

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Programa de Posgrado en Ciencias  
en Física de Materiales**

---

**Procesamiento de información cuántica con estados coherentes  
con fotones agregados**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

Presenta:

**Francisco Antonio Domínguez Serna**

Ensenada, Baja California, México.

2016

Tesis defendida por  
**Francisco Antonio Domínguez Serna**  
y aprobada por el siguiente comité

---

Dr. Fernando Rojas Íñiguez  
Codirector

---

Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez  
Codirector

**Dr. Arturo Arvizu Mondragón**  
**Dr. Roger Sean Cudney Bueno**  
**Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova**  
**Dr. Kevin Arthur O'Donnell**  
**Dr. Alfred Barry U'Ren Cortés**



---

**Dr. Leonel Susano Cota Araiza**  
Coordinador del posgrado en Física de Materiales

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**  
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Francisco Antonio Domínguez Serna, como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Física de Materiales.

## Procesamiento de información cuántica con estados coherentes con fotones agregados

Resumen aprobado por:

---

Dr. Fernando Rojas Íñiguez  
Codirector

---

Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez  
Codirector

En el presente trabajo de investigación se estudia el procesamiento de información cuántica utilizando estados coherentes con fotones agregados (PACS). Se parte de un estudio de la superposición general de PACS con  $n, m$  fotones agregados a los estados coherentes  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  de la forma  $|\psi\rangle \propto u |\alpha, m\rangle |\beta, n\rangle + v |\beta, n\rangle |\alpha, m\rangle$  cuyo entrelazamiento es caracterizado por medio de la concurrencia. Se obtuvieron las condiciones generales para entrelazamiento no nulo, así como una familia de estados máximamente entrelazados mediante expresiones analíticas de la concurrencia y, se estudió el efecto de un canal despolarizante simple sobre esta superposición. En la siguiente etapa, los estados generales se restringen a los que pueden obtenerse experimentalmente, en donde se ha agregado sólo un fotón en uno de los subsistemas de la forma  $|\psi\rangle_{dp,pa} = \mathcal{N}(\hat{a}^\dagger \mp \hat{b}^\dagger) |\alpha\rangle |\alpha\rangle$ , por lo que son superposiciones de PACS individuales (SPACS). Estas superposiciones se denominan canal de fotones desplazados (DPC) para la "-", y de fotones agregados (PAC) para la "+". Las características no clásicas de los DPC y PAC sometidos a la influencia de ruido por esparcimiento y fluctuaciones de fase se estudian a través de la perturbación inducida por una medición homodina (MID homodino) y la discordia cuántica (QD). Se obtuvieron expresiones analíticas que relacionan el QD con una observable para casos sin ruido y con ruido. La observable utilizada son las fluctuaciones de la cuadratura del campo de un subsistema. Los canales DPC y PAC se utilizan como recurso entrelazado para realizar procesamiento de información cuántica a través de un protocolo de teleportación híbrido basado en detección de fotones individuales y detección homodina. Se analizó la capacidad del canal a través de la fidelidad para teleportar un estado, y se obtuvieron expresiones tanto para el caso puro como el caso con ruido. La fidelidad se calcula para cada estado a teleportar y como un promedio para evaluar la capacidad de teleportación del canal. Finalmente, se propone la generación de los canales estudiados en la banda de telecomunicaciones a través de fotones o SPACS anunciados generados en una fibra óptica no lineal mediante el proceso de la mezcla espontánea de cuatro ondas (SFWM) y mezclados en un divisor de haz con el vacío. Se prueba la viabilidad de generar SPACS mediante SFWM. Los canales generados tienen propiedades espectrales relacionadas con el proceso no lineal. Se evalúa la no clasicidad del canal a través de la fidelidad para teleportar un estado en ventanas espectrales definidas. Se obtuvieron fidelidades promedio  $\mathcal{F} > 0,8$  para ciertas ventanas espectrales, con lo que se prueba la viabilidad de la propuesta y la utilidad de los PACS para procesamiento de información.

Palabras clave: **Estados coherentes con fotones agregados, discordia cuántica, detección homodina, teleportación cuántica, entrelazamiento, estados mixtos.**

Abstract of the thesis presented by Francisco Antonio Domínguez Serna, as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Materials Physics.

### Quantum information processing with photon added coherent states

Abstract approved by:

---

Dr. Fernando Rojas Íñiguez  
Thesis Codirector

---

Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez  
Thesis Codirector

In this work, we study quantum information processing with photon added coherent states (PACS). First, the general superposition of  $n, m$  added photons to the coherent states  $|\alpha\rangle$  and  $|\beta\rangle$  of the form  $|\psi\rangle \propto u |\alpha, m\rangle |\beta, n\rangle + v |\beta, n\rangle |\alpha, m\rangle$  is studied, whose entanglement is characterized by means of Concurrence. The general conditions for non-null entanglement as long as a family of maximally entangled states were obtained. The decoherent effect a simple depolarization channel was also analyzed. As a second part of the study, the states are restricted to the easiest experimentally feasible, in which only one photon is added to each subsystem in the form  $|\psi\rangle_{\text{dp,pa}} = \mathcal{N}(\hat{a}^\dagger \mp \hat{b}^\dagger) |\alpha\rangle |\alpha\rangle$  forming superpositions of single PACS (SPACS). These superpositions are named displaced photons channel (DPC) for “-”, and photon added channel (PAC) for “+”. The non-classical character of DPC and PAC affected by noise sources of scattering and phase fluctuation are studied by means of homodyne measurement induced disturbance (homodyne MID) and quantum discord (QD). Analytical expressions that relate QD and one observable were obtained for pure and noise-influenced cases. The observable used is field-quadrature fluctuations for one subsystem. DPC and PAC channels are used as an entangled resource to perform quantum information process through a hybrid quantum teleportation protocol based on single photon and homodyne detections. The channel capacity was analyzed with the fidelity to teleport a state, and closed expressions were obtained for the pure and mixed cases. Fidelity was calculated for each state to teleport and as an average as well to evaluate the teleportation capacity of the channel. Finally, the generation of the studied channels is proposed in the telecommunications band with heralded single photons or SPACS generated within a non-linear fiber optic by spontaneous four wave mixing (SFWM) that are mixed in a beamsplitter with vacuum. The viability of SPACS generations with SFWM was also proved. The generated channels have spectral properties related with the non-linear process. The non-classical signature of the channel is evaluated by means of the teleportation fidelity for defined spectral windows. Average fidelities of  $\mathcal{F} > 0,8$  were obtained for some spectral windows, which proves the viability of this proposal and the utility of PACS for quantum information processing.

Keywords: **Photon added coherent states, quantum discord, homodyne detection, quantum teleportation, entanglement, mixed states.**

## **Dedicatória**

**A madre**

## Agradecimientos

La realización de la presente tesis doctoral es el resultado de varios años de esfuerzo y de aprendizaje continuo. Su culminación no hubiese sido posible sin el apoyo de múltiples personas e instituciones que estuvieron presentes a lo largo del desarrollo del presente trabajo, a quienes quisiera mostrar mi gratitud.

Primeramente agradezco a Dios por la fortaleza que me ha ayudado a ser paciente y perseverante.

A mi madre María Serna Gallegos que siempre me ha apoyado y comprendido en este largo camino.

A mi hermano Jorge Isaac Domínguez Serna, que estuvo presente y me brindó su apoyo.

Al Dr. Fernando Rojas Íñiguez y al Dr. Francisco Javier Mendieta Jiménez por permitirme ser parte de su equipo de trabajo y por su dirección, así como las fructíferas discusiones, el apoyo y la confianza estos casi 5 años. Quiero agradecer especialmente la paciencia y confianza del Dr. Rojas.

También quiero agradecer a los miembros de mi comité de tesis: Dr. Arturo Arvizu Mondragón, Dr. Roger Sean Cudney Bueno, Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdoba, Dr. Kevin Arthur O'Donnell, Dr. Alfred Barry U'Ren Cortés, quienes aportaron su tiempo y cuyas discusiones, sugerencias e ideas permitieron concretar el presente trabajo.

Agradezco a los investigadores del Centro de Nanociencias y Nanotecnología (CNyN - UNAM), así como a los de los departamentos de Óptica y Electrónica de Física Aplicada del CICESE por todo el apoyo brindado.

A los coordinadores del posgrado: Dra. Laura Viana Castrillón y Dr. Leonel Cota Araiza, así como a Laura Rosales por su apoyo durante el posgrado.

Un agradecimiento especial a la Dra. Karina Garay Palmett, quien me brindó su confianza

para trabajar con ella y me ha permitido incursionar en el ámbito experimental.

Agradezco al personal de la Dirección de Estudios de Posgrado por el apoyo y ayuda brindados ante las dificultades administrativas que se presentaron.

Agradezco de forma muy especial al CONACyT por el apoyo brindado a través de la beca doctoral.

A mis amigas Angélica, Brenda, Mayra y Paola que hicieron más gratas las pitanzas. Y al resto de mis amigos que contribuyeron en gran medida a la realización de la presente tesis y quienes siempre comprendieron mis largas ausencias debido al trabajo de tesis.

# Tabla de contenido

---

Resumen en español . . . . .	II
Resumen en inglés . . . . .	III
Dedicatoria . . . . .	IV
Agradecimientos . . . . .	V
Lista de figuras . . . . .	IX
Lista de tablas . . . . .	XIV
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema . . . . .	4
1.1.1 Propuesta . . . . .	4
1.1.2 Hipótesis . . . . .	4
1.2 Objetivos . . . . .	4
1.2.1 Objetivo general . . . . .	4
1.2.2 Objetivos específicos . . . . .	4
1.3 Estructura de la tesis . . . . .	5
<b>2 Conceptos Básicos</b>	<b>7</b>
2.1 El qubit . . . . .	8
2.2 Compuertas cuánticas . . . . .	10
2.3 Computación cuántica óptica . . . . .	12
2.4 Entrelazamiento y base de Bell . . . . .	14
2.4.1 Estados de Bell . . . . .	15
2.5 Matriz de densidad y estados mixtos . . . . .	15
2.5.1 Proceso de medición . . . . .	16
2.5.2 Mediciones selectivas . . . . .	17
2.5.3 Mediciones no selectivas . . . . .	18
2.6 No clasicidad de los estados . . . . .	18
2.6.1 Caracterización del entrelazamiento . . . . .	19
2.6.2 Discordia cuántica . . . . .	21
2.6.3 Estimadores de las correlaciones no clásicas . . . . .	23
2.7 Fundamentos cuánticos de la luz . . . . .	24
2.7.1 Cuantización de la luz y fotones individuales . . . . .	24
2.7.2 Cuadraturas del campo . . . . .	26
2.7.3 Estados coherentes y comprimidos . . . . .	26
2.7.4 Divisor de haz . . . . .	30
2.7.5 Detección homodina . . . . .	31
2.7.6 Estados coherentes con fotones agregados . . . . .	32
2.7.7 Fuentes de fotones individuales . . . . .	35
2.7.8 Tratamiento multimodal cuántico de la luz . . . . .	38
2.8 Teleportación cuántica . . . . .	40

2.9	Canales cuánticos . . . . .	41
2.10	Distinción de SPACS mediante interferometría . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Estados coherentes con fotones agregados entrelazados</b>	<b>46</b>
3.1	Introducción . . . . .	46
3.1.1	Estados coherentes con fotones agregados: PACS . . . . .	49
3.2	Entrelazamiento de las superposiciones de PACS . . . . .	50
3.2.1	Efecto de un canal despolarizante . . . . .	55
3.2.2	Valores críticos de $p$ . . . . .	58
3.2.3	El límite al valor crítico $p_{\text{crit}} = 1/2$ . . . . .	64
3.3	Conclusiones . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Correlaciones cuánticas de estados coherentes con un fotón agregado</b>	<b>68</b>
4.1	Introducción . . . . .	68
4.1.1	Probabilidad de cuadraturas condicionales . . . . .	72
4.1.2	Perturbación inducida por la medición . . . . .	73
4.1.3	Quantum discord . . . . .	75
4.2	Modelo . . . . .	77
4.3	Resultados . . . . .	82
4.3.1	Mediciones homodinas condicionales. . . . .	82
4.3.2	MID para el canal puro. . . . .	84
4.3.3	<i>Quantum discord</i> de Bob a Alice . . . . .	87
4.4	Conclusiones . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Comunicaciones cuánticas con superposición de estados con fotones individuales agregados</b>	<b>101</b>
5.1	Introducción . . . . .	101
5.2	Teleportación con estados de fotones individuales agregados . . . . .	103
5.2.1	Teleportación ideal en un canal sin pérdidas . . . . .	104
5.2.2	Teleportación con pérdidas . . . . .	108
5.2.3	Canal con superposición DFS . . . . .	112
5.2.4	Canal con superposición de SPACS . . . . .	116
5.3	Teleportación de estados formados por SPACS mediante detecciones homodinas <sup>1</sup> 19	
5.3.1	Teleportación homodina con superposición de estados de Fock desplazados . . . . .	124
5.3.2	Teleportación homodina con superposición de estados de fotones agregados individuales . . . . .	127
5.3.3	Teleportación homodina con ruido de fase . . . . .	129
5.4	Conclusiones . . . . .	133
<b>6</b>	<b>Propuesta de implementación experimental en fibra óptica</b>	<b>134</b>
6.1	Generación de SPACS en fibra óptica mediante SFWM . . . . .	135
6.2	Selección de la fibra y anuncio . . . . .	137

6.3	Generación del recurso entrelazado . . . . .	140
6.4	Protocolo de teleportación . . . . .	142
6.4.1	Fidelidades de teleportación . . . . .	145
6.5	Conclusiones . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>152</b>
	<b>Literatura citada</b>	<b>156</b>
	<b>Anexo A Interferencia de estados SPACS en un interferómetro de Michelson-Morley</b>	<b>165</b>
	<b>Anexo B Estado de dos fotones en la mezcla de cuatro ondas en el régimen espontáneo</b>	<b>172</b>
	<b>Anexo C Detalle del cálculo del MID</b>	<b>174</b>
	<b>Anexo D Abreviaciones</b>	<b>176</b>

# Lista de figuras

1	Esfera de Bloch . . . . .	9
2	Entropías de un sistema bipartito . . . . .	22
3	Detección homodina balanceada . . . . .	28
4	Representación de diferentes estados comprimidos. En (a)-(b) estados comprimidos en cuadratura. En (c) un estado de Fock. en (d) un estado comprimido en número de fotones. . . . .	29
5	Divisor de haz . . . . .	30
6	Detección homodina balanceada . . . . .	32
7	$Q(\alpha, m)$ para el estado $ \alpha, m\rangle$ dependiente de $\alpha$ , con $m$ fijo. . . . .	34
8	Función de Wigner para el estado SPACS $ \alpha, 1\rangle$ para diferentes valores de $\alpha$ . (a) $\alpha = 0$ , (b) $\alpha = 0,5$ , (c) $\alpha = 2$ , (d) $\alpha = 20$ . . . . .	36
9	Varianza de cuadratura para SPACS $\Delta X_\phi^2$ dependiente de $\alpha$ . Se muestra $\Delta X_0^2$ , $\Delta X_{\pi/2}^2$ . La línea punteada negra es la varianza de un estado coherente. . . . .	37
10	Interferómetro Michelson-Morley con las entradas como el campo $\hat{a}_1$ , oscilador local $\hat{a}_0$ y las salidas $\hat{a}_4$ y $\hat{a}_5$ . . . . .	43
11	Interferencia $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$ considerando que la entrada cero funciona como oscilador local con un haz coherente y la otra entrada con un SPACS. La frecuencia $\omega_1 = 3\sigma_0$ y el ancho de banda $\sigma$ se mantienen fijos. Se muestran curvas para distintas combinaciones de $\{\alpha_0, \omega_0\}$ . . . . .	45
12	Concurrencia de la ecuación (93) con $\alpha = \beta = 0$ para diferentes valores de $\gamma$ . Se consideran las condiciones siguientes: (a) $ \psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}  \gamma\rangle  -\gamma\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}  -\gamma\rangle  \gamma\rangle)$ para distinto $m, n$ . Para (b)-(h) el estado considerado es $ \psi\rangle = N(u\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}  \gamma\rangle  -\gamma\rangle + v\hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}  -\gamma\rangle  \gamma\rangle)$ con (b) $m = n = 0$ , (c) $m = 0, n = 1$ , (d) $m = 1, n = 1$ , (e) $m = 2, n = 0$ , (f) $m = 1, n = 3$ , (g) $m = 0, n = 3$ , (h) $m = 15, n = 17$ . . . . .	53
13	Concurrencia para el estado de la ecuación (93) para (a) $\alpha = \beta$ fija, $ m - n  = 1$ vs $u$ , (b) $\alpha = \beta$ fija, $ m - n  = 5$ vs $u$ , (c) $\alpha = \beta$ y $n$ fija, $u = v = 1/\sqrt{2}$ para diferentes números de $m$ fotones agregados. Cada superposición de PACS en la figura está caracterizada con los parámetros $(\alpha, \beta, m, n)$ . . . . .	54
14	Concurrencia para el estado de la ecuación (93) como función de $\gamma$ y $u$ (a) $\alpha = \beta = 10, m = 1, n = 2$ , (b) $\alpha = \beta = 10, m = 0, n = 20$ . . . . .	55
15	Concurrencia para el ensamble de la ecuación (95) vs $p$ para el estado (93) con las condiciones: (a) $\alpha = \beta = 0, m = n = 0, u = v = 1/\sqrt{2}$ vs $\gamma$ , (b) $\alpha = \beta = 0, m = 1, n = 2, u = v = 1/\sqrt{2}$ vs $\gamma$ y (c) $\alpha = \beta = 3, \gamma = 0, m = 1, u = -v = 1/\sqrt{2}$ vs el número de fotones agregados $n$ . . . . .	58

16	Efectos del canal despolarizante ante la variación de $p$ para: (a) $\alpha = \beta = 3, m = 0, n = 5$ vs. $u$ , (b) $\alpha = \beta = 3, m = 0, u = v = 1/\sqrt{2}$ vs. $n$ , (c) $u = v = 1/\sqrt{2}, m = 0, n = 1, \alpha = \beta$ vs. $\alpha$ , (d) $u = v = 1/\sqrt{2}, m = 1, n = 5, \alpha = \beta$ vs. $\alpha$ .	59
17	Valores críticos de $p_{\text{crit}}$ para los cuales el ensamble de la ecuación (95) pierde el entrelazamiento para diferentes estados $ \psi\rangle$ : (a) $ \psi\rangle = N( \gamma\rangle -\gamma\rangle +  -\gamma\rangle \gamma\rangle)$ , (b) $ \psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}  \gamma\rangle -\gamma\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}  -\gamma\rangle \gamma\rangle)$ , (c)-(d) $ \psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}  \alpha\rangle \alpha\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}  \alpha\rangle \alpha\rangle)$ con $m, \alpha$ fijos en (c) y $m, n$ fijas en (d). Para todos, $N$ es una constante de normalización adecuada.	61
18	Proceso de generación de (a) DPC (125) y (b) PAC (124). Las correlaciones se miden a través de detección homodina. $\Phi_{\lambda_{A(B)}}$ representa una medición homodina con fase $\lambda_{A(B)}$ .	79
19	Caracterización esquemática del canal entrelazado mediante detecciones homodinas simultáneas. El estado de entrada puede ser un DFS que da lugar al DPC mostrado en (a), o un SPACS que da lugar al PAC que se muestra en (b). Las pérdidas se incluyen como fluctuación de fase $\phi$ y el esparcimiento como un BS con transmitancia $\eta$ . El lado de Bob se mide posterior a un desplazamiento $\hat{D}(-\alpha)$ con $M_i^B$ y Alice que se localiza remotamente mide su el estado que recibe a través de $M_i^A$ .	80
20	JQP para el canal puro DPC con detecciones homodinas para diferentes valores de $n_0$ . Los parámetros para cada figura son: (a) $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (b) $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 81$ , (c) $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (d) $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 81$ .	84
21	JQP para el estado puro PAC con detecciones homodinas para diferentes valores de $n_0$ . Los parámetros para cada figura son: (a) $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (b) $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 1$ , (c) $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (d) $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 1$ .	85
22	MID dependiente de la fase de los detectores $\lambda_A$ y $\lambda_B$ vs. $n_0$ (a) MID para el caso DPC independiente de $n_0$ . MID para el caso PAC con los parámetros: (b) $n_0 = 0,25$ , (b) $n_0 = 1$ (c) $n_0 = 6,25$ .	87
23	Comparación de la entropía de entrelazamiento y el AMID para los canales puros PAC y DPC.	88
24	Discordia cuántica (QD) de B a A con pérdidas por esparcimiento para DPC (línea roja sólida, independiente de $n_0$ ) y PAC (líneas negras) y su relación con $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}$ y $\eta$ . En (a) QD vs. $\eta$ , (b) $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$ vs. $\eta$ , (c) parametrización del QD vs. $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$ .	93
25	Discordia cuántica (QD) de B a A para el canal puro independiente de $n_0$ para DPC (línea sólida) y PAC (línea discontinua).	94
26	QD de B a A para DPC vs la varianza de fase $\sigma$ para diferentes cantidades del esparcimiento $\eta$ y promedio inicial de fotones $n_0$ .	95

- 27 Varianza de cuadratura con fase cuadrada (QVP)  $\Delta_{X_{\lambda_A}}^2$  vs.  $\sigma$  para valores fijos de  $\eta$  para DPC. (a)  $\eta = 0,8, \lambda_A = 0$ , (b)  $\eta = 1,0, \lambda_A = 0$ , (c)  $\eta = 0,8, \lambda_A = \pi/2$ , (d)  $\eta = 1,0, \lambda_A = \pi/2$ . . . . . 96
- 28 Gráficas paramétricas del QD de B a A para DPC vs: (a)  $\Delta X_{\lambda_A=0}^2$ , y (b)  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$ . El QD se calcula para diferentes valores de  $\eta$  y  $n_0$ . Las marcas representan valores de *sigma* en orden ascendente de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. . . . . 97
- 29 QD de B a A para PAC vs la varianza de fase  $\sigma$  para diferentes valores del esparcimiento  $\eta$  y valores de  $n_0$ . . . . . 98
- 30 Cuadrado de la varianza de cuadratura con fase (QVP)  $\Delta_{X_{\lambda_A}}^2$  vs.  $\sigma$  para valores fijos de  $\eta$  para el canal PAC. (a)  $\eta = 0,8, \lambda_A = 0$ , (b)  $\eta = 1,0, \lambda_A = 0$ , (c)  $\eta = 0,8, \lambda_A = \pi/2$ , (d)  $\eta = 1,0, \lambda_A = \pi/2$ . . . . . 99
- 31 Curva paramétrica del QD de B a A para el caso PAC vs: (a)  $\Delta X_{\lambda_A=0}^2$ , and (b)  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$ . El QD se calcula para diferentes valores de  $\eta$  y  $n_0$ . Las marcas representan valores de  $\sigma$  en orden creciente de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. . . . . 99
- 32 Esquema de teleportación en un canal ideal sin fuentes de ruido, utilizando un canal formado por la superposición de SPACS. Se teleporta un estado en la base coherente y Fock desplazado. La medición conjunta es mediante conteo de fotones posterior a un desplazamiento obtenido en  $n_b$  y  $n_c$ . . . . . 105
- 33 Fidelidad de teleportación para el canal PAC sin pérdidas dependiente de los valores de  $\alpha$  y  $\nu$ . Se considera  $\phi_p = 0$  y  $\alpha$  real. Se muestran las fidelidades post-seleccionadas por las detecciones  $n_c$  y  $n_d$ : (a)  $\mathcal{F}_{pa}^{01}$ , (b)  $\mathcal{F}_{pa}^{10}$ . . . . . 108
- 34 Fidelidad de teleportación para el canal PAC sin pérdidas dependiente de los valores de  $\phi_p$  y  $\nu$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Se muestran las fidelidades post-seleccionadas por las detecciones  $n_c$  y  $n_d$ . La columna de la izquierda muestra  $\mathcal{F}_{pa}^{01}$  (a)  $\alpha = 0,5$ , (c)  $\alpha = 2$ . La columna de la derecha muestra  $\mathcal{F}_{pa}^{10}$  (b)  $\alpha = 0,5$ , (d)  $\alpha = 2$ . . . . . 109
- 35 Esquema de teleportación con ruido de fase  $\phi$  y esparcimiento  $\eta$ , utilizando un canal formado por la superposición de SPACS. Se teleporta un estado en la base coherente y Fock desplazado. La medición conjunta es mediante conteo de fotones posterior a un desplazamiento obtenido en  $n_b$  y  $n_c$ . . . . . 110
- 36 Fidelidad de teleportación para el canal DFS con ruido de fase para diferentes valores de la varianza de fase  $\sigma$  vs el esparcimiento  $\eta$  y el valor  $\nu$  del qubit. Se considera  $\sigma = \{0, 0,5, 1, 3\}$  de (a)-(d) respectivamente. . . . . 114
- 37 Fidelidad promedio de teleportación para un canal con superposición DFS, mostrada en la ecuación (171) vs. esparcimiento y ruido de fase caracterizados por  $\eta$  y  $\sigma$ , respectivamente. . . . . 115

38	Fidelidad de teleportación del canal PAC con fase y esparcimiento para diferentes valores de la varianza de fase $\sigma$ respecto a los parámetros de qubit $\{\nu, \phi_p\}$ . Las varianzas son (a)-(d) $\sigma = 0$ , (e)-(h) $\sigma = 0,5$ . El esparcimiento es $\eta = 0,9$ en la columna de la izquierda y $\eta = 0,8$ en la columna de la derecha. Con $\alpha = 0$ en los renglones 1 y 3, y $\alpha = 3$ en los renglones 2 y 4. . . . .	118
39	Fidelidad de teleportación en el canal PAC respecto a los parámetros de qubit $\{\nu, \phi_p\}$ , para el caso con $\alpha = 20$ y $\sigma = 1$ donde en (a) $\eta = 0,9$ y en (b) $\eta = 0,8$ .	119
40	Fidelidad promedio de teleportación para un canal con superposición de SPACS, mostrada en la ecuación (176) vs. esparcimiento y ruido de fase caracterizados por $\eta$ y $\sigma$ , respectivamente para diferentes valores de $\sigma$ , (a) $\sigma = 0$ , (b) $\sigma = \pi/4$ , (c) $\sigma = \pi/2$ , (d) $\sigma = \pi$ . . . . .	120
41	Esquema general para la teleportación con medición conjunta homodina . . . .	121
42	Fidelidad de teleportación de un estado $\nu$ específico condicionada a la detección de $X_{\lambda_{A(B)}}$ para el canal DPC, con $\alpha = 2$ , $\lambda_A = 0$ , $\lambda_B = \pi/2$ sin fuentes de ruido. Los valores $\nu$ son fijos: (a) $\nu = 0$ , (b) $\nu = \pi/4$ , (c) $\nu = \pi/2$ . . . . .	125
43	Fidelidad de teleportación dependiente de $\nu$ para el canal DPC. Fijos $\alpha = 2$ , $\lambda_A = \lambda_B = 0$ y $X_{\lambda_B} = 0$ . $\sigma$ en (a) 0, (b) 0.3, (c) 1.0. . . . .	125
44	Fidelidad de teleportación promedio para el qubit en un canal compartido DPC dependiente de las cuadraturas $\{X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}\}$ , con $\lambda_A = \pi/4$ , $\lambda_B = 0$ , $\alpha = 2$ calculada para diferentes intervalos de $\nu$ (a) $[0, \pi]$ , (b) $[0, \pi/3]$ , (c) $[\pi/3, 2\pi/3]$ . .	126
45	Fidelidad de teleportación dependiente de $\nu$ para el canal PAC. Fijos $\alpha = 2$ , $\lambda_A = \lambda_B = 0$ y $X_{\lambda_B} = 0$ . $\nu$ en (a) 0, (b) $\pi/4$ , (c) $\pi/2$ . . . . .	127
46	Fidelidad de teleportación dependiente de $\nu$ para el canal PAC. Fijos $\alpha = 2$ , $\lambda_A = \lambda_B = 0$ y $X_{\lambda_B} = 0$ . $\sigma$ en (a) 0, (b) 0.3, (c) 1.0. . . . .	128
47	Fidelidad de teleportación promedio para el qubit en un canal compartido PAC dependiente de las cuadraturas $\{X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}\}$ , con $\lambda_A = \pi/4$ , $\lambda_B = 0$ , $\alpha = 2$ calculada para diferentes intervalos de $\nu$ (a) $[0, \pi]$ , (b) $[0, \pi/3]$ , (c) $[\pi/3, 2\pi/3]$ . .	129
48	Fidelidad condicional de la ecuación (186) para el canal DPC considerando un qubit con $\nu$ particular a teleportar. Los detectores están ajustados a $\lambda_A = \pi/4$ , $\lambda_B = 0$ para diferentes condiciones de ruido mostradas contra los valores de las cuadraturas. En (a) $\nu = 0$ , $\sigma = 0$ , (b) $\nu = 0$ , $\sigma = \pi/4$ , (c) $\nu = \pi/2$ , $\sigma = 0$ , (d) $\nu = \pi/2$ , $\sigma = \pi/4$ . . . . .	131
49	Fidelidad condicional de la ecuación (186) para el canal PAC considerando un qubit con $\nu$ particular a teleportar. Los detectores están ajustados a $\lambda_A = \pi/4$ , $\lambda_B = 0$ para diferentes condiciones de ruido mostradas contra los valores de las cuadraturas. En (a) $\nu = 0$ , $\sigma = 0$ , (b) $\nu = 0$ , $\sigma = \pi/5$ , (c) $\nu = \pi/2$ , $\sigma = 0$ , (d) $\nu = \pi/2$ , $\sigma = \pi/5$ . . . . .	132
50	Contorno $\Delta K = 0$ para la PCF con $r = 1,72\mu m$ , $f = 0,85$ . . . . .	138

51	JSI para la PCF con $r = 1,72\mu m$ , $f = 0,85$ con bombeo de $850 \times 10^9$ rad/s de ancho de banda centrado en $\lambda_p = 841,75nm$ . (a) sin filtrar, (b) con un filtro Gaussiano en el acompañante centrado en $\lambda_{di} = 577,7nm$ y con $\sigma_{di} = 130 \times 10^9$ rad/s . . . . .	139
52	Experimento esquemático de la preparación anunciada de (a) un fotón anunciado, (b) un SPACS. Em ambos se requiere la detección de un fotón individual centrado en 586nm como anunciador. . . . .	140
53	Generación del estado entrelazado y teleportación con los estados obtenidos en la fibra. Generación del estado entrelazado (a) DPC, (b) PAC. (c) Esquema de teleportación simplificado, la fuente es uno de los dos estados entrelazados (DPC o PAC) y el estado a teleportar es el qubit de la ecuación (198), con detección de fotones individuales en la base desplazada. . . . .	141
54	Fidelidad de teleportación condicionada a la post-selección de la medición conjunta para el canal DPC. De (a)-(d) para un estado $\nu$ específico. Los valores $\nu$ son (a) $\nu = 0$ , (b) $\nu = \pi/5$ , (c) $\nu = \pi/2$ , (d) $\nu = \pi$ . En (e) se muestra la fidelidad promedio para todos los valores de $\nu$ . . . . .	147
55	Fidelidad de teleportación de un estado $\nu$ específico condicionada a la detección de $ 10\rangle_{bc}$ sin fuentes de ruido. Se muestran las fidelidades para cada valor del qubit dependiente de $\nu$ y el ancho de banda del fotón a teleportar. . . . .	148
56	Fidelidad de teleportación de un estado $\nu$ específico para el canal PAC, con $\alpha = 2$ . Los valores $\nu$ son (a) $\nu = 0$ , (b) $\nu = \pi/4$ , (c) $\nu = \pi/2$ , (d) $\nu = \pi/2$ . En (e) se muestra la fidelidad promedio para todos los valores de $\nu$ . . . . .	149
57	Fidelidad de teleportación dependiente de $\nu$ para el canal PAC, con $\alpha = 2$ . Los valores $\nu$ son (a) $\nu = 0$ , (b) $\nu = \pi/4$ , (c) $\nu = \pi/2$ . . . . .	150
58	Intensidad normalizada $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$ del MMI considerando una entrada como un SPACS y la otra como el vacío. Las gráficas se muestran para $\omega_0$ en términos del ancho de banda $\sigma$ . . . . .	169
59	Inteferencia normalizada $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$ . Ambas entradas son SPACS. La frecuencia $\omega_1 = 3\sigma_0$ se mantiene fija y $\omega_0$ es variable. . . . .	170
60	Inteferencia normalizada $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$ . Se consideran ambas entradas como SPACS con las características $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ , $\omega_0 = \omega_1 = 3\sigma$ . Se fija una de las amplitudes $\alpha_{1,2}$ y se varía la otra. . . . .	171

## Lista de tablas

---

1	Parámetros hiperbólicos de ajuste del valor crítico $p_{\text{crit}}$ como función de la variable $variable = (\gamma \text{ o } n)$ , para diferentes PACS entrelazados . . . . .	62
2	Parámetros de ajuste Gaussiano para el valor crítico $p_{\text{crit}}$ como función de $\gamma$ , para diferentes PACS entrelazados . . . . .	64
3	Protocolo de teleportación del estado $ \psi^C\rangle = x \beta\rangle + y\hat{D}_a(\beta) 1\rangle$ utilizando un canal DPC y PAC . . . . .	107
4	Protocolo de teleportación del estado $ \psi^C\rangle = x 0\rangle + y 1_\beta\rangle$ utilizando un canal DPC y PAC obtenido mediante SFWM . . . . .	143
5	Parámetros de anunciamiento, fotón a teleportar y detección para calcular la fidelidad de teleportación . . . . .	146



# Capítulo 1.

---

## Introducción

El procesamiento de información cuántica (QIP - *quantum information processing*) de estados continuos requiere de operaciones que por lo general se encuentran en el mismo dominio que la información, es decir, compuertas que operen en el régimen continuo y existen muy pocos estudios que permitan realizar operaciones de QIP de variable continua basados en esquemas de detección discretos.

La información cuántica (QI *quantum information* por sus siglas en inglés), que está catalogada como una rama de la física (Navarrete-Benlloch, García-Patrón, Shapiro, y Cerf, 2012) establece una equivalencia entre los conceptos de la mecánica cuántica y los de la teoría de la información. De esta manera, los estados de los sistemas físicos pueden servir para formar un conjunto de vectores base en  $\mathcal{C}^{2^n}$  que permitan representar  $n$  unidades de información mínima, o  $n$  qubits (contracción de *quantum bit*), que son análogos a los bits de información clásica. Cabe destacar que el qubit, a diferencia de un bit clásico, es una superposición de ambos estados posibles en  $\mathbb{C}^2$ . Es la evolución controlada de esos estados en otros de forma reversible, lo que completa el ciclo de la computación cuántica, englobado en el procesamiento de información cuántica (QIP *quantum information processing* por sus siglas en inglés). Las transformaciones unitarias reversibles también reciben el nombre de compuertas cuánticas por su analogía con las compuertas clásicas (Audretsch, 2007).

Las comunicaciones cuánticas son también una tarea de QIP, cuya necesidad es fácilmente demostrable. Por ejemplo, transferir información desde donde es generada hasta el sitio donde será procesada y viceversa, o simplemente la comunicación entre distintas partes. Las reglas que rigen la transferencia de información cuántica de un lugar a otro reciben el nombre de protocolos de comunicación cuántica.

Gran parte del interés en QIP nace de la superior capacidad teórica de la computación cuántica en procesamiento y resolución de problemas (Shor, 1994). Sin embargo, su implementación universal cuenta con dos principales detractores: la escalabilidad y la decoherencia. Estas limitaciones se imponen principalmente sobre el número de qubits que se pueden manejar a la vez, y es la escalabilidad también un factor gobernado por la decoherencia, pues

el ambiente induce errores que pueden rebasar la capacidad de corrección. A pesar de esto se han desarrollado diversos experimentos que han puesto en práctica los principios de la computación cuántica en sistemas con materia (Pellizzari, Gardiner, Cirac, y Zoller, 1995; Garshenfeld y Chuang, 1997).

Por otro lado las realizaciones experimentales con luz han demostrado ventajas sobre las demás, principalmente porque la decoherencia afecta menos a los fotones que a los sistemas moleculares (Schlosshauer y Merzbacher, 2008).

De los progresos más notables han sido la demostración de compuertas lógicas cuánticas y entrelazamiento (Neergaard-Nielsen et al., 2010a; Clark, Fulconis, Rarity, Wadsworth, y O'Brien, 2009; Jeong et al., 2013; O'Brien, 2007). Esto posiciona a los sistemas cuánticos ópticos como los candidatos más prometedores para QIP, debido a que la integración entre la computación cuántica y las comunicaciones surge de manera natural. Resulta evidente la necesidad de un qubit óptico. La representación más común y más sencilla de entender es la polarización de la luz, por ejemplo en los estados horizontales y verticales del vector eléctrico  $|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ . En este aspecto, Knill, Laflamme y Millburn (KLM) (Knill, Laflamme, y Milburn, 2001) propusieron realizar computación cuántica universal considerando *qubits* de fotones individuales de la forma  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  con óptica lineal y fotones individuales como recurso. La principal desventaja de la propuesta KLM es que requiere fuentes de fotones individuales puras para su funcionamiento, lo que traslada la dificultad a la generación de dichas fuentes. Un *qubit* óptico también puede formarse con la distribución espacial, fase y estados coherentes (Yonezawa y Furusawa, 2008; Jeong y Kim, 2001; Ralph, Langford, Bell, y White, 2002), estas representaciones no discretas son mejor conocidas como implementaciones en CV (*continuous variables* por sus siglas en inglés).

Dentro de las propuestas en CV destacan las que utilizan los estados coherentes como base, pues son el estado cuántico más clásico que existe, en el sentido de que su estadística es Poissoniana, y que además se obtiene fácilmente con un láser. La propuesta que tiene un mejor comportamiento teórico yace en la utilización de superposiciones pares e impares de los denominados estados gato de Schrödinger en la forma  $|\psi_{\text{cat}}^{\pm}\rangle = N^{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , los

estados gato son ortogonales y se pueden establecer *qubits* a partir de ellos como lo demostraron Cochrane, Milburn, y Munro (1999); a pesar de que se pueden distinguir realizando detección de fotones, son extremadamente sensibles a las ineficiencias de detección y las pérdidas (Jeong y Kim, 2001). En respuesta a estas ineficiencias, surge la propuesta para la implementación de *qubits* basada en la superposición de estados coherentes de Jeong y Kim, en la que se puede construir un *qubit* de la forma  $|\psi\rangle = \mathcal{A}|\alpha\rangle + \mathcal{B}|-\alpha\rangle$  siempre que  $\alpha \gg 0$  dado el traslape  $\langle\alpha|-\alpha\rangle = e^{-2\alpha^2}$ . Las desventajas de los sistemas basados en estados coherentes radican en la dificultad de generar dichos estados y en la necesidad de los procesos de teleportación en la implementación de compuertas de un sólo qubit.

Los estados de CV tienen como ventaja no requerir detectores de fotones individuales, sino que pueden ser discriminados mediante detección homodina (Lund, Jeong, Ralph, y Kim, 2004) (HD - *homodyne detection*). La detección homodina se realiza mezclando un haz coherente fuerte conocido como oscilador local (LO - *local oscillator*) con un campo débil a ser detectado en un divisor de haz (BS - *beam splitter*), posteriormente las fotocorrientes de salida del divisor de haz son restadas y el resultado arroja información del estado a detectar.

Las implementaciones de QIP en CV requieren de un recurso entrelazado también en CV. Los más simples son los estados coherentes entrelazados (Jeong y Kim, 2001), que a su vez forman parte de los estados Gaussianos. Por otro lado, los estados de fotones agregados (PACS - *photon added coherent states*), que son el resultado de la aplicación del operador de creación  $\hat{a}^\dagger$  sobre los estados coherentes  $|\alpha\rangle$  generan estados del tipo  $|\psi\rangle \propto \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle$  de características no clásicas, las cuales se observan en la distribución sub-Poissoniana en su número de fotones y en la negatividad de la función de Wigner que exhiben (Agarwal y Tara, 1991). Los estados con negatividad en la función de Wigner pueden formar estados entrelazados con la simple interacción con medios lineales, como un BS (Kim, Son, Bužek, y Knight, 2002), lo que los hace más adecuados para QIP. Adicionalmente, los PACS comparten características de estados puramente clásicos con estados puramente cuánticos (Zavatta, Viciani, y Bellini, 2004), por lo que pueden ser utilizados para establecer QIP de naturaleza híbrida cuántica-macroscópica. Es decir, dada una superposición bipartita formada por estados coherentes y

PACS, una aplicación potencial se encuentra al utilizar un esquema de detección de fotones individuales en un subsistema que proyecte el estado del subsistema complementario en un estado continuo y viceversa, lo cual relacionaría de forma directa el mundo clásico con el cuántico. Son estas características las que motivan principalmente el estudio de superposiciones de PACS para procesamiento de información cuántica y sus propiedades de no clasicidad en el presente trabajo.

## **1.1. Planteamiento del problema**

### **1.1.1. Propuesta**

La propuesta consiste en el modelado y desarrollo de un sistema que realice operaciones de información cuántica con estados de luz compuestos por superposiciones de estados coherentes con fotones agregados, mediante interacciones no lineales y procesos de óptica lineal.

### **1.1.2. Hipótesis**

Mediante procesos de óptica lineal y no lineal, controlados por un protocolo a través de un canal cuántico es posible realizar operaciones de información cuántica.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo general**

Desarrollo teórico de un sistema capaz de realizar operaciones de información cuántica a través de un canal cuántico formado por superposiciones de estados coherentes con fotones agregados mediante procesos de óptica lineal y no lineal

### **1.2.2. Objetivos específicos**

- Desarrollar estados continuos entrelazados de forma genérica compuestos por superposiciones de PACS.
- Caracterización de las correlaciones de los estados formados por superposiciones de

PACS.

- Desarrollo de operaciones de información cuántica: correlaciones y protocolos de comunicación. Empleando los estados antes generados.
- Simulación de un sistema físico que realice las operaciones de información cuántica en un medio realizable experimentalmente.

### 1.3. Estructura de la tesis

En el presente trabajo se estudia el procesamiento de información cuántica con estados de luz de naturaleza híbrida, es decir, con un alto número promedio de fotones y fotones individuales. Los conceptos fundamentales, desarrollo, resultados y discusiones de la presente tesis se presentarán en el texto con la siguiente estructura: en el capítulo 2 se describen los fundamentos básicos del procesamiento de información cuántica partiendo de una descripción del *qubit* así como las compuertas con uno y dos *qubits* que permiten realizar transformaciones a los estados y generar estados entrelazados. Igualmente se aborda la descripción de sistemas mixtos y estimadores de no clasicidad basados en el *quantum discord* (QD). Aquí mismo se describen los fundamentos cuánticos de la luz de fotones individuales, estados coherentes y estados coherentes con fotones agregados (PACS). En este aspecto se estudia un método interferométrico para distinguir los estados coherentes de los SPACS. Finalizando con una descripción del protocolo de teleportación cuántica y canales cuánticos que sirven de punto de partida para el desarrollo. En el capítulo 3, se presenta un estudio sobre el entrelazamiento de superposiciones de PACS con pesos arbitrarios y con distinto número de fotones agregados. En este capítulo se obtienen las condiciones necesarias de las superposiciones para tener estados con máximo entrelazamiento con lo que se obtiene una familia de estados con entrelazamiento máximo de naturaleza híbrida entre estados coherentes PACS. Igualmente se incluye un estudio sobre el efecto en la no separabilidad de la decoherencia a través de un canal despolarizante simple. En el capítulo 4, se presenta un estudio de las correlaciones no clásicas de superposiciones formadas por estados coherentes y estados coherentes con un fotón agregado (SPACS), esto con el propósito de caracterizar los estados que bajo la pro-

puesta del presente trabajo de tesis son más factibles de realizarse experimentalmente. Se describe el proceso de generación de las superposiciones a partir de estados coherentes y SPACS mediante elementos lineales y se muestra una primera caracterización a través de la detección conjunta de las cuadraturas del estado bipartito mediante detecciones homodinas, con estas mediciones se proponen estimadores de las correlaciones no clásicas basados en la detección homodina. Aquí mismo se estudia el QD de los estados bipartitos propuestos cuando se introducen efectos de ruido por esparcimiento y fluctuaciones de fase. Se obtienen expresiones analíticas para el QD cuando solamente se incluye esparcimiento. También se relaciona el QD con la varianza de una cuadratura del campo, lo cual establece una relación entre una observable y el QD. En el capítulo 5 se realiza una propuesta para utilizar las superposiciones de SPACS y estados coherentes como recurso entrelazado para establecer un protocolo de teleportación cuántica, que servirá para teleportar estados en la misma base utilizando como medición conjunta detección de fotones individuales y medición de cuadraturas. Se mostrará que en ambos esquemas de medición es posible obtener fidelidades máximas. En el capítulo 6 se presenta una propuesta de teleportación considerando un estado entrelazado generado a partir de la mezcla espontánea de cuatro ondas (SFWM) en una fibra de cristal fotónico, donde se demostrará que es posible realizar teleportación con los esquemas propuestos con estados no puros como recurso con fidelidades promedio mayores a 0.7. Por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones principales de este trabajo de tesis. Además se incluyen tres apéndices. En el apéndice A, se muestra la derivación de las expresiones para la intensidad en un interferómetro de Michelson-Morley en el que se mezclan SPACS con estados conocidos. En el apéndice B, se incluye la derivación de las expresiones utilizadas en el cálculo de las propiedades no clásicas de las superposiciones de SPACS (utilizadas en el capítulo 3). En el apéndice C se muestra la derivación del estado de dos fotones por SPWFM en una fibra de cristal fotónico.

## Capítulo 2.

---

### Conceptos Básicos

Por un lado tenemos a los sistemas cuánticos, cuyos estados o combinaciones lineales de sus estados pueden ser codificados y formar una base para la información cuántica, es decir, que son los estados de los sistemas cuánticos los que contienen la información. Por el otro, la manipulación de dichos estados de forma controlada es el procesamiento de información cuántica (*QIP - quantum information processing*). Donde el medio que realiza dichas operaciones sería una computadora cuántica. Recientemente se han englobado todos estos conceptos en la ciencia de información cuántica (QIS por sus siglas en inglés *quantum information science*) (Brecht, Reddy, Silberhorn, y Raymer, 2015). En este capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios para realizar procesamiento de información cuántica. Nuestro trabajo está en el contexto de sistemas continuos, motivado por el interés de generar estados de naturaleza no clásica y aplicarlos en protocolos de información cuántica.

La computación clásica tuvo un gran auge con la invención del transistor en 1947 por John Bardeen, Walter Houser Brattain y William Bradford Shockley y, tal como se menciona en el título del libro de Riordan (Riordan y Hodesson, 1988), marcó el nacimiento de la era de la información. Los transistores son la base de los microprocesadores que encontramos en todas las computadoras, y el número de éstos se encuentra directamente relacionado con la cantidad de tareas simultáneas que pueden procesar. De aquí que se busca una mayor densidad de transistores en un microprocesador.

El poder de los procesadores, y por ende la densidad de transistores en ellos se ha duplicado aproximadamente cada dos años desde la década de los 1960's, este hecho se conoce como la Ley de Moore (Brock, 2006). Este aumento en el empaquetamiento de transistores no tuvo dificultades durante el siglo XX y se desarrolló muy de acuerdo a las predicciones iniciales de Moore. Sin embargo, aumentar la densidad de empaquetamiento ha implicado una disminución en las dimensiones de los transistores que son utilizados como bloque de construcción a grado tal que los efectos cuánticos resultan importantes, que serán evidentes cuando las dimensiones sean tan pequeñas que sólo unos cuantos átomos intervengan para formar cada transistor. Por ejemplo, la simple presencia de un electrón en un transistor vecino

puede perturbar a otro electrón que se encuentre en un transistor vecino, conllevando a un deterioro de las operaciones a realizar.

Uno se pregunta ¿qué alternativas existirán para el avance de la tecnología de la información?, una posible respuesta se encuentra al explotar precisamente esos efectos cuánticos para realizar operaciones de información. Fue la propuesta de Richard Feynman en 1982 el que sugiere que para resolver problemas cuánticos se requiere utilizar máquinas que sean también de naturaleza cuántica, es decir, computadoras cuánticas. Luego esta idea se ve reforzada con la propuesta de Deutsch de la computadora cuántica universal capaz de simular cualquier sistema físico (Deutsch, 1985). Esta propuesta cobra mayor interés con el desarrollo de los algoritmos de Shor y Grover (Shor, 1994; Grover, 1997) para la factorización de números primos y búsqueda de información con un mejoramiento importante en el tiempo de procesamiento. Estos algoritmos explotan la superposición de los diferentes estados de un sistema en la función de onda para demostrar el paralelismo cuántico a través de la transformación simultánea de un conjunto de estados en otro (evolución), y así lograr un procesamiento y operación de información.

La mecánica cuántica surge naturalmente como el marco conceptual y matemático de referencia de la QIS. La mecánica cuántica proporciona las reglas necesarias para la construcción de teorías de sistemas físicos (Nielsen y Chuang, 2000). La información cuántica se encuentra estructurada por los vectores del espacio de Hilbert del sistema cuántico utilizado. De estos espacios, el de dos niveles es de especial importancia, ya que forma la base mínima para hacer computación cuántica. Este elemento mínimo formará el equivalente cuántico al bit clásico, denominado bit cuántico o *qubit*.

## 2.1. El qubit

El qubit o *quantum bit* es el elemento mínimo de información cuántica y se define como la superposición coherente de los dos posibles estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Para establecer mejor comprensión del qubit, se puede comparar con su contraparte clásica, el bit, el cual puede tomar solamente los valores discretos 0 y 1. La representación matemática del qubit como combinación lineal de  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  es como sigue

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1)$$

sujeto a la condición de normalización  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son cantidades complejas, cuyo módulo cuadrado,  $|\alpha|^2$  y  $|\beta|^2$  representa la probabilidad de encontrar al sistema  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  respectivamente.

Los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son la representación de dos estados ortogonales de un sistema, también denominada base computacional. Con esto, cualquier sistema con únicamente dos niveles permitiría implementar un qubit. Un sistema cuántico de dos niveles, es por lo tanto suficiente, para describir un qubit. Se han hecho propuestas para hacer computación cuántica en sistemas de dos niveles muy diversos: fotones, iones atrapados, resonancia magnética nuclear, puntos cuánticos, etc. (Cirac y Zoller, 1995; Cory, Price, y Havel, 1998; Laflamme, Cory, Negrevergne, y Viola, 2001; Chiorescu et al., 2004; Loss y DiVincenzo, 1998; Hanson y Burkard, 2007; Knill et al., 2001).

El qubit genérico se puede parametrizar geoméricamente en una esfera de Bloch, como la mostrada en la figura 1 mediante la relación  $|\psi\rangle = e^{i\gamma}(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle)$ , donde  $\theta$ ,  $\varphi$  y  $\gamma$  son números reales, con una fase global  $e^{i\gamma}$  irrelevante, por lo que un qubit genérico se representa en la esfera efectivamente mediante

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2)$$

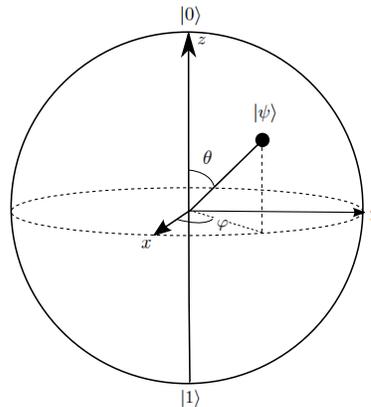


Figura 1: Esfera de Bloch

## 2.2. Compuertas cuánticas

En la información cuántica, las operaciones se realizan mediante compuertas cuánticas, las cuales producen como salida una transformación unitaria de los elementos de entrada, es decir, mapean un estado cuántico en otro. Las compuertas cuánticas representan el resultado de un operador lineal de evolución temporal, por lo que son necesarias en cualquier descripción operativa de procesamiento de información cuántica. La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado se puede describir mediante un operador unitario  $\hat{U}$  (Kaye, Laflamme, y Mosca, 2007), de tal forma que un estado inicial  $|\psi_1\rangle$  evoluciona a un estado  $|\psi_2\rangle$  a través de

$$|\psi_2\rangle = \hat{U} |\psi_1\rangle. \quad (3)$$

Tienen la característica de ser reversibles y unitarias, por lo que cumplen  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$ , donde  $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ . Las compuertas cuánticas pueden obtenerse a través de los operadores de evolución de los sistemas cuánticos. Cuando estos operadores están contenidos en un espacio de Hilbert 2-dimensional todas las transformaciones pueden obtenerse a través de una combinación lineal de las matrices de Pauli (Nielsen y Chuang, 2000). Las compuertas dadas por las matrices de Pauli se muestran a continuación

$$\begin{aligned} I &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_X &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_y &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_z &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Para ilustrar el efecto de las compuertas sobre cualquier estado, consideremos el qubit  $|\psi\rangle = x|0\rangle + y|1\rangle$ , la identidad deja al qubit sin cambios  $I|\psi\rangle \rightarrow x|0\rangle + y|1\rangle$ , la compuerta X interambia las amplitudes de probabilidad de cada uno de los estados de la base del qubit  $|\psi\rangle = x|0\rangle + y|1\rangle$ ,  $X|\psi\rangle \rightarrow y|0\rangle + x|1\rangle$ , la compuerta Y intercambia los coeficientes y agrega una fase en la forma  $|\psi\rangle = x|0\rangle + y|1\rangle$ ,  $Y|\psi\rangle \rightarrow -yi|0\rangle + x|1\rangle$ , mientras que la Z agrega una fase  $\pi$  al estado  $|1\rangle$  en la forma  $Z|\psi\rangle = x|0\rangle - y|1\rangle$ . También representan rotaciones en el eje correspondiente a la compuerta (Nielsen y Chuang, 2000). Las compuertas mostradas en

(4) son también nombradas solamente como I,X,Y,Z de forma intercambiable en la literatura. Otra compuerta importante en el estudio de QIP es la compuerta Hadamard, la cual genera superposiciones de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  cuando es aplicada a sólo uno de ellos. También se le conoce como “la raíz cuadrada de X”, puesto que  $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  y  $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ . La representación de la compuerta Hadamard ( $H$ ) es,

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Las compuertas cuánticas que han sido descritas hasta ahora actúan sobre espacios de un qubit únicamente. No obstante, pueden actuar sobre espacios de dimensiones mayores. Un sistema que describe a varios subsistemas en conjunto tendrá espacio de dimensión que será el producto de las dimensiones de los subespacios de cada subsistema. Es decir, para un sistema compuesto por  $n$  subsistemas, su dimensión será determinada mediante  $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}_1) \times \dim(\mathcal{H}_2) \times \dots \times \dim(\mathcal{H}_n)$ . Esto se obtiene a través del producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ , de los espacios de estados  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  hasta  $\mathcal{H}_n$  de cada uno de los subsistemas que lo componen (Nielsen y Chuang, 2000). Por ejemplo, si el primer subsistema se encuentra en el estado  $|\psi_1\rangle$ , el segundo en el estado  $|\psi_2\rangle$ , hasta el  $n$ -ésimo sistema en el estado  $|\psi_n\rangle$  entonces el estado del sistema combinado es,  $|\Psi_T\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ .

Análogamente, las compuertas para un qubit vistas anteriormente actúan sobre un subespacio de dimensión 2. Para reflejar el efecto de una compuerta de un solo qubit sobre un subsistema compuesto por  $n$ -qubits, recurrimos nuevamente al producto tensorial. Sea  $\hat{U}_2$  un operador unitario que actúa sobre el subsistema 2, para describir el efecto sobre el estado que describe a todo el sistema utilizamos

$$\hat{U}_2 |\psi\rangle \rightarrow I_1 \otimes \hat{U}_2 \otimes I_3 \otimes \dots \otimes I_n |\psi\rangle, \quad (6)$$

de tal forma que la transformación sólo afecta al subsistema de interés. Esta propiedad resulta importante cuando se tiene un sistema multipartita y se realizan operaciones en sólo un subsistema. Operaciones de este tipo se realizan en este trabajo para caracterizar las propiedades de un sistema por el efecto de medirlo.

Las compuertas  $\{I, X, Y, Z\}$  actúan sobre espacios de un qubit y permiten realizar cualquier transformación en la esfera de Bloch. Sin embargo, para realizar QIS se requiere también de compuertas de dos qubits que sean capaces de transformar un qubit dada una condición de otro como la compuerta NOT controlada o CNOT. Esta compuerta, es un bloque importante en la construcción de una computadora cuántica ya que puede ser usada para generar entrelazamiento y para desentrelazar un estado previamente entrelazado (Nielsen y Chuang, 2000).

La compuerta CNOT tiene la representación matricial en el espacio de dos qubits ( $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ ) como sigue

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

por lo que el efecto es equivalente a la compuerta  $X$  en un qubit cuando el otro qubit está en el estado  $|1\rangle$ .

### 2.3. Computación cuántica óptica

Un área con gran avance en la búsqueda de la realización de la computación cuántica ha sido la óptica, pues como se ha mencionado antes, los fotones son menos afectados por la decoherencia que los sistemas de cargas. El qubit óptico más sencillo de visualizar es aquel compuesto por los estados de polarización de la luz. Utilizando dos estados de polarización mutuamente ortogonales es posible construir un qubit de la forma

$$|s\rangle = s_1 |\leftrightarrow\rangle + s_2 |\updown\rangle, \quad (8)$$

donde  $|\leftrightarrow\rangle \equiv |H\rangle$  representa luz linealmente polarizada de forma horizontal y  $|\updown\rangle \equiv |V\rangle$  vertical. En el trabajo de Knill, Laflamme y Milburn (KLM) (Knill et al., 2001), se describen las operaciones de computación cuántica con elementos de óptica lineal. Presentan un esquema donde utilizando únicamente divisores de haz, cambiadores de fase y fuentes de fotones individuales es posible realizar computación cuántica universal. Evidentemente también pueden

utilizarse los estados de polarización circular y en general cualesquiera dos estados linealmente independientes. Un problema con los estados de polarización de la luz es que están sujetos a pérdida de la polarización cuando viajan por medios birrefringentes. La mayoría de las guías de onda presentan cierto grado de asimetría con lo que los índices de refracción efectivos para los estados de polarización son diferentes, provocando un acoplamiento entre modos y, con ello, un intercambio de energía.

Una alternativa a la codificación en polarización son las superposiciones de estados coherentes. Los estados coherentes son los estados de la luz que tienen la mínima incertidumbre y son considerados estados cuánticos desde que se pueden obtener con un láser convencional. Los estados con mínima incertidumbre  $\Delta_q \Delta_p = \hbar/2$  corresponden a los estados del vacío,  $|0\rangle$  (Glauber, 1963).

Una de las primeras propuestas para realizar computación cuántica con estados coherentes la encontramos en el trabajo de Jeong y colaboradores (Jeong y Kim, 2001), en donde se considera a los estados  $|\alpha\rangle$  y  $|-\alpha\rangle$  como dos estados cuasi-ortogonales con los que es posible formar un qubit, donde  $|\alpha\rangle$  es un estado coherente con número promedio de fotones  $\langle n \rangle = |\alpha|^2$ . Para esto, es necesario considerar el traslape  $\langle \alpha | -\alpha \rangle = e^{-2\alpha^2}$ , el cual decrece exponencialmente con  $\alpha^2$ , esto quiere decir que para valores de  $\alpha$  lo suficientemente grandes, el traslape es despreciable; por ejemplo, con  $\alpha = 2$  el traslape es solamente  $\approx 0,000335$ . Con esta consideración es posible definir un qubit con estados coherentes de fases opuestas mediante

$$|\psi\rangle = x|\alpha\rangle + y|-\alpha\rangle, \quad (9)$$

con  $x$  y  $y$  adecuadas para asegurar la normalización  $|\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1$ .

A través de (9) es posible establecer una representación aproximada en la base computacional de manera directa como  $|\psi\rangle \approx x|0\rangle + y|1\rangle$ , en donde la aproximación será la igualdad para  $\alpha \rightarrow \infty$ . Con estas consideraciones Jeong y Kim establecen las condiciones para realizar las diferentes rotaciones de un qubit  $\sigma_i$ , ( $i = \{x, y, z\}$ ) a través de óptica lineal y no lineal bien definidas, las cuales involucran divisores de haz, cambios de fase, efecto Kerr, entre otros. No obstante, la compuerta CNOT, requerida para hacer computación cuántica universal se

obtiene a través del protocolo de teleportación. Esto implica que es necesario tener un estado entrelazado como recurso. En este caso, la dificultad que presenta la propuesta de KLM en la preparación de estados de fotones individuales puros, radica en preparar estados entrelazados formados por estados coherentes con fases contrarias, así como realizar las operaciones a través de elementos no lineales. A pesar de esto, ellos encuentran que su propuesta resulta robusta ante ineficiencias en el proceso de detección. Cabe destacar, que la compuerta Hadamard con estados coherentes ha sido experimentalmente demostrada en el trabajo de Tipsmark y colaboradores (Tipsmark et al., 2011).

Otra alternativa también en el ámbito de variables continuas es utilizar estados comprimidos (Yonezawa y Furusawa, 2008). Particularmente en 2010, Neergaard-Nielsen y colaboradores demostraron experimentalmente la realización de un qubit formado por la superposición del vacío comprimido y estados de un fotón individual, definido de la forma

$$|\rho(\theta, \phi)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{S}(r) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{S}(r) |1\rangle, \quad (10)$$

donde  $\hat{S}(r)$  es el operador de *squeezing* con  $r$  el parámetro de compresión. Se darán mayores detalles de los estados comprimidos en secciones subsecuentes.

## 2.4. Entrelazamiento y base de Bell

El entrelazamiento es una propiedad necesaria para realizar operaciones de procesamiento de información cuántica y para obtener efectos no clásicos (Audretsch, 2007). En nuestro trabajo resultará relevante puesto que buscamos realizar operaciones de información cuántica y por lo tanto se requiere la base conceptual de entrelazamiento.

Para describir el entrelazamiento partiremos de la aproximación más simple: un sistema bipartito puro formado por dos qubits. Sean los dos subsistemas  $a$  y  $b$  de dos niveles cada uno, tal que el sistema conjunto está descrito por la combinación lineal de todos los estados posibles,

$$|\psi\rangle_{ab} = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \quad (11)$$

donde  $\sum_{\{i,j\}=0}^1 |\alpha_{ij}|^2 = 1$ , donde se ha usado la notación compacta de la base computacional  $|ij\rangle = |i\rangle_a \otimes |j\rangle_b$ .

Cuando (11) no puede describirse como un producto tensorial de los estados del subsistema  $a$  y  $b$ , es decir  $|\psi\rangle_{ab} \neq |\psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_b$ , entonces se dice son no separables. Esta propiedad inherente a los sistemas cuánticos es conocida como entrelazamiento. De forma más general, para sistemas no puros, el entrelazamiento es igualmente aplicable a sistemas mixtos descritos por la matriz de densidad  $\rho_{ab}$ . Estará entrelazado sí y sólo si  $\rho_{ab} \neq \rho_a \otimes \rho_b$ . Un sistema mixto estará entrelazado si no puede representarse como una mezcla de estados puros que a su vez puedan factorizarse (Hill y Wootters, 1997; Wootters, 2001).

### 2.4.1. Estados de Bell

Los estados de Bell, son aquellos estados de un sistema bipartito que tienen entrelazamiento máximo (Bell, 1964) y en la base computacional son de la forma

$$|\Phi_{\text{Bell}}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (12a)$$

$$|\Phi_{\text{Bell}}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 - |1\rangle_1 |1\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \quad (12b)$$

$$|\Psi_{\text{Bell}}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (12c)$$

$$|\Psi_{\text{Bell}}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (12d)$$

En (12) los subíndices representan a los qubits  $1$  y  $2$  respectivamente. Es fácil notar, que estos estados no pueden expresarse como un producto de estados independientes que correspondan a cada subsistema. En cualquiera de los estados de (12), si uno de los qubits es medido, obtendríamos de forma aleatoria  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$  con igual probabilidad ( $1/2$ ) en el qubit complementario.

## 2.5. Matriz de densidad y estados mixtos

Los estados descritos hasta esta sección tanto en la base computacional como los de luz han sido estados puros, los cuales pueden ser descritos a través de una función de onda  $|\psi\rangle$ . Sin embargo, en la realidad, los estados puros no son suficientes para modelar a los sistemas

físicos. Para estos sistemas, se utiliza la descripción a través del formalismo de la matriz de densidad (Audretsch, 2007), el cual permite caracterizar sistemas que se encuentran en una mezcla estadística o *ensemble* de estados  $|\psi_i\rangle$ , definido a través de

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_{i=1}^N p_i \rho_i, \quad (13)$$

que considera el *ensemble* dado por la combinación lineal de  $\rho_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  con probabilidad  $p_i = \text{Tr}[\rho_i \rho]$ . La matriz de densidad también puede servir para sistemas en un estado puro, en cuyo caso  $N = 1$  que es un caso particular para este formalismo. Algunas propiedades importantes de la matriz de densidad se muestran a continuación

- $\rho$  es positiva en el sentido de que representa un espacio de probabilidades, las cuales están dadas por los elementos diagonales,
- $\text{Tr}[\rho] = 1$ , que representa la suma de la probabilidad de los diferentes estados posibles,
- es idempotente para estados puros  $\rho^2 = \rho$ .

En nuestro trabajo será relevante modelar sistemas mixtos debido a que el procesamiento de información se puede llevar a cabo en general en ambientes con ruido, lo cual no puede describirse en un sistema puro. Asimismo la caracterización de recursos entrelazados y el establecimiento de protocolos de información implica realizar mediciones de distinta naturaleza, las cuales se presentan a continuación.

### 2.5.1. Proceso de medición

EL proceso de medición forma parte de los postulados de la mecánica cuántica y proporciona las herramientas estadísticas que describen la medición, así como las probabilidades correspondientes a los distintos resultados posibles (Chuan, Wan-Ying, Qing, y Gui-Lu, 2010). Para describir adecuadamente el proceso de medición es necesario introducir los POVM (por sus siglas en inglés *Positive Operator-Valued Measure*) que permite generalizar la medición para matrices de densidad.

