)$ toca el contorno $k_F^+(\theta)$ a lo largo del eje definido por θ_+ . Por otra parte, aunque la diferencia entre las figuras 53(b) y 53(c) es pequeña, es posible apreciar que ω_2 aparece cuando $C_r(\omega)$ toca a $k_F^-(\theta)$ en θ_+ , mientras que cuando $C_r(\omega)$ toca el borde de $k_F^-(\theta)$ en θ_- da lugar a ω_3 . Finalmente, ω_4 aparecerá cuando $C_r(\omega)$ toque a $k_F^-(\theta)$ en los cuatro puntos cerca de los ejes k_x y k_y , tal como se muestra en la figura 53(d). De estas figuras es posible notar que la presencia de los términos cúbicos de la IEO de Dresselhaus modifica notablemente las curvas $C_r(\omega)$. Por lo tanto, a partir de ellas es posible observar que los estados que contribuyen a la absorción óptica son distintos a los que participan en el caso $\beta_3 = 0$, en consecuencia, es de esperar que

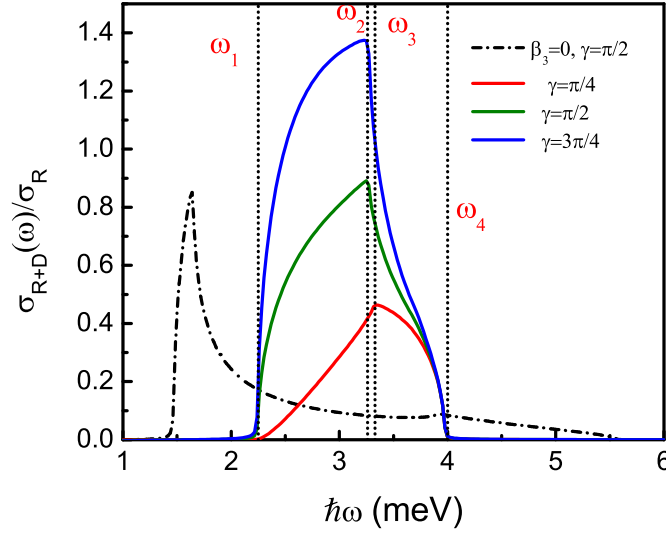


FIGURA 52.- Absorción óptica para de un GE2D con IEO lineal más Dresselhaus cúbico para distintos valores de γ , comparados con el caso anisotrópico $\beta_3 = 0$. Los espectros muestran la presencia de las frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 , las cuales están relacionadas con los procesos de absorción mostrados en la figura 53.

la absorción óptica sea diferente.

Por otro lado, para intensificar, aún más, el efecto de los términos cúbicos sobre los estados en las subbandas de energía, considere el caso hipotético sujeto a valores de IEO $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta = 4\alpha$, $\beta_3 = 3 \times 10^{-21}$ eVcm³ (un orden de magnitud mayor que el usado en la fig. 50) y $\varepsilon_F = 0.3\varepsilon(k_0)$. Para este caso, la figura 54 muestra los contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y las curvas de energía constante $C_r(\omega)$ para los valores de energía , **(a)** $\hbar\omega_2 = 6.45$ meV, **(b)** $\hbar\omega_3 = 8.63$ meV, **(c)** $\hbar\omega_4 = 14.20$ meV y **(d)** $\hbar\omega_1 = 5.8$ meV y $\hbar\omega_5 = 20.65$ meV, las cuales caracterizan el espectro de absorción óptica. Esto puede apreciarse en la figura 55 en la que se muestra la parte real de la conductividad como función de la frecuencia para distintos valores de la dirección del campo eléctrico externo: $\gamma = \theta_+$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \theta_-$. Para mostrar el efecto que introducen los términos cúbicos los espectros de absorción son comparados con el caso anisotrópico $\beta_3 = 0$ para $\gamma = \pi/2$. En la figura 55 se observa que la presencia de una contribución cúbica significativa produce cambios notables en el espectro de absorción. Particularmente, resulta reelevante la aparición de cinco frecuencias características, lo que contrasta con los casos anteriormente discutidos, en los cuales sólo existen cuatro frecuencias. Este resultado tiene su origen en el cambio de geometría en las subbandas de energía, en donde los ejes de alta simetría juegan un papel importante. De la

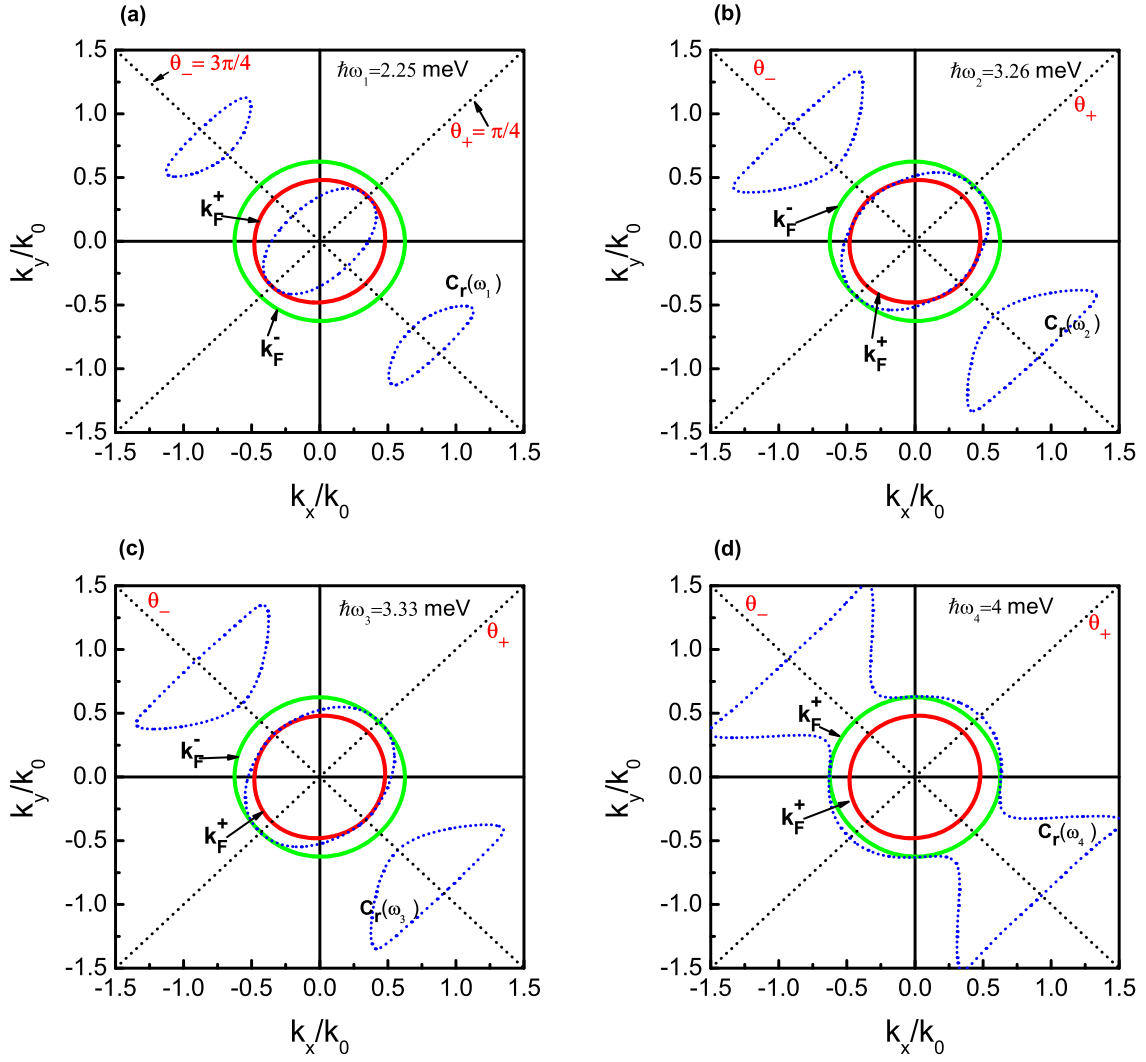


FIGURA 53.- Contornos de Fermi y curvas $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO lineales de Rashba y Dresselhaus y Dresselhaus cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías (a) $\hbar\omega = 2.25\text{meV}$, (b) $\hbar\omega = 3.26\text{meV}$, (c) $\hbar\omega = 3.33\text{meV}$ y (d) $\hbar\omega = 4\text{meV}$. Se utilizó $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}\text{eVcm}$, $\beta = 0.5\alpha$ y $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-21}\text{eVcm}^3$, con $E_F = 0.3E(k_0)$.

figura 54(d), se puede observar que la frontera en la absorción óptica asociada a ω_1 satisface la condición $C_r(\omega_1) = k_F^+(\theta_+)$ mientras que en la frontera relacionada con ω_5 la curva $C_r(\omega_5)$ intersecta el contorno $k_F^-(\theta)$ en cuatro puntos a la vez. Similarmente, de 54(a), 54(b) y 54(c), puede notarse que ω_2 , ω_3 y ω_4 satisfacen las relaciones $C_r(\omega_2) = k_F^-(\theta_+)$, $C_r(\omega_2) = k_F^+(\theta_-)$, $C_r(\omega_3) = k_F^-(\theta_-)$, respectivamente.

