

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN FÍSICA DE MATERIALES**

ENTRELAZAMIENTO Y DISIPACIÓN EN ARREGLOS DE PUNTOS CUÁNTICOS

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

LESVIA DÉBORA CONTRERAS PULIDO

Ensenada, Baja California, México, Marzo de 2007

RESUMEN de la tesis de **Lesvia Débora Contreras Pulido**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en Física de Materiales. Ensenada, Baja California, México. Febrero 2007.

ENTRELAZAMIENTO Y DISIPACIÓN EN ARREGLOS DE PUNTOS CUÁNTICOS

Resumen aprobado por:



Dr. Fernando Rojas Íñiguez
Director

En este trabajo se estudia la generación teórica de entrelazamiento entre los estados de carga de un arreglo de dos dobles puntos cuánticos a través de interacciones directas e indirectas entre éstos e incluyendo efectos disipativos. En ambos casos se analiza la distribución de carga dentro del arreglo, se calcula la probabilidad de encontrar al sistema en los estados de Bell y se emplea la concurrencia para cuantificar el grado de entrelazamiento obtenido.

Cada doble punto contiene un electrón adicional por lo que puede representar a un “qubit de carga”. La interacción directa entre qubits se modela a través de un Hamiltoniano de Hubbard extendido que incluye la repulsión Coulombiana entre los electrones del arreglo, el tuneo entre puntos cuánticos vecinos y el efecto de un campo eléctrico externo. Se determina que las interacciones electrostáticas y un cierto grado de deslocalización de la carga promovido por el tuneo producen entrelazamiento tanto estacionario como dinámico, así como la formación de un estado de Bell con la mayor probabilidad. En particular, se demuestra la formación y el control coherente de cada uno de los estados de Bell a partir de estados iniciales no entrelazados y de la manipulación dinámica de un potencial asimétrico, aplicado únicamente sobre uno de los dobles puntos. Se encuentra, además, que pequeñas asimetrías en uno de los puntos cuánticos ocasionan que la concurrencia disminuya drásticamente. Se utiliza la aproximación Markoviana para incluir los efectos de un baño disipativo de fonones en equilibrio termodinámico acoplado débilmente al arreglo de qubits y se evalúa el efecto de la temperatura en las propiedades del sistema, encontrándose que la formación de un estado de Bell preferencial se inhibe conforme la temperatura se incrementa. La concurrencia se mantiene a bajas temperaturas, anulándose posteriormente a una temperatura finita que depende de la amplitud del tuneo.

En el segundo caso, se emplea un Hamiltoniano de pseudo espín para describir al arreglo de dos qubits de carga independientes acoplados fuertemente a un baño de fonones común. Se considera a uno de los dobles puntos en contacto con dos reservorios de electrones. Mediante el empleo de una transformación canónica se incluyen los efectos disipativos, encontrándose que, a temperatura cero, el baño produce interacciones indirectas entre los dobles puntos y presenta dos tipos de efectos que compiten entre sí: por una parte genera entrelazamiento entre los qubits (en menor grado que el obtenido en el caso anterior), y posteriormente lo anula al promover estados con ambos electrones localizados en los puntos superiores o inferiores del arreglo. Se

evaluaron los efectos de asimetrías en cada doble punto así como del tuneo de una partícula hacia/desde los reservorios. Ambos promueven la localización de la carga en estados específicos los cuales, dependiendo de la configuración adoptada, compiten con los estados inducidos por el baño reflejándose en la disminución o incremento del entrelazamiento.

Palabras clave: entrelazamiento, concurrencia, estados de Bell, decoherencia, fonones, computación cuántica, comunicación cuántica.

ABSTRACT of the thesis presented by **Lesvia Débora Contreras Pulido** as a partial requirement to obtain the DOCTOR IN SCIENCES degree in PHYSICS OF MATERIALS. Ensenada, Baja California, México. February 2007.

In this work we study theoretical entanglement generation on the charge states of two double-quantum dots by means of direct and indirect interactions between them, taken dissipative effects into account. In both analyses, the charge distribution inside such an array is analyzed as well as the probability for finding each one of the Bell states, whereas concurrence is used in order to quantify the degree of entanglement obtained.

Each double dot containing one extra electron can be used to represent a “charge qubit”. Direct interaction between the qubits is modeled through an extended Hubbard Hamiltonian, which includes Coulomb repulsion between the electrons, hopping between neighboring quantum dots and the effect of an external electric field. By means of electric interactions and a certain degree of charge delocalization (promoted by tunneling), stationary and dynamical entanglement is obtained as well as one of the Bell states with the largest probability. In particular, we demonstrate the generation and coherent control of each Bell state from non-entangled initial conditions and throughout dynamical manipulation of an asymmetric electric field applied on one of the double-dots. In addition, it is found that the concurrence value decreases due to a small asymmetry in one of the dots. Decoherence produced by a thermal phonon bath weakly coupled to the charge qubits array is included by using the Markovian approximation. In such regime, temperature effects on the system properties were evaluated finding the inhibition of a preferred Bell state as temperature increases. Large concurrence is maintained at very low still finite temperature but vanishes at a threshold temperature which, in general, depends on tunneling amplitude.

In the second case considered in this work, a pseudo spin Hamiltonian is used to describe an array formed by two independent charge qubits, both of them interacting with a common bath at zero temperature in the strong coupling regime. It is also considered that one of the qubits is open to electron reservoirs. A canonical transformation is used to include dissipative effects, finding that the bath indeed produces indirect interactions between the double-dots, presenting two competing effects: entanglement generation (but in a lower extent than in the previous analysis) and a further loss of correlations as it promotes states with both electrons localized on the upper or the lower dots. Effects of asymmetry in each double dot and also electron transition from/to reservoirs were taken into account. Both of them tend to localize the charge in specific states which, depending on the promoted configuration, compete with the states promoted by the bath, raising or lowering the entanglement obtained.

Keywords: entanglement, concurrence, Bell states, decoherence, phonons, quantum computation, quantum communication

A Héctor Salazar

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Fernando Rojas por la dirección de esta tesis y por el apoyo brindado para su realización.

Agradezco también al Dr. Ramón Aguado por su valiosa contribución en ideas, experiencia y apoyo para mi formación académica y personal así como por la dirección en la última parte del trabajo, el cual fue desarrollado principalmente en el Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid (ICMM).

Expreso también mi reconocimiento a los doctores Ernesto Cota, Francisco Mireles y Roberto Romo por su participación como miembros del comité y por su valiosa ayuda en el desarrollo de este trabajo.

En especial agradezco al Jefe del Departamento de Física Teórica del Centro de Ciencias de la Materia Condensada (CCMC), Dr. Ernesto Cota, por haberme permitido unirme a su grupo y realizar esta tesis en excelentes condiciones. Adicionalmente, aprecio que me permitiera asistir a diferentes congresos internacionales en los que pude presentar y discutir parte del trabajo, así como por motivar mi estancia en el ICMM.

Me es necesario reconocer la ayuda desinteresada recibida a través de estos años de los doctores Leonel Cota, Leonardo Morales, Noboru Takeuchi, Homero Galván, Manuel Herrera y Jesús Siqueiros, del CCMC, así como de los miembros del Departamento de Teoría de la Materia Condensada del ICMM en particular de la Dra. Gloria Platero, Dra. Ma. Ángeles Hernández Vozmediano y Ldo. Juan Luis García Pomar.

Finalmente, doy las gracias al CONACyT por el apoyo económico brindado para la realización de este trabajo.

CONTENIDO

	Página
Lista de figuras	<i>iii</i>
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. El entrelazamiento como propiedad de los sistemas cuánticos	1
1.2. El entrelazamiento como recurso físico	2
1.3. Objetivos	6
1.4. Estructura de la tesis	7
Capítulo 2. Conceptos generales	9
2.1. Matriz de densidad	9
2.1.1 La matriz de densidad y sus propiedades básicas	10
2.1.2 Ecuación de evolución del operador de densidad	13
2.2. Qubit	14
2.3. Entrelazamiento	18
2.3.1 Estados de Bell	21
2.3.2 Concurrencia	24
2.4. Qubits de carga y entrelazamiento en puntos cuánticos	26
2.4.1 Puntos cuánticos	26
2.4.2 Qubits de carga en dobles puntos y entrelazamiento	32
2.5. Decoherencia. Dinámica de sistemas cuánticos abiertos	35
2.5.1 Acoplamiento débil: aproximación de Markov	39
2.5.2 Acoplamiento fuerte: transformación de polarón para un doble punto cuántico	41
Capítulo 3. Generación estacionaria y dinámica de entrelazamiento en un arreglo de puntos cuánticos	45
3.1. Qubits basados en arreglos de puntos cuánticos	45
3.2. Modelo	47
3.3. Discusión	54
3.3.1 Estado estacionario	54

CONTENIDO

	Página
3.3.2 Dinámica coherente	57
3.3.3 Dinámica disipativa	60
Capítulo 4. Generación dinámica de estados de Bell en un arreglo de dobles puntos cuánticos	65
4.1. Estados de Bell en arreglos de puntos cuánticos	65
4.2. Modelo	67
4.3. Discusión	69
4.3.1 Estado estacionario	70
4.3.2 Dinámica coherente	73
4.3.3 Dinámica disipativa	79
Capítulo 5. Generación de entrelazamiento entre dos qubits de carga mediada por el efecto de un baño disipativo común	84
5.1. Entrelazamiento inducido por disipación	84
5.2. Modelo	87
5.2.1 Ecuación maestra	92
5.2.1.1 Aproximación Markoviana para el acoplamiento con los reservorios	92
5.2.1.2 Ecuación de evolución de la matriz de densidad del arreglo de dos dobles puntos cuánticos	94
5.3. Discusión	97
Capítulo 6. Conclusiones	107
Literatura citada	111
Apéndice A. Ecuación maestra Markoviana para dos dobles puntos cuánticos	125
Apéndice B. Transformación de polarón y ecuación maestra para dos qubits de carga	132

Lista de Figuras

2.1. a) Esquematzación de la operación de las compuertas de Hadamard y CNOT, así como del circuito que origina los estados de Bell. b) Tabla de verdad de los estados de Bell	23
2.2. Representación del autoensamblado de un punto cuántico de InAs en un sustrato de GaAs (Bimberg et al., 1999)	27
2.3. Diagrama esquemático de un punto cuántico vertical (Kouwenhoven y Marcus, 1998)	28
2.4. (a) Punto cuántico lateral en una heteroestructura semiconductor (Kouwenhoven y Marcus, 1998) (b) Diagrama esquemático en el que se observa que el punto queda en el plano del 2DEG (Tamura et al., 2003)	29
2.5. Micrografía de una molécula artificial formada por tres puntos cuánticos	31
2.6. (a) Doble punto cuántico en paralelo (Strunk et al., 2005) (b) Doble punto cuántico en serie (Vandersypen, 2002)	31
2.7. Doble punto cuántico como qubit de carga. La localización de carga en cada punto se asocia a los estados $ 0\rangle$ y $ 1\rangle$. T_c representa el tuneo en el doble punto.	33
2.8. Diagrama esquemático de un sistema cuántico abierto. Específicamente para este trabajo de tesis, el sistema abierto corresponde a un arreglo de dos dobles puntos cuánticos, el baño está dado por un conjunto de osciladores armónicos y las interacciones son del tipo electrón-fonón	37
3.1. Diagramas esquemáticos para (a) el arreglo de dos dobles puntos cuánticos en presencia de una celda de control con densidad de carga n_i^d en cada punto cuántico; cada doble punto con un electrón adicional puede representar un qubit de carga. (b) Definición de los estados de Bell $ \Psi^\pm\rangle$, $ \phi^\pm\rangle$ en la base de los dos qubits y su relación con la distribución de la carga en el arreglo.	48
3.2. Propiedades del estado base del arreglo de dos dobles puntos cuánticos como función del tuneo: (a) estructura de niveles de energía, (b) concurrencia y (c) probabilidades de los estados de Bell	56

- 3.3. Dinámica coherente de las propiedades del arreglo de dos qubits de carga (a) polarización, (b) concurrencia (c) probabilidades de los estados de Bell como función del tiempo. Las líneas discontinuas corresponden al caso en el que la polarización de la celda de control varía linealmente de +1 a -1, mientras que las líneas sólidas corresponden a una variación de +1 a 0. Parámetros utilizados: $V = 1$ meV, $t/V = 0.03$ y $c = 2a$ 58
- 3.4. Dinámica coherente del arreglo en el esquema de control para diferentes asimetrías δ en el primer punto cuántico. (a) Polarización, (b) concurrencia (c) probabilidad de encontrar al sistema en cada estado de Bell. Nótese que la imperfección deteriora la formación de entrelazamiento en el arreglo de qubits (mismos parámetros que en la Figura 3.3) 59
- 3.5. Dinámica disipativa del arreglo de dos dobles puntos cuánticos para diferentes temperaturas, en donde $T_1 \sim 1K$, $D^2 = 0.05$ y asumimos puntos idénticos (a) polarización, (b) concurrencia como función del tiempo 61
- 3.6. Propiedades de los estados de Bell obtenidos de la dinámica disipativa del arreglo, para diferentes temperaturas ($T_1 \sim 1K$, $D^2 = 0.05$ y $\delta = 0$) 62
- 3.7. Comportamiento asintótico (tiempos largos) de la concurrencia como función de la temperatura para el caso de un arreglo simétrico 63
- 4.1. Arreglo de dos dobles puntos cuánticos con una geometría cuadrada, al segundo de los cuales se aplica una diferencia de potencial, V_a . Cada doble punto cuenta con un electrón adicional que al tunelear entre sitios vecinos define los estados de un qubit de carga. 68
- 4.2. Propiedades del estado base del arreglo en presencia de un potencial externo estático (a) polarización, (b) concurrencia y (c) probabilidad de encontrar al sistema en los estados de Bell. Parámetros típicos empleados: $t/V = 0.03$, $a = 100$ nm. 71
- 4.3. Mapa de color de la concurrencia en función del potencial externo y del tuneleo. Nótese que la concurrencia disminuye conforme se incrementa el tuneleo mientras su pico máximo se hace más ancho para $V_a \neq 0$ 72
- 4.4. Propiedades dinámicas obtenidas mediante un potencial que cambia 74

- linealmente en el tiempo desde 0.375 hasta -0.375 meV. a) Polarización, b) concurrencia, c) probabilidades de los estados de Bell. Nuevamente $t/V = 0.03$ y $a = 100$ nm.
- 4.5. Generación y control dinámicos de la concurrencia y de estados de Bell con un potencial que cambia linealmente en el tiempo, a partir de diferentes condiciones iniciales no entrelazadas: $|11\rangle$, $|10\rangle$, $|01\rangle$ y $|00\rangle$. En este caso, $V_a(t) = [0.375, 0]$ meV 76
- 4.6. Evolución temporal de la probabilidad de los cuatro estados base para la condición inicial $|10\rangle$ y $V_a(t) = [0.375, 0]$ meV. El cambio en la probabilidad de los estados $|11\rangle$ y $|10\rangle$ en $t \approx 0.2$ ns se asemeja a la acción de la compuerta CNOT. Se han empleado los parámetros típicos para la amplitud del tuneo y para la distancia entre puntos cuánticos 78
- 4.7. Evolución temporal de la probabilidad de los cuatro estados base para la condición inicial $|01\rangle$, $V_a(t) = [0.375, 0]$ meV y se utilizan los mismos parámetros que en la Figura 4.3 80
- 4.8. Dinámica disipativa de la concurrencia para $V_a(t) = [0.375, 0]$ meV con el estado $|10\rangle$ como condición inicial. La concurrencia presenta valores altos a baja temperatura pero se deteriora conforme ésta se incrementa. Parámetros empleados: $t/V = 0.03$, $T_1 \sim 1K$ y $D^2 = 0.05$ 80
- 4.9. Efectos de la temperatura en la evolución temporal de los estados de Bell (mismos parámetros que los empleados en la Figura 4.8) 81
- 4.10. Comportamiento asintótico de la concurrencia para diferentes amplitudes de tuneo. La concurrencia se anula a una temperatura finita T_c que para todos los casos es $2.5 < T_c < 3K$ ($T_1 \sim 1K$) 82
- 5.1. Diagrama esquemático de la interacción indirecta entre dos qubits (línea punteada) debido a su acoplamiento con un baño bosónico común (líneas sólidas) 87
- 5.2. El modelo consiste de dos dobles puntos cuánticos desacoplados entre sí, pero acoplados a un baño bosónico común. El tuneo, t_c , se permite únicamente en 88

- cada doble punto y sólo uno de éstos se encuentra abierto a contactos (reservorios) de electrones, en donde Γ_L y Γ_R representan las probabilidades de que un electrón tunelee entre éstos y los puntos cuánticos.
- 5.3. Propiedades para el estado estacionario del arreglo con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ a) polarización b) concurrencia. Parámetros empleados: $t = 3.5$, $\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$ 98
- 5.4. Probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de los estados de Bell para el caso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (mismos parámetros que en la Figura 5.3) 100
- 5.5. Mapa de color de la concurrencia vs. tuneleo y α para puntos simétricos. Nótese que la aparición de un segundo pico en la concurrencia ocurre para amplitudes $>3.4 \mu\text{eV}$ ($\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$) 100
- 5.6. Concurrencia en función del parámetro de tuneleo para diferentes asimetrías en los dobles puntos cuánticos. En (a) se puede observar una resonancia para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, mientras que en (b) se encuentra la condición $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ que origina la formación de dos picos en la concurrencia (nuevamente $\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$) 102
- 5.7. Probabilidad de los estados de Bell para el caso en el que se presenta la resonancia en la concurrencia con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10 \mu\text{eV}$ (se ha empleado $\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$) 103
- 5.8. Probabilidad de los estados de Bell para el caso en el que se presenta la resonancia en la concurrencia con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10 \mu\text{eV}$ (se ha empleado $\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$) 103
- 5.9. Concurrencia en función del parámetro de acoplamiento con el baño y la amplitud de tuneleo de un electrón desde el contacto “L”. De forma efectiva, Γ_L induce una localización de la carga en el cuarto punto cuántico del arreglo, causando que la concurrencia disminuya. 105
- 5.10. Concurrencia en función de α y de la amplitud de tuneleo de un electrón hacia el contacto “R” (Γ_R). Puede apreciarse que la concurrencia disminuye conforme este parámetro se incrementa. 105

Capítulo 1

Introducción

1.1. El entrelazamiento como una propiedad de los sistemas cuánticos

La mecánica cuántica se ha convertido en una de las teorías más exitosas dentro de la ciencia al permitir una descripción precisa de diversos fenómenos que no pueden explicarse mediante las herramientas proporcionadas por la mecánica clásica, como ciertos procesos que ocurren a escala atómica y subatómica. Surgió como una teoría contraintuitiva que parece violar algunos de los principios fundamentales del mundo macroscópico, del cual proviene nuestra percepción de la realidad.

La superposición es un ejemplo de los fenómenos cuánticos que no tienen análogo clásico, mediante el cual un sistema puede existir simultáneamente en diferentes estados. Un tipo especial de superposición puede ser presentado por dos o más sistemas cuánticos, tal que el estado del sistema total no puede describirse como un producto de los estados individuales de sus componentes. Cuando esto ocurre, se dice que las partículas están *entrelazadas* (Brooks, 1999; Nielsen y Chuang, 2000; Zeilinger, 1998). El entrelazamiento describe correlaciones entre partículas (o sistemas cuánticos) que son mucho más fuertes que cualquier correlación clásica (Brooks, 1999). Como resultado, las medidas realizadas sobre una de las partículas parecen influir instantáneamente sobre las otras con las que se encuentre entrelazada aun cuando éstas se encuentren espacialmente separadas, de tal forma que la información de los estados individuales se encuentra en sus propiedades conjuntas.

La palabra “entrelazamiento” es una traducción libre del término acuñado por Schrödinger en 1935 para describir a este fenómeno particular de los sistemas cuánticos compuestos, que de inmediato revolucionó a la física de la época. Einstein (Einstein et al., 1935) rechazó este efecto, al que se refirió como una “misteriosa acción a distancia” por estar en desacuerdo con el realismo local (principio intuitivo que afirma que los objetos físicos sufren la influencia de su entorno inmediato y por tanto deberán poseer propiedades objetivas antes de que éstas sean observadas (Einstein, 1948). Desde entonces, este concepto generó diversas dudas acerca de la interpretación de la mecánica cuántica cuya validez ha sido

“probada” mediante diferentes teorías y experimentos surgidos a partir de los estudios realizados por Bell en 1964. A pesar de ésto, el entrelazamiento continúa siendo uno de los temas centrales desde el punto de vista filosófico de la mecánica cuántica ya que es la propiedad que permite distinguir entre las correlaciones clásicas y microscópicas.

1.2. El entrelazamiento como recurso físico

En los últimos años se ha demostrado que el entrelazamiento no es únicamente un concepto fundamental en la mecánica cuántica, sino que también representa la base de diversas aplicaciones tecnológicas potenciales.

En los años 80 diferentes investigadores, como Feynman (1982) y Deutsch (1985) comenzaron a pensar en el empleo de las propiedades no locales de los estados entrelazados como un recurso físico capaz de revolucionar las teorías de computación e información. De esta forma surgió el campo de la Información Cuántica que se refiere principalmente al estudio de la capacidad de procesamiento de información en los sistemas cuánticos (Zeilinger, 1998; Prada, 2006). En esta área, la unidad lógica de información es el bit cuántico o *qubit* (Bennet, 1995, Koiller et al., 2005; Nielsen y Chuang, 2000; Schumacher, 1995; Rieffel y Polak, 2000), el cual es un sistema de dos niveles que a diferencia de los bits clásicos puede existir en una superposición de “0” y “1”. Por tanto, un conjunto de qubits puede exhibir entrelazamiento el cual puede ser explotado para realizar procesos computacionales mucho más rápida y eficientemente de lo que sería posible por medios clásicos.

Este aspecto se demostró en los años 90 cuando Peter Shor (1994, 1997) propuso un algoritmo basado en superposiciones cuánticas para la descomposición de un entero en números primos, originándose así el campo de la Computación Cuántica (Rieffel y Polak, 2000). Los mejores algoritmos clásicos para este fin requieren de un tiempo de cálculo que se incrementa exponencialmente con el “tamaño” del número a factorizar; sin embargo el formulado por Shor permite realizar esta tarea en un tiempo que crece polinomialmente con el tamaño del número, es decir, de forma más eficiente. Dicho algoritmo se ha demostrado recientemente de forma experimental (Vandersypen et al., 2001).

Otro algoritmo cuántico relevante, aunque de menor impacto que el anterior, se refiere a la búsqueda de un elemento en una base de datos que no está ordenada. Mientras que esta tarea

se realiza clásicamente en un número de pasos equivalente a la cantidad de datos almacenados, el algoritmo cuántico propuesto por Grover presenta una ventaja cuadrática (Grover, 1996) que se hace relevante conforme el número de elementos de la lista se incrementa.

Éstos y otros problemas que llegan a ser intratables por las computadoras clásicas, pueden llevarse a cabo en una nueva generación de dispositivos físicos conocidos como computadoras cuánticas, las cuales hacen uso del entrelazamiento para el procesamiento de información (Mintert et al., 2005; Rieffel y Polak, 2000) y cuya capacidad potencial es evidente en los ejemplos anteriores.

Por otra parte, el entrelazamiento tiene también un papel importante en diversos protocolos de comunicación basados en efectos cuánticos. Los más destacados incluyen el código denso (empleo de un qubit para transmitir dos bits de información clásica) (Bennett y Wiesner, 1992; Bose *et al.*, 1998; Bouwmeester et al., 2000), la teleportación cuántica (transferencia de un estado cuántico de un sitio a otro mediante canales clásicos) (Bennett et al., 1993; Bouwmeester et al., 2000; Riebe et al., 2004; Barrett et al., 2004) y los protocolos de encriptación (en donde la seguridad de la información proviene del hecho de que cualquier intento por acceder a ella, a través de la medición en uno de los estados, inevitablemente perturba las correlaciones cuánticas) (Deutsch, 1985; Ekert, 1991; Lo, 1998). En particular, estos protocolos hacen uso de estados de dos partículas o qubits que exhiben el máximo grado de entrelazamiento, conocidos como *estados de Bell* (Blatter, 2003; Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004; Zeilinger, 1998).

Estas notables aplicaciones potenciales del entrelazamiento han motivado una gran cantidad de estudios encaminados a la generación tanto del qubit como de los estados entrelazados que puedan ser controlables (Imamoglu et al., 1999; Plenio y Vedral, 1998; Quiroga y Johnson, 1999; Steane, 1998; Tamborenea y Metiu, 2001) y en los que el entrelazamiento pueda obtenerse ya sea mediante interacciones directas o indirectas entre los sistemas cuánticos.

Algunos de éstos presentan un enfoque meramente conceptual, considerando al entrelazamiento como una propiedad matemática. Al tratar a los estados cuánticos como objetos matemáticos abstractos, se ha empleado el formalismo de la matriz de densidad para caracterizar a los sistemas y se han sentado las bases que dichas matrices deben obedecer para representar estados entrelazados (Horodecki et al., 1996; Mintert et al., 2005; Peres, 1996; Vidal y Werner, 2002). Estos trabajos revelaron que la cuantificación del entrelazamiento

exhibido por un sistema cuántico es una cantidad de gran importancia y complejidad aun para sistemas de dos qubits. En particular, la caracterización del entrelazamiento en sistemas que se encuentran en una mezcla estadística de estados (o estados mixtos) se ha intentado mediante el empleo de diversas cantidades escalares que resultan difíciles de evaluar algebraicamente. En la actualidad únicamente la medida conocida como concurrencia, propuesta originalmente para sistemas de dos partículas por Hill y Wootters en 1980 (y refinada posteriormente por Wootters), constituye una herramienta accesible para este fin.

Otro enfoque de las investigaciones relacionadas con el entrelazamiento se basa en el aspecto práctico, y trata a los estados cuánticos como propiedades de sistemas físicos que pueden existir en la Naturaleza o que pueden generarse experimentalmente. Se ha propuesto una gran variedad de sistemas físicos que permitan implementar y controlar tanto el qubit como estados entrelazados (Mintert et al., 2005; Nielsen y Chuang, 2000; Rieffel y Polak, 2000), de entre los que destacan los sistemas de estado sólido debido a que la tecnología actual relacionada con la electrónica se basa en éstos, ofreciendo la posibilidad de contar con un gran número de qubits que permitan la construcción de computadoras cuánticas y la implementación de protocolos de comunicación cuántica (Burkard y Loss, 2002; Chiorescu et al., 2004; Gershenfeld y Chuang, 1997; Imamoglu, 1999; Koiller et al., 2005; Liang, 2005; Loss y DiVincenzo, 1998; Nakamura et al., 1999; Nielsen y Chuang, 2000; Makhlin et al., 1998; Schnirman et al., 1997).

Algunas propuestas se basan en el empleo de un tipo especial de nanoestructuras conocidas como puntos cuánticos de semiconductores, debido a la facilidad con la que podrían integrarse a los dispositivos existentes (Balandin y Wang, 1999; Brum y Hawrylak, 1997; Burkard y Loss, 2002; Gorman et al., 2005; Imamoglu, 1999; Kouwenhoven et al., 1997; Liang, 2005; Loss y DiVincenzo, 1998; Ekert y Jozsa, 1996; Petta et al., 2004; Tanamoto, 2000; Tóth y Lent, 2001). Los puntos cuánticos, conocidos también como átomos artificiales, son dispositivos muy pequeños en los que el movimiento de los electrones está confinado en las tres direcciones espaciales (dicho confinamiento se consigue por lo general mediante potenciales electrostáticos) y presentan un espectro de energías discreto (Alivisatos, 1999; Aguado, 2000; Bimberg et al., 1999; Kouwenhoven y Marcus, 1998, Kouwenhoven et al., 1997; Matagne y Leburton, 2003). En específico, el grado de libertad de carga en dos puntos cuánticos acoplados (o dobles puntos cuánticos) puede emplearse para la implementación de un

qubit de carga o “*charge qubit*”(Fujisawa et al., 1998; Koiller et al., 2005; Tanamoto, 2000; Tanamoto y Hu, 2005; Van der Wiel et al., 2001; Weichselbaum y Ulloa, 2004; Zanardi y Rossi, 1998), en el cual los estados lógicos “0” y “1” están dados por los estados de carga de un electrón adicional localizado en uno de los puntos. Una de las principales ventajas ofrecidas por este tipo de sistemas se refiere a la manipulación del qubit y de estados entrelazados mediante el control coherente de campos eléctricos externos (Gorman et al., 2005; Hayashi et al., 2003; Petta et al., 2004).

En la práctica, uno de los principales impedimentos en la construcción de las computadoras cuánticas y en la implementación de los estados entrelazados se debe a la interacción de éstos con el ambiente, la cual puede afectar tanto al proceso mediante el cual se realizan operaciones sobre los qubits como al resultado de la operación misma (Balandin y Wang, 1999; Bennett et al., 1996b ; Nielsen y Chuang, 2000; Rieffel y Polak, 2000; Unruh, 1995). Al fenómeno mediante el cual la superposición de los distintos estados de un sistema decae en un corto periodo de tiempo (Weiss, 1999) se le conoce como *decoherencia*. En general, una fuente de decoherencia intrínseca a los arreglos de puntos cuánticos es la interacción con fonones acústicos (Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005; Fedichkin et al., 2000; Mahan, 2000).

Debido a que los puntos cuánticos acoplados presentan un espacio de Hilbert efectivo muy pequeño, se convierten en una herramienta útil para el estudio de la disipación (Brandes 2005), la cual se ha considerado en estos sistemas de estado sólido mediante diversas aproximaciones teóricas que van desde las fenomenológicas hasta el empleo de modelos microscópicos. Algunos de éstos consideran que la interacción entre los puntos cuánticos y el baño es débil, por lo que es posible tratarla como una perturbación para obtener una ecuación que determine el estado “reducido” del sistema (en el que no aparecen los estados del baño explícitamente) como por ejemplo la aproximación Markoviana, la cual además supone que el baño no guarda memoria de la interacción. Otros consideran un acoplamiento fuerte entre el sistema y el baño por lo que no es posible realizar un tratamiento perturbativo, un ejemplo de éstos se refiere al empleo de una transformación de polarón.

Es en esta área donde se ubica el presente trabajo, ya que deseamos combinar la línea de investigación referente al entrelazamiento con la teoría de los sistemas cuánticos abiertos en puntos cuánticos.

1.3. Objetivos

En esta tesis se propone un arreglo de dos qubits de carga, definidos en dos doble puntos cuánticos cada uno con un electrón adicional, en los que sea posible la generación teórica de estados entrelazados y en específico los estados de Bell, incluyendo los efectos de un baño disipativo de fonones.

Concretamente deseamos responder a cuatro preguntas:

- ¿Es posible la generación de entrelazamiento entre estos sistemas de estado sólido?
- ¿Se obtendrá el máximo entrelazamiento entre ambos qubits?
- ¿Es posible el control coherente de dichos estados?
- ¿Cuál es el efecto del ambiente sobre el entrelazamiento?

Para lograrlo, hemos dividido el estudio en dos partes principales. Primero, se considerará la generación del entrelazamiento originada por una interacción directa entre los qubits. Posteriormente nos enfocaremos en la obtención de estados entrelazados debida a correlaciones indirectas entre éstos, resultado de su acoplo a un baño disipativo.

En ambas situaciones, la descripción del sistema se realizará a través del cálculo y análisis de tres propiedades primordiales. Debido a que en este tipo de qubits se emplea el grado de libertad de carga para definir los estados lógicos, la distribución de los electrones dentro del arreglo se determinará mediante la propiedad conocida como *polarización*. Por otra parte, la *conurrencia* de Wootters nos permitirá cuantificar el grado de entrelazamiento entre dichos estados de carga, de esta forma será posible dar respuesta a las dos primeras preguntas de investigación. Adicionalmente, se calculará la *probabilidad* de encontrar al sistema en cada uno de los *estados de Bell*.

En el caso de interacciones directas entre los qubits, se considera que éstos se acoplan electrostáticamente (debido a la interacción de Coulomb entre sus electrones) y además se encuentran bajo la influencia de un potencial externo controlable, tanto estacionario como dinámico, que puede representar variaciones en las propiedades de los puntos cuánticos. La manipulación dinámica de dicho potencial se propone para controlar coherentemente los estados entrelazados. Finalmente, se incluirán los efectos disipativos al considerar la interacción del arreglo con un baño de fonones en equilibrio termodinámico en el régimen de acoplamiento débil, y se calcularán las propiedades mencionadas para diferentes temperaturas. De esta forma se intentará responder a la cuarta pregunta de investigación

En la segunda parte consideraremos que los qubits son independientes uno de otro, pero se acoplan a un baño bosónico común. Aquí nos enfocaremos principalmente en la última de las cuatro preguntas de investigación al proponer que la interacción entre ambos subsistemas es capaz de generar estados entrelazados. Más aún, debido a que los efectos disipativos constituyen la única fuente esperada de entrelazamiento, se considerará el régimen de acoplamiento fuerte entre el sistema y el baño. Adicionalmente, supondremos que uno de los qubits está abierto a contactos de electrones, efecto que puede representar fluctuaciones en la carga o la entrada de un proceso de comunicación o de computación cuántica.

1.4. Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 de este trabajo se amplían algunos de los conceptos y antecedentes mencionados anteriormente. Comenzamos por definir las propiedades de la matriz de densidad como el principal formalismo empleado a lo largo del trabajo para describir a los sistemas cuánticos. Posteriormente se presentan las propiedades básicas de los qubits, del entrelazamiento y de los estados de Bell y se mencionan los principales sistemas físicos que se han propuesto para su implementación. Se presentan las bases teóricas de los puntos cuánticos, estableciendo la importancia que tiene la cuantización de la carga en un arreglo de puntos y se revisan las principales teorías que permiten estudiar la disipación en este tipo de arreglos.

En el Capítulo 3 se emplea un Hamiltoniano de tipo Hubbard extendido para estudiar al arreglo de qubits de carga interactuantes en presencia de un potencial eléctrico generado por un arreglo idéntico de puntos cuánticos. Se destaca la importancia que tiene dicho potencial en la formación estacionaria y dinámica de estados entrelazados y se demuestra que mediante su control es posible mantener el sistema en un alto grado de entrelazamiento y en un estado de Bell con la mayor probabilidad. Asimismo, se toma en cuenta la presencia de defectos en el arreglo al considerar que uno de los puntos tiene diferente tamaño. La disipación se incluye mediante el empleo de la aproximación Markoviana para la matriz de densidad reducida del arreglo, y se evalúa el efecto de la temperatura en las propiedades del sistema.

El Capítulo 4 muestra la generación y el control coherente de cada uno de los estados de Bell en el arreglo de qubits interactuantes, a través de la manipulación dinámica de un campo eléctrico externo aplicado a uno de los dobles puntos. Dichos estados se obtienen a partir de

condiciones iniciales correspondientes a estados separables y su probabilidad disminuye conforme se incrementa la temperatura de los fonones (los cuales de nuevo se acoplan débilmente al arreglo).

Posteriormente, en el Capítulo 5, se presenta la generación estacionaria de entrelazamiento en un arreglo de qubits de carga no interactuantes, debida a su acoplamiento fuerte con el baño disipativo. En este caso se emplea un Hamiltoniano de pseudoespín sobre el que se realiza una transformación canónica (de polarón) que permita realizar el tratamiento no perturbativo del sistema.

Finalmente, las conclusiones de la tesis se presentan en el Capítulo 6, en el orden mencionado

Capítulo 2

Conceptos generales

Introducción

En este Capítulo hacemos una presentación de algunos antecedentes y conceptos generales que permiten delimitar el contexto en el que se ubica este trabajo de tesis. Debido a que emplearemos principalmente el formalismo de la matriz de densidad para determinar el estado de los sistemas cuánticos así como para obtener las observables de interés, comenzaremos definiendo al operador de densidad y se expondrán sus propiedades principales así como su ecuación de evolución temporal.

Al ser el qubit la unidad fundamental de información cuántica, se presentarán brevemente los sistemas físicos más prometedores que se han propuesto para su construcción. Posteriormente se definirá el entrelazamiento como recurso físico para el procesamiento de información cuántica, se presentarán los posibles sistemas que permitan su implementación física y se definirá a la concurrencia como una medida para la cuantificación del grado de entrelazamiento exhibido por un sistema arbitrario de dos qubits.

Debido a que algunos sistemas basados en puntos cuánticos son candidatos prometedores tanto para la implementación del qubit como de estados entrelazados, describiremos brevemente las propiedades más notables de los puntos cuánticos y se destacará el empleo del grado de libertad de carga en un doble punto para definir los estados de un qubit así como estados entrelazados.

Finalmente, se presentarán los principales conceptos relacionados con los sistemas cuánticos abiertos y expondremos dos de los métodos más útiles para obtener las ecuaciones de movimiento de la matriz de densidad reducida de un arreglo puntos cuánticos acoplados a un baño disipativo de fonones.

2.1. Matriz de densidad

La naturaleza probabilística de la mecánica cuántica ha llevado al desarrollo de un operador que permite una descripción simple tanto de estados puros como de mezclas estadísticas de

estados, el cual contiene toda la información física disponible sobre el sistema del mismo modo en que la función de onda permite caracterizar a un estado cuántico: el *operador de densidad*.

El formalismo de la matriz de densidad, introducido en 1927 por John von Neumann, determina que el operador de densidad es hermitiano y da lugar a una matriz con traza unitaria. Las situaciones en las que es empleado incluyen sistemas en equilibrio térmico (a temperaturas finitas), la evolución temporal de sistemas mixtos, el análisis de decoherencia y el estudio de entrelazamiento entre dos subsistemas (Blum, 1981; de Llano, 1996; Moura, 2005).

2.1.1 La matriz de densidad y sus propiedades básicas

Cuando un sistema cuántico se encuentra en un estado perfectamente determinado, se dice que está en un *estado puro*. El operador de densidad para un estado puro, $|\psi\rangle$, está definido como

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.1)$$

Si la función de onda se escribe como una combinación lineal de estados $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$, donde $\{|\phi_n\rangle\}$ forman una base completa ortonormal siendo c_n los coeficientes de la expansión, la proyección del operador de densidad en dicha base permite obtener los elementos de la *matriz de densidad* para estados puros:

$$\rho_{mn} = \langle\phi_m|\rho|\phi_n\rangle = \langle\phi_m|\psi\rangle\langle\psi|\phi_n\rangle = c_m c_n^* \quad (2.2)$$

cuyos elementos diagonales, $\rho_{nn} = |c_n|^2$, representan la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\phi_n\rangle$, por lo que a ρ_{nn} se le conoce como la *población* de dicho estado; los elementos fuera de la diagonal, ρ_{mn} , representan los efectos de interferencia entre los estados $|\phi_m\rangle$ y $|\phi_n\rangle$, por lo que reciben el nombre de *coherencias* (Blum, 1981; Sakurai, 1994; Schwabl, 2001; Cohen-Tannoudji, 1977).

En términos del operador de densidad es posible expresar la conservación de la probabilidad, pues la ecuación (2.2) nos indica que:

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n \rho_{nn} = 1 \quad (2.3)$$

Adicionalmente, con la ayuda de la ecuación (2.2), es posible calcular el valor esperado de un operador A como:

$$\langle A \rangle = \sum_{m,n} \langle \phi_m | \rho | \phi_n \rangle \langle \phi_n | A | \phi_m \rangle = \sum_m \langle \phi_m | \rho A | \phi_m \rangle = Tr\{\rho A\} \quad (2.4)$$

A partir de estas propiedades y de la ecuación de evolución del operador de densidad (como veremos más adelante) se puede concluir que la matriz de densidad es suficiente para caracterizar el estado cuántico de un sistema (Cohen-Tannoudji, 1977; Schwabl, 2001); es decir, permite obtener todas las propiedades físicas que pueden calcularse con la función de onda. La principal característica que hace atractivo el empleo del operador de densidad, radica en que las expresiones (2.3) y (2.4) son lineales, mientras que las mismas propiedades calculadas mediante la función de onda $|\psi\rangle$ son cuadráticas.

Esta linealidad permite la generalización de los desarrollos anteriores para sistemas que se encuentran en una mezcla estadística de estados (o estados mixtos), para los cuales el operador de densidad está dado por

$$\rho = \sum_{m'} W_{m'} |\psi_{m'}\rangle \langle \psi_{m'}| = \sum_{nm'm} W_{m'} c_m^{m'} c_n^{m'*} |\phi_m\rangle \langle \phi_n| \quad (2.5)$$

donde $W_{m'}$ representa el peso estadístico para cada estado (Blum, 1981; Sakurai, 1994; Cohen-Tannoudji, 1977) y los elementos de la matriz de densidad son

$$\rho_{mn} = \sum_{m'} W_{m'} c_m^{m'} c_n^{m'*} \quad (2.6)$$

Para estados mixtos, las poblaciones toman la forma $\rho_{nn} = \sum_{m'} W_{m'} |c_n^{m'}|^2$ representando el promedio de la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|\phi_n\rangle$. Por otra parte, los elementos no diagonales, ecuación (2.6), corresponden al promedio de los efectos de interferencia entre los estados $|\phi_n\rangle$ y $|\phi_m\rangle$ tomado sobre todos los posibles estados de la mezcla. Estos términos pueden ser cero incluso si ninguno de los productos $c_m^{m'} c_n^{m'*}$ lo son, por lo tanto, para mezclas estadísticas de estados es posible que se cancele todo efecto de interferencia entre estados accesibles del sistema (Cohen-Tannoudji, 1977)

Tanto para estados puros como mixtos, podemos generalizar las *propiedades de la matriz de densidad* (Blum, 1981; Sakurai, 1994; Schwabl, 2001; Cohen-Tannoudji, 1977). De la definición, ecuaciones (2.1) y (2.5), es evidente que ρ es un operador *hermitiano*, por lo que sus elementos de matriz satisfacen la condición

$$\rho_{nm} = \rho_{mn}^* \quad (2.7)$$

Debido a que la traza de ρ es independiente de la representación, de la conservación de la probabilidad, ecuaciones (2.3) y (2.6), se tiene una de las principales características del operador de densidad:

$$\text{Tr}\{\rho\} = 1 \quad (2.8)$$

Ya que las probabilidades son números positivos, los elementos diagonales de la matriz de densidad deben ser reales,

$$\rho_{mm} \geq 0 \quad (2.9)$$

Por otra parte, el operador de densidad para estados puros cumple con la relación

$$\rho^2 = \rho \quad (2.10)$$

conocida como idempotencia (Sakurai, 1994), y consecuentemente, $\text{Tr}\{\rho^2\} = \text{Tr}\{\rho\}$. Sin embargo, para estados mixtos el operador ya no es sólo un proyector y entonces en general se tiene que

$$\rho^2 \neq \rho \quad (2.11)$$

y $\text{Tr}\{\rho^2\} \leq 1$. Esta propiedad permite identificar si un sistema cuántico es un estado puro o se encuentra en una mezcla estadística de estados.

Otra de las ventajas de emplear el operador de densidad consiste en el número de parámetros necesarios para determinar la matriz. Si el número de estados de la expansión de la función de onda $|\psi\rangle$ es N, la matriz de densidad es N-dimensional y consta de N^2 elementos correspondiendo a $2N^2$ parámetros reales. Sin embargo, debido a la condición de hermiticidad y a que la traza es fija, ecuación (2.8), la matriz de densidad queda completamente especificada en términos de N^2-1 parámetros reales.

2.1.2 Ecuación de evolución del operador de densidad

Tanto para estados puros como para mezclas estadísticas de estados, la evolución temporal del operador de densidad está gobernada por la ecuación de Schrödinger (Blum, 191; Fano, 1957). Supóngase que a un tiempo inicial un sistema está representado por el operador de densidad

$$\rho(t_0) = \sum_{m'} W_{m'} |\psi^{m'}(t_0)\rangle \langle \psi^{m'}(t_0)| \quad (2.12)$$

Si el sistema no sufre de ninguna perturbación, el peso estadístico de cada estado tampoco debe cambiar, por lo que la variación de ρ en el tiempo obedece únicamente a la evolución temporal de los estados $|\psi^{m'}(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi^{m'}(t_0)\rangle$, donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal que transforma un estado a un tiempo inicial t_0 en un estado a un tiempo t . Entonces, el operador de densidad dependiente del tiempo tiene la forma:

$$\rho(t) = \sum_{m'} W_{m'} |\psi^{m'}(t)\rangle \langle \psi^{m'}(t)| = \sum_{m'} W_{m'} U(t, t_0) |\psi^{m'}(t_0)\rangle \langle \psi^{m'}(t_0)| U(t, t_0)^\dagger \quad (2.13)$$

que puede escribirse como

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U(t, t_0)^\dagger \quad (2.14)$$

Diferenciando esta expresión respecto al tiempo, y teniendo en cuenta que el operador de evolución temporal satisface la relación $i\hbar \partial U(t, t_0) / \partial t = H(t) U(t, t_0)$, se obtiene:

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = H(t) (U(t, t_0) \rho(t_0) U(t, t_0)^\dagger) - (U(t, t_0) \rho(t_0) U(t, t_0)^\dagger) H(t) \quad (2.15)$$

en donde reconocemos la expresión para el operador de densidad dependiente del tiempo, ecuación (2.14), obteniéndose

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)] \quad (2.16)$$

Esta es la *ecuación de von Neumann* (conocida también como ecuación de *Liouville-von Neumann* debido a que asume la misma forma que la ecuación de movimiento de la distribución de probabilidad del espacio fase en mecánica clásica), que describe la evolución temporal del operador de densidad en la representación de Schrödinger, y se aplica para Hamiltonianos dependientes e independientes del tiempo (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji, 1977; Fano, 1957; Mahler y Weberruß, 1995; Schwabl, 2001).

De la ecuación (2.14) puede verse que $Tr\{\rho^2\}$ es independiente del tiempo, de ahí que un estado puro permanece como puro, y una mezcla estadística de estados permanece como un estado mixto. Por tanto, la ecuación de Liouville- von Neumann es válida tanto para estados puros como mixtos (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji, 1977; Fano, 1957; Mahler y Weberruß, 1995; Schwabl, 2001).

De esta forma, el valor promedio de cualquier operador varía en el tiempo de acuerdo con la expresión

$$\langle A \rangle_t = \text{Tr}\{\rho(t)A\} = \text{Tr}\{U(t, t_0)\rho(t_0)U(t, t_0)^\dagger A\} = \text{Tr}\{A(t)\rho(t_0)\} \quad (2.17)$$

de donde además se concluye que el paso de la representación de Schrödinger a la de Heisenberg es una consecuencia de la propiedad cíclica de la traza (Fano, 1957; Schwabl, 2001).

Finalmente notemos que en la eigenbase de un Hamiltoniano H independiente del tiempo, con eigenvalores $\{E_n\}$, la ecuación de Liouville- von Neumann permite obtener

$$\rho_{mn}(t) = e^{-i(E_m - E_n)t/\hbar} \rho_{mn}(t_0) \quad (2.18)$$

lo cual nos indica que las poblaciones son constantes de movimiento y que las coherencias oscilan a la frecuencia de Bohr del sistema (Cohen-Tannoudji, 1977; Fano, 1957)

2.2. Qubit

La unidad fundamental de información cuántica es el bit cuántico o de forma abreviada, *qubit* (del inglés “quantum bit”), que es un sistema cuántico de dos niveles (Bennett, 1995, Koiller et al., 2005; Nielsen y Chuang, 2000; Schumacher, 1995; Rieffel y Polak, 2000) capaz de representar información. Cada uno de esos niveles, a los que nos referiremos como $|0\rangle$ y $|1\rangle$, puede emplearse para representar los valores lógicos clásicos 0 y 1; sin embargo, a diferencia del bit clásico (abreviatura de *binary digit*), el qubit puede encontrarse en cualquier superposición de los dos estados: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, en donde α y β corresponden a las amplitudes de probabilidad de dichos niveles y cumplen con la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. En el estado de un solo qubit se puede codificar una cantidad arbitrariamente grande de información clásica que puede ser procesada y transmitida sin embargo, por las propiedades de la mecánica cuántica, la información que puede recuperarse de un solo qubit es igual a un bit. Otra característica que lo distingue de un bit clásico es que diferentes qubits pueden *entrelazarse* con el objeto de realizar diversas operaciones computacionales o procesos de comunicación cuántica (Bennett et al., 1996 a; Nielsen y Chuang, 2000; Schumacher, 1995).

Análogamente a los procesos computacionales clásicos, los estados de los qubits pueden cambiarse mediante la aplicación de compuertas cuánticas hasta obtener un resultado (estado) deseado. Como “compuerta” se entiende un conjunto de transformaciones que constituyen un

cálculo, y que en el caso de la información cuántica corresponden a operadores unitarios, es decir a procesos reversibles (Barenco, 1995; Koiller et al., 2005; Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004; Rieffel y Polak, 2000; Vedral y Plenio, 1998).