Los POVMs se definen mediante los elementos

$$\Pi_m \equiv M_m^\dagger M_m, \quad (14)$$

donde  $M_m$  contiene los operadores de medición.  $\Pi_m$  es positivo, tal que  $\sum_m \Pi_m = I$  y la probabilidad de obtener el  $m$ -ésimo resultado al medir el sistema puro descrito por  $|\psi\rangle$  es  $p(m) = \langle \psi | \Pi_m | \psi \rangle$ . Es importante aclarar que son el conjunto de elementos descritos en (14) los que determinan al POVM.

En el caso de un sistema mixto descrito por  $\rho = \sum_{i=1}^N p_i \rho_i$ , donde  $\rho_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ ,  $p_i = \text{Tr}[\rho \rho_i]$ , y la probabilidad de obtener el  $m$ -ésimo resultado se obtiene mediante  $p(m) = \text{Tr}[\rho \Pi_m] = \text{Tr}[\sum_i p_i M_m \rho_i M_m^\dagger]$  que al realizar la traza resulta en  $p(m) = \text{Tr}[\sum_i p_i \langle \psi_i | \Pi_m | \psi_i \rangle]$  que finalmente puede escribirse como

$$p(m) = \sum_i p(m|i) p_i, \quad (15)$$

donde  $p(m|i)$  es la probabilidad condicional de obtener el resultado  $E_m$  dado que el sistema se encuentra en el estado  $\rho_i$ . Esto se expresa como

$$p(m|i) = \text{Tr}[\Pi_m \rho_i]. \quad (16)$$

De forma más simple, con la definición de la matriz de densidad (13)

$$p(m) = \text{Tr}[\Pi_m \rho]. \quad (17)$$

Con todo lo anterior, el valor esperado de un operador  $\hat{A}$  se puede calcular mediante

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i \text{Tr}[\hat{A} \rho_i] = \text{Tr}[\hat{A} \rho]. \quad (18)$$

### 2.5.2. Mediciones selectivas

Una medición selectiva implica que el sistema se queda en el estado  $m$  después de la medición con probabilidad  $p(m)$ , es decir

$$\rho \rightarrow \rho'_m = \frac{1}{p(m)} \Pi_m \rho \Pi_m. \quad (19)$$

De (19) se puede inferir que una medición selectiva produce un estado en una mezcla estadística con los eigenestados que tengan el eigenvalor obtenido en la medición. Entonces, si

no hay degeneración, se obtiene un sistema puro condicionado a la medición obtenida en la detección. Este concepto resulta de gran utilidad para protocolos de información basados en post-selección, es decir, cuando se requiere obtener un estado en particular o una medición explícita.

### 2.5.3. Mediciones no selectivas

En una medición no selectiva no existe una identificación o condicionamiento a un resultado en particular. Para ilustrar esto consideremos que se realiza una medición en el subsistema  $\rho^A$  de un sistema bipartito  $\rho^{AB}$  a través del operador de medición

$$\hat{\Pi}_n^A = M_n^A \otimes \mathbf{1}^B, \quad (20)$$

con  $M_n^A = |c_n\rangle\langle c_n|$  asumiendo que no hay degeneración. El resultado de una medición selectiva es el mostrado en la ecuación (19). Sin embargo, al no haber selectividad deben tomarse en cuenta todos los resultados posibles sumando cada uno pesado con su probabilidad, lo que se representa en la siguiente forma:

$$\rho \rightarrow \sum_m p(m) \frac{\Pi_m \rho \Pi_m}{\text{Tr}[\rho \Pi_m]} = \sum_m \Pi_m \rho \Pi_m. \quad (21)$$

La no selectividad de las mediciones resulta en una matriz de densidad mixta como lo muestra la ecuación (21). En este trabajo se utilizan mediciones no selectivas para la preparación de estados entrelazados y no entrelazados.

## 2.6. No clasicidad de los estados

Definir si un estado es clásico o no clásico no es en general una tarea sencilla. Por un lado, resulta natural considerar que los sistemas con entrelazamiento no nulo presenten características no clásicas, lo cual está basado en la no separabilidad de los estados tal como se abordó en secciones previas. Sin embargo, existen ciertos estados que a pesar de ser separables exhiben comportamiento no clásico (Modi, Brodutch, Cable, Paterek, y Vedral, 2012), contrario a lo que se creía anteriormente. Esto resulta de particular interés en QIP que utiliza estados mixtos en lugar de estados puros. En estos protocolos se ha demostrado que el comportamiento

no clásico proviene del total de las correlaciones del sistema, para las que el entrelazamiento es sólo un subconjunto del total de las correlaciones (Dakić et al., 2012).

Es en los trabajos seminales de varios grupos de investigación a inicios de la década de los años 2000 (Henderson y Vedral, 2001; Ollivier y Zurek, 2001) cuando surgen los primeros indicios sobre que el entrelazamiento no es el único recurso para la computación cuántica, y por lo tanto, no toma en cuenta todas las correlaciones posibles. De esto surge, la discordia cuántica (QD - *quantum discord*), cuyo fundamento está en restar las correlaciones clásicas obtenidas a través de mediciones no selectivas al monto total de las correlaciones de un estado, de tal forma que lo único que nos queda sean las correlaciones cuánticas.

La definición del QD lo coloca en mayor jerarquía en la cuantificación de las correlaciones, pues es éste el que toma en cuenta todas las correlaciones no clásicas. A su vez, esto implica, que el entrelazamiento es sólo una de las medidas de correlación no clásicas que existen. A partir del QD surgen diversos estimadores, de los que se abordarán algunos con mayor detalle que resultan de interés para caracterizar los estados de luz que se modelan en este trabajo.

En nuestro trabajo proponemos la utilización de estados entrelazados híbridos de variable continua, a los que se requiere evaluar sus características no clásicas para distinguir su utilidad en procesamiento de información. Es por esto que se introducen indicadores y medidores de no clasicidad basados en las correlaciones de los sistemas, como se muestra en las próximas subsecciones.

### 2.6.1. Caracterización del entrelazamiento

También es conocido como el problema de la separabilidad (Horodecki, Horodecki, Horodecki, y Horodecki, 2009) y se encuentra ampliamente estudiado para sistemas bipartitos. Considerando el estado puro compartido entre Alice y Bob de la forma  $|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle |j\rangle$ , es posible escribirlo en la base bi-ortogonal de Schmidt (Schmidt, s.f.; Audretsch, 2007; Ekert y Knight, 1995) como sigue:

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_i^B\rangle, \quad (22)$$

donde  $|\phi_i^{A(B)}\rangle$  son estados ortonormales correspondientes a los subsistemas A y B. Una métrica adecuada para el entrelazamiento, tal como se menciona en (Streltsov, 2015) debe reunir dos requisitos

- no se incrementa bajo la acción de operaciones locales y comunicación clásica,
- se anula para estados separables.

Wooters demostró que para el estado (22) la entropía de Von Neumann para cualquiera de los subsistemas

$$E(\Phi) = S(\rho^{A(B)}) = - \sum_i^n c_i^2 \log_2 c_i^2, \quad (23)$$

cumple con las características de la métrica en el caso puro. No obstante, esto no es necesariamente cierto si se considera un estado mixto. Si el estado mixto  $\rho$  se expresa a través de su descomposición en los estados  $|\Phi_j\rangle$  de la forma,

$$\rho = \sum_{j=1}^N p_j |\Phi_j\rangle \langle \Phi_j|, \quad (24)$$

el entrelazamiento de  $\rho$ , tal como se define en (23) será dependiente de la descomposición escogida, y es necesario encontrar aquella descomposición que minimiza dicha función. De esto, surge la idea del entrelazamiento de formación (Bennett, Bernstein, Popescu, y Schumacher, 1996; J. Lee y Nha, 2013; Wooters, 2001)

$$E_f(\rho) = \inf_j \sum_j p_j E(\Phi_j). \quad (25)$$

La caracterización del entrelazamiento como en la ecuación (25) si bien es en general no trivial, Wooters en 1997 obtuvo una expresión para el caso de un par de qubits (Hill y Wooters, 1997) de la forma

$$E(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad (26)$$

donde  $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x)$ . En esta ecuación,  $C$  es un nuevo parámetro denominado Concurrencia. Se puede observar que  $E(C)$  tiene un comportamiento monótono para  $0 \leq C \leq 1$ , por lo que  $C$  puede utilizarse como una medida del entrelazamiento por si misma, la cual es de hecho la métrica más utilizada para un par de qubits.

La concurrencia para una matriz de dos qubits mixta se obtiene mediante

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (27)$$

donde  $\lambda_i$  son los eigenvalores en orden decreciente para la matriz auxiliar  $\rho\tilde{\rho}$ , con  $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ . \* denota el complejo conjugado de cada elemento de matriz y  $\sigma_y$  es el operador de inversión temporal de spin a través de la matriz  $Y$  de Pauli. Para sistemas puros expresados por una función de onda en la base computacional de la forma  $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$ , es fácil demostrar que  $C(\phi) = 2|ad - bc|$ . Se puede contextualizar este cálculo con los estados de Bell mostrados en la ecuación (12) que todos tienen concurrencia  $C = 1$  y por lo tanto son estados máximamente entrelazados.

### 2.6.2. Discordia cuántica

La discordia cuántica (QD - *quantum discord*) toma en consideración el total de las correlaciones que no pueden explicarse clásicamente en un sistema, y ha sido identificado como la primera medida de las correlaciones cuánticas además del entrelazamiento (Streltsov, 2015).

Antes de definir el *quantum discord* es necesario describir la definición de información mutua, las cuales involucran la entropía de Shannon. La entropía de Shannon cuantifica el grado de desconocimiento de una variable utilizada para codificar información (Cover y Thomas, 2005). Clásicamente, la información mutua (MI - *mutual information*) de un sistema bipartito descrito cada uno por variables aleatorias, permite cuantificar el grado de independencia mutua entre las variables. Es decir, cuantifica el monto de información que se puede inferir de una variable conociendo la otra. La información mutua puede definirse para sistemas clásicos mediante dos formas equivalentes (Cover y Thomas, 2005; Modi, Paterek, Son, Vedral, y Williamson, 2010)

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (28a)$$

y,

$$J(X : Y) = H(X) - H(X|Y). \quad (28b)$$

Donde  $H(X) = -\sum_x p_x \log_2 p_x$  es la entropía clásica de Shannon para la variable  $X$ , donde  $p_x$  es la probabilidad de que la variable  $X$  tome el valor  $x$ ,  $H(X, Y)$  es la entropía conjunta

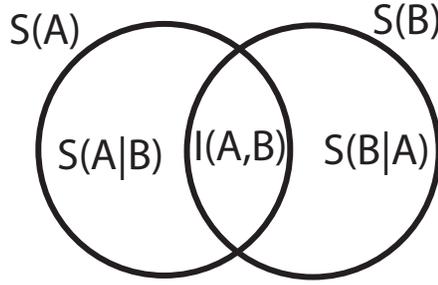


Figura 2: Entropías de un sistema bipartito

para las dos variables y  $H(X|Y)$  es la entropía condicional definida mediante  $H(X|Y) = \sum_y p_y H(X|y)$ , es decir, es la entropía de la variable  $X$  dado que se obtuvo el valor  $y$  en la variable  $Y$ . A través del teorema de Bayes se puede demostrar que  $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$ , por lo que las dos expresiones (28) son equivalentes.

De forma análoga a los sistemas clásicos se puede definir la información mutua como se ilustra en la figura 2 a través de

$$\mathcal{I}(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}), \quad (29)$$

donde ahora  $S$  representa la entropía de Von Neumann.  $\rho^{AB}$  es la matriz de densidad del sistema completo y  $\rho^{A(B)}$  las matrices reducidas de cada subsistema que se obtienen mediante  $\rho^{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)}[\rho^{AB}]$ .

Las cantidades  $I$  y  $J$  no son más equivalentes cuando se consideran sistemas cuánticos. La diferencia entre  $I$  y  $J$  surge de la dificultad de definir el equivalente de  $J$  para sistemas cuánticos, esto debido al término condicional. Pues la entropía condicional cuántica implica realizar una medición en uno de los subsistemas para así ganar información sobre el otro. Con esto, se puede definir la entropía condicional de A, dado que se ha medido B (Ollivier y Zurek, 2001) mediante

$$S(\rho_{\Pi^B}^A)(A|B) = \sum_i p_i S(\rho_i^A), \quad (30)$$

donde  $\Pi_i^B$  son los elementos del POVM de medición sobre el sistema  $B$ , tal como se definieron en secciones previas. De esta manera, se puede obtener  $J$  como

$$J_{cl}(A|B) = S(\rho^A) - S(\rho_{\Pi^B}^A)(A|B). \quad (31)$$

Cabe destacar, que se ha nombrado  $J_{cl}$  en (31) puesto que esta entropía condicional está relacionada con las correlaciones que surgen de forma clásica, puesto que son las que están relacionadas con una medición y con sus posibles resultados que son de naturaleza clásica. Sin embargo,  $J_{cl}$  depende de los elementos del POVM seleccionados, por lo que obtener el discord, implica buscar los elementos que maximicen (31) dado que indican la correlación clásica máxima del sistema. De ahí se desprende que la definición del QD, considerando que las mediciones se realizan en el sistema  $B$  incluya una optimización como sigue

$$D_B(\rho^{AB}) = \mathcal{I}(\rho^{AB}) - \text{máx } J_{cl}(A|B). \quad (32)$$

El QD mostrado en (32) se denomina discord de  $B$  a  $A$  y no es necesariamente simétrico para el caso contrario. Finalmente, la expresión en (32) se puede escribir como

$$D_B(\rho^{AB}) = S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) + \min_{\{\Pi_i\}} [S(\rho_{\Pi^B}^A)(A|B)]. \quad (33)$$

Es importante hacer la aclaración que el QD es equivalente al entrelazamiento en sistemas puros (Modi et al., 2012).

### 2.6.3. Estimadores de las correlaciones no clásicas

En la sección anterior se vio la definición formal del QD. No obstante, esta definición como depende de las mediciones realizadas en uno de los subsistemas resulta en general muy complicada cuando la dimensionalidad del sistema sobre el que se realiza la medición es mayor a 2, debido a que los elementos de los POVMs involucrados al medir un sistema de dimensión  $n$  tendrán en general  $n^2 - 1$  parámetros libres que deberán ser optimizados con el fin de maximizar las correlaciones clásicas que pueden ser obtenidas.

Un estimador de correlaciones no clásicas, siguiendo el trabajo de Brodutch y Modi (Brodutch, A., Modi, 2012) debe reunir las siguientes características necesariamente:

- los estados factorizables y los clásicos no tienen correlaciones cuánticas,
- las correlaciones son invariantes ante transformaciones unitarias locales y,
- todas las correlaciones son no negativas.

Con estas características, se introducen dos mediciones basadas en las perturbaciones que induce una medición simultánea en los dos subsistemas, la perturbación inducida por la medición (MID - *measurement induced disturbance*) y su versión MID optimizada (AMID - *ameliorated MID*).

El MID se basa en la diferencia entre la información mutua existente en el sistema original y la información mutua dado que el sistema fue medido de manera simultánea en ambas partes. Esto se puede definir mediante

$$MID = I(\rho^{AB}) - I(\rho^{AB'}), \quad (34)$$

donde  $\rho^{AB'}$  representa el sistema posterior a la medición como  $\rho^{AB'} = \sum_{i,j} p_{i,j} \Pi_a \otimes \Pi_b$ . Donde  $\Pi_i$  representa los POVMs.

La versión optimizada de (34) es simplemente aquella que resulta cuando cuando las correlaciones clásicas son máximas para cualquier POVM, lo que se traduce en la definición del AMID

$$\mathcal{A} = I(\rho^{AB}) - \max_{\{\Pi_a \otimes \Pi_b\}} I(\rho^{AB'}). \quad (35)$$

## 2.7. Fundamentos cuánticos de la luz

En esta sección se describirán los fundamentos de la teoría cuántica de la luz que son necesarios para el tratamiento de los estados coherentes con fotones agregados que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Asimismo se describirán algunas propiedades de dichos estados, transformaciones lineales, detección y generación. Explicaciones más detalladas se pueden encontrar en casi cualquier libro en la materia, por ejemplo (Leonhardt, 1997; Scully y Zubairy, 2008).

### 2.7.1. Cuantización de la luz y fotones individuales

En el presente trabajo se estudian las propiedades de estados híbridos entre variable discreta y variable continua. Sin embargo, antes de describir cualquiera de estos estados, es necesario cuantizar el campo electromagnético, para el que la mínima unidad de energía es el fotón.

Esto nos regresa sin embargo a un punto más fundamental, ¿qué es un fotón? Para responder a esto consideremos a la luz como una onda electromagnética que se encuentra confinada en una cavidad; luego, las soluciones a las ecuaciones de Maxwell dentro de la cavidad imponen como condiciones de frontera que el campo se anule en los extremos de la cavidad, esto implica que existen sólo ciertos modos longitudinales permitidos, los que a su vez cumplen con ser un múltiplo entero de la longitud de onda del campo a lo largo del recorrido que realice. De esto resulta que la energía de cada uno de estos modos está cuantizada (Loudon, 2003) y es de la forma

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega. \quad (36)$$

Esto implica que los modos radiativos de la cavidad están restringidos a cantidades de energía discretas. A partir de la naturaleza discreta de los modos radiativos pueden definirse los operadores de creación y aniquilación de fotones (o modos radiativos) como aquellos que incrementan o decrecen un nivel en la energía dada por (36). Los cuales están definidos mediante

$$\hat{a}_i^\dagger |n\rangle_i = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_i, \quad (37a)$$

y,

$$\hat{a}_i |n\rangle_i = \sqrt{n} |n-1\rangle_i. \quad (37b)$$

De (37) se observa que si el operador de creación actúa sobre el vacío  $\hat{a}^\dagger |0\rangle$  se creará un estado de un fotón individual  $|1\rangle$ , y el proceso contrario cuando se aplica el operador de destrucción al estado de un fotón. Asimismo si el operador de destrucción es aplicado al vacío se cumple  $\hat{a} |0\rangle = 0$ .

El campo radiativo es cuantizado utilizando los operadores de creación y aniquilación presentes en el oscilador armónico,  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ , con la condición de conmutación bosónica  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  como:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (38)$$

Con el campo eléctrico representado por:

$$\hat{E}_{\hat{e}_k}(\vec{r}, t) = E_0(\hat{a}e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + \hat{a}^\dagger e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}), \quad (39)$$

donde  $\hat{\epsilon}_k$  representa la dirección de propagación del modo observado.

### 2.7.2. Cuadraturas del campo

Los operadores de creación y aniquilación no son operadores observables, por eso, es conveniente definirlos en términos de observables físicas denominadas cuadraturas del campo como:

$$\hat{q} = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{2}, \quad (40a)$$

y,

$$\hat{p} = \frac{i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}{2}, \quad (40b)$$

las cuales representan las partes real e imaginaria respectivamente de la amplitud compleja del campo eléctrico monomodal. Tienen la relación de conmutación  $[\hat{q}, \hat{p}] = 2i$ . Lo que permite escribir el campo eléctrico mediante

$$\hat{E}_{\hat{\epsilon}_k}(\vec{r}, t) = \ell(\omega)\hat{\epsilon}[\hat{q}\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{p}\sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad (41)$$

donde  $\ell(\omega)$  es alguna función de la frecuencia.

En general, las cuadraturas contenidas en (40) se pueden escribir como

$$\hat{X}_\phi = (\hat{a}^\dagger e^{i\phi} + \hat{a}e^{-i\phi}), \quad (42)$$

con lo que  $\hat{q} = \hat{X}_0$  y  $\hat{p} = \hat{X}_{\pi/2}$ , son una cuadratura para una fase  $\phi$  particular.

### 2.7.3. Estados coherentes y comprimidos

Un estado de gran importancia es el *estado coherente*, el cual es un estado clásico y describe la luz láser. Los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ . Los estados coherentes expandidos sobre la base de número tienen la representación:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (43)$$

Es posible expresar los estados coherentes en términos del estado vacío  $|0\rangle$  con la aplicación de un desplazamiento en el plano de fase por una cantidad compleja  $\alpha$  aplicado por el operador de desplazamiento:

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathcal{D}}(\alpha) |0\rangle, \quad (44)$$

donde  $\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ , del que resulta importante su efecto sobre los operadores como  $\hat{\mathcal{D}}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$  y  $\hat{\mathcal{D}}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$ . Los estados coherentes tienen la característica de ser de mínima incertidumbre:

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} = \Delta X\Delta X_{\pi/2} = \frac{1}{4}, \quad (45)$$

y la incertidumbre de sus cuadraturas es igual. Estos estados se han utilizado en diversos ámbitos de las comunicaciones, entre ellos protocolos para QKD (Mendieta, Arvizu Mondragón, Muraoka, Gallion, y Sanchez, 2009; Xu, Arvizu Mondragón, Gallion, y Mendieta, 2009) donde la información se codifica en las fases de las cuadraturas.

Los estados de luz pueden graficarse en el plano complejo con ayuda de las definiciones para las cuadraturas (40). En la figura 3 se muestra la representación para un estado coherente  $|\alpha\rangle$ , basta con obtener los valores esperados y las varianzas de  $X_0$ ,  $X_{\pi/2}$  y  $\hat{N}$  (Caves, 1981), los cuales son  $\langle X_0 + iX_{\pi/2} \rangle = \alpha$ ,  $\Delta X_0\Delta X_{\pi/2} = 1/2$ ,  $\langle N \rangle = |\alpha|^2$  y  $\Delta N = |\alpha|$ . Podemos notar que un estado coherente se puede graficar en un plano de amplitudes complejas con  $X_0$  y  $X_{\pi/2}$  como los ejes, centrado en un círculo de error que tiene la expresión  $X_0^2 + X_{\pi/2}^2 = |\alpha|^2$  que denota el círculo de radio  $\alpha$  centrado en el origen. Después las incertidumbres de las cuadraturas son empleadas para dibujar el círculo que define al estado coherente.

Se puede reducir la variación de una de las cuadraturas a costa de incrementarla en la otra. Dichos estados reciben el nombre de estados comprimidos (*squeezed states*). En ellos, una de las cuadraturas tiene una varianza menor al ruido cuántico. Si el producto de las desviaciones estándar de cada cuadratura se mantiene como el mínimo, entonces tendríamos un estado idealmente comprimido, aunque en la práctica esto no sucede. Teóricamente la acción de compresión se obtiene de aplicar el operador *squeezing*:

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left[\frac{1}{2}(\zeta^*\hat{a}^2 - \zeta\hat{a}^{\dagger 2})\right], \quad (46)$$

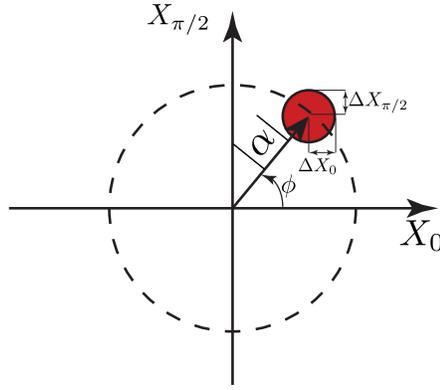


Figura 3: Detección homodina balanceada

donde  $\zeta = re^{i\phi}$  es el parámetro de *squeezing* que establece como cambian las incertidumbres a través de  $r$  en la dirección  $\phi$ , el cual cumple la propiedad

$$\hat{S}^\dagger(\zeta) = \hat{S}^{-1}(\zeta) = \hat{S}(-\zeta). \quad (47)$$

El efecto del operador de compresión sobre los operadores de creación y aniquilación es como sigue:

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \hat{a}\cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{i\phi}\sinh(r)$$

y,

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\zeta) = \hat{a}^\dagger\cosh(r) - \hat{a}e^{i\phi}\sinh(r).$$

Para apreciar el efecto de este operador sobre las cuadraturas del campo, se observa su efecto:

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)(\hat{q}' + i\hat{p}')\hat{S}(\zeta) = e^{-r}\hat{q}' + e^r i\hat{p}', \quad (49)$$

donde  $\hat{q}'$  y  $\hat{p}'$  son las cuadraturas del campo rotadas por un ángulo  $\phi/2$ , de la forma:

$$\hat{q}' + i\hat{p}' = (\hat{q} + i\hat{p})e^{-i\phi/2}. \quad (50)$$

Se ve claramente que la incertidumbre de las cuadraturas es modificada por el factor  $e^{\pm r}$ . Estos estados, al ser estados coherentes comprimidos, se pueden expresar en términos del estado vacío como:

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)\hat{\mathcal{D}}(\alpha)|0\rangle \quad (51)$$

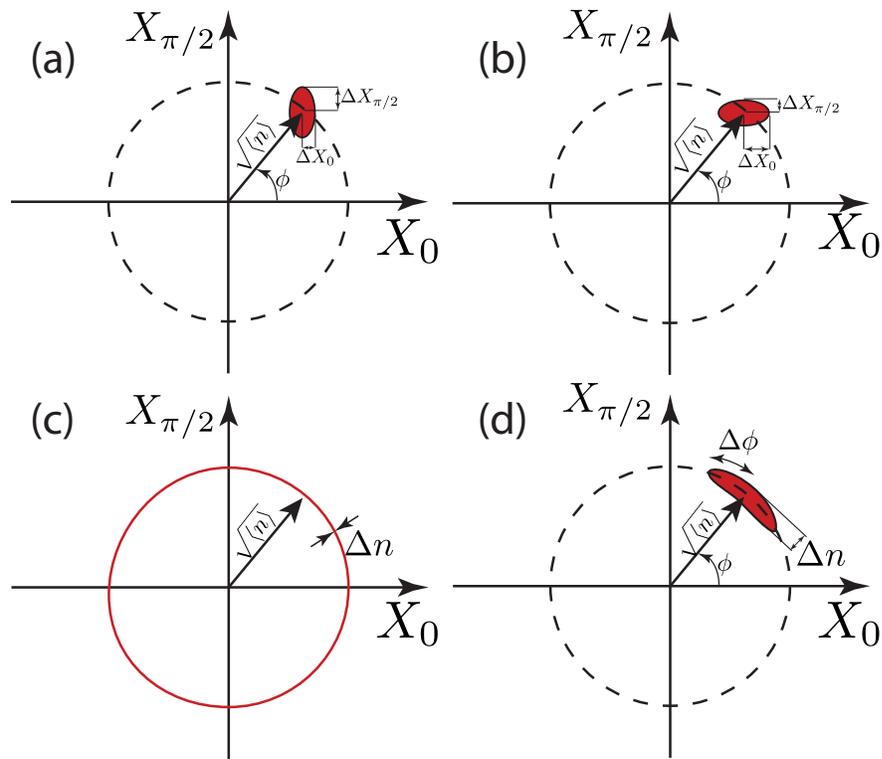


Figura 4: Representación de diferentes estados comprimidos. En (a)-(b) estados comprimidos en cuadratura. En (c) un estado de Fock. en (d) un estado comprimido en número de fotones.

La visualización del efecto del *squeezing* sobre algunos estados se muestra en la figura 4. En las figuras 4(a) y 4(b) se muestra un estado comprimido en cuadratura, esto se puede notar en que la varianza de cuadratura es menor en una dirección a la correspondiente para el estado coherente. La obtención de los contornos mostrados en 4(a)-(b) se realiza de forma equivalente que para el caso coherente, es decir se calculan los valores esperados y las varianzas pero ahora de las cuadraturas rotadas las varianzas de  $q'$ ,  $p'$  y  $\hat{N}$  tal como se definieron en la ecuación (50), en (a)  $\phi = 0$  y en (b)  $\phi/2 = \pi/2$ . A manera de referencia, en las figuras 4(c)-(d) se muestran estados comprimidos en número, es decir que tienen un número promedio de fotones más definido a costa de tener una mayor incertidumbre en la fase. Por un lado en 4(c) se muestra un estado de Fock y en 4(d) un estado comprimido entre Fock y coherente.

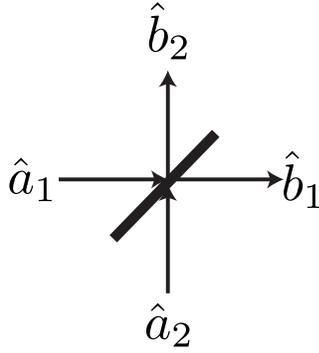


Figura 5: Divisor de haz

#### 2.7.4. Divisor de haz

Un divisor de haz (BS - *beamsplitter*) es un elemento óptico que divide un rayo de luz incidente en dos con una proporción establecida que debe conservar energía. La transformación que ejerce el BS debe ser reversible y unitaria. La figura 5 muestra un divisor de haz compuesto por las entradas  $\hat{a}_1$  y  $\hat{a}_2$  y las salidas  $\hat{b}_1$  y  $\hat{b}_2$ . En este trabajo resulta de gran importancia el efecto que tiene el BS sobre los campos de entrada ya que será utilizado para preparar estados entrelazados a partir de estados de fotones individuales y estados coherentes. Además es parte fundamental de la detección homodina, la cual es un método de medición de campos ópticos que se utilizará para modelar estimadores de correlaciones cuánticas.

El BS realiza la transformación (Campos, Saleh, y Teich, 1989) de forma general

$$\hat{U}_{BS}(\theta) = \exp\left(\theta(\hat{a}_1^\dagger \hat{b}_2 e^{i\phi} - \hat{a}_2^\dagger \hat{b}_1 e^{-i\phi})\right), \quad (52)$$

la que si se aplica sobre los operadores para obtener su efecto arroja la forma matricial siguiente

$$\begin{aligned} \hat{U}_{BS}^\dagger(\theta) \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} \hat{U}_{BS}(\theta) \\ = \begin{pmatrix} t & r e^{i\phi} \\ -r e^{-i\phi} & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (53)$$

donde  $\phi$  es la diferencia de fase entre los rayos reflejados y transmitidos,  $t = \cos(\theta)$  y  $r = \sin(\theta)$ , son los coeficientes de transmisión y reflexión de los campos incidentes en el BS. En (53) se observa que se pueden tener BS que realicen distintas transformaciones, dados  $\{\theta, \phi\}$ .

Campos et al. (1989) determinaron que la representación más simple del BS es aquella que no agrega fase a los campos de entrada, es decir,  $\phi = 0$ . Es a esta transformación aunado a la condición 50/50, es decir  $\theta = \pi/4$  a la que se recurre más ampliamente en este trabajo por sencillez, la cual transforma los operadores como sigue

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2), \quad (54a)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{a}_1 + \hat{a}_2). \quad (54b)$$

Estas transformaciones son suficientes para generar estados entrelazados partiendo incluso de estados previamente no entrelazados sólo con un BS (Kim et al., 2002; Qing-Ping et al., 2004).

### 2.7.5. Detección homodina

La detección de la luz en términos del número de fotones es relativamente sencilla, pues está relacionada con la intensidad. No obstante, no permite recuperar información sobre las fases del campo, información que es relevante para conocer las propiedades de los estados cuánticos de la luz involucrados. Se pueden conocer estas propiedades indirectamente a través de las cuadraturas del campo. La detección de la cuadraturas se puede hacer a través de la detección homodina.

El esquema de la detección homodina balanceada se muestra en la figura 6. La detección consiste en la mezcla de un campo débil  $\hat{a}_0$  por detectar y un campo intenso  $\hat{a}_1$  conocido denominado oscilador local (LO - *local oscillator*) donde se observa el resultado que se obtiene a través de la resta de las fotocorrientes de los detectores mostrados. Dichos detectores son sensibles al número promedio de fotones incidentes en la forma  $\langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle$  y  $\langle \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \rangle$  respectivamente. La diferencia de las fotocorrientes será proporcional a  $H = \langle \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \rangle - \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle$ , el cual se puede demostrar, utilizando el efecto del BS como se muestra en la ecuación siguiente

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_2(\omega) \\ \hat{a}_3(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{T} & i\sqrt{R} \\ i\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0(\omega) \\ \hat{a}_1(\omega) \end{bmatrix}. \quad (55)$$

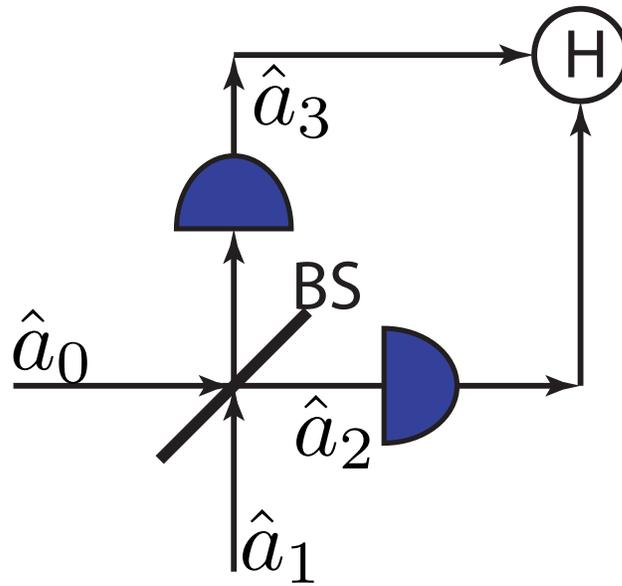


Figura 6: Detección homodina balanceada

En el caso de un divisor 50/50, donde  $T = R = 1/2$ ,  $H = -i(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0)$  (Scully y Zubairy, 2008), el cual considerando el campo del modo  $\hat{a}_1$  como clásico y muy intenso, permite hacer la sustitución  $\hat{a}_1 = |\beta_l| e^{i\phi_l}$ , y produce el resultado

$$\langle H \rangle = -|\beta_l| \langle X(\phi_l + \pi/2) \rangle, \quad (56)$$

donde  $X(\phi_l) \equiv X_{\phi_l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 e^{-i\phi_l} + \hat{a}_0^\dagger e^{i\phi_l})$ . Este resultado tiene repercusiones importantes, pues sólo aparecen los términos relacionados con la interferencia del LO y la señal, por lo que es posible obtener información de la fase de los campos a través de esta medición. Adicionalmente, es importante notar que al ser un proceso interferométrico, no es necesaria la sensibilidad al nivel de fotones individuales, sino más bien detecciones de corrientes clásicas.

### 2.7.6. Estados coherentes con fotones agregados

Los estados coherentes con  $m$  fotones agregados (PACS - *photon added coherent states*) son el resultado de  $m$  excitaciones individuales del proceso de amplificación paramétrica de la luz. Los estados resultantes se encuentran en medio de los estados puramente cuánticos (de Fock) y los puramente clásicos (coherentes) por lo que han permitido estudiar la transición entre ambos mundos (Zavatta et al., 2004).

Los SPACS fueron primeramente introducidos por Agarwal y Tara (Agarwal y Tara, 1991) y se forman al aplicar  $\hat{a}^{\dagger m}$  sobre un estado coherente, por lo que pueden definirse mediante

$$|\alpha, m\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m}}{(\langle \alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger m} | \alpha \rangle)^{1/2}} |\alpha\rangle. \quad (57)$$

Estos estados, han resultado interesantes para estudiar las transiciones entre el mundo cuántico de estados de Fock o fotones individuales y el mundo macroscópico de los estados coherentes (Zavatta et al., 2004). Esto puede verse en la ecuación (57), de tal forma que si  $|\alpha| \rightarrow 0$  el estado que se tiene es un estado de Fock y cuando  $|\alpha| \rightarrow \infty$  el estado es para fines prácticos un estado coherente. A manera de introducción se muestran algunas propiedades de estos estados. En general el traslape de dos estados con fotones agregados es no nulo y está mediado por el término

$$\langle \alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | \beta \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \sum_i \frac{(\alpha^* \beta)^i \beta^{m-n} (m+i)!}{i! (i+m-n)!}. \quad (58)$$

La demostración de (58) se desarrolla en el capítulo 3. De esta expresión es fácil notar que el traslape es cero para uno de los estados con amplitud nula y máximo cuando las amplitudes de cada estado son grandes.

Las propiedades no clásicas de los PACS fueron ampliamente estudiadas por Agarwal y Tara (Agarwal y Tara, 1991), ellos mostraron que la varianza de cuadratura que está relacionada con el *squeezing* depende tanto de  $\alpha$  como del número de fotones agregados  $m$ . Un parámetro importante para conocer las características no clásicas de los PACS es el parámetro de Mandel  $Q$  (Mandel, 1979) que permite conocer las características estadísticas de un estado. Para  $Q = 1$  se tiene estadística Poissoniana, para  $Q > 1$  la estadística es super Poissoniana, en estos dos casos los estados siguen estadística clásica. Para  $Q < 1$  los estados tienen estadística sub Poissoniana, lo cual es una señal de su característica no clásica, al estar relacionada con el *anti bunching*, es decir que la probabilidad de encontrar un número fijo de fotones en una ventana temporal bien establecida es mayor comparada con los campos clásicos. En otras palabras, los estados denominados cuánticos bajo esta definición presentan una menor fluctuación en el número de fotones. Este parámetro se calcula mediante

$$Q(\alpha, m) = \frac{\langle (\hat{a}^{\dagger} \hat{a})^2 - \langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle^2 \rangle}{\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle}. \quad (59)$$

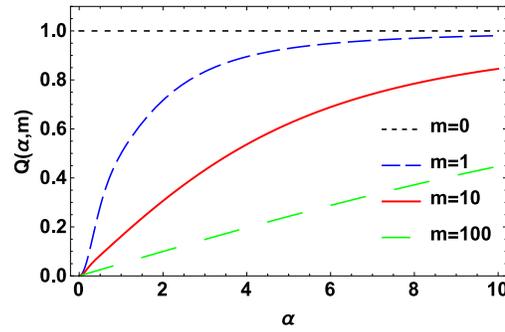


Figura 7:  $Q(\alpha, m)$  para el estado  $|\alpha, m\rangle$  dependiente de  $\alpha$ , con  $m$  fijo.

En la figura 7 se muestra el parámetro de Mandel dependiente de  $\alpha$  para distintos valores de  $m$ . Se puede observar que para el estado coherente ( $m = 0$ ) se tiene  $Q = 1$ , es decir una estadística de Poisson, mientras que para valores diferentes de  $m$  se tiene un parámetro  $Q$  que se incrementa conforme  $|\alpha|$  crece, por lo que es posible ver la transición de un estado cuántico a uno clásico variando  $\alpha$ .

Si bien los PACS en general presentan características interesantes, los que están formados por únicamente un fotón agregado denominados SPACS (*single PACS*) son más sencillos de realizar experimentalmente, ya que sólo requieren una excitación individual en el proceso de amplificación paramétrica (Zavatta et al., 2004). Son las propiedades de los SPACS las que se estudian con más detalle en este trabajo y cuyas superposiciones se proponen para realizar teleportación.

Las características de los SPACS se pueden apreciar a través de su representación con la función de *quasi*-probabilidad de Wigner. La función de Wigner está definida mediante (Leonhardt, 1997)

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi} \langle q - \xi/2 | \hat{\rho} | q + \xi/2 \rangle d\xi. \quad (60)$$

La función (60) se denomina de *quasi*-probabilidad porque no es bien comportada, es decir, que si bien es una función real,  $W(q, p)$  puede tomar valores negativos. De hecho las negatividades en la función de Wigner se asocian con estados no clásicos (Lütkenhaus y Barnett, 1995; Kenfack y Yczkowski, 2004).

Para ilustrar las características no clásicas de los SPACS se obtiene la función de Wigner

del estado  $|\alpha, 1\rangle$  a través de (60) como sigue

$$W(\xi) = \frac{-2(1 - |2\xi - \alpha|^2)}{\pi(1 + |\alpha|^2)} e^{-2|\xi - \alpha|^2}, \quad (61)$$

donde  $\xi = X + iX_{\pi/2}$ . En la figura 8 se muestra la función de Wigner para el estado SPACS  $|\alpha, 1\rangle$  para diferentes valores de  $\alpha$  en (a)  $\alpha = 0$  que es equivalente al estado de Fock  $|1\rangle$ , (b)  $\alpha = 0,5$  donde puede apreciarse un estado intermedio entre Fock y Coherente, (c)  $\alpha = 2$  ya no se observan negatividades en la función de Wigner, pero el estado no se ve perfectamente simétrico, (d)  $\alpha = 20$  la función de Wigner se ve prácticamente como la correspondiente a un estado coherente. En las figuras 8(a)-(b) existe una región negativa, este mal comportamiento de la función de distribución es considerado una señal de su no clasicidad (Kenfack y Yczkowski, 2004), asimismo, esta negatividad depende de  $|\alpha|$  y conforme  $\alpha$  aumenta, la no clasicidad de estos estados disminuye. En resumen, al incrementar  $\alpha$  desde cero es posible ver la transición cuántica-clásica.

Una característica interesante de los SPACS es su grado de *squeezing* o compresión, el cual puede calcularse de manera directa evaluando  $\langle X_\phi \rangle = \frac{|\alpha|(2+|\alpha|^2)\cos(\phi)}{1+|\alpha|^2}$  con lo que se obtiene su varianza (Zavatta et al., 2004; Agarwal y Tara, 1991)

$$\Delta X_\phi = \frac{1}{4} + \frac{1 - |\alpha|^2 \cos(2\phi)}{2(1 + |\alpha|^2)}. \quad (62)$$

La varianza de cuadratura para los SPACS mostrada en (62) muestra que las menores varianzas se obtienen con  $\phi = 0$ . En la figura 9 se muestra la varianza de cuadratura  $\Delta X_\phi^2$  para SPACS dependiente de  $\alpha$ . En la figura se muestra  $\Delta X_0^2$  y  $\Delta X_{\pi/2}^2$ , con la línea punteada negra a  $\Delta X_\phi^2 = 1/4$  que es la varianza cuadrada esperada para un estado coherente. Se puede observar que  $\Delta X_0^2$  cruza la línea  $\Delta X_\phi^2 = 1/4$  en aproximadamente  $\alpha \approx 0,9$ ; sin embargo, al incrementar el valor de  $\alpha$  la varianza vuelve a incrementar y tiende asintóticamente al valor clásico.

### 2.7.7. Fuentes de fotones individuales

Tanto la computación, como la criptografía cuántica, están basadas en el uso de estados de Fock individuales. Debido a la dificultad para lograr dichos estados, se utilizan generalmente, pulsos láseres débiles, emisores cuánticos o pares de fotones entrelazados, entre otros

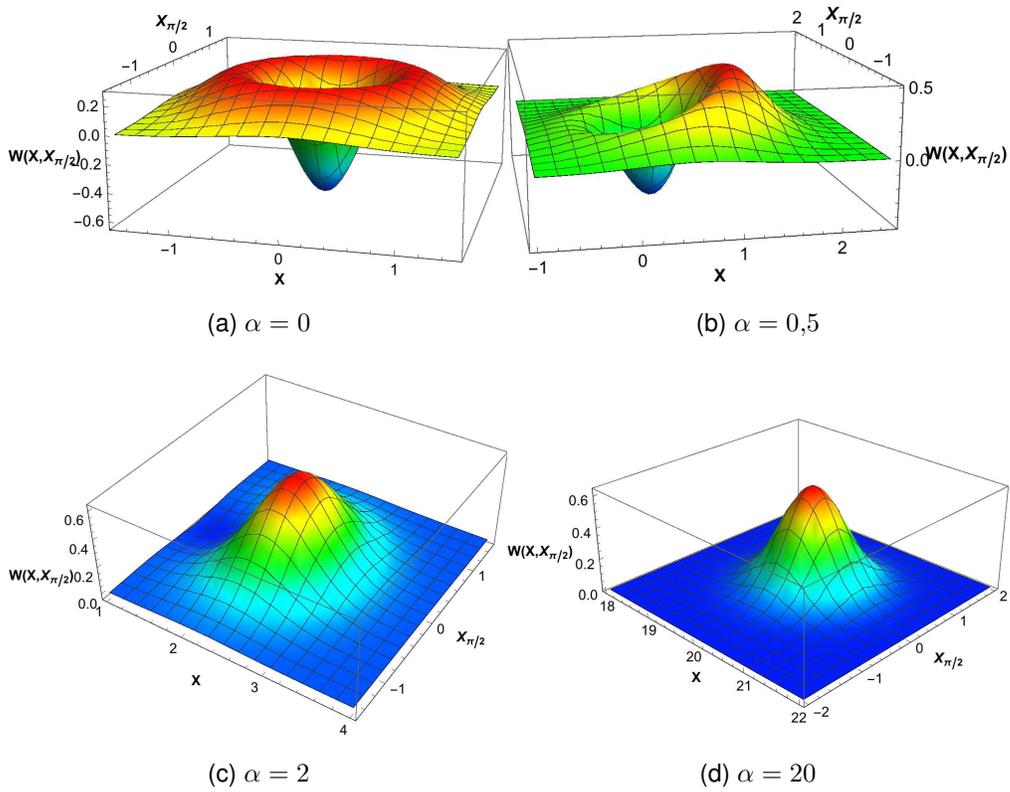


Figura 8: Función de Wigner para el estado SPACS  $|\alpha, 1\rangle$  para diferentes valores de  $\alpha$ . (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 0,5$ , (c)  $\alpha = 2$ , (d)  $\alpha = 20$ .

(Lounis y Orrit, 2005; Takeuchi, 2014). Entre las distintas fuentes de fotones individuales disponibles, sobresalen las basadas en parejas de fotones entrelazados, que se utilizan para anunciar la presencia de un fotón individual de forma indirecta por detección del fotón complementario. De hecho los estados anunciados de fotones individuales (HSPS - *heralded single photon sources*) son considerados los más adecuados para las aplicaciones de información cuántica dado el nivel de pureza que se puede alcanzar con este tipo de fuentes (Takeuchi, 2014).

En esta sección se describe a grandes rasgos el proceso del anunciamiento de fotones provenientes de un par entrelazado. Para la descripción se utilizará la mezcla de cuatro ondas en el régimen espontáneo (SFWM - *spontaneous four wave mixing*), efecto no lineal de tercer orden  $\chi^{(3)}$ , cuyos conceptos fundamentales son igualmente aplicables al segundo orden  $\chi^{(2)}$  (Agrawal y Agrawal, 2013). Se hace la descripción en  $\chi^{(3)}$  dado que como parte final de este

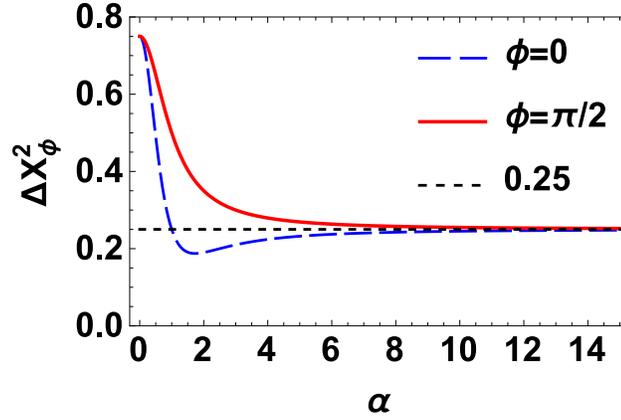


Figura 9: Varianza de cuadratura para SPACS  $\Delta X_\phi^2$  dependiente de  $\alpha$ . Se muestra  $\Delta X_0^2$ ,  $\Delta X_{\pi/2}^2$ . La línea punteada negra es la varianza de un estado coherente.

trabajo se propone una aplicación utilizando estados provenientes del SFWM.

El proceso no lineal de tercer orden tiene lugar al interactuar en general dos bombeos intensos  $P_1$  y  $P_2$  en un medio con susceptibilidad  $\chi^{(3)}$ . El cual se puede describir, en el caso monomodo como la creación de dos fotones en los modos denominados señal y acompañante  $\hat{a}_s^\dagger$  y  $\hat{a}_i^\dagger$  dada la destrucción simultánea de un fotón del bombeo  $P_1$  y otro  $P_2$  (Garay-Palmett et al., 2007). Donde el estado de dos fotones se puede describir a través de una función de onda de la forma,

$$|\Psi\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i + \kappa \int \int d\omega_s d\omega_i G(\omega_s, \omega_i) |1_{\omega_s}\rangle |1_{\omega_i}\rangle, \quad (63)$$

donde la función  $G(\omega_s, \omega_i)$  reúne información del proceso de generación: la conservación de momento y energía, las características del bombeo, mientras  $\kappa$  reúne las características físicas del medio no lineal con lo que está relacionada con la eficiencia de generación. Si bien se proporcionan mayores detalles en el capítulo 6, para la descripción del anunciamiento de fotones basta con mantener a  $G(\omega_s, \omega_i)$  como una función genérica.

El anunciamiento surge por la detección de un fotón en uno de los modos, lo que se puede describir a través del observable (Christ, Fedrizzi, Hübner, Jennewein, y Silberhorn, 2013)

$$\hat{\pi}_0 = \int d\omega |0_\omega\rangle \langle 0_\omega|, \quad (64a)$$

$$\hat{\pi}_1 = \int d\omega \eta |1_\omega\rangle \langle 1_\omega|, \quad (64b)$$

donde  $|n_\omega\rangle$  implica el estado con  $n$  fotones a la frecuencia  $\omega$ . De este modo, utilizando el formalismo de la matriz de densidad, el estado conjunto por señal y acompañante es de la forma  $\rho^{si} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Por lo que el estado posterior al anuncio hasta una constante de normalización, queda descrito mediante

$$\tilde{\rho}_s = \text{Tr}[\hat{\pi}_1 \rho^{si} \hat{\pi}_1^\dagger]. \quad (65)$$

Por lo que, en general el estado anunciado será de una mezcla estadística de fotones individuales con características espectrales distintas dadas por la forma de la función  $G(\omega_s, \omega_i)$ . De aquí que mucho trabajo se ha desarrollado en la búsqueda de estados factorizables en los que la función  $G(\omega_s, \omega_i)$  se puede escribir como un producto de funciones que sólo dependan de  $\omega_s$  y  $\omega_i$  en la forma  $\mathcal{G}_1(\omega_s) \times \mathcal{G}_2(\omega_i)$ . Pues en el caso perfectamente separable, el estado anunciado es de pureza máxima (Mosley, Lundeen, Smith, Wasylczyk, et al., 2008; Vicent et al., 2010; Mosley, Lundeen, Smith, y Walmsley, 2008).

### 2.7.8. Tratamiento multimodal cuántico de la luz

Es importante destacar que los estados contenidos en (37) consideran un caso monocromático en donde existe un sólo modo y una sola polarización. En general, esto no es así, sino que se tienen muchos modos distintos, en general con diferente polarización, y los operadores actúan sobre los operadores de los modos correspondientes de la forma

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\ell} |n_{\mathbf{k}\ell}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\ell}} |n_{\mathbf{k}\ell} - 1\rangle, \quad (66a)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\ell}^\dagger |n_{\mathbf{k}\ell}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\ell} + 1} |n_{\mathbf{k}\ell} + 1\rangle, \quad (66b)$$

donde  $\ell = \{1, 2\}$  representa los modos de polarización para cada modo  $\mathbf{k}$ .

En el desarrollo de la presente tesis estaremos más interesados en las propiedades espectrales de la luz. Si bien (66) representa los estados de luz de forma general, resulta más sencillo explorar el caso de propagación colineal y con un sólo modo de polarización sin perder generalidad en el tratamiento. Con lo que las relaciones de conmutación en el espacio  $k$  son simplemente una delta de Kronecker  $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$ , y equivalentemente en frecuencia

$$\delta_{k,k'} \rightarrow \Delta\omega\delta(\omega - \omega'), \quad (67)$$

dato el espaciamiento entre modos en una dimensión como  $\Delta\omega = 2\pi c/L$ . A partir de esto, es posible definir un operador de un fotón ahora con una frecuencia bien definida

$$|1_\omega\rangle = \hat{a}^\dagger(\omega) |0\rangle, \quad (68)$$

con la condición de ortogonalidad  $\langle 1_\omega | 1_{\omega'} \rangle = \delta(\omega - \omega')$ .

Los paquetes de onda fotónicos resultan de mayor interés para la caracterización de estados con un ancho espectral determinado, y resultarán útiles para el entendimiento de las propiedades interferométricas de los SPACS. El operador de creación de un paquete de onda de un sólo fotón se define mediante

$$\hat{a}_\xi^\dagger = \int d\omega \xi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega), \quad (69)$$

donde  $\xi(\omega)$  es una función espectral normalizada que cumple  $\int d\omega |\xi(\omega)|^2 = 1$ .

De forma análoga el tratamiento multimodal de los paquetes fotónicos se extiende a los estados continuos, por ejemplo en los estados coherentes puede encontrarse como

$$|\{\alpha\}\rangle = \exp(\hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha) |0\rangle. \quad (70)$$

En (70) se ha utilizado la misma descripción que en (69) para describir a los operadores del estado coherente, y la notación  $|\{\alpha\}\rangle$  únicamente se utiliza como en (Loudon, 2003) para enfatizar la naturaleza continua del estado coherente utilizado. La otra relación que resultará muy útil es el efecto del operador de destrucción sobre el estado coherente

$$\hat{a}(\omega) |\{\alpha\}\rangle = \alpha(\omega) |\{\alpha\}\rangle, \quad (71)$$

lo que básicamente muestra una generalización del estado coherente a continuo en el cual los operadores actúan dependiendo de la frecuencia utilizada. De donde se desprende que cuando exista una función de peso sobre los operadores el efecto neto está relacionado con el traslape de las funciones espectrales de la forma

$$\int d\omega \beta^*(\omega) \hat{a}(\omega) |\{\alpha\}\rangle = \int d\omega \beta^*(\omega) \alpha(\omega) |\{\alpha\}\rangle, \quad (72)$$

la ecuación (72) resulta de gran utilidad cuando se consideran múltiples modos interactuando con funciones espectrales distintas, ya que los efectos se limitan a los traslapes de sus

funciones espectrales. De esto se desprende que el caso monocromático se puede recuperar trivialmente, dado que los traslapes de las funciones son perfectos para estos casos.

## 2.8. Teleportación cuántica

El protocolo de teleportación permite enviar un estado cuántico a través de un canal cuántico máximamente entrelazado y comunicación clásica. Fue propuesto por Bennett y colaboradores (Bennett, Brassard, y Crépeau, 1993). Alice desea enviar a Bob el estado denominado qubit  $|\varphi_C\rangle = x|0\rangle + y|1\rangle$ , donde en general  $\{x, y\} \in \mathbf{C}$  con  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ . Para lo cual comparte *a priori* el estado máximamente entrelazado

$$|\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (73)$$

con lo que el estado total se expresa como  $|\varphi_C\rangle |\Phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x|0_C0_A0_B\rangle + x|0_C1_A1_B\rangle + y|1_C0_A0_B\rangle + y|1_C1_A1_B\rangle)$ .

Considerando que cada término de la base computacional de 2 qubits se puede expresar como una combinación lineal de los estados de Bell, es fácil demostrar que (73) se puede escribir como

$$\begin{aligned} |\varphi_C\rangle |\Phi_{AB}^+\rangle &= \frac{1}{2}(x(|\Phi_{CA}^+\rangle + |\Phi_{CA}^-\rangle)|0\rangle + x(|\Psi_{CA}^+\rangle + |\Psi_{CA}^-\rangle)|1\rangle \\ &\quad + y(|\Psi_{CA}^+\rangle - |\Psi_{CA}^-\rangle)|0\rangle + y(|\Phi_{CA}^+\rangle - |\Phi_{CA}^-\rangle)|1\rangle). \end{aligned} \quad (74)$$

Al agrupar términos queda finalmente como

$$\begin{aligned} |\varphi_C\rangle |\Phi_{AB}^+\rangle &= \frac{1}{2}(|\Phi_{CA}^+\rangle(x|0\rangle + y|1\rangle) + |\Psi_{CA}^+\rangle(x|1\rangle + y|0\rangle)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(|\Psi_{CA}^-\rangle(x|1\rangle - y|0\rangle) + |\Phi_{CA}^-\rangle(x|0\rangle + y|1\rangle)). \end{aligned} \quad (75)$$

De (75) se puede observar que dependiendo del resultado de la medición conjunta por parte de Alice en la base de Bell, Bob tiene el estado a teleportar hasta una transformación unitaria que depende del resultado de la medición de Alice. La cual le comunica a Bob clásicamente su resultado para que realice la transformación correspondiente.

En esta tesis se utilizará el concepto de teleportación para modelar un protocolo *ad'hoc* con estados coherentes con fotones agregados. También es importante mencionar, que si bien sólo se mostró el protocolo de teleportación para variables discretas y nuestra propuesta

implica estados en variable continua, su aplicación es perfectamente análoga, en el sentido de que se harán una presentación en la base computacional, con lo que el protocolo se definirá en función del presentado en esta sección.

## 2.9. Canales cuánticos

Un canal de comunicación es en general un medio que se utiliza para transmitir información que está codificada de algún modo. Estas codificaciones son estados de algún sistema clásico o cuántico, que representa información a transmitir.

Un canal cuántico es una mapa dinámico que transforma los estados de entrada en estados de salida, es completamente positivo y preserva la traza (Holevo y Giovannetti, 2012). El libro de texto *Entangled Systems* de Audretsch (Audretsch, 2007) define a la acción de cualquier operación cuántica como el efecto de haber pasado a través de un canal cuántico.

Formalmente, el canal transforma estados descritos por un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  en estados de otro espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  que en general es distinto de  $\mathcal{H}_1$  definido mediante (Keyl y Werner, 2002):

$$T : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1). \quad (76)$$

En donde cada  $T$  se puede escribir en términos de operadores de Kraus. Los operadores de Kraus son un conjunto completo que mapea matrices de densidad en matrices de densidad. El caso ideal es cuando el canal no es afectado, para el cual  $T = \mathbb{1}$  lo que en un enlace de comunicación resulta virtualmente imposible pues implica que no existe interacción alguna con el ambiente.

Para ejemplificar mejor un canal cuántico consideremos la matriz de densidad bipartita que será el canal cuántico formada de la siguiente manera

$$\rho^{AB} = \sum_{m,n,o,p} c_{m,n} c_{o,p}^* |\alpha, m\rangle^A |\beta, n\rangle^B \langle \alpha, o|^A \langle \beta, p|^B, \quad (77)$$

donde  $|\gamma, i\rangle$  es un PACS para el que  $\gamma = \{\alpha, \beta\}$  representan las amplitudes del estado coherente con  $i = \{m, n, o, p\}$  fotones agregados y  $c_{m,n}$  ( $c_{o,p}^*$ ) son coeficientes de la superposición. Asumiendo que el canal es sometido a fuentes de ruido, se considerarán dos situaciones:

- pérdidas por esparcimiento asumiendo que sólo ocurren en el modo  $A$ , este tipo de pérdidas tienen dos resultados posibles
  - perder un fotón con probabilidad  $1 - \eta$ , esto produce un estado proporcional a  $\rho_{loss}^{AB} \propto \hat{a} \rho^{AB} \hat{a}^\dagger$  normalizado, donde la pérdida se muestra como la acción del operador de aniquilación sobre el estado original,
  - que el estado quede igual con probabilidad  $\eta$ .

Esto implica que el estado posterior al mecanismo de esparcimiento es de la forma

$$\rho^{AB}(\eta) = (1 - \eta)\rho_{loss}^{AB} + \eta\rho^{AB}. \quad (78)$$

- Luego si el canal se somete a fluctuaciones de fase relativa, tal que es el resultado de operar  $e^{i\hat{a}^\dagger \hat{a} \phi}$  sobre el modo  $A$  con una distribución  $p(\phi)$  se obtiene finalmente

$$\rho(\eta, \phi) = \int d\phi p(\phi) e^{i\phi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \rho^{AB}(\eta) e^{-i\phi \hat{a}^\dagger \hat{a}}. \quad (79)$$

Una aplicación explorada de los canales propuestos en esta tesis es la teleportación cuántica. En este proceso Bob quiere enviar a Alice que se encuentra en un lugar remoto el estado cuántico de alguna entidad, como se vio en la sección anterior. El proceso de teleportación en sí mismo describe un canal cuántico. El canal cuántico compartido utilizado como recurso para hacer teleportación se puede ejemplificar en general con un estado mixto como el mostrado en la ecuación (79). El estado de la ecuación (79) tiene la forma de los que se proponen en este trabajo en los capítulos posteriores.

## 2.10. Distinción de SPACS mediante interferometría

La interferometría, que inicialmente sirviera para probar la inexistencia del éter. Sigue siendo utilizada actualmente sobre todo en metrología, donde permite medir variaciones de distancias muy pequeñas. Recientemente se han empleado para la búsqueda y detección de ondas gravitacionales (Schnabel, Harms, Strain, y Danzmann, 2004; Schnabel, Mavalvala, McClelland, y Lam, 2010).

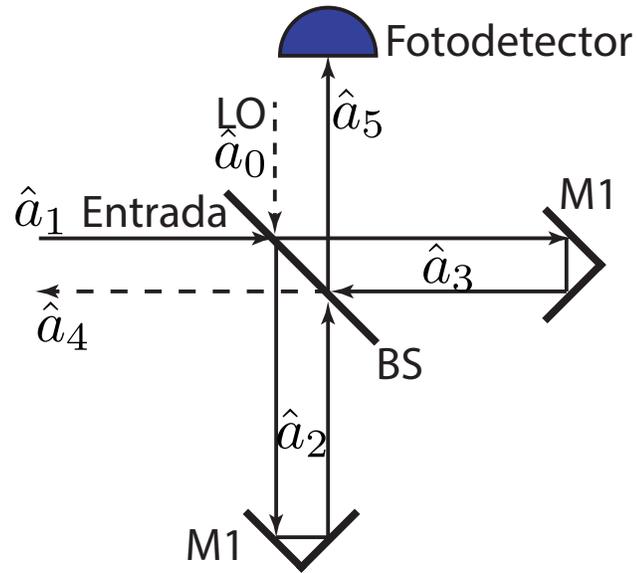


Figura 10: Interferómetro Michelson-Morley con las entradas como el campo  $\hat{a}_1$ , oscilador local  $\hat{a}_0$  y las salidas  $\hat{a}_4$  y  $\hat{a}_5$ .

En la figura 10 se muestra un interferómetro de Michelson y Morley (MMI - *Michelson Morley Interferometer*) con dos entradas. En general consta de un espejo semirreflejante (BS - *beamsplitter*) y dos espejos completamente reflejantes M1 y M2, de los cuales uno es fijo y el otro puede ser móvil y de un detector de intensidad. En la figura se muestran los operadores de aniquilación correspondientes a cada etapa del interferómetro  $\hat{a}_i$ . El MMI consta de dos fuentes de luz de entrada  $\hat{a}_0$  y  $\hat{a}_1$  denominadas oscilador local (LO - *local oscillator*) y fuente de entrada, esto debido a que las características del LO se conocen y las de  $\hat{a}_1$  se quieren estudiar. El MMI tiene dos salidas  $\hat{a}_4$  es descartada y  $\hat{a}_5$  que se dirige a un detector de fotones para medir su intensidad. Los modos  $\hat{a}_2$  y  $\hat{a}_3$  son internos entre el divisor de haz y los espejos.

Una utilidad importante del MMI en óptica cuántica es que el resultado de la detección del fotodetector está relacionada con la coherencia de la luz de entrada, como se verá brevemente. Adicionalmente, un MMI puede exhibir diferencias entre luz clásica y cuántica (Langangen, Vaskinn, y Skagerstam, 2012).

Para obtener el patrón de interferencia considerando que un estado de entrada es un SPACS y un estado coherente como

$$|\psi\rangle_{\text{entrada}} \propto |\alpha_0, 1\rangle |\alpha_1\rangle, \quad (80)$$

se obtiene la fotocorriente del detector en el modo  $\hat{a}_5$  que será proporcional a  $\text{out} \langle \hat{a}_5^\dagger \hat{a}_5 \rangle_{\text{out}} = {}_5 \langle \hat{a}_5^\dagger \hat{a}_5 \rangle_5$ . Los detalles de este cálculo se encuentran en el apéndice A. La intensidad de este proceso de interferencia tiene el comportamiento siguiente

$$\begin{aligned}
I(\tau) \propto & \frac{1}{2} \left( \alpha_0^4 \left( e^{-\frac{1}{4}\sigma_0^2\tau^2} (2\omega_0 \cos(\tau\omega_0) - \sigma_0^2\tau \sin(\tau\omega_0)) + 2\omega_0 \right) \right. \\
& + \alpha_0^2 \left( e^{-\frac{1}{4}\sigma_0^2\tau^2} (2\omega_0 \cos(\tau\omega_0) - \sigma_0^2\tau \sin(\tau\omega_0)) + 2\omega_0 \right) \\
& + (\alpha_0^2 + 1) \alpha_1^2 \left( e^{-\frac{1}{4}\sigma_1^2\tau^2} (\sigma_1^2\tau \sin(\tau\omega_2) - 2\omega_2 \cos(\tau\omega_2)) + 2\omega_2 \right) \\
& - \left( 4\sqrt{2} (\alpha_0^2 + 2) \alpha_1 \alpha_0 \sqrt{\sigma_0} \sqrt{\sigma_1} \exp \left( -\frac{\sigma_0^2\sigma_1^2\tau^2 + (\omega_0 - \omega_2)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)} \right) \right. \\
& \times \left. \left( (\sigma_0^2\omega_2 + \sigma_1^2\omega_0) \sin \left( \frac{\tau(\sigma_0^2\omega_2 + \sigma_1^2\omega_0)}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \right) + \sigma_0^2\sigma_1^2\tau \cos \left( \frac{\tau(\sigma_0^2\omega_2 + \sigma_1^2\omega_0)}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \right) \right) \right) / ((\sigma_0^2 + \sigma_1^2)^{3/2}) \\
& + \Re \left( \alpha_0^2 e^{-\frac{1}{4}\tau(\sigma_0^2\tau + 4i\omega_0)} \left( i\sigma_0^2\tau (-1 + e^{2i\tau\omega_0}) + 2\omega_0 \left( 2e^{\frac{1}{4}\tau(\sigma_0^2\tau + 4i\omega_0)} + e^{2i\tau\omega_0} + 1 \right) \right) \right) \\
& + e^{-\frac{1}{4}\sigma_0^2\tau^2} (2\omega_0 \cos(\tau\omega_0) - \sigma_0^2\tau \sin(\tau\omega_0)) + 2\omega_0 \Big)
\end{aligned} \tag{81}$$

Esta interferencia se muestra en la figura 11. Se considera que el estado clásico coherente está fijo con  $\alpha_1 = 1$ , ambos estados comparten las características espectrales  $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ ,  $\omega_0 = 3\sigma_0$ , con  $\alpha_0$  variable y se exploran dos casos de  $\omega_1$ , uno para  $\omega_1 = 2,85\sigma$  y el otro para  $\omega_1 = 3,15\sigma$ . En la figura se observa que para el caso donde la señal es considerada puramente un estado con un fotón individual  $\alpha_0 = 0$ , el patrón de interferencia es el equivalente al que se obtiene al interferir dos fotones individuales. Luego, al considerar  $\alpha_0 = 1$ , es decir, al transformar el estado de fotón individual a SPACS se puede ver la transición del patrón de interferencia de fotones individuales al de estados coherentes. Esto muestra que mediante un MMI al mezclar SPACS con un haz coherente es posible distinguir la presencia de este último.