A manera de resumen, podemos decir que en esta sección se demostró que la presencia de $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\beta_3 \neq 0$, modifica las subbandas de energía, lo cual se refleja directamente en el espectro de absorción óptica. Estos resultados concuerdan con lo reportado por Z. Li et al. (Li et al., 2013), quienes sólo estudiaron la respuesta longitudinal σ_{xx} , por lo que no

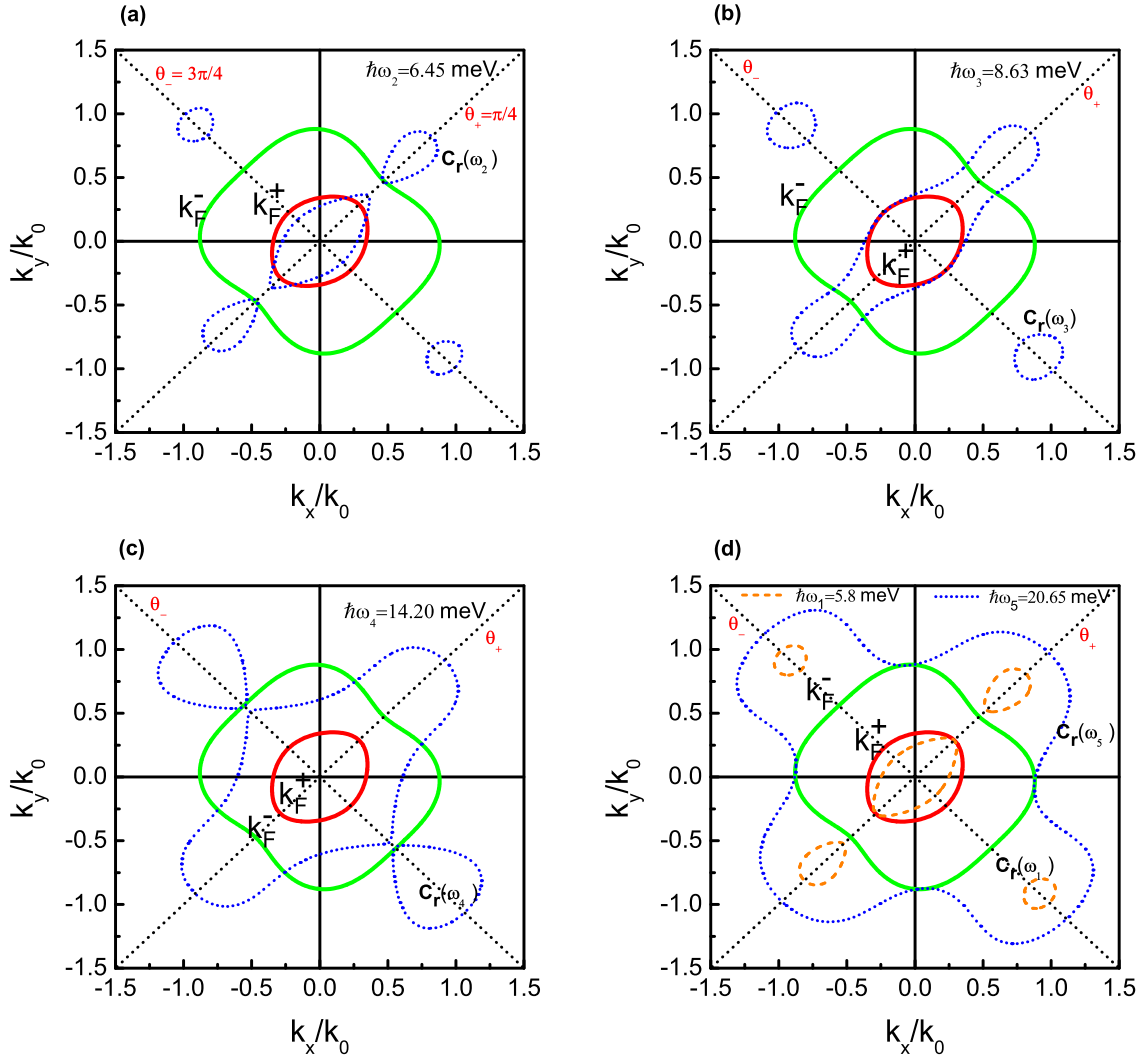


FIGURA 54.- Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus lineal y cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías (a) $\hbar\omega_2 = 6.45$ meV, (b) $\hbar\omega_3 = 8.63$ meV, (c) $\hbar\omega_4 = 14.20$ meV y (d) $\hbar\omega_1 = 5.8$ meV y $\hbar\omega_5 = 20.65$ meV. Se utilizaron los parámetros $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta = 4\alpha$, $\beta_3 = 3 \times 10^{-21}$ eVcm³ y $\varepsilon_F = 0.3\varepsilon(k_0)$.

exploraron la respuesta como función de γ . Sin embargo, nuestros resultados demuestran que variar γ introduce notables cambios en la conductividad, de manera que, se abre la posibilidad de manipular la absorción óptica a través de potenciales eléctricos externos. Así mismo, se observó que el aumento en la magnitud de β_3 puede dar lugar a la aparición de nuevos ejes de alta simetría en los contornos de Fermi, los cuales se relacionan con el número de frecuencias críticas que caracterizan el espectro de absorción.

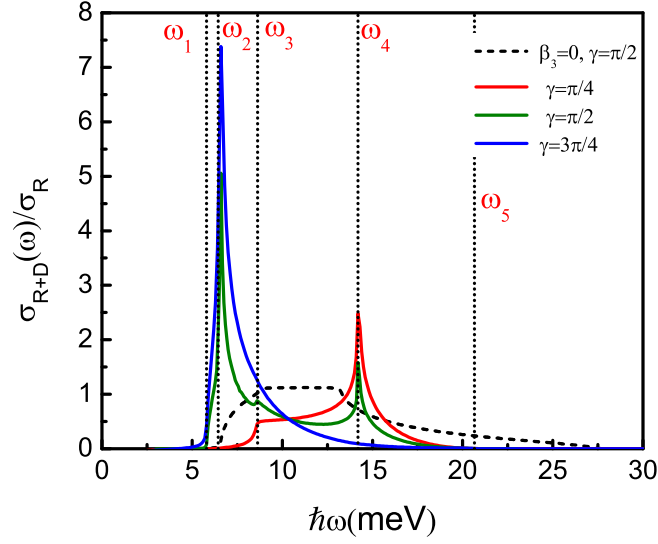


FIGURA 55.- Parte real de la conductividad óptica para distintas direcciones del campo eléctrico externo. Se grafican para $\gamma = \pi/4$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = 3\pi/4$ y se comparan con el caso $\beta_3 = 0$ a $\gamma = \pi/2$ (curva roja). Se utilizó $\alpha = 1.6 \times 10^{-9} \text{eVcm}$, $\beta = 4\alpha$ y $\beta_3 = 3 \times 10^{-21} \text{eVcm}^3$. Las frecuencias ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 y ω_5 están relacionadas con las curvas $C_r(\omega)$ mostradas en la figura 54.

6.4.2 Caso $\alpha = \beta$, $\beta_3 \neq 0$

En el caso particular en que $\alpha = \beta$ y $\beta_3 = 0$, se presenta un fenómeno muy particular, del cual ya se ha comentado antes. En dicha situación, los estados espín pierden su dependencia con respecto al momento, por lo que no sufren dispersión. Este fenómeno físico se debe a lo que se conoce como recuperación de la simetría SU(2) (Bernevig et al., 2006) y se encuentran caracterizadas por superficies de energía ε_+ y ε_- cuyos contornos de Fermi tienen la apariencia de dos círculos desplazados del origen; tal como se muestra en la figura 56 (a). Bajo esta situación la contribución EO al espectro de absorción óptica se anula para todas las frecuencias (Maytorena et al., 2006). No obstante, se sabe que la contribución cúbica a la IEO de Dresselhaus permite romper con la simetría SU(2) (Bernevig et al., 2006), lo cual da lugar nuevamente a efectos de dispersión por lo que, aún en el caso $\alpha = \beta$, se tiene respuesta óptica no nula (Li et al., 2013). La figura 56(b) exhibe los contornos de Fermi para un sistema en donde se toma en cuenta $\alpha = \beta$ y se considera la contribución cúbica del acoplamiento Dresselhaus. En ella, se aprecia que la ruptura de la simetría SU(2) se encuentra relacionada con el rompimiento de la degeneración que las subbandas presentan a lo largo de la dirección θ_+ .

