

TESIS DEFENDIDA POR

ELMER CRUZ MENDOZA

Y APROBADA POR:

Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova
Director del comité

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez
Miembro del comité

Dra. Catalina López Bastidas
Miembro del comité

Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar
Miembro del comité

Dra. Laura Viana Castrillón
*Coordinadora del programa de
posgrado en Física de Materiales*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Estudios de Posgrado

4 de Septiembre de 2009

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS EN FÍSICA DE
MATERIALES**

**EFFECTOS DE INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA SOBRE
EL ESPECTRO DE PLASMONES EN UN GAS DE
ELECTRONES BIDIMENSIONAL**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el
grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

ELMER CRUZ MENDOZA

Ensenada, Baja California, México, Septiembre de 2009

RESUMEN de la tesis de **Elmer Cruz Mendoza**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS con orientación en FÍSICA DE MATERIALES. Ensenada, Baja California, México, Septiembre de 2009.

EFFECTOS DE INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA SOBRE EL ESPECTRO DE PLASMONES EN UN GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL

Resumen aprobado por:

Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova
Director de tesis

El acoplamiento espín-órbita en sistemas de baja dimensionalidad es considerado un importante mecanismo que permite manipular el espín de los electrones, lo cual es fundamental para el desarrollo de dispositivos espintrónicos en semiconductores. Dicho acoplamiento produce notables modificaciones en las energías y estados propios del sistema, lo que aunado a la interacción electrón-electrón da lugar a interesantes cambios en la respuesta dieléctrica del medio afectando con ello al continuo de transiciones de partícula simple y a la relación de dispersión de los plasmones. En el presente trabajo se realizó un estudio del espectro de excitaciones elementales de un gas electrónico bidimensional en presencia de acoplamiento espín-órbita anisotrópico (Rashba+Dresselhaus). Se calculó la respuesta dieléctrica utilizando el Método de Campo Autoconsistente. Además de las regiones de energía y momento correspondientes a transiciones intrasubbanda se encontraron nuevas zonas de transiciones inter-subbanda cuyas dimensiones dependen fuertemente de los parámetros de acoplamiento espín-órbita Rashba y Dresselhaus. Notablemente, dicho continuo de transiciones no sólo depende de la magnitud del vector de onda \mathbf{q} , sino también de su dirección. Similarmente, como una consecuencia de la presencia simultánea de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus, la relación de dispersión de los plasmones intra- e inter-subbanda también dependen de la orientación de \mathbf{q} . Esta dependencia angular en las excitaciones electrónicas es nuestro principal resultado y es la diferencia más relevante que existe con respecto al caso típico de la interacción espín-órbita isotrópica de Rashba. En el régimen de q pequeña se derivaron expresiones analíticas para la relación de dispersión de los plasmones y se encontró que el efecto de la interacción espín-órbita desaparece cuando la magnitud del acoplamiento de Rashba es igual a la magnitud del acoplamiento de Dresselhaus. Los gases electrónicos con acoplamiento anisotrópico pueden ser considerados candidatos para desarrollar tecnología en el área de la espintrónica así como en plasmónica, ya que ahora el espectro de excitaciones no sólo puede ser manipulado por medio del acoplamiento espín-órbita, sino que además puede ser controlado a través la magnitud y dirección del vector de onda \mathbf{q} .

Palabras Clave: plasmones 2D, interacción espín-órbita, semiconductores, espintrónica.

ABSTRACT of the thesis presented by **Elmer Cruz Mendoza**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of MASTER OF SCIENCE with orientation in MATERIAL PHYSICS. Ensenada, Baja California, México, September 2009.

Spin-Orbit Interaction Effects in the Plasmon Spectrum in a Two Dimensional Electron Gas

Spin-orbit coupling in low dimensional systems is considered an important mechanism that allows the manipulation of the electron spin, which is fundamental for the development of spintronic semiconductor devices. This coupling produces notable modifications of the energies and states of the system which in addition to the electron-electron interaction gives interesting changes in the dielectric response of the medium, affecting with this both the single particle transitions and dispersion relation of plasmons. In the present work a study of the elementary excitation spectra of a two dimensional electron gas in the presence of anisotropic spin-orbit coupling (Rashba+Dresselhaus) is presented. The dielectric response function was calculated using the Self-Consistent Field Approach. In addition to the intra-subband region a new inter-subband zone appears whose dimensions depends strongly on the Rashba-Dresselhaus spin-orbit coupling parameters and, remarkably, not only on the magnitude of the wave vector transfer \mathbf{q} but also on its direction. Similarly, as consequence of the interplay of both spin-orbit couplings, the dispersion relation for intra- and inter-subband plasmons also depends on the orientation of \mathbf{q} . This angular dependency of the electronic excitations is our main result and is the main difference that exists with respect to the usual case of the isotropic Rashba spin splitting. In the small q regime analytical expressions for the dispersion of plasmons were derived and the spin-orbit effects were found to disappear when the amplitude of the Rashba spin-orbit coupling is equal to the magnitude of the Dresselhaus contribution. These type of spin-orbit coupled electronic gases can be considered good candidates for the development of technology in the area of spintronics as well as in plasmonics since the spectra of excitations can be manipulated not only by the spin-orbit coupling but also through the magnitude and direction of the wave vector \mathbf{q} .

Key words: plasmons 2D, spin-orbit interaction, semiconductors, spintronics.

*A mis padres Atenógenes C.
Cruz y Filomena Mendoza,
a mis hermanos Aney, Zury
y miguel y a mi amiga y
compañera de vida Alicia*

Agradecimientos

A mis padres y hermanos por el apoyo brindado, a Aly por su paciencia y amor incondicional, ya que sin ellos no hubiera podido culminar este trabajo. De igual manera agradezco a Jesús Maytorena y a Catalina López por su amistad y por todo el apoyo otorgado en el desarrollo y discusión de este proyecto. Pero sobre todo agradezco profundamente a Dios por permitirme concluir esta etapa de mi vida.

A CONACyT y al proyecto DGAPA-UNAM IN113807-3 por el apoyo económico proporcionado.

Contenido

Capítulo	Página
I. INTRODUCCIÓN	1
II. INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA EN HETEROESTRUCTURAS SEMICONDUCTORAS	5
II.1 Acoplamiento Espín-Órbita en sistemas semiconductores	6
II.2 Interacción de Dresselhaus	9
II.3 Interacción de Rashba	17
II.4 Acoplamiento espín-órbita anisotrópico: Rashba + Dresselhaus	20
III. EXCITACIONES ELECTRÓNICAS EN UN GAS DE ELECTRONES	27
III.1 Plasmones desde el punto de vista clásico	27
III.1.1 Frecuencia de plasma: ecuación de movimiento	28
III.1.2 Modos longitudinales	30
III.2 Método de campo autoconsistente	33
III.3 Excitaciones electrónicas a partir de una función respuesta	35
III.4 El gas tridimensional	37
III.5 El gas bidimensional	39
III.6 Antecedentes experimentales	43
IV. EXCITACIONES ELECTRÓNICAS EN UN GAS 2D EN PRESENCIA DE INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA	47
IV.1 El continuo de excitación de pares electrón-hueco	47
IV.2 Función dieléctrica y relación de dispersión de los plasmones	54
V. MODOS COLECTIVOS EN EL LÍMITE DE LONGITUD DE ONDA LARGA	68

Contenido (continuación)

Capítulo	Página
V.1 Plasmones Intrasubbanda	68
V.2 Plasmones Intersubbanda	72
VI. RESULTADOS NUMÉRICOS	76
VI.1 Excitaciones electrónicas elementales con IEO de Rashba	76
VI.2 Efectos de la IEO anisotrópica	79
VI.2.1 Modificación de las excitaciones a través de los parámetros de IEO	86
VI.3 Excitaciones para diferentes direcciones cristalográficas	86
VI.3.1 Excitaciones electrónicas para la cara [111]	87
VI.3.2 Excitaciones electrónicas para la cara [110]	91
VII. CONCLUSIONES	95
APÉNDICE A. Interacción Espín-órbita anisotrópica para la dirección	
[110]	98
BIBLIOGRAFÍA	104

Lista de Figuras

Figura	Página
1	Los materiales semiconductores, tales como GaAs, poseen estructura cristalina zincblenda. 10
2	Dispersión de la energía para electrones en un gas bidimensional en presencia de interacción espín-órbita. La dispersión parabólica para electrones libres se desdobra en dos subbandas, rompiendo la degeneración del sistema. 12
3	Corte transversal de las superficies mostradas en la figura 2. El desdoblamiento de la subbanda de conducción permite que para cada valor de k existan dos estados disponibles, uno en la subbanda E_+ y otro en la subbanda E_- . Por otra parte, el mínimo de la subbanda E_- será $-E_D/2 = -\hbar^2 k_\beta^2/2m^*$ y los vectores k_F^+ y k_F^- satisfacen la condición $E_\lambda(k_F^\lambda) = E_F$ 13
4	Distribución de espines en el espacio de momentos y en cada banda en un Gas 2D con IEO de Dresselhaus (Ganichev et al., 2004). 14
5	Densidad de estados para un gas electrónico bidimensional normalizada a $D_0 = m^*/\pi\hbar^2$. La línea en azul representa la DDE para la subbanda menos, la línea en rojo es la densidad de estados para la subbanda más y la línea negra es la densidad de estados de un GE2D degenerado en espín 16
6	Gas de electrones bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor (Nitta et al., 1997). La asimetría en el potencial de confinamiento da lugar a una contribución a la IEO. 17
7	Distribución de los espines en un gas de electrones bidimensional con IEO de Rashba (Ganichev et al., 2004). 20
8	Desdoblamiento anisotrópico de la relación de dispersión de la energía como resultado de la coexistencia de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus. 22
9	Corte transversal de la dispersión de la energía. Se muestra la anisotropía como función del vector de onda, donde existen dos ejes de alta simetría localizados a ángulos $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ 23

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
10	Densidad de electrones en cada subbanda de espín como función del parámetro espín-órbita de Rashba para valores de $\beta_{[001]} = 0.5\alpha$ y $\beta_{[001]} = 0$. Se observa que la población en la banda más disminuye conforme aumenta α , mientras que en la banda menos, dicha población se incrementa.	24
11	Densidad de electrones para una subbanda desdoblada en espín como función de la densidad total de electrones. Se observa que la población en la banda más disminuye conforme disminuye la densidad total de electrones, mientras que en la banda menos, dicha población se incrementa.	25
12	Esquema de flechas que indica la dirección del vector de momento magnético intrínseco en cada subbanda para cada vector de onda \mathbf{k} en presencia de IEO anisotrópica (Ganichev et al., 2004).	26
13	La acumulación de carga Q sobre la región R , contenida dentro de la superficie Σ , produce un campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (flechas gruesas) el cual induce una corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (flechas delgadas). Esto permite la oscilación del plasma (Mochán, 2005).	29
14	Esfera de Fermi que contiene un gas 3D degenerado. El proceso de excitación de un par electrón-hueco (e-h) conserva energía y momento, tal como se muestra.	38
15	Las zonas de amortiguamiento de Landau o continuo de excitaciones de pares electrón-hueco (zona en gris), se originan por el hecho de que electrones inicialmente en un estado, pasan a un nuevo estado a través de la absorción de energía $\hbar\omega$	40
16	En los gases de electrones bidimensionales se crean zonas de amortiguamiento de Landau compuestas por transiciones intrabanda y zonas compuestas por transiciones interbanda (Jain y Das-Sarma, 1987).	41
17	La relación de dispersión para la luz nunca coincide con la relación de dispersión del plamón 2-D. Por dicho motivo, es necesaria la utilización de rejillas para dar momento a la onda electromagnética incidente, haciendo que se intersecten en cierto punto.	44
18	Campo eléctrico como función del tiempo. También se muestran las componentes de Fourier de las mismas cantidades (Voßebürger et al., 1996).	45
19	Dirección de los vectores de onda que caracterizan el movimiento de los electrones (\mathbf{k}) y del momento de la onda electromagnética (\mathbf{q}).	49

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
20 Zonas de transiciones intra e intersubbanda para valores pequeños de q	50
21 Algunas transiciones intersubbanda presentes para valores pequeños de q	51
22 Las frecuencias permitidas a $\mathbf{q} = 0$, estarán contenidas en el intervalo $\omega_+ < \omega < \omega_-$	54
23 Continuo de excitaciones incoherentes de pares electrón-hueco y la relación de dispersión del plasmón para el caso de IEO isotrópica	77
24 Relación de dispersión para los plasmones (línea en rojo) y las zonas del continuo de transiciones de pares electrón-hueco intrasubbanda (zona en gris oscuro) e intersubbanda (zona en gris claro), para $\gamma = 3\pi/4$. Nótese que al comparar con el caso de $\beta = 0$ (zona en las líneas en verde), se observa que las zonas intersubbanda se ven afectadas por la presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus, exhibiendo un ensanchamiento como función de la energía.	79
25 Vector de onda \mathbf{q} en la dirección en que se encuentra el máximo desdoblamiento de las subbandas	81
26 Vector de onda \mathbf{q} en la dirección en que se encuentra el mínimo desdoblamiento de las subbandas.	82
27 Espectro de excitaciones electrónicas para $\mathbf{q} \parallel (1, 1)$. Se muestra el continuo de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda (zona en gris claro) e intrasubbanda (región en gris oscuro). Así mismo, se presenta la relación de dispersión del plasmón intrasubbanda (curva en rojo).	83
28 Continuo de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda (zona en gris claro) e intra subbanda (zona en gris oscuro), así como la relación de dispersión para el plasmón intrasubbanda en función de la magnitud del vector de onda transferido. Parámetros como en la figura anterior.	84
29 Relación de dispersión para el plasmón intrasubbanda para diferentes orientaciones del vector de onda \mathbf{q} comparado con el caso $\beta = 0$	85
30 El continuo de transiciones de pares electrón-hueco , así como la relación de dispersión del plasmón puede pueden ser modificadas a través de la variación de la densidad total de electrones y de la intensidad del acoplamiento espín-órbita.	87

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
31	Contínuo de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda para dos sistemas con n_e e intensidad de IEO distintas. 88
32	Excitaciones electrónicas para un gas bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor crecida a lo largo de la dirección [111]. Con líneas negras se representan las relaciones de dispersión para el caso $\alpha, \beta \neq 0$. Por otro lado, con líneas en rojo se representan las excitaciones electrónicas para $\beta = 0$ 89
33	Excitaciones elementales para dos orientaciones cristalográficas. Las líneas en azul delimitan las regiones de transiciones de pares electrón-hueco para la cara [001] para $\mathbf{q} \parallel (1, 1)$, mientras que las líneas en negro son fronteras de las zonas de transiciones de partícula simple para la dirección [111]. Así mismo se presenta el plasmón [001] (curva en rojo) cuya energía es ligeramente mayor que el plasmón [111] (curva negra a trozos). 90
34	Zonas de excitaciones de pares electrón-hueco inter e intrasubbanda para la cara [110]. La presencia de la anisotropía en el espectro de energía introduce una variación en las transiciones intersubbanda con respecto al caso $\beta = 0$ 92
35	Regiones de transiciones de pares electrón-hueco para la cara [110]. En esta figura se considera $\gamma = \pi/2$, y se ve que difiere del caso $\gamma = 0$ mostrado en la gráfica 34. Este hecho indica que dichas regiones dependen de la orientación del vector de onda \mathbf{q} 93
36	Regiones de transiciones de partícula simple. Se comparan los resultado calculados para la dirección [110] con los de la dirección [001] 94
37	Superficies de energía como función del vector de onda \mathbf{k} para la dirección cristalográfica [110]. 99
38	Ejes de alta simetría que presentan las superficies de energía correspondientes a la cara [110]. 100
39	Densidad electrónica para la subbanda λ como función de la intensidad del acoplamiento espín-órbita. 101
40	Densidad electrónica para la subbanda λ como función de la densidad total de electrones. 102

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Hasta el día de hoy (2009) la tecnología sustentada en la electrónica ha sido auxiliada por dispositivos basados en la manipulación de la carga eléctrica. Sin embargo, debido a la necesidad de minimizar el tamaño de dichos dispositivos hasta alcanzar dimensiones nanométricas (menores a los 100 nm), ha surgido la idea de aprovechar las propiedades mecánico-cuánticas de las partículas, las cuales se hacen notar a estas escalas de longitud. De particular importancia es el acceso al grado de libertad de *espín* de los electrones, mismo que puede pensarse como un momento magnético o momento angular intrínseco asociado a la partícula y que, según estudios realizados (Ohno et al., 1999, 2000), puede ser controlado a través de campos electromagnéticos externos. Por tal motivo, se han generado grandes expectativas, surgiendo la esperanza de una nueva electrónica basada en la manipulación del espín así como de la carga eléctrica. Persiguiendo estas ideas, se abre otra línea de investigación de la física del estado sólido denominada *Espintrónica* (Wolf et al., 2001). En tal área se realizan estudios de transporte y manipulación de la orientación del espín así como numerosos esfuerzos por aumentar el tiempo de vida del mismo. Tal ha sido el interés que ha despertado esta nueva área de la física, que han surgido algunas posibles aplicaciones (Fert, 2008), entre las cuales podemos mencionar el transistor de espín de S. Datta y B. Das (Datta y Das, 1989) así como memorias no volátiles, tan sólo por decir algunas de ellas.

Dadas las grandes expectativas que giran en torno a la Espintrónica, los Gases Electrónicos Bidimensionales (GE2D) formados en heteroestructuras semiconductoras han recibido especial atención (Awschalom y Flatté, 2007). El interés mostrado hacia estos sistemas se debe a que proporcionan una vía de acceso al espín de los electrones a través de la existencia de una interacción espín-órbita (IEO) significativa. Este último mecanismo, permite el acoplamiento de campos eléctricos externos con el momento

dipolar magnético de los electrones, de tal forma que es posible manipular el espín tan sólo controlando la intensidad de los potenciales aplicados.

Las principales contribuciones a la IEO, que se originan en un GE2D, se dividen en dos. La primera de ellas, se produce por la falta de simetría de inversión espacial en el potencial que confina el gas de electrones. Tal asimetría se origina a lo largo de la dirección de crecimiento de la heteroestructura semiconductor y es posible modularla a través de campos eléctricos externos. Por tal motivo, la contribución a la IEO, también conocida como acoplamiento de Rashba, puede variarse. Por otro lado, la IEO que se deriva de la falta de simetría en la estructura cristalina subyacente al gas electrónico, es la segunda contribución al acoplamiento espín-órbita. A ésta se le conoce como interacción espín-órbita de Dresselhaus y dada su naturaleza es intrínseca al material que se utilice.

En años recientes, la literatura relacionada con estudios sobre los GE2D, donde además se considera IEO, han ido en considerable aumento. En este tipo trabajos se abordan problemas tales como la generación de corrientes eléctricas con espín polarizado, manipulación del momento dipolar magnético así como optimización de los tiempos de vida de los espines, entre otros. En muchos de estos estudios se emplean Hamiltonianos de partícula independiente, ignorando cualquier posible efecto causado por la interacción entre partículas. Como se sabe (Ando et al., 2006; White et al., 1991), en un sistema de muchas partículas, la interacción entre ellas puede tener un efecto profundo en las propiedades (electrónicas, ópticas, térmicas, etc.) de tal sistema. Tan sólo la interacción electrón-electrón coulombiana puede dar lugar a nuevas excitaciones además de las correspondientes a transiciones entre dos estados de partícula independiente. Un ejemplo notable es la existencia de modos normales de la densidad de carga en gases electrónicos degenerados como los que tienen lugar en metales. Estos modos, denominados “*plasmones*”, son excitaciones electrónicas colectivas soportadas por el largo alcance de la interacción coulombiana entre electrones. Así, se tiene que el espectro de excitaciones de un gas (para quedarnos con el sistema más simple) consiste de transiciones de pares electrón-hueco y modos normales de la densidad de carga.

Con el propósito de estudiar las excitaciones eléctricas mencionadas líneas arriba, es que algunos autores han tomado en cuenta la interacción entre partículas aunada a

la IEO (principalmente el acoplamiento de Rashba) en los ya mencionados GE2D (Xu, 2003; Kushwaha y Ulloa, 2006; Pletyukhov y Gritsev, 2006). Tales trabajos demuestran que la presencia de acoplamiento espín-órbita modifica el espectro de excitaciones colectivas así como en el continuo de transiciones de pares electrón-hueco, con respecto al caso en que la IEO es nula. Incluso, algunos autores han contemplado tales cambios como la puerta que permitirá la implementación de dichas excitaciones electrónicas en el desarrollo de nueva tecnología (Xu, 2003; Kushwaha y Ulloa, 2006).

Con base a lo anteriormente discutido, en el presente trabajo se analizará el espectro de excitaciones electrónicas de un gas de electrones bidimensional con interacción espín-órbita. En particular, deseamos estudiar cómo se modifican la relación de dispersión de los plasmones y el continuo de transiciones de partícula independiente de un gas de electrones cuasibidimensional formado en una heteroestructura semiconductor cuando se toma en cuenta la IEO, y en particular una interacción espín-órbita de carácter anisotrópica (IEOA) debida a la presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus. Por lo general, los estudios realizados en los GE2D sólo consideran el acoplamiento de Rashba (Xu, 2003; Kushwaha y Ulloa, 2006). No obstante, algunos trabajos (Schliemann et al., 2003; Berneving et al., 2006), han puesto de manifiesto la gran importancia que puede tener la competencia entre los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus. Tal situación es la que nos motiva a querer investigar el problema anteriormente descrito, donde esperamos que el espectro de excitaciones electrónicas del GE2D se vea modificado por la IEOA con relación al caso de IEO isotrópica (sólo acoplamiento de Rashba).

El presente escrito se estructurará de la siguiente manera. Primeramente, en el capítulo II se hará referencia al origen de la IEO en medios semiconductores (Sec. II.1), y se analizarán las principales contribuciones que se presentan en gases formados en heteroestructuras semiconductoras. En dicho capítulo se darán a conocer hamiltonianos, eigenestados, energías propias, densidades electrónicas, característicos del estado base. En la Sec. II.2 se analizará la IEO de Dresselhaus, en la Sec. II.3 el acoplamiento de Rashba y en la Sec. II.4 la IEOA que resulta de la coexistencia de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus. En el capítulo III se revisará el espectro de excitaciones electrónicas presentes en un sistema de partículas interactuantes (gas de electrones tridi-

mensional y bidimensional). Específicamente hablaremos de los modos colectivos de la densidad de carga y del continuo de excitaciones de pares electrón-hueco, por lo que será necesario describir el Formalismo de *Aproximación de Campo Autoconsistente*, útil en el cálculo de la relación de dispersión de los plasmones. En el capítulo IV se calcula la respuesta dieléctrica que permitirá obtener el espectro de excitaciones electrónicas de un GE2D en presencia de IEO de Rashba y de Dresselhaus. Aquí se obtendrán expresiones para el continuo de transiciones entre dos estados de partícula independiente así como la ecuación cuya solución da la relación de dispersión de los plasmones. Después, en el capítulo V, se derivarán expresiones para los plasmones en el régimen de longitud de onda larga. En el capítulo VI se realizará un análisis numérico de los resultados obtenidos en el IV y en el capítulo VII se presentan las conclusiones.

Capítulo II

INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA EN HETEROESTRUCTURAS SEMICONDUCTORAS

Debido al gran interés que se ha generado en el desarrollo de dispositivos espintrónicos (tecnología basada en la manipulación del espín), es necesario poder generar y detectar corrientes de espín polarizadas además de tener un alto control sobre los estados de espín del electrón. En este contexto, los fenómenos físicos derivados de la interacción espín-órbita (IEO) han recibido una enorme atención. Como se sabe, la IEO permite la conexión entre el espín de los electrones con su momento lineal (ímpetu), lo cual abre la posibilidad de poder influir sobre el espín a través de campos eléctricos que afectan el momento. Este hecho otorga particular importancia a los medios no magnéticos y a sistemas en los que se prescinde de campos magnéticos externos. Estudios recientes, han demostrado que diversos efectos causados por la IEO, tales como el rompimiento en la degeneración de la energía así como la posibilidad de manipular el espín a través de campos eléctricos externos, pueden ser apreciables y observados en superficies metálicas (Petersen y Hedegard, 2000; LaShell et al., 1996) así como en materiales semiconductores (Rashba, 2004). Sin embargo, debido a la experiencia que se tiene en la construcción de las heteroestructuras semiconductoras, este tipo de sistemas se han convertido en el principal candidato para el desarrollo de dispositivos espintrónicos. Además, el utilizar materiales semiconductores trae consigo apreciables ventajas, entre las cuales se encuentran la gran experiencia adquirida en el manejo de éstos en la microelectrónica, así como sus propiedades optoelectrónicas que permitirían el desarrollo de una gran cantidad de dispositivos. Por lo anterior, en el presente capítulo hablaremos de la IEO que se manifiesta en medios semiconductores. El contenido de este apartado se estructura de la siguiente forma. En la sección II.1, de manera general, hablaremos del origen del acoplamiento espín-órbita en los sistemas

ya mencionados, donde veremos el importante papel que desempeña la ausencia de simetría de inversión espacial. En las secciones II.2, II.3 y II.4 se analizarán las diferentes contribuciones a la IEO, debidas al rompimiento de simetrías de inversión, tanto en un cristal tridimensional así como en sistemas confinados.

II.1 Acoplamiento Espín-Órbita en sistemas semiconductores

Para un electrón que se mueve en el vacío, en el límite no relativista, es posible reducir la ecuación de Dirac a la conocida ecuación de Pauli (Foldy y Wouthuysen, 1950; Winkler, 2004). Esta última, es una generalización de la ecuación de Schrödinger en cuya estructura aparecen nuevas contribuciones a la energía, como son el término de Zeeman (si hay campos magnéticos externos) y el término correspondiente a la interacción espín-órbita, entre otros. Para el caso en que el electrón no interacciona con campos electromagnéticos, la contribución más importante, de las dos mencionadas, es la del acoplamiento espín-órbita. Dicho término está dado de la siguiente forma

$$H_{SO}^{vac} = \lambda_{vac} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla \tilde{V}), \quad (1)$$

donde el factor de acoplamiento $\lambda_{vac} = -\hbar^2/4m_0^2c^2 \approx -3.7 \times 10^{-6} \text{ \AA}^2$, m_0 es la masa del electrón, c es la velocidad de la luz, $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de matrices de Pauli y $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ es el vector de onda de los electrones; \mathbf{p} es el operador de momento. Como se puede ver de la ecuación (1), la interacción espín-órbita depende del vector de onda \mathbf{k} y del gradiente del potencial en que se mueve el electrón. Por tanto, si no existe una variación espacial de tal potencial, el término de IEO desaparece. Cuando el electrón se mueve a través de un medio semiconductor (Winkler, 2004) el potencial \tilde{V} puede descomponerse en dos partes, esto es, $\tilde{V} = V_{cr} + V$, donde V_{cr} corresponderá al potencial que la partícula percibe como resultado de la periodicidad del cristal y V refleja la parte no periódica. Este último término contiene el potencial debido a impurezas, confinamientos, fronteras, así como la contribución debida a campos eléctricos externos. Si consideramos que el potencial cristalino es lo suficientemente pequeño, entonces, es posible describir el movimiento de los electrones, en estos medios, a través de la estructura de bandas. Estos sistemas simples pueden ser ejemplificados a través de los semiconductores cúbicos de “brecha” (“*gap*”) directa. Para tales materiales, usualmente, el mínimo de la

energía se encuentra cerca del centro de la zona de Brillouin y el espectro es degenerado únicamente a $k = 0$. Si se consideran argumentos de simetría así como la condición de que el potencial V varíe suavemente con relación al parámetro de red, se obtiene que el Hamiltoniano efectivo para electrones que se mueven en un cristal y para partículas en sistemas bidimensionales es:

$$H_{eff} = \epsilon_k + V + H_{int} + H_{ext} \quad (2)$$

$$H_{int} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

$$H_{ext} = \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla V), \quad (4)$$

donde ϵ_k es el término de energía cinética y H_{int} es la contribución al hamiltoniano efectivo denominado término intrínseco, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es el vector de matrices de Pauli para partículas con espín 1/2 y $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ es el campo espín-órbita intrínseco. En el caso de un medio 3D, el campo $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ tiene su origen en el rompimiento de la simetría de inversión en la estructura cristalina. A la IEO que resulta de esto se le conoce como acoplamiento de Dresselhaus de la cual hablaremos en la sección II.2. Por otro lado, en sistemas 2D tal campo espín-órbita se debe también a la falta de simetría en el confinamiento y se le conoce como IEO de Rashba; esta contribución será estudiada con más detalle en la sección II.3.

El término H_{ext} (ecuación (4)) es la contribución extrínseca al hamiltoniano efectivo. En contraste con (3), no requiere el rompimiento de simetría en la estructura cristalina y se encuentra asociado a campos eléctricos generados por impurezas así como a campos eléctricos externos. Aquí, el potencial V contiene la información de dichos campos y la constante de acoplamiento λ se encuentra dada por

$$\lambda \sim \frac{1}{E_g}, \quad (5)$$

donde E_g es la energía de la brecha prohibida (Winkler, 2004). Note que la forma de la expresión (4) es la misma que se obtiene para el acoplamiento espín-órbita en el vacío. Sin embargo, $\lambda \gg \lambda_{vac}$ hasta en seis ordenes de magnitud. Por ejemplo, se

ha encontrado que para GaAs $\lambda \approx 5.3 \text{ \AA}^2$ y para InAs $\lambda \approx 120 \text{ \AA}^2$. Este incremento en la IEO es de gran utilidad para producir corrientes eléctricas extrínsecas. Por otra parte, en sistemas bidimensionales para obtener la parte extrínseca, el potencial V se promedia a lo largo de la dirección $\hat{\mathbf{z}}$. Por ello, tanto ∇V como el vector de onda \mathbf{k} se encuentran contenidos en el plano, obteniendo que $H_{ext,e} = \lambda \sigma_z (\mathbf{k} \times \nabla V)_z$, donde el subíndice e indica que es la expresión para electrones en la banda de conducción.

Efectos del rompimiento de la simetría de inversión espacial

La degeneración de espín de los estados electrónicos en un semiconductor se debe al efecto combinado de las simetrías de inversión espacial y temporal. Un sistema con simetría de inversión temporal permite que un electrón con vector de onda \mathbf{k} y espín \uparrow tenga igual energía que otro electrón con vector de onda $-\mathbf{k}$ y espín \downarrow es decir, $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(-\mathbf{k}, \downarrow)$. Por otro lado, la simetría de inversión espacial hace posible el hecho de que un electrón con vector de onda \mathbf{k} y espín \uparrow tenga igual energía que un electrón con vector de onda $-\mathbf{k}$ y de espín similar, esto es, $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(-\mathbf{k}, \uparrow)$. En sistemas donde coexisten los dos tipos de simetrías de inversión, se crea una degeneración en la energía, ya que cada estado caracterizado por un vector de onda \mathbf{k} , puede estar ocupado por dos electrones de espín contrario, esto es, $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(\mathbf{k}, \downarrow)$. Tal degeneración, ocasiona que los semiconductores no presenten el fenómeno del magnetismo, ya que al promediar sobre todos los estados del sistema, el valor esperado del momento magnético es cero. En medios donde se rompe la simetría de inversión espacial, es posible tener una contribución a la interacción espín-órbita. Dicho acoplamiento, puede interpretarse como un campo magnético efectivo dependiente del momento, $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ (ecuación (3)), que se acopla con el espín de los electrones (Winkler, 2003). Este hecho permite la ruptura de la degeneración en energía (para $\mathbf{k} \neq 0$) en ausencia de \mathbf{B}_{ext} , siendo posible diferenciar la energía para un mismo vector de onda \mathbf{k} por el sólo hecho de estar en uno u otro estado de espín, esto es, $E(\mathbf{k}, \uparrow) \neq E(\mathbf{k}, \downarrow)$. Tal efecto, es de suma importancia, ya que es una forma de generar densidades de electrones con espín polarizado (sin campos magnéticos externos), que es una de las condiciones inevitables en el desarrollo de los dispositivos espintrónicos. En el caso tridimensional de un material semiconductor tipo zincblenda, la IEO se manifiesta como el resultado de una falta de simetría de inversión

en la estructura cristalina. A tal contribución se le conoce como interacción espín-órbita de Dresselhaus. Por otra parte, en el caso de sistemas confinados, como son los gases electrónicos formados en heteroestructuras semiconductoras, se hace notar la interacción espín-órbita que se origina de la falta de simetría de inversión del potencial que confina a los electrones. Este acoplamiento es conocido en la literatura como IEO de Rashba. Aunque las dos IEO pueden estudiarse de manera separada, en el caso de los sistemas confinados es posible tener la contribución de ambas. En las siguientes secciones se describirán cada uno de los acoplamientos espín-órbita, dando a conocer Hamiltonianos, energías propias, eigenestados, densidades electrónicas, etc.

II.2 Interacción de Dresselhaus

De la falta de simetría de inversión en el bulto que se presenta en materiales semiconductores que poseen estructura zincblenda (ver figura 1), como es el caso de los semiconductores constituidos por elementos de los grupos III y V, surge una importante contribución espín-órbita a la energía conocida como *acoplamiento de Dresselhaus* (Dresselhaus, 1955). Es una interacción de orden cúbico en el momento, cuyo hamiltoniano está dado por la expresión

$$H_D = \gamma [\sigma_x k_x (k_y^2 - k_z^2) + \sigma_y k_y (k_z^2 - k_x^2) + \sigma_z k_z (k_x^2 - k_y^2)], \quad (6)$$

donde σ_i representan las matrices de Pauli, y γ es un parámetro intrínseco al material que caracteriza la intensidad del acoplamiento espín-órbita (La-Rocca y de Andrada e Silva, 1997), cuyos valores típicos son 20 eVÅ³ para GaAs y de 150-250 eVÅ³ para InAs, InSb y GaSb (Rashba, 2004). Por último, k_i representa las componentes del vector de onda del electrón. Para sistemas cuasi-bidimensionales, como es el caso de un gas de electrones formado en la interfase de una heteroestructura semiconductor, el término de Dresselhaus se vuelve lineal en el momento al promediar a lo largo de la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ (perpendicular al plano del gas). De tal procedimiento se obtiene que $\langle k_z \rangle = 0$ (valor de expectación de k_z), pero $\langle k_z^2 \rangle \neq 0$, y por tanto el hamiltoniano en dos dimensiones puede ser escrito de la siguiente manera

$$H_D^{2d} = \frac{\hbar}{2} \mathbf{\Omega}_D(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (7)$$

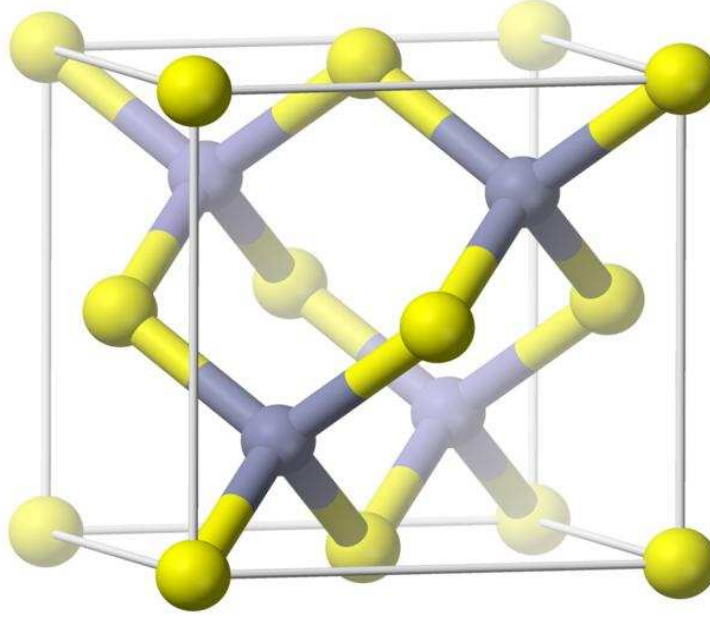


FIGURA 1.- Los materiales semiconductores, tales como GaAs, poseen estructura cristalina zincblenda.

donde $\mathbf{\Omega}_D$ es el campo efectivo espín-órbita. En el caso de la cara [001] esta expresión puede reescribirse como

$$H_D^{2d} = \beta (k_x \sigma_x - k_y \sigma_y), \quad (8)$$

al introducir explícitamente $\hbar \mathbf{\Omega}_D(\mathbf{k})/2 = \beta(k_x \hat{\mathbf{x}} - k_y \hat{\mathbf{y}})$, en donde $\beta = \gamma \langle k_z^2 \rangle$ y mide la magnitud del acoplamiento lineal de Dresselhaus¹. Por tanto, el hamiltoniano completo de una partícula para un electrón libre en un sistema cuasi-bidimensional estará dado por

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 + H_D^{2d}, \quad (9)$$

en la que m^* es la masa efectiva del electrón, que resulta del movimiento de éste a través de un medio material. Las eigenfunciones correspondientes a este hamiltoniano

¹Para un pozo cuántico de ancho ~ 100 Å los valores típicos del parámetro β se encuentran en el rango de 2×10^{-10} - 2×10^{-9} eVcm y decrece rápidamente con el ancho del pozo (Rashba, 2004).

son

$$\Psi_{\lambda \mathbf{k}_{\parallel}}(\mathbf{r}_{\parallel}, z) = \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}}}{2\pi} \psi_0(z) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}). \quad (10)$$

En esta expresión \mathbf{r}_{\parallel} es el vector de posición para los electrones en el plano $x-y$, \mathbf{k}_{\parallel} es el vector de onda bidimensional correspondiente; de aquí en adelante tales vectores serán escritos simplemente como \mathbf{r} y \mathbf{k} . Por otra parte, $\psi_0(z)$ es la función envolvente que representa el estado base que resulta del confinamiento en la dirección z . Por último, $\chi_{\lambda}(\mathbf{k})$ es la parte de los eigenestados que contiene la información relacionada con el espín de las partículas. A éste se le conoce como el *espinor* y está dado por

$$\chi_{\lambda}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(k_x - ik_y)/k \end{pmatrix}, \quad (11)$$

con $\lambda = \pm 1$, donde los signos ± 1 indican la existencia de dos ramas.

