RESUMEN de la tesis de Fernando Andrade Canto, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California, México. Abril de 2006.

ANÁLISIS LAGRANGIANO DE LA CIRCULACIÓN SUPERFICIAL DEL MAR CARIBE Y EL CANAL DE YUCATAN

Resumen aprobado por:

Dr. Julio Sheinbaum Pardo Director de Tesis

El análisis lagrangiano del campo de velocidad de una región oceánica es fundamental para entender los procesos de transporte y mezcla que en ella ocurren. Para realizar este análisis se utilizan técnicas de sistemas dinámicos que permiten identificar regiones donde las partículas permanecen atrapadas por largos periodos (remolinos o puntos elípticos), y regiones de compresión y estiramiento donde las partículas se acercan o se alejan de estas zonas (puntos hiperbólicos) y su interacción.

Para investigar la evolución temporal de estas regiones en el Mar Caribe y el Canal de Yucatán, se utilizaron velocidades superficiales del modelo de circulación oceánica ROMS (Regional Ocean Modeling System). Para determinar las regiones donde domina el estiramiento y la vorticidad se aplicó el criterio de Okubo-Weiss, con el cual, al promediar en el tiempo se visualizan las posibles regiones donde domina el estiramiento (puntos hiperbólicos) o la vorticidad (remolinos o puntos elípticos). Así mismo se determinó las regiones donde la mezcla es máxima al aplicar la técnica de los exponentes de tamaño finito de Lyapunov, con la que se puede visualizar de forma sencilla las variedades estables e inestables. Por ultimo se determinaron las variedades estables e inestables y se aplicó la dinámica de lóbulos la cual permite cuantificar el posible intercambio de masa entre el remolino y el flujo. Se determino un punto hiperbólico en el canal de Yucatán, así como las variedades asociadas a dicho punto. Ambas variedades se acercan asintóticamente al punto hiperbólico, lo que sugiere la existencia de una trayectoria hiperbólica en el Canal de Yucatán por la presencia de dos remolinos, uno en el Mar Caribe y el otro en el Golfo de México. En las variedades estables e inestables se encuentran lóbulos que son responsables del transporte entre el remolino y el flujo ambiental. Se utilizó el método de dinámica de lóbulos para determinar el porcentaje de partículas que entran y salen de los remolinos y cuantificar la interacción de estas estructuras con las corrientes existentes en la región.

ABSTRACT of the thesis presented by FERNANDO ANDRADE CANTO a a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in PHYSICAL OCEANOGRA-PHY. Ensenada, Baja California, Mexico. April 2006.

LAGRANGIAN ANALYSIS OF SURFACE CIRCULATION IN THE CARIBBEAN SEA AND YUCATAN CHANNEL

The lagrangian analysis of the velocity field in an oceanic region is essential to understand transport and mixing processes. This analysis uses techniques from dynamical systems theory, which allow to identify regions where particles remain trapped for long periods (eddies or elliptic points), and regions where particles approach or move away from them (hyperbolic points).

To investigate the trajectories of particles regions in the Caribbean Sea and Yucatan Channel, we use surface velocities from ROMS (Regional Ocean Modelling System) model. Three different methods are employed to identify regions or manifolds with different dynamical properties. First we use the Okubo-Weiss criterion to visualize regions where the strain or vorticity dominate. Then, the finite scale Lyapunov exponent (FSLE) technique is applied to determine regions of maximum mixing.From the FSLE it is possible to identify the faster particle separation regions associated to stable and unstable manifolds. Finally , time-slice and lobe dynamics methods are applied to the problem which allow quantification of the mass exchange between different regions of the flow. A hyperbolic point, found in the Yucatan Channel, and the stable and unstable manifolds associated whit it are identified. Both manifolds approach the hyperbolic point which suggest the existence of a hyperbolic trajectory in the Yucatan Channel. The intersection of stable and unstable manifolds produces lobes, which are responsible for transport between eddies and the ambient flow. We use the lobe dynamics to determine the percentage of particles coming or leaving the eddies, and quantify the interaction of the currents with these structures in the region.

Key Words: hiperbolic point, lobes, stable and unstable manifold, Caribbean Sea, surface circulation, lagrangian analysis.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi mas sincero agradecimiento a los Doctores Julio Sheinbaum y Oscar Velasco por compartir su conocimiento y demostrar que si tienen paciencia, ya que sin estas dos virtudes dicho trabajo no tendría ni pies ni cabeza. También deseo extender dicho agradecimiento al Dr. Luis Zavala y Dr. Horacio de la Cueva por sus comentarios y sugerencias para este trabajo.