Resulta interesante la idea de poder distinguir la presencia de SPACS mediante un experimento de interferometría a pesar de las restricciones en cuanto a las amplitudes necesarias de los estados coherentes.

La visibilidad de las franjas de interferencia mostradas en la figura 11 también se puede analizar considerando la incertidumbre en la fase de los campos involucrados. Partiendo de que el estado coherente tiene una incertidumbre de fase definida, sea la incertidumbre en la fase de  $\alpha_1$  fija  $\Delta\phi(|\alpha_1\rangle) = \text{constante}$ . Por un lado cuando se considera  $\alpha_0 = 0$  básicamente

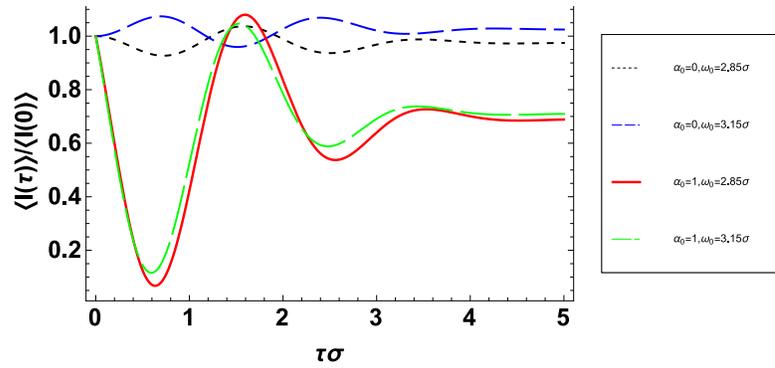


Figura 11: Interferencia  $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$  considerando que la entrada cero funciona como oscilador local con un haz coherente y la otra entrada con un SPACS. La frecuencia  $\omega_1 = 3\sigma_0$  y el ancho de banda  $\sigma$  se mantienen fijos. Se muestran curvas para distintas combinaciones de  $\{\alpha_0, \omega_0\}$

se realiza interferencia de un fotón individual con un estado coherente. El fotón individual tiene una incertidumbre fase infinita  $\Delta\phi(|\alpha_0 = 0, 1\rangle) \rightarrow \infty$  con lo que la visibilidad de las franjas es baja. Conforme  $\alpha_0$  aumenta, la incertidumbre de fase  $\Delta\phi(|\alpha_0, 1\rangle)$  disminuye, por lo que la visibilidad de las franjas aumenta. Todo esto se observa en la figura previa y está en concordancia con el cálculo de la interferencia.

## Capítulo 3.

---

### Estados coherentes con fotones agregados entrelazados

En este capítulo, estudiamos de forma general el grado de entrelazamiento de superposiciones arbitrarias de  $m, n$  fotones agregados a estados coherentes (PACS - *photon added coherent states*) de la forma  $|\psi\rangle \propto u |\alpha, m\rangle |\beta, n\rangle + v |\beta, n\rangle |\alpha, m\rangle$ . Esto con el fin de caracterizar de forma genérica las propiedades de superposiciones de PACS que proponemos como recurso entrelazado. El estudio se realiza a través de la concurrencia, y obtenemos las condiciones generales para estados máximamente entrelazados. Mostramos que el proceso de agregado de fotones puede ser identificado como una operación amplificadora de entrelazamiento cuando es aplicado a superposiciones de estados coherentes (SCS - *superposition of coherent states*). Específicamente para el estado bipartito positivo conocido:  $|\psi\rangle \propto |\alpha\rangle_a |-\alpha\rangle_b + |-\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b$  cuyo entrelazamiento tiende a cero para  $\alpha \rightarrow 0$ , el cual puede ser máximo si al menos se agrega un fotón en uno de los subsistemas. También se presenta una familia completa de estados PACS máximamente entrelazados. Adicionalmente, analizamos los efectos de decoherencia en PACS entrelazados inducidos por un canal despolarizante simple. Encontramos que la robustez contra la despolarización se puede incrementar agregando fotones a las superposiciones de estados coherentes. También, obtenemos la dependencia de la despolarización crítica  $p_{\text{crit}}$  que produce entrelazamiento nulo como función de los parámetros  $m, n, \alpha$  y  $\beta$ .

Finalmente, se incluye un estudio breve sobre la viabilidad de teleportación utilizando los estados generalizados de estados coherentes con  $m, n$  fotones agregados, considerando que se busca teleportar un qubit también en la misma base, pero con diferente número  $o, p$  de fotones agregados. Por simplicidad, solamente se consideran los estados bipartitos que forman máximo entrelazamiento. Con este estudio se obtiene que la fidelidad de teleportación está en función de la semejanza de la base a teleportar con el estado compartido entrelazado, las cuales cuando son compatibles producen fidelidades máximas.

#### 3.1. Introducción

El procesamiento de información cuántica (QIP - *Quantum information processing*) utiliza el entrelazamiento, que es una propiedad inherente de los sistemas cuánticos. El entrelaza-

miento, ha sido ampliamente considerado como un recurso necesario para realizar operaciones cuánticas, computación cuántica universal (QC - *Quantum computing*) y comunicaciones cuánticas (Jozsa y Linden, 2003; Steane, 1998; Bennett y DiVincenzo, 2000). Las fuentes de fotones individuales pueden generar estados entrelazados de fotones individuales altamente puros y han sido estudiadas extensivamente para aplicaciones de comunicación de información cuántica desde el trabajo de Knill y colaboradores (Knill et al., 2001). Adicionalmente, los estados entrelazados de variable continua, juegan un papel importante en la realización de protocolos de comunicación cuántica y tareas de computación cuántica (S. Wang, Hou, Chen, y Xu, 2015; Madsen, Usenko, Lassen, Filip, y Andersen, 2012; Neergaard-Nielsen et al., 2010b; Braunstein, 2005) (y las referencias contenidas en ellos). El estudio y generación de estados entrelazados coherentes resulta de mucho interés, pues los estados coherentes son un claro ejemplo de estados macroscópicos y clásicos que pueden obtenerse fácilmente un laboratorio a partir de fuentes láser conocidas. Por eso, el hecho de entrelazar estados macroscópicos, abre muchas posibilidades para implementar QIP en el mundo macroscópico utilizando las propiedades cuánticas de la luz.

Los estados coherentes con fotones agregados (PACS - *photon added coherent states*) comparten propiedades con los estados coherentes (CS - *coherent states*) que son puramente clásicos  $|\alpha\rangle$  y los estados de Fock puramente cuánticos  $|n\rangle$ . Se encuentran localizados en la frontera de los regímenes clásico-cuántico (Zavatta et al., 2004). Los PACS son interesantes porque presentan estadística sub-Poissoniana en el número de fotones, lo cual está relacionado con un comportamiento más determinístico en el conteo de fotones para una ventana temporal dada cuando se compara con los estados puramente clásicos, cuya estadística es Poissoniana y super-Poissoniana (Agarwal y Tara, 1991). Los PACS se caracterizan también por una negatividad en la función de Wigner, lo cual es un indicativo de los estados de naturaleza no clásica. Esto los hace intrínsecamente más apropiados para aplicaciones de QIP (Kenfack y Yczkowski, 2004).

Sin embargo, la adición y substracción de fotones son parte de las operaciones cuánticas denominadas no Gaussianas que son útiles para generar estados entrelazados Gaussianos

(GES - *Gaussian entangled states*) o para incrementar el entrelazamiento de un GES existente (Bartley y Walmsley, 2015; Eisert, Scheel, y Plenio, 2002).

Se han hecho estudios previos de PACS en canales entrelazados aplicados a comunicaciones cuánticas. Por ejemplo, en el trabajo de Pinheiro y Ramos (2012), se exploran protocolos de comunicaciones cuánticas agregando un número igual de fotones a las superposiciones bipartitas de CS que cuentan con fases opuestas en la forma  $|\psi\rangle \propto \hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger m} (|\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b + |-\alpha\rangle_a |-\alpha\rangle_b)$  donde  $\hat{a}^{\dagger}(\hat{b}^{\dagger})$  es el operador de creación de fotones para el modo  $\hat{a}(\hat{b})$ . Ellos inician construyendo un qubit en la forma  $|0\rangle \propto \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle$  y  $|1\rangle \propto \hat{a}^{\dagger m} |-\alpha\rangle$ , y usan estos estados para formular un protocolo de teleportación cuántica y distribución de llaves cuánticas. En el trabajo Nogueira, Silva, Gonçalves, y Vasconcelos (2013), se estudian las propiedades de entrelazamiento de una superposición bipartita de CS con pesos iguales pero diferente número de fotones agregados, donde los CS tienen fases opuestas y se estudia para valores pequeños de  $m$  y  $n$  con la estructura  $|\psi\rangle \propto \hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\alpha\rangle_a |-\beta\rangle_b + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |-\beta\rangle_a |\alpha\rangle_b$ .

Sin embargo, aún falta una caracterización completa de las propiedades de entrelazamiento tanto en estados puros como mixtos para evaluar el efecto de una superposición arbitraria con estados coherentes diferentes y números de fotones agregados. Estudiamos el efecto de la decoherencia dada por un canal despolarizante general, así como la relación de la probabilidad de despolarización crítica que produce un entrelazamiento nulo en función de los parámetros  $m, n, \alpha$  y  $\beta$ .

En este capítulo caracterizamos las propiedades de superposiciones arbitrarias de estados de la forma  $|\psi\rangle \propto u |\alpha, m\rangle |\beta, n\rangle + v |\beta, n\rangle |\alpha, m\rangle$  donde  $m$  representa el número de fotones que se han agregado al estado coherente hasta una constante de normalización de la forma  $|\alpha, m\rangle \equiv \hat{a}^{\dagger m(n)} |\alpha\rangle$  y similarmente para  $|\beta, n\rangle$ .

Primero estudiamos las condiciones generales en el estado puro para obtener PACS máximamente entrelazados, los cuales son comparados con el estado coherente entrelazado (ECS - *entangled coherent state*) conocido de la forma  $|\psi\rangle \propto |\alpha\rangle |-\alpha\rangle - |-\alpha\rangle |\alpha\rangle$  en el que se utiliza la operación de agregado de fotones para mejorar sus propiedades de entrelazamiento. En la segunda parte, consideramos un estado mixto, en el que las superposiciones de PACS son

sometidas al canal despolarizante más simple. Estudiamos los valores críticos que producen entrelazamiento nulo como función de los pesos de probabilidad en la mezcla estadística  $p$ , número de fotones agregados  $(m, n)$  y los estados coherentes  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$  de los PACS.

Finalmente, se incluye una sección donde se explora el éxito de la teleportación de un estado coherente con  $o, p$  fotones agregados con un esquema de detección híbrida de fotones individuales desplazados. En la detección híbrida, se aborda la teleportación del caso general con  $m, n$  fotones agregados de la forma  $N(u\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle_A \hat{b}^{\dagger n}|\beta\rangle_B + v\hat{a}^{\dagger n}|\beta\rangle_A \hat{b}^{\dagger m}|\alpha\rangle_B)$  como recurso compartido, teleportando el estado  $|\tilde{\psi}^C\rangle = x_0\hat{c}^{\dagger o}|\alpha_C\rangle + y_0\hat{c}^{\dagger p}|\beta_C\rangle$  en un canal ideal sin fuentes de ruido. Cabe destacar que se explora únicamente la teleportación utilizando el canal de la superposición negativa, pues es el que tiene mejores características de entrelazamiento.

### 3.1.1. Estados coherentes con fotones agregados: PACS

Los PACS fueron inicialmente introducidos por Agarwal y Tara (Agarwal y Tara, 1991) en la forma,

$$|\alpha, m\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle}{[m!L_m(-|\alpha|^2)]^{1/2}}, \quad (82)$$

donde  $|\alpha\rangle$  es un estado coherente (CS - *coherent state*) y  $L_m(x)$  es el polinomio de Laguerre de orden  $m$ , definido por

$$L_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^n m!}{(n!)^2 (m-n)!} \quad (83)$$

Los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  y  $\hat{a}^{\dagger m}$  es el operador de creación aplicado  $m$  veces. Para el cálculo del entrelazamiento se requiere el valor del translope entre dos estados coherentes con  $m(n)$  fotones agregados no normalizados de la forma  $|\alpha\rangle (|\beta\rangle)$ ,  $\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle$  y  $\hat{a}^{\dagger n}|\beta\rangle$ , específicamente  $\langle\alpha|\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger n}|\beta\rangle$

Al expandir en términos del número de fotones  $n$  y  $m$  para cada modo, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger n}|\beta\rangle &= \sum_{i,j=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} e^{-|\beta|^2/2} \frac{\alpha^{*i}\beta^j}{\sqrt{i!}\sqrt{j!}} \langle i|\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger n}|j\rangle \\ &= e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2} \sum_{i,j=0}^{\infty} \langle i+m|\frac{\sqrt{(m+1)!}}{i!}\alpha^{*i}\beta^j\frac{\sqrt{(n+j)!}}{j!}|n+j\rangle. \end{aligned} \quad (84)$$

Usando la ortogonalidad del espacio de Fock  $\delta_{i+m,n+j} \Rightarrow j = i + m - n$ , para el bra-ket interno, se puede escribir como sigue

$$\langle \alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | \beta \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \sum_i \frac{(\alpha^* \beta)^i \beta^{m-n} (m+i)!}{i! (i+m-n)!}. \quad (85)$$

Después de realizar la suma en (85), se obtiene la expresión final dada por

$$\langle \alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | \beta \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \beta^{m-n} \Gamma(1+m) {}_1\tilde{F}_1(1+m; 1+m-n; \alpha^* \beta). \quad (86)$$

donde  ${}_1\tilde{F}_1(a; b; c)$  es la función hipergeométrica confluyente regularizada tipo 1 y la función  $\Gamma$  con argumento entero  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Esto puede expresarse en términos de la función hipergeométrica confluyente como  ${}_1\tilde{F}_1(a; b; c) = {}_1F_1(a; b; c)/\Gamma(b)$ .

### 3.2. Entrelazamiento de las superposiciones de PACS

Nos interesan las propiedades de las superposiciones de PACS como estados bipartitos de la forma

$$\begin{aligned} |\psi^{AB}\rangle &= N(u\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle_A \hat{b}^{\dagger n} |\beta\rangle_B + v\hat{a}^{\dagger n} |\beta\rangle_A \hat{b}^{\dagger m} |\alpha\rangle_B) \\ &= N(u(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}) |\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B + v(\hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}) |\beta\rangle_A |\alpha\rangle_B), \end{aligned} \quad (87)$$

donde  $\hat{a}^{\dagger m} (\hat{b}^{\dagger n})$  crea  $m$  ( $n$ ) fotones en el modo  $\hat{a}$  del subsistema  $A$  ( $\hat{b}$  en el subsistema  $B$ ),  $u$  y  $v$  son números complejos que obedecen  $|u|^2 + |v|^2 = 1$  y  $N$  es un factor de normalización debido a las propiedades no ortogonales de los estados, y está dado en términos de los parámetros  $(u, v, \alpha, \beta, m, n)$  mediante

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \left[ L_m(-|\alpha|^2) L_n(-|\beta|^2) m! n! + 2\Re(u^* v) e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} |\beta|^{2(m-n)} \right. \\ &\quad \left. \times (\Gamma(1+m))^2 |{}_1\tilde{F}_1(1+m; 1+m-n; \alpha^* \beta)|^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (88)$$

Se procede a construir un qubit ortogonal en la base computacional a través de la ortogonalización de Gram-Schmidt aplicada al estado (87), con el qubit en cada subespacio definido como

$$\begin{aligned} |0\rangle &\equiv N_1 \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle, \\ |1\rangle &\equiv N_2 (\hat{a}^{\dagger n} |\beta\rangle - z N_1 \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle), \end{aligned} \quad (89)$$

donde  $z = N_1^* \langle \alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | \beta \rangle$  toma en cuenta el traslape entre los estados no ortogonales, con las constantes de normalización  $N_1$  y  $N_2$  dadas por

$$\begin{aligned} N_1 &= [L_m(-|\alpha|^2)m!]^{-1/2}, \\ N_2 &= [L_n(-|\beta|^2)n! + |zN_1|^2 L_m(-|\alpha|^2)m! \\ &\quad - 2e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2} \Gamma(1+m) \Re(zN_1\beta^{*(m-n)}) \\ &\quad \times {}_1\tilde{F}_1(1+m; 1+m-n; \beta^*\alpha)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (90)$$

No se asume ninguna fase inicial en los estados coherentes  $\alpha$  ni  $\beta$  contenidos en la ecuación (87), dado que estamos interesados en encontrar las condiciones de entrelazamiento para superposiciones arbitrarias de PACS

El estado en la ecuación (87) se puede escribir en términos de los dos qubits ortogonales en la base computacional como

$$|\psi^{AB}\rangle = \frac{N(u,v)}{N_1 N_2} (u|01\rangle + v|10\rangle + zN_2(u+v)|00\rangle). \quad (91)$$

Para calcular el grado de entrelazamiento utilizamos la Concurrencia (Hill y Wootters, 1997), la cual está determinada para los estados puros de la ecuación (91) como  $C = |\langle \psi^{AB} | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi^{AB*} \rangle|$ , donde el asterisco denota el complejo conjugado en la base computacional a través de  $|\psi^{AB*}\rangle = \sum_{\{i,j\}=0}^1 |i,j\rangle \langle i,j | \psi^{AB} \rangle^*$ , en donde se ha utilizado la operación de inversión temporal mediante la matriz de Pauli  $\sigma_y$ . Por lo tanto, para los PACS entrelazados la concurrencia es

$$C(\psi^{AB}) = 2 \left( \frac{N(u,v)}{N_1 N_2} \right)^2 |uv|^2. \quad (92)$$

Se puede crear una superposición más general, reescribiendo la ecuación (87) en la forma

$$|\psi^{AB}\rangle = N(u(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}) |\alpha + \gamma\rangle_A |\beta - \gamma\rangle_B + v(\hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}) |\beta - \gamma\rangle_A |\alpha + \gamma\rangle_B), \quad (93)$$

lo que permite una comparación directa con el estado entrelazado (ECS - *entangled coherent state*) conocido (Sanders, 2012, 1992). Es fácil notar que para  $\alpha = \beta = 0$ ,  $u = v = 1/\sqrt{2}$ ,  $\gamma \neq 0$  y considerando que no se ha agregado ningún fotón,  $n = m = 0$ , la ecuación (93) se convierte en el estado conocido

$$|\psi\rangle = N(|\gamma\rangle |-\gamma\rangle \pm |-\gamma\rangle |\gamma\rangle). \quad (94)$$

Las propiedades de entrelazamiento de este estado serán utilizadas como referencia para discutir nuestros resultados para PACS. Es importante notar que, para la superposición negativa en la ecuación (94) el entrelazamiento es máximo incluso para  $|\gamma|$  pequeña, tal como se ve en (91). En la figura 12, se muestra la concurrencia para el estado en la ecuación (93) con  $\alpha = \beta = 0$  para diferentes valores de  $\gamma$ . Los estados considerados son los siguientes: en la figura 12(a) el estado es  $|\psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\gamma\rangle |-\gamma\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |-\gamma\rangle |\gamma\rangle)$ , donde el resultado para el ECS de la ecuación (94) con  $m, n = 0$  se representa la línea negra sólida. Es posible ver que la concurrencia  $C(\psi^{AB})$  se incrementa de forma asintótica desde 0 hasta 1 conforme  $\gamma$  incrementa. Por el contrario, si se agrega al menos un fotón en uno de los modos ( $m$  o  $n$  mayor a cero), la concurrencia inicia en 1. Esto es debido a que incluso para valores nulos de  $\gamma$  existe un estado de Fock entrelazado. Esto hace que los PACS entrelazados sean más robustos incluso para números pequeños de fotones agregados en el canal coherente positivo. La concurrencia para el estado  $|\psi\rangle = N(u\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\gamma\rangle |-\gamma\rangle + v\hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |-\gamma\rangle |\gamma\rangle)$  se grafica de la figura 12(b) a la 12(h) como función de  $\gamma$  y  $u$  para valores fijos del número de fotones agregados  $n, m$ . Específicamente, en la figura 12(b) se muestra  $C$  para cero fotones agregados en los dos canales  $m = n = 0$ , en la figura 12(c) se ha agregado un fotón con  $m = 0, n = 1$ , el caso para dos fotones agregados  $m = 1, n = 1$  se muestra en la figura 12(d), dos fotones agregados a un sólo modo  $m = 2, n = 0$  se presentan en la figura 12(e), en la figura 12(f) el caso  $m = 1, n = 3$ , en la figura 12(g)  $m = 0, n = 3$  y finalmente un número alto en la cantidad de fotones agregados en la figura 12(h)  $m = 15, n = 17$ .

Del análisis de las propiedades de entrelazamiento obtenidas con estos resultados podemos concluir que se puede obtener una forma más robusta de generación de entrelazamiento cuando  $m \neq n$ , puesto que el proceso de agregado de fotones disminuye el traslape entre los estados individuales de un sistema bipartito, es decir, se vuelven más distinguibles. Además, los estados coherentes con un pequeño número de fotones en promedio ( $\gamma$  pequeño) aún mantienen máximo entrelazamiento alrededor de la superposición simétrica  $u = v = 1/\sqrt{2}$ . Este estado entrelazado formado por estados coherentes no igualmente distribuido en el número de fotones agregados puede ser utilizado como una alternativa robusta al canal recurso

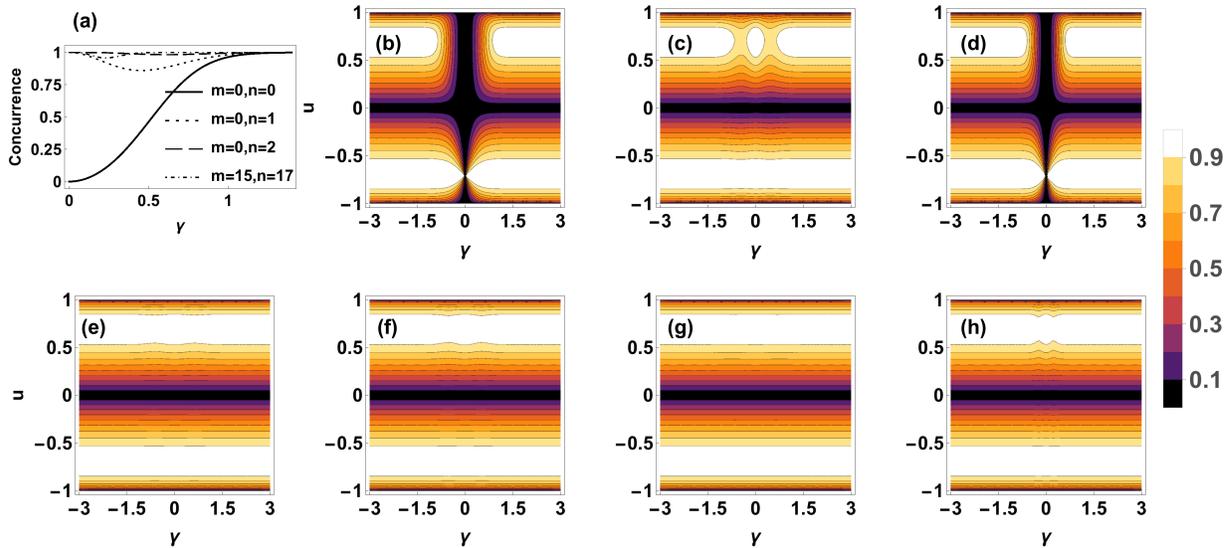


Figura 12: Concurrencia de la ecuación (93) con  $\alpha = \beta = 0$  para diferentes valores de  $\gamma$ . Se consideran las condiciones siguientes: (a)  $|\psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\gamma\rangle |-\gamma\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |-\gamma\rangle |\gamma\rangle)$  para distinto  $m, n$ . Para (b)-(h) el estado considerado es  $|\psi\rangle = N(u\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\gamma\rangle |-\gamma\rangle + v\hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |-\gamma\rangle |\gamma\rangle)$  con (b)  $m = n = 0$ , (c)  $m = 0, n = 1$ , (d)  $m = 1, n = 1$ , (e)  $m = 2, n = 0$ , (f)  $m = 1, n = 3$ , (g)  $m = 0, n = 3$ , (h)  $m = 15, n = 17$ .

para implementar el protocolo de teleportación presentado en el trabajo Pinheiro y Ramos (2012).

Se han descrito las propiedades de entrelazamiento de los ECS, obtenidos de la condición  $\alpha = \beta = 0$ , ahora se procede a analizar el caso general con  $\alpha \neq \beta \neq 0$  para el cual se ajusta  $\gamma = 0$ . Esto es equivalente a absorber el valor de  $\gamma$  de tal forma que quede incluido en la amplitud del estado coherente  $(\alpha, \beta)$ . Los valores para la concurrencia,  $C$  se muestran en la figura 13 para diferentes parámetros del estado en la ecuación (91). En la figura 13(a), se muestra la gráfica de la concurrencia  $C$  versus  $u$ , donde la diferencia de fotones agregados en cada modo se mantiene fija a  $|m - n| = 1$ , mientras que en la figura 13(b)  $|m - n| = 5$ . Para la figura 13(a) y 13(b), la concurrencia se obtiene para diferentes valores de  $\alpha = \beta$  vs.  $u$  para  $u \in \mathbb{R}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Se obtienen dos valores máximos de  $C$  para  $u = \pm 1/\sqrt{2}$ , donde se genera un estado tipo Bell. El máximo para la superposición negativa  $u = -1/\sqrt{2}$  implica  $u = -v$  lo cual es conocido como un estado máximamente entrelazado de la ecuación (91) donde el coeficiente de  $|00\rangle$  desaparece; por el contrario, el máximo para la superposición

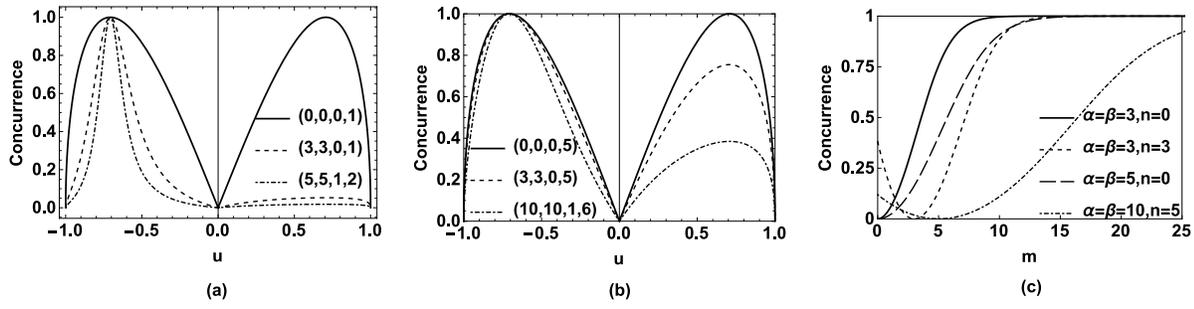


Figura 13: Concurrencia para el estado de la ecuación (93) para (a)  $\alpha = \beta$  fija,  $|m - n| = 1$  vs  $u$ , (b)  $\alpha = \beta$  fija,  $|m - n| = 5$  vs  $u$ , (c)  $\alpha = \beta$  y  $n$  fija,  $u = v = 1/\sqrt{2}$  para diferentes números de  $m$  fotones agregados. Cada superposición de PACS en la figura está caracterizada con los parámetros  $(\alpha, \beta, m, n)$ .

positiva  $u = v = 1/\sqrt{2}$  es dependiente de  $\{\alpha, \beta, |m - n|\}$ . Al parecer  $C(\psi^{AB})$  se incrementa junto con  $|m - n|$  y  $(\alpha\beta)^{-1}$ . De forma más específica, cuando  $u = v = 1/\sqrt{2}$  la concurrencia puede ser incrementada, incrementando la diferencia  $|m - n|$  para un par dado  $\{\alpha, \beta\}$ . Este efecto se muestra de forma clara en la figura 13(c), donde se muestra la concurrencia  $C$  para un estado con  $\alpha = \beta$  respecto a diferentes valores de  $|m - n|$  mientras  $n$  se mantiene fija. Esto muestra claramente que para un estado dado, es posible incrementar su concurrencia simplemente agregando fotones. Este es el mecanismo de las operaciones no Gaussianas aplicada a los estados coherentes, análogo a lo expuesto en Navarrete-Benlloch et al. (2012). Este efecto resulta interesante puesto que se pueden obtener estados con entrelazamiento máximo sin la necesidad de tener estados coherentes con una diferencia de fase  $\pi$  como resultado del agregado de fotones como destilador de entrelazamiento. Aunque los estados obtenidos dependen de  $\alpha$ ,  $C(\psi^{AB}) \rightarrow 1$  se puede obtener.

En el caso general del estado mostrado en la ecuación (93), todos los parámetros son no cero. En la figura 14, se muestra la concurrencia calculada para un estado de la forma  $|\psi\rangle = N(u\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\alpha + \gamma\rangle |\alpha - \gamma\rangle + v\hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |\alpha - \gamma\rangle |\alpha + \gamma\rangle)$  con  $\alpha = 10$  fija. En la figura 14(a) se muestra la concurrencia  $C$  para  $m = 1, n = 2$ . El comportamiento para  $\gamma = 0$  es el mismo como se vio previamente, tal que cuando  $|\gamma|$  se incrementa, el entrelazamiento se incrementa,

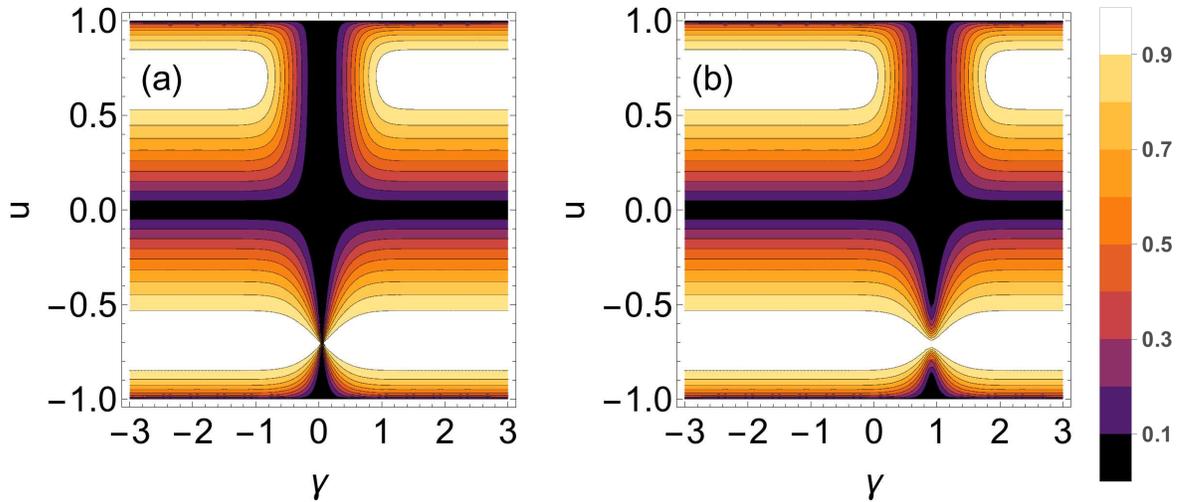


Figura 14: Concurrencia para el estado de la ecuación (93) como función de  $\gamma$  y  $u$  (a)  $\alpha = \beta = 10, m = 1, n = 2$ , (b)  $\alpha = \beta = 10, m = 0, n = 20$

lo cual es esperado dado que el traslape entre las dos partes del estado disminuye. En la figura 14(b) se considera el caso con  $m = 0, n = 20$ . Para  $\gamma = 0$  existe una región más amplia de entrelazamiento que se observa con  $C(\psi^{AB})$  y puede ser obtenida al comparar con el caso  $m = 1, n = 2$ . Cualitativamente (a) y (b) tienen un comportamiento similar, en las cuales solamente se ve desplazada la región de entrelazamiento nulo por el efecto de  $\gamma$ .

Esto también muestra que con  $|m - n| \gg 1$  o  $|\gamma| > 0$ , los valores de la superposición para  $u$  (y por lo tanto  $v$ ) son menos restrictivos cuando se buscan valores altos de entrelazamiento. Estos resultados también muestran similitudes con la figura 12(b) y 12(e) para  $u = 1/\sqrt{2}$  puesto que los estados involucrados tienen un traslape no nulo para todos los valores de  $\gamma$ , es decir,  $\langle 10 + \gamma | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | 10 - \gamma \rangle \neq 0$ .

### 3.2.1. Efecto de un canal despolarizante

En esta sección se incluye el efecto de decoherencia del estado en la ecuación (87) a través de un canal despolarizador simple (Nielsen y Chuang, 2000; Holevo y Giovannetti, 2012). Este mecanismo mapea la matriz de densidad  $\rho_0 = |\psi^{AB}\rangle \langle \psi^{AB}|$  en una mezcla de la  $\rho_0$  original y el estado completamente mezclado  $I/d$ , con  $d = \dim(\rho) = 4$  en la forma

$\rho = (1 - \lambda)|\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}| + \frac{\lambda}{d}I$ . Este mapeo tiene una representación consistente con los operadores de Krauss, lo cual asegura un mapa completamente positivo en el que se preserva la traza. Por conveniencia, hemos reescrito la matriz de densidad con un parámetro  $p$  de la forma  $\lambda/d = p/3 \Rightarrow \lambda = 4p/3$ . Esto es equivalente a estudiar el entrelazamiento de una matriz de densidad formada por la mezcla de estados de la forma,

$$\rho = \frac{p}{3}1 + \left(1 - \frac{4p}{3}\right)|\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|, \quad (95)$$

donde  $|\psi^{AB}\rangle$  es el estado entrelazado de la ecuación (91) (o equivalentemente la ecuación (87)), y  $p$  es el parámetro de la mezcla de despolarización. Es importante notar que el efecto de completa despolarización ocurre para  $p = 3/4$  con una matriz de densidad máximamente mezclada y, que el estado puro es recuperado para  $p = 0$ . Uno puede notar también que si el estado  $|\psi^{AB}\rangle$  está máximamente entrelazado, la ecuación (95) es equivalente al estado Werner, el cual tiene como límite superior para el parámetro de mezclado  $p = 1/2$  antes de que el entrelazamiento se desvanezca y, adicionalmente la ecuación (95) también tiene el efecto de un canal que rompe el entrelazamiento (Audretsch, 2007). Este caso, sirve como referencia para los valores extremos de  $p$  antes de que el entrelazamiento se vuelva nulo para los estados que están máxima y no máximamente entrelazados, los que pueden obtenerse de la ecuación (91) variando la combinación de parámetros  $\{u, v, \alpha, \beta, m, n\}$ . Entonces uno esperaría que el valor extremo para  $p$  que se obtiene para el estado máximamente entrelazado establezca una cota superior para todos los otros estados que no están máximamente entrelazados. El efecto que tiene agregar fotones sobre los valores extremos de  $p$  antes de que el entrelazamiento se desvanezca también puede ser estudiado y se discute en las siguientes subsecciones. La concurrencia, para la matriz de densidad mostrada en la ecuación (95) se calcula con la fórmula de Hill y Wootters (1997) como,

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (96)$$

donde  $\lambda_i$  son las raíces cuadradas de los eigenvalores de la matriz auxiliar  $\rho\tilde{\rho}$ , donde  $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$  es el operador de densidad después de aplicar el operador de inversión temporal para dos qubits,  $\rho^*$  es el complejo conjugado de la matriz de densidad y,  $\sigma_y$  es la

matriz de Pauli correspondiente. Para aclarar la definición de  $\rho^*$ , sea  $\rho$  expandida en la base computacional como  $\rho = \sum_{\{i,j,k,l\}=0}^1 \rho_{ijkl} |i, j\rangle \langle k, l|$ , por lo tanto, la conjugación compleja de  $\rho$  se entiende como  $\rho^* = \sum_{\{i,j,k,l\}=0}^1 \rho_{ijkl}^* |i, j\rangle \langle k, l|$ .

En esta sección estamos interesados en determinar el comportamiento de  $p_{\text{crit}}$  que produce entrelazamiento nulo respecto a los diferentes parámetros  $(\alpha, \beta, \gamma, m, n)$  de los PACS entrelazados. En la figura 15 se examina para fines comparativos el comportamiento de  $C(\rho)$  para diferentes valores de  $p$  para el estado de la ecuación (93) para ECS, es decir, donde las fases de los CS son opuestas o  $u = -v = 1/\sqrt{2}$ . La concurrencia se determina para las siguientes condiciones: figura 15(a) concurrencia como función de  $p$  y  $\gamma$  para  $\alpha = \beta = 0$ ,  $u = v = 1/\sqrt{2}$  sin fotones agregados  $m = n = 0$ . Los valores críticos de  $p$  que producen entrelazamiento nulo dependen de  $\gamma$ ; para valores grandes de  $\gamma$  el valor de  $p$ , se satura a un valor aproximado de  $p \approx 1/2$ . En la figura 15(b) se muestra el caso  $\alpha = \beta = 0$ ,  $u = v = 1/\sqrt{2}$  con  $m = 1, n = 2$  de un fotón agregado. Estos estados con fases opuestas exhiben un comportamiento casi constante para la concurrencia para todos los valores de  $\gamma$ , excepto para  $\gamma \approx 0,36$  lo cual se explica por la ocurrencia del máximo valor de traslape  $\langle \gamma | \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger | -\gamma \rangle$  para ese valor. Para  $\gamma = 0$  o  $\gamma$  grande, el traslape tiende a desaparecer, lo que hace que los estados sean más distinguibles y por lo tanto producen una concurrencia más alta. En la figura 15(c), la concurrencia  $C(\rho)$  se muestra para  $\alpha = \beta = 3$  considerando  $\gamma = 0$  con  $u = -v = 1/\sqrt{2}$ ,  $m = 1$  y variando  $n$  y  $p$ . Esta figura muestra que la concurrencia para el caso  $u = -v = 1/\sqrt{2}$  no depende de la diferencia del número de fotones agregados  $|m - n|$  sino sólo del valor de  $p$ .

En la figura 16 se muestran curvas de contorno  $C(\rho)$  para diferentes escenarios donde la concurrencia es altamente dependiente de todos los parámetros del estado de la ecuación (87) y  $p$  de la ecuación (95). En la figura 16(a) se muestra la concurrencia  $C(p, u)$  como función de  $p$  y  $u$  (y por lo tanto  $v$ ) para un estado con los parámetros  $\alpha = \beta = 3, m = 0, n = 5$  fijos. Se obtiene el comportamiento esperado con la mayor concurrencia para  $v = -u = 1/\sqrt{2}$ , asimismo se obtienen valores grandes en la vecindad de  $u = v = 1/\sqrt{2}$ . En la figura 16(b) se presenta el efecto del agregado de fotones en la concurrencia  $C(n, p)$ , aquí  $\alpha = \beta = 3, m = 0$  y  $u = v = 1/\sqrt{2}$  se encuentran fijos, mientras se varía tanto el número  $n$  de fotones agregados

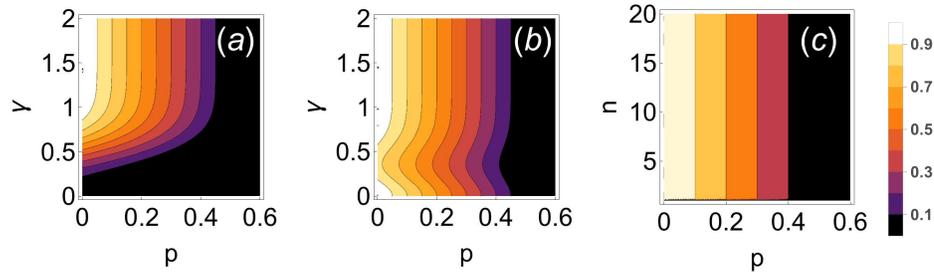


Figura 15: Concurrencia para el ensamble de la ecuación (95) vs  $p$  para el estado (93) con las condiciones: (a)  $\alpha = \beta = 0, m = n = 0, u = v = 1/\sqrt{2}$  vs  $\gamma$ , (b)  $\alpha = \beta = 0, m = 1, n = 2, u = v = 1/\sqrt{2}$  vs  $\gamma$  y (c)  $\alpha = \beta = 3, \gamma = 0, m = 1, u = -v = 1/\sqrt{2}$  vs el número de fotones agregados  $n$ .

en el modo  $B$  como el valor  $p$  del ensamble de la ecuación (95). En la figura puede verse como la concurrencia es más robusta para valores bajos de  $p$  y valores grandes de  $n$ . Esto ocurre debido a que el término  $zN_2$  de la ecuación (91) decrece a la par que la diferencia  $|m - n|$  se incrementa. Esto puede verse como una reducción en el traslape efectivo de los estados  $\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle$  y  $\hat{a}^{\dagger n} |\alpha\rangle$ , volviéndolos más distinguibles. En las figuras 16(c)-16(d) se grafica la concurrencia  $C(\alpha, p)$  para la superposición positiva  $u = v = 1/\sqrt{2}$  con  $m, n$  fijos, mientras los parámetros  $\alpha = \beta$  y  $p$  son variables. Específicamente, en la figura 16(c) se grafica la concurrencia para  $m = 0, n = 1$  y en la figura 16(d) para  $m = 1, n = 5$ . Estas condiciones muestran la dependencia de la concurrencia para un  $\alpha$  dado con la diferencia del número de fotones agregados  $|m - n|$  contra  $p$ . El comportamiento de ambos paneles es cualitativamente el mismo y sólo corresponde a una escala distinta para  $\alpha = \beta$ , es decir,  $C(\rho)$  decrece mientras  $\alpha$  se incrementa, y los valores de  $C(\rho)$  dependen de la diferencia  $|m - n|$ . Para todos los casos  $C(\rho)$  se anula para  $p > 0,5$ .

### 3.2.2. Valores críticos de $p$

Para encontrar los valores críticos de  $p$  para los cuales se desvanece el entrelazamiento,  $p_{\text{crit}}$ , analizamos el comportamiento de la concurrencia como función del parámetro  $p$  para diferentes superposiciones de PACS. Puede notarse que  $p_{\text{crit}}$  trabaja como un indicador de la robustez del entrelazamiento para el estado  $|\psi\rangle$ , en el que para caso considerado se ha

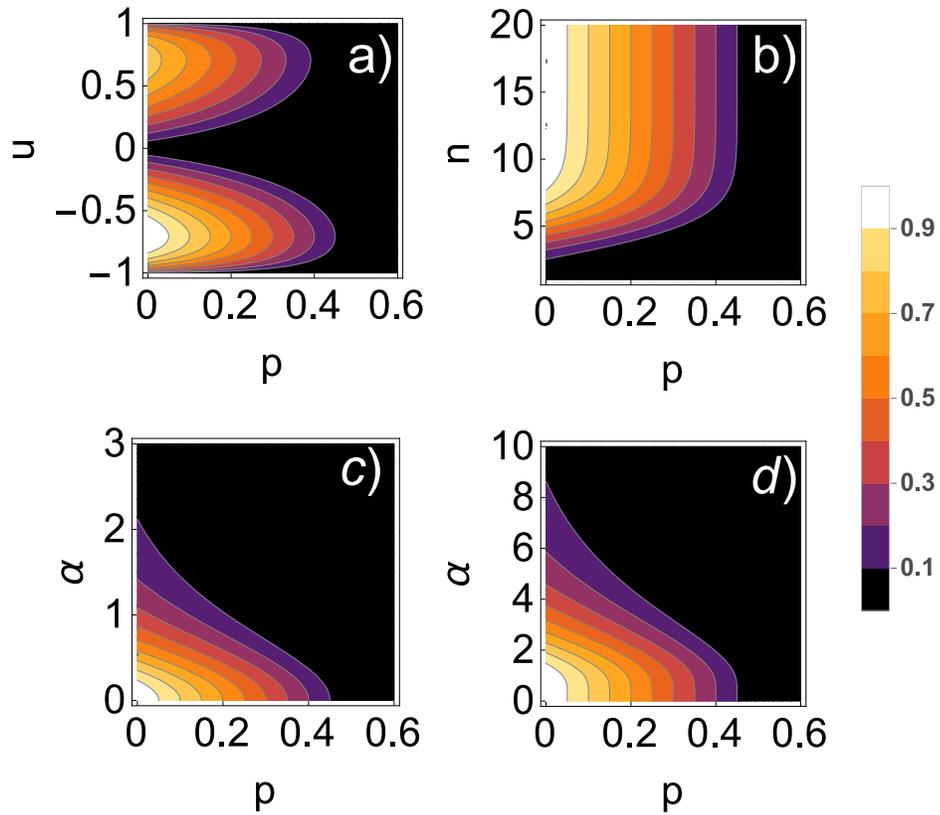


Figura 16: Efectos del canal despolarizante ante la variación de  $p$  para: (a)  $\alpha = \beta = 3, m = 0, n = 5$  vs.  $u$ , (b)  $\alpha = \beta = 3, m = 0, u = v = 1/\sqrt{2}$  vs.  $n$ , (c)  $u = v = 1/\sqrt{2}, m = 0, n = 1, \alpha = \beta$  vs.  $\alpha$ , (d)  $u = v = 1/\sqrt{2}, m = 1, n = 5, \alpha = \beta$  vs.  $\alpha$ .

quitado el superíndice  $AB$  por simplicidad. Entre más grande es el valor de  $p_{\text{crit}}$ , es más complicado destruir el entrelazamiento y por lo tanto, se requiere un peso mayor del parámetro de mezclado para producir el estado máximamente mezclado  $I$  de la ecuación (95). Con el objeto de tener una mejor estimación de los límites de  $p$  que mantienen las propiedades del estado mezclado, los puntos críticos se ajustan numéricamente a una curva simple. Como referencia se analiza el estado de la superposición negativa de la ecuación (94). En la figura 17(a) se muestran los valores críticos de  $p$  como función de  $\gamma$ , los que claramente se incrementan de 0 a 1/2 conforme el número promedio de fotones se incrementa. Los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  se consideran reales para el presente análisis. Esta curva se ajusta a través de una función hiperbólica (mostrada con la curva continua) de la forma

$$p_{\text{crit}}(\gamma) = a + b \tanh(d(\gamma - c)). \quad (97)$$

Cuyos parámetros de ajuste  $(a, b, d, c)$  se presentan en la tabla 1 (primer renglón). Esto muestra que estos estados se vuelven más robustos cuando  $\gamma$  se incrementa. Por el contrario, si se agregan  $n, m$  fotones a cada modo correspondiente, resultando en la ecuación (93), los resultados son bastante diferentes, esto se muestra en la figura 17(b) en donde para  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $p_{\text{crit}} \rightarrow 0,495$  a un valor aproximadamente constante, con pequeño decremento del 6% en los casos en que  $|m - n| = 1$  cuando  $\gamma \approx 0,5$ . En el caso  $m = 0, n = 2$  se alcanza un valor asintótico constante  $p_{\text{crit}} = 0,495$ , el cual persiste para valores  $|m - n| > 1$ . Este efecto confirma que el proceso de agregado de fotones favorece la robustez de los estados entrelazados, incluso para estados coherentes con valores de fotones promedio bajos, es decir, para  $\alpha$  o  $\beta$  pequeña.

Los resultados para la probabilidad crítica  $\alpha = \beta = 0$  considerando fotones agregados puede ajustarse a una función con forma Gaussiana (de amplitud negativa,  $b < 0$ ) en función de  $\gamma$

$$p_{\text{crit}}(\gamma) = a + b \exp\left(\frac{-(\gamma - c)^2}{v^2}\right) \quad (98)$$

donde los valores para los parámetros  $(a, b, d, c)$  se presentan en la tabla (2). El primer renglón es para  $m = 0, n = 1$  y el segundo para el caso  $m = 1, n = 2$ . También se ajusta

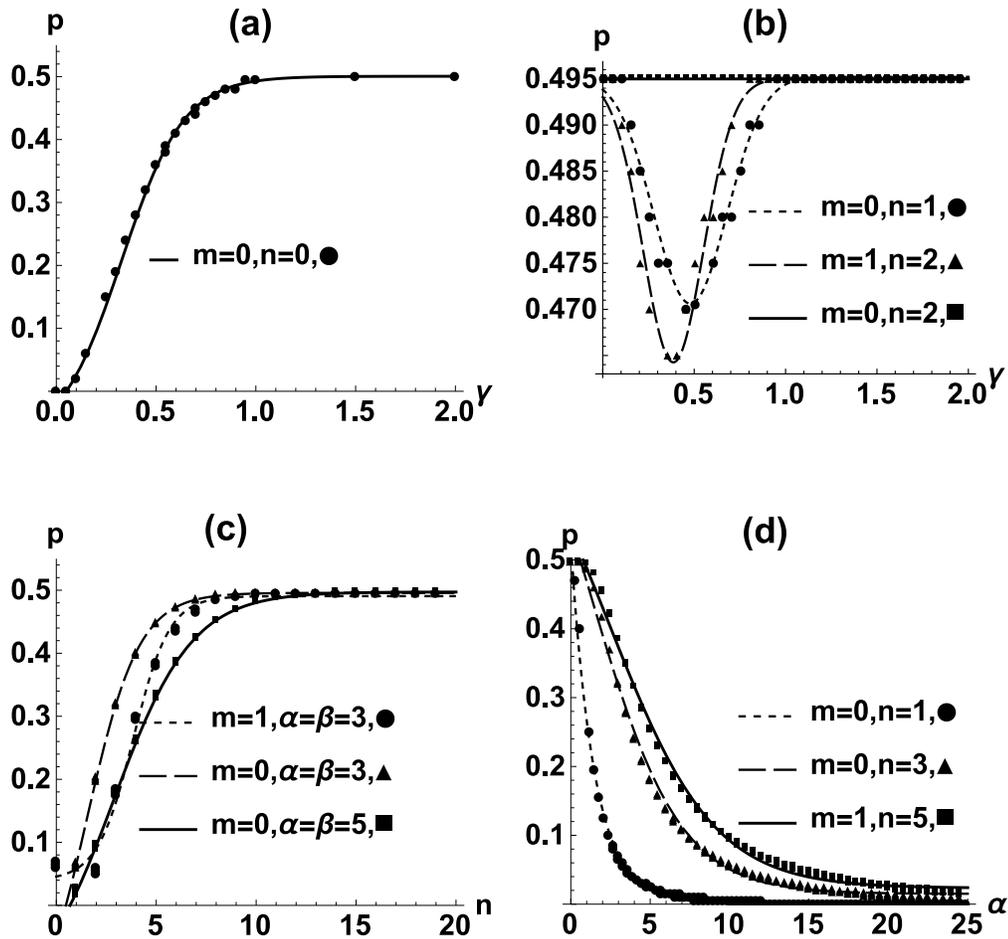


Figura 17: Valores críticos de  $p_{\text{crit}}$  para los cuales el ensemble de la ecuación (95) pierde el entrelazamiento para diferentes estados  $|\psi\rangle$ : (a)  $|\psi\rangle = N(|\gamma\rangle|-\gamma\rangle + |-\gamma\rangle|\gamma\rangle)$ , (b)  $|\psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\gamma\rangle|-\gamma\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |-\gamma\rangle|\gamma\rangle)$ , (c)-(d)  $|\psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\alpha\rangle|\alpha\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |\alpha\rangle|\alpha\rangle)$  con  $m, \alpha$  fijos en (c) y  $m, n$  fijas en (d). Para todos,  $N$  es una constante de normalización adecuada.

Cuadro 1: Parámetros hiperbólicos de ajuste del valor crítico  $p_{\text{crit}}$  como función de la variable  $variable = (\gamma \text{ o } n)$ , para diferentes PACS entrelazados

State	Fig	a	b	c	d
$ \psi\rangle = N( \gamma\rangle -\gamma\rangle +  -\gamma\rangle \gamma\rangle)$					
$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = variable, m = 0, n = 0$					
17(a)		0,2082	0,2925	0,3275	3,2087
		$\pm 5,742 \times 10^{-3}$	$\pm 7,37 \times 10^{-3}$	$\pm 7,792 \times 10^{-3}$	$\pm 1,207 \times 10^{-1}$
$ \psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}  \alpha\rangle  \alpha\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}  \alpha\rangle  \alpha\rangle)$					
$\alpha = 3, \beta = 3, \gamma = 0, m = 0, n = variable$					
17(c)		0,1355	0,3602	1,5161	0,383228
		$\pm 7,83 \times 10^{-3}$	$\pm 7,97 \times 10^{-3}$	$\pm 6,01 \times 10^{-2}$	$\pm 5,64 \times 10^{-3}$
$\alpha = 3, \beta = 3, \gamma = 0, m = 1, n = variable$					
17(c)		0,1666	0,3306	2,8647	0,2549
		$\pm 4,21 \times 10^{-3}$	$\pm 4,5 \times 10^{-3}$	$\pm 5,78 \times 10^{-3}$	$\pm 3,54 \times 10^{-3}$
$\alpha = 5, \beta = 5, \gamma = 0, m = 0, n = variable$					
17(c)		0,2651	0,2255	3,8557	0,5551
		$\pm 5,48 \times 10^{-3}$	$\pm 6,08 \times 10^{-3}$	$\pm 8,44 \times 10^{-2}$	$\pm 4,3 \times 10^{-2}$
$\alpha = \beta = variable, \gamma = 0, m = 0, n = 1$					
17(d)		,6684	-0,6655	-0,5456	0,4163
		$\pm 0,0959$	$\pm 0,0961$	$\pm 0,2927$	$\pm 0,0162$
$\alpha = \beta = variable, \gamma = 0, m = 0, n = 3$					
17(d)		0,4473	-0,4323	1,2726	0,18
		$\pm 2,6 \times 10^{-2}$	$\pm 2,66 \times 10^{-2}$	$\pm 3,34 \times 10^{-2}$	$\pm 6,03 \times 10^{-3}$
$\alpha = \beta = variable, \gamma = 0, m = 1, n = 5$					
17(d)		0,0,4025	-0,3793	2,4903	0,1531
		$\pm 1,69 \times 10^{-2}$	$\pm 1,76 \times 10^{-2}$	$\pm 3,05 \times 10^{-1}$	$\pm 4,8 \times 10^{-3}$

$p_{\text{crit}}$  para  $m = 0, n = 2$  a una función Gaussiana, pero  $b$  es demasiado pequeño para ser observado, lo que resulta en el comportamiento constante que se muestra. Una diferencia de dos o más fotones agregados hace que los estados sean robustos ante el efecto de la despolarización aún para valores pequeños de  $\gamma$ .

Si consideramos los estados con  $\gamma = 0$  pero  $\alpha = \beta > 0$ , el entrelazamiento es menor para un número dado de fotones agregados  $m, n$ ; sin embargo, este estado mixto puede ganar entrelazamiento al incrementar la diferencia  $|m - n|$  tal como se mostró en la sección previa para el estado puro. Ahora, se aplica el mismo razonamiento para encontrar  $p_{\text{crit}}$  de estos estados. El estado bajo análisis es por lo tanto  $|\psi\rangle = (N/\sqrt{2})(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\alpha\rangle |\alpha\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |\alpha\rangle |\alpha\rangle)$  donde  $p_{\text{crit}}$  se muestra en la figura 17(c), considerando  $m = 0$  se observa que para  $\alpha$  pequeña y  $n = 0$ , los valores críticos de  $p$  son cero, lo cual no causa sorpresa porque este estado tiene entrelazamiento nulo. Cuando se cumple  $n \geq 1$ ,  $p_{\text{crit}} > 0$ , las curvas en la figura muestran que para un conjunto dado de combinaciones de  $\alpha = \beta$  y  $m$ ,  $p_{\text{crit}}$  crece con  $n$ , lo que muestra nuevamente la robustez que puede ser ganada a través del proceso de agregar más fotones a un modo mientras el otro se deja fijo. Todos los casos alcanzan el valor asintótico de  $p_{\text{crit}} = 1/2$ . Todos los valores de  $p_{\text{crit}}(n)$  son ajustados a la función hiperbólica  $\tanh x$  en la forma  $p_{\text{crit}}(n) = a + b \tanh(d(n - c))$ . Los resultados se muestran en la tabla 1, para los parámetros  $(a, b, d, c)$ . En el segundo renglón se encuentran para  $\{m = 0, \alpha = 3\}$ , en el tercero para  $\{m = 1, \alpha = 3\}$  y en el cuarto para  $\{m = 0, \alpha = 5\}$ . Se mostrará en la siguiente sección que los estados con  $p_{\text{crit}} = 1/2$  corresponden a estados con máximo entrelazamiento.

Finalmente se muestra  $p_{\text{crit}}(\alpha)$  como función del estado coherente  $\alpha$ , en la figura 17(d) para combinaciones fijas de  $m, n$  mientras  $\alpha = \beta$  varía. Resulta claro que los valores críticos disminuyen con  $\alpha$  dado que el estado del ensamble se hace menos entrelazado y, los valores tienden asintóticamente a cero para  $\alpha$  grande. Estos resultados se ajustan muy bien con la tangente hiperbólica en la forma  $p_{\text{crit}}(\alpha) = a + b \tanh(d(\alpha - c))$ , con amplitudes  $b < 0$  (ver ecuación (97)). Los parámetros del ajuste se presentan en la tabla 1, en la que el quinto renglón es para  $\{m = 0, n = 1\}$ , el sexto para  $\{m = 0, n = 3\}$  y el séptimo para  $\{m = 1, n = 5\}$ . Estos resultados están en concordancia con el hecho de que para  $|m - n| \gg 1$  existen intervalos

Cuadro 2: Parámetros de ajuste Gaussiano para el valor crítico  $p_{\text{crit}}$  como función de  $\gamma$ , para diferentes PACS entrelazados

State	Fig	a	b	c	v
$ \psi\rangle = N(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n}  \gamma\rangle  -\gamma\rangle + \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m}  -\gamma\rangle  \gamma\rangle)$					
$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = \text{variable}, m = 0, n = 1$					
17(b)		0,4952	-0,02459	0,479	0,2824
		$\pm 3,5 \times 10^{-4}$	$\pm 7,18 \times 10^{-4}$	$\pm 6,78 \times 10^{-3}$	$\pm 1,07 \times 10^{-2}$
$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = \text{variable}, m = 1, n = 2$					
17(b)		0,4952	-0,03074	0,3859	0,2333
		$\pm 3,43 \times 10^{-4}$	$\pm 8,84 \times 10^{-4}$	$\pm 4,98 \times 10^{-3}$	$\pm 8,07 \times 10^{-3}$
$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = \text{variable}, m = 0, n = 2$					
17(b)		0,4952	$-8,07 \times 10^{-17}$	1,0045	1,019

más amplios en los valores que puede tomar  $\alpha$  que presentan un entrelazamiento distinguible.

El comportamiento de todos los valores críticos de  $p$  confirma que el proceso de agregado de fotones actúa como un amplificador de la robustez de las propiedades de entrelazamiento de los estados estudiados en ambos escenarios, tanto estados puros como mixtos.

### 3.2.3. El límite al valor crítico $p_{\text{crit}} = 1/2$

Con el fin de proporcionar mejor intuición en el valor asintótico  $p_{\text{crit}} = 1/2$ , se considera la familia de estados coherentes con fotones agregados máximamente entrelazados (EPACS - *entangled photon added coherent states*) que ocurren para las combinaciones lineales de PACS estudiadas. El estado ECS conocido  $|\psi\rangle = N(|\gamma\rangle |-\gamma\rangle - |-\gamma\rangle |\gamma\rangle)$  tiene concurrencia  $C = 1$ . Esto permite obtener los valores extremos de  $p$  que destruyen el entrelazamiento, dado que no hay más operaciones de agregado de fotones que puedan incrementar este valor de entrelazamiento. Partiendo de este estado, la matriz de densidad  $\rho_0 = |\psi\rangle \langle \psi|$  en la base computacional es

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Resulta directo probar que  $\rho_0$  es independiente de los valores  $m, n$ . Este estado es parte de una familia más grande de estados coherentes con fotones agregados máximamente entrelazados (MEPACS - *Maximally EPACS*) bajo estudio, debido a que la superposición con  $u = -v = 1/\sqrt{2}$  para todo  $\alpha$  y  $\beta$  cuando  $m \neq n$ , así como para  $\alpha \neq \beta$  si  $n = m$  construyen los MEPACS como

$$|\psi\rangle = N(1/2, 1/2)(1/\sqrt{2})(\hat{a}^{\dagger m} \otimes \hat{b}^{\dagger n} |\alpha\rangle |\beta\rangle - \hat{a}^{\dagger n} \otimes \hat{b}^{\dagger m} |\alpha\rangle |\beta\rangle). \quad (100)$$

La ecuación 11 crea la misma matriz de densidad en la base computacional que la que se muestra en la ecuación (99) para el caso ECS ( $\alpha = -\beta = \gamma, n = 0, m = 0$ ), y con las mismas propiedades de entrelazamiento. Con una simple sustitución, la constante  $N$  es

$$N(1/2, 1/2) = \left[ L_m(-|\alpha|^2) L_n(-|\beta|^2) m! n! - e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} |\beta|^{2(m-n)} \right. \\ \left. \times (\Gamma(1+m))^2 |{}_1\tilde{F}_1(1+m; 1+m-n; \alpha^* \beta)|^2 \right]^{-1/2}, \quad (101)$$

En la base computacional, este estado produce estados de Bell máximamente entrelazados de acuerdo a la ecuación (92),  $C = 1$ , lo cual se debe a que en este caso  $N(1/2, 1/2) = N_1 N_2$ . Por esto, se usa la ecuación (99) para construir el estado mixto de la ecuación (95) para esta familia de estados, lo que resulta en la matriz de densidad siguiente

$$\rho = \frac{p}{3} I + \left(1 - \frac{4p}{3}\right) \rho_0 = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(3-2p) & \frac{1}{6}(4p-3) & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(4p-3) & \frac{1}{6}(3-2p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{3} \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Esta matriz tiene la forma de  $X$ ,

$$\rho = \begin{pmatrix} u_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ 0 & z & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_- \end{pmatrix}, \quad (103)$$

donde la concurrencia  $C$  se puede calcular (O'Connor y Wooters, 2001) y se expresa de forma compacta como,

$$C = 2 \max\left(0, |z| - \sqrt{u^+ u^-}\right). \quad (104)$$

En nuestro caso, tenemos  $z = 2p/3 - 1/2$  y  $u_+ = u_{-1} = p/3$ . La concurrencia está dada por

$$C(p) = \max\{0, 1 - 2p\}, \quad (105)$$

lo que establece a  $p = 1/2$  como el valor extremo de  $p$ , denominado como  $p_{\text{crit}}$  antes de que la concurrencia se vuelva cero en la situación de un estado con entrelazamiento máximo en un canal despolarizante. Es importante notar que cualquier estado formado por una combinación lineal distinta a la ecuación (100) resultará en valores menores para  $p_{\text{crit}}$  pues el estado tendrá menor entrelazamiento. Esta es la razón por la cual la mayoría de los cálculos se hicieron considerando la combinación lineal positiva, es decir, donde  $u = v = 1/\sqrt{2}$ , dado que cualquier variación de los parámetros del estado (93) cambia  $p_{\text{crit}}$ . Resultan de mayor relevancia aquellos casos que inicialmente tienen  $p_{\text{crit}}$  baja y luego del proceso de agregado de fotones, este valor se incrementa. Este incremento se puede entender fácilmente iniciando con el estado trivial  $|\psi\rangle \propto |\alpha\rangle|\alpha\rangle + |\alpha\rangle|\alpha\rangle \propto |\alpha\rangle|\alpha\rangle$ , el cual tiene obviamente un entrelazamiento nulo, y luego se compara con el resultado de mezclar  $\hat{a}^\dagger|\sqrt{2}\alpha\rangle$  with  $|0\rangle$  en un divisor de haz 50/50 con lo que se obtiene un estado de la forma  $|\psi\rangle \propto \hat{a}^\dagger|\alpha\rangle|\alpha\rangle + |\alpha\rangle\hat{b}^\dagger|\alpha\rangle$  cuyo entrelazamiento ahora es no nulo. La única diferencia en la generación de un estado y el otro es el proceso de agregado de fotones, el cual es experimentalmente plausible (Zavatta et al., 2004; Jeong et al., 2014). Los incrementos de  $p_{\text{crit}}$  al final están relacionados con el grado de entrelazamiento de  $\rho_0$ . Por lo tanto, si el agregado de fotones incrementa  $C(\rho_0)$  el valor necesario de  $p$  para destruir el entrelazamiento incrementa también.