Las energías propias del sistema estarán dadas por

$$E_{\lambda} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \lambda\beta k = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k + \lambda k_{\beta})^2 - \frac{\hbar^2 k_{\beta}^2}{2m^*}. \quad (12)$$

donde $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ y $k_{\beta} = 2m^*\beta/\hbar^2$. Si graficamos la relación (12), es posible observar que la dispersión parabólica correspondiente a un gas de electrones degenerado en espín, se desdobra en dos subbandas no parabólicas, y a las que comúnmente se les conoce como la subbanda *más* y la subbanda *menos* (Figura 2); las etiquetas *más* y *menos* provienen del valor de λ , que puede ser $+1$ y -1 . De esta manera, por cada vector de onda se tienen dos estados electrónicos disponibles, separados por la diferencia de energía $2\beta k$ y caracterizados, cada uno, por la polarización de espín $\langle \psi_{\lambda} | \boldsymbol{\sigma} | \psi_{\lambda} \rangle$. Lo anterior se ilustra en la figura 3, donde se muestra un corte transversal de las superficies de energía, para un vector de onda \mathbf{k} arbitrario.

La densidad de electrones en cada una de las subbandas (n_{λ}) a temperatura cero se encuentra sumando sobre todos los estados ocupados hasta la misma energía de Fermi E_F , es decir,

$$n_{\lambda} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \Theta[E_F - E_{\lambda}(\mathbf{k})], \quad (13)$$

donde $\Theta[E_F - E_{\lambda}(\mathbf{k})]$ es la función escalón unitaria, cuyo valor es cero si $E_{\lambda} > E_F$. Por tanto, la anterior integral se llevará a cabo en el intervalo que va de cero hasta el vector de onda que caracteriza el nivel de Fermi. Sin embargo, cada subbanda poseerá diferente

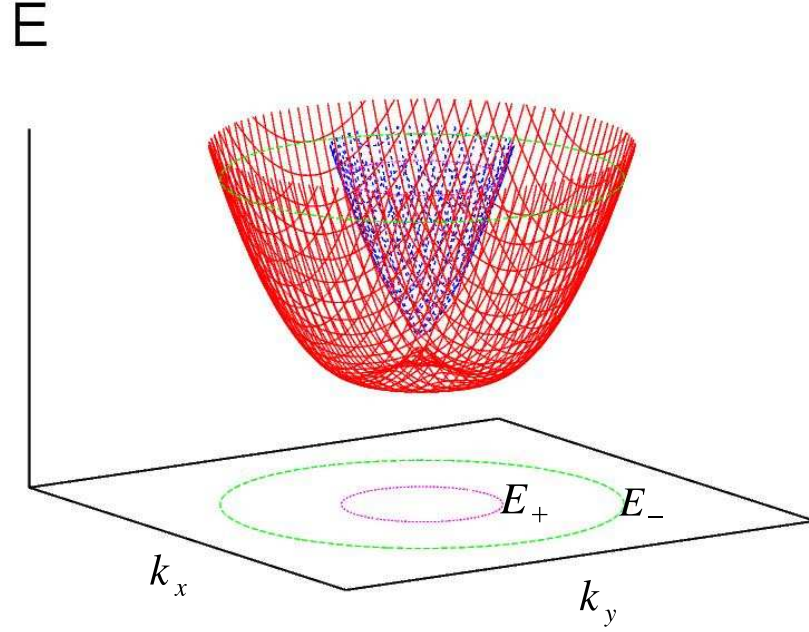


FIGURA 2.- Dispersión de la energía para electrones en un gas bidimensional en presencia de interacción espín-órbita. La dispersión parabólica para electrones libres se desdobra en dos subbandas, rompiendo la degeneración del sistema.

vector $k_F^\lambda = \sqrt{\frac{2m^*E_F}{\hbar^2} + k_\beta^2} - \lambda k_\beta$ determinado mediante la condición $E_\lambda(k_F^\lambda) = E_F$ (ver figura 3). Así, la densidad n_λ puede ser expresada como

$$n_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{k_F^\lambda} k dk d\theta. \quad (14)$$

de donde al considerar que el número total de electrones n_e se debe conservar, es decir,

$$n_e = n_+ + n_-, \quad (15)$$

se obtiene que la energía de Fermi será $E_F = \hbar^2(2\pi n_e - 2k_\beta^2)/2m^*$. Por tanto, utilizando ésto se obtiene que la densidad electrónica en cada subbanda estará dado por

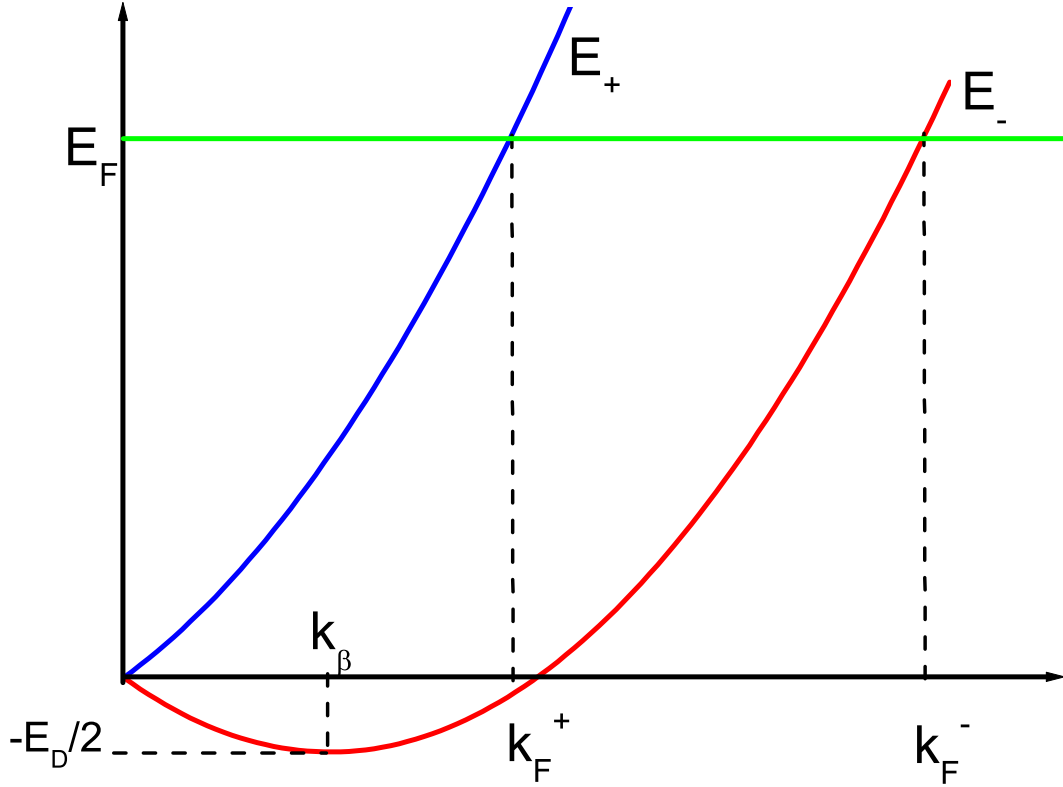


FIGURA 3.- Corte transversal de las superficies mostradas en la figura 2. El desdoblamiento de la subbanda de conducción permite que para cada valor de k existan dos estados disponibles, uno en la subbanda E_+ y otro en la subbanda E_- . Por otra parte, el mínimo de la subbanda E_- será $-E_D/2 = -\hbar^2 k_\beta^2 / 2m^*$ y los vectores k_F^+ y k_F^- satisfacen la condición $E_\lambda(k_F^\lambda) = E_F$.

$$n_\lambda = \frac{n_e}{2} - \lambda \frac{k_\beta}{2\pi} k_F, \quad (16)$$

donde hemos definido $k_F = \sqrt{2\pi n_e - k_\beta^2}$.

Una pregunta interesante es, ¿en qué dirección apunta el espín cuando el electrón está en el estado $\psi_{\lambda,\mathbf{k}}$? Para responder a tal cuestión es posible calcular el vector de polarización, donde la dirección de éste coincide con el momento magnético intrínseco de los electrones, indicando el eje de cuantización en cada subbanda para cada valor de \mathbf{k} . El vector de polarización estará dado como el valor de expectación del vector de

matrices de Pauli, esto es $\langle \lambda_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\sigma} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle$, donde $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ está definido por (11). De aquí se obtiene que dicho vector estará expresado de la siguiente manera:

$$\langle \lambda_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\sigma} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle = \lambda \frac{k_x \hat{\mathbf{X}} - k_y \hat{\mathbf{Y}}}{k} = \lambda (\cos \theta \hat{\mathbf{X}} - \sin \theta \hat{\mathbf{Y}}). \quad (17)$$

Analizando la anterior ecuación, podemos ver que el vector de polarización de espín se encontrará sobre el plano de GE2D, tal como se muestra en la figura 4 (tomada del libro de Winkler (Winkler, 2003)). De dicha gráfica es posible notar que para cada dirección del vector de onda \mathbf{k} existirán dos estados localizados a energías E_+ y E_- ; tales estados manifiestan una diferencia en la polarización de espín. Con esto, es posible explicar porqué los GE2D son medios no magnéticos aún cuando la IEO está presente.

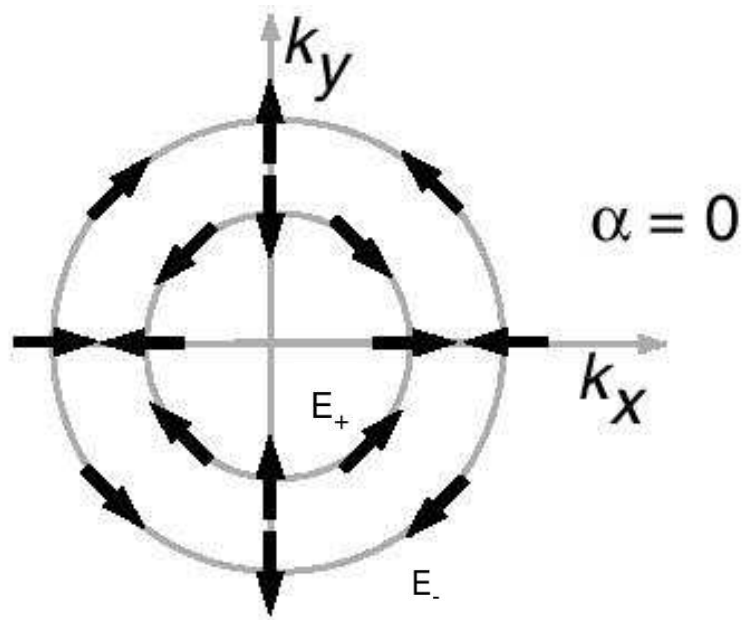


FIGURA 4.- Distribución de espines en el espacio de momentos y en cada banda en un Gas 2D con IEO de Dresselhaus (Ganichev et al., 2004).

Dado un valor de la energía la *Densidad de Estados* correspondiente a la subbanda λ es

$$D(E) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta[E - E_{\lambda}(\mathbf{k})] = D_+(E) + D_-(E), \quad (18)$$

en donde

$$D_\lambda(E) = \int \frac{d^2k}{2\pi} \delta[E - E_\lambda(\mathbf{k})], \quad (19)$$

que para el caso de un gas degenerado en espín resulta ser $D_0 = (m^*/\pi\hbar^2)$. De esta manera se obtiene que para el caso de la subbanda más, la densidad de estados normalizada a $D_0(E)$, es:

$$\frac{D_+(E)}{D_0} = \Theta(E) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{1 + 2E/E_D} \right)^{1/2} \right], \quad (20)$$

donde $E_D = m^*\beta^2/\hbar^2$ y $\Theta(E)$ es una función escalón que adquirirá el valor de uno si $E \geq 0$, pero cuando $E < 0$ se vuelve cero. De la misma manera que en el caso anterior, es posible obtener una expresión para la densidad de estados en la subbanda menos

$$\frac{D_-(E)}{D_0} = \Theta(E) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{1 + 2E/E_D} \right)^{1/2} \right] + \Theta(-E) \Theta(E + E_D/2) \left(\frac{1}{1 + 2E/E_D} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

El segundo término del lado derecho representa la densidad de estados para energías negativas, expresado por $\Theta(-E)$. Tales energías se encuentran acotadas mediante la relación $-E_D/2 \leq E \leq 0$, condición que se incluye en la ecuación 21 a través de la función $\Theta(E + E_D/2)$.

Al graficar las expresiones para las densidades D_+ , D_- y D_0 , es posible observar que la presencia del acoplamiento espín-órbita de Dresselhaus introduce importantes cambios (ver figura 5). Por ejemplo, podemos apreciar que a diferencia del gas degenerado en espín (donde la densidad de estados es una constante), en los GE2D con IEO la densidad puede descomponerse como la densidad de estados en cada una de las subbandas. Estas nuevas densidades poseen la propiedad de que que al sumarse, considerando sólo el caso $E > 0$, se recupera la densidad de estados para un sistema sin IEO, es decir, $D_+ + D_- = m^*/\pi\hbar^2$. Así mismo, podemos ver que la DDE correspondiente a la subbanda *menos* siempre será mayor que la asociada a la subbanda *más*.

Con todo lo comentado en esta sección es posible notar que la presencia del acoplamiento espín-órbita de Dresselhaus en los gases de electrones bidimensionales, introduce una serie de efectos importantes como son el rompimiento de la degeneración en espín, el cambio en la densidad de estados (con respecto al caso sin IEO), etc. De esta forma,

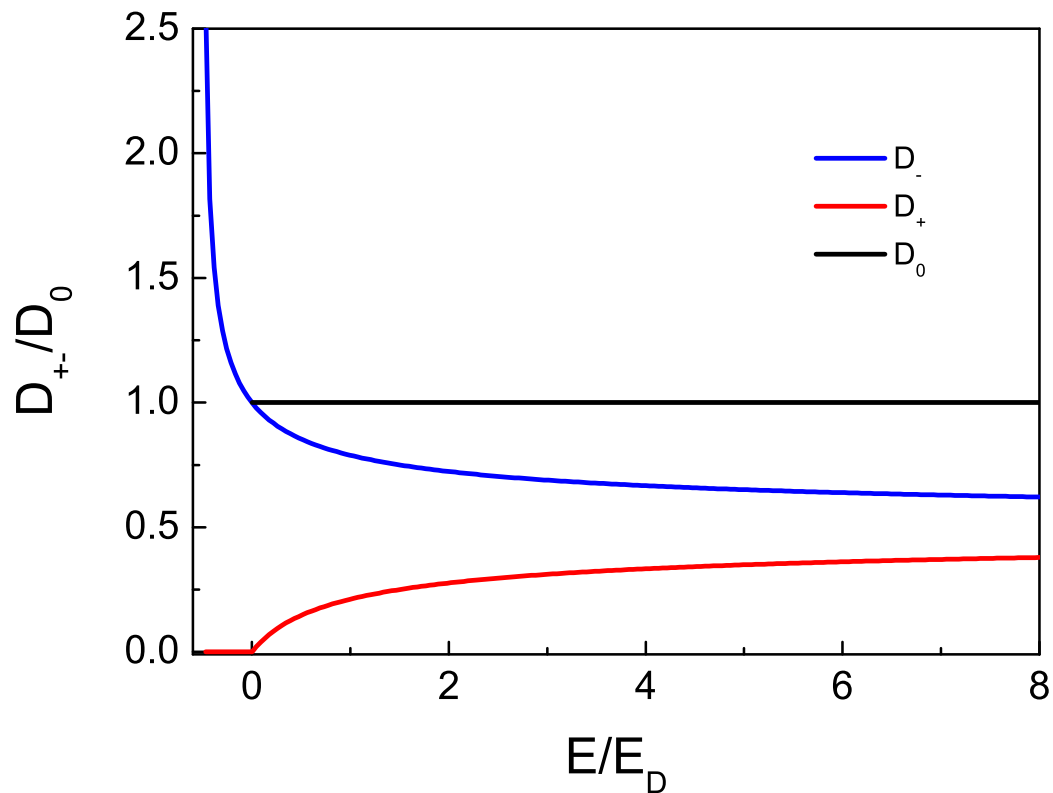


FIGURA 5.- Densidad de estados para un gas electrónico bidimensional normalizada a $D_0 = m^*/\pi\hbar^2$. La línea en azul representa la DDE para la subbanda menos, la línea en rojo es la densidad de estados para la subbanda más y la línea negra es la densidad de estados de un GE2D degenerado en espín

dichos sistemas adquieren nuevas propiedades, mismas que se desea sean explotadas en el desarrollo de dispositivos espintrónicos. No obstante, es necesario recordar que ésta no es la única contribución a la IEO, ya que existe otra cuyo origen proviene de la falta de simetría de inversión en un potencial de confinamiento (como ya se mencionó) y de la que hablaremos en la siguiente sección.

II.3 Interacción de Rashba

Otra contribución a la IEO que ha sido ampliamente estudiada, es la conocida como interacción de Rashba (Rashba, 2004). Esta, se origina por la asimetría de inversión espacial del pozo de potencial que confina al gas de electrones (figura 6). Un aspecto

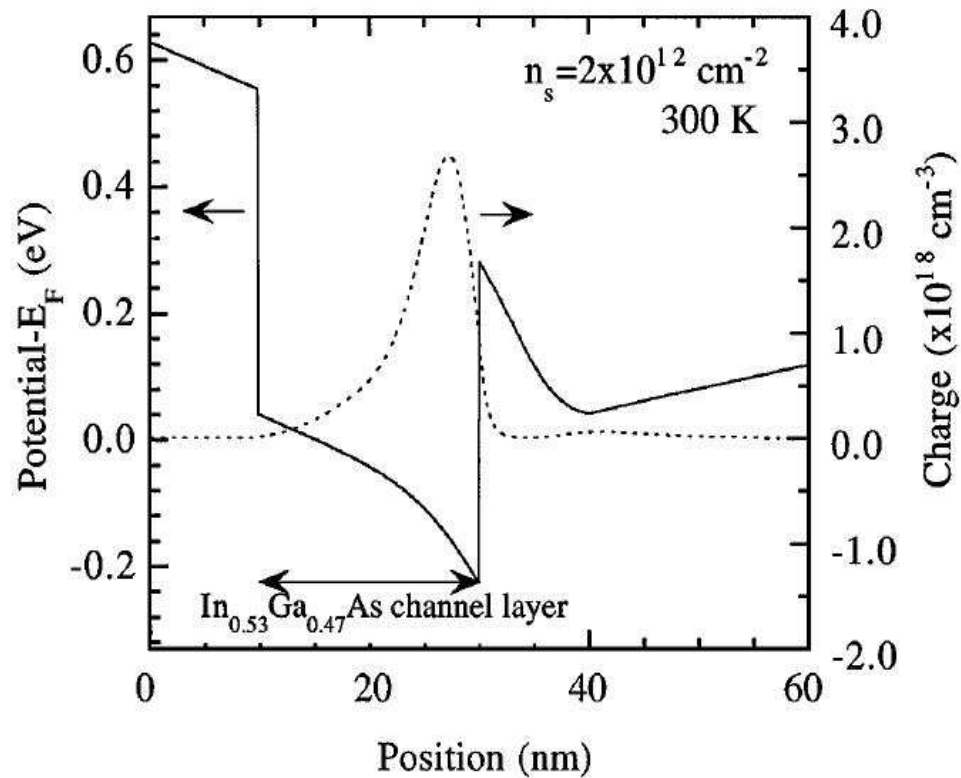


FIGURA 6.- Gas de electrones bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor (Nitta et al., 1997). La asimetría en el potencial de confinamiento da lugar a una contribución a la IEO.

notable, muy importante para propósitos espintrónicos, es el hecho de que la IEO de Rashba puede ser modulada a través de un potencial externo (“voltajes de compuerta”) (Nitta et al., 1997), el cual permite deformar el potencial de confinamiento y con ello variar la intensidad de la interacción, cuyos valores típicos, para materiales basados en InAs, están en el rango de 1×10^{-9} a 6×10^{-9} eV cm, tal como ha sido reportado (Cui

et al., 2002). El hamiltoniano que representa dicha interacción es:

$$H_R = \alpha (\sigma_y k_x - \sigma_x k_y), \quad (22)$$

donde α es el parámetro que caracteriza la magnitud de tal contribución. Para un electrón el hamiltoniano completo, al igual que (9), estará dado por la parte cinética más el término (22). Por tanto, los eigenestados correspondientes tendrán la forma de la expresión (10) presentando únicamente diferencias en la parte que contine la información del espín, que en este caso será

$$\chi_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(k_y - ik_x)/k \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Las energías propias estarán dadas por la expresión

$$E_\lambda^R = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2 + \lambda \alpha k, \quad (24)$$

mismas que al ser graficadas como función del vector de onda \mathbf{k} , muestran un desdoblamiento isotrópico de la subbanda de conducción igual al que se presenta cuando se tiene únicamente IEO de Dresselhaus (ver figura 2).

A $T = 0$, la subbanda λ estará ocupada hasta el nivel de Fermi, y los estados se caracterizarán por el vector de Fermi $k_F^\lambda = \sqrt{\frac{2m^* E_F}{\hbar^2} + k_\alpha^2} - \lambda k_\alpha$, con $k_\alpha = m^* \alpha / \hbar^2$. La densidad de electrones en cada una de las subbandas n_λ puede ser determinada por medio de la ecuación (13), en donde se debe cumplir que $n_e = n_+ + n_-$. De esto se obtiene que $E_F = \hbar^2(2\pi n_e - 2k_\alpha^2)/2m^*$ y que la densidad para la subbanda λ estará dada por

$$n_\lambda = \frac{n_e}{2} - \lambda \frac{k_\alpha}{2\pi} k_F, \quad (25)$$

donde se ha definido $k_F = \sqrt{2\pi n_e - k_\alpha^2}$.

Un dato interesante de la expresión (25), es su dependencia de cantidades que pueden ser moduladas, como la intensidad de IEO α y la densidad total de electrones ($n_\lambda(n_e, \alpha)$). Este hecho, hace posible la manipulación del número de electrones que ocupan cada subbanda; tal efecto se puede observar en las figuras 10 y 11. La gráfica 10, muestra las densidades para la subbanda n_+ y n_- como función del parámetro de

Rashba (curva en color rojo). En dicha figura se aprecia un aumento en n_- y una disminución en n_+ conforme el parámetro α se incrementa. Un efecto similar se observa al graficar n_λ como función de la densidad total de electrones n_e , se aprecia que la densidad n_+ será menor que n_- conforme disminuimos n_e , tal como se muestra en la figura 11. Ambos efectos aquí mencionados, se deben a que al disminuir la densidad total de electrones o al aumentar la intensidad de la IEO, se traduce directamente en una disminución del nivel de Fermi, de tal manera que el número de electrones que ocupan la subbanda “mas” llega ser mucho menor que la cantidad de electrones que se encuentran en la subbanda “menos”.

El vector de polarización en el estado $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ (ecuación 23) es ahora

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\sigma} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle &= \lambda \frac{-k_y \hat{\mathbf{x}} + k_x \hat{\mathbf{y}}}{k} \\ &= \lambda \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} \\ &= \lambda [-\sin\theta \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \hat{\mathbf{y}}]. \end{aligned} \tag{26}$$

En la figura 7 se muestra el campo de polarización de espín correspondiente a los estados de Rashba (23). De tal representación es posible ver la diferencia que existe con el esquema presentado en la sección anterior para IEO de Dresselhaus (figura 4), no obstante, en ambos casos, el momento magnético total es cero.

Para un sistema donde la IEO de Rashba es significativa, el número de estados por unidad de energía estarán determinados por la expresión (19). En el presente caso las densidades de estados $D_\lambda(E)$ están dadas por las expresiones obtenidas para el caso de IEO de Dresselhaus, donde únicamente se realiza el cambio $E_D \rightarrow E_R$, con $E_R \equiv m^* \alpha^2 / \hbar^2$. De esta manera, la densidad de estados presentará el mismo comportamiento mostrado en la figura 5. Sin embargo, recordemos que la IEO de Rashba puede ser modulada a través de potenciales externos; tal cosa no es cierta para la interacción espín-órbita de Dresselhaus. Dicho control, abre la posibilidad de modificar algunas propiedades de los sistemas, como función del parámetro de IEO α .

Hasta el momento hemos hablado de las principales contribuciones a la IEO de manera independiente, cabe señalar que en sistemas confinados podemos tener la participación conjunta de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus. Esto trae consigo un cambio importante del que hablaremos en la siguiente sección.

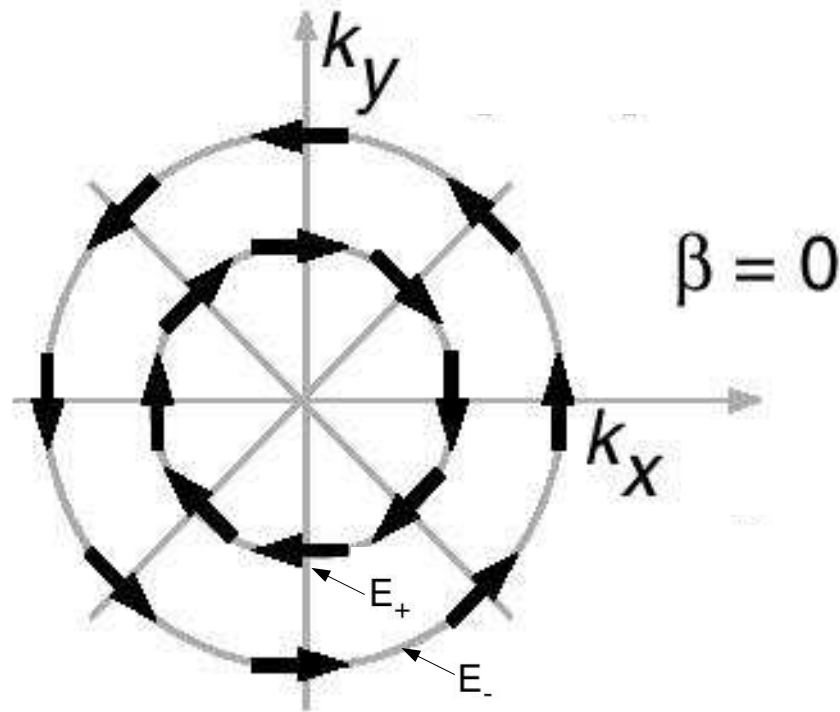


FIGURA 7.- Distribución de los espines en un gas de electrones bidimensional con IEO de Rashba (Ganichev et al., 2004).

II.4 Acoplamiento espín-órbita anisotrópico: Rashba + Dresselhaus

Algunos autores han expresado especial interés en considerar la coexistencia de ambos acoplamientos. Por ejemplo, J. Schliemann et al. en 2003 (Schliemann et al., 2003), muestran que la presencia conjunta de la IEO de Rashba y la de Dresselhaus permite realizar una modificación sobre el transistor de espín de Datta y Das (Datta y Das, 1989). En dicho trabajo se señala la importancia de tener $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \beta$ para construir los estados de encendido (1) y apagado (0) de dicho transistor. En 2004 N. Sinitsyn et al, (Sinitsyn et al., 2004) realizan estudios sobre los efectos de la IEOA sobre la conductividad Hall de espín. Estos son tan sólo algunos de los trabajos que muestran

la importancia de considerar Rashba y Dresselhaus simultaneamente.

En esta sección, revisaremos cómo se modifican las propiedades del gas por la competencia entre el acoplamiento de Rashba y el acoplamiento de Dresselhaus.

Ahora, el hamiltoniano en consideración es:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2 + H_R + H_D^{2d}. \quad (27)$$

Los eigenestados tienen la forma de la expresión (10) con el espinor dado por

$$\chi_\lambda(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

donde $\tan \varphi = (\alpha k_x - \beta k_y)/(\alpha k_y - \beta k_x)$ y $\lambda = \pm 1$.

Las eigenenergías están dadas por

$$E_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \lambda D(\mathbf{k}), \quad (29)$$

donde

$$D(\mathbf{k}) = \sqrt{(\beta k_x - \alpha k_y)^2 + (\alpha k_x - \beta k_y)^2}, \quad (30)$$

que en polares se escribe como

$$D(\mathbf{k}) = k\Delta(\theta), \quad (31)$$

con

$$\Delta(\theta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\text{sen}(2\theta)}. \quad (32)$$

La figura 8 muestra las superficies definidas por (29). En ella se observa una anisotropía, como función de la dirección del momento de los electrones. Este efecto puede notarse con mayor claridad al obtener las curvas de contorno para la energía de Fermi E_F (ver la figura 9), de donde podemos apreciar la existencia de ejes de alta simetría localizados a ángulos $\theta = \pi/4$, $\theta = 5\pi/4$, $\theta = 3\pi/4$ y $\theta = 7\pi/4$, es decir en las direcciones $\pm(1, 1)$ y $\pm(-1, 1)$.

El nivel de Fermi para la subbanda λ se encontrará caracterizado por el vector

$$k_F^\lambda(\theta) = \sqrt{2\pi n_e - 2q_{so}^2 + k_{so}^2(\theta)} - \lambda k_{so}(\theta), \quad (33)$$

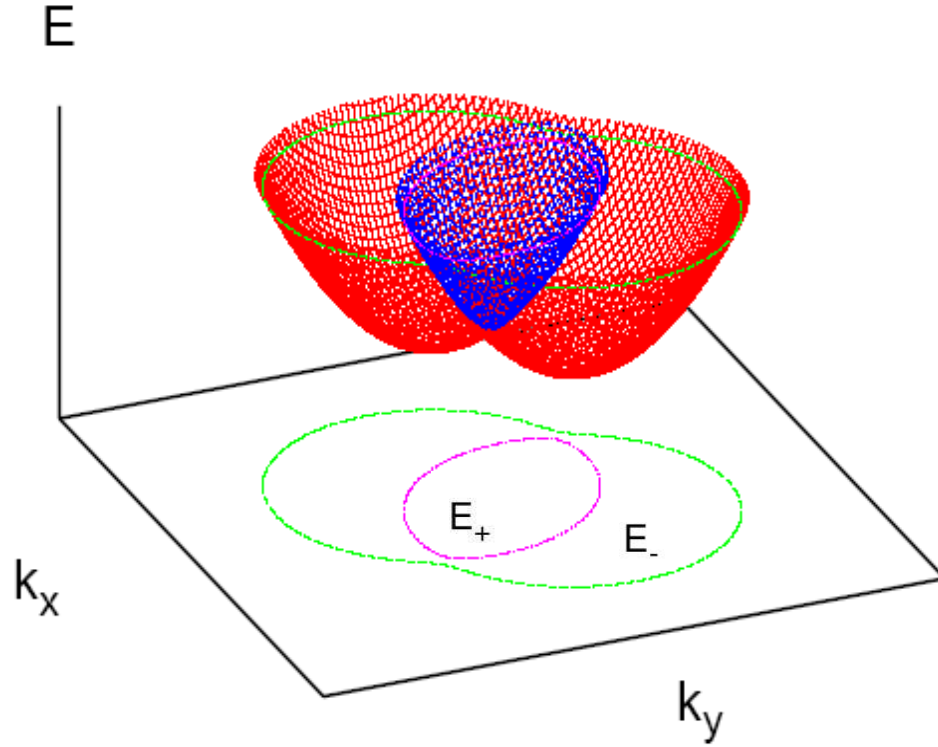


FIGURA 8.- Desdoblamiento anisotrópico de la relación de dispersión de la energía como resultado de la coexistencia de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus.

donde n_e es la densidad total de electrones, $q_{so} = m\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/\hbar^2$ y $k_{so} = m\Delta(\theta)/\hbar^2$. De esta manera, utilizando la expresión (13), se obtiene que a $T = 0$ la densidad electrónica en la subbanda λ es

$$n_\lambda = \frac{n_e}{2} - \lambda \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta k_{so}(\theta) \sqrt{2\pi n_e - 2q_{so}^2 + k_{so}^2(\theta)}, \quad (34)$$

La figura 10 muestra las densidades electrónicas n_+ y n_- como función de la intensidad de IEO α , manteniendo $\beta = 0.5\alpha$ (curvas en rojo). Gracias a la presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus al aumentar la intensidad α se produce una disminución en el nivel de Fermi mayor que el que se presenta cuando sólo se tiene IEO de Rashba. Por dicho motivo, es posible apreciar que la densidad electrónica

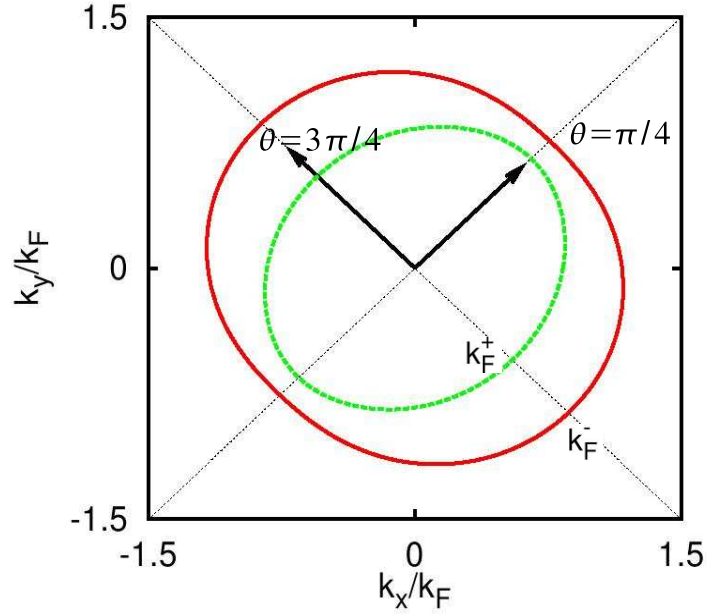


FIGURA 9.- Corte transversal de la dispersión de la energía. Se muestra la anisotropía como función del vector de onda, donde existen dos ejes de alta simetría localizados a ángulos $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$

total, n_e , se encontrará contenida en la subbanda “*menos*” para valores de α menores que los que se presentan en el caso $\beta = 0$ (curvas en azul). Un comportamiento similar al anterior se obtiene al disminuir la densidad total de electrones n_e , tal como se ilustra en la figura 11.