A continuación, se presenta el estudio de la conductividad óptica $\sigma(\gamma, \omega)$ (ec. (278)),

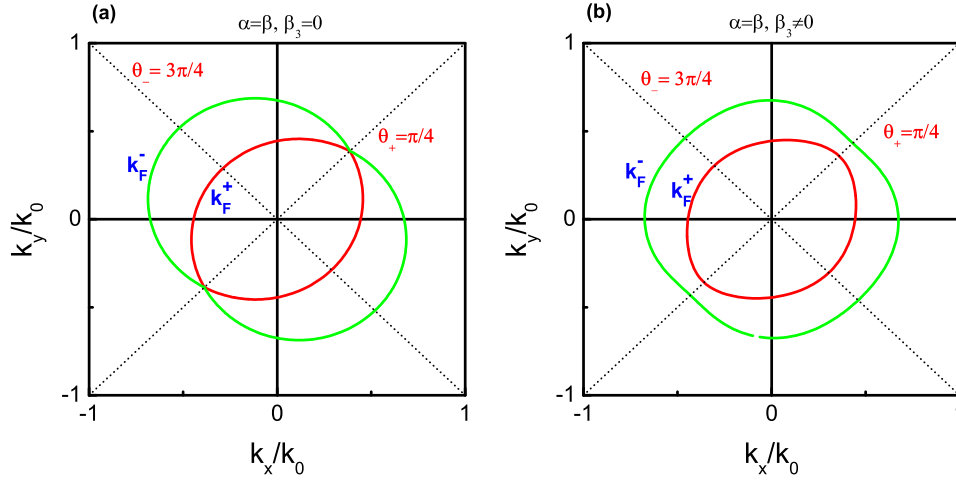


FIGURA 56.- Contornos de Fermi correspondientes a un GE2D en presencia de IEO de Rashba y Dresselhaus lineal (con $\alpha = \beta$) más Dresselhaus cúbico (caracterizado por β_3). (a) En $\beta_3 = 0$ se recuperan las simetrías SU(2) y las superficies de energía se vuelven degeneradas en la dirección θ_+ adquiriendo el aspecto de dos círculos desplazados del origen. (b) En el caso $\beta_3 \neq 0$ se rompe con las simetrías SU(2), lo cual se traduce en el rompimiento de la degeneración que se observa en el caso $\beta_3 = 0$ a lo largo de θ_+ .

para $\alpha = \beta$ y $\beta_3 \neq 0$. La figura 57 (a) presenta la conductividad óptica como función del ángulo γ y normalizada al valor constante $\sigma_R = e^2/16\hbar$. Se presentan los resultados para $\alpha = \beta = 2 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta_3 = 2.5 \times 10^{-22}$ eVcm³ y $\varepsilon_F = 0.3(k_0)$ para $\gamma = \theta_+$, $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \theta_-$. En esta figura se observa que el espectro presentará un máximo a la frecuencia

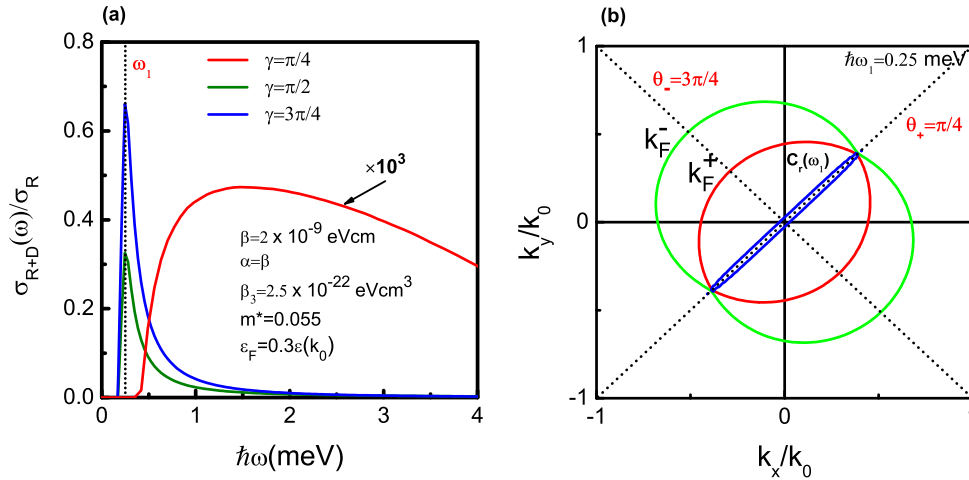


FIGURA 57.- (a) Absorción óptica de un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus considerando términos cúbicos para $\gamma = \theta_+$ (curva roja multiplicada por un factor de 10^3), $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = \theta_-$. (b) Contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y curvas de energía constante $C_r(\omega)$. En $\hbar\omega_1 = 0.25$ meV, se satisface la relación $C_r(\omega_1) = k_F^-(\theta_+)$, lo que da lugar al máximo que se observa en el espectro de absorción.

ω_1 para los ángulos $\gamma = \pi/2$ y $\gamma = 3\pi/4$, mientras que se suprime notoriamente a $\gamma = \pi/4$.

Dicho máximo en la conductividad se encuentra constituido por las transiciones representadas en la figura 57 **(b)**, las cuales aparecen como resultado del rompimiento de la degeneración de las subbandas de energía a lo largo de la dirección definida por el ángulo θ_+ .

De acuerdo con los análisis realizados en ejemplos anteriores, se sabe que cada vez que las curvas de energía constante $C_r(\omega)$ y los contornos de Fermi cumplen con la relación $C_r(\omega) = k_F^\lambda(\theta)$ para un θ fijo, entonces a la frecuencia ω el espectro de absorción presentará estructura. De esta manera, en $\hbar\omega_2 = 5.65$ meV y $\hbar\omega_3 = 9.7$ meV (mostradas en la figura 58) se esperaría que la absorción óptica presentara algún tipo de respuesta. Sin embargo, del espectro mostrado en 57 (a) se puede observar que a esas frecuencias la respuesta óptica es muy pequeña. Esto se debe a que al considerar $\beta_3 = 2.5 \times 10^{-22}$ eVcm³, se rompe

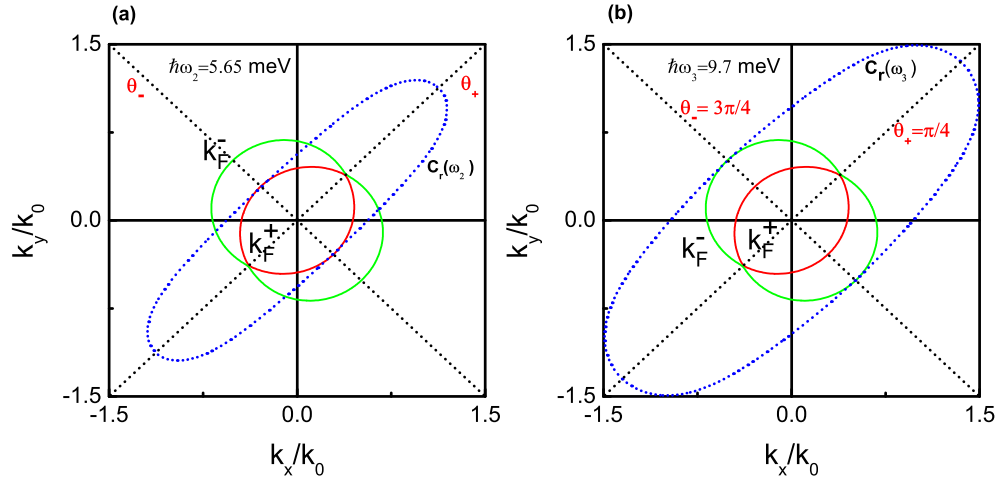


FIGURA 58.- Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$. Se muestran los casos **(a)** $C_r(\omega_2) = k_F^+(\theta_-)$ y **(b)** $C_r(\omega_3) = k_F^-(\theta_-)$.

la degeneración a lo largo de θ_+ , no obstante, la pérdida de simetría en las superficies de energía es mínima y no es suficiente para obtener respuesta óptica a todas las frecuencias. Pero, si se incrementa la intensidad de β_3 , entonces, es posible aumentar la falta de simetría en los contornos de Fermi, lo que en principio permitirá obtener una respuesta óptica distinta de cero como función de la frecuencia.