También deseo agradecer a todos los miembros del grupo CANEK, Julio Candela, Antonio Badam, Pepe Ochoa, por su apoyo tanto en los cruceros como en este trabajo de tesis. Así mismo deseo agradecer a toda la tripulación de los cruceros CANEK, ademas de los mencionados agradezco a Nacho, Armando, Joaquin, Carlos, Benja, y toda la tripulación del Justo Sierra por hacer de este un crucero divertido y en el que aprendí un poco de la otra oceanografía, la cual me resulta bastante interesante y en la que me gustaría profundizar aun mas.

Quisiera agradecer a Manuel López, Luis Zavala, Miguel Lavin, Julio Candela, al Dr. tito, Isabel Ramírez, Julio Sheinbaum, Guido Marinone, Antonio Badan, Alejandro Pares y en especial a Oscar Velasco por brindar sus conocimientos y principios éticos que espero seguir en este camino de la ciencia.

Así mismo deseo agradecer a Lupita Rodriguez, Tere Agüero, Ivonne Best por su apoyo.

Gracias a Hector, Ze miguel, por ser los mejores compas pues sin ustedes el Sauzal seria un vago reguerdo. Gracias a todos los que hicieron del Sauzal ese sitio de sano esparcimiento. Gracias a Julian, a Silva, Manuel, Samanta, Concha, el OSO, Vanesa, David, Velo, Javier, Ivan, Matías y todos los demás también.

Gracias a Vanesa por dejarme morir con dignidad aunque reviví al tercer día como decía la cruda. Gracias al Velo, al Xavier el Hector, el Miguel, Vanesa , Julian por ser esos amigos que estuvieron en los momentos muy malos y muy buenos.

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a mis dos padres por apoyo incondicional y por compartirme sus alegrías, sus anhelos, sus principios, su paciencia, el respeto y cariño que supieron compartir conmigo, GRACIAS.

Gracias Lorena por cambiar de rumbo la vida de este individuo, rumbo que deseo seguir junto a ti, claro si tu me lo permites.

Por ultimo deseo expresar mi profundo agradecimiento a CONACYT por haberme concedido la beca de maestría con la cual se realizó este trabajo, el cual a mi me parece bastante interesante.

Contenido

Pagina.

I. Introducción		oducción	1
	I.1.	Generalidades del Mar Caribe	1
	I.2.	Remolinos en el Caribe	3
	I.3.	Técnicas de estudio de la circulación lagrangiana	5
	I.4.	Justificación y área de estudio	6
II.	Mét	codos de sistemas dinámicos	7
	II.1.	Análisis dinámico de una función de corriente independiente del tiempo	7
	II.2.	Análisis dinámico de una función dependiente del tiempo	19
II	[. De	scripción del modelo y los datos de velocidad	35
IV	. An	álisis de la circulación superficial del Mar Caribe y el Canal de Yu-	
	catá	in	39
	IV.1	. Obtención de la geometría euleriana	39
	IV.2	. Cálculo de partículas hiperbólicas	40
V.	\mathbf{Res}	umen final y conclusiones	56
\mathbf{V}	[.Lite	eratura Citada	60

Índice de figuras

Figu	Figura Pág	
1.	Área de estudio con los rasgos geográficos y geológicos más importantes: (a) divi-	
	siones del Mar Caribe y circulación superficial, (b) principales cuencas y pasajes	
	del Mar Caribe; las regiones marcadas por líneas punteadas representan cordilleras	
	con profundidades menores a 1000 m. Figura modificada de Andrade y Barton	
	(2000)	2
2.	Campo de velocidades producido por dos vórtices puntuales, en el cual se repre-	
	senta a dos remolinos centrados en el eje y	9
3.	Ambos autovalores reales y $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, nodo estable; en este caso el flujo	
	partiendo de las condiciones iniciales en las que se encuentre llegará al punto fijo.	12
4.	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0,$ nodo inestable; en este caso el flujo partiendo de las condiciones	
	iniciales en las que se encuentre se alejará del punto fijo. $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	12
5.	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, punto hiperbólico o punto silla; en este caso la trayectoria se acerca	
	inicialmente para luego alejarse del punto fijo	13
6.	$\lambda_1 = -\alpha - i\beta, \lambda_2 = -\alpha + i\beta, \ espiral \ estable$; en este caso las trayectorias se	
	acercan en forma de espiral al punto fijo	13
7.	$\lambda_1 = \alpha - i\beta, \lambda_2 = \alpha + i\beta, espiral inestable$; en este caso las trayectorias se	
	alejan en forma de espiral del punto fijo . \ldots . \ldots . \ldots . \ldots . \ldots .	14
8.	$\lambda_1 = -i\omega, \lambda_2 = i\omega, punto elíptico; en este caso las trayectorias dan vueltas$	
	al rededor del punto fijo en forma de círculos o elipses. . \ldots \ldots \ldots \ldots	14
9.	Flujo sin perturbación en donde se presenta la variedad estable W^s (línea ro-	
	ja) y variedad inestable W^u (linea azul); ambas variedades se acercan al punto	
	hiperbólico (*). \ldots	17