Por otra parte, el vector de polarización de espín estará dado por:

$$\langle \lambda_{\mathbf{k}} | \boldsymbol{\sigma} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle = \lambda \frac{(-\alpha k_y + \beta k_x) \hat{\mathbf{x}} + (\alpha k_x - \beta k_y) \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{(\alpha k_y - \beta k_x)^2 + (\alpha k_x - \beta k_y)^2}} = \lambda [\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} - \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}], \quad (35)$$

cuyas componentes se encuentran contenidas en el plano que forma el gas de electrones bidimensional. La ilustración del campo de polarización resultante puede ser observada en la figura figura 12. En ella es posible notar que cada estado caracterizado por el vector de onda \mathbf{k} se desdobra en dos estados con espín contrario. Por tanto, no hay magnetización espontánea neta causada por el campo espín-órbita. La gráfica 12 fue tomada del trabajo de Ganichev et al, de 2004 (Ganichev et al., 2004).

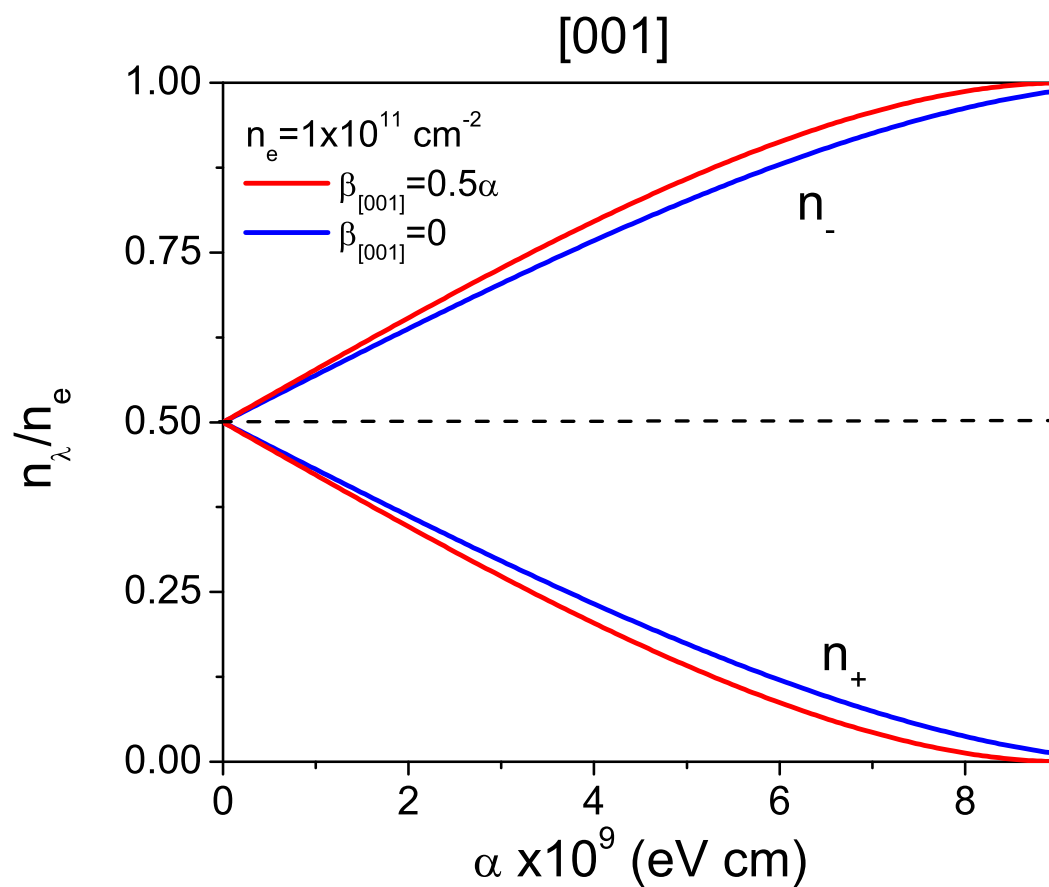


FIGURA 10.- Densidad de electrones en cada subbanda de espín como función del parámetro espín-órbita de Rashba para valores de $\beta_{[001]} = 0.5\alpha$ y $\beta_{[001]} = 0$. Se observa que la población en la banda más disminuye conforme aumenta α , mientras que en la banda menos, dicha población se incrementa.

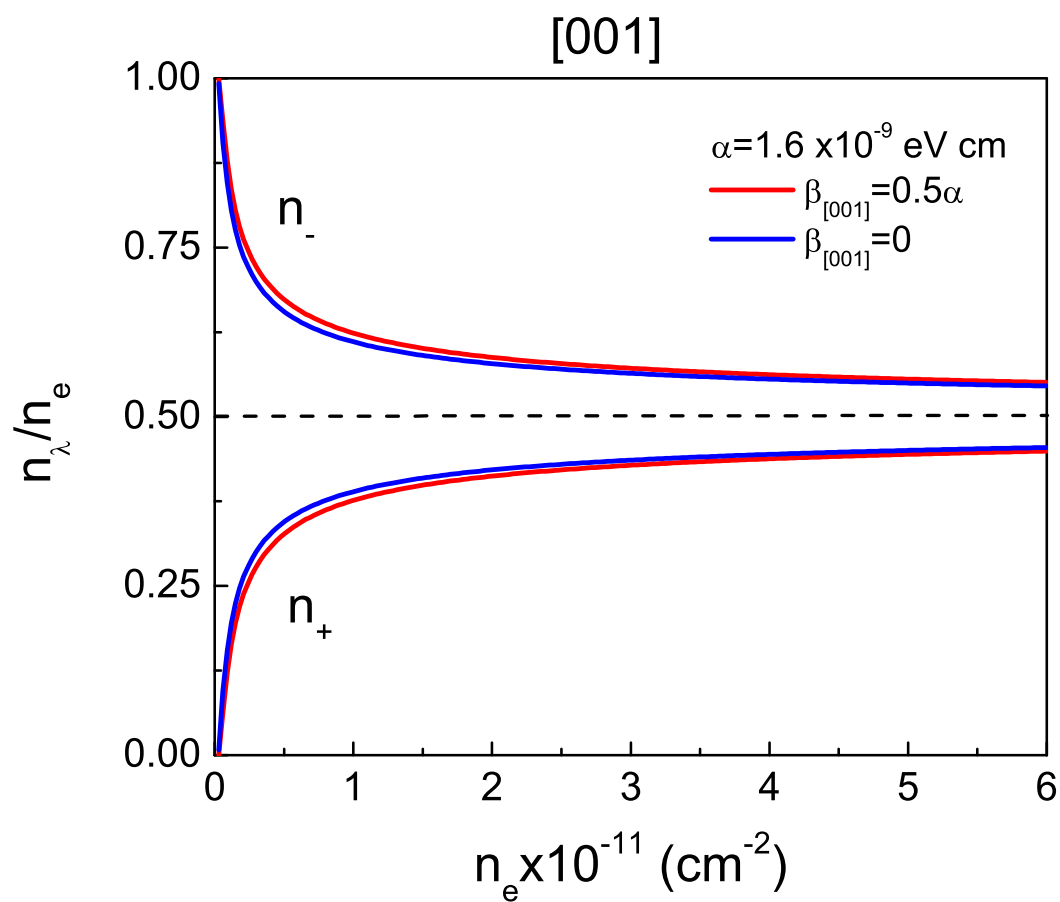


FIGURA 11.- Densidad de electrones para una subbanda desdoblada en espín como función de la densidad total de electrones. Se observa que la población en la banda más disminuye conforme disminuye la densidad total de electrones, mientras que en la banda menos, dicha población se incrementa.

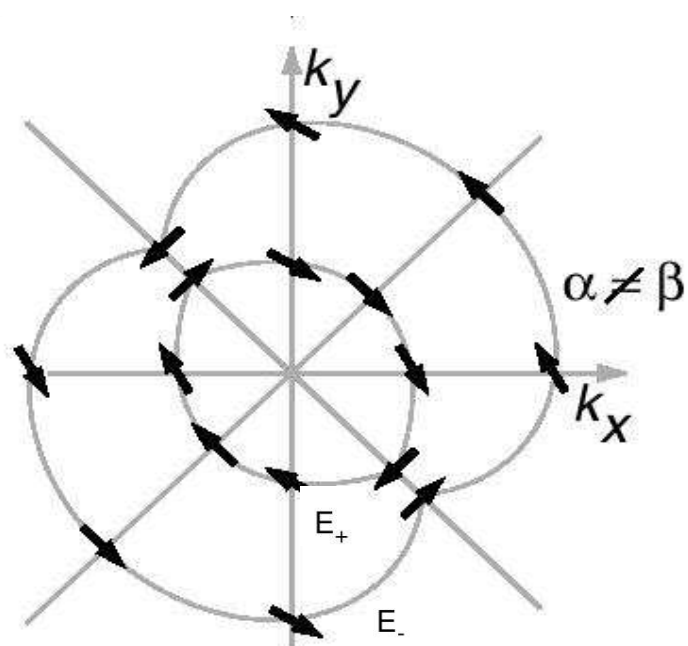


FIGURA 12.- Esquema de flechas que indica la dirección del vector de momento magnético intrínseco en cada subbanda para cada vector de onda \mathbf{k} en presencia de IEO anisotrópica (Ganichev et al., 2004).

Capítulo III

EXCITACIONES ELECTRÓNICAS EN UN GAS DE ELECTRONES

En un gas de electrones degenerado las excitaciones electrónicas son, en general, de dos tipos: (1) excitaciones de partícula individual, dadas por las excitaciones incoherentes de pares electrón-hueco, y (2) modos colectivos de la densidad de carga (oscilaciones de plasma o “plasmones”), que pueden interpretarse como una oscilación coherente de pares electrón-hueco. En el presente capítulo revisaremos las características de éstas. En la sección III.1, se estudiarán las oscilaciones de plasma desde el punto de vista de la Electrodinámica Macroscópica, en donde aparecen como modos longitudinales a frecuencias tales que la función dieléctrica del medio se anula. En la sección III.2 se analiza el *Método de Campo Autoconsistente* que se utiliza para calcular funciones respuesta tales como la función dieléctrica, la susceptibilidad eléctrica o conductividad eléctrica en términos de las propiedades microscópicas del medio. En la sección III.3, se muestra cómo la presencia de la interacción electrón-electrón da lugar a una respuesta apantallada que incluye como consecuencia la aparición de excitaciones colectivas. En las secciones III.4 y III.5 analizaremos el espectro de excitaciones electrónicas del gas de electrones tridimensional y el bidimensional, respectivamente. Finalmente, en la sección III.6 se comentan algunos experimentos.

III.1 Plasmones desde el punto de vista clásico

Consideremos un medio metálico, en el que los electrones de conducción se mueven de manera libre. En el equilibrio la carga negativa se verá compensada con la carga positiva correspondiente a los átomos ionizados. No obstante, dicho balance puede romperse al incrementarse la densidad electrónica sobre cierta región R . En consecuencia, dicha

región se vuelve más negativa, por lo que los electrones se alejarán de ella por la repulsión coulombiana. Sin embargo, debido a la inercia de las partículas, no es posible recuperar inmediatamente el equilibrio, esto ocasiona que los electrones permanezcan en movimiento incluso después de que el sistema se ha vuelto eléctricamente neutro. De esta forma, los electrones continúan su camino en dirección contraria a R hasta que en determinado momento dicha región en el espacio adquiere una carga neta positiva que obligará a las partículas negativas a retornar. Esto, generará nuevamente un exceso de electrones dentro de R por lo que se repete el proceso anteriormente descrito, volviéndose algo cíclico (hasta que la energía asociada a dicho movimiento se disipa). Lo anterior puede interpretarse como oscilaciones de la densidad de carga dentro del medio conductor y a las que se les conoce como “oscilaciones de plasma”. Estas se encuentran caracterizadas por la frecuencia ω_p que depende de la densidad total de electrones y de la carga de éstos, misma que se le conoce como “frecuencia de plasma”. Al “quantum” de tal campo de oscilaciones se le da el nombre de *plasmón* y la energía que se le asocia es $E_p = \hbar\omega_p$.

III.1.1 Frecuencia de plasma: ecuación de movimiento

Consideremos que el gas de electrones con densidad n_e , se mueve libremente sobre un fondo homogéneo positivo e interacciona con un campo total (autoconsistente) \mathbf{E} . Si debido a una “compresión” se genera una acumulación de carga negativa Q en una región R (Figura 13), entonces, los electrones percibirán una fuerza de repulsión generada por

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}, \quad (36)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición que va de la región R a un punto arbitrario en el espacio. Por tanto, los electrones percibirán dicho campo y se acelerarán obedeciendo la ecuación

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (37)$$

donde m y e son la masa y carga electrónica respectivamente. Si ahora multiplicamos ambos lados de esta ecuación por la densidad de carga $\rho = -en_e$ e integramos sobre la superficie Σ que encierra la carga Q (como se muestra en la figura 13), obtenemos

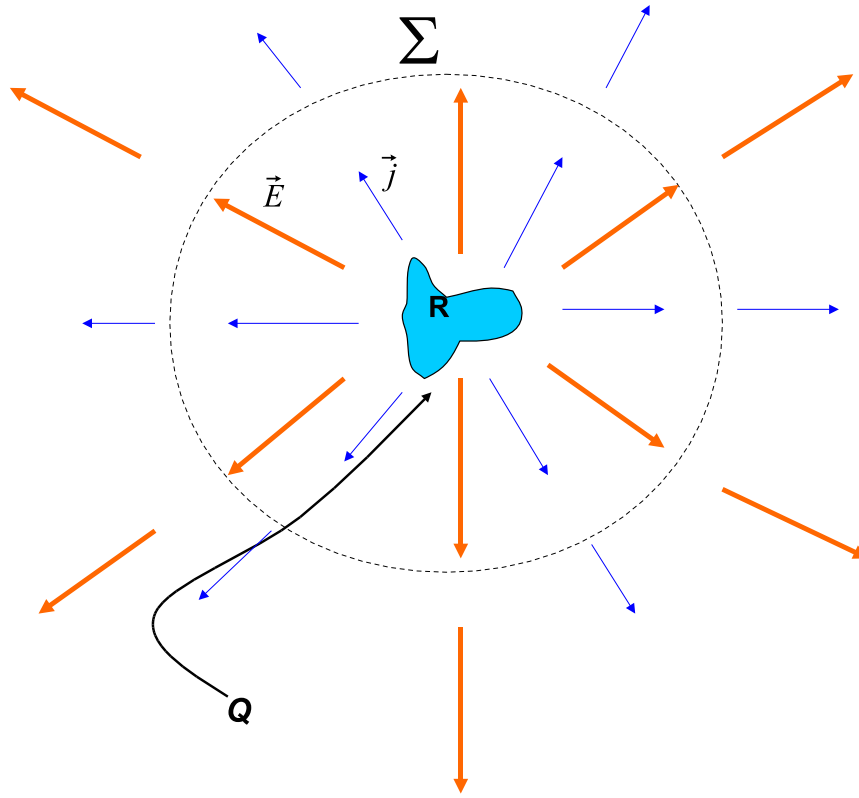


FIGURA 13.- La acumulación de carga Q sobre la región R , contenida dentro de la superficie Σ , produce un campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (flechas gruesas) el cual induce una corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (flechas delgadas). Esto permite la oscilación del plasma (Mochán, 2005).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 n_e}{m} \int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (38)$$

en la que $\mathbf{j} = -en_e d\mathbf{r}/dt$. Al introducir la ecuación de continuidad ($\int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = -dQ/dt$) así como la ley de Gauss ($\int_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q$), se obtiene que la expresión (38) puede reescribirse como

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{4\pi n_e e^2}{m} Q, \quad (39)$$

que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico, que indica el movimiento oscilatorio de la densidad de carga a una frecuencia

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m} \right)^{1/2}, \quad (40)$$

a la que se le conoce como frecuencia de plasma de bulto. La energía de la onda de plasma cuantizada E_p , típicamente se encuentra en el rango de 5 a 15 eV (Mochán, 2005).

III.1.2 Modos longitudinales

Los modos colectivos se obtienen de manera natural a partir de la ecuación de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (41)$$

en ausencia de cargas externas, donde $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ es el vector de desplazamiento eléctrico; aquí \mathbf{E} es un campo eléctrico externo y \mathbf{P} es la polarización. En un medio lineal, homogéneo e isotrópico, el vector de desplazamiento eléctrico se puede escribir en términos del campo eléctrico como sigue

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \quad (42)$$

donde ϵ es una propiedad del material y es conocida como la función dieléctrica del sistema. Sustituyendo la ecuación (42) en la ecuación (41), tenemos que

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (43)$$

La solución de esta ecuación plantea dos posibilidades

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \epsilon \neq 0 \quad (44)$$

o

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0, \quad \epsilon = 0. \quad (45)$$

La ecuación (44) es la solución trivial a la ecuación (43) e indica la existencia de campos eléctricos transversales así como la ausencia de densidad de carga dentro del sistema homogéneo. La segunda solución indica la posibilidad de tener campos eléctricos longitudinales asociados a fluctuaciones de la densidad de carga. La respuesta que presenta la materia es diferente para los diferentes colores de la luz. En consecuencia, la función dieléctrica dependerá de la frecuencia, es decir $\epsilon \rightarrow \epsilon_\omega$. Así, de acuerdo

con lo anteriormente discutido las oscilaciones de la densidad de carga se presentarán únicamente para frecuencias a las cuales

$$\epsilon_\omega = 0. \quad (46)$$

Como una aplicación de esto, consideremos el modelo de Drude, en el cual se asume que los electrones responden de manera libre e independientemente a un campo eléctrico externo. Es posible pensar, que dado que se trata de un conjunto de partículas no interactuantes, la generación de modos colectivos se vuelve no factible. Sin embargo, en realidad, el campo al que obedecen las partículas no es puramente el campo externo, sino un campo efectivo constituido por el campo externo más un campo inducido. La función dieléctrica de Drude es (Halevi, 1992; Mochán, 2005; Wooten, 1972)

$$\epsilon_\omega^D = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (47)$$

de donde podemos ver la dependencia como función de la frecuencia. Las oscilaciones de plasma tendrán lugar al frecuencias a las cuales se hace cero la anterior ecuación, obteniendo

$$\omega = \omega_p \quad (48)$$

A ésta se le conoce como frecuencia de plasma de Drude. Los efectos de disipación pueden ser incorporados al cambiar $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + i\omega/\tau$ en la ecuación (47), donde τ es el tiempo medio entre colisiones electrónicas.

La excitación de los plasmones en un sólido se debe a la dispersión temporal que presenta la función dieléctrica correspondiente. Esta se anula para ciertos valores de la frecuencia, pero nunca ocurre en el límite estático. Lo anterior puede entenderse al introducir de manera explícita la frecuencia en la ecuación (42), es decir, $\mathbf{D}_\omega = \epsilon_\omega \mathbf{E}_\omega$, donde al tomar la transformada de Fourier (utilizando el teorema de convolución) se obtiene que

$$\mathbf{D}(t) = \int dt' \epsilon(t-t') \mathbf{E}(t'), \quad (49)$$

donde la transformada de Fourier de ϵ_ω es función de la diferencia de tiempos $t - t'$, lo cual mide la respuesta $\mathbf{D}(t)$ a un tiempo t después de haber aplicado un campo perturbativo $E(t')$ a un tiempo anterior t' . A esto se le conoce como el principio

de *causalidad*, donde la respuesta no puede anteceder a la acción que la origina. En la situación en que la respuesta del sistema en el punto \mathbf{r} depende de la excitación generada en el punto \mathbf{r}' , podemos escribir la ecuación (49) de manera generalizada como

$$\mathbf{D}(t) = \int dt' \int d^3r' \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}' t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (50)$$

La dependencia de ϵ de \mathbf{r} y \mathbf{r}' es conocida como *dispersión espacial* o *no localidad*. En el caso de sistemas homogéneos ϵ depende únicamente del intervalo $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, que son el punto donde se perturba el medio y el punto de observación. En el espacio de Fourier, la ecuación (50) se transforma en una simple relación algebraica, que puede ser escrita como

$$\mathbf{D}_{\mathbf{q}\omega} = \epsilon_{\mathbf{q}\omega} \mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega}. \quad (51)$$

La no localidad introduce, además de la dependencia en la frecuencia, una dependencia en el vector de onda \mathbf{q} . Así, debido a la no localidad \mathbf{q} define una dirección de preferenciabilidad aún en sistemas isotrópicos. De aquí que la respuesta de un sistema pueda descomponerse en parte transversal ($\mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega}^T \perp \mathbf{q}$) y longitudinal ($\mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega}^L \parallel \mathbf{q}$), es decir,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{q}\omega}^T = \epsilon_{\mathbf{q}\omega}^T \mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega}^T, \quad (52)$$

y

$$\mathbf{D}_{\mathbf{q}\omega}^L = \epsilon_{\mathbf{q}\omega}^L \mathbf{E}_{\mathbf{q}\omega}^L. \quad (53)$$

derivadas de la ecuación (51).

Si relacionamos $\nabla \rightarrow i\mathbf{q}$ en el espacio de Fourier, entonces, de la ecuación (41) es posible obtener una relación de dispersión $\omega_{\mathbf{q}}$ vs \mathbf{q} dada implícitamente por

$$\epsilon_{\mathbf{q}\omega}^L = 0, \quad (54)$$

es decir, que los modos colectivos harán su aparición cuando la parte longitudinal de la función dieléctrica es cero.

Para conocer la relación de dispersión de los plasmones, se recurre a la construcción de un modelo de la materia, a partir del cual se obtiene la respuesta del sistema ante una perturbación. Por ello, a continuación presentamos un esquema muy utilizado para calcular la respuesta dieléctrica de un medio en términos de sus propiedades microscópicas.

III.2 Método de campo autoconsistente

Esta aproximación, conocida también como Random Phase Aproximation (RPA) en inglés, se utiliza para obtener la respuesta de un medio ante una perturbación externa tomando en cuenta la interacción coulombiana entre partículas eléctricamente cargadas (Ehrenreich y Cohen, 1959). Presentaremos las ecuaciones para componentes de Fourier como expresiones algebraicas que involucran componentes de Fourier y no como operadores integrales, como sería el caso de la respuesta en sistemas inhomogéneos (superficies, partículas, etc) (Halevi, 1992).

Para ejemplificar el método RPA, considérese un gas electrónico bajo la acción de una perturbación externa que varía en el tiempo con una frecuencia ω y espacialmente con vector de onda \mathbf{q} . De acuerdo con la teoría de respuesta lineal, la presencia del potencial externo inducirá una densidad de partículas que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \chi(\mathbf{q}, \omega) V_{ext}(\mathbf{q}, \omega), \quad (55)$$

donde $V_{ext}(\mathbf{q}, \omega)$ es la energía asociada a la perturbación y $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ es una función que contiene toda la información relacionada con la interacción entre partículas y para la que la teoría cuántica de perturbaciones proporciona expresiones en términos de funciones de onda y espectros de energía. La función χ de un sistema electrónico interactuante, dado el gran número de partículas involucradas, resulta un problema imposible de resolver, por tanto, debemos acudir a algún tipo de aproximación o aproximaciones. El Método de Campo Autoconsistente se basa en cambiar nuestro sistema de partículas interactuantes por otro sin interacción, donde cada electrón se mueve de manera independiente, pero respondiendo no al potencial externo, sino a un potencial efectivo, cuya energía será

$$V_{tot}(\mathbf{q}, \omega) = V_{ext}(\mathbf{q}, \omega) + V_{ind}(\mathbf{q}, \omega), \quad (56)$$

donde $V_{ind}(\mathbf{q}, \omega)$ es la energía asociada al potencial inducido. Esta energía inducida está dada por la ecuación de Poisson

$$V_{ind}(\mathbf{q}, \omega) = V_q \delta n(\mathbf{q}, \omega), \quad (57)$$

en donde V_q es la transformada de Fourier del kernel de la energía asociada a la interacción coulombiana. De esta manera la ecuación (55) es sustituida por la expresión

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \chi_0(\mathbf{q}, \omega) V_{tot}(\mathbf{q}, \omega) \quad (58)$$

donde $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$ ¹ es la función respuesta para un sistema de partículas no interactuantes y $V_{tot}(\mathbf{q}, \omega)$ es la energía del potencial al que responderán efectivamente los electrones.

Al sustituir las ecuaciones (56) y (57) en la ecuación (58) llegamos a una relación autoconsistente para la densidad electrónica inducida, dada por

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \chi_0(\mathbf{q}, \omega) V_{ext}(\mathbf{q}, \omega) + \chi_0(\mathbf{q}, \omega) [V_q \delta n(\mathbf{q}, \omega)]. \quad (59)$$

De aquí podemos escribir una ecuación similar a la expresión (55), esto es,

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\chi_0(\mathbf{q}, \omega)}{[1 - V_q \chi_0(\mathbf{q}, \omega)]} V_{ext}(\mathbf{q}, \omega), \quad (60)$$

de donde al comparar (60) con (55) se observa que la $\chi(\mathbf{q}, \omega)$ de muchos cuerpos se convierte en la $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$ “apantallada” por el factor $1 - V_q \chi_0(\mathbf{q}, \omega)$, es decir,

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\chi_0(\mathbf{q}, \omega)}{[1 - V_q \chi_0(\mathbf{q}, \omega)]}, \quad (61)$$

lo que define a la función dieléctrica precisamente como

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V_q \chi_0(\mathbf{q}, \omega). \quad (62)$$

Nótese que si se ignora la interacción coulombiana ($V_q = 0$) todo efecto de apantallamiento desaparece.

En términos de potenciales tenemos

$$V_{tot}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{V_{ext}(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (63)$$

¹Es una función respuesta densidad-densidad, dada por $\chi_0(\mathbf{q}, t) = -i\Theta(t) \frac{1}{V} \langle [\hat{n}(\mathbf{q}, t), \hat{n}(-\mathbf{q}, 0)] \rangle$ (Bruus y Flensberg, 2005), donde \hat{n} es el operador densidad. La transformada de Fourier inversa es $\chi_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i\Theta(t - t') \langle [\hat{n}(\mathbf{r}, t), \hat{n}(-\mathbf{r}', t')] \rangle$, donde Θ es la función escalón unitaria la cual se anula para $t' > t$.

lo cual nos indica que los electrones sienten un potencial apantallado como resultado de la interacción electrostática, caracterizado por el término $1/\epsilon$. De esta última expresión es posible ver que aunque la perturbación externa sea infinitesimalmente pequeña de modo que $\epsilon V_{tot} = 0$, si la función dieléctrica del sistema es cero, existirá $V_{tot} \neq 0$ que se asocia con la existencia de modos propios de la densidad de carga inducida. Esto, se encuentra en concordancia con la expresión (54) presentada en la sección anterior.

Se verá a continuación que este apantallamiento dinámico lleva consigo la existencia de ondas de plasma.

III.3 Excitaciones electrónicas a partir de una función respuesta

Un ejemplo claro de esto, es la parte real de la conductividad, que está directamente relacionada con la energía disipada por el sistema. A su vez, dicha cantidad tiene que ver con la parte imaginaria de la susceptibilidad eléctrica a través de la relación

$$\mathbf{Re}(\sigma(\mathbf{q}, \omega)) = -\frac{\omega e^2}{q^2} \mathbf{Im}(\chi(\mathbf{q}, \omega)) = -\frac{\omega e^2}{q^2} \mathbf{Im} \left[\frac{\chi_0(\mathbf{q}, \omega)}{1 - V_q \chi_0(\mathbf{q}, \omega)} \right]. \quad (64)$$

La parte imaginaria de esta ecuación puede ser escrita como

$$\mathbf{Im} \left[\frac{\chi_0(\mathbf{q}, \omega)}{1 - V_q \chi_0(\mathbf{q}, \omega)} \right] = \frac{1}{V_q} \mathbf{Im} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = -\frac{1}{V_q} S(\mathbf{q}, \omega), \quad (65)$$

donde $\epsilon = 1 - V_q \chi_0(\mathbf{q}, \omega)$. La función $S(q, \omega)$ es conocida como el factor de estructura dinámica. Esta ecuación muestra que las excitaciones electrónicas son posibles siempre que $S \neq 0$, lo cual puede suceder de dos diferentes maneras: (1) si la parte real de la función dieléctrica es cero y la parte imaginaria es infinitesimalmente pequeña, o (2) si la parte imaginaria de $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$ es finita. Las excitaciones de tipo (1), los modos colectivos de la densidad de carga, se obtienen al calcular el límite del factor de estructura cuando la parte imaginaria de la función dieléctrica tiende a cero, esto es

$$\lim_{\mathbf{Im}[\epsilon] \rightarrow 0} S(\mathbf{q}, \omega) = - \lim_{\mathbf{Im}[\epsilon] \rightarrow 0} \mathbf{Im} \left(\frac{1}{\mathbf{Re}(\epsilon) + i\mathbf{Im}(\epsilon)} \right), \quad (66)$$

donde hemos escrito la función dieléctrica en términos de sus componentes real e imaginaria. Aplicando la identidad

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \pm i\eta} \right) = P \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi \delta(x), \quad (67)$$

se obtiene

$$S(\mathbf{q}, \omega) \approx \pi \delta(\mathbf{Re}[\epsilon(\mathbf{q}, \omega_q)]), \quad (68)$$

donde $\delta(\mathbf{Re}[\epsilon])$ es la función delta de Dirac, cuyo valor será cero si $\mathbf{Re}[\epsilon] \neq 0$. Dicha ecuación, indica que habrá una contribución a la disipación de energía a frecuencia para las cuales la parte real de la función dieléctrica sea igual a cero. Esta, es la condición fundamental que implica la existencia de los plasmones.

Por otra parte, las excitaciones de tipo (2), excitaciones de pares electrón-hueco, se derivan del hecho de que la parte imaginaria de la función $\chi_0(\mathbf{q}, \omega)$ es una cantidad finita. Dicha condición permite que el factor de estructura dinámica sea no nulo, tal como puede verse de la relación

$$S(\mathbf{q}, \omega) = -V(q) \mathbf{Im} \left(\frac{\chi_0(\mathbf{q}, \omega)}{1 - V(q)\chi_0(\mathbf{q}, \omega)} \right) = \frac{-V(q)}{|\epsilon|^2} \mathbf{Im}(\chi_0(\mathbf{q}, \omega)), \quad (69)$$

donde la función χ_0 tiene la forma

$$\chi_0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_0(E(\mathbf{k})) - f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}))}{E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar(\omega + i\eta)}. \quad (70)$$

Aquí $E(\mathbf{k})$ es la energía de un electrón con vector de onda \mathbf{k} y $f_0(E(\mathbf{k}))$ es la función de distribución de Fermi. En el límite en que la energía disipada es muy pequeña comparada con la energía de Fermi, puede escribirse como

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \chi_0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} (f_0(E(\mathbf{k})) - f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}))) \left(\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(E(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega) + i\hbar\eta} \right) \quad (71)$$

de donde, al utilizar la identidad (67), se obtiene que

$$S(\mathbf{q}, \omega) \approx \sum_{\mathbf{k}} [f_0(E(\mathbf{k})) - f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}))] \delta(E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}) - \hbar\omega). \quad (72)$$

La función δ expresa conservación de energía en el proceso de absorción y podemos ver que ésta será diferente de cero cuando

$$E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}) = \hbar\omega, \quad (73)$$

donde \mathbf{q} es el vector de onda transferido a los electrones. Tal expresión es la condición que indica la transición entre dos niveles de partícula simple por medio de la absorción de la energía $\hbar\omega$.

En las siguientes secciones analizaremos los casos del gas electrónico 3D y el 2D, para los cuales existen expresiones sencillas para las energías $E(\mathbf{k})$.

III.4 El gas tridimensional

Este gas de electrones constituye uno de los sistemas básicos de estudio. Se trata de un medio en el cual los electrones pueden moverse en cualquier dirección sin restricción alguna. Su espectro de energías es simplemente

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2, \quad (74)$$

donde $k = |\mathbf{k}|$ y \mathbf{k} es el vector de onda tridimensional que caracteriza los estados electrónicos $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, que son ondas planas. Al ser sistemas de muchas partículas interactuantes, estos gases exhiben el grupo de excitaciones electrónicas anteriormente mencionadas en la sección III.3. Por un lado, las transiciones de pares electrón-hueco se obtienen a partir de la ecuación (73), de la que al introducir explícitamente la energía dada por la ecuación (74), se obtiene que

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 - \frac{\hbar^2}{2m}k^2. \quad (75)$$

Las soluciones que satisfacen la anterior expresión forman un continuo de excitaciones, cuyas fronteras estarán determinadas por los valores máximo y mínimo que adquieren los vectores de onda que caracterizan los estados electrónicos ocupados. Si consideramos que las partículas ocupan todos los estados hasta el nivel de Fermi, entonces, el valor máximo del momento se encontrará en $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$, mientras que cuando \mathbf{q} es antiparalelo a \mathbf{k} el momento será mínimo, ésto para $k = k_F$ que caracteriza el nivel de Fermi. Por tanto, a partir de la ecuación (75) se obtienen que la solución para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$ es

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{m}qk_F + \frac{\hbar^2}{2m}q^2, \quad (76)$$

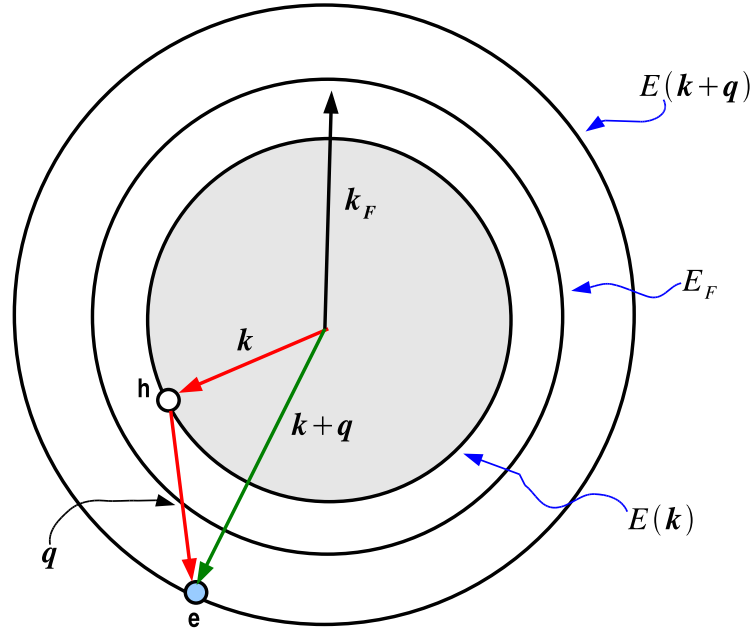


FIGURA 14.- Esfera de Fermi que contiene un gas 3D degenerado. El proceso de excitación de un par electrón-hueco (e-h) conserva energía y momento, tal como se muestra.

mientras que para \mathbf{q} antiparalelo a \mathbf{k} se obtiene

$$\hbar\omega = -\frac{\hbar^2}{m}qk_F + \frac{\hbar}{2m}q^2, \quad (77)$$

donde $q = |\mathbf{q}|$ es la magnitud del vector de onda transferido a los electrones (ver figura 14). De las ecuaciones (76) y (77) es posible ver que las excitaciones que componen el continuo de transiciones de pares electrón-hueco cumplen con la condición

$$(k_F^2 + 2m\omega/\hbar)^{1/2} - k_F \leq q \leq (k_F^2 + 2m\omega/\hbar)^{1/2} + k_F. \quad (78)$$

Por otro lado, en tales gases electrónicos, también se hacen presente las excitaciones colectivas de la densidad de carga. El tratamiento microscópico se lleva a cabo a través del cálculo de la bien conocida función dieléctrica de Lindhard (Ehrenreich y Cohen, 1959) (ecuación (70)). Dicha función se obtiene aplicando el método de campo

autoconsistente discutido en la sección III.2 (62) y se expresa de la siguiente manera

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_0(E(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - f_0(E(\mathbf{k}))}{E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}) - \hbar\omega}, \quad (79)$$

donde $V_q = 4\pi e^2/q^2$. Además f_0 es la función de distribución de fermi, $E(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ y $E(\mathbf{k})$ son las energías correspondientes a los estados caracterizados por los vectores de onda $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ y \mathbf{k} , respectivamente.