Por lo general, los protocolos de información cuántica involucran compuertas que pueden afectar el estado de un solo qubit, como por ejemplo la compuertas X, Y y Z que corresponden a las matrices de Pauli para un espín $\frac{1}{2}$ (Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004; Rieffel y Polak, 2000), pero también existen compuertas de múltiples qubits. Por motivos prácticos, es deseable contar con conjuntos universales de compuertas cuánticas para realizar operaciones arbitrarias sin necesidad de diseñarlas o “crearlas” cada vez. Barenco ha demostrado (1995) que es posible realizar operaciones unitarias en un registro (memoria) de n-qubits únicamente con combinaciones de compuertas de un qubit y una sola compuerta de dos qubits, en específico la negación controlada o CNOT la cual deja invariante a un qubit si el otro se encuentra en el estado “0” y lo invierte si el primero se encuentra en el estado “1” (Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004).

En principio, un qubit puede representarse mediante cualquier sistema de dos niveles “natural”, como por ejemplo partículas con espín $\frac{1}{2}$, dos estados de polarización diferentes de un fotón, entre otros (Brooks, 1999; Koiller et al., 2005; Nielsen y Chuang, 2000; Rieffel y Polak, 2000). Sin embargo, su implementación física depende en gran medida de los requisitos para construir una computadora cuántica, establecidos por DiVincenzo (2000) y de los cuales se desprende la necesidad de contar con qubits que puedan inicializarse en un estado arbitrario, manipularse y “leerse” fácilmente. También está fuertemente relacionada con la demostración del efecto de las compuertas cuánticas y con la escalabilidad (entendiendo por escalabilidad al método que permite incrementar el número de unidades fundamentales de un dispositivo una vez que se conoce la forma de fabricar una sola unidad), pues se requiere de aproximadamente 10^6 qubits para construir una computadora cuántica (Burkard y Loss, 2002; Koiller et al., 2005; Nielsen y Chuang, 2000).

Sobre esta base, diferentes sistemas físicos han sido propuestos como candidatos para la construcción del qubit, incluyendo sólo como algunos ejemplos a los que se basan en la física atómica (espines nucleares, espín del electrón, estados atómicos), en óptica cuántica (grados de libertad de polarización de fotones) y en la materia condensada.

Uno de los esquemas más prometedores es el de iones atrapados, propuesto inicialmente por Cirac y Zoller de forma teórica (1995), que se ha demostrado experimentalmente. En éste,

los qubits están definidos en los estados energéticos de iones confinados en una “trampa” mediante campos eléctricos, mientras que la información se procesa y se transfiere a través de los modos vibracionales colectivos de los iones. Las operaciones de las compuertas de uno y de múltiples qubits se realizan al incidir luz laser sobre ellos. Se ha conseguido la implementación de estos sistemas con alta precisión y se ha demostrado la manipulación de hasta 8 qubits acoplados (Häffner et al., 2005a) sin embargo están limitados por la velocidad de la frecuencia de vibración de los modos de la trampa y por el alto vacío que se requiere para su operación.

Otro enfoque está basado en sistemas de resonancia magnética nuclear (RMN) en líquidos y más recientemente en sólidos (Cory et al., 2000; Gershenfeld y Chuang, 1997; Vandersypen et al., 2001), en los que el qubit está representado por el estado promedio de espines de núcleos magnéticamente activos y las operaciones lógicas se llevan a cabo mediante manipulación de campos magnéticos y de pulsos de radiofrecuencias que se detectan con instrumentos de RMN similares a los empleados en hospitales. En estos sistemas ha sido posible manipular hasta 7 qubits a temperatura ambiente (Chuang et al., 1996; Gershenfeld y Chuang, 1997; Vandersypen et al., 2001), pero su principal limitante es la dificultad en la escalabilidad.

Los esquemas basados en la óptica cuántica son también muy atractivos debido a la facilidad con la que es posible observar la interferencia de fotones así como la interacción entre éstos y la materia. Incluyen a sistemas basados en cavidades electrodinámicas que han sido ampliamente estudiados (Rauschenbeutel et al., 1999, Turcehte et al., 1999), en los que un qubit definido en dos estados atómicos o en puntos cuánticos interactúa con el campo cuantizado de una cavidad óptica (el cual consiste de una región confinada por dos o más espejos que están alineados para permitir reflexiones múltiples de la luz). En este caso, el efecto de las compuertas se lleva a cabo mediante la manipulación del campo electromagnético.

En cuanto a sistemas de estado sólido, algunas propuestas incluyen espines nucleares de átomos donadores en silicio (Kane, 1998), transistores de resonancia de electrón y espín (ESR por sus siglas en inglés) (Vrijen et al., 2000), electrones atrapados en ondas acústicas de superficie (Barnes et al., 2000), estados de carga (Averin, 1998; Pashkin et al., 2003; Schnirman et al., 1997) o de flujo (Chiorescu et al., 2004; Nakamura, 1999; Makhlin et al., 1998; Yamamoto et al., 2003) en uniones Josephson acopladas, y el empleo de grados de libertad de espín (Loss y DiVincenzo, 1998) o de carga (Barenco et al., 1995; Brum y Hawrylak, 1997; Fedichkin et al., 2000; Gorman et al., 2005; Hayashi et al., 2003; van der

Wiel, 2001; Van der Wiel et al., 2003; Zanardi y Rossi, 1998) en puntos cuánticos semiconductores.

Estos últimos constituyen un candidato prometedor para la implementación física del qubit debido a su compatibilidad con la tecnología actual relacionada con el procesamiento de información, así como a su escalabilidad potencial a un gran número de qubits. Adicionalmente, el control tanto de la carga como del espín en puntos cuánticos son campos de investigación que han sido ampliamente estudiados en los últimos años (Cota et al., 2005; Elzerman et al., 2003; Engel et al., 2004; Fujisawa et al., 2002; Hanson et al., 2004; Kouwenhoven, 1990; Kouwehoven et al., 1997; Kouwehoven et al., 2001; Kouwenhoven y Marcus, 1998; Livermore et al., 1996; Sánchez et al., 2006; Tamura et al., 2003).

Los qubits basados en el espín de nanoestructuras semiconductoras presentan altos tiempos de decoherencia, que pueden ser incluso de milisegundos en silicio a bajas temperaturas (Burkard et al., 1999; Engel et al., 2004; Koiller et al., 2005), y presentan un acoplo inter-qubit de corto alcance que se reduce a primeros vecinos permitiendo un control y manipulación más preciso de las compuertas de dos qubits. Sin embargo su gran desventaja radica en que el espín del electrón es difícil de medir rápidamente (Koiller et al., 2005; Tanamoto 2000).

Una de las grandes ventajas de los qubits basados en el grado de libertad de carga en sistemas de estado sólido, conocidos como “*charge qubits*” (o qubits de carga), es que los procesos de medición asociados a la carga del electrón son relativamente simples debido a las técnicas experimentales bien desarrolladas hasta el momento (Elzerman et al., 2003; Gorman et al., 2005; Koiller et al., 2005; Tanamoto 2000; Zhang et al., 2004). Sin embargo, los estados orbitales son altamente susceptibles a interacciones con el ambiente, por lo que los tiempos de decoherencia son generalmente muy cortos (del orden de picosegundos o nanosegundos a temperaturas muy bajas (Burkard et al., 1999; Gorman et al., 2005; Hayashi et al. 2003;); por otra parte, las interacciones entre qubits son muy fuertes por lo que constituyen una excelente opción para el estudio de la dinámica y del acoplamiento de los qubits a los ambientes típicos de este tipo de nanoestructuras.

En esta tesis nos enfocamos en *qubits de carga* definidos en los estados electrónicos de dos dobles puntos cuánticos semiconductores (Tanamoto, 2000; Tanamoto y Hu, 2005). En particular, nos encontramos interesados en la generación de entrelazamiento entre ambos, propiedad definida en la siguiente sección.

2.3. Entrelazamiento

Como se ha mencionado, el entrelazamiento es un fenómeno que se refiere al estado conjunto de dos o más sistemas cuánticos y describe correlaciones entre éstos que son mucho más fuertes que cualquier correlación clásica (Brooks, 1999; Messina, 2002).

En sistemas clásicos, todas las posibles correlaciones pueden describirse en términos de probabilidades clásicas; sin embargo esto no es posible para las correlaciones características de los estados entrelazados, que en los años 1930s parecían contradecir la comprensión común de los sistemas físicos. Como consecuencia, se generaron diversas discusiones acerca de la existencia de dichos estados y, por tanto, de la descripción que la mecánica cuántica proveía de la Naturaleza (Mintert, 2004; Einstein et al., 1935). A partir de entonces se han realizado diferentes intentos por encontrar teorías alternativas capaces de explicar las correlaciones exhibidas por los sistemas cuánticos. Una de las más populares (Einstein et al., 1935) que dio origen a la primera evidencia experimental de estados entrelazados (Papaliolios, 1967), postula la existencia de un conjunto de variables ocultas que determinan los valores de todas las observables locales; sin embargo no son accesibles a ningún tipo de medición, implicando que su existencia siempre es desconocida.

De forma independiente se desarrollaron dos criterios que dieron evidencia de que la teoría de variables ocultas no puede describir todas las relaciones que se presentan entre sistemas cuánticos, los cuales han sido demostrados experimentalmente (Papaliolios, 1967; Pan et al., 2000). Uno de ellos hace uso de estados especiales de tres partículas (Gereenberger et al., 1990) y el otro implica a diversas desigualdades, conocidas como desigualdades de Bell, capaces de diferenciar las correlaciones debidas al entrelazamiento de aquellas descritas por la teoría de variables ocultas (Bell, 1964; Clauser et al., 1969).

Hoy en día existe un gran interés en los estados entrelazados debido a las aplicaciones potenciales que hacen uso de esas propiedades no locales. Una de las más famosas y discutidas es su empleo en la computación cuántica, pero su aplicación en diversos procesos de comunicación cuántica y en el estudio de los fundamentos de la mecánica cuántica son igualmente atractivos.

La definición matemática de los estados entrelazados es “negativa” puesto que parte de la de un estado separable. Un sistema cuántico que está formado por dos subsistemas físicamente

distintos está asociado a un espacio de Hilbert \mathcal{H} dado por el producto directo de los espacios de Hilbert correspondientes a cada subsistema, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Un estado del sistema total está dado por cualquier combinación lineal de los estados base de cada subsistema, $|\phi_k\rangle$ y $|\varphi_l\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} |\phi_k\rangle |\varphi_l\rangle \quad (2.19)$$

en donde c_{kl} son coeficientes complejos que cumplen con la condición de normalización $\sum_{kl} |c_{kl}|^2 = 1$. Un caso especial de esta ecuación corresponde a un estado que es producto directo, o estado separable (Mintert et al., 2005; Popescu y Rohrlich, 1998), el cual tiene la forma

$$|\Psi\rangle = |\phi_k\rangle \otimes |\varphi_l\rangle = \left(\sum_k c_k |\phi_k\rangle \right) \otimes \left(\sum_l c_l |\varphi_l\rangle \right) \quad (2.20)$$

con $\sum_k |c_k|^2 = 1$ y $\sum_l |c_l|^2 = 1$, implicando que $c_{kl} = c_k c_l$ en (2.19).

Los estados que *no* pueden escribirse como un producto directo de los estados de los subsistemas, ecuación (2.20), están *entrelazados* (Mintert et al., 2005; Popescu y Rohrlich, 1998); es decir, corresponden a una superposición *no factorizable* de los estados individuales que conforman al sistema total (Mintert et al., 2005; Popescu y Rohrlich, 1998, Messina, 2002).

En los estados separables, los resultados de las mediciones realizadas sobre cada subsistema no están correlacionados y por tanto son independientes. De forma contraria, una medición local en estados entrelazados ocasiona cambios en las posibles predicciones que pueden hacerse de los subsistemas (Mintert et al., 2005; Brooks, 1999; Rieffel y Polak, 2000).

Si cada subsistema se asocia a un qubit, al conocer el estado o la información contenida en uno de ellos es posible determinar el estado del otro, aunque se encuentren espacialmente separados. Esta propiedad se traduce como una “interconexión efectiva” entre los qubits que da origen a la capacidad potencial de las computadoras cuánticas.

Para dos subsistemas de estados mixtos, definidos por matrices de densidad ρ_1 y ρ_2 , un estado separable general está dado por la suma convexa del producto directo de dichas matrices (Keyl, 2002; Mintert et al., 2005; Vedral et al., 2001, Vedral et al., 1997),

$$\rho = \sum_i W_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \quad (2.21)$$

en donde “convexo” implica coeficientes W_i positivos cuya suma da la unidad. Estos estados quedan totalmente determinados por las probabilidades clásicas W_i . Si *no* existe una suma

convexa del tipo (2.21), se tiene un *estado mixto entrelazado* (Keyl, 2002; Mintert et al., 2005; Vedral et al., 2001, Vedral et al., 1997)

$$\rho \neq \sum_i W_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \quad (2.22)$$

que corresponde a una generalización de la negación de la expresión (2.20). Las correlaciones contenidas en estados de este tipo no pueden ser caracterizadas completamente mediante un conjunto de probabilidades clásicas, por lo que los estados entrelazados dan lugar a correlaciones que no existen en un sistema clásico (Mintert, 2004).

La definición de estados entrelazados puede extenderse a sistemas de estados múltiples, es decir, a aquellos compuestos por más de dos subsistemas. Entonces un sistema de varias partículas (o qubits) es separable si se puede escribir como el producto de n estados, cada uno de los cuales describe a un subsistema; si alguno de éstos no es separable, el estado total se encuentra entrelazado. Por tanto, un estado mixto de varias partículas estará entrelazado si *no* puede escribirse como la suma convexa del producto directo de las matrices de densidad de cada partícula (Keyl, 2002; Mintert et al., 2005; Mintert, 2004),

$$\rho_{123\dots n} \neq \sum_i W_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \dots \otimes \rho_n^i \quad (2.23)$$

Debido a las aplicaciones potenciales del entrelazamiento, la búsqueda y el diseño de sistemas que permitan no únicamente implementar sino también manipular y controlar estados entrelazados es un problema de gran interés en la actualidad. La mayoría de las actividades teóricas y experimentales están asociadas a sistemas atómicos y óptico-cuánticos. Como ejemplos se tienen iones atrapados (Cirac y Zoller, 1995; Turchette et al., 1998) o micro trampas (Eckert, et al 2002; Mompert et al., 2003) que permiten preparar estados entrelazados utilizando radiación electromagnética coherente. En particular, el entrelazamiento para dos, tres, cuatro y recientemente hasta ocho partículas se han demostrado experimentalmente en iones atrapados (Calarco et al., 2001; Kraus y Cirac, 2004; Häffner et al., 2005a; Häffner et al., 2005b; Riebe et al., 2004; Roos et al., 2004), mientras que el entrelazamiento de dos y más estados se ha observado en cavidades electrodinámicas (Davidovich et al., 1994, Rauschenbeutel et al., 1999).

La generación de estados entrelazados en sistemas de estado sólido es atractiva debido a la facilidad con la que podrían integrarse a los dispositivos actuales y a su escalabilidad inherente, por lo que se ha propuesto mediante el empleo de superconductores (Chtchelkatchev et al., 2002; Lesovik et al., 2001; Prada y Sols, 2005; Recher y Loss, 2003) de impurezas

magnéticas (Costa y Bose, 2001), en qubits definidos en nanotubos de carbono (Bena et al., 2002) y en puntos cuánticos, ya sea a través de excitones (Chen et al., 2000; Gywat et al., 2002; Hichri et al., 2004a; Reina et al., 2000; Quiroga y Johnson, 1999; Yi et al., 2001), del grado de libertad de carga (Chouikha et al., 2003; Hichri et al., 2004b; Kyriakidis et al., 2002; Tamborenea y Metiu, 2001; Yi et al., 2001; Zhang y Zhao, 2002; Zhang et al., 2002; Weiss et al., 2006; Tanamoto, 2000) o del espín (Burkard y Loss, 2003; Solenov et al., 2007; Solenov et al., 2006; Weiss et al., 2006).

En la mayor parte de los ejemplos mencionados, el entrelazamiento entre los diferentes subsistemas se origina por una interacción directa entre éstos, como por ejemplo la interacción electrón-electrón o la interacción de Coulomb; sin embargo se ha demostrado que es posible generar entrelazamiento aun en ausencia de interacciones en sistemas de espines (Lebedev et al., 2004; Lorenzo et al., 2005), en estados de carga (Beenaker et al., 2004; Beenaker et al., 2003; Samuelsson, 2003) y entre electrones y huecos (Beenaker, 2005) en nanoestructuras. Adicionalmente, se ha propuesto la formación de correlaciones cuánticas indirectas entre dos qubits independientes, inducida por el ambiente en un sistema cuántico abierto (Kraus y Cirac, 2004; Jun-Gang *et al.*, 2006; Nicolosi *et al.*, Paternostro *et al.*, 2004a-c; 2004, Vorrath y Brandes, 2003; Zou *et al.*, 2006).

En este trabajo estudiaremos la generación de entrelazamiento entre dos qubits considerando tanto interacciones directas como indirectas entre ellos.

2.3.1 Estados de Bell

El sistema más simple que puede exhibir entrelazamiento es el formado por dos subsistemas. Los estados cuánticos de dos qubits que presentan el máximo entrelazamiento reciben el nombre de estados de Bell, en honor a John S. Bell ya que están involucrados con las desigualdades que corroboran la completez de la mecánica cuántica y reafirmaron el concepto de entrelazamiento (Bell, 1964; Blatter, 2003).

Son cuatro los estados puros entrelazados que conforman la base de Bell, o los cuatro estados de Bell, que en la *base computacional* $\{0,1\}$ están dados por (Blatter, 2003; Bouwmeester et al., 2000; Brooks, 1999; Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004; Zeilinger, 1998; Hill y Wootters, 1997):

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (2.24)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (2.25)$$

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.26)$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \quad (2.27)$$

También reciben el nombre de pares EPR o estados EPR debido a que Einstein, Podolsky y Rosen fueron los primeros en señalar y tratar de explicar las propiedades peculiares de los estados entrelazados (Brooks, 1999; Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004). Dos qubits en un estado máximamente entrelazado recibe el nombre de “bit entrelazado” o *ebit*, el cual también puede definirse como la cantidad de información que debe intercambiarse entre dos qubits para formar un estado entrelazado (Bennett et al., 1996a; Bennet, 1998) y del que pueden extraerse dos bits de información clásica (Zeilinger, 1998; Jozsa, 1998).

Los protocolos de criptografía y teleportación cuánticos, así como el código súper denso, fueron pensados originalmente en sistemas de dos partículas con el mayor entrelazamiento, por lo que el entendimiento y control de los estados de Bell es de gran importancia para la ciencia básica.

En la teoría de la información cuántica se ha propuesto que estos estados pueden generarse a partir de estados de dos qubits no entrelazados mediante la acción de dos compuertas cuánticas. La primera de ellas, conocida como compuerta de Hadamard (Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004; Rieffel y Polak, 2000), se aplica sobre el primer qubit produciendo una combinación lineal de estados de dos partículas. Posteriormente se aplica la compuerta de negación controlada o CNOT la cual, como se ha mencionado en la sección 2.2, invierte el estado del segundo qubit si el primero se encuentra en el estado $|1\rangle$ o lo deja sin cambio si el estado del primer qubit es $|0\rangle$.

La acción de dichas compuertas se representa esquemáticamente en el “circuito” mostrado en la Figura 2.1, en la que también se presenta su correspondiente “tabla de verdad” (Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004)

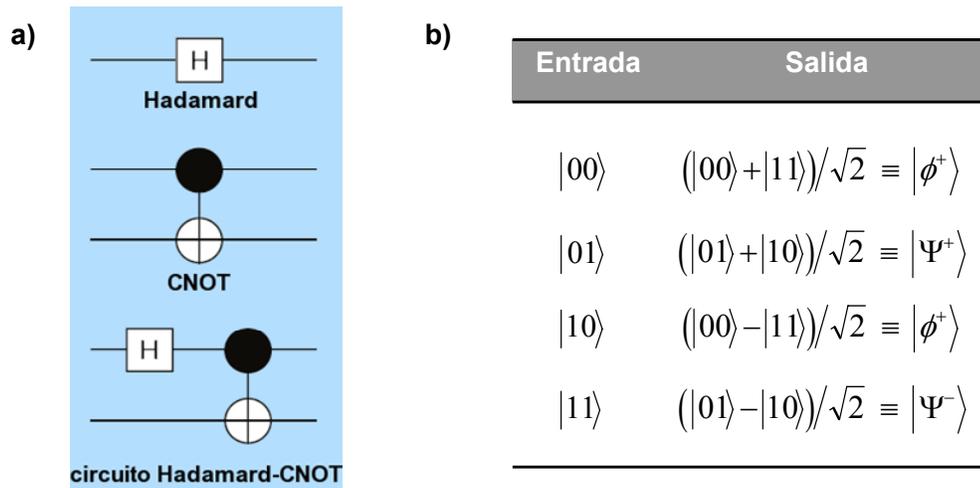


Figura 2.1 a) Esquematación de la operación de las compuertas de Hadamard y CNOT, así como del circuito que origina los estados de Bell. b) Tabla de verdad de los estados de Bell

La implementación física de los estados de Bell se ha conseguido principalmente en sistemas de iones atrapados (Häffner et al., 2005b; Riebe et al., 2004; Roos et al., 2004) y en sistemas de óptica cuántica, incluyendo estados de polarización de dos fotones (Aspect et al., 1982; Barrett et al., 2004; Fattal et al., 2004; Kim et al., 2003; Walther y Zeilinger, 2005) así como la interacción entre átomos y fotones en cavidades electrodinámicas (Blinov et al., 2004; Davidovich et al., 1994; García-Maraver et al., 2004; Messina, 2002).

Nuevamente, el empleo de puntos cuánticos de semiconductores también representa una alternativa para generar los estados de Bell a través de los estados de espín (Petta et al., 2006) o de carga en dobles puntos cuánticos. En particular, la generación de estados de Bell en estos últimos se ha propuesto teóricamente mediante la acción de de un campo eléctrico externo (Chouikha et al., 2003; Zhang et al., 2002; Zhang y Zhao, 2002) e incluso se han tenido en cuenta los efectos disipativos (Hichri et al., 2004b; Liang, 2005).

En base a estos antecedentes, en nuestro trabajo se definirá a los estados de Bell en los estados de dos qubits de carga y se evaluará la probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de éstos, tanto de forma estacionara como dinámica.

2.3.2 Concurrencia

Debido a las aplicaciones potenciales del entrelazamiento, es de gran interés no únicamente contar con estados entrelazados sino también determinar el grado de correlación entre ellos. Sin embargo, al ser una propiedad abstracta y por su definición “negativa”, la cuantificación del entrelazamiento es una tarea difícil. Una gran cantidad de estudios teóricos se han enfocado a determinar las “medidas de entrelazamiento”, que son cantidades escalares que cuantifican las correlaciones cuánticas distinguiéndolas de las clásicas (Keyl, 2002; Mintert, 2005; Mintert et al., 2005; Vedral et al., 1997; Vidal y Werner, 2002). Nos enfocaremos en la medida del grado de entrelazamiento en un sistema de dos subsistemas debido a que estudiaremos un arreglo formado por dos qubits de carga.

Actualmente, el entrelazamiento en estados puros de dos qubits está ampliamente estudiado y se han desarrollado diferentes medidas para cuantificarlo. Se cuenta por ejemplo con la entropía de von Neumann o entropía de entrelazamiento, que es relativamente sencilla de evaluar y que se basa en el empleo de la matriz de densidad reducida de cualquiera de los dos subsistemas (Bennett et al., 1996a; Vedral et al., 1997); si el sistema está formado por estados separables esta medida es cero, mientras que para estados con el máximo entrelazamiento es $\ln 2$. Otro ejemplo se refiere a la descomposición del sistema en una base específica (conocida como base de Schmidt) (Keyl, 2002; Mintert et al., 2005), la cual permite distinguir entre estados separables y entrelazados y que también se ha relacionado con el grado de entrelazamiento exhibido.

Sin embargo, de entre éstas la medida conocida como concurrencia, que se basa en la proyección del sistema en estudio en la base de los estados de Bell (o base “mágica”) (Hill y Wootters, 1997), ha demostrado ser una de las más accesibles y fáciles de calcular.

La cuantificación del entrelazamiento en estados mixtos es aun más complicada debido a que éstos involucran simultáneamente correlaciones tanto clásicas como cuánticas. En general las medidas propuestas para este fin, como por ejemplo el entrelazamiento de formación, el entrelazamiento extraíble y la negatividad (Bennett et al., 1996b; Mintert et al., 2005; Vidal y Werner, 2002; Vedral et al., 1997) son muy difíciles de calcular inclusive numéricamente. Sólo la concurrencia de Wootters está bien definida (Vidal y Werner, 2002) y permite determinar el grado de entrelazamiento presentado por un estado arbitrario de dos qubits, como describiremos a continuación.

La concurrencia fue introducida originalmente como una cantidad auxiliar en el cálculo del entrelazamiento de formación de sistemas formados por dos subsistemas. Sin embargo, puede considerarse como una medida independiente del entrelazamiento (Mintert et al., 2005; Wootters, 1998) que se basa en una transformación de espín y que es aplicable a estados con un número arbitrario de qubits.

Es fácil darse cuenta de que los dos estados de un qubit pueden asociarse con un pseudo espín, por lo que puede emplearse la notación de espines para representar a los qubits y las operaciones realizadas sobre éstos. Para un estado puro de un qubit, se define la transformación

$$|\tilde{\varphi}\rangle = \sigma_y |\varphi^*\rangle \quad (2.28)$$

en donde $|\varphi^*\rangle$ es el complejo conjugado de un estado puro $|\varphi\rangle$ expresado en la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ y σ_y es la matriz de Pauli. Esta operación corresponde al operador de inversión temporal para una partícula con espín $1/2$ (Sakurai, 1994)

Para estudiar a un sistema formado por múltiples qubits, dicha transformación debe aplicarse a cada uno de forma individual. De esta manera, la inversión del estado de dos qubits está dada por

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle \quad (2.29)$$

en donde $|\psi\rangle$ está escrito en la base estándar de dos espines $1/2$, $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.

La *concurrencia* para un estado puro de dos qubits se define a partir de la invariancia a la transformación,

$$C(\psi) = \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \quad (2.30)$$

y toma valores desde 0 hasta 1 (Hill y Wootters, 1997; Wootters, 1998) que respectivamente corresponden a estados separables y a estados con el máximo entrelazamiento. Es fácil notar que los estados de Bell permanecen invariantes a la inversión temporal, por tanto tienen una concurrencia $C = 1$.

Para el estado general ρ de dos qubits el correspondiente estado transformado tiene la forma

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (2.31)$$

y para este caso, la concurrencia está dada por la expresión (Wootters, 1998)

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (2.32)$$

siendo λ_i s los eigenvalores, en orden descendente, de la matriz no hermitiana $\rho\tilde{\rho}$ (Wootters, 1998). Debe tenerse en cuenta que cada λ_i es un número real no negativo.

Mediante el empleo de rutinas estándar es sencillo calcular numéricamente las ecuaciones (2.30) y (2.32), por lo que a lo largo del trabajo de tesis utilizaremos la concurrencia como medida del entrelazamiento en el arreglo de dos qubits de carga, tanto para estados puros como mixtos.

2.4. Qubits de carga y entrelazamiento en puntos cuánticos

Como se ha establecido en las secciones anteriores, de entre los sistemas de estado sólido propuestos para la implementación física de qubits y de estados entrelazados, los puntos cuánticos se encuentran entre los más prometedores. En particular, en este trabajo se modelará un arreglo de dos qubits de carga definidos en dobles puntos cuánticos de semiconductores. Por este motivo, en los párrafos siguientes presentaremos las propiedades generales de los puntos cuánticos y posteriormente enfatizaremos el empleo de un doble punto como qubit de carga.

2.4.1 Puntos cuánticos

Los puntos cuánticos son estructuras de estado sólido de tamaño nanométrico, de metales o semiconductores, que confinan y aíslan a un número discreto de electrones en una región del espacio (Alivisatos, 1996; Aguado, 2000; Bimberg *et al.*, 1999; Kastner, 1993; Kouwenhoven y Marcus, 1998, Kouwenhoven *et al.*, 1997; Matagne y Leburton, 2003).

Las dimensiones de estos sistemas son del orden de la longitud de onda de Fermi del material que lo compone, típicamente entre 10 nm y 1 micra para semiconductores (Burkard *et al.*, 1999; Bimberg *et al.*, 1999), y pueden contener de 10^3 a 10^9 átomos (Kastner, 1993; Van der Wiel *et al.*, 2001).

El confinamiento de los electrones se presenta en las tres dimensiones espaciales, por lo que se dice que se forman estados de dimensión cero (0D) en una estructura cuyo potencial se asemeja al de una caja. Este efecto, aunado a la baja dimensionalidad del sistema, ocasiona que

sus estados energéticos estén cuantizados en forma similar a los estados de energía en un átomo, por este motivo a los puntos cuánticos se les conoce también como *átomos artificiales* (Ashoori, 1996; Kastner, 1993; Kouwenhoven y Marcus, 1998; Kouwehoven et al., 1997).

Existen diferentes tipos de puntos cuánticos, dependiendo tanto de los materiales como de las técnicas empleadas para su fabricación. En este trabajo nos enfocaremos a puntos de semiconductores, de entre los que podemos distinguir tres tipos principales: autoensamblados, verticales y laterales (o planares).

Los *puntos cuánticos autoensamblados* (Bimberg *et al.*, 1999; Harrison, 2000, Matagne y Leburton, 2003; Tamura et al., 2003) se obtienen al crecer algunas monocapas de un material semiconductor sobre un sustrato que tiene un parámetro de red diferente. La diferencia en los parámetros de red crea una tensión en la película que impide su crecimiento uniforme sobre el sustrato. La película se divide en pequeñas islas que constituyen a los puntos cuánticos (Figura 2.2), cuya forma suele ser piramidal con un tamaño aproximado de 100 Å (Bimberg *et al.*, 1999).

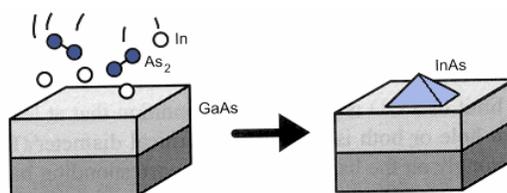


Figura 2.2. Representación del autoensamblado de un punto cuántico de InAs en un sustrato de GaAs (Bimberg *et al.*, 1999)

Por otra parte, mediante técnicas de epitaxia de haces moleculares (molecular beam epitaxy, MBE) es posible formar heteroestructuras semiconductoras. Debido a la diferencia en los anchos de banda, en la unión de dos capas de semiconductores distintos se produce un confinamiento de los electrones en una de las direcciones (que suele ser la normal a ambas capas) conocido como gas de electrones bidimensional, o 2DEG por sus siglas en inglés (Davies, 1998; Kouwehoven et al., 1997; Tamura et al., 2003), a partir del cual es posible confinar a los electrones en el resto de las direcciones por medios electrostáticos o por una combinación de procesos químicos y eléctricos, formando así un punto cuántico.

Mediante el empleo de un gas reactivo y otros procesos químicos (como erosión y decapado) se logra un confinamiento lateral de los electrones de la heteroestructura obteniéndose una “pila” de material, en cuyo interior se encuentra el punto cuántico como puede observarse en la Figura 2.3. A este tipo de sistemas se les conoce como *puntos cuánticos verticales* (Bimberg *et al.*, 1999; Harrison, 2000; Kouwenhoven y Marcus, 1998; Matagne y Leburton, 2003; Tamura *et al.*, 2003), a los que se les puede colocar capas metálicas (constituyendo electrodos) en la parte superior y en la base de la pila o alrededor de ésta con objeto de obtener un mayor control del confinamiento electrónico mediante diferencias de potencial.

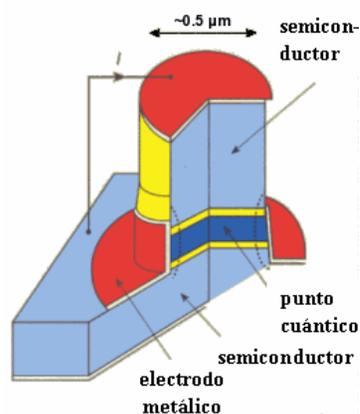


Figura 2.3. Diagrama esquemático de un punto cuántico vertical (Kouwenhoven y Marcus, 1998)

Por otra parte, mediante el empleo de la litografía de haz de electrones es posible construir electrodos metálicos en la superficie de una heteroestructura semiconductor. Si a éstos se les aplica una diferencia de potencial se logra el confinamiento de los electrones del 2DEG más cercanos a los electrodos, obteniéndose así un *punto cuántico lateral* (Burkard y Loss, 2002; Kastner, 1993; Kouwenhoven *et al.*, 1997; Kouwenhoven y Marcus, 1998, Matagne y Leburton, 2003; Tamura *et al.*, 2003) ilustrado esquemáticamente en la Figura 2.4.

Al tratarse de un sistema cuántico, los electrones del punto pueden llegar a tunear a través de las barreras del potencial que los confina y de esta forma salir del punto cuántico hacia el 2DEG y viceversa, por lo que el número de electrones en un punto cuántico puede variarse de uno en uno, incluso comenzando desde cero, mediante el control de las barreras de potencial.

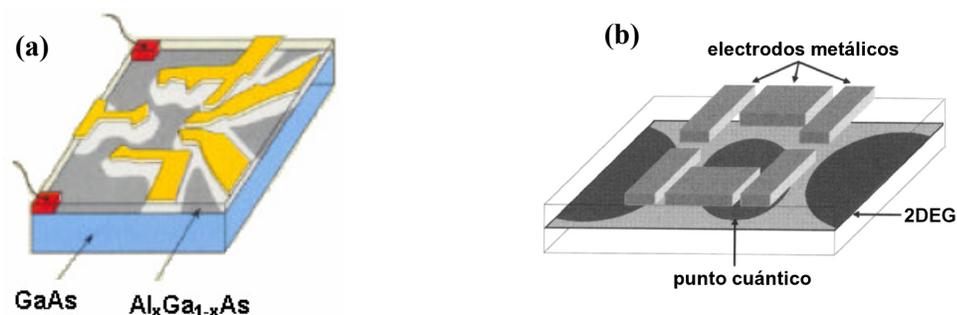


Figura 2.4. (a) Punto cuántico lateral en una heteroestructura semiconductor (Kouwenhoven y Marcus, 1998) (b) Diagrama esquemático en el que se observa que el punto queda en el plano del 2DEG (Tamura *et al.*, 2003)

El punto cuántico se puede acoplar a dos electrodos metálicos (a los que nos referiremos como reservorios o contactos). Si la energía de Fermi de los contactos es mayor o igual a la de un estado libre del punto cuántico, será posible el tuneo de un electrón hacia el interior del punto, de esta forma el contacto estaría actuando como una fuente de electrones. Si la energía de dicho estado se encuentra entre las energías de Fermi de los reservorios, fluirá una corriente a través del punto cuántico; en este caso uno de los reservorios actúa como fuente y el otro como sumidero de electrones.

Sin embargo, el potencial electrostático generado por el electrón que se ha adicionado (repulsión Colombiana) origina un incremento en la energía del siguiente estado desocupado del punto cuántico (conocida como energía de carga, proporcional a e^2/C donde e es la carga elemental y C la “capacitancia” efectiva del punto cuántico), el cual puede quedar fuera de la “ventana” de conducción definida por la diferencia de las energías de Fermi de los reservorios, impidiendo la entrada de otro electrón. A este bloqueo en la adición de carga al punto cuántico se le denomina *bloqueo de Coulomb* (Bimberg *et al.*, 1999; Grabert y Devoret, 1992; Kouwenhoven, 1990; Kouwenhoven et al., 1997; Kouwenhoven y Marcus 1998; Tamura et al., 2003) y ocasiona que la corriente a través del punto se interrumpa.

Es posible aplicar una diferencia de potencial entre los reservorios, V_{SD} , que modifique sus energías de Fermi de tal forma que el siguiente estado libre del punto cuántico se encuentre entre ellas, restableciéndose la corriente y repitiendo este proceso cada vez que se desee agregar

electrones. Otra forma de eliminar el bloqueo coulombiano consiste en mantener constantes las energías de Fermi de los reservorios mientras se aplica un voltaje externo en el electrodo acoplado al punto cuántico, V_g , ocasionando que los niveles de energía del punto bajen hasta lograr que se encuentren en la ventana de conducción. Por lo general, al potencial V_g se le conoce como “voltaje de compuerta”.

De lo anterior puede advertirse que, a diferencia de los átomos “naturales”, el espectro de energías en un punto cuántico puede ser modificado mediante la aplicación de campos eléctricos externos o magnéticos (Kouwenhoven et al., 1997; Tarucha et al., 1996; Brandes, 2005). Esta es una de las propiedades que han atraído la atención en estos sistemas al ofrecer el control tanto de la carga como del espín mediante la manipulación de parámetros externos (Bimberg *et al.*, 1999; Koiller et al., 2005, Kouwenhoven et al., 1997; Kouwenhoven y Marcus 1998; Tamura et al., 2003) a bajas temperaturas de operación, de entre 20 y 100 mK (Fujisawa et al., 2002, Gorman et al., 2005; Hanson et al., 2004; Kouwenhoven et al., 1997).

El creciente desarrollo en las técnicas de fabricación de estas nanoestructuras ha permitido el acoplamiento de puntos cuánticos adyacentes formando *moléculas artificiales* (Kastner, 1993; Kouwenhoven et al., 1997; Kouwenhoven y Marcus, 1998; Tamura et al., 2003; Van der Wiel et al., 2003). En este tipo de sistemas los electrones pueden tunelear entre puntos espacialmente separados, cuya interacción electrostática afecta fuertemente la distribución de carga (Tamura et al., 2003). Por lo general las moléculas artificiales están constituidas por puntos cuánticos del tipo lateral debido a la relativa facilidad con la que pueden construirse (Figura 2.5), por lo que la aplicación de voltajes eléctricos a través de electrodos permite nuevamente el control de las barreras de tunelaje entre los puntos así como su espectro de energías (Kouwenhoven et al., 1997; Brum y Hawrylak, 1997; Livermore et al., 1996; Matagne y Leburton, 2003; Tamura et al., 2003; Van der Wiel et al., 2001, 2003) sin embargo sus propiedades son diferentes a las de los puntos individuales.

Una de las moléculas artificiales más comúnmente estudiada es conocida como *dobles punto cuántico*, la cual está formada por dos puntos que pueden estar acomodados en serie o en paralelo (van der Wiel et al., 2001, 2003; Tamura et al., 2003) como se muestra en la Figura 2.6. Si el tuneleo entre ambos sitios es débil, la carga se encuentra localizada en los puntos cuánticos individuales, y el acoplamiento se debe principalmente a la interacción electrostática entre puntos. Por otra parte cuando el tuneleo es fuerte, un electrón puede tunelear varias veces

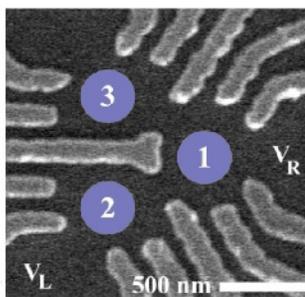


Figura 2.5. Micrografía de una molécula artificial formada por tres puntos cuánticos (Vidan *et al.*, 2004)

entre dos estados electrónicos de los puntos cuánticos con una fase coherente, por lo que la función de onda del electrón se encuentra extendida en ambos puntos. A estos tipos de acoplamiento se les relaciona con el tipo de enlace de las moléculas “naturales”, por lo que en general en la literatura se les conoce como enlace tipo iónico y tipo covalente, respectivamente (Brandes, 2005; van der Wiel *et al.*, 2001, 2003; Tamura *et al.*, 2003).



Figura 2.6. (a) Doble punto cuántico en paralelo (Strunk *et al.*, 2005) (b) Doble punto cuántico en serie (Vandersypen, 2002)

Motivados principalmente por la escalabilidad potencial de los puntos cuánticos, por la demostración del acoplamiento entre éstos y por su compatibilidad con las técnicas actuales de la microelectrónica, Loss y DiVincenzo (1998) combinaron los estudios referentes a la carga y al espín en estos sistemas, proponiendo el empleo del espín de un electrón confinado en un

punto cuántico para representar a un qubit. Su propuesta incluye también compuertas de dos qubits basadas en dichos sistemas.

Por otra parte, la generación de estados entrelazados en puntos cuánticos también se ha estudiado en los últimos años, principalmente desde el punto de vista teórico. La mayoría de estos estudios están relacionados con el entrelazamiento de espines electrónicos en los puntos, aunque también hay propuestas que se relacionan con la carga (como se ha mencionado en la sección 2.3). En particular, el entrelazamiento de dos electrones en un arreglo de puntos cuánticos acoplados ha sido estudiado a través del grado de libertad de espín (Saraga y Loss, 2003; Solenov et al., 2007; Solenov et al., 2006; Weiss et al., 2006) y de carga (Creffield y Platero, 2002; Chouikha et al., 2003; Fedichkin et al., 2000; Hichri et al., 2004b; Lambert et al., 2006; Tanamoto, 2000; Vorrath y Brandes, 2003).

Sin embargo, a pesar de las propuestas teóricas, la demostración experimental de la generación y detección de entrelazamiento en sistemas de estado sólido son áreas poco desarrolladas.

En esta tesis estamos interesados en la obtención de estados entrelazados en una clase particular de qubits de carga basados en dobles puntos cuánticos, como se describe en la siguiente sección.

2.4.2 Qubits de carga en dobles puntos cuánticos y entrelazamiento

Un doble punto cuántico con un electrón adicional provee un sistema de dos niveles simple y realista si se considera que el electrón puede tunelear entre los estados ocupados más altos de cada punto, ignorando su interacción con el resto de los electrones (Fujisawa et al., 2004a; van der Wiel, 2001, 2003). La localización de la carga en cada punto se asocia a los dos estados del qubit, como se muestra en la Figura 2.7. Si el qubit se prepara de tal forma que el electrón se encuentra localizado en un solo punto cuántico, su estado oscila coherentemente entre los estados lógicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ (es decir, entre los dos puntos) con una frecuencia determinada por la magnitud de tuneleo y por la diferencia de energía entre los niveles de los puntos (Cohen-Tannoudji, 1977; Tanamoto y Hu, 2005; Tanamoto, 2000; van der Wiel, 2001, 2003)

Se ha mostrado en varios experimentos que esta superposición coherente, necesaria para el procesamiento de información, puede manipularse mediante campos eléctricos o microondas

(Brandes, 2005; Fujisawa et al., 2004a; Goran et al., 2005; Hayashi et al., 2003; Petta et al., 2004; van der Wiel, 2001, 2003) los cuales permiten variar la barrera de potencial entre ambos puntos cuánticos (Fedichkin et al., 2000; Wu et al., 2005) o bien la posición relativa de los niveles de energía en los puntos (Fujisawa et al., 2004a; Gorman et al., 2005; Hayashi et al., 2004).

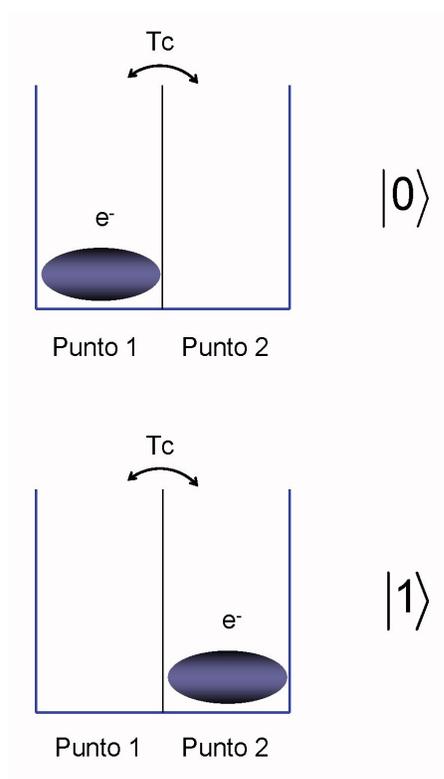


Figura 2.7. Doble punto cuántico como qubit de carga. La localización de carga en cada punto se asocia a los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. T_c representa el tunelamiento en el doble punto.

Adicionalmente, la inicialización, manipulación e incluso la lectura del estado de estos qubits de carga se logran también mediante la aplicación de pulsos eléctricos (Fujisawa et al., 2004a,b; Gorman et al., 2005) y en particular se ha demostrado el efecto de una compuerta de rotación, que cambia la probabilidad de encontrar al electrón en uno de los puntos cuánticos, y una compuerta de cambio de fase, que como su nombre lo indica cambia la diferencia de fase entre las dos funciones de onda localizadas (Fujisawa et al., 2004a,b).

En los últimos años también se ha realizado el estudio teórico de las propiedades dinámicas de los dobles puntos cuánticos (Chouikha et al., 2003; Fedichkin et al., 2000; Hichri

et al., 2004b; Stoof y Nazarov, 1996; Tanamoto, 2000; Tanamoto y Hu, 2005), principalmente mediante el formalismo de la matriz de densidad.

Por otra parte, la generación de estados entrelazados entre dos qubits de carga definidos en dobles puntos cuánticos se refiere principalmente al empleo de dos electrones en un solo doble punto (Chouikha et al., 2003; Fedichkin et al., 2000; Hichri et al., 2004b; Weiss et al., 2006; Zhang et al., 2002; Zhang y Zhao, 2002). En este tipo de estudios, además, se ha analizado el control coherente del entrelazamiento así como la generación de estados de Bell mediante la aplicación de campos eléctricos (Chouikha et al., 2003; Hichri et al., 2004b).

Esta base teórica permite proponer de forma natural el empleo de un arreglo de dobles puntos cuánticos para constituir un “registro cuántico” o memoria (Brandes, 2005; Vorrath y Brandes, 2003, Oh y Kim, 2006; Tóth y Lent, 2001), y es en este campo del conocimiento en donde se ubica nuestro trabajo. Cuando se tienen dos dobles puntos cuánticos adyacentes (considerando que no hay transferencia de electrones entre ambos), la distribución de carga de uno de los qubits genera un campo eléctrico que modifica los niveles de energía del otro (Tanamoto, 2000). Entonces, el estado electrónico en cada qubit está afectado por la distribución de carga en el otro y viceversa. Esta interacción electrostática constituye uno de los principales tipos de acoplamiento entre qubits de carga, y ha mostrado ser una fuente de entrelazamiento entre los estados de carga (Prada, 2006; Tanamoto, 2000; Tanamoto y Hu, 2005).

La dinámica coherente de un arreglo de dos qubits de carga en dos dobles puntos cuánticos ha sido estudiada teóricamente por Tanamoto (Tanamoto, 2000; Tanamoto y Hu, 2006) empleando el formalismo de la matriz de densidad, proponiéndose el empleo de dos constricciones cuánticas para realizar la medición de los estados de carga.

Sin embargo, la predicción teórica del entrelazamiento entre los estados electrónicos de este registro es un área que comienza a explorarse. Recientemente, Vorrath y Brandes (2003) han relacionado la variación en la corriente en dos dobles puntos con la formación de estados entrelazados entre éstos, mientras que Trauzettel et al (2006) han propuesto teóricamente la construcción de un generador de entrelazamiento en estados de carga de dos qubits mediante el empleo de dos constricciones puntuales cuánticas.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que este tipo de sistemas, en realidad, se encuentran en contacto con un ambiente de fonones intercambiando energía con éstos de forma irreversible. Sobre estas bases teóricas, el presente estudio considerara la formación de

entrelazamiento en los estados de carga de dos dobles puntos cuánticos, tomando en cuenta el efecto de un baño disipativo.

2.5. Decoherencia. Dinámica de sistemas cuánticos abiertos

Debido a que la carga de un electrón adicional en un doble punto cuántico puede considerarse como un sistema de dos niveles efectivo, con un espacio de Hilbert reducido, estos sistemas constituyen una herramienta poderosa en el estudio de diversas propiedades cuánticas, como por ejemplo la decoherencia y la disipación en un sistema pequeño interactuando con su ambiente.

En la práctica los qubits no están aislados, su interacción con el ambiente da lugar al fenómeno de decoherencia, el cual constituye uno de los principales impedimentos en su implementación física (Costi y McKenzie, 2003; Jun-Gang et al., 2006; Nicolosi et al., 2004; Nielsen y Chuang, 2000; Häffner et al., 2005b; Thorwart et al., 2005), ya que ocasiona el colapso de la función de onda de los estados cuánticos así como una disminución del entrelazamiento (Häffner et al., 2005b) al incluir estados macroscópicos.

Debido a que las operaciones de uno y de múltiples qubits deben poder realizarse mucho más rápidamente que el tiempo en el que el sistema pierde la coherencia, es importante comprender cualitativa y cuantitativamente los mecanismos de decoherencia asociados a los dobles puntos cuánticos, al menos de una forma aproximada, por lo que debe recurrirse a la teoría de sistemas cuánticos abiertos.

Definimos un sistema abierto como un sistema cuántico S acoplado a otro sistema cuántico B que recibe el nombre de ambiente. El sistema abierto es entonces un subsistema del sistema total $S+B$ que, en general, se considera cerrado (Breuer y Petruccione, 2002; Mahler y Weberruß, 1995). El comportamiento del sistema S depende del comportamiento de B (y viceversa), de tal forma que las correlaciones entre ellos impiden hacer una descripción de cada sistema por separado. Además, como resultado de dichas correlaciones, el sistema eventualmente se encontrará en un estado en equilibrio determinado por las condiciones externas, como por ejemplo, la temperatura del ambiente. Esta evolución gradual del sistema a un estado de equilibrio recibe el nombre de proceso de *relajación*, que es irreversible. Por

tanto, la dinámica del sistema abierto ya no puede describirse en términos de una dinámica unitaria, es decir, ya no puede describirse por la ecuación de Liouville.

