

Evolución de flujos turbulentos y estructuras
dipolares en un sistema en rotación con topografía
variable

Miguel José Tenreiro

10 de octubre de 2005

RESUMEN de la tesis de **MIGUEL JOSÉ COSTA DE ALMEIDA TENREIRO**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California, México. Septiembre de 2005.

EVOLUCIÓN DE FLUJOS TURBULENTOS Y ESTRUCTURAS DIPOLARES EN UN SISTEMA EN ROTACIÓN CON TOPOGRAFÍA VARIABLE

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón
Director de Tesis

La transferencia de energía de escalas pequeñas hacia escalas grandes de movimiento en flujos turbulentos bidimensionales (conocida como cascada inversa de energía) ha sido estudiada de manera teórica, numérica y, recientemente, experimental. En este trabajo se investiga la evolución de un flujo turbulento en rotación y con topografía variable, ambos efectos poco analizados en estudios previos.

Dada la complejidad de la turbulencia, se adoptaron dos formas diferentes de abordar el problema. Por un lado se realizaron experimentos y simulaciones del comportamiento de una estructura dipolar en presencia de una topografía con forma de escalón a mitad del dominio, de manera que una parte es somera y la otra profunda. En este caso, tanto el flujo como la topografía son relativamente simples, de manera que el entendimiento de los procesos físicos involucrados se facilita. Se consideraron dos alturas para el escalón y se obtuvieron dos comportamientos completamente distintos: cuando el escalón es relativamente bajo, el dipolo cruza la topografía y su trayectoria es desviada; cuando es relativamente alto, no cruza y una de las estructuras que lo componen es reflejada. Ambos comportamientos son debidos a la compresión y estiramiento de las columnas de fluido, asociados con la (casi) conservación de vorticidad potencial. Además, la interacción del dipolo con la topografía da origen a un flujo a lo largo del escalón manteniendo siempre la parte somera a su derecha.

Adicionalmente se realizaron simulaciones numéricas con condiciones iniciales de mayor complejidad sobre el mismo tipo de fondo. Se observa que la evolución del flujo da origen siempre a un estado de equilibrio caracterizado por cuatro estructuras, dos ciclones y dos anticiclones, dispuestos de manera alternada. El flujo que se establece a lo largo del escalón con agua somera a la derecha es responsable de la distribución de las estructuras en el resultado final. La dinámica de la interacción de un dipolo con la batimetría permite explicar la evolución del flujo hacia este estado.

Palabras clave: Turbulencia bidimensional, estructuras dipolares, sistema en rotación, batimetría variable.

ABSTRACT of the thesis of **MIGUEL JOSÉ COSTA DE ALMEIDA TEN-REIRO**, presented as partial requirement to obtain the degree of MASTER OF SCIENCE in PHYSICAL OCEANOGRAPHY. Ensenada, Baja California, Mexico. September 2005.

EVOLUTION OF TURBULENT FLOWS AND DIPOLAR STRUCTURES ON A ROTATING SYSTEM WITH BOTTOM TOPOGRAPHY

The energy transfer from small to larger scales of motion in two-dimensional turbulent flows (known as inverse energy cascade) has been studied theoretical, numerical and, recently, experimentally. In this thesis, a turbulent flow on a rotating system with variable bottom topography is investigated, both conditions little studied in past works.

Because of the turbulence complexity, the problem is analyzed in two different ways. First, experiments and simulations on the interaction of dipolar structures with a step-like topography were performed, in which one of the sides of the domain is shallow and the other one is deep. In this case, the flow and the bathymetry are set as simple as possible in order to facilitate the understanding of the physical processes involved. Considering two step heights, two very different results are obtained: when the step is relatively small, the dipole crosses the step and its trajectory is deflected; when the step is relatively high, the dipole does not cross it and one of its structures is reflected. These behaviours are due to stretching and squeezing effects associated with the (quasi) material conservation of potential vorticity. In both cases, the interaction of the dipolar vortex with the topography originates a flow along the step that maintains always shallow water on its right.

Additionally, numerical simulations with more complex initial conditions over the same bottom topography were performed. It was observed that the flow evolution gives rise to an equilibrium state characterized by four structures, two cyclones and two anticyclones, alternately disposed. The flow along the step with shallow water on its right is responsible for the vortex distribution in the final state. It is proposed that the dynamics involved in the interaction of a dipole with the step-like topography helps to explain the final state of the turbulent flow.

Key words: Two-dimensional turbulence, dipolar structures, rotating system, bottom topography.

DEDICATORIA

A Mavy y Zé...

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis Zavala Sansón por su amistad y plena dedicación en la realización de este trabajo.

A los miembros del comité: Dr. Julio Sheinbaum Pardo, Dr. Federico Graef Ziehl y Dr. Raúl Rangel Rojo.

A mis maestros que mantuvieron siempre la disposición, calidad y alegría a la hora de enseñar.

Al personal del CICESE que de una manera o de otra me ayudaron.

Al Prof. van Heijst, Ruddy y Alejandro por la recepción en Eindhoven.

Al Prof. Manuel Pinto de Abreu por su confianza, dedicación y amistad.

A las Ciencias del Mar (ULHT) donde un día todo empezó.

A Isabel y Martín por la comprensión y amistad.

A Héctor por la excelencia de las clases de español.

A ustedes, mis compañeros de generación, amigos del bar, del teatro, de la playa, de Ensenada y del mundo. Un abrazo fuerte.

A los amigos de Lisboa con quien crecí y que jamás olvidé. Avante.

A los Tara Perdida (Ganso, Ribas, Ruka, Jaime, Y).

Al Alex y a la Joana por el programa de radio y la fuerza de la palabra que me mantuvo conectado.

Paula por tu fuerza y valor.

A Pipa y a Leonor.

Y a toda mi familia que mismo a un océano de distancia siempre estuvo presente.

Esta tesis corresponde a los estudios realizados con una beca otorgada por la Secretaría de Relaciones Exteriores del Gobierno de México.

Índice de contenido

I. Introducción	1
II. Teoría y métodos	4
II.1. Descripción del movimiento	4
II.1.1. Ecuaciones de momento	4
II.1.2. Ecuación de vorticidad	6
II.1.3. Vórtices puntuales	10
II.1.4. Vórtice de Lamb	14
II.2. Método experimental	16
II.2.1. Aparato experimental	16
II.2.2. Generación del dipolo	16
II.2.3. Análisis del flujo	17
II.3. Método numérico	18
III. Interacción del dipolo con el escalón topográfico	20
III.1. Escalón “bajo”	20
III.1.1. Experimentos de laboratorio	21
III.1.2. Simulaciones numéricas	23
III.1.3. Modelo de vórtices puntuales	29

III.2. Escalón “alto”	32
III.2.1. Experimentos de laboratorio	33
III.2.2. Simulaciones numéricas	38
III.2.3. Modelo de vórtices puntuales	44
III.3. Escalón límite	48
IV. Turbulencia bidimensional con batimetría variable	52
IV.1. Parámetros numéricos	52
IV.2. Fondo plano	54
IV.3. Turbulencia sobre el escalón	57
IV.3.1. Escalón “bajo”	57
IV.3.2. Escalón “alto”	61
IV.3.3. Comparación	62
IV.3.4. El efecto de la condición inicial	64
IV.4. El efecto del escalón en el régimen turbulento	68
IV.5. Escalón límite	72
V. Discusión y conclusiones	75
Referencias	80

Índice de figuras

Figura	Página
1. Dipolo en la formulación de vórtices puntuales con Γ y $-\Gamma$ los valores de la circulación del ciclón y anticiclón, respectivamente, y r la distancia entre los dos vórtices. U es la velocidad del dipolo.	12
2. Representación esquemática de la utilización de pseudo-imágenes en el estudio de la interacción de vórtices con topografía variable.	14
3. Aparato experimental.	17
4. Vista superior del dipolo desplazándose de la parte profunda hacia la parte somera del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.42 \text{ rad s}^{-1}$; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20 \text{ cm}$; altura del escalón $\Delta h = 1 \text{ cm}$	22
5. Vista superior del dipolo desplazándose de la parte somera hacia la parte profunda del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.42 \text{ rad s}^{-1}$; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20 \text{ cm}$; altura del escalón $\Delta h = 1 \text{ cm}$	23
6. Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte profunda a la somera del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (20 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$; radio inicial del dipolo de Lamb $a = 8 \text{ cm}$; circulación inicial $\Gamma_0 = 60 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$; vorticidad máxima inicial $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$; contornos de vorticidad $\Delta\omega = 0.01 \text{ s}^{-1}$. Escalón topográfico de altura $\Delta h = 1 \text{ cm}$ en $x = 50 \text{ cm}$	25
7. Evolución de trazadores pasivos distribuidos a lo largo del escalón y en la región inicial del dipolo en la misma simulación numérica descrita en la Figura 6. . .	26
8. Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte somera a la profunda del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (80 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$. Parámetros del dipolo igual que en la Figura 6. . .	27
9. Evolución de trazadores pasivos distribuidos a lo largo del escalón y en la región inicial del dipolo en la misma simulación numérica descrita en la Figura 8. . .	27
10. Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta del dipolo desplazándose de la parte profunda a la somera (panel izquierdo) y de la parte somera a la profunda (panel derecho) cada 10 s.	28
11. Representación esquemática de la trayectoria de un dipolo (vórtices puntuales) que sube un escalón topográfico.	30

Figura	Índice de figuras (continuación)	Página
12.	Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta de la simulación numérica presentada en la Figura 6 cada $\Delta t = 10$ s (+) y trayectorias de los vórtices puntuales (-): (a) dipolo desplazándose de profundo a somero y (b) de somero a profundo. Color negro (gris) vorticidad positiva (negativa).	31
13.	Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta de la simulación numérica sin fricción en el fondo cada $\Delta t = 10$ s (+) y trayectorias de los vórtices puntuales (-): (a) dipolo desplazándose de profundo a somero y (b) de somero a profundo.	32
14.	Vista superior del dipolo desplazándose de la parte profunda (izquierda) hacia la somera (derecha) del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.53$ rad s ⁻¹ ; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20$ cm; altura del escalón $\Delta h = 5$ cm.	34
15.	Contornos de vorticidad calculado del experimento de laboratorio del dipolo cruzando de la parte profunda (izquierda) a la somera (somera) del dominio. Contornos de vorticidad $\Delta\omega$ 0.05 s ⁻¹ . Líneas continuas (discontinuas) son contornos positivos (negativos). Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5$ cm.	35
16.	Contornos de la función de corriente y campo de velocidades para el experimento presentado en la Figura 15. Contornos de la función de corriente $\Delta\psi = 1$ cm ² s ⁻¹ . Líneas continuas (discontinua) son contornos positivos (negativos).	36
17.	Vista superior del dipolo desplazándose de la parte somera (derecha) hacia la profunda (izquierda) del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.53$ rad s ⁻¹ ; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20$ cm; altura del escalón $\Delta h = 5$ cm.	37
18.	Contornos de vorticidad calculado del experimento de laboratorio del dipolo cruzando de la parte somera (derecha) a la profunda (izquierda) del dominio. Contornos de vorticidad $\Delta\omega$ 0.05 s ⁻¹ . Líneas continuas (discontinuas) son contornos positivos (negativos). Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5$ cm.	38
19.	Contornos de la función de corriente y campo de velocidades para el experimento presentado en la Figura 18. Contornos de la función de corriente $\Delta\psi = 1$ cm ³ s ⁻¹ . Líneas continuas (discontinua) son contornos positivos (negativos).	39
20.	Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte profunda a la somera del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (20$ cm, 50 cm); radio inicial del dipolo de Lamb $a = 8$ cm; circulación inicial $\Gamma_0 = 60$ cm ² s ⁻¹ ; vorticidad máxima inicial $\omega_0 = 1$ s ⁻¹ ; contornos de vorticidad $\Delta\omega = 0.01$ s ⁻¹ . Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5$ cm en $x = 50$ cm.	40

Figura	Índice de figuras (continuación)	Página
21.	Evolución de trazadores pasivos distribuidos al largo del escalón y en la región inicial del dipolo para las mismas condiciones de la simulación numérica descrita en la Figura 20.	41
22.	Máximos de vorticidad positiva y negativa normalizados a la vorticidad a $t = 30$ s relativos al problema del dipolo que sube el escalón [(-o) experimento; (-*) simulación numérica] para intervalos de tiempo de 30 s. Las barras representan el 10 % de error.	41
23.	Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte somera a la profunda del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (80 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$; radio inicial del dipolo de Lamb $a = 8 \text{ cm}$; circulación inicial $\Gamma_0 = 60 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$; vorticidad máxima inicial $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$; contornos de vorticidad $\Delta\omega = 0.01 \text{ s}^{-1}$. Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5 \text{ cm}$ en $x = 50 \text{ cm}$	42
24.	Evolución de trazadores pasivos distribuidos al largo del escalón y en la región inicial del dipolo para las mismas condiciones de la simulación numérica descrita en la Figura 23.	43
25.	Máximos de vorticidad positiva y negativa normalizados a la vorticidad a $t = 30$ s relativos al problema del dipolo que baja el escalón [(-o) experimento; (-*) simulación numérica] para intervalos de tiempo de 30 s. Las barras representan el 10 % de error.	44
26.	Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta del dipolo desplazándose de la parte profunda a la somera (panel izquierdo) y de la parte somera a la profunda (panel derecho) cada 10 s.	45
27.	Representación esquemática del modelo de vórtices puntuales utilizando pseudo imágenes.	46
28.	Trayectorias del ciclón de un dipolo que se mueve en la dirección $+x$ y encuentra un escalón topográfico a lo largo de $x = 0 \text{ cm}$ con diferentes alturas: $\Delta h = -20 \text{ cm}$ ("pared"); $\Delta h = 0 \text{ cm}$ (fondo plano).	48
29.	Escalón límite (cm) en función de la circulación (cm^2s^{-1}) para el anticiclón del dipolo desplazándose de la parte profunda hacia la somera: puntos arriba (abajo) de la línea no hay reflexión (hay reflexión). Los círculos llenos (vacíos) indican reflexión (no reflexión) del anticiclón en las simulaciones numéricas (los cuadrados indican los casos investigados anteriormente: escalón bajo y alto). .	51

Figura	Índice de figuras (continuación)	Página
30.	Campo inicial de vorticidad: contornos continuos (discontinuos) representan vorticidad positiva (negativa); intervalos entre contornos, $\Delta\omega = 0.05 \text{ s}^{-1}$; vorticidad máxima (mínima) 1 (-1) s^{-1}	54
31.	Contornos de vorticidad de la simulación numérica ($n = 5$) relativa al caso de fondo plano. Las líneas continuas (discontinuas) representan vorticidad positiva (negativa). El tiempo es en minutos y el periodo de rotación es, $T = 12 \text{ s}$. Los intervalos en los contornos son $\Delta\omega = 0.05 \text{ s}^{-1}$ y $\Delta\omega = 0.005 \text{ s}^{-1}$ para $t = 1\text{-}3 \text{ min}$ y $t = 6\text{-}60 \text{ min}$, respectivamente.	55
32.	Contornos de vorticidad de tres simulaciones numéricas ($n = 2, 3$ y 6) relativas al caso de fondo plano.	56
33.	Decaimiento en el tiempo adimensional $t^* = \frac{t}{L/(2U_{rms})}$ de la cantidad Z/E normalizada para el caso del fondo plano. La recta representa el ajuste del decaimiento en el intervalo de tiempo $t^* = 1\text{-}60$	58
34.	Contornos de vorticidad de la simulación numérica relativa al caso del escalón de 1 cm. En la región profunda (izquierda), $H_0 = 20 \text{ cm}$, y en la somera (derecha), $H_0 = 19 \text{ cm}$. El escalón es indicado por la línea en $x = 50 \text{ cm}$	59
35.	Contornos de vorticidad relativas al caso del escalón de 1 cm para tres condiciones iniciales diferentes ($n = 2, 3$, y 6).	60
36.	Contornos de vorticidad de la simulación numérica referente al caso del escalón de 5 cm. En la región profunda (izquierda), $H_0 = 20 \text{ cm}$, y en la somera (derecha), $H_0 = 15 \text{ cm}$. El escalón es indicado por la línea en $x = 50 \text{ cm}$	62
37.	Contornos de vorticidad relativas al caso del escalón de 5 cm para tres condiciones iniciales diferentes ($n = 2, 3$ y 6).	63
38.	Diagrama de dispersión, $\omega - \psi$, de las simulaciones numéricas presentadas para: a) escalón de 1 cm y b) escalón de 5 cm. Los colores representan puntos en la región profunda (negro) y somera (gris).	65
39.	Trayectoria de trazadores pasivos en presencia del escalón de 1 cm (izquierda) y de 5 cm (derecha). El círculo discontinuo representa el área de la posición inicial de las partículas.	66
40.	Contornos del campo inicial y final de vorticidad y respectivos diagramas de dispersión para cuatro simulaciones numéricas: (a) arreglo de 10×10 vórtices y (b) condición inversa.	67

Figura	Índice de figuras (continuación)	Página
41.	Contornos del campo inicial y final de vorticidad y respectivos diagramas de dispersión para cuatro simulaciones numéricas: (a) un anticiclón y un ciclón en la región profunda y somera, respectivamente; y (b) un ciclón y un anticiclón en la región profunda y somera, respectivamente.	68
42.	Decaimiento de la energía cinética normalizada en el conjunto de seis simulaciones para los casos: (a) fondo plano; (b) escalón de 1 cm; y (c) escalón de 5 cm. Decaimiento de enstrofia normalizada para los tres casos (d): (.-) fondo plano; (--) escalón de 1 cm; y (-) escalón de 5 cm. El periodo de rotación del sistema es $T \approx 12$ s.	71
43.	Escala promedio normalizada con el radio de los vórtices en la condición inicial (5 cm) de las simulaciones numéricas: fondo plano (.-), escalón de 1 cm (--) y escalón de 5 cm (-).	72
44.	Valores de la raíz cuadrada de la enstrofia en función del tiempo (s) para el escalón de 1 cm (--) y el escalón de 5 cm (-).	74
45.	Representación esquemática del papel de las estructuras dipolares en el resultado final obtenido del problema de la turbulencia 2D.	77

I. Introducción

El desarrollo de nuevas técnicas y métodos de análisis sobre vórtices coherentes en sistemas turbulentos es de creciente importancia en el estudio de los fluidos geofísicos. El conocimiento de la física involucrada en este tipo de estructuras, presentes en los océanos, mares interiores y en la atmósfera, es fundamental para comprender su dinámica a diferentes escalas espaciales y temporales. El objetivo fundamental de esta tesis es investigar y describir los efectos de la topografía del fondo en estas estructuras coherentes, y así contribuir para el mejor conocimiento de dichos fenómenos y de la dinámica involucrada. El modelo conceptual a utilizar es el de un fluido homogéneo en dos dimensiones en un sistema en rotación, el cual es afectado por las variaciones topográficas en el fondo.

El movimiento puramente bidimensional (*i. e.* sin efectos topográficos) turbulento se caracteriza por una cascada inversa de energía: flujo de energía hacia las escalas mayores del movimiento lo que resulta en la auto-organización del flujo. Este hecho ha sido motivo de muchas publicaciones recientes, donde el estudio a fondo de este tipo de fenómenos, caracterizados por la formación de estructuras coherentes y sus interacciones, ha contribuido de forma efectiva para el conocimiento de los mecanismos involucrados. Estudios como el de McWilliams (1989), donde se investiga la supresión de la tasa de disipación o escala de transferencia en la cascada de energía debido a la influencia de vórtices coherentes, es un ejemplo típico. En otro trabajo, Tabeling *et al.* (1991) describe el estudio experimental de flujos turbulentos casi-bidimensionales con decaimiento libre en capas someras de fluido y demuestra la cascada inversa de energía en forma experimental que se manifiesta en la formación de estructuras coherentes (vórtices). Por otro lado, con experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas de flujos casi-bidimensionales confinados en una región cerrada, Clercx *et al.* (1999) y van Heijst *et al.* (2003) demuestran que la presencia de las fronteras sólidas del dominio son

la causa de la producción de filamentos que influyen de forma efectiva la evolución del flujo.

La base de estos estudios es la bidimensionalidad de los flujos examinados. Aunque se puede obtener un movimiento bidimensional de varias formas, en este trabajo la rotación del sistema es la manera utilizada para garantizar el carácter bidimensional del flujo. El movimiento bidimensional es observado en experimentos de laboratorio cuando se utiliza una mesa rotatoria. El eje de rotación se encuentra alineado con el eje vertical del movimiento del flujo, *i. e.*, el movimiento predominante es en el plano perpendicular al eje de rotación. Este fenómeno ha sido ampliamente utilizado y reportado desde los primeros estudios de Taylor (1923), así como en diversos trabajos de mecánica de fluidos que involucran flujos en rotación.

La utilización de topografía variable en flujos turbulentos influye de forma efectiva el estado final del sistema. Al igual que en el caso puramente bidimensional, estos flujos son caracterizados por cascadas de enstrofia en la dirección de las escalas más finas (pequeñas), donde ésta se disipa, mientras que la energía cinética se mantiene en las escalas mayores. La diferencia principal es que, conforme el flujo decae, su movimiento tiende a seguir los contornos topográficos con agua somera a la derecha (cuando el parámetro de Coriolis es positivo). Bretherton y Haidvogel (1976) utilizan un modelo numérico pseudo-espectral con fricción lateral y encuentran que cualitativamente los resultados concuerdan con la solución esperada: el flujo se adapta a lo largo de las líneas de igual profundidad.

Dado que la evolución de un flujo turbulento suele ser bastante compleja, en este trabajo se adoptaron dos formas diferentes de abordar el problema. En primer lugar, se estudió el comportamiento de estructuras dipolares, características de los flujos turbulentos, por medio de experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas. Para ello se utilizó un escalón topográfico que divide la región de estudio en una parte profunda

y otra somera, y se analizó el comportamiento del dipolo al interactuar con el escalón. Por otro lado, se realizaron simulaciones numéricas con el objetivo de conocer el efecto de la misma batimetría tipo escalón en un flujo turbulento en rotación. En este caso las simulaciones se inicializaron con flujos completamente turbulentos, en los cuales los vórtices dipolares se forman regularmente.

Este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo §II se hace la descripción teórica de los modelos físico y numérico utilizados en la investigación, así como de los métodos utilizados. El Capítulo §III es dedicado al estudio de la interacción de estructuras dipolares con un escalón topográfico. En el Capítulo §IV se investiga el decaimiento de la turbulencia 2D en un dominio cuadrado, en rotación, con condiciones de frontera de no deslizamiento y con una batimetría tipo escalón. Finalmente, en el Capítulo §V se hace una breve discusión y se presentan las conclusiones.

II. Teoría y métodos

II.1. Descripción del movimiento

II.1.1. Ecuaciones de momento

De las ecuaciones de momento y continuidad para un fluido homogéneo, hidrostático, en rotación alrededor del eje z vertical, limitado por un fondo de forma arbitraria y la superficie libre, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

donde (u, v) son las componentes de velocidad en (x, y) independientes de z , w es la velocidad vertical, f el parámetro de Coriolis definido como $f = 2\Omega$ donde Ω es la rapidez angular del sistema, p es la presión, g la gravedad, ρ la densidad y ν la viscosidad cinemática. Para resolver el sistema de ecuaciones propuesto es necesario especificar valores iniciales y de frontera. Las condiciones a usar son las condiciones cinemáticas de frontera en la superficie y en el fondo, mientras que los efectos de las fronteras laterales son de no deslizamiento.

Como u y v son considerados independientes de z (teorema de Taylor-Proudman), se puede integrar en la vertical la ecuación de continuidad (4) entre el fondo y la superficie libre. Así, se obtiene de la integración

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (H - h_b) = w |_{z=h_b} - w |_{z=H}, \quad (5)$$

donde $H(x, y, t) = H_0 + \eta(x, y, t)$ es la suma de una altura de referencia H_0 y de la elevación de la superficie libre $\eta(x, y, t)$, y $h_b(x, y)$ representa las variaciones topográficas. La profundidad de la columna de fluido está dada por $h(x, y, t) = H(x, y, t) - h_b(x, y)$.