Al resolver la ecuación (79), la función dieléctrica puede escribirse como (Halevi, 1992)

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \left(\frac{3\omega_p^2}{q^2 v_F^2} \right) f_L, \quad (80)$$

donde $v_F = \hbar k_F/m$ es la velocidad de Fermi, ω_p es la frecuencia de plasma definida mediante la expresión (40) y

$$f_L = \frac{1}{2} + \frac{1}{8w} \left[(1 - (w - u)^2) \ln \left(\frac{w - u + 1}{w - u - 1} \right) + (1 - (w + u)^2) \ln \left(\frac{w + u + 1}{w + u - 1} \right) \right] \quad (81)$$

con $w = q/2k_F$ y $u = \omega/qv_F$. Esta última expresión, puede simplificarse al pasar al régimen clásico; tal situación se presentará si $q \ll k_F$ ($w \ll 1$). Por tanto, al tomar el límite cuando $w \rightarrow 0$ se obtiene que la función dieléctrica de Lindhard se reduce a

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - (\beta q)^2), \quad (82)$$

donde $\beta = \sqrt{3/5}v_F$. Al igualar a cero la expresión (82) se obtiene la siguiente relación de dispersión para los modos colectivos

$$\omega = (\omega_p^2 + \beta^2 q^2)^{1/2}. \quad (83)$$

En el límite de \mathbf{q} pequeña, la ecuación (82) se reduce al resultado que se conoce como función dieléctrica de Drude ($\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$). En la figura 15, se muestra precisamente el comportamiento de la relación de dispersión obtenida a partir de la expresión (82). Así mismo, se presenta la región de transiciones entre estados de partícula individual; tal región, recordemos, estará delimitada por las fronteras (76) y (77).

III.5 El gas bidimensional

Gracias a las técnicas de deposición de materiales, tales como Epitaxia de Haces Moleculares, en las últimas décadas ha sido posible la fabricación de estos gases de electrones

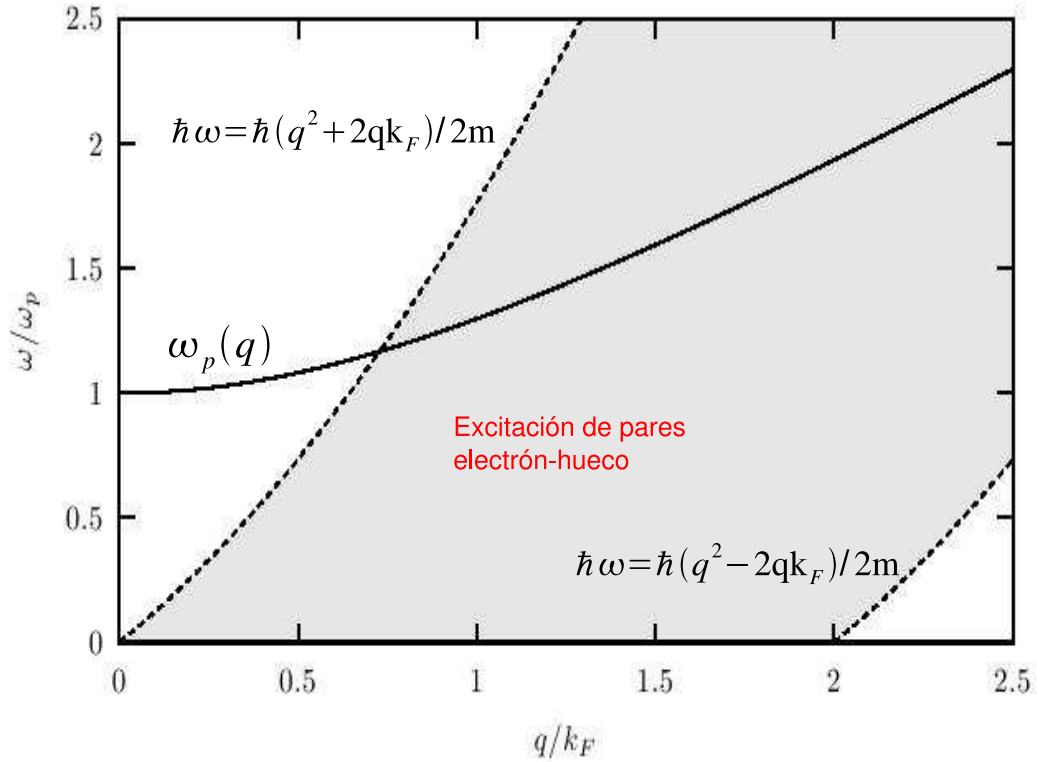


FIGURA 15.- Las zonas de amortiguamiento de Landau o continuo de excitaciones de pares electrón-hueco (zona en gris), se originan por el hecho de que electrones inicialmente en un estado, pasan a un nuevo estado a través de la absorción de energía $\hbar\omega$.

2D en la interfase de las heteroestructuras semiconductoras (por ejemplo los realizados en sistemas GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs). Estos sistemas cuasi-2D, poseen altas densidades electrónicas por lo que exhiben (i) transiciones de partícula individual y (ii) plasmones. El continuo de transiciones formado por las excitaciones de tipo (i), pueden obtenerse a partir de la relación (73), donde la energía para un electrón dentro del sistema estará dada por

$$E_l(k) = \frac{\hbar^2}{2m^*} |\mathbf{k}| + \varepsilon_l. \quad (84)$$

Aquí el primero de los términos es la energía correspondiente al movimiento de los electrones en el plano de confinamiento. Esta cantidad se encuentra caracterizada por

el vector bidimensional $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. Por otra parte, debido al confinamiento de los electrones en una de las direcciones (digamos la dirección z), se crean subbandas en la banda de conducción. De ello se deriva el segundo término en la ecuación (84) (ε_l), que indica la energía que tendrá un electrón que ocupa la subbanda l . En consecuencia, en este tipo de sistemas, las excitaciones de pares electrón-hueco se dividirán en dos tipos: (1) transiciones intrasubbanda e (2) intersubbanda, dando como resultado un espectro diferente al exhibido en el caso del gas de electrones 3D (figura 15), tal como se muestra en la figura 16. Cabe mencionar, que cuando el sistema es suficientemente angosto y sólo posee una sola subbanda, las transiciones intersubbanda desaparecen, quedando únicamente las transiciones intrasubbanda.

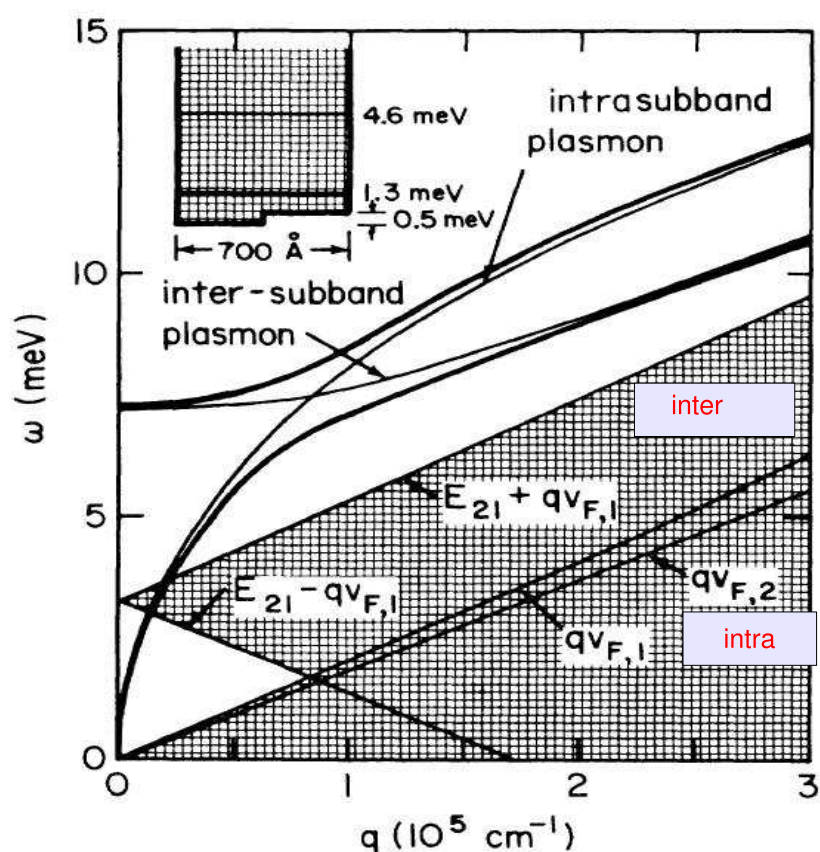


FIGURA 16.- En los gases de electrones bidimensionales se crean zonas de amortiguamiento de Landau compuestas por transiciones intrabanda y zonas compuestas por transiciones interbanda (Jain y Das-Sarma, 1987).

Para obtener la relación de dispersión de plasmones de un gas estrictamente 2D podemos utilizar (70) con algunas modificaciones (Stern, 1967; Mendoza y del Castillo-Mussot, 1993; Jain y Das-Sarma, 1987). Ahora el término V_q será la transformada de Fourier 2D de la interacción coulombiana, es decir $V_q = 2\pi e^2/\epsilon_s q$, donde ϵ_s es el valor de la constante dieléctrica del medio que rodea al gas. En el caso en que nuestro GE2D es un sistema multisubbanda, se encuentra la existencia de dos tipos de excitaciones colectivas (plasmones intersubbanda y plasmones intersubbanda), así lo muestra el trabajo de J. Jain y S. Das Sarma (Jain y Das-Sarma, 1987). Sin embargo, si el sistema posee solamente una subbanda de conducción, entonces las transiciones intersubbanda desaparecen quedando únicamente las correspondientes a movimientos de los electrones sobre la misma subbanda. En este último caso, la energía para un electrón estará dada por $E(\mathbf{k}) = \hbar^2 |\mathbf{k}|^2 / 2m^*$, donde m^* es la masa efectiva y \mathbf{k} es el vector de onda con componentes k_x y k_y .

Los modos colectivos de la densidad de carga se encuentran bien definidos en el límite de longitud de onda larga, dado el largo alcance de la interacción electrón-electrón. En el caso de un sistema con una sola subbanda de conducción, la frecuencia del plasmón en el régimen de longitud de onda larga se obtiene al tomar el límite cuando $q \rightarrow 0$, para ω fija. Para realizar tal procedimiento, primeramente escribiremos la función dieléctrica del sistema en la forma

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - V_q \sum_{\mathbf{k}} 2f_0(\mathbf{k}) \left[\frac{E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k})}{(\hbar\omega)^2 - (E(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E(\mathbf{k}))^2} \right] \quad (85)$$

Al sustituir la energía $E(\mathbf{k}) = (\hbar^2 |\mathbf{k}|^2)/2m^*$ en la anterior ecuación y tomando el límite cuando $q \rightarrow 0$, se obtiene que

$$\epsilon(|\mathbf{q}| \rightarrow 0, \omega) = 1 - V_q \Xi(q). \quad (86)$$

donde

$$\Xi(q) = \left(\frac{1}{m^* \omega^2} \right) \sum_{\mathbf{k}} f_0(\mathbf{k}) [2kq \cos(\theta) + q^2]. \quad (87)$$

De la anterior ecuación el primer término es una función par en \mathbf{k} , por lo que al realizar la suma se anula. Mientras tanto, el segundo término implica $\sum_{\mathbf{k}} f_0(\mathbf{k}) = n_0$, donde n_0

es la densidad electrónica del sistema. Así, finalmente la ecuación (86) puede reescribirse como

$$\epsilon(|\mathbf{q}| \rightarrow 0, \omega) = 1 - \left(\frac{n_0 q^2}{m^* \omega^2} \right) V_q = 1 - \frac{2\pi n_0 e^2}{\epsilon_s m^*} \frac{q}{\omega^2}, \quad (88)$$

de donde se obtiene que la frecuencia del plasmón en límite de longitud de onda larga es

$$\omega_p^{2D}(q) = \sqrt{2\pi n_0 e^2 q / \epsilon_s m^*} \quad (89)$$

Como podemos observar de la anterior ecuación, existe una dependencia en el vector de onda del plasmón que va como $q^{1/2}$. Tal comportamiento puede ser visualizado en la figura 16 a través de la rama que corresponde al plasmón intrasubbanda.

III.6 Antecedentes experimentales

En la actualidad, una forma de transmitir información es a través de la modulación de la amplitud y/o la frecuencia de las ondas electromagnéticas. La aplicabilidad de éstas, se encuentra concentrada en un amplio rango de frecuencia que van de los hertz pasando por los KHz (10^3) hasta los THz (10^{12}). Para generar esta radiación es necesaria la utilización de diferentes tipos de fuentes, por ejemplo, para altas frecuencias, los láseres semiconductores resultan convenientes para generar luz coherente que se utiliza en las telecomunicaciones. En cambio, para generar radiación electromagnética de baja frecuencia se utilizan circuitos oscilantes que operan bajo el concepto de un transistor; el manejo de estos dispositivos se encuentran basados en el manejo de las heteroestructuras semiconductoras. Sin embargo, el rango de frecuencias en que opera cada una de las tecnologías (el láser y el transistor), son completamente distintos (Sirtori, 2002). Por un lado, el transistor así como los distintos dispositivos basados en el transporte de electrones, se encuentran limitados a funcionar de manera eficiente en frecuencias por debajo de los 300GHz. Por el otro lado, los láseres semiconductores emiten radiación cuya frecuencia se encuentra por encima de los 30THz. Así, entre ambas tecnologías existe una brecha de frecuencias no accesibles localizadas en el intervalo de 0.3 THz a 30 THz. Sin embargo, muchos investigadores han sumado esfuerzos

para encontrar la pauta que permita el acceso a la radiación electromagnética dentro del rango anteriormente mencionado. Con ello, se intenta producir luz en un intervalo continuo de frecuencias dentro de la región de los THz. La motivación a todo esto, es el hecho de que hoy en día, la tecnología de los THz ha cobrado gran importancia en áreas diferentes a las telecomunicaciones. Por ejemplo, podemos mencionar el uso de tales fuentes de luz en la astronomía, en estudios atmosféricos, en la medicina y en el análisis químico. Así, dado todo este interés, es que se han propuesto las heteroestructuras semiconductoras como candidatos potenciales para la construcción de fuentes de estado sólido para la región de los THz. Para ello se aprovechan los diferentes tipos de excitaciones electrónicas que se presentan en tales sistemas (Voßebürger et al., 1996; Köhler et al., 2002). En particular, cabe mencionar la excitación de modos colectivos de la densidad de carga como un mecanismo viable para la construcción de tales fuentes. Esto como consecuencia de una serie de estudios relacionados con los plasmones, en los

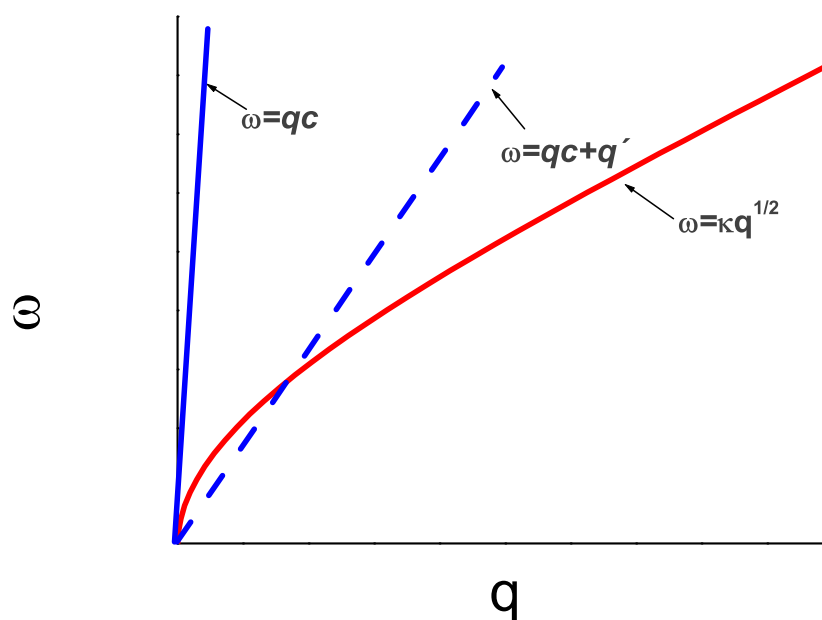


FIGURA 17.- La relación de dispersión para la luz nunca coincide con la relación de dispersión del plasmón 2-D. Por dicho motivo, es necesaria la utilización de rejillas para dar momento a la onda electromagnética incidente, haciendo que se intersecten en cierto punto.

cuales se explora la naturaleza radiativa de este tipo de excitaciones colectivas. Por ejemplo, en el trabajo de M. Voßebürger et al. (Voßebürger et al., 1996), se presenta un reporte detallado sobre la observación de emisión de ondas electromagnéticas provenientes de un plasma excitado ópticamente; tales modos colectivos son excitados en un gas electrónico bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor. El acoplamiento de la luz con el plasmón se logra únicamente si se proporciona momento a la onda electromagnética incidente (ver figura 17). Para ello, en dicho trabajo se utiliza una rejilla de Aluminio depositada en la parte superior de la heteroestructura semiconductor. La figura 18, muestra precisamente la intensidad del campo eléctrico asociado

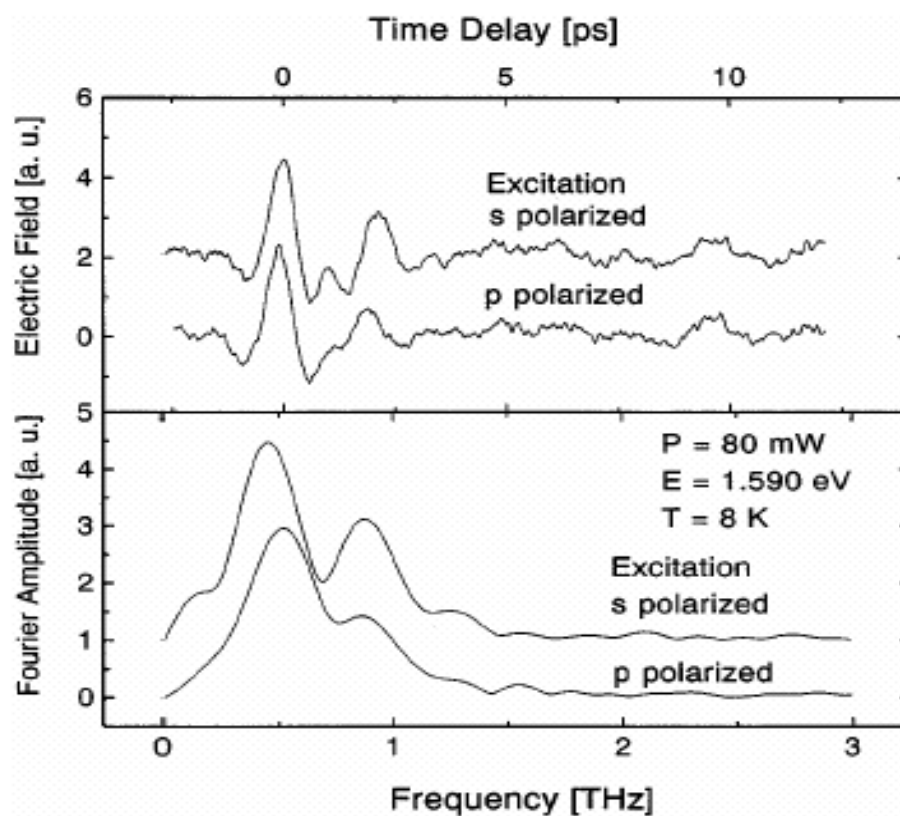


FIGURA 18.- Campo eléctrico como función del tiempo. También se muestran las componentes de Fourier de las mismas cantidades (Voßebürger et al., 1996).

a la radiación del plasmón como función del tiempo, donde se observa que la intensidad

disminuye conforme el tiempo aumenta. Además, al graficar la transformada de Fourier como función de la frecuencia, es posible notar que la luz emitida por el modo colectivo posee un pico principal localizado a una frecuencia dentro del rango de los THz. Como podemos ver, este tipo de resultados parecen abrir la puerta de acceso a la tecnología de los THz, y es por ello que varios autores han intentado aportar nuevas ideas que faciliten el desarrollo de dicha tecnología. W. Xu en 2003 (Xu, 2003) y M. Kushwaha y S. Ulloa en 2006 (Kushwaha y Ulloa, 2006), analizaron teóricamente aspectos básicos de las excitaciones de un GE2D. En tales trabajos se muestra la importancia de considerar, además de la interacción electrón-electrón, la IEO isotrópica de Rashba que se sabe puede ser apreciable. Por tanto, en el caso de sistemas con una sola subbanda de conducción, la IEO hace que las excitaciones electrónicas difieran notablemente de las que se obtienen para el GE2D degenerado en espín. Por ejemplo, en dichos estudios se muestra que la presencia de la IEO permite la existencia de más de una rama de plasmones así como una notable modificación en las regiones de transiciones de partícula individual.

Con base en lo anterior, en el presente trabajo añadimos un elemento que puede ser importante, y es el hecho de considerar el desdoblamiento anisotrópico en la subbanda de conducción que se produce por la presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus. El propósito es dar una descripción más detallada del papel que juegan dichas interacciones y como se ven reflejadas en el espectro de excitaciones electrónicas del gas.

Capítulo IV

EXCITACIONES ELECTRÓNICAS EN UN GAS 2D EN PRESENCIA DE INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA

Nuestro problema consiste en estudiar el espectro de excitaciones elementales de un gas electrónico bidimensional en presencia de interacción espín-órbita, en particular una IEO de tipo anisotrópica. Consideremos que el GE2D se encuentra confinado a través de un pozo de potencial suficientemente angosto, de tal manera que el sistema posee una sólo subbanda de conducción. Dado que la IEO rompe la degeneración en espín, como se ha visto en el capítulo II, se abre la posibilidad de tener excitaciones entre las subbandas desdobladas. Esto modificará el continuo de transiciones de pares electrón-hueco, pues además de las transiciones intrasubbanda, aparecerán las regiones correspondientes a las excitaciones intersubbanda.

En el presente capítulo se aplicará el formalismo mostrado con anterioridad en el capítulo III. Así, en la sección IV.1 se obtendrán expresiones analíticas para las fronteras de las regiones de pares electrón-hueco. Posteriormente, en la sección IV.2, se realizará el cálculo de la función dieléctrica del gas 2D, con la que se obtendrá la relación de dispersión de los plasmones.

IV.1 El continuo de excitación de pares electrón-hueco

A continuación, consideremos un campo electromagnético, que varía en el tiempo con frecuencia ω y que posee vector de onda \mathbf{q} . Dicha perturbación interacciona con el gas de electrones bidimensional proporcionando energía $\hbar\omega$ y momento $\hbar\mathbf{q}$ a las partículas. Por tanto, un electrón inicialmente en un estado $E_\lambda(\mathbf{k})$, puede pasar a otro estado

energético $E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})$, donde λ y λ' caracterizan el estado de espín de la partícula (ver capítulo II sección II.4). Esta transición se presentará siempre que (Sec. III.3)

$$\hbar\omega = E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E_{\lambda}(\mathbf{k}), \quad \text{para} \quad E_{\lambda}(\mathbf{k}) < E_F < E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (90)$$

como $E_{\lambda}(\mathbf{k})$ está dada por (29) y

$$E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2}{2m^*} + \lambda D(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (91)$$

se obtiene

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2}{m^*} kq \cos(\theta - \gamma) + \lambda' D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \lambda D(\mathbf{k}), \quad (92)$$

donde

$$D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \sqrt{[\beta(k_x + q_x) - \alpha(k_y + q_y)]^2 + [\alpha(k_x + q_x) - \beta(k_x + q_x)]^2}, \quad (93)$$

que en coordenadas polares puede reescribirse como

$$D^2(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = k\Delta^2(\theta) + q^2\Delta^2(\gamma) + 2kq [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \sin(\theta + \gamma)]. \quad (94)$$

Aquí θ y γ son los ángulos que determinan la dirección de \mathbf{k} y \mathbf{q} , respectivamente, como se muestra en la figura 19. El término $q^2\Delta^2(\gamma)$ es introducido por la IEO anisotrópica y depende únicamente de cantidades que caracterizan al vector de onda \mathbf{q} . En el caso de IEO isotrópica tal término depende sólo de la magnitud q (Ec. 32).

El otro caso de transiciones de partícula simple es

$$\hbar\omega = E_{\lambda'}(\mathbf{k}) - E_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad \text{para} \quad E_{\lambda}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) < E_F < E_{\lambda'}(\mathbf{k}), \quad (95)$$

de lo que obtiene

$$\hbar\omega = -\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2}{m^*} kq \cos(\theta - \gamma) + \lambda' D(\mathbf{k}) - \lambda D(\mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (96)$$

De las ecuaciones (92) y (96), es posible observar que existirán dos casos: (i) cuando $\lambda\lambda' = 1$, de donde se derivan las transiciones conocidas como intrasubbanda y (ii) excitaciones intersubbanda, que se obtienen bajo la condición $\lambda\lambda' = -1$.

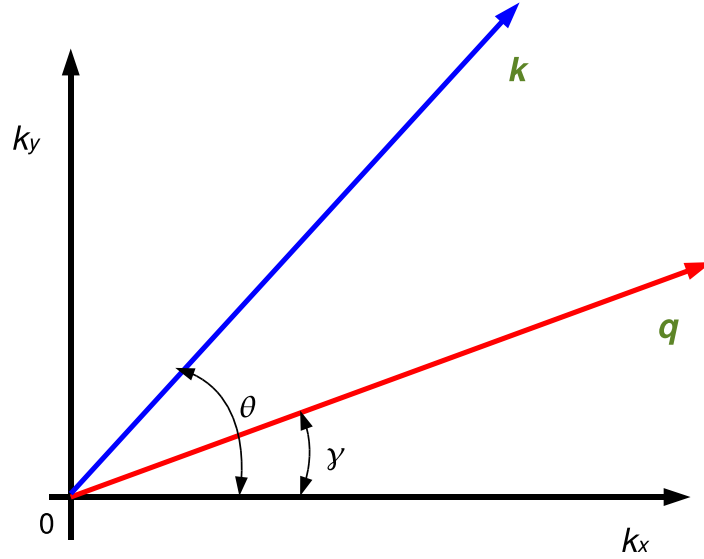


FIGURA 19.- Dirección de los vectores de onda que caracterizan el movimiento de los electrones (\mathbf{k}) y del momento de la onda electromagnética (\mathbf{q}).

Consideremos primeramente el caso particular en el que únicamente se tiene la contribución de Rashba al acoplamiento espín-órbita ($\beta = 0$). La ecuación (92) se reduce a

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 kq}{m^*} \cos(\theta - \gamma) + \alpha \left(\lambda' |\mathbf{k} + \mathbf{q}| - \lambda k \right), \quad (97)$$

donde $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| = \sqrt{q^2 + k^2 + 2kq \cos(\theta - \gamma)}$. Sin embargo, debido a que las energías propias para el caso de Rashba son isotrópicas como función del momento (Ver figura 2), no existe una dirección preferencial para el vector de onda \mathbf{q} . Este hecho, permite prescindir de la dependencia en el ángulo γ al escoger la dirección k_x como la dirección del vector de onda transferido \mathbf{q} (véase la figura 19). Así, considerando el anterior argumento, podemos tomar $\gamma = 0$ y escribir la ecuación (97) de la siguiente manera

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 kq}{m^*} \cos \theta + \alpha \left(\lambda' |\mathbf{k} + \mathbf{q}| - \lambda k \right), \quad (98)$$

donde ahora θ será el ángulo que existe entre \mathbf{k} y \mathbf{q} . Por otro lado, de la expresión (96) se obtiene que

$$\hbar\omega = -\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 k q}{m^*} \cos \theta + \alpha \left(\lambda' k - \lambda |\mathbf{k} + \mathbf{q}| \right), \quad (99)$$

Como ya se mencionó, el desdoblamiento de las subbandas de energía da como resultado la aparición de nuevas excitaciones de partícula simple con relación al caso sin IEO. Dichas transiciones se pueden obtener a partir de las expresiones (98) y (99) al considerar las posibles combinaciones de λ y λ' . En la figura 20 se muestra el espectro para algunas de las transiciones que se presentan para valores pequeños de q , constituido por transiciones intrasubbanda (zona en gris claro) y por excitaciones intersubbanda (región en gris oscuro).

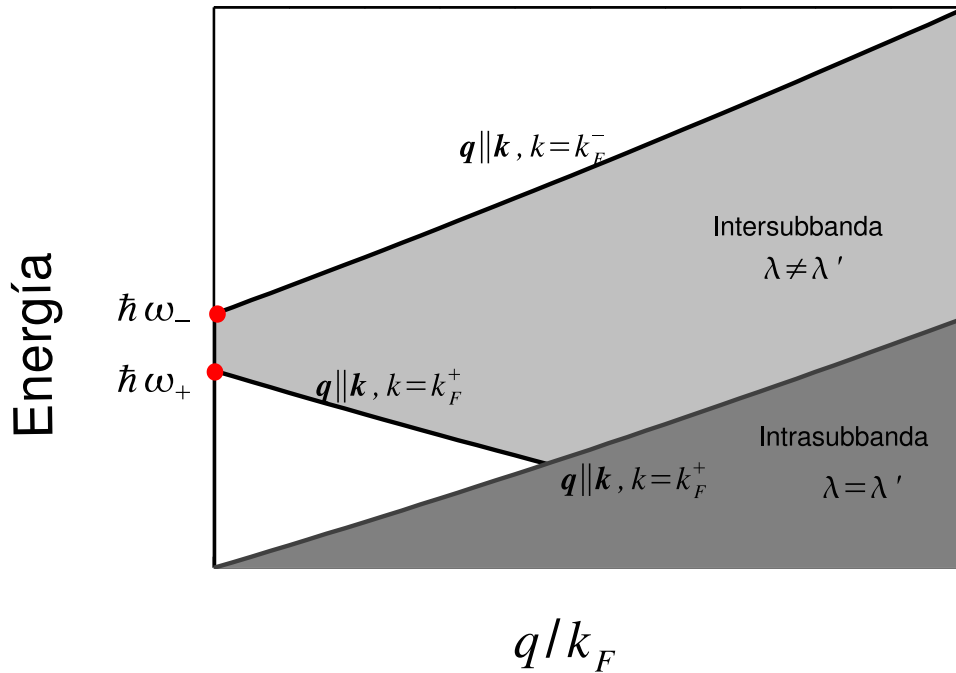


FIGURA 20.- Zonas de transiciones intra e intersubbanda para valores pequeños de q .

En el caso de las intrasubbanda, éstas consisten en transiciones dentro de la subbanda E_+ ($\lambda = \lambda' = 1$) y por transiciones dentro de la subbanda E_- ($\lambda = \lambda' = -1$). La frontera que delimita la parte superior de éstas, está dada por

$$\hbar\omega_{max}^{intra} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2}{2m^*} k_F^+ q + \alpha q^2, \quad (100)$$

obtenida de (98) y que corresponde a transiciones en la subbanda E_+ , para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$ ($\cos \theta = 1$), con $k = k_F^+$; las demás transiciones intrasubbanda quedarán contenidas dentro la región en gris oscuro.

Las excitaciones intersubbanda representadas por la región en gris claro, corresponderán a transiciones $E_- \rightarrow E_+$ alrededor de k_F^+ y k_F^- (definidas en la página 17), tal como se muestra en la figura 21. Por ejemplo, la frontera inferior que delimita a este continuo estará determinada por las excitaciones de tipo (a) (véase la figura 21), para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$ y $k = k_F^+$. Ésta se deriva a partir de la expresión (99) considerando $\lambda = -\lambda' = -1$ y puede escribirse como

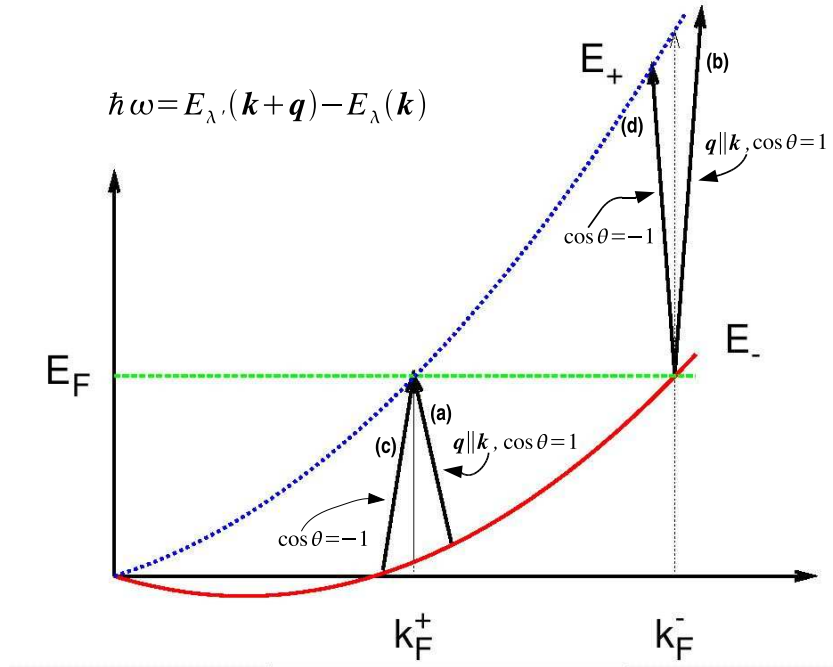


FIGURA 21.- Algunas transiciones intersubbanda presentes para valores pequeños de q .

$$\hbar\omega_{min}^{inter} = E_F - E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})|_{k=k_F^+, \mathbf{k} \parallel \mathbf{q}}, \quad (101)$$

de donde se obtiene que para $\cos\theta = 1$

$$\hbar\omega_{min}^{inter} = \hbar\omega_+ - E_F \left[2\frac{q}{k_F} \left(1 - 2\frac{k_\alpha}{k_F}\right) + \left(\frac{q}{k_F}\right)^2 \right], \quad (102)$$

mientras tanto la frontera máxima se encontrará caracterizada por las transiciones **(b)**, para $\mathbf{q} \parallel \mathbf{k}$, con $k = k_F^-$. De la expresión (99) se llega a

$$\hbar\omega_{max}^{inter} = E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})|_{k=k_F^-, \mathbf{k} \parallel \mathbf{q}} - E_F, \quad (103)$$

la cual para $\cos\theta = 1$ puede escribirse como

$$\hbar\omega_{max}^{inter} = \hbar\omega_- - E_F \left[2\frac{q}{k_F} \left(1 + 2\frac{k_\alpha}{k_F}\right) + \left(\frac{q}{k_F}\right)^2 \right], \quad (104)$$

donde $\hbar\omega_+$ y $\hbar\omega_-$ son las energías para las transiciones verticales mostradas en la figura 22 y están definidas como sigue

$$\begin{aligned} \hbar\omega_+ &= E_F - E_-(k_F^+) \\ &= 2\alpha k_F^+ \\ &= 2\alpha k_F - 2m^* \alpha^2 / \hbar^2 \end{aligned} \quad (105)$$

y

$$\begin{aligned} \hbar\omega_- &= E_+(k_F^-) - E_F \\ &= 2\alpha k_F^- \\ &= 2\alpha k_F + 2m^* \alpha^2 / \hbar^2, \end{aligned} \quad (106)$$

con $k_F = \sqrt{\frac{2m^* E_F}{\hbar^2} + k_\alpha^2}$ y $E_F = \sqrt{2\pi n_e - 2k_\alpha^2}$. Las transiciones intersubbanda denotadas por **(c)** y **(d)** en la figura 21, también se obtienen de las expresiones (98) y (99), sin embargo, quedan contenidas dentro de la región acotada por las fronteras $\hbar\omega_{min}^{inter}$ y $\hbar\omega_{max}^{inter}$.