La figura 59, exhibe los contornos de Fermi $k_F^\lambda(\theta)$ y las curvas $C_r(\omega)$ calculados para $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta = \alpha$, $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-21}$ eVcm³ y $\varepsilon_F = 0.3\varepsilon(k_0)$. Note que se ha utilizado β_3 un orden de magnitud mayor (como en la figura 53) que en el caso anterior. Como puede apreciarse, considerar esta magnitud en la contribución cúbica a la IEO, suprime la degeneración de las subbandas de energía en θ_+ , y además, rompe notablemente con la simetría circular que los contornos de Fermi exhiben en el caso $\beta_3 = 0$ (ver figura 56(a)). Este

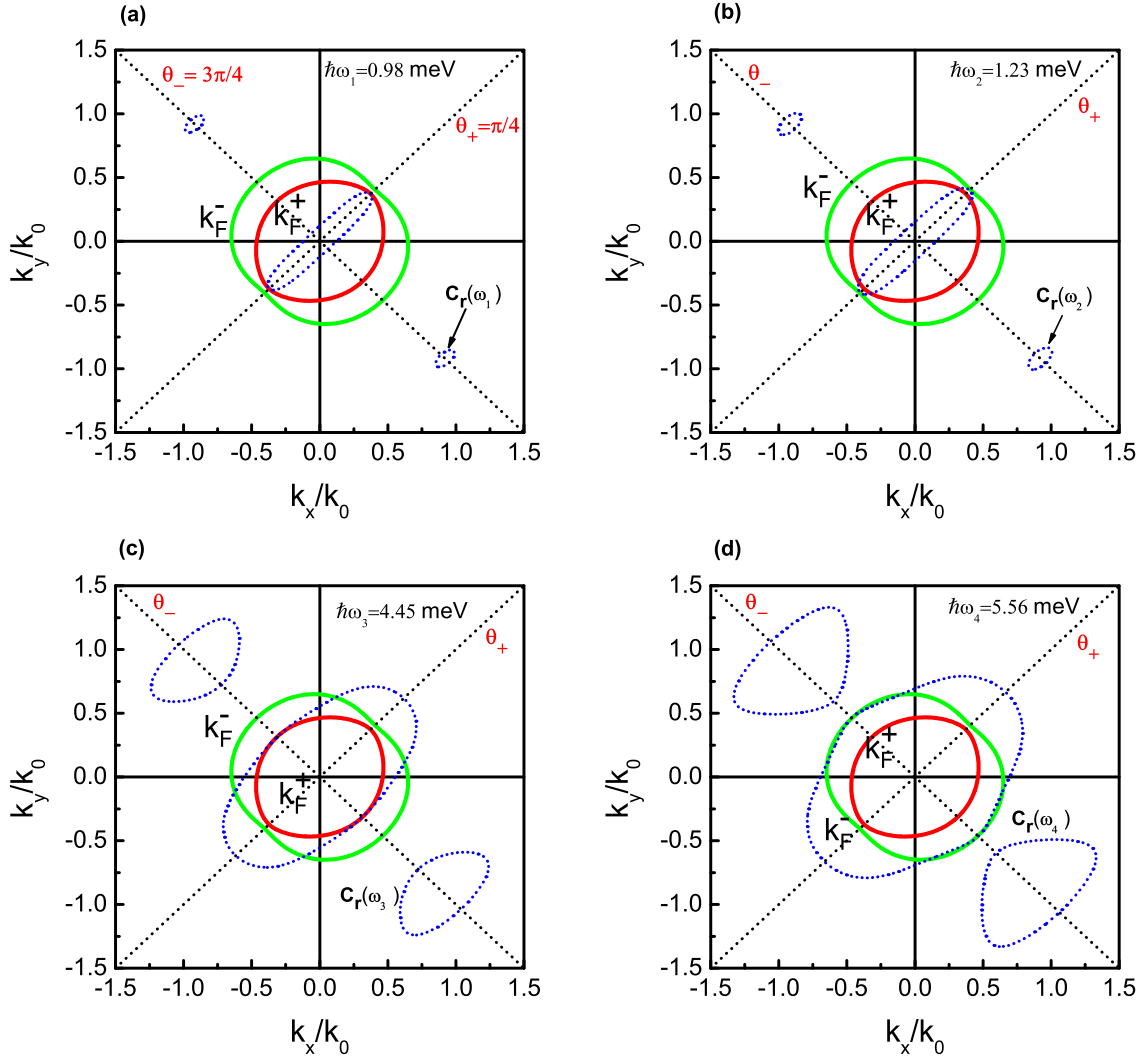


FIGURA 59.- Contornos de Fermi y curvas de energía constante $C_r(\omega)$ para un GE2D con IEO lineales de Rashba y Dresselhaus y Dresselhaus cúbico. Se muestran las curvas $C_r(\omega)$ para las energías características de la figura 60: (a) $\hbar\omega_1 = 0.98$ meV, (b) $\hbar\omega_2 = 1.23$ meV, (c) $\hbar\omega_3 = 4.45$ meV y (d) $\hbar\omega_4 = 5.56$ meV. Se utilizó $\alpha = 1.6 \times 10^{-9}$ eVcm, $\beta = \alpha$ y $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-21}$ eVcm³, con $E_F = 0.3E(k_0)$.

hecho se ve reflejado directamente en el espectro de absorción mostrado en la figura 60, en donde se expone la respuesta óptica para distintas direcciones γ . De aquí es posible apreciar que la absorción se encuentra acotada por las frecuencias ω_1 y ω_4 , así mismo se observa que habrá máximos relativos en ω_2 y ω_3 . Tales frecuencias se encuentran asociadas a las anergías $\hbar\omega_1 = 0.98$ meV, $\hbar\omega_2 = 1.23$ meV, $\hbar\omega_3 = 4.45$ meV y $\hbar\omega_4 = 5.56$ meV representadas a través de los contornos de la figura 59. En 59(a) se demuestra que la frecuencia ω_1 aparecerá cuando $C_r(\omega) = k_F^+(\theta_+)$, mientras que de 59(b) se puede ver que ω_2 es generada cuando $C_r(\omega) = k_F^-(\theta_+)$. Por otro lado, cuando $C_r(\omega) = k_F^+(\theta_-)$ se obtiene ω_3 y cuando $C_r(\omega) = k_F^-(\theta_-)$ se

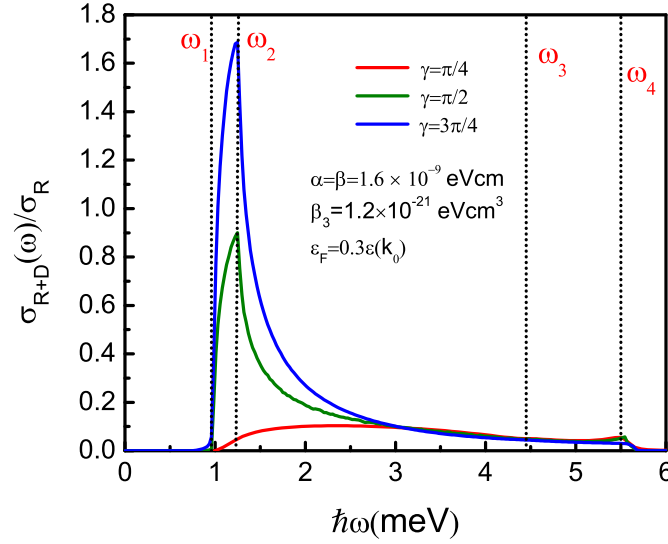


FIGURA 60.- Absorción óptica para un GE2D con IEO de Rashba y Dresselhaus considerando términos cúbicos

genera ω_4 (ver figuras 59(c) y 59(d)). Cabe señalar, que la posición de dichas frecuencias así como la intensidad de los máximos en el espectro de absorción dependerán del grado de asimetría que genera la presencia de β_3 .

En resumen, se mostró que la presencia de $\beta_3 \neq 0$ rompe con la simetría $SU(2)$ que las bandas de energía adquieren cuando $\alpha = \beta$. Específicamente, se produce una asimetría en los contornos de Fermi y se rompe con la degeneración de estados que se presenta en las direcciones θ_+ y $\theta_+ + \pi$. Tal rompimiento de simetría, es pequeño para una contribución cúbica caracterizada por una β_3 realista ($2.5 \times 10^{-22} \text{ eVcm}^3$), en cuyo caso el espectro de absorción presentará sólo un máximo relacionado con el rompimiento de degeneración a lo largo de θ_+ . Sin embargo, si se aumenta β_3 (p. ej. un orden de magnitud) se produce una pérdida de simetría mayor, lo cual da como resultado una respuesta óptica significativa dentro de la ventana óptica. Así mismo, se demostró que dicho espectro puede modificarse al variar el ángulo γ . Cabe mencionar, que el rompimiento de simetría debido a β_3 , también fue estudiado por Z. Li et al. (Li et al., 2013) a través de las componentes rectangulares del tensor σ_{ij} (calculado en la sec. 6.2). Sin embargo, no mostró el comportamiento de la absorción como función de γ , el cual es un aspecto sumamente importante, ya que, como nuestros resultados lo demuestran, permite modular la respuesta óptica a través de potenciales electricos externos. Esto, podría ser un mecanismo útil en aplicaciones espintrónicas así como en la determinación de los valores relativos de α , β y β_3 .