Fig	ura Inice de figuras (continuación) Página	
10.	Trayectoria hiperbólica $\gamma(t)$ linea negra; la variedad estable comienza su	
	evolución en la direción de compresión al tiempo $t+\Delta t$ (rojo) y la variedad	
	inestable comienza su evolución en la dirección de estiramiento al tiempo	
	$t-\Delta t(\mathrm{azul}).$ Ambas variedades se acercan al punto hiperólico asociado a la	
	trayectoria hiperbólica al tiempo t	18
11.	Gráfica del promedio del parametro de Okubo-Weiss para la ecuación 19 en	
	el que se aprecia la presencia de dos regiones donde el valor es negativo (vor-	
	ticidad) y una region centrada en $(0,0)$ con valores positivos (estiramiento).	22
12.	Campo de $\lambda = \lambda_{+} - \lambda_{-}$, donde se puede apreciar los valores positivos asocia-	
	dos a regiones de compresión y los valores negativos a regiones de estiramiento.	26
13.	Variedades estables (rojo) e inestables (azul) al tiempo t, donde las partículas que	
	conforman a las variedades se acercan as intóticamente al punto fijo $(\bullet).$	28
14.	Se muestra el punto fijo p_0 la variedad estable $S[p_0,q]$ (rojo) y la inestable $U(p_0,q)$	
	(azul), siendo la intersección de estas variedades $S(p_0,q) \cap U(p_0,q)$ al punto de	
	intersección primaria p.i.p	29
15.	Los puntos de interesección primaria p y q, definen una region limitada por los	
	segmentos $U(p,q)$ y $S(p,q)$ denominada lóbulo	30
16.	La región limitada por la $pseudo-separatriz$ (línea discontinua) y que encierra a	
	punto elíptico es la region interior $R.I., R.E$ es la región exterior. \ldots \ldots	32
17.	Lóbulo para el flujo estacionario asociada a 2 vórtices puntuales con una pertur-	
	bación $Ay \operatorname{sen}(t)$ en la función de corriente, en el que se determinan tres puntos	
	de interseccion primaria con lo que se tienen dos lóbulos. El lóbulo en color rojo	
	es el de captura (LC) mientras que el de color azul es el de expulsión (LE) los	
	cuales se encuentran dentro y fuera del remolino.	33
18.	Campo de velocidades a $30m$ de profundidad del modelo ROMS en una malla	
	rotada para optimizar el número de puntos de malla sobre el mar	37

Fig	ura Inice de figuras (continuación)	Página	
19.	Campo de velocidades a $30m$ de profundidad del modelo ROMS interpola	do a la	
	malla rectangular, en la que se muestra la región de estudio para este trab	pajo	38
20.	Geometría euleriana en la que se pueden ver los puntos hiperbólicos y el	lípticos	
	(*) y las líneas de corriente asociadas a estos puntos. \ldots		41
21.	Promedio temporal del párametro de Okubo-Wiess para el mes de datos	donde	
	se pueden observar las regiones donde los valores negativos indican que o	lomina	
	la vorticidad, mientras que los valores positivos se encuentran relaciona	ados al	
	estiramiento. Como se puede apreciar, en la región del Canal de Yucatán de	ominan	
	los valores positivos, por lo que es posible considerar la presencia de una pa	rtícula	
	hiperbólica en dicha zona.		44
22.	El panel (a) muestra las líneas de corriente, junto con los puntos elíp	ticos e	
	hiperbólicos para el promedio de la simulación del mes. El panel (b) n	nuestra	
	el promedio del parámetro de Okubo-Weiss para la misma simulación. C	omo se	
	puede apreciar en el panel (a) la región cercana a la Isla de Cuba parece	e tener	
	varios remolinos ya que hay varios puntos elípticos ahí. Sin embargo al con	nparar	
	con el panel (b), el parámetro Okubo-Weiss en esa región muestra valores	neutros.	45
23.	Campo de $\lambda = \lambda_{+} - \lambda_{-}$, los valores positivos corresponden a las regio	ones de	
	compresión y los valores negativos a las regiones de estiramiento. $\ .\ .$.		48
24.	Variedad estable (rojo) e inestable (azul)		50
25.	(a) Exponentes de tamaño finito de Lyapunov, (b) las variedades estables (rojo) e	
	inestables (azul). Los valores máximos de los exponentes forman estrucura	as muy	
	similares a las variedades.		51
26.	Variedades estables e inestables junto con tres puntos de intersecció	ón pri-	
	maria $(p.i.p.)$, dando lugar a dos lóbulos $L1$ y $L2$ en la región del Go	olfo de	
	México		52