### 3.3. Conclusiones

Se presentó un estudio sobre las propiedades de entrelazamiento de una superposición arbitraria de  $n, m$  fotones agregados a un estado coherente en la forma de la ecuación (87), para el que se presentaron las condiciones de máximo entrelazamiento. También se evaluó la influencia de la diferencia  $|n - m|$  y el efecto del producto  $\alpha\beta$  en la concurrencia. Se encontró que una diferencia grande  $|m - n| \gg 1$  puede ser utilizada para generar estados con entrelazamiento máximo, adicionalmente a los ECS conocidos, los que están formados por estados coherentes con fases opuestas. Esto implica que el proceso de agregado de fotones en aquellas superposiciones de CS con bajo entrelazamiento, como la superposición positiva estudiada en este capítulo, pueden incrementar su cantidad de entrelazamiento a través de este proceso. En general, los valores más altos para el entrelazamiento se encuentran alrededor de dos superposiciones formadas por  $u = \pm 1/\sqrt{2}$ , en donde el valor de  $u$  puede quedar menos restringido si los estados coherentes tienen fases opuestas, o si el número de fotones agregados para cada modo de interés es muy distinto. También discutimos el efecto de un canal despolarizante sobre las propiedades de entrelazamiento de las superposiciones mostradas y se encontró que el valor limitante de  $p$  para que la concurrencia  $C(\rho)$  no se nulifique es de  $p \rightarrow 0,5$  por la izquierda, sobre lo que se proveyeron resultados analíticos para soportar los numéricos, esto sin considerar ningún estado en particular para la superposición. Sin embargo,  $C(\rho)$  puede hacerse cero para valores bajos de  $p$  dependiendo de las características del estado. Se hizo un ajuste numérico de la probabilidad crítica  $p_{crit}$  con lo que se mostró una relación hiperbólica con  $\gamma$  y el número de fotones agregados  $n$ . Adicionalmente se obtuvo una familia completa de superposiciones de PACS con entrelazamiento máximo en la ecuación (100), sin la necesidad de una fase negativa en los estados coherentes. Estos estados tienen la probabilidad crítica máxima  $p_{crit} = 1/2$  cuando son sometidos a efectos de despolarización y podrían resultar útiles en el procesamiento de información cuántica con variables continuas.

## Capítulo 4.

---

# Correlaciones cuánticas de estados coherentes con un fotón agregado

En este capítulo estudiamos entrelazamiento de variable continua y sus correlaciones en combinaciones lineales de estados coherentes y estados con un fotón agregado (SPACS por sus siglas en inglés). Se estudian dos familias de estados de la forma  $|\psi\rangle_{\text{dp,pa}} = \mathcal{N}(\hat{a}^\dagger \pm \hat{b}^\dagger)|\alpha\rangle|\beta\rangle$ . Estas familias son parte de los estados estudiados en el capítulo anterior considerando el caso  $u = \pm v$ ,  $m = 1$ ,  $n = 0$  de la ecuación (87). Los estados estudiados en este capítulo tienen la ventaja de ser experimentalmente realizables mediante operaciones de óptica lineal partiendo ya sea de un estado de fotón individual (Fock) o un estado coherente con un fotón agregado (SPACS), lo cual se mostrará en el desarrollo del capítulo. El estudio teórico de las propiedades no clásicas de estas superposiciones es importante porque son un recurso entrelazado potencial para procesamiento de información cuántica en variable continua. Para la caracterización se utilizan estimadores no clásicos basados en las correlaciones.

Las correlaciones se caracterizan a través del *quantum discord* con un proyector de qubit desplazado y a través de la perturbación inducida por la medición (MID por sus siglas en inglés) con mediciones homodinas simultáneas. En un escenario donde los detectores son homodinos, el MID revela una forma sencilla para seleccionar fases óptimas de los osciladores locales para explotar el máximo de las correlaciones. Los estados correlacionados forman un canal que es sometido a dos mecanismos de pérdidas: esparcimiento y fluctuación de fase, haciendo el estudio a estados entrelazados mixtos. Podremos observar que conforme el esparcimiento aumente, el QD disminuye de forma monótona. Al mismo tiempo para el estado  $|\psi\rangle_{\text{dp}}$ , QD es más robusto ante fluctuaciones de fase grandes cuando el número promedio de fotones  $n_0$  es mayor a cero, pero si las fluctuaciones de fase son bajas, QD es más robusto para  $n_0 = 0$ .

### 4.1. Introducción

El entrelazamiento cuántico como medida de la no separabilidad de estados cuánticos multipartitas se ha estudiado ampliamente de manera teórica y experimental, se ha identifi-

cado como un recurso clave para el procesamiento de información cuántica. La mayoría de las aplicaciones se han propuesto con variables discretas (DV por sus siglas en inglés), las que requieren detectores altamente precisos y experimentos demandantes (Driessen, 2013). Por otro lado, QIP de variable continua (CV por sus siglas en inglés) se ha explorado recientemente (Braunstein, 2005). Las aplicaciones en CV hacen que al menos la detección sea experimentalmente más sencilla

Un estado coherente (CS por sus siglas en inglés) es un estado CV que puede generarse fácilmente con un láser y sus propiedades clásicas son bien conocidas. Se ha propuesto la realización de computación cuántica con CS por Jeong et. al. (Jeong y Kim, 2001) incluyendo sus aplicaciones potenciales en comunicaciones. Sin embargo, este esquema se fundamenta en estados coherentes entrelazados como recurso, los cuales son complicados de obtener experimentalmente (Daoud y Laamara, 2012). Por el contrario, es posible obtener un estado entrelazado híbrido (HES por sus siglas en inglés) formado por una combinación lineal de CS y otro estado no clásico. Los estados de Fock  $|n\rangle$  que son puramente cuánticos son considerados los estados más no clásicos. Un estado coherente con un fotón agregado (SPACS por sus siglas en inglés) se genera mediante la aplicación del operador de creación a un estado coherente una sola vez  $\propto \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle$ , y tiene propiedades tanto clásicas como no clásicas combinadas. Los SPACS fueron propuestos primero por Agarwal y Tara (Agarwal y Tara, 1991) y fueron más tarde obtenidos experimentalmente mediante la interacción de un CS en un cristal no lineal (Zavatta et al., 2004). Además resultaron útiles para estudiar la transición entre el dominio cuántico y el clásico. Los SPACS se caracterizan por presentar negatividades en la función de Wigner, que es una manifestación de no clasicidad del estado (Kenfack y Yczkowski, 2004). Por lo tanto, su uso para generar estados entrelazados bipartitos a través de óptica lineal como un divisor de haz (BS por sus siglas en inglés) es también viable (Kim et al., 2002) y de interés en QIP.

Un ejemplo de estado entrelazado híbrido (HES - *hybrid entangled state*) fue propuesto por (Sekatski et al., 2012), ellos combinaron estados de Fock en un BS para producir una superposición de estados de Fock desplazados (DFS - *displaced Fock states*) y CS lo que produjo

la función de onda  $|\psi\rangle = \hat{D}(\alpha) |1\rangle |\alpha\rangle - |1\rangle \hat{D}(\alpha) |1\rangle$ , la cual es equivalente a la superposición de SPACS con CS en la forma  $|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle |\alpha\rangle - \hat{b}^\dagger |\alpha\rangle |\alpha\rangle$ , sin embargo, ellos no estudian las propiedades de no clasicidad a través de la discordia cuántica ni la relación con la detección homodina, entre otras. Es esta la base para el estudio presentado en este capítulo, en donde proponemos estudiar estados de la forma  $|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle |\alpha\rangle \pm \hat{b}^\dagger |\alpha\rangle |\alpha\rangle$  (hasta una constante de normalización) con propiedades de correlación orientadas a aplicaciones de comunicación cuánticas, las que se presentarán en el siguiente capítulo. Los estados bajo estudio pueden ser producidos experimentalmente por medio de operaciones lineales junto con procesos no lineales requeridos únicamente para la generación del SPACS. Los estados coherentes con fotones agregados forman parte de los estados no Gaussianos y para generarlos se requieren operaciones también no Gaussianas, las cuales tienen gran aplicación en el procesamiento de información cuántica con variable continua (S. Wang et al., 2015). El proceso de agregado de fotones se ha utilizado como método sistemático para generar entrelazamiento entre subsistemas de CS y estados individuales de Fock, como se propuso y demostró experimentalmente por (Jeong et al., 2014; Kwon y Jeong, 2015).

Las comunicaciones cuánticas presentan un campo potencial de aplicación para estados bipartitos formados por superposiciones de CS y SPACS. Las comunicaciones cuánticas requieren el establecimiento de un protocolo que precisa de la selección de un conjunto de mediciones distinguibles bajo una estrategia viable. La medición de cuadratura resulta como una primera opción a considerar cuando se compara con otros protocolos de comunicación (Silva, Xu, Agnolini, Gallion, y Mendieta, 2006; Chuan et al., 2010; M. G. A. Paris, Cola, y Bonifacio, 2003). Las mediciones de cuadratura se obtienen directamente por medio de detección homodina (HD - *homodine detection*).

Una primera aproximación que puede usarse es la distribución conjunta de probabilidad de cuadratura (JQP - *joint quadrature probability*), la cual se obtiene por medición simultánea de la cuadratura de un estado bipartito y su estadística. El uso de JQP se propone inicialmente por su simplicidad, e incluso aunque no puede mostrar directamente el grado de las correlaciones, resulta útil en el sentido de que indica la existencia de algún tipo de correlación en los

estados bipartitos estudiados. Luego, si se encuentra algún grado de correlación en estados, se debe recurrir a otra medida que pueda remover la contribución clásica a estas correlaciones. Utilizando proyectores homodinos es posible caracterizar las correlaciones por medio de la perturbación inducida por la medición (AMID - *ameliorated measurement disturbance*) (Ye, Liu, Xu, Liu, y Zhang, 2013; Girolami, Paternostro, y Adesso, 2011). El AMID es la diferencia entre la información mutua cuántica (MQI - *mutual quantum information*) y las correlaciones clásicas (CC - *classical correlations*) cuando ambos subsistemas son medidos de forma simultánea, y es minimizada en todas las mediciones posibles. Puede entenderse como el costo entrópico máximo de cualquier medición posible dado un conjunto completo de mediciones. Si el proceso de optimización del AMID es descartado, entonces se obtiene una medición más relajada denominada simplemente perturbación inducida por la medición (MID - *measurement induced disturbance*) (Modi et al., 2010), la cual juega un papel importante cuando se define el comportamiento de las correlaciones dada una medida proyectiva.

Es importante mencionar que los mecanismos de caracterización de las correlaciones mediante JQP mencionados anteriormente serán empleados únicamente en un canal puro porque se proponen como una herramienta que pueda usarse para caracterizar estados que están siendo preparados en un laboratorio, es decir, una vez que el experimento se encuentra armado, el estado bipartito generado debe ser evaluado antes de poder utilizarse como un canal cuántico. En estas circunstancias, el estado bipartito no está sujeto a ruido, considerando condiciones ideales, o al menos a mínimas fuentes de ruido, ya que presumiblemente se mantiene en un ambiente controlado. En este capítulo estudiamos dos superposiciones bipartitas distintas de SPACS, para las que la JQP y el AMID resultan buenos candidatos para caracterizar parcialmente sus propiedades de correlación y para diferenciar a uno del otro. Posterior a la generación del estado bipartito correlacionado se emplea como un canal cuántico. En este punto, se introducen efectos de ruido en el canal por medio de esparcimiento y fluctuaciones de fase, ambos afectan las correlaciones clásicas y cuánticas del canal y por lo tanto su QD. Es el QD el que será evaluado con el fin de conocer cuantitativamente las propiedades cuánticas del canal. Sin embargo, las mediciones de QD no son sencillas y nos preguntamos si será

posible o no, utilizar un observable accesible para determinar la cantidad de QD del canal sujeto a ruido. Para esto, proponemos el uso de la fluctuación de cuadratura  $(\Delta X)^2$  como un buen estimador del QD en estos canales.

En resumen, el objetivo del estudio de este capítulo es cuantificar las características no clásicas de los estados formados por superposiciones de SPACS propuestos, que puedan ser utilizados a su vez como canales para establecer protocolos de comunicación, como se explorará en el capítulo siguiente. Especialmente, cuando el canal es afectado por mecanismos de pérdidas así como el impacto de dichos mecanismos en las correlaciones cuánticas del estado bipartito.

#### 4.1.1. Probabilidad de cuadraturas condicionales

La detección homodina, como se describió en la sección 2.7.5 consiste en el mezclado de una señal a ser medida, generalmente de baja intensidad, con otra muy intensa de la misma frecuencia y fase relativa conocida llamada oscilador local (LO - *local oscillator*) a través de un divisor de haz cuyas fotocorrientes de salida son restadas y son proporcionales al operador de cuadratura (Collett, Loudon, y Gardiner, 1987; Barnett y Radmore, 2002)

$$\hat{X}_{\lambda_{A(B)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}(\hat{b})e^{-i\lambda_{A(B)}} + \hat{a}^\dagger(\hat{b}^\dagger)e^{i\lambda_{A(B)}}), \quad (106)$$

donde  $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}, \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}\}$  son los operadores de creación y aniquilación para el subsistema correspondiente  $A(B)$ , y la fase  $\lambda_{A(B)}$  del oscilador local.

Una estrategia de comunicación simple entre dos partes (Alice y Bob) que comparte un recurso común descrito por la matriz de densidad  $\rho^{AB}$  puede basarse en las correlaciones de los resultados de la medición simultánea mediante POVMs homodinos. Para los que cada subsistema tiene el POVM,

$$\hat{\Pi}^{A(B)}(\lambda_{A(B)}) = M_{\lambda_{A(B)}}^{A(B)} M_{\lambda_{A(B)}}^{A(B)\dagger} = |X_{\lambda_{A(B)}}\rangle \langle X_{\lambda_{A(B)}}|, \quad (107)$$

donde las cuadraturas  $|X_{\lambda_{A(B)}}\rangle$  son eigenestados de (106) (Barnett y Radmore, 2002) y se describen mediante el estado  $|X_{\lambda_{A(B)}}\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\{-\frac{1}{2}X_{\lambda_{A(B)}}^2 + \sqrt{2}e^{i\lambda}X_{\lambda_{A(B)}}\hat{a}^\dagger(\hat{b}^\dagger) - \frac{1}{2}e^{2i\lambda_{A(B)}}\hat{a}^\dagger(\hat{b}^\dagger)^2\} |0\rangle$ .

El proceso de medición se describe como sigue, Alice mide con  $\hat{\Pi}^A(\lambda_A)$  y obtiene el resultado  $X_{\lambda_A}$  con probabilidad

$$P_A(X_{\lambda_A}) = \text{Tr}\{\hat{\Pi}^A \otimes \mathbf{1}^B \rho^{AB}\}. \quad (108)$$

El estado proyectado posterior a la medición en el subsistema  $A$  se obtiene como,

$$\rho^{AB} \rightarrow \rho_{\hat{\Pi}^A}^{AB} = \frac{\hat{\Pi}^A \otimes \mathbf{1}^B \rho^{AB} \hat{\Pi}^A \otimes \mathbf{1}^B}{\text{Tr}\{\rho^{AB} \hat{\Pi}^A \otimes \mathbf{1}^B\}}. \quad (109)$$

Después de esto, Bob mide con  $\hat{\Pi}^B(\lambda_B)$  y obtiene  $X_{\lambda_B}$  con las probabilidades condicionales dadas por

$$P_B(X_{\lambda_B}|X_{\lambda_A}) = \text{Tr}[\mathbf{1}^A \otimes \hat{\Pi}^B \rho_{\hat{\Pi}^A}^{AB}]. \quad (110)$$

Esto representa la probabilidad de obtener la cuadratura  $X_{\lambda_B}$  dado que se obtuvo la cuadratura  $X_{\lambda_A}$ . Con (110) se puede obtener la probabilidad conjunta mediante

$$\begin{aligned} P_{AB}(X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}) &= P_A(X_{\lambda_A})P_B(X_{\lambda_B}|X_{\lambda_A}) \\ &= \text{Tr}[\hat{\Pi}^A \otimes \hat{\Pi}^B \rho^{AB}]. \end{aligned} \quad (111)$$

Utilizando esta simple probabilidad conjunta se puede ganar conocimiento del comportamiento no clásico del canal bajo estudio a través de mediciones homodinas que pueden ser útiles en comunicaciones. Esto debido a que uno puede describir la matriz de densidad del sistema en la base homodina (como se describirá más adelante), la cual captura la naturaleza continua de los campos ópticos. Esto a su vez facilita la expresión del sistema proyectado como una mezcla estadística de definida por los resultados de la detección homodina que resultará útil en los cálculos del MID. Lo que a su vez sirve para seleccionar fases del LO que maximicen las correlaciones que pueden obtenerse entre ambas partes del sistema.

#### 4.1.2. Perturbación inducida por la medición

La perturbación inducida por la medición (MID - *measurement induced disturbance*) como se vio en el capítulo 2 se obtiene mediante (Luo, 2008)

$$D_{\text{MID}}(\rho^{AB}) = \mathcal{I}(\rho^{AB}) - \mathcal{I}(\rho_{\hat{\Pi}}^{AB}). \quad (112)$$

Donde  $I(\rho^{AB})$  es la información mutua del sistema y  $S$  es la entropía de Von Neumann (Nielsen y Chuang, 2000). La entropía de un sistema descrito por  $\rho$ , se obtiene a través de

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log \rho]. \quad (113)$$

También se utilizará la versión optimizada del MID, el AMID:

$$\mathcal{A}(\rho^{AB}) = \inf_{\{\Pi_i\}} [\mathcal{I}(\rho^{AB}) - \mathcal{I}(\rho_{\Pi}^{AB})], \quad (114)$$

donde se toma el mínimo sobre todas las mediciones posibles en ambos subsistemas.

Cuando se lleva a cabo cualquier proceso de medición sin el conocimiento del resultado de la medición, se dice que es no selectivo. En este capítulo, estamos interesados en obtener información de los efectos no clásicos a través de mediciones homodinas. Si se realiza una medición de cuadratura no selectiva en un subsistema (de un sistema bipartito), este produce en el otro una mezcla estadística de infinitas cuadraturas posibles relacionadas con cada ángulo posible del LO. Si la cuadratura de ambos subsistemas es medida simultáneamente, el sistema completo es una mezcla estadística de posibles eigenestados de cuadratura. Un método viable para estudiar un canal con estas características es mediante un MID de cuadratura con un conjunto completo de proyectores de cuadratura dado que pueden implementarse con detecciones homodinas fácilmente en la práctica (Olivares, Cialdi, Castelli, y Paris, 2013; Kumar et al., 2012). Adicionalmente, el MID de cuadratura mostrará la estrategia de selección de fases  $\lambda_{A(B)}$  del LO para maximizar las correlaciones entre Alice y Bob para HD, lo que podría ser explotado en un protocolo de comunicación cuántica.

Para aplicar el formalismo del MID, la matriz de densidad completa del sistema es inicialmente expandida en la eigenbase de cuadratura como

$$\begin{aligned} \rho^{AB} = & \int_{-\infty}^{\infty} dX'_{\lambda_A} dX'_{\lambda_B} dX''_{\lambda_A} dX''_{\lambda_B} |X'_{\lambda_A}\rangle \langle X'_{\lambda_A}| \\ & \otimes |X'_{\lambda_B}\rangle \langle X'_{\lambda_B}| \rho^{AB} |X''_{\lambda_A}\rangle \langle X''_{\lambda_A}| \otimes |X''_{\lambda_B}\rangle \langle X''_{\lambda_B}|. \end{aligned} \quad (115)$$

Dado que el MID considera mediciones simultáneas. La matriz de densidad de la medición no selectiva de cuadratura del sistema es

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi}^{AB} = & \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_A} dX_{\lambda_B} P_{AB}(X_{\lambda_A}(\lambda_A), X_{\lambda_B}(\lambda_B)) \\ & \times |X_{\lambda_A}\rangle \langle X_{\lambda_A}| \otimes |X_{\lambda_B}\rangle \langle X_{\lambda_B}|, \end{aligned} \quad (116)$$

donde,  $P_{AB}(X_{\lambda_A}(\lambda_A), X_{\lambda_B}(\lambda_B))$  en (111) es la probabilidad conjunta de la detección del par de cuadraturas  $\{X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}\}$ , para  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$  dadas. La notación de  $P_{AB}$  ha sido utilizada para enfatizar la dependencia con  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$ . El estado final se obtiene tras la integración sobre todos los posibles resultados. La información mutua del sistema previa a la medición  $\mathcal{I}(\rho^{AB})$  es simplemente el doble de la entropía de entrelazamiento, ya que se ha considerado un caso puro y se calcula de la manera tradicional en la base original ya que es más sencillo. Asimismo para obtener (112) y (114), se requiere calcular las entropías de los estados proyectados  $S(\rho_{\Pi}^A)$ ,  $S(\rho_{\Pi}^B)$  y  $S(\rho_{\Pi}^{AB})$ . Estas entropías se obtienen con la expansión en cuadratura. La matriz de densidad conjunta es diagonal en esta base, lo que permite un cálculo sencillo como

$$S(\rho_{\Pi}^{AB}) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_A} dX_{\lambda_B} P_{AB}(X_{\lambda_A}(\lambda_A), X_{\lambda_B}(\lambda_B)) \times \log P_{AB}(X_{\lambda_A}(\lambda_A), X_{\lambda_B}(\lambda_B)). \quad (117)$$

Para los términos restantes de la información mutua se reduce a calcular,

$$S(\rho_{\Pi}^{A(B)}) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_{A(B)}} P_{A(B)}(X_{\lambda_{A(B)}}(\lambda_{A(B)})) \times \log_{A(B)}(X_{\lambda_{A(B)}}(\lambda_{A(B)})), \quad (118)$$

donde las trazas parciales se cambian por integrales marginales. Con esto, la información mutua dle estado proyectado del sistema se puede construir como

$$\mathcal{I}(\rho_{\Pi}^{AB})] = S(\rho_{\Pi}^A) + S(\rho_{\Pi}^B) - S(\rho_{\Pi}^{AB}). \quad (119)$$

Una característica importante del MID y AMID de cuadratura utilizado en ete trabajo es que se aplica únicamente con estados puros y es de naturaleza cualitativa, motivado por conocer si existe no clasicidad de manera relativamente sencilla. Dado que nuestra intención es saber si existen correlaciones en los estados a través de la distribución JQP que pueden ser adquiridas experimentalmente. Y una cuantificación más exacta de estas correlaciones incluyendo mecanismos de pérdidas se llevan a cabo a través del QD en la siguiente sección.

#### 4.1.3. Quantum discord

Cuando un sistema bipartito se utiliza para establecer un canal de comunicación cuántica realista, dicho canal sufre pérdidas de distintos tipos. Los diferentes mecanismos de pérdida

inducidos por el medio en el que se establece el canal generan una mezcla estadística relacionada con los grados de libertad de las pérdidas y todas las formas posibles en que las pérdidas podrían ocurrir. A diferencia de los estados puros, la entropía de entrelazamiento no es adecuada para caracterizar el comportamiento no clásico de los estados mixtos. Por lo que se recurre al QD, el cual funciona incluso en presencia de procesos de mezclado.

Tal como ya se mencionó en el capítulo 2, la idea de la medición de la no clasicidad relacionada con la información mutua comenzó con los trabajos seminales de Ollivier y Zurek (2001) y, Henderson y Vedral (2001) entre las diferentes propuestas para cuantificar la no clasicidad, el QD es el más utilizado (Giorda, Allegra, y Paris, 2012). Asumamos que el subsistema  $B$ ,  $\rho^B$  es medido con un POVM y se quiere ganar información sobre  $\rho^A$ . Cada medición en  $B$  proyecta al sistema en (109) para cada medición de la forma  $\rho^{AB} \rightarrow \rho_{\Pi_i^B}^{AB} = \hat{\Pi}_i^B \rho^{AB} \hat{\Pi}_i^B / \text{Tr}[\rho^{AB} \Pi_i^B]$ , donde el resultado de cada medición está gobernado por la probabilidad  $p_i = \text{Tr}[\rho^{AB} \Pi_i^B]$ . La entropía de  $A$  posterior a la medición se obtiene como  $S(\rho_{\Pi^B}^A)(A|B) = \sum_i p_i S(\rho_{\Pi_i^B}^A)$ , aquí  $\rho_{\Pi^B}^A$  significa que el *ensemble*  $\rho_{\Pi^B}^A = \sum_i p_i \rho_{\Pi_i^B}^A$  que es resultado de la no selectividad de la medición en  $B$  con sus correspondientes elementos del POVM. Dado que la cantidad de información de un sistema está relacionada con su entropía, la diferencia  $S(\rho^A) - S(\rho_{\Pi^B}^A)$  se relaciona con la cantidad de información ganada por el proceso de medición, y el máximo de esta diferencia se conoce como la correlación clásica, definida mediante

$$\begin{aligned} J_{cl}(A|B) &= \max_{\{\Pi_i\}} [S(\rho^A) - S(\rho_{\Pi^B}^A)(A|B)], \\ &= S(\rho^A) - \min_{\{\Pi_i\}} [S(\rho_{\Pi^B}^A)(A|B)]. \end{aligned} \quad (120)$$

Donde las entropías son obtenidas a través de (113). Por lo tanto, con la ayuda de la información mutua, el QD se define como,

$$\begin{aligned} D_B(\rho^{AB}) &= \mathcal{I}(\rho^{AB}) - J_{cl}(A|B), \\ &= S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) + \min_{\{\Pi_i\}} [S(\rho_{\Pi^B}^A)(A|B)], \end{aligned} \quad (121)$$

donde  $D_B(\rho^{AB})$  es el QD cuando las mediciones se realizan en el subsistema  $B$ . El quantum discord es una de las propiedades que se estarán utilizando para encontrar cuantitativamente las correlaciones no clásicas del canal.

## 4.2. Modelo

Estamos interesados en la familia de SPACS,

$$|\psi\rangle = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \pm \hat{b}^\dagger |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b), \quad (122)$$

donde  $\mathcal{N}$  es un factor de normalización, los subíndices representan al sistema. Los operadores de creación  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{b}^\dagger$  actúan en el subsistema correspondiente. Se usan las equivalencias  $|\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \equiv |\alpha\rangle |\alpha\rangle \equiv |\alpha, \alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle$  de forma indistinta durante el desarrollo del capítulo. Se puede observar en la ecuación (122) que los estados de interés son una superposición de SPACS. Los SPACS se forman en general por una única aplicación de operador de creación a un estado coherente (Agarwal y Tara, 1991) con lo que se obtiene el estado  $|\alpha, 1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$ .

Los estados en (122) se pueden obtener a través de un BS general (Campos et al., 1989),

$$\hat{B}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta e^{i\phi_t} & \text{sen } \theta e^{i\phi_\rho} \\ -\text{sen } \theta e^{-i\phi_\rho} & \cos \theta e^{-i\phi_t} \end{bmatrix}, \quad (123)$$

con las entradas ya sea  $|\alpha_0\rangle \otimes |1\rangle$  o  $|\alpha_0, 1\rangle \otimes |0\rangle$ . Aquí restringidas a un tipo de BS sin fase en los campos transmitidos y una fase  $\pi$  en los haces reflejados ( $\phi_t = 0, \phi_\rho = \pi$ ), y  $\theta = \pi/4$  lo cual representa a un BS 50/50 BS se asume que no existen otras fuentes de diferencia de fase para los campos.

En la superposición negativa, la salida del BS se determina mediante  $|\psi\rangle_{dp} = \hat{B}(\theta = \pi/4) |1\rangle |\alpha\rangle$  previo a las pérdidas. (122) se reduce a

$$|\psi\rangle_{dp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{b}^\dagger) |\alpha\rangle |\alpha\rangle, \quad (124)$$

donde  $\alpha = \alpha_0/\sqrt{2}$ , *dp* significa *displaced photons*. Un canal formado con este estado será designado como canal con fotones desplazados (DPC - *displaced photons channel*) y se muestra en la figura 18(a).

Para la superposición positiva, la salida del BS será  $|\psi\rangle_{pa} = \hat{B}(\theta = \pi/4) |\alpha, 1\rangle \otimes |0\rangle$ . El estado (122) se reduce a

$$|\psi\rangle_{pa} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) |\alpha\rangle |\alpha\rangle, \quad (125)$$

donde  $\mathcal{N} = 1/\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle_{pa}} = 1/\sqrt{1 + 2|\alpha|^2}$  es la constante de normalización,  $\alpha = \alpha_0/\sqrt{2}$ . Con  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 1/\sqrt{2}$  de (122). El subíndice *pa* significa fotón agregado (PA - *photon added*) y designa al estado de entrada  $|\alpha, 1\rangle$  al BS en la figura 18(b) que dio origen a (125). Cuando se utilice como recurso compartido se llamada canal de fotones agregados (PAC - *photon added channel*). Equivalentemente (122) se puede representar en la base ortogonal,

$$|\psi\rangle = (\mathcal{N}/\sqrt{2})(\hat{D}(\alpha) |1\rangle_a |\alpha\rangle_b \pm |\alpha\rangle_a \hat{D}(\alpha) |1\rangle_b + (\alpha^* \pm \alpha^*) |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b). \quad (126)$$

De forma más específica (124) se reduce a

$$|\psi\rangle_{dp} = (1/\sqrt{2})(\hat{D}(\alpha_0/\sqrt{2}) |1\rangle_a |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_b - |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_a \hat{D}(\alpha_0/\sqrt{2}) |1\rangle_b), \quad (127)$$

lo que lo convierte en el estado propuesto en (Sekatski et al., 2012). Por otro lado, para el estado (125) el estado generado es

$$|\psi\rangle_{pa} = \mathcal{N}(\hat{D}(\alpha_0/\sqrt{2}) |1\rangle_a |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_b + |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_a \hat{D}(\alpha_0/\sqrt{2}) |1\rangle_b + \sqrt{2}\alpha_0 |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_a |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_b). \quad (128)$$

Es sencillo ver que el término  $\sqrt{2}\alpha_0 |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_a |\alpha_0/\sqrt{2}\rangle_b$  juega un papel importante en la pérdida de coherencia comparado con el caso de fotones entrelazados individuales, lo cual ocurre para  $\alpha_0 = 0$ .

Los estados bipartitos  $|\psi\rangle_{pd}$  y  $|\psi\rangle_{pa}$ , se utilizan para construir canales de comunicación entre Alice y Bob. Los que se identifican por sus matrices puras de la forma

$$\rho_{dp(pa)}^{AB} = |\psi\rangle_{dp(pa)} \langle \psi |_{dp(pa)}. \quad (129)$$

Los esquemas de generación de los estados entrelazados que se analizarán se muestran en la figura 18. En (a) a un estado coherente  $|\alpha_0\rangle$  y un estado de Fock  $|1\rangle$  se mezclan en un BS 50/50 lo que produce  $\rho_{pd}^{AB}$ , y en 18(b) un SPACS  $\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle$  se mezcla con el vacío  $|0\rangle$  lo que crea  $\rho_{pa}^{AB}$ . Ambas subfiguras incluyen un experimento de detección homodina como una primera aproximación al análisis de las correlaciones un canal bipartito creado por un BS. LA

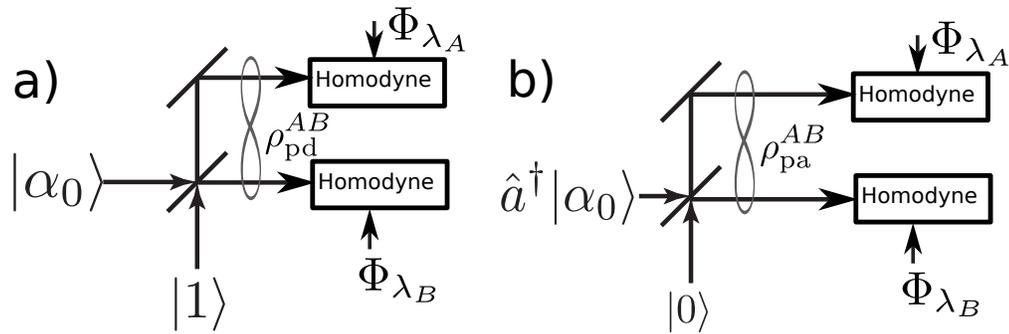


Figura 18: Proceso de generación de (a) DPC (125) y (b) PAC (124). Las correlaciones se miden a través de detección homodina.  $\Phi_{\lambda_{A(B)}}$  representa una medición homodina con fase  $\lambda_{A(B)}$ .

JQP para las cuadraturas  $X_{\lambda_A}$  y  $X_{\lambda_B}$  al realizar una HD con fases  $\lambda_A$  and  $\lambda_B$  respectivamente, se calcula usando (111) con el esquema de medición mostrado en la figura 18. El MID también será utilizado para caracterizar las correlaciones propuestas.

Los mecanismos de pérdidas se han incluido para ambos  $\rho_{pd}^{AB}$  y  $\rho_{pa}^{AB}$  los que se muestran en las figuras 19(a)-(b), respectivamente. Las fuentes de pérdida se modelan en el canal como sigue: para el esparcimiento, con un BS acoplado con el vacío con transmitancia  $\eta$ , y para la fluctuación de fase, una diferencia de fase  $\phi$  entre los brazos superior e inferior mostrados en la figura 19 (a)-(b). Se considera que es Bob el que crea el estado recurso y se queda con su parte, a la que realizará alguna medición, y envía la otra parte a Alice que se encuentra remotamente localizada. Luego Alice quiere ganar información sobre la medición que ha realizado Bob. Para la medición de Bob primeramente se realiza un desplazamiento  $\hat{D}(-\alpha)$ , cuyo propósito es que Bob obtenga su estado en la base computacional en lugar de un estado continuo. El desplazamiento se realiza a través del operador unitario  $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger} - e^{\alpha^*\hat{a}}$ .

Considerando el modo  $\hat{a}$  como el modo de entrada y  $\hat{b}$  el vacío, se parametriza la transmitancia  $\eta = \cos^2 \theta'$ , donde  $\theta' = \arccos(\sqrt{\eta})$  con  $\phi_t = 0$  y  $\phi_p = \pi$ . El esparcimiento transforma el estado puro (129) como  $\hat{a}' = \sqrt{\eta}\hat{a} - \sqrt{1-\eta}\hat{c}$  y  $\hat{c}' = \sqrt{\eta}\hat{a} + \sqrt{1-\eta}\hat{c}$ , aquí  $a'(c')$  representa los modos de salida del BS (Leonhardt, 2003, 2010; Sekatski et al., 2012). Esto transforma al estado (122) en

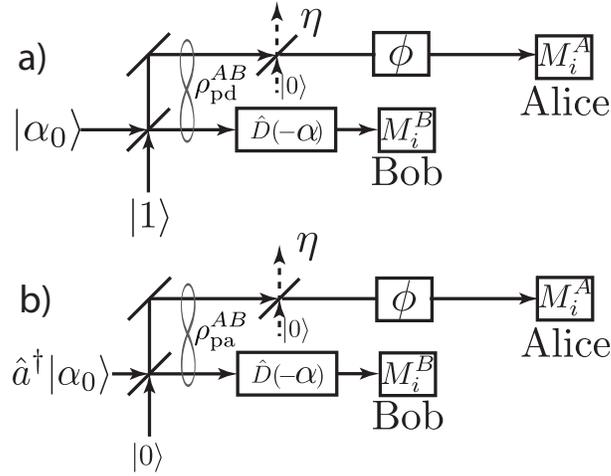


Figura 19: Caracterización esquemática del canal entrelazado mediante detecciones homodinas simultáneas. El estado de entrada puede ser un DFS que da lugar al DPC mostrado en (a), o un SPACS que da lugar al PAC que se muestra en (b). Las pérdidas se incluyen como fluctuación de fase  $\phi$  y el esparcimiento como un BS con transmitancia  $\eta$ . El lado de Bob se mide posterior a un desplazamiento  $\hat{D}(-\alpha)$  con  $M_i^B$  y Alice que se localiza remotamente mide su el estado que recibe a través de  $M_i^A$ .

$$\begin{aligned}
|\psi(\eta)\rangle_{\text{pd(pa)}} &= \hat{B}(\theta') |\psi\rangle_{\text{pd(pa)}} \\
&= \mathcal{N}^2 \left( \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{2}} \hat{D}_{a'}(\alpha\sqrt{2}) \hat{D}_{c'}(\sqrt{1-\eta}\alpha) |1\rangle_{a'} |0\rangle_{c'} |\alpha\rangle_b \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{2}} \hat{D}_{a'}(\alpha\sqrt{\eta}) \hat{D}_{c'}(\sqrt{1-\eta}\alpha) |0\rangle_{a'} |1\rangle_{c'} |\alpha\rangle_b \right. \\
&\quad \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{D}_{a'}(\alpha\sqrt{\eta}) \hat{D}_{c'}(\sqrt{1-\eta}\alpha) \hat{D}(\alpha)_b |0\rangle_{a'} |0\rangle_{c'} |1\rangle_b \\
&\quad \left. + \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} (1 \mp 1) \hat{D}_{a'}(\alpha\sqrt{\eta}) \hat{D}_{c'}(\sqrt{1-\eta}\alpha) |0\rangle_{a'} |0\rangle_{c'} |\alpha\rangle_b \right). \tag{130}
\end{aligned}$$

La matriz de densidad de este estado bipartito es  $\rho_{\text{pd(pa)}}^{AB, \text{loss}}(\eta) = |\psi(\eta)\rangle_{\text{pd(pa)}} \langle \psi(\eta)|_{\text{(pa)pd}}$ .

El estado sujeto al efecto de esparcimiento posterior a la suma sobre los modos de pérdida (modos  $\hat{c}$ ), resulta en el estado mixto

$$\rho_{\text{pd(pa)}}^{AB}(\eta) = \text{Tr}_{\text{loss}}[\hat{B}(\theta') \rho^{AB} \hat{B}^\dagger(\theta')], \tag{131a}$$

donde se puede reescribir como

$$\rho_{\text{pd(pa)}}^{AB}(\eta) = p_1 \rho_1(\eta) + p_2 \rho_2(\eta). \tag{131b}$$

Esto emerge de que los modos  $\hat{c}'$  pueden ser ya sea  $|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle \langle\sqrt{1-\eta}\alpha|$  o  $\hat{D}(\sqrt{1-\eta}\alpha)|1\rangle \langle 1| \hat{D}^\dagger(\sqrt{1-\eta}\alpha)$  donde los estados son

$$\rho_1(\eta) = \hat{D}(\alpha\sqrt{\eta})\hat{D}(\alpha)|00\rangle \langle 00| \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha\sqrt{\eta}), \quad (132a)$$

y

$$\begin{aligned} \rho_2(\eta) = & (1/(|\alpha|^2(1 \mp 1)^2 + 1 + \eta))\hat{D}(\alpha\sqrt{\eta})\hat{D}(\alpha) \\ & \times [(\alpha^* \mp \alpha^*)|00\rangle \mp |01\rangle \\ & + \sqrt{\eta}|10\rangle] \times [\langle 00|(\alpha \mp \alpha) \\ & \mp \langle 01| + \langle 10|\sqrt{\eta}]\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha\sqrt{\eta}), \end{aligned} \quad (132b)$$

Los signos “-”, “+” corresponden al caso *pd* y *pa* respectivamente, con las probabilidades  $p_1 = (\mathcal{N}^2/2)(1 - \eta)$  y  $p_2 = (\mathcal{N}^2/2)(|\alpha|^2(1 \mp 1)^2 + 1 + \eta)$ . En (132) se ha utilizado la base computacional por simplicidad, como se mostró en la ecuación (126). Las probabilidades se han escrito para ambos casos, sólo es necesario notar que  $\mathcal{N} = 1$  para el caso *pd*, mientras que para el caso *pa*  $\mathcal{N} = 1/\sqrt{2|\alpha|^2 + 1}$ .

Considerando un canal en el espacio libre, las fluctuaciones de índice de refracción son insalvables lo que produce cambios de fase arbitrarios. Estas fluctuaciones se modelarán como un ensamble con una distribución de probabilidad Gaussiana. Se asume que es el brazo que se envía a Alice el que adquiere la diferencia de fase  $\phi$  respecto al brazo de Bob y se incluye en el modelo con la acción del operador de fase relativa  $\hat{U}(\phi) = e^{i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}}$  que actúa sobre el modo  $\hat{a}$  como  $\rho = \int d\phi p(\phi)\hat{U}(\phi)\rho^{AB}\hat{U}^\dagger(\phi)$ . Sin embargo, las fluctuaciones de fase serán agregadas al canal que adicionalmente está sujeto a ruido por esparcimiento, lo que conduce a la expresión de la forma

$$\rho_{pd(pa)}(\eta, \phi) = \int d\phi p(\phi)\hat{U}(\phi)\rho_{pd(pa)}^{AB}(\eta)\hat{U}^\dagger(\phi), \quad (133)$$

donde  $\rho_{pd(pa)}^{AB}(\eta)$  se definió a través de (131)-(132),  $p(\phi)$  es una distribución Gaussiana normalizada con varianza de fase  $\sigma$  centrada en cero. El efecto del ruido de fase se obtiene mediante la transformación

$$\hat{U}(\phi)\rho_{pd(pa)}^{AB}(\eta)\hat{U}^\dagger(\phi) = p_1\rho_1(\eta, \phi) + p_2\rho_2(\eta, \phi), \quad (134)$$

donde cada matriz de densidad es como sigue,

$$\rho_1(\eta, \phi) = \hat{D}(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}(\alpha) |00\rangle \langle 00| \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}), \quad (135a)$$

y

$$\begin{aligned} \rho_2(\eta, \phi) = & (1/2) \hat{D}(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}(\alpha) [(a^* \mp \alpha^*) |00\rangle \\ & \mp |01\rangle + \sqrt{\eta} e^{i\phi} |10\rangle] \times [\langle 00| (\alpha \mp \alpha) \\ & \mp \langle 01| + \langle 10| \sqrt{\eta} e^{-i\phi}] \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}), \end{aligned} \quad (135b)$$

con las mismas probabilidades  $p_1$  y  $p_2$  como en (131).

### 4.3. Resultados

A continuación se presentan los resultados del estudio de la no clasicidad de los estados mostrados en la ecuación (122) para el caso puro, y en la ecuación (133) para el caso mixto con ruido. Primeramente se muestran indicadores cualitativos basados en JQP, MID y AMID con detección de cuadraturas homodinas. Posteriormente se presenta un estudio más detallado del QD y cómo se afecta por efecto de ruido por esparcimiento y fluctuaciones de fase.

#### 4.3.1. Mediciones homodinas condicionales.

La distribución probabilidad conjunta de cuadratura (JQP - *joint quadrature probability*) (111) no es sólo un simple cálculo, sino también una medida experimental sencilla también. JPQ (111) para DPC y PAC se obtiene como,

$$\begin{aligned} P_{\text{pd(pa)}}^{AB}(X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}) = & \frac{(a_1 \pm a_2)}{4\pi(1 + \frac{1}{2}(1 \mp 1)\alpha_0^2)} \\ & \times \exp\left(- (X_{\lambda_A} - \alpha_0 \cos \lambda_A)^2 - (X_{\lambda_B} - \alpha_0 \cos \lambda_B)^2\right), \end{aligned} \quad (136)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 = & 4|e^{i\lambda_A}(X_{\lambda_A} - \frac{1}{2}e^{-i\lambda_A}\alpha_0^2)|^2 \\ & + 4|e^{i\lambda_B}(X_{\lambda_B} - \frac{1}{2}e^{-i\lambda_B}\alpha_0^2)|^2, \\ a_2 = & 2\Re\left(e^{i(\lambda_B - 2\lambda_A)}(-\alpha_0 + 2e^{i\lambda_A}X_{\lambda_A})\right) \\ & \times (-2X_{\lambda_B} + \alpha_0 e^{i\lambda_B}). \end{aligned}$$

De (136) es claro que la JQP para ambos casos es una función Gaussiana de dos variables  $X_{\lambda_A}$  y  $X_{\lambda_B}$  multiplicada por una función polinomial de las cuadraturas. La función Gaussiana se encuentra fuera del origen, cuyo centro depende de los valores  $\lambda_A(\lambda_B)$  y el valor de  $\alpha_0$ . También, la correlación de cuadratura se encuentra únicamente en el término  $a_2$ .

JQP para el estado puro  $\rho_{pd}^{AB}$  (136) se muestra en la figura 20 para dos configuraciones de fase distintas del LO y dos combinaciones del número promedio de fotones. En la figura 20(a)-(b) los detectores se ajustan a  $\lambda_A = 0$  y  $\lambda_B = 0$  con  $n_0 = 0$  y  $n_0 = 1$ , respectivamente. En la figura 20(c) y (d),  $\lambda_A = \pi/2$  y  $\lambda_B = 0$  con  $n_0 = 0$  y  $n_0 = 81$ , también. Se ve fácilmente que las correlaciones de cuadratura permanecen sin cambios para distintos valores de  $n_0$ . Uno puede notar que las cuadraturas exhiben un comportamiento altamente correlacionado, ya que tanto para las figuras 20(a) como para la 20(b) los valores de  $X_{\lambda_A}$  y  $X_{\lambda_B}$  se encuentran anticorrelacionados en las regiones iluminadas, mientras que en las figuras 20(c)-(d) para un valor dado de  $X_{\lambda_A}$  es más probable encontrar un conjunto de valores para  $X_{\lambda_B}$  en la simetría anular mostrada. El comportamiento de la JQP (136) es independiente del número promedio de fotones.

También se calcula la distribución JQP para el estado puro  $\rho_{pa}^{AB}$  (136) la cual se muestra en la figura 21 con las mismas configuraciones para los detectores pero con números del promedio de fotones distintos como  $n_0 = 0$  en las figuras 21(a)-(c), y  $n_0 = 1$ , en las figuras 21(b)-(d). Las figuras 21(a)-(c) exhiben un comportamiento correlacionado similar al de  $\rho_{pd}^{AB}$  debido a que para  $n_0 = 0$  el estado es virtualmente el mismo hasta un signo en la superposición, lo que se observa en la correlación rotada en  $\pi/2$  mostrada en 21(a) al compararla con la figura 20(a). Es fácil ver que conforme el número promedio de fotones se incrementa, las correlaciones en cuadratura caen rápidamente como se muestra en las figuras 20(b)-(d), incluso para valores tan bajos como  $n_0 = 1$ , donde las gráficas de densidad muestran bajas correlaciones de  $X_{\lambda_A}$  y  $X_{\lambda_B}$ . No se investigaron valores  $X$  mayores del número promedio fotones puesto que las figuras se vuelven redondas y simétricas rápidamente, lo cual es una muestra de un estado separable y por tanto sin correlación. Esto se puede resumir en que se puede ver la falta de correlación en las figuras, si estas presentan un comportamiento muy redondo y simétrico.

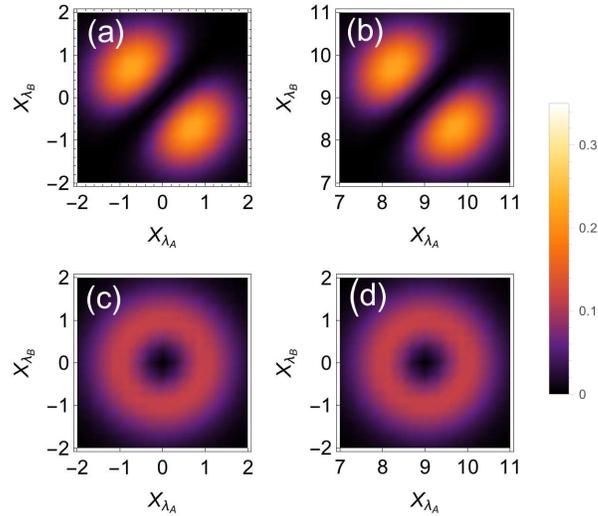


Figura 20: JQP para el canal puro DPC con detecciones homodinas para diferentes valores de  $n_0$ . Los parámetros para cada figura son: (a)  $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (b)  $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 81$ , (c)  $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (d)  $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 81$ .

Una forma sencilla de saber si un estado bipartito tiene correlación en algún grado consiste en analizar su JQP. Si se encuentra correlación para algún par de  $\lambda_{A,B}$ , entonces el estado está correlacionado, incluso cuando no está cuantificado que tan correlacionado se encuentra aún.

#### 4.3.2. MID para el canal puro.

Otra forma de analizar los canales mostrados en la figura 18 consiste en calcular su MID (112) utilizando (118)-(117) para el cálculo de la entropía, en un esfuerzo por entender el comportamiento de las correlaciones para diferentes fases de las detecciones de cuadratura en el estado puro. Incluso con el MID calculado únicamente para el canal puro, tiene implicaciones interesantes puesto que es fácil mostrar como obtener máximas correlaciones dada una estrategia de medición, es decir, muestra la relación entre  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$  para lograr esto. Las entropías se obtienen de un subsistema como  $S(\rho_{pd(pa)}^A) = -\rho_{pd(pa)}^A \log \rho_{pd(pa)}^A$ , lo que produce,

$$S(\rho_{pd}^A) = 1, \quad (137a)$$

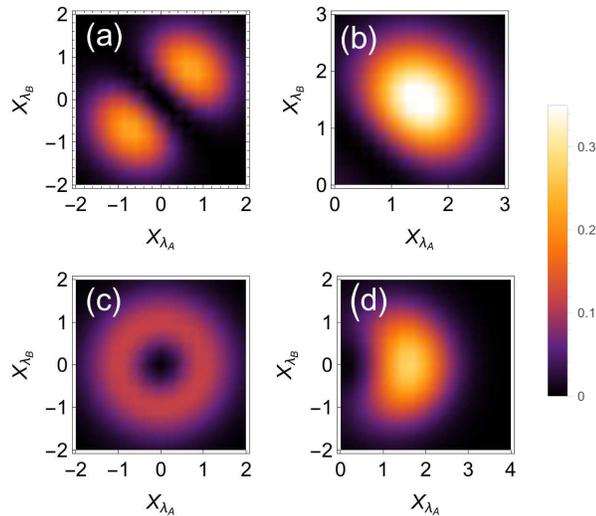


Figura 21: JQP para el estado puro PAC con detecciones homodinas para diferentes valores de  $n_0$ . Los parámetros para cada figura son: (a)  $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (b)  $\lambda_A = 0, \lambda_B = 0, n_0 = 1$ , (c)  $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 0$ , (d)  $\lambda_A = \pi/2, \lambda_B = 0, n_0 = 1$ .

$$S(\rho_{pa}^A) = \frac{\left( \ln(2(\alpha_0^2 + 1)) - \frac{\alpha_0 \sqrt{\alpha_0^2 + 2} \tanh^{-1}\left(\frac{\alpha_0 \sqrt{\alpha_0^2 + 2}}{\alpha_0^2 + 1}\right)}{\alpha_0^2 + 1} \right)}{\ln(2)}, \quad (137b)$$

que serán utilizadas para el cálculo del MID y AMID.

Los resultados para el cálculo del MID se muestran en la figura 22. La figura 22(a) muestra el MID para el estado  $\rho_{dp}$  que es válido para todo  $n_0$ , la figura 22(b)-(d) muestra el MID para el estado  $\rho_{pa}$  para  $n_0 = \{0, 25, 1, 6, 25\}$  respectivamente. Los mapas de colores muestran las correlaciones más altas en los tonos más brillantes y vice-versa, es decir, que las secciones mostradas más oscuras implican que las correlaciones clásicas inducidas por la medición son menores. De 22(a) es evidente que para el caso  $\rho_{pd}^{AB}$ , la correlación máxima ocurre con un desfase de  $\pi/2$  (mostrada en el color más claro en la figura). Para el caso  $\rho_{pa}^{AB}$ , las figuras 22(b) a (d) muestran como conforme  $n_0$  se incrementa, las correlaciones clásicas incrementan igualmente y por tanto el MID disminuye, también se observa un desvanecimiento de la intensidad junto con una rotación en contra de las manecillas del reloj de los mapas de densidad. La figura 22(a) muestra que el MID mínimo para  $\rho_{pd}^{AB}$  ocurre para todo  $\lambda_A = \lambda_B$ . Mientras que para  $\rho_{pa}^{AB}$ , el mínimo del MID depende fuertemente del valor de  $n_0$ . Sin embargo,

$S(\rho^A) + S(\rho^B)$  es máxima cuando  $\lambda_A = \lambda_B = 0$ , y al mismo tiempo  $S(\rho^{AB})$  es mínima para la misma combinación de valores de  $\lambda_{A(B)}$ , esto se puede confirmar en el cálculo numérico mostrado en las figuras 22(b)-(d). Estas condiciones llevan a una expresión simplificada mostrada en el apéndice C lo que permite el cálculo del AMID mostrado en la figura 23.

El AMID (114) también se evalúa y se muestra en la figura 23. El mínimo se calcula para cada punto mostrado. El AMID  $\mathcal{A}(\rho_{pd(pa)}^{AB})$  y la entropía del subsistema  $\rho^A S(\rho_{pd(pa)}^A)$  se muestran vs. el número promedio de fotones  $n_0$ . Las entropías de  $\mathcal{I}(\rho_{\text{II}}^{AB})$  son  $\{\lambda_A, \lambda_B\}$  dependientes y se obtienen mediante (119) y (113) con la matriz de densidad reducida  $\rho^A$  (equivalentemente se puede seleccionar  $\rho^B$  dado que se trata del estado puro), y el AMID se calcula con ayuda de (114) considerando las fases óptimas discutidas anteriormente y mostradas en el apéndice C. Las marcas con punto representan valores calculados y las líneas una interpolación. La entropía y el AMID son constantes para  $\rho_{pd}^{AB}$  lo que es congruente con lo esperado dado que el estado está máximamente entrelazado. Por el contrario, la entropía y el AMID para  $\rho_{pa}^{AB}$  son altamente dependientes del valor  $n_0$ , y decaen a cero para valores bajos de  $n_0$ . De la figura 23 es posible ver que el comportamiento obtenido para el AMID de cuadratura propuesto en este trabajo es cualitativamente el mismo que el de la entropía, aunque en una escala distinta, lo que refuerza su utilización práctica cuando se trata de caracterizar estados bipartitos continuos.

En un intento de encontrar una expresión del AMID de cuadratura analítica para el caso puro, se analiza el comportamiento de  $\mathcal{A}(\rho^{AB})$ , el cual será mínimo cuando  $S(\rho^A) + S(\rho^B)$  sea máximo y  $S(\rho^{AB})$  sea mínimo. Los máximos y mínimos de las entropías dependientes de la fase se obtienen por inspección del comportamiento del MID numérico mostrado en la figura 22. El AMID se puede identificar a través de los valores negros, ya que representan el mínimo del MID. Se sigue este análisis gráfico para la minimización en lugar de uno basado en los gradientes debido a la naturaleza extensa de las expresiones, y al hecho de que la simple selección de  $\lambda_A = \lambda_B = 0$  funciona para ambos casos estudiados dando el mínimo del MID. El AMID para el caso  $\rho_{pa}$  se puede ajustar a la función siguiente

$$\mathcal{A}(\rho_{pa}^{AV}) = 1/(a + \exp(b(n_0 - c))), \quad (138)$$

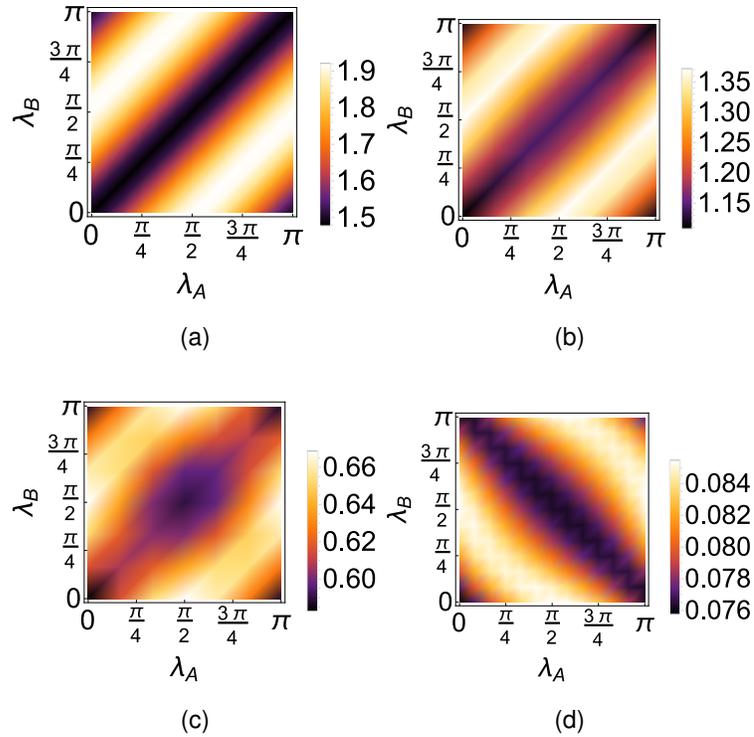


Figura 22: MID dependiente de la fase de los detectores  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$  vs.  $n_0$  (a) MID para el caso DPC independiente de  $n_0$ . MID para el caso PAC con los parámetros: (b)  $n_0 = 0,25$ , (b)  $n_0 = 1$  (c)  $n_0 = 6,25$ .

donde  $a = 0,512 \pm 0,051$ ,  $b = 1,950 \pm 0,211$  y  $c = 0,946 \pm 0,049$ . El mismo comportamiento cualitativo tanto de la entropía como del AMID es evidente del hecho de que si se normaliza la ecuación (138), se traslapa perfectamente con  $S(\rho_{pa}^A)$ , lo que establece un ajuste adecuado para la entropía con (138) re-escalada. En el apéndice C se muestran más detalles, donde las entropías dependientes de  $\lambda_{A(B)}$  se muestran explícitamente.

#### 4.3.3. Quantum discord de Bob a Alice

En esta sección se estudiará la discordia cuántica de forma cualitativa, con el fin de obtener un modelo del comportamiento de la no clasicidad para los estados  $\pi$  propuestos. Asimismo, el QD se relaciona con un observable experimental basado en la fluctuación de la curvatura del campo.

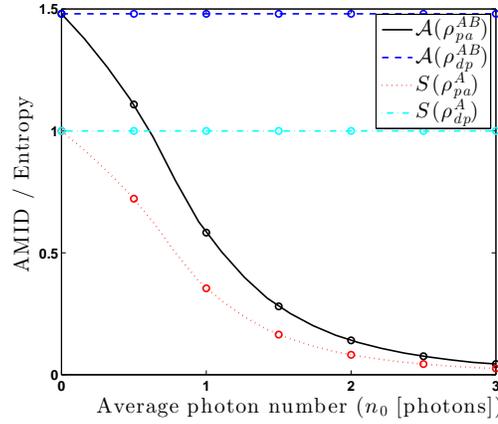


Figura 23: Comparación de la entropía de entrelazamiento y el AMID para los canales puros PAC y DPC.

### Pérdidas por esparcimiento

Para estudiar el efecto de las pérdidas en las correlaciones se incluye el efecto del esparcimiento como en (131a) de B a A. Para lograr esto, se sigue la ecuación (133) que describe el ruido bipartito dependiente del canal. El QD de B a A requiere tomar en cuenta los efectos de la medición en B con un conjunto completo de elementos de un POVM. Dada la naturaleza híbrida del canal, el conjunto de mediciones proyectivas se llevan a cabo con un POVM con elementos

$$\hat{\Pi}_i^B \equiv \hat{D}(\alpha) |i_M\rangle_{BB} \langle i_M| \hat{D}^\dagger(-\alpha), \quad (139)$$

donde  $|i_M\rangle_{BB} \langle i_M|$  con  $i = \{0, 1\}$  representan la base estándar para un POVM de 1-qubit, con  $|0_M\rangle = \cos(\theta_M/2) |0\rangle + e^{i\phi_M} \sin(\theta_M/2) |1\rangle$ , y  $|1_M\rangle = \sin(\theta_M/2) |0\rangle - e^{i\phi} \cos(\theta_M/2) |1\rangle$ . Este proceso puede lograrse primero aplicando el desplazamiento  $\hat{D}(-\alpha)$  y luego midiendo en la base estándar del POVM para el qubit como se muestra en la figura 19. El desplazamiento se puede realizar fácilmente en el laboratorio como demostró M. G. a. Paris (1996) utilizando un BS. Siguiendo esto, se garantiza que Bob realiza una medición completa en su subsistema.

**Superposición de DFS: DPC.** Primero, se analiza el QD para el estado inicial  $\rho_{dp}^{AB}$ , siguiendo (121). Para lograr esto, el estado se proyecta mediante (139) lo que crea expresiones para la entropía que son dependientes de  $\alpha_0, \eta, \theta_M, \phi_M$ , donde  $\alpha_0$  es la amplitud del láser utilizado para generar los estados bajo estudio  $\eta$  toma en cuenta el efecto de las pérdidas

por esparcimiento mostradas en la figura 19,  $\theta_M$  y  $\phi_M$  son los ángulos de la medida proyectiva (139). Obtener una expresión analítica cerrada del QD dependiente de los parámetros  $(\alpha_0, \eta, \theta_M, \phi_M)$  es una tarea compleja. Dado que  $S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$  es únicamente dependiente de  $\eta$ , nos enfocamos en el término  $\min_{\{\Pi_i\}} [S(\rho_{\Pi B}^A)(A|B)]$ . Para realizar el cálculo, se determina  $S(\rho_{\Pi B}^A)(A|B)$  para diferentes valores de  $\eta$  buscando identificar el comportamiento de los ángulos de medición en la optimización. Todas las correlaciones clásicas obtenidas son independientes de  $\phi_M$ , y entonces  $\partial_{\theta_M} S(\rho_{\Pi B}^A)(A|B) = 0$  ocurre a  $\theta_M^* = \{0, \pi/2\}$ . El problema de minimización se reduce a únicamente dos ángulos discretos. El mínimo global se encuentra para  $\theta_M = \pi/2$ . Una vez obtenidos los ángulos óptimos, una expresión dependiente de  $\alpha_0$  para  $S(\rho_{\Pi B}^A)(A|B)(\eta)$  se puede obtener fácilmente.

Con las consideraciones previas  $S(\rho^B) = \sum_i \lambda_i^B \log \lambda_i^B$  y  $S(\rho^{AB}) = \sum_i \lambda_i^{AB} \log \lambda_i^{AB}$  con  $\lambda_i^B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$  y  $\lambda_i^{AB} = \{0, 0, \frac{1-\eta}{2}, \frac{1+\eta}{2}\}$ . La entropía condicional optimizada se reduce a  $S(\rho_{\Pi B}^A)(A|B) = p_1 S(\rho_{\Pi_1}^A) + p_2 S(\rho_{\Pi_2}^A)$ , donde  $S(\rho_{\Pi_1}^A) = \sum_i \lambda_i^{A_{\Pi_1}} \log \lambda_i^{A_{\Pi_1}}$ ,  $S(\rho_{\Pi_2}^A) = \sum_i \lambda_i^{A_{\Pi_2}} \log \lambda_i^{A_{\Pi_2}}$ , con los eigenvalores  $\lambda_i^{A_{\Pi_1}} = \lambda_i^{A_{\Pi_2}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + \eta(\eta - 1)})$  y las probabilidades  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ . El QD para  $\rho_{pd}^{AB}$  bajo la acción de ruido por esparcimiento se reduce a,

$$D_B(\rho_{dp}^{AB}) = \frac{\ln\left(\frac{4}{\eta} + 4\right) + 2\eta \tanh^{-1}(\eta)}{\ln(4)} + \frac{-2\sqrt{(\eta - 1)\eta + 1} \tanh^{-1}\left(\sqrt{(\eta - 1)\eta + 1}\right)}{\ln(4)}. \quad (140)$$

Es posible notar que  $D_B(\rho_{dp}^{AB}) \rightarrow 0$  cuando  $\eta \rightarrow 0$  dado que una trasmisancia cero impide la generación de cualquier estado bipartito, y  $D_B(\rho_{dp}^{AB}) \rightarrow 1$  cuando  $\eta \rightarrow 1$  ya que el estado inicial está máximamente entrelazado y es el estado puro. Alice, que se localiza de forma remota de Bob, quiere obtener información sobre el QD del canal que ellos comparten, y dada la naturaleza continua y mezclada del estado recibido, prueba la detección homodina como una opción viable, para lo que recurre a la varianza cuadratura  $\Delta X_{\lambda_A}^2 = \langle \hat{X}_{\lambda_A}^2 \rangle - \langle \hat{X}_{\lambda_A} \rangle^2$ , cuyo valor promedio es  $\langle \hat{X}_{\lambda_A} \rangle = \text{Tr}(\hat{X}_{\lambda_A} \rho^A)$ . Sin perder generalidad se asume  $\alpha_0$  real, lo que produce  $\Delta X_{\lambda_A}^2 = \frac{1}{2}(1 + \eta)$ . La varianza se puede invertir, en una forma similar a la realizada por Blandino et al. (2012) para obtener una expresión del QD relacionada con datos

experimentales como,

$$D_B(\rho_{\text{dp}}^{AB}) = \frac{1}{\ln 4} \ln \left( \frac{8\Delta X_{\lambda_A}^2}{2\Delta X_{\lambda_A}^2 - 1} \right) - \frac{2d_1^{\text{dp}} \tanh^{-1} d_1^{\text{dp}}}{\ln 4} + \frac{d_2^{\text{dp}} \tanh^{-1} d_2^{\text{dp}}}{\ln 4}, \quad (141)$$

donde  $d_1^{\text{dp}} = \sqrt{4\Delta X_{\lambda_A}^4 - 6\Delta X_{\lambda_A}^2 + 3}$  y  $d_2^{\text{dp}} = 2 - 4\Delta X_{\lambda_A}^2$ . Este es un resultado clave, ya que relaciona el QD de un estado máximamente entrelazado sujeto a pérdidas por esparcimiento con el observable  $\Delta X_{\lambda_A}$ .

Las expresiones en (140) y (141) son expresiones analíticas del QD para el canal DPC con esparcimiento, y representan un resultado importante en nuestro trabajo. Es importante notar que, dada la independencia con el número promedio de fotones  $n_0$  de este canal en particular, también representa el QD para un canal formado por el estado de Bell  $|\psi^-\rangle = (1/\sqrt{2})(|01\rangle - |10\rangle)$  con ruido por esparcimiento. Además (141) relaciona una medición con el grado de correlación, como el QD.