Observese que gracias a la isotropía de las superficies de energía como función del vector de onda de las partículas, se pudo separar analíticamente las fronteras máxima y mínima que caracterizan el continuo de transiciones de pares electrón-hueco. Todo,

como una consecuencia de la no dependencia en la dirección del vector de onda \mathbf{q} en las expresiones obtenidas para este caso ($\beta = 0$). Sin embargo, cuando la IEO que se presenta es de tipo anisotrópica, la dependencia con respecto al ángulo γ no puede ser anulada, razón por la que el continuo se modifica como función de la dirección del momento transferido $\hbar\mathbf{q}$. El procedimiento a seguir para obtener las regiones de transiciones de partícula simple, es el mismo que se utilizó para el caso de Rashba. No obstante, se debe tener cuidado ya que para $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, el vector de Fermi característico de la subbanda λ presenta una dependencia en el ángulo θ , tal como se puede ver en la ecuación (33). Por lo anterior, para un vector \mathbf{q} , es necesario calcular el ángulo θ en el cuál las expresiones (92) y (96) tienen su máximo y su mínimo. En el caso de transiciones verticales ($\mathbf{q} = 0$), representadas a través del esquema de la figura 22, es posible derivar expresiones analíticas para las energías máxima y mínima. En tal caso se pierde la dependencia en el ángulo γ , y se encuentra que para $\theta = 3\pi/4$ la energía es máxima, mientras que $\theta = \pi/4$ corresponde a la energía mínima. Por tanto, para $\mathbf{q} = 0$ dichas expresiones estarán dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hbar\omega_+ &= 2k_F^+(\theta = \pi/4)\Delta(\theta = \pi/4) \\ &= 2k_F |\alpha - \beta| - 2m^*(\alpha - \beta)^2/\hbar^2\end{aligned}\quad (107)$$

y

$$\begin{aligned}\hbar\omega_- &= 2k_F^-(\theta = 3\pi/4)\Delta(\theta \\ &= 3\pi/4) = 2k_F |\alpha + \beta| + 2m^*(\alpha + \beta)^2/\hbar^2,\end{aligned}\quad (108)$$

donde el intervalo de energía en que se encuentran contenidas todas las excitaciones verticales es (Maytorena et al., 2006)

$$\Delta\varepsilon(\alpha, \beta, n_e) = \hbar\omega_- - \hbar\omega_+ = \begin{cases} 4\beta k_F + \frac{4m^*}{\hbar^2}(\alpha^2 + \beta^2) & (\alpha > \beta) \\ 4\alpha k_F + \frac{4m^*}{\hbar^2}(\alpha^2 + \beta^2) & (\alpha < \beta) \end{cases}, \quad (109)$$

donde $k_F = \sqrt{2\pi n_e - q_{so}^2}$. En el caso de $\beta = 0$ las expresiones (107) y (108) se reducen a las ecuaciones (105) y (106), respectivamente.

En el caso de \mathbf{q} finita se calcularán las fronteras de las regiones de excitación de pares electrón-hueco a través de un método numérico que permita obtener el máximo

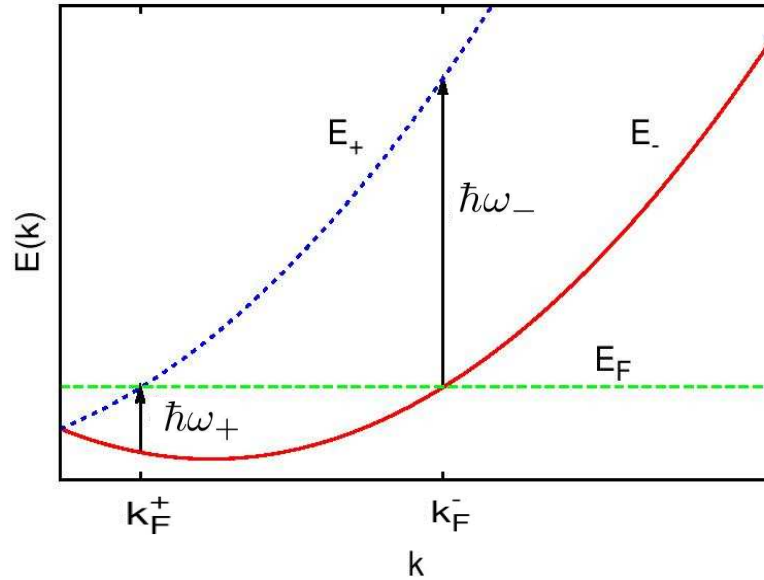


FIGURA 22.- Las frecuencias permitidas a $\mathbf{q} = 0$, estarán contenidas en el intervalo $\omega_+ < \omega < \omega_-$

y el mínimo de las ecuaciones (92) y (96). Esto para transiciones intrasubbanda e intersubbanda como se mostrará en el capítulo VI.

IV.2 Función dieléctrica y relación de dispersión de los plasmones

En esta sección se calculará la función dieléctrica para el gas electrónico bidimensional a través del método de campo autoconsistente. Posteriormente, a partir de dicha función respuesta derivaremos la relación de dispersión para los modos colectivos de la densidad de carga.

La idea básica del cálculo es obtener una expresión que relacione a un potencial externo (V_{ext}) con un potencial total (V_{tot}), donde dicho potencial total estará compuesto por la suma del potencial externo más un potencial inducido (V_{ind}). Tal relación de proporcionalidad será escrita como $V_{ext} = \epsilon V_{tot}$, donde el factor ϵ define la función

dieléctrica del sistema. Para llegar a ello, partiremos de la idea de que existe una densidad de carga inducida $\delta n_{ind}(\mathbf{r}, t)$ que se encuentra relacionada con la parte perturbativa de la matriz densidad ($\rho^{(1)}(t)$). No obstante, debido a que hay una relación de proporcionalidad entre el potencial inducido y la $\delta n_{ind}(\mathbf{r}, t)$, se derivará una expresión para el potencial inducido en función de $\rho^{(1)}(t)$ ($V_{ind} \sim \rho^{(1)}(t)$). Sin embargo, la teoría de perturbaciones muestra que $\rho^{(1)}(t) \sim V_{tot}$. Finalmente, utilizando el hecho de que el potencial total es $V_{tot} = V_{ext} + V_{ind}$, se encontrará la ecuación que relaciona al potencial externo con el potencial total y con ello se hallará la función dieléctrica.

Cuando un sistema de partículas interactuantes es perturbado a través de un potencial externo dependiente del tiempo, se genera una densidad de partículas inducida. Desde el punto de vista cuántico, dicha cantidad puede ser calculada partiendo de la expresión

$$n_{ind}(\mathbf{R}', t) = Tr \{ \rho^{(1)}(t) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \}, \quad (110)$$

donde $\rho^{(1)}(t)$ denota la parte de la matriz de densidad que contiene la información del sistema perturbado, ya que de la teoría de perturbaciones, la matriz de densidad completa estará constituida por $\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t)$, con $\rho^{(0)}$ como la matriz de densidad del sistema sin perturbar (II'inskii y Keldysh, 1994). Por otra parte, la traza Tr denota la suma sobre los elementos diagonales de la matriz. Además la función delta de Dirac $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$ es el operador de densidad, donde \mathbf{R} es el operador de posición y \mathbf{R}' representa un punto específico en el espacio; tales vectores de posición son vectores tridimensionales.

Otra manera de escribir la ecuación (110) es

$$\begin{aligned} n_{ind}(\mathbf{R}', t) = & \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} | \rho^{(1)} | \mathbf{k}', n', \lambda'_{\mathbf{k}'} \rangle \\ & \times \langle \mathbf{k}', n', \lambda'_{\mathbf{k}'} | \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') | \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \rangle, \end{aligned} \quad (111)$$

donde el “braket” $\langle \dots \rangle$ indica integración espacial. Aquí $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ es la representación en el espacio de Hilbert de los estados base para un electrón en el gas 2D definidos mediante la ecuación (10), mismos que escribiremos como

$$\Psi_{n,\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{R}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\phi_n(z)\chi_{\lambda}(\mathbf{k}), \quad (112)$$

donde $\psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, y corresponde al movimiento de los electrones en el plano x, y ; \mathbf{r} y \mathbf{k} son los vectores bidimensionales de posición y de momento, respectivamente. Por otra parte, $\phi_n(z)$ es la parte de los estados propios que surge del confinamiento de los electrones a lo largo de la dirección z y está directamente relacionada con la cuantización de las bandas de energía en el sistema. Por otro lado $\chi_{\lambda}(\mathbf{k})$ es el factor que contiene la información correspondiente al espín de los electrones y está definido por la ecuación (28).

Sustituyendo la ecuación (112) en (111), y considerando que $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(z - z')$, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) &= \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \\ &\times \int d\mathbf{r} \int dz \phi_n^*(z) \phi_n(z) \delta(z - z') \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (113)$$

donde $\rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) = \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) = \langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} | \rho^{(1)}(t) | \mathbf{k}', n', \lambda'_{\mathbf{k}'} \rangle$. De la anterior ecuación, al realizar la integral en z se llega a

$$\begin{aligned} n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) &= \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) \left[\int d\mathbf{r} \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \\ &\times \left[\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_n^*(z') \phi_n(z') \right]. \end{aligned} \quad (114)$$

Si a continuación reescribimos la función delta de la siguiente manera

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{q}, \quad (115)$$

e introducimos explícitamente la forma de la función $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, resulta que la densidad de partículas inducida puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) &= \sum_{\lambda, n, \mathbf{k}} \sum_{\lambda', n', \mathbf{k}'} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(t) \left[\int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \right] \\ &\times \left[\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_n^*(z') \phi_n(z') \right]. \end{aligned} \quad (116)$$

Sin embargo,

$$\int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}'), \quad (117)$$

de donde se deduce que $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. Por tanto, al realizar la suma en \mathbf{k}' , la ecuación (116) se puede reescribir de la siguiente manera

$$n_{ind}(\mathbf{r}', z', t) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \times \left[\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \right]. \quad (118)$$

De esta última expresión se obtiene que

$$n_{ind}(\mathbf{q}, z', t) = \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z'). \quad (119)$$

El hecho de que el potencial externo aplicado sobre el sistema genere una redistribución de la carga, da lugar a un potencial inducido cuya energía se puede expresar de la siguiente manera

$$V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) = \int d\mathbf{r}' \int dz' V_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z, z') n_{ind}(\mathbf{r}', z', t), \quad (120)$$

donde $V_{ee} = \frac{e^2}{\epsilon_0} [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{-1/2}$ es la energía potencial de interacción entre dos electrones y ϵ_0 es la constante dielectrica promedio del medio en el que se encuentra inmerso el GE2D. Si introducimos explícitamente V_{ee} en la ecuación (120), tenemos que

$$V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) = \int d\mathbf{r}' \int dz' \frac{e^2}{\epsilon_0} [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{-1/2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} n_{ind}(\mathbf{q}, z', t). \quad (121)$$

Además, si sustituímos la ecuación (119) en la ecuación (121), tenemos la siguiente expresión para el potencial inducido

$$V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) = \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \frac{e^2}{\epsilon_0} \int dz' \frac{\phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}}{[|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{1/2}}. \quad (122)$$

Por otra parte, el término de la interacción coulombiana puede ser escrito como una transformada de Fourier 2D, es decir,

$$\frac{1}{4\pi [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2]^{1/2}} = \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-q'|z-z'|} e^{i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{2q'}. \quad (123)$$

Sustituyendo la ecuación (123) en (122) y realizando un poco de álgebra, se obtiene

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) = & \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \int dz' \phi_n^*(z') \phi_n(z') \\ & \times \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} V_{q'} \left[\int d\mathbf{r}' e^{-i(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}'} \right] e^{i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} e^{-q'|z-z'|}, \end{aligned} \quad (124)$$

donde $V_{q'} = (2\pi e^2)/q' \epsilon_0$. Sin embargo, sabemos que $\int d\mathbf{r}' e^{-i(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}'} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}')$, por lo que $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$. Al sustituir en la ecuación (124) y realizar la suma sobre \mathbf{q}' , llegamos a

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{r}, z, t) = & \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \\ & \times \left[V_q \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_n^*(z') \phi_n(z') \right] \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (125)$$

de donde

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{q}, z, t) = & V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \\ & \times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_n^*(z') \phi_n(z') \end{aligned} \quad (126)$$

A continuación, tomaremos los elementos de matriz del potencial inducido para los estados $|\mathbf{k}, m, \lambda''\rangle$ y $|\mathbf{k} + \mathbf{q}, m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle$, de lo que se obtiene que

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{k}, m, \lambda'' \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = & \left\langle \mathbf{k}, m, \lambda'' \left| V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{n, n'}^{(1)\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k})] \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_n^*(z') \phi_n(z') \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (127)$$

Al utilizar la definición de los estados electrónicos, la ecuación (127) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\ \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho^{(1)\lambda, \lambda'}_{n, n'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k})] \right. \right. \\ \left. \left. \times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (128)$$

donde $|m, \lambda''_{\mathbf{k}}\rangle$ es el “ket” del estado $\Phi(z, \lambda'') = \phi_m(z) \chi_{\lambda''}(\mathbf{k})$. De aquí, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\ \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho^{(1)\lambda, \lambda'}_{n, n'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k})] \right. \right. \\ \left. \left. \times \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (129)$$

Sin embargo, la ecuación (129) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned} V_{ind}(\mathbf{q}, t) = \left\langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} \left| V_{in}(\mathbf{q}, z, t) \right| m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = V_q \sum_{\lambda, n} \sum_{\lambda', n'} \sum_{\mathbf{k}} \rho^{(1)\lambda, \lambda'}_{n, n'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) \\ \times F_{nn' mm'} [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \chi_{\lambda''}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'''}(\mathbf{k} + \mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (130)$$

Aquí hemos definido el término $F_{nn' mm'}$ como

$$F_{nn' mm'} = \int dz \int dz' e^{-q|z-z'|} \phi_{n'}^*(z') \phi_n(z') \phi_m^*(z) \phi_{m'}(z) \quad (131)$$

La expresión (130) depende de funciones conocidas, a excepción del término $\rho^{(1)\lambda, \lambda'}_{n, n'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t)$, el cual calcularemos a continuación. Para encontrar dicho factor, partiremos de la ecuación de Liouville

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho(t)] \quad (132)$$

con $\rho(t)$ como la matriz de densidad. H es el hamiltoniano de interacción, mismo que está dado de la siguiente manera

$$H = H_0 + V(\mathbf{r}, z, t), \quad (133)$$

donde H_0 es el hamiltoniano del sistema sin perturbar, y estará constituido por la energía correspondiente al movimiento del electrón libre en el gas, más la contribución al acoplamiento espín-órbita, e.i. $H_0 = \hbar^2 k^2 / 2m + H_{so}$. Por otra parte, $V(\mathbf{r}, z, t)$ es el potencial autoconsistente dependiente del tiempo, en el cual los electrones se encuentran inmersos. Dicho potencial estará constituido por el potencial externo más el potencial inducido

$$V(\mathbf{r}, z, t) = V_{in}(\mathbf{r}, z, t) + V_{ex}(\mathbf{r}, z, t). \quad (134)$$

Si tomamos los elementos de matriz de la ecuación (132) entre los estados $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ y $|\mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle$, obtenemos

$$i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| [\mathbf{H}, \rho] \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \quad (135)$$

Por otro lado, el operador de la matriz densidad, de acuerdo con la teoría de perturbaciones, puede ser escrito como

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t), \quad (136)$$

donde $\rho^{(0)}$ es el operador correspondiente a la matriz densidad de un sistema sin perturbar, mientras que $\rho^{(1)}(t)$ es el operador de la matriz densidad correspondiente al sistema perturbado y que depende linealmente del campo externo. De esta manera, la ecuación (135) se transforma en

$$i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t))}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| [(H_0 + V(\mathbf{r}, z, t)), (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t))] \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle. \quad (137)$$

Desarrollando el conmutador de la expresión (137), y tomando únicamente los términos que dependen linealmente del campo, llegamos a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial \rho^{(1)}(t)}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\
\left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| H_0 \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
- \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) H_0 \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
+ \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \rho^{(0)} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
- \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(0)} V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{138}$$

Además, sabemos que $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ satisfacen la ecuación

$$H_0 |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle = E_n^\lambda(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{139}$$

donde $E_n^\lambda(\mathbf{k})$ representa la energía característica del estado $|\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle$. De la misma manera,

$$\rho^{(0)} |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle = f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) |\mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{140}$$

donde $f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k}))$ es la función de distribución de Fermi correspondiente a la energía $E_n^\lambda(\mathbf{k})$. Por tanto, si aplicamos las relaciones (139) y (140) en la expresión (138), llegamos a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
i\hbar \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial \rho^{(1)}(t)}{\partial t} \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\
\left(E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right) \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
+ \left[f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) \right] \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{141}$$

Si suponemos que la dependencia temporal de todas las cantidades es de la forma $e^{-i(\omega+in)t}$, entonces la relación (134) puede ser expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\hbar(\omega + i\eta) \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle = \\
\left(E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right) \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \\
+ \left[f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) \right] \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle,
\end{aligned} \tag{142}$$

donde η es un parámetro que se introduce para tomar en cuenta efectos de disipación.

De la ecuación (142) finalmente se obtiene que

$$\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \frac{\left[f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) - f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})) \right]}{E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}} \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{r}, z, t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle, \tag{143}$$

donde $\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \left\langle \mathbf{k}, n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| \rho^{(1)}(t) \right| \mathbf{k} + \mathbf{q}, n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle$ y $\tilde{\omega} = \omega + i\eta$.

Por otra parte si el potencial autoconsistente se escribe como la transformada de Fourier

$$V(\mathbf{r}, z, t) = \sum_{\mathbf{q}'} e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{q}', z, t), \tag{144}$$

entonces, la ecuación (143), al expresar el valor esperado del potencial autoconsistente en su forma integral, puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) \sum_{\mathbf{q}'} \int dz \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} \psi_{\mathbf{k}}^* \\
\times \phi_n^*(z) \chi_{\lambda}^*(\mathbf{k}) V(\mathbf{q}', z) \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \phi_{n'}(z) \chi_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}),
\end{aligned} \tag{145}$$

con

$$\Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) = \frac{f_0(E_n^\lambda(\mathbf{k})) - f_0(E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}))}{E_n^\lambda(\mathbf{k}) - E_{n'}^{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}}. \tag{146}$$

Si consideramos el hecho de que $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ y $\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}}$, entonces la fórmula (145) puede escribirse como sigue

$$\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) \sum_{\mathbf{q}'} \left\langle n, \lambda_{\mathbf{k}} \left| V(\mathbf{q}', z, t) \right| n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \right\rangle \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}}, \tag{147}$$

donde $\langle n, \lambda_{\mathbf{k}} | V(\mathbf{q}', z) | n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle = \chi_{\lambda}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \langle n | V(\mathbf{q}', z) | n' \rangle$. Sin embargo, la anterior expresion es posible reducirla, al tomar en cuenta que $\int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$. Por tanto, al considerar la anterior igualdad y al realizar la suma sobre \mathbf{q}' , finalmente se obtiene que

$$\rho_{n,n'}^{(1)\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}; t) = \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \langle n, \lambda_{\mathbf{k}} | V(\mathbf{q}, z, t) | n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle. \quad (148)$$

Esta última expresión es la que necesitamos para calcular el potencial inducido, así que sustituyendo (148) en (130) se encuentra la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \langle m, \lambda''_{\mathbf{k}} | V_{in}(\mathbf{q}, z, t) | m', \lambda'''_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle &= V_q \sum_{\lambda,n} \sum_{\lambda',n'} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) F_{nn'mm'} \\ &\times [\chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \chi_{\lambda''}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'''}(\mathbf{k} + \mathbf{q})] \langle n, \lambda_{\mathbf{k}} | V(\mathbf{q}, z) | n', \lambda'_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle. \end{aligned} \quad (149)$$

Si realizamos el cambio de notación $\nu = m\lambda''$, $\nu' = m'\lambda'''$, $\mu = n\lambda$ y $\mu' = n'\lambda'$, entonces la ecuación (149) puede ser reescrita como sigue

$$\langle \nu | V_{in}(\mathbf{q}, z, t) | \nu' \rangle = V_q \sum_{\mu,\mu'} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu,\mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) N_{\mu\mu'\nu\nu'} \langle \mu | V(\mathbf{q}, z) | \mu' \rangle, \quad (150)$$

donde

$$N_{\mu\mu'\nu\nu'} = F_{nn'mm'} M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}, \quad (151)$$

con

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \chi_{\lambda'}^*(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \chi_{\lambda}(\mathbf{k}) \chi_{\lambda''}^*(\mathbf{k}) \chi_{\lambda'''}(\mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (152)$$

Además $\Lambda_{\mu,\mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega) = \Lambda_{n,n'}^{\lambda,\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}, \omega)$.

Por otra parte, como el potencial total es el potencial inducido más el potencial externo, entonces $\langle \nu | V_{in} | \nu' \rangle = \langle \nu | V - V_{ex} | \nu' \rangle$. De esta manera, la ecuación (150) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\langle \nu | V(\mathbf{q}, z, t) - V_{ex}(\mathbf{q}, z, t) | \nu' \rangle = V_q \sum_{\mu,\mu'} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu,\mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{\mu\mu'\nu\nu'} \langle \mu | V(\mathbf{q}, z, t) | \mu' \rangle. \quad (153)$$

Si ponemos los elementos de matriz del potencial externo como función del potencial autoconsistente, se llega a la siguiente expresión

$$\langle \nu | V_{ex}(\mathbf{q}, z, t) | \nu' \rangle = \sum_{\mu, \mu'} \left[\delta_{\nu, \mu} \delta_{\nu', \mu'} - V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu, \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{\mu \mu' \nu \nu'} \right] \langle \mu | V(\mathbf{q}, z, t) | \mu' \rangle. \quad (154)$$

Sin embargo, el potencial externo se relaciona con el potencial total a través de la función dieléctrica, i.e. $V_{ex} = \epsilon V$, por tanto, ésta se define como

$$\epsilon_{\mu \mu' \nu \nu'} = \delta_{\nu, \mu} \delta_{\nu', \mu'} - V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\mu, \mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) N_{\mu \mu' \nu \nu'}. \quad (155)$$

Si el estudio se realiza sobre sistemas donde el pozo cuántico que confina al gas de electrones es muy angosto, de tal manera que sólo existe una subbanda de conducción, entonces se tiene que $n = n' = m = m' = 0$. Además, si la coordenada en la dirección z es casi cero, se llega a que $F_{nn' mm'} = 1$, debido a la ortonormalidad de las funciones envolventes $\phi(z)$. Por tanto, el término $N_{\mu \mu' \nu \nu'}$ se colapsa a $M_{\lambda \lambda' \lambda'' \lambda'''}$. Por dicho motivo, la ecuación (155) se puede reescribir de manera simplificada como

$$\epsilon_{\lambda \lambda' \lambda'' \lambda'''} = \delta_{\lambda, \lambda''} \delta_{\lambda', \lambda'''} - V_q \sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda, \lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) M_{\lambda \lambda' \lambda'' \lambda'''} \quad (156)$$

En el caso en que la interacción espín-órbita desaparece, el término $M_{\lambda \lambda' \lambda'' \lambda'''}$ se vuelve la unidad, de tal manera que se recupera la función dieléctrica de Lindhard para el gas degenerado en espín (Stern, 1967).

La ecuación (156) puede representarse en forma matricial al considerar todas las posibles combinaciones de los subíndices $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''' = \pm 1$ de la siguiente manera

$$[\tilde{\epsilon}(\mathbf{q}, \omega)] = \begin{pmatrix} \epsilon_{++++} & \epsilon_{+++ -} & \epsilon_{++ - +} & \epsilon_{+ + - -} \\ \epsilon_{+ - ++} & \epsilon_{+ - + -} & \epsilon_{+ - - +} & \epsilon_{+ - - -} \\ \epsilon_{- + ++} & \epsilon_{- + + -} & \epsilon_{- + - +} & \epsilon_{- + - -} \\ \epsilon_{- - ++} & \epsilon_{- - + -} & \epsilon_{- - - +} & \epsilon_{- - - -} \end{pmatrix}. \quad (157)$$

Cálculo de los elementos de matriz de la función dieléctrica.

Para encontrar los elementos que componen la matriz representada a través de la ecuación (157) es necesario calcular el término $M_{\lambda \lambda' \lambda'' \lambda'''}$. En dicho factor se encuentra

información concerniente al espín de las partículas y está dado por la expresión (152). En el caso de un gas de electrones que se forma en una heteroestructura crecida a lo largo de la dirección cristalográfica [001], la función $\chi_\lambda(\mathbf{k})$ está definida mediante (28) y se reescribirá como

$$\chi_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\phi(\mathbf{k})} \end{pmatrix} \quad (158)$$

con $\tan \phi(k) = (\alpha k_x - k_y)/(\beta k_x - \alpha k_y)$. De manera similar, la función $\chi_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ puede expresarse como

$$\chi_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda e^{i\phi(\mathbf{k} + \mathbf{q})} \end{pmatrix}. \quad (159)$$

donde $\tan \phi(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = [\alpha(k_x + q_x) - \beta(k_y + q_y)] / [\beta(k_x + q_x) - \alpha(k_y + q_y)]$.

Por otro lado $\chi_\lambda^*(\mathbf{k})$ es

$$\chi_\lambda^*(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda e^{-i\phi(\mathbf{k})} \end{pmatrix}. \quad (160)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (158), (159) y aplicando (160) para resolver la expresión (152), se obtiene

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \frac{1}{4} \left(1 + \lambda\lambda' e^{-i\phi(\mathbf{k} + \mathbf{q})} e^{i\phi(\mathbf{k})} \right) \left(1 + \lambda''\lambda''' e^{-i\phi(k)} e^{i\phi(\mathbf{k} + \mathbf{q})} \right). \quad (161)$$

Así, al expandir esta expresión se llega a que

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \frac{1}{4} \left[1 + \lambda''\lambda''' e^{-i\phi(k)} e^{i\phi(k+q)} + \lambda\lambda' e^{-i\phi(k+q)} e^{i\phi(k)} + \lambda\lambda'\lambda''\lambda''' \right]. \quad (162)$$

De aquí, podemos clasificar las soluciones a la expresión (162) en cuatro casos generales, los cuales estarán dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \lambda\lambda' = \lambda''\lambda''' = 1 \\ (2) \quad \lambda\lambda' = \lambda''\lambda''' = -1 \\ (3) \quad \lambda\lambda' = 1, \lambda''\lambda''' = -1 \\ (4) \quad \lambda\lambda' = -1, \lambda''\lambda''' = 1. \end{array} \right. \quad (163)$$

Si analizamos las condiciones expresadas en (163) podemos encontrar cada uno de los elementos del factor $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$. Por ejemplo, para el primero de los casos, que implica la condición $\lambda = \lambda'$ y $\lambda'' = \lambda'''$, se obtiene que tal factor puede ser escrito en polares como

$$M_{\lambda=\lambda',\lambda''=\lambda'''} = \frac{1}{2}(1 + A(\mathbf{k}, \mathbf{q})), \quad (164)$$

donde

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{k^2\Delta^2(\theta) + kq[(\alpha^2 + \beta^2)\cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta\sin(\theta + \gamma)]}{D(\mathbf{k} + \mathbf{q})D(\mathbf{k})}. \quad (165)$$

con $D(\mathbf{k})$ y $D(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ definidas mediante las expresiones (31) y (94) respectivamente. Similarmente para el caso (2), que implica la condición $\lambda \neq \lambda'$ y $\lambda'' \neq \lambda'''$, el factor $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$ es

$$M_{\lambda\neq\lambda',\lambda''\neq\lambda'''} = \frac{1}{2}(1 - A(\mathbf{k}, \mathbf{q})). \quad (166)$$

Por otro lado, cuando $\lambda = \lambda'$ y $\lambda'' \neq \lambda'''$, que es precisamente el tercero de los casos, tenemos que la ecuación (162) se reduce a

$$M_{\lambda=\lambda',\lambda''\neq\lambda'''} = \frac{i}{2}B(\mathbf{k}, \mathbf{q}), \quad (167)$$

donde

$$B(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)qk\sin(\theta - \gamma)}{D(\mathbf{k} + \mathbf{q})D(\mathbf{k})}. \quad (168)$$

Así mismo, para el caso (4), tenemos que

$$M_{\lambda=\lambda',\lambda''\neq\lambda'''} = -\frac{i}{2}B(\mathbf{k}, \mathbf{q}), \quad (169)$$

De esta manera podemos escribir

$$M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + A(\mathbf{k}, \mathbf{q})) & \lambda = \lambda' \text{ y } \lambda'' = \lambda''' \\ \frac{1}{2}(1 - A(\mathbf{k}, \mathbf{q})) & \lambda \neq \lambda' \text{ y } \lambda'' \neq \lambda''' \\ \frac{i}{2}B(\mathbf{k}, \mathbf{q}) & \lambda = \lambda' \text{ y } \lambda'' \neq \lambda''' \\ -\frac{i}{2}B(\mathbf{k}, \mathbf{q}) & \lambda \neq \lambda' \text{ y } \lambda'' = \lambda''' \end{cases} \quad (170)$$

Relación de dispersión para los modos colectivos

Dadas las soluciones para el factor $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$ es posible calcular los términos que componen la función dieléctrica. Dado que $\sum_{\mathbf{k}} \Lambda_{\lambda\lambda'} B(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = 0$ puede ser escrita de la siguiente forma

$$[\tilde{\epsilon}(\mathbf{q}, \omega)] = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_{++} & 0 & 0 & -\epsilon_{++} \\ 0 & 1 - \epsilon_{+-} & -\epsilon_{+-} & 0 \\ 0 & -\epsilon_{-+} & 1 - \epsilon_{-+} & 0 \\ -\epsilon_{--} & 0 & 0 & 1 - \epsilon_{--} \end{pmatrix}, \quad (171)$$

donde

$$\epsilon_{\pm\pm} = (V_q/2) \sum_{\mathbf{k}} (1 + A(\mathbf{k}, \mathbf{q})) \Lambda_{\pm\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (172)$$

y

$$\epsilon_{\pm\mp} = (V_q/2) \sum_{\mathbf{k}} (1 - A(\mathbf{k}, \mathbf{q})) \Lambda_{\pm\mp}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (173)$$

Aquí la notación $\pm\pm$ indica el factor involucra transiciones intrasubbanda, mientras que los subíndices $\pm\mp$ indican la presencia de procesos intersubbanda.

Si recordamos de la subsección III.1.2, una de las condiciones que se exigen para determinar la relación de dispersión de los plasmones es que la función dieléctrica sea cero. Sin embargo, como en este caso es una matriz, la solución no trivial se encontrará al pedir que el determinante de tal función respuesta sea cero. En consecuencia, se encuentra que de la ecuación (171) se llega a la siguiente relación

$$\det [\tilde{\epsilon}(q, \omega)] = \overbrace{(1 - \epsilon_{++}(q, \omega) - \epsilon_{--}(q, \omega))}^{\text{intra}} \overbrace{(1 - \epsilon_{+-}(q, \omega) - \epsilon_{-+}(q, \omega))}^{\text{inter}} = 0. \quad (174)$$

Este determinante se anulará cuando cualquiera de los factores sea cero. Cada término de manera independiente está compuesto ya sea por procesos que involucran transiciones intrasubbanda o por procesos constituídos por transiciones intersubbanda. De esta manera podemos hablar de dos tipos de plasmones; el primero de ellos denominado plasmón intrasubbanda y el otro conocido como plasmón intersubbanda. Para resolver cada uno de los términos de la expresión (174) es necesario utilizar técnicas del cálculo numérico. Los resultados que de ello se derivan serán presentados en el capítulo VI.

Capítulo V

MODOS COLECTIVOS EN EL LÍMITE DE LONGITUD DE ONDA LARGA

En el presente capítulo se calcula la relación de dispersión de los plasmones en el régimen de longitud de onda larga, es decir, en el límite de $q/k_0 \ll 1$, donde $k_0 = \sqrt{2\pi n_e}$.

V.1 Plasmones Intrasubbanda

La relación de dispersión para este tipo de excitaciones proviene del primer factor que compone la expresión (174). Tal término está dado por

$$(1 - \epsilon_{++} - \epsilon_{--}) = 0 \quad (175)$$

donde $\epsilon_{\pm\pm}$ se define a través de la expresión (172). Dicha función puede ser expresada como sigue

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{V_q}{2} \sum_{\mathbf{k}} [1 + A(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})] \Lambda_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega), \quad (176)$$

con

$$\Lambda_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \omega) = \frac{f_0(E_\lambda(\mathbf{k})) - f_0(E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}))}{E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega}. \quad (177)$$

Para obtener la solución de la ecuación (175) en el régimen de longitud de onda larga, a continuación derivaremos una aproximación a la expresión (176) tomando el límite cuando q/k_0 es muy pequeña. Para ello, será de gran utilidad reescribir la ecuación (176) (a temperatura cero) como ¹

¹Para llegar a (178) se consideró la propiedad de simetría $F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = F_1(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k})$ para $\theta \rightarrow \theta - \pi$. Posteriormente, se utiliza el hecho de que $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_\lambda(\mathbf{k}) - E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_\lambda(\mathbf{k}) - E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega}$.