En general, el término *reservorio* se emplea para designar un ambiente muy grande, de tal forma que el sistema abierto S (al que nos referiremos sólo como “sistema”) se acopla a un espectro casi continuo (Breuer y Petruccione, 2002; Mahler y Weberruß, 1995) y si el reservorio se encuentra en equilibrio térmico, se utiliza el término *baño*.

El espacio de Hilbert del sistema total (\mathcal{H}) está dado por el producto tensorial de los respectivos espacios de Hilbert del sistema abierto (\mathcal{H}_S) y del baño (\mathcal{H}_B), es decir $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$. El hamiltoniano que describe al sistema total toma la forma

$$H = H_S \otimes I_B + I_B \otimes H_B + V_{SB} \quad (2.33)$$

en donde H_S es el Hamiltoniano del sistema abierto, H_B el del baño y V_{SB} representa las interacciones entre el sistema y el baño. Nótese que los Hamiltonianos de los subsistemas están expresados en el espacio de Hilbert total, de ahí el producto directo con la matriz identidad en el espacio del otro subsistema. El Hamiltoniano total, cuya situación física está representada esquemáticamente en la Figura 2.8, puede presentar una dependencia temporal.

Por lo general, en este tipo de problemas las variables de interés pertenecen al sistema y no al baño, por lo se define el operador de densidad *reducido* del sistema,

$$\rho_S = Tr_B \{ \rho \} \quad (2.34)$$

en donde ρ representa el operador de densidad del sistema total y la traza se toma sobre todos los estados del baño. Así, se incluye la contribución de éste pero la dependencia de las ecuaciones y de las propiedades se reduce sólo al sistema S (Cohen-Tannoudji et al, 1992; Blum, 1981; Breuer y Petruccione, 2002; Mahler y Weberruß, 1995). De esta forma, el estudio de la dinámica del sistema abierto se realiza mediante el empleo de una ecuación de movimiento para su matriz de densidad reducida o de una *ecuación maestra*, la cual es una ecuación para las probabilidades de transición dinámicas del proceso (Cohen-Tannoudji et al, 1992; Breuer y Petruccione, 2002).

El sistema cuántico de dos niveles acoplado a un baño bosónico, es el modelo más simple posible que describe el efecto de decoherencia de un ambiente (Weiss, 1999; Legget et al., 1997; Thorwart et al., 2004). Debido a que se ha demostrado que la principal fuente de decoherencia en los dobles puntos cuánticos proviene de su interacción con fonones (Aguado y Brandes, 2004; Brandes y Vorrath 2003; Brandes, 2005; Costi y McKenzie, 2003; Fujisawa et

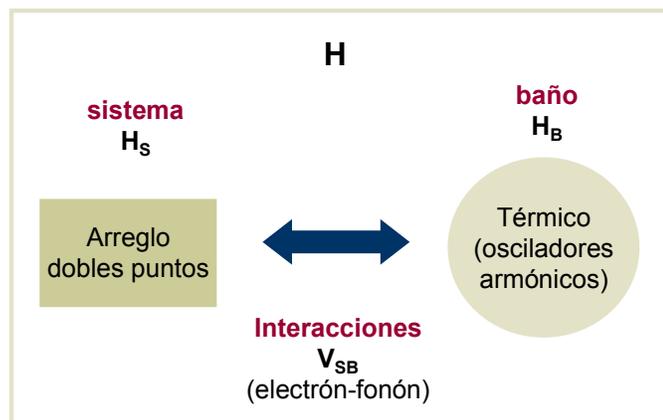


Figura 2.8. Diagrama esquemático de un sistema cuántico abierto. Específicamente para este trabajo de tesis, el sistema abierto corresponde a un arreglo de dos dobles puntos cuánticos, el baño está dado por un conjunto de osciladores armónicos y las interacciones son del tipo electrón-fonón

al., 1998; Thorwart et al., 2004, Tanamoto, 2000), este modelo es el comúnmente empleado para estudiar la disipación en qubits de carga definidos en dobles puntos cuánticos.

Por otra parte, existen diferentes maneras para representar el Hamiltoniano del baño. Una de las más simples consiste en modelarlo como un conjunto de osciladores armónicos (Weiss, 1999; Legget et al., 1997; Thorwart et al., 2004), construyendo en general un acoplamiento con el sistema que es lineal en las variables del baño, aunque también es posible introducir modelos de acoplamiento no lineal (Weiss, 1999; Legget et al., 1997; Mahler y Weberruß, 1995).

En este contexto, diversos estudios teóricos han incluido el efecto del acoplamiento de arreglos de dobles puntos con un reservorio de fonones mediante aproximaciones que van desde el punto de vista fenomenológico, incluyendo parámetros de decaimiento en las ecuaciones de movimiento de los elementos de la matriz de densidad reducida (Hichri et al., 2004b; Wang et al., 1998), hasta el microscópico mediante el empleo de diversos modelos.

En particular, la aproximación de Born-Markov ha sido empleada exitosamente en la obtención de la matriz de densidad reducida de un doble punto cuántico en el caso de que éste se encuentre débilmente acoplado al baño de fonones, que suele considerarse en equilibrio termodinámico (Fedichkin et al., 2000; Brandes y Vorrath, 2003; Vorobjtsov et al., 2005); también se ha utilizado en el caso en el que el doble punto se encuentra débilmente acoplado a

reservorios de electrones (Cota et al., 2005; Gurvitz y Prager, 1996; Platero y Aguado, 2004; Stoof y Nazarov, 1996) e incluso cuando presenta una interacción con ambos tipos de baño, reservorios y fonones (Vorrath y Brandes, 2003). Adicionalmente, se han implementado métodos no Markovianos para incluir el acoplamiento fuerte entre el doble punto y un baño de fonones (Aguado y Brandes, 2004; Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999; DiVincenzo y Loss, 2005; Oh y Kim, 2006) o de espines nucleares (Coish y Loss, 2005).

Sin embargo, el número de aportaciones teóricas al estudio de la decoherencia de un arreglo de dos dobles puntos cuánticos es menor. En la mayoría de éstas se ha empleado la aproximación Markoviana y se incluye un acoplamiento electrón-fonón de tipo diagonal. De esta forma, Cota et al., (2002) consideran un arreglo cuadrado de dos dobles puntos que pueden asociarse directamente con dos qubits, y consideran su acoplo débil con un baño bosónico. Vorrath y Brandes (2003) estudian a un arreglo de dos dobles puntos cuánticos acoplados tanto a reservorios de electrones como a un baño térmico de fonones, y relacionan los estados de carga con estados entrelazados, mientras que Lambert et al., (2006) consideran un sistema similar también mediante el acoplamiento débil a reservorios incluyendo los efectos térmicos del baño, cuantificando el grado de entrelazamiento entre los qubits de carga mediante la concurrencia. Se ha estudiado también el efecto de una interacción electrón-fonón no diagonal en las propiedades de un arreglo cuadrado de puntos cuánticos, que en un caso límite puede reducirse a un arreglo de dos qubits de carga (Rojas et al., 2002, 2000, Solenov et al., 2007; Solenov et al, 2006).

En este trabajo deseamos comprender la manera en la que el ambiente afecta la dinámica del arreglo de qubits, en particular sus efectos en el entrelazamiento. Para ello, investigaremos las propiedades de un arreglo de dos qubits de carga en contacto con un baño de fonones en equilibrio termodinámico, el cual se modelará como un conjunto de osciladores armónicos.

Se considerará el caso en el que los dobles puntos interactúen electrostáticamente, por lo cual se asumirá que la magnitud del acoplamiento es mucho menor que el tuneo y se trabajará en el régimen de acoplamiento débil con el baño, asumiendo una interacción electrón-fonón de tipo no diagonal en las variables del sistema que se traduce en procesos de tuneo asistido por fonones. Por otra parte, se considerará también a dos dobles puntos no interactuantes en cuyo caso consideraremos un acoplamiento fuerte con el baño mientras que la interacción entre ambos subsistemas será de tipo diagonal. Adicionalmente, este sistema se encontrará en contacto con dos reservorios de electrones.

En el resto de esta sección, presentamos de forma general los formalismos empleados en cada régimen para la obtención de la ecuación de evolución de la matriz de densidad reducida del sistema.

2.5.1 Acoplamiento débil: aproximación de Markov

En el límite de interacción débil de un sistema con un ambiente disipativo, se emplea la aproximación de Born-Markov para calcular la matriz de densidad reducida del sistema. Esta aproximación es empleada típicamente en el campo de óptica cuántica para describir las interacciones entre materia y radiación (Meystre y Sargent, 1990).

Partimos de la ecuación de Liouville-von Neumann que describe la evolución temporal de la matriz de densidad, $\rho(t)$, del sistema total (sistema + baño) en la representación de interacción:

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{V}_{SB}(t), \tilde{\rho}(t)] \quad (2.35)$$

con la forma integral:

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{V}_{SB}(t'), \tilde{\rho}(t')] \quad (2.36)$$

en donde la representación de interacción de cualquier operador O se obtiene haciendo la transformación unitaria $\tilde{O}(t) = e^{i(H_S+H_B)t/\hbar} O e^{-i(H_S+H_B)t/\hbar}$. Es decir, se ha considerado que el término de interacción electrón-fonón entre el sistema y el baño, V_{SB} , es una *perturbación* al hamiltoniano $H_S + H_B$ (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995).

La interacción del sistema con el ambiente origina correlaciones entre ellos que impiden que el estado total pueda escribirse como el producto directo de los estados de cada ambos subsistemas, por lo que la matriz de densidad reducida del sistema no puede calcularse directamente al tomar la traza sobre las variables del baño en la ecuación (2.35). En lugar de esto, la solución para $\tilde{\rho}(t)$, ecuación (2.36), se inserta en la parte derecha de la misma ecuación de Liouville-von Neumann,

$$\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{V}_{SB}(t), \rho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{V}_{SB}(t), [\tilde{V}_{SB}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \quad (2.37)$$

en donde hemos tenido en cuenta que $\tilde{\rho}(0) = \rho(0)$. Suponiendo que el sistema y el baño se ponen en contacto al tiempo $t=0$, la matriz de densidad total inicial puede factorizarse en $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) = \tilde{\rho}(0)$, donde ρ_B es la matriz de densidad del baño (Breuer y Petruccione, 2002; Blum, 1981; Mahler y Weberruß, 1995). Al calcular la traza sobre los grados de libertad del baño en la ecuación (2.37), encontramos la ecuación de evolución del operador de densidad reducido del sistema en la representación de interacción

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} Tr_B \{ [\tilde{V}_{SB}(t), \rho_S(0) \rho_B(0)] \} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_B \{ [\tilde{V}_{SB}(t), [\tilde{V}_{SB}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \} \quad (2.38)$$

Ahora se realizarán otras dos consideraciones importantes para llegar a la ecuación maestra. Primero, suponemos que el baño se encuentra en *equilibrio termodinámico* todo el tiempo, por lo que su matriz de densidad tiene la forma

$$\rho_B = \rho_B(0) = e^{-\beta H_B} / Z \quad (2.39)$$

donde $\beta = 1/(k_B T)$, k_B es la constante de Boltzmann, T la temperatura de equilibrio del baño, y $Z = Tr \{ e^{-\beta H_B} \}$. Debido a que el acoplamiento entre el sistema y el baño es débil, y teniendo en cuenta que éste está formado por una gran cantidad de grados de libertad, es posible considerar que todo efecto de su interacción con el sistema se disipa rápidamente (Breuer y Petruccione, 2002; Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995). Por consiguiente, la matriz de densidad total a todo tiempo $t' > 0$ puede aproximarse como el producto tensorial de la matriz de densidad del baño y la matriz de densidad reducida del sistema,

$$\tilde{\rho}(t') \approx \tilde{\rho}_S(t') \otimes \rho_B \quad (2.40)$$

Ésta es la *aproximación de Born* (Breuer y Petruccione, 2002; Blum, 1981), que a *segundo orden* en la interacción sistema-baño da lugar a la ecuación maestra

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} Tr_B \{ [\tilde{V}_{SB}(t), \rho_S(0) \rho_B(0)] \} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_B \{ [\tilde{V}_{SB}(t), [\tilde{V}_{SB}(t'), \tilde{\rho}_S(t') \rho_B]] \} \quad (2.41)$$

la cual es una ecuación no-local en el tiempo, es decir, que el comportamiento del sistema depende de su historia pasada desde $t'=0$ hasta $t'=t$. Es aquí donde se lleva a cabo la segunda

consideración: la aproximación Markoviana (Breuer y Petruccione, 2002; Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995).

En ésta, se asume que el sistema pierde memoria de su interacción con el baño en un intervalo de tiempo $t'-t$ mucho mayor que el tiempo característico en el que el baño disipa toda interacción con el sistema, τ_c . Es decir, que el cambio en la matriz de densidad reducida del sistema depende únicamente de su valor actual para tiempos $t'-t \lesssim \tau_c$.

De esta forma, podemos cambiar $\tilde{\rho}_s(t')$ por $\tilde{\rho}_s(t)$ en el integrando de la ecuación (2.41), se introduce la variable $t''=t-t'$ y se extiende hasta infinito el límite de la integral (ya que los efectos del baño serán despreciables para $t'' \gg \tau_c$). Finalmente obtenemos la ecuación maestra Markoviana

$$\frac{d\tilde{\rho}_s(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} Tr_B \{ [\tilde{V}_{SB}(t), \rho_s(0)\rho_B(0)] \} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' Tr_B \{ [\tilde{V}_{SB}(t), [\tilde{V}_{SB}(t-t'), \tilde{\rho}_s(t)\rho_B]] \} \quad (2.42)$$

que sustituye a la ecuación de Liouville y que caracteriza el comportamiento irreversible del sistema ocasionado por su interacción con el ambiente (Breuer y Petruccione, 2002; Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995). Al conjunto de aproximaciones empleadas se le conoce como *aproximación de Born-Markov*, la cual se ha empleado exitosamente para estudiar el acoplamiento débil de dobles puntos cuánticos a un baño de fonones en equilibrio termodinámico o a reservorios de electrones.

2.5.2 Acoplamiento fuerte: transformación de polarón para un doble punto cuántico

La transformación unitaria de polarón es un método empleado para resolver problemas en donde grados de libertad bosónicos se acoplan a un solo estado electrónico localizado (Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999; Mahan, 2000; Weiss, 1999), y recientemente se ha aplicado en la solución de Hamiltonianos que describen la disipación en sistemas de dos niveles (Weiss, 1999), los cuales representan a dobles puntos cuánticos en el régimen de acoplo fuerte con un baño bosónico (Aguado y Brandes, 2004; Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999; Mahan, 2000).

En esta sección describiremos brevemente la forma en que se emplea esta transformación en un doble punto cuántico, que emplearemos como base en el tratamiento del arreglo de dos qubits de carga acoplados fuertemente a un baño de fonones en equilibrio termodinámico.

Consideremos nuevamente un Hamiltoniano del tipo (2.33) en donde el sistema se refiere a un doble punto cuántico con un electrón adicional. H_S incluye la energía de sitio de cada punto (H_{dot}) y el tuneo entre ellos (H_T), es decir $H_S = H_{dot} + H_T$. El baño se modela como un conjunto de osciladores armónicos, y el acoplamiento entre éste y el sistema es del tipo $V_{SB} = \sigma_z \sum_q \gamma_q (a_q^\dagger + a_q)$, que cambia localmente la energía del electrón en el doble punto cuántico y en donde a_q^\dagger y a_q son los operadores de creación y aniquilación de bosones respectivamente, σ_z es la matriz de Pauli y γ_q es el parámetro de acoplamiento (Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999; Mahan, 2000).

En este régimen, tanto el sistema como el baño sienten el efecto de la interacción de diferentes maneras. Cada vez que el electrón tunea, el baño se “sacude”, originando una renormalización en la fase del electrón que depende de las propiedades de éste (Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999). Entonces, una explicación en términos de estados del electrón y estados del sistema bosónico ya no es correcta debido a que los electrones y los bosones están acoplados, por lo que debe hablarse ahora en términos de los eigenestados del sistema acoplado (es decir, de un *polarón*).

Una manera natural de introducir estos efectos consiste en el empleo de una transformación unitaria del Hamiltoniano total que naturalmente introduce las fases mencionadas.

Para cualquier operador O se define la transformación

$$\begin{aligned}\bar{O} &= e^S O e^{-S}, \\ S &= \sigma_z \sum_q \gamma_q (a_q^\dagger - a_q)\end{aligned}\tag{2.43}$$

(Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999; Mahan, 2000).

De esta forma se obtiene un Hamiltoniano efectivo $\bar{H} = \bar{H}_{dot} + \bar{H}_T + H_B$ en el cual el término de interacción electrón-fonón ya no aparece explícitamente (Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999, Mahan, 2000). A cambio, en el Hamiltoniano de tuneo, \bar{H}_T , aparecen unos factores X y X^+ del tipo $X = \exp(\sum_q \gamma_q (a_q^\dagger - a_q))$

Esta renormalización del tuneo entre puntos cuánticos por las fases X impide que el Hamiltoniano de tuneo, \bar{H}_T pueda ser considerado como una perturbación al Hamiltoniano

efectivo, por lo tanto no es posible emplear la aproximación de Born-Markov respecto al tuneleo.

Para el cálculo de la ecuación maestra, definimos la representación de interacción para los operadores transformados en la forma (Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999)

$$\tilde{O} = e^{iH_0 t} \bar{O} e^{-iH_0 t}, \quad X_t = e^{iH_0 t} X e^{-iH_0 t} \quad (2.44)$$

Y en particular para la matriz de densidad total $\chi(t)$ se tiene

$$\tilde{\chi}(t) = e^{iH_0 t} \bar{\chi}(t) e^{-iH_0 t} \quad (2.45)$$

cuya ecuación de movimiento está dada por la ecuación de Liouville,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\chi}(t)}{dt} &= -i\hbar [\tilde{H}_T(t), \tilde{\chi}(t)] \\ &= \bar{\chi}(0) - i\hbar \int_0^t dt' [\tilde{H}_T(t'), \tilde{\chi}(t')] \end{aligned} \quad (2.46)$$

en donde puede observarse que la matriz de densidad depende de su valor a los tiempos anteriores, de forma análoga a la ecuación (2.41).

Sin necesidad de regresar a la representación de Schrödinger, es posible calcular los valores esperados de cualquier operador del sistema a partir de la ecuación (2.46), recordando que los valores promedio son observables y por tanto, no dependen de la representación ni de la base en la que sean proyectados. Éstos están definidos como

$$\langle O \rangle_t = Tr_{\text{dot}, B} \{ \tilde{\chi}(t) \tilde{O}(t) \} \quad (2.47)$$

en donde la traza se efectúa sobre los estados tanto del doble punto (dot) como del baño (B) (Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999)

Si consideramos que el sistema se encuentra aislado del reservorio a tiempos $t \leq 0$, es posible considerar la factorización de la matriz de densidad inicial en la forma:

$$\bar{\chi}(0) = \rho_B(0) Tr_B \{ \chi(0) \} \quad (2.48)$$

Hasta el momento, la aplicación de esta aproximación para el cálculo de la ecuación maestra es exacta. Sin embargo, para un doble punto cuántico, el tratamiento exacto no puede conservarse en el cálculo de observables y por tanto debe recurrirse a una aproximación mediante la cual es posible desacoplar las matrices de densidad reducidas del sistema y del baño. Al considerar que la acción del doble punto sobre el baño no es de interés y considerando que éste se encuentra en equilibrio termodinámico todo el tiempo, es posible aproximar

$$\tilde{\chi}(t') \approx \rho_B(0) Tr_B \{ \tilde{\chi}(t') \} \quad (2.49)$$

De esta forma se obtiene un conjunto de ecuaciones complejas, acopladas y no locales en el tiempo (ya que el operador de densidad depende siempre de los tiempos anteriores), que puede resolverse fácilmente en el espacio de Laplace (Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999). Mediante este tratamiento se han estudiado las propiedades de transporte en un doble punto cuántico acoplado a un baño térmico de bosones y abierto a reservorios electrónicos. En este trabajo extenderemos la transformación de polarón para evaluar la generación de entrelazamiento entre dos qubits no interactuantes, inducida por un baño disipativo el cual se acopla fuertemente al arreglo de qubits.

Capítulo 3

Generación estacionaria y dinámica de entrelazamiento en un arreglo de puntos cuánticos

Introducción

En este Capítulo calculamos la formación estacionaria y dinámica de entrelazamiento en los estados de carga de dos dobles puntos cuánticos con un electrón extra cada uno, acoplados mediante interacciones de Coulomb y que se encuentran bajo la acción de un potencial externo controlable, generado por un arreglo idéntico de dos dobles puntos cuánticos. El arreglo es caracterizado mediante el cálculo de la distribución de carga (polarización), de la concurrencia y de las probabilidades de encontrar al sistema en cada estado de Bell, además se considera el efecto de la asimetría en uno de los puntos cuánticos que constituyen al arreglo. Los efectos disipativos se incluyen mediante el acoplo del sistema a un baño de fonones en equilibrio termodinámico, para lo cual se emplea el formalismo de la matriz de densidad y de la aproximación Markoviana para sistemas cuánticos abiertos.

En general, encontramos que es posible obtener un alto grado de entrelazamiento entre los qubits de carga, así como un solo estado de Bell preferencial (es decir, con la mayor probabilidad), ambos controlables mediante la manipulación del potencial externo. Con los cuatro puntos cuánticos casi idénticos y a muy bajas temperaturas, se cuenta aun con estados entrelazados en el sistema que se deterioran conforme la asimetría o la temperatura se incrementan. Los resultados derivados de este Capítulo se encuentran reportados en *J. Phys.: Condens. Matter* **18** (2006), 9771-9872

3.1. Qubits basados en arreglos de puntos cuánticos

La base teórica y experimental relacionada con la implementación de los qubits de carga ha permitido proponer su empleo en la construcción de registros de memoria basados en éstos y analizar y controlar la formación de entrelazamiento entre sus estados electrónicos.

Lent y sus colaboradores en Norte Dame (Lent et al., 1992; Lent et al., 1993; Lent y Tougaw, 1993; Lent y Tougaw, 1994; Tougaw y Lent, 1994; Tougaw y Lent, 1996)

propusieron el empleo de un arreglo de puntos cuánticos para codificar los estados binarios 0 y 1 con la distribución de carga. La unidad fundamental de este sistema, que recibe el nombre de “celda”, está formada por cuatro puntos cuánticos que definen las esquinas de un cuadrado conteniendo dos electrones adicionales. Si se considera la interacción de Coulomb entre los electrones y el tuneo entre los puntos, el estado base de la celda está formado por dos configuraciones igualmente probables en las que los electrones se localizan en las esquinas opuestas del cuadrado. Estos estados de polarización (+1 y -1 como se definirá más adelante, en la ecuación (3.2)) están degenerados y se han empleado para codificar un bit de información clásica cada uno (Lent et al., 1992), por lo que también se han propuesto como la base de un qubit de carga (Tóth y Lent, 2001; Weichselbaum y Ulloa, 2004).

La degeneración se puede remover mediante la aplicación de un campo eléctrico externo, que en general puede depender del tiempo, y que originalmente se propuso como una celda idéntica con una distribución de carga controlable (o celda de control) capaz de producir un potencial específico en los puntos cuánticos del arreglo, permitiendo por tanto el control de los estados electrónicos.

Basándonos en los trabajos experimentales que demostraron las propuestas de Lent (Amlani et al., 1998; Amlani et al., 1999; Bernstein et al., 1996; Gardelis et al., 2003; Orlov et al., 1997; Snider et al., 1999), en los experimentos recientes que ponen de manifiesto el control coherente de carga en un doble punto cuántico a través de campos eléctricos externos (Fujisawa et al., 2004; Gorman et al., 2005; Hayashi et al., 2003; Petta et al., 2004; Van der Wiel et al., 2003) y en trabajos teóricos (Rojas et al., 2002; Tanamoto, 2000; Tanamoto y Hu, 2005), estudiaremos un arreglo cuadrado de puntos cuánticos en el que los electrones pueden tunelear únicamente entre puntos vecinos de forma vertical, como puede verse esquemáticamente en la Figura 3.1(a). Por tanto, efectivamente, tenemos dos dobles puntos cuánticos paralelos, cada uno con un electrón adicional, acoplados por interacciones de Coulomb. Cada doble punto representa a un qubit de carga.

El propósito principal de esta parte del trabajo radica en estudiar la formación de entrelazamiento en los estados electrónicos de los qubits mediante el control de la distribución de carga de la celda de control, es decir de un campo eléctrico externo.

Debido a que los puntos cuánticos no están exentos de imperfecciones en su fabricación, también se tomará en cuenta el efecto de asimetrías en el comportamiento del arreglo al considerar variaciones en el nivel de energía de uno de los puntos, lo cual puede relacionarse

con cambios en su tamaño, con variaciones locales en el ambiente o incluso con la entrada de un proceso de computación. Debido a que la principal causa de decoherencia en este tipo de sistemas de estado sólido se debe a la interacción con fonones, incluiremos el acoplo débil del sistema de dobles puntos cuánticos a un baño de fonones en equilibrio termodinámico y se analizará el efecto de la temperatura en las propiedades del arreglo.

Para la dinámica coherente se resolverá la ecuación de evolución temporal de la matriz de densidad considerando una distribución de carga de la celda de control que cambia linealmente en el tiempo, tomando en cuenta la asimetría y las interacciones de Coulomb dentro del arreglo. Empleando una ecuación maestra Markoviana para la matriz de densidad reducida del sistema, incluiremos los efectos disipativos mediante interacciones del tipo electrón-fonón en cada punto cuántico. En ambos análisis dinámicos, nuestros resultados muestran que es posible obtener estados entrelazados y en específico uno de los estados de Bell, en un esquema de control eléctrico.

3.2. Modelo

El sistema en estudio consta de dos qubits de carga paralelos, formando un arreglo cuadrado de puntos cuánticos, como se muestra en la Figura 3.1. Cada doble punto cuenta con un electrón adicional que puede tunelear entre ellos, pero no así entre los dos dobles puntos. El Hamiltoniano que describe al arreglo es de tipo Hubbard extendido, que incluye el tuneleo entre los puntos cuánticos y la repulsión de Coulomb tanto entre los electrones del arreglo como entre éstos y los de la celda de control (Lent et al., 1992; Lent et al., 1993; Tougaw y Lent, 1996):

$$H_S = \sum_i \varepsilon_i n_i + t \sum_{\langle ij \rangle} (c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i) + \sum_{i>j} V_{ij} n_i n_j + \sum_{i,j} W_{ij} n_i^d(t) n_j \quad (3.1)$$

donde $c_j^\dagger (c_j)$ es el operador de creación (aniquilación) de electrones, n_j es el operador de número de los electrones en el arreglo mientras que n_i^d es el operador de número de los electrones en la celda de control, que en general puede depender del tiempo. La energía de sitio del i -ésimo punto cuántico es ε_i , en donde pueden incluirse los efectos de la asimetría al cambiar el nivel de energía de uno de los puntos en una cierta cantidad δ . El tuneleo entre

puntos cuánticos es t (que no debe confundirse con el tiempo); $V_{ij} = V/d_{ij}$ es la interacción electrostática entre los electrones en los puntos i y j del arreglo, separados por una distancia d_{ij} , y W_{ij} entre el sitio i del arreglo y el j de la celda de control. El potencial eléctrico ejercido por la celda de control ocasiona un cambio local en las energías de sitio de cada punto cuántico y puede manipularse coherentemente mediante la acción de voltajes de compuertas estáticos o dinámicos aplicados en cada uno de los puntos, como se ha demostrado en diversos experimentos (Amlani et al., 1998; Amlani et al., 1999; Gardelis et al, 1993).

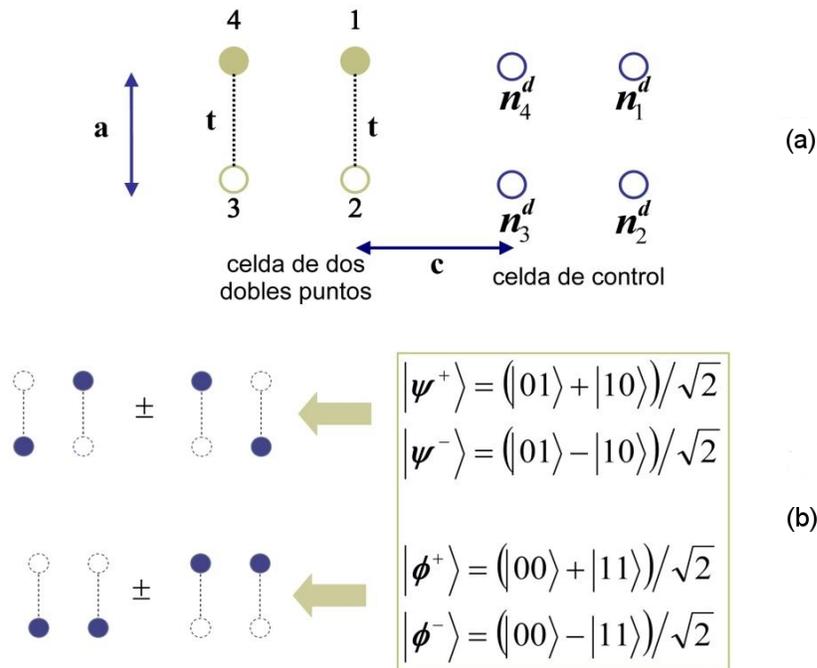


Figura 3.1. Diagramas esquemáticos para (a) el arreglo de dos puntos cuánticos en presencia de una celda de control con densidad de carga n_i^d en cada punto cuántico; cada doble punto con un electrón adicional puede representar un qubit de carga. (b) Definición de los estados de Bell $|\Psi^\pm\rangle$, $|\phi^\pm\rangle$ en la base de los dos qubits y su relación con la distribución de la carga en el arreglo.

Debe notarse que no consideramos el grado de libertad de espín del electrón y que no se permite doble ocupación en los puntos cuánticos. Siguiendo la notación de Lent et al., (1992) la

distancia entre puntos cuánticos es a , mientras que la separación entre el arreglo de qubits y la celda de control es c como se muestra en la Figura 3.1 (a).

Asumimos que los puntos cuánticos que constituyen el arreglo son discos circulares con un diámetro $\varphi \approx 50$ nm definidos en una heteroestructura de GaAs/AlGaAs con masa efectiva $m^* \approx 0.067$ (Lent et al., 1993). Con estos parámetros y considerando una distancia entre los puntos de $a \approx 100$ nm, la repulsión Coulombiana entre los electrones del arreglo es $V \approx 1$ meV, valor empleado como la unidad de energía en este Capítulo.

Para este modelo en particular, la base empleada está constituida por los cuatro estados que representan la distribución de carga en el arreglo de qubits, dados en la representación de número por $|11\rangle = |1001\rangle$, $|10\rangle = |0101\rangle$, $|01\rangle = |1010\rangle$ y $|00\rangle = |0110\rangle$, en donde $|n_1 n_2 n_3 n_4\rangle$ representa la presencia ($n_i = 1$) o ausencia ($n_i = 0$) de carga en cada punto cuántico, en el orden establecido en la Figura 3.1 (a). Los estados $|10\rangle$ y $|01\rangle$ corresponden a la situación física en la que la carga está distribuida a lo largo de las diagonales del arreglo cuadrado y que debido a la interacción electrostática tienen la mínima energía, los cuales pueden obtenerse a través de un potencial externo apropiado (que correspondería a la celda de control con una distribución de carga equivalente). Por otra parte, los estados $|11\rangle$ y $|00\rangle$ representan a los electrones localizados en la parte superior e inferior del cuadrado, respectivamente, y corresponden a estados excitados.

Los estados de Bell en la base computacional presentados en el Capítulo 2 pueden relacionarse directamente con los estados base como se muestra en la Figura 3.1(b), en donde puede notarse que están asociados a combinaciones lineales de estados cuya carga se encuentra distribuida tanto a lo largo de las diagonales ($|\Psi^\pm\rangle \propto |01\rangle \pm |10\rangle$) como en los lados del arreglo de dobles puntos cuánticos ($|\phi^\pm\rangle \propto |00\rangle \pm |11\rangle$).

Para el caso estacionario resolvemos el problema de eigenvalores $H_S \phi_n = E_n \phi_n$ y calculamos las propiedades del estado base del sistema, considerando que la celda de control tiene una distribución de carga fija en los puntos 1 y 3 ($n_1^d = n_3^d = 1$ y $n_2^d = n_4^d = 0$) correspondiendo con una “polarización” $P_{control} = +1$ de acuerdo a la definición dada por Lent et al (Lent y Tougaw, 1993, Lent et al, 1993):

$$P = \frac{\eta_1 + \eta_3 - (\eta_2 + \eta_4)}{\sum_i \eta_i} \quad (3.2)$$

en donde η_i es la densidad de carga en el i -ésimo punto cuántico. La polarización es esencialmente una medida de la alineación de los electrones en las diagonales del arreglo cuadrado, y permite cuantificar de forma eficiente la distribución de la carga. Nótese que cuando los electrones se localizan en los puntos 1 y 3 la polarización toma el valor $P = +1$, y la configuración opuesta (electrones localizados en los sitios 2 y 4) corresponde a $P = -1$.

Mediante esta propiedad se analizará también la distribución de los electrones en el arreglo de qubits de carga, donde la densidad de carga en cada punto se calculará como $\eta_i = \langle \psi | n_i | \psi \rangle$, siendo $|\psi\rangle$ el estado base del sistema.

Para determinar el grado de entrelazamiento se empleará la definición de la concurrencia para un estado puro, ecuación (2.30). Debido a que estamos interesados en evaluar si el sistema se encontrará en alguno de los estados de Bell, es posible determinar la contribución que éstos tienen en la concurrencia exhibida por el sistema. Un estado general del arreglo se puede expresar como una combinación lineal de los estados de Bell, mediante el cambio de base apropiado, en la forma $|\psi\rangle = c_{\Psi^+} |\Psi^+\rangle + c_{\Psi^-} |\Psi^-\rangle + c_{\phi^+} |\phi^+\rangle + c_{\phi^-} |\phi^-\rangle$. A través de las ecuaciones (2.28) y (2.29) se determina que $|\tilde{\psi}\rangle = c_{\Psi^+}^* |\Psi^+\rangle - c_{\Psi^-}^* |\Psi^-\rangle - c_{\phi^+}^* |\phi^+\rangle + c_{\phi^-}^* |\phi^-\rangle$, y entonces a partir de (2.30) obtenemos la siguiente expresión para la concurrencia de estados puros como función de las probabilidades de los estados de Bell:

$$C = \left| P_{\Psi^+} - P_{\Psi^-} - P_{\phi^+} + P_{\phi^-} \right| \quad (3.3)$$

en donde $P_i = |c_i|^2$ es la probabilidad del i -ésimo estado de Bell.

Para los estudios de la dinámica, en cambio, consideramos que la distribución de carga en la celda de control cambia linealmente en el tiempo con dos diferentes esquemas: *i*) la polarización de esta celda va de $P_{control} = +1$ hasta alcanzar $P_{control} = -1$ en un tiempo τ ; *ii*) la polarización comienza en $P_{control} = +1$ hasta llegar a cero en un tiempo $\tau/2$. Esto corresponde genéricamente a densidades de carga en la celda de control de la forma $n_1^d(t) = n_3^d(t) = 1 - t/\tau$ y $n_2^d(t) = n_4^d(t) = t/\tau$, correspondiendo a una polarización dada por $P_{control}(t) = 1 - 2t/\tau$.

Para la dinámica coherente del sistema se resuelve la ecuación de Liouville-von Neumann para la matriz de densidad del arreglo, ρ_S

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_S(t), \rho_S(t)] \quad (3.4)$$

Por otra parte, para el caso disipativo consideramos que los qubits se acoplan a un reservorio (baño) de fonones representado por un conjunto de osciladores armónicos de frecuencia ω_q , cuyo Hamiltoniano es (Rojas et al. 2000; Rojas et al., 2002; Cota et al., 2002; Weiss, 1999)

$$H_B = \sum_q \hbar \omega_q a_q^\dagger a_q \quad (3.5)$$

donde $a_q^\dagger (a_q)$ es el operador de creación (aniquilación) de fonones.

La interacción entre el arreglo de qubits de carga y el baño es del tipo electrón-fonón

$$V_{SB} = \sum_q \sum_{\langle ij \rangle} \alpha_{qij} c_i^\dagger c_j (a_q^\dagger + a_q) \quad (3.6)$$

siendo α_{qij} el parámetro de acoplamiento dado por $\alpha_{qij} = Dg_q(\omega_q)$, en donde D es la constante de acoplamiento y $g_q(\omega_q) \propto \omega_q^{1/2}$ del modelo de “deformación de potencial” (Rojas et al. 2000; Rojas et al., 2002; Cota et al., 2002). En general, podemos escribir este operador en forma bilineal como

$$V = S_1 F_1 + S_2 F_2 \quad (3.7)$$

donde S_1 representa a los elementos de la parte electrónica del arreglo que interactúan con el reservorio, cuyos elementos de matriz pueden interpretarse como eventos de tuneo asistido por fonones. En forma de proyectores, este operador puede escribirse como

$$S_1 = |01\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 00|, \quad S_2 = S_1^\dagger \quad (3.8)$$

en la cual $|n\rangle\langle m|$ representa la transición del estado $|m\rangle$ al $|n\rangle$. Los correspondientes operadores del baño involucrados con dichas transiciones son (Cota et al., 2002; Mahler y Weberruß, 1995)

$$F_1 = \sum_q g_q a_q^\dagger, \quad F_2 = F_1^\dagger \quad (3.9)$$

De esta forma, el Hamiltoniano total para el caso disipativo es:

$$H = H_S + H_B + V_{SB} \quad (3.10)$$

(debe recordarse que cada Hamiltoniano está representado en el espacio de Hilbert total, pero por simplicidad no se muestra el producto directo con la matriz identidad de cada subespacio, ecuación (2.33)).

Para este caso consideraremos únicamente el segundo esquema de polarización para la celda de control, y se calculará la ecuación de evolución temporal de la matriz de densidad reducida del sistema mediante la aproximación Markoviana para sistemas cuánticos abiertos. Para ello partimos de la ecuación de movimiento de la matriz de densidad del sistema total en la representación de interacción, dada por la ecuación (2.37).

Como se mostró en la sección 2.5.1, la matriz de densidad total inicial se factoriza en $\tilde{\rho}(0) = \tilde{\rho}_S(0) \otimes \tilde{\rho}_B$, y suponemos que el baño se encuentra en equilibrio termodinámico todo el tiempo con una matriz de densidad dada por $\rho_B = e^{-\beta H_B} / \text{Tr}_B \{ e^{-\beta H_B} \}$. La matriz de densidad reducida del arreglo de qubits se obtiene al tomar la traza sobre los estados de los fonones en la ecuación (2.38),

$$\tilde{\rho}_S(t) = \text{Tr}_B \{ \tilde{\rho}(t) \} \quad (3.11)$$

Debido a que ρ_B mantiene fijo el número de partículas, el primer término de dicha expresión es cero y se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para la matriz de densidad reducida del arreglo de qubits de carga en la representación de interacción:

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_B \{ [\tilde{V}_{SB}(t), [\tilde{V}_{SB}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \} \quad (3.12)$$

Considerando que la interacción entre los qubits y el baño disipativo es débil, es posible realizar la aproximación de Born-Markov seguida de una aproximación secular mediante las cuales se obtiene la ecuación maestra en la representación de Schrödinger (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995):

$$\dot{\rho}_S(t)_{ss'} = -i\omega_{ss'} \rho_S(t)_{ss'} + \sum_{mn} \tilde{\mathbf{R}}_{ss'mn} \rho_S(t)_{mn} \quad (3.13)$$

Algunos detalles relacionados con la obtención de esta expresión se presentan en el apéndice A.

El primer término de ésta ecuación describe los efectos reversibles (dinámica coherente) que dependen de las frecuencias de transición del sistema $\omega_{ss'} = (E_s - E_{s'})/\hbar$, donde E_n son las eigenenergías del arreglo de qubits; mientras que el segundo término representa los procesos de relajación inducidos por acoplamiento con el baño. $\tilde{\mathbf{R}}_{ss'mn}$ es llamado *tensor de relajación* o

tensor de Redfield (Blum, 1981; Breuer y Petruccione, 2002; Hatmann y Wilhem, 2004), dado explícitamente por:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ss'mn} = \begin{cases} \delta_{nm} (1 - \delta_{ms}) \tilde{W}_{sm} - \delta_{ms} \delta_{ns} \sum_{k \neq s} \tilde{W}_{ks} & (s = s') \\ -\gamma_{ss'} \delta_{sm} \delta_{ns'} & (s \neq s') \end{cases} \quad (3.14)$$

siendo \tilde{W}_{nm} las probabilidades de transición por unidad de tiempo del estado $|m\rangle$ al $|n\rangle$, que pueden expresarse en términos de las propiedades físicas del baño y del arreglo de dobles puntos cuánticos como

$$\tilde{W}_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar^2} D^2 [g(\omega_{mn})]^2 J(\omega_{mn}) \left\{ |S_{1,nm}|^2 \bar{n}(\omega_{mn}) + |S_{1,mn}|^2 [1 + \bar{n}(\omega_{mn})] \right\} \quad (3.15)$$

en donde $\bar{n}(\omega)$ es el número medio de fonones con frecuencia ω (distribución de Bose-Einstein), $J(\omega)$ es la densidad de estados de bosones (que es proporcional a ω^2 en el modelo de Debye) (Cota et al., 2002; Rojas et al. 2000; Rojas et al., 2002; Weiss, 1999) y $S_{1,mk}$ son los elementos de matriz de la parte electrónica del término de interacción sistema-baño, ecuación (3.8). Nótese que la primera parte de esta expresión, proporcional a \bar{n} , corresponde a absorción de fonones, mientras que la segunda ($\propto \bar{n} + 1$) corresponde a procesos de emisión, ambos a una frecuencia dada por las transiciones de energía en el arreglo, ω_{nm} . Estas ecuaciones se derivan en el apéndice A.

El término $\gamma_{ss'}$ de la ecuación contribuye al decaimiento de los elementos no-diagonales de la matriz de densidad, siendo el responsable directo de la pérdida de coherencia en el sistema (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995). Su parte real también puede escribirse en términos de las probabilidades de transición (como se muestra en el apéndice A), mientras que su parte imaginaria corresponde a una tasa de relajación intrínseca que puede considerarse despreciable (Mahler y Weberruß, 1995). Nótese que para la dinámica coherente el tensor de relajación se elimina y se recupera la ecuación de Liouville del sistema cerrado, expresión (3.4).

De la ecuación (3.15) se observa que las probabilidades de transición por unidad de tiempo satisfacen la condición (Blum, 1981; Mahler y Weberruß, 1995):

$$\frac{\tilde{W}_{nm}}{\tilde{W}_{mn}} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{mn}}{k_B T}\right) \quad (3.16)$$

la cual nos indica que si $E_m > E_n$, la transición del estado $|m\rangle$ al estado $|n\rangle$ es más probable que la transición inversa, principalmente a baja temperatura. Debe notarse que a temperaturas muy altas, $T \rightarrow \infty$, $\tilde{W}_{nm} \approx \tilde{W}_{mn}$ contribuyendo fuertemente con la razón de decaimiento de las coherencias, ecuaciones (A.19) y (A.20)

La solución numérica tanto de la ecuación de Liouville para la matriz de densidad del sistema cerrado, así como de la ecuación maestra para la matriz de densidad reducida del arreglo de qubits, ecuaciones (3.4) y (3.13) respectivamente, se obtiene mediante el empleo de un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden. El uso de un paso de integración adecuado nos permite asegurar que la propiedad de normalización para la matriz de densidad, $Tr\{\rho_S\} = 1$, se satisface todo el tiempo.

Mediante el empleo de la matriz de densidad es posible calcular la densidad de carga en los puntos cuánticos como el valor promedio del operador de número en cada sitio, $\eta_i = Tr\{\rho_S n_i\}$, y con éstas se obtiene la polarización del arreglo, ecuación (3.2). También se utiliza la matriz de densidad para calcular la concurrencia en su forma genérica, ecuación (2.32).

3.3. Discusión

A continuación presentamos los resultados relevantes obtenidos para esta configuración de qubits de carga en presencia de la celda de control.

3.3.1 Estado estacionario

Para el estudio del sistema estacionario consideramos una polarización constante en la celda de control $P_{control} = +1$ y calculamos las propiedades del estado base en función de la amplitud de tuneo, t/V . Del espectro de energías, Figura 3.2 (a), puede observarse que la presencia del potencial generado por la celda de control remueve la degeneración incluso para $t/V = 0$, produciendo una mayor separación entre niveles conforme el tuneo se incrementa. El estado base corresponde a una polarización del arreglo de qubits $P \cong +1$ inducida por el efecto

electrostático de la celda de control, sin embargo este valor disminuye conforme se incrementa el tuneo, en acuerdo con el análisis presentado en la referencia (Rojas et al., 2002) para un modelo similar. Por otra parte, en la Figura 3.2 (b) se observa que la concurrencia como función del tuneo comienza en cero (inexistencia de correlación entre los estados de los qubits) hasta llegar a un valor máximo de ≈ 0.66 para una amplitud del tuneo “crítica” de $t_c/V = 0.063$, y posteriormente disminuye aproximándose a cero conforme el tuneo se incrementa.

La concurrencia tiene contribuciones de los diferentes estados de Bell, siendo el estado $|\Psi^+\rangle$ el que presenta la probabilidad más alta. De la Figura 3.2 (c) puede observarse que para amplitudes de tuneo pequeñas, $t/V \sim 0$, el arreglo está formado principalmente por la combinación $|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle \propto |01\rangle$ que corresponde a un estado separable y por tanto tiene concurrencia cero (Hill y Wootters, 1997; Wootters, 1998). Después se observa un régimen de tuneo $0 < t/V < t_c/V$ que comienza a promover la deslocalización de la carga dando lugar a una combinación de estados formada principalmente por $|\Psi^+\rangle$ y $|\Psi^-\rangle$ (o equivalentemente por los estados $|01\rangle$ y $|10\rangle$) con una pequeña contribución del estado $|\phi^+\rangle$. Debido a la interacción Coulombiana dentro del arreglo y a que la celda de control induce a éste a presentar la misma configuración de carga, el estado $|01\rangle$ se ve favorecido, ocasionando un incremento en la probabilidad de $|\Psi^+\rangle$.

Sin embargo, debe notarse que la transición entre $|01\rangle$ y $|10\rangle$ que da lugar a este estado no es directa mediante procesos de un solo electrón, sino que se lleva a cabo a través de transiciones hacia/desde los estados $|00\rangle$ y $|11\rangle$. Por tanto, aumenta también la probabilidad de $|\phi^+\rangle$ aunque en menor proporción que la de $|\Psi^+\rangle$, mientras disminuye la de $|\Psi^-\rangle$. Estos procesos dan lugar a un incremento en la concurrencia que está de acuerdo con la ecuación (3.3).

Para $t/V > t_c/V$, el arreglo entra en un nuevo régimen en el que la deslocalización inducida por el tuneo es más fuerte y promueve una población casi simétrica en los cuatro puntos cuánticos. Esto ocasiona un incremento en la población de los estados “intermedios”, es

decir del estado $|\phi^+\rangle$ que explica la disminución en la concurrencia conforme la probabilidad de dicho estado tiende a igualar la de $|\Psi^+\rangle$.