6.5 Conclusiones

Nuestro estudio sobre la conductividad longitudinal dinámica, muestra que las características espectrales de la absorción óptica dependen notablemente de la falta de simetría angular adquirida por las subbandas de energía en el espacio de momentos. Dicha asimetría es determinada por los valores relativos de los parámetros α , β y β_3 . Algunos estudios realizados, han puesto especial énfasis en los efectos generados por la presencia de $\beta_3 \neq 0$ (Li et al., 2013) y no han estudiado la respuesta como función del ángulo γ . Sin embargo, en este trabajo, hemos demostrado que la reducción de simetría en las bandas de energía induce una importante dependencia en γ , a través de la cual se podría modular la absorción. Estos resultados, sugieren que la conductividad óptica también puede ser regulada por medio de potenciales eléctricos externos y no sólo a través de la intensidad de la IEO (α , β y β_3) y/o la frecuencia, ω . Por ejemplo, en el caso especial $\alpha = \beta \neq 0$, la simetría de rotación SU(2) (Bernevig et al., 2006) es anulada por la presencia de $\beta_3 \neq 0$ (Li et al., 2013). Los resultados muestran que tal reducción de simetría depende únicamente de la intensidad de β_3 . No obstante, hemos probado que para valores realistas de α , β y β_3 , el espectro de absorción estará caracterizado por un sólo máximo de absorción, el cual puede suprimirse al variar γ . Estos resultados, sugieren que los efectos de β_3 junto con las características espectrales podrían servir en el desarrollo de aplicaciones “opto-espintrónicas” .

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió la conductividad óptica, el espectro de excitaciones colectivas y las regiones de amortiguamiento de Landau de un GE2D en presencia de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus (caracterizados por los parámetros α , β y β_3). Dentro del esquema del Método de Campo Autoconsistente, se derivó una función dieléctrica matricial, la cual permite separar las contribuciones debidas a transiciones intra-EO (plasmones intra-EO) de los elementos constituidos por excitaciones inter-EO (plasmones inter-EO).

Los resultados muestran que el efecto de la IEO sobre el espectro de plasmones intra-EO es pequeño para valores realistas de α y β (con $\beta_3 = 0$). De manera que, en el límite de longitud de onda larga la frecuencia de excitación es $\omega \sim \omega_p \sim q^{1/2}$, donde ω_p corresponde a la frecuencia de plasma de un GE2D sin IEO. Cabe mencionar, que en este mismo régimen, la rama del plasmón inter-EO se encuentran dentro de la región de creación de pares electrón-hueco inter-EO.

Por otro lado, se mostró que la dependencia en θ adquirida por las subbandas $\varepsilon_{\pm}(k, \theta)$, hace posible que el continuo de transiciones inter-EO y sus respectivos plasmones puedan modularse no sólo a través del acoplamiento de Rashba, sino también a través del ángulo γ , el cual define la dirección de propagación del plasmón. Este resultado es particularmente interesante, ya que la excitación de estos plasmones ópticos abriría la posibilidad de utilizarlos como fuentes de radiación en THz modulables, las cuales son importantes en áreas tales como el procesamiento de información (Sirtori, 2002).

De los estudios sobre la conductividad óptica para $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\beta_3 = 0$, se observó que ésta tiene el mismo comportamiento anisotrópico que los plasmones inter-EO, como función de la dirección del campo eléctrico externo. De manera que los máximos en la absorción corresponden a frecuencias de plasmones. Este, es un aspecto nunca antes explorado, el cual plantea la posibilidad de modular la respuesta óptica no sólo a través del acoplamiento EO variable de Rashba y/o la frecuencia, sino también a través de la aplicación de potenciales eléctricos externos. Este mismo comportamiento es exhibido por la conductividad al considerar la contribución cúbica de Dresselhaus. Sin embargo, para este caso, el carácter anisotrópico de la respuesta óptica es magnificada por la presencia de $\beta_3 \neq 0$. En el caso

especial $\alpha = \beta \neq 0$, la simetría de rotación $SU(2)$ (Bernevig et al., 2006) es anulada por la presencia de $\beta_3 \neq 0$ (Li et al., 2013). De manera que, para valores realistas de α , β y β_3 , se observó que la conductividad longitudinal dinámica estará caracterizada por un sólo máximo de absorción, el cual puede suprimirse al variar la dirección del campo eléctrico externo. Este resultado en particular, sugieren que los efectos de β_3 junto con las características espectrales podrían servir en el desarrollo de aplicaciones “opto-espintrónicas”, así como para determinar β_3 .

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, muestran nuevas formas de manipular las propiedades de un GE2D. Por un lado, es posible modular regiones de amortiguamiento, plasmones y espectro de absorción óptica a través de la intensidad de la IEO. Mientras que, debido a la reducción de simetría que sufren las subbandas de energía, aparece la posibilidad de manipular dichas excitaciones por medio de la variación de la dirección de campos eléctricos externos y de la frecuencia. Estos mecanismos resultan interesantes, ya que pueden servir para el desarrollo de nuevos dispositivos espintrónicos.

Con el presente trabajo se logró obtener y entender propiedades de un GE2D que se encuentra bajo la acción de un campo magnético efectivo generado por la presencia de la IEO de Rashba y la IEO de Dresselhaus. Particularmente, se estudió un sistema confinado por una heteroestructura crecida a lo largo de la cara cristalográfica $[001]$, sin embargo, se sabe el efecto de la IEO puede cambiar en heteroestructuras crecidas a lo largo de distintas caras cristalográficas. Por dicho motivo, en un futuro se pretende investigar las propiedades que adquieren las excitaciones electrónicas de un GE2D confinado a lo largo de diferentes orientaciones cristalográficas, en particular la dirección $[110]$, y realizar una comparación entre ellas.

Por otra parte, la IEO de Rashba y la de Dresselhaus no son las únicas contribuciones que pueden encontrarse presentes en el estado base del sistema. En este sentido, resulta interesante poder estudiar el conjunto de excitaciones electrónicas así como el espectro de absorción óptica considerando nuevas contribuciones a la IEO. Por ejemplo, como trabajo a futuro se pretende estudiar las excitaciones del GE2D considerando la IEO que se origina debido a la presencia de tensiones en la red cristalina del material semiconductor subyacente al GE2D. Así mismo, se explorará el efecto que se introduce al poner un campo magnético paralelo al plano de confinamiento del GE2D.

Otro tema que resulta interesante para futuros estudios, es el de considerar un sistema confinado en donde existen más de una subbanda de conducción, de donde se espera obtener un espectro de excitaciones más complejo que los que se observaron en el presente trabajo.

Lista de referencias bibliográficas

- Allen, S. J., Tsui, D. C., y Logan, R. A. (1977). Observation of the two-dimensional plasmon in silicon inversion layer. *Phys. Rev. Lett.*, 38(17):980–983.
- Ando, T., Fowler, A. B., y Stern, F. (2006). Electronic properties of two-dimensional systems. *Rev. Mod. Phys.*, 54(2):437–672.
- Ansgar, L. (1997). *Electronic Excitations at Metal Surfaces*. Springer Science-Business Media New York. pp. 49.
- Archambault, A., Teperick, T., Marquier, F., y Greffet, J. (2009). Surface plasmon Fourier optics. *Phys. Rev. B*, 79(19):195414–195414.
- Awschalom, D. D. y Flatté, M. E. (2007). Challenges for semiconductor spintronics. *Nature physics*, 3(3):153–159.
- Badalyan, S. M., Matos-Abinague, A., Vignal, G., y Fabian, J. (2009). Anisotropic plasmon in a two-dimensional electron gas with spin orbit interaction. *Phys. Rev. B*, 79(20):205305.
- Barnes, W. L., Dereux, A., y Ebbesen, T. (2003). Surface plasmon subwavelength optics. *Nature*, 424(6950):824–830.
- Bernevig, A., Orenstein, J., y Zhang, S.-C. (2006). Exact $su(2)$ symmetry and persistent spin helix in a spin-orbit coupled system. *Phys. Rev. B*, 73(23):236601.
- Bruus, H. y Flensberg, K. (2005a). *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics, an introduction*. Oxford University Press. pp. 435.
- Bruus, H. y Flensberg, K. (2005b). *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics, an introduction*. Oxford University Press. pp. 141.
- Bruus, H. y Flensberg, K. (2005c). *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics, an introduction*. Oxford University Press. pp. 95.
- Chang, D., Sorensen, A., Demler, E., y Lukin, M. (2007). A single-photon transistor using nanoscale surface plasmons. *Nature*, 446(7131):807–812.
- Chaplik, A. V., Entin, M. V., y Magarill, L. I. (2002). Spin orientation of electrons by lateral electric field in 2d system without inversion symmetry. *Physica E*, 13(2):744–747.
- Cruz, E., López-Bastidas, C., y Maytorena, J. (2015). Dynamical screening response and optical conductivity of a two-dimensional electron gas with spin-orbit interaction. *Journal of Nanophotonics*, 9(1):093077–093077.
- Cui, L. J., Zeng, Y. P., Wang, B. Q., Zhu, Z. P., Lin, L. Y., Jiang, C. P., Guo, S. L., y Chu, J. H. (2002). Zero-field spin splitting in $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ metamorphic high-electron-mobility-transistor structures on GaAs substrates using Shubnikov-de Haas measurements. *Appl. Phys. Lett.*, 80(17):3132–3134.