Para fronteras sólidas, la componente normal del flujo de masa deberá ser cero, por lo que la condición en el fondo es

$$w |_{z=h_b} = u \frac{\partial h_b}{\partial x} + v \frac{\partial h_b}{\partial y}. \quad (6)$$

Para el caso de un fondo plano donde h_b es constante, *i. e.*, $\nabla h_b = 0$, la velocidad vertical $w |_{z=h_b}$ es cero. La condición cinemática para la superficie libre es

$$w |_{z=H} = \frac{D}{Dt} H, \quad (7)$$

donde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ es la derivada material. Aplicando las dos condiciones de frontera descritas a la ecuación de continuidad integrada en la vertical (5), se obtiene

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

El sistema original se puede reducir a tres ecuaciones en las variables u, v y η (o h). Para ello, se integra en la vertical la ecuación de momento en z (3):

$$p(x, y, z, t) = -\rho g z + c(x, y, t), \quad (9)$$

donde c es una función de integración. Con la condición de frontera $p(x, y, H) = p_0$, donde p_0 es una constante, se obtiene

$$p(x, y, z, t) = -\rho g(H - z) + p_0. \quad (10)$$

Sustituyendo este resultado en las ecuaciones de momento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (12)$$

que conjuntamente con la ecuación de continuidad (8) forman el sistema de tres ecuaciones con tres variables.

II.1.2. Ecuación de vorticidad

Podemos escribir la componente vertical de la vorticidad como

$$\omega = \hat{k} \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (13)$$

Para obtener la ecuación de evolución de la vorticidad y así resolver el problema bidimensional, se derivan las ecuaciones (11) y (12) en y y x , respectivamente, y restándolas se obtiene

$$\frac{D\omega}{Dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\omega + f) = \nu \nabla^2 \omega. \quad (14)$$

Podemos reescribir la ecuación (8) como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h} \frac{Dh}{Dt}, \quad (15)$$

y combinarla con (14), para obtener la ecuación

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\nu}{h} \nabla^2 \omega, \quad (16)$$

donde q es la *vorticidad potencial* definida como

$$q = \frac{\omega + f}{h}. \quad (17)$$

Para transformar las ecuaciones a un sistema bidimensional se hace la aproximación de “tapa rígida”. Esta aproximación consiste en eliminar la flexibilidad de la superficie libre en la ecuación de continuidad, como si esta se encontrase “congelada”, es decir, se aproxima $\frac{\partial h}{\partial t} \simeq 0$, sin embargo la presión en la superficie no es cero (ver Gill (1982)). Se supone entonces que los cambios en la profundidad del fluido debidos a la superficie libre son pequeños comparados con las variaciones debidas a la topografía. Así, se elimina la posibilidad de existencia de ondas de gravedad en la superficie. La ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

donde ahora $h = h(x, y)$. De esta expresión se puede definir una función de corriente como

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (19)$$

$$v = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (20)$$

La función de corriente está relacionada con la vorticidad relativa por la ecuación

$$\omega = -\frac{1}{h}\nabla^2\psi + \frac{1}{h^2}\nabla h \cdot \nabla\psi. \quad (21)$$

Utilizando las definiciones (19) y (20) la ecuación para la evolución de la vorticidad relativa es

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(q, \psi) = \nu\nabla^2\omega, \quad (22)$$

donde J es el operador Jacobiano.

Si consideramos el caso particular en que el fondo es plano, *i. e.*, $h = H_0$ constante, se demuestra, a partir de los resultados anteriores, que el flujo es no divergente, es decir, la ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (23)$$

Esto implica que la función de corriente se puede definir como

$$u = \frac{\partial\psi^*}{\partial y} \quad (24)$$

$$v = -\frac{\partial\psi^*}{\partial x}, \quad (25)$$

por lo que la relación entre la función de corriente ψ^* y la vorticidad relativa ω está dada por la ecuación de Poisson

$$\omega = -\nabla^2\psi^*. \quad (26)$$

Nótese que la función de corriente no es la misma que para el caso de fondo variable, y que ambas están relacionadas como $\psi^* = \frac{1}{h}\psi$. Así, la ecuación de evolución de vorticidad se reduce a

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\omega, \psi^*) = \nu\nabla^2\omega, \quad (27)$$

que se puede reescribir como

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu\nabla^2\omega. \quad (28)$$

Si se considera ahora un fluido con poca viscosidad, *i. e.*, $\nu \rightarrow 0$, de la ecuación (16) se tiene que

$$\frac{Dq}{Dt} \sim 0. \quad (29)$$

La vorticidad potencial es así una cantidad que se conserva en forma Lagrangiana. Este importante resultado implica que las variaciones en la profundidad de la columna de fluido h o en la vorticidad planetaria f (que puede depender de la latitud en fluidos geofísicos) pueden originar cambios en la vorticidad relativa ω . En los experimentos de laboratorio la vorticidad planetaria es mantenida constante ($f = 2\Omega$) lo que significa que los cambios en la vorticidad relativa ω son debidos a la topografía. La simplificación del problema en estos términos permite explicar que el aumento de la profundidad de la columna de fluido origina el estiramiento de los “tubos” de vorticidad, e implica un aumento en la vorticidad relativa. Este resultado es fundamental y nos ayudará a comprender la interacción de las estructuras coherentes con la topografía.

II.1.3. Vórtices puntuales

En el capítulo §III se analizará la interacción de un remolino dipolar con la topografía del fondo. Se puede definir un dipolo como una estructura coherente de circulación compacta compuesta por dos regiones de vorticidad de signos opuestos. Existen muchas otras definiciones para estructuras de este tipo, así como modelos para describir sus propiedades. En este trabajo serán discutidos dos modelos que representan este tipo de remolinos, uno de ellos basado en la idea de vórtices puntuales.

Los modelos de vórtices puntuales son los más sencillos en el estudio de flujos con vorticidad en dos dimensiones. Esta formulación representa la distribución de vorticidad como funciones delta en el plano del movimiento. Son modelos estrictamente bidimensionales y el fluido es considerado inviscido, $\nu = 0$, por lo que no contemplan efectos disipativos.

En dos dimensiones se puede definir la circulación como

$$\Gamma = \oint_C \bar{u} \cdot d\bar{r} = \int_A \omega dA \quad (30)$$

donde $\bar{u} = (u, v)$ es el vector velocidad, A es el área interior del contorno C (cuyo diferencial es $d\bar{r}$) que delimita el campo de vorticidad relativa, ω . En esta formulación la circulación alrededor de un contorno C cerrado es el flujo de vorticidad relativa a través del área A . Del teorema de la circulación de Kelvin para un fluido inviscido, barotrópico y donde las fuerzas de cuerpo son conservativas, se tiene que la circulación de un contorno material es constante

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (31)$$

Para estudiar el movimiento del dipolo e investigar su trayectoria, vamos a hacer

la descomposición de un campo continuo de vorticidad como la suma de un número finito de “polos”. Esta formulación implica que la vorticidad es cero en todos los puntos del dominio excepto en el punto ocupado por cada vórtice. Así, encontramos que las componentes del vector velocidad del vórtice puntual j debidas al resto de los $N - 1$ vórtices se pueden escribir como

$$u_j = \frac{dx_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Gamma_i}{r_{ij}^2} (y_j - y_i), \quad (32)$$

$$v_j = \frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Gamma_i}{r_{ij}^2} (x_j - x_i), \quad (33)$$

donde r_{ij} es la separación entre vórtices (Batchelor, 1967).

Podemos representar un dipolo por medio de dos vórtices puntuales con circulación de signos contrarios Γ y $-\Gamma$ separados por una distancia r (Figura 1). De (32) y (33) se puede derivar que ambos vórtices tienen la misma rapidez, la cual está dada por

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (34)$$

Además, se obtiene la integral de movimiento

$$\frac{d}{dt} r^2 = 0, \quad (35)$$

que indica que la distancia entre los vórtices es constante, *i. e.*, r no cambia con el tiempo.

Para introducir la influencia de la topografía es necesario definir un área A de la columna de vorticidad donde la circulación está dada por

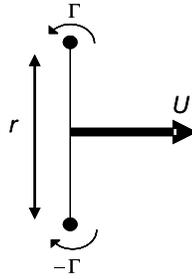


Figura 1: Dipolo en la formulación de vórtices puntuales con Γ y $-\Gamma$ los valores de la circulación del ciclón y anticiclón, respectivamente, y r la distancia entre los dos vórtices. U es la velocidad del dipolo.

$$\Gamma = \omega A, \quad (36)$$

con ω la vorticidad relativa media. Cualquier alteración de la altura H de la columna debida a efectos topográficos deberá ser compensada por cambios en A para que el volumen sea conservado

$$V = A(x, y)H(x, y) = A_0H_0 = \text{constante}, \quad (37)$$

donde A_0 y H_0 son el área transversal de la columna de vorticidad y la profundidad de la columna de agua de referencia, respectivamente. Además, la conservación de vorticidad potencial es

$$\frac{\omega_0 + f}{H_0} = \frac{\omega + f}{H}. \quad (38)$$

Utilizando (37) y (38) en la ecuación (36), se obtiene la expresión para la circulación del modelo de vórtices puntuales modulados por la topografía

$$\Gamma(\bar{x}) = \Gamma_0 + fA_0 \left[1 - \frac{H_0}{H(\bar{x})} \right], \quad (39)$$

donde Γ_0 es la circulación inicial. En el siguiente capítulo se estudiará mediante este modelo el movimiento que adquiere un vórtice dipolar modulado al cruzar un escalón topográfico.

Sin embargo, como se verá mas adelante, puede haber situaciones en las que un vórtice no experimenta cambios de profundidad, y que sin embargo su movimiento es alterado al acercarse a la topografía variable. Este fenómeno fue investigado por Johnson y McDonald (2004) quienes proponen una solución para las trayectorias de vórtices singulares en zonas costeras con una topografía tipo escalón. Uno de los casos estudiados consiste en un escalón dispuesto a lo largo del eje x , perpendicularmente a la frontera sólida representativa de la línea de costa (paralela al eje y). Debido a esta pared, el vórtice es impulsado hacia el escalón (Figura 2). El efecto de la topografía es introducido por medio de una “pseudo-imagen” colocada al otro lado del escalón, cuya circulación está dada por

$$\Gamma^i = \alpha \Gamma_0 \quad (40)$$

donde α está definido como $\alpha = \frac{H^- - H^+}{H^- + H^+}$ con la profundidad $H(x, y) = H^+$ para $y > 0$ y $H(x, y) = H^-$ para $y < 0$. De la misma manera se puede escribir $\alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ donde $\gamma = \frac{H^-}{H^+}$. Johnson y McDonald (2004) encuentran que cuando $H^+ = H^-$ (*i.e.* que no hay escalón) las trayectorias son líneas rectas paralelas a la pared sólida. Cuando $H^- = 0$, el escalón se transforma en una pared y las trayectorias son dadas por curvas del tipo $x^{-2} + y^{-2} = constante$ (Lamb, 1932). Los autores proponen una ecuación para las trayectorias del vórtice inducidas por la presencia de la topografía. Este modelo se utilizará en los casos del próximo capítulo en los que un dipolo no cruza el escalón topográfico.

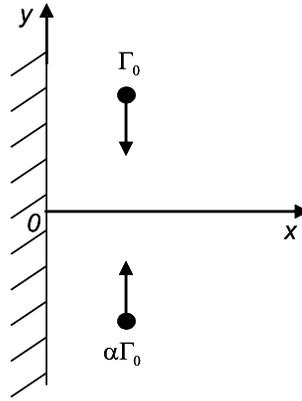


Figura 2: Representación esquemática de la utilización de pseudo-imágenes en el estudio de la interacción de vórtices con topografía variable.

II.1.4. Vórtice de Lamb

Un modelo de vórtice dipolar cuya distribución de vorticidad es continua es el vórtice de Chaplygin-Lamb (Meleshko y van Heijst, 1994). Esta estructura es una solución exacta de las ecuaciones de Euler. Cuando se utiliza como condición inicial en simulaciones numéricas con viscosidad presenta decaimiento y expansión radial por efectos viscosos laterales (Nielsen y Rasmussen, 1997; van Geffen y van Heijst, 1998).

El dipolo de Lamb presenta una distribución continua de vorticidad en una región circular ($0 \leq r \leq a$) y flujo irrotacional en la zona exterior a esa región ($r > a$). Para flujos bidimensionales se cumple que

$$\omega = -\nabla^2\psi. \quad (41)$$

El modelo de Lamb relaciona linealmente la vorticidad con la función de corriente dentro de la región de interés:

$$\omega = k^2\psi \quad , \quad 0 \leq r \leq a \quad (42)$$

$$\omega = 0 \quad , \quad r > a \quad (43)$$

donde k es una constante. La ecuación (41) en coordenadas polares (r, θ) para las dos regiones es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -k^2 \psi \quad , \quad 0 \leq r \leq a \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad , \quad r > a. \quad (45)$$

Se supone que el flujo potencial alrededor de la zona circular exterior es equivalente al flujo potencial bidimensional alrededor de un cilindro colocado en una corriente uniforme con velocidad $\mathbf{v} = (U_0, 0)$ en el infinito. Por lo tanto, la función de corriente de la región exterior ($r > a$) está dada por

$$\psi_e(r, \theta) = -U_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta, \quad (46)$$

donde r es la distancia radial al centro del círculo y θ el ángulo con respecto a la dirección del flujo.

La solución para la región interior se obtiene resolviendo la ecuación (44), y contiene funciones de Bessel de primer y segundo tipo. La ecuación de continuidad, la función de corriente y su derivada en $r = 0$ determinan las constantes restantes. Así, para la región interna ($0 \leq r \leq a$) tenemos

$$\psi_i(r, \theta) = -\frac{2U_0}{kJ_0(ka)} J_1(kr) \sin \theta \quad (47)$$

donde J_0 y J_1 son las funciones de Bessel (de primer tipo) de cero y primer orden, respectivamente. Este modelo se utiliza como condición inicial en las simulaciones numéricas del capítulo §III.

II.2. Método experimental

II.2.1. Aparato experimental

Los experimentos en el laboratorio se realizaron en dos mesas rotatorias con tanques distintos: uno con fondo cuadrado ($L_x \times L_y = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$) y otro con fondo rectangular ($L_x \times L_y = 100 \text{ cm} \times 150 \text{ cm}$). La profundidad utilizada en la parte más profunda del dominio en ambos tanques fue $H_0 = 20 \text{ cm}$ y la velocidad de rotación de las mesas fue de $\Omega = 0.42 \text{ s}^{-1}$ y $\Omega = 0.53 \text{ s}^{-1}$, respectivamente, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El procedimiento experimental consistió en dejar el tanque rotar a una velocidad angular constante hasta que el fluido llega a rotación de cuerpo sólido (aproximadamente 20 min en ambos casos), y solo después se forzó el sistema para dar inicio al experimento. En la Figura 3 se presenta de forma esquemática el aparato experimental.

La topografía utilizada fue un “escalón”: una parte del tanque se mantuvo con profundidad H_0 , mientras que la otra con profundidad $H_0 - \Delta h$. La posición del escalón fue mantenida constante y se utilizaron dos alturas Δh distintas (1 y 5 cm).

II.2.2. Generación del dipolo

El flujo estudiado de manera experimental en este trabajo fue un vórtice dipolar moviéndose hacia el escalón. En el laboratorio se obtiene el dipolo moviendo lentamente un cilindro hueco hacia el centro del tanque mientras se le retira, manteniendo su eje alineado con el eje de rotación, es decir, en la vertical (Velasco Fuentes y van Heijst, 1994). La vorticidad es generada en las paredes del cilindro y organizada en una estructura dipolar. Se utilizó un cilindro de 8 cm de diámetro. Se analizaron dos casos particulares: el dipolo moviéndose de la parte somera hacia la profunda y viceversa.

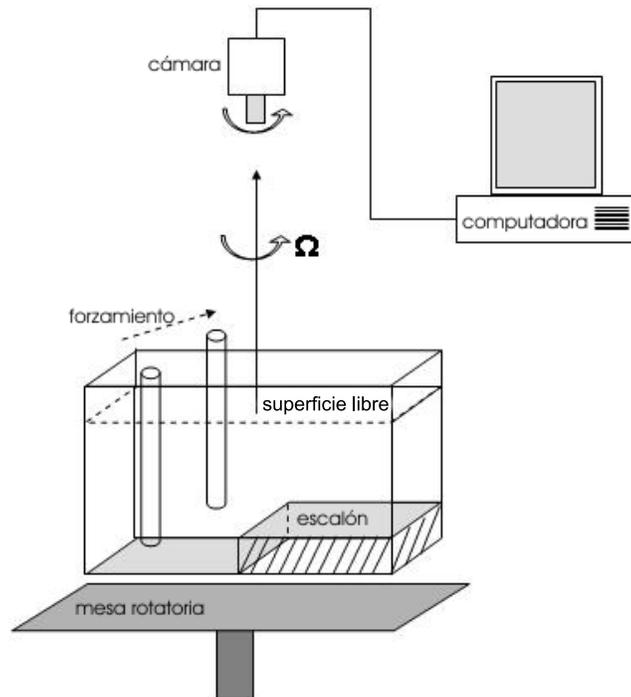


Figura 3: Aparato experimental.

II.2.3. Análisis del flujo

El dipolo fue marcado con tinta fluorescente y su movimiento grabado con una cámara de video rotando con el sistema. La cámara conectada a una computadora permitió la obtención de las imágenes de los experimentos donde se pudo investigar la trayectoria, el tamaño y la velocidad del dipolo. La tinta utilizada en la marcación del dipolo se distribuyó en las columnas de vorticidad demostrando la bidimensionalidad del flujo obtenido.

Para cuantificar el flujo se hizo uso de un método de seguimiento de partículas. En la superficie del tanque se distribuyen partículas de pequeñas dimensiones, $\approx 250 \mu\text{m}$, para hacer el seguimiento del movimiento del fluido. Las partículas son iluminadas con ocho proyectores de luces dispuestos en pares alrededor del tanque. El movimiento de las

partículas es registrado con una cámara de 8 bites Kodak ES1.0 que opera con captación de imágenes a 30 Hz. Para obtener los campos de velocidad de las imágenes se utilizaron dos métodos: Particle Image Velocimetry (PIV) y Particle Tracking Velocimetry (PTV). El primero determina el desplazamiento neto de las partículas entre dos segmentos de dos imágenes sucesivas (PIV), mientras el segundo sigue las partículas individualmente entre imágenes sucesivas (PTV). Posteriormente se obtiene una mejor resolución utilizando el método High-resolution Particle Velocimetry (HPV) que utiliza la información de PIV para el seguimiento de las partículas individuales de PTV. Obtenido el campo de velocidad usando HPV, se puede calcular la distribución de vorticidad y función de corriente en el dominio considerado. Las mediciones cuantitativas se realizaron en la Universidad Tecnológica de Eindhoven, Holanda.

II.3. Método numérico

El código numérico en este trabajo resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones en su formulación de vorticidad-función de corriente. Es un modelo de diferencias finitas y acepta una gran variedad de distribuciones de vorticidad inicial, como el vórtice de Lamb. Incluye también topografía variable, varios tipos de condiciones de frontera y permite hacer el seguimiento de trazadores pasivos distribuidos en el dominio. El modelo utiliza términos de Ekman en la ecuación de vorticidad para la simulación de efectos de fricción del fondo (Zavala Sansón y van Heijst, 2002).

Las ecuaciones que resuelve el modelo numérico, en su forma más general, son

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(q, \psi) - \frac{\delta_E}{2h} \nabla \psi \cdot \nabla q = \nu \nabla^2 \omega - \frac{\delta_E}{2h} \omega (\omega + f), \quad (48)$$

$$\omega = -\frac{1}{h} \nabla^2 \psi + \frac{1}{h^2} \nabla h \cdot \nabla \psi + \frac{\delta_E}{2h} \frac{2}{h^2} J(h, \psi), \quad (49)$$

donde $\delta_E = \left(\frac{2\nu}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$ es el espesor de la capa de Ekman y $h(x, y)$ la profundidad del fluido. Los términos que involucran al espesor de la capa de Ekman en (48) son debidos a la fricción de Ekman, donde el término del lado izquierdo representa la corrección no lineal de los términos de advección y el del lado derecho representa los efectos de estiramiento lineales y no lineales asociados al bombeo de Ekman. El decaimiento de la estructura dipolar es inducido por difusión de vorticidad, expansión radial y efectos de la fricción en el fondo (Zavala Sansón *et al.*, 2001).

III. Interacción del dipolo con el escalón topográfico

Las estructuras dipolares tienen un movimiento característico que consiste en la autopropagación de los dos vórtices que lo constituyen en la dirección de su eje de simetría. El objetivo de este capítulo es estudiar el comportamiento de un dipolo que pasa sobre un escalón topográfico orientado perpendicularmente a su trayectoria en un sistema en rotación. Para comprender los procesos físicos fundamentales en este proceso se realizaron experimentos en el laboratorio y simulaciones numéricas. Se analizaron cuatro casos: el dipolo que llega al escalón por la parte profunda del dominio y el que llega al escalón por la parte somera, utilizando dos alturas diferentes, aquí llamadas de escalón “bajo” y “alto”.

Los resultados muestran que el comportamiento del dipolo depende de la altura del escalón y que el modelo barotrópico utilizado en las simulaciones numéricas representa bastante bien los experimentos de laboratorio. La formación de una corriente a lo largo del escalón topográfico y la creación de nuevos vórtices por interacción con la topografía son algunos otros de los resultados obtenidos.

El Capítulo está organizado de la siguiente manera: En las Secciones §III.1 y §III.2 se investiga la interacción de estructuras dipolares con un escalón de 1 y 5 cm de altura, respectivamente, y en §III.3 se investiga la presencia de un escalón límite.

III.1. Escalón “bajo”

Para comprender el efecto de la topografía sobre el dipolo se investigarán las trayectorias y los cambios estructurales producidos por la interacción con el escalón topográfico considerado. En esta sección se presenta el caso de un escalón cuya altura es muy

pequeña respecto a la altura total del vórtice.

III.1.1. Experimentos de laboratorio

Los experimentos de laboratorio fueron realizados en un tanque de fondo cuadrado ($L_x \times L_y = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$) lleno de agua. La profundidad de la columna de agua en la región más profunda del dominio es $H_0 = 20 \text{ cm}$ y la velocidad de rotación del tanque fue mantenida constante, $\Omega = 0.42 \text{ s}^{-1}$. La velocidad de propagación media del dipolo fue $U \simeq 0.5 \text{ cm s}^{-1}$ en el eje longitudinal x . El decaimiento inducido por el fondo está dado por el periodo de Ekman, $T_E \equiv H_0/(\nu\Omega)^{\frac{1}{2}}$, cuyo valor típico es $T_E \approx 280 \text{ s}$, para $\nu = 0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ (viscosidad cinemática del agua a 20° C). Este tiempo es mucho más largo que el periodo de rotación, $T = 4\pi/f \approx 12 \text{ s}$, por lo que los vórtices son mayoritariamente afectados por la rotación y no tanto por el decaimiento de Ekman. El número de Reynolds se puede definir como $Re = \frac{UL}{\nu}$, donde L es la escala característica de longitud del dipolo, la cual es aproximadamente $L \sim 10 \text{ cm}$. En el presente experimento $Re \simeq 500$ lo que indica la débil influencia de la viscosidad en el movimiento. El escalón topográfico, con $\Delta h = 1 \text{ cm}$ de altura, está dispuesto perpendicularmente a la dirección inicial de propagación del dipolo.

En la Figura 4 se presentan las fotografías relativas al experimento del dipolo que se mueve hacia el escalón por la parte profunda del dominio, es decir, de izquierda a derecha. En esta y en las subsiguientes figuras de resultados experimentales y numéricos, la parte izquierda del dominio es profunda y la derecha corresponde a la parte somera. Inicialmente, el dipolo sigue una trayectoria perpendicular al escalón ($t = 30\text{-}60 \text{ s}$), pero al cruzarlo ($t = 90 \text{ s}$), su trayectoria es desviada en el sentido anticiclónico. Esta desviación se mantiene durante el resto del experimento ($t = 120\text{-}180 \text{ s}$), hasta terminar con una orientación casi de retorno. Durante los últimos 30 s el movimiento del dipolo es muy lento debido a su decaimiento por efectos viscosos. El comportamiento observado

en esta figura fue sistemáticamente observado en varias repeticiones del experimento, por lo que se puede considerar un resultado bastante robusto y consistente.

El cambio de trayectoria del dipolo puede ser explicado en términos de la conservación material de vorticidad potencial (dado que los efectos viscosos son muy débiles)

$$\frac{\omega + f}{h} = \text{constante}. \quad (50)$$

Puesto que $f = 2\Omega$ se mantiene constante, la variación de la altura de la columna de agua, h , induce el cambio en la vorticidad relativa, ω , para mantener constante la vorticidad potencial. Las columnas de vorticidad son comprimidas después de que el dipolo sube el escalón, lo cual implica que la vorticidad relativa disminuye. Como consecuencia, el ciclón pierde intensidad mientras el anticiclón se intensifica. Debido a esta asimetría inducida por la topografía el dipolo recorre una trayectoria curva en la dirección de la estructura más intensa, en este caso del anticiclón.