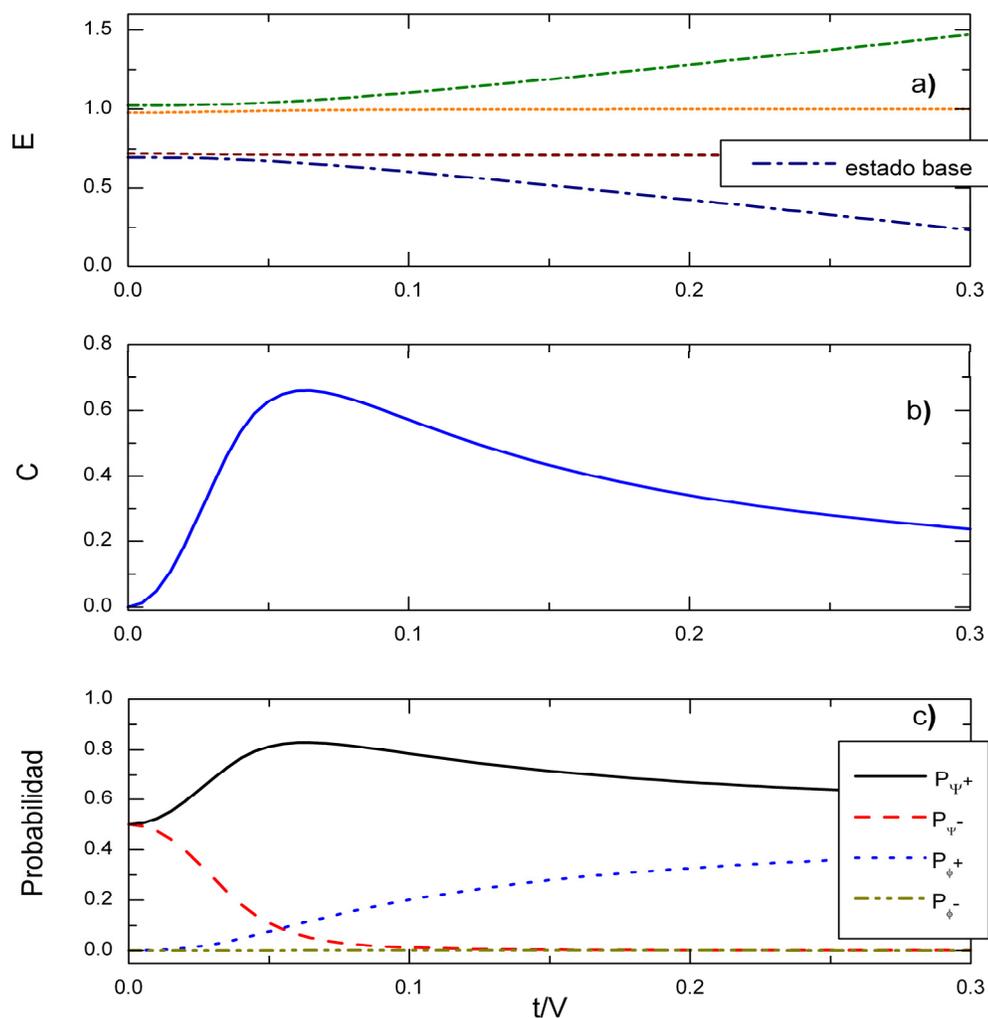


Figura 3.2. Propiedades del estado base del arreglo de dos doubles puntos cuánticos como función del tunelaje: (a) estructura de niveles de energía, (b) concurrencia y (c) probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de los estados de Bell

3.3.2 Dinámica coherente

En el caso del sistema aislado, sin considerar su acoplo al baño de fonones, evaluamos el efecto del cambio en la polarización de la celda de control en la formación dinámica de entrelazamiento tanto para un sistema simétrico (es decir, en el que todos los puntos cuánticos son idénticos, $\delta = 0$) como para diversos grados de asimetría ($\delta \neq 0$). Los parámetros típicos empleados en todos los casos son $t/V = 0.03$, $c = 2a$ y $\tau = 4$ ns.

Para una polarización de la celda de control que cambia linealmente desde $P_{control} = +1$ hasta $P_{control} = -1$ en un tiempo τ (que corresponde a la línea punteada en la Figura 3.3 (a)), la respuesta del arreglo se refleja en una polarización que sigue a la de la celda de control, $P \sim 1$ hasta $P \sim -1$, como puede observarse en la Figura 3.3 (a).

Por otra parte, en la Figura 3.3 (b) se aprecia que la concurrencia se va incrementando hasta alcanzar un máximo a un tiempo $t_s \approx \tau/2$ pero disminuye para tiempos más largos hasta alcanzar un valor asintótico después de que la celda de control ha invertido su polarización y se mantiene constante en $P_{control} = -1$. Principalmente se obtiene el estado $|\Psi^+\rangle$ pero se presenta una pequeña contribución de $|\Psi^-\rangle$, como se muestra en las líneas discontinuas de la Figura 3.3(c), lo que significa que el arreglo se encontraba originalmente en el estado $|01\rangle \propto |\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle$ con alta probabilidad, pero al tiempo τ cambia casi totalmente al estado con la carga distribuida de forma contraria, $|10\rangle \propto |\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle$. Debe notarse que todas las propiedades calculadas presentan oscilaciones debido a la coherencia entre los estados accesibles al sistema, ocasionadas por el tuneo y por el potencial de la celda de control. Debido a las aplicaciones potenciales del entrelazamiento, es deseable contar con estados que presenten una alta concurrencia todo el tiempo. Por este motivo, se propone el control del sistema mediante la remoción del potencial externo al tiempo en el que la concurrencia presenta el máximo. Es decir, que ahora la polarización de la celda de control va de $P_{control} = +1$ hasta $P_{control} = 0$ en un tiempo $t_s = \tau/2$. Las propiedades calculadas en este esquema temporal se presentan mediante líneas sólidas en la Figura 3.3, en la que puede apreciarse que la polarización, concurrencia y probabilidad de cada estado de Bell presentan un comportamiento estacionario una vez que la celda de control se ha despolarizado completamente. De esta forma

es posible no sólo generar sino también mantener uno de los estados de Bell, $|\Psi^+\rangle$, con la mayor probabilidad en el sistema a partir de un estado inicial no entrelazado, el cual corresponde al estado base del sistema para el tuneo especificado anteriormente y con $P_{control} = +1$ (esta elección de la condición inicial permite un comportamiento suave al inicio de la dinámica del sistema).

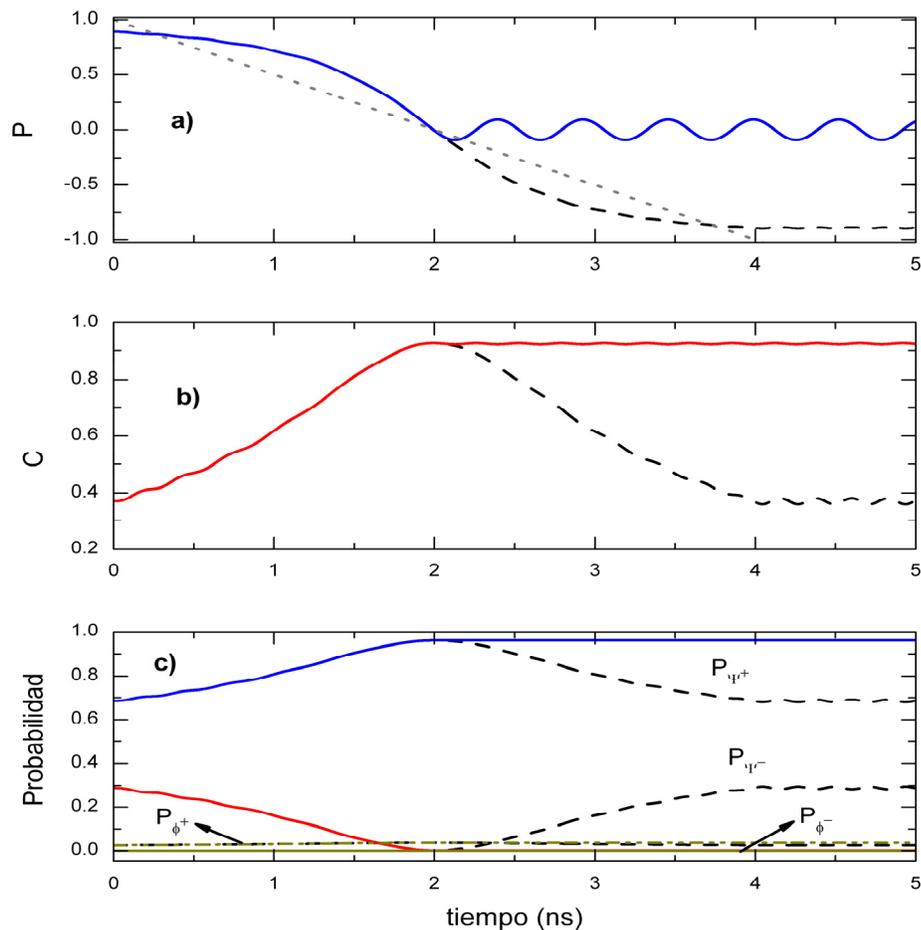


Figura 3.3. Dinámica coherente de las propiedades del arreglo de dos qubits de carga (a) polarización, (b) concurrencia (c) probabilidades de los estados de Bell como función del tiempo. Las líneas discontinuas corresponden al caso en el que la polarización de la celda de control varía linealmente de +1 a -1, mientras que las líneas sólidas corresponden a una variación de +1 a 0. Parámetros utilizados: $V = 1$ meV, $t/V = 0.03$ y $c = 2a$

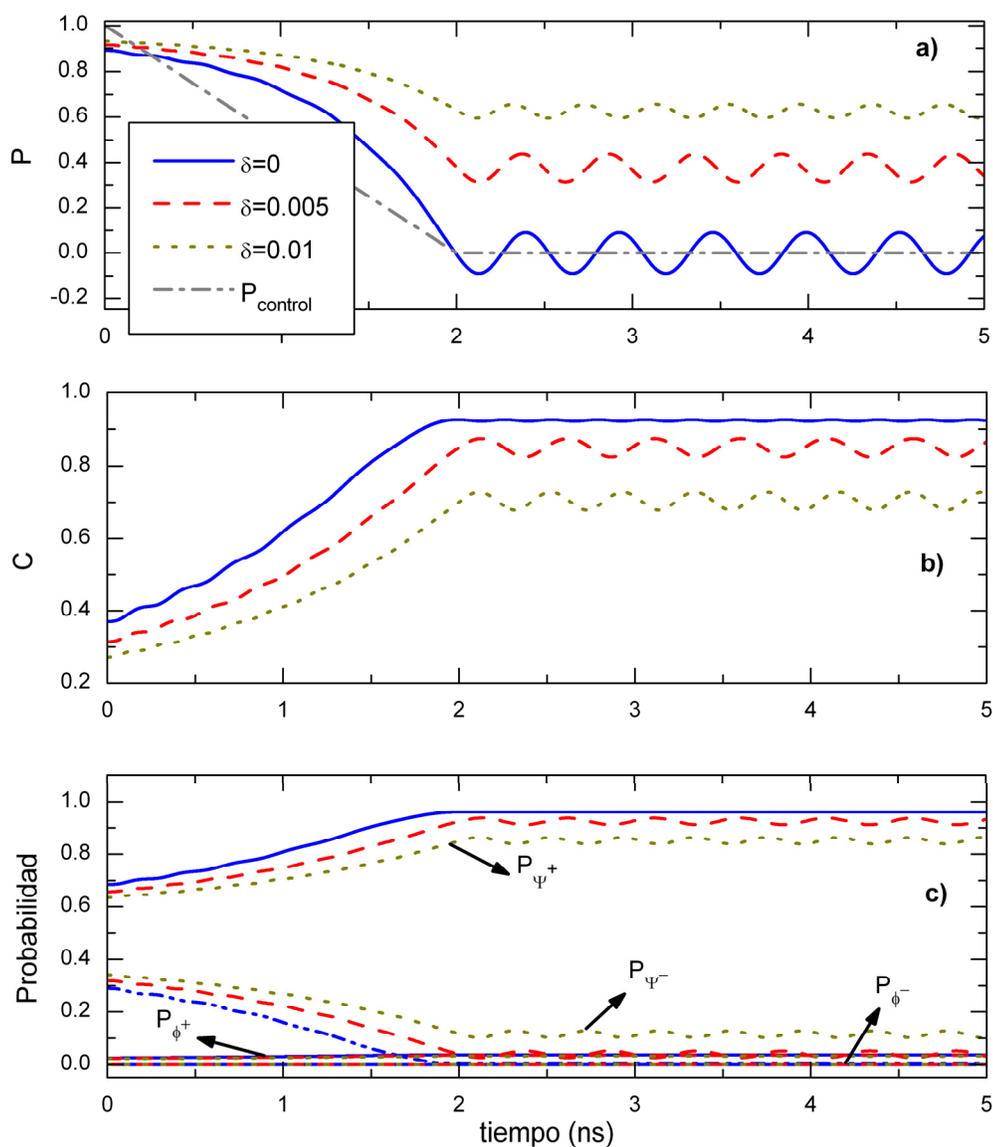


Figura 3.4. Dinámica coherente del arreglo en el esquema de control para diferentes asimetrías δ en el primer punto cuántico. (a) Polarización, (b) concurrencia (c) probabilidad de encontrar al sistema en cada estado de Bell. Nótese que la imperfección deteriora la formación de entrelazamiento en el arreglo de qubits de carga (mismos parámetros que en la Figura 3.3)

En este esquema de control, exploramos la asimetría en el sistema mediante la disminución de la energía de sitio del primer punto cuántico en una cantidad δ , lo cual implica

que dicho punto es de un tamaño mayor que el resto. Los efectos de la asimetría en las propiedades del arreglo de qubits son mostradas en la Figura 3.4.

La polarización del arreglo de dobles puntos cuánticos presenta un “retraso” respecto al caso simétrico ($\delta = 0$) incluso para valores pequeños de δ ; conforme este valor se incrementa, se inhibe el cambio en la polarización de arreglo, como se observa en la Figura 3.4 (a). La concurrencia también presenta un retraso y su valor disminuye conforme la imperfección se incrementa. Este comportamiento es una consecuencia de la tendencia del arreglo a localizar al electrón en el sitio 1, inhibiendo la población de los estados $|10\rangle$ y $|00\rangle$ a pesar de que la celda de control tiende a poblar en el tiempo todos los sitios de la misma forma. Este efecto también se refleja en un incremento en la probabilidad del estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ con la consecuente disminución de la de $|\Psi^+\rangle$, Figura 3.4 (c), lo cual significa que el sistema se encuentra principalmente en el estado $|01\rangle$.

3.3.3 Dinámica disipativa

En el mismo esquema de control de la concurrencia y de un estado de Bell preferencial, analizamos el efecto del baño de fonones para el caso en el que la celda de control se despolariza al tiempo $t_s = \tau/2$ y asumimos puntos cuánticos idénticos ($\delta = 0$). En las figuras 3.5 y 3.6 mostramos los resultados de la dinámica disipativa.

Evaluamos los efectos de la temperatura en la polarización, la concurrencia y las probabilidades de los estados de Bell como función del tiempo. En la Figura 3.5 (a) puede observarse que la polarización del arreglo disminuye conforme se incrementa la temperatura del baño, y para temperaturas del orden de ~ 3 K se ve fuertemente disminuida y parece ignorar a la celda de control. El valor asintótico que toma la polarización es el mismo para cada temperatura (tiende a cero) debido a que la celda de control se despolariza a partir de t_s .

La concurrencia presenta un comportamiento similar, disminuyendo conforme la temperatura aumenta, Figura 3.5 (b). Debe notarse que a muy bajas temperaturas, $T \approx T_1 = 1$ K, aun se cuenta con estados entrelazados y en específico el estado $|\Psi^+\rangle$, sin embargo puede perderse toda correlación en el sistema de dobles puntos cuánticos para temperaturas más altas.

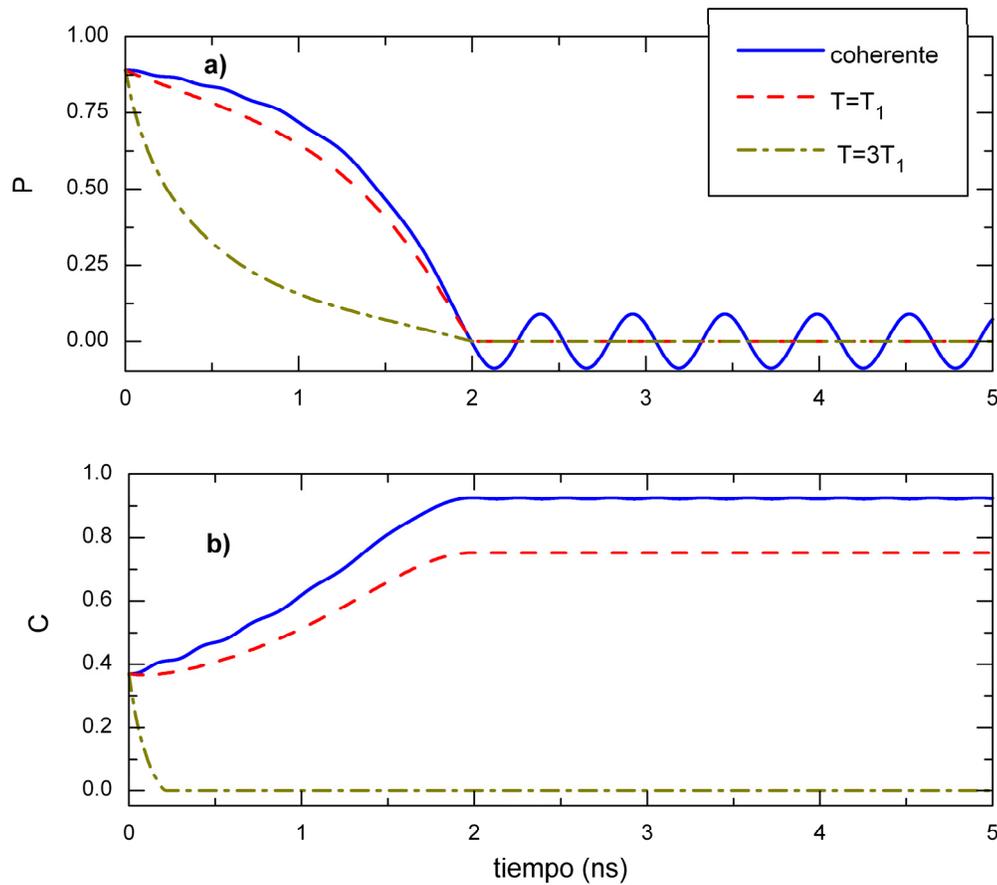


Figura 3.5. Dinámica disipativa del arreglo de dos dobles puntos cuánticos para diferentes temperaturas, en donde $T_1 \sim 1K$, $D^2 = 0.05$ y asumimos puntos idénticos (a) polarización, (b) concurrencia como función del tiempo

Debido al proceso de equilibración del baño, ecuación (3.16), las probabilidades de cada estado de Bell tienden a igualarse con el tiempo. Por ello, en la Figura 3.6 se observa que la probabilidad del estado $|\Psi^+\rangle$ disminuye mientras que la probabilidad del resto de los estados de Bell se incrementan. Puede notarse además que las oscilaciones en polarización, concurrencia y probabilidades disminuyen e incluso llegan a desaparecer como resultado de la decoherencia introducida por el baño.

Adicionalmente a la temperatura, evaluamos los efectos de la asimetría en el caso disipativo. Como se esperaba, la asimetría del primer punto cuántico ocasiona una disminución

más rápida de la concurrencia y de la probabilidad de un estado de Bell preferencial debido a su efecto de localización de carga, por lo que estos resultados no se muestran gráficamente.

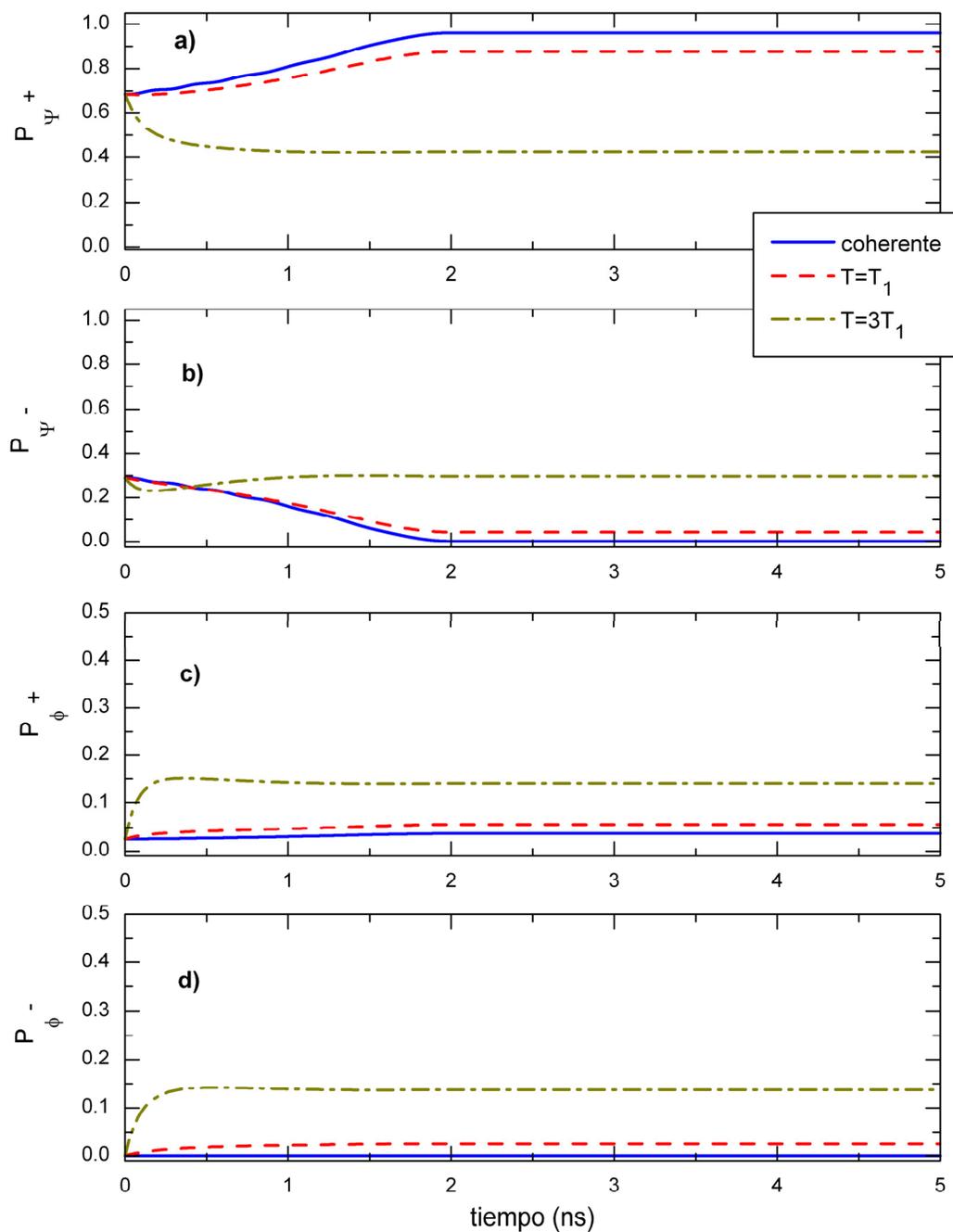


Figura 3.6. Propiedades de los estados de Bell obtenidos de la dinámica disipativa del arreglo, para diferentes temperaturas ($T_1 \sim 1K$, $D^2 = 0.05$ y $\delta = 0$)

Por último, en la Figura 3.7 se analiza la concurrencia en función de la temperatura, para tiempos muy largos, en donde el sistema ha alcanzado un estado estacionario. Este comportamiento asintótico refleja que es posible obtener un alto grado de entrelazamiento para muy bajas temperaturas $T < T_1 \approx 1K$, pero la concurrencia presenta un rápido decaimiento conforme la temperatura se incrementa en un intervalo $T_1 < T < T_c$ debido a los efectos de disipación. T_c es una temperatura crítica o umbral en donde el sistema pierde toda capacidad de generar entrelazamiento ($C = 0$), la cual para nuestros parámetros típicos toma el valor $T_c = T/T_1 \sim 2.4$ y puede depender del resto de los parámetros que caracterizan al arreglo de dos qubits como el tuneo y las imperfecciones en los puntos cuánticos.

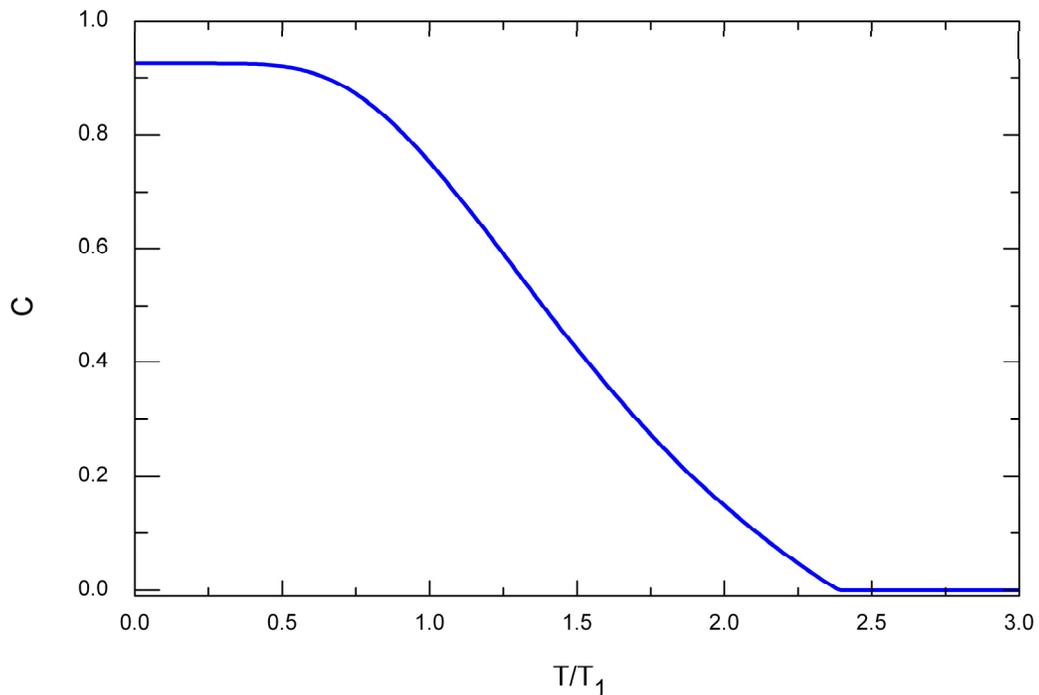


Figura 3.7. Comportamiento asintótico (tiempos largos) de la concurrencia como función de la temperatura para el caso de un arreglo simétrico

Este efecto puede comprenderse mejor si se toma en cuenta que a tiempos largos la población de cada punto cuántico tiende a igualarse; de esta forma la matriz de densidad reducida del sistema es diagonal y los eigenvalores de $\rho_s \tilde{\rho}_s$ son iguales. Entonces por

definición, ecuación (2.32), la concurrencia es cero. De esta forma se encuentra que el entrelazamiento no se extiende a un límite de temperatura infinita, en acuerdo con el análisis presentado en (Fine et al., 2005).

En resumen, en esta parte de la tesis se ha estudiado el comportamiento de la polarización, la concurrencia y la probabilidad de obtener cada uno de los estados de Bell en los estados de carga de dos dobles puntos cuánticos acoplados. La evolución dinámica de estas propiedades presenta una fuerte dependencia de la distribución de carga de una celda de control, de las imperfecciones en los puntos cuánticos y de la temperatura del ambiente. Los resultados obtenidos muestran que es posible obtener y controlar estados entrelazados así como el estado $|\Psi^+\rangle$ con la mayor probabilidad mediante la manipulación del potencial eléctrico generado por la celda de control. La concurrencia y probabilidades óptimas calculadas pueden mantenerse a bajas temperaturas, pero se deterioran conforme se incrementan la temperatura y el grado de imperfección en los puntos cuánticos.

La implementación física de este tipo de sistemas no podrá escalarse fácilmente a altas temperaturas y/o a un número grande de dispositivos. Aun así, el mecanismo electrostático presentado para la generación teórica de entrelazamiento en un par de qubits de carga puede ser interesante para futuras condiciones experimentales, en donde la habilidad de manipular dichos estados sea factible. Bajo las condiciones establecidas (bajas temperaturas y puntos casi idénticos), este sistema podría emplearse para implementar o examinar algunos procesos de computación o comunicación cuánticas en los que el grado de entrelazamiento obtenido sea útil.

Capítulo 4

Generación dinámica de estados de Bell en un arreglo de dobles puntos cuánticos

Introducción

Continuaremos con el estudio de la concurrencia y de la distribución de carga en un arreglo de dos dobles puntos cuánticos interactuantes. En el Capítulo anterior se obtuvieron estados entrelazados en dicho arreglo, incluyendo un estado de Bell con la mayor probabilidad, debido tanto a la interacción Coulombiana entre los electrones del arreglo y al efecto del potencial eléctrico generado por la celda de control. Ahora nos enfocaremos en la generación de entrelazamiento entre los qubits de carga a través de un modelo electrostático más sencillo que ofrezca un mejor control de la carga, el cual puede representar variaciones en los voltajes de compuerta de los puntos cuánticos o una señal específica dentro de un proceso de información cuántica.

En particular, las aplicaciones potenciales de los estados de Bell basadas en el máximo grado de entrelazamiento que éstos presentan, nos llevan a buscar su obtención dinámica en nuestro sistema. Adicionalmente, se evaluará el efecto que sobre dichos estados genera un baño disipativo de fonones, inherente a todo sistema de estado sólido. Mediante el empleo de las aproximaciones presentadas en el Capítulo anterior, se obtendrá la ecuación maestra para la matriz de densidad reducida del arreglo en el régimen de acoplamiento débil con el baño.

En general, se propone un mecanismo electrostático para la generación de los estados de Bell a partir de estados iniciales no entrelazados y mediante la manipulación del potencial externo. Dichos estados se mantienen a muy baja temperatura, pero el incremento de ésta ocasiona la pérdida de un estado preferencial. El entrelazamiento entre los qubits se pierde completamente a una temperatura finita que depende de la amplitud del tuneo.

4.1. Estados de Bell en arreglos de puntos cuánticos

Como ya se ha mencionado, los estados de Bell (representados matemáticamente en el Capítulo 2) son los estados de dos qubits con el máximo grado de entrelazamiento en los que se basan

diversos protocolos de comunicación cuántica, como el código denso, la criptografía cuántica y la teleportación (Blatter, 2003; Nielsen y Chuang, 2000; Preskill, 2004; Zeilinger, 1998).

Debido a estas aplicaciones potenciales, es de gran interés contar con sistemas físicos mediante los cuales dichos estados puedan implementarse y manipularse. En la actualidad, los estados de Bell se han obtenido experimentalmente en trampas de iones (Barrett et al., 2004; Häffner et al., 2005; Riebe et al., 2004; Roos et al., 2004) y en sistemas de óptica cuántica, incluyendo a estados de polarización de fotones (Aspect et al., 1982; Fattal et al., 2004; Kim et al., 2003; Walther y Zeilinger, 2005), a la interacción de átomos con fotones en cavidades cuánticas (Blinov et al., 2004; García-Maraver et al., 2004; Hagley et al., 1997) y también se han conseguido en dos cavidades espacialmente separadas (Davidovich et al., 1994; Messina, 2002).

Sin embargo, la implementación de los estados de Bell en sistemas de estado sólido es atractiva debido a la escalabilidad potencial que éstos ofrecen así como a la relativa facilidad con la que podrían incluirse a las tecnologías actuales para circuitos integrados (Ekert y Jozsa, 1996; Imamoglu et al., 1999; Vorojtsov et al., 2005; Wu et al., 2005). De entre estos sistemas, el empleo de puntos cuánticos semiconductores (Burkard et al., 1999; Loss y DiVincenzo, 1998; Petta et al., 2005; Vorojtsov et al., 2005; Weiss et al., 2006; Zhang et al., 2002) es prometedor a causa de su desarrollo teórico y experimental y a la existencia de una base industrial para el procesamiento de semiconductores. De esta forma, se ha propuesto la generación de estados de Bell a través de un punto cuántico (Oliver et al., 2002), empleando puntos triples (Saraga y Loss, 2003), mediante excitones (del tipo electrón-hueco) tanto en un solo punto (Chen et al., 2002; Quiroga y Johnson, 1999; Yi et al., 2001) como en puntos acoplados (Gywat et al., 2002; Hichri et al., 2004a; Reina et al., 2000) y a través de estados electrónicos en dobles puntos cuánticos. Estos últimos se refieren principalmente a sistemas formados por dos electrones en un doble punto (Chouikha et al., 2003; Hichri et al., 2004b; Tamborenea y Metiu, 2001; Zhang et al., 2002b), mientras que nuestro interés se centra en demostrar teóricamente la formación de estados de Bell en un arreglo de dos dobles puntos cuánticos.

La demostración experimental del control coherente tanto de la carga (Hayashi et al., 2003; Gorman et al., 2005; Fedichkin et al., 2000; Fujisawa et al., 2004) como de estados entrelazados (Kyriakidis et al., 2002; Petta et al., 2006) en dobles puntos cuánticos mediante voltajes de compuerta, han permitido proponer teóricamente que la manipulación de los estados

de Bell puede conseguirse en estos sistemas mediante la aplicación controlada de campos eléctricos (Chouikha et al., 2003; Contreras y Rojas, 2006; Hichri et al., 2004; Kyriakidis et al., 2002; Zhang et al., 2002).

Sin embargo, la decoherencia que sufren los sistemas de estado sólido debido a la presencia de un ambiente de fonones representa uno de los principales obstáculos no sólo para la formación de los estados de Bell sino también para su manipulación y empleo. Como se ha mencionado previamente, los efectos disipativos en dobles puntos cuánticos se han considerado teóricamente de diferentes formas. En particular, la interacción electrón-fonón en la generación de estados de Bell se ha tomado en cuenta mediante modelos microscópicos tanto diagonales (Yi et al., 2001) como no diagonales (Chouikha et al., 2003; Contreras y Rojas, 2006; Hichri et al., 2004; Tanamoto, 2000).

En este Capítulo exploraremos la formación y el control de entrelazamiento entre dos qubits de carga interactuantes definidos en un arreglo de dos dobles puntos cuánticos paralelos, mediante la aplicación de un potencial eléctrico externo, V_a , el cual ya sea estático o dinámico puede representar variaciones en la operación de los puntos cuánticos o incluso la entrada de un proceso de computación.

Se dará énfasis en la generación y el control dinámico de cada uno de los estados de Bell mediante el control del potencial externo dependiente del tiempo. Además, considerando el acoplo débil del arreglo de qubits de carga con un baño de fonones en equilibrio termodinámico, incluimos los efectos disipativos mediante el empleo de un modelo no-diagonal para la interacción electrón-fonón. De esta forma, obtendremos una ecuación maestra para la matriz de densidad reducida del sistema y evaluaremos el efecto de la temperatura en la evolución temporal de la polarización, la concurrencia y la probabilidad de obtener los estados de Bell en el arreglo de qubits.

4.2. Modelo

Nuevamente se cuenta con dos dobles puntos cuánticos paralelos, formando un arreglo cuadrado, al segundo de los cuales se le aplica una diferencia de potencial que representaremos como V_a , mostrado en la Figura 4.1. Como se ha mencionado, cada doble punto representa un qubit de carga debido a que cuenta con un electrón adicional que puede tunelear entre los

puntos, sin embargo el tuneeo entre qubits no está permitido. Como en el Capítulo anterior, el Hamiltoniano que describe a este sistema es de tipo Hubbard extendido e incluye el tuneeo dentro de cada doble punto cuántico, la interacción electrostática entre los electrones así como el potencial externo (Cota et al., 2002):

$$H_S = \sum_i \varepsilon_i n_i + t \sum_{\langle ij \rangle} (c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i) + \sum_{i>j} V_{ij} n_i n_j \quad (4.1)$$

donde c_j^\dagger (c_j) es el operador de creación (aniquilación) de electrones, n_j es el operador de número, ε_i es la energía de sitio del i -ésimo punto cuántico, $V_{ij} = V/d_{ij}$ es la interacción electrostática entre los electrones en los puntos i y j del arreglo (separados por una distancia d_{ij}), mientras que la amplitud de tuneeo entre los electrones está dada por t . Debe notarse que la diferencia de potencial aplicada en el segundo doble punto produce un cambio en la energía del punto cuántico 2, que está dada por $\varepsilon_2 + V_a$. De nueva cuenta se están considerando electrones sin espín y se prohíbe doble ocupación en los puntos cuánticos.

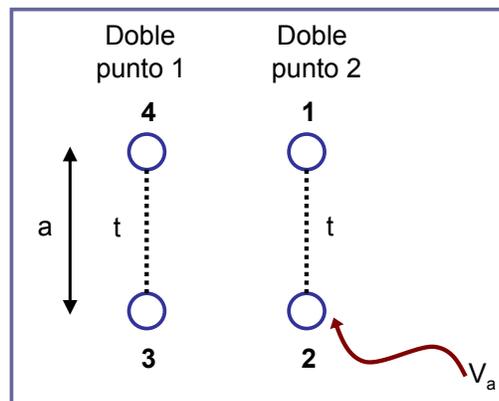


Figura 4.1. Arreglo de dos dobles puntos cuánticos con una geometría cuadrada, al segundo de los cuales se aplica una diferencia de potencial, V_a . Cada doble punto cuenta con un electrón adicional que al tuneeo entre sitios vecinos define los estados de un qubit de carga

Para el caso disipativo nos valdremos del modelo empleado en el Capítulo 3, por lo que el Hamiltoniano total es $H = H_S + H_B + V_{SB}$, con H_B y V_{SB} dados por las ecuaciones (3.5) y

(3.6). De la misma forma, los puntos cuánticos corresponden a los discos circulares mencionados en el Capítulo anterior, por lo que la repulsión de Coulomb entre los electrones del arreglo es $V \approx 1$ meV la cual define la unidad de energía utilizada en esta parte del trabajo.

Nuevamente emplearemos la base de cuatro estados que representan la distribución de carga dentro del arreglo: $|11\rangle = |1001\rangle$, $|10\rangle = |0101\rangle$, $|01\rangle = |1010\rangle$ y $|00\rangle = |0110\rangle$, en donde 1 representa la localización de carga y 0 la ausencia de ésta en cada punto cuántico.

Los estados de Bell pueden relacionarse directamente con estos estados, como se mencionó en el Capítulo 3 y como se muestra esquemáticamente en la Figura 3.1 (b).

Para el caso estacionario resolvemos el problema de eigenvalores $H_S \phi_n = E_n \phi_n$ asumiendo un potencial externo fijo, y se calcularán la polarización, la concurrencia y las probabilidades de obtener los estados de Bell para el estado base del sistema.

En los estudios dinámicos consideraremos que el campo eléctrico externo cambia linealmente en el tiempo en la forma $V_A(t) = -V_{A0}(t - \tau)$, en donde V_{A0} es una constante y τ es el tiempo de respuesta del potencial, el cual determina que éste tome valores positivos y negativos. Para la dinámica coherente se resolverá la ecuación de Liouville para la matriz de densidad del arreglo, dada por la ecuación (3.4), mientras que para la dinámica disipativa resolveremos la ecuación de evolución de la matriz de densidad reducida del sistema obtenida mediante la aproximación de Born-Markov y cuya forma explícita en la representación de Schrödinger se ha presentado en el Capítulo 3, ecuación (3.13).

En ambos casos, la matriz de densidad será empleada para calcular las propiedades del arreglo de acuerdo a las expresiones (2.32) y (3.2) para la concurrencia y la polarización respectivamente.

4.3. Discusión

Los principales resultados obtenidos son presentados en esta sección. Primero se mostrarán las propiedades calculadas para el estado base, posteriormente se dará énfasis a los resultados de la dinámica coherente, en especial a la formación de los estados de Bell, y finalmente se analizan los efectos que tiene la temperatura en las propiedades del arreglo de qubits de carga.

4.3.1 Estado estacionario

Para el estado base del sistema aislado se calculan la polarización, la concurrencia y las probabilidades de los estados de Bell en función del potencial externo estático, V_a para un tuneleo característico de $t/V = 0.03$.

La polarización se muestra en la Figura 4.2 (a), en donde puede observarse que para valores negativos de V_a el sistema presenta una polarización negativa, $P = -1$, que se hace nula cuando $V_a \approx 0$ y para V_a positivo cambia a $P = +1$. Esto nos indica que para $V_a < 0$, la carga se encuentra distribuida en los sitios 2 y 4 del arreglo, estado $|10\rangle$, y se invierte para valores positivos del potencial externo, dando lugar al estado $|01\rangle$.

Este comportamiento refleja que valores negativos del potencial disminuyen la energía del segundo punto cuántico, ocasionando que la carga tienda a localizarse en dicho sitio. Este efecto, aunado a la repulsión Coulombiana, explica que el estado base se encuentre principalmente en el estado $|10\rangle$ en dicho régimen. El efecto contrario ocurre para $V_a > 0$, por lo que el estado base se encuentra principalmente en el estado $|01\rangle$, como se observa en los esquemas de carga incluidos en la Figura 4.2 (a). El caso $V_a \approx 0$ con polarización nula indica que la carga está distribuida en los cuatro puntos cuánticos.

En la Figura 4.2 (b) se muestra la concurrencia en función de la diferencia de potencial externa, en donde nuevamente se observan tres regímenes que dependen de V_a . La localización de la carga en un estado no entrelazado para valores positivos y negativos de V_a se reflejan en una concurrencia muy pequeña (casi nula) en dichas regiones, mientras que existe un máximo para $V_a \approx 0$. Este pico en ausencia del campo eléctrico indica que la generación estacionaria de entrelazamiento se ve favorecida por un cierto grado de deslocalización de la carga producida por el tuneleo.

Nuevamente analizamos la contribución que tienen los estados de Bell en el comportamiento de la concurrencia. En la Figura 4.2 (c) se aprecia que para valores tanto positivos como negativos de V_a , los estados $|\Psi^+\rangle$ y $|\Psi^-\rangle$ presentan la mayor probabilidad la cual es muy similar para ambos y que de acuerdo a la ecuación (3.3) dan lugar a una concurrencia muy pequeña.

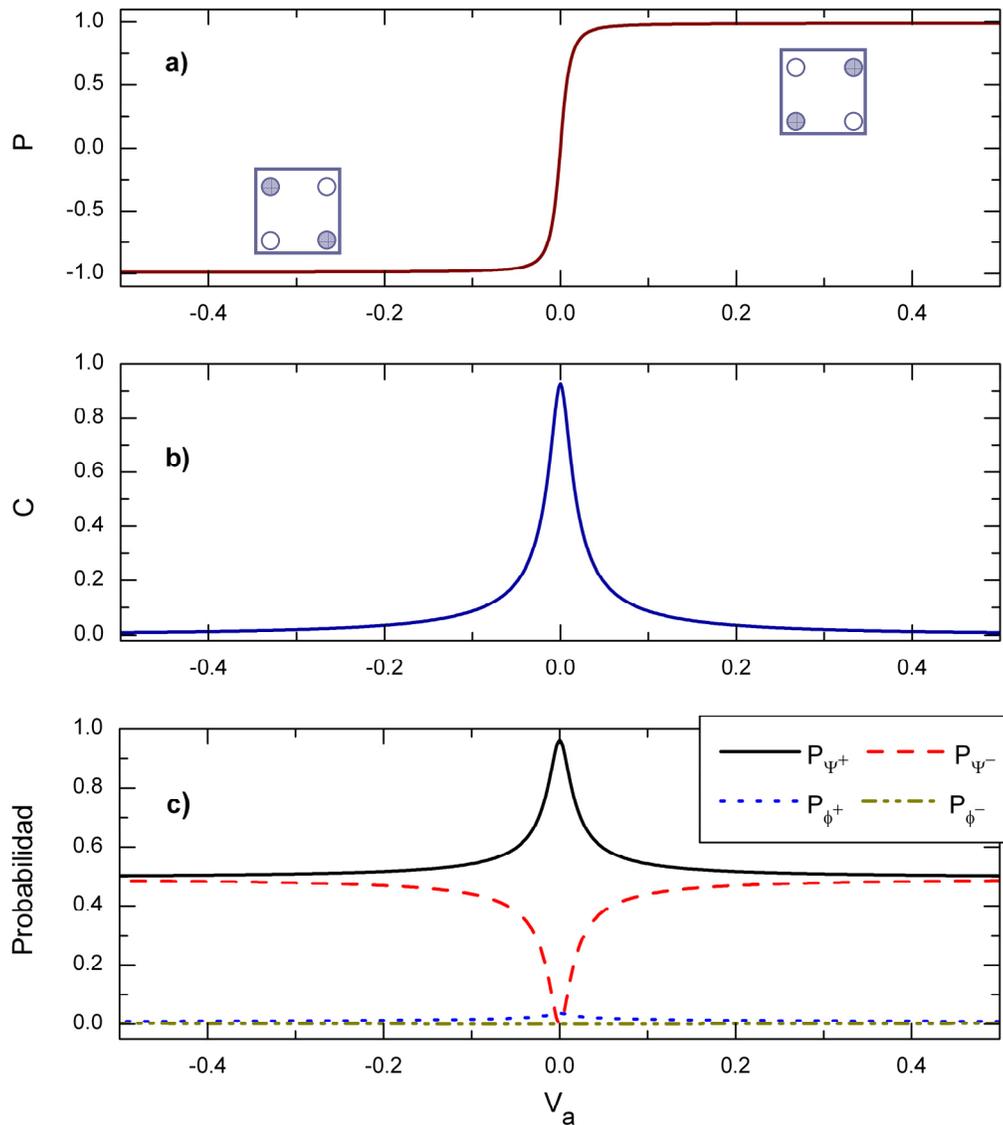


Figura 4.2. Propiedades del estado base del arreglo en presencia de un potencial externo estático (a) polarización, (b) concurrencia y (c) probabilidad de encontrar al sistema en los estados de Bell. Parámetros típicos empleados: $t/V = 0.03$, $a = 100$ nm.

Para comprender el máximo en la concurrencia para $V_a \approx 0$ notemos que el estado base tiene la forma $|\psi\rangle = \sqrt{2}\alpha|\phi^+\rangle + \sqrt{2}\beta|\Psi^+\rangle$, que se obtiene de la diagonalización exacta del problema de eigenvalores y en donde las amplitudes de probabilidad dependen del tuneo en la

forma $\alpha = 4(t/V)/a$, $\beta = (2 - \sqrt{2} + b)/2a$ con $a = \sqrt{b^2 + (2 - \sqrt{2})b}$ y $b = \sqrt{6 - 4\sqrt{2} + 64(t/V)^2}$.

Para $t/V = 0.03$, $|\beta|^2 > |\alpha|^2$ y por tanto el sistema se encuentra en el estado $|\Psi^+\rangle$ con una alta probabilidad, aunque también el estado $|\phi^+\rangle$ se encuentra presente (Figura 4.2 (c)). Este comportamiento se refleja en un valor muy alto para la concurrencia, $C = 0.92$, de acuerdo a la ecuación (3.3) la cual para este caso en particular toma la forma

$$C = |P_{\Psi^+} - P_{\phi^+}| = 2|\beta^2 - \alpha^2| \quad (4.2)$$

Para analizar el efecto del tuneleo en la generación de entrelazamiento entre los qubits de carga, en la Figura 4.3 se grafica la concurrencia en función del tuneleo y del potencial externo. Dichos resultados muestran que la concurrencia disminuye conforme se incrementa el tuneleo, observándose además un ensanchamiento en el pico de concurrencia.

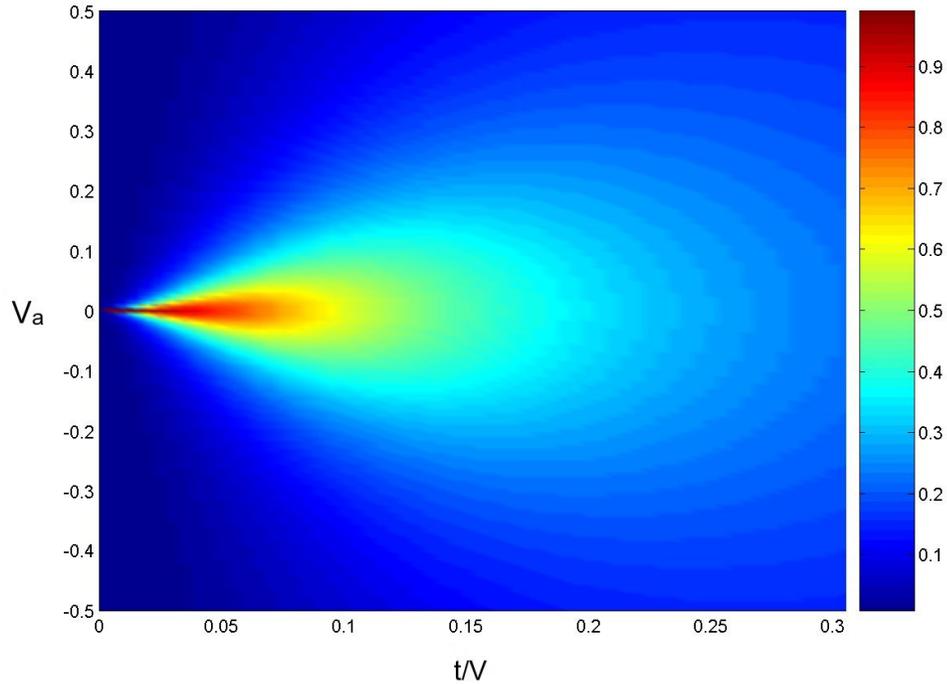


Figura 4.3. Mapa de color de la concurrencia en función del potencial externo y del tuneleo. Nótese que la concurrencia disminuye conforme se incrementa el tuneleo mientras su pico máximo se hace más ancho para $V_a \neq 0$

Este comportamiento puede entenderse si tenemos en cuenta que el aumento en la amplitud de tuneo produce una mayor deslocalización de carga entre los puntos cuánticos del arreglo, la cual puede sobrepasar el efecto de localización producido por el potencial para valores pequeños de éste (en valor absoluto), ocasionando un decaimiento suave de la concurrencia para $V_a \approx 0$ y por tanto el ensanchamiento mencionado.

Adicionalmente, de la expresión obtenida para el estado base en el régimen $V_a \approx 0$ se observa que conforme se incrementa el tuneo también aumenta la probabilidad del estado $|\phi^+\rangle$, ocasionando la disminución en la concurrencia de acuerdo con la ecuación (4.2). Esto nos indica que en ausencia del potencial eléctrico, el tuneo y la interacción electrostática entre los electrones del arreglo dominan la formación de entrelazamiento y del estado de Bell $|\Psi^+\rangle$, mientras que en el régimen $V_a \neq 0$ el potencial es el parámetro dominante al localizar la carga en estados separables.