Figu	ra Inice de figuras (continuación)	Página	
27.	La variedades estable (rojo) e inestable (azul). Así mismo se muestra la	seudo-	
	separatriz (línea punteada), que permite identificar la region interior RI y la $% f(x)$	region	
	exterior RE. Donde la region interior RI delimitada por la línea punteada	a tiene	
	un area aproximada de 78,000 Km^2		53
28.	Lóbulos de captura LC (verde) y expulsion LE (amarillo). EL lóbulo de exp	pulsión	
	tiene un area de 4200.0km² y el de captura de 1390.0km²		54
29.	Evolución de los lóbulos en la que se puede apreciar cómo las partícu	ılas no	
	pueden cruzar las variedades.		56

I. Introducción

I.1. Generalidades del Mar Caribe

El Mar Caribe es un mar semicerrado adyacente a las masas continentales de América Central y Sudamérica. Este mar interactúa con el Océano Atlántico a través de las islas de Guadalupe hasta Granada, localizadas al este y conocidas como las Antillas Menores y al noreste con las islas de Cuba, Española, y Puerto Rico, conocidas como las Antillas Mayores. El espacio semicerrado entre dichas islas (canales), los bancos y los umbrales de los arcos antillanos actúan como un filtro para el flujo que entra del Océano Atlántico (Murphy *et al.*, 1999; Andrade y Barton, 2000). El Mar Caribe se encuentra altamente estratificado entre la superficie y los 1200 m de profundidad, débilmente estratificado entre los 1200 y 2000 m y casi homogéneo debajo de los 2000 m. Esta estructura de densidad está directamente relacionada con la profundidad del arco de las Antillas, puesto que este último impide el flujo de agua profunda en el Caribe (Gordon, 1967).

El Mar Caribe se encuentra dividido en cinco cuencas como se aprecia en la figura 1. De este a oeste las cuencas son la de Granada, Venezuela, Colombia, Caimán y Yucatán (Andrade y Barton, 2000; Sheng y Tang, 2003). Esta topografía resulta ser un factor importante en la generación y deformación de remolinos (Andrade y Barton, 2000). La circulación media en el Mar Caribe consiste de un flujo intenso, cálido y persistente denominado Corriente del Caribe, ésta tiene una velocidad promedio de 50 cm/s con velocidades máximas de 150 cm/s.

La Corriente del Caribe está formada por la union de la Corriente Norecuatorial con la Corriente de Guyana, la cual también se le conoce como la Corriente del Norte de Brasil. Esta corriente entra al Caribe por los estrechos norte y sur de las Antillas menores, principalmente por los canales de Granada, San Vicente, Santa Lucía, Dominica y Guadalupe. Fluye hacia el oeste a lo largo del eje principal este-oeste de la cuenca hasta alcanzar la elevación de America Central, en donde gira hacia el norte y penetra a la cuenca de Caimán vía el Canal Chibcha. Ahí retoma su dirección hacia el oeste para luego virar hacia el norte entre este de la cuenca de Caimán vía el Canal Chibcha.



Figura 1: Área de estudio con los rasgos geográficos y geológicos más importantes: (a) divisiones del Mar Caribe y circulación superficial, (b) principales cuencas y pasajes del Mar Caribe; las regiones marcadas por líneas punteadas representan cordilleras con profundidades menores a 1000 m. Figura modificada de Andrade y Barton (2000).

formando la Corriente de Yucatán. Dicha corriente es considerada una de las corrientes de frontera oeste más intensas del mundo (Sheinbaum *et al.*, 2002), la cual tiene una velocidad media de 150 cm/s y aporta la mayor parte del transporte del Mar Caribe al Golfo de México al atravesar el Canal de Yucatán. Depués de pasar por el Canal de Yucatán la corriente se convierte en la Corriente de Lazo.

La Corriente de Yucatán juega un papel muy importante en la circulación dentro del Golfo de México. Donald y Molinari (1979) explican cómo el flujo que alimenta al Golfo de México a través del canal de Yucatán es el principal mecanismo de forzamiento de su circulación. Uno de los fenómenos más característicos de la región es el desprendimiento intermitente de remolinos de la Corriente de Lazo en el Golfo de México (Maul y Vukovich, 1993). Diversos estudios, tanto de simulaciones numéricas como de datos observados, indican que la Corriente de Yucatán está relacionada con la formación de dichos remolinos.

Por ejemplo a partir de datos observados de velocidad de corriente a lo largo del Canal de Yucatán y de observaciones altimétricas en el Golfo de México, Candela *et al.* (2002) encuentran que el flujo de vorticidad de la Corriente de Yucatán influye en la liberación de giros en la Corriente de Lazo; los períodos con flujo de vorticidad negativa están relacionados con una mayor extensión de esta corriente mientras que los periodos con flujos de vorticidad positiva están relacionados con la retracción de la misma.