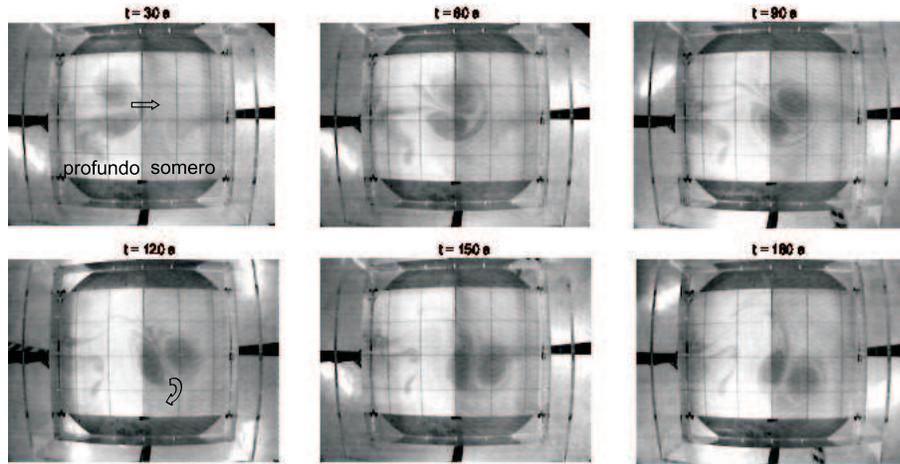


Figura 4: Vista superior del dipolo desplazándose de la parte profunda hacia la parte somera del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.42 \text{ rad s}^{-1}$; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20 \text{ cm}$; altura del escalón $\Delta h = 1 \text{ cm}$.

En la Figura 5 se presenta, para los mismos parámetros experimentales, el caso en que el dipolo llega al escalón por la parte somera del dominio. Inicialmente el dipolo

sigue una trayectoria perpendicular al escalón ($t = 30-60$ s) y al cruzarlo ($t = 90$ s), su trayectoria es también desviada pero ahora en la dirección del ciclón. Ahora, las columnas de vorticidad son estiradas al aumentar la profundidad de la columna de fluido, por lo que la vorticidad relativa aumenta. Por lo tanto el anticiclón pierde intensidad y el ciclón gana, lo que induce la trayectoria curva en la dirección del ciclón. Cabe señalar, nuevamente, que este comportamiento fue observado en varios experimentos. Por supuesto, las trayectorias no son idénticas debido a que el método de generación del dipolo implica variaciones inevitables en su dirección y velocidad inicial. Aún así, las desviaciones de la trayectoria del vórtice, subiendo o bajando el escalón, son consistentes con la intensificación de una de sus mitades por efectos de estiramiento o compresión al cruzar la topografía.

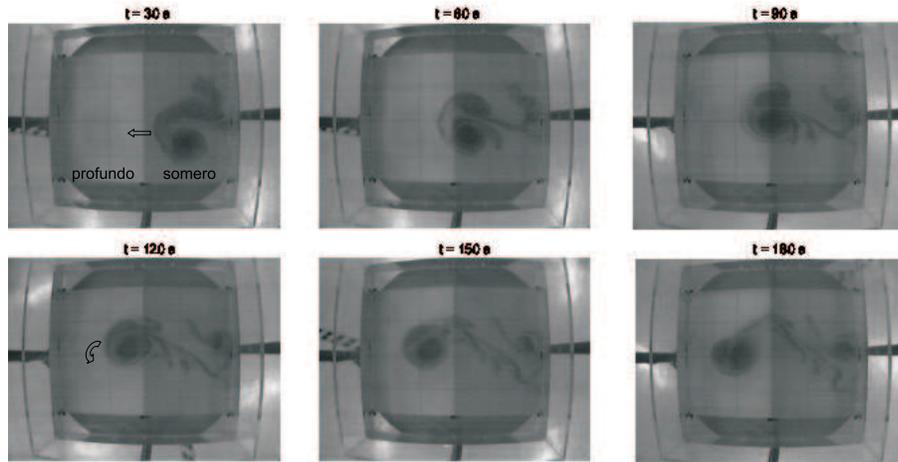


Figura 5: Vista superior del dipolo desplazándose de la parte somera hacia la parte profunda del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.42 \text{ rads}^{-1}$; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20 \text{ cm}$; altura del escalón $\Delta h = 1 \text{ cm}$.

III.1.2. Simulaciones numéricas

Las simulaciones numéricas fueron realizadas con un modelo de diferencias finitas descrito en §II.3, que resuelve la ecuación de vorticidad (48) en la formulación $\omega - \psi$.

El dominio considerado es un cuadrado de $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$, el cual es discretizado con una malla de 129×129 puntos. Las condiciones de frontera laterales son de no deslizamiento para simular las paredes del tanque. El parámetro de Coriolis considerado es $f = 1 \text{ s}^{-1}$ y la viscosidad cinemática $\nu = 0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. El paso temporal para todas las simulaciones fue de $\Delta t = 0.1 \text{ s}$. El modelo numérico incluye términos de fricción de Ekman lineal y no lineal, los cuales permiten que el modelo represente los efectos de fricción en el fondo característicos de flujos reales (Zavala Sansón y van Heijst, 2002). La condición inicial en todas las simulaciones es el dipolo de Lamb descrito en §II.1.4. La vorticidad máxima es 1 s^{-1} y la atmósfera del dipolo tiene un radio de $a = 8 \text{ cm}$. De manera análoga a los experimentos, el dipolo se mueve inicialmente a lo largo del eje x .

El principal objetivo de las simulaciones numéricas es analizar cualitativamente si éste reproduce los efectos físicos observados durante la interacción del dipolo con el escalón topográfico en los experimentos. Además, el análisis de los resultados del modelo son de utilidad para estudiar con mayor detalle algunos de los procesos más complejos que ocurren en el escalón y que son difíciles de apreciar en los experimentos.

La Figura 6 muestra una secuencia de los contornos de vorticidad en la simulación del dipolo moviéndose de la parte profunda hacia la somera. Se puede verificar que el esquema numérico reproduce bastante bien los resultados obtenidos en laboratorio. Claramente, la distribución de vorticidad es afectada por la presencia del escalón topográfico colocado en $x = 50 \text{ cm}$. Cuando el dipolo se acerca al escalón se crea vorticidad negativa en el mismo debido a efectos de compresión, al empujar fluido hacia la parte somera. Como consecuencia existe un flujo de la parte somera hacia la profunda en ambos lados del dipolo, el cual se refleja en la creación de vorticidad positiva en el escalón ($t = 30 \text{ s}$). Al cruzar la topografía, las columnas del dipolo son comprimidas, por lo que la parte ciclónica se torna más débil que la anticiclónica. Por lo tanto, la nueva trayectoria que adquiere el dipolo por pérdida de simetría en la vorticidad de

las columnas de fluido es en el sentido de la parte más intensa, esto es, del anticiclón. Se debe notar que debido a la trayectoria curva del dipolo, una cantidad de fluido en la parte somera es desplazada a la profunda, formando en esa región del dominio una celda de vorticidad positiva considerable ($t = 90-150$ s). La nueva distribución de vorticidad originada a lo largo del escalón por fluido que es arrastrado de la parte somera del dominio hacia la parte profunda o viceversa, interactúa con la estructura dipolar. Se observa también que una región de vorticidad relativa se acumula en la zona central superior del dominio, la cual se va a mantener mientras el dipolo cruza el escalón en la zona central. Esta notoria actividad es debida a un débil flujo hacia el norte a lo largo del escalón que va a interactuar con la frontera superior del dominio.

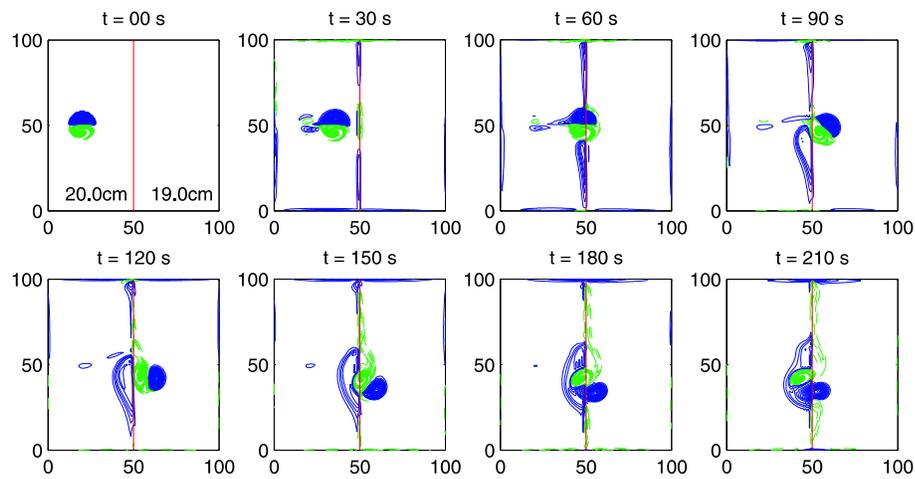


Figura 6: Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte profunda a la somera del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (20 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$; radio inicial del dipolo de Lamb $a = 8 \text{ cm}$; circulación inicial $\Gamma_0 = 60 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$; vorticidad máxima inicial $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$; contornos de vorticidad $\Delta\omega = 0.01 \text{ s}^{-1}$. Escalón topográfico de altura $\Delta h = 1 \text{ cm}$ en $x = 50 \text{ cm}$.

El mecanismo de compresión y estiramiento para la creación de vorticidad a lo largo del escalón es evidente en la Figura 7, correspondiente al seguimiento de trazadores pasivos para los mismos tiempos de la figura anterior. Se colocaron 1000 trazadores dentro de la atmósfera inicial del dipolo y otros 2000 distribuidos en dos hileras, de 1000 cada

una, en la parte profunda y otra en la parte somera del dominio, ambas orientadas paralelamente al escalón. Nótese, por ejemplo, que algunas partículas inicialmente colocadas en la parte somera del dominio son arrastradas hacia la parte profunda por el movimiento del dipolo ($t = 60-120$ s) formando la celda con vorticidad ciclónica mostrada en la Figura 5.

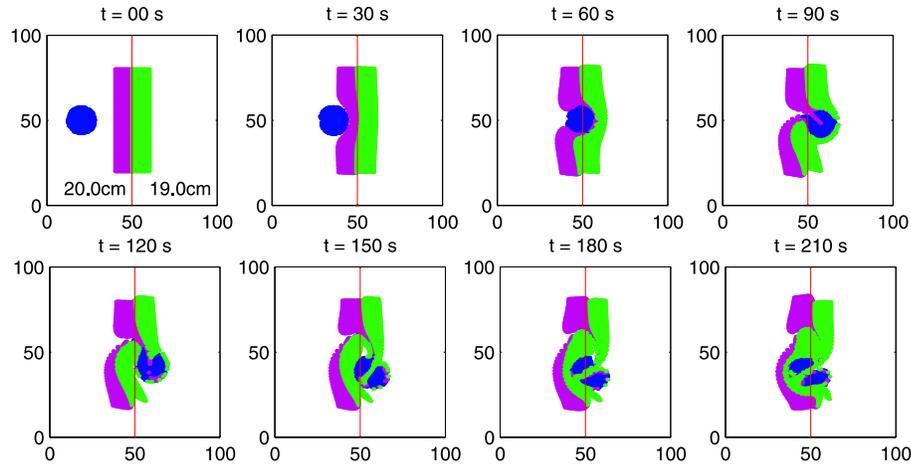


Figura 7: Evolución de trazadores pasivos distribuidos a lo largo del escalón y en la región inicial del dipolo en la misma simulación numérica descrita en la Figura 6.

Para el caso en que el dipolo baja el escalón el comportamiento es parecido al caso anterior con los signos de vorticidad intercambiados, aunque presenta algunas diferencias como se muestra en la Figura 8. En este caso, el dipolo logra bajar el escalón y, por efectos de conservación de vorticidad potencial, la trayectoria del vórtice se curva hacia el lado del ciclón. También de forma análoga, la trayectoria curva del dipolo desplaza fluido de la parte profunda a la somera, creando en esa región una celda de vorticidad negativa ($t = 90-150$ s).

Un resultado que ocurre en ambos casos es que la interacción del dipolo con el escalón da origen a un flujo de vorticidad hacia la parte superior del dominio, de manera que la región somera queda siempre a la derecha del sentido del flujo. La Figura 9 muestra la secuencia de trazadores correspondiente al dipolo que baja el escalón, donde se observa

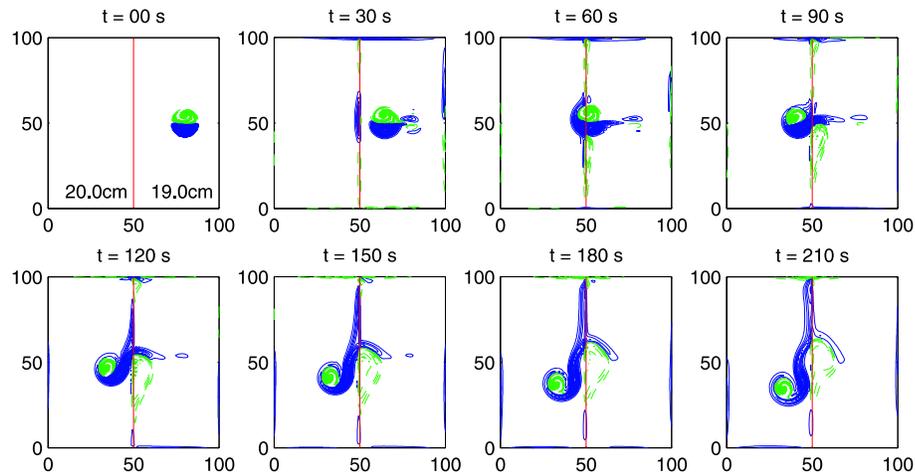


Figura 8: Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte somera a la profunda del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (80 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$. Parámetros del dipolo igual que en la Figura 6.

el movimiento de partículas hacia uno y otro lado del dominio.

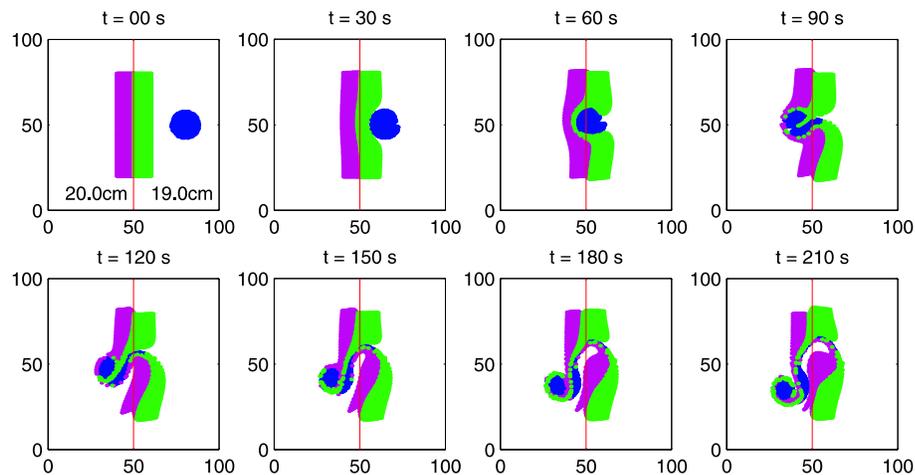


Figura 9: Evolución de trazadores pasivos distribuidos a lo largo del escalón y en la región inicial del dipolo en la misma simulación numérica descrita en la Figura 8.

Para analizar con mayor profundidad los resultados de las simulaciones numéricas, se graficaron en la Figura 10 las posiciones de los centros de máxima vorticidad del dipolo antes y después de pasar el escalón topográfico. Para hacer la cuantificación numérica de las trayectorias se calcularon las posiciones de los centros de máxima vorticidad absoluta.

Los centros son obtenidos en intervalos de tiempo de 10 s.

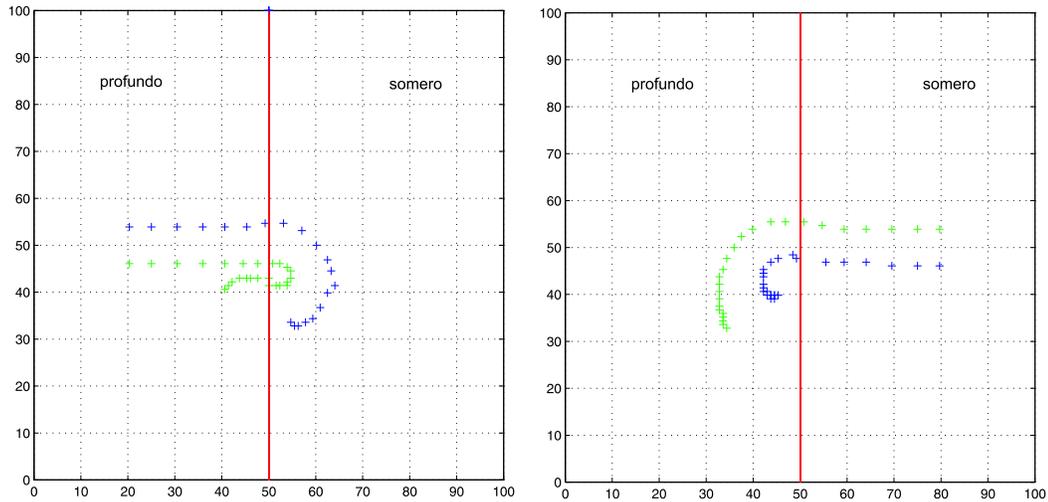


Figura 10: Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta del dipolo desplazándose de la parte profunda a la somera (panel izquierdo) y de la parte somera a la profunda (panel derecho) cada 10 s.

Cuando el dipolo se mueve de la parte profunda a la somera (panel izquierdo), podemos verificar que existe un ligero alejamiento de los centros de máxima vorticidad absoluta justo antes de llegar al escalón. Este comportamiento es debido al ensanchamiento de las columnas de fluido por la disminución de la profundidad de la capa de fluido, efecto que se refleja antes de que el centro pase el escalón. Se puede verificar también que los valores de la vorticidad de las columnas de fluido son alterados por el efecto del escalón topográfico. La vorticidad de la columna ciclónica disminuye y la anticiclónica aumenta (en valor absoluto). Después de atravesar el escalón, la trayectoria de los centros del dipolo es aproximadamente circular y tiende a regresar hacia la región profunda. Por supuesto, el movimiento es cada vez más lento conforme el vórtice se disipa por efectos viscosos.

El efecto inverso es observado para el caso en que el dipolo baja el escalón (panel derecho): debido al estiramiento de las columnas de vorticidad al aumentar la profundi-

dad, los centros de máxima vorticidad absoluta experimentan un pequeño acercamiento entre sí, justo antes de llegar al escalón. Aunque la trayectoria posterior también es curva, no alcanza a regresar al escalón, como en el caso anterior.

III.1.3. Modelo de vórtices puntuales

Para encontrar el radio de las trayectorias curvas del dipolo después de haber sentido la influencia del escalón, se hizo uso del modelo de vórtices puntuales discutido en §II.1.3.

En este modelo, los vórtices del dipolo se mueven uniformemente en línea recta hasta encontrar el escalón. Cuando el dipolo experimenta cambios en la profundidad, los valores de la circulación del ciclón y del anticiclón cambian, por lo que la simetría desaparece. Los cambios en la circulación de las dos estructuras están dados por

$$\Gamma^+ = \Gamma_0 + fA_0 \left[1 - \frac{H_0}{H} \right], \quad y \quad (51)$$

$$\Gamma^- = -\Gamma_0 + fA_0 \left[1 - \frac{H_0}{H} \right], \quad (52)$$

donde H_0 (H) representa la profundidad antes (después) de cruzar el escalón, $\pm\Gamma_0$ es la circulación inicial de cada polo y A_0 su área asociada. Una vez que la circulación es modificada, su rapidez está dada por

$$U_1 = \frac{|\Gamma^-|}{2\pi r}, \quad (53)$$

$$U_2 = \frac{|\Gamma^+|}{2\pi r}, \quad (54)$$

donde U_1 y U_2 corresponden al ciclón y al anticiclón, respectivamente (debe recordarse que la rapidez de cada vórtice depende de la circulación del vórtice contiguo).

Considérese el caso en que el dipolo viaja de la región profunda a la somera. Debido a la asimetría que lo caracteriza después de haber sufrido la influencia de los cambios topográficos, la trayectoria del dipolo es circular. Esto se desprende del hecho de que la separación entre los vórtices sigue siendo constante aunque se muevan con rapidez diferente. Suponiendo que la rapidez angular a la que se mueven alrededor de dicho círculo es α , se tiene que (ver Figura 11)

$$\frac{U_1}{R+r} = \alpha = \frac{U_2}{R}. \quad (55)$$

Así, el radio de la trayectoria del anticiclón es

$$R = \frac{U_2 r}{U_1 - U_2}. \quad (56)$$

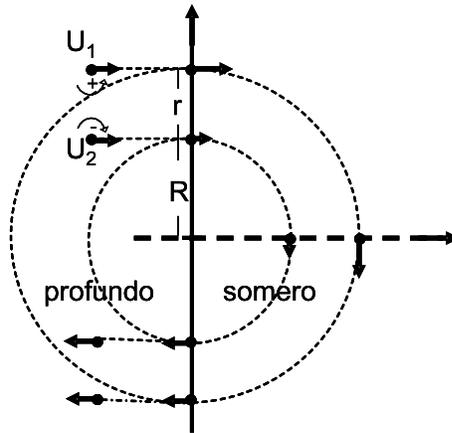


Figura 11: Representación esquemática de la trayectoria de un dipolo (vórtices puntuales) que sube un escalón topográfico.

Los radios calculados con el modelo de vórtices puntuales son $R+r = 15.3$ cm y $R = 7.3$ cm, para el ciclón y anticiclón, respectivamente. Como se puede observar en la

Figura 12(a), los radios obtenidos en la simulación numérica con el modelo barotrópico coinciden cuando el dipolo cruza el escalón, pero son diferentes para tiempos posteriores en los que las trayectorias dibujadas no coinciden. Nótese también que el dipolo puntual recupera su trayectoria recta al cruzar de regreso el escalón. Como el modelo de vórtices puntuales es un modelo inviscido (no contempla efectos viscosos), la discrepancia con el modelo completo para tiempos largos (varios periodos de rotación) era previsible.

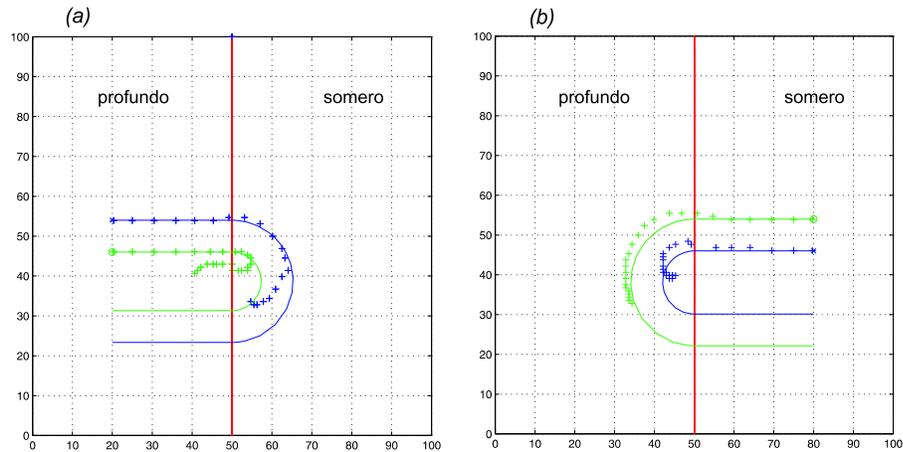


Figura 12: Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta de la simulación numérica presentada en la Figura 6 cada $\Delta t = 10$ s (+) y trayectorias de los vórtices puntuales (-): (a) dipolo desplazándose de profundo a somero y (b) de somero a profundo. Color negro (gris) vorticidad positiva (negativa).

Haciendo el mismo análisis para el caso en que el dipolo baja el escalón (Figura 12(b)), los radios obtenidos con el modelo de vórtices puntuales fueron, $R+r = 16.0$ cm y $R = 8.0$ cm, ahora para el anticiclón y ciclón, respectivamente. Nuevamente, ambos modelos coinciden razonablemente cuando el dipolo cruza el escalón, pero posteriormente la trayectoria obtenida en el modelo barotrópico es mucho más cerrada.