- Datta, S. y Das, B. (1990). Electronic analog of electro-optic modulator. *Appl. Phys. Lett.*, 56(7):665–667.
- de la Peña, L. (1991). *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Fondo de Cultura económica.
- Dressel, M. y Güner, G. (2003). *Electrodynamics of Solids*. Cambridge University Press. pp. 81.
- Dresselhaus, G. (1955). Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures. *Phys. Rev.*, 100(2):580–586.
- Ebbesen, T. W., Lezec, H. J., Ghaemi, H. F., Thio, T., y Wolff, P. A. (1998). Extraordinary optical transmission through subwavelength hole arrays. *Nature*, 391(6668).
- Ehrenreich, H. y Cohen, M. H. (1959). Self-consistent field approach to the many-electron problem. *Phys. Rev.*, 115(4):786–790.
- Eisberg, R. y Resnick, R. (1999). *Física Cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas*. Limusa.
- Erlingsson, S. I., Schliemann, J., y Loss, D. (2005). Spin susceptibilities, spin densities, and their connection to spin currents. *Phys. Rev. B*, 71(3):035319–035324.
- Fert, A. (2008). The present and the future of spintronics. *Thin Solid Films*, 517(1):2–5.
- Foldy, L. L. y Wouthuysen, S. A. (1950). On the dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Phys. Rev.*, 78(1):29–36.
- García-Vidal, F. y Matín-Moreno, L. (2008). Plasmones superficiales. *Investigación y Ciencia*. pp. 67.
- Halevi, P. (1992). *Spatial dispersion in solids and plasmas*. North-holland. pp. 681.
- Iglesias, P. y Maytorena, J. (2010). Anisotropic dynamical spin-density response in quantum wells with spin-orbit interaction. *Phys. Rev. B*, 82(20):205324.
- Il'inskii, Y. y Keldysh, L. V. (1994). *Electromagnetic response of material media*. Plenum Press, New York and London. pp. 315.
- Jain, J. K. y Das-Sarma, S. (1987). Elementary electronic excitations in a quasi-two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 36(11):5949–5952.
- Kato, Y. K., Myers, R. C., Gossard, A. C., y Awschalom, D. D. (2004). Observation of the spin hall effect in semiconductors. *Science*, 306(5703):1910–1913.
- Köhler, R., Tredicucci, A., Beltram, F., Beere, H. E., Linfield, E. H., Davies, A. G., Ritchie, D. ., Iotti, R. C., y Rossi, F. (2002). Terahertz semiconductor-heterostructure laser. *Nature*, 417(6885):156–159.
- Koo, H. C., Kwon, J. H., Eom, J., Chang, J., Han, S. H., y Johnson, M. (2009). Control of spin precession in a spin-injected field effect transistor. *Science*, 325(1515):1515–1518.

- Koralek, J. D., Weber, C. P., Orenstein, J., Bernevig, B. A., Zhang, S.-C., Mack, S., y Awschalom, D. D. (2009). Emergence of the persistent spin helix in semiconductor quantum wells. *Nature*, 458(7238):610–613.
- Kushwaha, M. S. y Ulloa, S. E. (2006). Plasmon excitations in a two-dimensional electron gas with spin-orbit interactions: Zero magnetic field. *Phys. Rev. B*, 73(20):205306–205313.
- La-Rocca, G. C. y de Andrada e Silva, E. A. (1997). Spin splittings in nanostructures without inversion symmetry. *Pure Appl. Chem.*, 69(6):1187–1194.
- LaShell, S., McDougall, B. A., y Jensen, E. (1996). Spin splitting of an Au(111) surface state band observed with angle resolved photoelectron spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 77(16):3419–1422.
- Li, C. y Xu, X. G. (2008). Tuning of plasmon propagation in two-dimensional electrons. *Appl. Phys. Lett.*, 93(25):251501.
- Li, Z., Marsiglio, F., y Carbotte, J. (2013). Vanishing of interband light absorption in a persistent spin helix state. *Sci. Rep.*, 3:2828.
- Maytorena, J. A., López-Bastidas, C., y Mireles, F. (2006). Spin and charge conductivities in spin-orbit coupled system. *Phys. Rev. B*, 74(23):235313.
- Mendoza, B. y del Castillo-Mussot, M. (1993). Plasmons in three, two and one dimension. *Revista Mexicana de Física*, 39(4):640–652.
- Mochán, W. L. (2005). *Encyclopedia of Condensed Matter Physics (Plasmons)*. Elsevier. pp. 457.
- Nitta, J., Akazaki, T., y Takayanagi, H. (1997). Gate control of spin-orbit interaction in an inverted $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}/\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$ heterostructure. *Phys. Rev. Lett.*, 78(7):1335–1338.
- Ohno, H., Chiba, D., Matsukura, F., Omiya, T., Abe, E., Dietl, T., Ohno, Y., y Ohtani, K. (2000). Electric-field control of ferromagnetism. *Nature*, 408(6815):944–946.
- Ohno, Y., Young, D. K., Beschoten, B., Matsukura, F., Ohno, H., y Awschalom, D. D. (1999). Electrical spin injection in a ferromagnetic semiconductor heterostructure. *Nature*, 402(6763):790–792.
- Otsuji, T., Moubarak-Meziani, Y., y Hanabe, M. (2006). Grating-bicoupled plasmon-resonant terahertz emitter fabricated with gaas-based heterostructure material systems. *Appl. Phys. Lett.*, 89(26):263502.
- Pletyukhov, M. y Gritsev, V. (2006). Screening in the two-dimensional electron gas with spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 74(4):045307–045321.
- Raichev, O. (2007). Frequency dependence of induced spin polarization and spin current in quantum wells. *Phys. Rev. B*, 75(20):205340.
- Rashba, E. I. (2004). Electron spin operation by electric fields: spin dynamics and spin injection. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 20(3):189–195.

- Schliemann, J., Egues, J. C., y Loss, D. (2003). Nonballistic spin-field-effect transistor. *Phys. Rev. Lett.*, 90(14):146801–146804.
- Shaner, E., Wanke, M., Grine, A., Lyo, S., Reno, J., y Allen, S. (2007). Enhanced responsivity in membrane isolated split-grating-gate plasmonic terahertz detectors. *Appl. Phys. Lett.*, 90(18):181127.
- Sih, V., Myers, R., Kato, Y., Lau, W., Gossard, A., y Awschalom, D. (2007). Spatial imaging of the spin hall effect and the current-induced polarization in two-dimensional electron gases. *Nature Phys.*, 1(1):31–35.
- Sirtori, C. (2002). Applied physics: Bridge for the terahertz gap. *Nature*, 417(6885):132–133.
- Stern, F. (1967). Polarizability of a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 18(14):546–548.
- Voßbüßerger, M., Roskos, H. G., Wolter, F., Waschke, C., Kurz, H., Hirakawa, K., Wilke, I., y Yamanaka, K. (1996). Radiative decay of optically excited coherent plasmons in a two-dimensional electron gas. *JOSA B*, 13(5):1045–1053.
- Wang, X. F. (2005). Plasmon spectrum of two dimensional electron system with rashba spin-orbit interaction. *Phys. Rev. B*, 72(8):085317.
- Winkler, R. (2003a). *Spin-Orbit coupling effects in two-dimensional electron and hole systems*. Springer, Berlin.
- Winkler, R. (2003b). *Spin-Orbit coupling effects in two-dimensional electron and hole systems*. Springer, Berlin. pp. 223.
- Winkler, R. (2003c). *Spin-Orbit coupling effects in two-dimensional electron and hole systems*. Springer, Berlin. pp. 75.
- Winkler, R. (2004). Rashba spin splitting and ehrenfest’s theorem. *Physica E*, 22:450–454.
- Wolf, S. A., Awschalom, D. D., Buhrman, R. A., J. M. Daughton, S. V.-M., Roukes, M. L., Chtchelkanova, A. Y., y Treger, D. M. (2001). Spintronics: a spin-based electronics vision for the future. *Science*, 294(5546):1488–1495.
- Won, R. (2009). The promise of plasmonics. *Nature Photonics*, 3(9):500–501.
- Wooten, F. (1972). *Optical Properties of Solids*. Academic Press. pp. 257.
- Wunderlich, J., Kaestner, B., Sinova, J., y Jungwirth, T. (2006). Experimental observation of the spin-hall effect in a two-dimensional spin-orbit coupled semiconductor system. *Phys. Rev. Lett.*, 94(4):047204–047207.
- Xu, W. (2003). Plasmons of a two-dimensional electron gas in the presence of spin orbit interaction. *Appl. Phys. Lett.*, 82(5):724–726.
- Yuan, D. W., Xu, W., Zeng, Z., y Lu, F. (2005). Optical spectrum of a spin-split two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 72(3):033320–033323.
- Zia, R., Schuller, J., Chandran, A., y Brongerma, M. (2006). Plasmonics, the next chip scale technology. *Materials today*, 9(7):20–27.