A partir de una simulación numérica en el Atlántico Norte, Oey *et al.* (2003) sugieren que la conservación de vorticidad potencial indica que los remolinos del Caribe inhiben la extensión de la Corriente de Lazo hacia el Golfo de México causando que los periodos de liberación de remolinos de la Corriente de Lazo sean mayores (14 – 16 meses). Los procesos que dan lugar a la generación de los giros de la Corriente de Lazo están poco entendidos y son tema de intensa investigación.

I.2. Remolinos en el Caribe

La Corriente del Caribe presenta gran variabilidad espacial y temporal debido a procesos de mesoescala como meandros y remolinos. Estudios diversos sugieren que estos procesos

4

están relacionados con la retroflexión de la Corriente Norte de Brasil (Kinder *et al.*, 1985; Fratantoni *et al.*, 1995); estas estructuras también pueden ser formadas en las cuencas de Granada y Venezuela por la interacción de la corriente con la topografía, así como por el rotacional del esfuerzo del viento (Andrade y Barton, 2000) o la inestabilidad de la corriente (Carton y Chao, 1999).

La retroflexión de la Corriente Norte de Brasil libera regularmente de 8 a 9 remolinos anticiclónicos al año, estos tienen un diámetro de 400 km y se trasladan en dirección norte hacia el Caribe a una velocidad de 15 cm/s (Johns *et al.*, 2003). La mayoría de estos remolinos se trasladan en direción norte justo al este de las Antillas Menores alrededor de los $14 - 18^{\circ}N$ donde se detienen y decaen (Fratantoni y Richardson, 2004). Algunos de estos remolinos desaparecen después de chocar con la masa continental a los $14^{\circ}N$. Sin embargo ciertos remolinos o parte de ellos logran penetrar al Caribe, a través de los pasajes formados por las islas a los $18^{\circ}N$ (Fratantoni y Richardson, 2004). Estas estructuras, al chocar con las Antillas Menores aparentemente inyectan vorticidad anticiclónica en el Mar Caribe.

Trabajos diversos sugieren que los remolinos y meandros de mesoescala no se encuentran distribuidos aleatoriamente a lo largo del Caribe, sino que se forman o se regeneran cerca de rasgos topográficos grandes como la Elvación de las Aves, la Dorsal Beata, la Dorsal de Caimán y la Elevación de América Central con una profundidad menor a los 200 m (Andrade y Barton, 2000). Tales rasgos topográficos son responsables de incrementar la variabilidad de la corriente superficial y la formación de remolinos al oeste de las elevaciones, los cuales son advectados por la Corriente del Caribe (Molinari *et al.*, 1981).

Richardson (2005) menciona que la mayoría de estas estructuras son anticiclónicas aunque también menciona la existencia de estructuras ciclónicas. Así mismo menciona que ciertos remolinos anticiclónicos que aparecen en el Caribe Oriental resultan ser residuos del impacto de los remolinos de la retroflexión de la Corriente Norte de Brasil en las Antillas Menores. Ciertas estructuras anticiclónicas pueden ser amplificadas o generadas por las inestabilidades de la corriente en su región anticiclócnica, y menciona la presencia de remolinos ciclónicos relacionados al corte ciclónico de la Corriente del Caribe cerca de la costa de Sudamérica.

El diámetro de los remolinos es del orden de 100 - 500 km y viajan al oeste a lo largo del eje de la Corriente del Caribe con una velocidad de propagación de 12 - 15 cm/s (Molinari et al., 1981; Murphy et al., 1999). El tiempo de vida de estos remolinos es de 3 a 6 meses y en la mayoría de los casos está determinado por la interacción con la topografía y las costas. Estos remolinos son generados y regenerados en un periodo que oscila entre los 50 y 200 días (Andrade y Barton, 2000). Las aguas del Caribe están compuestas por masas de agua, tales comó el agua profunda del Atlántico Norte, Agua Intermedia Antártica, Agua Subtropical, etc. La parte superficial está influenciada por aguas del Amazonas, del Orinoco y otros ríos. Estas aguas son advectadas y mezcladas por la presencia de los remolinos caribeños que al interactuar con las fronteras o rasgos topográficos arrastran agua cercana de la costa a regiones profundas y viceversa. La interacción de estas estructuras con las corrientes presentes tienen implicaciones importantes para la dispersión de larvas y contaminates en la región.