Para verificar que la viscosidad es la causa de que los radios sean diferentes, se hizo una corrida del modelo numérico barotrópico sin viscosidad (es decir, sin fricción del fondo y con viscosidad lateral muy pequeña para mantener estabilidad numérica) y

se comparó con el modelo de vórtices puntuales (Figura 13). Al no considerar los efectos viscosos en el modelo de diferencias finitas, los radios de las trayectorias aumentan de tal manera que son ahora superiores a los obtenidos por el modelo de vórtices puntuales.

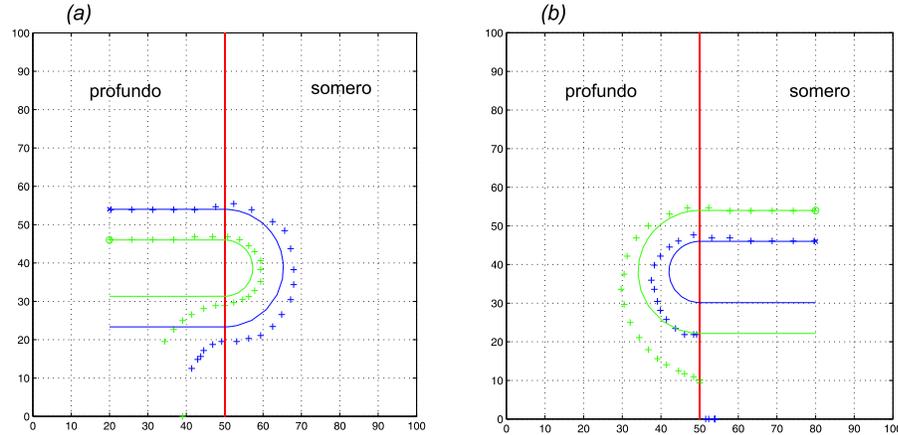


Figura 13: Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta de la simulación numérica sin fricción en el fondo cada $\Delta t = 10$ s (+) y trayectorias de los vórtices puntuales (-): (a) dipolo desplazándose de profundo a somero y (b) de somero a profundo.

Se puede concluir que el modelo de vórtices puntuales representa bien la desviación de la trayectoria del dipolo al cruzar el escalón, la cual es debida a la modificación de la circulación por efectos de compresión y estiramiento. Sin embargo, este modelo no consigue representar de manera precisa las trayectorias de un dipolo con distribución continua de vorticidad que pasa un escalón topográfico. La causa principal son los efectos viscosos y no lineales que están ausentes en los vórtices puntuales, y que producen el decaimiento y deformación de los dipolos barotrópicos. Las diferencias entre ambos modelos se presentan, por lo tanto, para tiempos largos.

III.2. Escalón “alto”

En esta sección se presenta el caso de un dipolo que se mueve hacia un escalón cuya altura es una fracción significativa de la altura total del vórtice. El escalón está igual-

mente dispuesto de manera perpendicular a la dirección inicial de propagación del dipolo. De manera análoga al caso anterior, se investigarán las trayectorias y los cambios estructurales producidos por la interacción con el escalón topográfico considerado.

III.2.1. Experimentos de laboratorio

Los experimentos de laboratorio fueron realizados en un tanque de fondo rectangular ($L_x \times L_y = 100 \text{ cm} \times 150 \text{ cm}$) lleno de agua. La profundidad de la columna de agua en la región más profunda del dominio es $H_0 = 20 \text{ cm}$ y la velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.53 \text{ s}^{-1}$. Al igual que la sección anterior, la velocidad de propagación media del dipolo fue $U \simeq 0.5 \text{ cm s}^{-1}$ en el eje longitudinal x . La escala de tiempo del decaimiento inducido por el fondo es $T_E \approx 250 \text{ s}$. El número de Reynolds asociado al presente experimento es $Re = 500$. La diferencia principal es que el escalón topográfico tiene $\Delta h = 5 \text{ cm}$ de altura.

En el presente caso se pudo obtener los campos de velocidad y vorticidad asociados a los experimentos de laboratorio. Para ello se utilizó un método de seguimiento de partículas (PIV, PTV y HPV) descrito en §II.2.3. Los experimentos cuantificados no son los mismos que los visualizados con tinta; sin embargo, ambos fueron realizados bajo las mismas condiciones aproximadamente. Debido al método de formación del dipolo (forzamiento) se registran algunas diferencias, dado que la velocidad inicial y dirección de propagación de los vórtices puede ser diferente. Sin embargo, los experimentos fueron realizados varias veces y el comportamiento descrito en este trabajo fue el observado en la mayoría de ellos.

En la Figura 14 se presentan las fotografías relativas al experimento cualitativo del dipolo que se mueve hacia el escalón por la parte profunda del dominio. La posición del escalón está indicada por la línea vertical. El comportamiento del dipolo que encuentra un escalón topográfico de 5 cm es totalmente distinto del que encuentra uno de 1 cm.

El experimento muestra claramente la existencia de columnas de Taylor debidas a la rotación del sistema pero, a diferencia del caso anterior, el dipolo no logra cruzar el escalón. Inicialmente, el dipolo sigue una trayectoria perpendicular al escalón ($t = 30-60$ s), pero al acercarse a la topografía los dos vórtices se alejan entre sí ($t = 90$ s): el anticiclón es reflejado hacia la región profunda del dominio (se aleja del escalón), mientras el ciclón se distorsiona a lo largo de la topografía. Se puede observar que parte de la tinta asociada a la parte ciclónica del dipolo logra pasar el escalón topográfico hacia la región somera, mientras que no hay ningún flujo de tinta asociada a la parte anticiclónica hacia dicha región.

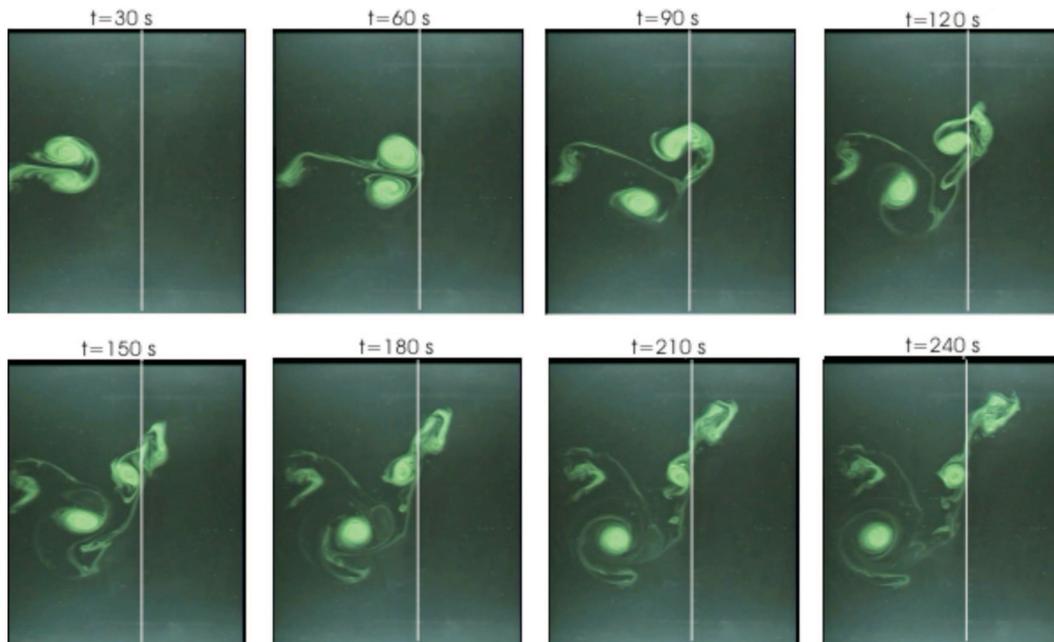


Figura 14: Vista superior del dipolo desplazándose de la parte profunda (izquierda) hacia la somera (derecha) del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.53 \text{ rad s}^{-1}$; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20 \text{ cm}$; altura del escalón $\Delta h = 5 \text{ cm}$.

En la Figura 15 se muestra una secuencia de los contornos de vorticidad obtenidos del experimento cuantitativo realizado por el método de seguimiento de partículas. Se observa que el anticiclón es reflejado por la interacción con una estructura ciclónica que

es originada en el escalón ($t = 30-60$ s) y que provoca que el anticiclón se mueva hacia la parte profunda del dominio. Como la celda de vorticidad ciclónica creada en el escalón es menos intensa que el anticiclón, la nueva estructura dipolar que se forma tiene una trayectoria curvilínea en el sentido anticiclónico. El movimiento del ciclón hacia el norte a lo largo del escalón es debido a la creación de vorticidad negativa por flujo de masa de la región profunda hacia la somera, dando origen a una débil celda de vorticidad negativa (visible a los $t = 90$ s). Este flujo es evidente en el experimento cualitativo donde se observa tinta en la parte somera del dominio, lo que sugiere que la celda de vorticidad que aparece en esa región es parte del ciclón que logra pasar el escalón ($t = 150-240$ s en la Figura 14).

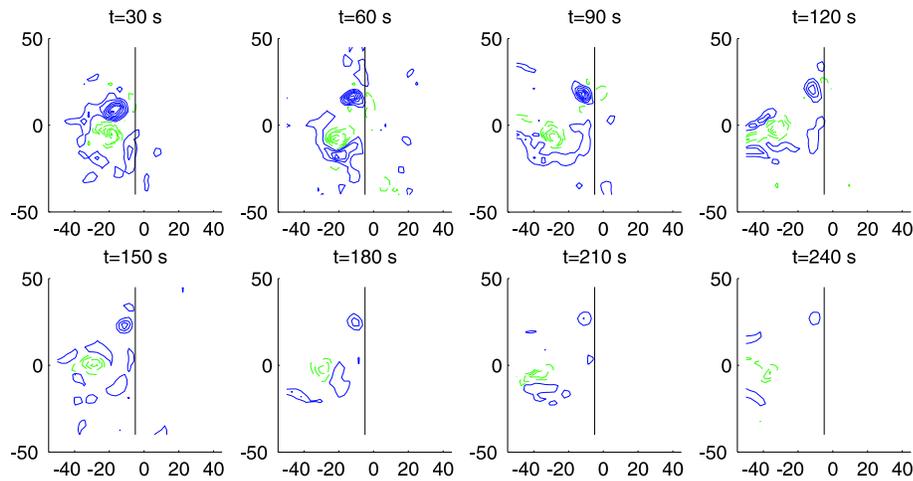


Figura 15: Contornos de vorticidad calculado del experimento de laboratorio del dipolo cruzando de la parte profunda (izquierda) a la somera (somera) del dominio. Contornos de vorticidad $\Delta\omega$ 0.05 s^{-1} . Líneas continuas (discontinuas) son contornos positivos (negativos). Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5$ cm.

En la Figura 16 se presentan las líneas de corriente y el campo de velocidades para dos instantes durante el experimento cuantitativo. El mecanismo de separación de los vórtices es observado cuando el dipolo llega al escalón ($t = 30$ s): una celda de circulación positiva creada por efectos de estiramiento se conecta al anticiclón, provocando que se aleje del escalón. Por otro lado, la circulación anticiclónica creada en la región

somera ($t = 150$ s) induce el movimiento del ciclón hacia el norte a lo largo del escalón, originando la corriente a lo largo de la topografía bien identificada en el resultado del campo de velocidades.

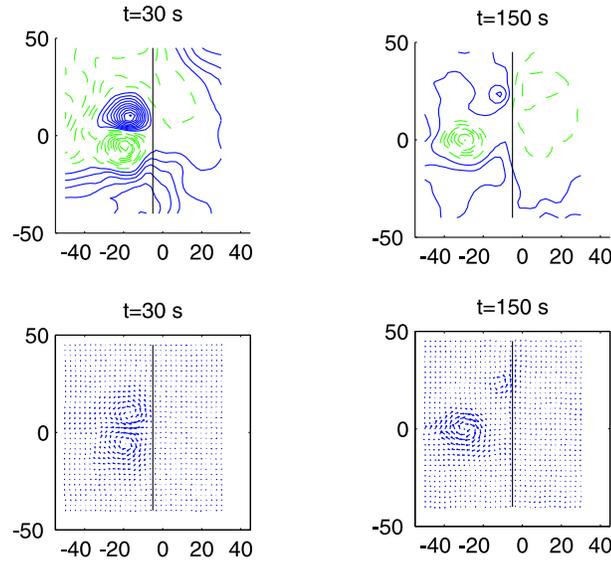


Figura 16: Contornos de la función de corriente y campo de velocidades para el experimento presentado en la Figura 15. Contornos de la función de corriente $\Delta\psi = 1 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. Líneas continuas (discontinua) son contornos positivos (negativos).

La Figura 17 muestra el comportamiento cualitativo del dipolo que llega al escalón por la parte somera del dominio. El resultado es similar a la interacción de un dipolo con una pared (Orlandi, 1990): ambas estructuras son reflejadas por la creación de dos vórtices menos intensos y de signos opuestos en el escalón haciendo que se alejen. La reflexión del ciclón al acercarse a un escalón hacia abajo se debe a efectos topográficos y es equivalente a la reflexión del anticiclón al aproximarse a un escalón hacia arriba, como se describió en el experimento anterior (ambas situaciones fueron analizadas para vórtices monopoles en Zavala Sansón *et al.* (1999)). En este caso, el flujo de la parte profunda hacia la somera implica la formación de una estructura anticiclónica que impide que el ciclón cruce el escalón. Sin embargo, este proceso no es simétrico, ya que la parte anticiclónica del dipolo se desplaza hacia el norte a lo largo del escalón antes de ser

igualmente reflejada.

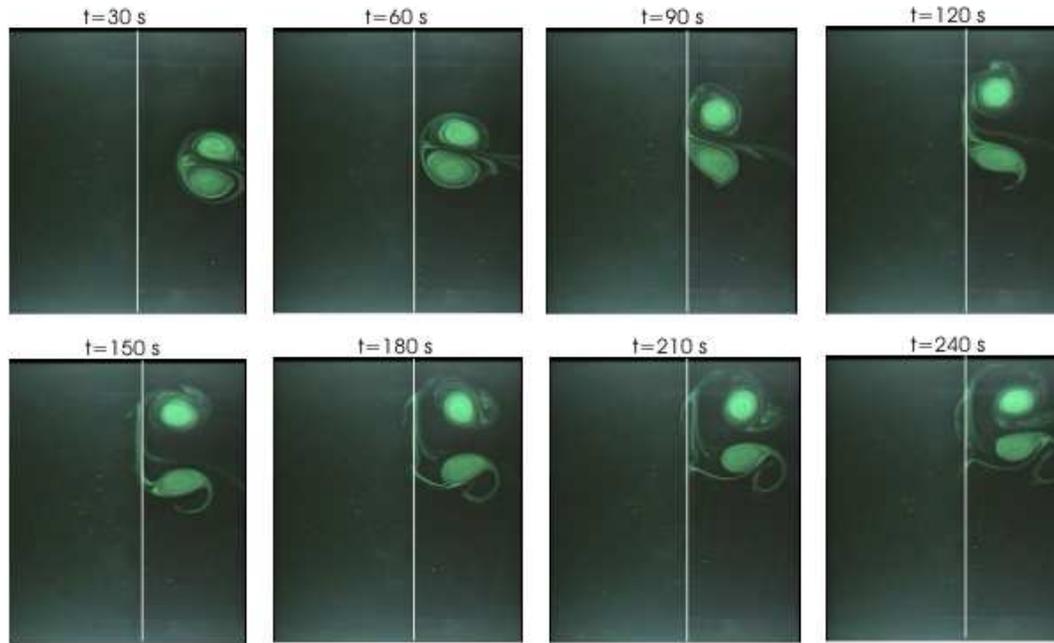


Figura 17: Vista superior del dipolo desplazándose de la parte somera (derecha) hacia la profunda (izquierda) del dominio. Parámetros experimentales: velocidad de rotación del tanque $\Omega = 0.53 \text{ rad s}^{-1}$; profundidad en la región izquierda $H_0 = 20 \text{ cm}$; altura del escalón $\Delta h = 5 \text{ cm}$.

En el experimento cuantitativo, donde se obtuvieron los campos de vorticidad, velocidad y líneas de corriente, se observó también este comportamiento de las dos estructuras. La Figura 18 muestra los contornos de vorticidad en el experimento del dipolo moviéndose de la parte somera hacia la parte profunda. Se observa que el ciclón es reflejado por la interacción con una celda de vorticidad negativa originada al sur de su posición ($t = 60 \text{ s}$), la cual induce el movimiento del ciclón hacia zonas lejanas al escalón topográfico. Esta vorticidad negativa es debida al flujo de masa existente de la región profunda hacia la región somera del dominio. En cuanto al anticiclón, su acercamiento al escalón da origen a la formación de vorticidad ciclónica distribuida a lo largo de la topografía en la región profunda, y esta nueva distribución de vorticidad provoca que el anticiclón se propague hacia el norte ($t = 30\text{-}150 \text{ s}$). Para tiempos posteriores el

anticiclón se aleja del escalón, debido probablemente a la interacción con la frontera superior del tanque.

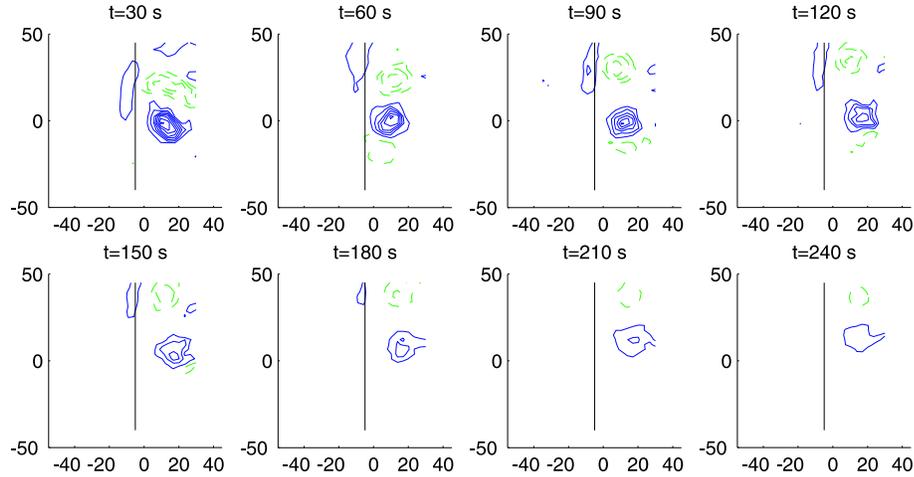


Figura 18: Contornos de vorticidad calculado del experimento de laboratorio del dipolo cruzando de la parte somera (derecha) a la profunda (izquierda) del dominio. Contornos de vorticidad $\Delta\omega$ 0.05 s^{-1} . Líneas continuas (discontinuas) son contornos positivos (negativos). Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5 \text{ cm}$.

En la Figura 19 se presenta, para el mismo experimento, los contornos de las líneas de corriente y campo de velocidad para dos instantes. Se observa que existe al sur de la estructura ciclónica un flujo de masa de la región profunda hacia la somera del dominio, la cual evita que este remolino cruce el escalón ($t = 60 \text{ s}$). También se puede apreciar la circulación positiva adyacente al anticiclón por la parte profunda, que induce su movimiento al norte. Del campo de velocidades se observa la corriente hacia el norte a lo largo del escalón por la interacción del dipolo con la topografía.

III.2.2. Simulaciones numéricas

Las simulaciones numéricas fueron realizadas con el mismo modelo de diferencias finitas utilizado en la investigación del caso del escalón bajo. El hecho de haber logrado cuantificar los experimentos relativos al escalón alto, permite que la comparación entre

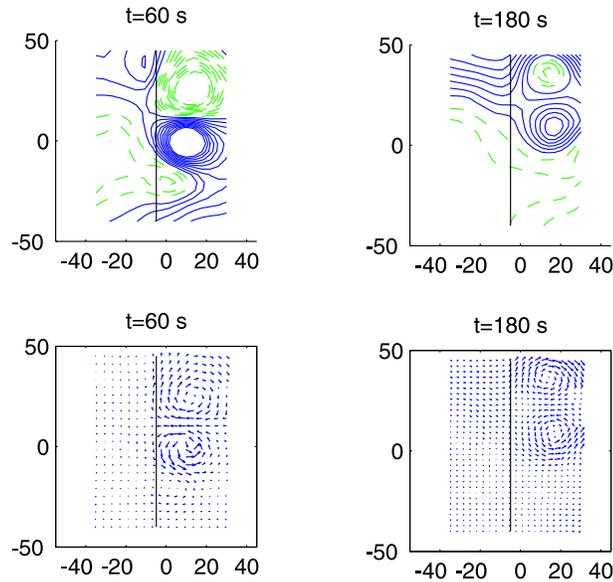


Figura 19: Contornos de la función de corriente y campo de velocidades para el experimento presentado en la Figura 18. Contornos de la función de corriente $\Delta\psi = 1 \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$. Líneas continuas (discontinua) son contornos positivos (negativos).

experimento y simulación numérica sea más efectiva. El dominio considerado es igualmente un cuadrado de $100 \times 100 \text{ cm}$, discretizado con una malla de 129×129 puntos. Las condiciones de frontera laterales son nuevamente de no deslizamiento para simular las paredes del tanque. El parámetro de Coriolis considerado es $f = 1 \text{ s}^{-1}$ y la viscosidad cinemática $\nu = 0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. El paso temporal para todas las simulaciones fue $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

La Figura 20 muestra una secuencia de los contornos de vorticidad relativos a la simulación del dipolo moviéndose de la parte profunda hacia la somera. Nuevamente el esquema numérico reproduce bastante bien los resultados obtenidos en el laboratorio. La reflexión del anticiclón por efecto de una celda de vorticidad positiva creada en el escalón se aprecia claramente ($t = 30 \text{ s}$ en adelante). Asimismo, la distorsión del ciclón hacia el norte a lo largo del escalón es visiblemente reproducido ($t = 90 \text{ s}$ en adelante).

De la Figura 21, relativa al seguimiento de trazadores pasivos, se puede observar

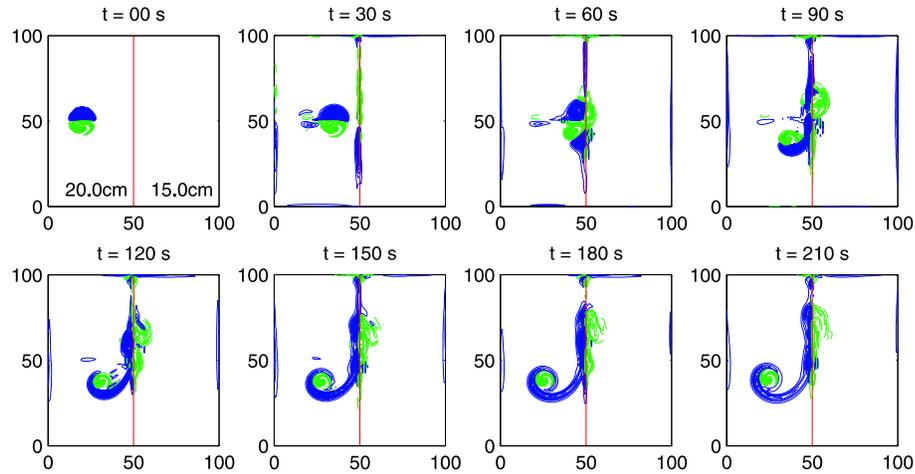


Figura 20: Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte profunda a la somera del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (20 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$; radio inicial del dipolo de Lamb $a = 8 \text{ cm}$; circulación inicial $\Gamma_0 = 60 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$; vorticidad máxima inicial $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$; contornos de vorticidad $\Delta\omega = 0.01 \text{ s}^{-1}$. Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5 \text{ cm}$ en $x = 50 \text{ cm}$.

que existen partículas inicialmente en la atmósfera del dipolo que logran pasar el escalón topográfico ($t = 60 \text{ s}$). Lo mismo se encuentra en los experimentos cualitativos, como el mostrado en la Figura 14, donde se aprecia tinta en la región somera del dominio. Esto muestra que el ciclón, o parte del mismo, logra pasar de la zona profunda a la somera. También se puede observar la gran cantidad de partículas inicialmente dispuestas en la región somera del dominio que, por influencia del acercamiento del dipolo, pasan el escalón hacia la región profunda ($t = 60 \text{ s}$). El estiramiento de estas columnas de fluido evidencia la creación de la celda de vorticidad positiva responsable de la reflexión del anticiclón hacia zonas lejanas del escalón.