4.3.2 Dinámica coherente

Ahora examinaremos la dinámica del arreglo de qubits de carga aislado del ambiente cuando el potencial eléctrico es aplicado linealmente en el tiempo con la forma $V_a(t) = V_{a0}(t - \tau)$. Se demostrará que es posible obtener cada uno de los estados de Bell mediante la elección adecuada de las condiciones iniciales y del control del potencial.

La evolución temporal de la matriz de densidad del arreglo, obtenida mediante la solución de la ecuación de Liouville, se emplea para calcular la concurrencia, la distribución de carga en los puntos cuánticos así como la probabilidad de obtener los estados de Bell en función del tiempo. Como ejemplo, en la Figura 4.4 presentamos dichas propiedades empleando el estado $|01\rangle$ como condición inicial con una amplitud de tuneo de $t/V = 0.03$ y para un potencial que toma valores desde 0.375 hasta -0.375 meV.

La Figura 4.4 (a) muestra que la polarización inicial del sistema ($P \approx +1$) se mantiene hasta alcanzar el tiempo en el que el potencial es cero, dado por $\tau = 7.5$ ns, en donde cambia drásticamente al valor opuesto, $P \approx -1$, indicando que el sistema ha invertido su configuración de carga encontrándose principalmente en el estado $|10\rangle$.

Debido a que la condición inicial corresponde a un estado no entrelazado, la concurrencia comienza en cero y se incrementa conforme el potencial disminuye, presentando un máximo al tiempo τ , como se puede apreciar en la Figura 4.4 (b). A tiempos mayores, y conforme el potencial se vuelve más negativo, la concurrencia disminuye hasta presentar valores cercanos a cero debido a que se alcanza nuevamente un estado separable.

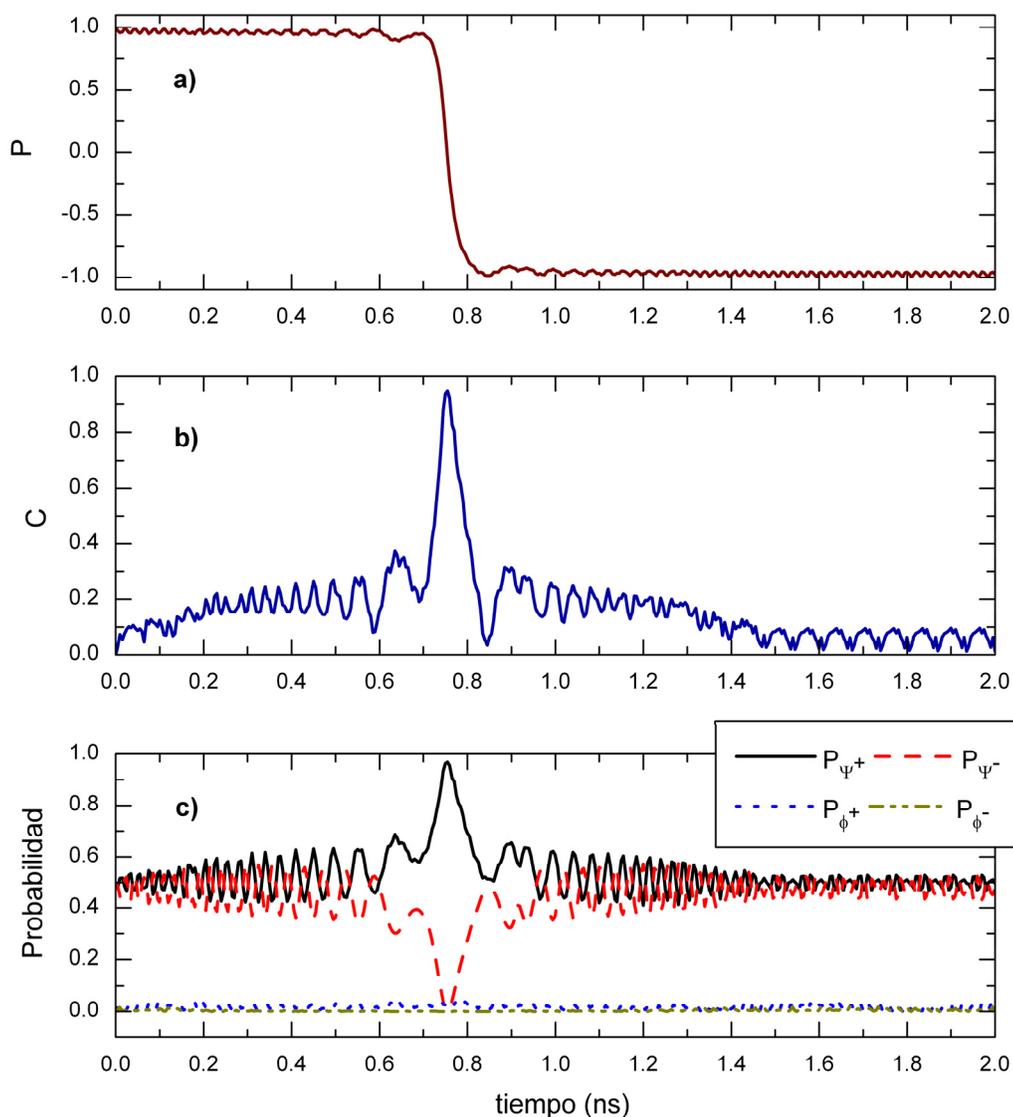


Figura 4.4. Propiedades dinámicas obtenidas mediante un potencial que cambia linealmente en el tiempo desde 0.375 hasta -0.375 meV. a) Polarización, b) concurrencia, c) probabilidades de los estados de Bell. Nuevamente $t/V = 0.03$ y $a = 100$ nm.

El mismo tipo de comportamiento se observa en las probabilidades de los estados de Bell, Figura 4.4 (c). Si se tiene en cuenta que los estados de la base pueden escribirse en función de los estados de Bell, entonces la condición inicial está dada por $|01\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle)$; es decir, que el sistema comienza en una combinación simétrica de los estados $|\Psi^+\rangle$ y $|\Psi^-\rangle$. Conforme V_a se acerca a cero, $|\Psi^+\rangle$ se ve favorecido, dando lugar al máximo en la concurrencia para $V_a(\tau) = 0$. Para $t > \tau$, la “inversión” de la carga da origen a una combinación $\propto (|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle)$ que es proporcional al estado $|10\rangle$ (no entrelazado). De nuevo puede apreciarse que un cierto grado de deslocalización de carga ocasionada por el tuneo y la interacción de Coulomb, promueve la formación de un estado de Bell preferencial para $V_a \approx 0$.

Es importante notar que todas las propiedades descritas presentan oscilaciones debidas a la coherencia inducida tanto por el tuneo entre puntos cuánticos como por el campo eléctrico.

Para aplicaciones potenciales en información cuántica y en comunicación cuántica, es necesario mantener el entrelazamiento entre los qubits por lo que nos enfocaremos en controlar la concurrencia y la probabilidad de los estados de Bell en un valor alto mediante la manipulación del potencial externo, el cual se aplicará sobre el segundo qubit hasta lograr que el sistema alcance el máximo para la concurrencia. Si a partir de ese momento dicho potencial es “removido”, se logrará entonces que tanto la concurrencia como la probabilidad del estado de Bell obtenido evolucionen en el tiempo oscilando al rededor de sus valores máximos. Por consiguiente, consideraremos que el campo externo tiene la forma $V_a(t) = V_{a0}(t - \tau)$ para $t < \tau$, y $V_a(t) = 0$ para $t \geq \tau$.

En este esquema de control se calcularon la polarización, la concurrencia y la probabilidad de los estados de Bell en función del tiempo y para diferentes condiciones iniciales no entrelazadas (las cuales corresponden a los cuatro estados base). La polarización tiene valores bien definidos para dichos estados iniciales: $P = 0$ para los estados $|00\rangle$ y $|11\rangle$, $P = +1$ para $|01\rangle$ y $P = -1$ para $|10\rangle$ sin embargo, en este esquema de control todos los casos estudiados alcanzan $P = 0$ y se mantienen oscilando en ese valor debido a que se remueve el potencial para tiempos $t > \tau$.

Los resultados mostrados en la Figura 4.5(a) demuestran que se consigue el control de la concurrencia en su valor más alto, mientras que en la Figura 4.5(b) se observa que es posible obtener un estado de Bell con la mayor probabilidad en cada caso.

En específico, para el estado inicial $|11\rangle$, en el que los electrones se localizan en la parte superior del arreglo, se obtiene el estado $|\Psi^-\rangle$ con una probabilidad $P_{\Psi^-} \approx 0.88$. A partir de la condición inicial $|10\rangle$ se obtiene el estado $|\phi^-\rangle$ con $P_{\phi^-} \approx 0.88$, mientras que la evolución temporal del estado $|01\rangle$ (que corresponde a la carga distribuida en los sitios 1 y 3) da origen al

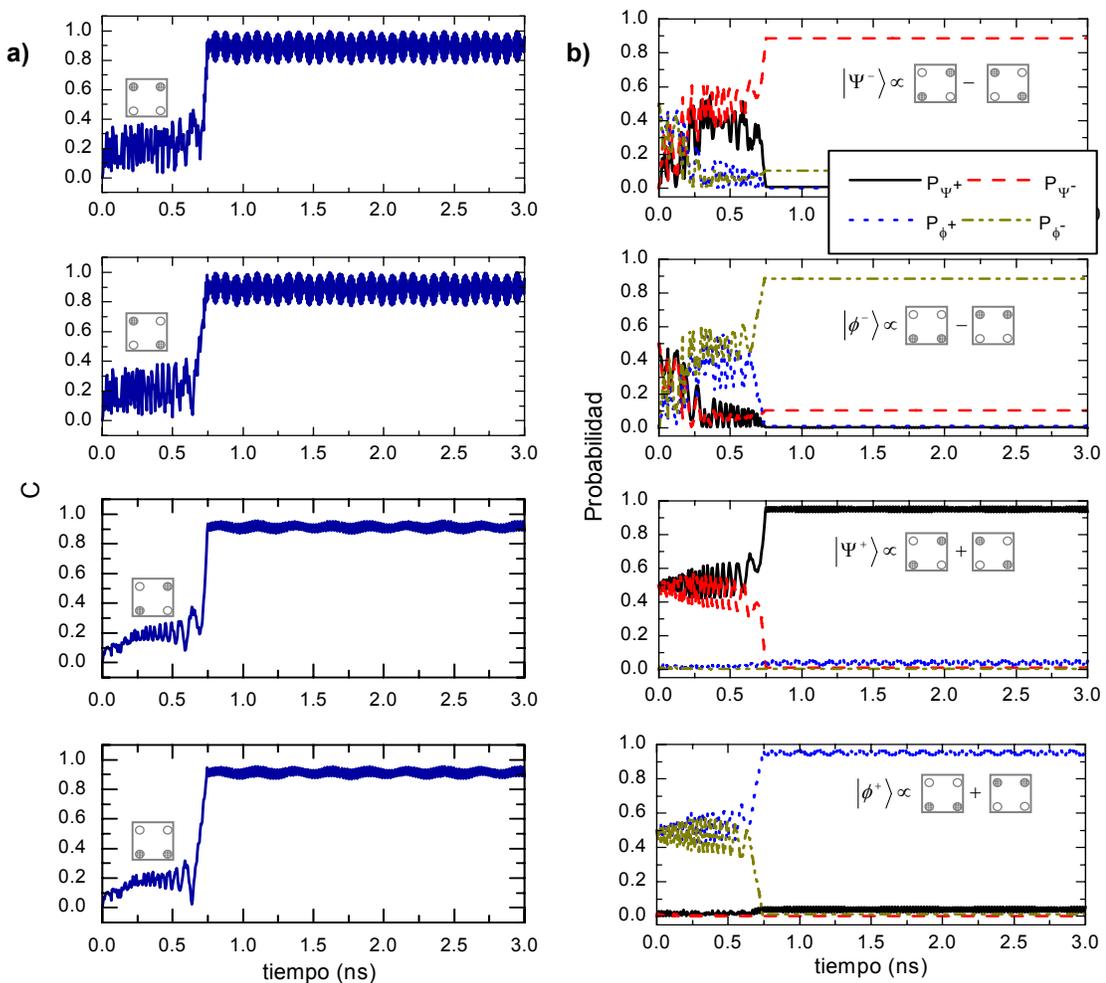


Figura 4.5. Generación y control dinámicos de la concurrencia y de estados de Bell con un potencial que cambia linealmente en el tiempo, a partir de diferentes condiciones iniciales no entrelazadas: $|11\rangle$, $|10\rangle$, $|01\rangle$ y $|00\rangle$. En este caso, $V_a(t) = [0.375, 0]$ meV

estado $|\Psi^+\rangle$ con una certeza del 95%; finalmente, el estado inicial $|00\rangle$ permite obtener $|\phi^+\rangle$ con $P_{\phi^+} \approx 0.95$. En todos los casos, la concurrencia oscila alrededor de 0.9.

Puede advertirse que este proceso electrostático predice teóricamente la generación de los estados de Bell en total acuerdo con su correspondiente “tabla de verdad”, mostrada en el Capítulo 2.

Con objeto de comprender mejor el mecanismo relacionado con la obtención de dichos estados, analizamos la evolución temporal de los estados de la base. En las Figuras 4.6 y 4.7 presentamos dos ejemplos, que corresponden a las condiciones iniciales $|10\rangle$ y $|01\rangle$ respectivamente (las cuales, de acuerdo a la tabla de verdad, dan origen a los estados $|\phi^-\rangle$ y $|\Psi^+\rangle$).

Para el primer caso se observa que la probabilidad del estado $|10\rangle$ disminuye mientras se incrementa la de $|11\rangle$ hasta que ésta excede a la primera en un tiempo $t \approx 0.2$. Cuando se remueve el potencial, casi se anula la probabilidad de encontrar el estado $|10\rangle$ mientras que la de $|00\rangle$ se incrementa y para tiempos $t \geq \tau$ el sistema permanece oscilando coherentemente entre $|00\rangle$ y $|11\rangle$, resultando en el estado $|\phi^-\rangle$. Debido a que la probabilidad de los estados $|10\rangle$ y $|01\rangle$ son muy pequeñas, el comportamiento final del arreglo se asemeja a oscilaciones de Rabi en un sistema de dos niveles, $|00\rangle$ y $|11\rangle$.

Un comportamiento inverso a éste se presenta cuando se emplea el estado inicial $|11\rangle$, que no se muestra gráficamente. En este caso, la probabilidad de $|10\rangle$ se incrementa en el tiempo hasta hacerse predominante para $0.2 \lesssim t \lesssim \tau$, y posteriormente disminuye mientras se incrementa la $|01\rangle$ dando lugar al estado de Bell $|\Psi^-\rangle$.

Por otra parte, para la condición inicial dada por el estado $|01\rangle$ (Figura 4.7), el sistema permanece en éste con la mayor probabilidad hasta alcanzar el tiempo τ . A partir de ese momento se presenta una contribución del estado $|01\rangle$, y el sistema permanece oscilando entre ambos, obteniéndose el estado $|\Psi^+\rangle$. El mismo tipo de comportamiento dinámico se obtiene del estado inicial $|00\rangle$ mediante el cual se obtiene una combinación coherente de $|00\rangle$ y $|11\rangle$ y

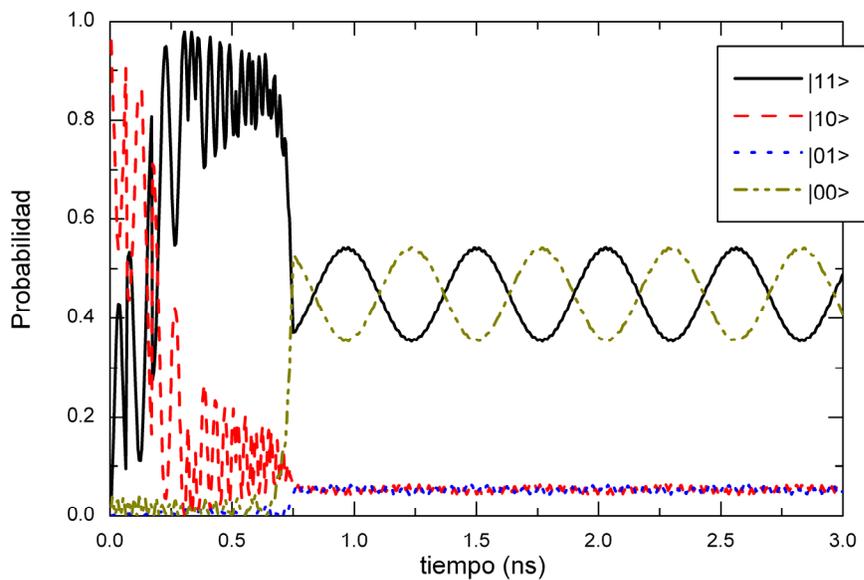


Figura 4.6. Evolución temporal de la probabilidad de los cuatro estados base para la condición inicial $|10\rangle$ y $V_a(t) = [0.375, 0]$ meV. El cambio en la probabilidad de los estados $|11\rangle$ y $|10\rangle$ en $t \approx 0.2$ ns se asemeja a la acción de la compuerta CNOT. Se han empleado los parámetros típicos para la amplitud del tuneo y para la distancia entre puntos cuánticos

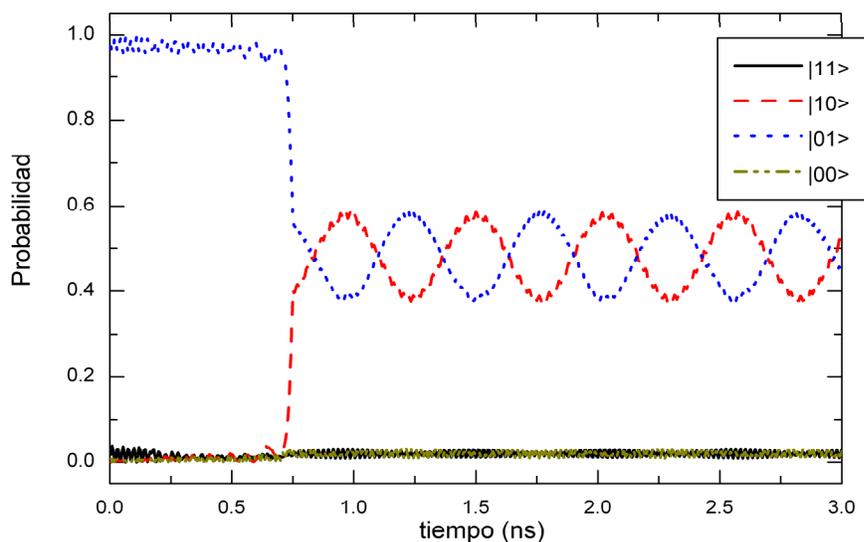


Figura 4.7. Evolución temporal de la probabilidad de los cuatro estados base para la condición inicial $|01\rangle$, $V_a(t) = [0.375, 0]$ meV y se utilizan los mismos parámetros que en la Figura 4.6

por tanto el estado $|\phi^+\rangle$.

De esta discusión podemos inferir que la dinámica del sistema a $t \approx 0.2$ ns tiene un efecto similar a la operación de la compuerta cuántica CNOT la cual, como se ha mencionado en el Capítulo 2, invierte el estado del segundo qubit si el primero es 1 (correspondiendo con la disminución de la probabilidad del estado $|10\rangle$ mientras se incrementa la de $|11\rangle$, Figura 4.6) y lo deja invariante si el primer qubit es 0 (la probabilidad del estado $|01\rangle$ se mantiene oscilando coherentemente a tiempos $t \lesssim \tau$, Figura 4.7). Por otra parte, a $t \gtrsim \tau$ el sistema simula el efecto de una operación Z realizada sobre el primer qubit sumada con el efecto de X en ambos qubits (las cuales se han mencionado en la sección 2.2), hasta una fase, originando la combinación de estados de carga que dan lugar a cada estado de Bell.

4.3.3 Dinámica disipativa

Los efectos disipativos se incluirán únicamente en el caso en el que se logra el control de la concurrencia en un valor alto y de un estado de Bell preferencial; es decir, cuando el potencial eléctrico varía en el tiempo desde 0.375 hasta 0 meV.

Evaluamos los efectos de la temperatura en la polarización, la concurrencia y probabilidades de los estados de Bell como función del tiempo para un caso típico que corresponde a la condición inicial $|01\rangle$ con $t/V = 0.03$.

La dependencia temporal de la concurrencia para diferentes temperaturas es mostrada en la Figura 4.8, en donde puede observarse para temperaturas muy pequeñas ($\approx 1K$) presenta valores altos, pero se deteriora conforme la temperatura se incrementa.

Los efectos de decoherencia producidos por la interacción del arreglo de qubits con el baño de fonones originan que las transiciones entre estados tiendan a igualarse conforme se incrementa la temperatura, como se aprecia en la ecuación (3.16). Esto ocasiona una distribución de carga similar en cada punto cuántico y consecuentemente una despolarización más rápida del arreglo y la pérdida de un estado de Bell preferencial. En la Figura 4.9 se observa cómo a tiempos mayores que τ la probabilidad del estado $|\Psi^+\rangle$ disminuye considerablemente, desde $P_{\Psi^+} \approx 0.95$ para el sistema cerrado hasta $P_{\Psi^+} \approx 0.47$ para $T = 3T_1$

mientras que los estados $|\Psi^-\rangle$, $|\phi^+\rangle$ y $|\phi^-\rangle$ que no contribuían en la dinámica coherente, aparecen ahora con probabilidades de hasta $P_{\Psi^-} \approx 0.23$, $P_{\phi^+} \approx 0.15$ y $P_{\phi^-} \approx 0.15$ para $T = 3T_1$.

Debe notarse que las oscilaciones que se presentaban en las propiedades coherentes disminuyen con la temperatura debido al decaimiento de las coherencias en la matriz de densidad reducida del sistema, ecuación (A.19).

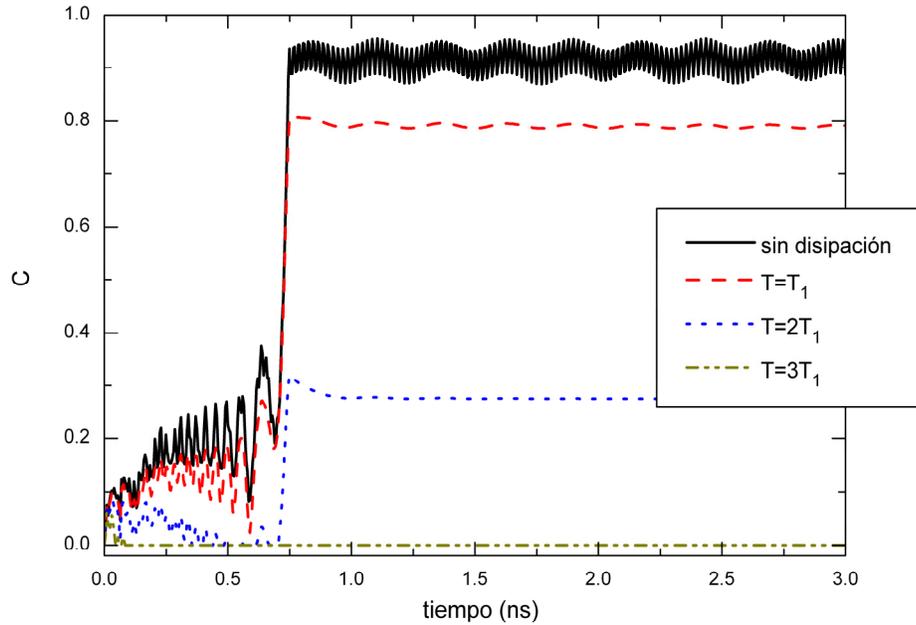


Figura 4.8. Dinámica disipativa de la concurrencia para $V_a(t)=[0.375,0]$ meV con el estado $|10\rangle$ como condición inicial. La concurrencia presenta valores altos a baja temperatura pero se deteriora conforme ésta se incrementa. Parámetros empleados: $t/V = 0.03$, $T_1 \sim 1K$ y $D^2 = 0.05$

Para tiempos muy largos, es decir $t \gg \tau$, el sistema llega a una condición estacionaria que no depende del estado inicial. Debido a que el tuneo constituye un mecanismo dominante para la distribución de carga en ausencia del potencial externo, en la Figura 4.10 presentamos la concurrencia asintótica como función de la temperatura, para diferentes amplitudes de tuneo. Nuestros resultados muestran que la concurrencia disminuye conforme se incrementa el tuneo, conservando un valor considerable a temperaturas menores a $1K$ pero decae rápidamente conforme se incrementa la temperatura hasta alcanzar la temperatura crítica, T_c .

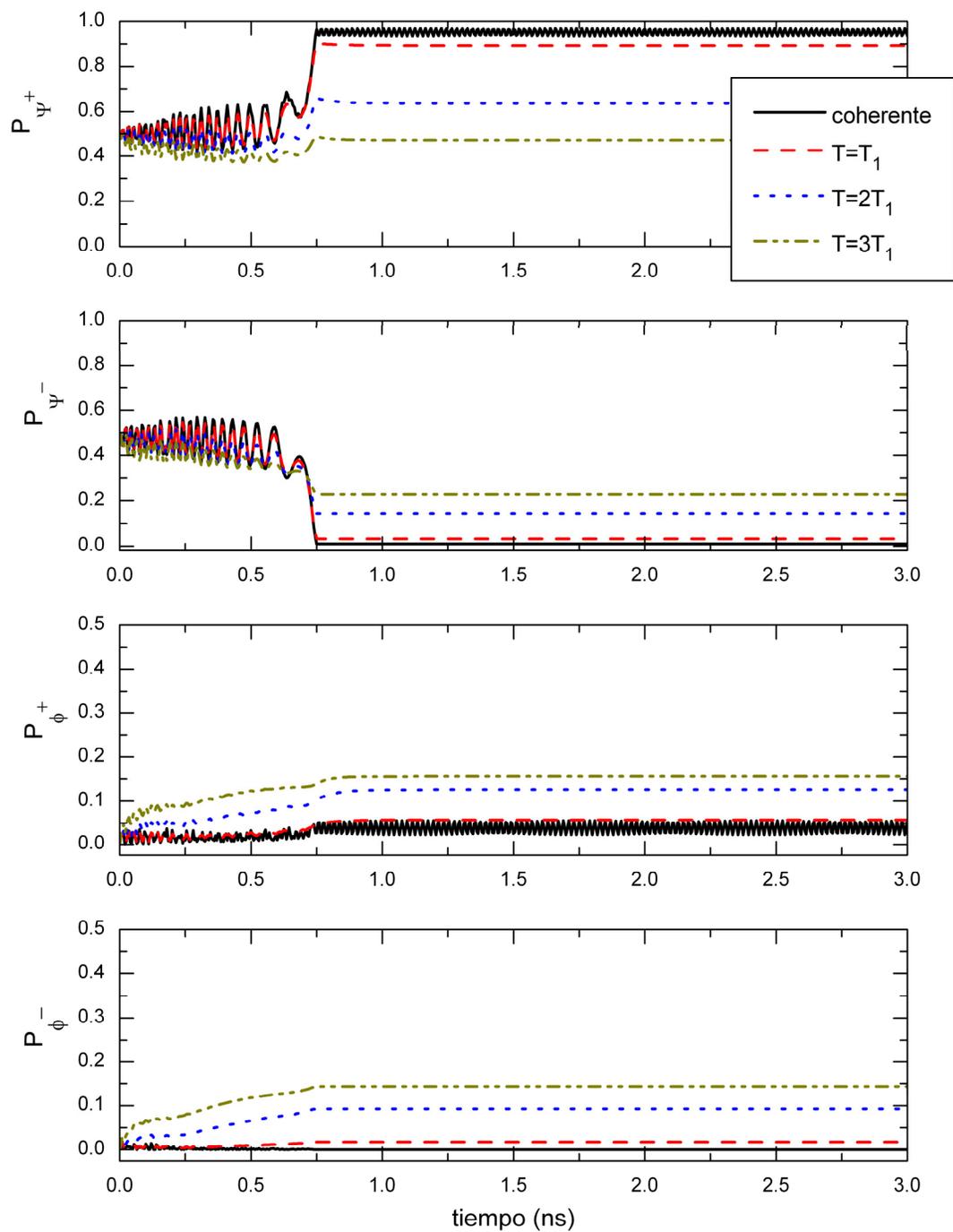


Figura 4.9. Efectos de la temperatura en la evolución temporal de los estados de Bell (mismos parámetros que los empleados en la Figura 4.8)

En particular, para la amplitud de tuneleo empleada típicamente en esta parte del trabajo se obtiene $T_c = 2.78 T_1$; al emplear diferentes amplitudes puede notarse (Figura 4.10) que dicha temperatura se incrementa débilmente conforme el tuneleo aumenta.

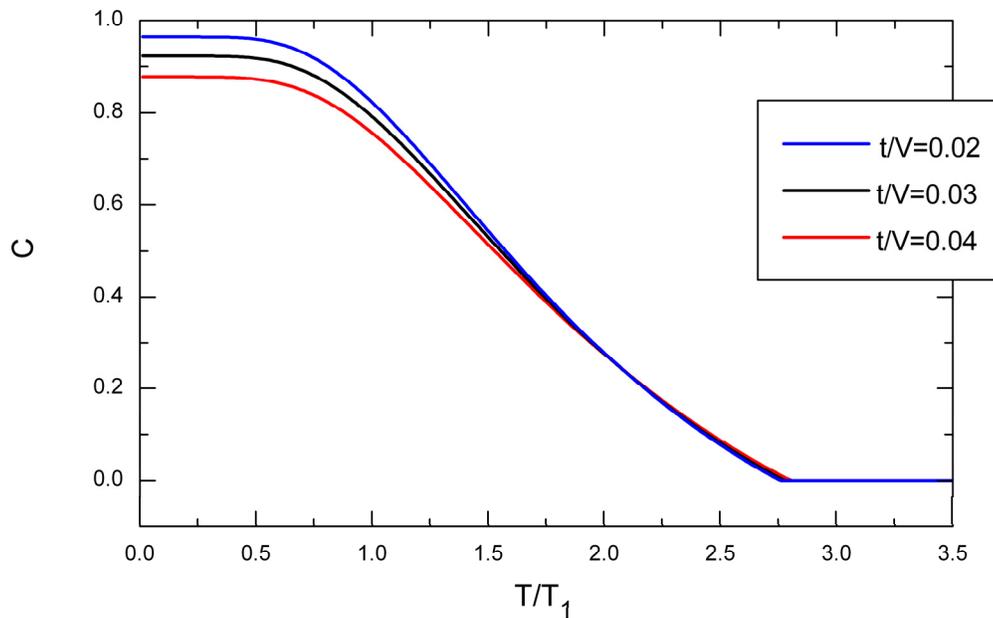


Figura 4.10. Comportamiento asintótico de la concurrencia para diferentes amplitudes de tuneleo. La concurrencia se anula a una temperatura finita T_c que para todos los casos es $2.5 < T_c < 3K$ ($T_1 \sim 1K$)

El comportamiento de la concurrencia nos indica que a bajas temperaturas el tuneleo es el parámetro esencial en la formación de estados entrelazados, promoviendo transiciones entre los estados accesibles al sistema. Por otra parte, para $T \geq T_c$, el proceso de equilibración inducido por el baño origina una matriz de densidad reducida diagonal cuya concurrencia es cero (ecuación 2.32) a una temperatura finita, en acuerdo con el teorema dado por Fine et al., (2005).

A manera de resumen, en esta parte de la tesis hemos demostrado que en un arreglo de dos qubits de carga definidos en dobles puntos cuánticos, es posible obtener estados entrelazados y en específico los estados de Bell tanto de forma estacionaria como dinámica mediante la aplicación de un potencial externo.

De forma particular, se logró la generación dinámica y el control coherente de cada uno de los estados de Bell a partir de condiciones iniciales no entrelazadas y mediante la manipulación de dicho potencial.

Adicionalmente se consideró la decoherencia introducida por un baño de fonones en equilibrio termodinámico al evaluar los efectos de la temperatura en la concurrencia y en la formación de los estados de Bell. Se encontró que el valor óptimo de la concurrencia y de las probabilidades de dichos estados se mantienen a muy bajas temperaturas (del orden de $1K$) pero se ven afectados para temperaturas más altas. La concurrencia entre los qubits se pierde completamente a una temperatura finita que depende de la amplitud del tuneo de los electrones entre puntos cuánticos vecinos.

Los avances en las tecnologías que permiten la construcción y manipulación de los puntos cuánticos a través de medios electrostáticos permiten proponer a este arreglo de qubits de carga como un candidato prometedor para la futura implementación física de los estados de Bell a bajas temperaturas. Adicionalmente, puede servir como una base para la comprensión de las compuertas teóricas propuestas para el mismo fin.

Capítulo 5

Generación de entrelazamiento entre dos qubits de carga en dobles puntos cuánticos mediada por el efecto de un baño disipativo común

Introducción

En esta parte del trabajo estudiamos la generación estacionaria de entrelazamiento entre dos qubits de carga no interactuantes, debida a su acoplo con un baño bosónico común. Con objeto de tener una mayor comprensión de los efectos de decoherencia en la formación de estados entrelazados, consideraremos el régimen de acoplo fuerte con el baño disipativo. En este caso, la obtención de la ecuación maestra para la matriz de densidad reducida no puede tratarse perturbativamente, por lo que emplearemos la transformación de polarón que se ha descrito brevemente en el Capítulo 2. Debido a que en este tipo de acoplamiento se han estudiado las propiedades de transporte en un doble punto cuántico, consideraremos además que uno de los qubits se encuentra abierto a contactos de electrones, efecto que se modelará con la aproximación Markoviana.

En general se observa que el acoplamiento con el baño ocasiona una interacción indirecta entre los qubits, que se refleja en la formación de estados entrelazados aunque en un grado menor que para los sistemas estudiados anteriormente y en los que no se obtiene algún estado de Bell preferencial. La concurrencia, la distribución de carga en el arreglo de puntos cuánticos así como la probabilidad de obtener cada uno de los estados de Bell se han calculado principalmente en función de la magnitud del acoplamiento con el baño.

5.1. Entrelazamiento inducido por disipación

En diferentes estudios tanto experimentales como teóricos, incluyendo los problemas que se han presentado anteriormente en este trabajo de tesis, se ha demostrado que la decoherencia destruye el entrelazamiento generado entre dos sistemas cuánticos, ya que implica la pérdida de información contenida en el sistema (Nicolosi et al., 2004). Este efecto es debido, en parte, a que la interacción de un qubit con un baño disipativo ocasiona que éste se entrelace al baño (Costi y McKenzie, 2003).

Como ya se ha mencionado, la interacción entre dos qubits (necesaria para la obtención de entrelazamiento y para realizar compuertas cuánticas) se ha conseguido principalmente de forma directa, por ejemplo por el acoplamiento electrostático en qubits de carga o magnético entre dos espines; sin embargo, la generación de interacciones indirectas entre qubits ha atraído la atención recientemente debido a que la distribución de información entre partículas distantes entrelazadas es la base de la criptografía cuántica (Bose et al., 1998; Ekert, 1991), la teleportación (Bennett et al., 1993; Bose et al., 1998), el código súper denso (Bennett y Wiesner, 1992; Bose et al., 1998), de diversos procesos que prueban las desigualdades de Bell (Bose et al., 1998; Braunstein et al., 1992; Clauser et al., 1969; Gisin y Peres, 1992) e incluso de ciertos pasos en algoritmos de computación cuántica, por lo que se espera que el entrelazamiento no únicamente entre dos sistemas, sino en tres o más, tenga también diversas aplicaciones (Bose et al., 1998).

Por tanto, la formación de entrelazamiento entre dos sistemas cuánticos que nunca han interactuado es un tema de interés en la actualidad, que se ha estudiado de diferentes formas. Por ejemplo, para sistemas de varias partículas se ha analizado un procedimiento llamado “entrelazamiento por intercambio” (Bose et al., 1998, Lee et al., 2005; Pan et al., 1998; Zou et al., 2006; Zukowski et al., 1993) mediante el cual dos partículas que pertenecen a dos pares entrelazados independientes, se entrelazan por la interacción de las otras dos partículas (una de cada par). Sin embargo, la interacción con un ambiente afecta cada uno de los pasos de entrelazamiento en este tipo de procesos.

Existe otra forma indirecta de generar correlaciones cuánticas en la que el entrelazamiento se transfiere de un sistema a otro (Paternostro et al., 2004), proceso que puede realizarse por ejemplo, a través de su interacción con un tercer sistema. Este proceso permitió considerar la posibilidad de obtener entrelazamiento entre dos qubits, inducido por el ambiente en un sistema cuántico abierto (Kraus y Cirac, 2004; Jun-Gang et al., 2006; Nicolosi et al., 2004; Paternostro et al., 2004a-c; 2004, Zou et al., 2006).

De esta manera, se ha obtenido entrelazamiento entre dos o más qubits que no presentan un acoplamiento directo pero interactúan con un ambiente común. La mayor parte de estos estudios consideran que el ambiente está formado por uno o un número reducido de grados de libertad, como por ejemplo uno o unos cuantos modos electromagnéticos en una cavidad electrodinámica (Jun-Gang et al., 2006; Kraus y Cirac, 2004; Paternostro et al., 2004 a-c;

Plenio et al., 1999; Plenio y Huelga, 2002; Schneider y Milburn, 2002; Zheng y Guo, 2000) o un oscilador armónico que representa un modo de un ambiente térmico (Kim et al., 2002; Oh y Kim, 2006). Sin embargo, Braun (2002) determinó que este tipo de entrelazamiento inducido también puede conseguirse cuando el ambiente está constituido por un número muy grande de grados de libertad, concretamente los que componen a un baño térmico de bosones.

Sobre esta base, diversos trabajos han estudiado el acoplo de dos qubits independientes a un baño fermiónico (Craig et al., 2004; Mozyrsky et al., 2001; Piermarocchi et al., 2002; Privman et al., 1998) y a un baño térmico de bosones (Braun, 2002; Solenov et al., 2005; Solenov et al., 2006; Vorrath y Brandes, 2003) que incluyen estudios Markovianos y no Markovianos y en donde se establece que las correlaciones inducidas pueden existir incluso a temperatura cero (de Pasquale et al., 2005; Solenov et al., 2006).

En específico, para dos qubits basados en puntos cuánticos se ha explorado la generación de correlaciones debidas a la acción de un baño térmico de fonones mediante el empleo tanto de aproximaciones Markovianas (Vorrath y Brandes, 2003) como no Markovianas (Oh y Kim, 2006). En este último caso, se ha calculado el grado de entrelazamiento y se ha propuesto el control de éste mediante variaciones (o “brechas”) en la densidad espectral del baño; sin embargo la descripción del arreglo de qubits se realiza mediante un modelo sencillo del tipo diagonal.

En este Capítulo nos enfocaremos a la generación de entrelazamiento entre los estados electrónicos de dos qubits de carga no interactuantes pero acoplados al mismo baño de fonones en equilibrio térmico, proceso esquematizado en la Figura 5.1. Se incluirá el tuneo entre los estados de carga de cada qubit y se considerará que el arreglo de qubits no es simétrico al permitir el contacto de uno de ellos con dos reservorios de electrones. El baño de fonones y los contactos constituyen a dos sistemas independientes.

Se ha demostrado que un estudio Markoviano es adecuado para representar el acoplo débil de un doble punto cuántico con reservorios (Aguado y Brandes, 2004; Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005; Stoof y Nazarov, 1996), por lo que emplearemos esta aproximación en el acoplo a los contactos. Sin embargo, debido a que el baño constituye la única fuente esperada de entrelazamiento, deseamos conocer sus efectos a todos los órdenes. Por este motivo consideraremos el régimen de acoplo fuerte entre éste y el arreglo y se empleará una aproximación no Markoviana en dicho acoplamiento.

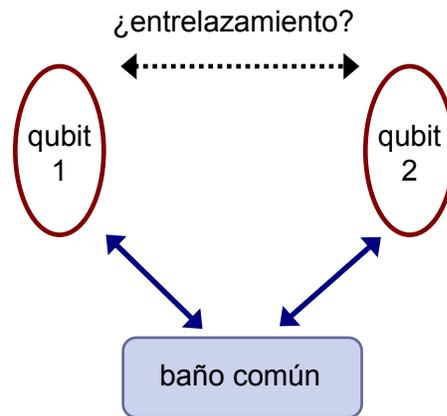


Figura 5.1. Diagrama esquemático de la interacción indirecta entre dos qubits de carga (línea punteada) debido a su acoplamiento con un baño bosónico común (líneas sólidas)

El grado de entrelazamiento entre los qubits se determinará nuevamente mediante el cálculo de la concurrencia. Adicionalmente, se presentarán la distribución de carga en los puntos cuánticos y la probabilidad de obtener cada uno de los estados de Bell en función de la magnitud del acoplamiento con el baño térmico.

5.2. Modelo

Consideramos un arreglo de dos dobles puntos cuánticos paralelos independientes entre sí, acoplados a un mismo baño de fonones en equilibrio termodinámico, que generará interacciones indirectas entre ellos como se verá más adelante. Como se ha mencionado, uno de los dobles puntos se encuentra acoplado a dos reservorios de electrones, permitiendo el paso de carga a través de éste. Nuevamente se permite el tuneo de los electrones en cada doble punto, pero se prohíbe entre ambos, definiendo a un registro de dos qubits de carga. Este modelo se encuentra representado en la Figura 5.2.

El doble punto cuántico cerrado contiene sólo un electrón adicional. Para el doble punto abierto a los contactos consideramos el régimen de fuerte bloqueo Coulombiano, es decir que no se permite la adición de más de un electrón, y se tiene en cuenta el estado en el que ningún electrón ha ingresado, al que nos referiremos como “vacío”.

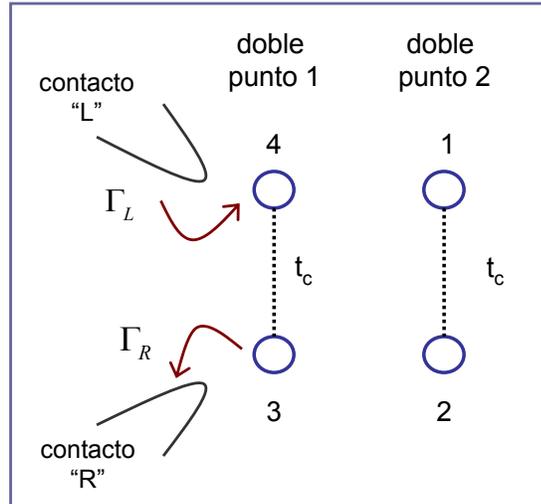


Figura 5.2. El modelo consiste de dos dobles puntos cuánticos desacoplados entre sí, pero acoplados a un baño bosónico común. El tuneleo, t_c , se permite únicamente en cada doble punto y sólo uno de éstos se encuentra abierto a contactos (reservorios) de electrones, en donde Γ_L y Γ_R representan las probabilidades de que un electrón tunelee entre entre éstos y los puntos cuánticos.

Por tanto, a diferencia de los casos estudiados anteriormente, la base en la que trabajaremos está formada por los cuatros estados de dos partículas que hemos manejado ($|1\rangle = |1001\rangle$, $|2\rangle = |0101\rangle$, $|3\rangle = |1010\rangle$ y $|4\rangle = |0110\rangle$), y por dos estados adicionales de una partícula: $|5\rangle = |1000\rangle$ y $|6\rangle = |0100\rangle$ en donde de nueva cuenta la notación $|n_1 n_2 n_3 n_4\rangle$ representa la presencia ($n_i = 1$) o ausencia ($n_i = 0$) de carga en cada punto cuántico del arreglo. La completéz del sistema está dada por $1 = \sum_{k=1}^6 |k\rangle\langle k|$.

La distribución de la carga en cada doble punto puede asociarse con un pseudo espín, por lo que el Hamiltoniano que representa al arreglo de dos qubits de carga puede escribirse en función de los operadores de espín como:

$$H_S = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \varepsilon_i \sigma_z^i + t_c \sigma_x^i \right) \quad (5.1)$$

en donde ε_i es la diferencia de energía entre los puntos cuánticos de cada par ($\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{punto 4}} - \varepsilon_{\text{punto 3}}$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{punto 1}} - \varepsilon_{\text{punto 2}}$), σ_j^i es la j -ésima matriz de Pauli operando en el doble punto i (nótese que para nuestro caso en particular, $N=2$) y t_c representa la magnitud del tuneo del electrón entre puntos cuánticos, que consideramos idéntica para ambos dobles puntos (Aguado y Brandes, 2004; Brandes y Kramer, 1999)

Los reservorios, a los que nos referiremos como “L” y “R,” se modelan como conjuntos de niveles de energía electrónicos definidos por el número cuántico k ,

$$H_{res} = \sum_k \left\{ \varepsilon_k^L c_{k,L}^\dagger c_{k,L} + \varepsilon_k^R c_{k,R}^\dagger c_{k,R} \right\} \quad (5.2)$$

donde $c_{k,p}^\dagger$ y $c_{k,p}$ son los operadores de creación y aniquilación de un electrón en el contacto p con energía ε_k^p (Aguado y Brandes, 2004; Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005).

Como se aprecia en la Figura 5.2, sólo los puntos cuánticos 3 y 4 del arreglo están en contacto con los reservorios. Por tanto, la creación o aniquilación de un electrón en dichos puntos hacia o desde los contactos está definida por los operadores de proyección

$$\begin{aligned} s_L &= |5\rangle\langle 1| + |6\rangle\langle 2| \\ s_R &= |5\rangle\langle 3| + |6\rangle\langle 4| \end{aligned} \quad (5.3)$$

El Hamiltoniano que describe el acoplamiento entre el primer doble punto cuántico y los contactos está dado por

$$V_{S-res} = \sum_k \left\{ V_k^L (c_{k,L}^\dagger s_L + c.c.) + V_k^R (c_{k,R}^\dagger s_R + c.c.) \right\} \quad (5.4)$$

en donde V_k^i determinan la magnitud de la interacción del punto cuántico con el contacto i (Aguado y Brandes, 2004; Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005)

De nueva cuenta consideramos que el baño está formado por un conjunto de osciladores armónicos con frecuencia ω_q , representado por $H_B = \sum_q \hbar \omega_q a_q^\dagger a_q$ (siendo a_q (a_q^\dagger) el operador de aniquilación (creación) de bosones).

Debido a que nuestro interés se centra en investigar la formación de estados entrelazados originada por la acción de los fonones, trabajaremos en el régimen de acoplamiento fuerte entre el arreglo y el baño. La complejidad que ésto implica nos lleva a emplear un Hamiltoniano de interacción electrón-fonón que sea diagonal en las variables del arreglo de puntos cuánticos, es decir

$$V_{SB} = \sum_q \sum_i \gamma_q^i \sigma_z^i (a_q^\dagger + a_q) \quad (5.5)$$

el cual nos indica que el acoplamiento entre ambos subsistemas cambia localmente la energía de los electrones, dependiendo del punto cuántico en el que estén localizados. Además, consideraremos el límite en el que la interacción electrón-fonón, γ_q^i , es idéntica para ambos dobles puntos (Vorrath y Brandes, 2005),

$$\gamma_q^i = \gamma_q \quad (5.6)$$

De esta forma, el Hamiltoniano total que representa al arreglo de dos qubits no interactuantes, acoplados a un baño de fonones y a los dos contactos es

$$H = H_S + H_B + H_{res} + V_{S-res} + V_{SB} \quad (5.7)$$

el cual puede simplificarse mediante el empleo de la transformación de polarón, la cual ha sido descrita brevemente en el Capítulo 2 para un doble punto cuántico y que a continuación extendemos para el arreglo de dos dobles puntos.

5.2.1 Transformación de polarón para dos dobles puntos cuánticos

Como se ha mencionado previamente, este método se ha utilizado de manera exitosa en el estudio de un doble punto cuántico abierto a contactos y acoplado fuertemente a un baño de bosones en equilibrio termodinámico (Aguado y Brandes, 2004; Brandes et al., 2004; Brandes y Kramer, 1999; Vorrath y Brandes, 2005). En este régimen, cada uno de los electrones del arreglo renormalizará su fase debido al tuneo entre dos puntos cuánticos mientras que el baño sufre también los efectos de la interacción.

Para el sistema de dos dobles puntos emplearemos la transformación canónica mencionada en la sección 2.5.2, pero ahora con la forma (Mahan, 2000)

$$\begin{aligned} \bar{A} &= e^S A e^{-S} \\ S &= \sum_i S_i = \sum_i \sum_q \frac{\gamma_q}{\omega_q} \frac{1}{2} \sigma_z^i (a_q^\dagger - a_q) \end{aligned} \quad (5.8)$$

que al ser aplicada a cada uno de los operadores del Hamiltoniano (5.7), permite obtener el Hamiltoniano efectivo

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}_T + \bar{V}_{S-res}, \text{ con} \quad (5.9)$$

$$\bar{H}_0 = \sum_i \frac{1}{2} \varepsilon_i \sigma_z^i - \frac{1}{4} \kappa \sum_{i,j} \sigma_z^i \sigma_z^j + H_B + \bar{H}_{res} \quad (5.9a)$$

$$\bar{H}_T = \sum_i t_c (\sigma_+^i X + \sigma_-^i X^\dagger) \quad (5.9b)$$

en donde σ_\pm^i son los operadores escalera de espín actuando en cada doble punto cuántico y κ es un parámetro que depende de las propiedades del baño, $\kappa = \sum_q \gamma_q^2 / \omega_q$.