I.3. Técnicas de estudio de la circulación lagrangiana

Para estudiar las características de la circulación lagrangiana generalmente se han utilizado técnicas o análisis estadísticos. Sin embargo, recientemente se ha empezado a utilizar técnicas de sistemas dinámicos en el problema, lo que ha permitido entender diversos fenómenos a partir de las propiedades geométricas del campo de velocidades. Uno de estos métodos consiste en calcular el llamado parámetro de Okubo-Weiss con el cual se pueden determinar las regiones donde domina la vorticidad (posibles remolinos) y las regiones de estiramiento y compresión (posibles regiones donde la mezcla es máxima). Este párametro ha sido utilizado para el seguimiento e identificación de remolinos en el Caribe y en otras regiones como el Mediterráneo (Guerrero, 2005; Isern-Fontanet *et al.*, 2002), y experimentos numericos (Elhmaidi *et al.*, 1993)

Otro método es el de los exponentes de tamaño finito de Lyapunov utilizado para visualizar las posibles fronteras entre los remolinos y el flujo exterior, así como también las posibles regiones donde la mezcla es máxima. Estos exponentes se han utilizado tanto en la atmósfera (Koh y Legras, 2002) como en el océano (d'Ovidio *et al.*, 2004).

Otros métodos analizan la circulación lagrangeana considerando directamente la evolución espacio-temporal de las variedades estables e inestables y sus intersecciones (lóbulos) para entender los procesos de intercambio y mezcla en el fluido (Malhorta y Wiggins, 1998; Haller, 2000). Estos métodos se han aplicado usando salidas de modelos de circulación oceánica en el Golfo de California (Velasco Fuentes y Marinone, 1999) así como en el Golfo de México (Toner y Poje, 2004; Kuznetsov *et al.*, 2002).

I.4. Justificación y área de estudio

El Mar Caribe es una zona de gran importancia ecológica y económica puesto que en la región noroeste se encuentra el Sistema Arrecifal Mesoamericano, la segunda barrera arrecifal más grande del mundo después de la Gran Barrera Arrecifal en Australia. Este ecosistema tiene zonas que han sido decretadas parques marinos o reservas ecológicas para garantizar su conservación, pero se ven afectadas por la circulación oceánica y el desarrollo turístico.

Este sistema arrecifal se encuentra situado en las costas de México, Belice, Guatemala y Honduras, con una extensión aproximada de mil kilómetros, y se caracteriza por su fragilidad y gran biodiversidad de especies, como la langosta espinosa, el caracol rosado, tortugas blancas y más de 60 tipos de corales. Entender el mecanismo de retención y expulsión de larvas y huevos de un banco arrecifal a otro es de vital importancia para su sobrevivencia como ecosistema. Ello requiere de una comprensión detallada de la circulación oceánica en la zona y de los procesos de transporte, intercambio y mezcla.

II. Métodos de sistemas dinámicos

Los métodos de análisis que se utilizan en esta tesis son relativamente novedosos, y se basan en conceptos matemáticos usados en la teoría de sistemas dinamicos. A continuación se hace un recuento y se ilustran las ideas fundamentales de sistemas dinámicos utilizando campos analíticos sencillos, pero a la vez relevantes para el problema central de esta tesis, el cual se discute en el capítulo 4.

Las conceptos principales pueden comprenderse al analizar campos o flujos independientes del tiempo. Los resultados que de ahí se derivan se generalizan posteriomente a flujos con perturbaciones periódicas o flujos arbitrarios dependientes del tiempo.

En las siguientes secciones se hace un estudio de sistemas dinámicos de un fluido bidimensional e incompresible. Primero se realiza un análisis dinámico de una función de corriente independiente del tiempo que semeja la presencia de dos remolinos estacionarios y se discuten conceptos fundamentales. Posteriormente se estudia el caso en que este flujo se perturba con una función periódica y se discute la extensión de los resultados del caso estacionario para el problema.

II.1. Análisis dinámico de una función de corriente independiente del tiempo

En esta sección se describe el análisis para una función de corriente independiente del tiempo, en el cual se determinan sus puntos fijos, se describe su clasificación y se obtienen las variedades estables e inestables.

Con el objetivo de representar un problema de advección similar a dos remolinos y dos corrientes con direcciones opuestas, tal como puede suceder en la región del Caribe y el Canal de Yucatán, se considera una función de corriente que represente dos remolinos. Dicha función corresponde a la de dos vórtices puntuales.

La función de corriente para un vórtice puntual Ψ_{vp} en la posición $\overline{x}_0 = (x_0, y_0)$ está definida

por

$$\omega = \delta(\overline{x} - \overline{x}_0),\tag{1}$$

$$\psi_{vp} \propto lnr,$$
 (2)

donde ω es la vorticidad, r es la distancia al vórtice puntual, siendo la vorticidad infinita cuando r es cero. En este ejemplo, para que la función de corriente represente a un remolino ésta debe ser $\psi_{vp} = \frac{\gamma}{2\pi} lnr$, donde γ es la circulación. Considerando dos remolinos sobre el eje y en $(0, r_0)$ y $(0, -r_0)$, donde r_0 es la distancia a y = 0, se obtiene

$$\psi_{vp_1} = \frac{\gamma}{2\pi} lnr_1,\tag{3}$$

$$\psi_{vp_2} = \frac{\gamma}{2\pi} lnr_2,\tag{4}$$

con $r_1 = \sqrt{x^2 + (y - r_0)^2}$ y $r_2 = \sqrt{x^2 + (y + r_0)^2}$. De modo que la función de corriente total está dada por:

$$\psi = \psi_{vp_1} + \psi_{vp_2} = \frac{\gamma}{2\pi} lnr_1 + \frac{\gamma}{2\pi} lnr_2.$$
 (5)