En la Figura 22 se hace la comparación del decaimiento de los máximos de vorticidad positiva y negativa, respectivamente, medidos en el modelo experimental y en el numérico. Los valores de la vorticidad son normalizados al tiempo $t = 30 \text{ s}$. Como se puede verificar, el decaimiento de los máximos del ciclón y anticiclón son bastante pare-

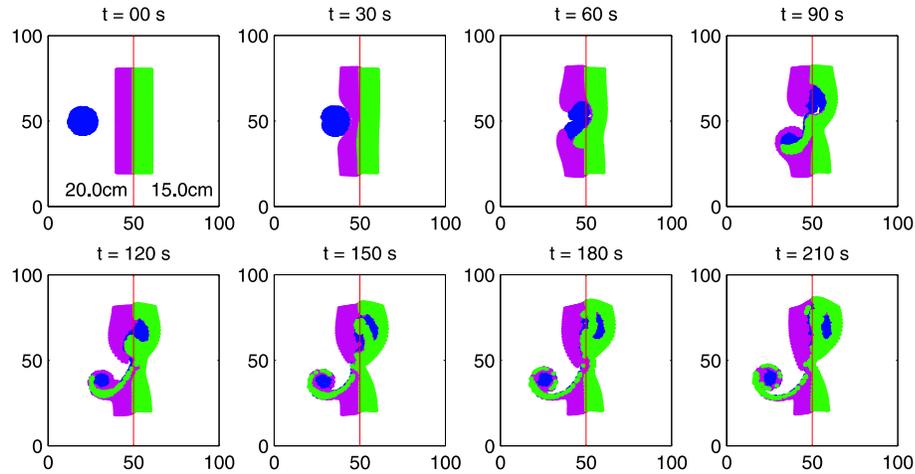


Figura 21: Evolución de trazadores pasivos distribuidos al largo del escalón y en la región inicial del dipolo para las mismas condiciones de la simulación numérica descrita en la Figura 20.

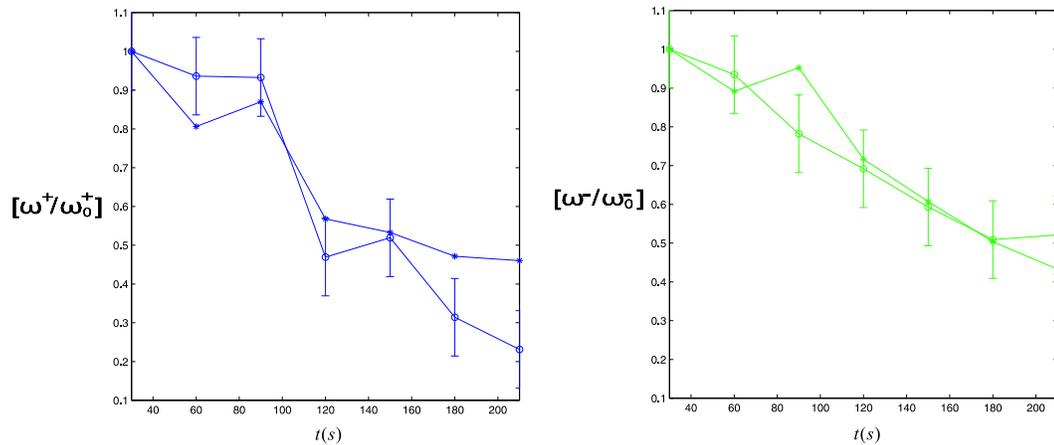


Figura 22: Máximos de vorticidad positiva y negativa normalizados a la vorticidad a $t = 30$ s relativos al problema del dipolo que sube el escalón [(o) experimento; (-*) simulación numérica] para intervalos de tiempo de 30 s. Las barras representan el 10% de error.

cidos entre el experimento y la simulación durante los 210 s mostrados. La vorticidad ciclónica decae sensiblemente cuando el ciclón se distribuye a lo largo del escalón ($t = 100$ -200 s).

Para el caso en que el dipolo baja el escalón topográfico, existen algunas diferencias

significativas entre los experimentos y las simulaciones numéricas. La reflexión del ciclón es bien representada en la simulación, pero el comportamiento del anticiclón es distinto a lo observado experimentalmente. En la Figura 23 se muestra la secuencia de los contornos de vorticidad de la simulación numérica correspondiente. La distribución de vorticidad parece representar bien el comportamiento de la parte ciclónica del dipolo, la cual es impulsada a moverse de regreso hacia la parte somera. En contraste, la parte anticiclónica pierde su estructura y se propaga a lo largo de la topografía. Aunque la razón de la discrepancia entre la simulación y experimento no es clara, se debe tomar en cuenta la velocidad inicial de propagación, la trayectoria casi perpendicular al escalón y las dimensiones del dipolo en los experimentos de laboratorio, como factores que pueden influenciar de manera significativa los resultados. Sin embargo, la reflexión del ciclón y el flujo hacia el norte a lo largo del escalón son bien representados en la simulación numérica.

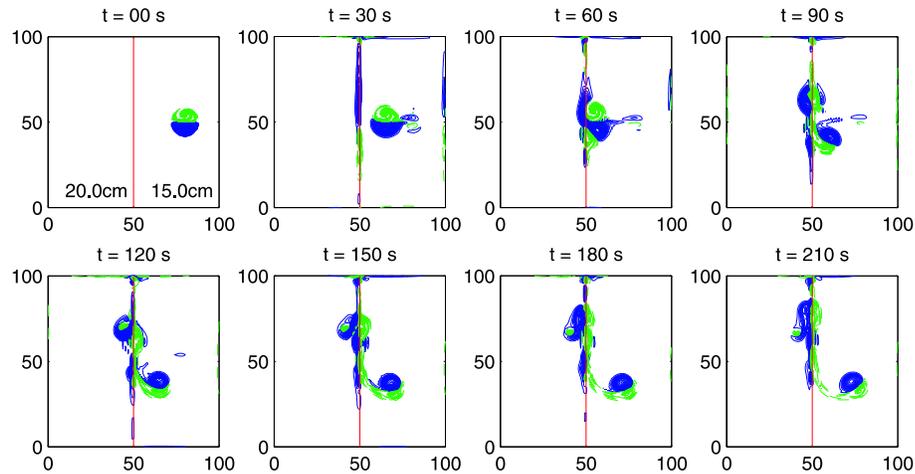


Figura 23: Campo de vorticidad calculado de la simulación numérica del dipolo cruzando de la parte somera a la profunda del dominio. Posición inicial del centro del dipolo $(x, y) = (80 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$; radio inicial del dipolo de Lamb $a = 8 \text{ cm}$; circulación inicial $\Gamma_0 = 60 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$; vorticidad máxima inicial $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$; contornos de vorticidad $\Delta\omega = 0.01 \text{ s}^{-1}$. Escalón topográfico de altura $\Delta h = 5 \text{ cm}$ en $x = 50 \text{ cm}$.

De la Figura 24, referente al resultado numérico de seguimiento de partículas, se

puede verificar que parte del anticiclón logra pasar de la parte somera del dominio hacia la profunda ($t = 90-210$ s). De la misma manera, se puede observar que la reflexión del ciclón es originada por la creación de una celda de vorticidad anticiclónica por flujo de masa de la región profunda hacia la región somera ($t = 90$ s).

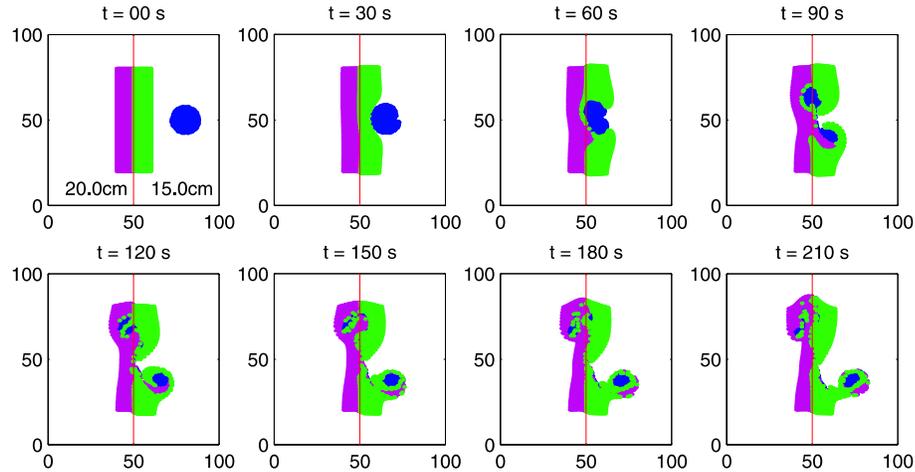


Figura 24: Evolución de trazadores pasivos distribuidos al largo del escalón y en la región inicial del dipolo para las mismas condiciones de la simulación numérica descrita en la Figura 23.

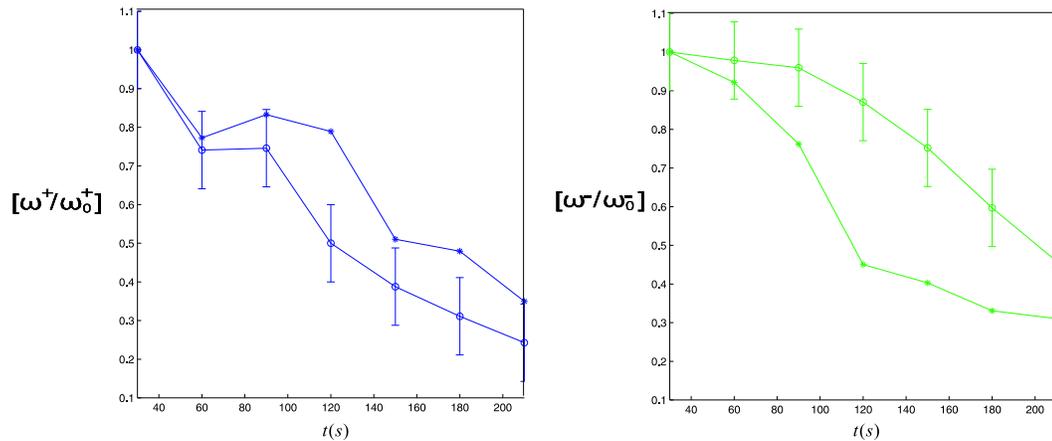


Figura 25: Máximos de vorticidad positiva y negativa normalizados a la vorticidad a $t = 30$ s relativos al problema del dipolo que baja el escalón [(o) experimento; (*) simulación numérica] para intervalos de tiempo de 30 s. Las barras representan el 10% de error.

En la Figura 25 se muestra la comparación del decaimiento de la vorticidad máxima

positiva y negativa, respectivamente, entre el modelo experimental y numérico, donde los resultados son normalizados con los valores de vorticidad en $t = 30$ s. Nótese que el modelo numérico representa relativamente bien el decaimiento de la vorticidad ciclónica. Entre los tiempos 60 y 90 s existe un aumento del máximo de vorticidad positiva tanto en la simulación como en el experimento, aumento que corresponde al periodo en que el dipolo interactúa con el escalón.

Por último, en la Figura 26 se graficaron las posiciones de los máximos de vorticidad, que corresponden aproximadamente con los centros de los vórtices. La posición de dichos centros es obtenida en forma análoga a la del escalón bajo en la Figura 10. En el panel izquierdo se muestran las posiciones del dipolo moviéndose de la parte profunda hacia la somera. Se observa que la trayectoria del ciclón sigue a lo largo del escalón, mientras que el anticiclón es reflejado hacia la región profunda del dominio. Sin embargo, debido a la creación de vorticidad por la interacción del dipolo con la topografía variable, no es posible seguir exactamente el punto central del ciclón, el cual pierde parte de su estructura. En el panel derecho se muestran las posiciones de los vórtices de la simulación numérica del dipolo moviéndose de la parte somera hacia la profunda. Se observa que las trayectorias resultantes son casi simétricas a las obtenidas para el caso anterior, pero ahora es el anticiclón el que sigue el escalón topográfico mientras que el ciclón es reflejado. Nótese que en ambas situaciones los vórtices se comienzan a separar poco antes de llegar al escalón.

III.2.3. Modelo de vórtices puntuales

En el presente caso, la mayor parte del dipolo no logra cruzar el escalón, el cual parece funcionar casi como una pared cuando tiene dimensiones “altas”. Este comportamiento justifica el intento de estudio de las trayectorias observadas recurriendo a la utilización de imágenes para representar el efecto de la topografía. Como la interac-

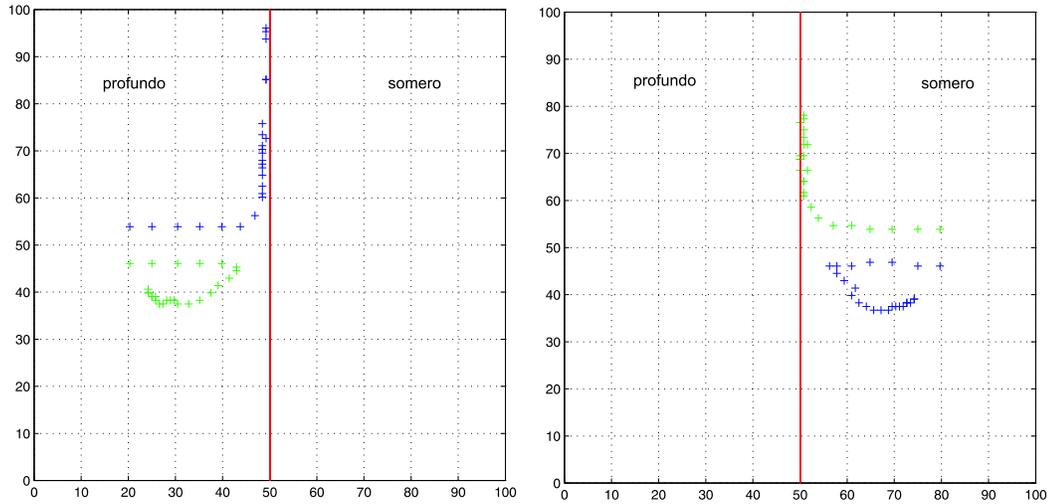


Figura 26: Posiciones de los máximos de vorticidad absoluta del dipolo desplazándose de la parte profunda a la somera (panel izquierdo) y de la parte somera a la profunda (panel derecho) cada 10 s.

ción de los vórtices con el escalón topográfico es similar a la conocida interacción de un dipolo con una pared (ver por ejemplo, Orlandi, 1990), se desarrolló un modelo de vórtices puntuales donde se utiliza el método de pseudo-imágenes discutido en §II.1.3. En este modelo, los vórtices del dipolo se mueven uniformemente en línea recta hacia el escalón y, al acercarse, empiezan a sentir la influencia de las imágenes colocadas al otro lado de la topografía con circulación de signos opuestos e intensidad dependiente de la profundidad. Las trayectorias de las llamadas pseudo-imágenes son forzadas a ser las trayectorias “espejo” de los vórtices del dipolo.

La Figura 27 muestra la disposición del dipolo puntual y sus pseudo imágenes asociadas. La circulación de las pseudo imágenes está dada por la ecuación (40), que en este caso son

$$\Gamma^+ = \Gamma_0 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \quad (57)$$

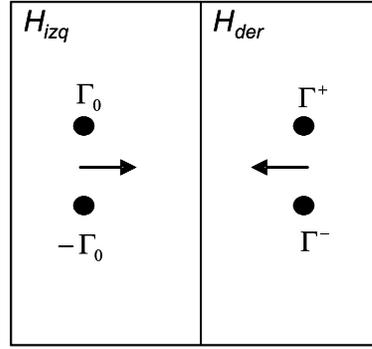


Figura 27: Representación esquemática del modelo de vórtices puntuales utilizando pseudo imágenes.

$$\Gamma^- = -\Gamma_0 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right), \quad (58)$$

donde ahora $\gamma = \frac{H_{izq}}{H_{der}}$ es la razón de las profundidades del lado izquierdo y derecho. La trayectoria del vórtice ciclónico, por ejemplo, impulsado por su imagen hacia el escalón está dada por

$$y = A \left| \frac{x}{r} \right|^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \text{sgn}(x)}, \quad (59)$$

donde A es una constante positiva, y $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ es la distancia entre el vórtice y el origen. Cuando $\gamma < 1$, la trayectoria del vórtice puede ser interpretada como la respuesta a la influencia de una pseudo-imagen de signo contrario producida en el lado opuesto del escalón. Cuando $\gamma > 1$, se tiene una pseudo-imagen de circulación del mismo signo.

En la Figura 28 se presentan las trayectorias encontradas con el modelo de vórtices puntuales basado en la utilización de pseudo-imágenes. Las trayectorias son referentes al ciclón que se mueve en la dirección $+x$ y encuentra un escalón topográfico colocado en $x = 0$ cm (nótese que este sistema está rotado 90° respecto al de Johnson y McDonald). Las diversas trayectorias corresponden a diferentes alturas del escalón. Considérese la diferencia de profundidades como $\delta h = H_{der} - H_{izq}$. Para $\delta h < 0$ tenemos un escalón hacia arriba, mientras que para $\delta h > 0$ es hacia abajo. De esta figura se puede verificar

que la trayectoria obtenida para $\delta h = -5$ cm (escalón hacia arriba) se acerca cualitativamente al resultado tanto experimental como numérico. Este resultado explica en parte lo que sucede en el escalón; sin embargo, el modelo de vórtices puntuales es un modelo inviscido y discreto (es decir, no hay creación de vorticidad), por lo que el proceso de reflexión de los vórtices por interacción con el escalón topográfico no aparece.

En el problema del dipolo que encuentra un escalón topográfico de 5 cm, el ciclón y el anticiclón se distancian entre sí. Este efecto fue igualmente observado en la interacción del dipolo con el escalón de 1 cm, donde se observó que para un dipolo que sube el escalón los vórtices experimentan un alejamiento, mientras que para un dipolo que baja un escalón, de las mismas dimensiones, los vórtices se acercan entre sí.

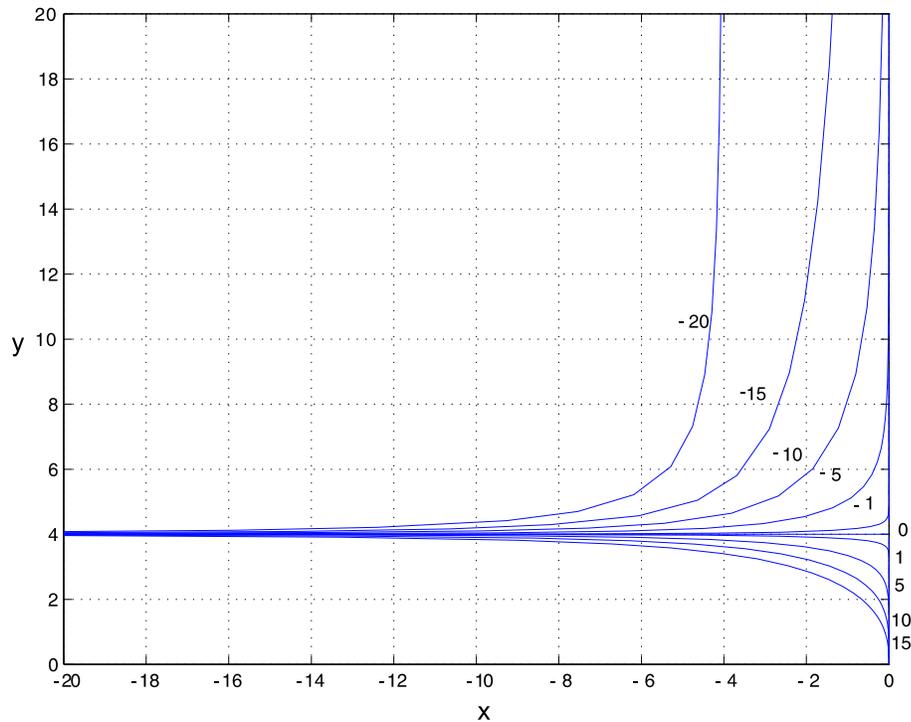


Figura 28: Trayectorias del ciclón de un dipolo que se mueve en la dirección $+x$ y encuentra un escalón topográfico a lo largo de $x = 0$ cm con diferentes alturas: $\Delta h = -20$ cm (“pared”); $\Delta h = 0$ cm (fondo plano).

Se puede destacar que este alejamiento (acercamiento) presentado por las trayec-

torias de los vórtices también es representado por medio de las pseudo-imágenes; sin embargo, en este modelo los vórtices nunca pueden pasar el escalón.

Podemos concluir que los modelos de vórtices puntuales, tanto para el dipolo que cruza (§III.1) como en el presente caso, están limitados por la conservación de la distancia entre los vórtices y por la imposibilidad de cambios en la profundidad, respectivamente. La utilización de ambos modelos depende directamente de la altura del escalón. Para saber qué tipo de modelo de vórtices puntuales se puede utilizar, en la siguiente sección se investigó si existe alguna relación directa entre la intensidad del vórtice y la altura del escalón.

III.3. Escalón límite

Como se mostró en las secciones §III.1 y §III.2, el comportamiento del dipolo es distinto para diferentes alturas del escalón topográfico, sin embargo en ambos casos la interacción puede ser explicada por la conservación de vorticidad potencial. La altura a partir de la cual el dipolo no logra pasar el escalón es ahora investigada. El proceso depende de muchos factores como la dimensión del dipolo, su velocidad, circulación o ángulo de incidencia. Sin embargo, la altura del escalón y la intensidad del dipolo son investigados como factores principales del cambio en las trayectorias del dipolo.

Para el caso de escalones “bajos” discutido en §III.1, se obtuvo del modelo de vórtices puntuales la ecuación para el radio de curvatura teórico de la parte anticiclónica de un dipolo (56). Para el caso del dipolo que se desplaza de la parte profunda hacia la somera del dominio, en el límite en que $U_2 \rightarrow 0$, entonces, $R \rightarrow 0$, es decir, el anticiclón no logra subir el escalón, y la trayectoria del ciclón es alrededor del anticiclón con radio r (ver Figura 11). De esta suposición y de las expresiones para la circulación (51) y velocidad (54) de los vórtices puntuales se obtiene

$$\Delta h = + \frac{H_0 \Gamma_0}{f A_0 + \Gamma_0}. \quad (60)$$

La relación indica que conociendo las características del dipolo (Γ_0 , A_0) y la altura de la columna de fluido (H_0) se puede calcular la altura del escalón límite, a partir de la cual parte del dipolo no transpone la topografía.

De otra manera, partiendo de la ecuación para la conservación material de vorticidad potencial

$$\frac{\omega + f}{h} = \text{constante}, \quad (61)$$

podemos escribir

$$\frac{\omega_0 + f}{H_0} = \frac{\omega_0 + \Delta\omega + f}{H_0 + \Delta h}, \quad (62)$$

donde ω_0 y $\omega_0 + \Delta\omega$ son las vorticidades relativas antes y después del escalón topográfico, respectivamente. En términos del cambio en la topografía Δh se obtiene

$$\Delta h = \frac{H_0 \Delta\omega}{\omega_0 + f}. \quad (63)$$

Suponiendo que los cambios en la vorticidad relativa se pueden expresar como $\Delta\omega = \frac{U}{R_c}$, donde U es la velocidad de propagación del dipolo y $R_c = R + \frac{r}{2}$ el radio de curvatura de su trayectoria (Cushman-Roisin *et al.*, 1997), se obtiene

$$\Delta h = \frac{H_0 U}{(\omega_0 + f) R_c}. \quad (64)$$

De esta manera se tiene la relación entre la altura del escalón y el radio de la trayectoria del dipolo.

Nótese que las ecuaciones (60) y (64) son del mismo tipo; sin embargo, conociendo el dipolo, de la primera se puede obtener el escalón límite a partir del cual una de las estructuras no logra transponer la topografía, mientras que con la segunda, conociendo la altura del escalón se puede estimar el radio de la trayectoria de los vórtices.

Para comprender hasta que punto estos modelos pueden servir para la previsión de trayectorias y alturas críticas de la topografía en el comportamiento de dipolos, se compararon los resultados teóricos de los modelos inviscidos con algunas simulaciones numéricas del modelo barotrópico con fricción en el fondo.

En la Figura 29 se presenta la altura límite en función de la circulación del modelo inviscido (60) y, para el mismo dipolo, se presenta un conjunto de resultados de simulaciones numéricas del modelo barotrópico. La predicción es que en los casos ubicados por debajo de la curva (dados Δh y Γ_0) se presentará la reflexión de parte del dipolo. Se puede constatar que los dos modelos, vórtices puntuales y barotrópico, coinciden en los resultados para las alturas límites de la topografía donde se observa la reflexión.