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = \frac{2V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \times \left[\frac{1}{E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\omega} + \frac{1}{E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \hbar\omega} \right] \quad (178)$$

con

$$F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (1 + A(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})), \quad (179)$$

donde $k_F^\lambda(\theta)$ se encuentra definido mediante (33) y representa la magnitud del vector de onda de Fermi de la subbanda λ y $A(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})$ está determinada por la ecuación (165). Si reescribimos la ecuación (178), obtenemos la siguiente expresión

$$\epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = \frac{2V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \left[\frac{E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{(E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}))^2 - (\hbar\omega)^2} \right]. \quad (180)$$

Aquí, la diferencia de energías $E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ está dada por

$$E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \lambda (D(\mathbf{k}) - D(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - \frac{\hbar^2}{2m^*} (q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)), \quad (181)$$

donde $D(\mathbf{k})$ y $D(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ están dadas por la ecuaciones (31) y (94), respectivamente, es decir,

$$D(\mathbf{k}) = k\Delta(\theta) = k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin(2\theta)} \quad (182)$$

y

$$D^2(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = k^2\Delta^2(\theta) + q^2\Delta^2(\gamma) + 2kq [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta\sin(\theta + \gamma)]. \quad (183)$$

Para poder escribir la relación (181) en el límite de longitud de onda larga, es necesario obtener una expresión para $D(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ en límite de \mathbf{q} pequeña. Si factorizamos la energía espín-órbita de la forma

$$D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = k\Delta(\theta) [1 + X(k, q, \theta)]^{1/2}, \quad (184)$$

y suponemos X pequeña cuando $q \rightarrow 0$, se obtiene

$$D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \approx k\Delta(\theta) \left\{ 1 + \frac{1}{2}X(k, q, \theta) - \frac{q^2}{2k^2} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \text{sen}(\theta + \gamma)]^2 \right\}, \quad (185)$$

con X dada por la expresión

$$X(k, q, \theta) = \frac{q^2 \Delta^2(\gamma)}{k^2 \Delta^2(\theta)} + \frac{2q}{k\Delta^2(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \text{sen}(\theta + \gamma)]. \quad (186)$$

Por tanto, la diferencia (181) hasta orden $\sim q^2$, es

$$\begin{aligned} E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \approx & - \left\{ \lambda \frac{q^2}{2k\Delta^3(\theta)} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \text{sen}^2(\theta - \gamma) \right. \\ & + \lambda \frac{q}{\Delta(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \text{sen}(\theta + \gamma)] \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2m^*} (q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)) \right\}. \end{aligned} \quad (187)$$

Como $F_1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \rightarrow 1$ y $[E_\lambda(\mathbf{k}) - E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q})]^2 \ll (\hbar\omega)^2$ cuando $q \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = & \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \left\{ \lambda \frac{q^2}{2k\Delta^3(\theta)} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \text{sen}^2(\theta - \gamma) \right. \\ & + \lambda \frac{q}{\Delta(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \text{sen}(\theta + \gamma)] \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2m^*} (q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)) \right\}. \end{aligned} \quad (188)$$

Realizando las integrales,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda\lambda}(q, \omega) = & \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} n_\lambda - \frac{q^2 m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{4 \hbar^2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{|\alpha^2 - \beta^2|} \right. \\ & \left. \times 2\pi \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \text{sen}(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right] \right\} + \lambda \vartheta(q, \theta). \end{aligned} \quad (189)$$

donde n_λ es la densidad electrónica definida mediante (14), es decir,

$$n_\lambda = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{(k_F^\lambda(\theta))^2}{2}, \quad (190)$$

con $k_F^\lambda(\theta)$ dado por (33). El último término reúne todos aquellos que son proporcionales a λ y como veremos, no es necesario escribirlos explícitamente.

Al utilizar el resultado de la ecuación (189) para calcular $\epsilon_{++}(q, \omega)$ y $\epsilon_{--}(q, \omega)$, obtenemos

$$\epsilon_{++}(q, \omega) = \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} n_\lambda - \frac{q^2 m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{4 \hbar^2} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{|\alpha^2 - \beta^2|} \right) \right. \\ \left. \times 2\pi \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \text{sen}(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right] \right\} + \vartheta(q, \theta). \quad (191)$$

Similarmente,

$$\epsilon_{--}(q, \omega) = \frac{2}{(\hbar\omega)^2} \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} n_\lambda - \frac{q^2 m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{4 \hbar^2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{|\alpha^2 - \beta^2|} \right. \\ \left. \times 2\pi \left[1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \text{sen}(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right] \right\} - \vartheta(q, \theta). \quad (192)$$

y al sustituir en la ecuación (175) se llega a

$$(\hbar\omega)^2 = 2 \frac{V_q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} (2\pi)^2 (n_+ + n_-) - \frac{q^2 m^* (\alpha^2 - \beta^2)}{2 \hbar^2} \text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2) \right. \\ \left. \times 2\pi \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \text{sen}(2\gamma)}{2\alpha\beta} \right) \right\}, \quad (193)$$

donde $\text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2)$ es la función signo, la cual vale 1 si $\alpha^2 > \beta^2$ y -1 si $\alpha^2 < \beta^2$. Esta se simplifica a

$$\omega = \omega_p^{2D}(q) \left[1 - \frac{m^{*2}(\alpha^2 - \beta^2)/\hbar^4}{2\pi n_e} \text{sgn}(\alpha^2 - \beta^2) \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - |\alpha^2 - \beta^2| \text{sen}2\gamma}{2\alpha\beta} \right) \right]^{1/2}, \quad (194)$$

donde $\omega_p^{2D}(q)$ la del capítulo III ecuación (89) que corresponde a la frecuencia del plasmón de un gas degenerado en espín. El factor entre corchetes indica la corrección introducida al tomar en cuenta la interacción espín órbita. Como, típicamente, $(\frac{m^* \alpha^2 / \hbar^2}{2\pi n_e})$, $(\frac{m^* \beta^2 / \hbar^2}{2\pi n_e}) \ll 1$ ($\sim 10^{-3}$) el efecto de la IEO sobre la relación de dispersión de los plasmones intrasubbanda será muy pequeña. Por esto mismo, la anisotropía en la rama del plasmón, expresada por el término $\text{sen}2\gamma$, será también prácticamente imperceptible.

En el caso $\beta = 0$, la expresión (194) se reduce a

$$\omega = \omega_p^{2D}(q) \left(1 - \frac{m^* \alpha^2 / \hbar^4}{2\pi n_e} \right)^{1/2}, \quad (195)$$

que es el resultado obtenido por W. Xu (Xu, 2003) y M. Kushwaha y S. Ulloa (Kushwaha y Ulloa, 2006).

V.2 Plasmones Intersubbanda

Este otro tipo de excitación electrónica tiene una relación de dispersión dada por el segundo factor de la ecuación (174),

$$1 - \epsilon_{+-} - \epsilon_{-+} = 0, \quad (196)$$

donde las funciones $\epsilon_{\pm\mp}$ estarán dadas por (173), y pueden expresarse de la siguiente manera

$$\epsilon_{\lambda\lambda'}(q, \omega) = \frac{V_q}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k(\theta)} dk k [1 - A(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})] \Lambda_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}), \quad (197)$$

para $\lambda' = -\lambda$. A temperatura cero $f_0(E_\lambda(\mathbf{k})) = 1$ si $E_\lambda < E_F$, por tanto, podemos escribir la ecuación (197) ².

$$\begin{aligned} \epsilon_{\lambda\lambda'}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^\lambda(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_\lambda(\mathbf{k}) - E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}} \\ &\quad - \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^{\lambda'}(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E_{\lambda'}(\mathbf{k}) + \hbar\tilde{\omega}}, \end{aligned} \quad (198)$$

donde $F_{-1} = \frac{1}{2}(1 - A(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}))$. De aquí se encuentra que

$$\begin{aligned} \epsilon_{+-}(q, \omega) &= \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^+(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_+(\mathbf{k}) - E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}} \\ &\quad - \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^-(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E_-(\mathbf{k}) + \hbar\tilde{\omega}}, \end{aligned} \quad (199)$$

y

²Aquí se han utilizasos los mismos argumentos de simetría que para (179)

$$\begin{aligned} \epsilon_{-+}(q, \omega) = & \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^-(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_-(\mathbf{k}) - E_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \hbar\tilde{\omega}} \\ & - \frac{V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^+(\theta)} dk k \frac{F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E_+(\mathbf{k}) + \hbar\tilde{\omega}}, \end{aligned} \quad (200)$$

Así, al sumar (199) y (200) se llega a la expresión

$$\epsilon_{+-} + \epsilon_{-+} = I_1(q, \omega) + I_2(q, \omega), \quad (201)$$

donde

$$I_1(q, \omega) = \frac{2V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^+(\theta)} dk k F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \frac{E_+(\mathbf{k}) - E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{(E_+(\mathbf{k}) - E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2}, \quad (202)$$

$$I_2(q, \omega) = \frac{2V_q}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{k_F^-(\theta)} dk k F_{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \frac{E_-(\mathbf{k}) - E_+(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{(E_-(\mathbf{k}) - E_+(\mathbf{k} + \mathbf{q}))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2}. \quad (203)$$

Límites de $I_1(q, \omega)$ e $I_2(q, \omega)$ cuando $q \rightarrow 0$

La diferencia de energía $E_+(\mathbf{k}) - E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ estará dada por

$$E_+(\mathbf{k}) - E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = - \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 q k}{m^*} \cos(\theta - \gamma) \right] + D(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + D(\mathbf{k}). \quad (204)$$

Si usamos (185), tenemos

$$\begin{aligned} E_+(\mathbf{k}) - E_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \approx & 2k\Delta(\theta) - \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 q k}{m^*} \cos(\theta - \gamma) \right] + \frac{(\alpha^2 - \beta^2) q^2 \text{sen}^2(\theta - \gamma)}{2k\Delta^3(\theta)} \\ & + \frac{q}{\Delta(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \text{sen}(\theta + \gamma)]. \end{aligned} \quad (205)$$

Por otro lado

$$\frac{1}{[E_+(\mathbf{k}) - E_+(\mathbf{k} + \mathbf{q})]^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2} \approx \frac{1}{(2k\Delta(\theta))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2}. \quad (206)$$

Además, para evaluar F_{-1} , necesitamos (véase (165))

$$\frac{1}{D(\mathbf{k} + \mathbf{q})} \approx \frac{1}{k\Delta(\theta)} \left[1 - \frac{1}{2}X(k, q, \theta) + \frac{3}{2} \frac{q^2}{k^2\Delta^4(\theta)} [(\alpha^2 + \beta^2) \cos(\theta - \gamma) - 2\alpha\beta \text{sen}(\theta + \gamma)]^2 \right], \quad (207)$$

donde $X(k, q, \theta)$ está definida mediante la expresión (186). Lo anterior, permite aproximar a

$$F_{-1} \approx \frac{q^2}{4k^2} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \frac{\text{sen}^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)}. \quad (208)$$

a orden más bajo en q . Nótese que $F_1 \sim 1$ mientras que $F_{-1} \sim q^2$. Si sustituimos (206) y (208) en la expresión (202) se obtiene que $I_1(q, \omega)$ es

$$I_1(q, \omega) = \frac{2V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{2} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\text{sen}^2(\theta - \gamma)}{\Delta^3(\theta)} \int_0^{k_F^+(\theta)} \frac{dk}{(2k\Delta(\theta))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2}. \quad (209)$$

Similarmente,

$$I_2(q, \omega) = -\frac{2V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{2} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\text{sen}^2(\theta - \gamma)}{\Delta^3(\theta)} \int_0^{k_F^-(\theta)} \frac{dk}{(2k\Delta(\theta))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2}. \quad (210)$$

Cálculo de $\epsilon_{-+} + \epsilon_{+-} = 1$

Sumando las ecuaciones (209) y (210) finalmente se obtiene una expresión para la ecuación (196) y se puede espresar de la siguiente forma

$$\epsilon_{+-} + \epsilon_{-+} = -\frac{2V_q}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{2} (\alpha^2 - \beta^2)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\text{sen}^2(\theta - \gamma)}{\Delta^3(\theta)} \int_{k_F^+(\theta)}^{k_F^-(\theta)} \frac{dk}{(2k\Delta(\theta))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2}, \quad (211)$$

Sin embargo,

$$\int_{k_F^+(\theta)}^{k_F^-(\theta)} \frac{dk}{(2k\Delta(\theta))^2 - (\hbar\tilde{\omega})^2} = -\frac{1}{\hbar\tilde{\omega}} \frac{1}{4\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{(\tilde{\omega} + \omega_-(\theta))(\tilde{\omega} - \omega_+(\theta))}{(\tilde{\omega} - \omega_-(\theta))(\tilde{\omega} + \omega_+(\theta))} \right), \quad (212)$$

donde $\omega_{\pm}(\theta)$ son las calculadas en el capítulo IV (ecuaciones (107) y (108))

$$\hbar\omega_{\pm}(\theta) = 2k_F^{\pm} \Delta(\theta). \quad (213)$$

Sustituyendo la ecuación (213) en la expresión (211) e introduciendo $V_q = 2\pi e^2/\epsilon_s q$ en el límite cuando $\eta \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{(qe^2/\epsilon_s)(\alpha^2 - \beta^2)^2}{8\hbar\omega \pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\text{sen}^2(\theta - \gamma)}{\Delta^4(\theta)} \log \left(\frac{(\omega + \omega_-(\theta))(\omega - \omega_+(\theta))}{(\omega - \omega_-(\theta))(\omega + \omega_+(\theta))} \right) = 1. \quad (214)$$

Si $\beta = 0$, la expresión se reduce a

$$8 \frac{\hbar\omega}{q(e^2/\epsilon_s)} = \log \frac{(\omega + \omega_-)(\omega - \omega_+)}{(\omega - \omega_-)(\omega + \omega_+)}, \quad (215)$$

donde $\hbar\omega_{\pm}$ es

$$\hbar\omega_{\pm} = 4\alpha\sqrt{\pi n_{\pm}}, \quad (216)$$

que corresponden a la energías que caracterizan las transiciones verticales, definidas por las ecuaciones (105) y (106). Este, es precisamente el resultado mostrado por W. Xu (Xu, 2003) y M. Kushwaha y S. Ulloa (Kushwaha y Ulloa, 2006).

De la ecuación (215) es posible ver que existirán dos ramas de plasmones intersubbanda, la primera de ellas resultará cuando la frecuencia $\omega \rightarrow \omega_+$ y la otra cuando $\omega \rightarrow \omega_-$, donde por lo general ω dependerá de q a través de $\omega_p^{2D}(q)$. Así, junto con el plasmón intrasubbanda, en total se tendrán tres ramas.

Capítulo VI

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se realizará un estudio numérico de las excitaciones elementales que se presentan en un GE2D. Para ello, partiremos de las expresiones obtenidas con anterioridad en el capítulo IV para las regiones de transiciones de pares electrón-hueco y los modos colectivos de la densidad de carga. Primeramente, en la sección VI.1 se analizará el caso en que la IEO se debe únicamente a la contribución de Rashba, es decir, $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$. Posteriormente, en la sección VI.2 revisaremos el caso en que la interacción espín-órbita es de carácter anisotrópica (Rashba + Dresselhaus). En particular, pondremos especial atención a la dependencia que presentan las excitaciones elementales con respecto a la dirección del vector de onda transferido \mathbf{q} . Finalmente, en la sección VI.3 compararemos los resultados que se obtienen para diferentes direcciones cristalográficas en que es crecida la heteroestructura que confina y da lugar al gas electrónico.

VI.1 Excitaciones electrónicas elementales con IEO de Rashba

A continuación se analizará el espectro de excitaciones electrónicas para el caso $\beta = 0$. Para ello, partiremos de las expresiones matemáticas calculadas en el capítulo IV para el caso de la orientación cristalográfica [001]. Las zonas de excitaciones de partícula simple se obtendrán por medio de las ecuaciones (98) y (99), mientras que del determinante (174) se calculará la relación de dispersión de los plasmones (RDP). Estos últimos, se obtendrán al exigir que la parte real de cada factor que compone (174), por separado, sea cero y que la parte imaginaria sea infinitesimalmente pequeña, tal como se vió en el capítulo III.

Considérese un GE2D con una densidad electrónica típica $n_e = 5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, masa efectiva $m^* = 0.042$ (correspondiente a InGaAs) y en donde se encuentra presente la

IEO de Rashba con intensidad $\alpha = 4 \times 10^{-9}$ eV cm; tales parámetros son los que se utilizan en el trabajo de M. Kushwaha y S. Ulloa (Kushwaha y Ulloa, 2006). El espectro de excitaciones correspondiente a dicho sistema es el mostrado en la figura 23. En ella se grafica la energía de excitación como función de q/k_F , donde $k_F = \sqrt{2\pi n_e - k_\alpha^2}$ con $k_\alpha = m^* \alpha / \hbar^2$. La región en gris oscuro corresponde a las excitaciones

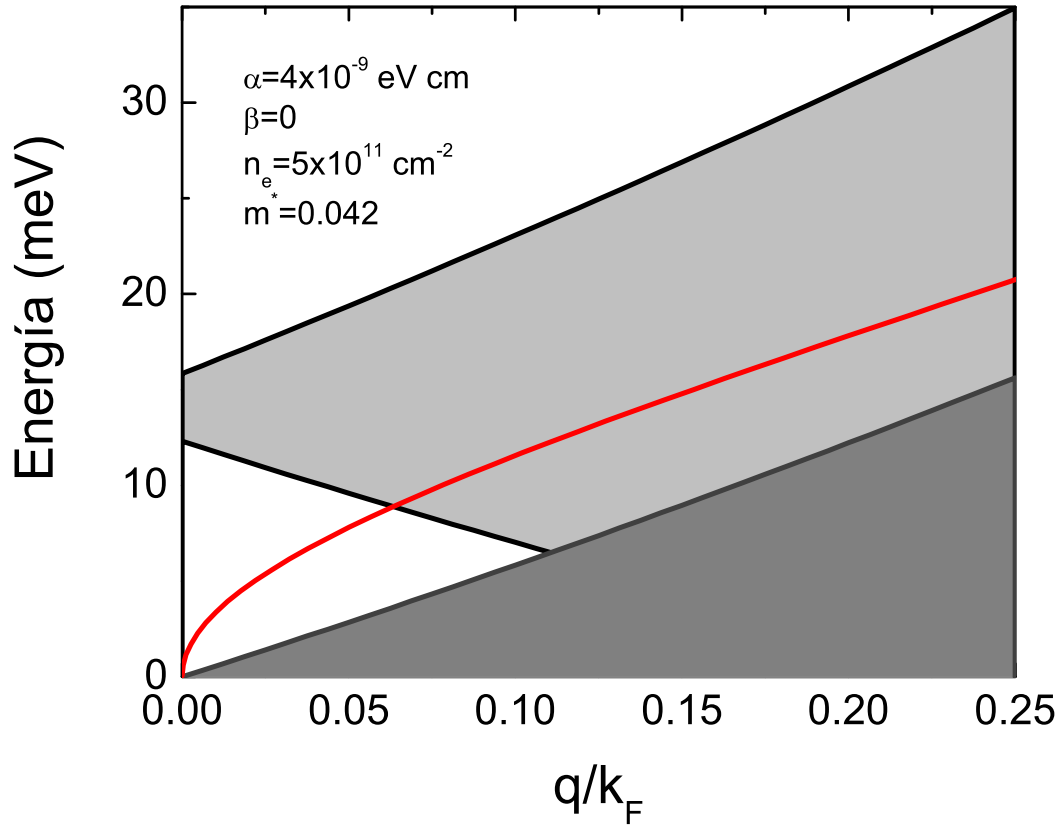


FIGURA 23.- Continuo de excitaciones incoherentes de pares electrón-hueco y la relación de dispersión del plasmón para el caso de IEO isotrópica

de partícula simple intrasubbanda, cuya frontera superior se encuentra determinada por la expresión (100) calculada en el capítulo IV. Dicha frontera, está caracterizada por su dependencia con respecto del vector k_F^\pm , donde, de acuerdo con el capítulo II, $k_F^\lambda = \sqrt{2m^* E_F / \hbar^2 + k_\alpha^2} - \lambda k_\alpha$, con $E_F = \hbar^2 (2\pi n_e - 2k_\alpha^2) / 2m^*$ y $\lambda = \pm 1$. La zona

en gris claro corresponde a las excitaciones intersubbanda. La frontera superior de las excitaciones intersubbanda se encuentran determinadas mediante la expresión (104) que corresponde a transiciones $E_- \rightarrow E_+$ para el caso $\mathbf{k} \parallel \mathbf{q}$, con $k = k_F^-$ (véase la figura 21). La frontera inferior se calcula a partir de la ecuación (102) que corresponde al caso en que \mathbf{q} es antiparalelo a \mathbf{k} , para $k = k_F^+$. La curva en rojo es la relación de dispersión del plasmón que se obtiene al exigir que la parte real del factor “intra” de la ecuación (174) sea cero y que su parte imaginaria sea infinitesimalmente pequeña. Este modo colectivo es conocido como *plasmón intrasubbanda* y en el límite de longitud de onda larga ($q/k_F \ll 1$) va como $\sim q^{1/2}$ (Ec. 195). De acuerdo con los trabajos de W. Xu (Xu, 2003) y M. Kushwaha y S. Ulloa (Kushwaha y Ulloa, 2006), además del plasmón intrasubbanda se reporta la existencia de otras dos ramas a las cuales se les denominan *plasmones intersubbanda*, y que se obtienen del término “inter” del determinante (174). Sin embargo, de acuerdo con nuestros cálculos numéricos, no ha sido posible encontrar la relación de dispersión para tales modos colectivos, ya que al parecer se encuentran contenidos en la región de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda. Por tanto dichos plasmones se amortiguarán a través de excitaciones de partícula simple. No obstante, al tener una expresión que indica su existencia, nos conduce a asumir que no se trata estrictamente de un plasmón, ya que al haber procesos de disipación no cumplirá con la condición $\text{Im}(\epsilon) \rightarrow 0$ vista en el capítulo III, Sec. III.3.

Las transiciones intersubbanda $E_+ \rightarrow E_-$ se presentan cuando $q/k_F > (k_F^- - k_F^+)/k_F = 2k_\alpha/k_F$ que para los valores aquí utilizados es del orden de ~ 0.45 . En el régimen $q/k_F < 1$ dichas excitaciones se encuentran inmersas en el continuo de transiciones intrasubbanda.

Cabe mencionar que las excitaciones electrónicas para $\beta = 0$, no dependen de la dirección del vector de onda \mathbf{q} (únicamente de su magnitud). Esto se deriva directamente del hecho de que el desdoblamiento Rashba de las subbandas, depende sólo de $|\mathbf{k}|$. De aquí que, para cualquier dirección del vector de onda transferido el resultado sea el mismo. Sin embargo, esto no se cumplirá cuando la IEO sea de carácter anisotrópica, ya que ahora el ángulo γ , que define la dirección de \mathbf{q} , jugará un papel importante en la estructura de las regiones de excitaciones elementales, tal como veremos en la siguiente sección.

VI.2 Efectos de la IEO anisotrópica

De acuerdo con el capítulo II, la coexistencia de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus introduce una anisotropía en el desdoblamiento de la energía como función de la dirección del momento de los electrones, tal como se ve en la figura 8. En con-

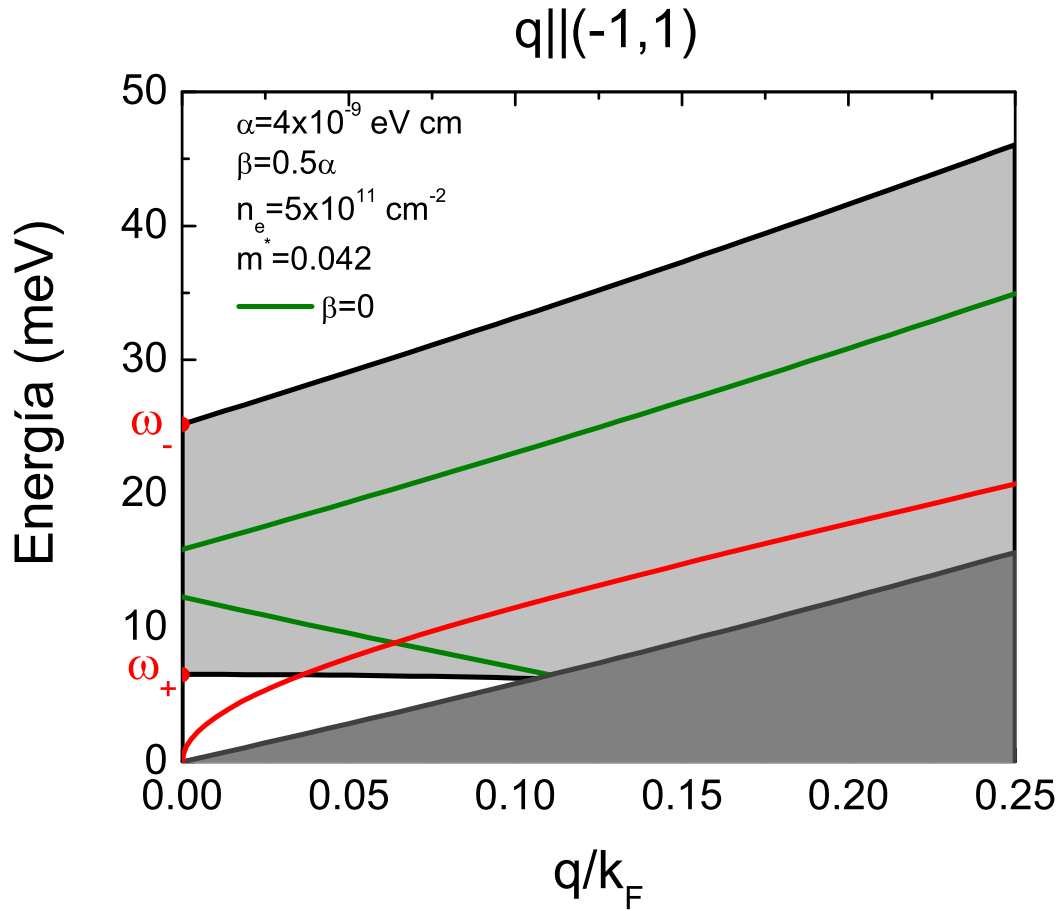


FIGURA 24.- Relación de dispersión para los plasmones (línea en rojo) y las zonas del continuo de transiciones de pares electrón-hueco intrasubbanda (zona en gris oscuro) e intersubbanda (zona en gris claro), para $\gamma = 3\pi/4$. Nótese que al comparar con el caso de $\beta = 0$ (zona en las líneas en verde), se observa que las zonas intersubbanda se ven afectadas por la presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus, exhibiendo un ensanchamiento como función de la energía.

secuencia el espectro de excitaciones electrónicas adquieren una dependencia no sólo de la magnitud sino también de la dirección del vector de onda $\mathbf{q} = q(\cos \gamma, \sin \gamma)$, tal como lo muestran las expresiones (92), (96) y (174). Lo anterior se debe a que en la energía para $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ aparece el término $q^2 \Delta^2(\gamma)$ que es precisamente quien introduce la dependencia de la dirección del vector de onda \mathbf{q} .

A continuación se considerará el sistema analizado en la sección VI.1, donde $n_e = 5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, $\alpha = 4 \times 10^{-9} \text{ eV cm}$ y $\beta = 0.5\alpha$. Se calculará numéricamente el espectro de excitaciones elementales para los vectores \mathbf{q} que apuntan en las direcciones (1, 1) y (-1, 1), que corresponden a dos de los ejes de alta simetría que caracterizan a las energías propias (ver figura 8).

La figura 24 muestra la relación de dispersión de los plasmones y el continuo de excitaciones de partícula simple para $\mathbf{q} \parallel (-1, 1)$, donde (-1, 1) es la dirección en donde se puede encontrar el mayor desdoblamiento de las subbandas de energía (ver figura 25). La zona en gris oscuro corresponde a las transiciones intrasubbanda, cuya frontera superior resulta de calcular numéricamente el máximo de la expresión (92), para $\lambda = \lambda' = -1$. Al igual que en el caso de puro Rashba, tal frontera se encuentra constituida por las excitaciones que van del nivel de Fermi en la subbanda E_- hasta estados desocupados por encima del nivel de Fermi en la misma subbanda. Recordemos que el nivel de Fermi en E_- se caracteriza por $k = k_F^-(\theta)$, donde $k_F^-(\theta)$ está definido por (33). La región en gris claro corresponde a las transiciones intersubbanda. Similarmente al caso $\beta = 0$, para valores de $q < k_F$, con $k_F = \sqrt{2\pi n_e - q_{so}^2}$ y $q_{so} = m^* \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} / \hbar^2$, las transiciones que participan son principalmente $E_- \rightarrow E_+$ (véase figura 21), ya que las de tipo $E_+ \rightarrow E_-$ requieren $q > [k_F^-(\theta) - k_F^+(\theta)]$. La frontera superior que delimita la región de transiciones intersubbanda, se obtiene al calcular numéricamente el máximo de la ecuación (92). Esta se encuentra constituida por excitaciones $E_-(\mathbf{k}) \rightarrow E_+(\mathbf{k} + \mathbf{q})$, con $k = k_F^-(\theta)$. Por otro lado, la frontera inferior se deriva al obtener el mínimo de (96) evaluada en $k = k_F^+(\theta)$, que corresponde a las transiciones que se originan de la subbanda E_- a energías apenas por encima del nivel del Fermi en la subbanda E_+ , tal como se muestra en la figura 21. La presencia conjunta de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus abre la posibilidad de acceder a excitaciones de partícula simple intersubbanda que no se presentan en el caso $\beta = 0$. Por dicho motivo el continuo de

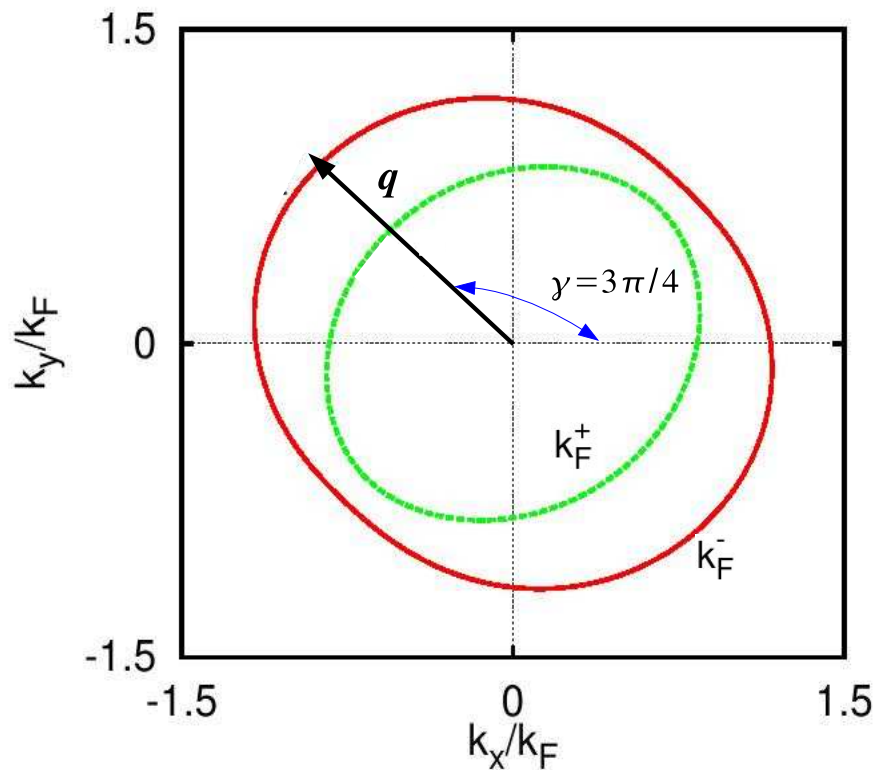


FIGURA 25.- Vector de onda \mathbf{q} en la dirección en que se encuentra el máximo desdoblamiento de las subbandas

transiciones sufre un ensanchamiento con relación al caso de puro Rashba (zona entre las líneas en verde), quedando estas últimas contenidas dentro de las primeras. En el régimen de $q = 0$, tales excitaciones se encuentran acotadas por las frecuencias ω_+ y ω_- definidas por (107) y (108), respectivamente. La expresión para ω_+ depende de la diferencia $(\alpha - \beta)$ con $\beta < \alpha$, de aquí que si β aumenta, la energía $\hbar\omega_+$ disminuye, de tal forma que en el caso $\beta = \alpha$, $\hbar\omega_+ = 0$. En contraste, $\hbar\omega_-$ depende de la suma $\alpha + \beta$, por lo que al aumentar β , $\hbar\omega_-$ también crece.

Por otra parte, la curva en rojo mostrada en la figura 24 es la relación de dispersión para el plasmón intrasubbanda calculada a partir del factor “intra” de la ecuación (174). En el régimen de longitud de onda larga ($q/k_F \ll 1$), este modo colectivo va como $q^{1/2}$, tal como se puede ver de la expresión (194). De dicha ecuación es posible

notar que en el caso $\alpha = \beta$ se pierde todo efecto debido a la IEO, recuperando el resultado para el gas degenerado en espín, es decir, $\omega = \omega_p^{2D}(q)$. Con relación a los plasmones intersubbanda reportados por W. Xu en 2003 y por M. Kushwaha y S. Ulloa en 2006, hasta el momento no han sido encontrados. Al igual que en el caso $\beta = 0$, parecen encontrarse amortiguados dentro de la región de transiciones intersubbanda. Por tanto, dicho modo colectivo se disipará en forma de excitaciones de pares electrón-hueco.

La dirección $(1, 1)$ corresponde al eje de simetría en el que se puede encontrar el mínimo desdoblamiento de las subbandas (Ver figura 8). El espectro de excitaciones para cuando \mathbf{q} se encuentra a lo largo de esta dirección (Fig. 26) es el mostrado en la figura 27. La descripción de las zonas de transición de partícula simple intrasubbanda

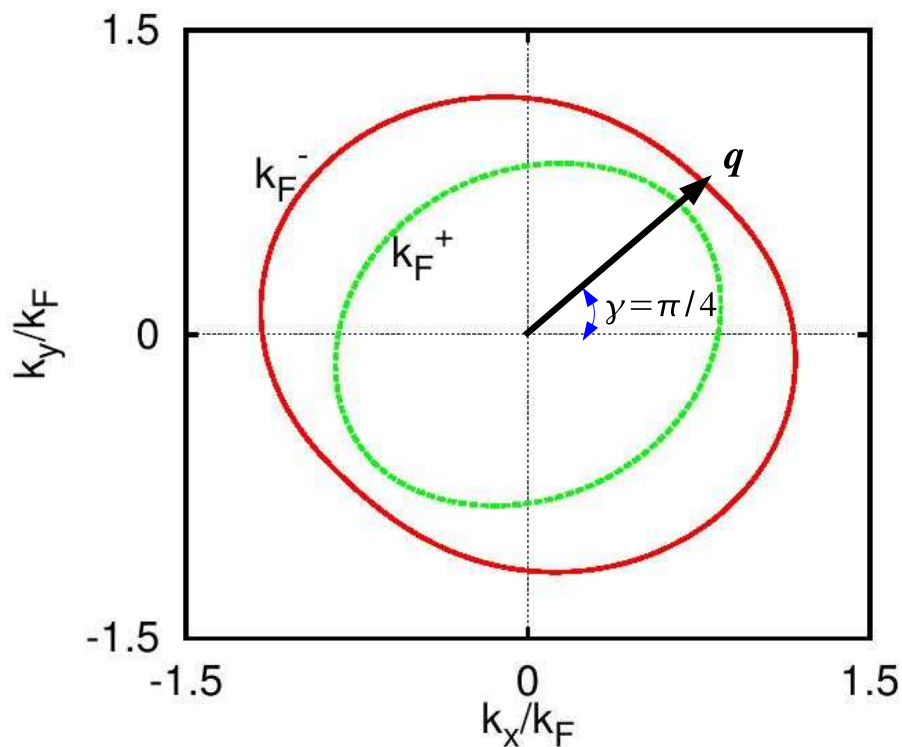


FIGURA 26.- Vector de onda \mathbf{q} en la dirección en que se encuentra el mínimo desdoblamiento de las subbandas.