Las componentes de la velocidad están definidas por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad y \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$
 (6)

El cálculo de las componentes $u \ge v$ se hace por separado para cada vórtice y luego se suma para obtener el campo de velocidades del flujo:

• Vórtice puntual uno:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{(y - r_0)}{(x^2 + (y - r_0)^2)},$$
$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-\gamma}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + (y - r_0)^2)},$$

• Vórtice puntual dos:

$$u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{(y+r_0)}{(x^2+(y+r_0)^2)},$$
$$v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-\gamma}{2\pi} \frac{x}{(x^2+(y+r_0)^2)}.$$



Figura 2: Campo de velocidades producido por dos vórtices puntuales, en el cual se representa a dos remolinos centrados en el eje y.

,

De tal forma que el campo de velocidades del flujo total queda como:

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{(y - r_0)}{(x^2 + (y - r_0)^2} + \frac{(y + r_0)}{(x^2 + (y + r_0)^2)} \right]$$
(7)

$$v = -\frac{\gamma x}{2\pi} \left[\frac{1}{(x^2 + (y - r_0)^2)} - \frac{1}{(x^2 + (y + r_0)^2)} \right]$$
(8)

En la figura 2 se muestra el campo de velocidades del flujo, en la que se aprecia un punto fijo o de estancamiento (•). El análisis y clasificación de los puntos fijos se describe a continuación.

Puntos fijos

Los puntos fijos son aquellos donde la velocidad es igual a cero. Son también conocidos como *puntos de equilibrio* o en mecánica de fluidos como *puntos de estancamiento*. Para localizar estos puntos se resuelven las ecuaciones u = 0 y v = 0 para x y y:

$$u = 0 \qquad \mathbf{y} \qquad v = 0. \tag{9}$$

Una vez identificado el punto fijo la estructura a su alrededor puede determinarse analizando el movimiento de una partícula cuya posición inicial es cercana al punto fijo.

Sea \overrightarrow{x}_0 un punto fijo del sistema $\frac{d \overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$. Para analizar las soluciones con posición inicial en $\overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{\delta}$, donde $\overrightarrow{\delta}$ es pequeña, en el caso bidimensional se tiene:

$$\overrightarrow{x_0} = (x_0, y_0),\tag{10}$$

$$\overrightarrow{\delta} = (\delta_x, \delta_y),\tag{11}$$

$$\overrightarrow{f} = (f,g), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}(x_o + \delta_x) = f(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y)),$$

$$\frac{d}{dt}(y_o + \delta_y) = g(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y)),$$

linealizando alrededor de (x_0, y_0) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\delta_x = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\delta_y + \dots$$
$$\frac{d}{dt}\delta_y = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}\delta_y + \dots$$

entonces:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\delta} = M\overrightarrow{\delta},$$

donde:

$$\overrightarrow{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix},$$

y con ello se define la $matriz \ M$ como:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Los puntos fijos de las ecuaciones 7 y 8 se obtienen de

$$\frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{y - r_0}{x^2 + (y - r_0)^2} + \frac{y + r_0}{x^2 + (y + r_0)^2} \right] = 0,$$

$$-\frac{\gamma x}{2\pi} \left[\frac{1}{x^2 + (y - r_0)^2} + \frac{1}{x^2 + (y + r_0)^2} \right] = 0,$$

encontrando un solo punto fijo en (0, 0). En este caso se tiene:

$$f = \frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{y - r_0}{x^2 + (y - r_0)^2} + \frac{y + r_0}{x^2 + (y + r_0)^2} \right],$$
$$g = -\frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + (y - r_0)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + r_0)^2} \right],$$

por lo que

$$\begin{split} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{\gamma x}{2\pi} \left[\frac{(y-r_0)}{(x^2+(y-r_0)^2)^2} + \frac{(y+r_0)}{(x^2+(y+r_0)^2)^2} \right], \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{x^2+(y-r_0)^2-2(y-r_0)^2}{(x^2+(y-r_0)^2)^2} + \frac{x^2+(y+r_0)^2-2(y+r_0)^2}{(x^2+(y+r_0)^2)^2} \right], \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{x^2+(y-r_0)^2-2x^2}{(x^2+(y-r_0)^2)^2} + \frac{x^2+(y-r_0)^2+2x^2}{(x^2+(y+r_0)^2)^2} \right], \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\gamma x}{2\pi} \left[\frac{x^2+(y-r_0)^2-2(y-r_0)}{(x^2+(y-r_0)^2)^2} + \frac{x^2+(y+r_0)^2-(y+r_0)}{(x^2+(y+r_0)^2)^2} \right], \end{split}$$

y evaluando en el punto (0,0), la *matriz* M queda como:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\gamma/2\pi \\ -\gamma/2\pi & 0 \end{bmatrix}.$$
 (13)