Apéndice A. Plasmón intra-sub-banda: aproximación de longitud de onda larga

A continuación se presenta el procedimiento para obtener expresiones en el límite de longitud de onda larga para los plasmones intra-EO para el caso de IEO de Rashba más Dresselhaus lineal en el momento.

La relación de dispersión para este tipo de excitaciones proviene del primer factor que compone la expresión (214). Tal término está dado por

$$(1 - \epsilon_{++} - \epsilon_{--}) = 0 \quad (310)$$

donde $\epsilon_{\pm\pm}$ se define a través de la expresión (202). Dicha función puede ser reescrita como sigue

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{V_q}{2} \sum_{\mathbf{k}} [1 + \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})] \Lambda_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega), \quad (311)$$

con

$$\Lambda_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega) = \frac{f_0(\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})) - f_0(\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}))}{\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega}, \quad (312)$$

donde V_q es la transformada de Fourier del kernel de energía de interacción coulombiana, f_0 es la función de distribución de Fermi y $\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})$ representa la energía en la subbanda λ y está dada por la expresión (54).

Para obtener la solución de la ecuación (310) en el régimen de longitud de onda larga, a continuación derivaremos una aproximación a la expresión (311) tomando el límite cuando q/k_0 es muy pequeña, con $k_0 = \sqrt{2\pi n_e}$. Para ello, será de gran utilidad reescribir la ecuación

(311) (a temperatura cero) como ¹

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = \frac{2V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \times \left[\frac{1}{\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega} + \frac{1}{\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \hbar\omega} \right] \quad (313)$$

con

$$F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})), \quad (314)$$

donde $k_F^\lambda(\theta)$ se encuentra definido mediante (58) y representa la magnitud del vector de onda de Fermi de la subbanda λ y $\mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})$ está determinada por la ecuación (210). Si reescribimos (313), obtenemos la siguiente expresión

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = \frac{2V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \left[\frac{\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{(\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}))^2 - (\hbar\omega)^2} \right]. \quad (315)$$

Aquí, la diferencia de energías $\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ está dada por

$$\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \lambda \frac{\hbar}{2} (|\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})| - |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})|) - \frac{\hbar^2}{2m^*} (q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)), \quad (316)$$

donde $|\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})|$ y $|\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})|$ son la magnitud del campo espín-órbita para $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k} + \mathbf{q}$, y están definidos por las ecuaciones

$$\frac{\hbar}{2} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k})| = k \Delta(\theta) \quad (317)$$

y

$$\frac{\hbar^2}{4} |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})|^2 = k^2 \Delta^2(\theta) + q^2 \Delta^2(\gamma) + 2kq [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)], \quad (318)$$

donde $\Delta(\theta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin(2\theta)}$ y $\Delta(\gamma) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin(2\gamma)}$.

Para poder escribir la relación (316) en el límite de longitud de onda larga, es necesario obtener una expresión para $\hbar |\mathbf{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})|/2$ en límite de $\mathbf{q}$ pequeña. Si factorizamos la energía

¹Para llegar a (313) se consideró la propiedad de simetría $F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = F_1(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k})$ para $\theta \rightarrow \theta - \pi$. Posteriormente, se utiliza el hecho de que $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \epsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega}$.

espín-órbita de la forma

$$\frac{\hbar}{2} |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})| = k\Delta(\theta) [1 + X(k, q, \theta)]^{1/2}, \quad (319)$$

y suponemos X pequeña cuando $q \rightarrow 0$, se obtiene

$$\frac{\hbar}{2} |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})| \approx k\Delta(\theta) \left\{ 1 + \frac{1}{2} X(k, q, \theta) - \frac{q^2}{2k^2} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)]^2 \right\}, \quad (320)$$

con X dada por la expresión

$$X(k, q, \theta) = \frac{q^2}{k^2} \frac{\Delta^2(\gamma)}{\Delta^2(\theta)} + \frac{2q}{k\Delta^2(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)]. \quad (321)$$

Por tanto, la diferencia (316) hasta orden $\sim q^2$, es

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \varepsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \approx & - \left\{ \lambda \frac{q^2}{2k\Delta^3(\theta)} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \sin^2(\theta - \gamma) \right. \\ & + \lambda \frac{q}{\Delta(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)] \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2m^*} (q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)) \right\}. \end{aligned} \quad (322)$$

Como $F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \rightarrow 1$ y $[\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \varepsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})]^2 \ll (\hbar\omega)^2$ cuando $q \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = & \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \left\{ \lambda \frac{q^2}{2k\Delta^3(\theta)} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \sin^2(\theta - \gamma) \right. \\ & + \lambda \frac{q}{\Delta(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)] \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2m^*} (q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)) \right\}. \end{aligned} \quad (323)$$

Realizando las integrales,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = & \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} (2\pi)^2 n_\lambda - \frac{q^2}{4} \frac{m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{\hbar^2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{|\alpha^2 - \beta^2|} \right. \\ & \left. \times 2\pi \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2|}{2\alpha\beta} \sin(2\gamma) \right] \right\} + \lambda \vartheta(q, \theta). \end{aligned} \quad (324)$$

donde n_λ es la densidad electrónica definida mediante

$$n_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{(k_F^\lambda(\theta))^2}{2}, \quad (325)$$

con $k_F^\lambda(\theta)$ dado por (58). El último término reúne todos aquellos que son proporcionales a λ y como veremos, no es necesario escribirlos explícitamente.

Al utilizar el resultado de la ecuación (324) para calcular $\epsilon_{++}(q, \omega)$ y $\epsilon_{--}(q, \omega)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon_{++}(q, \omega) = \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} (2\pi)^2 n_+ - \frac{q^2 m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{4 \hbar^2} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{|\alpha^2 - \beta^2|} \right) \right. \\ \left. \times 2\pi \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \sin(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right] \right\} + \vartheta(q, \theta). \end{aligned} \quad (326)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \epsilon_{--}(q, \omega) = \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} (2\pi)^2 n_- - \frac{q^2 m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{4 \hbar^2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{|\alpha^2 - \beta^2|} \right. \\ \left. \times 2\pi \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \sin(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right] \right\} - \vartheta(q, \theta). \end{aligned} \quad (327)$$

y al sustituir en la ecuación (310) se llega a

$$\begin{aligned} (\hbar\omega)^2 = 2 \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} (2\pi)^2 (n_+ + n_-) - \frac{q^2 m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{2 \hbar^2} \text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2) \right. \\ \left. \times 2\pi \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \sin(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (328)$$

donde $\text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2)$ es la función signo, la cual vale 1 si $\alpha^2 > \beta^2$ y -1 si $\alpha^2 < \beta^2$. Esta se simplifica a

$$\omega = \omega_p^{2D}(q) \left[1 - \frac{m^* (\alpha^2 - \beta^2) / \hbar^4}{2\pi n_e} \text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2) \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \sin 2\gamma}{2\alpha\beta} \right) \right]^{1/2}, \quad (329)$$

donde $\omega_p^{2D}(q) = \sqrt{2\pi n_o e^2 q / \epsilon_s m^*}$ corresponde a la frecuencia del plasmón de un gas degenerado en espín. El factor entre corchetes indica la corrección introducida al tomar en cuenta la interacción espín órbita. Como, típicamente, $(\frac{m^* \alpha^2 / \hbar^2}{2\pi n_e})$, $(\frac{m^* \beta^2 / \hbar^2}{2\pi n_e}) \ll 1$ ($\sim 10^{-3}$) el efecto de la IEO sobre la relación de dispersión de los plasmones intrasubbanda será muy pequeña. Por esto mismo, la anisotropía en la rama del plasmón, expresada por el término $\sin 2\gamma$, será

también prácticamente imperceptible.

En el caso $\beta = 0$, la expresión (329) se reduce a

$$\omega = \omega_p^{2D}(q) \left(1 - \frac{m^{*2} \alpha^2 / \hbar^4}{2\pi n_e} \right)^{1/2}, \quad (330)$$

que es el resultado obtenido por W. Xu (Xu, 2003) y M. Kushwaha y S. Ulloa (Kushwaha y Ulloa, 2006).