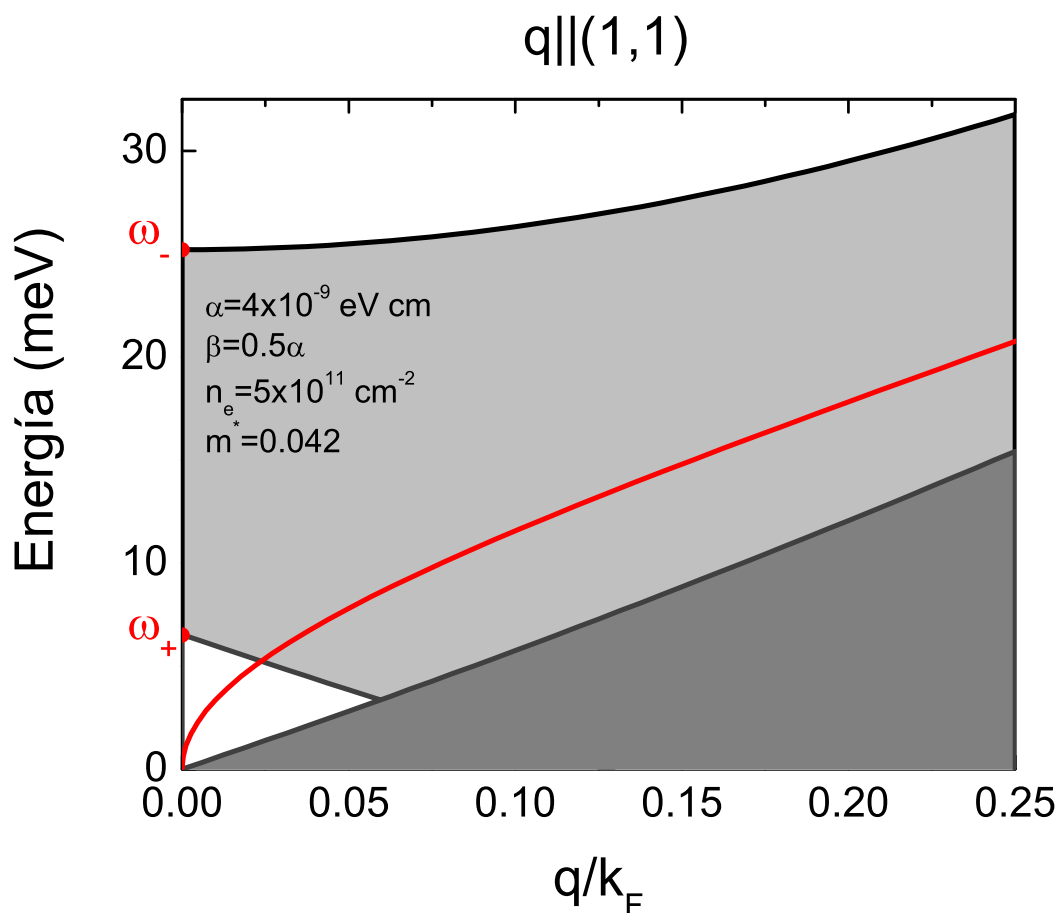


FIGURA 27.- Espectro de excitaciones electrónicas para $\mathbf{q} \parallel (1,1)$. Se muestra el continuo de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda (zona en gris claro) e intrasubbanda (región en gris oscuro). Así mismo, se presenta la relación de dispersión del plasmón intrasubbanda (curva en rojo).

(región gris oscuro) e intersubbanda (zona en gris claro), cualitativamente es la misma que se presentó para el caso de $\mathbf{q} \parallel (-1,1)$. Así mismo, las características del plasmón intrasubbanda no cambian con respecto al mostrado en la figura 24. Sin embargo, cuantitativamente hablando, existirán diferencias entre los resultados obtenidos para $\mathbf{q} \parallel (-1,1)$ con los calculados para $\mathbf{q} \parallel (1,1)$.

Al comparar entre sí los resultados obtenidos para las dos orientaciones del vector

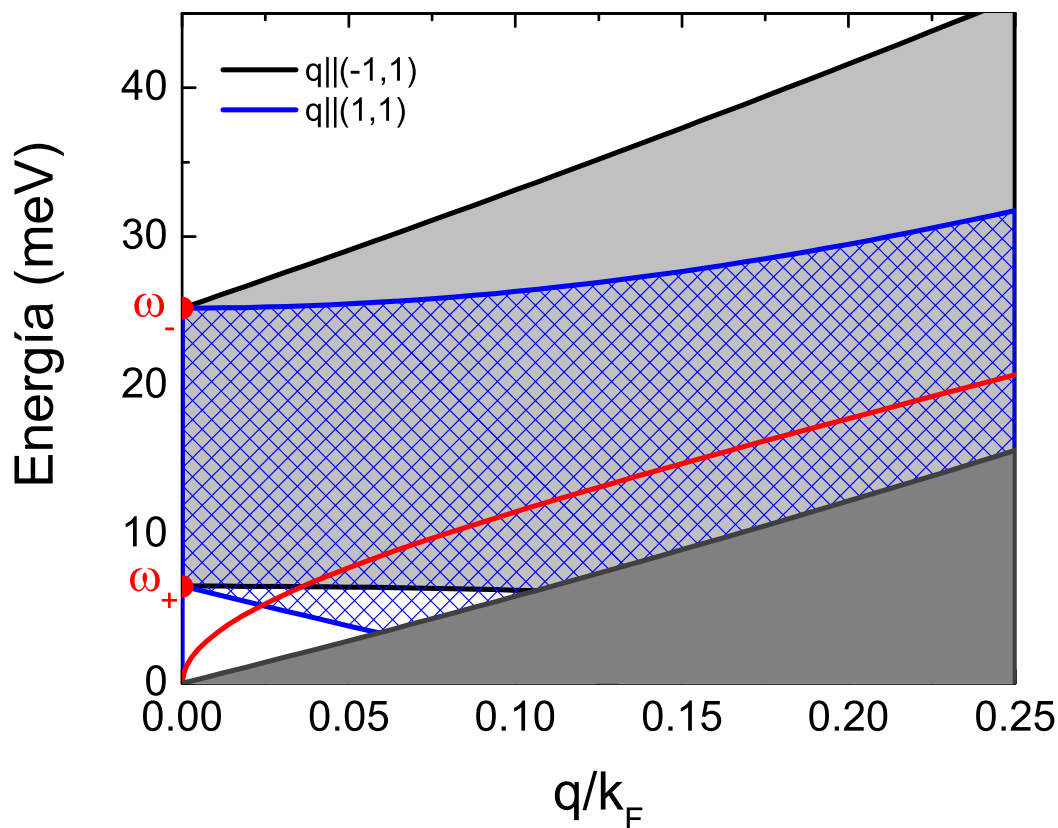


FIGURA 28.- Continuo de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda (zona en gris claro) e intra subbanda (zona en gris oscuro), así como la relación de dispersión para el plasmón intrasubbanda en función de la magnitud del vector de onda transferido. Parámetros como en la figura anterior.

de onda \mathbf{q} , se observa que las regiones de transiciones de partícula simple intersubbanda se modifican como función de la dirección de dicho vector, tal como lo muestra la figura 28. Esta variación se genera debido a la presencia de IEO anisotrópica, que introduce el término $q^2 \Delta^2(\gamma)$ en las expresiones para la energía (Ec. (94)), donde γ es el ángulo que caracteriza la dirección de \mathbf{q} . A $q = 0$, dicho término desaparece y las fronteras máxima y mínima corresponden a $\hbar\omega_-$ y $\hbar\omega_+$ respectivamente. En el caso de las regiones de transiciones de partícula simple intrasubbanda, el efecto que se introduce debido a la orientación del vector de onda transferido \mathbf{q} es imperceptible.

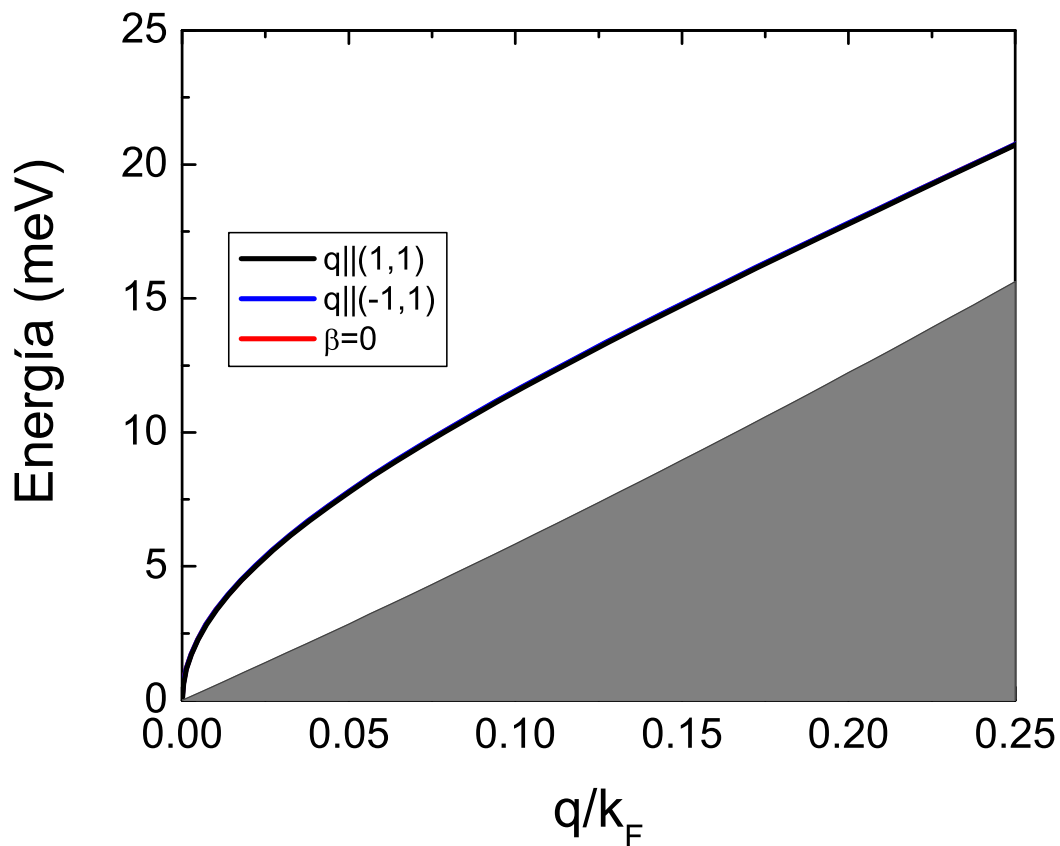


FIGURA 29.- Relación de dispersión para el plasmón intrasubbanda para diferentes orientaciones del vector de onda \mathbf{q} comparado con el caso $\beta = 0$.

La figura 29 muestra la relación de dispersión del plasmón intrasubbanda para $\mathbf{q} \parallel (-1, 1)$ (curva en azul) y $\mathbf{q} \parallel (1, 1)$ (curva en negro), ambos comparados con el caso $\beta = 0$ (curva en rojo). Las curvas son prácticamente iguales pues el efecto de la IEO anisotrópica es muy pequeño. Por ejemplo, en el límite $q \rightarrow 0$, (194) muestra que la corrección introducida por la IEO es del orden $\frac{m^{*2}}{\hbar^4} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\pi n_e} \right) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \sin 2\gamma \right) \sim 10^{-3}$.

VI.2.1 Modificación de las excitaciones a través de los parámetros de IEO

Aunque el plasmón así como el continuo de transiciones de pares electrón-hueco intrasubbanda no se ven afectados significativamente por la presencia simultánea de los acoplamientos de Rashba y de Dresselhaus, es posible modificarlos a través de la variación de la densidad de electrones n_e y de la intensidad del acoplamiento espín-órbita. Por ejemplo, en la figura 30 se muestra el espectro de excitaciones intrasubbanda para dos sistemas caracterizados por diferentes parámetros. La curva en rojo y la línea negra continua, respectivamente, son el plasmón y la frontera de transiciones de partícula simple para valores de α , β y n_e iguales a los utilizados en la figura 27. Por otra parte, la curva en azul y la línea negra a trozos, en este orden, corresponden al plasmón y la frontera de transiciones de partícula simple para $\alpha = 1.6 \times 10^{-9} \text{eVcm}$, $\beta = 0.5\alpha$ y $n_e = 1 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$. Se observa claramente que si se varía la densidad total de electrones así como la intensidad de la IEO, la energía de excitación cambia como función de q . Esto se debe principalmente a que el plasmón intrasubbanda es proporcional a la densidad total de electrones n_e , por tanto, al modificar este parámetro, cambia la energía para una q dada. Note que dicha variación también afecta a las regiones de transiciones de partícula simple intrasubbanda.

Por otro lado, para los sistemas analizados, la figura 31 muestra el espectro de excitaciones intersubbanda correspondiente. Note que al igual que el caso intrasubbanda, la variación de n_e , α y β permite modificar la energía para estas transiciones.

VI.3 Excitaciones para diferentes direcciones cristalográficas

De la misma forma en que se obtuvieron relaciones matemáticas para los modos colectivos así como para el continuo de transiciones de pares electrón-hueco intra e intersubbanda para la cara [001], es posible obtener expresiones para el caso en que la heteroestructura semiconductora es crecida a lo largo de otras direcciones cristalográficas, tales como la [111] y la [110]. Dado que para cada una de estas caras el hamiltoniano que describe la energía de un electrón en el sistema es muy particular, en consecuencia, la respuesta dieléctrica será diferente cuantitativamente.

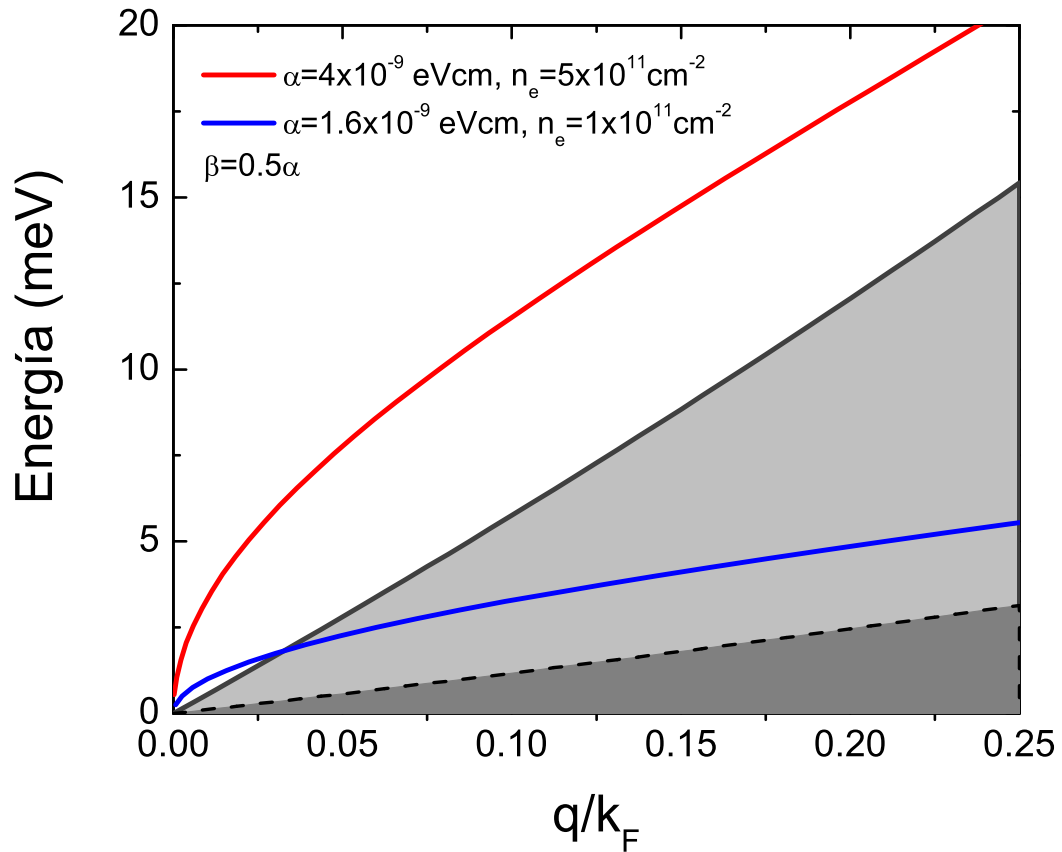


FIGURA 30.- El continuo de transiciones de pares electrón-hueco , así como la relación de dispersión del plasmón pueden ser modificadas a través de la variación de la densidad total de electrones y de la intensidad del acoplamiento espín-órbita.

VI.3.1 Excitaciones electrónicas para la cara [111]

Cuando la heteroestructura que confina al GE2D es crecida a lo largo de esta dirección, el hamiltoniano que describe el movimiento de una partícula es el mismo que caracteriza la IEO de Rashba si se hace el cambio $\alpha \rightarrow \alpha_{[111]}$, con $\alpha_{[111]}=\alpha+\beta_{[111]}$, donde α es la intensidad de la IEO de Rashba y $\beta_{[111]}$ es la intensidad de la IEO de Dresselhaus por la cara [111]. Por lo anterior, las expresiones para los eigenestados, energías propias, densidades electrónicas así como para la función dieléctrica serán las mismas que para

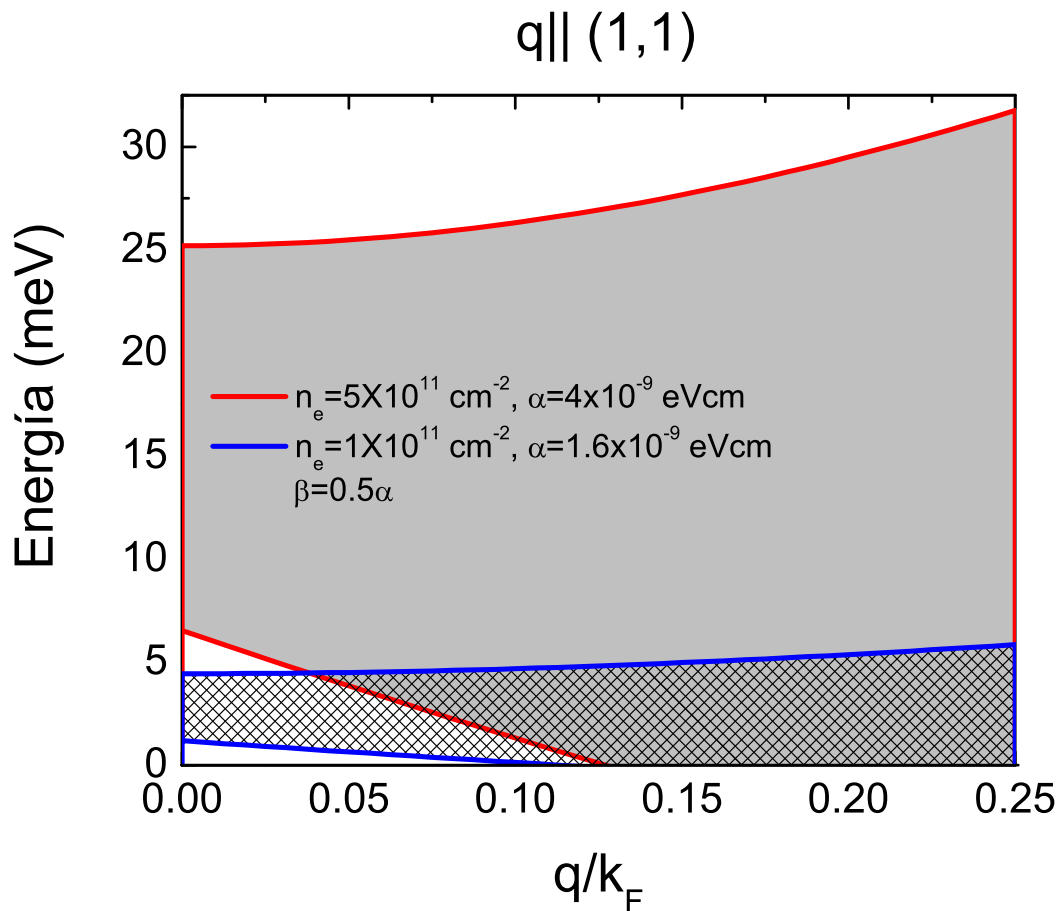


FIGURA 31.- Continuo de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda para dos sistemas con n_e e intensidad de IEO distintas.

el caso de puro Rashba.

En la figura 32 se muestra el espectro de excitaciones electrónicas para los parámetros $\alpha = 4 \times 10^{-9} \text{ eVcm}$, $\beta_{[111]} = 0.5\alpha$ y $n_e = 5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. En dicha gráfica, el continuo de transiciones intersubbanda corresponde a la zona en gris claro, mientras que el continuo de transiciones intrasubbanda se encuentran dentro de la región en gris oscuro. Además, la relación de dispersión del plasmón es la línea en azul. Aunado a lo anterior, en la figura 32 se han incluido los resultados para el caso $\beta_{[111]} = 0$; la zona cuadriculada corresponde a las transiciones intersubbanda, la región por de-

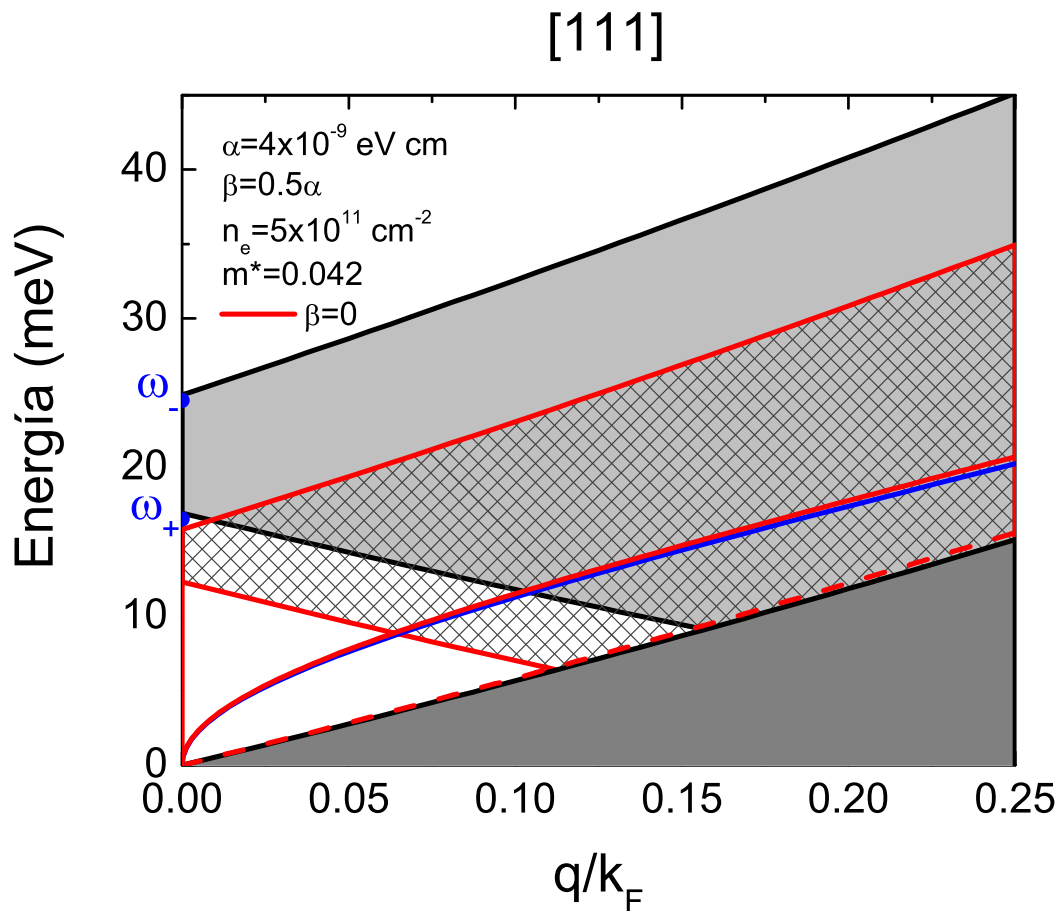


FIGURA 32.- Excitaciones electrónicas para un gas bidimensional formado en una heteroestructura semiconductor crecida a lo largo de la dirección [111]. Con líneas negras se representan las relaciones de dispersión para el caso $\alpha, \beta \neq 0$. Por otro lado, con líneas en rojo se representan las excitaciones electrónicas para $\beta = 0$.

bajo de la línea roja a trozos es el continuo de excitaciones intrasubbanda y la línea roja continua es la relación de dispersión del plasmón. De la figura se puede ver que la presencia conjunta de Rashba y Dresselhaus permite el ensanchamiento de las regiones de transiciones intersubbanda, con respecto al caso $\beta_{[111]} = 0$. Sin embargo, las zonas de excitaciones de partícula simple intrasubbanda decrecen ligeramente con respecto al caso de sólo Rashba. Nótese también que la dispersión para el caso de

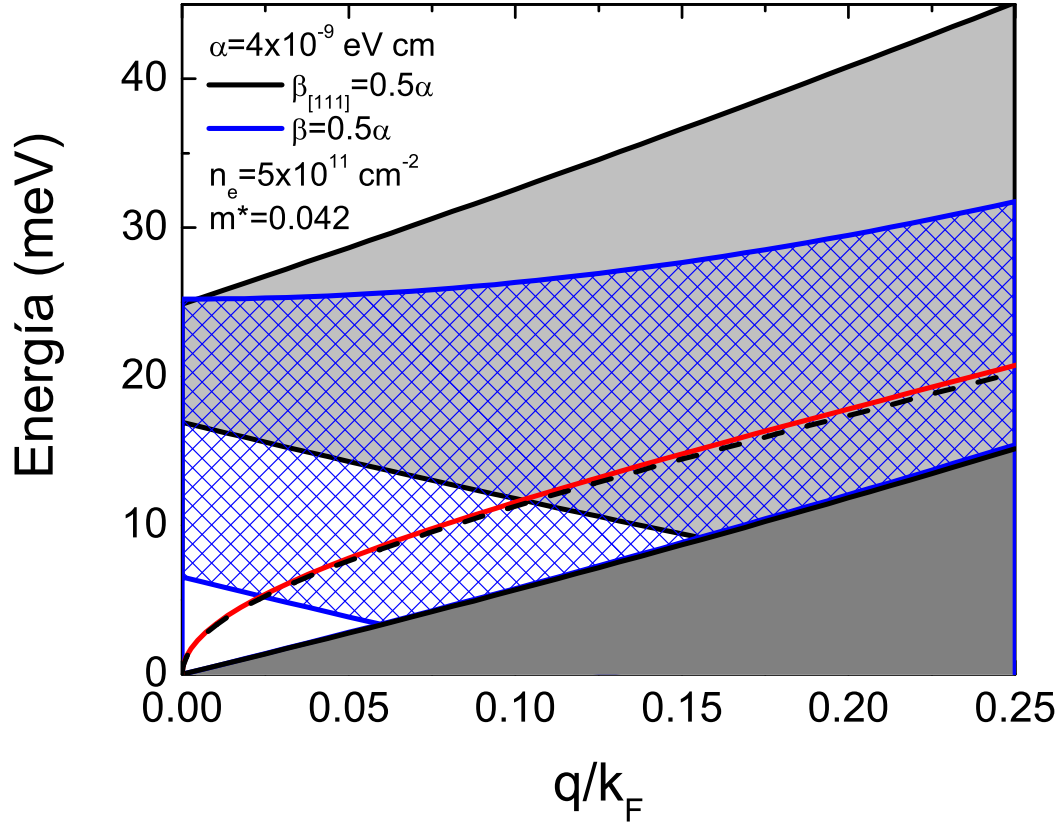


FIGURA 33.- Excitaciones elementales para dos orientaciones cristalográficas. Las líneas en azul delimitan las regiones de transiciones de pares electrón-hueco para la cara [001] para $\mathbf{q} \parallel (1,1)$, mientras que las líneas en negro son fronteras de las zonas de transiciones de partícula simple para la dirección [111]. Así mismo se presenta el plasmón [001] (curva en rojo) cuya energía es ligeramente mayor que el plasmón [111] (curva negra a trozos).

Rashba+Dresselhaus ($R+D_{[111]}$) se ve disminuida en energía comparada con el caso $\beta_{[111]} = 0$. En el régimen de longitud de onda larga, dicho efecto puede ser entendido a través de la Ec. (195). En el caso de Rashba la corrección al plasmón intrasubbanda está dada por $\left(1 - \frac{m^* \alpha^2 / \hbar^4}{2\pi n_e}\right)^{1/2}$, mientras que en el caso $R+D_{[111]}$ será $\left(1 - \frac{m^* (\alpha + \beta_{[111]})^2 / \hbar^4}{2\pi n_e}\right)^{1/2}$, donde se realizó el cambio $\alpha \rightarrow \alpha_{[111]}$. Como $\alpha_{[111]} > \alpha$, entonces $\left(1 - \frac{m^* \alpha^2 / \hbar^4}{2\pi n_e}\right)^{1/2} < \left(1 - \frac{m^* (\alpha + \beta_{[111]})^2 / \hbar^4}{2\pi n_e}\right)^{1/2}$. En consecuencia el plasmón para $\beta_{[111]} \neq 0$ poseerá menor energía que el plasmón para puro Rashba.

Al igual que el caso de Rashba analizado con anterioridad en la sección VI.1, para la cara [111], no se encontró la relación de dispersión de los plasmones intersubbanda. Esto hace pensar, que al igual que lo casos ya discutidos, se encuentran amortiguados por el continuo de transiciones intersubbanda.

Se compararán los resultados aquí obtenidos con los calculados para la cara [001]. En la figura 33 se muestra el espectro de excitaciones elementales, donde se puede observar que el continuo de transiciones intersubbanda así como el intrasubbanda difieren notablemente. Cabe señalar, que mientras el plasmón para la cara [111] no depende de la dirección de \mathbf{q} , para el caso [001] el resultado dependerá de la orientación de \mathbf{q} que se tome, tal como se vió en la Sec. VI.2.

VI.3.2 Excitaciones electrónicas para la cara [110]

Para este caso se calcularon las zonas de transiciones de partícula simple, que al igual que cuando el GE2D es formado en la dirección [001] presentan una dependencia de la dirección del vector de onda \mathbf{q} (véase el apéndice A). Esto puede verse de manera clara de la figuras 34 y 35, que corresponden a las orientaciones $\mathbf{q} \parallel (1, 0)$ y $\mathbf{q} \parallel (0, 1)$, respectivamente. Aquí, $(0, 1)$ es la dirección en la que se produce el mínimo desdoblamiento en las subbandas de energía (véase la figura 38), mientras que en $(1, 0)$ está el máximo desdoblamiento.

A $q = 0$, se tiene que las fronteras de transiciones intrasubbanda se encuentran determinadas por las energías $\hbar\omega_+$ (mínima) y $\hbar\omega_-$ (máxima), la cuales están definidas como

$$\hbar\omega_- = 2k_F^-(\pi/2)\delta(\pi/2) = 2\alpha k_F - 2\frac{m^*\alpha^2}{\hbar^2} \quad (217)$$

y

$$\hbar\omega_+ = 2k_F^+(0)\delta(0) = 2k_F (\alpha^2 + \beta_{[110]}^2)^{1/2} + 2\frac{m^* (\alpha^2 + \beta_{[110]}^2)}{\hbar^2}, \quad (218)$$

donde $k_F^2 = 2\pi n_e - q_{so}^2$. De aquí que la diferencia de energía entre ambas fronteras en el régimen de transiciones verticales sea

$$\Delta E = \hbar\omega_- - \hbar\omega_+ = 2k_F \left[(\alpha^2 + \beta_{[110]}^2)^{1/2} - \alpha \right] + \frac{4m^*}{\hbar^2} \left(\alpha^2 + \frac{\beta_{[110]}^2}{2} \right). \quad (219)$$

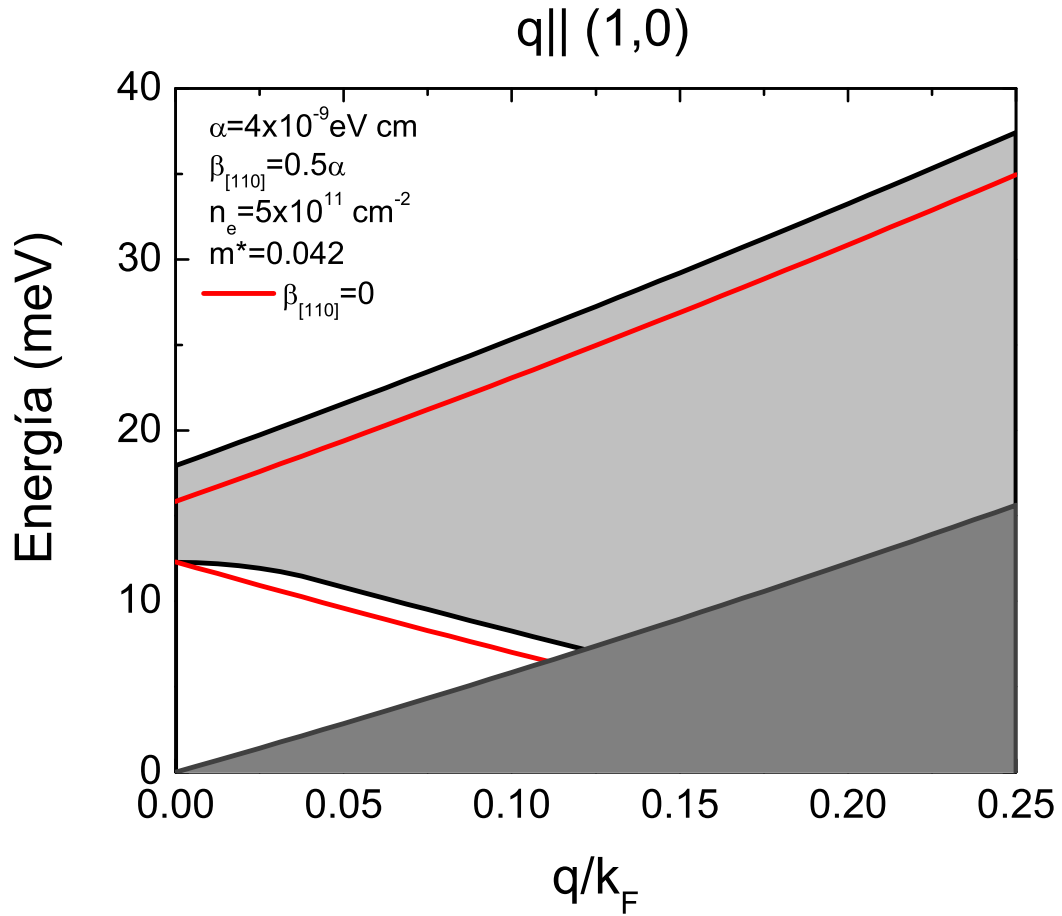


FIGURA 34.- Zonas de excitaciones de pares electrón-hueco inter e intrasubbanda para la cara [110]. La presencia de la anisotropía en el espectro de energía introduce una variación en las transiciones intersubbanda con respecto al caso $\beta = 0$.

Si comparamos los resultados para este caso con los de la cara [001] para un mismo vector de onda \mathbf{q} (ver figura 36) se puede observar que tales excitaciones no serán iguales. Lo anterior se deriva de la diferencia que existe entre las dos anisotropías.

La relación de dispersión de los plamones puede obtenerse de la misma manera en que se realizó en el capítulo IV. Hasta el momento contamos con expresiones para el factor $M_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''}$, las cuales son ecuaciones muy grandes y requieren ser analizadas. Por tal motivo no son incluidas quedando como trabajo a futuro.