**Superposición de SPACs: PAC.** La cantidad de información que puede obtenerse por una medida del QD del estado inicial  $\rho_{\text{pa}}^{AB}$  se desarrolla de forma similar a la que se utilizó para  $\rho_{\text{dp}}^{AB}$ . Dado que la matriz de densidad contiene más términos, y no está más auto normalizada (es decir,  $\mathcal{N} = 1/(1 + |\alpha_0|^2)$ ), se vuelve más difícil obtener una expresión cerrada para la entropía condicional  $S(\rho_{\Pi B}^A)(A|B)$  que dependa de todos los parámetros  $(\alpha_0, \eta, \theta_M, \phi_M)$ . Sin una expresión analítica con la cual trabajar para resolver el problema de minimización de  $S(\rho_{\Pi B}^A)(A|B)$  y múltiples variables, realizamos una búsqueda de los parámetros óptimos  $\theta_M^*, \phi_M^*$  de forma numérica para diferentes combinaciones de  $\alpha_0, \eta$ , para la que todos los mínimos coinciden para  $\theta_M^* = \pi/2, \phi_M^* = \pi/2$ . Para calcular  $D_B(\rho_{\text{pa}}^{AB})$  se procede como antes, con los eigenvalores de  $\rho_{\text{pa}}^{AB}, \rho_{\text{pa}}^B$  y las matrices proyectadas  $\rho_{\Pi_1}^A$  y  $\rho_{\Pi_2}^A$ , que son,  $\lambda_i^{AB} = \{0, 0, \frac{\alpha_0^2 - \sqrt{\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2 + \eta^2 + 1}}{2(\alpha_0^2 + 1)}, \frac{\alpha_0^2 + \sqrt{\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2 + \eta^2 + 1}}{2(\alpha_0^2 + 1)}\}$ ,  $\lambda_i^B = \left\{ \frac{\alpha_0^2 - \sqrt{\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2 + 1}}{2(\alpha_0^2 + 1)}, \frac{\alpha_0^2 + \sqrt{\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2 + 1}}{2(\alpha_0^2 + 1)} \right\}$ . Como en el caso anterior, el mínimo de la entropía condicional ocurre cuando ambos proyectores producen el mismo eigenvalor, los cuales son  $\lambda_i^{A\Pi_1} = \lambda_i^{A\Pi_2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2 + (\eta-1)\eta + 1}}{2(\alpha_0^2 + 1)}, \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\alpha_0^4 + 2\alpha_0^2 + (\eta-1)\eta + 1}}{\alpha_0^2 + 1} + 1 \right) \right\}$  con las probabilidades  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ . La expresión del QD dependiente de  $\alpha_0$  y  $\eta$  se puede construir de forma directa mediante (121). Sin embargo, la expresión es demasiado larga co-

mo para ganar intuición a partir de ella. En lugar de utilizar la expresión exacta, se recurre a una forma simplificada obtenida con una expresión ajustada polinomialmente. Esto nos permite un entendimiento sobre el comportamiento del QD más sencillo conforme varía el número promedio de fotones y la constante de esparcimiento en la forma,

$$D_{B_{\text{Aprox}}}(\rho_{pa}^{AB}) = \sum_{i,j} c_{i,j} \alpha_0^i \eta^j, \quad (142)$$

la cual se ha expandido hasta la cuarta potencia con los coeficientes  $D_{B_{\text{Aprox}}}(\rho_{pa}^{AB}) = 0,0317084\alpha_0^2\eta^3 - 0,398278\alpha_0\eta^3 - 0,002986\alpha_0^3\eta^2 - 0,0186853\alpha_0^2\eta^2 + 0,617212\alpha_0\eta^2 + 0,0557978\alpha_0^2\eta - 0,7036\alpha_0\eta + 0,000865144\alpha_0^4 - 0,0192576\alpha_0^3 + 0,133857\alpha_0^2 - 0,280623\alpha_0 + 0,519166\eta^4 - 0,466403\eta^3 - 0,308003\eta^2 + 1,113\eta + 0,140178$ , y es válida para  $\alpha_0 = [0, 10]$  y  $\eta = [0,5, 1]$ . Incluso cuando la expresión aproximada no es un empalme perfecto con los expresión analítica que puede construirse, permite ver las correlaciones dominantes entre  $\alpha_0$  y  $\eta$  que contribuyen al QD. Se puede observar que para valores bajos de  $\alpha_0$ ,  $\eta$  domina; por el contrario, con  $\alpha_0$  alta los coeficientes bajos que acompañan las potencias altas de  $\alpha_0$  se vuelven importantes (dado que  $0 \leq \eta \leq 1$ ). Con esto, para el caso  $\alpha_0 = 0$  podemos esperar un comportamiento similar que para DPC, pero conforme el número promedio de fotones se incrementa  $n_0 = |\alpha_0|^2$ , el QD decrece.

Siguiendo el mismo procedimiento que anteriormente, Alice realiza un largo conjunto de mediciones homodinas en su subsistema tratando de darse cuenta si puede ganar información del canal compartido con Bob mediante la varianza de cuadratura. Se puede demostrar fácilmente que la varianza cuadrada es  $\Delta X_{\lambda_A(pa)}^2 = \frac{\alpha_0^2(2-\eta \cos(2\lambda)) + \alpha_0^4 + \eta + 1}{2(\alpha_0^2 + 1)^2}$ , lo que muestra una dependencia lineal con  $\eta$  para valores pequeños de  $\alpha_0$ , como en el caso previo. Por el contrario, para  $\alpha_0$  creciente esa dependencia se pierde y es  $\alpha_0$  la que domina. para un entendimiento más sencillo  $\lambda = \pi/2$  se selecciona para tener la varianza como  $\Delta X_{\lambda_A(pa)}^2 = \frac{\alpha_0^2 + \eta + 1}{2\alpha_0^2 + 2}$ . Ni la expresión aproximada ni la exacta pueden invertirse para obtener una forma del QD que dependa solamente de  $\Delta X_{\lambda_A(pa)}^2$ . Pero lo hacemos paramétricamente de la forma  $(\Delta X^2(\eta), D_B(\eta))$ , lo cual se obtiene para diferentes valores de  $|\alpha_0|$ .

La varianza del estado obtenido por Alice está en el intervalo  $[1/2, 1]$ . Adquiriendo la estadística de muchas cuadraturas, Alice puede deducir el ruido de esparcimiento  $\eta$  con la cual puede hacer una estimación del QD en las mediciones mostradas previamente. El compor-

tamiento del QD  $D_B(\rho_{pd(pa)}^{AB})$  vs.  $(\Delta X_{\lambda_A}^2, \eta)$  se muestra en la figura 24. En la figura 24(a) se muestra el QD como función de  $\eta$ , en 24(b) se muestra la correspondencia de la varianza de cuadratura  $\Delta X_{\lambda_A}^2$  para valores dados de  $\eta$ , y en 24(c) se muestra una curva paramétrica del QD  $D_B(\rho_{pd(pa)}^{AB})$  vs.  $(\Delta X_{\lambda_A}^2, \eta)$ . En esta figura, solamente la línea roja corresponde al caso DPC, y las líneas negras muestran el efecto en el canal PAC sobre el QD para diferentes valores de  $n_0$ . La línea roja que es válida para el DPC es independiente de  $n_0$ , por lo que al sólo involucrar pérdidas por esparcimiento, si uno tiene cierto conocimiento del canal DPC, entonces la varianza de cuadratura permite obtener el valor del QD e incluso las pérdidas del canal. Las líneas negras muestran que para el PAC, conforme se incrementa  $n_0$  la pendiente  $\Delta X_{\lambda_A}^2$  vs.  $\eta$  disminuye, o cual está relacionado con la cantidad de QD del sistema. Cuando  $n_0 = 0$ ,  $D_B(\rho_{pa}^{AB})$  coincide con  $D_B(\rho_{dp}^{AB})$  pero decrece con el incremento de  $n_0$ , junto con el rango de  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2(pa)}^2$  que también disminuye. Es claro de la figura, que una medida basada en la varianza puede servir como límite inferior para el QD incluso sin el conocimiento de  $n_0$ . Adicionalmente, como el QD está relacionado con  $n_0$  y  $\eta$ , el conocimiento de  $n_0$  puede permitir inferir el esparcimiento del canal, esto se ve en la dependencia de (142) y  $X_{\lambda_A(pa)}^2$  con  $\alpha_0$  y  $\eta$ . En otros términos, conociendo el esparcimiento  $\eta$ , el promedio de fotones inicial  $|\alpha_0|$  y obteniendo la información de la varianza correspondiente  $\Delta X_{\lambda_A(pa)}^2$ , uno puede inferir el monto del QD experimentalmente para las superposiciones de SPACS propuestas

En otras términos, conociendo el QD, uno puede inferir la varianza correspondiente  $\Delta X_{\lambda_A(pa)}^2$ , donde si  $\alpha_0$  es también conocida, el único término aún desconocido sería  $\eta$ .

Adicionalmente, de la figura 24(a) se puede obtener el valor del QD para  $\eta = 0$  tanto para PAC como para DPC, el cual se espera sea equivalente a la entropía del estado puro. Los valores del QD para los puntos en el extremo superior derecho de cada línea de la figura 24(c) son  $D_B(\rho^{AB}) = \{1, 0,3545, 0,0814, 0,0214\}$  en orden decreciente, y corresponden al PAC con  $n_0 = \{0, 1, 4, 10\}$  tal como en la figura 24(a). Evidentemente, para DPC  $D_B(\rho^{AB}) = 1$  independientemente del valor  $n_0$ . Estos valores del QD se muestran en la figura 25, en la figura se muestra el QD para  $\eta = 1$  vs  $n_0$  para el DPC con la línea sólida, y para el PAC con la línea punteada. De esta figura se observa que se recupera el comportamiento de la entropía de

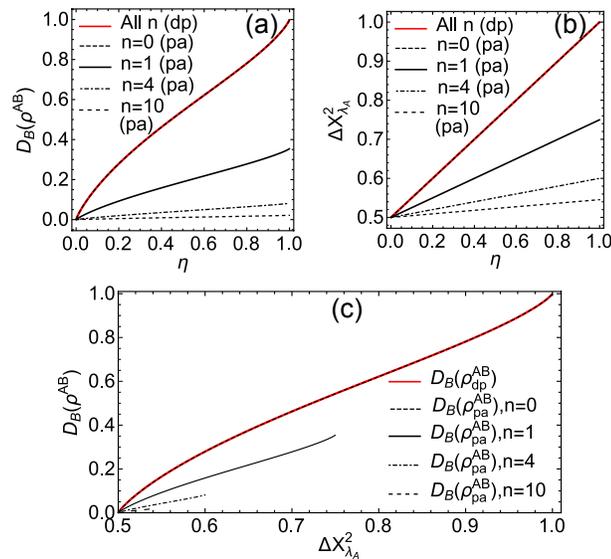


Figura 24: Discordia cuántica (QD) de B a A con pérdidas por esparcimiento para DPC (línea roja sólida, independiente de  $n_0$ ) y PAC (líneas negras) y su relación con  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}$  y  $\eta$ . En (a) QD vs.  $\eta$ , (b)  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$  vs.  $\eta$ , (c) parametrización del QD vs.  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$ .

entrelazamiento de cada uno de los estados que se mostró en la figura 23, donde también el MID tiene el mismo comportamiento cualitativo que el QD. El QD para el DPC es independiente de  $n_0$  en un canal ideal, mientras que el QD para el PAC es altamente dependiente de  $n_0$  tal como se esperaba tanto de la entropía como del AMID.

### Pérdidas por esparcimiento y ruido de fase

El ruido de fase se agrega al canal para complementar el estudio de las fuentes de ruido, dada la naturaleza tan común de esta fluctuación en caminos ópticos en un experimento. El canal que toma en cuenta ambos mecanismos de pérdida se denomina  $\rho_{pd(pa)}(\eta, \phi)$  como en (133). Desafortunadamente, el desplazamiento con fase prohíbe la selección de una base ortogonal como antes. En lugar eso, el QD es analizado numéricamente, expandiendo la matriz de densidad (133) en la base de número, lo que puede lograrse fácilmente de forma estándar como  $\rho = \sum_{i,j,k,l} |ij\rangle \langle ij| \rho(\eta, \phi) |kl\rangle \langle kl|$ .

Siguiendo el mismo enfoque que se utilizó en la sección previa, se calcula el QD evaluando (121). Dado que la expansión de la matriz infinita debe truncarse para ser tratable, los ángulos óptimos de detección deben ser re-evaluados para cada punto calculado. La confiabilidad del

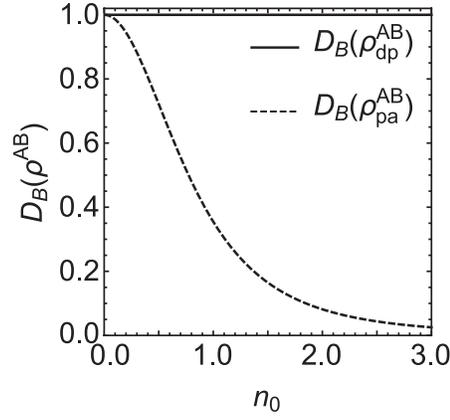


Figura 25: Discordia cuántica (QD) de B a A para el canal puro independiente de  $n_0$  para DPC (línea sólida) y PAC (línea discontinua).

QD obtenida para el límite de  $\sigma \rightarrow 0$  prueba que es igual como en el caso previo.

**Canal de fotones desplazados: DPC.** Los nuevos ángulos de medición óptimos son  $\theta_M^*$  y  $\phi_M^*$ . Ya no son fijos, sino que dependen en general de  $\sigma$ , por eso fueron calculados para cada configuración de  $(\eta, \sigma)$  considerada. También se obtuvo la fluctuación de la varianza de cuadratura con fase (QVP - *quadrature variance with phase*) como

$$\Delta X_{\lambda_A(\text{dp})}^2(\lambda_A, \sigma) = \frac{1}{2} e^{-2\sigma^2} \left( \alpha_0^2 \eta \left( e^{\sigma^2} - 1 \right) \times \left( e^{\sigma^2} - \cos(2\lambda_A) \right) + (\eta + 1) e^{2\sigma^2} \right). \quad (143)$$

Se seleccionaron los ángulos  $\lambda = 0$  y  $\lambda = \pi/2$  para calcular el QVP y ver la dependencia de  $\Delta X_{\lambda_A(\text{pd})}^2$  con  $\sigma$  en radianes.

En la figura 26 se muestra el QD vs. la varianza de fase  $\sigma$  para diferentes valores del esparcimiento y números promedio de fotones  $n_0$ . De 26(a) a 26(d), el esparcimiento toma los valores de  $\eta = [0, 7, 1, 0]$  en pasos de 0.1, adicionalmente cada panel muestra tres diferentes valores de  $n_0$  para el estado inicial. Las marcas circulares representan los puntos calculados y las líneas son una interpolación. La línea negra sólida corresponde al caso  $n_0 = 0$  el cual es equivalente al canal tradicional entrelazado formado por la superposición de fotones individuales de la forma  $|01\rangle + |10\rangle$  sujeto a ruido por esparcimiento y fluctuación de fase, la línea discontinua azul y la línea punteada roja corresponden a los casos con  $n_0 = 4$  y  $n_0 = 16$  fotones respectivamente. El valor máximo que se puede obtener del QD está gobernado por la cantidad de esparcimiento y se localiza en  $\sigma = 0$ . De aquí puede verse como el QD para

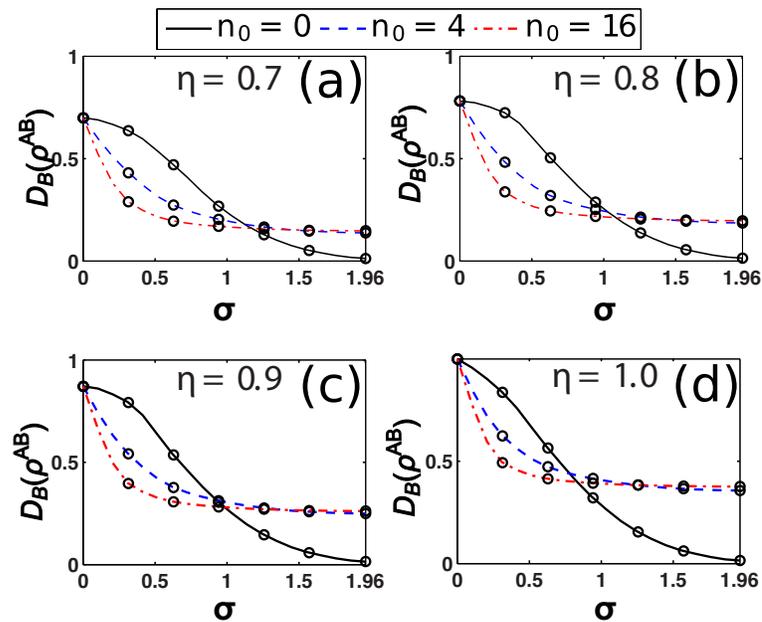


Figura 26: QD de B a A para DPC vs la varianza de fase  $\sigma$  para diferentes cantidades del esparcimiento  $\eta$  y promedio inicial de fotones  $n_0$

$\sigma = 0$  se incrementa hasta su valor máximo posible de  $D_B(\rho_{\text{pd(pa)}}^{AB}) = 1$  de la figura 26(a) a la 26(d). Dos hechos interesantes surgen de estas gráficas: *primero*, el QD máximo corresponde al común  $\sigma = 0$  y es independiente de  $n_0$ , *segundo*, incluso cuando QD cae más rápidamente para valores grandes de  $n_0$  con valores pequeños de  $\sigma$ , el QD del canal se vuelve resistente a las fluctuaciones de fase cuando  $\sigma$  es grande, pues tiende a un comportamiento decreciente más lento comparado con el correspondiente al canal que está formado únicamente por la superposición de estados de Fock ( $n_0 = 0$ ). En otras palabras, cuando se emplea el canal híbrido continuo del canal  $\rho_{\text{pd}}$ , se experimenta una degradación menor de las correlaciones cuánticas en un ambiente altamente fluctuante de fase. Todas las sub-figuras muestran un comportamiento cualitativo similar cuando son comparadas de una a la otra, y sus diferencias yacen únicamente en el máximo QD que pueden alcanzar. Para valores de  $\sigma > 0$ , el QD se vuelve dependiente de  $n_0$ , tal como se muestra por la separación de las líneas para  $n_0 = 4$  y  $n_0 = 16$  del que es para  $n_0 = 0$  en las cuatro figuras 26(a)-(d).

En la figura 27 se muestra la QVP cuadrada  $\Delta_{X_{\lambda_A=0(\pi/2)}}^2$  vs.  $\sigma$  para valores fijos de  $\eta$ . Las cuadraturas fueron calculadas mediante (143). Las figuras 26(a)-(b) con  $\lambda_A = 0$ , y 26(c)-(d)

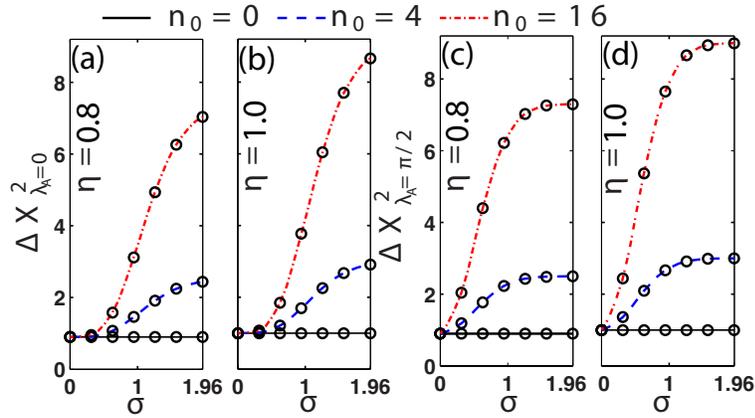


Figura 27: Varianza de cuadratura con fase cuadrada (QVP)  $\Delta X_{\lambda_A}^2$  vs.  $\sigma$  para valores fijos de  $\eta$  para DPC. (a)  $\eta = 0,8$ ,  $\lambda_A = 0$ , (b)  $\eta = 1,0$ ,  $\lambda_A = 0$ , (c)  $\eta = 0,8$ ,  $\lambda_A = \pi/2$ , (d)  $\eta = 1,0$ ,  $\lambda_A = \pi/2$ .

con  $\lambda_A = \pi/2$ , para  $\eta = \{0,8, 1,0\}$ . La línea sólida negra corresponde a  $n_0 = 0$ , la discontinua azul y discontinua roja a  $n_0 = 4$  y  $n_0 = 16$  respectivamente. Las gráficas muestran que para una  $\sigma$  dada,  $\Delta X_{\lambda_A=0(\pi/2)}^2$  no está constantemente definida, sino que es dependiente de  $\eta$  y  $n_0$ . Sin embargo, el comportamiento de dos parámetros puede inferirse de los otros dos. Si las características  $(\eta, n_0)$  del canal son conocidas, entonces la varianza de fase se puede obtener por el comportamiento de la QVP, como se muestra en (143).

En la figura 28 se muestra el QD parametrizado con valores de  $\Delta X_{\lambda_A(\text{pd})}^2$  y  $\sigma$  en el rango  $[0, 1,96]$  rad, que resulta de la parametrización de la información mostrada en las figuras 26 y 27 para  $\lambda_A = 0$  y  $\lambda_A = \pi/2$ . Las gráficas se calculan para  $\eta = \{0,7, 1,0\}$  y diferentes valores de  $n_0$ . El número promedio de fotones va desde  $n_0 = 0$  mostrado en las gráficas internas hasta  $n_0 = 4$  con las líneas discontinuas azules y  $n_0 = 16$  en las líneas negras discontinuas. La figura 28(a) muestra el caso para  $\lambda_A = 0$  y 28(b)  $\lambda_A = \pi/2$ . Cada marca representa un par  $(D_B(\rho_{\text{dp}}^{AB}), \Delta X_{\lambda_A}^2 = \{0, \pi/2\})$  calculado como función de  $n_0, \eta, \sigma$ . Siguiendo las marcas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha cada punto correspondo a un valor de  $\sigma$  en orden creciente (las líneas son una interpolación). Una línea *quasi*-vertical se muestra en los subgrupos de datos correspondientes con  $n_0 = 0$ , esto indica que la QVP no es un buen indicador para el QD en canales con  $n_0 = 0$ , debido a que para pequeñas variaciones de QVP se presentan altas variaciones del QD. El comportamiento para  $\sigma = 0$  se recupera

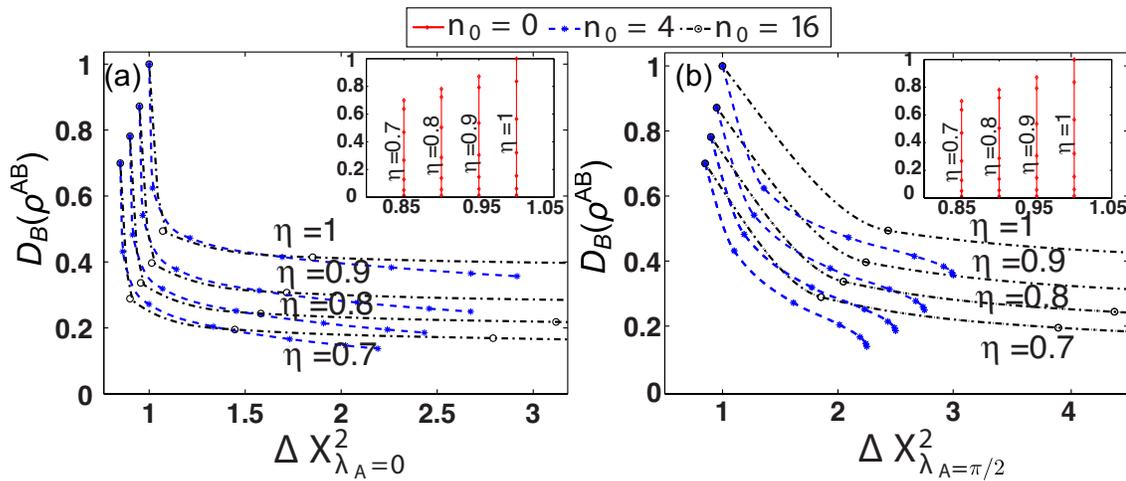


Figura 28: Gráficas paramétricas del QD de B a A para DPC vs: (a)  $\Delta X_{\lambda_A=0}^2$ , y (b)  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$ . El QD se calcula para diferentes valores de  $\eta$  y  $n_0$ . Las marcas representan valores de *sigma* en orden ascendente de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

considerando los puntos superiores izquierdos de cada línea. La relación de  $\Delta X_{\lambda_A(\text{pd})}^2$  cuando  $\sigma$  se incrementa se exhibe con la extensión de las líneas hacia la derecha, esto ocurre solamente para valores de  $n_0 > 0$ . De ambas sub-figuras, entre mayor sea  $\Delta X_{\lambda_A}^2$ , mayor es  $\sigma$  para un valor de  $\eta$  dado (el que puede ser fácilmente determinado) y por lo tanto se puede estimar el QD.

**Canal de fotones agregados (PAC)** Tal como en el caso previo, los ángulos de medición óptimos para el QD se determinaron para cada combinación estudiada de los parámetros  $(n_0, \eta, \sigma)$ . El QVP del lado de Alice se obtiene como

$$\Delta X_{\lambda_A(\text{pa})}^2(\lambda_A) = \frac{1}{2} \left( 2\eta + \frac{w_{\text{pa}}}{(\alpha_0^2 + 1)^2} + 1 \right), \quad (144)$$

donde  $w_{\text{pa}} = \eta e^{-2\sigma^2} (-2(\alpha_0^3 + 2\alpha_0)^2 e^{\sigma^2} \cos^2(\lambda_A) + (\alpha_0^4 + 4\alpha_0^2 + 3)\alpha_0^2 \cos(2\lambda_A) + (\alpha_0^6 + 2\alpha_0^4 - 1)e^{2\sigma^2})$  con ambos ángulos  $\lambda_A = 0, \pi/2$  explorados.

En la figura 29 se muestra el QD vs  $\sigma$  para diferentes valores de  $\eta$  (mostrado en los paneles 29(a)-(c) con  $\eta$  de 0.8 a 1.0). Cada panel muestra tres valores distintos de  $n_0$ , donde las marcas circulares representan puntos calculados y las líneas son una interpolación. La línea negra sólida es para el caso  $n_0 = 0$  y tiene exactamente el mismo comportamiento que se obtuvo para el caso DPC. Por el contrario, incluso incrementos pequeños en  $n_0$  producen una

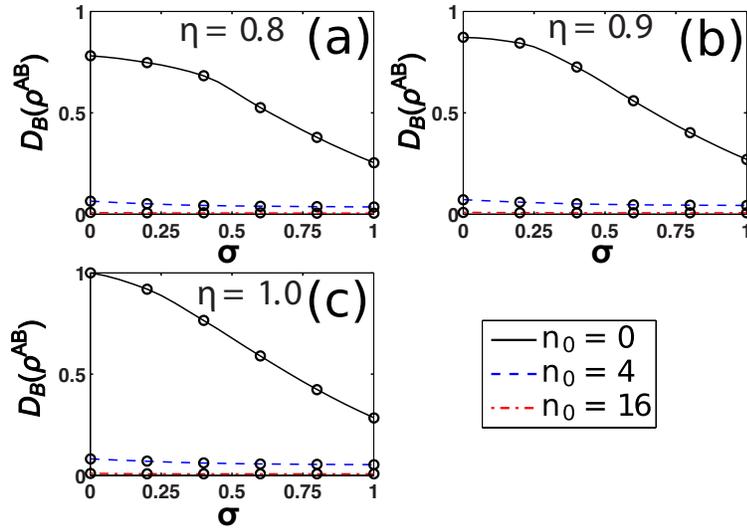


Figura 29: QD de B a A para PAC vs la varianza de fase  $\sigma$  para diferentes valores del esparcimiento  $\eta$  y valores de  $n_0$ .

caída del QD a valores cercanos a cero tal como puede confirmarse de los distintos valores de  $\eta$  explorados.

En la figura 30 se muestra el QVP cuadrado  $\Delta_{X_{\lambda_A=0(\pi/2)}}^2$  vs.  $\sigma$  para valores fijos de  $\eta$ . Las cuadraturas se calcularon siguiendo (144). Las figuras 30(a)-(b) con  $\lambda_A = 0$ , y 30(c)-(d) con  $\lambda_A = \pi/2$ , para  $\eta = \{0,8,1,0\}$ . La línea negra sólida corresponde con  $n_0 = 0$   $\Delta_{X_{\lambda_A}}^2$ , la azul discontinua y negra discontinua con  $n_0 = 4$  y  $n_0 = 16$  respectivamente. Como en el caso previo, las gráficas muestran que para un valor dado de  $\sigma$ ,  $\Delta_{X_{\lambda_A=0(\pi/2)}}^2$  no tiene un comportamiento constante, sino que es dependiente de  $\eta$  y  $n_0$ ; adicionalmente, para  $n_0 \neq 0$  el QVP comienza en valores más bajos que  $\Delta_{X_{\lambda_A}}^2 = 1$ , lo que en este caso indica que el estad se comporta más de forma Gaussiana, y está más cercano a la fluctuación de vacío esperada, en otras palabras, es una muestra de bajas correlaciones. Tal como en la figura 27, el comportamiento de dos parámetros puede ser inferido a través de los otros dos.

En la figura 31 se muestra la curva paramétrica del QD vs  $\Delta X_{\lambda_A(pa)}^2$  para diferentes valores de  $\sigma$  en el dominio  $[0, 1]$  rad de forma similar a la utilizada para el caso DPC. Esto resulta en una parametrización de la información contenida en las figuras 29 y 30 para  $\lambda_A = \{0, \pi/2\}$  lo que se muestra en las figuras 31(a) y (b) respectivamente. Las curvas se calculan para  $\eta = \{0,7,1,0\}$  y diferentes valores de  $n_0$ . El número promedio de fotones va desde  $n_0 = 0$

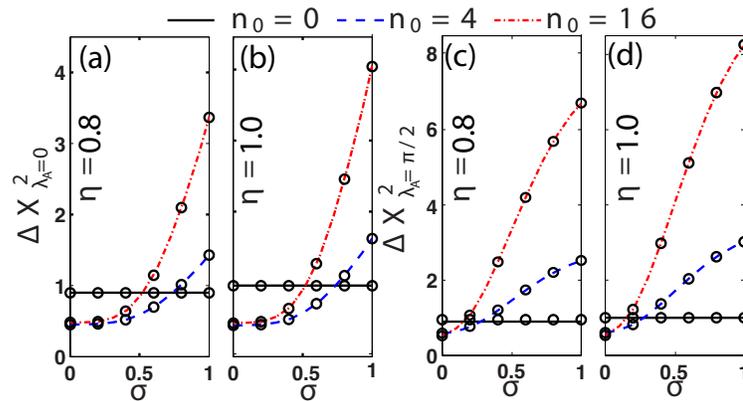


Figura 30: Cuadrado de la varianza de cuadratura con fase (QVP)  $\Delta X_{\lambda_A}^2$  vs.  $\sigma$  para valores fijos de  $\eta$  para el canal PAC. (a)  $\eta = 0,8, \lambda_A = 0$ , (b)  $\eta = 1,0, \lambda_A = 0$ , (c)  $\eta = 0,8, \lambda_A = \pi/2$ , (d)  $\eta = 1,0, \lambda_A = \pi/2$ .

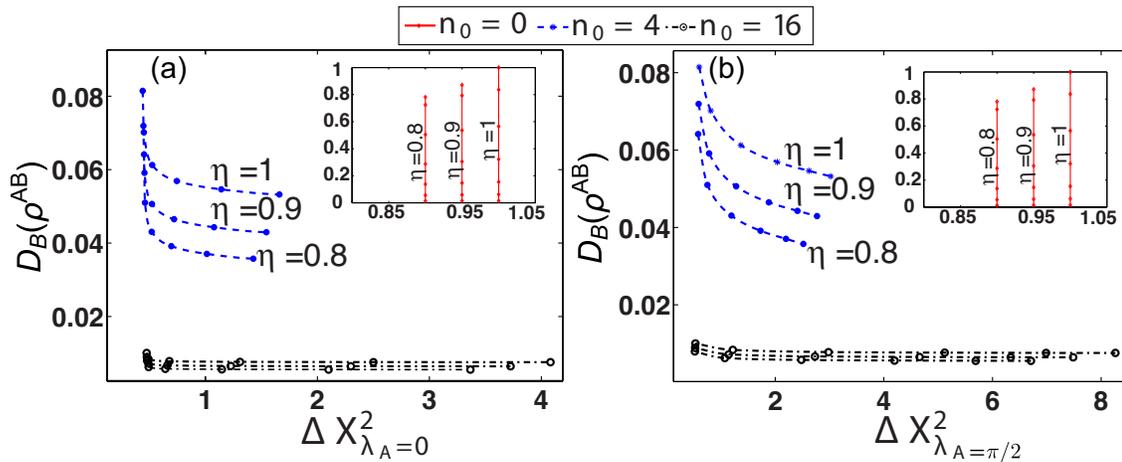


Figura 31: Curva paramétrica del QD de B a A para el caso PAC vs: (a)  $\Delta X_{\lambda_A=0}^2$ , and (b)  $\Delta X_{\lambda_A=\pi/2}^2$ . El QD se calcula para diferentes valores de  $\eta$  y  $n_0$ . Las marcas representan valores de  $\sigma$  en orden creciente de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

(en las figuras internas), a  $n_0 = 4$  en las líneas discontinuas azules y  $n_0 = 16$  mostrado en las punteadas negras. Se obtiene el mismo comportamiento que para DPC para  $n_0 = 0$  con las líneas continuas rojas *quasi*-verticales en las que QD decrece conforme  $\sigma$  crece, mientras que todos los escenarios con  $n_0 > 0$  tienen prácticamente cero *disord*. Una medida de QVP para el anal PAC resulta poco práctica para inferir cualquier característica del canal bajo las configuraciones estudiadas, como puede verse en las líneas prácticamente horizontales (líneas discontinuas azules y punteadas negras) para ambas sub-figuras. Esto indica que para el caso PAC es difícil diferenciar distintas cuantificaciones de QD para cualquier QVP dado, principalmente porque el QD decae a valores cercanos a cero muy rápidamente.

#### 4.4. Conclusiones

En este capítulo se caracterizaron dos estados bipartitos formados por combinaciones lineales de SPACS y DFS como canales de comunicación nombrados DPC y PAC respectivamente, sujetos a ruido por esparcimiento y fluctuaciones de fase como mecanismos de pérdidas. En la estimación de las correlaciones cuánticas de los canales comenzamos con la distribución JQP, donde este estimado arrojó información sobre la capacidad del canal para transmitir información. La caracterización del MID para el canal puro sirvió como confirmación de la aplicabilidad de las mediciones de cuadratura como estimadores de la entropía, dado que las cuadraturas son fácilmente adquiribles experimentalmente. El QD se calculó para ambos canales para diferentes combinaciones de  $(n_0, \eta, \sigma)$ , y la dependencia del QD vs QVP fue calculada también. Se encontró que el QD para el caso DPC exhibe más robustez ante grandes fluctuaciones de fase cuando  $n_0 > 0$ , debido a que el mínimo QD que se obtiene conforme se incrementa  $\sigma$  comparado con el caso  $n_0 = 0$  es mayor; esto no es válido para el canal PAC donde cualquier incremento en  $n_0 > 0$  lleva al QD a valores cercanos a cero. La respuesta del QD vs QVP se obtuvo como una parametrización del QD con  $\Delta X_{\lambda_A}^2$ , donde QVP sirvió para caracterizar el QD para el canal DPC pero no para el PAC.

## Capítulo 5.

---

# Comunicaciones cuánticas con superposición de estados con fotones individuales agregados

En este capítulo se describe la aplicación de los estados obtenidos en secciones anteriores para su aplicación en comunicaciones cuánticas. Dichos estados se utilizan para modelar un canal de comunicaciones compartido entre Alice y Bob, en el que, la parte de Bob interactúa con el estado de otro fotón a través de un divisor de haz y Alice busca poder obtener el estado que Bob tenía originalmente como una aplicación del protocolo de teleportación cuántica. La operación conjunta se restringe a la detección y conteo del número de fotones de un canal en un caso y en otro a la detección homodina.

Asimismo, estudiamos la teleportación con los estados con fotones individuales agregados sujetos a ruido. Se demuestra que es posible realizar teleportación cuántica con los estados con fotones individuales agregados probabilísticamente, con éxito condicional máximo del 50 %. Las ventajas del uso de estados continuos entrelazados para el establecimiento del canal son también exploradas.

### 5.1. Introducción

La teleportación cuántica se fundamenta en la existencia a priori de un recurso compartido con entrelazamiento entre dos partes que buscan comunicarse, Alice y Bob (Bennett et al., 1993). Idealmente dicho recurso es un estado de máximo entrelazamiento, el que en sistemas discretos bipartitos es un estado de Bell (Bell, 1964). Diversos esquemas en el ámbito discreto han sido desarrollados, entre los que se encuentran los realizados en arreglos de puntos cuánticos (H. Wang y Kais, 2006) y los que utilizan la polarización de fotones individuales (Bouwmeester et al., 1997). Dichos esquemas buscan teleportar un qubit en la base computacional de la forma  $|\psi\rangle = \sin \nu |0\rangle + e^{i\phi} \cos \nu |1\rangle$  (en posesión de Bob) a través de un canal compartido entre Alice y Bob en uno de los estados de Bell  $|\Phi^\pm\rangle, |\Psi^\pm\rangle$ . Esto se logra mezclando el qubit con el recurso compartido y realizando una medición conjunta adecuada en el sistema compuesto en posesión de Bob. Esta medición proyecta el estado de Alice a  $\hat{\sigma} |\psi\rangle$ , que es el qubit que se buscaba teleportar hasta una transformación unitaria  $\sigma$ , dada por

las matrices de Pauli. Dicha transformación puede ser aplicada por Alice dependiendo del resultado de la medición realizada por Bob. Bob, por lo tanto se encuentra obligado a comunicar su resultado a Alice.

Si bien, la teleportación de estados discretos sobre canales compartidos también discretos ha sido ampliamente explorada y es conceptualmente simple, presenta al menos dos grandes inconvenientes: *primero* la generación de estados puros discretos bien controlados es una tarea complicada y, *segundo* la transmisión y detección de dichos estados requiere experimentos altamente demandantes, pues deben ser capaces de resolver la detección estados individuales (sean electrones, fotones individuales, etc.). El segundo punto implica inmediatamente otra desventaja, que yace en que se pueden tener detecciones falsas fácilmente dado que el umbral de detección es muy bajo.

También se pueden utilizar estados continuos para realizar procesamiento de información cuántica como teleportación (Braunstein, 2005). Los estados continuos hacen mejor referencia con el mundo clásico, el que es de naturaleza también continua. Por simplicidad las descripciones se restringen a sistemas con luz, la que es igualmente aplicable a otros modelos. Los sistemas continuos se pueden englobar en dos grandes grandes categorías: gaussianos y no gaussianos. Dos ejemplos clásicos de estados gaussianos son el coherente y el comprimido (*'squeezed'*) que no presentan negatividades en la función de Wigner. Aún con esto, es posible crear estados *squeezed* entrelazados al combinar dos estados *squeezed* en distintas direcciones en un divisor de haz, con lo que se puede establecer un protocolo de teleportación en el dominio gaussiano (S. Wang et al., 2015). En el dominio gaussiano el entrelazamiento es controlado únicamente por el grado de compresión de los estados y las fidelidades de teleportación pueden incrementarse al aumentar la compresión; no obstante, la generación de estados comprimidos es también una labor experimentalmente demandante (Stefszky et al., 2011; Yonezawa y Furusawa, 2008).

Los estados no gaussianos pueden generarse al aplicar una operación no gaussiana sobre un estado gaussianos, es decir, agregar o quitar fotones (Navarrete-Benlloch et al., 2012). Aquí resulta interesante que las operaciones no gaussianas permiten aumentar el entrelazamiento

de un estado bipartito. Evidentemente, la dificultad se transporta ahora a realizar experimentalmente los operadores de creación y aniquilación.

La mezcla de operaciones no gaussianas con estados gaussianos da lugar a estados de naturaleza híbrida, es decir, que presentan propiedades tanto clásicas como cuánticas (Kwon y Jeong, 2015). Un ejemplo sencillo de las ventajas de este tipo de estados es que la detección de una fase óptica en un modo de un sistema bipartito puede ser suficiente para establecer determinísticamente la presencia o ausencia de un estado de Fock en el otro modo (Jeong et al., 2014) y viceversa. Estos estados también se han utilizado para establecer teleportación cuántica (S. Wang et al., 2015), destilación de entrelazamiento (J. Lee y Nha, 2013; Eisert et al., 2002) y otras operaciones de información cuántica (Morton y Lovett, 2011; Z. B. Chen, Hou, y Zhang, 2002).

En este capítulo exploramos la teleportación cuántica utilizando un recurso compartido de naturaleza híbrida, en donde operaciones de creación de fotones son aplicadas a un campo coherente (gausiano) bipartito. Esto da lugar a superposición de estados coherentes con estados de fotones agregados (DPC por *displaced photon channel*) y superposición de estados de fotones agregados (PAC por *photon added channel*). Estas superposiciones bipartitas son utilizadas como recurso compartido para teleportar un estado en la misma base del estado híbrido. La medición conjunta se analiza con una aproximación híbrida de detección de fotones desplazados primeramente y, posteriormente se utiliza la detección de cuadraturas del campo para la proyección. El cálculo de la teleportación se restringe al estudio de fotones individuales agregados (SPACS), a los que se agregan ruido por esparcimiento y fluctuaciones de fase en el canal bipartito. Luego, en la detección por cuadraturas se analiza la teleportación sin ruido y, finalmente se incluye la fluctuación de fase para analizar su efecto sobre la teleportación de estados específicos. Esto último con el objetivo de analizar su influencia en la preparación de estados remotos más que en teleportación en general.

## 5.2. Teleportación con estados de fotones individuales agregados

En esta sección se presenta más detalladamente el protocolo de teleportación considerando un canal donde se ha agregado únicamente un fotón individual en el canal. El estado a

teleportar consta de superposiciones formados por estados de fotones individuales agregados. Este estado entrelazado en particular es de la forma explorada en el capítulo 4,

$$|\psi\rangle_{\text{pa (dp)}} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \pm \hat{b}^\dagger |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b). \quad (145)$$

Únicamente se exploran las combinaciones lineales mostradas en la ecuación (145) debido a que son las que tienen entrelazamientos máximos. Es operativamente más eficiente trabajar utilizando el formalismo de la matriz de densidad,

$$\rho_{\text{dp(pa)}}^{AB} = |\psi\rangle_{\text{dp(pa) (pa)dp}} \langle\psi|. \quad (146)$$

Es más natural utilizar una combinación lineal en la base original, por lo que se reescribe el estado que pose Bob a teleportar como sigue

$$|\psi^C\rangle = x|\beta\rangle + y\hat{D}_a(\beta)|1\rangle. \quad (147)$$

Es importante aclarar que el estado mostrado en (147) es equivalente a un estado en la base  $|\psi^C\rangle = \bar{x}|\beta\rangle + \bar{y}\hat{a}^\dagger|\beta\rangle$ , considerando la transformación  $\hat{D}(\beta)\hat{a}^\dagger\hat{D}^\dagger(\beta) = \hat{a}^\dagger - \beta^*$ , por lo que  $\bar{x} = x - y\beta^*$  y  $\bar{y} = y$ . Sin embargo, se prefiere hacer el tratamiento de teleportación de un qubit de la forma mostrada en (147) puesto que las mediciones y operaciones son más simples.

### 5.2.1. Teleportación ideal en un canal sin pérdidas

Primeramente exploramos la teleportación con el recurso compartido (145) en un canal ideal sin pérdidas, por lo que utilizar funciones de onda es suficiente. El esquema a utilizar se muestra en la figura 32, donde puede apreciarse que el estado compartido puede ser  $\rho_{\text{dp}}^{AB}$  o  $\rho_{\text{pa}}^{AB}$  como en la ecuación (146). Por un lado, Bob mezcla su parte del estado entrelazado en un divisor de haz con el estado a teleportar (147) para posteriormente realizar la medición conjunta. La medición conjunta consta de dos partes, primero un desplazamiento en cada uno de los modos de salida y posteriormente una conteo de fotones  $n_c$  y  $n_d$ .

El estado (145) puede reescribirse a través de  $\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$  como

$$|\psi^{AB}\rangle = \mathcal{N}\hat{D}_a(\alpha)\hat{D}_b(\alpha)(\alpha^*(1 \mp 1)|0_a0_b\rangle \mp |0_a1_b\rangle + |1_a0_b\rangle), \quad (148)$$

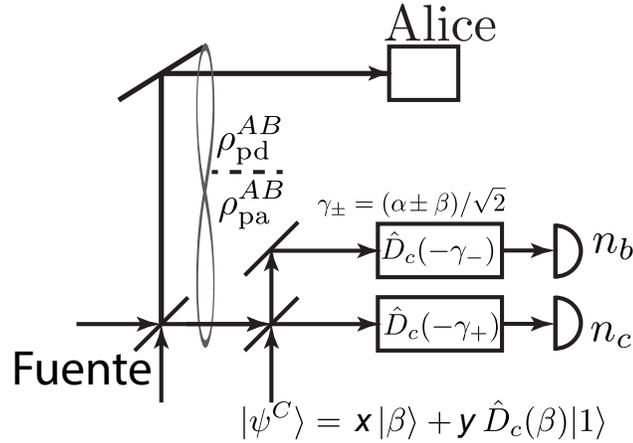


Figura 32: Esquema de teleportación en un canal ideal sin fuentes de ruido, utilizando un canal formado por la superposición de SPACS. Se teleporta un estado en la base coherente y Fock desplazado. La medición conjunta es mediante conteo de fotones posterior a un desplazamiento obtenido en  $n_b$  y  $n_c$ .

odonde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización. Luego, para mezclar el estado se usa un divisor de haz 50/50, lo que deja al estado conjunto como

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle^{ABC} &= \hat{U}_{bc}(\pi/4) |\psi^{AB}\rangle \otimes |\psi^C\rangle \\
 &= \hat{D}_a(\alpha) \hat{D}_b\left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_c\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) \\
 &\quad \times \left\{ x(1 \mp 1)\alpha^* |000\rangle \mp \frac{x}{\sqrt{2}} [|010\rangle + |001\rangle] + |100\rangle \right. \\
 &\quad + \frac{y\alpha^*}{\sqrt{2}}(1 \mp 1)[|010\rangle - |001\rangle] \mp \frac{y}{2}\hat{b}^\dagger[|010\rangle - |001\rangle] \\
 &\quad \left. \mp \frac{y}{2}\hat{c}^\dagger[|010\rangle - |001\rangle] + \frac{y}{\sqrt{2}}[|110\rangle - |101\rangle] \right\} \quad (149)
 \end{aligned}$$

Si se realiza el desplazamiento complementario en los modos  $\hat{b}$ , y  $\hat{c}$ , se obtiene el estado

$$\begin{aligned}
 |\psi^{ABC}\rangle_f &= \hat{D}_b^\dagger\left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_c^\dagger\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) |\psi^{ABC}\rangle \\
 &= \hat{D}_a(\alpha) \left\{ x(1 \mp 1)\alpha^* |000\rangle \mp \frac{x}{\sqrt{2}} [|010\rangle + |001\rangle] + |100\rangle \right. \\
 &\quad + \frac{y\alpha^*}{\sqrt{2}}(1 \mp 1)[|010\rangle - |001\rangle] \mp \frac{y}{2}\hat{b}^\dagger[|010\rangle - |001\rangle] \\
 &\quad \left. \mp \frac{y}{2}\hat{c}^\dagger[|010\rangle - |001\rangle] + \frac{y}{\sqrt{2}}[|110\rangle - |101\rangle] \right\}. \quad (150)
 \end{aligned}$$

De (150) pueden identificarse dos casos de máxima fidelidad, que suceden cuando se detecta sólo un fotón ya sea en el modo  $\hat{b}$  o  $\hat{c}$ , es decir, los dos estados proyectados siguientes sin normalizar

$$\langle 0|_b \langle 1|_c |\psi_{\text{pd(pa)}}^{ABC}\rangle_f = \hat{D}_a(\alpha) \left\{ \mp \frac{x}{\sqrt{2}} |0\rangle_a - \frac{y}{\sqrt{2}} |1\rangle_a - \frac{y\alpha^*}{\sqrt{2}} (1 \mp 1) |0\rangle_a \right\}, \quad (151a)$$

$$\langle 1|_b \langle 0|_c |\psi_{\text{pd(pa)}}^{ABC}\rangle_f = \hat{D}_a(\alpha) \left\{ \mp \frac{x}{\sqrt{2}} |0\rangle_a + \frac{y}{\sqrt{2}} |1\rangle_a + \frac{y\alpha^*}{\sqrt{2}} (1 \mp 1) |0\rangle_a \right\}. \quad (151b)$$

De las ecuaciones en (151) puede verse que en el caso “pd” se pueden obtener fidelidades máximas para los estados teleportados  $|\psi^A\rangle = \hat{D}(\alpha)(-x|0\rangle \pm y|1\rangle)$  lo que sucede con una probabilidad  $1/2$  y dado que  $x$  y  $y$  son números en general complejos, la teleportación se da para cualquier estado inicial. Que si bien es probabilístico queda anunciado el éxito con la detección de un sólo fotón ya sea en el modo  $b$  o  $c$  con todas las otras combinaciones fallidas. Por claridad se muestra el resultado para la fidelidad utilizando el canal DPC en la ecuación (152)

$$\mathcal{F}_{\text{dp}}^{n_b n_c} = \mathcal{N}^2 |\langle \psi^C | | \langle n_c | \langle n_b | (\hat{\sigma}_z)^{n_c} \psi_{\text{dp}}^{ABC} |^2, \quad (152a)$$

$$\mathcal{F}_{\text{dp}}^{01} = 1, \quad (152b)$$

$$\mathcal{F}_{\text{dp}}^{10} = 1. \quad (152c)$$

Por el contrario en el caso “pa” sólo se logra teleportación con fidelidad máxima cuando  $\alpha = 0$ , lo que puede verse en la ecuación (151) y conforme  $\alpha$  crece aparece un término adicional, lo que implica que para  $\alpha \rightarrow \infty$  la teleportación tiene fidelidad cero, pues el único término dominante sería  $\hat{D}_a(\alpha) |0\rangle_a$ . Esto se muestra resumido en la tabla 3. En la tabla se muestra el tipo de canal, el resultado de la detección de fotones  $n_c$  y  $n_d$ , así como el estado de Alice posterior a dicha detección y la operación que debe realizarse al estado de Alice para recuperar el estado a teleportar lo mejor posible.

La discusión de la fidelidad de teleportación hasta ahora ha sido cualitativa en el caso ideal, en el sentido de que estuvo basada en una comparación de los estados obtenidos en

Cuadro 3: Protocolo de teleportación del estado  $|\psi^C\rangle = x|\beta\rangle + y\hat{D}_a(\beta)|1\rangle$  utilizando un canal DPC y PAC

Canal	$n_c$	$n_d$	Estado de Alice	Operación
DPC	0	1	$ \psi^C\rangle = -x\hat{D}(\beta) 0\rangle - y\hat{D}(\beta) 1\rangle$	$I$
DPC	1	0	$ \psi^C\rangle = -x\hat{D}(\beta) 0\rangle + y\hat{D}(\beta) 1\rangle$	$\sigma_z$
PAC	0	1	$ \tilde{\psi}^C\rangle = (x - \sqrt{2}\alpha^*y)\hat{D}(\beta) 0\rangle - y\hat{D}(\beta) 1\rangle$	$\sigma_z$
PAC	1	0	$ \tilde{\psi}^C\rangle = (x + \sqrt{2}\alpha^*y)\hat{D}(\beta) 0\rangle + y\hat{D}(\beta) 1\rangle$	$I$

(151) con el estado a teleportar (147) Vale la pena notar que se considera que el estado obtenido por Alice estará desplazado en  $\alpha$  y no en  $\beta$  como inicialmente lo tiene Bob, esto para mantener la generalidad de que los desplazamientos son en principio diferentes. Asimismo, esto se presta a la interpretación de que el estado teleportado se encuentra en general en una base distinta, que puede fácilmente llevarse a la base computacional con un desplazamiento adecuado. Aunque para fines de generalidad puede resultar útil tener el estado teleportado en una base diferente (desplazamiento distinto global). Entonces, la fidelidad, considerando en general  $x = \text{sen}\nu$ ,  $y = e^{i\phi_p}\text{cos}\nu$  únicamente en la base computacional queda como sigue para el caso "pa".

$$\mathcal{F}_{\text{pa}}^{n_b n_c} = \mathcal{N}^2 |\langle \psi^C | | \langle n_c | \langle n_b | (\hat{\sigma}_z)^{n_c} \psi_{\text{pa}}^{ABC} |^2, \quad (153a)$$

$$\mathcal{F}_{\text{pa}}^{01} = \frac{|1 - 2e^{i\phi}\alpha^* \text{cos}(\nu) \text{sen}(\nu)|^2}{4|\alpha \text{cos}(\nu)|^2 - 4\text{sen}(\nu) \text{cos}(\nu) \Re(e^{i\phi_p}\alpha^*) + 1}, \quad (153b)$$

$$\mathcal{F}_{\text{pa}}^{10} = \frac{|e^{i\phi}\alpha^* \text{sen}(2\nu) + 1|^2}{4|\alpha \text{cos}(\nu)|^2 + 4\text{sen}(\nu) \text{cos}(\nu) \Re(e^{i\phi_p}\alpha^*) + 1}, \quad (153c)$$

el superíndice indica los fotones detectados en los modos  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$  respectivamente como se indica en (153a). Además se ha aplicado una  $\sigma_z$  en el caso correspondiente a (153b).

Para un panorama general se consideran inicialmente  $\alpha$  real y  $\phi_p = 0$ , con lo que se gráfica la fidelidad en la figura 33, donde en 33(a) se muestra la ecuación (153b) y en 33(b), la ecuación 153c, se puede observar de las figuras un comportamiento similar. Para valores

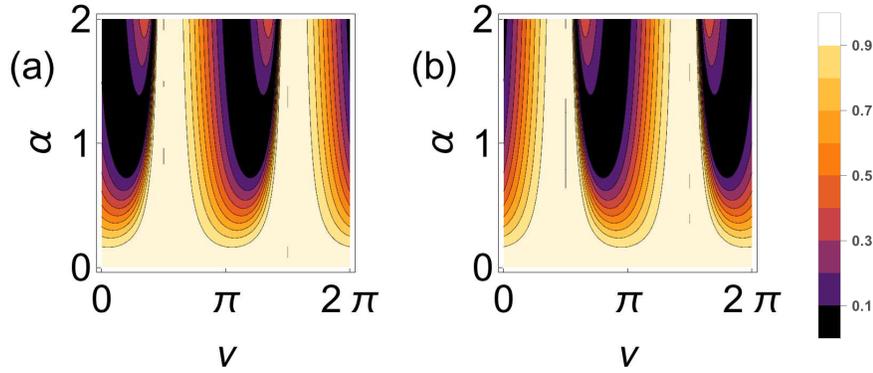


Figura 33: Fidelidad de teleportación para el canal PAC sin pérdidas dependiente de los valores de  $\alpha$  y  $\nu$ . Se considera  $\phi_p = 0$  y  $\alpha$  real. Se muestran las fidelidades post-seleccionadas por las detecciones  $n_c$  y  $n_d$ : (a)  $\mathcal{F}_{pa}^{01}$ , (b)  $\mathcal{F}_{pa}^{10}$ .

pequeños de  $\alpha$  se obtienen fidelidades máximas que son altamente dependientes del estado a teleportar  $\nu$  cuando  $\alpha \neq 0$ .

Por otro lado, en la figura 34 se ha graficado la fidelidad (153a) dejando  $\phi$  libre con valores de  $\alpha$  fijos. En las figuras 34(a) y 34(c) se muestra  $\mathcal{F}_{pa}^{01}$  para  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 2$  respectivamente. Mientras que en las figuras 34(b) y 34(d) se muestra  $\mathcal{F}_{pa}^{10}$  para  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 2$  respectivamente. Se puede observar de las 4 figuras que existe una alta dependencia de la fidelidad con los valores de  $\nu$  pero no así con los de  $\phi_p$ , es decir, que alrededor de los valores de  $\nu$  que producen altas fidelidades es posible teleportar prácticamente todos los valores de la fase  $\phi_p$ . Esto puede resultar de especial utilidad en un protocolo de comunicación donde se envíe la fase codificada, lo que se puede observar en todas las regiones claras de las subfiguras contenidas en la figura 34.

### 5.2.2. Teleportación con pérdidas

El esquema utilizado para la teleportación se muestra en la figura 35, donde puede apreciarse que el estado compartido puede ser  $\rho_{dp}^{AB}$  o  $\rho_{pa}^{AB}$  como en la ecuación (146). Por un lado, Bob mezcla su parte del estado entrelazado en un divisor de haz con el estado a teleportar (147) para posteriormente realizar la medición conjunta. La medición conjunta consta de dos partes, primero un desplazamiento en cada uno de los modos de salida y posteriormente una

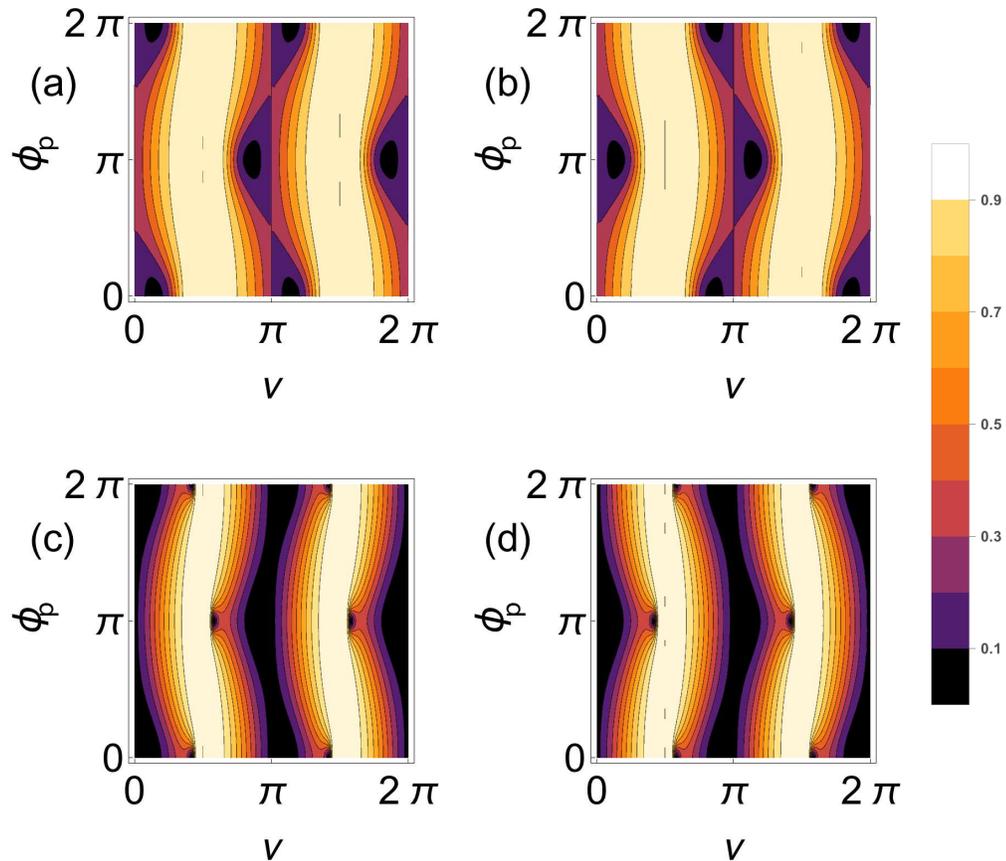


Figura 34: Fidelidad de teleportación para el canal PAC sin pérdidas dependiente de los valores de  $\phi_p$  y  $\nu$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Se muestran las fidelidades post-seleccionadas por las detecciones  $n_c$  y  $n_d$ . La columna de la izquierda muestra  $\mathcal{F}_{pa}^{01}$  (a)  $\alpha = 0,5$ , (c)  $\alpha = 2$ . La columna de la derecha muestra  $\mathcal{F}_{pa}^{10}$  (b)  $\alpha = 0,5$ , (d)  $\alpha = 2$ .

conteo de fotones  $n_c$  y  $n_d$ . En la parte superior de la figura, correspondiente a la parte de Alice, se muestra la fluctuación de fase modelada como  $\phi$  y las pérdidas por esparcimiento modeladas como un divisor de haz de transmitancia  $\eta$  para posteriormente ser recibido por Alice, quien presumiblemente, tiene acceso a su matriz de densidad completa. Los pasos mostrados en el esquema se detallan a continuación.

Primero, el estado entrelazado utilizado como canal compartido (146) se le agrega ruido por fluctuaciones de fase y esparcimiento, tal como se mostró en la sección 4.2, en la ecuación (135). El ruido de fase es una transformación unitaria  $\hat{U}(\phi) = e^{i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}}$  que actúa sobre el modo  $\hat{a}$  y, el esparcimiento se modela como un divisor de haz de transmitancia  $\eta$ . La pérdida por

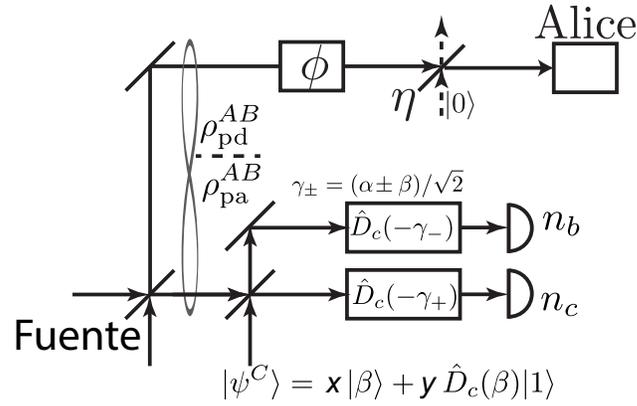


Figura 35: Esquema de teleportación con ruido de fase  $\phi$  y esparcimiento  $\eta$ , utilizando un canal formado por la superposición de SPACS. Se teleporta un estado en la base coherente y Fock desplazado. La medición conjunta es mediante conteo de fotones posterior a un desplazamiento obtenido en  $n_b$  y  $n_c$ .

esparcimiento agrega un grado de libertad adicional, es decir, se obtiene un sistema tripartito, se realiza la suma sobre los grados de libertad adicionales para obtener la matriz mixta de la pérdida por esparcimiento. Tenemos la matriz con pérdidas modelada de la forma

$$\begin{aligned} \rho_{dp(pa)}(\eta, \phi) &= \int d\phi p(\phi) \hat{U}(\phi) \rho_{dp(pa)}^{AB}(\eta) \hat{U}^\dagger(\phi), \\ &= \int d\phi p(\phi) (p_1 \rho_1(\eta, \phi) + p_2 \rho_2(\eta, \phi)). \end{aligned} \quad (154)$$

Donde

$$\rho_1(\eta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\phi) \hat{D}(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}(\alpha) |\psi_1^{AB}\rangle \langle \psi_1^{AB}| \hat{D}^\dagger(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}^\dagger(\alpha) \quad (155a)$$

$$\rho_2(\eta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\phi) \hat{D}(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}(\alpha) |\psi_2^{AB}\rangle \langle \psi_2^{AB}| \hat{D}^\dagger(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}^\dagger(\alpha) \quad (155b)$$

con

$$|\psi_1^{AB}\rangle = |00\rangle,$$

$$|\psi_2^{AB}\rangle = \alpha^*(1 \mp 1) |00\rangle \mp |01\rangle + \sqrt{\eta} e^{i\phi} |10\rangle.$$

Las ecuaciones (155) representan al canal entrelazado después de haberse sometido al canal con pérdidas. El estado a teleportar (147) se mezcla con el compartido en un divisor de

haz, esto produce un sistema tripartito

$$\rho^{ABC} = \hat{U}_{bc}(\pi/4)\rho_{pd(pa)}(\eta, \phi) \otimes |\psi^C\rangle \langle \psi^C| \hat{U}_{bc}^\dagger(\pi/4), \quad (156)$$

$\hat{U}_{bc}(\pi/4)$  representa el divisor de haz 50/50 que opera sobre los modos  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$  que se aprecia en la figura. Por simplicidad en las operaciones se realizan las transformaciones sobre las funciones de onda que resultan de la mezcla para luego insertarlos en la matriz de densidad. De este modo (155) se hacen tripartitas en la forma

$$\rho^{ABC}(\eta, \phi) = \sum_i p_i \rho_i^{ABC}, \quad (157)$$

donde  $\rho_i^{ABC} = \hat{U}_{bc}(\pi/4) |\psi_i^{AB}\rangle \langle \psi_i^{AB}| \otimes |\psi^C\rangle \langle \psi^C| \hat{U}_{bc}^\dagger(\pi/4)$ , con lo que se puede expresar  $|\psi_i\rangle^{ABC} = \hat{U}_{bc}(\pi/4) |\psi_i^{AB}\rangle |\psi^C\rangle$ . Explícitamente el primero se obtiene fácilmente al considerar  $|\psi_1^{AB}\rangle = |00\rangle$  y el estado de la ecuación (147), donde la transformación del BS sólo afecta al único modo existente, por lo que el resultado se obtiene trivialmente como sigue

$$\begin{aligned} |\psi_1^{ABC}\rangle &= \hat{D}_a(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}_b\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_c\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \times \left[ x \hat{D}_b\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_c\left(\frac{-\beta}{\sqrt{2}}\right) + y \hat{D}_b\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_c\left(\frac{-\beta}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\hat{b}^\dagger - \hat{c}^\dagger}{\sqrt{2}}\right) \right] |0\rangle_c, \\ &= \hat{D}_a(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}_b\left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_c\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \times \left[ x |000\rangle + \frac{y}{\sqrt{2}} |010\rangle - \frac{y}{\sqrt{2}} |001\rangle \right]. \end{aligned} \quad (158)$$

Si bien, el término correspondiente a  $\rho_2$ , es decir,  $|\psi_2^{ABC}\rangle$  no es tan sencillo, se puede seguir el mismo procedimiento que para (158), quedando como sigue

$$\begin{aligned} |\psi_2^{ABC}\rangle &= \hat{D}_a(\alpha e^{i\phi} \sqrt{\eta}) \hat{D}_b\left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_c\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \times \left\{ x(1 \mp 1)\alpha^* |000\rangle \mp \frac{x}{\sqrt{2}} [|010\rangle + |001\rangle] + \sqrt{\eta} x e^{i\phi} |100\rangle \right. \\ &\quad + \frac{y\alpha^*}{\sqrt{2}} (1 \mp 1) [|010\rangle - |001\rangle] \mp \frac{y}{2} \hat{b}^\dagger [|010\rangle - |001\rangle] \\ &\quad \left. \mp \frac{y}{2} \hat{c}^\dagger [|010\rangle - |001\rangle] + \sqrt{\eta} e^{i\phi} \frac{y}{\sqrt{2}} [|110\rangle - |101\rangle] \right\}. \end{aligned} \quad (159)$$

Los estados dados por (158) y (159) insertados en (157) generan el estado mixto producto de las pérdidas en el canal y la mezcla del estado a teleportar. Falta realizar la medición conjunta por parte de Bob, la que se selecciona como un desplazamiento adecuado y detección

en número de fotones. Se puede apreciar que estas operaciones pondrán en el lado de Alice un estado muy similar al que se busca teleportar por simple inspección de (158) y (159) si en los modos  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$  se detecta sólo un fotón en uno de los modos y ninguno en el otro. Por lo que realizando la proyección en número de fotones para los modos de Bob, se obtiene el estado condicional post-seleccionado para cada matriz de densidad

$$\rho_i^{A'}(\eta, \phi) = \frac{\langle n_b | \langle n_c | \rho_i^{ABC} | n_b \rangle | n_c \rangle}{\text{Tr}[\langle n_b | \langle n_c | \rho_i^{ABC} | n_b \rangle | n_c \rangle]}. \quad (160)$$

Con (160) es posible escribir el estado de Alice

$$\rho^{A'}(\eta, \sigma, n_b, n_c) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi p(\phi) (p_1 \rho_1^{A'}(\eta, \phi) + p_2 \rho_2^{A'}(\eta, \phi)), \quad (161)$$

donde las probabilidades pueden tomar los valores

$$\begin{aligned} p_1 &= (\mathcal{N}^2/2)(1 - \eta), \\ p_2 &= (\mathcal{N}^2/2)(|\alpha|^2(1 \mp 1)^2 + 1 + \eta). \end{aligned} \quad (162)$$

Los signos “-”, “+” corresponden a los casos pd (pa) respectivamente mostrados en la ecuación (156). En general, la fidelidad de teleportación para este protocolo se obtiene como

$$\mathcal{F}_{\text{pd(pa)}}(\nu, \eta, \sigma, n_b, n_c) = \text{Tr}[\rho^{A'}(\eta, \sigma) \hat{\sigma} |\psi^C\rangle \langle \psi^C| \hat{\sigma}^\dagger]. \quad (163)$$

Con una transformación unitaria  $\hat{\sigma}$  adecuada, del conjunto de las matrices de Pauli, esto debido a que el estado post seleccionado que tiene Alice se espera que en el caso ideal sea el estado a teleportar hasta una transformación unitaria, tal como se mostró para el caso sin pérdidas en la tabla 3. Se ha parametrizado el qubit con  $x = \text{sen} \nu$  y  $y = e^{i\phi_p} \text{cos} \nu$ , con lo que se obtiene una fidelidad que en general es dependiente de  $\nu$  y los fotones detectados  $n_b, n_c$ , así como de los parámetros del ruido que definen al canal  $\eta, \sigma$ .