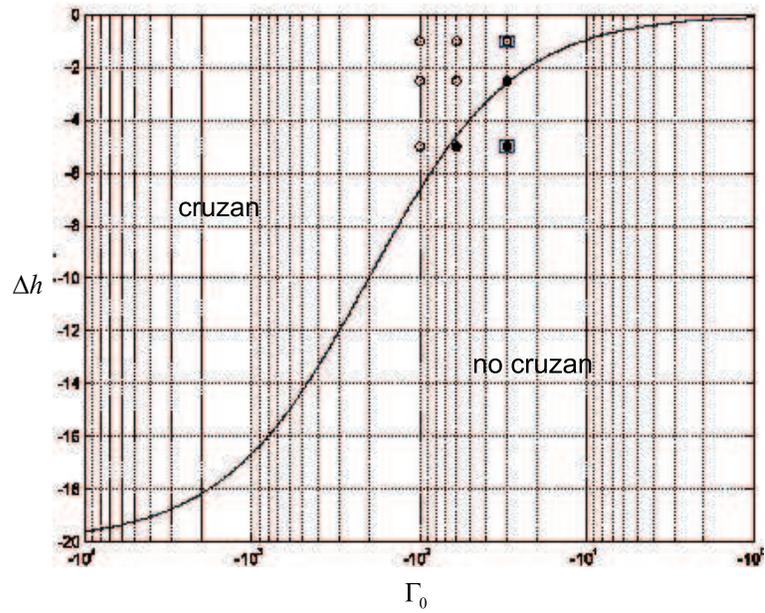


Figura 29: Escalón límite (cm) en función de la circulación (cm^2s^{-1}) para el anticiclón del dipolo desplazándose de la parte profunda hacia la somera: puntos arriba (abajo) de la línea no hay reflexión (hay reflexión). Los círculos llenos (vacíos) indican reflexión (no reflexión) del anticiclón en las simulaciones numéricas (los cuadrados indican los casos investigados anteriormente: escalón bajo y alto).

IV. Turbulencia bidimensional con batimetría variable

En esta sección se investiga la evolución de un flujo turbulento dentro de un dominio cerrado haciendo uso de un modelo numérico de diferencias finitas. El objetivo es investigar la influencia de una topografía variable en el flujo turbulento, identificar los cambios en sus propiedades (energía, enstrofía, vorticidad) e investigar la tendencia hacia un estado de equilibrio. Como en el Capítulo anterior se considera una topografía en forma de escalón “alto” y “bajo” y se analiza la cascada inversa resultante en cada caso.

El Capítulo está organizado de la siguiente manera: En la Sección §IV.1 se describen los parámetros y condiciones iniciales de las simulaciones numéricas realizadas. Las simulaciones para el caso del fondo plano y las referentes al escalón topográfico son presentadas en las Secciones §IV.2 y §IV.3, respectivamente. El efecto del escalón en el régimen turbulento se analiza en §IV.4, y finalmente la Sección §IV.5 se refiere a la presencia de una altura límite del escalón en el régimen turbulento.

IV.1. Parámetros numéricos

Las simulaciones numéricas fueron realizadas con el modelo barotrópico descrito en §II.3 Con el propósito de lograr una referencia directa con los resultados de Capítulo anterior, se utilizaron parámetros físicos equivalentes a los del laboratorio. El dominio considerado fue un cuadrado de $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ con resolución espacial de 129×129 puntos. La profundidad máxima de la columna de fluido considerada fue $H_0 = 20 \text{ cm}$. Las condiciones de frontera laterales son de no deslizamiento, y no se consideró fricción en el fondo. El parámetro de Coriolis fue $f = 1 \text{ s}^{-1}$, y se consideró la viscosidad cinemática

del agua, $\nu = 0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. El número de Reynolds, $Re = \frac{U_{rms}L}{2\nu} = 2500$, está basado en la velocidad cuadrática media de los remolinos en la condición inicial, $U_{rms} \simeq 0.5 \text{ cm s}^{-1}$, y media longitud del dominio, $L/2 = 50 \text{ cm}$. El paso temporal utilizado fue $\Delta t = 0.25 \text{ s}$. La duración de todas las simulaciones en este Capítulo es de 3600 s (1 h), tiempo en el cual se aprecia la organización del flujo durante su decaimiento.

Se investigó el comportamiento del flujo para tres batimetrías diferentes: el fondo plano y dos alturas del escalón topográfico Δh , de 1 y 5 cm, orientado a lo largo del eje y en $x = 50 \text{ cm}$. Como en el caso del dipolo, el escalón topográfico divide el dominio en dos regiones, una profunda y otra somera.

La condición inicial turbulenta utilizada fue un arreglo de 16×16 vórtices Gausianos de vorticidad máxima absoluta 1 s^{-1} y radios aproximados de 5 cm, dispuestos alternadamente según su signo de vorticidad. Esta condición simula el forzamiento inicial utilizado en experimentos de laboratorio por medio de imanes (Tabeling *et al.*, 1991; Hansen *et al.*, 1998) o un sistema de arrastre mecánico (Clercx *et al.*, 1999; Maassen, 2000). Se analizaron los resultados del decaimiento de la turbulencia 2D con seis condiciones iniciales distintas, en las que se hizo variar ligeramente de manera aleatoria las posiciones de los vórtices entre sí. El cambio fue realizado utilizando un método de “semilla”, $n = 1, 2, \dots, 6$, para introducir una pequeña perturbación en la ubicación de los centros de los vórtices respecto a una malla regular. En la Figura 30 se presenta la estructura de la condición inicial utilizada en las simulaciones numéricas para $n = 5$. Posteriormente, se realizaron simulaciones numéricas utilizando diferentes condiciones iniciales, donde se cambiaron tanto el número de vórtices como la estructura del arreglo con la finalidad de estudiar el comportamiento del sistema mediante otros forzamientos.

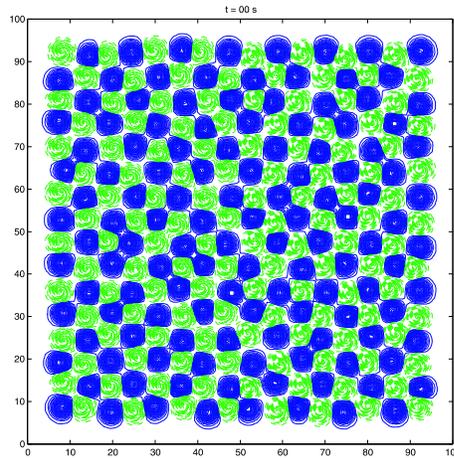


Figura 30: Campo inicial de vorticidad: contornos continuos (discontinuos) representan vorticidad positiva (negativa); intervalos entre contornos, $\Delta\omega = 0.05 \text{ s}^{-1}$; vorticidad máxima (mínima) 1 (-1) s^{-1} .

IV.2. Fondo plano

En esta sección se investiga el decaimiento de un flujo turbulento en un dominio cerrado, en rotación y con topografía plana. Este caso es equivalente al de un flujo 2D sin rotación, como los descritos en trabajos recientes (e.g. Clercx *et al.*, 1999). El proceso del decaimiento con condiciones de frontera de no-deslizamiento se divide en tres fases distintas: rápida auto-organización del flujo; fuerte interacción con las fronteras laterales con formación de estructuras coherentes de tamaño comparable al del dominio; y relajación por efectos viscosos del flujo caracterizado por una estructura monopolar en el centro del dominio.

En la Figura 31 se presentan los contornos de vorticidad de la simulación numérica relativa al caso de la topografía plana. Para los tiempos considerados se pueden observar dos de las tres fases descritas por Clercx *et al.* (1999): rápida organización del flujo en estructuras más grandes de las existentes inicialmente ($t = 1-3 \text{ min}$), y fuerte interacción de las estructuras coherentes entre sí y con las fronteras físicas ($t = 6-60 \text{ min}$). Durante

toda la simulación se puede observar el efecto de los vórtices al acercarse a las fronteras, en las que se originan filamentos de vorticidad de signo contrario.

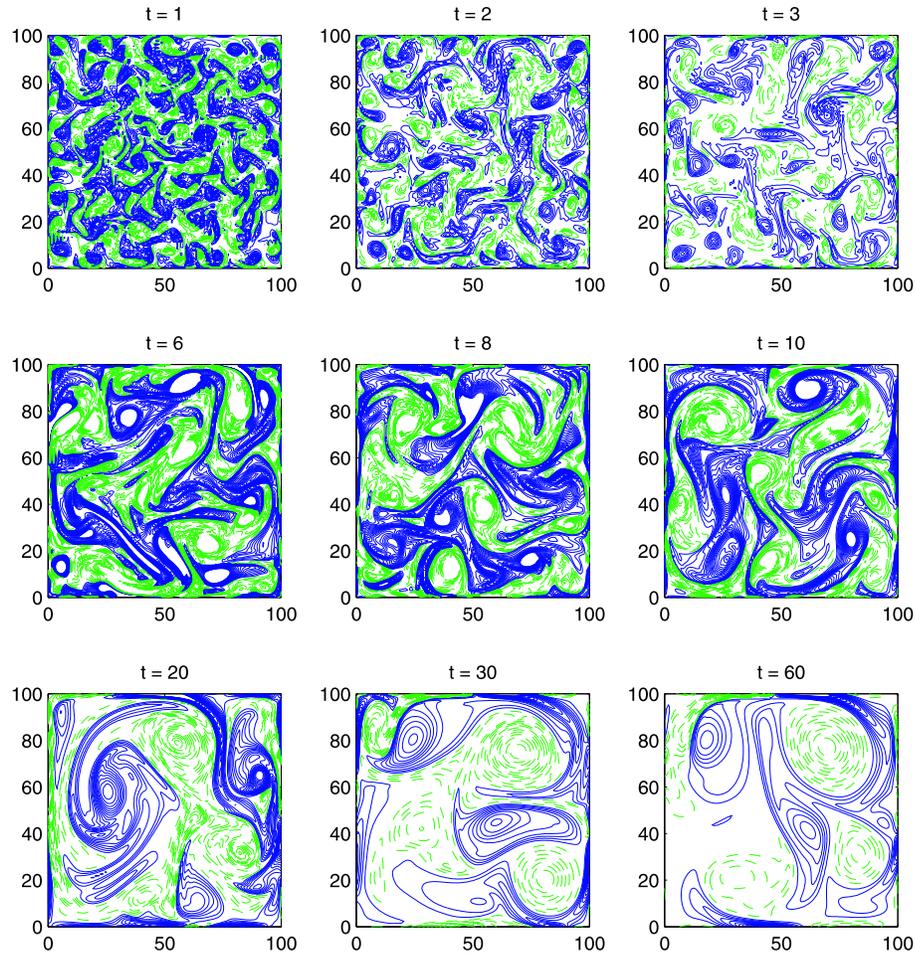


Figura 31: Contornos de vorticidad de la simulación numérica ($n = 5$) relativa al caso de fondo plano. Las líneas continuas (discontinuas) representan vorticidad positiva (negativa). El tiempo es en minutos y el periodo de rotación es, $T = 12$ s. Los intervalos en los contornos son $\Delta\omega = 0.05 \text{ s}^{-1}$ y $\Delta\omega = 0.005 \text{ s}^{-1}$ para $t = 1-3$ min y $t = 6-60$ min, respectivamente.

En la Figura 32 se presentan los contornos de vorticidad para el caso del fondo plano con tres condiciones iniciales ligeramente distintas. Para el mismo tiempo final del caso anterior ($t = 60$ min), se pudo apreciar la presencia de una estructura monopolar con dimensión comparable al dominio y que es disipada por efectos viscosos. Se observó que estas estructuras monopolares pueden ser ciclónicas (vorticidad positiva) o anticiclónicas

(vorticidad negativa), por lo que la predeterminación del flujo es baja. Se puede afirmar, entonces, que partiendo de una condición inicial como la descrita el flujo evoluciona hacia un vórtice de mayores dimensiones; sin embargo las características caóticas de la turbulencia 2D provocan que el signo de la estructura final sea imprevisible, por lo que puede ser tanto ciclónica como anticiclónica.

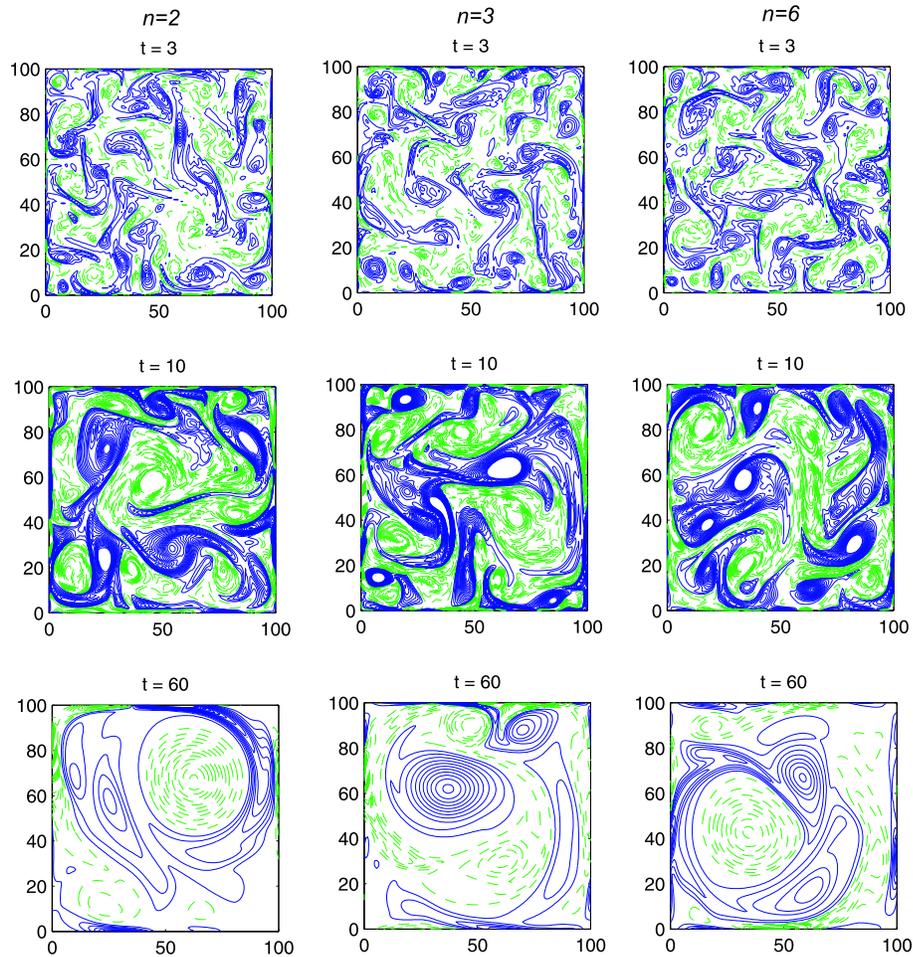


Figura 32: Contornos de vorticidad de tres simulaciones numéricas ($n = 2, 3$ y 6) relativas al caso de fondo plano.

Además de analizar el comportamiento del flujo sobre la topografía plana, se observa que el modelo numérico presenta cualitativamente las características de la turbulencia 2D descritas en otros trabajos. Con el objetivo de validar cuantitativamente el modelo numérico utilizado se comparan los resultados obtenidos con los reportados por Clercx

et al. (1999). Estos autores investigan el decaimiento de la cantidad Z/E donde Z y E son la enstrofía y la energía cinética totales, definidas como

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{100} \int_0^{100} (u^2 + v^2) dx dy, \quad (65)$$

$$Z = \frac{1}{2} \int_0^{100} \int_0^{100} \omega^2 dx dy. \quad (66)$$

El cociente Z/E puede ser interpretado como $1/l^2$, donde l es la escala promedio de las estructuras del flujo turbulento. Evidentemente, l debe crecer en el tiempo debido a la cascada inversa de energía. El tiempo se adimensionaliza con $L/2U_{rms}$. Como resultado principal, encuentran que el decaimiento se puede expresar aproximadamente como $t^{-0.63}$, donde el exponente -0.63 se obtiene de promediar un grupo de simulaciones numéricas con condiciones iniciales ligeramente diferentes (ensemble average). Este comportamiento es reportado para $Re = 1000, 1500$ y 2000 .

En la Figura 33 se presenta el decaimiento de la cantidad Z/E para el caso del fondo plano obtenido del promedio de seis simulaciones con distintas condiciones iniciales ($n = 1, \dots, 6$). El exponente calculado con datos entre $t^* = 1-60$ es -0.62 , el cual es equivalente al reportado en Clercx *et al.* (1999). Se considera que este resultado valida cuantitativamente el modelo utilizado.

IV.3. Turbulencia sobre el escalón

IV.3.1. Escalón “bajo”

En esta sección se investiga la influencia de una topografía variable en el decaimiento de la turbulencia 2D para las mismas condiciones descritas en el caso anterior. La topografía tipo escalón divide el dominio en dos regiones, una profunda y otra somera.

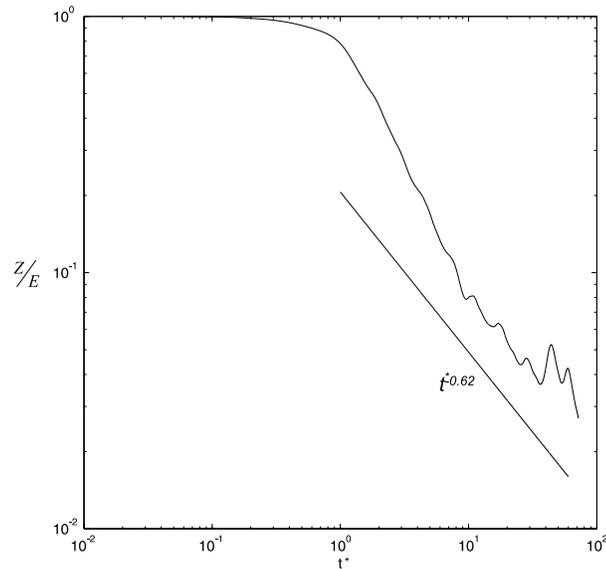


Figura 33: Decaimiento en el tiempo adimensional $t^* = \frac{t}{L/(2U_{rms})}$ de la cantidad Z/E normalizada para el caso del fondo plano. La recta representa el ajuste del decaimiento en el intervalo de tiempo $t^* = 1-60$.

En la Figura 34 se presentan los contornos de vorticidad relativos a la simulación numérica para un escalón con 1 cm de altura. De manera similar al caso del fondo plano, se puede observar la rápida organización del flujo en estructuras mayores que las presentes en la condición inicial ($t = 1-3$ min). Sin embargo, para tiempos posteriores se observa la influencia del escalón topográfico. La presencia de la topografía provoca que la vorticidad se alinee a lo largo del escalón, y que se establezca un flujo de vorticidad hacia la región superior del dominio. A partir de estos tiempos se encuentran muy pocas estructuras sobre el escalón, lo que es un indicio de que no hay vórtices o filamentos atravesando la topografía en ninguna de las direcciones, profunda hacia somera o somera hacia profunda. El flujo evoluciona hacia un estado de equilibrio ($t = 60$ min) compuesto por cuatro estructuras, dos ciclones y dos anticiclones dispuestos alternadamente en las dos regiones del dominio. La interacción con las fronteras físicas del dominio hace que las estructuras se encuentran rodeadas de filamentos de vorticidad de signo contrario.

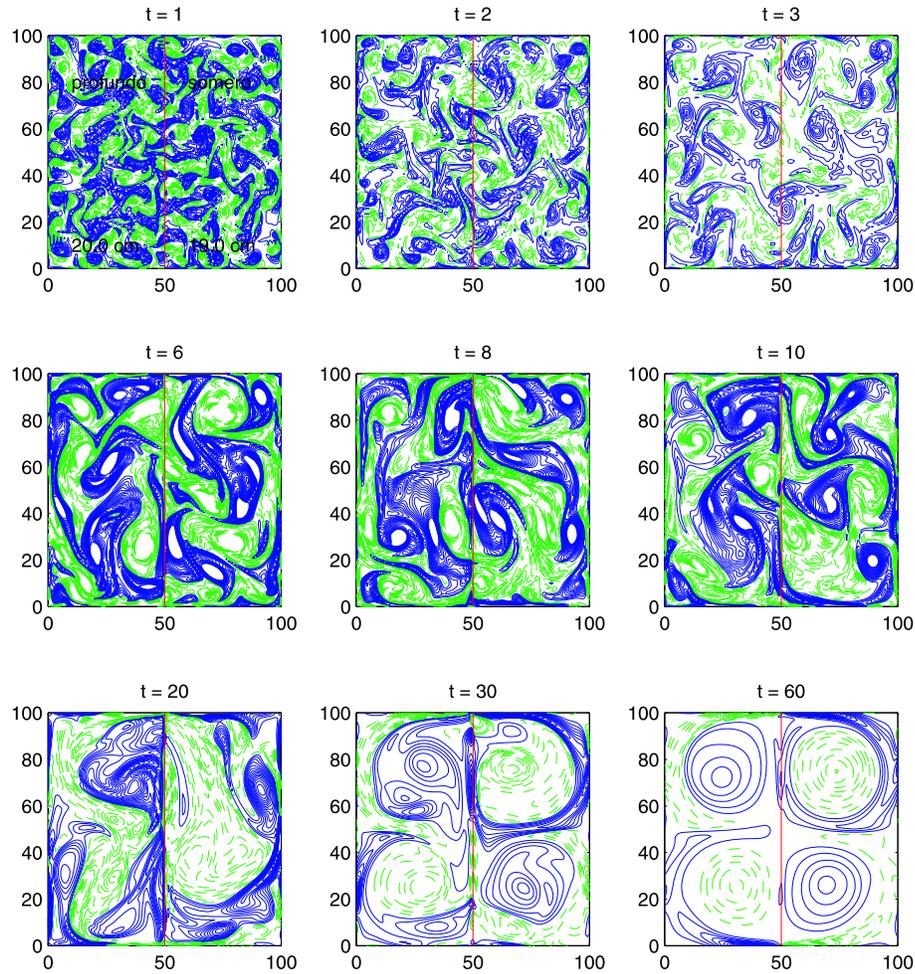


Figura 34: Contornos de vorticidad de la simulación numérica relativa al caso del escalón de 1 cm. En la región profunda (izquierda), $H_0 = 20$ cm, y en la somera (derecha), $H_0 = 19$ cm. El escalón es indicado por la línea en $x = 50$ cm.

En la Figura 35 se presentan tres simulaciones numéricas utilizando diferentes condiciones iniciales. Se observa nuevamente la rápida organización del flujo en estructuras mayores que las presentes en la condición inicial ($t = 3$ min), el alineamiento de los contornos de vorticidad a lo largo de la topografía y la aparente ausencia de estructuras circulares arriba del escalón ($t = 10-60$ min). Es importante destacar que para todas las simulaciones se obtiene el mismo resultado final: cuatro estructuras dispuestas alternadamente en las dos regiones del dominio; en la zona superior un ciclón y un anticiclón

en las regiones profunda y somera, respectivamente, y en la zona inferior la distribución es la inversa. Esta disposición final fue también observada en tres simulaciones adicionales (no mostradas aquí).

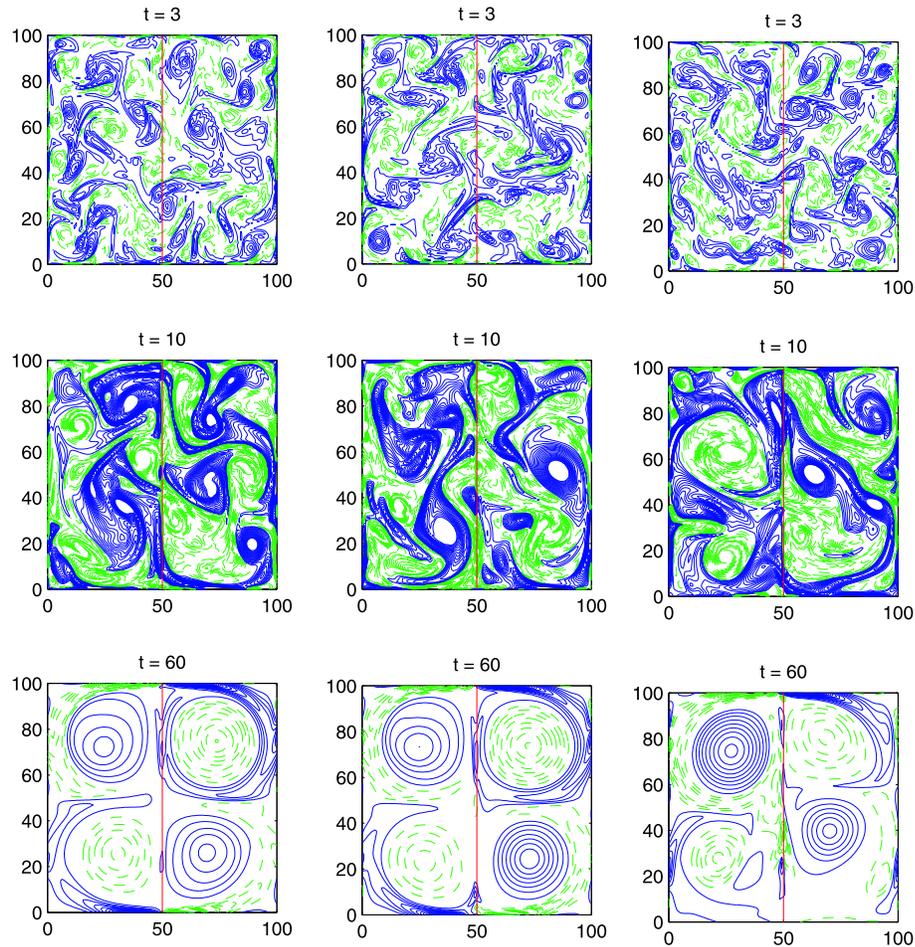


Figura 35: Contornos de vorticidad relativos al caso del escalón de 1 cm para tres condiciones iniciales diferentes ($n = 2, 3, \text{ y } 6$).