Deben notarse tres aspectos importantes en dicho Hamiltoniano que son consecuencia de la transformación. Primero, que el término de interacción electrón-fonón V_{SB} no aparece explícitamente en la ecuación (5.9) facilitando su solución ya que ahora los dos subsistemas, el de dos dobles puntos y el baño, están separados. Segundo, la aparición de un término adicional que corresponde al segundo sumando de la ecuación (5.9.a) el cual renormaliza las diferencias de energía en cada doble punto y que se asemeja a la interacción espín-espín en el modelo de Ising (Ashcroft y Mermin, 1976; Vorrath y Brandes, 2003) la cual tenderá a favorecer estados con la misma distribución de carga en ambos dobles puntos. Finalmente, se observa que aparecen los operadores X y X^\dagger acompañando a los términos de tuneleo en la ecuación (5.9.b), los cuales corresponden a las fases polarónicas mencionadas y que de alguna forma reintroducen la interacción entre los dobles puntos y el baño en esta representación. La forma explícita de estos operadores es:

$$X = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_q \frac{\gamma_q}{\omega_q} (a_a^\dagger - a_q)\right) \quad (5.10)$$

En la obtención del Hamiltoniano (5.9) se ha empleado el lema de Baker-Hausdorff teniendo en cuenta que los operadores σ_z^i son invariantes a la transformación, como se muestra más detalladamente en el apéndice B.

Aunque el Hamiltoniano original se ha simplificado, no es posible obtener una solución exacta para calcular las variables de interés en el sistema. Para ello, obtendremos una ecuación maestra para la matriz de densidad reducida del arreglo de dos dobles puntos cuánticos.

5.2.2 Ecuación maestra

La forma exponencial de las fases de polarón, ecuación (5.10), nos indica que los efectos del baño están incluidos a todos los órdenes, por lo que no es adecuado emplear una aproximación Markoviana respecto a la interacción electrón-fonón.

El primer paso en la obtención de la ecuación maestra consiste en expresar el Hamiltoniano en la representación de interacción, la cual para cualquier operador arbitrario está definida por (Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005)

$$\tilde{O}(t) = e^{i\bar{H}_0 t} \bar{O} e^{-i\bar{H}_0 t} \quad (5.11)$$

Por simplicidad emplearemos la siguiente notación para los operadores de polarón en esta representación: $X_i^{(\dagger)} = e^{iH_0 t} X_i^{(\dagger)} e^{-iH_0 t}$.

Para la matriz de densidad total del arreglo en contacto con los reservorios y con el baño, $\chi(t)$, se define (Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005)

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(t) &= e^{i\bar{H}_0 t} \bar{\chi}(t) e^{-i\bar{H}_0 t} \quad \text{con} \\ \bar{\chi}(t) &= e^{i\bar{H} t} \bar{\chi}(0) e^{-i\bar{H} t} \end{aligned} \quad (5.12)$$

cuya evolución temporal obedece a la ecuación de Liouville-von Neumann,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\chi}(t) = [\tilde{H}_T(t) + \tilde{V}_{S-res}(t), \tilde{\chi}(t)] \quad (5.13)$$

la cual puede reescribirse mediante el empleo de la solución de $\tilde{\chi}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\chi}(t) = -i[\tilde{H}_T(t), \tilde{\chi}(t)] - i[\tilde{V}_{S-res}(t), \tilde{\chi}(0)] - \int_0^t [\tilde{V}_{S-res}(t'), [\tilde{H}_T(t') + \tilde{V}_{S-res}(t'), \tilde{\chi}(t')]] dt' \quad (5.14)$$

(por simplicidad hemos hecho $\hbar = 1$).

5.2.2.1 Aproximación Markoviana para el acoplamiento con los reservorios

Las propiedades de interés se refieren al sistema de dos puntos cuánticos, por lo que primero calcularemos la matriz de densidad reducida del sistema de puntos cuánticos + baño de fonones como

$$\tilde{\rho}(t) = Tr_{res} \{ \tilde{\chi}(t) \} \quad (5.15)$$

en donde la traza parcial se realiza sobre los estados de los reservorios (res).

Considerando que la matriz de densidad reducida del sistema de dobles puntos + fonones y la de los reservorios se factorizan a $t = 0$ (Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005), el término lineal en \tilde{V}_{S-res} de la ecuación (5.14) se anula al calcular la traza, por lo que la ecuación de evolución toma la forma

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -i[\tilde{H}_T(t), \tilde{\rho}(t)] - Tr_{res} \int_0^t [\tilde{V}_{S-res}(t'), [\tilde{V}_{S-res}(t'), \tilde{\chi}(t')] dt' \quad (5.16)$$

El segundo término del lado derecho se encuentra ya a segundo orden en el acoplamiento con los reservorios, por lo que consideraremos ahora la aproximación de Born para todo tiempo $t' > 0$, $\tilde{\chi}(t') \approx \tilde{\rho}(t') \otimes \rho_{res}(0)$, ecuación (2.40), en donde $\rho_{res}(0)$ es la matriz de densidad de los contactos, los cuales se consideran en equilibrio termodinámico, ecuación (2.39).

En el límite de “voltaje infinito” entre los reservorios (Brandes, 2005; Gurvitz y Prager, 1996; Stoof y Nazarov, 1996), un electrón puede ingresar al primer doble punto cuántico únicamente desde el contacto “L” y puede salir únicamente por el contacto “R”. Si además consideramos la aproximación de Markov, se obtiene la siguiente ecuación para la evolución temporal de la matriz de densidad reducida del arreglo de dos dobles puntos cuánticos + baño de fonones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = & -i[\tilde{H}_T(t), \tilde{\rho}(t)] \\ & - \frac{\Gamma_L}{2} \{ \tilde{s}_L(t') \tilde{s}_L^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') - 2 \tilde{s}_L^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_L(t') + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_L(t') \tilde{s}_L^\dagger(t') \} \\ & - \frac{\Gamma_R}{2} \{ \tilde{s}_R^\dagger(t') \tilde{s}_R(t') \tilde{\rho}(t') - 2 \tilde{s}_R(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_R^\dagger(t') + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_R^\dagger(t') \tilde{s}_R(t') \} \end{aligned} \quad (5.17)$$

En ésta, Γ_L y Γ_R son las razones de tuneleo de un electrón del contacto “L” hacia el punto cuántico 4 y del punto 3 al contacto “R”, respectivamente, dadas por (Brandes, 2005; Stoof y Nazarov, 1996):

$$\Gamma_i = 2\pi \sum_k |V_k^i|^2 \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_k^i), \quad i = L, R \quad (5.18)$$

(los detalles de la derivación de las ecuaciones (5.17) y (5.18) se presentan en el apéndice B)

En contraste a los problemas anteriores, en los que se estudió a los qubits de carga acoplados débilmente al baño de fonones, podemos trabajar con la ecuación de movimiento (5.17) para obtener los elementos de matriz del operador de densidad del arreglo de puntos cuánticos sin tener que regresar a la representación de Schrödinger, como se expone en la siguiente sección.

5.2.2.2 Ecuación de evolución de la matriz de densidad del arreglo de dos dobles puntos cuánticos

Definimos los operadores

$$Y_{nm} = |n\rangle\langle m| \quad (5.19)$$

que son operadores de proyección entre los seis estados de la base elegida y por tanto actúan únicamente en el sistema de dos dobles puntos.

Si la matriz de densidad reducida del arreglo de qubits de carga se obtiene al calcular la traza parcial de ρ sobre las variables de los fonones,

$$\rho_S(t) = Tr_{ph} \{ \rho(t) \} \quad (5.20)$$

el valor promedio de los operadores (5.19) está dado por

$$\begin{aligned} \langle Y_{nm} \rangle &= Tr_{dot} \{ \rho_S |n\rangle\langle m| \} = \langle m | \rho_S |n \rangle = \rho_{S, mn} \\ \langle Y_{nm}^\dagger \rangle &= Tr_{dot} \{ \rho_S |m\rangle\langle n| \} = \langle n | \rho_S |m \rangle = \rho_{S, nm} \end{aligned} \quad (5.21)$$

en donde Tr_{dot} indica una suma sobre todos los estados de los dobles puntos.

Entonces, es posible obtener los elementos de la matriz de densidad del arreglo de puntos cuánticos mediante el cálculo del valor promedio de los operadores Y_{nm} .

Debido a que la traza de una matriz es invariante a operaciones unitarias, el valor promedio de cualquier operador $\tilde{O}(t)$ toma la forma (Brandes, 2005)

$$\langle O(t) \rangle = Tr_{dot} \{ Tr_{ph} \{ \tilde{\rho}(t) \} Tr_{ph} \{ \tilde{O}(t) \} \} = Tr_{dot, ph} \{ \tilde{\rho}(t) \tilde{O}(t) \} \quad (5.22)$$

La transformación de polarón seguida por el cambio a la representación de interacción para los operadores Y_{nm} es trivial, por tanto, podemos emplear directamente la ecuación maestra para la matriz de densidad reducida del arreglo de dos dobles puntos + baño disipativo, expresión (5.17), para obtener los elementos de la matriz de densidad reducida del arreglo de qubits, la cual se empleará para calcular la concurrencia, la polarización y las probabilidades de los estados de Bell.

Multiplicando la ecuación (5.17) por cada operador $\tilde{Y}_{nm}(t)$ o $\tilde{Y}_{nm}^\dagger(t)$ por la derecha y tomando la traza sobre variables de los puntos cuánticos y de los fonones (apéndice B) obtenemos el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\rho_{S,nn}(t) = & \rho_{S,nn}(0) - i \int_0^t Tr_{dot,ph} \left\{ \tilde{\rho}(t') [\tilde{Y}_{nn}(t), \tilde{H}_T(t')] \right\} dt' \\
& - \frac{\Gamma_L}{2} \int_0^t Tr_{dot,ph} \left\{ (\tilde{s}_L(t') \tilde{s}_L^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') - 2 \tilde{s}_L^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_L(t') + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_L(t') \tilde{s}_L^\dagger(t')) \tilde{Y}_{nn}(t) \right\} dt' \\
& - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t Tr_{dot,ph} \left\{ (\tilde{s}_R^\dagger(t') \tilde{s}_R(t') \tilde{\rho}(t') - 2 \tilde{s}_R(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_R^\dagger(t') + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_R^\dagger(t') \tilde{s}_R(t')) \tilde{Y}_{nn}(t) \right\} dt'
\end{aligned} \tag{5.23}$$

que hasta este momento son exactas y en donde $\rho_{S,nn}(t) = \langle Y_{nn}(t) \rangle = Tr_{dot,ph} \left\{ \tilde{Y}_{nn}(t) \tilde{\rho}(t) \right\}$ y $\rho_{S,nn}(t) = \langle Y_{nn}^\dagger(t) \rangle$.

Sin embargo, como puede esperarse, estas ecuaciones acopladas incluyen valores promedio que implican un producto de operadores del sistema y fases polarónicas, por ejemplo el tipo $\langle \tilde{Y}_{nn}(t) X_t X_{t'}^\dagger \rangle$, que no pueden calcularse fácilmente. Una manera de desacoplar estos productos consiste en considerar que el baño de fonones está en equilibrio termodinámico todo el tiempo, por lo que la matriz de densidad reducida del sistema de dobles puntos se puede aproximar como

$$\tilde{\rho}(t') \approx \rho_{ph}(0) \otimes Tr_{ph} \tilde{\rho}(t') \tag{5.24}$$

donde $\rho_{ph}(0)$ es la matriz de densidad del baño de fonones y $Tr_{ph} \tilde{\rho}(t') = \tilde{\rho}_s(t')$ es la matriz de densidad reducida del arreglo de puntos cuánticos (Brandes y Kramer, 1995; Brandes, 2005). A partir de esta aproximación, los resultados que se obtendrán dejan de ser exactos.

Mediante el empleo de la ecuación (5.24), los productos mencionados toman una forma del tipo

$$Tr_{dot,ph} \left\{ \tilde{\rho}(t') \tilde{Y}_{nn}(t') X_t X_{t'}^\dagger \right\} \approx \langle \tilde{Y}_{nn}(t') \rangle \langle X_t X_{t'}^\dagger \rangle \tag{5.25}$$

en donde los valores promedio de operadores bosónicos constituyen las *funciones de correlación del baño*, que representan la información de éste a diferentes tiempos. En específico, se definen dos tipos de funciones de correlación:

$$\begin{aligned}
C(t-t') &= \langle X_t X_{t'}^\dagger \rangle = \langle X_{t'}^\dagger X_t \rangle \\
C_2(t-t') &= \langle X_t X_t X_{t'}^\dagger X_{t'}^\dagger \rangle = \langle X_{t'} X_{t'}^\dagger X_t^\dagger X_t \rangle
\end{aligned} \tag{5.26}$$

las cuales cumplen con la relación (Brandes y Kramer, 1995; Brandes, 2005)

$$\begin{aligned} C(t-t') &= C^*(t'-t) \\ C_2(t-t') &= C_2^*(t'-t) \end{aligned} \quad (5.27)$$

y cuya forma explícita (Brandes, 2005; Mahan, 2000) es

$$\begin{aligned} C(t-t') &= e^{-\Phi(t-t')}, \\ C_2(t-t') &= e^{-2\Phi(t-t')} \\ \Phi(\tau) &= \int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\omega^2} \{ (1 - \cos(\omega\tau)) \coth(\beta\omega/2) + i \operatorname{sen}(\omega\tau) \} d\omega \\ J(\omega) &= \sum_q |\lambda_q|^2 \delta(\omega - \omega_q) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$J(\omega)$ es la densidad espectral del baño, la cual engloba todas sus propiedades. Emplearemos una densidad espectral con la forma

$$J(\omega) = 2\alpha\omega e^{\omega/\omega_c} \quad (5.29)$$

donde α es un parámetro adimensional que representa la fuerza de la disipación y ω_c es la frecuencia máxima de los fonones. Un baño con estas características recibe el nombre de *baño Óhmico* (Leggett et al., 1987; Thorwart et al., 2004; Weiss, 1999; Wong y Chen, 2006) y es el que mejor representa al ambiente de fonones en un sistema de estado sólido de este tipo (Leggett et al., 1987; Thorwart et al., 2004; Wong y Chen, 2006)

El conjunto de ecuaciones obtenido mediante esta aproximación puede escribirse en forma matricial como

$$\rho_s(t) = \rho_s(0) + \int_0^t (\mathbf{M}(t-t') \langle \rho_s(t') \rangle + \mathbf{\Gamma}) dt' \quad (5.30)$$

en donde el kernel $\mathbf{M}(t-t')$ depende del tiempo e incluye a las funciones de correlación, mientras que $\mathbf{\Gamma}$ es un vector que contiene los términos que acoplan al primer doble punto cuántico con los reservorios electrónicos (Aguado y Brandes, 2004; Brandes y Kramer, 1999; Brandes, 2005)

Este sistema de ecuaciones integrales complejas, acopladas, que además son no locales en el tiempo, puede resolverse en el espacio de Laplace, en el que están dadas por

$$\rho_s(z) = [z - z\mathbf{M}(z)]^{-1} (\rho_s(0) + \mathbf{\Gamma}/z) \quad (5.31)$$

y en cuya obtención se han definido las funciones de correlación en el espacio z (Aguado y Brandes, 2004; Brandes, 2005)

$$C_\varepsilon^{(*)}(z) = \int_0^\infty e^{-z\tau} e^{(-)j\varepsilon\tau} C^{(*)}(\tau) d\tau \quad (5.32)$$

las cuales también dependen de la diferencia de energía en cada doble punto cuántico.

El caso estacionario puede estudiarse sin necesidad de realizar la transformada inversa de Laplace, puesto que se obtiene del coeficiente del término $1/z$ de la expansión de $\rho_S(z)$ en una serie de Laurent para $z \rightarrow 0$ (Aguado y Brandes, 2004; Brandes, 2005; Brandes y Kramer, 1999).

Debido a que la disipación inducida por un ambiente es efectiva incluso a temperatura cero, será éste el caso que estudiaremos en este trabajo. Las ecuaciones obtenidas (presentadas en el apéndice B) se resuelven numéricamente mediante el empleo de rutinas estándar.

5.3. Discusión

Debido a que se han realizado diferentes estudios relacionados con el transporte de electrones en un doble punto cuántico incluyendo los efectos del ambiente, consideramos que cada uno de los dobles puntos corresponde con el estudiado por Fujisawa et al (1998, 1997a y 1997b) el cual se construye a partir de un gas de electrones bidimensional en una heteroestructura semiconductor de AlGaAs-GaAs. Sobre esta base, en esta sección presentamos los principales resultados obtenidos para la concurrencia, la polarización y la probabilidad de obtener los estados de Bell en el sistema en función, principalmente, del parámetro de acoplamiento con el baño, α , para valores típicos de $t_c = 3.5$, $\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$, que son del orden de los reportados en (Fujisawa et al., 1998).

Considerando que los cuatro puntos son idénticos ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$), en la Figura 5.3 se muestra la polarización de los qubits en función de la magnitud del acoplamiento con el baño, α . Puede observarse que la carga presenta inicialmente una tendencia a localizarse en los puntos 4 y 2, con $P < 0$. Conforme α se incrementa, la polarización disminuye (hasta $\alpha \approx 0.05$) y posteriormente aumenta de nuevo hasta que el sistema se despolariza por completo para $\alpha > 0.2$.

Este efecto deja de manifiesto que el baño induce una localización de la carga al favorecer estados en los que ambos electrones se encuentran en los puntos superiores o inferiores del arreglo, que corresponde a la interacción tipo Ising presente en la ecuación (5.9a).

La magnitud de dicha interacción está dada por la variable κ , la cual para el baño Óhmico empleado es proporcional al parámetro de acoplamiento, $\kappa \propto 2\alpha$.

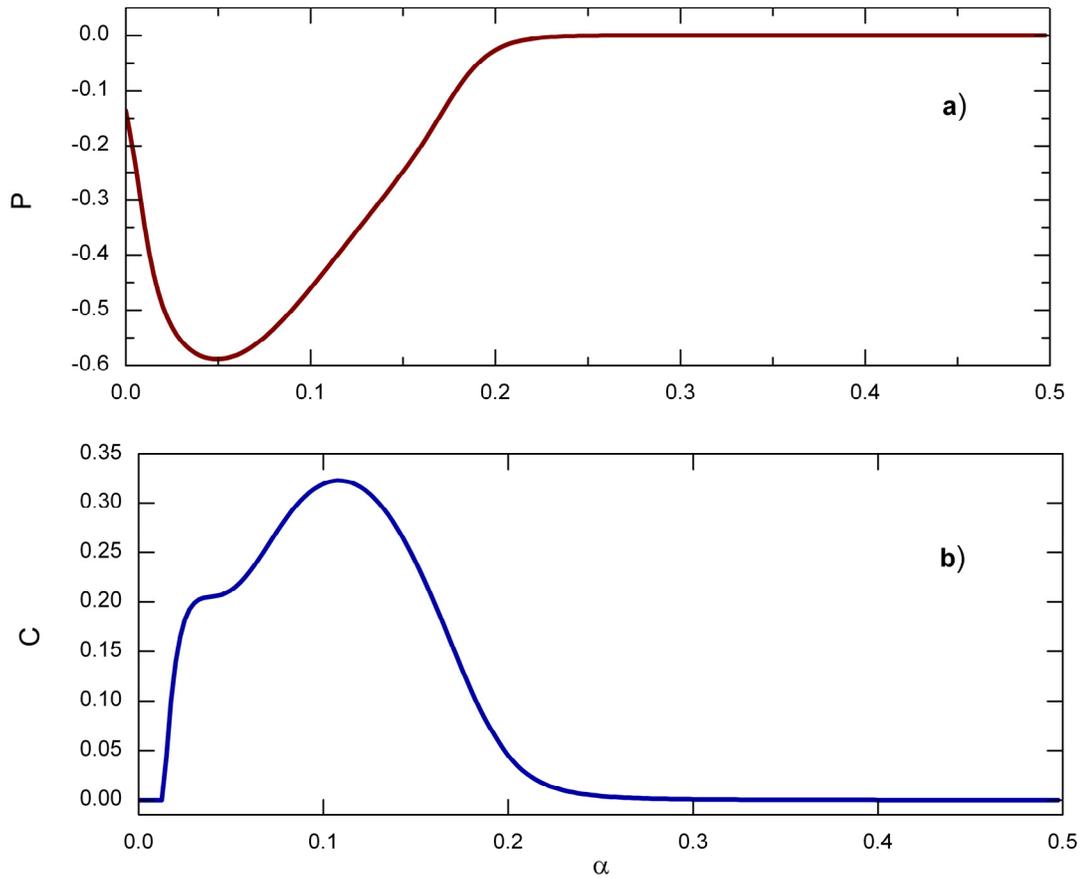


Figura 5.3. Propiedades para el estado estacionario del arreglo con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ a) polarización b) concurrencia en función del parámetro de acoplamiento con el baño. Parámetros empleados: $t_c = 3.5$, $\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$

Por tanto, podemos determinar que en el régimen $0 < \alpha \leq 0.05$ existe una competencia entre la deslocalización de carga inducida por el tuneo t_c y la localización provocada por el ambiente. Conforme se incrementa la magnitud del acoplamiento con el baño, $\alpha > 0.05$, el valor de κ también aumenta originando que el sistema se encuentre en una combinación de los estados $|00\rangle$ y $|11\rangle$ (ecuación (5.9a)). Debido a que la amplitud de que un electrón tunelee desde el contacto “L” (Γ_L) es mayor que la del tuneo entre los puntos cuánticos, la carga presentará

una tendencia a localizarse en el cuarto punto y por tanto el estado $|11\rangle$, con $P = 0$, se ve favorecido.

En la Figura 5.3(b) puede advertirse que la concurrencia es nula para $\alpha \approx 0$, confirmando que los qubits son independientes en ausencia del baño térmico. La concurrencia se incrementa hasta alcanzar un máximo ($C = 0.2$) en $\alpha \approx 0.03$ indicando que ésta se promueve por un cierto grado de deslocalización de la carga inducida por el tuneo, en analogía con los problemas presentados en los Capítulos anteriores.

La concurrencia disminuye conforme α se incrementa hasta llegar a $\alpha \approx 0.05$, en donde comienza a aumentar. Se observa entonces una característica interesante en este sistema: la aparición de un pico adicional en la concurrencia (que alcanza un valor ≈ 0.32) para $\alpha \approx 0.1$. Este comportamiento refleja que el efecto del baño se combina favorablemente con el tuneo originando una distribución de carga efectiva que incrementa la concurrencia; sin embargo, el posterior aumento del parámetro de acoplamiento aunado al efecto de Γ_L origina que el sistema se encuentre principalmente en el estado $|11\rangle$ que es separable.

Debe tenerse en cuenta que aun cuando el baño es capaz de generar estados entrelazados en el sistema, el grado de entrelazamiento obtenido es mucho menor que el correspondiente a los modelos similares en los que se obtiene a través de mecanismos eléctricos.

La contribución de los estados de Bell a la concurrencia se presenta en la Figura 5.4, la cual revela que para este caso en el que los cuatro puntos cuánticos son idénticos, no se genera un estado de Bell preferencial. Debe notarse sin embargo que cuando la concurrencia alcanza el máximo local (en $\alpha \approx 0.03$), el sistema se encuentra principalmente en una combinación de estados de Bell en la que $|\Psi^+\rangle$ y $|\phi^+\rangle$ contribuyen de forma equitativa, mientras que en el máximo global predomina ligeramente el estado $|\phi^-\rangle$. La localización de los electrones en estados “paralelos” de la carga se aprecia notoriamente en la alta probabilidad de los estados $|\phi^+\rangle$ y $|\phi^-\rangle$ para $\alpha \geq 0.2$.

Para tener una mejor comprensión del efecto del tuneo en la generación de entrelazamiento entre los qubits, en la Figura 5.5 se muestra la concurrencia en función del parámetro de acoplamiento con el baño y de la amplitud de tuneo. Estos resultados muestran que el efecto de localización inducido por el baño bosónico y por el acoplamiento al reservorio

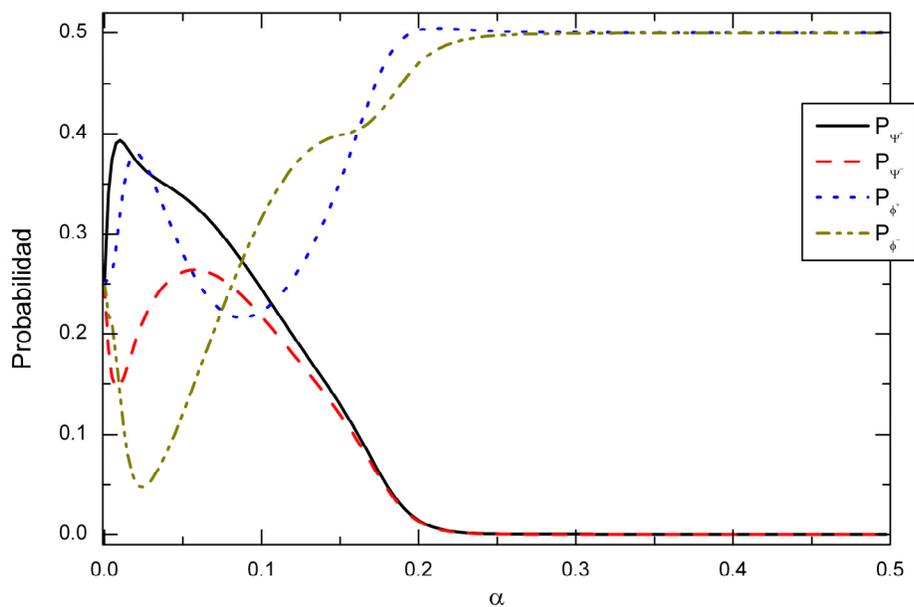


Figura 5.4. Probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de los estados de Bell en función de α para el caso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (mismos parámetros que en la Figura 5.3)

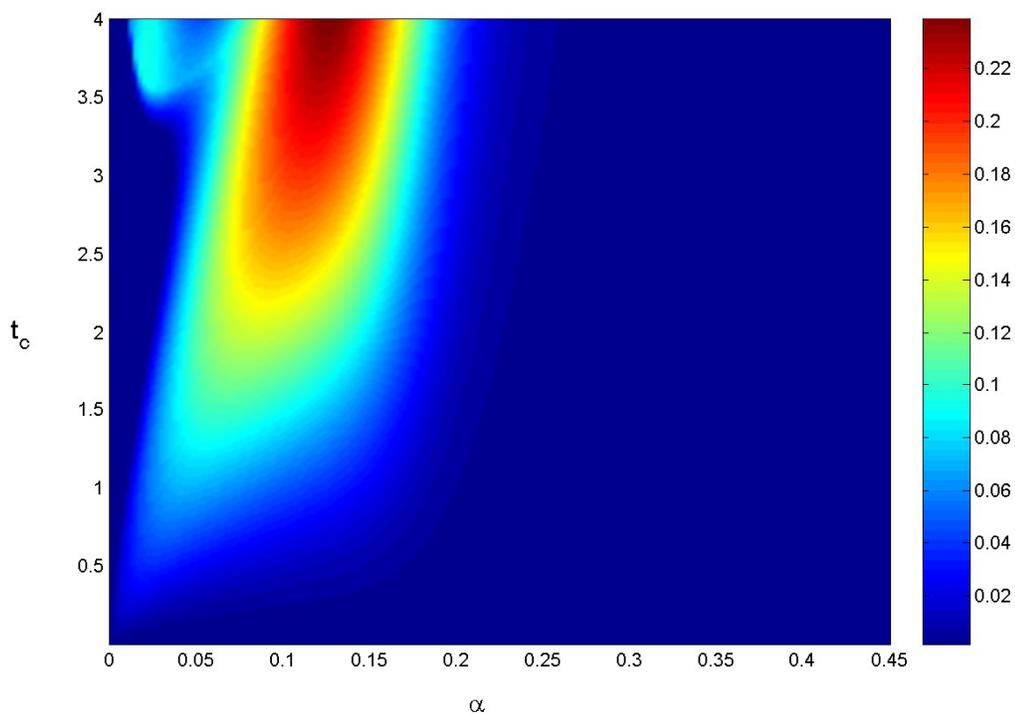


Figura 5.5. Mapa de color de la concurrencia vs. tunelamiento y α para puntos simétricos. Nótese que la aparición de un segundo pico en la concurrencia ocurre para amplitudes $> 3.4 \mu\text{eV}$ ($\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$)

“L” es dominante para amplitudes de tuneleo pequeñas, $0 < t_c < 0.5$, de esta forma la carga tenderá a encontrarse más “rápidamente” en estados separables y por tanto la concurrencia es prácticamente nula. Conforme el tuneleo se incrementa, comienzan a promoverse estados de carga que compiten con los estados inducidos por el baño (combinación de estados $|11\rangle$ y $|00\rangle$) de tal forma que se favorece $C \neq 0$, cuyo valor se incrementa con el tuneleo. Cuando éste adquiere amplitudes $t_c > 3.4$, se observa la formación del primer máximo global en la concurrencia indicando que en esta región el tuneleo compite con mayor fuerza con la tendencia de localización inducida por el baño, como se ha mencionado previamente. De esta forma se confirma que una cierta deslocalización de la carga es requerida para la obtención de estados entrelazados en este tipo de sistemas.

La diferencia de energía en cada doble punto del arreglo es otro de los parámetros directamente involucrados en este modelo, ecuación (5.1). Por este motivo, en la Figura 5.6 se grafica la concurrencia en función del parámetro de acoplamiento para diferentes asimetrías en los dobles puntos y para el tuneleo típico de $3.5 \mu\text{eV}$. Debe tenerse en cuenta que en un sistema de dos niveles, $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$) origina la localización del electrón en el punto cuántico inferior (superior) de cada par.

Dicha localización se manifiesta en los bajos valores para la concurrencia presentados en la Figura 5.6 (a), en la que puede apreciarse que, en general, dicha propiedad presenta un máximo a valores pequeños del parámetro de acoplamiento ($0 < \alpha < 0.05$) y disminuye conforme α se incrementa. Este comportamiento nos indica que debido a que $\varepsilon > t_c$, la localización inducida por la asimetría del arreglo y por Γ_L es superior a la deslocalización promovida por el tuneleo, favoreciendo al efecto del baño y por lo tanto la carga rápidamente se localiza en estados separables.

En específico, podemos notar que existe una resonancia en $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10 \mu\text{eV}$. Esta asimetría en los dobles puntos ocasiona que la carga tienda a distribuirse uniformemente en los puntos inferiores. Debido al tuneleo y a la tendencia del baño a favorecer estados con la carga alineada de forma paralela, comienzan a promoverse estados con los electrones distribuidos en los cuatros puntos cuánticos originando un incremento en la probabilidad del estado $|\Psi^+\rangle$ (como se aprecia en la Figura 5.7) y por tanto incrementando la concurrencia; conforme α aumenta, el efecto de localización del baño se hace más fuerte reflejándose en el incremento en

la probabilidad de los estados $|\phi^+\rangle$ y $|\phi^-\rangle$. El caso contrario ocurre para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -10 \mu\text{eV}$, en el que la carga se encuentra distribuida en los puntos superiores; la concurrencia casi nula que presenta esta configuración (a pesar de contar con la misma amplitud de tuneleo) indica que el estado final favorecido por el sistema en contacto con el baño corresponde al estado $|11\rangle$.

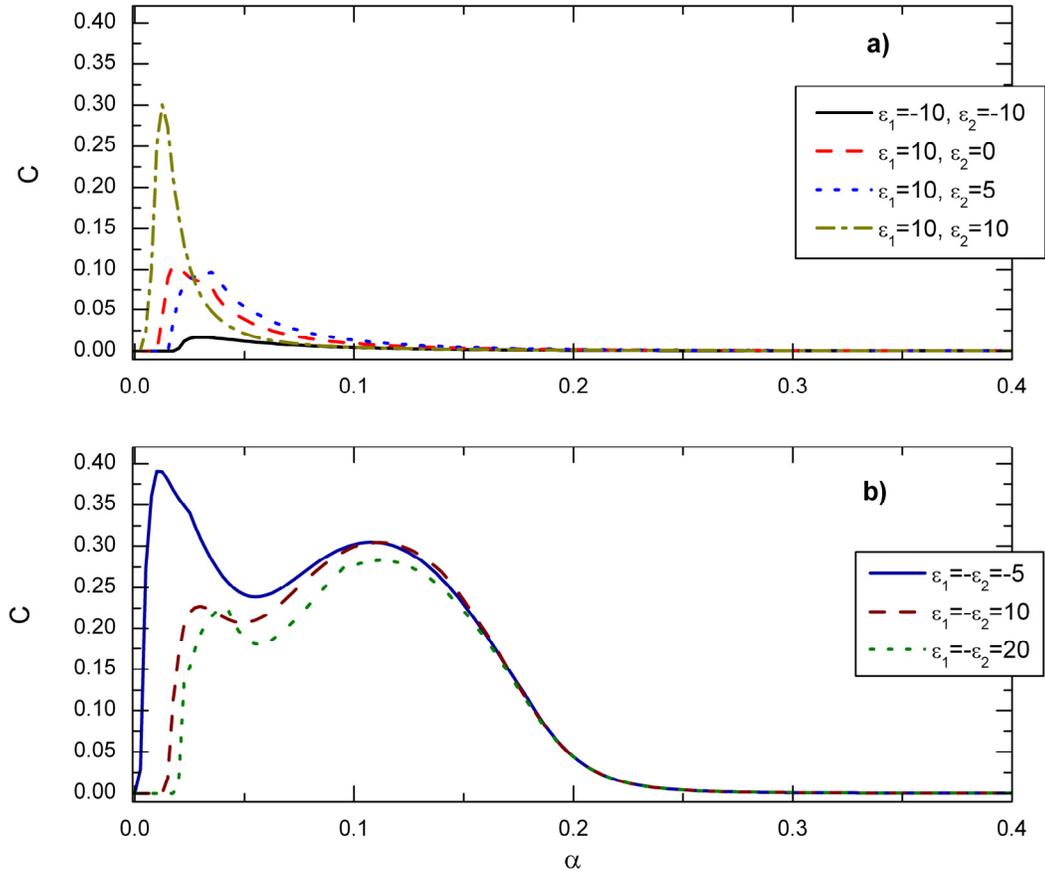


Figura 5.6. Concurrencia en función del parámetro de acoplamiento con el baño de fonones, para diferentes asimetrías en los dobles puntos cuánticos. En (a) se puede observar una resonancia para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, mientras que en (b) se encuentra la condición $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ que origina la formación de dos picos en la concurrencia ($\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$)

De la Figura 5.6(b) puede notarse que la presencia de los dos máximos en la concurrencia ocurren para $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, situación física que corresponde a los electrones localizados en una de

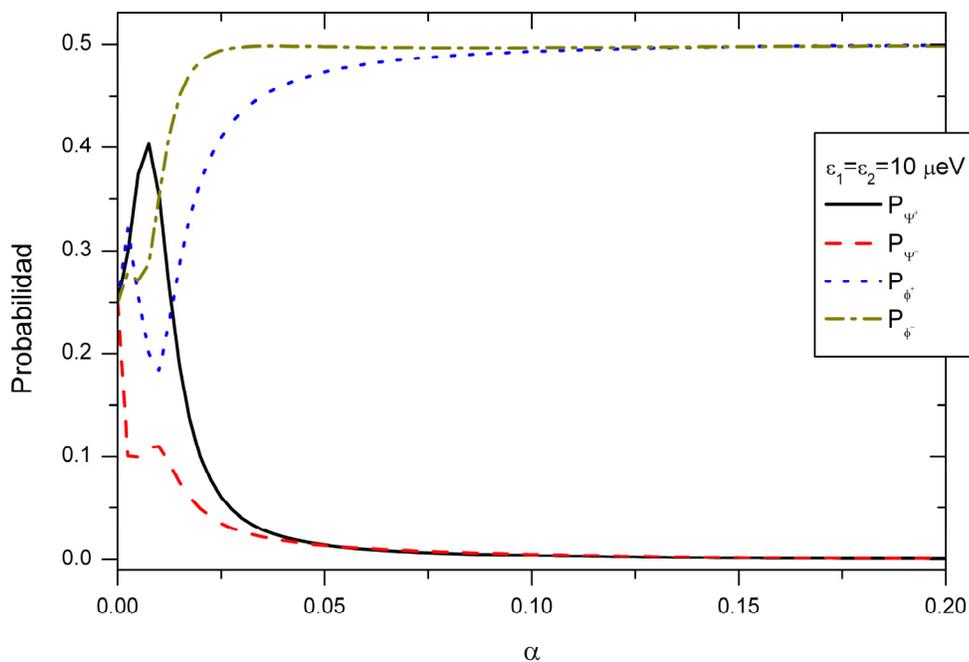


Figura 5.7. Probabilidad de los estados de Bell para el caso en el que se presenta la resonancia en la concurrencia con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10 \mu\text{eV}$ (se ha empleado $\Gamma_L = 10$, $\Gamma_R = 1$ y $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$)

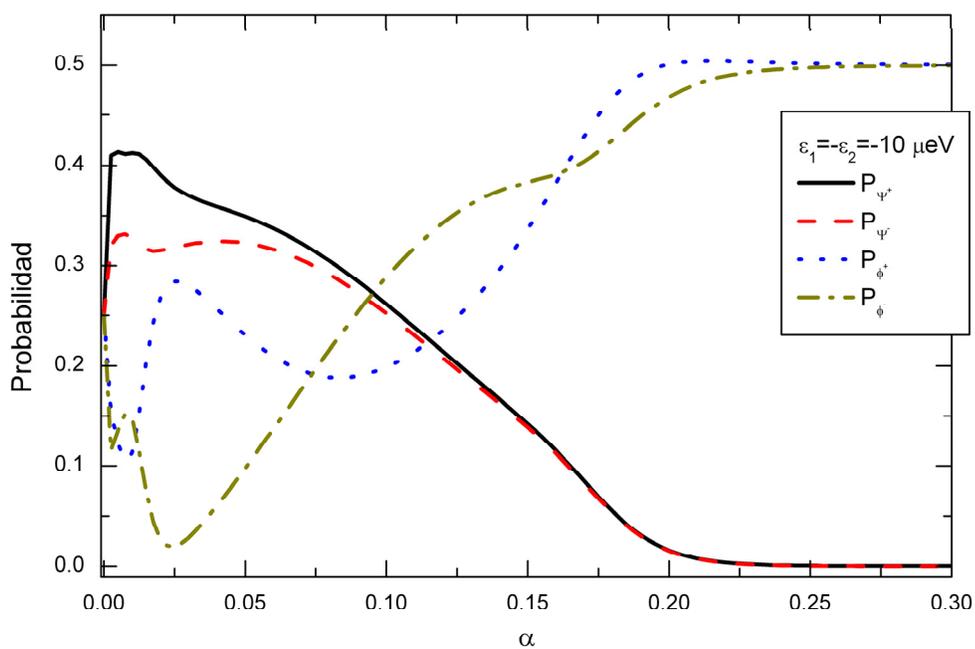


Figura 5.8. Probabilidad de los estados de Bell para $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 10 \mu\text{eV}$ (mismos parámetros que en la Figura 5.7)

las diagonales del arreglo. El tuneo y la localización inducida tanto por el baño como por la asimetría en el intervalo $0.02 < \alpha < 0.03$, promueven la distribución de la carga en los cuatro puntos cuánticos. Ésto da lugar a una combinación de los cuatro estados de Bell con concurrencia diferente de cero (primer pico), como se observa en la Figura 5.8, en donde a manera de ejemplo se presenta la probabilidad de encontrar al sistema en los estados de Bell para $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 10 \mu\text{eV}$.

El incremento de α en la región $0.03 < \alpha < 0.05$ indica que el efecto combinado del baño y de la asimetría de los puntos cuánticos sobrepasa a la deslocalización inducida por el tuneo, por lo que la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $|\phi^+\rangle$ aumenta mientras la concurrencia disminuye.

Sin embargo, la tendencia natural del arreglo a localizar a la carga en los estados $|10\rangle$ (para $\varepsilon_1 < 0$) o $|01\rangle$ para ($\varepsilon_1 > 0$) continúa compitiendo con el baño. Conforme α se incrementa, la probabilidad de los estados $|\Psi^+\rangle$ y $|\Psi^-\rangle$ disminuye mientras aumenta la de $|\phi^+\rangle$ y $|\phi^-\rangle$ dando lugar al segundo máximo en la concurrencia para $\alpha \approx 0.1$. Valores mayores del parámetro de acoplamiento tienden a promover más fuertemente una combinación separable de estados con la carga “paralela” en ambos qubits, por lo que la concurrencia se pierde para $\alpha > 0.2$, independientemente de la diferencia de energía en cada doble punto.

Estos análisis también permiten comprender que la “amplitud” de los picos de la concurrencia disminuya conforme aumenta la diferencia de energía en cada doble punto (en valor absoluto), Figura 5.6 (b). En particular para $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -5$ debe notarse que la amplitud del tuneo y la diferencia de energía entre los puntos son cercanas, por lo que el efecto del tuneo es mayor provocando que el primer pico sea el máximo global para la concurrencia.

Finalmente analizamos la repercusión que sobre el entrelazamiento tiene el acoplo de unos de los qubits a los contactos de electrones. Para este fin, se muestra la concurrencia en función tanto del parámetro de acoplamiento con el baño como del tuneo de una partícula desde/hacia los contactos, Γ_L y Γ_R (Figuras 5.9 y 5.10 respectivamente), para los cuatro puntos cuánticos simétricos.

Puede identificarse que mientras mayor es la razón de tuneo desde el contacto “L”, Γ_L ,

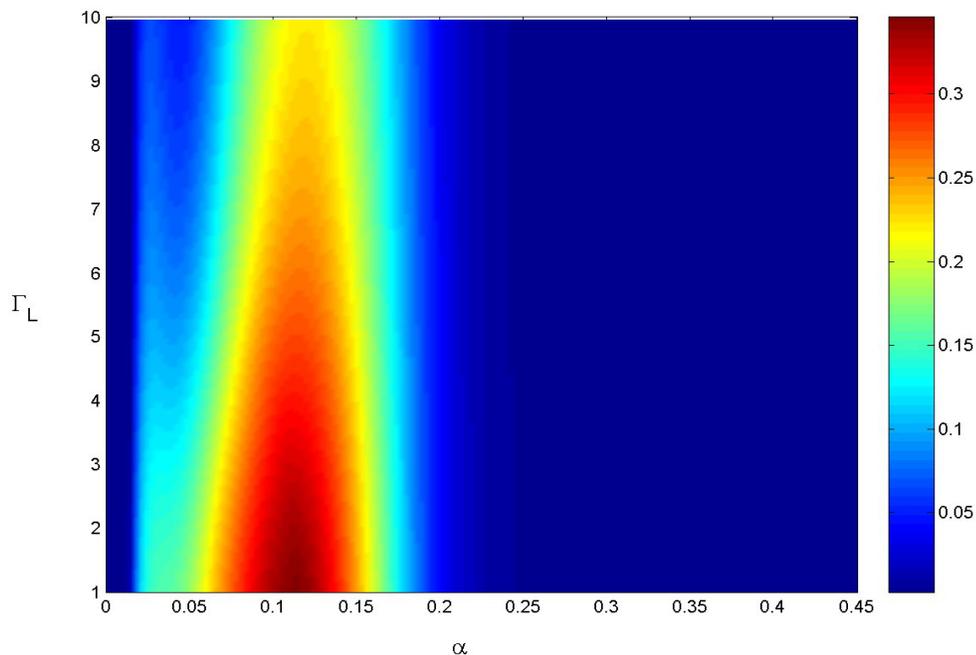


Figura 5.9. Concurrencia en función del parámetro de acoplamiento con el baño y la amplitud de tuneleo de un electrón desde el contacto “L”. De forma efectiva, Γ_L induce una localización de la carga en el cuarto punto cuántico del arreglo, causando que la concurrencia disminuya ($\Gamma_R = 1$, $t_c = 3.5$, $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$)

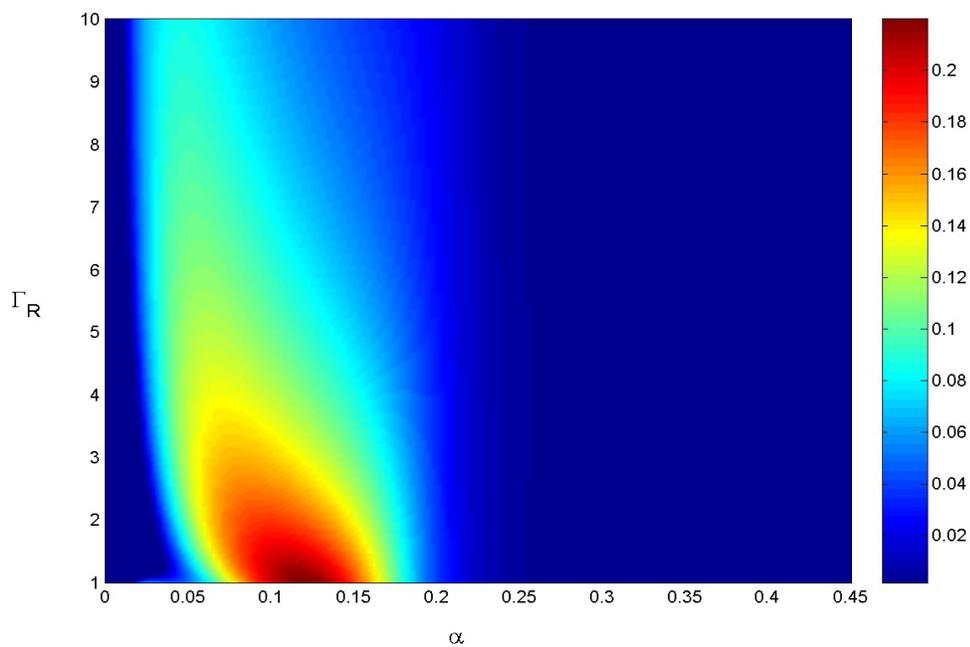


Figura 5.10. Concurrencia en función de α y de la amplitud de tuneleo de un electrón hacia el contacto “R” (Γ_R). Puede advertirse que la concurrencia disminuye conforme este parámetro se incrementa ($\Gamma_L = 10$, $t_c = 3.5$, $\omega_c = 500 \mu\text{eV}$)

el electrón tendrá más probabilidad de encontrarse en el punto cuántico 4, es decir que este parámetro tiende a localizar la carga en dicho sitio, como hemos mencionado anteriormente. Es de esperarse entonces que la amplitud de ambos picos en la concurrencia disminuya conforme Γ_L se incrementa, como se observa en la Figura 5.9.

En la Figura 5.10 se advierte que la concurrencia también disminuye conforme se incrementa Γ_R , induciéndose además la formación de un solo pico en dicha propiedad. Debido a que Γ_R representa la amplitud de que un electrón tunelee desde el tercer punto cuántico hacia el contacto “R”, su efecto es equivalente a incrementar la energía de dicho punto; al mantener fijo el valor de Γ_L se tiene entonces una “asimetría efectiva” del tipo $\varepsilon_1 < 0$. El efecto de localización promovido por el baño se combina con esta localización inducida por Γ_R , por lo que el sistema favorece más rápidamente a estados con la carga distribuida en los puntos cuánticos superiores del arreglo.

Como conclusión, en esta parte del trabajo hemos demostrado que el acoplamiento fuerte de un arreglo de dos qubits de carga con un baño bosónico a temperatura cero permite obtener estados entrelazados, aunque en un grado mucho menor al obtenido en modelos similares mediante mecanismos electrostáticos y en un régimen de acoplamiento débil (Capítulos 3 y 4).

Mediante el análisis de la polarización, la concurrencia y la probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de los estados de Bell, es posible determinar que las interacciones indirectas generadas entre los dobles puntos cuánticos por el baño presentan dos tipos de efectos: primero promueven la formación del entrelazamiento y posteriormente lo destruyen al provocar que la carga se localice en estados separables (que corresponden a una combinación de los estados $|11\rangle$ y $|00\rangle$). La concurrencia presenta, además, una fuerte dependencia del tuneo en cada doble punto, de la asimetría en los puntos cuánticos (ocasionada por una diferencia de energía entre éstos), así como de las amplitudes de tuneo de un electrón hacia o desde el primer qubit debido a su interacción con contactos electrónicos. Todas estas cantidades corresponden a parámetros controlables experimentalmente en puntos cuánticos acoplados.