### 5.2.3. Canal con superposición DFS

#### Fidelidades dependientes del estado a teleportar

En general cuando el canal está sujeto a ruido la fidelidad para todo valor del qubit a teleportar no necesariamente es constante, sino que puede tener dependencia con el estado

particular a enviar. Considerando nuevamente  $x = \sin \nu$  y  $y = e^{i\phi_p} \cos \nu$ . Usando (163) y tomando en cuenta únicamente el ruido por esparcimiento dado por el parámetro  $\eta$  se obtiene la fidelidad

$$\mathcal{F}_{\text{pd}}(\eta, \sigma = 0, \nu) = \frac{\sqrt{\eta} (-\eta^{3/2} + 2\eta + \sqrt{\eta} + 2) \sin^2(\nu) \cos^2(\nu) + \eta(\eta + 1) \cos^4(\nu) + 2 \sin^4(\nu)}{(\eta - 1) \cos(2\nu) + \eta + 1}, \quad (164)$$

puede observarse en (164) que la fidelidad no es dependiente de  $\phi_p$ . Si permitimos ahora el ruido de fase  $\phi$  con varianza  $\sigma$  pero no el esparcimiento, obtenemos la fidelidad

$$\mathcal{F}_{\text{pd}}(\eta = 1, \sigma, \nu) = \frac{1}{4} \left( 2e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \sin^2(2\nu) + \cos(4\nu) + 3 \right). \quad (165)$$

Tomando en cuenta las dos fuentes de ruido, obtenemos la fidelidad para DFS de la forma siguiente

$$\mathcal{F}_{\text{pd}}(\eta, \sigma, \nu) = \frac{1}{4(\eta \cos^2(\nu) + \sin^2(\nu))} \left( e^{-\frac{\sigma^2}{2}} (2\eta(\eta + 1)e^{\frac{\sigma^2}{2}} \cos^4(\nu) - 2(\eta - 1)\eta e^{\frac{\sigma^2}{2}} \sin^2(\nu) \cos^2(\nu) + \sqrt{\eta}(\eta + 1) \sin^2(2\nu) + 4e^{\frac{\sigma^2}{2}} \sin^4(\nu)) \right). \quad (166)$$

Finalmente, haciendo uso de la ecuación para la fidelidad (166), en la figura 36 se muestran las fidelidades para diferentes valores de la varianza de fase en 36(a)-(d) con  $\sigma = \{0, 0.5, 1, 3\}$  respectivamente, con respecto a  $\nu$  del qubit y el esparcimiento  $\eta$ . Puede observarse de las figuras que para valores bajos de  $\sigma$  (figuras 36(a) y (b)) pueden alcanzarse fidelidades de  $\mathcal{F}_{\text{pd}} = 1$  para todos los valores del qubit a teleportar, siempre que el esparcimiento sea bajo  $\eta \rightarrow 1$ , lo que se muestra en las regiones blancas, las cuales representan fidelidades entre 0.9 y 1.0. No obstante, conforme se aumenta  $\sigma$  como se muestra en las figuras 36(c) y (d), la teleportación se vuelve dependiente del qubit a teleportar. Para  $\sigma = 1$  que es la que se muestra en la figura 36(c) puede observarse que mientras  $\eta \rightarrow 1$  la fidelidad es alta, con mínimos de 0.8. Por otro lado, para  $\sigma = 3$ , mostrada en la figura 36(d) la fidelidad es altamente dependiente del qubit a teleportar incluso para esparcimientos nulos, donde puede observarse que hay mínimos de 0.5. En resumen, el caso ideal de fidelidad máxima se recupera para el caso sin ruido, y ésta va decayendo conforme las fuentes de ruido aumentan. No obstante, existen regiones donde se pueden obtener fidelidades altas aún con ruido.

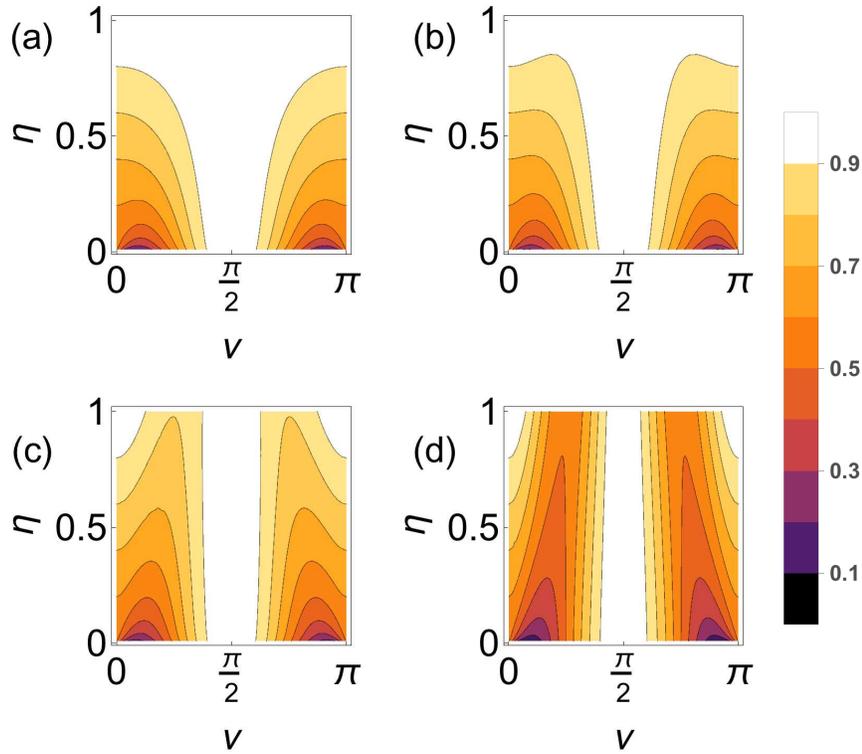


Figura 36: Fidelidad de teleportación para el canal DFS con ruido de fase para diferentes valores de la varianza de fase  $\sigma$  vs el esparcimiento  $\eta$  y el valor  $\nu$  del qubit. Se considera  $\sigma = \{0, 0.5, 1, 3\}$  de (a)-(d) respectivamente.

### Fidelidades promedio

En esta subsección exploramos el comportamiento promedio del canal DFS para realizar teleportación. Se parte de que el qubit a teleportar está parametrizado con  $x = \sin \nu$ , y  $y = e^{i\phi_p} \cos \nu$ . Para simplificar los cálculos, como vimos anteriormente no existe dependencia de la fase del qubit  $\phi_p$  con la fidelidad por lo que simplemente no se incluye. Para el cálculo de las fidelidades promedio se utiliza (167). Un punto importante a resaltar es que las fidelidades tienen simetría en  $\nu = \pi$ , como se puede observar en el cálculo de la fidelidad sin ruido mostrada en la ecuación (166), por lo que se hacen los promedios en el intervalo  $\nu = [0, \pi]$ . Por lo que la fidelidad promedio queda como sigue

$$\overline{\mathcal{F}}(\eta, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\nu \mathcal{F}_{\text{pd}}(\nu, \eta, \sigma). \quad (167)$$

Si el canal utilizado es el conformado por la superposición de estados de Fock desplazados

(DFS), la fidelidad de teleportación promedio en el canal ideal sin pérdidas es constante y no depende de  $\nu$  como se vio en la sección anterior

$$\overline{\mathcal{F}}(\eta = 1, \sigma = 0) = 1. \quad (168)$$

Al incluir pérdidas por esparcimiento pero no de fase, la fidelidad promedio de (164) está dada por

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{pd}}(\eta, \sigma = 0) = \frac{2\eta^{3/2} + \eta + 4\sqrt{\eta} + 1}{2(\sqrt{\eta} + 1)^2}. \quad (169)$$

Si se considera que las pérdidas provienen sólo de fluctuaciones de fase, pero el esparcimiento es cero, de promediar (165) se obtiene

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{pd}}(\eta = 1, \sigma) = \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{\sigma^2}{2}} + 3 \right). \quad (170)$$

Finalmente, incluyendo los dos efectos de pérdidas se obtiene la fidelidad promediada de (166) como sigue

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{pd}}(\eta, \sigma) = \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left( (\eta^{3/2} + \eta + 3\sqrt{\eta} + 1) e^{\frac{\sigma^2}{2}} + \sqrt{\eta}(\eta + 1) \right)}{2(\sqrt{\eta} + 1)^2}. \quad (171)$$

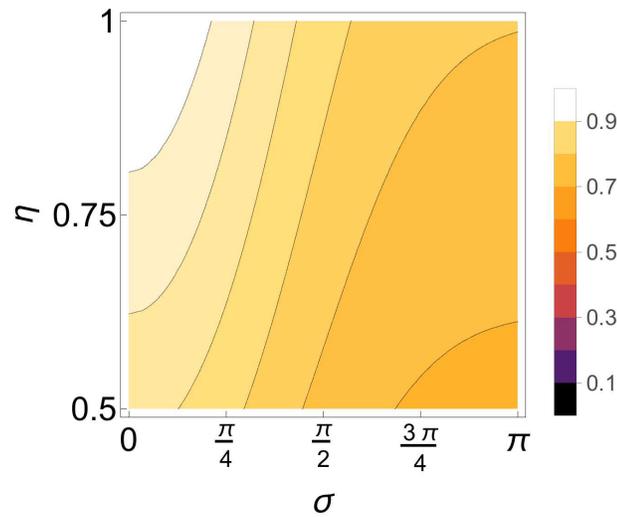


Figura 37: Fidelidad promedio de teleportación para un canal con superposición DFS, mostrada en la ecuación (171) vs. esparcimiento y ruido de fase caracterizados por  $\eta$  y  $\sigma$ , respectivamente.

En la figura 37 se muestra la fidelidad promedio de teleportación utilizando un canal DFS dependiente de las dos fuentes de ruido  $\eta$  y  $\sigma$ . Lo que muestra que en promedio para valores

altos de  $\eta$  (equivalente a bajas pérdidas por esparcimiento) en conjunto con valores bajos de  $\sigma$ , es decir baja fluctuación del ruido de fase se obtienen en promedio fidelidades cercanas a  $\mathcal{F}_{pd} \rightarrow 1$  independientes del qubit a teleportar.

#### 5.2.4. Canal con superposición de SPACS

##### Fidelidades dependientes del estado a teleportar

Se procede de manera análoga a la subsección anterior. Del cálculo de la fidelidad sin ruido podemos inferir que el éxito de la teleportación estará altamente influenciado por el valor de  $\alpha$ , así como el qubit a teleportar. Sin perder generalidad se considera  $\alpha \in \mathfrak{R}$ . Todas las expresiones para fidelidad de esta subsección del canal PAC se obtienen mediante la expresión (163).

En un canal ideal sin pérdidas de ningún tipo se tienen las expresiones mostradas en la ecuación (153). Considerando únicamente pérdidas por esparcimiento, se tiene una fidelidad

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{pa}(\eta, \sigma = 0, \nu, \phi_p) &= \left( 2(\alpha^2 + 1) \left( (4\alpha^2 + \eta) \cos^2(\nu) + \sin^2(\nu) + 4\alpha \sin(\nu) \cos(\nu) \cos(\phi_p) \right) \right)^{-1} \\
&\times \left( \alpha^2 (2\alpha^2 + \sqrt{\eta} + 2) \sin^2(2\nu) + \eta (2\alpha^2 + \eta + 1) \cos^4(\nu) \right. \\
&+ 2(\alpha^2 + 1) \sin^4(\nu) + \sqrt{\eta} (-\eta^{3/2} + 2\eta + \sqrt{\eta} + 2) \sin^2(\nu) \cos^2(\nu) \\
&+ 4\alpha\sqrt{\eta} (2\alpha^2 + \eta + 1) \sin(\nu) \cos^3(\nu) \cos(\phi_p) \\
&\left. + 8\alpha(\alpha^2 + 1) \sin^3(\nu) \cos(\nu) \cos(\phi_p) \right).
\end{aligned} \tag{172}$$

Posteriormente si se consideran pérdidas por fluctuaciones de fase únicamente, la fidelidad es

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{pa}(\eta, \sigma = 0, \nu, \phi_p) &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left( 2\alpha^2 + 2\alpha(\alpha \cos(2\nu) + \sin(2\nu) \cos(\phi_p)) + 1 \right)^{-1} \\
&\times \left( e^{\frac{\sigma^2}{2}} (\alpha^2 \sin^2(2\nu) + \sin^4(\nu)) + 4\alpha e^{\frac{\sigma^2}{2}} \sin^3(\nu) \cos(\nu) \cos(\phi_p) \right. \\
&\left. + 4\alpha \sin(\nu) \cos^3(\nu) \cos(\phi_p) + e^{\frac{\sigma^2}{2}} \cos^4(\nu) + 2 \sin^2(\nu) \cos^2(\nu) \right).
\end{aligned} \tag{173}$$

Finalmente, considerando los dos tipos de pérdidas se obtiene la fidelidad para PAC que de-

pende tanto de  $\nu$  como de  $\sigma$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\text{pa}}(\eta, \sigma, \nu, \phi_p) = & e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \left( 2(\alpha^2 + 1) \left( (4\alpha^2 + \eta) \cos^2(\nu) + 4\alpha \sin(\nu) \cos(\nu) \cos(\phi_p) + \sin^2(\nu) \right) \right)^{-1} \\
& \times \left( e^{\frac{\sigma^2}{2}} \left( \eta(2\alpha^2 + \eta + 1) \cos^4(\nu) + 8\alpha(\alpha^2 + 1) \sin^3(\nu) \cos(\nu) \cos(\phi_p) \right. \right. \\
& + 2(\alpha^2 + 1) (\alpha^2 \sin^2(2\nu) + \sin^4(\nu)) - (\eta - 1)\eta \sin^2(\nu) \cos^2(\nu) \\
& \left. \left. + 2\sqrt{\eta} (2\alpha^2 + \eta + 1) \sin(\nu) \cos^2(\nu) (2\alpha \cos(\nu) \cos(\phi_p) + \sin(\nu)) \right) \right)
\end{aligned} \tag{174}$$

El análisis de las fidelidades de teleportación para el canal PAC se muestra en la figura 38 para diferentes valores de la varianza de fase  $\sigma$  respecto a los parámetros de qubit  $\{\nu, \phi_p\}$ . Las varianzas de fase son para las figuras 38(a)-(d)  $\sigma = 0$ , y 38(e)-(h)  $\sigma = 0,5$ . El esparcimiento es  $\eta = 0,9$  en la columna de la izquierda (Figuras 38(a),(c),(e),(g)) y  $\eta = 0,8$  en la columna de la derecha (Figuras 38(b),(d),(f),(h)). Los valores de  $\alpha$  para cada figura son  $\alpha = 0$  en los renglones 1 y 3, y  $\alpha = 3$  en los renglones 2 y 4. Se observa de las diferentes gráficas que conforme el ruido aumenta, la región de fidelidad alta disminuye levemente, pero disminuye fuertemente con el incremento de  $\alpha$ . Mientras que en la figura 39 se muestra la fidelidad para el caso con  $\alpha = 20$  (grande) y  $\sigma = 1$  donde en 38(a)  $\eta = 0,9$  y en 38(b)  $\eta = 0,8$ , esto con el fin de observar el efecto de un alto número de fotones promedio  $n = |\alpha|^2$  sobre la fidelidad. Se mantuvo fijo  $\sigma$  para tener un marco de referencia. En ambas figuras se observa el mismo comportamiento, es decir, que la fidelidad sólo es alta si se quiere teleportar un estado con  $\nu \approx \pi/2$  lo que era de esperarse puesto que en la ecuación (158) es el término dominante al incrementar  $\alpha$ .

### Fidelidades promedio

Si el canal utilizado está formado por la superposición de SPACS la fidelidad es altamente dependiente del número promedio de fotones  $n$  y por lo tanto del valor de  $\alpha$ ,  $n = |\alpha|^2$ . Cabe aclarar que en esta sección por simplicidad y sin perder generalidad se considera un qubit que cuya fase  $\phi_p = 0$ , por lo que los parámetros del qubit sólo quedan  $x = \sin \nu$  y  $y = \cos \nu$ , esto motivado principalmente por dos razones: *primero*, la dependencia de la fidelidad con  $\phi_p$  no es tan fuerte como con  $\nu$  tal como se vio en la subsección anterior y, *segundo* para hacer una

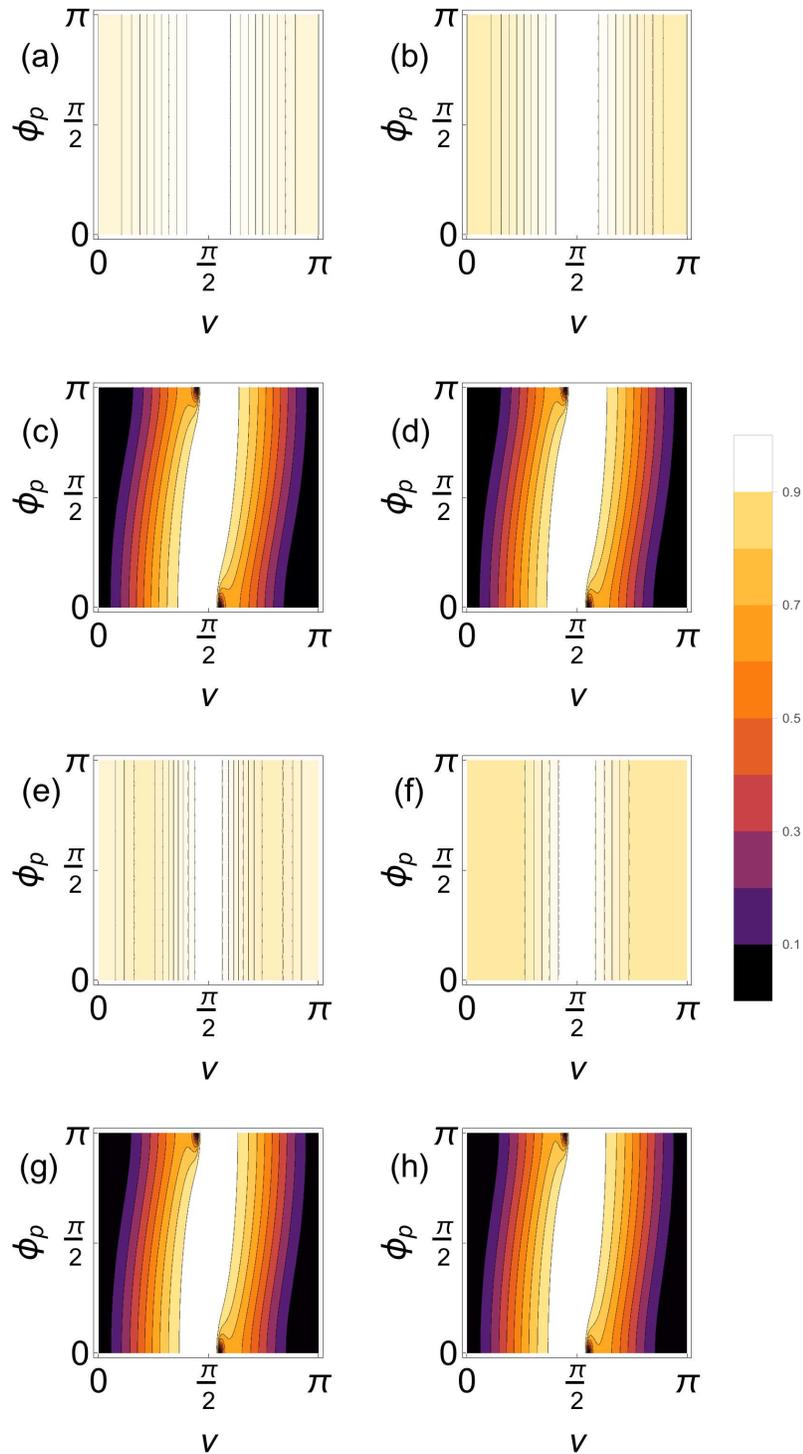


Figura 38: Fidelidad de teleportación del canal PAC con fase y esparcimiento para diferentes valores de la varianza de fase  $\sigma$  respecto a los parámetros de qubit  $\{\nu, \phi_p\}$ . Las varianzas son (a)-(d)  $\sigma = 0$ , (e)-(h)  $\sigma = 0,5$ . El esparcimiento es  $\eta = 0,9$  en la columna de la izquierda y  $\eta = 0,8$  en la columna de la derecha. Con  $\alpha = 0$  en los renglones 1 y 3, y  $\alpha = 3$  en los renglones 2 y 4.

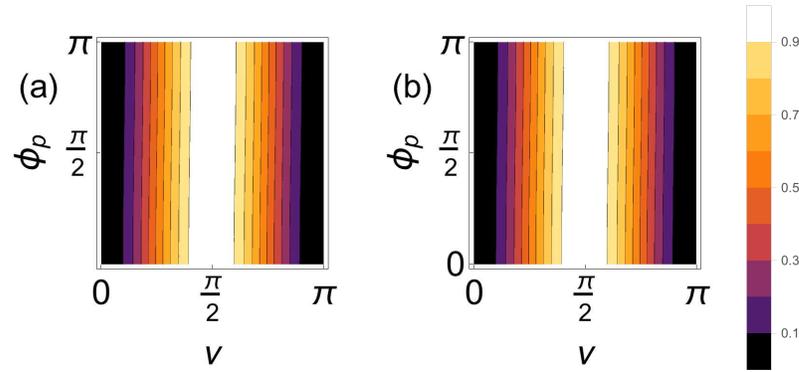


Figura 39: Fidelidad de teleportación en el canal PAC respecto a los parámetros de qubit  $\{\nu, \phi_p\}$ , para el caso con  $\alpha = 20$  y  $\sigma = 1$  donde en (a)  $\eta = 0,9$  y en (b)  $\eta = 0,8$

comparación con la fidelidad promedio del canal DFS en igualdad de condiciones. La fidelidad promedio de (153b) queda como sigue

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{pa}}(\eta = 1, \sigma = 0) = \frac{\alpha^4 + \alpha^2 + 2}{2(\alpha^2 + 1)^2}. \quad (175)$$

Lamentablemente no es posible obtener una expresión cerrada para la fidelidad promediada de las expresiones (172), (173) y (174), por lo que las integrales en fase quedan indicadas. Para el canal formado por superposición de fotones agregados la expresión promediada queda indicada

$$\overline{\mathcal{F}}_{\text{pa}}(\eta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \mathcal{F}_{\text{pa}}(\eta, \sigma, \nu). \quad (176)$$

En la figura 40 se ha graficado la fidelidad para teleportación del canal PAC dependiente de los parámetros  $\alpha$  y  $\eta$  para distintos valores de la varianza de fase  $\sigma$ . Las varianzas de (a) - (d) son  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$ . De las figuras se observa que las fidelidades altas se encuentran muy localizadas en valores de  $\alpha \rightarrow 0, \eta \rightarrow 1$  y  $\sigma \rightarrow 0$ .

### 5.3. Teleportación de estados formados por SPACS mediante detecciones homodinas

En esta sección se explora la teleportación de estados de la forma de la ecuación (147) a través de un canal entrelazado formado por la superposición de estados DFS y SPACS en

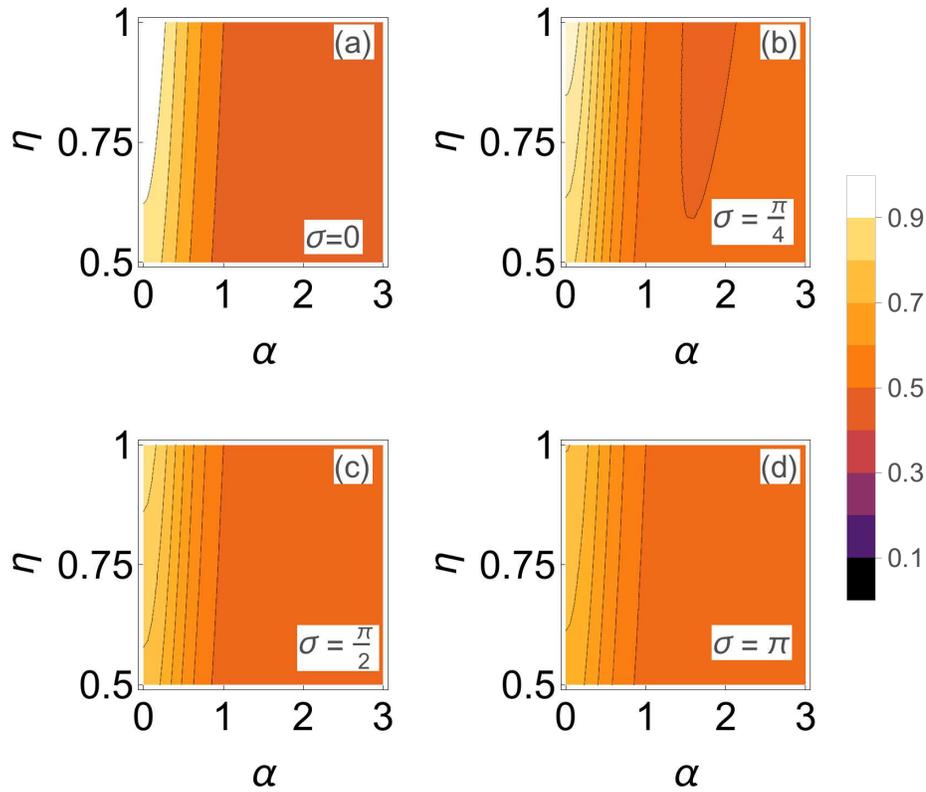


Figura 40: Fidelidad promedio de teleportación para un canal con superposición de SPACS, mostrada en la ecuación (176) vs. esparcimiento y ruido de fase caracterizados por  $\eta$  y  $\sigma$ , respectivamente para diferentes valores de  $\sigma$ , (a)  $\sigma = 0$ , (b)  $\sigma = \pi/4$ , (c)  $\sigma = \pi/2$ , (d)  $\sigma = \pi$ .

donde las pérdidas solamente se modelan por fluctuaciones de fase  $\phi$  de la forma

$$|\psi^{AB}\rangle = N(\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle |\alpha e^{i\phi}\rangle \mp \hat{b}^\dagger e^{i\phi} |\alpha\rangle |\alpha e^{i\phi}\rangle). \quad (177)$$

La fase se introduce como una diferencia de fase entre los modos  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ . Es posible escribirla en el modo correspondiente a  $\hat{b}$  sin cambios en los resultados. Cabe destacar que las razones para descartar las pérdidas por esparcimiento, son dos: *primero*, se ha visto que su influencia tanto en correlaciones como en fidelidad es la disminución de cualquiera de ellas y, *segundo*, la teleportación con post-selección homodina se estudia con un enfoque de viabilidad, en donde bajo condiciones ideales se busca si es posible teleportar un estado o no y bajo que condiciones. Cabe destacar, que como se vio en el capítulo 4, las fluctuaciones de fase incrementan las correlaciones cuánticas, o por lo menos establecen un límite inferior menor comparado con su inexistencia, lo que redundo en otra razón para su inclusión.

El esquema para realizar teleportación con medición conjunta homodina se muestra en la figura (41). Fuente hace referencia al proceso de generación del estado compartido, como se mostró en la sección 4, es decir, que en las entradas del primer BS puede haber un SPACS y el vacío para generar el PAC o un fotón individual y un estado coherente para generar el DPC. El estado a teleportar  $|\psi^C\rangle$  se mezcla con el estado compartido en el lado de Bob mediante otro BS 50/50. El ruido de fase  $\phi$  se modela con una distribución Gaussiana de varianza  $\sigma$ , mostrado en un bloque con  $\phi$  en la figura. La medición conjunta para completar el protocolo de teleportación se realiza mediante los dos detectores homodinos del lado de Bob, en los que Bob selecciona  $\lambda_{A(B)}$  y obtiene las cuadraturas  $X_{\lambda_{A(B)}}$ . Posterior a esto, Alice obtiene un estado, cuya fidelidad de teleportación es condicional con las cuadraturas detectadas por Bob.

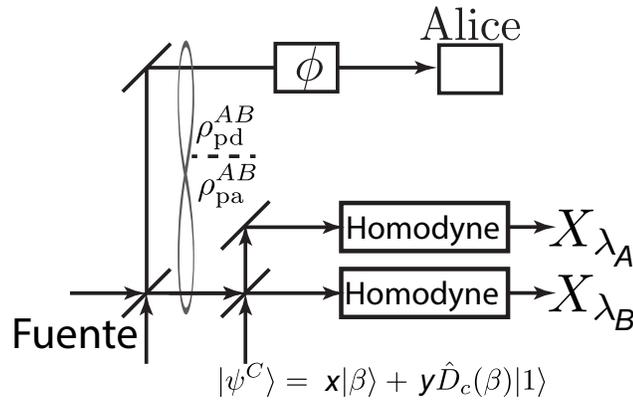


Figura 41: Esquema general para la teleportación con medición conjunta homodina

La detección homodina del estado compartido mostrado en la ecuación (177) proyecta el modo medido en un eigenestado de cuadratura  $\langle X_\lambda | \psi \rangle$  y arroja el eigenvalor  $X_\lambda$ , para lo que utilizaremos las siguientes relaciones

$$\langle X_{\lambda_j} | \hat{a}^{\dagger 2} | \alpha_j \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\Gamma_j} u_j \quad (178a)$$

$$\langle X_{\lambda_j} | \hat{a}^\dagger | \alpha_j \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\Gamma_j} \mathcal{W}_j, \quad (178b)$$

$$\langle X_{\lambda_j} | \alpha_j \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\Gamma_j}, \quad (178c)$$

donde

$$\Gamma_j = -(|\alpha_j|^2 + X_{\lambda_j}^2)/2 - \frac{1}{2} e^{-2i\lambda_j} \alpha_j^2 + \sqrt{2} e^{-i\lambda_j} X_{\lambda_j}, \quad (178d)$$

$$\mathcal{W}_j = \sqrt{2}e^{-i\lambda_j} X_{\lambda_j} - e^{-2i\lambda_j} \alpha_j, \quad (178e)$$

$$u_j = e^{-2i\lambda_j} (e^{-2i\lambda_j} \alpha^2 - 1 - 2\sqrt{2}e^{-i\lambda_j} X_{\lambda_j} \alpha + 2X_{\lambda_j}^2). \quad (178f)$$

Las relaciones mostradas en la ecuación (178) son fácilmente obtenibles mediante la fórmula  $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots$ . Por lo que, escribiendo el estado conjunto de la misma forma que en la sección previa  $|\psi^{ABC}\rangle$  posterior a la mezcla en el divisor de haz 50/50 se obtiene el estado.

$$\begin{aligned} |\psi^{ABC}(x, y, \alpha, \phi, \gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha))\rangle &= \hat{U}^{bc}(\pi/4) |\psi^{ABC}\rangle \\ &= N(x\hat{a}^\dagger |\alpha, \gamma_2, \gamma_1\rangle \mp x \frac{\hat{c}^\dagger e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\alpha, \gamma_2, \gamma_1\rangle \pm x \frac{\hat{b}^\dagger e^{i\phi}}{\sqrt{2}} |\alpha, \gamma_2, \gamma_1\rangle \\ &\quad + y \frac{\hat{b}^\dagger}{\sqrt{2}} \hat{D}_c(\gamma_1) (\hat{c}^\dagger + \frac{e^{-i\phi} \alpha^*}{\sqrt{2}} \hat{D}_b(\gamma_2) |\alpha, 0, 0\rangle) + y \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \hat{D}_c(\alpha) \hat{D}_b(\gamma_2) (\hat{b}^\dagger - \frac{e^{-i\phi} \alpha^*}{\sqrt{2}}) |\alpha, 0, 0\rangle \\ &\quad \mp y \frac{\hat{c}^\dagger e^{i\phi}}{2} \hat{D}_c(\gamma_1) (\hat{c}^\dagger + \frac{e^{-i\phi} \alpha^*}{\sqrt{2}}) \hat{D}_b(\gamma_2) |\alpha, 0, 0\rangle \pm y \frac{\hat{a}^\dagger e^{i\phi}}{2} \hat{D}_b(\gamma_2) \hat{D}_c(\gamma_1) (\hat{b}^\dagger - \frac{e^{-i\phi} \alpha^*}{\sqrt{2}}) |\alpha, 0, 0\rangle), \end{aligned} \quad (179)$$

donde  $\gamma_{1(2)} = \alpha(1 \pm e^{i\phi})/\sqrt{2}$ . Esto conduce a que el estado proyectado en cuadraturas, hasta una constante de normalización sea

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}^A(\lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi)\rangle &= \langle X_{\lambda_A} | \langle X_{\lambda_B} | \psi^{ABC}(x, y, \alpha, \phi, \gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha))\rangle \\ &= \pi^{-1/2} e^{\Gamma_c + \Gamma_b} (G_1 |\alpha\rangle + G_2 \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle), \end{aligned} \quad (180)$$

con los parámetros

$$\begin{aligned} G_1^{\text{dp(pa)}} &= \mp x \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} W_c \pm x \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} W_b \mp y \frac{e^{i\phi}}{2} (u_c - \gamma_1^* W_c + e^{-i\phi} \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}}) \\ &\quad \pm y \frac{e^{i\phi}}{2} (u_b - \gamma_2 W_b - e^{-i\phi} \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}}), \\ G_2^{\text{dp(pa)}} &= x + \frac{y}{\sqrt{2}} (W_c - \gamma_1^* + \frac{e^{-i\phi} \alpha^*}{\sqrt{2}}) + \frac{y}{\sqrt{2}} (W_b - \gamma_2^* - \frac{e^{-i\phi} \alpha^*}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Dado que (180) depende de  $x$  y  $y$ , la matriz de densidad reducida de Alice asociada a la post-selección dependerá del qubit a teleportar así como de las cuadraturas detectadas, asumiendo inicialmente un canal libre de ruido por fluctuaciones de fase,  $\sigma = 0$ , puede simplemente sustituirse  $\phi = 0$  en (179)

$$\begin{aligned} \rho^A(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha) \\ = |\psi^A(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi = 0)\rangle \langle \psi^A(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi = 0)|, \end{aligned} \quad (181)$$

donde se ha usado la dependencia con todos los parámetros  $(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi)$  por la relación que guardan con (5.3). Sin embargo, la naturaleza estadística de las detecciones de cuadratura y la estructura multiparamétrica de la ecuación (181) establece la estimación genérica de la fidelidad de teleportación con detecciones homodinas como una tarea compleja. Para simplificar los cálculos, el qubit se parametriza con  $x$  y  $y$  reales de tal modo que el espacio del qubit es uniparamétrico, es decir,  $x = \sin \nu$  y  $y = \cos \nu$  únicamente, con lo que se deja de lado el efecto de  $\phi_p$ , el que igualmente se vio en secciones anteriores resulta de menor importancia. La fidelidad es más dependiente al valor de  $\nu$ . Con esto se puede calcular la fidelidad mediante la expresión

$$\mathcal{F}(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, \alpha) = \text{Tr}[\rho^A(\nu, \sigma, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}) |\rho^C\rangle \langle \rho^C|], \quad (182)$$

lo que relaciona la fidelidad resultante con una post-selección establecida por los intervalos de detección de las cuadraturas que posee Bob condicionado a la selección de los parámetros homodinos. Se establece entonces una fidelidad promedio para los distintos valores de  $\nu$

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{\nu_{\text{sup}} - \nu_{\text{inf}}} \int_{\nu_{\text{inf}}}^{\nu_{\text{sup}}} d\nu \mathcal{F}(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}). \quad (183)$$

Es importante hacer notar que al incluir los efectos del ruido de fase la matriz de densidad (181) es un ensemble de la forma

$$\begin{aligned} & \rho^A(\nu, \sigma, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\phi, \sigma) \rho^A(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi) d\phi, \end{aligned} \quad (184)$$

donde cada  $\rho^A$  ya no tiene la suposición  $\phi = 0$ , por lo que  $\rho^A(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi)$

$= |\psi(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi)\rangle \langle \psi(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi)|$ . Con este mismo razonamiento se calcula la fidelidad promediada sobre los valores de  $\nu$ , por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{F}}(\sigma, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha) \\ &= \frac{1}{\nu_{\text{sup}} - \nu_{\text{inf}}} \int_{\nu_{\text{inf}}}^{\nu_{\text{sup}}} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} p(\phi, \sigma) \rho^A(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}, x, y, \alpha, \phi) d\phi \end{aligned} \quad (185)$$

Con (183) se analiza la viabilidad de un protocolo de teleportación basado en detecciones condicionales de cuadraturas.

### 5.3.1. Teleportación homodina con superposición de estados de Fock desplazados

Primeramente se analiza el caso cuando el estado compartido es el estado DFS de máximo entrelazamiento.

#### Fidelidad dependiente del qubit a teleportar

Como se mostró en la subsección anterior, la fidelidad de teleportación depende de muchos parámetros, por lo que es complicado encontrar una estrategia óptima de teleportación. Aquí nos centramos en algunas combinaciones de  $\{\lambda_A, \lambda_B\}$  que nos permiten obtener distribuciones de la fidelidad que a su vez son condicionales de las cuadraturas obtenidas  $X_{\lambda_{A(B)}}$ .

En la figura 42 se muestran las fidelidades de teleportación condicionales a la detección de las cuadraturas  $\{X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}\}$  para  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = 0$ ,  $\lambda_B = \pi/2$  sin fuentes de ruido, para una  $\nu$  fija distinta en cada subfigura como sigue: 42(a)  $\nu = 0$ , 42(b)  $\nu = \pi/4$ , 42(c)  $\nu = \pi/2$ . En las diferentes subfiguras se observa lo siguiente: 42(a) la fidelidad siempre es menor a 0.7, por lo que enviar  $\nu = 0$  con esta estrategia es poco óptimo, 42(b) existen regiones de máxima fidelidad muy bien delimitadas y específicas para  $X_{\lambda_A}$  alrededor de 2 y  $X_{\lambda_B}$  alrededor de 0, en 42(c) la fidelidad es alta casi en toda la región mostrada, excepto en la zona circular oscura partiendo del centro. Las diferentes figuras muestran que se puede obtener fidelidad máxima con la selección de parámetros realizada bajo criterios de selección específicos. Es decir, que si se tiene conocimiento del estado a teleportar, se puede saber cuáles son los resultados de la medición condicional de cuadraturas que producen fidelidades máximas.

En la figura 43 se muestra la fidelidad dependiente del parámetro del qubit  $\nu$  con  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = \lambda_B = 0$ , considerando a  $X_{\lambda_B} = 0$  fija dependiente de la varianza de fase  $\sigma$  en 43(a)  $\sigma = 0$ , 43(b)  $\sigma = 0,3$ , 43(c)  $\sigma = 1$ . De las figuras se observa que el efecto del ruido de fase en el canal es disminuir el área de máxima fidelidad. Desde la figura 43(a) hasta la 43(c) las zonas más claras se van haciendo más pequeñas.

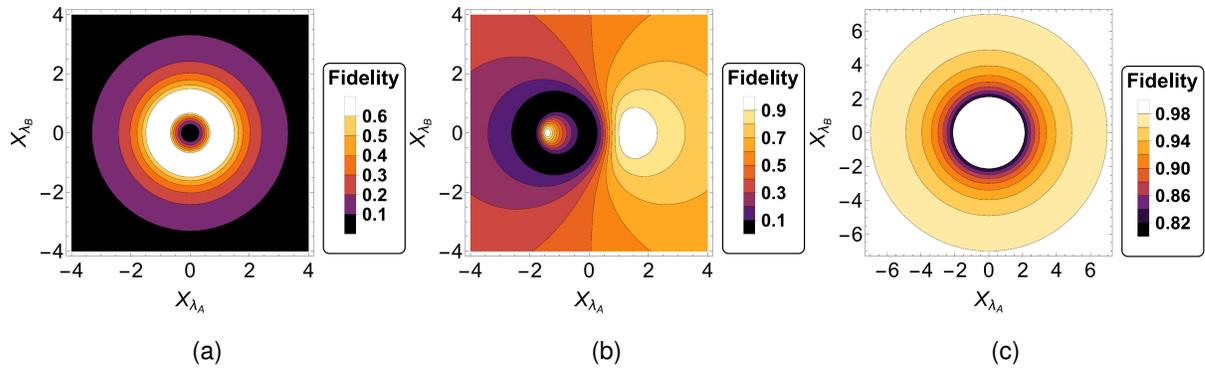


Figura 42: Fidelidad de teleportación de un estado  $\nu$  específico condicionada a la detección de  $X_{\lambda_{A(B)}}$  para el canal DPC, con  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = 0$ ,  $\lambda_B = \pi/2$  sin fuentes de ruido. Los valores  $\nu$  son fijos: (a)  $\nu = 0$ , (b)  $\nu = \pi/4$ , (c)  $\nu = \pi/2$

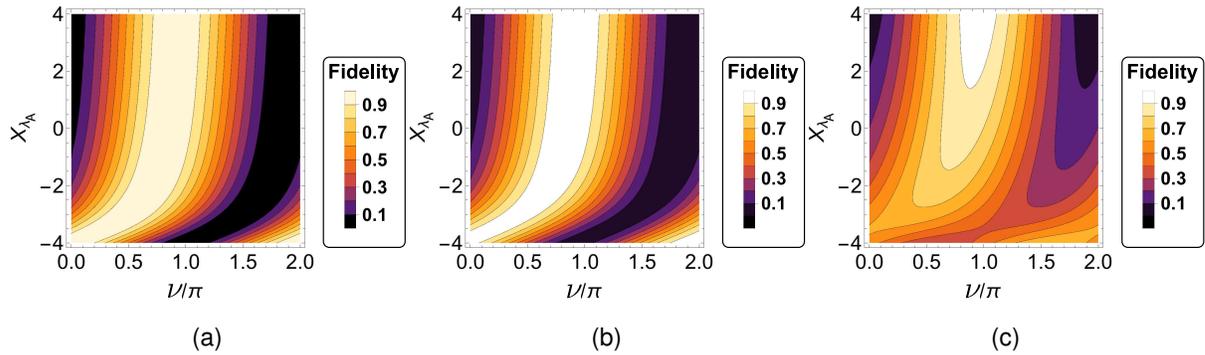


Figura 43: Fidelidad de teleportación dependiente de  $\nu$  para el canal DPC. Fijos  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = \lambda_B = 0$  y  $X_{\lambda_B} = 0$ .  $\sigma$  en (a) 0, (b) 0.3, (c) 1.0.

### Fidelidades promedio

Los resultados para la fidelidad condicional promediada se muestran en la figura 44. En 44(a) se muestra la fidelidad promedio para valores de  $\nu$  en el dominio  $[0, \pi]$ , en las figuras 44(b)-(d) se ha calculado la fidelidad promedio para los subdominios  $[0, \pi/3]$ ,  $[\pi/3, 2\pi/3]$ ,  $[\pi/3, \pi]$  respectivamente. En todos los casos se ha utilizado la configuración para la detección homodina siguiente:  $\lambda_A = \pi/4$ ,  $\lambda_B = 0$  considerando  $\alpha = 2$  y un estado sin fluctuación de fase, es decir,  $\sigma = 0$ . Se observa de la figura 44(a) que  $\overline{\mathcal{F}} < 0,515$ , por lo que en general no resulta una buena estrategia para realizar teleportación. Sin embargo, es posible utilizar el canal para establecer comunicación basada en los resultados condicionales. Esto se muestra

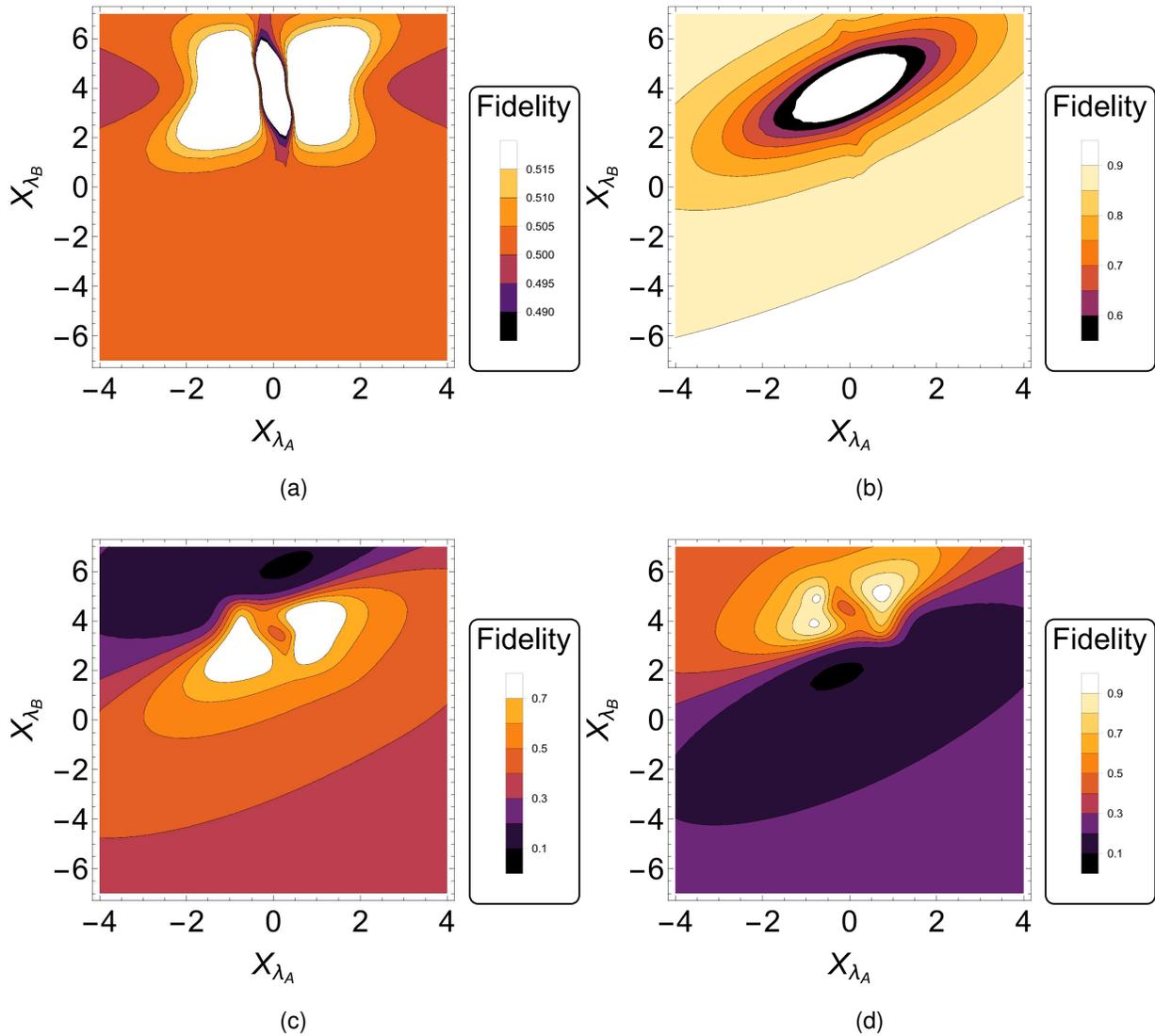


Figura 44: Fidelidad de teleportación promedio para el qubit en un canal compartido DPC dependiente de las cuadraturas  $\{X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}\}$ , con  $\lambda_A = \pi/4$ ,  $\lambda_B = 0$ ,  $\alpha = 2$  calculada para diferentes intervalos de  $\nu$  (a)  $[0, \pi]$ , (b)  $[0, \pi/3]$ , (c)  $[\pi/3, 2\pi/3]$ .

en las figuras 44(b)-(d) en donde se han calculado las fidelidades promedio para subdominios de  $\nu$ . Las figuras muestran que para estos subintervalos se pueden obtener fidelidades altas condicionadas a la obtención de las cuadraturas  $X_{\lambda_A}$  y  $X_{\lambda_B}$  mostradas en los ejes. Estas adecuaciones implican que uno conoce a priori el estado a enviar.

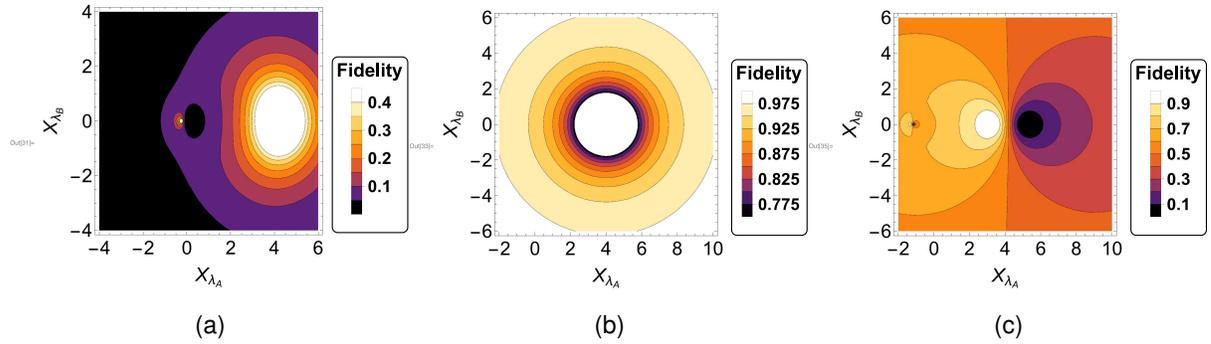


Figura 45: Fidelidad de teleportación dependiente de  $\nu$  para el canal PAC. Fijos  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = \lambda_B = 0$  y  $X_{\lambda_B} = 0$ .  $\nu$  en (a) 0, (b)  $\pi/4$ , (c)  $\pi/2$ .

### 5.3.2. Teleportación homodina con superposición de estados de fotones agregados individuales

#### Fidelidades dependientes del qubit a teleportar

La complicación dada por la forma multi paramétrica de la fidelidad para el canal PAC es similar al canal DFS por lo que seleccionar una forma óptima sigue siendo una tarea compleja. Con esta base, el análisis para el canal PAC es análogo al DFS.

En la figura 45 se muestran las fidelidades de teleportación condicionales a la detección de las cuadraturas para  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = 0$ ,  $\lambda_B = \pi/2$  sin fuentes de ruido, para una  $\nu$  fija distinta en cada figura, en 45(a)  $\nu = 0$ , 45(b)  $\nu = \pi/4$ , 45(c)  $\nu = \pi/2$ . En las diferentes figuras se observa lo siguiente: 45(a) la fidelidad siempre es menor a 0.45, por lo que enviar  $\nu = 0$  con esta estrategia es poco óptimo, igual como sucede en el caso DFS, 45(b) existen amplias regiones de fidelidad alrededor de 0.97 muy bien delimitadas y específicas para  $X_{\lambda_A}$  alrededor de 4 y  $X_{\lambda_B}$  alrededor de 0, así como para las combinaciones de magnitud de las cuadraturas grandes, en 45(c) existen fidelidades superiores a 0.9 pero en regiones muy pequeñas y bien delimitadas. Las diferentes figuras muestran que se puede obtener fidelidad máxima con la selección de parámetros realizada bajo criterios de selección específicos.

En la figura 46 se muestra la fidelidad dependiente del parámetro del qubit  $\nu$  con  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = \lambda_B = 0$ , considerando a  $X_{\lambda_B} = 0$  fija dependiente de la varianza de fase  $\sigma$  en 46(a)  $\sigma = 0$ , 46(b)  $\sigma = 0,3$ , 46(c)  $\sigma = 1$ . De las figuras se observa que el efecto del ruido de fase

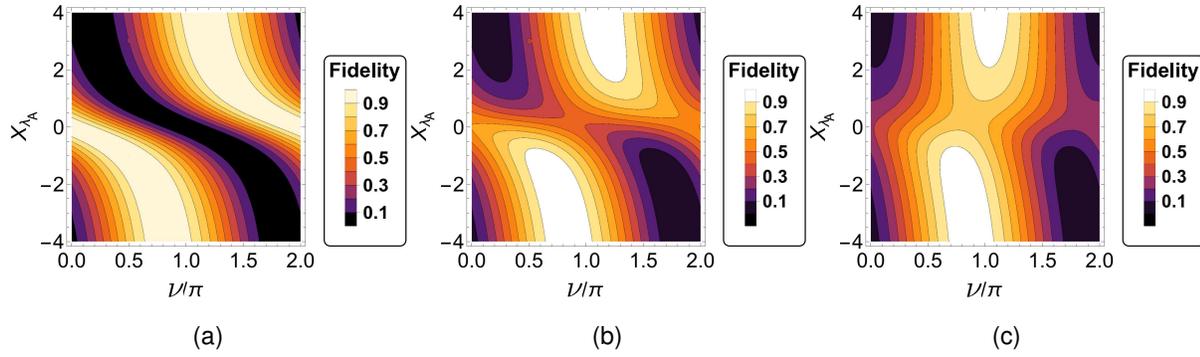


Figura 46: Fidelidad de teleportación dependiente de  $\nu$  para el canal PAC. Fijos  $\alpha = 2$ ,  $\lambda_A = \lambda_B = 0$  y  $X_{\lambda_B} = 0$ .  $\sigma$  en (a) 0, (b) 0.3, (c) 1.0.

en el canal es disminuir el área de máxima fidelidad, lo que también puede interpretarse como una disminución en el rango de  $\nu$  que el canal tiene capacidad de teleportar. Desde 46(a) hasta 46(c) las zonas más claras se van haciendo más pequeñas.

### Fidelidades promedio

Utilizando las mismas condiciones que en el caso de teleportación con el DFS, se analiza la teleportación utilizando superposición de estados de fotones agregados individuales SPACS. La figura 47 muestra la fidelidad condicional promedio para valores de  $\nu$  en el rango  $[0, \pi]$ , en las figuras (b)-(d) se ha calculado la fidelidad promedio para los rangos  $[0, \pi/3]$ ,  $[\pi/3, 2\pi/3]$ ,  $[\pi/3, \pi]$  respectivamente. En todos los casos se ha utilizado la misma configuración para la detección homodina que en el caso previo:  $\lambda_A = \pi/4$ ,  $\lambda_B = 0$  considerando  $\alpha = 2$  y un estado sin fluctuación de fase, es decir,  $\sigma = 0$ . Se observa de la figura 47(a) que  $\overline{\mathcal{F}} < 0,504$ , por lo que en general tampoco resulta una buena estrategia para realizar teleportación. De forma análoga al caso DFS se puede utilizar el canal para establecer comunicación basada en los resultados condicionales. Esto se muestra en las figuras 47(b)-(d) en donde se han calculado las fidelidades promedio para subintervalos de  $\nu$ . Estas figuras, muestran que para las mismas configuraciones que en el caso DFS se obtienen regiones de fidelidades mayores que en el caso previo. Para muestra, podemos comparar la figura 47(c) con 44(c), se puede ver que el caso con SPACS permite alcanzar fidelidades mayores para las regiones en blanco. Si bien

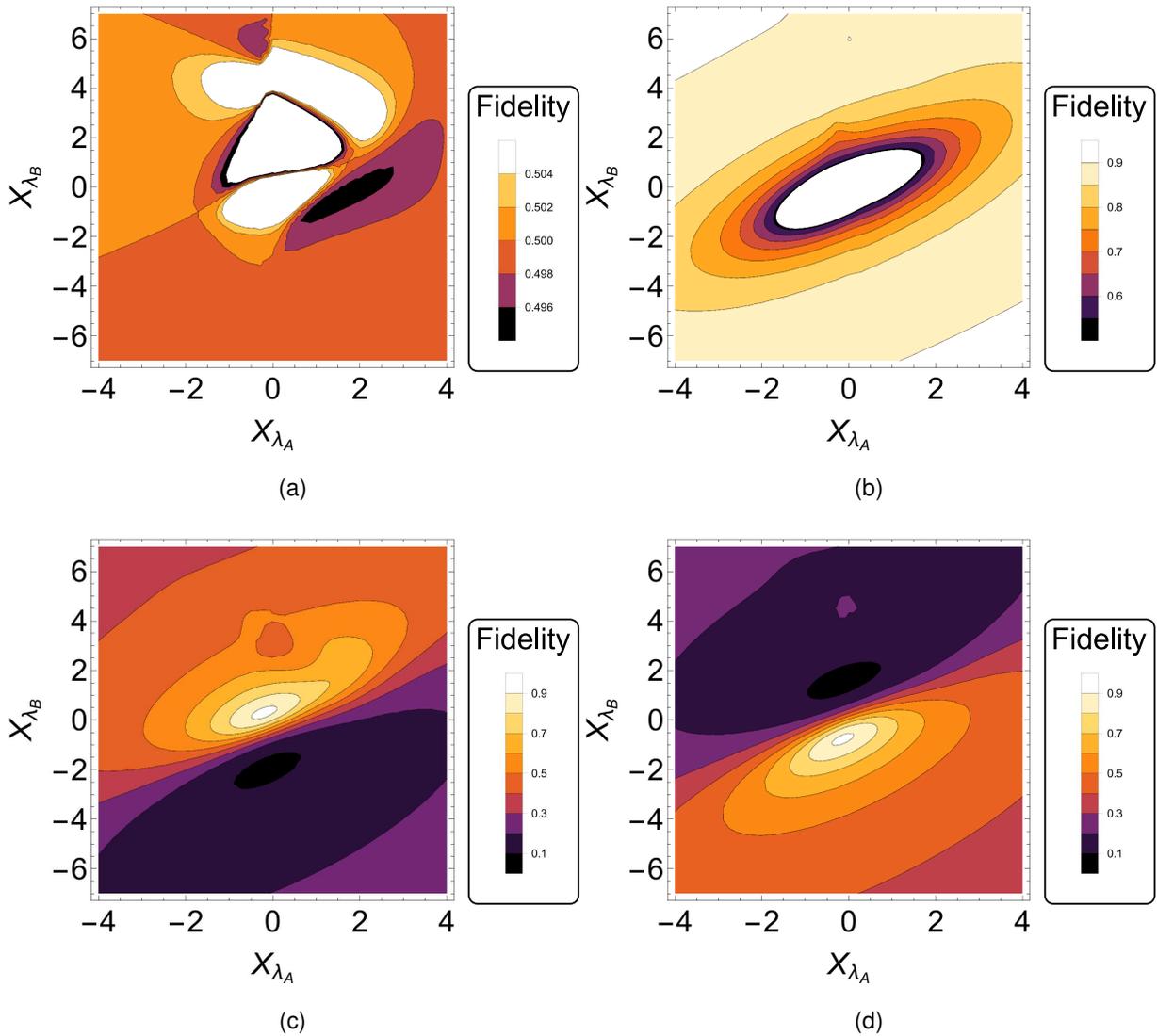


Figura 47: Fidelidad de teleportación promedio para el qubit en un canal compartido PAC dependiente de las cuadraturas  $\{X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}\}$ , con  $\lambda_A = \pi/4$ ,  $\lambda_B = 0$ ,  $\alpha = 2$  calculada para diferentes intervalos de  $\nu$  (a)  $[0, \pi]$ , (b)  $[0, \pi/3]$ , (c)  $[\pi/3, 2\pi/3]$ .

la región blanca es bastante delimitada, el mapa de color muestra una fidelidad comparable con 44(c),  $\bar{\mathcal{F}} > 0,7$  en una región mucho más amplia. Las otras subfiguras muestran valores comparables con el caso DFS.

### 5.3.3. Teleportación homodina con ruido de fase

En esta sección sólo se exploran unos casos muy específicos cuando el estado a teleportar es conocido y se comparan las fidelidades obtenidas para  $\sigma = 0$  (que es equivalente al cálculo

de la fidelidad para un canal sin ruido de fase) con otros valores de  $\sigma$ . Esto se hace para ver el efecto de la fluctuación de fase sobre los estados enviados. Para ello, se calcula la fidelidad dependiente de  $\nu$  y promediada con la función de distribución del ruido de fase, de la forma

$$\mathcal{F}(\nu, \sigma, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\phi, \sigma) \mathcal{F}(\nu, \lambda_A, \lambda_B, X_{\lambda_A}, X_{\lambda_B}) d\phi. \quad (186)$$

La ecuación (186) permite conocer la fidelidad condicional para  $\{\lambda_A, \lambda_B\}$  fijas con respecto a las cuadraturas, lo que establece una relación de la fidelidad para diferentes ruidos de fase. A continuación se hace un breve análisis comparativo entre la fidelidad de teleportar el estado con  $\nu = 0$  y  $\nu = \pi/2$  con ruidos descritos por  $\sigma = 0$  y  $\sigma = \pi/5$ . Es decir, sin ruido y con ruido. Únicamente para establecer de manera cualitativa el efecto del ruido en la teleportación condicional con detección en cuadratura.

### Superposición de estados de Fock desplazados

En la figura 48 se muestra la fidelidad condicional de la ecuación (186) para el canal con fotones desplazados. Para todas las gráficas está fijo  $\lambda_A = \pi/4, \lambda_B = 0$ . En la figuras 48(a)-(b) se utilizó  $\nu = 0$ , sin ruido en (a) y con  $\sigma = \pi/5$  en (b). En las figuras 48(c)-(d) se utilizó  $\nu = \pi/2$ , sin ruido en (c) y con  $\sigma = \pi/5$  en (d).

Se observa que para  $\nu = 0$ , la fidelidad aumenta para el canal con ruido, esto se puede notar en la figura 48(a) donde existe una región oscura dentro de la zona de fidelidad alta (blanca), que no se muestra en la figura 48(b), sino que al contrario, toda la región aumentó su fidelidad, con valores incluso superiores a 0.7 para regiones muy delimitadas que sin ruido de fase no se obtuvieron, esta manifestación podría tener una explicación en la discordia cuántica estudiada en el capítulo anterior, en donde al considerar el canal DFS e incrementar el valor de  $\sigma$  el decaimiento del QD disminuía considerando canales continuos, sin embargo, un estudio detallado del efecto del ruido de fase sobre la fidelidad en la teleportación homodina no es parte del alcance del presente trabajo, sino que se reserva como trabajo futuro. Cuando se compara el estado  $\nu = \pi/2$  se observa que las regiones de alta fidelidad mostradas en 48(c) disminuyen su área en 48(d), pero conservan los valores de fidelidad obtenida en el canal sin ruido.