Apéndice B. Plasmón inter-sub-banda: aproximación de longitud de onda larga

A continuación se presentará el desarrollo matemático realizado para derivar una expresión para el plasmón inter-EO en el régimen de longitud de onda larga. Estas excitaciones electrónicas tienen una relación de dispersión dada por el segundo factor de la ecuación (214),

$$1 - \epsilon_{+-} - \epsilon_{-+} = 0, \quad (331)$$

donde las funciones $\epsilon_{\pm\mp}$ estarán dadas por (203), y pueden expresarse de la siguiente manera

$$\epsilon_{\lambda\lambda'}(q, \omega) = V_q \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F(\theta)} dk k F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \Lambda_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (332)$$

donde $F_{-1} = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}))$ y $\lambda' = -\lambda$. Si consideramos el caso de temperatura cero, de tal manera que $f_0(\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})) = 1$ y $\varepsilon_\lambda < \varepsilon_F$, entonces, podemos escribir la ecuación (332) como ².

$$\epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathbf{q}, \omega) = I_1^{\lambda\lambda'} + I_2^{\lambda\lambda'} \quad (333)$$

$$I_1^{\lambda\lambda'} = \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}} \quad (334)$$

$$I_2^{\lambda\lambda'} = -\frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^{\lambda'}(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{\varepsilon_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k}) + \hbar\tilde{\omega}}. \quad (335)$$

A continuación, calcularemos estas cantidades para determinar el factor (331).

Cálculo de la función $\epsilon_{+-}(q, \omega)$

De acuerdo con la expresión (333), el primero de los elementos estará dado como $\epsilon_{+-} = I_1^{+-} + I_2^{+-}$, con $\lambda = 1$ y $\lambda' = -1$. Para calcular estas integrales es necesario realizar la

²Aquí se han utilizado los mismos argumentos de simetría que para (314)

aproximación a q pequeña de algunas cantidades importantes. Para comenzar, la diferencia de energía $\varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ estará dada por

$$\varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = - \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 qk}{m^*} \cos(\theta - \gamma) \right] + \frac{\hbar}{2} [|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k} + \mathbf{q})| + |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})|]. \quad (336)$$

Si usamos (320), tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \approx & 2k\Delta(\theta) - \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 qk}{m^*} \cos(\theta - \gamma) \right] + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \frac{q^2}{k} \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^3(\theta)} \\ & + \frac{q}{\Delta(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)], \end{aligned} \quad (337)$$

donde $\Delta^2(\theta) = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin 2\theta$. Utilizando el anterior resultado se puede obtener que

$$\frac{1}{[\varepsilon_+(\mathbf{k}) - \varepsilon_+(\mathbf{k} + \mathbf{q})]^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2} \approx \frac{1}{(2k\Delta(\theta))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2}. \quad (338)$$

Así mismo, se obtiene que:

$$\frac{1}{\frac{\hbar}{2}D(\mathbf{k} + \mathbf{q})} \approx \frac{1}{k\Delta(\theta)} \left[1 - \frac{1}{2}X(k, q, \theta) + \frac{3}{2} \frac{q^2}{k^2 \Delta^4(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)]^2 \right], \quad (339)$$

donde $X(k, q, \theta)$ está definida mediante la expresión (321). Utilizando esto, podemos aproximar la función $F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})$ como

$$F_{-1} \approx \frac{q^2}{4k^2} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)}, \quad (340)$$

en donde se ha tomado el orden más bajo en q . Nótese que mientras en el caso del plasmon intra-EO se obtuvo que $F_1 \sim 1$, aquí $F_{-1} \sim q^2$.

Utilizando dichas aproximaciones y considerando $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$ ³, podemos escribir la primera

³Se debe recordar que $\tilde{\omega} = \omega + i\eta$, donde η es un término empírico con el cual se intenta tomar en cuenta procesos disipativos de energía. Por tanto, si $\eta = 0$, estamos en una situación en la que no se considera tales mecanismos de absorción.

de las integrales como

$$I_1^{+-} = \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{8} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^5(\theta)} \int_0^{k_F^+(\theta)} \frac{dk}{k^2 - (\hbar\omega/2\Delta(\theta))^2} \\ - \hbar\omega \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{16} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^6(\theta)} \int_0^{k_F^+(\theta)} \frac{dk}{k [k^2 - (\hbar\omega/2\Delta(\theta))^2]}, \quad (341)$$

y

$$I_2^{+-} = \hbar\omega \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{16} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^6(\theta)} \int_0^{k_F^-(\theta)} \frac{dk}{k [k^2 - (\hbar\omega/2\Delta(\theta))^2]} \\ - \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{8} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^5(\theta)} \int_0^{k_F^-(\theta)} \frac{dk}{k^2 - (\hbar\omega/2\Delta(\theta))^2}, \quad (342)$$

De estas expresiones debemos considerar que $k_F^+ < k_F^-$ de tal manera que en la expresión (342) las integrales pueden descomponerse como $\int_0^{k_F^-} \rightarrow \int_0^{k_F^+} + \int_{k_F^+}^{k_F^-}$. Si se tiene en consideración lo anterior, al sumar (341) y (342) se llega a la expresión

$$\epsilon_{+-}(q, \omega) = \hbar\omega \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{16} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^6(\theta)} \int_{k_F^+(\theta)}^{k_F^-(\theta)} \frac{dk}{k [k^2 - (\hbar\omega/2\Delta(\theta))^2]} \\ - \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{8} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^5(\theta)} \int_{k_F^+(\theta)}^{k_F^-(\theta)} \frac{dk}{k^2 - (\hbar\omega/2\Delta(\theta))^2}. \quad (343)$$

Si ahora para efectuar la integración en k utilizamos las identidades integrales

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x - a}{x + a} \right) \quad (344)$$

y

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2} \log \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2} \right), \quad (345)$$

entonces, se obtiene que la expresión (343) se puede reescribir como:

$$\epsilon_{+-}(q, \omega) = \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{8} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\hbar\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{\omega_+^2(\theta)}{\omega_-^2(\theta)} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_-^2(\theta)}{\omega^2 - \omega_+^2(\theta)} \right) \\ + \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{8} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\hbar\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{\omega - \omega_+(\theta)}{\omega + \omega_+(\theta)} \cdot \frac{\omega + \omega_-(\theta)}{\omega - \omega_-(\theta)} \right), \quad (346)$$

donde $\hbar\omega_{\pm} = 2k_F^{\pm}(\theta)\Delta(\theta)$.

Si se realiza un poco de álgebra sobre la ecuación anterior, se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\epsilon_{+-}(q, \omega) = \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{4} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\hbar\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{\omega_+(\theta)}{\omega_-(\theta)} \cdot \frac{\omega + \omega_-(\theta)}{\omega + \omega_+(\theta)} \right) \quad (347)$$

Cálculo de la función $\epsilon_{-+}(q, \omega)$

De acuerdo con la ecuación (333), es necesario encontrar soluciones para $I_1^{\lambda\lambda'}$ e $I_2^{\lambda\lambda'}$. Para ello, se utilizan las aproximaciones e identidades integrales del caso anterior, de lo cual resulta que

$$\epsilon_{-+}(q, \omega) = \frac{V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{4} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\hbar\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{\omega_-(\theta)}{\omega_+(\theta)} \cdot \frac{\omega - \omega_+(\theta)}{\omega - \omega_-(\theta)} \right) \quad (348)$$

Determinación del término inter-EO $\epsilon_{+-} + \epsilon_{-+} = 1$

Ahora, obtendremos una expresión para la relación de dispersión para el plasmón inter-EO. Para ello, se suman ϵ_{+-} y ϵ_{-+} las cuales están dadas por las ecuaciones (347) y (348). Posteriormente, igualando a uno y recordando que $V_q = 2\pi e^2/\epsilon_s q$, llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{(qe^2/\epsilon_s)}{8\hbar\omega} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{(\omega + \omega_-(\theta))(\omega - \omega_+(\theta))}{(\omega - \omega_-(\theta))(\omega + \omega_+(\theta))} \right) = 1. \quad (349)$$

De esta expresión se obtendrá la rama del plasmón inter-EO al resolver la relación entre q y ω . Si se considera $\beta = 0$, la expresión se reduce a

$$8 \frac{\hbar\omega}{q(e^2/\epsilon_s)} = \log \frac{(\omega + \omega_-)(\omega - \omega_+)}{(\omega - \omega_-)(\omega + \omega_+)}, \quad (350)$$

donde $\hbar\omega_{\pm}$ es

$$\hbar\omega_{\pm} = 4\alpha\sqrt{\pi n_{\pm}}, \quad (351)$$

que corresponden a la energías que caracterizan las transiciones verticales. Este, es precisamente el resultado mostrado por W. Xu (Xu, 2003) y M. Kushwaha y S. Ulloa (Kushwaha y Ulloa, 2006).

De la ecuación (350) es posible ver que existirán dos ramas de plasmones intersubbanda,

la primera de ellas resultará cuando la frecuencia $\omega \rightarrow \omega_+$ y la otra cuando $\omega \rightarrow \omega_-$, donde por lo general ω dependerá de q a través de $\omega_p^{2D}(q)$. Así, junto con el plasmón intrasubbanda, en total se tendrán tres ramas.