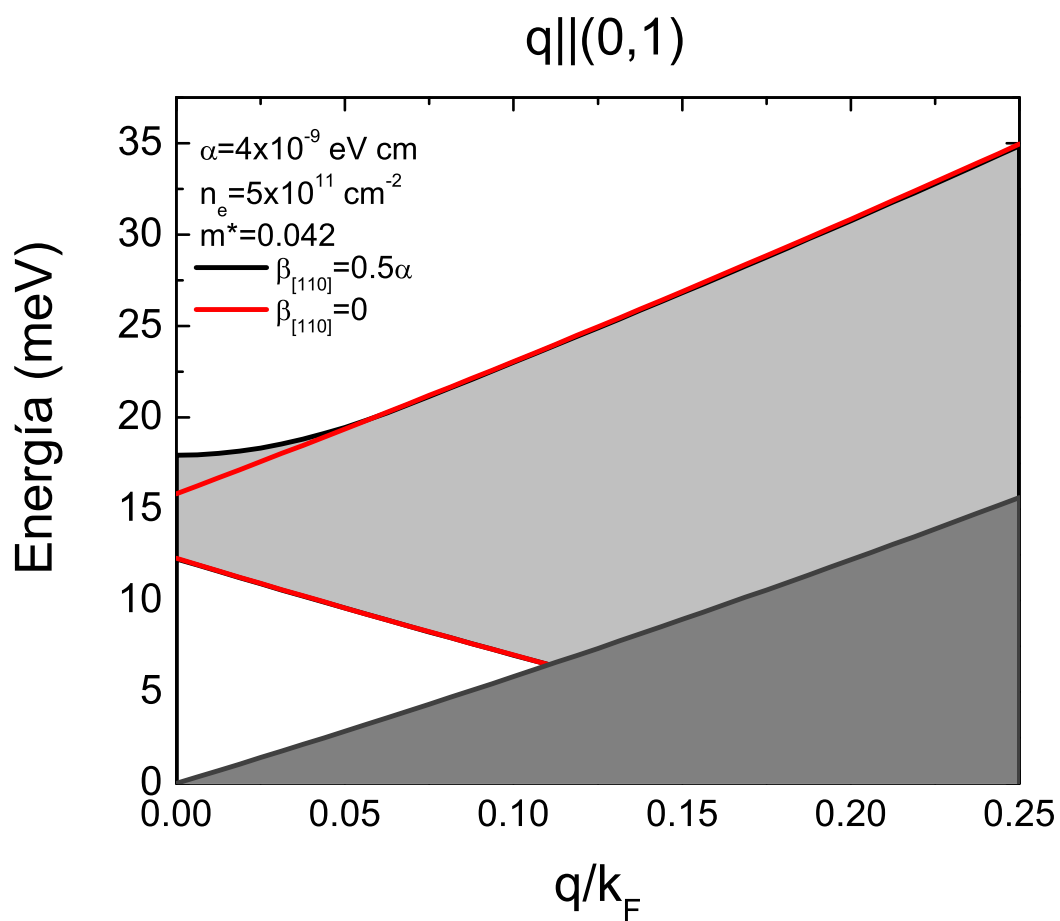


FIGURA 35.- Regiones de transiciones de pares electrón-hueco para la cara [110]. En esta figura se considera $\gamma = \pi/2$, y se ve que difiere del caso $\gamma = 0$ mostrado en la gráfica 34. Este hecho indica que dichas regiones dependen de la orientación del vector de onda \mathbf{q} .

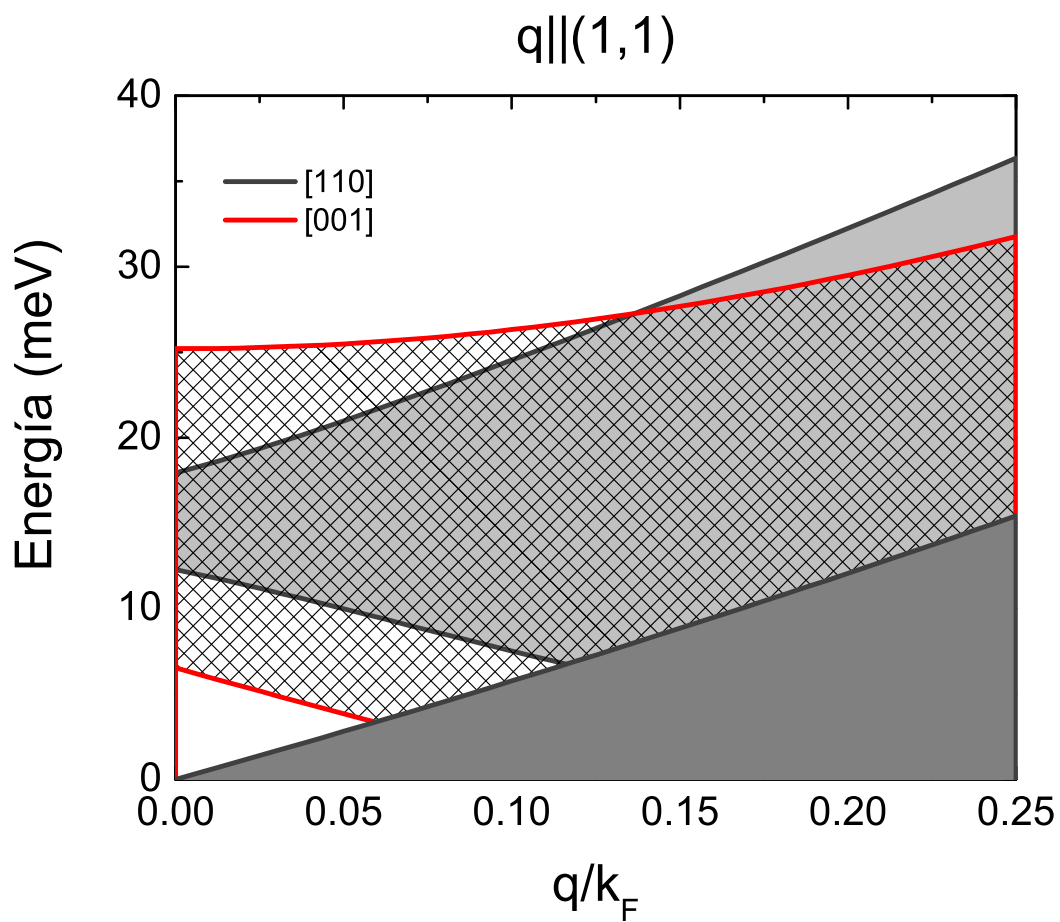


FIGURA 36.- Regiones de transiciones de partícula simple. Se comparan los resultado calculados para la dirección [110] con los de la dirección [001]

Capítulo VII

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se obtuvo el espectro de excitaciones electrónicas compuesto por el continuo de transiciones de partícula simple y modos colectivos de la densidad de carga para un gas cuasibidimensional con acoplamiento espín-órbita de Rashba y Dresselhaus. El cálculo de la relación de dispersión de los plasmones se realizó a través del Método de Campo Autoconsistente.

Se observó que la presencia de IEO permite la aparición de más de una “rama” para los plasmones a los que se les llamó plasmones intrasubbanda e intersubbanda. Los intrasubbanda se caracterizan por estar constituidos por procesos que implican transiciones intrasubbanda mientras que los modos intersubbanda lo conforman procesos compuestos por excitaciones intersubbanda. Esto difiere de lo reportado por otros autores (Wang, 2005; Pletyukhov y Gritsev, 2006; Badalyan et al., 2009; Li y Xu, 2008), quienes reportan únicamente una rama de plasmones.

En desacuerdo con lo reportado por autores como X. F Wang en 2005 (Wang, 2005), S. M. Badalyan (Badalyan et al., 2009) entre otros, el plasmón intrasubbanda no se verá amortiguado por el continuo de transiciones intersubbanda, ya que como hemos comentado, dicho modo colectivo estará constituido únicamente por procesos que implican transiciones intrasubbanda. En consecuencia sólo se amortiguaría al entrar en la región del continuo de excitaciones de pares electrón-hueco intrasubbanda.

La coexistencia de los acoplamientos de Rashba y Dresselhaus produce un desdoblamiento anisotrópico en las subbandas de energía. Esto introduce una dependencia de la dirección del vector de onda transferido \mathbf{q} en el espectro de excitaciones de pares electrón-hueco y en la relación de dispersión de los plasmones. Lo anterior es una notable diferencia con respecto al caso de la IEO de Rashba, en donde un desdoblamiento isotrópico de la subbanda vuelve irrelevante la dirección de \mathbf{q} .

El plasmón intrasubbanda se ve poco afectado por la presencia simultánea de los

acoplamiento de Rashba y Dresselhaus con relación al caso $\beta = 0$. En el régimen de longitud de onda larga ($q/k_F \ll 1$), cuando $\alpha = \beta$ se pierde el efecto debido a la IEO, quedando únicamente el plasmón correspondiente al gas 2D degenerado en espín. Esto podría tener la siguiente aplicación: imaginemos una fuente y un colector. Suponga que en la fuente se excita un plasmón con cierta frecuencia $\omega(q, \alpha, \beta)$ y es conducido hasta el colector a través de un canal constituido por un GE2D. Por tanto, en el canal es posible modular la IEO α dejando β fija, de tal manera que podemos hacer $\alpha = \beta$. Esto, permite tener dos estados caracterizados (1) por el plasmón para $\alpha \neq \beta \neq 0$ y (2) por el plasmón sin IEO que se recupera al tener $\alpha = \beta$. Lo anterior podría ser considerado para la construcción de un transistor de espín, donde el estado de ‘encendido’ estará dado por el plasmón (1) y el ‘apagado’ por el plasmón (2).

El continuo de excitaciones de pares electrón-hueco intersubbanda sufre un ensanchamiento por la presencia conjunta de los acoplamiento de Rashba y Dresselhaus, esto con respecto al caso $\beta = 0$. Dicha región puede modificarse no sólo modulando la intensidad del parámetro de Rashba, sino también variando la densidad total de electrones. Además, la presencia de una IEO anisotrópica que introduce una dependencia de la dirección de \mathbf{q} , permite cambiar la forma de las fronteras que delimitan el continuo de transiciones como función del ángulo γ que define la orientación de dicho vector.

En el límite de longitud de onda larga ($q \rightarrow 0$) los plasmones intersubbanda poseerán frecuencias de plasma ω_+ y ω_- mismas que definen la región de transiciones verticales de partícula simple. En el caso de q finita no se encontró su relación de dispersión, esto se debe probablemente a que se encuentran amortiguados por el continuo de transiciones de pares electrón-hueco intersubbanda.

El espectro de excitaciones electrónicas en presencia de IEO de Rashba + Dresselhaus, cambia para los gases 2D formados en heteroestructuras semiconductoras crecidas a la largo de las direcciones cristalográfica [111] y [110], comparado con el caso de la dirección [001]. En particular para la orientación [110] se muestra una anisotropía en el desdoblamiento de la subbandas de energía, diferente a la que se presenta en el caso [001]. Esto origina que el espectro de excitaciones para [001] y para [110] no sean iguales. Con relación a la dirección [111], se encontró que el espectro de excitaciones es cualitativamente idéntico al plasmón para puro Rashba.

La relación de dispersión para el plasmón con IEO constituye un problema abierto sobre el que se trabaja actualmente. En estudios realizados por lo general consideran únicamente acoplamiento espín-órbita isotrópico y sólo en algunos consideran la interacción de tipo anisotrópica. Sin embargo, es importante hacer notar que en la mayoría de estos trabajos, reportan una función dieléctrica escalar, mientras que unos cuantos son los que consideran que la función dieléctrica es una matriz (considerando sólo Rashba) cuyo determinante da lugar a plasmones con ramas intra e intersubbanda. Esto ha llevado a que en algunos trabajos se encuentre la existencia de un plasmón, y en otros se reporten más de un plasmon, lo que impide tener resultados concluyentes. Por tal motivo sería conveniente analizar cuál de los dos enfoques es el que efectivamente caracteriza el sistema. Además, un experimento sería de gran utilidad para el esclarecimiento del problema.

APÉNDICE A. INTERACCIÓN ESPÍN-ÓRBITA ANISOTRÓPICA PARA LA DIRECCIÓN [110]

Cuando la heteroestructura que define al gas 2D es crecida a lo largo de la dirección [111], los eigenestados, energías propias, densidad de estados, etc, poseen las mismas características que el caso de IEO de Rashba, únicamente con el cambio $\alpha \rightarrow \alpha_{[111]}$. Por tal motivo, aquí sólo presentaremos el caso de la dirección [110].

Por otro lado, cuando la heteroestructura es crecida a lo largo de la dirección [110], el Hamiltoniano que describe la energía de un electrón en el sistema está dado por

$$H_{[110]}^{R+D} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \alpha (k_y \sigma_x - k_x \sigma_y) + \beta_{[110]} k_x \sigma_z, \quad (220)$$

donde α es la intensidad del acoplamiento de Rashba y $\beta_{[110]}$ es la intensidad de la IEO de Dresselhaus para la cara [110]. Por otra parte, k_i son las componentes del vector de onda \mathbf{k} y σ_i son las matrices de Pauli. Los estados propios son

$$\Psi_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2\pi} \psi_0(z) \chi_\lambda(\mathbf{k}). \quad (221)$$

en donde $(1/2\pi)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ corresponde a la solución en ondas planas que describe el movimiento de los electrones a lo largo del plano que define al gas. $\psi_0(z)$ es la función envolvente en la dirección perpendicular al plano del GE2D. Por último $\chi_\lambda(\mathbf{k})$ contiene la información acerca del espín de la partícula y está dado por

$$\chi_\lambda(\mathbf{k}) = \lambda \frac{\sqrt{\delta(\theta) + \lambda\beta_{[110]} \cos(\theta)}}{\sqrt{2\delta(\theta)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha e^{i\phi(\mathbf{k})}}{\delta(\theta) + \beta_{[110]} \cos(\theta)} \end{pmatrix}, \quad (222)$$

donde

$$\delta(\theta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta_{[110]}^2 \cos^2(\theta)}. \quad (223)$$

Por otra parte, las energías propias para un electrón en el GE2D, serán

$$E_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \lambda k \delta(\theta). \quad (224)$$

La figura 37 muestra las superficies de energía como función del vector de onda de los

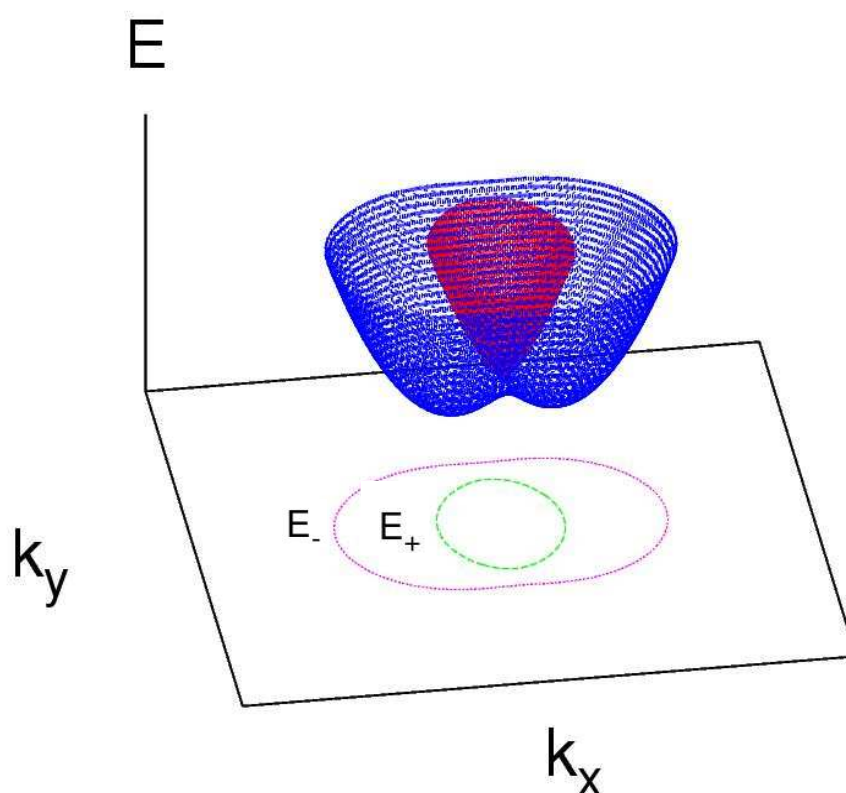


FIGURA 37.- Superficies de energía como función del vector de onda \mathbf{k} para la dirección cristalográfica $[110]$.

electrones. En ella, es posible observar desdoblamiento anisotrópico por la presencia de los acoplamiento de Rashba y de Dresselhaus.

Si realizamos un corte sobre estas superficies a una energía constante, es posible observar que existirán dos ejes de alta simetría que caracterizan el desdoblamiento de las subbandas. El primero de ellos puede localizarse a un ángulo $\theta = 0$ mientras que el otro a $\theta = \pi/2$, estos medidos con respecto al eje k_x tal como se muestra en la figura 38.

Por otra parte, el rompimiento en la degeneración de espín da como resultado que a la energía de Fermi exista un vector de Fermi por cada subbanda λ , cuya magnitud

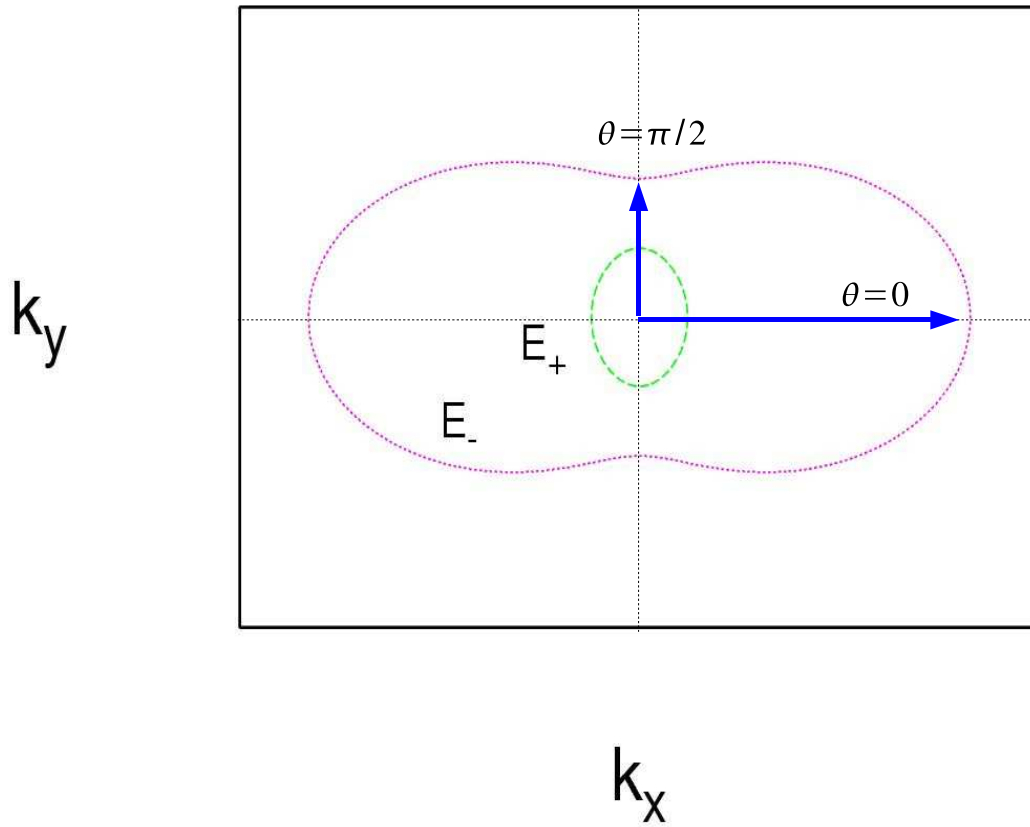


FIGURA 38.- Ejes de alta simetría que presentan las superficies de energía correspondientes a la cara [110].

esta dada por

$$k_F^\lambda(\theta) = \sqrt{2\pi n_e - 2q_{so}^2 + k_{so}^2(\theta)} - \lambda k_{so}(\theta), \quad (225)$$

donde

$$k_{so}(\theta) = m^* \delta(\theta) / \hbar^2, \quad (226)$$

y

$$q_{so} = m^* (\alpha^2 + \beta_{[110]}/2)^{1/2} / \hbar^2. \quad (227)$$

La densidad de electrones en cada una de las subbandas, calculada a partir de la

expresión (13), es

$$n_\lambda = \frac{n_e}{2} - \lambda \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} k_{so} \sqrt{2\pi n_e - 2q_{so}^2 + k_{so}^2} d\theta. \quad (228)$$

Al igual que en el caso de la cara [001], esta cantidad puede modularse a través de

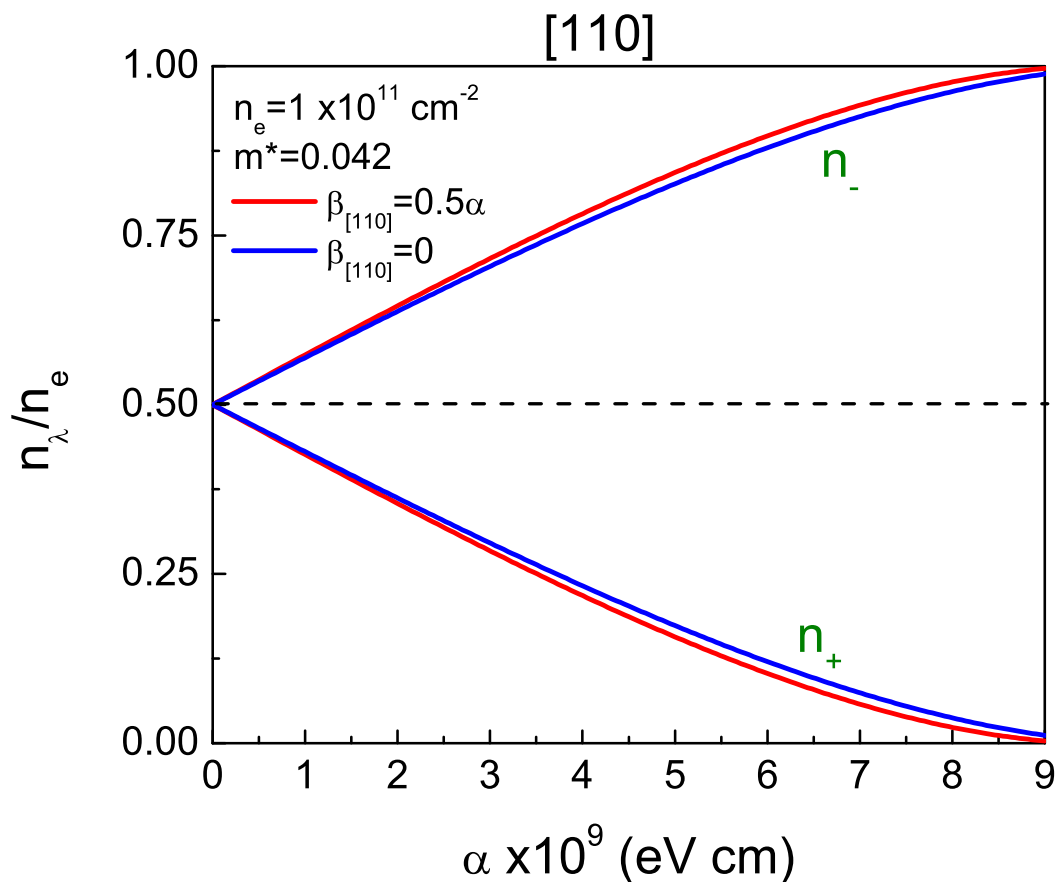


FIGURA 39.- Densidad electrónica para la subbanda λ como función de la intensidad del acoplamiento espín-órbita.

la variación de la intensidad de la IEO y la densidad total de electrones, tal como lo muestran las figuras 39 y 40. Nótese que al aumentar la IEO o disminuir la densidad total de electrones, la densidad en la subbanda “más” decrece. Esto, se debe a que con

dichos procesos disminuimos el nivel de Fermi de tal manera que la densidad en dicha subbanda, para ciertos parámetros, puede llegar a ser cero.

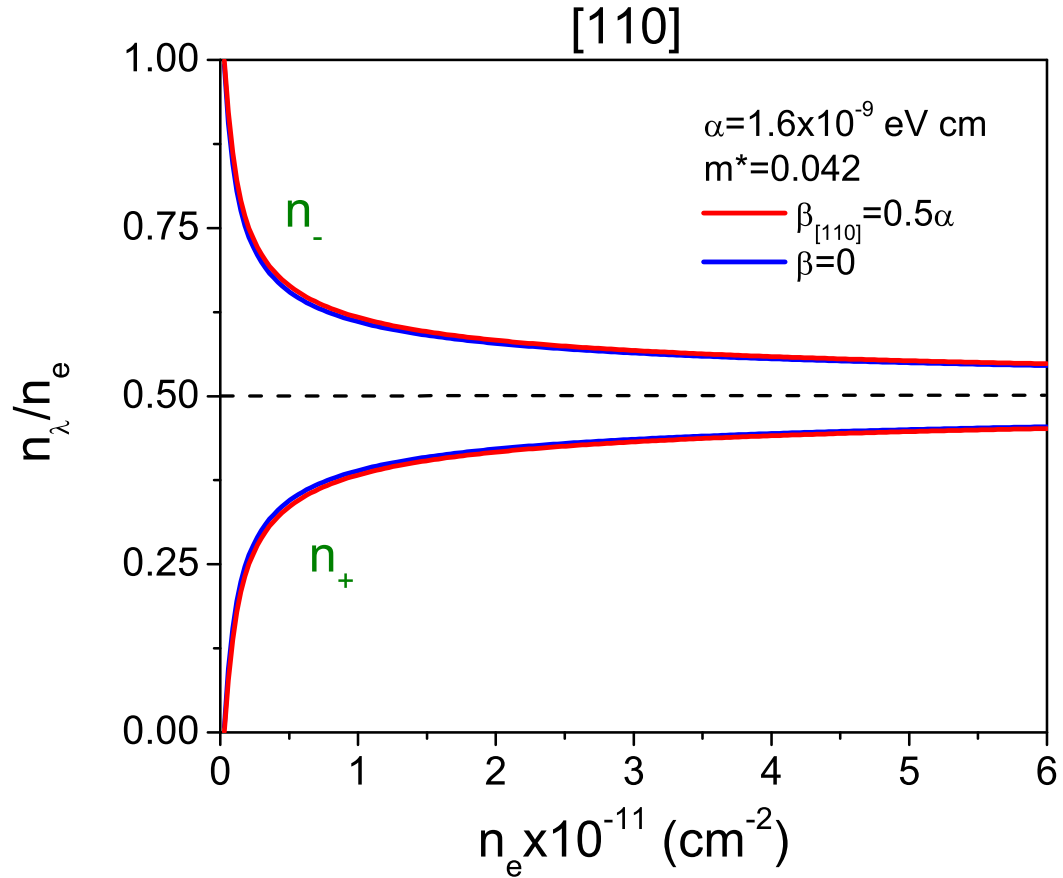


FIGURA 40.- Densidad electrónica para la subbanda λ como función de la densidad total de electrones.

El continuo de excitaciones de pares electrón-hueco para este GE2D se obtiene cuando la diferencia de energías entre dos estados de partícula simple ($E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - E_{\lambda}(\mathbf{k})$) sea igual a la energía suministrada $\hbar\omega$. Aquí $E_{\lambda}(\mathbf{k})$ está dada por la ecuación (224) y $E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ será

$$E_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) = \frac{\hbar}{2m^*} Q^2 + \lambda' \sqrt{\alpha^2 Q^2 + \beta_{[110]}^2 (k \cos(\theta) + q \cos(\gamma))^2}, \quad (229)$$

donde θ y γ son los ángulos que definen la dirección de los vectores \mathbf{k} y \mathbf{q} respectivamente y $Q^2 = k^2 + q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)$. Así la energía $\hbar\omega$ puede expresarse de la siguiente manera

$$\hbar\omega = \frac{\hbar}{2m^*}(q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)) + \lambda' \sqrt{\alpha^2 Q^2 + \beta_{[110]}^2 (k \cos(\theta) + q \cos(\gamma))^2} - \lambda k \delta(\theta). \quad (230)$$

Esta expresión, caracteriza el proceso de absorción a través de transiciones de pares electrón-hueco y se divide en dos casos: (i) cuando $\lambda = \lambda'$ que corresponde a transiciones intrasubbanda y (ii) cuando $\lambda \neq \lambda'$ (transiciones intersubbanda). Para las transiciones de tipo (i), la expresión (230) se reescribe como

$$\hbar\omega = \frac{\hbar}{2m^*}(q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)) + \lambda \left(\sqrt{\alpha^2 Q^2 + \beta_{[110]}^2 (k \cos(\theta) + q \cos(\gamma))^2} - k \delta(\theta) \right), \quad (231)$$

con $\lambda = \pm 1$. Por otra parte, las excitaciones de tipo (ii) estarán representadas a través de la expresión

$$\hbar\omega = \frac{\hbar}{2m^*}(q^2 + 2qk \cos(\theta - \gamma)) - \lambda \left(\sqrt{\alpha^2 Q^2 + \beta_{[110]}^2 (k \cos(\theta) + q \cos(\gamma))^2} + k \delta(\theta) \right). \quad (232)$$

BIBLIOGRAFÍA

- Ando, T., Fowler, A. B., y Stern, F. (2006). Electronic properties of two-dimensional systems. *Rev. Mod. Phys.*, 54(2):437–672.
- Awschalom, D. D. y Flatté, M. E. (2007). Challenges for semiconductor spintronics. *Nature physics*, 3:153–159.
- Badalyan, S. M., Matos-Abinague, A., Vignall, G., y Fabian, J. (2009). Anisotropic plasmon in a two-dimensional electron gas with spin orbit interaction. *Phys. Rev. B*, 79:205305(1)–205305(5).
- Berneving, B. A., Orenstein, J., y Zhang, S.-C. (2006). Exact $su(2)$ symmetry and persistent spin helix in a spin-orbit coupled system. *Phys. Rev. Lett.*, 97:236601(1)–236601(4).
- Bruus, H. y Flensberg, K. (2005). *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics, an introduction*. Oxford University Press. pp. 435.
- Cui, L. J., Zeng, Y. P., Wang, B. Q., Zhu, Z. P., Lin, L. Y., Jiang, C. P., Guo, S. L., y Chu, J. H. (2002). Zero -field spin splitting in $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}/\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ metamorphic high-electron-mobility-transistor structures on GaAs substrates using Shubnikov-de Haas measurements. *Appl. Phys. Lett*, 80(17):3132–3134.
- Datta, S. y Das, B. (1989). Electronic analog of electro-optic modulator. *Appl. Phys. Lett.*, 56(7):665–667.
- Dresselhaus, G. (1955). Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures. *Phys. Rev.*, 100(2):580–586.
- Ehrenreich, H. y Cohen, M. H. (1959). Self-consistent field approach to the many-electron problem. *Phys. Rev.*, 115(4):786–790.

- Fert, A. (2008). The present and the future of spintronics. *Thin Solid Films*, 517:2–5.
- Foldy, L. L. y Wouthuysen, S. A. (1950). On the dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Phys. Rev.*, 78(1):29–36.
- Ganichev, S. D., Bel'kov, V., Golub, L., Ivchenko, E., Sneider, P., Giglberger, S., Eroms, J., Boeck, J. D., Borghs, G., Wegscheider, W., Weiss, D., y Prettl, W. (2004). Experimental separation of Rashba and Dresselhaus spin splittings in semiconductor quantum wells. *Phys. Rev. Lett.*, 92(25):256601–256604.
- Halevi, P. (1992). *Spatial dispersion in solids and plasmas*. North-holland. pp. 681.
- И'инский, Y. y Keldysh, L. V. (1994). *Electromagnetic response of material media*. Plenum Press, New York and London. pp. 315.
- Jain, J. K. y Das-Sarma, S. (1987). Elementary electronic excitations in a quasi-two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 36(11):5949–5952.
- Köhler, R., Tredicucci, A., Beltram, F., Beere, H. E., Linfield, E. H., Davies, A. G., Ritchie, D. ., Iotti, R. C., y Rossi, F. (2002). Terahertz semiconductor-heterostructure laser. *Nature*, 417:156–159.
- Kushwaha, M. S. y Ulloa, S. E. (2006). Plasmon excitations in a two-dimensional electron gas with spin-orbit interactions: Zero magnetic field. *Phys. Rev. B*, 73(20):205306–205313.
- La-Rocca, G. C. y de Andrada e Silva, E. A. (1997). Spin splittings in nanostructures without inversion symmetry. *Pure Appl. Chem.*, 69(6):1187–1194.
- LaShell, S., McDougall, B. A., y Jensen, E. (1996). Spin splitting of an Au(111) surface state band observed with angle resolved photoelectron spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 77(16):3419–1422.
- Li, C. y Xu, X. G. (2008). Tuning of plasmon propagation in two-dimensional electrons. *Appl. Phys. Lett*, 93:251501(1)–251501(3).

- Maytorena, J. A., López-Bastidas, C., y Mireles, F. (2006). Spin and charge conductivities in spin-orbit coupled system. *Phys. Rev. B*, 74:235313(1)–235313(5).
- Mendoza, B. y del Castillo-Mussot, M. (1993). Plasmons in three, two and one dimension. *Revista Mexicana de Física*, 39(4):640–652.
- Mochán, W. L. (2005). *Enciclopedia of Condensed Matter Physics (Plasmons)*. Elsevier. pp. 457.
- Nitta, J., Akazaki, T., y Takayanagi, H. (1997). Gate control of spin-orbit interaction in an inverted $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}/\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$ heterostructure. *Phys. Rev. Lett.*, 78(7):1335–1338.
- Ohno, H., Chiba, D., Matsukura, F., Omiya, T., Abe, E., Dieti, T., Ohno, Y., y Ohtani, K. (2000). Electric-field control of ferromagnetism. *Nature*, 408:944–946.
- Ohno, Y., Young, D. K., Beschoten, B., Matsukura, F., Ohno, H., y Awschalom, D. D. (1999). Electrical spin injection in a ferromagnetic semiconductor heterostructure. *Nature*, 402:790–792.
- Petersen, L. y Hedegard, P. (2000). A simple tight-binding model of spin-orbit splitting of sp-derived surface states. *Surface Science*, 459:49–56.
- Pletyukhov, M. y Gritsev, V. (2006). Screening in the two-dimensional electron gas with spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 74(4):045307–045321.
- Rashba, E. I. (2004). Electron spin operation by electric fields: spin dynamics and spin injection. *Physica E*, 20:189–195.
- Schliemann, J., Egues, J. C., y Loss, D. (2003). Nonballistic spin-field-effect transistor. *Phys. Rev. Lett.*, 90(14):146801–146804.
- Sinitsyn, N. A., Hankiewicz, E. M., Teizer, W., y Sinova, J. (2004). Spin hall and spin-diagonal conductivity in the presence of rashba and dresselhaus spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 70:081312(1)–081312(4).
- Sirtori, C. (2002). Bridge for the terahertz gap. *Nature*, 417:132–133.

- Stern, F. (1967). Polarizability of a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 18(14):546–548.
- Voßebürger, M., Roskos, H. G., Wolter, F., Waschke, C., Kurz, H., Hirakawa, K., Wilke, I., y Yamanaka, K. (1996). Radiative decay of optically excited coherent plasmons in a two-dimensional electron gas. *J. Opt. Soc. Am B*, 13:1045–1053.
- Wang, X. F. (2005). Plasmon spectrum of two dimensional electron system with rashba spin-orbit interaction. *Phys. Rev. B*, 517:085317(1)–085317(6).
- White, J. A., Inkson, J. C., Willllkins, J. W., Cohen, M. L., y Kelly, M. J. (1991). Many-body effects in layered systems. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 334:491–500.
- Winkler, R. (2003). *Spin-Orbit coupling effects in two-dimensional electron and hole systems*. Springer, Berlin. pp. 223.
- Winkler, R. (2004). Rashba spin splitting and ehrenfest’s theorem. *Physica E*, 22:450–454.
- Wolf, S. A., Awschalom, D. D., Buhrman, R. A., J. M. Daughton, S. V.-M., Roukes, M. L., Chtchelkanova, A. Y., y Treger, D. M. (2001). Spintronics: a spin-based electronics vision for the future. *Science*, 74:1488–1495.
- Wooten, F. (1972). *Optical Properties of Solids*. Academic Press. pp. 257.
- Xu, W. (2003). Plasmons of a two-dimensional electron gas in the presence of spin orbit interaction. *Appl. Phys. Lett.*, 82(5):724–726.