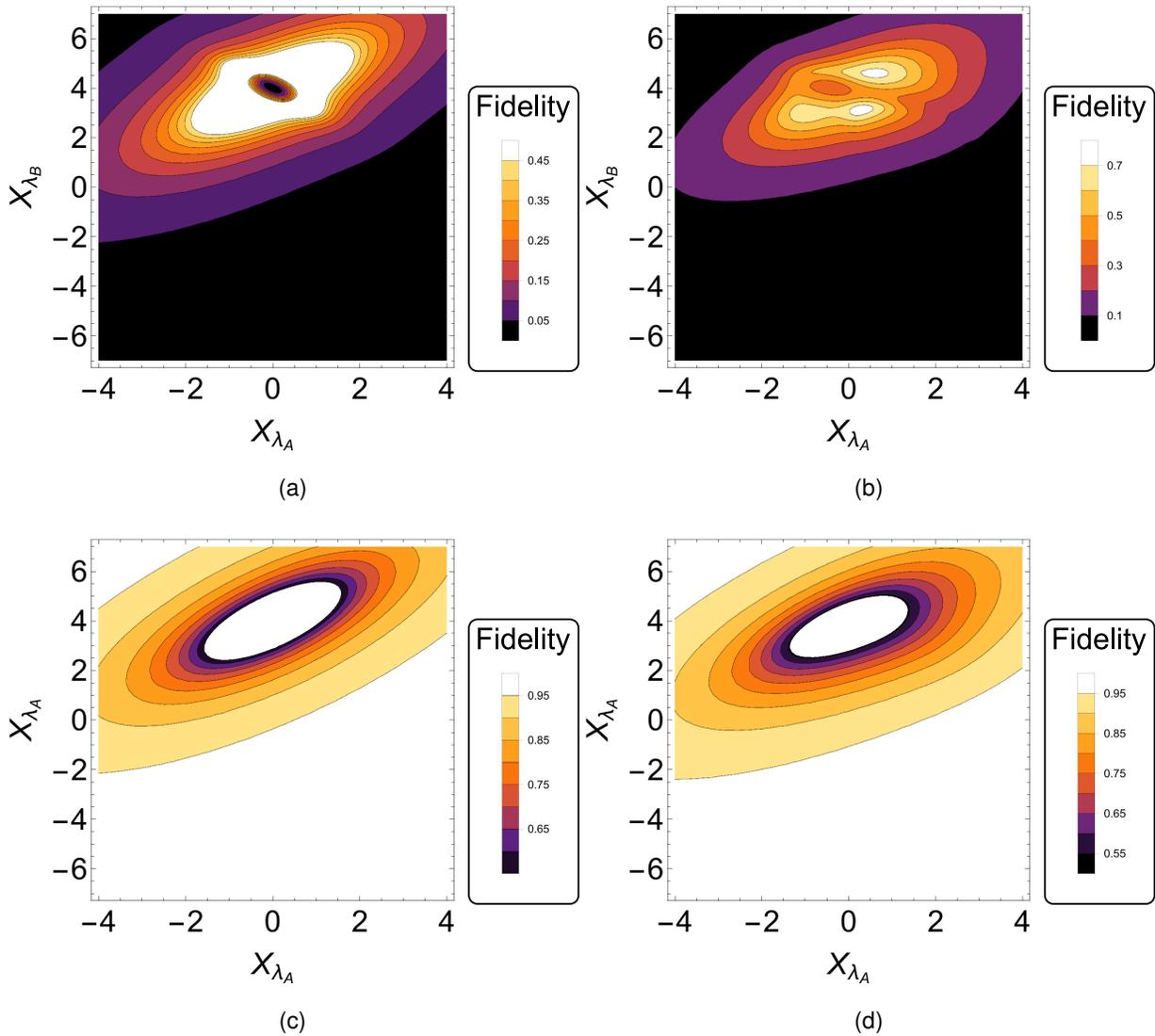


Figura 48: Fidelidad condicional de la ecuación (186) para el canal DPC considerando un qubit con  $\nu$  particular a teleportar. Los detectores están ajustados a  $\lambda_A = \pi/4$ ,  $\lambda_B = 0$  para diferentes condiciones de ruido mostradas contra los valores de las cuadraturas. En (a)  $\nu = 0$ ,  $\sigma = 0$ , (b)  $\nu = 0$ ,  $\sigma = \pi/4$ , (c)  $\nu = \pi/2$ ,  $\sigma = 0$ , (d)  $\nu = \pi/2$ ,  $\sigma = \pi/4$ .

### Superposición de estados de estados coherentes con fotones agregados

En la figura 49 se muestra la fidelidad condicional de la ecuación (186) para el canal con superposición de fotones agregados. Se utilizan los mismos parámetros que para el caso DFS, es decir, para todas las gráficas está fijo  $\lambda_A = \pi/4$ ,  $\lambda_B = 0$ . En la figuras 49(a)-(b) se utilizó  $\nu = 0$ , sin ruido en (a) y con  $\sigma = \pi/5$  en (b). En las figuras 49(c)-(d) se utilizó  $\nu = \pi/2$ , sin

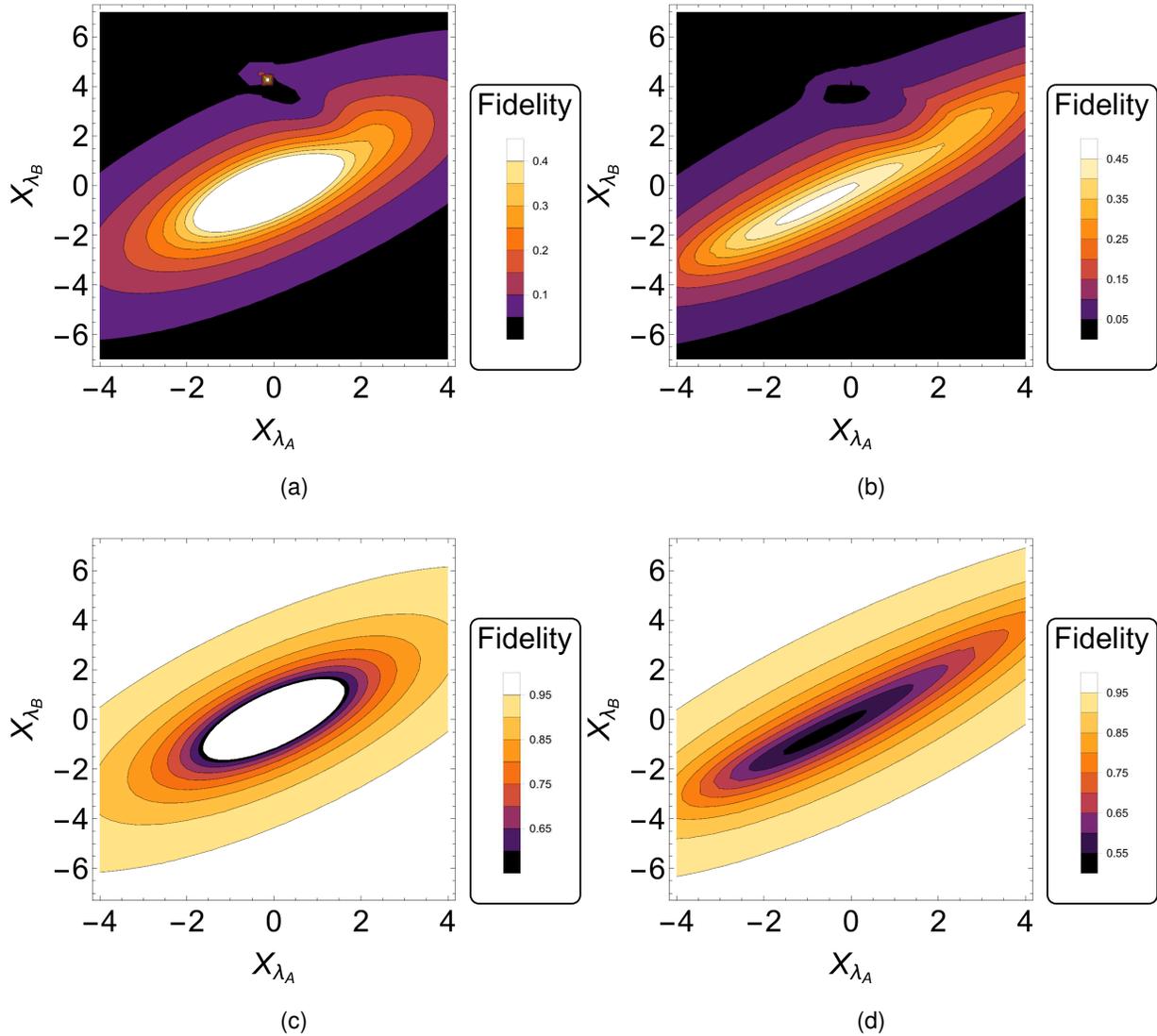


Figura 49: Fidelidad condicional de la ecuación (186) para el canal PAC considerando un qubit con  $\nu$  particular a teleportar. Los detectores están ajustados a  $\lambda_A = \pi/4$ ,  $\lambda_B = 0$  para diferentes condiciones de ruido mostradas contra los valores de las cuadraturas. En (a)  $\nu = 0$ ,  $\sigma = 0$ , (b)  $\nu = 0$ ,  $\sigma = \pi/5$ , (c)  $\nu = \pi/2$ ,  $\sigma = 0$ , (d)  $\nu = \pi/2$ ,  $\sigma = \pi/5$ .

ruido en (c) y con  $\sigma = \pi/5$  en (d).

Se observa que para ambos casos de  $\nu = 0$  y  $\nu = \pi/2$ , la fidelidad disminuye. Por un lado, la fidelidad en 48(a) para  $\nu = 0$  sin ruido comparada con la mostrada en la figura 48(b) donde se ha agregado ruido de fase con  $\sigma = \pi/5$  muestra que las regiones de mayor fidelidad (las zonas blancas y amarillas) se vuelven más estrechas. Sin embargo, también logra observarse que la fidelidad máxima accesible aumenta en la 48(b). Por otro lado, la fidelidad de la figura

48(c) comparada con 48(d) muestra que al incluir ruido de fase en el canal las zonas de alta fidelidad disminuyen, lo que queda claro en la región oscura mostrada en 48(d) que indica fidelidades menores a 0.55 donde antes (con  $\sigma = 0$ ) existían fidelidades superiores a 0.95.

## 5.4. Conclusiones

En este capítulo se estudió la teleportación de estados híbridos formados por superposición de estados coherentes con fotones agregados y estados coherentes, los cuales se utilizaron como un canal entrelazado para establecer teleportación cuántica.

Con la consideración de superposiciones formadas por fotones individuales agregados, bajo el esquema de detección conjunta híbrida es posible obtener fidelidad máxima en un canal sin ruido probabilísticamente el 50 % de las veces. Cuando se agrega ruido, la fidelidad promedio desciende en función del ruido por esparcimiento y fase empleados, resultando el canal DPC el más robusto frente a esparcimientos  $\eta > 0,8$  y fluctuaciones de fase con varianzas  $\sigma < \pi/4$ , lo que lo expresa como un buen candidato para realizar teleportación con estados macroscópicos. Cuando se realizó la medición conjunta mediante detecciones homodinas, se encontró que en general ni PAC ni DPC son adecuados para una teleportación sin ningún conocimiento previo del estado a enviar. No obstante, si se subdivide el intervalo del estado a teleportar, es posible obtener fidelidades  $\overline{\mathcal{F}} > 0,9$  en ciertos intervalos en condiciones sin ruido y sujetas probabilísticamente a las cuadraturas detectadas. Cuando se agrega ruido en el envío de estados específicos bajo un esquema de detección homodina, equivalente a la preparación remota de estados se obtuvo que el DPC es de nuevo un buen candidato al presentar una disminución mínima de las regiones de alta fidelidad e incluso un aumento en uno de los casos. Mientras que con el canal PAC, aunque aún con ruido se pueden obtener fidelidades altas, los dominios de las cuadraturas para los cuales se presentan se ven reducidos.

## Capítulo 6.

---

### Propuesta de implementación experimental en fibra óptica

Ahora nos movemos a una propuesta específica para la generación de los estados entrelazados discutidos en el capítulo anterior con el propósito de analizar su impacto como recurso para realizar teleportación de variable continua. En el capítulo anterior analizamos dos canales denominados PAC y DFS. En este capítulo exploramos la obtención de dichos canales considerando la generación de fotones anunciados en una fibra óptica no lineal.

Se propone la generación de estados de fotones agregados en fibras ópticas de cristal fotónico. Los fotones agregados se obtienen de la aplicación del operador de creación sobre un estado coherente  $|\alpha, 1\rangle = \mathcal{N}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle$ , donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización (Agarwal y Tara, 1991). Asimismo, se prueban las capacidades no clásicas de las superposiciones de estos estados con un protocolo de teleportación que puede lograrse utilizando estados con un fotón agregado (SPACS) o con un estado entrelazado continuo híbrido como se han utilizado en capítulos previos. La diferencia de que ahora se consideran las condiciones físicas de los parámetros para una posible implementación en una fibra óptica en particular.

Primeramente para la generación de un SPACS se parte brevemente de la teoría de la mezcla de cuatro ondas en fibras ópticas en el régimen espontáneo (SFWM - *spontaneous four wave mixing*) para un caso monomodal y copolarizado. Es fácil demostrar la operación de agregado de fotones. Posteriormente se crean dos estados entrelazados continuos para plantear el protocolo de teleportación. Uno de estos estados se forma por la combinación de un estado coherente y un fotón individual mediante un divisor de haz (BS) proveniente de un fotón anunciado obtenido mediante SFWM. El otro se obtiene a través de mezclar un SPACS obtenido también a través de la interacción SFWM en BS. Estos dos estados se utilizan como recurso compartido para establecer un protocolo de teleportación *ad'hoc* basado en detección de fotones de individuales. Es importante considerar que el estado a teleportar se modela de la forma  $|\psi\rangle = x|0\rangle + y\hat{a}_\beta^\dagger|0\rangle$ , donde  $\hat{a}_\beta^\dagger$  es el operador de creación de un fotón con características espectrales dadas por  $\beta$ .

## 6.1. Generación de SPACS en fibra óptica mediante SFWM

Para la descripción de la generación de SPACS en una fibra óptica mediante el SFWM, se recurre al proceso no lineal de tercer orden monomodal y copolarizado que se puede describir mediante el Hamiltoniano de interacción (J. Chen, Li, y Kumar, 2005; Garay-Palmett, U'Ren, y Rangel-Rojo, 2010)

$$\hat{H}(t) = \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)} \int d^3\mathbf{r} E_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{h.c.}, \quad (187)$$

donde  $\chi^{(3)}$  se conoce como la susceptibilidad no lineal de orden 3 que se espera sea del orden  $10^{-15}$  esu (Boyd, 2003),  $E_{1(2)}^{(+)}$  es el operador de aniquilación de un fotón del bombeo correspondiente y  $E_{si}^{(-)}$  es el operador de creación de un fotón señal y acompañante, respectivamente. Mediante teoría de perturbaciones a primer orden, tal como se muestra en el apéndice A se puede llegar a que el estado generado por este Hamiltoniano cuando el estado inicial es el vacío, es de la forma,

$$|\Psi\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i + \kappa \int \int d\omega_s d\omega_i F(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle = |00\rangle_{si} + \kappa |\Psi_2\rangle, \quad (188)$$

donde  $|\omega_s\rangle$  ( $|\omega_i\rangle$ ) representa un fotón con frecuencia  $\omega_s$  ( $\omega_i$ ) respectivamente. Esto es equivalente a  $\hat{a}^\dagger(\omega) |0\rangle \equiv |\omega\rangle$ . La función de amplitud conjunta (JSA por sus siglas en inglés) está dada por

$$F(\omega_s, \omega_i) = \int d\omega \alpha_1(\omega) \alpha_2(\omega_s + \omega_i - \omega) \text{sinc} \left[ \frac{L}{2} \Delta k(\omega, \omega_s, \omega_i) \right] e^{i\frac{L}{2} \Delta k(\omega, \omega_s, \omega_i)} \quad (189)$$

donde  $\alpha_i(\omega)$  es una función de la envolvente espectral de los bombeos,  $\Delta k(\omega, \omega_s, \omega_i)$  es el desempatamiento de fase entre el bombeo y los modos generados.

Sin embargo, estamos interesados en obtener estados con fotones agregados, por lo que el estado inicial es el vacío en uno de los modos y un estado coherente en el otro. De esta forma, el estado generado obtenido mediante  $|\psi(t)\rangle = \exp \left[ -i\hbar \int_0^t \hat{H}_I(t') dt' \right] |\psi(0)\rangle$ , considerando  $|\psi(0)\rangle = |\{\alpha\}\rangle_c |0\rangle_i$  se describe como,

$$|\Psi\rangle = |\{\alpha\}\rangle_s |0\rangle_i + \kappa \int \int d\omega_s d\omega_i F(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) |\{\alpha\}\rangle_s |\omega_i\rangle_i, \quad (190)$$

donde  $|\{\alpha\}\rangle$  es el estado coherente inyectado en el modo espacio-temporal del modo de señal pero que puede tener características espectrales distintas y,  $\hat{a}^\dagger(\omega_s)$  es el operador de creación de un fotón en el modo de señal. De este modo, cuando un fotón individual  $|\omega_i\rangle$  sea detectado en el modo anunciador (acompañante), el modo de señal será un estado con un fotón agregado.

Siguiendo un procedimiento similar al de la caracterización del estado generado en el proceso de SFWM, la matriz de densidad del proceso de generación es en general de la forma,

$$\rho^{si} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = (|0\rangle_i |\{\alpha\}\rangle_s + \kappa |\Psi_2\rangle)(\langle 0|_i |\{\alpha\}\rangle_s + \kappa^* \langle\Psi_2|). \quad (191)$$

De forma general se puede o no tener fotón agregado, simplemente variando  $\alpha$ , pues  $\alpha = 0$  es equivalente al proceso SFWM para generar parejas de fotones.

En el estado (191) aún debe post seleccionarse el estado del fotón agregado, (o de un fotón individual cuando  $\alpha = 0$ ) detectando un fotón en el modo acompañante. En general, la proyección multimodal se da de la forma

$$\hat{\Pi}_i(n) = \int d\omega_i d(\omega_i) |n_\omega\rangle_i \langle n_\omega|, \quad (192)$$

donde  $|n_\omega\rangle_i$  representa el estado de un fotón de frecuencia  $\omega$  y  $d(\omega)$  incluye las características espectrales del detector. Es importante mencionar que (192) proyecta en un único estado de número, en el que el detector es sensible en  $d(\omega)$ . Luego, el estado post seleccionado en el modo señal tendrá la estructura estándar

$$\rho_s = \text{Tr}_{idler} \left[ \frac{\hat{\Pi}_i(1) \rho^{si} \hat{\Pi}_i(1)}{\text{Tr}[\rho \hat{\Pi}_i(1)]} \right]. \quad (193)$$

Considerando el estado los estados de las ecuaciones (191) y (190) sustituidos en (193), puede inferirse que la matriz post-seleccionada una vez re-normalizada, no dependerá de las constantes  $\kappa$  ni  $\delta k$ , por lo que la matriz para la señal, hasta un factor de normalización es

$$\tilde{\rho}_s = \int d\omega'_s d\omega''_s d\omega'_i d\omega''_i F(\omega'_s, \omega'_i) F^*(\omega''_s, \omega''_i) d(\omega'_i) d^*(\omega''_i) \times \hat{a}^\dagger(\omega'_s) |\{\alpha\}\rangle \langle\{\alpha\}| \hat{a}(\omega''_s) \delta(\omega'_i - \omega''_i), \quad (194)$$

la función delta en (194) surge de que el proyector aplicado en (193) debe cumplir con que los estados de Fock son los mismos para el proyector aplicado en la izquierda y en la derecha, es decir, que si el sistema es medido en un estado  $n_\omega$ , su estado final es  $n_\omega$ . Para simplificar las siguientes expresiones se escribe de forma compacta el integrando de (194) como

$$\mathcal{G}(\omega'_s, \omega''_s) = \int d\omega_i F(\omega'_s, \omega_i) F^{*}(\omega''_s, \omega_i) |d(\omega_i)|^2, \quad (195)$$

con lo que la matriz de densidad post seleccionada queda como

$$\tilde{\rho}_s = \int d\omega'_s d\omega''_s \mathcal{G}(\omega'_s, \omega''_s) \hat{a}^\dagger(\omega'_s) |\{\alpha\}\rangle \langle\{\alpha\}| \hat{a}(\omega''_s). \quad (196)$$

## 6.2. Selección de la fibra y anunciamiento

En esta sección, se explorarán los resultados de fidelidad esperados para una fibra comercial, en particular para mostrar el comportamiento esperado del protocolo de teleportación establecido en secciones anteriores.

Con la teoría de la sección previa se procede a seleccionar una fibra a manera de ejemplo para anunciar un fotón individual o un SPACS con el fin de emplearlo en un protocolo de teleportación. Para lograr esto, se analiza el empatamiento de fase para la generación de parejas de fotones en el proceso SFWM, es decir  $\Delta K = 0$  que establece la conservación de momento y energía. Esto es un requisito para la generación de parejas de fotones y por ende para la generación de SPACS. En secciones anteriores se mostró esta necesidad en la generación de los estados entrelazados. Cabe destacar que se busca que uno de los fotones generados se encuentre en la banda de telecomunicaciones de 1550 nm, esto debido a que se busca una integrabilidad directa con las redes de telecomunicaciones existentes en la banda que presenta menores pérdidas (Saleh y Teich, 2007).

Se considera la fibra de cristal fotónico (PCF por sus siglas en inglés) NL-3.3-890-02 con un radio del núcleo de  $r = 1,72\mu\text{m}$ , una fracción de llenado de  $f = 0,85$ , y longitud  $L = 15\text{cm}$ . En el cálculo, el bombeo se asume con un envolvente gaussiana degenerada con  $\sigma = 0,85\text{Trad/s}$  y está centrado en  $\lambda_p = 841,75\text{nm}$ . La forma espectral del bombeo se asume como  $\alpha_i(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\omega_i - \omega_i^0)^2}{\sigma^2}\right]$ , donde  $\omega_i^0$  es la frecuencia central y  $\sigma$  el ancho de banda.

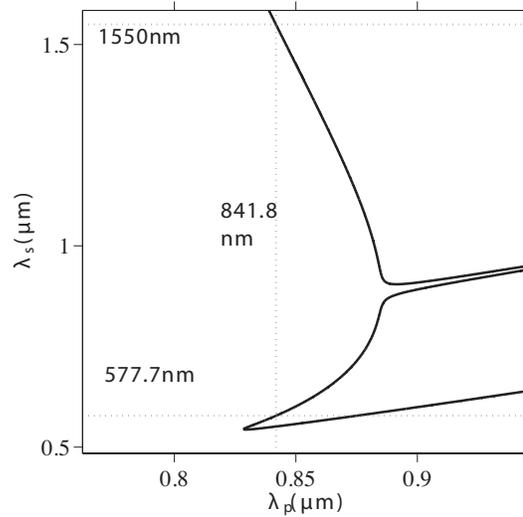


Figura 50: Contorno  $\Delta K = 0$  para la PCF con  $r = 1,72\mu m$ ,  $f = 0,85$

Es importante mencionar que todas las otras características que entran en el parámetro  $\kappa$  de la ecuación (191) no se consideran en el cálculo de la fidelidad, ya que al ser parte del parámetro de normalización resultan irrelevantes. Los parámetros que definen a  $\kappa$  resultarían importantes en el cálculo del número promedio de fotones por pulso generados por la fuente.

Primeramente, se obtienen las condiciones de empatamiento de fase para las que  $\Delta K = 0$ . En la figura 50 se muestra el contorno  $\Delta K = 0$  con relación a las longitudes de onda del bombeo  $\lambda_p$  y de los fotones de señal generados  $\lambda_s$ . Puede apreciarse que la selección de la longitud de onda central para el bombeo queda en  $\lambda_p = 841,75\text{nm}$ , lo cual producirá un fotón en  $1550\text{nm}$  y otro en  $577,7\text{nm}$ .

Una vez obtenidas las condiciones de empatamiento de fase, se calcula la función espectral de intensidad conjunta (JSI) por sus siglas inglés, dada por  $|F(\omega_s, \omega_i)|^2$ , para esto es necesario introducir la información espectral del bombeo adicional al empatamiento de fase, se considera por lo tanto que el ancho de banda del bombeo es de  $\sigma = 850 \times 10^9$  rad/s. La JSI correspondiente a la fibra seleccionada se muestra en la figura 51(a). De la JSI es evidente que los fotones generados en el proceso SFWM están altamente anti-correlacionados espectralmente. Por lo general este tipo de correlaciones resultan indeseables en las tareas de QIP (Garay-Palmett et al., 2007; Jin, Shimizu, Wakui, Benichi, y Sasaki, 2013; Jin et al., 2014; K. F. Lee et al., 2006) por lo que se recurre a filtrado espectral. Aumentar la pureza del

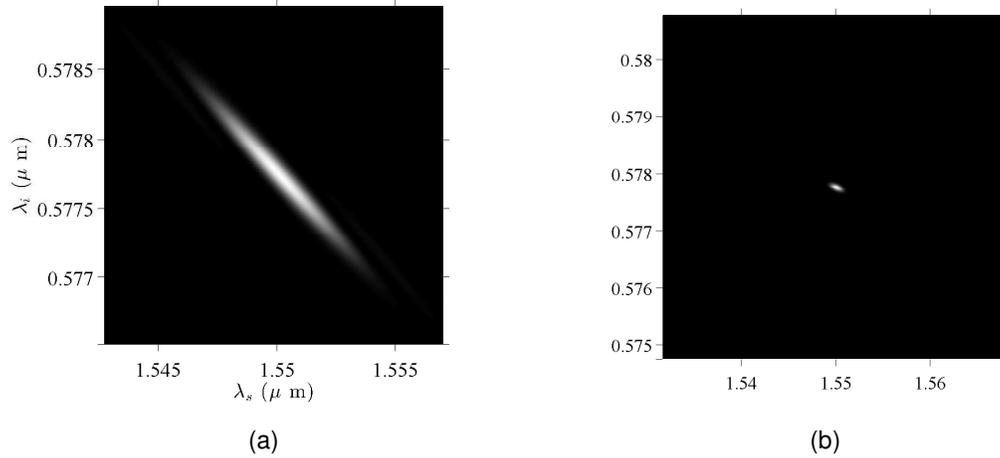


Figura 51: JSI para la PCF con  $r = 1,72\mu\text{m}$ ,  $f = 0,85$  con bombeo de  $850 \times 10^9$  rad/s de ancho de banda centrado en  $\lambda_p = 841,75\text{nm}$ . (a) sin filtrar, (b) con un filtro Gaussiano en el acompañante centrado en  $\lambda_{di} = 577,7\text{nm}$  y con  $\sigma_{di} = 130 \times 10^9$  rad/s

estado denotado por la JSI conducirá irremediabilmente a una alta reducción en la brillantez de la fuente, es decir, que el número promedio de fotones generado se verá en detrimento. Si bien, no se quiere filtrar tanto, resulta que la JSI mostrada en la figura 51(a) es muy angosta y altamente correlacionada, por lo que se procede a aplicar un filtro Gaussiano centrado en  $\lambda_{di} = 577,7\text{nm}$  y con  $\sigma_{di} = 130 \times 10^9$  rad/s, para generar la JSI mostrada en 51(b).

Se generarán dos estados recurso distintos. Uno de ellos, requiere un fotón en 1550 nm que es el que servirá para crear el estado entrelazado, mientras que para el otro se debe agregar un fotón a un estado coherente, los cuales serán denominados DPC (*displaced photon channel*) y PAC (*photon added channel*) respectivamente. Esquemáticamente este proceso se describe en la figura 52. En ambos casos es necesario anunciar la existencia ya sea del fotón individual o del estado SPACS, para ello se detecta un fotón en el modo acompañante lo que genera el estado de la ecuación (196) correspondiente tanto a DPC como a PAC. En la figura 52(a) se muestra el caso de anunciar un fotón individual y en la figura 52(b) se ha inyectado una semilla con un haz coherente identificado como  $|\{\alpha_0\}\rangle$  para generar el estado SPACS.

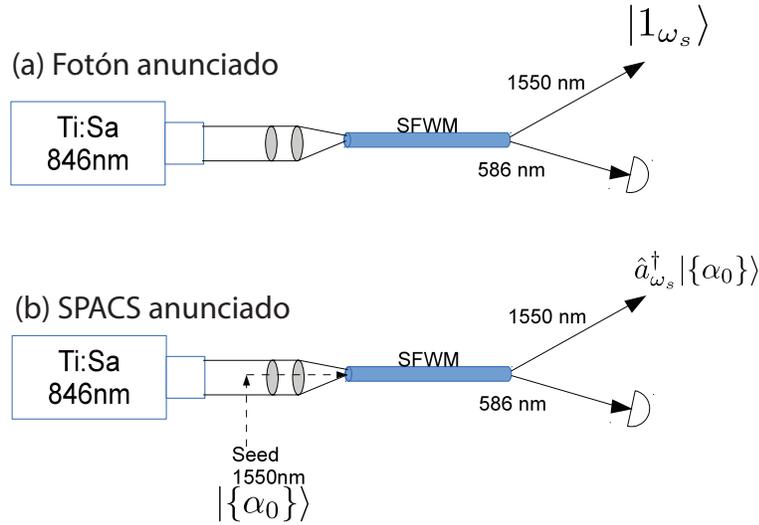


Figura 52: Experimento esquemático de la preparación anunciada de (a) un fotón anunciado, (b) un SPACS. En ambos se requiere la detección de un fotón individual centrado en 586nm como anunciador.

### 6.3. Generación del recurso entrelazado

La creación del estado entrelazado es análoga al caso monocromático. Se lleva a cabo utilizando un divisor de haz en el que el SPACS se mezcla con el vacío para formar el canal PAC y el fotón individual se mezcla con un estado coherente para formar el canal DPC. Ambos canales se encuentran englobados en la ecuación (197). Esto se muestra en la figura 53, en las figuras 53(a)-(b) se muestra la preparación del estado compartido entrelazado DPC y PAC respectivamente. La únicas diferencias con el esquema monocromático de capítulos anteriores estriban en que  $|\{\alpha_0\}\rangle$  representa un estado coherente con un ancho de banda determinado y  $|1_{\omega_s}\rangle$  representa el estado de un fotón generado en por SFWM de la ecuación (196) con  $\alpha = 0$ , del mismo modo, el estado  $\hat{a}_{\omega_s}^\dagger |\{\alpha_0\}\rangle$  representa el SPACS de la ecuación (196).

Matemáticamente esto resulta en el estado entrelazado posterior al divisor de haz de la forma  $\tilde{\rho}_{pd(pa)} = \hat{U}_{BS} \tilde{\rho}_s \hat{U}_{BS}^\dagger$  siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{pd(pa)} = & \int d\omega'_s d\omega''_s \mathcal{G}(\omega'_s, \omega''_s) [\hat{a}^\dagger(\omega'_s) \mp \hat{b}^\dagger(\omega'_s)] \left| \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right\rangle \left| \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right\rangle \\ & \times \left\langle \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right| \left\langle \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right| [\hat{a}(\omega''_s) \mp \hat{b}(\omega''_s)], \end{aligned} \quad (197)$$

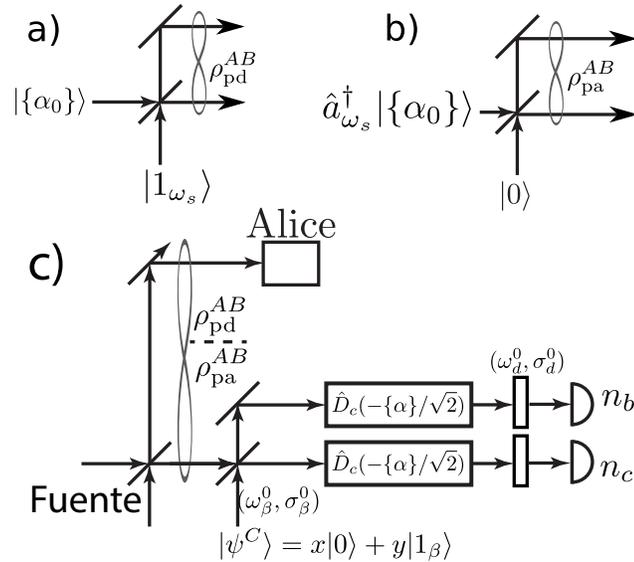


Figura 53: Generación del estado entrelazado y teleportación con los estados obtenidos en la fibra. Generación del estado entrelazado (a) DPC, (b) PAC. (c) Esquema de teleportación simplificado, la fuente es uno de los dos estados entrelazados (DPC o PAC) y el estado a teleportar es el qubit de la ecuación (198), con detección de fotones individuales en la base desplazada.

donde se ha utilizado  $\hat{U}_{BS}(\theta) = e^{i\theta(\hat{a}\hat{b}^\dagger - \hat{b}\hat{a}^\dagger)}$ , con  $\theta = \pi/4$ . Los estados  $\left| \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right\rangle$  son resultado del efecto del divisor de haz sobre un estado coherente. Para aclarar esto, sea  $|\{\alpha\}\rangle = e^{\hat{a}^\dagger \alpha} |0\rangle$  un estado coherente en la entrada en la entrada  $\hat{a}$  del divisor de haz y el vacío  $|0\rangle$  en el modo  $\hat{b}$ . El estado conjunto es entonces  $|\psi\rangle_{conj} = |\{\alpha\}\rangle_b \times |0\rangle_c$  y considerando que la transformación del BS es  $\hat{b} \rightarrow \frac{\hat{b} + \hat{c}}{\sqrt{2}}$ ,  $\hat{c} \rightarrow \frac{\hat{b} - \hat{c}}{\sqrt{2}}$ , con lo que se obtendría  $\hat{U}_{bc}(\pi/4) |\psi\rangle_{conj} = \left| \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right\rangle_b \left| \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right\rangle_c$ , donde  $\hat{U}_{bc}(\pi/4)$  representa en BS 50/50. La analogía exacta con el caso monomodal se obtiene utilizando los operadores de creación de paquetes fotónicos  $\hat{a}_\xi^\dagger = \int d\omega \xi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega)$ , por lo que el estado coherente de salida de un divisor de haz tiene las mismas propiedades espectrales que el de entrada. En el texto se utiliza también la notación  $|1_\beta\rangle = \hat{a}_\beta^\dagger |0\rangle$ .

Es importante notar que la ecuación (197) es la generalización de la (122) del capítulo 4, para un estado generado mediante fotones anunciados.

## 6.4. Protocolo de teleportación

A partir de la generación del estado entrelazado compartido entre Alice y Bob resulta útil aplicar el resto del protocolo de teleportación para probar las propiedades no clásicas de la superposición contenida en (197). La aplicación del protocolo de teleportación resulta más simple que la caracterización de la no clasicidad de las superposiciones debido a la naturaleza continua de los estados. Se ha probado que para realizar teleportación cuántica con fidelidad alta se requiere un estado recurso entrelazado ((Bennett et al., 1993)), por lo que obtener altas fidelidades en el protocolo propuesto permitirá mostrar que el estado recurso (197) es un estado entrelazado.

El protocolo se ilustra en la figura 53 (c). El cual consta de lo siguiente:

- Alice y Bob comparte el estado entrelazado  $\rho_{pd(pa)}$  que se construyó con el anunciamiento y el BS.
- Bob tiene el qubit a teleportar  $|\psi^C\rangle = x|0\rangle + y\hat{c}_\beta^\dagger|0\rangle$  mostrado en la ecuación (198) y controla sus características espectrales (frecuencia central  $\lambda_\beta^0$  y ancho de banda  $\sigma_\beta$ ) con una distribución espectral  $\beta(\omega)$  Gaussiana.
- Bob mezcla el qubit a teleportar con su parte del estado compartido a través de un BS 50/50 obteniendo un estado tripartito.
- Bob realiza una medición en la base de número desplazada en la que puede distinguir el número de fotones obtenido. Se asume que éstos se pueden realizar de manera ideal, lo que resulta análogo a la propuesta de M. G. A. Paris (M. G. a. Paris, 1996) utilizando un oscilador local con las características espectrales deseadas.
- Bob puede obtener diferentes mediciones en número de fotones pero se restringe únicamente a obtener un fotón en un detector y cero en el otro. Se considera que la detección de los fotones individuales sólo responde a cierto rango espectral modelado como una función gaussiana centrada en  $\omega_d^0$  con varianza  $\sigma_d$ , por lo que las características espectrales del desplazamiento son secundarias, siempre y cuando sean de ancho mayor que

Cuadro 4: Protocolo de teleportación del estado  $|\psi^C\rangle = x|0\rangle + y|1_\beta\rangle$  utilizando un canal DPC y PAC obtenido mediante SFWM

Canal	$n_c$	$n_d$	Estado de Alice
DPC	0	1	$ \psi^A\rangle = -x 0\rangle - y 1_\beta\rangle$
DPC	1	0	$ \psi^A\rangle = -x 0\rangle + y 1_\beta\rangle$ .
PAC	0	1	$ \tilde{\psi}^A\rangle = (x - \sqrt{2}\alpha^*y) 0\rangle - y 1_\beta\rangle$ .
PAC	1	0	$ \tilde{\psi}^A\rangle = (x + \sqrt{2}\alpha^*y) 0\rangle + y 1_\beta\rangle$ .

el de la detección.

A manera de referencia se muestra la tabla del estado que obtendría Alice si el proceso fuera ideal y se utilizaran sólo estados puros. El estado resultante posterior a la proyección  $|10\rangle_{bc}$  o  $|01\rangle_{bc}$  produce el estado del lado de Alice equivalente hasta una transformación unitaria como se muestra en la tabla 4.

Por consistencia, el estado a teleportar tiene la estructura general

$$|\psi^C\rangle = x|\beta\rangle + y\hat{D}(\{\beta\})\hat{c}_\beta^\dagger|0\rangle, \quad (198)$$

como se introdujo en la ecuación (147), de la sección 5.2.

Posteriormente, el estado a teleportar (198) es mezclado en un divisor de haz con el estado compartido (197)

$$\begin{aligned} \hat{U}_{BS}\rho^{AB} \otimes \rho^C \hat{U}_{BS}^\dagger &= \frac{1}{2} \int d\omega_s'' d\omega_s' d\omega_i \mathcal{G}(\omega_s', \omega_s'', \omega_i) \left[ \hat{a}^\dagger(\omega_s') \mp \frac{\hat{b}^\dagger(\omega_s') + \hat{c}^\dagger(\omega_s')}{2} \right] \hat{D}_b \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \\ &\times \hat{D}_c \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \left( x + y \hat{D}_b \left( \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right\} \right) \hat{D}_c \left( \left\{ \frac{-\beta}{\sqrt{2}} \right\} \right) \right) \left[ \frac{\hat{b}_\beta^\dagger - \hat{c}_\beta^\dagger}{\sqrt{2}} \right] |\{\alpha\}\rangle |00\rangle \langle 00| \langle \{\alpha\}| \\ &\left[ \frac{\hat{b}_\beta - \hat{c}_\beta}{\sqrt{2}} \right] \left( x^* + y^* \hat{D}_b^\dagger \left( \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right\} \right) \hat{D}_c^\dagger \left( \left\{ \frac{-\beta}{\sqrt{2}} \right\} \right) \right) \hat{D}_c^\dagger \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \hat{D}_b^\dagger \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \\ &\times \left[ \hat{a}(\omega_s'') \mp \frac{\hat{b}(\omega_s'') + \hat{c}(\omega_s'')}{2} \right]. \end{aligned} \quad (199)$$

El caso más sencillo para teleportar carece de un desplazamiento, por lo que  $\hat{D}(\{\beta\}) = 1$ , pero el fotón creado si será un paquete fotónico con un ancho de banda determinado, por claridad se reescribe (199) con esta consideración

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{BS}\rho^{AB} \otimes \rho^C \hat{U}_{BS}^\dagger &= \frac{N}{2} \int d\omega'_s d\omega''_s d\omega_i \mathcal{G}(\omega'_s, \omega''_s, \omega_i) \left[ \hat{a}^\dagger(\omega'_s) \mp \frac{\hat{b}^\dagger(\omega'_s) + \hat{c}^\dagger(\omega'_s)}{2} \right] \hat{D}_b \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \\
&\times \hat{D}_c \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) (x + y) \left[ \frac{\hat{b}_\beta^\dagger - \hat{c}_\beta^\dagger}{\sqrt{2}} \right] |\{\alpha\}\rangle |00\rangle \langle 00| \langle \{\alpha\}| \\
&\left[ \frac{\hat{b}_\beta - \hat{c}_\beta}{\sqrt{2}} \right] (x^* + y^*) \hat{D}_c^\dagger \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \hat{D}_b^\dagger \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \\
&\times \left[ \hat{a}(\omega''_s) \mp \frac{\hat{b}(\omega''_s) + \hat{c}(\omega''_s)}{2} \right].
\end{aligned} \tag{200}$$

Es importante aclarar que en las ecuaciones (199) y (200), la integración en  $d\omega_i$  es producto del anuncio con el fotón acompañante antes de generar el estado entrelazado. Por lo que en principio la integral en  $d\omega_i$  se puede realizar y tener únicamente una integral en  $d\omega'_s$  y  $d\omega''_s$ , con lo que las integrales de (199) y (200) pueden verse en la forma

$$\hat{U}_{BS}\rho^{AB} \otimes \rho^C \hat{U}_{BS}^\dagger = \sum_{i,j,k,l,m,n} \int d\omega'_s d\omega''_s c_{ijk} c_{lmn}^* |\alpha\rangle |j_{\omega'_s}\rangle |k_{\omega'_s}\rangle \langle l_{\omega''_s}| \langle m_{\omega''_s}| \langle \alpha|, \tag{201}$$

que es la forma esperada de una matriz de densidad con coeficientes de expansión  $c_{ijk}(c_{lmn}^*)$ , por lo que la complejidad aparente de las dos ecuaciones anteriores es meramente operativa.

Para la detección de fotones individuales primero se realiza el desplazamiento complementario en los modos  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$ , que por simplicidad es considerado con las mismas características espectrales que el contenido en (200). El efecto de discrepancias espectrales se reserva para la detección de los fotones individuales.

Nos centramos en el estado proyectado  $\mathbb{1}_a \otimes \langle 1_\beta 0 | \rho \mathbb{1}_a \otimes |1_\beta 0\rangle$ . Donde  $\beta$  hace referencia a las propiedades espectrales del fotón detectado  $\hat{b}_\beta^\dagger = \int d\omega \beta(\omega) \hat{b}^\dagger(\omega) = |1_\beta\rangle$ . De (200) puede escribirse el estado conjunto como  $\rho^{ABC} = \int d\omega'_s d\omega''_s d\omega_i |\psi(\omega'_s, \omega_i)\rangle \langle \psi(\omega''_s, \omega_i)|$ , por lo que el estado post-seleccionado de Alice es de la forma  $\rho^A = N \text{Tr}_{bc}[\langle 1_\beta 0 | \rho^{ABC} |1_\beta 0\rangle] = \int \int d\omega'_s d\omega''_s |\psi^A(\omega'_s)\rangle \langle \psi^A(\omega''_s)|$ , con  $|\psi^A(\omega'_s)\rangle = \int d\omega'_s \mathcal{G}(\omega'_s) \{x |\{\alpha_0\}\rangle + y \beta(\omega'_s) \hat{a}(\omega'_s)^\dagger |\{\alpha_0\}\rangle\}$ .

Con esto obtenemos la matriz post-seleccionada del lado de Alice de la forma

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1}_a \otimes \langle 1_\beta 0 | \hat{D}_b^\dagger \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \hat{D}_c^\dagger \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \rho \hat{D}_b \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \hat{D}_c \left( \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\} \right) \mathbb{1}_a \otimes |1_\beta 0\rangle \\
&= \frac{N}{2} \hat{D}(\{\alpha\})_a \int d\omega'_s d\omega''_s d\omega_i \mathcal{G}(\omega'_s, \omega''_s, \omega_i) \left[ \frac{y}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger(\omega'_s) \int \omega_b d^*(\omega_b) \beta(\omega_b) \right. \\
&\quad \mp \frac{x}{\sqrt{2}} d^*(\omega'_s) + (1 \mp 1) \int d\omega_b d^*(\omega_b) \alpha(\omega_b) \left. \right] |0\rangle_a \langle 0| \left[ \frac{y^*}{\sqrt{2}} \hat{a}(\omega''_s) \int \omega_b d(\omega_b) \beta^*(\omega_b) \right. \\
&\quad \mp \frac{x^*}{\sqrt{2}} d(\omega'_s) + (1 \mp 1) \int d\omega_b d(\omega_b) \alpha^*(\omega_b) \left. \right] \hat{D}^\dagger(\{\alpha\})_a.
\end{aligned} \tag{202}$$

Es evidente de la expresión (202) que esta teleportación es equivalente a teleportar en una base desplazada por  $\hat{D}(\{\alpha\})_a$ . Este desplazamiento no es tomado en cuenta en el cálculo de la fidelidad, ya que se asume que el estado final se busca con dicho desplazamiento. En cualquier caso, también puede quitarse su efecto operacional y experimentalmente utilizando un BS y un láser adecuado. Bajo estas consideraciones, la fidelidad del estado teleportado se obtiene como sigue

$$\mathcal{F} = \text{Tr}[|\psi^A\rangle \langle \psi^A| |\psi^C\rangle \langle \psi^C|], \tag{203a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{N}{2} \int d\omega'_s d\omega_i \mathcal{G}(\omega'_s, \omega_i) \left\{ \left[ \frac{|y|^4}{2} \beta^*(\omega'_s) \beta(\omega''_s) \int d\omega_b |d(\omega_b)|^2 |\beta(\omega_b)|^2 \mp \frac{|yx^*|^2}{2} \beta^*(\omega'_s) \beta(\omega''_s) |d(\omega''_s)|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{|y|^2 y^* x (1 \mp 1)}{2} \beta^*(\omega'_s) \alpha(\omega''_s) \int d\omega_b |d(\omega_b)|^2 |\beta(\omega_b)|^2 \mp \frac{|y^* x|^2}{2} \beta^*(\omega'_s) \beta(\omega''_s) |d(\omega''_s)|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{|x|^4}{2} |d(\omega'_s)| \delta(\omega'_s - \omega''_s) \mp \frac{|x|^2 x y^* (1 \mp 1)}{2} \alpha(\omega''_s) \beta(\omega'_s) |d(\omega''_s)|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mp \frac{|y|^2 x^* y (1 \mp 1)}{2} \alpha^*(\omega'_s) \beta(\omega''_s) \int d\omega_b |d(\omega_b)|^2 |\beta(\omega_b)|^2 \mp \frac{yx^* |x|^2 (1 \mp 1)}{2} \alpha^*(\omega'_s) |d(\omega''_s)| \beta(\omega''_s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |x|^2 |y|^2 \alpha^*(\omega'_s) \alpha(\omega''_s) \int d\omega_b |d(\omega_b)|^2 |\beta(\omega_b)|^2 \right. \right.
\end{aligned} \tag{203b}$$

En la ecuación (203a) se ha utilizado la escritura en el formato de la matriz de densidad por consistencia con capítulos previos y por la sencillez ante la posible inclusión de otros efectos (como ruido) no considerados en este trabajo para el estado continuo.

#### 6.4.1. Fidelidades de teleportación

Las fidelidades de teleportación condicionadas a la detección  $n_b = 0, n_c = 1$  o viceversa se obtienen en la presente subsección y son las mostradas en la ecuación (203b). Sin embargo,

Cuadro 5: Parámetros de anuncioamiento, fotón a teleportar y detección para calcular la fidelidad de teleportación

Proceso correspondiente	Parámetro	Significado
Anuncioamiento de un fotón o SPACS	$\omega_{di}^0$	Frecuencia central de anuncioamiento
	$\sigma_{di}$	Ancho de banda de anuncioamiento
Fotón a teleportar	$\omega_{\beta}^0$	Frecuencia central del fotón a teleportar
	$\sigma_{\beta}$	Ancho de banda del fotón a teleportar
Filtro de detección	$\omega_d^0$	Frecuencia de respuesta máxima del filtro
	$\sigma_d$	Ancho de banda del filtro
Estado coherente	$\alpha_0$	Número máximo de fotones
	$\omega_{\alpha}^0$	Frecuencia central del estado coherente
	$\sigma_{\alpha}$	Ancho de banda del estado coherente

se tienen múltiples parámetros a explorar en el esquema propuesto en la figura 53, los cuales para mayor claridad se describen en la tabla 5. Es importante hacer la aclaración que para el cálculo de la fidelidad se parametriza el qubit como sigue

$$|\psi^C\rangle = x|0\rangle + y\hat{c}_{\beta}^{\dagger}|0\rangle = \text{sen}(\nu)|0\rangle + \text{cos}(\nu)\hat{c}_{\beta}^{\dagger}|0\rangle. \quad (204)$$

### Canal DPC. Superposición negativa

Se fijan las características de anuncioamiento en  $\lambda_{di} = 577,7\text{nm}$  y un ancho de banda de  $\sigma_{di} = 0,13 \times 10^{12}$  rad/s, lo que si bien es bastante angosto, se debe a que la JSA presenta una alta correlación espectral. La longitud de onda central del detector y su ancho de banda son también parámetros fijos  $\lambda_d = 1550\text{nm}$  y  $\sigma_d = 0,13 \times 10^{12}$  rad/s, resulta necesario fijar las características del detector en la misma medida que las del anuncioamiento. Los parámetros variables son: la longitud de onda central del fotón a teleportar y su ancho de banda  $\{\lambda_{\beta}, \sigma_{\beta}\}$

En la figura 54 se muestra la fidelidad de teleportación respecto a la longitud de onda central del fotón del qubit a teleportar  $\lambda_{\beta}^0$  y su ancho de banda  $\sigma_{\beta}$ , para diferentes valores de  $\nu$ , es decir, fijo un estado en particular a teleportar. Los valores mostrados en la figuras

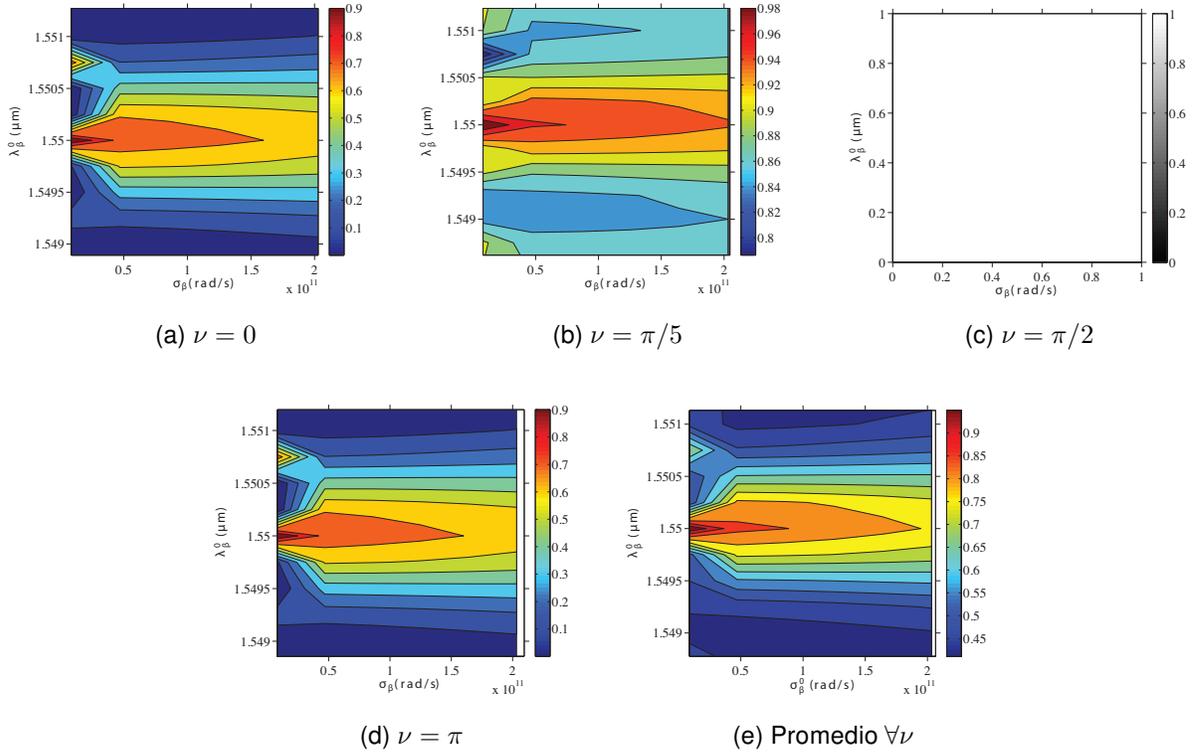


Figura 54: Fidelidad de teleportación condicionada a la post-selección de la medición conjunta para el canal DPC. De (a)-(d) para un estado  $\nu$  específico. Los valores  $\nu$  son (a)  $\nu = 0$ , (b)  $\nu = \pi/5$ , (c)  $\nu = \pi/2$ , (d)  $\nu = \pi$ . En (e) se muestra la fidelidad promedio para todos los valores de  $\nu$ .

54(a)-(d) corresponden a  $\nu = \{0, \pi/5, \pi/2, \pi\}$  respectivamente. Finalmente en la figura 54(e) se muestra la fidelidad promedio para los diferentes valores que puede tomar el qubit.

En general los máximos de la fidelidad se encuentran cuando la longitud central del fotón a teleportar coincide con la longitud central del detector  $\lambda_\beta^0 = \lambda_d^0$  y al alejarse de este valor, la fidelidad decae. Aunque no se ha incluido la influencia del anuncio en la fidelidad, es importante que el estado sea lo más factorizable posible, y las características del anuncio seleccionadas son tales que permiten en promedio una fidelidad superior a  $\mathcal{F} > 0,7$  como se aprecia en las distintas figuras. Con el fin de analizar la influencia de la longitud de onda central del qubit a teleportar respecto a la del detector, se consideran tres casos distintos para  $\lambda_\beta^0$ . Estos casos se muestran en la figura 55 en donde se ha graficado la fidelidad como función del ancho de banda del qubit  $\sigma_\beta$  y el valor de  $\nu$  para los valores de  $\lambda_\beta^0$  (a) 1547nm,

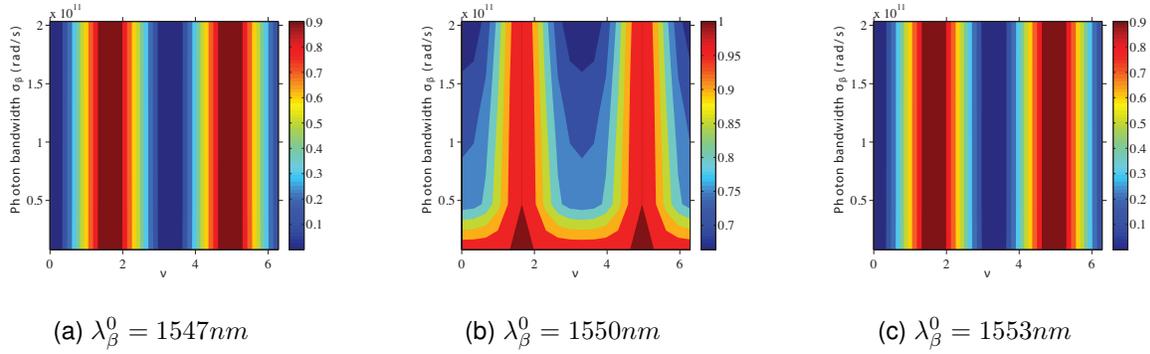


Figura 55: Fidelidad de teleportación de un estado  $\nu$  específico condicionada a la detección de  $|10\rangle_{bc}$  sin fuentes de ruido. Se muestran las fidelidades para cada valor del qubit dependiente de  $\nu$  y el ancho de banda del fotón a teleportar.

(b) 1550nm, (c) 1553 nm. De las tres figuras resulta evidente que el mejor caso ocurre para  $\lambda_\beta^0 = \lambda_d^0$  pues permite fidelidades altas para un rango mayor de  $\nu$  y fidelidades  $\mathcal{F} > 0,5$  para un valor específico de ancho de banda. Desviaciones de  $\pm 3nm$  como las mostradas en 55(a) y (c) indican que es posible realizar teleportación pero es más dependiente de los valores del qubit. No obstante, se pueden alcanzar fidelidades altas con un ancho de banda adecuado.

### Canal PAC. Superposición positiva

Con el fin de establecer una comparativa en los mismos términos que en las secciones previas donde se analizó la fidelidad del caso ideal (monocromático), se analiza el efecto en la fidelidad cuando el canal utilizado es formado por la superposición positiva (PAC). De la ecuación que determina la fidelidad (203b) puede observarse que las características del estado coherente que forma parte del SPACS son de gran influencia en la fidelidad, dado que vuelven dominante la contribución del vacío en la superposición final que recibe Alice, por esta razón y por brevedad sólo se incluye el cálculo considerando que el estado coherente tiene las mismas características que el detector, es decir, tiene una envolvente espectral gaussiana. Se ha considerado para los cálculos una envolvente con módulo máximo 2 como se muestra en la ecuación (205), por lo tanto,  $\omega_\alpha^0 = \omega_d^0$  y  $\sigma_\alpha = \sigma_d$

$$\alpha(\omega_s) = \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\pi}} \exp(-(\omega_s - \omega_\alpha^0)^2 / (4\sigma_\alpha^2)). \quad (205)$$

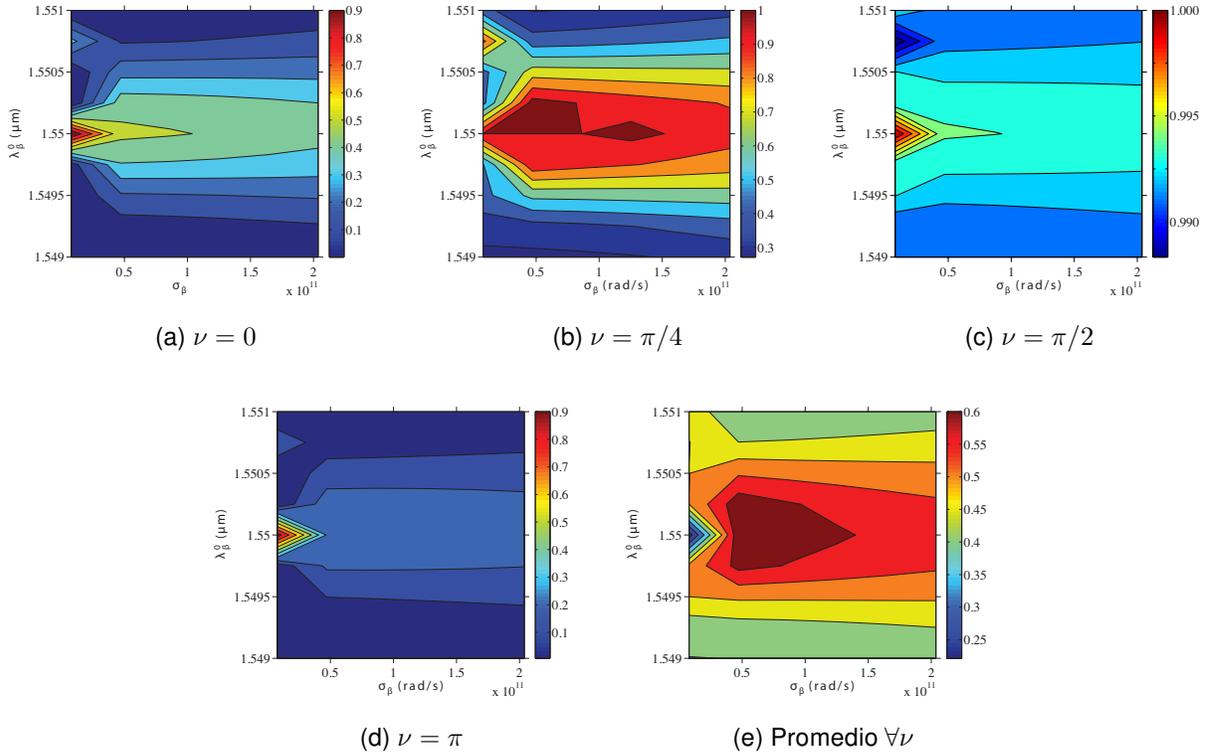


Figura 56: Fidelidad de teleportación de un estado  $\nu$  específico para el canal PAC, con  $\alpha = 2$ . Los valores  $\nu$  son (a)  $\nu = 0$ , (b)  $\nu = \pi/4$ , (c)  $\nu = \pi/2$ , (d)  $\nu = \pi/2$ . En (e) se muestra la fidelidad promedio para todos los valores de  $\nu$ .

Se calcula la fidelidad de teleportación con el resto de las condiciones iguales al caso del canal DPC, es decir,  $\lambda_d = 1550\text{nm}$ ,  $\sigma_d = 0,13 \times 10^{12} \text{ T rad/s}$ ,  $\lambda_{di} = 577,7\text{nm}$ ,  $\sigma_{di} = 0,13 \times 10^{12} \text{ T rad/s}$ . Los resultados se muestran en la figura 56. En las figuras 56(a)-(d) se muestra la fidelidad para valores del qubit con  $\nu = \{0, \pi/4, \pi/2, \pi\}$  fija, respecto a la longitud de onda central y el ancho de banda del qubit a teleportar. Mientras que en 56(e) se muestra la fidelidad promedio para todos los valores del qubit. Se puede observar de las figuras 56(a)-(d) que los máximos de fidelidad ocurren en  $\lambda_\beta^0 = 1550\text{nm}$  y para anchos de banda alrededor del ancho de banda del detector; no obstante, los máximos alcanzados de la fidelidad son bastante bajos al compararlos con el canal DPC. Se puede ver reflejado en la figura 56(e) que en promedio la teleportación tiene fidelidades muy bajas, mientras que en la región oscura se alcanza  $\mathcal{F} \approx 0,6$ .

Igual que para el caso DPC, se consideran tres casos distintos con  $\lambda_\beta^0$  distinta con el fin

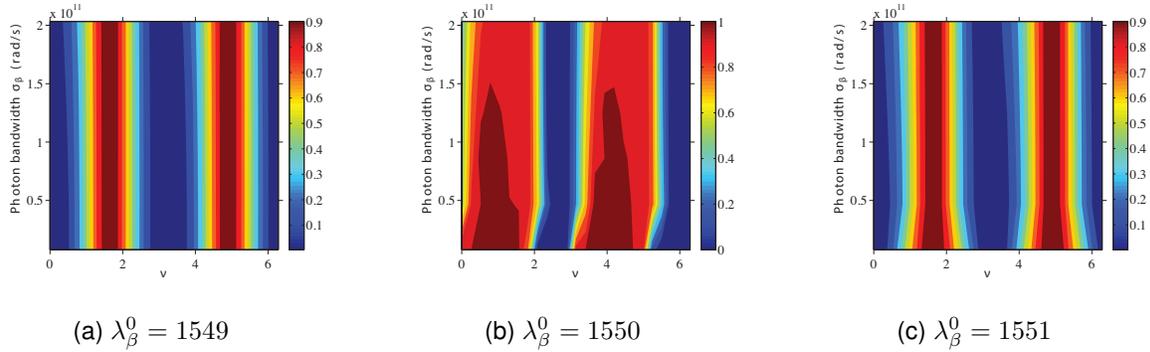


Figura 57: Fidelidad de teleportación dependiente de  $\nu$  para el canal PAC, con  $\alpha = 2$ . Los valores  $\nu$  son (a)  $\nu = 0$ , (b)  $\nu = \pi/4$ , (c)  $\nu = \pi/2$

de analizar la influencia de la longitud de onda central del qubit respecto a la del detector que es fija. Estos casos se muestran en la figura 57 en donde se ha graficado la fidelidad como función del ancho de banda del qubit  $\sigma_\beta$  y el valor de  $\nu$  para los valores de  $\lambda_\beta^0$  (a) 1545nm, (b) 1550nm, (c) 1555 nm. De las tres figuras resulta evidente que el mejor caso ocurre para  $\lambda_\beta^0 = \lambda_d^0$  [mostrado en la figura (b)]; sin embargo, a diferencia del canal DPC, no existe condición con las restricciones actuales que permita fidelidad alta para todos los valores qubit  $\nu$ , sino que la mejora únicamente se ve reflejada en un ensanchamiento en las regiones que tienen fidelidades altas respecto a  $\nu$ .

## 6.5. Conclusiones

En este capítulo se estudió la viabilidad de realizar teleportación con las superposiciones propuestas en capítulos anteriores formadas por SPACS. Ahora consideramos condiciones no ideales, entendidas por estados no monocromáticos. Primeramente se abordó la generación de estados con fotones agregados en fibras ópticas (SPACS por sus siglas en inglés), para lo que se demostró que de manera análoga al proceso SPDC, la generación de SPACS anunciada es factible.

Una vez obtenida la expresión que involucra el SPACS se generaron los estados entrelazados compartidos por Alice y Bob. En la parte correspondiente a Bob se mezcló mediante un divisor de haz el estado a teleportar para realizar la medición conjunta en la base de fotones

individuales desplazados. En esta sección es importante aclarar que tanto el qubit a teleportar como los detectores fueron considerados con características espectrales independientes.

Se estudió la fidelidad de teleportación de un estado de qubit arbitrario en la base fotón individual-vacío y se establecieron las condiciones para la post-selección de un estado teleportado. La fidelidad se estudió bajo las consideraciones siguientes: *primero* diferentes valores  $\nu$  del qubit específicos a teleportar contra su ancho de banda y longitud de onda central, cuando las características espectrales del detector estuvieron fijas, *segundo* bajo las mismas consideraciones anteriores se obtuvo la fidelidad promedio como función de las características espectrales de qubit, *tercero* fijas las características espectrales de los detectores se estudió la fidelidad para 3 configuraciones de longitud de onda central del qubit fijas contra su ancho de banda y los valores  $\nu$  del qubit. La fidelidad fue caracterizada para las superposiciones DPC y PAC. Se encontró que el canal formado por la superposición negativa (DPC) permite realizar teleportación siempre y cuando las características espectrales del estado a teleportar sean cercanas a las de detección. Por otro lado, la superposición positiva (PAC) presentó resultados de fidelidad de teleportación muy bajos.

En general se hizo un análisis considerando que todos los estados involucrados tienen formas espectrales distintas, las que finalmente para simplificar los resultados fueron consideradas gaussianas. En este estudio faltó considerar la generación del qubit a teleportar y fuentes de ruido. Ninguna de estas fueron incluidas por brevedad, pero se pueden ver como trabajo a futuro. Debido también a que el principal objetivo fue probar el concepto de la teleportación con estados que se pueden obtener en el laboratorio utilizando la mezcla de cuatro ondas.