Debido a los pequeños valores obtenidos para la concurrencia ($C < 0.5$) y a que no se obtiene un estado de Bell preferencial, el arreglo de dobles puntos acoplados fuertemente a un baño disipativo no parece ser muy prometedor en aplicaciones potenciales para información y comunicación cuántica. Sin embargo, este sistema representa una alternativa atractiva para investigar, tanto teórica como experimentalmente, los efectos disipativos en dicho régimen.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de este trabajo de tesis se ha calculado el grado de entrelazamiento entre dos qubits de carga basados en los estados electrónicos de un arreglo de dos dobles puntos cuánticos, incluyendo los efectos de decoherencia ocasionados por un baño térmico de fonones inherente a estos sistemas de estado sólido. La formación de entrelazamiento se consiguió a través de dos procesos en específico: mediante interacciones eléctricas y por efectos disipativos. En el primer caso, se consideró el régimen de acoplamiento débil con el baño de fonones mientras que un acoplamiento fuerte fue modelado para el segundo. La investigación se realizó en diferentes etapas, cuyos resultados se muestran en los Capítulos 3 a 5.

En la primera parte del trabajo (Capítulo 3) consideramos que los dos dobles puntos están acoplados mediante fuerzas de Coulomb e interactúan con otro arreglo idéntico (o celda de control) con densidad de carga controlable. Este segundo arreglo puede considerarse como un campo eléctrico efectivo que actúa sobre cada uno de los puntos cuánticos del arreglo de qubits de carga. Mediante el empleo de un Hamiltoniano de tipo Hubbard extendido se resolvió el problema de eigenvalores para estudiar la concurrencia, la distribución de carga dentro del arreglo o polarización y la probabilidad de encontrar al sistema en los estados de Bell, encontrándose que en el estado base es posible generar entrelazamiento así como un estado de Bell preferencial, $|\Psi^+\rangle$, que dependen de la amplitud del tuneo.

Mediante la evolución temporal de la polarización de la celda de control se observa la formación dinámica de entrelazamiento entre los dobles puntos, con una distribución de carga tal que se favorece la formación del estado de Bell $|\Psi^+\rangle$, aunque tanto su probabilidad como la concurrencia decaen en el tiempo. Mediante la manipulación del potencial externo se logra el control coherente tanto de la carga dentro del arreglo como del entrelazamiento, ocasionando que el sistema permanezca principalmente en $|\Psi^+\rangle$. Sin embargo, este comportamiento óptimo del sistema se deteriora si consideramos que uno de los puntos cuánticos tiene un tamaño diferente, puesto que la asimetría ocasiona que la carga tienda a localizarse en estados que no presentan una alta concurrencia.

Mediante el empleo de la aproximación Markoviana se obtuvo la ecuación maestra de la matriz de densidad reducida del arreglo acoplado débilmente a un baño de fonones y se evaluó el efecto que tiene la temperatura sobre las propiedades del sistema. Se observa que tanto la concurrencia como la alta probabilidad del estado $|\Psi^+\rangle$ se mantienen a bajas temperaturas (del orden de $1K$), sin embargo el incremento en la temperatura del baño ocasiona que los estados se pueblen en la misma proporción originando la pérdida de un estado de Bell preferencial y un decaimiento en la concurrencia, el cual es suave hasta alcanzar una temperatura crítica de $T_c = 2.4K$ en donde se pierde todo grado de entrelazamiento entre los qubits.

Sobre la base de estos resultados y debido a las aplicaciones potenciales de los estados de Bell, en el Capítulo 4 nos enfocamos a la formación y el control dinámico de éstos. Nuevamente se consideró al arreglo de dos qubits de carga interactuantes en presencia de un campo eléctrico externo aplicado sólo en uno de ellos. De nueva cuenta se hace uso de un Hamiltoniano tipo Hubbard extendido que incluye la interacción Coulombiana y la diferencia de potencial aplicada en el segundo punto cuántico. Bajo este esquema se demuestra que es posible generar y controlar cada uno de los estados de Bell con la mayor probabilidad mediante la manipulación dinámica de dicho potencial y a partir de condiciones iniciales que corresponden a estados con concurrencia cero. En particular, los cuatro estados que describen la distribución de la carga en el arreglo, en la base computacional, son empleados como condiciones iniciales dando origen a los estados de Bell de acuerdo a la forma descrita en su correspondiente “tabla de verdad”. Por consiguiente, es posible concluir que la dinámica coherente del sistema es capaz de realizar ciertas operaciones que pueden relacionarse con el efecto de compuertas cuánticas específicas.

Sin embargo, la temperatura suministrada por un baño de fonones en equilibrio termodinámico acoplado débilmente al arreglo deteriora la formación de un estado preferencial y ocasiona la pérdida de la concurrencia a una temperatura finita, la cual depende de la amplitud del tuneo.

En la segunda parte del trabajo nos enfocamos en la generación de entrelazamiento debida a los efectos de decoherencia ocasionados por un baño disipativo. En este caso consideramos que los qubits de carga no interactúan entre sí pero se acoplan fuertemente a un baño de fonones común. Adicionalmente, se considera que uno de los qubits está abierto a contactos de electrones, efecto que puede representar fluctuaciones en la carga o que también

puede considerarse como la entrada de un proceso de comunicación o de computación cuánticas.

La interacción entre los contactos y el doble punto se considera débil, por lo tanto se empleó la aproximación Markoviana en dicho acoplamiento. Sin embargo, la interacción con los fonones no puede tratarse perturbativamente, por lo que se utilizó una aproximación de polarón mediante la cual se logró obtener un conjunto de ecuaciones para la evolución de los elementos de la matriz de densidad reducida del arreglo, cuya solución en el espacio de Laplace permite obtener el estado estacionario del sistema.

Los resultados presentados en el Capítulo 5 muestran que el baño bosónico produce interacciones indirectas entre ambos qubits y presenta dos tipos de efectos que compiten entre sí. Por una parte, para valores bajos del parámetro de acoplamiento, genera entrelazamiento entre los dobles puntos y posteriormente lo deteriora debido a que el incremento de dicho parámetro promueve la localización de la carga en estados separables.

El primero de estos efectos se ve favorecido por el tuneo entre los puntos cuánticos del arreglo, por lo que la concurrencia aumenta conforme éste se incrementa. Por otra parte, la presencia de asimetrías en los dobles puntos induce configuraciones de carga capaces de favorecer o bien de afectar la formación de estados entrelazados. La probabilidad de tuneo de un electrón hacia o desde los contactos se refleja en una localización “efectiva” de la carga que ocasiona una disminución en la concurrencia conforme ésta se incrementa.

El grado de entrelazamiento obtenido por acción del baño disipativo es mucho menor que el presentado en los casos anteriores y no se obtiene un estado de Bell preferencial.

En general, nuestros resultados predicen teóricamente que en un arreglo de dobles puntos cuánticos es posible generar y controlar dinámicamente estados con un alto grado de entrelazamiento, y en específico los estados de Bell, mediante mecanismos electrostáticos a bajas temperaturas. Consideramos que nuestros resultados se han generado suponiendo condiciones realistas, ya que se han tomado en cuenta los efectos de decoherencia y la asimetría en los puntos cuánticos. A pesar de que no se predice el máximo grado de entrelazamiento entre los qubits, alentamos a los grupos experimentales a ensayar la implementación de este arreglo de dobles puntos en el rango de temperatura expuesto y en condiciones que permitiesen identificar un acoplamiento débil con el ambiente, puesto que podrían servir como base para comprender la operación e implementación de las compuertas teóricas propuestas para la

generación de estados de Bell, así como para llevar a cabo algunos algoritmos cuánticos básicos en los que el grado de entrelazamiento obtenido sea útil.

La dependencia de la concurrencia con la temperatura y con el tuneo ofrece una extensión natural hacia el análisis del entrelazamiento térmico en puntos cuánticos, orientado a la búsqueda de las condiciones que permitiesen obtener estados entrelazados a temperaturas más altas (macroscópicas).

Adicionalmente, consideramos que este trabajo sienta las bases para el estudio de más de dos qubits de carga con objeto de modelar un registro de memoria más robusto. En particular sería de interés evaluar la formación de los estados que presentan el máximo grado de entrelazamiento para tres partículas, conocidos como estados Greenberger-Horne-Zeilinger o GHZ (Greenberger et al., 1990; Brouwmeester et al., 1999). Asimismo, el análisis de las propiedades de un arreglo de cuatro dobles puntos puede ser de interés para la posible implementación física de los protocolos de “purificación de entrelazamiento”, los cuales se refieren a la obtención o “extracción” de un estado con un alto grado de entrelazamiento a partir de una mezcla inducida por efectos de decoherencia (Bennett et al., 1996b; Bennett et al., 1996c; Deutsch et al., 1996; Metwally, 2002).

Por otra parte, aunque se ha considerado el caso estacionario del acoplamiento fuerte con el baño, la dinámica de este sistema representa un reto de mayor interés para lograr una caracterización más completa y por tanto evaluar mejor su comportamiento y aplicaciones potenciales. Adicionalmente, en este sistema puede explorarse el control de la concurrencia mediante la variación de las diferencias de energía en cada doble punto.

Literatura Citada

- Aguado, R. 2000. "Átomos artificiales y sus propiedades". *Investigación y Ciencia*. 282: 32-33
- Aguado, R y T. Brandes. 2004. "Shot-noise Spectrum of Open Dissipative Quantum Two-Level Systems". *Phys. Rev. Lett.* 92: 206601-1-4
- Alivisatos, A.P. 1996. "Semiconductor Clusters, Nanocrystals and Quantum Dots". *Science*. 271: 933-937
- Amlani, I, A.O. Orlov, G. Snider, C.S. Lent y G.H. B. 1998. "Demonstration of a six-dot quantum cellular automata system". *Appl. Phys. Lett.* 72: 2179-2181
- Amlani, I., A. Orlov, G. Toth, G.H. Bernstein, C.S. Lent y G.L. Snider. 1999. "Digital Logic Gate Using Quantum-Dot Cellular Automata". *Science*. 284: 289-291
- Ashcroft, N.W. y D. Mermin. 1976. "Solid State Physics". Saunders College Publishing. Primera edición. Forth Worth. 826 pp.
- Ashoori, R.C. 1996. "Electrons in artificial atoms". *Nature*. 379: 413-419
- Aspect, A., P. Grangier y G. Roger. 1982. "Experimental realization of Einstein-Podolski-Rosen Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequality". *Phys. Rev. Lett.* 49: 91-94
- Averin, D.V. 1998. "Adiabatic quantum computation with cooper-pairs". *Sol. State. Comm.* 105: 659-654
- Balandin, A. y K.L. Wang. 1999. "Feasibility study of the quantum XOR gate based on coupled asymmetric semiconductor quantum dots". *Superlatt. Microstruct.* 25: 509-518
- Barenco A., C.H. Bennett, R. Cleve, D.P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J.A. Smolin y H. Weinfurter. 1995. "Elementary gates for Quantum Computation". *Phys. Rev. A*. 52: 3457-3467
- Barenco, A. 1995. "A Universal Two-Bit Gate for Quantum Computation". *Proc. R. Soc. Lond. A*. 449: 679-693
- Barnes, C.H.W., J. M. Shilton, y A.M. Robinson. 2000. "Quantum computation using electrons trapped by surface acoustic waves". *Phys. Rev. B*. 62: 8410-8419
- Barrett, M.D., J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W.M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri y D.J. Wineland. 2004. "Deterministic quantum teleportation of atomic qubits". *Nature*. 429: 737-739
- Beenakker, C.W.J., C. Emary, M. Kindermann y J.L. van Velsen. 2003. "Proposal for production and detection of entangled electron-hole pairs in a degenerate electron gas". *Phys. Rev. Lett.* 91. 147901-1-4
- Beenakker, C.W.J., M. Kindermann, C.M. Marcus y A. Yacobi. 2004. "Fundamental problems of mesoscopic physics". NATO Sci. Series II. Kluwer. Primera edición. Dordrecht. 373 pp.

- Beenakker, C.W.J. 2005. "Electron-hole entanglement in the Fermi sea". preprint cond-mat/058488.
- Bell, J.S. 1964. "On the Einstein-Podolski-Rosen Paradox". *Physics*. 1:195
- Bena, C., S. Vishveshwara, L. Balents y M.P.A. Fisher. 2002. "Quantum entanglement in carbon nanotubes". *Phys. Rev. Lett.* 89: 037901 1-5
- Bennett, C.H. y S.J. Wiesner. 1992. "Communication via One- and Two-particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States". *Phys. Rev. Lett.* 69: 2881-2884
- Bennet, C.H. 1998. "Quantum Information". *Phys. Scr.* T76: 210-217
- Bennett, C.H., G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres y W.K. Wootters. 1993. "Teleporting an Unknown Quantum State Via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels". *Phys. Rev. Lett.* 70: 1895-1899
- Bennett, C.H. 1995. "Quantum Information and Computation". *Physics Today*. 48: 24-31
- Bennett, C.H., H.J. Bernstein, S. Popescu y B. Schumacher. 1996a. "Concentrating partial entanglement by local operations". *Phys. Rev. A*. 53: 2046-2052
- Bennett, C., D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin y W.K. Wootters. 1996b. "Mixed-state entanglement and quantum error correction". *Phys. Rev. A*. 54: 3824
- Bennett, C.H., G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J.A. Smolin y W.K. Wootters. 1996c. "Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels". *Phys. Rev. Lett.* 76: 722-725
- Bernstein, G.H., G. Bazam, M. Chen, C.S. Lent, J.L. Merz, A.O. Orlov, W. Prod, G.L. Sneider y P.D. Tougaw. 1996. "Practical issues in the realization of quantum-dot cellular automata". *Superlatt. Microstruct.* 20: 447-459
- Bimberg, D., M. Grundmann y N.N. Ledentsov. 1999. "Quantum Dot Heterostructures". John Wiley and Sons. Primera Edición. Nueva York. 328 pp
- Blatter, G. 2003. "The qubit duet". *Nature*. 421: 796-797
- Blinov, B.B., D.L. Moehring, L.M. Duan y C. Monroe. 2004. "Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon". *Nature*. 428: 153-157
- Blum, K. 1981. "Density Matrix Theory and applications". Plenum Press. Primera edición. New York. 217 pp
- Bose, S., V. Vedral y P.L. Knight. 1998. "Multiparticle generalization of entanglement swapping". *Phys. Rev. A*. 57: 822-829
- Bouwmeester, D., J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter y A. Zeilinger. 1997. "Experimental quantum teleportation". *Nature*. 390: 575-579
- Bouwmeester, D., J.W. Pan, M. Daniel, H. Weinfurter y A. Zeilinger. 1999. "Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement". *Phys. Rev. Lett.* 82: 1345-1349

- Bouwmeester, D. y A. Zeilinger. 2000. "The physics of quantum information: Basics concepts". En: D. Bouwmeester, A. Ekert y A. Zeilinger (eds.). The physics of quantum information. Springer. Primera Edición. Berlín. 314 pp.
- Brandes, T. y B. Kramer. 1999. "Spontaneous emission of phonons by coupled quantum dots". Phys. Rev. Lett. 83: 3021-3024
- Brandes, T. y T. Vorrath. 2003. "Dissipation in open two-level systems: perturbation theory and polaron transformation". Int. J. Mod. Phys. 17: 5465-5469
- Brandes, T., R. Aguado y G. Platero. 2004. "Charge transport through open driven two-level systems with dissipation". Phys. Rev. B. 69: 205326-1-12
- Brandes, T. 2005. "Coherent and collective quantum optical effects in mesoscopic systems". Phys. Rep. 408: 315-474
- Braun, D. 2002. "Creation of Entanglement by Interaction with a Common Heat Bath". Phys. Rev. Lett. 89: 277901-1-4
- Braustein, S.L., A. Mann y M. Revzen. 1992. "Maximal violation of Bell's inequality for Mixed States ". Phys. Rev. Lett. 68: 3259-3261
- Breuer, H.P. y F. Petruccione. 2002. "The Theory of open quantum systems". Oxford University Press. Primera edición. Oxford. 625 pp
- Brooks, M. 1999. "Quantum computing and communications". Springer. Primera edición. Cambridge. 152 pp
- Brum, J.J. y P. Hawrylak. 1997. "Coupled quantum dots as quantum exclusive-OR gate". Superlatt. Microstruct. 22: 431-436
- Burkard, G., D. Loss y D.P. DiVincenzo. 1999. "Coupled quantum dots as quantum gates". Phys. Rev. B. 59: 2070
- Burkard, G. y D. Loss. 2002. "Spin qubits in solid-state structures". Europhys. News. 33: 1-6
- Burkard, G. y D. Loss. 2003. "Lower bound for electron spin entanglement from beam splitter current correlations". Phys. Rev. Lett. 91: 087903 1-4
- Calarco, T., I. Cirac y P. Zoller. 2001. "Entangling ions in arrays of microscopic traps". Phys. Rev. A. 63: 062304 1-16
- Chen, G., N.H. Bonadeo, D. G. Steel, D. Gammon, D. S. Katzer, D. Park y L. J. Sham. 2000. "Optically Induced Entanglement of Excitons in a Single Quantum Dot". Science. 289: 1906-1909
- Chiorescu, I., P. Bertet, K. Semba, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans y J.E. Mooij. 2004. "Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator". Nature. 431: 159
- Chouikha, W.B., S. Jaziri y R. Bennaceur. 2003. "Measure of entanglement states of two interacting electrons in vertically coupled quantum dots induced by a time-dependent electric field". J. Supercond. Inc. N. Mag. 16: 313-317

- Chtchelkatchev, N.M., G. Blatter, G.B. Lesovik y T. Martin. 2002. "Bell inequalities and entanglement in solid-state devices". *Phys. Rev. B.* 65: 165327-1-13
- Chuang, I.L., L.M.K. Vandersypen, X. Zhou, D.W. Leung y S. Lloyd. 1996. "Experimental realization of a quantum algorithm". *Nature.* 393: 143-146
- Cirac, J.I. y P. Zoller. 1995. "Quantum computations with cold trapped ions". *Phys. Rev. Lett.* 74: 4091
- Clauser, J., M.A. Horne, A. Shimony y R.A. Holt. 1969. "Proposed Experiment to Test Local-Hidden Variable Theories". *Phys. Rev. Lett.* 23: 883-884
- Cohen-Tannoudji, C., B. Diu y F. Laloe. 1977. "Quantum Mechanics Vol. I". John Wiley and Sons. Primera Edición. New York. 900 pp
- Cohen-Tannoudji, C., J. Dupont-Roc y G. Grynberg. 1992. "Atom-photon interactions Basic processes and applications". John Wiley and Sons. Primera edición. New York. 656 pp.
- Coish, W.A. y D. Loss. 2005. "Singlet-triplet decoherence due to nuclear spins in a double quantum dot". *Phys. Rev. B.* 72: 125337 1-12
- Contreras-Pulido, L.D., y F. Rojas. 2006. "Dynamical entanglement formation and dissipation effects in two double quantum dots". *J. Phys.: Condens. Matter.* 18: 9771-9782
- Cory, D.G., R. Laflamme, E.Knill, L.Viola, T.F.Havel, Boulant, E.Fortunato, S.Lloyd, R.Martinez, M.Pravia, Y.Sharf, G.Teklemariam, Y.S. Weinstein y W.S. Zurek. 2000. "NMR based quantum information processing: Achievements and prospects". *Forts. Phys.* 48: 875-907
- Costa, A.T. y S. Bose. 2001. "Impurity scattering induced entanglement of ballistic electrons". *Phys. Rev. Lett.* 87: 277901-1-4
- Costi, T.A. y R.H. McKenzie. 2003. "Entanglement between a qubit and the environment in the spin-boson model". *Phys. Rev. A.* 68: 034301 1-4
- Cota, E., F. Rojas y S.E. Ulloa. 2002. "Dissipative Dynamics in quantum Dot Cell arrays". *Phys. Stat. Sol. (b).* 230: 377-383
- Cota, E., R. Aguado y G. Platero. 2005. "ac-Driven Double Quantum Dots as Spin Pumps and Spin Filters". *Phys. Rev. Lett.* 94: 107202-1-4
- Craig, N.J., J. M. Taylor, E. A. Lester y C. M. Marcus. 2004. "Tunable Non-local Spin Control in a Coupled Quantum Dot System". *Science.* 304: 565-570
- Creffield, C.E. y G. Platero. 2002. "ac-driven localization in a two-electron quantum dot molecule". *Phys. Rev. B.* 65: 113304-1-4
- Davidovich, L., N. Zagury, M. Brune, J.M. Raimond y S. Haroche. 1994. "Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields ". *Phys. Rev. A.* 50: 895-898
- Davies, J.H. 1998. "The physics of low-dimensional semiconductors an introduction". Cambridge University. Primera edición. Cambridge. 438 pp.

- de Llano, M. 1996. "Mecánica cuántica". UNAM Facultad de Ciencias. Primera edición. México. 243 pp.
- de Pasquale, F., G.L. Giorgi y S. Paganelli. 2005. "Double-dot chain as a macroscopic quantum bit". *Phys. Rev. A*. 71: 042304-1-7
- Deutsch, D. 1985. "Quantum theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer". *Proc. R. Soc. Lond. A*. 425: 73
- DiVincenzo, D.P. 2000. "The Physical Implementation of Quantum Computation". *Fortschr. Phys.* 48: 771-783
- DiVincenzo, D.P. y D. Loss. 2005. "Rigorous Born approximation and beyond for the spin-boson model". *Phys. Rev. B*: 71. 035318 1-10
- Eckert, K., J. Mompart, X.X. Yi, J. Schliemann, D. Bruß, G. Birkl y M. Lewenstein. 2002. "Quantum computing in optical microtraps based on the motional states of neutral atoms ". *Phys. Rev. A*. 66: 042317-1-11
- Einstein, A. 1948. "Quantum Mechanics and Reality". *Dialectica*. 2: 320-324
- Einstein, A., B. Podolsky y N. Rosen. 1935. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?". *Phys. Rev.* 47: 777-780
- Ekert, A.K. 1991. "Quantum cryptography based on Bell's theorem ". *Phys. Rev. Lett.* 67. 661
- Ekert, A. y R. Jozsa. 1996. "Quantum Computation and Schor's factoring algorithm". *Rev. Mod. Phys.* 68: 733-753
- Elzerman, J.M., R. Hanson, J.S. Greidanus, L.H. Willems van Beveren, S. De Franceschi, L.M.K. Vandersypen, S. Tarucha y L.P. Kouwenhoven. 2003. "Few-electron quantum dot circuit with integrated charge read out". *Phys. Rev. B*. 67: 161308-1-4
- Engel, H.A., L.P. Kouwenhoven, D. Loss y C.M. Marcus. 2004. "Controlling Spin Qubits in Quantum Dots". *Quant. Inf. Proc.* 3: 115-132
- Fano, U. 1957. "Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques". *Rev. Mod. Phys.* 29: 74-93
- Fattal, D., K. Inoue, J. Vuckovic, C. Santori, G.S. Solomon y Y. Yamamoto. 2004. "Entanglement Formation and Violation of Bell's Inequality with a Semiconductor Single Photon Source". *Phys. Rev. Lett.* 92: 037903-1-4
- Fedichkin, L., M. Yanchenko y K.A. Valiev. 2000. "Coherent charge qubits based on GaAs quantum dots with a built-in barrier". *Nanotechnology*. 11: 387-391
- Feynman, R.P. 1982. "Simulating physics with computers". *Int. J. Theor. Phys.* 21: 467-475
- Fine, B.V., F. Mintert y A. Buchleitner. 2005. "Equilibrium entanglement vanishes at finite temperature". *Phys. Rev. B*. 75: 153105-1-2
- Fujisawa, T. y S. Tarucha. 1997a. "Photon assisted tunneling in single and coupled quantum dot systems". *Superlatt. Microstruct.* 21: 247-254

- Fujisawa, T. y S. Tarucha. 1997b. "Multiple photon assisted tunneling between two coupled quantum dots". *Jpn. J. Appl. Phys.* 36: 4000-4003
- Fujisawa, T., T.H. Oosterkamp, W.G. van der Wiel, B.W. Broer, R. Aguado, S. Tarucha y L.P. Kouwenhoven. 1998. "Spontaneous Emission Spectrum in Double Quantum Dot Devices". *Science*. 282: 932-935
- Fujisawa, T., D.G. Austing, Y. Tokura, Y. Hirayama y S. Tarucha. 2002. "Allowed and forbidden transitions in artificial hydrogen and helium atoms". *Nature*. 419: 278-281
- Fujisawa, T., T. Hayashi y Y. Hirayama. 2004a. "Controlled decoherence of a charge qubit in a double quantum dot". *J. Vac. Sci. Technol. B*. 22: 2035-2038
- Fujisawa, T., T. Hayashia, H.D. Cheongb, Y.H. Jeong y Y. Hirayama. 2004b. "Rotation and phase-shift operations for a charge qubit in a double quantum dot". *Phys. E*. 21: 1046-1052
- García-Maraver, R., R. Corbalán, K. Eckert, S. Reibæ, M. Artoni y J. Mompert. 2004. "Cavity QED quantum phase gates for a single longitudinal mode of the intra cavity field". *Phys. Rev. A*. 70: 062324-1-6
- Gardelis, S., C.G. Smith, J. Cooper, D.A. Ritchie, E.H. Linfield y Y. Jin. 2003. "Evidence for transfer of polarization in a quantum dot cellular automata cell consisting of semiconductor quantum dots". *Phys. Rev. B*. 67: 33302-1-4
- Gershenfeld, N.A. e I.L. Chuang. 1997. "Bulk spin-resonance quantum computation". *Science*. 275: 350-356
- Gisin, N. y A. Peres. 1992. "Maximal violation of Bell's inequality for arbitrarily large spin". *Phys. Lett. A*: 162. 15-17
- Gorman, J., D.G. Hasko y D.A. Williams. 2005. "Charge-Qubit Operation of an Isolated Double Quantum Dot". *Phys. Rev. Lett.* 95: 090502-1-4
- Grabert, D.V. y M. H. Devoret. 1992. "Single charges in two-dimensional junctions arrays". En: D.V. Grabert y M.H. Devoret (eds.) *Single charge tunneling Coulomb blockade phenomena in nanostructures*. NATO Science Series B. Plenum. Primera edición. New York. 35 pp
- Greenberger, D.M., M.A. Horne y A. Zeilinger. 1990. "Bell's theorem without inequalities". *A. J. Phys.* 58: 1131-1143
- Grover, L.K. 1996. "A fast quantum mechanical algorithm for database search". *Proc. 28th ACM Symp. Theory of Computing*. 2: 212-219
- Gurvitz, S.A. y Ya.S. Prager. 1996. "Microscopic derivation of rate equations for quantum transport". *Phys. Rev. B*. 53: 15932 - 15943
- Gywat, O., G. Burkard y D. Loss. 2002. "Biexcitons in coupled quantum dots as a source of entangled photons". *Phys. Rev. B*. 65: 205329-1-5
- Häffner, H., F. Schmidt-Kaler, W. Hänsel, C.F. Roos, T. Körber, M. Riebe, J. Benhelm, U.D. Rapol, C. Becher y R. Blatt. 2005b. "Robust entanglement". *Appl. Phys. B*. 81: 151-153

- Häffner, H. W. Hansel, C.F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Korber, U. D. Rapol, M. Riebe, P.O. Schmidt, C. Becher, O. Guhne, W. Dur y R. Blatt. 2005. "Scalable multiparticle entanglement of trapped ions". *Nature*. 438: 643-646
- Hagley, E., X. Maitre, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond y S. Haroche. 1997. "Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of Atoms". *Phys. Rev. Lett.* 79: 1-5
- Hanson, R., L.M.K. Vandersypen, L.H. Willems van Beveren, J.M. Elzerman, I.T. Vink y L.P. Kouwenhoven. 2004. "Semiconductor few-electron quantum dot operated as a bipolar spin filter". *Phys. Rev. B*. 70: 241304 1-4
- Harrison, P. 2000. "Quantum wells, wires and dots". John Wiley and Sons. Primera Edición. Chichester. 453 pp
- Hartmann, U. y F.K. Wilhelm. 2004. "Nonequilibrium stabilization of charge states in double quantum dots". *Phys. Rev. B*. 69: 161309-1-4
- Hayashi, T., T. Fujisawa, H.D. Cheong, Y.H. Jeong, y Y. Hirayama. 2003. "Coherent Manipulation of Electronic States in double quantum dot". *Phys. Rev. Lett.* 91: 226804-1-4
- Hichri A, S. Jaziri y R. Ferreira. 2004a. "Decoherence and quantum entangled exciton states in semiconductor quantum dot molecule". *Phys. Stat. Sol. C*. 1: 598-602
- Hichri, A., S. Jaziri y R. Ferreira. 2004b. "Entangled Bell states of two electrons in coupled quantum dots-phonon decoherence". *Physica E*. 24: 234-243
- Hill, S. y W.K. Wootters. 1997. "Entanglement of a pair of quantum bits". *Phys. Rev. Lett.* 78: 5022-5025
- Horodecki, M., P. Horodecki y R. Horodecki. 1996. "Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions". *Phys. Lett. A*. 223: 333-339
- Imamoglu, A., D. D. Awschalom, G. Burkard, D.P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin y A. Small. 1999. "Quantum Information Processing Using Quantum Dot Spins and Cavity QED". *Phys. Rev. Lett.* 83: 4204-4207
- Jozsa, R. 1998. "Quantum information and its properties". En: H. Lo, S. Popescu y T. Spiller (eds.) "Introduction to quantum computation and information". World Scientific. Singapur. 27 pp
- Jun-Gang, L.I., Z. Jian, C.A.I. Jin-Fang y S. Bin. 2006. "Stationary entanglement of two charge qubits induced by a Damped and Driven Cavity". *Chin. Phys. Lett.* 23: 708-711
- Kane, B.E. 1998. "A silicon-based nuclear spin quantum computer". *Nature*. 393: 133-137
- Kastner, M.A. 1993. "Artificial atoms". *Physics Today*. 46: 24-31
- Keyl, M. 2002. "Fundamentals of quantum information theory". *Phys. Rep.* 369: 431-548
- Kim, Y.K., S.P. Kulik, M.V. Chekhova, W.P. Grice y Y. Shih. 2003. "Experimental entanglement concentration and universal Bell-state synthesizer". *Phys. Rev. A*. 67: 010301-1-4

- Kim, M.S., J. Lee, D. Ahn y P.L. Knight. 2002. "Entanglement induced by a single-mode heat environment". *Phys. Rev. A*. 65: 040101-1-4
- Koiller, B., X. Hu, R.B. Capaz, A.S. Martins y S. Das Sarma. 2005. "Silicon-based spin and charge quantum computation". *An. Acad. Bras. Cienc.* 77: 201-222
- Kouwenhoven, L. P. 1990. "Transport through a finite one-dimensional crystal". *Phys. Rev. Lett.* 65: 361-364
- Kouwenhoven, L.P., C.M. Marcus, P.L. McEuen, S. Tarucha, R.M. Westervelt y N.S. Wingreen. 1997. "Electron transport in quantum dots". En: L.L. Sohn, L.P. Kouwenhoven, G. Schön (eds.). *Mesoscopic Electron Transport*, Vol. 345 NATO Series E. Kluwer, Dordrecht. 105-214 pp.
- Kouwenhoven, L.P. y C. Marcus. 1998. "Quantum dots". *Phys. World*. 11: 35-39
- Kouwenhoven, L.P., D.G. Austing y S. Tarucha. 2001. "Few-electron quantum dots". *Rep. Prog. Phys.* 64: 701-733
- Kraus, B. y J.I. Cirac. 2004. "Discrete Entanglement Distribution with Squeezed Light". *Phys. Rev. Lett.* 92: 013602 1-4
- Kyriakidis, J., M. Pioro-Ladriere, M. Ciorga, A.S. Sachrajda y P. Hawrylak. 2002. "Voltage-tunable singlet-triplet transition in lateral quantum dots". *Phys. Rev. B*. 66: 035320-1-8
- Lambert, N., R. Aguado y T. Brandes. 2006. "Non-equilibrium Entanglement and Noise in Coupled Qubits". preprint condmat/0603652
- Lebedev, A.V., G. Blatter, C.W.J. Beenakker y G.B. Lesovik. 2004. "Entanglement in mesoscopic structures: role of projection". *Phys. Rev. B*. 69: 235312-1-12
- Lee, H.J., W. Namgung y D. Ahna. 2005. "Entanglement generates entanglement: entanglement transfer by interaction". *Phys. Lett. A*. 338: 192-196
- Leggett, A.J., S. Chakravarty, A.T. Dorsey, M.P.A. Fisher, A. Garg y W. Zwerger. 1987. "Dynamics of the dissipative two-state system". *Rev. Mod. Phys.* 59: 1-85
- Lent, C.S., P.D. Tougaw y W. Porod. 1992. "Bistable saturation in coupled quantum dot for quantum cellular automata". *Appl. Phys. Lett.* 62: 714-716
- Lent, C.S. y P.D. Tougaw. 1993. "Lines of interacting quantum-dot cells: A binary wire". *J. Appl. Phys.* 74: 6227-6233
- Lent, C.S., P.D. Tougaw, W. Porod y G.H. Bernstein. 1993. "Quantum cellular automata". *Nanotechnology*. 4: 49-57
- Lent, C.S. y P.D. Tougaw. 1994. "Bistable saturation due to single electron charging in rings of tunnel junctions". *J. Appl. Phys.* 75: 4077-4080
- Lesovik, G.B., T. Martin y G. Blatter. 2001. "Electronic entanglement in the vicinity of a superconductor". *Eur. Phys. J. B*. 24: 287-290
- Liang, X.T. 2005. "Non-Markovian dynamics and phonon decoherence of a double quantum dot charge qubit". *Phys. Rev. B*. 72: 245328 1-5

- Livermore, C., C. H. Crouch, R.M. Westervelt, K.L. Campman y A.C. Gossard. 1996. "The Coulomb blockade in coupled quantum dots". *Science*. 274: 1332-1335
- Lo, H.K. 1998. "Quantum Cryptology" En: H.K. Lo, S. Popescu y T. Spiller (eds.). *Introduction to Quantum Computation and Information*. World Scientific. Primera edición. Singapur. 44 pp.
- Lorenzo, A.D. y Y.V. Nazarov. 2005. "Full counting statistics with spin-sensitive detectors reveals spin singlets". *Phys. Rev. Lett.* 94: 210601-1-4
- Loss, D. y D.P. DiVincenzo. 1998. "Quantum Computation with quantum dots". *Phys. Rev. A*. 57: 120-126
- Mahan, G. 2000. "Many-particle physics". Kluwer Academic/Plenum Press. Tercera edición. Nueva York. 785 pp.
- Mahler, G. y V.A. Weberruß. 1995. "Quantum networks: dynamics of open nanostructures". Springer-Verlag. Primera edición. Berlin. 340 pp
- Makhlin, Yu., G. Schoen y A. Shnirman. 1998. "Josephson-junction qubits with controlled couplings". *Nature*. 398: 305-307
- Marder, M.P. 2000. "Condensed Matter Physics". John Wiley and Sons. Primera edición. Nueva York. 895 pp.
- Matagne, P. y J.P. Leburton. 2003. "Quantum dots: artificial atoms and molecules". En: S. Bandyopadhyay y H.S. Nalwa (eds.). *Quantum dots and nanowires*. American Scientific Publishers, California. 1-66 p.
- Messina, A. 2002. "A single atom-based generation of Bell states of two cavities". *Europhys. J. D*. 18: 379-383
- Metwally, N. 2002. "More efficient entanglement purification". *Phys. Rev. A*. 66: 054302-1-4
- Mintert, F. 2004. "Measures and dynamics of entangled states". Tesis doctoral. Ludwig-Maximilians Universität. München. 2004. 100 pp.
- Mintert, F., A.R.R. Carvalho, M. Kus y A. Buchleitner. 2005. "Measures and dynamics of entangled states". *Phys. Rep.* 415: 207-259
- Moura Alves, C. 2005. "Detection of quantum entanglement in physical systems". PhD. Thesis. Merton College. University of Oxford. 54 pp.
- Mozyrsky, D., V. Privman y M. Lawrence Glasser. 2001. "Indirect Interaction of Solid-State Qubits via Two-Dimensional Electron Gas". *Phys. Rev. Lett.* 86: 5112-5115
- Nakamura, Y., Y. A. Pashkin y J.S. Tsai. 1999. "Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box". *Nature*. 398: 786-788
- Nicolosi, S., A. Napoli, A. Messina y F. Petruccione. 2004. "Dissipation-induced stationary entanglement in dipole-dipole interacting atomic samples". *Phys. Rev. A*. 70: 022511-1-4
- Nielsen, M. e I.L. Chuang. 2000. "Quantum Computation and Quantum Information". Cambridge University Press. Primera Edición. Cambridge. 676 pp.

- Oh, S., y J. Kim. 2006. "Entanglement between qubits induced by a common environment with a gap". *Phys. Rev. A.* 73: 062306-1-5
- Orlov, A.O., I. Amlani, G.H. Bernstein, C.S. Lent y G.L. Sneider. 1997. "Realization of a functional cell for quantum-dot cellular automata". *Science.* 277: 928-930
- Pan, J.W., D. Bouwmeester, H. Weinfurter y A. Zeilinger. 1998. "Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons That Never Interacted ". *Phys. Rev. Lett.* 80: 3891-3894
- Papaliolios, C. 1967. "Experimental Test of a Hidden-Variable Quantum Theory ". *Phys. Rev. Lett.* 18: 622-625
- Pashkin, Y.A., T.Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D.V. Averin y J.S. Tsai. 2003. "Quantum oscillations in two coupled charge qubits". *Nature.* 421: 823-826
- Paternostro, M., W. Son, M.S. Kim, G. Falci y G. Massimo Palma. 2004a. "Dynamical entanglement transfer for quantum-information networks". *Phys Rev. A.* 70: 022320-1-9
- Paternostro, M., W. Son y M.S. Kim. 2004b. "Complete Conditions for Entanglement Transfer". *Phys. Rev. Lett.* 92: 197901-1-4
- Paternostro, M., G. Falci, M. Kim y G. Massimo Palma. 2004c. "Entanglement between two superconducting qubits via interaction with nonclassical radiation". *Phys. Rev. B.* 69: 214502-1-6
- Peres, A. 1996. "Separability Criterion for Density Matrices". *Phys. Rev. Lett.* 77: 1413-1416
- Petta, J.R., A.C. Johnson, C.M. Marcus, M.P. Hanson y A.C. Gossard. 2004. "Manipulation of a Single Charge in a Double Quantum Dot". *Phys. Rev. Lett.* 93: 186802-1-4
- Petta, J.R., A.C. Johnson, J.M. Taylor, E.A. Laird, A. Yacoby, M.D. Lukin, C.M. Marcus, M.P. Hanson y A. C. Gossard. 2005. "Coherent Manipulation of Coupled Electron Spins in Semiconductor Quantum Dots". *Science.* 309: 2180-2184
- Piermarocchi, C., P. Chen y L.J. Sham. 2002. "Optical RKKY Interaction between Charged Semiconductor Quantum Dots". *Phys. Rev. Lett.* 89: 167402-1-4
- Platero, G. y R. Aguado. 2004. "Photon-assisted transport in semiconductor nanostructures". *Phys. Rep.* 395: 1-157
- Plenio, M.B y V. Vedral. 1998. "Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world". *Contemp. Phys.* 431: 431-446
- Plenio, M.B. y S.F. Huelga. 2002. "Entangled Light from White Noise". *Phys. Rev. Lett.* 88: 197901-1-4
- Plenio, M.B., S.F. Huelga, A. Beige y P.L. Knight. 1999. "Cavity-loss-induced generation of entangled atoms". *Phys. Rev. A.* 59: 2461-2475
- Popescu, S. y D. Rohrlich. 1998. "The joy of entanglement". En: H. Lo, S. Popescu y T. Spiller (eds.) "Introduction to quantum computation and information". World Scientific. Singapur. 20 pp

- Prada E. y F. Sols. 2005. "Divergent beams of nonlocally entangled electrons emitted from hybrid normal-superconducting structures". *New J. Phys.* 7: 231-241
- Prada, E. 2006. "Generation, evolution and detection of electron entanglement in nanostructures". Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid. 187 pp.
- Preskill, J. 2004. "Lecture notes on Quantum Information and Computation". California Institute of Technology. Los Angeles. 481 pp.
- Privman, V., I.D. Vagner y G. Kventsel. 1998. "Quantum computation in quantum-Hall systems". *Phys. Lett. A.* 239: 141-146
- Quiroga, L. y N.F. Johnson. 1999. "Entangled Bell and Greenberger-Horne-Zeilinger States of Excitons in Coupled Quantum Dots". *Phys. Rev. Lett.* 83: 2270-2273
- Rauschenbeutel, A., G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond y S. Haroche. 1999. "Coherent Operation of a Tunable Quantum Phase Gate in Cavity QED". *Phys. Rev. Lett.* 83: 5166-5169
- Recher, P. y D. Loss. 2003. "Dynamical Coulomb Blockade and spin-entangled electrons". *Phys. Rev. Lett.* 91: 267003-1-4
- Reina, JH, L. Quiroga y N.F. Johnson. 2000. "Quantum entanglement and information processing via excitons in optically driven quantum dots". *Phys. Rev. A.* 62: 012305-1-8
- Riebe, M, H. Häffner, C.F. Roos, W. Hansel, J. Benhelm, G.P.T. Lancaster, T.W. Korber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D.F.V. James y R. Blatt. 2004. "Deterministic quantum teleportation with atoms". *Nature.* 429: 734-737
- Rieffel, E. y W. Polak. 2000. "An Introduction to Quantum Computing for Non-Physicists". *ACM Computing Surveys.* 32: 300-335
- Rojas, F., E. Cota y S.E. Ulloa. 2000. "Dynamic behavior of asymmetric quantum dot cells". *Physica E.* 6: 428-431
- Rojas, F., E. Cota y S.E. Ulloa. 2002. "Quantum dynamics, dissipation and asymmetry effects in quantum dot arrays". *Phys. Rev. B.* 66: 235305-1-10
- Roos, C.F., G. P.T. Lancaster, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, S. Gulde, C. Becher, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler y R. Blatt. 2004. "Bell States of Atoms with Ultralong Lifetimes and Their Tomographic State Analysis". *Phys. Rev. Lett.* 92: 220402-1-4
- Sakurai, J.J. 1994. "Modern Quantum Mechanics". Pearson Education Asia. Edición revisada. Singapore. 500 pp
- Samuelsson, S., E.V. Sukhorukov y M. Buttiker. 2003. "Orbital entanglement and violation of Bell inequalities in mesoscopic conductors". *Phys. Rev. Lett.* 91: 157002-1-3
- Sánchez, R., E. Cota, G. Platero y R. Aguado. 2006. "Spin-filtering through excited states in double-quantum dot pumps". *Phys. Rev. B.* 74: 035326-1-8
- Saraga, D.S. y D. Loss. 2003. "Spin-Entangled Currents Created by a Triple Quantum Dot". *Phys. Rev. Lett.* 90: 166803-1-5

- Schneider, S. y G.J. Milburn. 2002. "Entanglement in the steady state of a collective-angular-momentum (Dicke) model". *Phys. Rev. A.* 65: 042107-1-5
- Schrödinger, E. 1935. "Discussion of probability relations between separated systems". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 31: 555-563
- Schumacher, B. 1995. "Quantum coding". *Phys. Rev. A.* 51: 2738-2747
- Schwabl, F. 2001. "Quantum Mechanics". Springer. Segunda Edición. Berlín. 416 pp
- Shnirman, A, G. Schön, y Z. Hermon. 1997. "Quantum Manipulations of Small Josephson Junctions". *Phys. Rev. Lett.* 79: 2371-2374
- Shor, P. 1994. "Algorithms for quantum computation: Discrete log and factoring". *Proc. Symp. Found. Comp. Sci.* 124-134
- Shor, P. 1997. "Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer". *SIAM Journal of Computing.* 26: 1484-1509
- Snider, G.L., A.O. Orlov, I. Amlani, X. Zuo, G.H. Bernstein y C.S. Lent. 1999. "Quantum dot cellular automata: Review and recent experiments". *J. Appl. Phys.* 85: 4283-4285
- Solenov, D., D. Tolkunov y V. Privman. 2006. "Coherent Interaction of Spins Induced by Thermal Bosonic Environment". *Phys. Lett. A.* 359: 81-85
- Solenov, D., D. Tolkunov y V. Privman. 2007. "Exchange Interaction, Entanglement and Quantum Noise Due to a Thermal Bosonic Field". *Phys. Rev. B.* 75: 035134 1-11
- Steane, A. 1998. "Quantum computing". *Rep. Prog. Phys.* 61: 117-173
- Stoof, T.H. y Yu.V. Nazarov. 1996. "Time-dependent resonant tunneling via two discrete states". *Phys. Rev. B.* 53: 1050-1053
- Tamborenea, P.I. y H. Metiu . 2001. "Localization and entanglement of two interacting electrons in a quantum-dot molecule ". *Europhys. Lett.* 53: 776-782
- Tamura, H., H. Takayanagi y K. Shiraishi. 2003. "Quantum dot atoms, molecules and superlattices". En: S. Bandyopadhyay y H.S. Nalwa (ed.). *Quantum dots and nanowires.* American Scientific Publishers , California. 67-11 p.
- Tanamoto, T. 2000. "Quantum gates by coupled asymmetric quantum dots and controlled-NOT-gate operation". *Phys. Rev. A.* 61: 022305-1-7
- Tanamoto, T. y X. Hu. 2005. "Measurement of two-qubit states with quantum point contacts coupled by a quantum dot". *J. Phys. C.: Condens. Matter.* 17: 6895-6909
- Tarucha, S., D.G. Agusting y T. Honda. 1996. "Shell filling and spin effects in a few electron quantum dot". *Phys. Rev. Lett.* 77: 3613-3616
- Taylor, P.L. y O. Heinonen. 2002. "A quantum approach to Condensed Matter Physics". Cambridge University Press. Primera Edición. Cambridge. 414 pp
- Thorwart, M., E. Paladino y M. Grifoni. 2004. "Dynamics of the spin-boson model with a structured environment". *Chem. Phys.* 296: 333-344

- Tóth, G. y C.S. Lent. 2001. "Quantum computing with quantum-dot cellular automata". *Phys. Rev. A*. 63: 52315-1-9
- Tougaw, P.D. y C.S. Lent. 1994. "Logical devices implemented using quantum cellular automata". *J. Appl. Phys.* 75: 1818-1825
- Tougaw, P. D. y C.S. Lent. 1996. "Dynamic behavior of quantum cellular automata". *J. Appl. Phys.* 80: 47224736
- Trauzettel, B., A.N. Jordan, C.W.J. Beenakker y M. Büttiker. 2006. "Parity meter for charge qubits: An efficient quantum entangler". *Phys. Rev. B*. 73: 235331 1-7
- Turchette Q.A., C.S. Wood, B.E. King, C.J. Myatt, W.M. Itano, C. Monroe y D.J. Wineland. 1998. "Deterministic entanglement of two trapped ions". *Phys. Rev. Lett.* 81: 3631-3634
- Unruh, W.G. 1995. "Maintaining quantum coherence in quantum computers". *Phys. Rev. A*. 51: 992-997
- van der Wiel, W. G., T. Fujisawa, S. Tarucha y L.P. Kouwenhoven. 2001. "A double quantum dot as an Artificial Two-level System". *Jpn. J. Appl. Phys.* 40: 2100-2104
- van der Wiel, W.G., S. de Franceschi, J.M. Elzerman, T. Fujisawa, S. Tarucha y L.P. Kouwenhoven. 2003. "Electron transport through double quantum dots". *Rev. Mod. Phys.* 75: 1283-1342
- Vandersypen, L.M.K., M. Steffen, G. Breyta, C.S. Yannoni, M. H. Sherwood y I.L. Chuang. 2001. "Experimental realization of Shore's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance". *Nature*. 414: 883-887
- Vedral, V., M.B. Plenio, M.A. Rippin y P.L. Knight. 1997. "Quantifying Entanglement". *Phys. Rev. Lett.* 78: 2275-2279
- Vedral, V. y M.B. Plenio. 1998. "Basics of Quantum Computation". *Prog. Quant. Electron.* 22: 1-40
- Vedral, V., M.B. Plenio y P.L. Knight. 2001. "Entanglement Quantification". En: D. Bouwmeester, A. Ekert y A. Zeilinger (eds.). *The physics of quantum information*. Springer. Primera Edición. Berlin. 314 pp.
- Vidal, G. y R.F Werner. 2002. "Computable measure of entanglement". *Phys. Rev. A*. 65: 032314-1-11
- Vorojtsov, S., E.R. Mucciolo y H.U. Baranger. 2005. "Phonon decoherence of a double quantum dot charge qubit". *Phys. Rev. B*. 71: 205322-1-7
- Vorrath, T. y T. Brandes. 2003. "Dicke effect in the tunnel current through two double quantum dots". *Phys. Rev. B*. 68: 035309-1-11
- Vorrath, T. y T. Brandes. 2005. "Dynamics of a Large Spin with Strong Dissipation". *Phys. Rev. Lett.* 95: 070402-1-4
- Vrijen, R., E. Yablonovitch, K. Wang, H.W. Jiang, A. Balandin, V. Roychowdhury, T. Mor y D.P. DiVincenzo. 2000. "Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures". *Phys. Rev. A*. 62: 012306-1-10

- Walther, P. y A. Zeilinger. 2005. "Experimental realization of a photonic Bell-state analyzer". *Phys. Rev. A*. 72: 10302-1-4
- Wang, C.K., I.I. Yakimenko, K.F. Berggren y I.V. Zozoulenko. 1998. "Dynamical response in an array of quantum-dot cells". *J. Appl. Phys.* 84: 2684-2689
- Weichselbaum, A. y S.E. Ulloa. 2004. "Charge qubits and limitations of electrostatic quantum gates". *Phys. Rev. A*. 70: 032328-1-8
- Weiss, U. 1999. "Quantum dissipative systems". World Scientific. Segunda edición. Singapur. 448 pp
- Weiss, S., M. Thorwart y R. Egger. 2006. "Charge qubit entanglement in double quantum dots". *Europhys. Lett.* 76: 905-911
- Wong, H. y Z. De Chen. 2006. "Variational Approach to the Spin-boson Model with a Sub-Ohmic Bath". *cond-mat/0609201*
- Wootters, W.K. 1998. "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits". *Phys. Rev. Lett.* 80: 2245-2248
- Wu, Z.J., K. Zhu, X.Z. Yuan, Y. Jiang y H. Zheng. 2005. "Charge qubit dynamics in a double quantum dot coupled to phonons". *Phys. Rev. B*. 71: 205323-1-7
- Yamamoto, T., Yu. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura y J.S. Tsai. 2003. "Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits". *Nature*. 425: 941-944
- Yi, X.X., G.R. Jin y D.L. Zhou. 2001. "Creating Bell states and decoherence effects in a quantum-dot system". *Phys. Rev. A*. 63: 062307-1-4
- Zanardi, P. y F. Rossi. 1998. "Quantum Information in Semiconductors: Noiseless Encoding in a Quantum-Dot Array". *Phys. Rev. Lett.* 81: 4752-4755
- Zeilinger, A. 1998. "Quantum Entanglement: a fundamental concept finding its applications". *Phys. Scr.* T76: 203-209
- Zhang, L.-X, J P. Leburton, R. Hanson y L. P. Kouwenhoven. 2004. "Engineering the quantum point contact response to single-electron charging in a few-electron quantum-dot circuit". *Appl. Phys. Lett.* 85: 2628-2630
- Zhang, P., X.G. Li y X.G. Zhao. 2002. "Entanglement of two interacting electrons in a double quantum dot". *Phys. Lett. A*. 294: 108-112
- Zhang, P., Qi-K. Xue, X.G. Zhao y X.C. Xie. 2002. "Coulomb-enhanced dynamic localization and Bell-state generation in coupled quantum dots". *Phys. Rev. A*. 66: 022117-1-5
- Zheng, S.B. y G. Guo. 2000. "Efficient Scheme for Two-Atom Entanglement and Quantum Information Processing in Cavity QED". *Phys. Rev. Lett.* 85: 2392-2395
- Zou, J., J.G. Li, B. Shao, J. Li y Q. ShuLi. 2006. "Entanglement transfer from entangled two-mode fields to a pair of separable and mixed qubits". *Phys. Rev. A*. 73: 042319 1-9
- Zukowski, M., A. Zeilinger, M. A. Horne y A.K. Ekert. 1993. "Event-Ready-Detectors Bell Experiment via Entanglement Swapping". *Phys. Rev. Lett.* 71: 4287-4290

Apéndice A

Ecuación maestra Markoviana para dos dobles puntos cuánticos

A continuación presentaremos algunos detalles de la obtención de la ecuación de movimiento para los elementos de la matriz de densidad reducida del arreglo de dos qubits de carga acoplados débilmente a un baño de fonones en equilibrio termodinámico, ecuación (3.13), así como de las expresiones para las probabilidades de transición por unidad de tiempo, \tilde{W}_{mn} , dadas en la ecuación (3.15).