Se puede explicar la alineación de los contornos de vorticidad positiva y negativa a lo largo del escalón en las regiones profunda y somera, respectivamente, por conservación de vorticidad potencial. El flujo de masa de una región del dominio hacia la otra a través del escalón induce a las columnas de fluido a ganar o perder vorticidad relativa. Flujos de la región somera hacia la profunda dan origen a vorticidad positiva, mientras que flujos de la región profunda hacia la somera dan origen a vorticidad negativa. Estos

transportes se deben a la influencia del movimiento de los vórtices (monopolos y dipolos) que evolucionan en ambas regiones del dominio.

El flujo de vorticidad a lo largo de la topografía variable ha sido observado en otros trabajos (Bretherton y Haidvogel, 1976; Gill *et al.*, 1986; Haidvogel, 2005; Zavala Sansón *et al.*, 2005). A medida que el flujo decae, se reducen los efectos no lineales forzando el equilibrio geostrófico. Así, es la rotación del sistema y el gradiente de presión originado por la presencia del escalón que originan el flujo a lo largo de la topografía manteniendo siempre la región profunda a su izquierda.

IV.3.2. Escalón “alto”

En la Figura 36 se presentan los contornos de vorticidad referentes al caso del escalón de 5 cm, utilizando los mismos forzamientos iniciales del caso anterior. Se observa que el alineamiento de vorticidad a lo largo del escalón aparece a tiempos iniciales, $t = 1$ min, siendo bastante evidente en el intervalo $t = 2-3$ min, donde se puede ver vorticidad positiva y negativa distribuida a lo largo del escalón en las regiones profunda y somera, respectivamente. Como en el caso del escalón de 1 cm, el flujo de vorticidad es hacia la zona superior del dominio. No se identifican estructuras coherentes arriba del escalón, lo que evidencia la ausencia de vórtices cruzando la topografía para $t > 1$ min. De la misma manera que en el caso anterior, se obtuvo el mismo resultado final: cuatro vórtices dispuestos de forma alternada según su signo de vorticidad en las dos regiones del dominio; en la parte superior un ciclón en la región profunda y un anticiclón en la región somera y en la parte inferior un anticiclón en la región profunda y un ciclón en la somera.

En la Figura 37 se presentan los contornos de vorticidad de tres simulaciones con diferentes condiciones iniciales. Se observa que la distribución final de las estructuras para $t = 60$ min es la misma, excepto en el caso $n = 6$ (tercera columna). Esta simulación

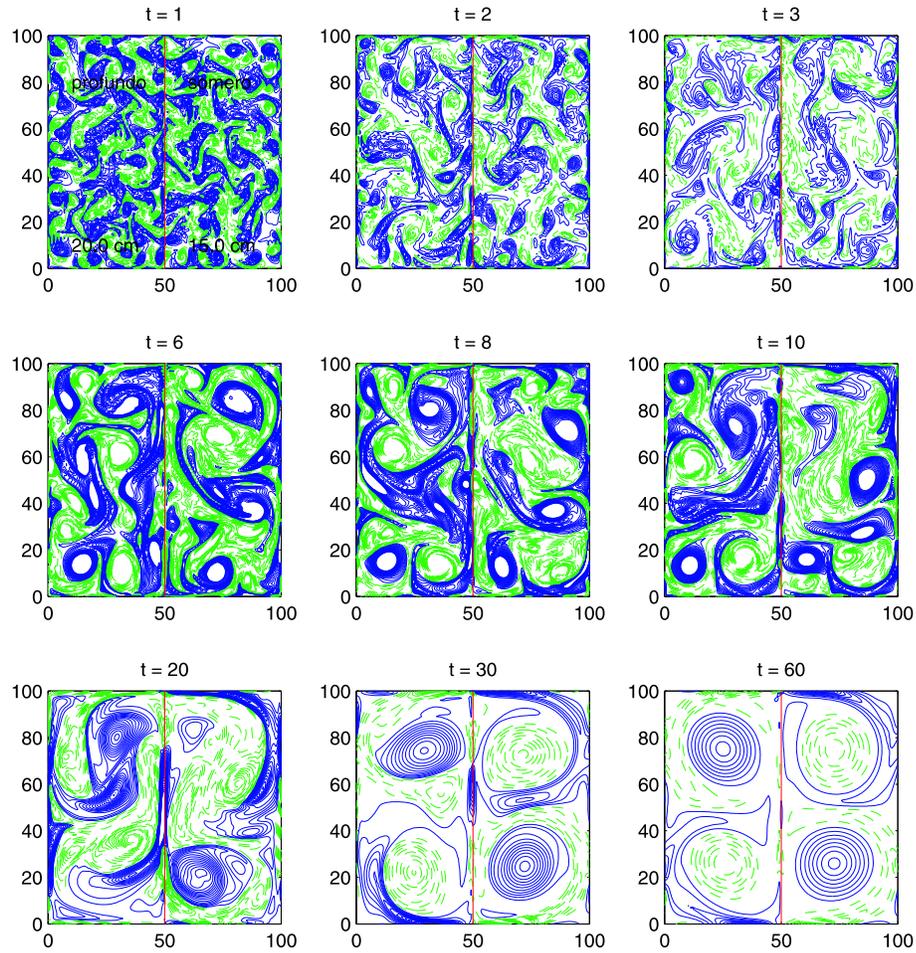


Figura 36: Contornos de vorticidad de la simulación numérica referente al caso del escalón de 5 cm. En la región profunda (izquierda), $H_0 = 20$ cm, y en la somera (derecha), $H_0 = 15$ cm. El escalón es indicado por la línea en $x = 50$ cm.

fue la única de todas las realizadas (con cualquier escalón) en la que el estado final fue diferente. También se debe notar que existen diferencias considerables en la intensidad y tamaño de los diferentes vórtices.

IV.3.3. Comparación

Con la finalidad de subrayar las coincidencias y diferencias entre el escalón de 1 y 5 cm, en la Figura 38 se presenta el diagrama de dispersión, $\omega - \psi$, de las dos simulacio-

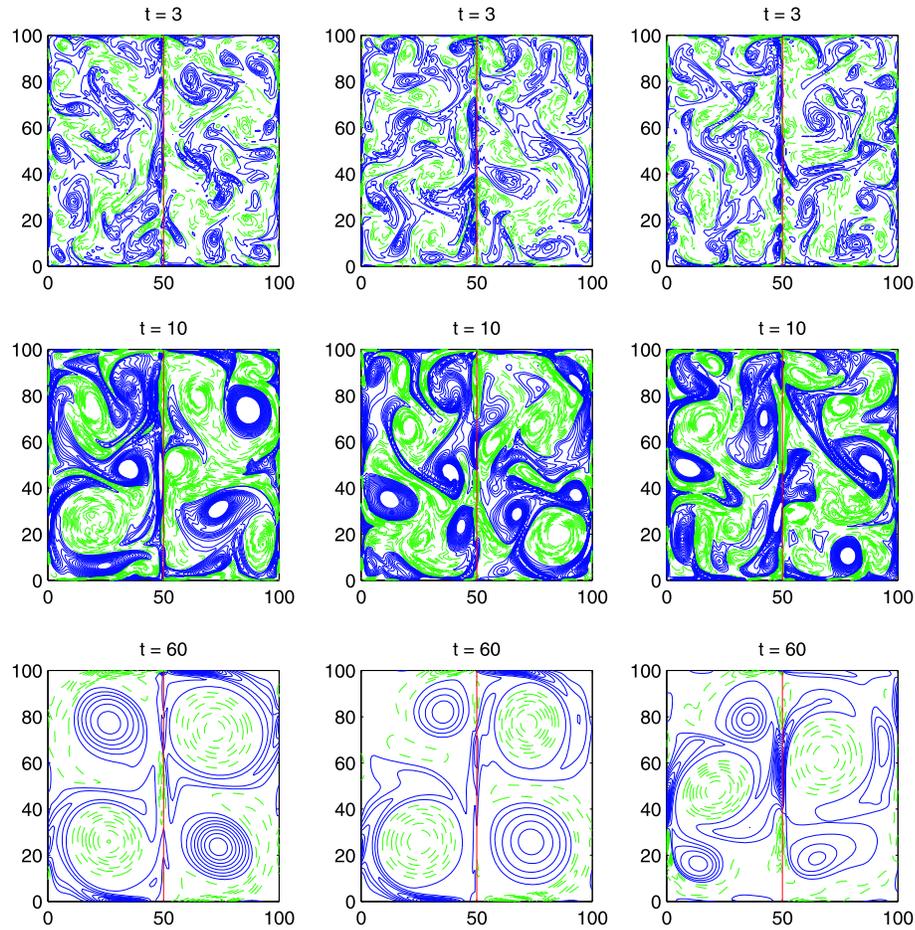


Figura 37: Contornos de vorticidad relativos al caso del escalón de 5 cm para tres condiciones iniciales diferentes ($n = 2, 3$ y 6).

nes numéricas presentadas con topografía variable. Este diagrama se construye con los valores de la vorticidad y la función de corriente de cada punto de la malla numérica, y permite comparar individualmente las estructuras presentes en el resultado final. Generalmente, la presencia de estructuras coherentes casi estacionarias en el flujo se refleja en el diagrama de dispersión como una relación uno a uno entre ω y ψ , es decir, con poca dispersión. Así, los vórtices ciclónicos (anticiclónicos) se identifican como “ramas” con vorticidad y circulación positivas (negativas). Se puede observar para $t = 30$ min que el caso del escalón de 5 cm presenta cuatro ramas relativamente bien definidas, las cuales corresponden con los cuatro vórtices presentes en el resultado final. En contraste,

el escalón de 1 cm muestra mucha dispersión, indicando que el flujo aún no se ha organizado. Para $t = 60$ min se distinguen las cuatro estructuras coherentes en los dos casos. Para el caso del escalón de 1 cm los ciclones son bastante parecidos pero el anticiclón de la región somera es mayor y más intenso que el de la región profunda. Para el caso del escalón de 5 cm se tiene que las estructuras ciclónicas presentan aproximadamente las mismas intensidades, al igual que las anticiclónicas, y que los ciclones son más intensos que los anticiclones. Cabe aclarar, sin embargo, que este es un resultado particular de una sola simulación, y que en otros casos se observaron diferentes intensidades de los remolinos del arreglo final (lo cual se advierte, por ejemplo, en las Figuras 35 y 37). Aún así, se debe subrayar que dicho estado final se obtuvo en prácticamente todas las simulaciones: cuatro estructuras distribuidas de manera alternada en las dos regiones del dominio; en la zona superior un ciclón y un anticiclón en las regiones profunda y somera, respectivamente; en la zona inferior del dominio la distribución es la inversa.

Una diferencia notable entre los escalones de 1 y 5 cm se refleja en el transporte de trazadores pasivos. En la Figura 39 se presentan las posiciones de trazadores pasivos para las simulaciones numéricas referentes a la condición inicial presentada. Se distribuyeron 10 partículas en la región superior derecha (somera) del dominio en idéntica posición para ambos casos. La evolución temporal evidencia el efecto de la presencia de la topografía y se verifica que el flujo es nulo para el escalón de 5 cm, donde no hay partículas presentes en la región profunda. En contraste, las partículas logran cruzar hacia la parte profunda cuando el escalón es de 1 cm.

IV.3.4. El efecto de la condición inicial

En esta sección se pretende demostrar de manera objetiva que la distribución de las estructuras en el resultado final no depende directamente de la condición inicial. Se pretende investigar la asimetría existente en los vórtices presentes en el estado final y

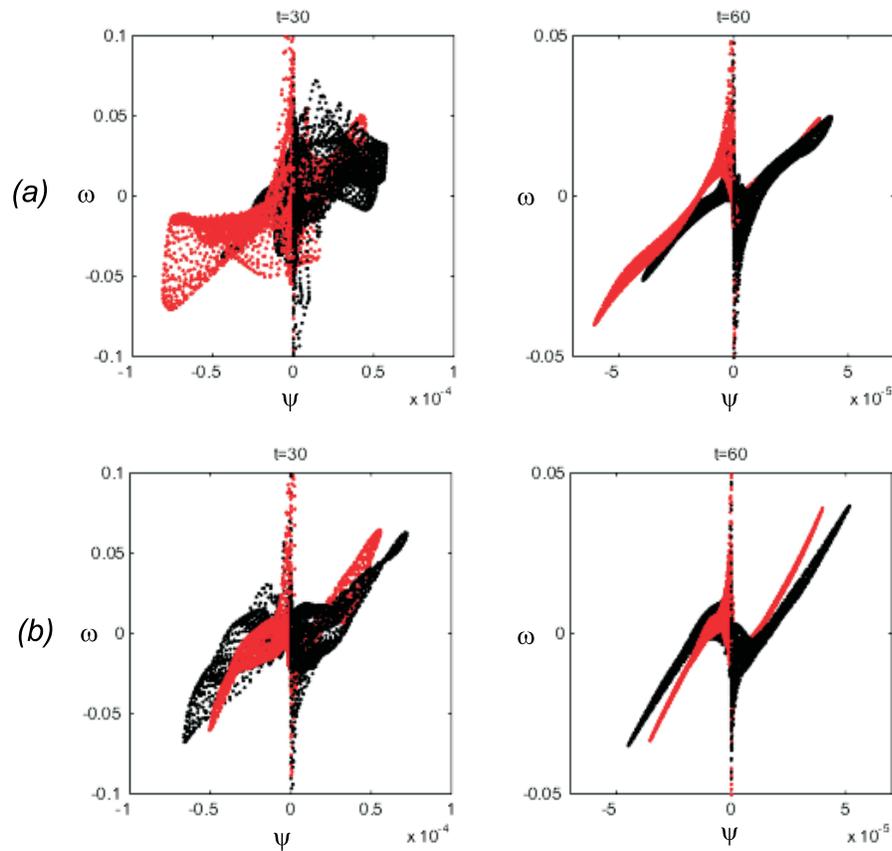


Figura 38: Diagrama de dispersión, $\omega - \psi$, de las simulaciones numéricas presentadas para: a) escalón de 1 cm y b) escalón de 5 cm. Los colores representan puntos en la región profunda (negro) y somera (gris).

saber si existe relación con la altura del escalón topográfico. Para eso se consideraron condiciones iniciales distintas a las presentadas anteriormente.

En la figura 40 se presentan los contornos de vorticidad inicial y final para dos condiciones iniciales distintas y el diagrama de dispersión para $t = 60$ min, utilizando los escalones de 1 y 5 cm. Las condiciones consisten en un arreglo de 10×10 vórtices dispuesto alternadamente según su signo de vorticidad, donde una es la inversa de la otra. Estas condiciones difieren de la presentada anteriormente en el número de vórtices. Como se puede apreciar, la distribución final de las estructuras es la misma que en la sección anterior. El hecho de invertir la distribución de los remolinos en la condición

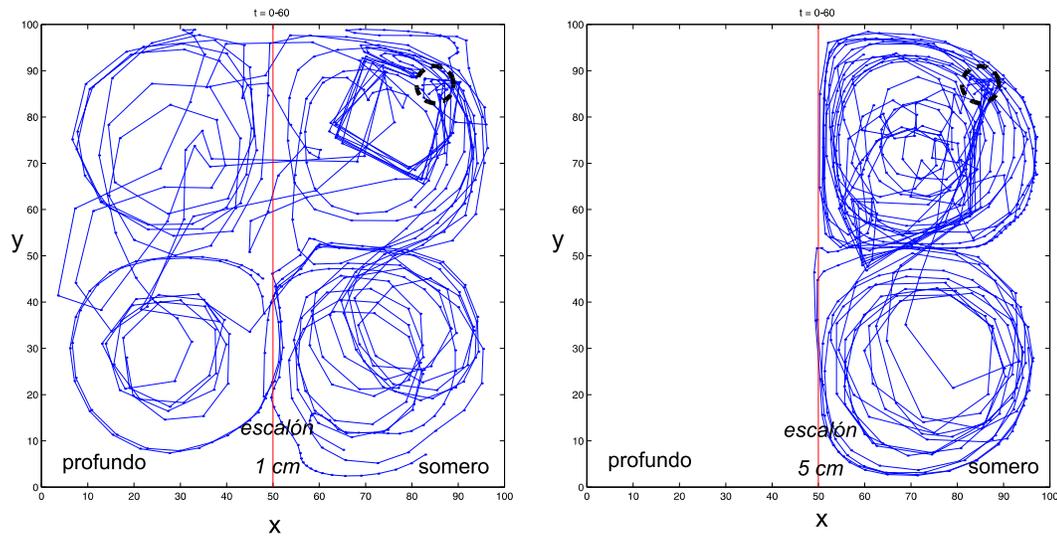


Figura 39: Trayectoria de trazadores pasivos en presencia del escalón de 1 cm (izquierda) y de 5 cm (derecha). El círculo discontinuo representa el área de la posición inicial de las partículas.

inicial no parece inducir diferencias significativas en el resultado final en ninguno de los dos escalones. Sin embargo, no queda claro el origen de la asimetría de las estructuras en la condición de equilibrio.

En la Figura 41 se presentan los contornos de vorticidad, inicial y final, y el diagrama de dispersión para otros dos forzamientos iniciales, utilizando de nuevo los escalones de altura de 1 y 5 cm. Esta condición inicial es distinta de las demás por su distribución asimétrica de vorticidad entre las regiones del dominio, por el número de vórtices y sus dimensiones. La condición consiste en dos vórtices de 20 cm de diámetro dispuestos en cada una de las regiones del dominio. Se debe notar que en los dos casos con el escalón de 5 cm se obtiene claramente el arreglo de cuatro vórtices esperado, al igual que en el primer caso con la topografía de 1 cm (panel (a)). Sólo cuando se fuerza inicialmente el sistema con un ciclón y un anticiclón en las regiones profunda y somera, respectivamente (panel b), el resultado final ($t = 60$ min) es diferente. Esto sugiere que la disposición inicial de los vórtices, en conjunto con la altura del escalón tienen influencia en el resultado final, aunque la tendencia es a evolucionar hacia la distribución de cuatro

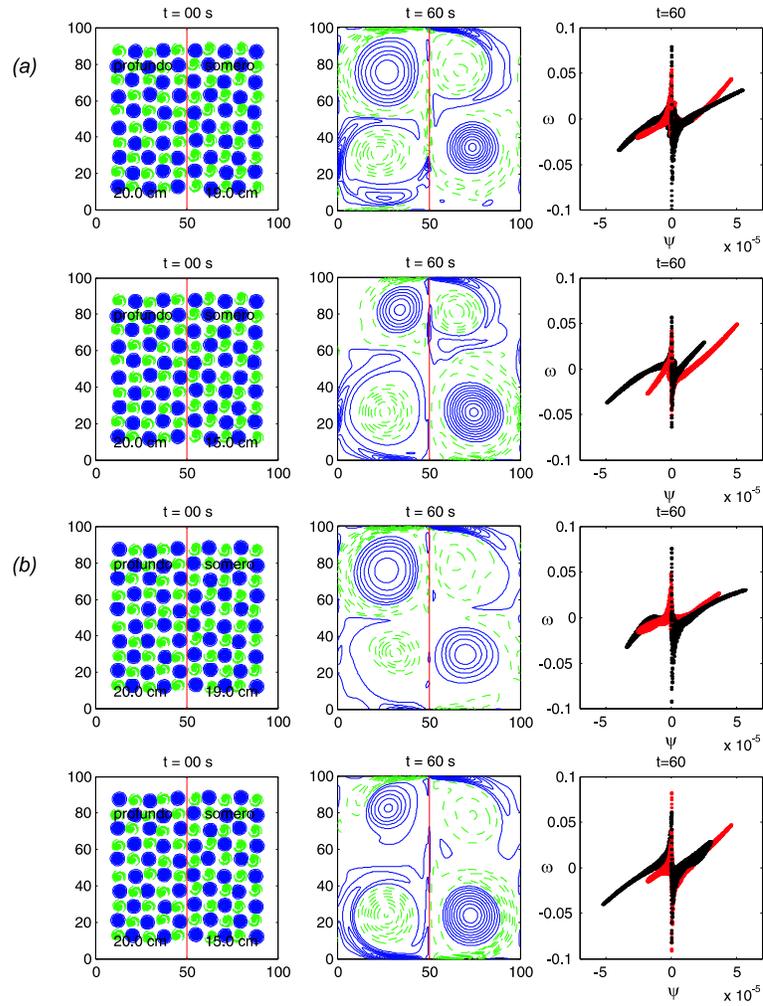


Figura 40: Contornos del campo inicial y final de vorticidad y respectivos diagramas de dispersión para cuatro simulaciones numéricas: (a) arreglo de 10×10 vórtices y (b) condición inversa.

estructuras descrita. Los vórtices más intensos presentes en los diferentes resultados finales son los originales de la condición inicial, siendo las demás estructuras consecuencia de la interacción con las fronteras laterales y con el escalón topográfico.

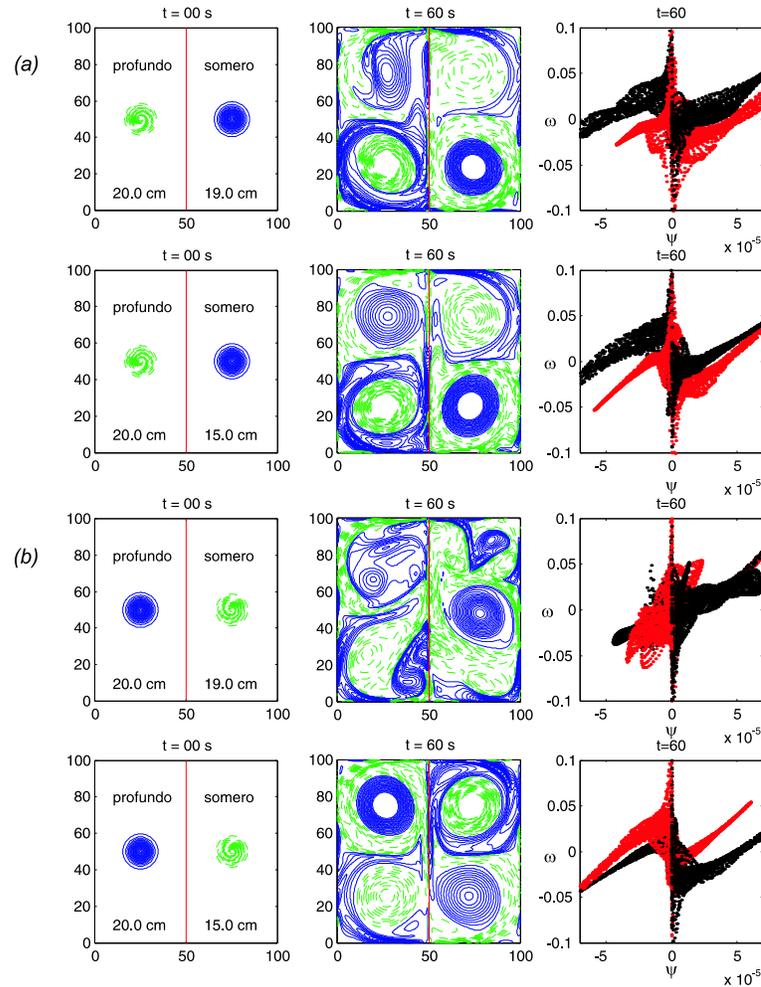


Figura 41: Contornos del campo inicial y final de vorticidad y respectivos diagramas de dispersión para cuatro simulaciones numéricas: (a) un anticiclón y un ciclón en la región profunda y somera, respectivamente; y (b) un ciclón y un anticiclón en la región profunda y somera, respectivamente.