## Capítulo 7.

---

### Conclusiones

En el presente trabajo de investigación se han estudiado teóricamente los estados coherentes con fotones agregados (PACS) y superposiciones formadas por ellos de la forma  $|\psi\rangle = \mathcal{N}(u\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b + v\hat{b}^{\dagger n}|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b)$  para procesamiento de información cuántica. La motivación estuvo fundamentada en que los estados propuestos presentan propiedades híbridas entre estados de fotones individuales y estados coherentes de muchos fotones, lo cual establece a su vez una correlación entre estados cuánticos y clásicos. Primeramente se estudió la superposición general y las condiciones que generen estados con correlación en estados puros y mixtos. Posteriormente se seleccionó a las dos superposiciones que experimentalmente son más factibles de realizarse, para las que se propusieron protocolos de teleportación cuántica *ad hoc*. Finalmente se estudiaron las implicaciones de utilizar estados procedente de un experimento que son en general no puros para generar estados entrelazados y luego aplicarlos como recurso en teleportación. Para los protocolos de teleportación, las mediciones proyectivas conjuntas fueron estudiadas en dos ámbitos distintos detección de fotones individuales y detección homodina, la primera debido a que simplifica bastante los resultados y la segunda como una propuesta para estimar la no clasicidad en el laboratorio.

Las principales conclusiones y contribuciones de este trabajo se enumeran a continuación:

- Se presentó un estudio sobre las propiedades de entrelazamiento de una superposición arbitraria de  $n, m$  fotones agregados a un estado coherente, para el que se obtuvieron sus condiciones generales de máximo entrelazamiento, la cual fue estudiada a través de la concurrencia. Se encontró que la diferencia  $|m - n| \gg 1$  permite generar estados de entrelazamiento máximo. Se encontró que si  $u = -v = 1/\sqrt{2}$  se obtienen estados de entrelazamiento máximo siempre que  $m - n \neq 0$ .
- A partir de la superposición máximamente entrelazada de los PACS se propuso su aplicación como recurso para realizar teleportación cuántica de un estado compuesto también por la superposición de PACS basada en detecciones de fotones individuales. Esto demostró que es posible realizar teleportación con fidelidades máximas cuando tanto el

estado a teleportar como el estado recurso tienen la misma cantidad de fotones agregados.

- De la superposición general se seleccionaron las experimentalmente más factibles y con máximo entrelazamiento que son  $|\psi\rangle_{dp(pa)} = \mathcal{N}(\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b \mp \hat{b}^\dagger |\alpha\rangle_a |\alpha\rangle_b)$  que forman los canales denominados  $dp$  y  $pa$  cuya diferencia es el signo de la superposición, de los que el entrelazamiento de la superposición negativa no depende de  $\alpha$ . Estos estados fueron estudiados como canales de comunicación cuyas propiedades no clásicas pueden explotarse para realizar procesamiento de información. Por lo que primeramente se estudiaron sus propiedades no clásicas basadas en la discordia cuántica.
- Se propuso un estimador de la no clasicidad basada en detecciones homodinas, con la que recuperando la estadística de la detección se puede obtener una cota inferior del QD (*quantum discord*) para las superposiciones estudiadas, pero que fácilmente es aplicable a otros estados de variable continua y discreta.
- Se calculó el QD de los estados  $|\psi\rangle_{dp(pa)}$  bajo la influencia de ruido por esparcimiento y fluctuaciones de fase. El esparcimiento fue modelado como la probabilidad de perder fotones mediante el efecto de un divisor de haz y la fluctuación de fase relativa mediante una variación aleatoria pesada con una distribución Gaussiana. Se obtuvieron expresiones analíticas para el caso  $dp$  (superposición negativa) cuando únicamente hay ruido por esparcimiento, así como la relación con la varianza de cuadratura producto de una medición homodina. Se encontró que los estados con la superposición negativa son más robustos ante fluctuaciones grandes de fase cuando  $\alpha \neq 0$  en comparación con los estados formados por fotones individuales ( $\alpha = 0$ ).
- También se estudió la teleportación cuántica de un qubit de la forma  $|\psi^C\rangle = x|\alpha\rangle + y\hat{D}(\alpha)|1\rangle$  con los canales  $|\psi\rangle_{dp(pa)}$  como recurso compartido considerando la medición conjunta como detección de fotones resuelta en número. Se encontró que este esquema permite realizar teleportación con fidelidad  $\mathcal{F} = 1$  en el caso puro con la superposición negativa como recurso, de forma probabilística, con éxito del 50%. Por otro lado, al

incluir ruido igualmente el canal con la superposición negativa mostró una probabilidad promedio  $\overline{\mathcal{F}} \approx 0,9$  frente a esparcimientos  $\eta < 0,8$  y fluctuaciones de fase  $\sigma < \pi/4$ .

- La fidelidad de teleportación se estudió adicionalmente con detecciones homodinas como medición conjunta. Se mostró que mediante esas detecciones la teleportación probabilística es viable si el qubit a teleportar se divide en subintervalos, de modo que cada subintervalo esté definido por respectivos dominios de detección, con lo que se pueden alcanzar fidelidades  $\overline{\mathcal{F}} > 0,9$  en condiciones sin ruido para cada intervalo.
- Finalmente se estudió la teleportación cuántica en una propuesta experimental en la que los estados recurso se obtienen a partir de fotones anunciados provenientes de la mezcla de cuatro ondas en el régimen espontáneo en fibras ópticas. Para esto se demostró que el proceso de agregado de fotones es igualmente aplicable a la mezcla de cuatro ondas y es análogo al proceso paramétrico en cristales.
- Se propuso la generación del estado recurso a través de la mezcla de un fotón anunciado proveniente del proceso paramétrico en un divisor de haz, por lo que tiene características espectrales y de correlación determinadas por los parámetros del experimento. El qubit a teleportar igualmente se introduce con características espectrales definidas. Y la detección se modela mediante detecciones realistas a través de filtros espectrales. Todo esto implica que el estado anteriormente puro se vuelve una mezcla estadística en cada proceso de detección. Bajo estas condiciones se determinó que la teleportación es viable aún cuando no todos los estados sean espectralmente iguales siempre que tengan un alto traslape.
- Es importante mencionar que el análisis de la fidelidad de teleportación en el estado de un proceso anunciado es igualmente aplicable a otros estados producidos por procesos paramétricos. Cabe aclarar que la fibra utilizada en los cálculos fue empleada a manera de ejemplo por lo que los filtros requeridos resultaron relativamente angostos; sin embargo, un estado con menor correlación espectral resultará potencialmente un buen candidato si se buscan filtros de detección y anunciamiento menos angostos.

Como resultado de la investigación presentada en esta tesis, se identifican ciertos puntos que requieren mayor estudio pero que quedan más allá del alcance de la presente y se proponen como trabajo futuro lo siguiente:

- Un estudio sobre la teleportación considerando que los canales están formados por superposiciones arbitrarias de PACS en la forma  $|\psi\rangle = u |\alpha, m\rangle |\beta, n\rangle + v |\beta, n\rangle |\alpha, m\rangle$  de forma análoga a los estados presentados en el capítulo 3, preparado para teleportar estados también en la misma base de la forma  $|\psi\rangle = x |\gamma\rangle + y \hat{a}^\dagger |\gamma\rangle$ .
- Estudiar sistemáticamente el efecto del ruido en la fidelidad de teleportación considerando los canales propuestos bajo distintos esquemas de detección además del homodino.
- Una caracterización de las características no clásicas y las correlaciones de las superposiciones entrelazadas realistas utilizadas en el último capítulo formadas mediante fotones anunciados mostradas en la ecuación (197) incluyendo fuentes de ruido.

## Literatura citada

---

- Agarwal, G., y Tara, K. (1991, jan). Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state. *Phys. Rev. A*, 43(1), 492–497.
- Agrawal, G., y Agrawal, G. (2013). Chapter 10 – Four-Wave Mixing. En *Nonlinear fiber opt.* (pp. 397–456).
- Audretesch, J. (2007). *Entangled Systems. New directions in quantum physics* (Primera ed.). Germany: Wiley-VCH.
- Barnett, S. M., y Radmore, P. M. (2002). *Methods in Theoretical Quantum Optics* (C. Press, Ed.). Oxford Science Publications.
- Bartley, T. J., y Walmsley, I. A. (2015). Directly comparing entanglement-enhancing non-Gaussian operations. *New J. Phys.*, 17(2), 023038.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics, Cambridge Univ. Press*, 1, 195–200.
- Bennett, C. H., Bernstein, H. J., Popescu, S., y Schumacher, B. (1996). Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53(4), 2046–2052.
- Bennett, C. H., Brassard, G., y Crépeau, C. (1993). Teleporting an Unknown Quantum State via Dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70(13), 1895–1898.
- Bennett, C. H., y DiVincenzo, D. P. (2000). Quantum information and computation. *Nature*, 404, 247. doi: 10.1063/1.881452
- Blandino, R., Genoni, M. G., Etesse, J., Barbieri, M., Paris, M. G. a., Grangier, P., y Tualle-Brouri, R. (2012). Homodyne estimation of gaussian quantum discord. *Phys. Rev. Lett.*, 109(18), 1–5.
- Bouwmeester, D., Pan, J. W., Mattle, K., Eibi, M., Weinfurter, H., y Zeilinger, A. (1997). Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390, 575–579.
- Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear optics* (2nd ed.). Academic Press.
- Braunstein, S. L. (2005, jun). Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.*, 77(2), 513–577.
- Brecht, B., Reddy, D. V., Silberhorn, C., y Raymer, M. G. (2015). Photon temporal modes: A complete framework for quantum information science. *Phys. Rev. X*, 5(4).
- Brock, D. (2006). *Understanding Moore's Law: Four Decades of Innovation*. Philadelphia,

Pennsylvania: Chemical Heritage Foundation.

- Brodutch, A., Modi, K. (2012). Criteria for measures of quantum correlations. *Quantum Inf. Comput.*, 12, 0721–0742.
- Campos, R., Saleh, B., y Teich, M. (1989, aug). Quantum-mechanical lossless beam splitter: SU(2) symmetry and photon statistics. *Phys. Rev. A*, 40(3), 1371–1384. doi: 10.1103/PhysRevA.40.1371
- Caves, C. M. (1981, apr). Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. D*, 23(8), 1693–1708.
- Chen, J., Li, X., y Kumar, P. (2005, sep). Two-photon-state generation via four-wave mixing in optical fibers. *Phys. Rev. A*, 72(3), 033801.
- Chen, Z. B., Hou, G., y Zhang, Y. D. (2002). Quantum nonlocality and applications in quantum-information processing of hybrid entangled states. *Phys. Rev. A*, 65, 1–5,32317.
- Chiorescu, I., Bertet, P., Semba, K., Nakamura, Y., Harmans, C. J. P. M., y Mooij, J. E. (2004, sep). Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator. *Nature*, 431(7005), 159–62.
- Christ, A., Fedrizzi, A., Hübner, H., Jennewein, T., y Silberhorn, C. (2013). Chapter 11 – Parametric Down-Conversion. En *Exp. methods phys. sci.* (Vol. 45, pp. 351–410).
- Chuan, W., Wan-Ying, W., Qing, A., y Gui-Lu, L. (2010). Deterministic Quantum Key Distribution with Pulsed Homodyne Detection. *Commun. Theor. Phys.*, 53(1), 67–70.
- Cirac, J. I., y Zoller, P. (1995, may). Quantum Computations with Cold Trapped Ions. *Phys. Rev. Lett.*, 74(20), 4091–4094.
- Clark, A. S., Fulconis, J., Rarity, J. G., Wadsworth, W. J., y O'Brien, J. L. (2009, mar). All-optical-fiber polarization-based quantum logic gate. *Phys. Rev. A*, 79(3), 30303.
- Cochrane, P. T., Milburn, G. J., y Munro, W. J. (1999, apr). Macroscopically distinct quantum-superposition states as a bosonic code for amplitude damping. *Phys. Rev. A*, 59(4), 2631–2634.
- Collett, M., Loudon, R., y Gardiner, C. (1987). Quantum Theory of Optical Homodyne and Heterodyne Detection. *J. Mod. Opt.*, 34(6-7), 881–902.
- Cory, D. G., Price, M. D., y Havel, T. F. (1998, sep). Nuclear magnetic resonance spectroscopy: An experimentally accessible paradigm for quantum computing. *Phys. D Nonlinear Phenom.*, 120(1-2), 82–101.

- Cover, T. M., y Thomas, J. A. (2005). *Elements of Information Theory*.
- Dakić, B., Lipp, Y. O., Ma, X., Ringbauer, M., Kropatschek, S., Barz, S., . . . Walther, P. (2012). Quantum discord as resource for remote state preparation. *Nat. Phys.*, *8*(9), 666–670.
- Daoud, M., y Laamara, R. A. (2012, aug). Quantum discord of Bell cat states under amplitude damping. *J. Phys. A Math. Theor.*, *45*(32), 325302.
- Deutsch, D. (1985). Quantum Theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. Roy. Soc. London*(400), 96–117.
- Driessen, E. F. C. (2013, feb). Single-photon detectors: Fast and efficient. *Nat. Photonics*, *7*(3), 168–169.
- Eisert, J., Scheel, S., y Plenio, M. B. (2002). Distilling Gaussian States with Gaussian Operations is Impossible. *Phys. Rev. Lett.*, *89*(13), 137903.
- Ekert, A., y Knight, P. L. (1995). Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *Am. J. Phys.*, *63*(5), 415–423.
- Garay-Palmett, K., McGuinness, H. J., Cohen, O., Lundeen, J. S., Rangel-Rojo, R., U'ren, A. B., . . . Walmsley, I. A. (2007). Photon pair-state preparation with tailored spectral properties by spontaneous four-wave mixing in photonic-crystal fiber. *Opt. Express*, *15*(22), 14870.
- Garay-Palmett, K., U'Ren, A. B., y Rangel-Rojo, R. (2010). Conversion efficiency in the process of copolarized spontaneous four-wave mixing. *Phys. Rev. A*, *82*(4), 043809.
- Garshenfeld, N. A., y Chuang, I. L. (1997). Bulk Spin-Resonance Quantum Computation. *Science (80-. )*, *275*(5298), 350–356.
- Giorda, P., Allegra, M., y Paris, M. G. A. (2012, nov). Quantum discord for Gaussian states with non-Gaussian measurements. *Phys. Rev. A*, *86*(5), 052328. doi: 10.1103/PhysRevA.86.052328
- Girolami, D., Paternostro, M., y Adesso, G. (2011, sep). Faithful nonclassicality indicators and extremal quantum correlations in two-qubit states. *J. Phys. A Math. Theor.*, *44*(35), 352002.
- Glauber, R. J. (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, *131*(6), 2766–2788.
- Grover, L. K. (1997). Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack. *Phys. Rev. Lett.*, *79*(2), 325–328.
- Hanson, R., y Burkard, G. (2007, jan). Universal Set of Quantum Gates for Double-Dot Spin

Qubits with Fixed Interdot Coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 98(5), 050502.

- Henderson, L., y Vedral, V. (2001, sep). Classical, quantum and total correlations. *J. Phys. A. Math. Gen.*, 34(35), 6899–6905.
- Hill, S., y Wootters, K. (1997). Entanglement of a Pair of Quantum Bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78(26), 5022–5025.
- Holevo, A. S., y Giovannetti, V. (2012). Quantum channels and their entropic characteristics. *Reports Prog. Phys.*, 75(4), 046001.
- Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., y Horodecki, K. (2009). Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81(2), 865–942.
- Jeong, H., y Kim, M. S. (2001). Efficient quantum computation using coherent states. *arXiv:quant-ph*, v2(01090077), 1–6.
- Jeong, H., Zavatta, A., Kang, M., Lee, S.-W., Costanzo, L. S., Grandi, S., . . . Bellini, M. (2013, sep). Entangling quantum and classical states of light. , 9.
- Jeong, H., Zavatta, A., Kang, M., Lee, S.-w., Costanzo, L. S., Grandi, S., . . . Bellini, M. (2014). Generation of hybrid entanglement of light. *Nat. Photonics*, 8, 564–569.
- Jin, R.-B., Shimizu, R., Morohashi, I., Wakui, K., Takeoka, M., Izumi, S., . . . Sasaki, M. (2014, 19 de 12). Efficient generation of twin photons at telecom wavelengths with 2.5 ghz repetition-rate-tunable comb laser. *Scientific Reports*, 4, 7468 EP -.
- Jin, R.-B., Shimizu, R., Wakui, K., Benichi, H., y Sasaki, M. (2013). Widely tunable single photon source with high purity at telecom wavelength. *Optics Express*, 21(9), 10659–10666.
- Jozsa, R., y Linden, N. (2003, aug). On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 459(2036), 2011–2032.
- Kaye, P., Laflamme, R., y Mosca, M. (2007). *An Introduction to Quantum Computing* (First ed.). UK: Oxford University Press.
- Kenfack, A., y Yczkowski, K. (2004). Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality. *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.*, 6(10), 396–404.
- Keyl, M., y Werner, R. F. (2002). How to correct small quantum errors. *New York*, 23.
- Kim, M. S., Son, W., Bužek, V., y Knight, P. L. (2002, feb). Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement. *Phys. Rev. A*, 65(3), 032323.

- Knill, E., Laflamme, R., y Milburn, G. J. (2001). A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, 409(6816), 46–52.
- Kumar, R., Barrios, E., MacRae, a., Cairns, E., Huntington, E. H., y Lvovsky, a. I. (2012). Versatile wideband balanced detector for quantum optical homodyne tomography. *Opt. Commun.*, 285(24), 5259–5267.
- Kwon, H., y Jeong, H. (2015). Generation of hybrid entanglement between a single-photon polarization qubit and a coherent state. , 012340, 1–6.
- Laflamme, R., Cory, D. G., Negrevergne, C., y Viola, L. (2001). NMR Quantum Information Processing and Entanglement. *Quant. Inf. Comput.*, 2, 166–176.
- Langangen, Vaskinn, A., y Skagerstam, B. S. (2012). *Interference of light in a Michelson-Morley interferometer: A quantum optical approach* (Vol. 2012).
- Lee, J., y Nha, H. (2013). Entanglement distillation for continuous variables in a thermal environment: Effectiveness of a non-Gaussian operation. *Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys.*, 87(3).
- Lee, K. F., Chen, J., Liang, C., Li, X., Voss, P. L., y Kumar, P. (2006). Generation of high-purity telecom-band entangled photon pairs in dispersion-shifted fiber. *Optics Letters*, 31(12), 1905–1907.
- Leonhardt, U. (1997). *Measuring the quantum state of light* (P. L. Knight y A. J. Miller, Eds.). United Kingdom: Cambridge University Press.
- Leonhardt, U. (2003, jul). Quantum physics of simple optical instruments. *Reports Prog. Phys.*, 66(7), 1207–1249.
- Leonhardt, U. (2010). *Essential Quantum Optics From Quantum Measurements to Black Holes*. Scotland, UK: Cambridge University Press.
- Loss, D., y DiVincenzo, D. P. (1998). Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, 57(1), 120–126.
- Loudon, R. (2003). *The Quantum Theory of Light* (3rd ed.). Oxford Science Publications.
- Lounis, B., y Orrit, M. (2005). Single-photon sources. *Reports Prog. Phys.*, 68, 1129–1179. doi: 10.1088/0034-4885/68/5/R04
- Lund, A. P., Jeong, H., Ralph, T. C., y Kim, M. S. (2004, aug). Conditional production of superpositions of coherent states with inefficient photon detection. *Phys. Rev. A*, 70(2), 020101. doi: 10.1103/PhysRevA.70.020101

- Luo, S. (2008, feb). Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum. *Phys. Rev. A*, 77(2), 022301.
- Lütkenhaus, N., y Barnett, S. M. (1995). Nonclassical effects in phase space. *Phys. Rev. A*, 51(4), 3340–3342.
- Madsen, L. S., Usenko, V. C., Lassen, M., Filip, R., y Andersen, U. L. (2012). Continuous variable quantum key distribution with modulated entangled states. *Nat. Commun.*, 3, 1083.
- Mandel, L. (1979, jul). Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence. *Opt. Lett.*, 4(7), 205.
- Mendieta, F. J., Arvizu Mondragón, A., Muraoka, R., Gallion, P., y Sanchez, J. (2009). Coherent photodetection with applications in quantum communications an cryptography. *Proc. SPIE*, 7499, 749905.
- Modi, K., Brodutch, A., Cable, H., Paterek, T., y Vedral, V. (2012, nov). The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.*, 84(4), 1655–1707.
- Modi, K., Paterek, T., Son, W., Vedral, V., y Williamson, M. (2010, feb). Unified View of Quantum and Classical Correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 104(8), 080501.
- Morton, J. J., y Lovett, B. W. (2011, mar). Hybrid Solid-State Qubits: The Powerful Role of Electron Spins. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2(1), 189–212.
- Mosley, P. J., Lundeen, J. S., Smith, B. J., y Walmsley, I. A. (2008). Conditional preparation of single photons using parametric downconversion: A recipe for purity. *New J. Phys.*, 10.
- Mosley, P. J., Lundeen, J. S., Smith, B. J., Wasylczyk, P., U'Ren, A. B., Silberhorn, C., y Walmsley, I. A. (2008). Heralded generation of ultrafast single photons in pure quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 100(13).
- Navarrete-Benlloch, C., García-Patrón, R., Shapiro, J. H., y Cerf, N. J. (2012). Enhancing quantum entanglement by photon addition and subtraction. *Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys.*, 86, 1–9. doi: 10.1103/PhysRevA.86.012328
- Neergaard-Nielsen, J. S., Takeuchi, M., Wakui, K., Takahashi, H., Hayasaka, K., Takeoka, M., y Sasaki, M. (2010a). Optical continuous-variable qubit.
- Neergaard-Nielsen, J. S., Takeuchi, M., Wakui, K., Takahashi, H., Hayasaka, K., Takeoka, M., y Sasaki, M. (2010b, jul). Optical Continuous-Variable Qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 105(5), 053602.

- Nielsen, M., y Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information* (First ed.). Cambridge University Press.
- Nogueira, K., Silva, J. B. R., Gonçalves, J. R., y Vasconcelos, H. M. (2013). Polarization and entanglement of photon-added coherent states. *Phys. Rev. A*, *87*(4), 043821.
- O'Brien, J. L. (2007). Optical quantum computing. *Science*, *318*(5856), 1567–1570.
- O'Connor, K. M., y Wothers, W. K. (2001). Entangled Rings. *Phys. Rev. A*, *63*, 52302.
- Olivares, S., Cialdi, S., Castelli, F., y Paris, M. G. a. (2013). Homodyne detection as a near-optimum receiver for phase-shift-keyed binary communication in the presence of phase diffusion. *Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys.*, *87*(5), 1–4.
- Ollivier, H., y Zurek, W. H. (2001, dec). Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Phys. Rev. Lett.*, *88*(1), 017901. doi: 10.1103/PhysRevLett.88.017901
- Paris, M. G. a. (1996). Displacement operator by beam splitter. *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.*, *217*(2-3), 78–80. doi: 10.1016/0375-9601(96)00339-8
- Paris, M. G. A., Cola, M., y Bonifacio, R. (2003, jun). Remote state preparation and teleportation in phase space. *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.*, *5*(3), S360–S364.
- Pellizzari, T., Gardiner, S. A., Cirac, J. I., y Zoller, P. (1995). Decoherence, Continuous Observation, and Quantum Computing: A cavity QED Model. *Phys Rev. Lett*, *75*(21), 3788–3791.
- Pinheiro, P. V. P., y Ramos, R. V. (2012, mar). Quantum communication with photon-added coherent states. *Quantum Inf. Process.*, *12*(1), 537–547.
- Qing-Ping, Z., Mao-Fa, F., Xiao-Juan, L., Xiao-Mei, C., Qin, W., y Hong-Zhi, X. (2004, nov). Entanglement and disentanglement from cascade beam-splitter for squeezed vacuum state inputs. *Chinese Phys.*, *13*(11), 1881–1886.
- Ralph, T. C., Langford, N. K., Bell, T. B., y White, A. G. (2002). Linear optical controlled-NOT gate in the coincidence basis. *Phys. Rev. A*, *65*, 62324.
- Riordan, M., y Hodesson, L. (1988). *Crystal Fire: The invention of the Transistor and the Birth of the Information Age*. London, UK: W. W. Norton and Company.
- Rubin, M. H., Klyshko, D. N., Shih, Y. H., y Sergienko, A. V. (1994). Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, *50*(6), 5122–5133. doi: 10.1103/PhysRevA.50.5122
- Saleh, B. E. A., y Teich, M. C. (2007). *Fundamentals of Photonics* (2nd ed.). USA: Wiley and

Sons, Inc.

- Sanders, B. C. (1992). Entangled coherent states. *Phys. Rev. A*, *45*(9), 6811–6815.
- Sanders, B. C. (2012). Review of entangled coherent states. *J. Phys. A Math. Theor.*, *45*(24), 244002. doi: 10.1088/1751-8113/45/24/244002
- Schlosshauer, M., y Merzbacher, E. (2008). Decoherence and the quantum-to-classical transition. *Phys. Today*, *61*(9), 69–70. doi: 10.1063/1.2982129
- Schmidt, E. (s.f.). Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Math. Ann.*, *63*, 433–476.
- Schnabel, R., Harms, J., Strain, K. A., y Danzmann, K. (2004). Squeezed light for the interferometric detection of high-frequency gravitational waves. *Class. Quantum Gravity*, *21*(5), S1045–S1051.
- Schnabel, R., Mavalvala, N., McClelland, D. E., y Lam, P. K. (2010). Quantum metrology for gravitational wave astronomy. *Nat. Commun.*, *1*(8), 121.
- Scully, M. O., y Zubairy, M. S. (2008). *Quantum Optics* (sixth prin ed.). United Kingdom: Cambridge University Press.
- Sekatski, P., Sangouard, N., Stobińska, M., Bussières, F., Afzelius, M., y Gisin, N. (2012, dec). Proposal for exploring macroscopic entanglement with a single photon and coherent states. *Phys. Rev. A*, *86*(6), 060301.
- Shor, P. (1994). Algorithms for quantum computation: Discrete log and factoring. In proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. *IEEE Comput. Sci. Press*.
- Silva, M. B. C. E., Xu, Q., Agnolini, S., Gallion, P., y Mendieta, F. J. (2006). Homodyne QPSK Detection for Quantum Key Distribution. En *Opt. amplifiers their appl. opt. technol. appl.* (p. CFA2). Optical Society of America. doi: 10.1364/COTA.2006.CFA2
- Steane, A. (1998). Quantum computing. *Rep. Prog. Phys.*, *61*.
- Stefszky, M., Mow-Lowry, C. M., McKenzie, K., Chua, S., Buchler, B. C., Symul, T., . . . Lam, P. K. (2011). An investigation of doubly-resonant optical parametric oscillators and non-linear crystals for squeezing. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.*, *44*(1), 15502.
- Streltsov, A. (2015). Quantum Correlations Beyond Entanglement. *SpringerBriefs Phys.*.
- Takeuchi, S. (2014). Recent progress in single-photon and entangled-photon generation and

applications. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 53(3), 030101.

Tipsmark, A., Dong, R., Laghaout, A., Marek, P., Jeřábek, M., y Andersen, U. L. (2011, nov). Experimental demonstration of a Hadamard gate for coherent state qubits. *Phys. Rev. A*, 84(5), 50301.

Vicent, L. E., U'Ren, A. B., Rangarajan, R., Osorio, C. I., Torres, J. P., Zhang, L., y Walmsley, I. A. (2010). Design of bright, fiber-coupled and fully factorable photon pair sources. *New J. Phys.*, 12.

Wang, H., y Kais, S. (2006, apr). Quantum teleportation in one-dimensional quantum dots system. *Chem. Phys. Lett.*, 421(4-6), 338–342. doi: 10.1016/j.cplett.2006.01.093

Wang, S., Hou, L.-L., Chen, X.-F., y Xu, X.-F. (2015, jun). Continuous-variable quantum teleportation with non-Gaussian entangled states generated via multiple-photon subtraction and addition. *Phys. Rev. A*, 91(6), 063832.

Wootters, W. (2001). Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Inf. Comput.*, 1(1), 27–44.

Xu, Q., Arvizu Mondragón, A., Gallion, P., y Mendieta, F. J. (2009). Homodyne In-Phase and Quadrature Detection of Weak Coherent States With Carrier Phase Tracking. *IEEE J. Sel. Top. quantum Electron.*, 15(6), 1581–1590.

Ye, B.-L., Liu, Y.-M., Xu, C.-J., Liu, X.-S., y Zhang, Z.-J. (2013, sep). Quantum Correlations in a Family of Two-Qubit Separable States. *Commun. Theor. Phys.*, 60(3), 283–288.

Yonezawa, H., y Furusawa, A. (2008). Continuous-variable quantum information processing with squeezed states of light. *Opt. Spectrosc.*, 108(2), 288–296.

Zavatta, A., Viciani, S., y Bellini, M. (2004, oct). Quantum-to-Classical Transition with Single-Photon-Added Coherent States of Light. *Science (80-. )*, 306(5696), 660–662.

## Anexo A.

# Interferencia de estados SPACS en un interferómetro de Michelson-Morley

De la figura 10 puede verse que la medición del detector será proporcional al número promedio de fotones  $\langle \hat{a}_5^\dagger \hat{a}_5 \rangle_{\text{out}} = {}_5 \langle \hat{a}_5^\dagger \hat{a}_5 \rangle_5$  considerando el estado en el modo 5 como el modo de salida a detectar. Es posible considerar que el MMI actúa sobre los dos modos de entrada de la forma  $|\psi\rangle_{\text{out}} = \hat{U}_{\text{MMI}}^{0,1} |\psi\rangle_0 \otimes |\psi\rangle_1$ . Es necesario notar que  $|\psi\rangle_{\text{out}}$  está conformada tanto por el modo 4, como el 5. Entonces, el resultado del detector será de la forma  $\propto \langle \psi_0 \otimes \psi_1 | \hat{U}_{\text{MMI}}^{0,1\dagger} I_4 \otimes \hat{a}_5^\dagger \hat{a}_5 \hat{U}_{\text{MMI}}^{0,1} | \psi_0 \otimes \psi_1 \rangle$ . Es entonces más fácil considerar el esquema de Heisenberg e incluir el efecto del MMI sobre los operadores en lugar de sobre las funciones de onda.

Para describir el efecto del MMI, consideremos el vector de campo eléctrico

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (206)$$

donde  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  es la parte positiva del campo eléctrico con  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = (\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2}$ .

Si se considera un fotodetector la posición espacial  $\mathbf{r}$  al tiempo  $t$ . El proceso de detección está relacionado con la absorción de un fotón por el detector, por lo que se puede describir a través del operador de aniquilación sobre el estado inicial en la forma

$$|\psi\rangle_{\text{entrada}} \rightarrow \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) |\psi\rangle_{\text{entrada}}. \quad (207)$$

Luego, la probabilidad de detectar la absorción de un fotón entre el tiempo  $t$  y  $t + dt$  es proporcional a  $w(\mathbf{r}, t)dt$  con

$$w(\mathbf{r}, t) = \left| \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle_{\text{entrada}} \right|^2. \quad (208)$$

Tomando en cuenta que se debe sumar sobre todos los estados de salida

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{\text{salida}} \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle_{\text{salida}} \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle_{\text{entrada}} = \langle \psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle_{\text{entrada}}$$

Por lo que de forma más general, considerando cualquier estado inicial de entrada  $\rho_{\text{entrada}}$ , se puede describir la intensidad medida por el detector, la cual es proporcional a (208) de la forma

$$I = \text{Tr}[\rho_{\text{entrada}} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]. \quad (209)$$

Considerando que la dirección de propagación de los campos está bien definida y que la polarización es lineal, la posición espacial del detector  $\mathbf{r}$  puede despreciarse y la ecuación del campo convertirse en una ecuación escalar, asimismo describiendo el campo en términos del espaciado de los modos  $\delta\omega = \hbar/(2V\epsilon_0)$  y haciendo  $-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = -i\omega_k(t - \tau)$ , la ecuación del campo, siguiendo la estructura de (Langangen et al., 2012) toma la forma

$$E^{(+)}(t) = i \sum_{\omega} \sqrt{\delta\omega} \omega^{1/2} \hat{a}(\omega) e^{i\phi(t)}. \quad (210)$$

Calcular el efecto del MMI se vuelve una tarea sencilla considerando que los operadores se transforman por el efecto del BS 50/50, donde los campos adquieren una fase  $\pi/2$  al reflejarse y ninguna al transmitirse con la transformación mostrada en la ecuación (55).

Es importante notar que los campos que viajan en el interferómetro en los modos  $\hat{a}_2$  y  $\hat{a}_3$  adquieren una fase que en principio es distinta, por lo que esta fase debe ser incluida en los operadores a través de  $\hat{a}_2(\omega)e^{i\phi_2 t}$  y  $\hat{a}_3(\omega)e^{i\phi_3 t}$ , donde  $\phi_2 = \omega(t - \tau_2)$  y  $\phi_3 = \omega(t - \tau_3)$ . Con esto y considerando que los campos posterior al primer paso por el BS y la reflexión en los espejos M1 y M2 pasan nuevamente por el BS, es decir sufren nuevamente una transformación como la mostrada en (55), se puede escribir finalmente el operador en el modo  $\hat{a}_5$  como

$$\hat{a}_5(\omega)e^{i\phi(t)} = \hat{a}_1(\omega) \left( T e^{i\phi_2(t) - R e^{i\phi_3(t)}} \right) + a_0(\omega) i \sqrt{TR} (e^{i\phi_2(t)} + e^{i\phi_3(t)}). \quad (211)$$

Por lo que el campo eléctrico, considerando un BS 50/50, calculado como en (Langangen et al., 2012) queda como sigue

$$E^{(+)}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{\omega} \sqrt{\delta\omega} \omega^{1/2} (\hat{a}_1(\omega)(e^{i\phi_2(t)} - e^{i\phi_3(t)}) + i\hat{a}_0(\omega)(e^{i\phi_2(t)} + e^{i\phi_3(t)})). \quad (212)$$

Dado que en esta tesis estamos interesados en fotones agregados, se considerará el estado inicial

$$|\alpha, 1\rangle \propto \sum_{\omega} \sqrt{\delta\omega} f(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) |\{\alpha\}\rangle, \quad (213)$$

el cual está definido hasta una constante de normalización. En (213) se ha usado la notación  $|f\rangle = \sum_{\omega} \sqrt{\delta\omega} f(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega)$  para agregar un paquete de un fotón individual con espectro  $f(\omega)$ .

El espectro del estado coherente está dado por la función  $\alpha(\omega)$ . El efecto del MMI se obtendrá entonces a través de

$$I \propto \frac{1}{2} \sum_{\omega' \omega'' \omega'''} \langle 0 | {}_0 \langle \{\alpha\} | \hat{a}_0(\omega') [E^{(-)}(\omega'') E^{(+)}(\omega''')] \hat{a}_0^\dagger(\omega''') | \{\alpha\} \rangle_0 | 0 \rangle. \quad (214)$$

Donde al considerar el campo de entrada  $|\{\alpha\}\rangle_0 |0\rangle$  y sustituyendo (212) en (214) es fácil notar que sólo sobrevive uno de los términos, quedando la intensidad de la siguiente forma

$$I \propto \frac{1}{2} \sum_{\omega' \omega'' \omega'''} \sqrt{d\omega' d\omega'' d\omega'''} \sqrt{\omega'' \omega'''} f^*(\omega') f(\omega''') \times \langle 0 | {}_0 \langle \{\alpha\} | \hat{a}_0(\omega') \hat{a}_0^\dagger(\omega'') \hat{a}_0(\omega''') \hat{a}_0^\dagger(\omega''') | \{\alpha\} \rangle_0 | 0 \rangle_1 \left( e^{-i\phi_2''(t)} - e^{-i\phi_3''(t)} \right) \left( e^{i\phi_2'''(t)} - e^{i\phi_3'''(t)} \right). \quad (215)$$

En (215) se diferencian las fases  $\phi_i''$  y  $\phi_i'''$  para hacer referencia a la frecuencia con la que están asociadas en la forma  $\phi_i = \omega^{(i)}(t - \tau_i)$ . Sin embargo, una medición arroja como resultado un promedio temporal de intensidad, la cual puede definirse mediante

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T_{\text{int}}} \int_{-T_{\text{int}}/2}^{T_{\text{int}}/2} I(t) dt. \quad (216)$$

Dado que los operadores son de naturaleza discreta en (215), se hace uso de la propiedad  $[\hat{a}(\omega'), \hat{a}^\dagger(\omega'')] = \delta_{\omega', \omega''}$ , con la cual, escribir los operadores en orden normal tiene el efecto

$$\hat{a}(\omega') \hat{a}^\dagger(\omega'') \hat{a}(\omega''') \hat{a}^\dagger(\omega''') = \delta_{\omega', \omega''} \delta_{\omega''', \omega''''} + \hat{a}^\dagger(\omega'') \hat{a}(\omega') \delta_{\omega''', \omega''''} + \hat{a}^\dagger(\omega''') \hat{a}(\omega''') \delta_{\omega', \omega''} + \hat{a}^\dagger(\omega'') \hat{a}(\omega''') \delta_{\omega', \omega''''} + \hat{a}^\dagger(\omega'') \hat{a}^\dagger(\omega''') \hat{a}(\omega') \hat{a}(\omega'''). \quad (217)$$

Además, la integración en (216) produce una delta de dirac para las frecuencias involucradas  $\omega''$  y  $\omega'''$  como  $\delta(\omega'' - \omega''')$  si las funciones espectrales  $\alpha(\omega)$  y  $f(\omega)$  empleadas en (213) se modelan con forma Gaussiana, con  $1/\sigma \ll T_{\text{int}}$ . Por lo que en lo sucesivo se utilizará la definición  $\omega(\tau_2 - \tau_3) = \omega\tau$ , y convirtiendo las sumas a integrales se puede obtener el efecto

neto sobre la intensidad mediante

$$\begin{aligned}
I(\tau) \propto & 2\pi \left( \int d\omega \omega |f(\omega)|^2 (1 + \cos(\omega\tau)) \right. \\
& + 2\Re \left[ \int d\omega f^*(\omega) \alpha(\omega) \int d\omega' \omega' f(\omega') \alpha^*(\omega') (1 + \cos(\omega\tau)) \right] \\
& + \int d\omega \omega |\alpha(\omega)|^2 (1 + \cos(\omega\tau)) \\
& \left. + \int d\omega f^*(\omega) \alpha(\omega) \int d\omega' f(\omega') \alpha^*(\omega') \int d\omega'' \omega'' |\alpha(\omega'')|^2 (1 + \cos(\omega\tau)) \right).
\end{aligned} \tag{218}$$

Después de evaluar las integrales y considerando que las amplitudes de los estados coherentes son reales, la expresión (218) se resuelve de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
I(\tau) \propto & \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2\tau^2} \left( (\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \left( 2\omega_0 e^{\frac{\sigma^2\tau^2}{4}} + \sigma^2(-\tau) \text{sen}(\tau\omega_0) + 2\omega_0 \text{cos}(\tau\omega_0) \right) \right. \\
& \left. + e^{\frac{\sigma^2\tau^2}{4}} \Re \left( \alpha^2 e^{-\frac{1}{4}\tau(\sigma^2\tau + 4i\omega_0)} \left( i\sigma^2\tau (-1 + e^{2i\tau\omega_0}) + 2\omega_0 \left( 2e^{\frac{1}{4}\tau(\sigma^2\tau + 4i\omega_0)} + e^{2i\tau\omega_0} + 1 \right) \right) \right) \right),
\end{aligned} \tag{219}$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia central de las formas espectrales Gaussianas tanto del estado coherente como del fotón agregado. Se han supuesto que ambas funciones están centradas en  $\omega_0$  por simplicidad del cálculo.

Los resultados de interferir un SPACS con el vacío en un MMI se muestran en la figura 58. En la figura se muestra  $I(\tau)/I(0)$  de la ecuación (219) para tres situaciones distintas para la longitud de onda central del haz coherente y el fotón agregado, se asumen que tienen traslape perfecto en sus formas espectrales y se ha normalizado la diferencia de caminos ópticos mediante  $\tau\sigma$ . Se puede observar el comportamiento esperado para fuentes coherentes, en donde la interferencia se vuelve despreciable para valores de  $\tau\sigma \approx 3$ . Esto indica, que un experimento con un MMI y un SPACS en una de sus entradas solamente no permite diferenciar el comportamiento no clásico del SPACS.

Es más interesante considerar que en las dos entradas del interferómetro incide un SPACS. Sin embargo, la intensidad calculada en (218) ya no es válida, pues sólo es uno de los cuatro términos involucrados, los cuales se obtienen de considerar todos los términos en (214). Si bien la intensidad la intensidad de salida del interferómetro para el caso con SPACS en cada entrada es más larga de obtener, no tiene mayor dificultad, y basta con seguir los mismos pasos que para una sola entrada. El estado conjunto en las dos entradas del interferómetro

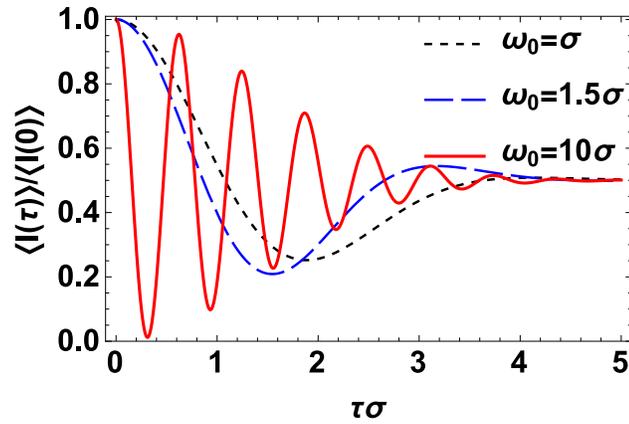


Figura 58: Intensidad normalizada  $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$  del MMI considerando una entrada como un SPACS y la otra como el vacío. Las gráficas se muestran para  $\omega_0$  en términos del ancho de banda  $\sigma$

se modela como sigue

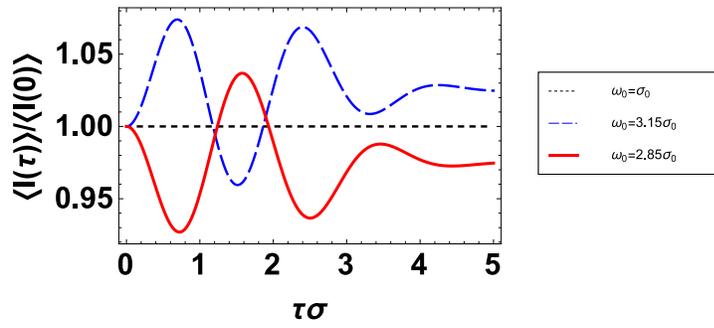
$$|\psi\rangle_{\text{entrada}} \propto |\alpha_0, 1\rangle |\alpha_1, 1\rangle, \quad (220)$$

donde cada estado tendrá la frecuencia central  $\omega_0$  y  $\omega_1$  respectivamente. Es fácil obtener la dependencia de la intensidad como sigue

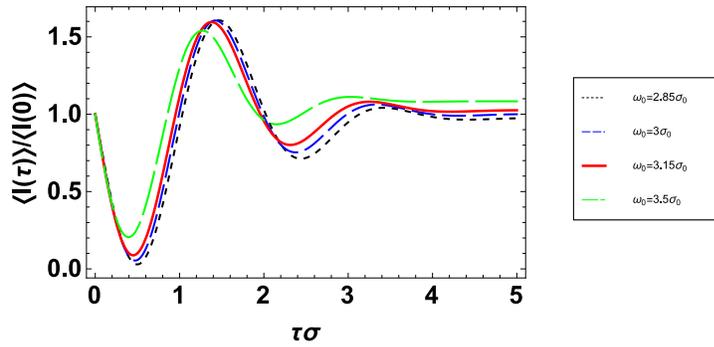
$$\begin{aligned} I(\tau) \propto \frac{1}{2} & \left( (\alpha_0^4 + 3\alpha_0^2 + 1) (\alpha_1^2 + 1) e^{-\frac{1}{4}\sigma_0^2\tau^2} \left( 2\omega_0 e^{\frac{1}{4}\sigma_0^2\tau^2} + \sigma_0^2(-\tau) \sin(\tau\omega_0) + 2\omega_0 \cos(\tau\omega_0) \right) \right. \\ & + (\alpha_0^2 + 1) (\alpha_1^4 + 3\alpha_1^2 + 1) e^{-\frac{1}{4}\sigma_1^2\tau^2} \left( 2\omega_1 e^{\frac{1}{4}\sigma_1^2\tau^2} + \sigma_1^2\tau \sin(\tau\omega_1) - 2\omega_1 \cos(\tau\omega_1) \right) \\ & - \frac{2\sqrt{2}\alpha_0(\alpha_0^2 + 2)\alpha_1(\alpha_1^2 + 2) e^{-\frac{\sigma_0^2\sigma_1^2\tau^2 + (\omega_0 - \omega_1)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}}}{(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)^{3/2}} \sqrt{\sigma_0\sigma_1} \\ & \left. \times (\sigma_0^2\omega_1 + \sigma_1^2\omega_0) \sin\left(\frac{\tau(\sigma_0^2\omega_1 + \sigma_1^2\omega_0)}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}\right) + \sigma_0^2\sigma_1^2\tau \cos\left(\frac{\tau(\sigma_0^2\omega_1 + \sigma_1^2\omega_0)}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}\right) \right). \quad (221) \end{aligned}$$

A continuación se analizarán diferentes configuraciones para los estados de entrada del MMI. En la figura 59 se muestra la interferencia obtenida considerando que los estados de entrada comparten características espectrales, excepto por la longitud de onda central de uno de los campos, es decir,  $\omega_1 = 3\sigma_1$ ,  $\omega_0$  variable con  $\sigma_0 = \sigma_1$ . En 59(a) se muestra el caso con la amplitudes  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  por lo que es equivalente a considerar fotones individuales. En 59(b) se muestra el caso con  $\alpha_0 = \alpha_1 = 20$ , resulta interesante que el efecto de interferencia es el

mismo que con estados coherentes.



(a)  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$



(b)  $\alpha_0 = \alpha_1 = 20$

Figura 59: Interferencia normalizada  $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$ . Ambas entradas son SPACS. La frecuencia  $\omega_1 = 3\sigma_0$  se mantiene fija y  $\omega_0$  es variable.

En la figura 60 se muestra el patrón de interferencia considerando ahora que las frecuencias centrales de las entradas y sus anchos de banda son iguales, con una amplitud  $\alpha$  fija y la otra variable. En 60(a) se considera  $\alpha_1 = 0$ ,  $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ ,  $\omega_0 = \omega_1 = 3$  y se grafica la interferencia para distintos valores de  $\alpha_0$ . En 60(b) se considera  $\alpha_0 = 2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\omega_0 = \omega_1 = 3$ , se grafica la interferencia para distintos valores de  $\alpha_1$ . En 60(a) puede observarse que en el límite cuando las amplitudes de los estados coherentes son cero ambas no hay interferencia, esto porque se hace interferencia de fotones individuales con las mismas características espectrales, asimismo, al incrementar el valor de  $\alpha_0$  se obtiene un patrón de interferencia con un comportamiento mezclado entre estados coherentes y fotones individuales, que tiende hacia el caso coherente al incrementar  $\alpha_0$ . Por otro lado, en 60(b) se observa que el patrón de interferencia pasa del esperado para fotones individuales al de estados coherentes.

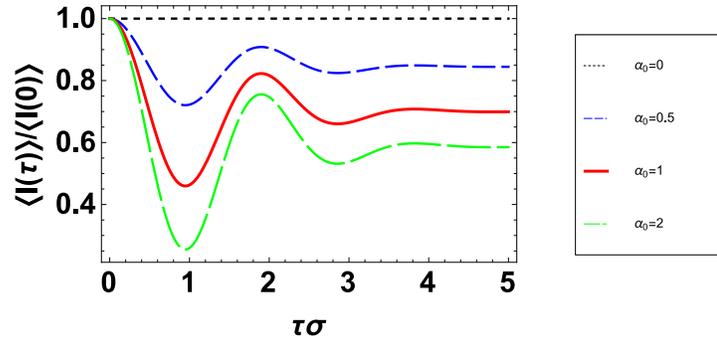
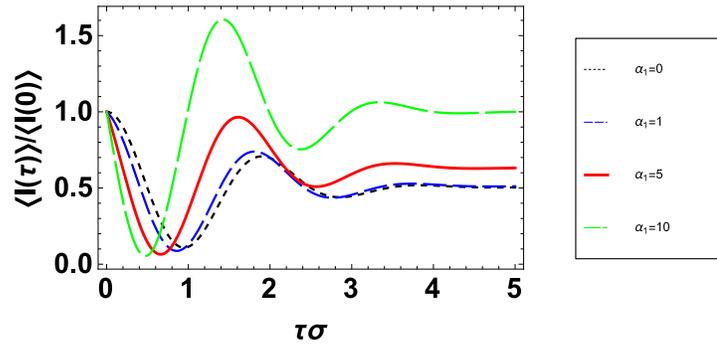
(a)  $\alpha_1 = 0$ (b)  $\alpha_0 = 2$ 

Figura 60: Interferencia normalizada  $\langle I(\tau) \rangle / \langle I(0) \rangle$ . Se consideran ambas entradas como SPACS con las características  $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ ,  $\omega_0 = \omega_1 = 3\sigma$ . Se fija una de las amplitudes  $\alpha_{1,2}$  y se varía la otra.

## Anexo B.

### Estado de dos fotones en la mezcla de cuatro ondas en el régimen espontáneo

Para la deducción del estado de dos fotones en el proceso SFWM partiremos del Hamiltoniano de interacción correspondiente al caso copolarizado y monomodal (J. Chen et al., 2005; Garay-Palmett et al., 2010) de la forma

$$\hat{H}(t) = \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)} \int d^3\mathbf{r} E_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{h.c.} \quad (222)$$

donde  $E_{1(2)}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  representan los operadores de aniquilación de un fotón de bombeo y  $E_{s(i)}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  los operadores de creación de un fotón de señal (acompañante), dados por

$$E_{\mu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\delta k} f_{\mu}(x, y) \sum_k \exp[-i(\omega t - kz)] \ell(\omega) \hat{a}(k), \quad (223)$$

donde  $\hat{a}(k)$  destruye un fotón del campo  $\mu = \{i, s\}$  en el modo  $k$ ,  $\delta k = \frac{2\pi}{L_Q}$  es el espaciamiento entre modos con  $L_Q$  la longitud de cuantización,  $\ell(\omega) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi\epsilon_0 n^2(\omega)}}$  está relacionada con la energía del modo a frecuencia  $\omega$  viajando con un índice de refracción  $n(\omega)$  y,  $f_{\mu}(x, y)$  es el perfil del modo transversal normalizado independiente de  $\omega$ . Por otro lado, los campos correspondientes al bombeo se consideran clásicos de la forma

$$E_{\nu}^{(+)} = A_{\nu} f_{\nu}(x, y) \int d\omega \alpha_{\nu}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)}, \quad (224)$$

donde  $A_{\nu}$  representa la amplitud del campo pico, y  $\alpha(\omega)$  es la envolvente espectral normalizada dada por

$$\alpha_{\nu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\nu}}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_{\nu}^0)^2}{2\sigma_{\nu}^2}\right], \quad (225)$$

donde  $\omega_{\nu}^0$  es la frecuencia central del campo  $\nu = \{1, 2\}$ . Con teoría de perturbaciones dependiente del tiempo es posible obtener la función de onda mediante

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hbar \int_0^t \hat{H}_I(t') dt'} |\psi(0)\rangle \quad (226)$$

donde al hacer la expansión a primer orden, se puede obtener la función de onda de la forma

$$|\psi(t)\rangle = |0\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t) dt |0\rangle = |00\rangle_{si} + |\Psi_2\rangle. \quad (227)$$

donde se han cambiado los límites a  $\pm\infty$  dado que el tiempo entre conversiones es muy grande comparado con el de interacción, lo que a su vez facilita que se pueda escribir equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1+\omega_2-\omega_s-\omega_i)t} dt = 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_s - \omega_i). \quad (228)$$

Luego, las sumas sobre  $k$  se pueden transformar en integrales con la consideración  $\delta k \sum_k = \int dk$ . Con todo lo anterior, se puede escribir  $|\Psi_2\rangle$  como

$$|\Psi_2\rangle = i \frac{3(2\pi)\epsilon_0\chi^3 LA_1 A_2 f_{12si}}{4\hbar} G(k_s, k_i) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i) |00\rangle_{si}, \quad (229)$$

donde  $G(k_s, k_i)$  es una función espectral conjunta definida mediante

$$G(k_s, k_i) = \ell(k_s)\ell(k_i) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega) \text{sinc} \left[ \frac{L\Delta k}{2} \right] e^{i\frac{L\Delta k}{2}}, \quad (230)$$

donde  $f_{12si}$  es una función con información del traslape de los modos transversales en la forma

$$f_{12si} = \int dx dy f_1(x, y) f_2(x, y) f_s^*(x, y) f_i^*(x, y), \quad (231)$$

$L$  es la longitud de la fibra y,  $\Delta k$  reúne información del empatamiento de fase (conservación de momento) de la forma

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_s - k_i. \quad (232)$$

Una simplificación que también resulta útil es definir la función espectral  $G(k_s, k_i)$  en los términos siguientes

$$G(\omega_s, \omega_i) = k_s^{(1)} k_i^{(1)} \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) F(\omega_s, \omega_i), \quad (233)$$

donde  $k_j^{(1)}$  es la primera derivada de  $k_j$  respecto a  $\omega$ , con lo que igualmente se cambian los operadores de  $\hat{a}^\dagger(k_j)$  a  $\hat{a}^\dagger(\omega_j)$ .

En resumen, todas las constantes en (229) se pueden englobar en una sola, denominada  $\kappa$  y así escribir el estado de dos fotones en SFWM mediante

$$|\Psi\rangle = |00\rangle_{si} + \kappa \int \int d\omega_s d\omega_i F(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |00\rangle_{si}, \quad (234)$$

donde los términos no incluidos en el integrando de (234) presentan una baja dependencia a la frecuencia y pueden aproximarse como constantes, con lo que son llevados fuera de la integral y representan una buena aproximación (Rubin, Klyshko, Shih, y Sergienko, 1994; Garay-Palmett et al., 2010).

## Anexo C.

### Detalle del cálculo del MID

Todos los detalles para el cálculo del MID de la sección 4.3.2 se abordan aquí, así como las expresiones utilizadas para obtener el AMID. Para obtener (112) y (114) se requiere la información mutua para el sistema puro el proyectado. La entropía del sistema puro se obtiene fácilmente con al fórmula de Von Neumann en la forma tradicional (137). Y para las entropías de los estados proyectados en cuadratura se utilizan las versiones (118) y (117). Las entropías dependientes de  $\lambda$  se muestran par alos casos DPC y PAC respectivamente. Para cualquier subsistema reducido del DPC se obtiene un valor constante

$$S(\rho_{pd}^{A(B)})(\lambda_{A(B)}) \approx 2,00208, \quad (235)$$

mientras que la entropía para el sistema completo DPC es

$$\begin{aligned} S(\rho_{pd}^{AB})(\lambda_A, \lambda_B) = & \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_A} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_B} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_0^2 (\cos(2\lambda_A) + \cos(2\lambda_B) + 2) + 2\alpha_0 (X_{\lambda_A} \cos(\lambda_A) + X_{\lambda_B} \cos(\lambda_B)) - X_{\lambda_A}^2 - X_{\lambda_B}^2\right)}{\pi \ln(16)} \\ & \times \left| 2e^{i\lambda_A} X_{\lambda_A} - \alpha_0 \right|^2 + 2\Re\left(e^{i\lambda_B - 2i\lambda_A} \left(-\alpha_0 + 2e^{i\lambda_A} X_{\lambda_A}\right) \left(-2X_{\lambda_B} + \alpha_0 e^{i\lambda_B}\right)\right) + \left| 2e^{i\lambda_B} X_{\lambda_B} - \alpha_0 \right|^2 \\ & \times \left(-\log\left(\left| 2e^{i\lambda_A} X_{\lambda_A} - \alpha_0 \right|^2 + 2\Re\left(e^{i\lambda_B - 2i\lambda_A} \left(-\alpha_0 + 2e^{i\lambda_A} X_{\lambda_A}\right) \left(-2X_{\lambda_B} + \alpha_0 e^{i\lambda_B}\right)\right) + \left| 2e^{i\lambda_B} X_{\lambda_2} - \alpha_0 \right|^2\right)\right) \\ & + \frac{1}{2}\alpha_0^2 (\cos(2\lambda_A) + \cos(2\lambda_B) + 2) - 2\alpha_0 (X_{\lambda_1} \cos(\lambda_A) + X_{\lambda_2} \cos(\lambda_B)) + X_{\lambda_1}^2 + X_{\lambda_2}^2 + \log(4) + \ln(\pi). \end{aligned} \quad (236)$$

Por otro lado, ambas entropías para el PAC son dependientes de  $\lambda$ , como se muestra en la entropía para los subsistemas reducidos

$$\begin{aligned} S(\rho_{pa}^{A(B)})(\lambda_{A(B)}) = & - \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_{A(B)}} \left( -2\alpha_0^2 \cos(2\lambda_{A(B)}) + \alpha_0^2 + \left| 2e^{i\lambda_{A(B)}} X_{\lambda_{A(B)}} - \alpha_0 \right|^2 + 4\alpha_0 X_{\lambda_{A(B)}} \cos(\lambda_{A(B)}) + 2 \right) \\ & \times \ln \left( \frac{-2\alpha_0^2 \cos(2\lambda_{A(B)}) + \alpha_0^2 + \left| 2e^{i\lambda_{A(B)}} X_{\lambda_{A(B)}} - \alpha_0 \right|^2 + 4\alpha_0 X_{\lambda_{A(B)}} \cos(\lambda_{A(B)}) + 2}{\xi_1} \right) / (\xi_1 \ln 2), \end{aligned} \quad (237)$$

con  $\xi_1 = 4\sqrt{\pi} (\alpha_0^2 + 1) (\sinh((X_{\lambda_{A(B)}} - \alpha_0 \cos(\lambda_{A(B)}))^2) + \cosh((X_{\lambda_{A(B)}} - \alpha_0 \cos(\lambda_{A(B)}))^2))$ .

Y para el sistema PAC completo,

$$\begin{aligned} S(\rho_{pa}^{AB})(\lambda_A, \lambda_B) = & - \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_A} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_B} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_0^2 (\cos(2\lambda_A) + \cos(2\lambda_B) + 2) + 2\alpha_0 (X_{\lambda_1} \cos(\lambda_A) + X_{\lambda_2} \cos(\lambda_B)) - X_{\lambda_1}^2 - X_{\lambda_2}^2\right)}{4\pi (\alpha_0^2 + 1) \ln(2)} \\ & \times \ln \left[ \left| 2e^{i\lambda_A} X_{\lambda_1} - \alpha_0 \right|^2 - 2\Re\left(e^{i(\lambda_A - 2\lambda_B)} \left(-2X_{\lambda_1} + \alpha_0 e^{i\lambda_A}\right) \left(-\alpha_0 + 2e^{i\lambda_B} X_{\lambda_2}\right)\right) + \left| 2e^{i\lambda_B} X_{\lambda_2} - \alpha_0 \right|^2 \right] \\ & \times \exp \left( -\frac{1}{2}\alpha_0^2 (\cos(2\lambda_A) + \cos(2\lambda_B) + 2) + 2\alpha_0 (X_{\lambda_1} \cos(\lambda_A) + X_{\lambda_2} \cos(\lambda_B)) - X_{\lambda_1}^2 - X_{\lambda_2}^2 \right) / 4\pi (\alpha_0^2 + 1) \\ & \times \left| 2e^{i\lambda_A} X_{\lambda_1} - \alpha_0 \right|^2 - 2\Re\left(e^{i(\lambda_A - 2\lambda_B)} \left(-2X_{\lambda_1} + \alpha_0 e^{i\lambda_A}\right) \left(-\alpha_0 + 2e^{i\lambda_B} X_{\lambda_2}\right)\right) + \left| 2e^{i\lambda_B} X_{\lambda_2} - \alpha_0 \right|^2, \end{aligned} \quad (238)$$

La expresión para (235) no se ha incluido explícitamente, sino sólo su valor aproximado que es válido para  $\forall\{\alpha_0, \lambda_A, \lambda_B\}$ .

El MID se evalúa a través de (112) con las expresiones previas de (235) a (238) y se grafica en la figura 22 de la que se seleccionan los ángulos que maximizan el MID. Siguiendo esta inspección, un conjunto de ángulos para  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$  son seleccionados para simplificar las expresiones de la entropía dependientes de  $\lambda$ . El mínimo del MID para el DPC ocurre cuando  $\lambda_A = \lambda_B$ , es decir, se obtiene un mínimo para el DPC completo como,

$$S(\rho_{pd}^{AB})(\lambda_A = 0, \lambda_B = 0) = -\frac{2}{\pi \ln(4)} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_A} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_B} (X_{\lambda_A} - X_{\lambda_B})^2 e^{-2\alpha_0^2 - X_{\lambda_A}^2 + 2\alpha_0(X_{\lambda_A} + X_{\lambda_B}) - X_{\lambda_B}^2} \\ \times \ln \left( \frac{(X_{\lambda_A} - X_{\lambda_B})^2 e^{-2\alpha_0^2 - X_{\lambda_A}^2 + 2\alpha_0(X_{\lambda_A} + X_{\lambda_B}) - X_{\lambda_B}^2}}{\pi} \right). \quad (239)$$

Para el caso PAC uno de los mínimos se encuentra para  $\lambda_A = \lambda_B = 0$ , lo que produce el máximo de la entropía del sistema como

$$S(\rho_{pa}^{A(B)})(\lambda_{A(B)} = 0) \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_{A(B)}} \frac{\left(2X_{\lambda_{A(B)}}^2 + 1\right) e^{-(X_{\lambda_{A(B)}} - \alpha_0)^2} \left( \ln \left( \frac{2X_{\lambda_{A(B)}}^2 + 1}{2\alpha_0^2 + 2} \right) - (X_{\lambda_{A(B)}} - \alpha_0)^2 - \frac{\ln(\pi)}{2} \right)}{\sqrt{\pi} (\alpha_0^2 + 1) \ln(4)}, \quad (240)$$

mientras que uno de los puntos de mínima entropía para el caso PAC completo se obtiene a través de

$$S(\rho_{pa}^{AB})(\lambda_A = 0, \lambda_B = 0) = -\frac{1}{\pi (\alpha_0^2 + 1) \ln(2)} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_A} \int_{-\infty}^{\infty} dX_{\lambda_B} e^{-2\alpha_0^2 - X_{\lambda_A}^2 + 2\alpha_0 X_{\lambda_A} - X_{\lambda_B}^2 + 2\alpha_0 X_{\lambda_B}} \\ \times (-\alpha_0 + X_{\lambda_A} + X_{\lambda_B})^2 \ln \left( \frac{e^{-2\alpha_0^2 - X_{\lambda_A}^2 + 2\alpha_0 X_{\lambda_A} - X_{\lambda_B}^2 + 2\alpha_0 X_{\lambda_B}} (-\alpha_0 + X_{\lambda_A} + X_{\lambda_B})^2}{\pi (\alpha_0^2 + 1)} \right). \quad (241)$$

## Anexo D.

---

### Abreviaciones

Abreviatura	Significado en español	Significado en inglés (si aplica)
AMID	Perturbación inducida por la medición optimizada	<i>Ameliorated Measurement Induced Disturbance</i>
BS	Divisor de haz	<i>Beam Splitter</i>
CNOT	Compuerta not controlada	<i>Controlled Not Gate</i>
CC	Correlaciones clásicas	<i>Classical Correlations</i>
CS	Estado coherente	<i>Coherent State</i>
CV	Variable continua	<i>Continuous Variable</i>
DFS	Estado de Fock desplazado	<i>Displaced Fock State</i>
DPC	Canal de fotones desplazado	<i>Displaced Photons Channel</i>
ECS	Estado coherente entrelazado	<i>Entangled Coherent State</i>
EPACS	Estado coherente con fotones agregados entrelazado	<i>Entangled Photon Added Coherent State</i>
FWM	Mezcla de cuatro ondas	<i>Four Wave Mixing</i>
HES	Estado entrelazado híbrido	<i>Hybrid Entangled State</i>
JQP	Probabilidad conjunta de cuadratura	<i>Joint Quadrature Probability</i>
JSI	Intensidad de espectro conjunta	<i>Joint Spectral Intensity</i>
KLM	Knill, Laflamme y Milburn	
LO	Oscilador local	<i>Local Oscillator</i>
MEPACS	Estado coherente con fotones agregados máximamente entrelazado	<i>Maximally Entangled Photon Added Coherent State</i>
MI	Información mutua	<i>Mutual Information</i>
MID	Perturbación inducida por la medición	<i>Measurement Induced Disturbance</i>
MMI	Interferómetro de Michelson-Morley	<i>Michelson-Morley Interferometer</i>
POVM	Operador de medición positivo	<i>Positive Operator-Valued Measure</i>
PAC	Canal de fotones agregados	<i>Photon Added Channel</i>
PACS	Estado coherente con fotones agregados	<i>Photon Added Coherent State</i>
PCF	Fibra de cristal fotónico	<i>Photonic Crystal Fiber</i>
QD	Discordia cuántica	<i>Quantum Discord</i>
QIP	Procesamiento de información cuántica	<i>Quantum Information Processing</i>
QI	Información cuántica	<i>Quantum Information</i>
QVP	Varianza de cuadratura con fase	<i>Quadrature Variance with Phase</i>
SPACS	Estado coherente con un fotón agregado	<i>Single Photon Added Coherent State</i>
SPFWM	Mezcla de cuatro ondas espontánea	<i>Spontaneous Four Wave Mixing</i>