A.1. Ecuación maestra

Comenzamos por escribir el acoplamiento bilineal entre el arreglo y el baño dado en (3.7) como

$$V_{SB} = S_1 F_1 + S_2 F_2 = \sum_i S_i F_i \quad (\text{A.1})$$

en donde S_i son operadores que actúan únicamente en variables del sistema y F_i son operadores únicamente del baño. En la representación de interacción toma la forma (Blum, 1981; Mahler y Weberruß, 1995)

$$\tilde{V}_{SB}(t) = \sum_i \tilde{L}_i(t) \tilde{F}_i(t) \quad (\text{A.2})$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i(t) &= e^{iH_S t/\hbar} L_i e^{-iH_S t/\hbar}, \\ \tilde{F}_i(t) &= e^{iH_B t/\hbar} F_i e^{-iH_B t/\hbar} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

y se supone que los operadores del baño no tienen elementos diagonales, $\langle r | F_i | r \rangle = 0$ (donde $|r\rangle$ son estados del baño de fonones).

La expresión (A.2) se inserta en la ecuación de movimiento para la matriz de densidad reducida del sistema obtenida mediante la aproximación de Born, ecuación (2.41). Teniendo en cuenta que los operadores del sistema y del baño conmutan y empleando la propiedad cíclica de la traza, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = & -\frac{i}{\hbar} \sum_i [\tilde{L}_i(t), \rho_S(0)] Tr_B \{ \tilde{F}_i(t) \rho_B(0) \} \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_0^t dt' \{ [\tilde{L}_i(t), \tilde{L}_j(t') \rho_S(t')] G_{ij}(t, t') - [\tilde{L}_i(t), \rho_S(t') \tilde{L}_j(t')] G_{ji}(t', t) \} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

En donde

$$\begin{aligned} G_{ij}(t, t') &= Tr_B \{ \tilde{F}_i(t) \tilde{F}_j(t') \rho_B(0) \}, \\ G_{ji}(t', t) &= Tr_B \{ \tilde{F}_j(t') \tilde{F}_i(t) \rho_B(0) \} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

son las *funciones de correlación del baño* (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995) que incluyen toda la información del reservorio y caracterizan las correlaciones que en promedio existen entre el sistema y el baño a tiempos t y t' .

Debido a que se considera que el baño está en equilibrio termodinámico con una matriz de densidad diagonal, el primer término de la ecuación (A.4) es cero, obteniéndose en forma abreviada la ecuación (3.12).

Si se introduce la nueva variable $\tau = t - t'$, las funciones de correlación dependen de esa diferencia de tiempo, adquiriendo la forma (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995):

$$\begin{aligned} G_{ij}(\tau) &= Tr \{ \tilde{F}_i(\tau) F_j(0) \rho_B(0) \}, \\ G_{ji}(-\tau) &= Tr \{ F_j(0) \tilde{F}_i(\tau) \rho_B(0) \} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

las cuales tienen un máximo a $t = t'$ pero disminuyen para intervalos mayores al tiempo característico en el que el baño pierde toda memoria de la interacción con el sistema, τ_c , hasta hacerse cero para tiempos $\tau \gg \tau_c$. Este comportamiento permite emplear la aproximación Markoviana descrita en el Capítulo 2; de esta forma la matriz de densidad reducida del sistema depende únicamente del tiempo t y se puede extender hasta infinito el límite de la integral en (A.4) para obtener la expresión

$$\frac{d\tilde{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_0^t dt' \{ [\tilde{L}_i(t), \tilde{L}_j(t-\tau) \rho_S(t)] G_{ij}(\tau) - [\tilde{L}_i(t), \rho_S(t) \tilde{L}_j(t-\tau)] G_{ji}(-\tau) \} \quad (\text{A.7})$$

Al proyectar en eigenestados $|s\rangle$ de H_S , esta ecuación puede escribirse como

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t)_{s's} = \sum_{mn} \tilde{\mathbf{R}}_{s'smn}(t) \tilde{\rho}_S(t)_{mn} \quad (\text{A.8})$$

en donde los elementos de matriz

$$\tilde{\mathbf{R}}_{s'smn}(t) = \left\{ -\sum_k \delta_{sn} \Gamma_{s'kkm}^+ + \Gamma_{nss'm}^+ + \Gamma_{nss'm}^- - \sum_k \delta_{s'm} \Gamma_{nkks}^- \right\} e^{i(\omega_{s's} - \omega_{mn})t} \quad (\text{A.9})$$

constituyen al *tensor de relajación de Redfield* $\tilde{\mathbf{R}}$, en el cual se han introducido los *parámetros de decaimiento complejos* (Blum, 1981; Mahler y Weberruß, 1995; Breuer y Petruccione, 2002)

$$\begin{aligned} \Gamma_{mkl n}^+ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{ij} \langle m|L_i|k\rangle \langle l|L_j|n\rangle \int_0^\infty e^{-i\omega_m \tau} G_{ij}(\tau) d\tau, \\ \Gamma_{mkl n}^- &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{ij} \langle m|L_i|k\rangle \langle l|L_j|n\rangle \int_0^\infty e^{-i\omega_m \tau} G_{ij}(-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

con $\langle m|\tilde{L}_i(t)|n\rangle = e^{i\omega_{mn}t} \langle m|L_i|n\rangle$ y $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$, donde E_s son las eigenenergías del sistema de qubits de carga.

La dependencia temporal de este tensor desaparece si $\omega_{s's} - \omega_{mn} = 0$. Sujetándonos a esta condición (conocida como aproximación secular) y asumiendo que no hay degeneración en los estados de energía del arreglo, únicamente los elementos de matriz $\tilde{\mathbf{R}}_{ssss}$, $\tilde{\mathbf{R}}_{ssmm}$ ($m \neq s$) y $\tilde{\mathbf{R}}_{s'ss's}$ son diferentes de cero. De esta forma se obtiene el tensor de relajación independiente del tiempo (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995):

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ss'mn} = \begin{cases} \delta_{nm} (1 - \delta_{ms}) \tilde{W}_{sm} - \delta_{ms} \delta_{ns} \sum_{k \neq s} \tilde{W}_{ks} & (s = s') \\ -\gamma_{s's} \delta_{sm} \delta_{ns'} & (s \neq s') \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

en donde

$$\tilde{W}_{sm} = \Gamma_{mssm}^+ + \Gamma_{mssm}^- \quad (\text{A.12})$$

son las probabilidades por unidad de tiempo de que el sistema realice una transición del estado $|m\rangle$ al $|s\rangle$ del arreglo (con $m \neq s$) como resultado de su interacción con el baño, mientras que

$$\gamma_{s's} = \sum_k (\Gamma_{s'kks'}^+ + \Gamma_{mssm}^-) - (\Gamma_{sss's'}^+ + \Gamma_{sss's'}^-) \quad (\text{A.13})$$

se conoce como parámetro de amortiguamiento (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995).

Entonces, la ecuación maestra en la representación de interacción toma la forma explícita

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t)_{s's} = \begin{cases} \sum_{m \neq s} \tilde{W}_{sm} \tilde{\rho}_S(t)_{mm} - \tilde{\rho}_S(t)_{ss} \sum_{m \neq s} \tilde{W}_{ms} & (s' = s) \\ -\gamma_{s's} \tilde{\rho}_S(t)_{s's} & (s' \neq s) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Si se lleva a cabo la transformación

$$\tilde{\rho}_S(t) = e^{iH_S t/\hbar} \rho_S(t) e^{-iH_S t/\hbar} \quad (\text{A.15})$$

se obtiene la *ecuación maestra Markoviana* en la representación de Schrödinger

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t)_{s's} &= -\frac{i}{\hbar} \langle s' | [H_S, \rho_S(t)] | s \rangle + \delta_{s's} \sum_m \tilde{W}_{sm} \tilde{\rho}_S(t)_{mm} - \gamma_{s's} \tilde{\rho}_S(t)_{s's} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle s' | [H_S, \rho_S(t)] | s \rangle + \sum_{mn} \tilde{R}_{ss'mn} \rho_S(t)_{mn} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

la cual reemplaza a la ecuación de evolución del sistema total. Puede apreciarse que el primer término describe la evolución coherente del sistema, mientras que el segundo determina los efectos irreversibles (o decoherentes) ocasionados por la interacción del arreglo con el baño disipativo. Ambas partes, coherente y decoherente, son contribuciones aditivas a la evolución de la matriz de densidad reducida de los qubits (Blum, 1981; Mahler y Weberruß, 1995).

De forma compacta y en la eigenbase de H_S , se obtiene la ecuación (3.13):

$$\dot{\rho}_S(t)_{ss'} = -i\omega_{ss'} \rho_S(t)_{ss'} + \sum_{mn} \tilde{R}_{ss'mn} \rho_S(t)_{mn} \quad (\text{A.17})$$

cuyos elementos diagonales determinan la probabilidad de que los estados $|s\rangle$ del arreglo estén ocupados al tiempo t . La evolución temporal de las poblaciones está dada por la relación

$$\dot{\rho}_S(t)_{ss} = \sum_{m \neq s} \tilde{W}_{sm} \rho_S(t)_{nm} - \rho_S(t)_{nn} \sum_{m \neq s} \tilde{W}_{ms} \quad (\text{A.18})$$

indicando que el la población del estado $|s\rangle$ se incrementa por transiciones desde otros estados $|m\rangle$, y decrece como consecuencia de transiciones que ocurren de $|s\rangle$ a cualquier estado $|m\rangle$. Ambos procesos son ocasionados por la interacción del arreglo con el baño.

Por otra parte, la evolución de las coherencias (elementos no diagonales) está dada por

$$\dot{\rho}_S(t)_{ss'} = -i\omega_{ss'} \rho_S(t)_{ss'} - \gamma_{s's} \rho_S(t)_{s's} \quad (\text{A.19})$$

en donde el parámetro $\gamma_{s's}$ representa la razón de decaimiento de las coherencias debida a la interacción del sistema con el baño. De la definición de las \tilde{W}_{nm} se determina que su parte real, $\text{Re} \gamma_{ss'}$, tiene dos contribuciones:

$$\text{Re} \gamma_{ss'} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \neq s} \tilde{W}_{ks} + \sum_{k \neq s'} \tilde{W}_{ks'} \right) + \text{Re}(\Gamma_{sss's'}^+ + \Gamma_{sss's'}^-) \quad (\text{A.20})$$

el primer término recibe el nombre de parámetro no-adiabático por ser la mitad de la suma de las razones con las que el sistema deja el estado $|s\rangle$ o el estado $|s'\rangle$, mientras que el segundo término recibe el nombre de parámetro adiabático y se refiere a procesos en los que el sistema no cambia de estado por su interacción con el baño (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberruß, 1995).

La parte imaginaria del parámetro de amortiguamiento, $\text{Im}\gamma_{ss'}$, representa un cambio promedio en la energía del estado $|s\rangle$ el cual puede combinarse directamente con la frecuencia de la parte coherente de la ecuación (A.19) o puede ser establecida en cero arbitrariamente (Mahler y Weberruß, 1995), por lo que no es necesario mostrarla de forma explícita.

A.2. Probabilidades de transición

En los siguientes párrafos derivaremos la expresión detallada de las probabilidades de transición \tilde{W}_{nm} dadas en la ecuación (3.15) a partir de su definición, ecuación (A.12).

Comenzamos por escribir los parámetros de decaimiento complejos (A.10) en la forma

$$\Gamma_{nmnn}^+ = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{rr'} \sum_{ij} \langle n|L_i|m\rangle \langle m|L_j|n\rangle \langle r'|F_i|r\rangle \langle r|F_j|r'\rangle \langle r'|\rho_B(0)|r\rangle \int_0^\infty e^{i(E_{r'r} - \hbar\omega_{mn})\tau/\hbar} d\tau \quad (\text{A.21})$$

en donde se ha empleado la definición de las funciones de correlación del baño, ecuación (A.5).

Utilizando la abreviatura $\rho_B(0)_{r'r'} = \langle r'|\rho_B(0)|r\rangle$ y la definición $\int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau = \pi\delta(\omega) + iP\frac{1}{\omega}$, donde P es el valor principal de la integral que para sistemas de este tipo puede despreciarse (Mahler y Weberruß, 1995), las probabilidades de transición se calculan como

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mn} &= \Gamma_{nmnn}^+ + \Gamma_{nmnn}^- \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{ij} \sum_{r'r'} \langle n|L_i|m\rangle \langle m|L_j|n\rangle \langle r'|F_i|r\rangle \langle r|F_j|r'\rangle \rho_B(0)_{r'r'} \delta(E_{r'r} - \hbar\omega_{mn}) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Recordando la definición del operador de interacción entre el sistema y el baño, ecuación (A.1), podemos identificar que $\sum_i \langle n|L_i|m\rangle \langle r'|F_i|r\rangle = \langle nr'|V_{SB}|mr\rangle$ y, por tanto, la expresión anterior queda escrita de forma compacta como

$$\tilde{W}_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{r'r'} |\langle mr|V_{SB}|nr'\rangle|^2 \rho_B(0)_{r'r'} \delta(E_{r'r} - \hbar\omega_{mn}) \quad (\text{A.23})$$

la cual recibe el nombre de “regla de oro de Fermi para las probabilidades de transición” (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992; Mahler y Weberuβ, 1995). En ésta, el elemento $|\langle mr|V_{SB}|nr'\rangle|^2$ representa la probabilidad de que el sistema realice una transición del estado $|n\rangle$ al $|m\rangle$ mientras que simultáneamente el baño pasa del estado $|r'\rangle$ con energía $E_{r'}$ al estado $|r\rangle$ con energía E_r . Estas probabilidades están además promediadas sobre todos los posibles estados del baño térmico, y la función delta representa la conservación de la energía para el sistema global qubits+baño (Blum, 1981; Cohen-Tannoudji et al., 1992).

Hasta el momento se ha realizado un tratamiento general con objeto de comprender los términos y parámetros involucrados en el proceso de decoherencia ocasionado por la interacción del sistema con un baño térmico.

En específico para el sistema en estudio, debe recordarse que los operadores del baño considerados son $F_1 = \sum_q g_q a_q^\dagger$. Teniendo en cuenta que $a_q^\dagger a_q$ es el operador de número de fonones y que su valor promedio está dado por $Tr_B\{a_q^\dagger a_q \rho_B(0)\} = \bar{n}(\omega_q)$, en la ecuación (A.22) se desprecian los términos que no conservan el número de partículas en el baño (es decir, combinaciones de operadores bosónicos del tipo $a_q^\dagger a_q^\dagger$ o $a_q a_q$).

La función delta determina también la distribución de frecuencias “permitidas” para el baño de fonones, por lo que puede relacionarse con la densidad de estados o densidad espectral del baño, $J(\omega)$. Debido a que nos encontramos en el caso de acoplamiento débil, podemos emplear uno de los modelos más simples que representan a esta cantidad y que fue propuesto por Debye en 1912 (Ashcroft y Mermin, 1976; Marder, 2000; Taylor y Heinonen, 2002). En éste, $J(\omega)$ es proporcional a $\omega^{1/2}$ hasta una frecuencia máxima, por encima de la cual es cero, y que estará definida por las frecuencias naturales del arreglo de qubits, ω_{mn} .

En base a estas consideraciones y empleando la relación de conmutación de bosones, $a_q a_q^\dagger = 1 + a_q^\dagger a_q$, se llega a

$$\tilde{W}_{mn} = \frac{2\pi D^2}{\hbar} |g(\omega_k)|^2 J(\omega_{mn}) \{ \langle n|S_1|m\rangle \langle m|S_2|n\rangle \bar{n}(\omega_{mn}) + \langle n|S_2|m\rangle \langle m|S_1|n\rangle [1 + \bar{n}(\omega_{mn})] \} \quad (\text{A.24})$$

Debido a que $S_2 = S_1^\dagger$, y empleando la notación $S_{1,nm} = \langle n|S_1|m\rangle$, se obtiene la expresión (3.15) para \tilde{W}_{mn} .

Adicionalmente, de (A.21) es fácil observar que el parámetro adiabático de la ecuación (A.20) es proporcional a los elementos diagonales del término de interacción electrón-fonón, que para nuestro problema en particular es cero y por consiguiente la parte real de $\gamma_{s's}$ queda dada por:

$$\text{Re } \gamma_{ss'} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \neq s} \tilde{W}_{ks} + \sum_{k \neq s'} \tilde{W}_{ks'} \right) \quad (\text{A.25})$$

Apéndice B

Transformación de polarón y ecuación maestra para dos qubits de carga

En este apéndice se amplía el desarrollo empleado en la obtención de las ecuaciones para los elementos de la matriz de densidad reducida del arreglo de dos qubits de carga en el régimen de acoplamiento fuerte con un baño disipativo. Primero mostraremos algunos detalles de la transformación de polarón de los operadores del Hamiltoniano (5.7) seguido de una breve explicación del tratamiento perturbativo utilizado para describir el acoplo de uno de los dobles puntos cuánticos a contactos de electrones. Posteriormente se expone el cálculo de las ecuaciones para los elementos de matriz a partir de la ecuación maestra (5.17), así como la forma explícita de las funciones de correlación bosónicas. Finalmente se muestra la transformada de Laplace de dichas ecuaciones.

B.1. Transformación de polarón para dos dobles puntos cuánticos

La transformación canónica (5.8) de los operadores que constituyen nuestro modelo se lleva a cabo empleando el lema de Baker-Hausdorff (Sakurai, 1994), mediante el cual se obtiene la siguiente expresión

$$e^S O e^{-S} = O + [S, O] + \frac{1}{2!} [S, [S, O]] + \dots \quad (\text{B.1})$$

Teniendo en cuenta las relaciones de conmutación $[S, \sigma_z^i] = 0$, $[\sigma_i^n, \sigma_j^m] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k^n \delta_{nm}$, $[a_q, a_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'}$ y $[a_q^\dagger, a_{q'}^\dagger] = [a_q, a_{q'}] = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z^i &= \sigma_z^i \\ \bar{\sigma}_x^i &= \sigma_+^i e^A + \sigma_-^i e^{-A} \\ \bar{a}_q &= a_q + \sum_i \sum_{q'} \frac{1}{2} \frac{\lambda_{q'}}{\omega_{q'}} \sigma_z^i [a_{q'}^\dagger, -a_{q'}, a_q] = a_q - \frac{1}{2} \frac{\lambda_q}{\omega_q} (\sigma_z^1 + \sigma_z^2) \\ s_L &= (|5\rangle\langle 1| + |6\rangle\langle 2|) e^{-A/2} \\ s_R &= (|5\rangle\langle 3| + |6\rangle\langle 4|) e^{A/2} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

en donde $A = \sum_q \frac{\gamma_q}{\omega_q} (a_q^\dagger - a_q)$ y $X = e^A$ son las fases polarónicas, ecuación (5.10).

Debido a que la transformación de un producto de operadores se realiza mediante el producto de los operadores transformados (Mahan, 1999), los Hamiltonianos \bar{H}_S , \bar{H}_{res} , \bar{H}_B , \bar{V}_{S-res} y \bar{V}_{SB} se obtienen al sustituir las ecuaciones (B.2) adecuadamente en cada uno de ellos, los cuales al combinarse permiten obtener el Hamiltoniano efectivo dado en (5.9).

B.2. Acoplamiento con los reservorios de electrones

El conmutador dentro de la integral en (5.16) tiene la forma

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{V}_{S-res}(t), \left[\tilde{V}_{S-res}(t'), \tilde{\rho}(t') \otimes \tilde{\rho}_{res}(0) \right] \right] = \\ & = \left[\sum_k \left(V_k^L \tilde{c}_{k,L}^\dagger(t) \tilde{s}_L(t) + c.c. + V_k^R \tilde{c}_{k,R}^\dagger(t) \tilde{s}_R(t) + c.c. \right), \right. \\ & \left. \left[\sum_{k'} \left(V_{k'}^L \tilde{c}_{k',L}^\dagger(t') \tilde{s}_L(t') + c.c. + V_{k'}^R \tilde{c}_{k',R}^\dagger(t') \tilde{s}_R(t') + c.c. \right), \tilde{\rho}(t') \otimes \tilde{\rho}_{res}(0) \right] \right] \end{aligned} \quad (B.3)$$

donde hemos empleado la aproximación $\tilde{\chi}(t') \approx \tilde{\rho}(t') \otimes \rho_{res}(0)$, siendo $\rho_{res}(0)$ la matriz de densidad de los contactos.

En la representación de interacción, los operadores de creación y aniquilación de electrones en los reservorios adquieren una fase adicional dependiente del tiempo:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{k,i}^\dagger(t) &= e^{i\bar{H}_0 t} c_{k,i}^\dagger e^{-i\bar{H}_0 t} = c_{k,i}^\dagger e^{i\varepsilon_k^i t} \\ \tilde{c}_{k,i}(t) &= e^{i\bar{H}_0 t} c_{k,i} e^{-i\bar{H}_0 t} = c_{k,i} e^{-i\varepsilon_k^i t} \end{aligned} \quad (B.4)$$

con $i=L,R$.

Al tomar la traza sobre los estados electrónicos de los reservorios, únicamente las combinaciones de operadores de creación y aniquilación en el mismo contacto tienen una contribución (los productos de operadores que no conservan el número de partículas no son considerados). Debe tenerse en cuenta que $c_{k,i}^\dagger c_{k,i}$ es el operador de número en cada reservorio, cuyo valor promedio

$$Tr_{res} \left\{ c_{k,i}^\dagger c_{k,i} \rho_{res}(0) \right\} = \langle n_{k,i} \rangle \quad (B.5)$$

es la función de Fermi de dicho contacto. Como se ha mencionado en el Capítulo 5, se considera el régimen de voltaje infinito entre los reservorios “L” y “R” (Brandes, 2005; Gurvitz y Prager, 1996; Stoof y Nazarov, 1996), en cuyo caso las funciones de Fermi son 1 y 0 respectivamente,

$$\langle n_{k,L} \rangle = 1, \quad \langle n_{k,R} \rangle = 0 \quad (\text{B.6})$$

A partir de estas consideraciones, la ecuación (B.3) toma la forma

$$\begin{aligned} Tr_{res} \left\{ \left[\tilde{V}_{S-res}(t), \left[\tilde{V}_{S-res}(t'), \tilde{\rho}(t') \otimes \tilde{\rho}_{res}(0) \right] \right] \right\} = \\ = \sum_k |V_{k,L}|^2 \left\{ e^{i\varepsilon_k^L(t-t')} (\tilde{s}_L(t) \tilde{s}_L^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_L^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_L(t)) \right. \\ \left. + e^{-i\varepsilon_k^L(t-t')} (\tilde{\rho}(t') \tilde{s}_L(t) \tilde{s}_L^\dagger(t) - \tilde{s}_L^\dagger(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_L(t)) \right\} \\ + \sum_k |V_{k,R}|^2 \left\{ e^{i\varepsilon_k^R(t-t')} (\tilde{\rho}(t') \tilde{s}_R^\dagger(t') \tilde{s}_R(t) - \tilde{s}_R(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_R^\dagger(t')) \right. \\ \left. + e^{-i\varepsilon_k^R(t-t')} (\tilde{s}_R^\dagger(t) \tilde{s}_R(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_R(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_R^\dagger(t)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Las sumas sobre k pueden escribirse como integrales

$$\sum_k |V_k^i|^2 e^{i\varepsilon_k^i(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\varepsilon) e^{i\varepsilon_k^i(t-t')} d\varepsilon \quad (\text{B.8})$$

y considerando una densidad de estados constante (Brandes, 2005)

$$\nu(\varepsilon) = \sum_k |V_k^i|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_k^i) \approx \nu(\varepsilon_k^i) \quad (\text{B.9})$$

la integral (B.8) resulta en una delta de Dirac en el tiempo:

$$\sum_k |V_k^i|^2 e^{i\varepsilon_k^i(t-t')} = \Gamma_i \delta(t-t') \quad (\text{B.10})$$

con Γ_i dadas por $\Gamma_i = 2\pi \sum_k |V_k^i|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_k^i)$.

Al realizar estas aproximaciones, seguidas de la integración indicada en la ecuación (5.16) se obtiene la ecuación maestra (5.17)

B.3. Acoplamiento fuerte con el baño térmico de fonones

A partir de este momento, y por simplicidad, el Hamiltoniano efectivo (5.9) se escribe en función de proyectores de los estados base, es decir de los operadores Y_{nm} dados en la ecuación (5.19),

$$\begin{aligned} \bar{H}_0 &= \sum_i \bar{\varepsilon}_i \bar{Y}_{ii} + H_B + \bar{H}_{res} \\ \bar{H}_T &= T_c (\bar{Y}_{31} + \bar{Y}_{42} + \bar{Y}_{21} + \bar{Y}_{43} + \bar{Y}_{56} + c.c.) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

donde $\bar{\varepsilon}_n |n\rangle = \left(\sum_i \frac{1}{2} \varepsilon_i \sigma_z^i - \frac{1}{4} \kappa \sum_{ij} \sigma_z^i \sigma_z^j \right) |n\rangle$ y $\bar{Y}_{nm} = e^S Y_{nm} e^{-S}$.

Antes de continuar, debe advertirse que $\bar{Y}_m = |n\rangle\langle n|$ y de forma genérica $\bar{Y}_{nm}^{(\dagger)} = |m\rangle\langle n|X^{(\dagger)}$, a excepción de los operadores \bar{Y}_{32} , \bar{Y}_{41} y sus adjuntos los cuales adquieren expresiones específicas en esta representación transformada:

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{32} &= |2\rangle\langle 3|, & \bar{Y}_{32}^\dagger &= |3\rangle\langle 2| \\ \bar{Y}_{41} &= |1\rangle\langle 4|X, & \bar{Y}_{41}^\dagger &= |4\rangle\langle 1|X^\dagger\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

es decir, que Y_{32} (Y_{32}^\dagger) es invariante a la transformación mientras que Y_{41} (Y_{41}^\dagger) adquiere una fase “doble”. Este comportamiento es el resultado de los efectos colectivos generados por el acoplo de los qubits al mismo baño bosónico y más aun por considerar la misma interacción electrón-fonón en ambos dobles puntos. La proyección del estado $|3\rangle$ (con la carga alineada en una de las diagonales del arreglo) en el estado con la configuración opuesta, $|2\rangle$, ocurre mediante dos procesos de tuneo: el electrón en el primer qubit tunea del punto cuántico inferior al superior distorsionando a los fonones circundantes, mientras que en el segundo qubit ocurre el proceso contrario. Puede pensarse entonces, que ambos efectos sobre el baño se “cancelan”, originando que Y_{32} no posea una fase polarónica. Por otra parte, la transición del estado $|1\rangle$ al $|4\rangle$ se realiza mediante el tuneo de ambos electrones en el mismo sentido, de esta forma su efecto sobre los fonones se refuerza, dando lugar a las fases dobles en los operadores Y_{41} y Y_{41}^\dagger .

El siguiente paso para obtener la ecuación maestra consiste en pasar a la representación de interacción, obteniéndose

$$\begin{aligned}\tilde{a}_q(t) &= e^{-i\omega_q t} a_q \\ \tilde{S}_L(t) &= e^{i(\bar{\epsilon}_5 - \bar{\epsilon}_1)t} |5\rangle\langle 1| e^{-A(t)/2} + e^{i(\bar{\epsilon}_6 - \bar{\epsilon}_2)t} |6\rangle\langle 2| e^{-A(t)/2} \\ \tilde{S}_R(t) &= e^{i(\bar{\epsilon}_5 - \bar{\epsilon}_3)t} |5\rangle\langle 3| e^{A(t)/2} + e^{i(\bar{\epsilon}_6 - \bar{\epsilon}_4)t} |6\rangle\langle 4| e^{A(t)/2}\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

con $A(t) = \sum_q \gamma_q (\tilde{a}_q^\dagger(t) - \tilde{a}_q(t)) / \omega_q$. Para los operadores de proyección tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{32}(t) &= e^{i(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_3)t} |2\rangle\langle 3| \\ \tilde{Y}_{41}(t) &= e^{i(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_4)t} |1\rangle\langle 4| X_t X_t^\dagger \text{ y} \\ \tilde{Y}_{nm}(t) &= e^{i(\bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_n)t} |m\rangle\langle n| X_t \text{ (para el resto de los estados)}\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

Estas expresiones se sustituyen en la ecuación (5.17), la cual se multiplica por la derecha por cada operador $\tilde{Y}_{nm}(t)$ necesario para obtener los elementos de la matriz de densidad reducida y posteriormente se calcula la traza sobre las variables tanto del baño como del

sistema de qubits de carga obteniéndose la expresión (5.23). En ésta, el segundo término del lado derecho se obtiene de la forma integral de la ecuación (5.17) correspondiente al Hamiltoniano de tuneleo,

$$\begin{aligned}
\int_0^t dt' Tr_{dot,ph} \left\{ [\tilde{H}_T(t'), \tilde{\rho}(t')] \tilde{Y}_{nm}(t) \right\} &= \int_0^t dt' Tr_{dot,ph} \left\{ \tilde{H}_T(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{Y}_{nm}(t) - \tilde{\rho}(t') \tilde{H}_T(t') \tilde{Y}_{nm}(t) \right\} \\
&= \int_0^t dt' Tr_{dot,ph} \left\{ \tilde{\rho}(t') \tilde{Y}_{nm}(t) \tilde{H}_T(t') - \tilde{\rho}(t') \tilde{H}_T(t') \tilde{Y}_{nm}(t) \right\} \\
&= \int_0^t dt' Tr_{dot,ph} \left\{ \tilde{\rho}(t') [\tilde{Y}_{nm}(t), \tilde{H}_T(t')] \right\}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

El espacio de Hilbert del arreglo de dobles puntos tiene dimensión 6, por lo que se requiere de 36 ecuaciones diferenciales para definir a la matriz de densidad, la mayoría de las cuales están acopladas. Sin embargo, debido a que la propiedad que determina el grado de entrelazamiento está definida en el espacio de 2 partículas, no es necesario considerar las ecuaciones para las coherencias del tipo $\dot{\rho}_{5n}$ y $\dot{\rho}_{6n}$ (y sus complejos conjugados), las cuales además están desacopladas del resto.

Por tanto, de (5.23) se obtiene un conjunto de 19 ecuaciones en las que aparecen valores promedio de un producto de operadores $\tilde{Y}_{nm}(t')$ con operadores bosónicos X^\dagger o X a diferentes tiempos, $Tr_{dot,ph} \left\{ \tilde{Y}_{nm}^{(\dagger)}(t') X_{t_1}^{(\dagger)} X_{t_2}^{(\dagger)} \right\}$ (en donde $t_i = t, t'$ con $t_1 \neq t_2$) los cuales, mediante el empleo de la aproximación (5.24), se desacoplan en productos del tipo $\langle \tilde{Y}_{nm}^{(\dagger)}(t') \rangle \langle X_{t_1}^{(\dagger)} X_{t_2}^{(\dagger)} \rangle$.

Los operadores X se combinan en seis formas principales: $\langle X_{t_1}^\dagger X_{t_2}^\dagger \rangle$, $\langle X_{t_1} X_{t_2} \rangle$, $\langle X_{t_1}^\dagger X_{t_2} \rangle$, $\langle X_{t_1} X_{t_2}^\dagger \rangle$, $\langle X_{t_1} X_{t_1}^\dagger X_{t_2}^\dagger X_{t_2} \rangle$ y $\langle X_{t_1} X_{t_2}^\dagger X_{t_2}^\dagger X_{t_1} \rangle$. Mediante el procedimiento descrito en (Mahan, 2000), que hace uso de las propiedades de conmutación de los operadores bosónicos, y considerando un baño Óhmico a temperatura cero se puede demostrar que $\langle X_{t_1}^\dagger X_{t_2}^\dagger \rangle = \langle X_{t_1} X_{t_2} \rangle = 0$

El resto de los valores promedio constituyen las *funciones de correlación del baño*. Se encuentran dos tipos de funciones de correlación: $C(t-t') = \langle X_t X_{t'}^\dagger \rangle = \langle X_{t'}^\dagger X_t \rangle$ (Aguado y Brandes, 2004; Brandes, 2005) y $C_2(t-t') = \langle X_{t_1} X_{t_2}^\dagger X_{t_2}^\dagger X_{t_1} \rangle = \langle X_{t'} X_{t'}^\dagger X_{t'}^\dagger X_{t'} \rangle$ las cuales corresponden a fases dobles. Ambas dependen de la diferencia de tiempo y cumplen con la relación $C(t-t') = C^*(t'-t)$ (Brandes 2005) y $C_2(t-t') = C_2^*(t'-t)$, ecuaciones (5.26) y (5.27).

En base a estas definiciones, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para la evolución temporal de los elementos de la matriz de densidad reducida del arreglo de qubits de carga:

$$\begin{aligned}
\rho_S(t)_{11} - \rho_S(0)_{11} &= -i \int_0^t t_c (\rho_S(t')_{31} - \rho_S(t')_{13} + \rho_S(t')_{21} - \rho_S(t')_{12}) dt' + \Gamma_L \int_0^t \rho_S(t')_{55} dt' \\
\rho_S(t)_{12} - \rho_S(0)_{12} &= -i \int_0^t t_c e^{-ik_{12}\tau} (\rho_S(t')_{32} C(\tau) - \rho_S(t')_{14} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{22} C(\tau) - \rho_S(t')_{11} C^*(\tau)) dt' \\
\rho_S(t)_{13} - \rho_S(0)_{13} &= -i \int_0^t t_c e^{-ik_{13}\tau} (\rho_S(t')_{33} C(\tau) - \rho_S(t')_{11} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{23} C(\tau) - \rho_S(t')_{14} C^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{-ik_{13}\tau} \rho_S(t')_{13} C^*(\tau) dt' \\
\rho_S(t)_{14} - \rho_S(0)_{14} &= -i \int_0^t t_c e^{-ik_{14}\tau} (\rho_S(t')_{34} C_2(\tau) - \rho_S(t')_{12} C_2^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{24} C_2(\tau) - \rho_S(t')_{13} C_2^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{-ik_{14}\tau} \rho_S(t')_{14} C_2^*(\tau) dt' \\
\rho_S(t)_{21} - \rho_S(0)_{21} &= -i \int_0^t t_c e^{ik_{12}\tau} (\rho_S(t')_{41} C(\tau) - \rho_S(t')_{23} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{11} C(\tau) - \rho_S(t')_{22} C^*(\tau)) dt' \\
\rho_S(t)_{22} - \rho_S(0)_{22} &= -i \int_0^t t_c (\rho_S(t')_{42} - \rho_S(t')_{24} + \rho_S(t')_{12} - \rho_S(t')_{21}) dt' + \Gamma_L \int_0^t \rho_S(t')_{66} dt' \\
\rho_S(t)_{23} - \rho_S(0)_{23} &= -i \int_0^t t_c e^{-ik_{23}\tau} (\rho_S(t')_{43} - \rho_S(t')_{21} \\
&\quad + \rho_S(t')_{13} - \rho_S(t')_{24}) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{-ik_{23}\tau} \rho_S(t')_{23} dt' \\
\rho_S(t)_{24} - \rho_S(0)_{24} &= -i \int_0^t t_c e^{-ik_{24}\tau} (\rho_S(t')_{44} C(\tau) - \rho_S(t')_{22} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{14} C(\tau) - \rho_S(t')_{23} C^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{-ik_{24}\tau} \rho_S(t')_{24} C^*(\tau) dt' \\
\rho_S(t)_{31} - \rho_S(0)_{31} &= -i \int_0^t t_c e^{ik_{13}\tau} (\rho_S(t')_{11} C(\tau) - \rho_S(t')_{33} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{41} C(\tau) - \rho_S(t')_{32} C^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{ik_{13}\tau} \rho_S(t')_{31} C(\tau) dt' \\
\rho_S(t)_{32} - \rho_S(0)_{32} &= -i \int_0^t t_c e^{ik_{23}\tau} (\rho_S(t')_{12} - \rho_S(t')_{34} \\
&\quad + \rho_S(t')_{42} - \rho_S(t')_{31}) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{-ik_{23}\tau} \rho_S(t')_{32} dt' \\
\rho_S(t)_{33} - \rho_S(0)_{33} &= -i \int_0^t t_c (\rho_S(t')_{13} - \rho_S(t')_{31} + \rho_S(t')_{43} - \rho_S(t')_{34}) dt' - \Gamma_R \int_0^t \rho_S(t')_{33} dt' \\
\rho_S(t)_{34} - \rho_S(0)_{34} &= -i \int_0^t t_c e^{-ik_{34}\tau} (\rho_S(t')_{14} C(\tau) - \rho_S(t')_{32} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{44} C(\tau) - \rho_S(t')_{33} C^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{-ik_{34}\tau} \rho_S(t')_{34} (C(\tau) + C^*(\tau)) dt'
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
\rho_S(t)_{41} - \rho_S(0)_{41} &= -i \int_0^t t_c e^{ik_{14}\tau} (\rho_S(t')_{21} C_2(\tau) - \rho_S(t')_{43} C_2^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{31} C_2(\tau) - \rho_S(t')_{42} C_2^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{ik_{14}\tau} \rho_S(t')_{41} C_2(\tau) dt' \\
\rho_S(t)_{42} - \rho_S(0)_{42} &= -i \int_0^t t_c e^{ik_{24}\tau} (\rho_S(t')_{22} C(\tau) - \rho_S(t')_{44} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{32} C(\tau) - \rho_S(t')_{41} C^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{ik_{24}\tau} \rho_S(t')_{42} C(\tau) dt' \\
\rho_S(t)_{43} - \rho_S(0)_{34} &= -i \int_0^t t_c e^{ik_{34}\tau} (\rho_S(t')_{23} C(\tau) - \rho_S(t')_{41} C^*(\tau) \\
&\quad + \rho_S(t')_{33} C(\tau) - \rho_S(t')_{44} C^*(\tau)) dt' - \frac{\Gamma_R}{2} \int_0^t e^{ik_{34}\tau} \rho_S(t')_{43} (C(\tau) + C^*(\tau)) dt' \\
\rho_S(t)_{44} - \rho_S(0)_{44} &= -i \int_0^t t_c (\rho_S(t')_{24} - \rho_S(t')_{42} + \rho_S(t')_{34} - \rho_S(t')_{43}) dt' - \Gamma_R \int_0^t \rho_S(t')_{44} dt' \\
\rho_S(t)_{55} - \rho_S(0)_{55} &= -i \int_0^t t_c (\rho_S(t')_{65} - \rho_S(t')_{56}) dt' + \int_0^t (\Gamma_R \rho_S(t')_{33} - \Gamma_L \rho_S(t')_{55}) dt' \\
\rho_S(t)_{56} - \rho_S(0)_{56} &= -i \int_0^t t_c e^{-i\epsilon_2\tau} (\rho_S(t')_{66} C(\tau) - \rho_S(t')_{55} C^*(\tau)) dt' \\
&\quad - \frac{\Gamma_L}{2} \int_0^t e^{-i\epsilon_2\tau} \rho_S(t')_{56} (C(\tau) + C^*(\tau)) dt' \\
\rho_S(t)_{65} - \rho_S(0)_{65} &= -i \int_0^t t_c e^{i\epsilon_2\tau} (\rho_S(t')_{55} C(\tau) - \rho_S(t')_{66} C^*(\tau)) dt' \\
&\quad - \frac{\Gamma_L}{2} \int_0^t e^{i\epsilon_2\tau} \rho_S(t')_{65} (C(\tau) + C^*(\tau)) dt'
\end{aligned}$$

con $\rho_S(t)_{nm} = \langle \tilde{Y}_{nm}(t) \rangle$, $\tau = t - t'$ y $k_{ij} = \bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}_j$.

La forma genérica de las funciones de correlación, presentada en (5.28), se obtiene al seguir de nueva cuenta el formalismo presentado por (Mahan, 2000), las cuales para la densidad espectral $J(\omega) = 2\alpha\omega e^{\omega/\omega_c}$ y considerando que el baño se encuentra a temperatura cero, son

$$\begin{aligned}
C(t-t') &= (1 + i\omega_c t)^{-2\alpha} \\
C_2(t-t') &= (1 + i\omega_c t)^{-4\alpha}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

B.4. Elementos de la matriz de densidad reducida del arreglo de dos doubles puntos cuánticos

Las ecuaciones diferenciales complejas, acopladas, dadas en (B.16) son además no locales en el tiempo cuya solución se simplifica si se lleva a cabo en el espacio z . Al realizar la transformada de Laplace de dichas expresiones se obtiene el nuevo conjunto

$$\begin{aligned}
z\rho_S(z)_{11} - \rho_S(0)_{11} &= -it_c(\rho_S(z)_{31} - \rho_S(z)_{13} + \rho_S(z)_{21} - \rho_S(z)_{12}) + \Gamma_L\rho_S(z)_{55} \\
\rho_S(z)_{12} - \rho_S(0)_{12} &= -it_c(C_{-k_{12}}(z)\rho_S(z)_{32} - C_{k_{12}}^*(z)\rho_S(z)_{24} + C_{-k_{12}}(z)\rho_S(z)_{22} - C_{k_{12}}^*(z)\rho_S(z)_{11}) \\
\rho_S(z)_{13} - \rho_S(0)_{13} &= -it_c(C_{-k_{13}}(z)\rho_S(z)_{33} - C_{k_{13}}^*(z)\rho_S(z)_{11} + C_{-k_{13}}(z)\rho_S(z)_{23} - C_{k_{13}}^*(z)\rho_S(z)_{14}) \\
&\quad - \frac{\Gamma_R}{2}C_{k_{13}}^*(z)\rho_S(z)_{13} \\
\rho_S(z)_{14} - \rho_S(0)_{14} &= -it_c(C_{2,-k_{14}}(z)\rho_S(z)_{34} - C_{2,k_{14}}^*(z)\rho_S(z)_{12} + C_{2,-k_{14}}(z)\rho_S(z)_{24} - C_{2,k_{14}}^*(z)\rho_S(z)_{13}) \\
&\quad - \frac{\Gamma_R}{2}C_{k_{14}}^*(z)\rho_S(z)_{14} \\
z\rho_S(z)_{22} - \rho_S(0)_{22} &= -it_c(\rho_S(z)_{42} - \rho_S(z)_{24} - \rho_S(z)_{21} + \rho_S(z)_{12}) + \Gamma_L\rho_S(z)_{66} \\
(z + ik_{23})\rho_S(z)_{23} - \rho_S(0)_{13} &= -it_c(\rho_S(z)_{43} - \rho_S(z)_{21} + \rho_S(z)_{13} - \rho_S(z)_{24}) - \frac{\Gamma_R}{2}\rho_S(z)_{23} \\
\rho_S(z)_{24} - \rho_S(0)_{24} &= -it_c(C_{-k_{24}}(z)\rho_S(z)_{44} - C_{k_{24}}^*(z)\rho_S(z)_{22} + C_{-k_{24}}(z)\rho_S(z)_{14} - C_{k_{24}}^*(z)\rho_S(z)_{23}) \\
&\quad - \frac{\Gamma_R}{2}C_{k_{24}}^*(z)\rho_S(z)_{24} \\
z\rho_S(z)_{33} - \rho_S(0)_{23} &= -it_c(\rho_S(z)_{13} - \rho_S(z)_{31} + \rho_S(z)_{43} - \rho_S(z)_{34}) - \Gamma_R\rho_S(z)_{33} \\
\rho_S(z)_{34} - \rho_S(0)_{34} &= -it_c(C_{-k_{34}}(z)\rho_S(z)_{14} - C_{k_{34}}^*(z)\rho_S(z)_{32} + C_{-k_{34}}(z)\rho_S(z)_{44} - C_{k_{34}}^*(z)\rho_S(z)_{33}) \\
&\quad - \frac{\Gamma_R}{2}(C_{-k_{34}}(z) + C_{k_{34}}^*(z))\rho_S(z)_{34} \\
z\rho_S(z)_{44} - \rho_S(0)_{44} &= -it_c(\rho_S(z)_{24} - \rho_S(z)_{42} + \rho_S(z)_{34} - \rho_S(z)_{43}) - \Gamma_R\rho_S(z)_{44} \\
z\rho_S(z)_{55} - \rho_S(0)_{55} &= -it_c(\rho_S(z)_{65} - \rho_S(z)_{56}) - \Gamma_L\rho_S(z)_{55} + \Gamma_R\rho_S(z)_{33} \\
\rho_S(z)_{56} - \rho_S(0)_{34} &= -it_c(C_{-e_2}(z)\rho_S(z)_{66} - C_{e_2}^*(z)\rho_S(z)_{55}) - \frac{\Gamma_L}{2}(C_{-e_2}(z) + C_{k_{34}}^*(z))\rho_S(z)_{56}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

que constituye a la ecuación matricial (5.31) y en donde el resto de las coherencias se obtienen del complejo conjugado de las presentadas, siendo $C_\varepsilon^{(*)}(z) = \int_0^\infty e^{-z\tau} e^{(-)i\varepsilon\tau} C^{(*)}(\tau) d\tau$ las funciones de correlación en el espacio z (Aguado y Brandes, 2004; Brandes 2005, Brandes y Kramer, 1999), que para nuestro caso particular están dadas por

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon(z) &= \int_0^\infty d\tau e^{-z\tau} e^{i\varepsilon\tau} (1 + i\omega_c\tau)^{-2\alpha} \\
&= (i\omega_c)^{-2\alpha} (z + \varepsilon)^{2\alpha-1} e^{-i(z+\varepsilon)/\omega_c} \Gamma(1 - 2\alpha, -i(z + \varepsilon)/\omega_c) \\
C_{2,\varepsilon}(z) &= (i\omega_c)^{-4\alpha} (z + \varepsilon)^{4\alpha-1} e^{-i(z+\varepsilon)/\omega_c} \Gamma(1 - 4\alpha, -i(z + \varepsilon)/\omega_c)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

en donde $\Gamma(\mu, \nu)$ denota la función Gamma incompleta. El cálculo numérico de dichas expresiones en el límite $z \rightarrow 0$, se realiza de la forma descrita en (Brandes, 2005; Brandes 2000).