IV.4. El efecto del escalón en el régimen turbulento

El análisis de esta sección se basa en el promedio de seis simulaciones numéricas realizadas para cada uno de los casos considerados: fondo plano y escalones topográficos de 1 cm y 5 cm. Las condiciones iniciales utilizadas son las descritas en §IV.1.

Como se pudo verificar en las secciones anteriores, de la presencia de un escalón

topográfico resulta un estado de equilibrio compuesto por cuatro vórtices, dos ciclones y dos anticiclones, dispuestos de manera alternada, dos en la región profunda del dominio y dos en la somera. Tomando de manera separada cada una de las regiones este resultado es conocido: por medio de experimentos en el laboratorio y simulaciones numéricas, Maassen (2000) muestra que el decaimiento de un flujo turbulento contenido en un dominio rectangular (geometría tipo canal) se caracteriza por vórtices de signo alternado dispuestos arbitrariamente a lo largo del rectángulo. Si se separa el dominio bajo estudio con una pared, lo que se tiene son dos regiones rectangulares con diferentes profundidades, por lo que el estado final coincidiría con el trabajo citado. Sin embargo, ambas regiones están conectadas por el escalón, lo que les da otras propiedades. Una que parece sobresalir es que la parte superior del dominio presenta siempre la estructura ciclónica en la región profunda y la anticiclónica en la región somera, mientras en la parte inferior la disposición es inversa. El flujo de vorticidad observado a lo largo del escalón contribuye a que esta distribución sea posible. Se pretende investigar qué otros factores pueden inducir este arreglo final.

Para saber cual es la influencia de la presencia del escalón topográfico en el decaimiento de la turbulencia 2D, se investigó el comportamiento de la energía cinética, E , y de la enstrofia, Z , definidas en (65) y (66). Su evolución temporal está dada por

$$\frac{dZ}{dt} = \nu \oint \omega (\nabla \omega \cdot \hat{n}) dl - \nu \int_0^{100} \int_0^{100} |\nabla \omega|^2 dx dy, \quad (67)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\nu Z, \quad (68)$$

donde el primer término del lado derecho en (67) representa el efecto de las fronteras laterales y el segundo término es conocido como palinstrofia. Como la enstrofia Z es una cantidad definida positiva, la energía cinética es una cantidad que decae en el tiempo. En contraste, el decaimiento de la enstrofia puede no ser monótono debido a las interacciones con las paredes laterales.

En la Figura 42 se presenta el decaimiento en el tiempo de la energía cinética y de la enstrofía para los tres casos considerados. El decaimiento de la energía cinética (paneles (a), (b) y (c)) se puede aproximar como $t^{-\alpha}$, donde α resulta del ajuste del promedio de las seis simulaciones numéricas consideradas. Se encontró para el caso del fondo plano, el escalón de 1 y 5 cm, que el exponente ajustado es $\alpha = 0.5 \pm 0.02$, para $t = 30-2000$ s, 30-1100 s, 30-200 s, respectivamente. Este resultado indica que durante los primeros 200 s la energía cinética de los tres casos decae de manera similar. Después de este periodo, el flujo sobre el escalón de 5 cm decae más rápido, mientras que sobre el fondo plano y el escalón de 1 cm el decaimiento es muy similar hasta los 1100 s. De ahí en adelante, el caso de 1 cm decae más rápido que sobre el plano. La razón por la que un escalón alto induce una mayor pérdida de energía es que el transporte de fluido y de vorticidad de una región a otra es inhibido. Como consecuencia, el flujo es confinado a una región de menores dimensiones en la que los efectos disipativos y la interacción con las paredes son más efectivos. En el caso del fondo plano (a), podemos observar un mayor decaimiento después de 2000s. Esto sugiere una fuerte interacción de las estructuras coherentes con las fronteras del dominio, frenando de esta manera la auto-organización del flujo. La Figura 42(d) referente al decaimiento de la enstrofía, muestra de nuevo que los tres casos tienen un comportamiento muy similar durante los primeros 100 a 200 s. Las oscilaciones que se observan al final de las simulaciones indican las fuertes interacciones con las fronteras laterales.

Para sintetizar los resultados del decaimiento de la turbulencia 2D con topografía variable se investigó la escala promedio, $l = \sqrt{E/Z}$, la cual se espera que aumente en el tiempo debido a la cascada inversa. En la Figura 43 se presentan las escalas promedio para los diferentes casos. Durante los primeros 100 s las tres simulaciones muestran un comportamiento muy parecido, lo cual indica la escasa importancia del escalón en esta etapa. El crecimiento es bastante uniforme para tiempos mayores ($t \sim 700$ s), aunque en el caso de 5 cm dicho aumento es más lento por la influencia del escalón topográfico

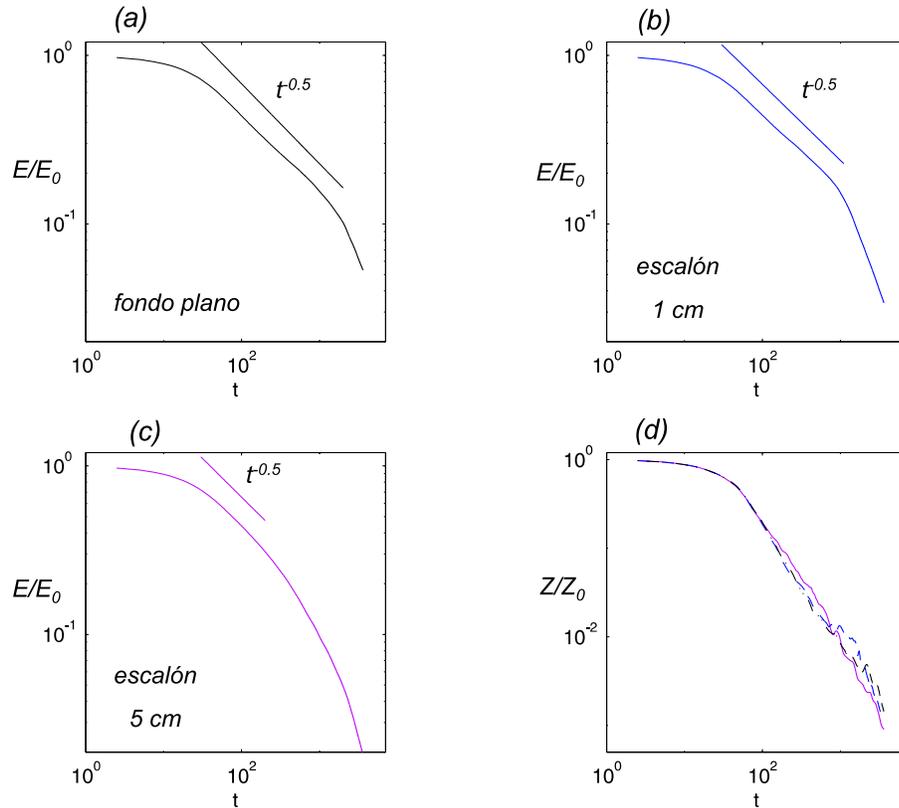


Figura 42: Decaimiento de la energía cinética normalizada en el conjunto de seis simulaciones para los casos: (a) fondo plano; (b) escalón de 1 cm; y (c) escalón de 5 cm. Decaimiento de enstrofia normalizada para los tres casos (d): (---) fondo plano; (-.-) escalón de 1 cm; y (-) escalón de 5 cm. El periodo de rotación del sistema es $T \approx 12$ s.

desde $t \sim 100-200$ s. Para tiempos posteriores el comportamiento es influenciado por las fronteras laterales, lo cual se refleja en las fluctuaciones de l (asociadas a las fluctuaciones de Z).

De la observación cualitativa de los contornos de vorticidad, hay indicios de que el resultado de equilibrio es obtenido más rápidamente para escalones más altos. La escala promedio indica que los vórtices del caso del escalón de 5 cm son más pequeños comparados con los otros dos casos. Esto tiene sentido si se considera que, a partir de cierto tiempo, el escalón funciona como una barrera física que inhibe el cruce de estructuras de una región hacia la otra. Así, cuanto mayor sea el escalón, más rápidamente el flujo

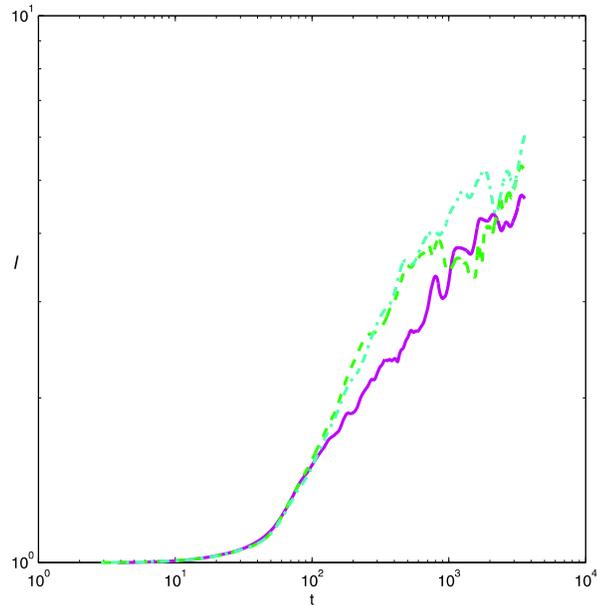


Figura 43: Escala promedio normalizada con el radio de los vórtices en la condición inicial (5 cm) de las simulaciones numéricas: fondo plano (---), escalón de 1 cm (---) y escalón de 5 cm (—).

deja de cruzarlo y con eso las estructuras son confinadas en un dominio reducido. Por tanto, la escala promedio tiende a crecer menos por estar limitada por las dimensiones de este dominio reducido. A continuación, se va investigar a partir de qué tiempos las estructuras no pasan la topografía y justificar de esta manera la relación entre la altura del escalón y la obtención del estado de equilibrio.

IV.5. Escalón límite

Para el caso del dipolo se pudo encontrar el escalón límite a partir del cual existe reflexión de las estructuras (§III.3). De la ecuación (60) se obtuvo la altura del escalón límite en función de la vorticidad inicial, que es un parámetro conocido. Escribiendo esta ecuación en función de la vorticidad relativa, se tiene

$$\frac{\omega_0}{f} = \frac{\Delta h}{H_0 + \Delta h}, \quad (69)$$

donde ahora ω_0 es la vorticidad límite para que las estructuras logren pasar el escalón topográfico. Aproximando el valor de la vorticidad límite con la raíz cuadrada de la enstrofia, $\omega_0 \approx \sqrt{Z}$, podemos obtener el tiempo aproximado en el que se alcanza dicha vorticidad. Utilizando $f = 1 \text{ s}^{-1}$ y $H_0 = 20 \text{ cm}$, se obtiene para el escalón de 1 cm, $\sqrt{Z} = \frac{1}{21} \text{ s}^{-1}$, y para el escalón de 5 cm, $\sqrt{Z} = \frac{1}{5} \text{ s}^{-1}$. En la Figura 44 se presentan los valores de la raíz cuadrada de la enstrofia, \sqrt{Z} , para los dos casos de topografía variable. Se obtiene que para los escalones de 1 cm y 5 cm las vorticidades críticas acontecen a los tiempos, $t \sim 600 \text{ s}$ y $t \sim 40 \text{ s}$, respectivamente. Estos son los tiempos aproximados a partir de los cuales las estructuras coherentes dejan de transponer el escalón topográfico. Se observa que el tiempo obtenido para el caso de 1 cm coincide con el efecto del escalón en la escala de longitud (Figura 43). En el caso del escalón de 5 cm, su presencia se manifiesta casi de inmediato.

Se puede decir que la ecuación (69) representa una medida límite de la vorticidad en función de la altura de la topografía a partir de la cual las estructuras dejan de pasar de una región del dominio hacia la otra. Esta es una medida bastante importante ya que implica que las características del flujo cambian al forzar la organización en un dominio más reducido. Se puede concluir que la altura del escalón induce un límite geométrico a las estructuras que evolucionan en el interior del dominio: cuanto más alto es el escalón, más rápida es la separación de las dos regiones del dominio, lo que va inducir una más eficiente organización de las estructuras y, como consecuencia, la obtención del estado de equilibrio en menos tiempo.

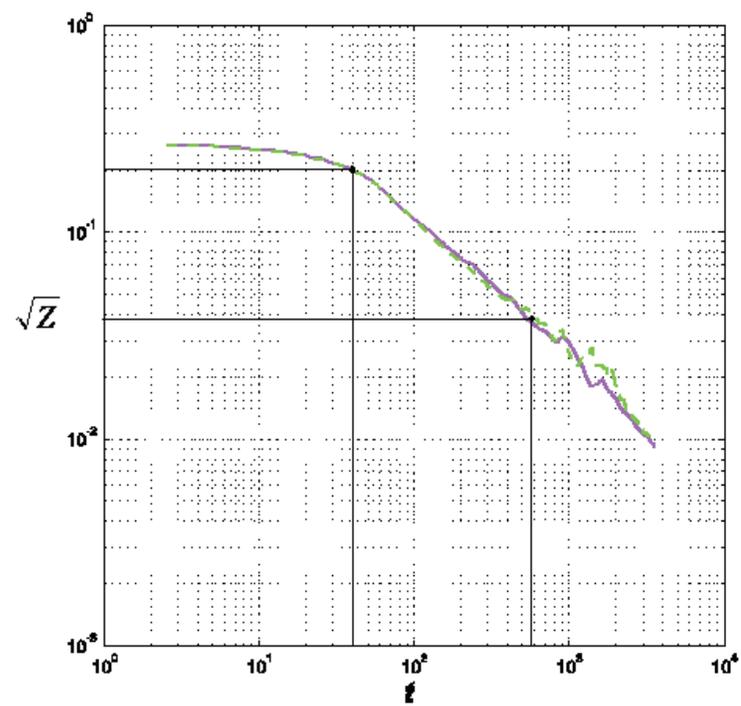


Figura 44: Valores de la raíz cuadrada de la enstrofia en función del tiempo (s) para el escalón de 1 cm (—) y el escalón de 5 cm (—).

V. Discusión y conclusiones

En este trabajo se investigó experimental y numéricamente la interacción de estructuras dipolares con una topografía tipo escalón en un sistema en rotación. Posteriormente se hizo un estudio numérico del decaimiento de turbulencia bidimensional sobre la misma topografía. Los experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas en el estudio de la interacción del dipolo con el escalón proporcionaron un panorama muy completo de los procesos involucrados, lo cual ayudó a una mejor comprensión del decaimiento de la turbulencia 2D realizado con la misma geometría.

Para entender la influencia de la altura de la topografía en los flujos se utilizaron dos alturas del escalón, 1 y 5 cm, los cuales se denominaron “bajo” y “alto” dada la profundidad máxima de 20 cm. La interacción de estructuras dipolares con una topografía de este tipo depende de forma dramática de su altura. De las dos alturas consideradas se obtuvieron dos resultados completamente diferentes. Para el escalón de 1 cm, el dipolo cruza la topografía y su trayectoria es desviada dependiendo de si sube o baja el escalón. Esta desviación de las trayectorias, hacia la derecha para el dipolo que sube y hacia la izquierda para el dipolo que baja, es explicada por la conservación de vorticidad potencial: cuando el dipolo sube el escalón su parte anticiclónica es intensificada por efectos de compresión, mientras que al bajar se intensifica la parte ciclónica por el estiramiento de las columnas de fluido. En contraste, para el escalón de 5 cm se observó la reflexión de una de las estructuras que componen el dipolo: la anticiclónica, si el dipolo llega al escalón por la región profunda del dominio, y la ciclónica si llega por la región somera. En estos casos, el acercamiento del dipolo a la topografía da origen a celdas de vorticidad positiva y negativa que son consecuencia del flujo de masa de la región somera hacia la profunda y de la profunda hacia la somera, respectivamente. Estas estructuras originadas cerca del escalón interactúan con el dipolo provocando que una de sus mitades no logre cruzar la topografía. Este mecanismo de “reflexión” fue discutido en Zavala Sansón

et al. (1999) para vórtices monopolares que se aproximan al escalón por efecto β . Para el estudio de las trayectorias del dipolo se desarrollaron dos modelos de vórtices puntuales: uno donde los vórtices cruzan el escalón y otro donde no cruzan. Además, tanto para escalones bajos como altos, se origina un flujo de vorticidad a lo largo del escalón. Este arreglo de vorticidad, positiva en la región profunda y negativa en la somera, mantiene siempre la región somera a su derecha.

El estudio numérico del flujo turbulento sobre el escalón fue hecho con el mismo modelo barotrópico con el que se analizó el dipolo. El modelo fue validado cualitativa y cuantitativamente comparando los resultados de las simulaciones del caso del fondo plano con los resultados numéricos de Clercx *et al.* (1999). Como se ha visto, el hecho de tener una topografía tipo escalón implica que el régimen turbulento presente un estado de equilibrio. Este resultado se caracteriza por la presencia de cuatro estructuras con dos vórtices en cada una de las regiones del dominio: en la parte superior del dominio un ciclón en la región profunda y un anticiclón en la somera; la distribución en la parte inferior es la inversa. En la Figura 45 se intenta representar de forma esquemática el origen del resultado final del régimen turbulento, el cual puede ser explicado por la interacción de estructuras dipolares con la batimetría considerada. El flujo entre las regiones del dominio produce cambios en la vorticidad de las columnas de fluido por efectos de compresión y estiramiento; pero si el escalón es lo suficientemente alto (o el flujo lo suficientemente débil) para impedir que estas columnas lo atraviesen, se tiene la división del dominio en dos regiones rectangulares parcialmente independientes. La evolución del flujo para tiempos largos es, por lo tanto, la de dos vórtices de circulación contraria en cada región (Maassen, 2000). Es muy importante notar, además, que el débil flujo que se establece a lo largo del escalón con agua somera a la derecha, obliga a que en la parte norte del dominio se tenga un ciclón (anticiclón) en la parte profunda (somera) y viceversa en la parte sur (Figura 45).

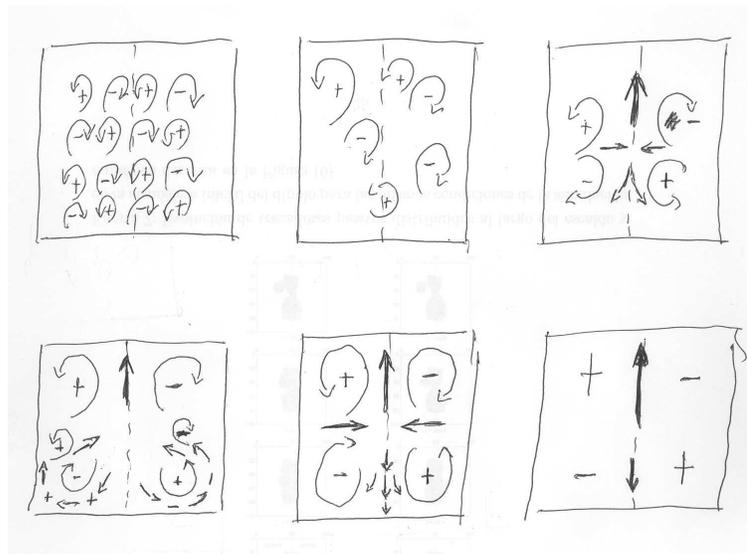


Figura 45: Representación esquemática del papel de las estructuras dipolares en el resultado final obtenido del problema de la turbulencia 2D.

La utilización de un sistema en rotación permite modelar la dinámica de los fluidos geofísicos, tanto en el océano como en la atmósfera. La batimetría idealizada en este estudio, un escalón topográfico, puede ser visto como la separación entre el océano profundo y la plataforma continental. La utilización en este trabajo de dicha topografía idealizada, permite sacar el máximo provecho de la simplicidad de los modelos numéricos bidimensionales y del modelo físico propuestos, y facilita el conocimiento de las principales interacciones existentes. Como queda patente en esta investigación, el estudio de manera individual de flujos completamente turbulentos o del comportamiento de estructuras dipolares frente a un escalón proporciona una mejor comprensión de los procesos físicos involucrados. Se espera que el trabajo realizado sirva de referencia al estudio de fenómenos observados tanto en los océanos como en la atmósfera. El diseño de experimentos de laboratorio con flujos turbulentos, la utilización de topografías más complejas, o modelos de varias capas (estratificación) acoplado otros procesos físicos, son algunas posibles ideas para la realización de otras investigaciones motivadas por este trabajo.

Referencias

- Batchelor, G. K. (1967). An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*.
- Bretherton, F. P. y Haidvogel, D. B. (1976). Two-dimensional turbulence above topography. *J. Fluid Mech.*, **78**, 129–154.
- Clercx, H. J. H., S. R. Maassen, y G. J. F. van Heijst (1999). Decaying two-dimensional turbulence in square containers with no-slip or stress-free boundaries. *Phys. Fluids*, **11**(3), 611–626.
- Cushman-Roisin, B., J. A. Proehl, y D. T. Morgan (1997). Barotropic thin jets over arbitrary topography. *Dyn. Atmos. Oceans*, **26**, 73–93.
- Gill, A. E. (1982). Atmosphere-ocean dynamics. *Academic Press*, **30**.
- Gill, A. E., M. K. Davey, E. R. Johnson, y P. F. Linden (1986). Rossby adjustment over a step. *J. Mar. Res.*, **44**, 713–738.
- Haidvogel, D. B. (2005). Cross-shelf exchange driven by oscillatory barotropic currents at an idealized coastal canyon. *J. Phys. Oceanogr.*, **35**, 1054–1067.
- Hansen, A. E., D. Marteau, y P. Tabeling (1998). Two-dimensional turbulence and dispersion in a freely decaying system. *Phys. Rev. Lett.*, **58**(6), 7261–7271.
- Johnson, E. R. y McDonald, N. R. (2004). Surf-zone vortices over stepped topography. *J. Fluid Mech.*, **511**, 265–283.
- Lamb, H. (1932). Hydrodynamics. *Cambridge University Press*.
- Maassen, S. R. H. (2000). PhD thesis: Self-organization of confined two-dimensional flows. *Eindhoven University of Technology*.

- McWilliams, J. C. (1989). A demonstration of the suppression of turbulent cascades by coherent vortices in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **42**(4), 547–552.
- Meleshko, V. V. y van Heijst, G. J. F. (1994). On Chaplygin’s investigations of two-dimensional vortex structures in a inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, **272**, 157–182.
- Nielsen, A. H. y Rasmussen, J. J. (1997). Formation and temporal evolution of the Lamb-dipole. *Phys. Fluids*, **2**, 982.
- Orlandi, P. (1990). Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids A*, **2**(8), 1429–1436.
- Tabeling, P., S. Burkhart, O. Cardoso, y H. Willaime (1991). Experimental study of freely decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3772–3775.
- Taylor, G. I. (1923). Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. Roy. Soc. A*, **104**, 213–218.
- van Geffen, J. H. y van Heijst, G. J. F. (1998). Viscous evolution of 2D dipolar vortices. *Fluid Dyn. Res.*, **22**, 191.
- van Heijst, G. J. F., H. J. H. Clercx, y S. R. Maassen (2003). A note on the effects of solid boundaries on confined decaying 2D turbulence. *Nonlinear Processes in Geophysical Fluid Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, páginas 305–324.
- Velasco Fuentes, O. U. y van Heijst, G. J. F. (1994). Experimental study of dipolar vortices on a topographic β -plane. *J. Fluid Mech.*, **259**, 79–106.
- Zavala Sansón, L. y van Heijst, G. J. F. (2002). Ekman effects in rotating flow over bottom topography. *J. Fluid Mech.*, **471**, 239–255.
- Zavala Sansón, L., G. J. F. van Heijst, y Doorschot, J. J. J. (1999). Reflection of barotropic vortices from a step-like topography. *Il Nuovo Cimento C*, **22**, 909–929.

Zavala Sansón, L., G. J. F. van Heijst, y N. A. Backx (2001). Ekman decay of dipolar vortex in a rotating fluid. *Phys. Fluids*, **13**(2), 440–451.

Zavala Sansón, L., R. Serravall, G. F. Carnevale, y G. J. F. van Heijst (2005). Experiments and simulations on coastal flows in presence of a topographic slope. *J. Phys. Oceanogr.*, **en prensa**.