Autovalores

Los autovalores de **M** determinan la estructura del flujo alrededor del punto fijo, en tanto que sus autovectores indican la dirección del flujo. La solución para $\overrightarrow{\delta}$ puede expresarse como

$$\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{d_1} e^{\lambda_1 t} + \overrightarrow{d_2} e^{\lambda_2 t},$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores y, d_1 y d_2 son los autovectores correspondientes. Al clasificar los puntos fijos podemos encontrar el comportamiento de las partículas de fluido en dicho campo de velocidad.

Clasificación de los puntos fijos

Los puntos fijos tienen la siguiente clasificación con base en los eigenvalores asociados:

i) nodo estable, ambos autovalores son reales $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (fig 3). En este caso la partícula, partiendo de la posición inicial en la que se encuentre llegará al punto fijo en forma directa.



Figura 3: Ambos autovalores reales y $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, nodo estable; en este caso el flujo partiendo de las condiciones iniciales en las que se encuentre llegará al punto fijo.

- ii) nodo inestable, ambos autovalores son reales y $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (fig 4). En este caso la partícula partirá de la posición inicial para alejarse en forma directa del punto fijo.
- iii) punto hiperbólico, ambos autovalores son reales y $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, también se le conoce como punto silla. (fig 5). En estos puntos el fluido es advectado en las direcciones de



Figura 4: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, nodo inestable; en este caso el flujo partiendo de las condiciones iniciales en las que se encuentre se alejará del punto fijo.

compresión hacia el punto fijo y conforme se acerca a éste, el flujo es advectado en las direcciones de estiramiento alejándose del punto fijo; en la figura 5 se aprecia la dirección de compresión y la de estiramiento (la dirección de compresión es hacia el punto fijo y la de estiramiento es la que se aleja de éste).



Figura 5: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, punto hiperbólico o punto silla; en este caso la trayectoria se acerca inicialmente para luego alejarse del punto fijo.

iv) espiral estable, $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$ (fig 6). En este caso las trayectorias se acercan en forma de espiral al punto fijo.



Figura 6: $\lambda_1 = -\alpha - i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha + i\beta$, espiral estable ; en este caso las trayectorias se acercan en forma de espiral al punto fijo.

- v) espiral inestable, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha i\beta$ (fig 7). En este caso las trayectorias se alejan en forma de espiral del punto fijo.
- vi) punto elíptico, $\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$ (fig 8). En este caso las trayectorias dan vueltas alrededor del punto fijo en forma de círculos o elipses.

Considerando la ecuación $det[M - \lambda I] = 0$, en la cual I es la matriz identidad y λ son los autovalores, evaluando en el punto (0,0) se tiene para el flujo dado por las ecuaciones 7 y



Figura 7: $\lambda_1 = \alpha - i\beta$, $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, espiral inestable ; en este caso las trayectorias se alejan en forma de espiral del punto fijo.



Figura 8: $\lambda_1 = -i\omega, \lambda_2 = i\omega$, *punto elíptico*; en este caso las trayectorias dan vueltas alrededor del punto fijo en forma de círculos o elipses.

8 que

$$det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{\gamma}{2\pi} \\ -\frac{\gamma}{2\pi} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{\gamma^2}{4\pi^2} = 0, \qquad (14)$$

y los autovalores quedan como:

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\pi},\tag{15}$$

$$\lambda_2 = \frac{\gamma}{2\pi},\tag{16}$$

Puesto que los autovalores están dados de la forma $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el punto fijo en (0,0) es del tipo hiperbólico.

Para calcular los autovalores se resuelve la ecuación $det[M - \lambda I] = 0$, una vez que se tienen los autovectores se encuentran resolviendo $[M - \lambda I]V = 0$ donde V es el autovector.

Resolviendo la ecuación se obtienen los autovectores para el punto hiperbólico.

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\ -1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix},\tag{18}$$

donde V_1 corresponde a la dirección de compresión, ya que el autovalor asociado a λ_1 tiene parte real negativa; consecuentemente V_2 corresponde a la dirección de estiramiento, puesto que el autovalor asociado λ_2 tiene parte real positiva.

Variedades estables e inestables de los puntos hiperbólicos

Una variedad está definida como un conjunto que localmente tiene la estructura del espacio euclidiano. En advección de fluidos estas variedades son curvas o superficies.

El subespacio E^s que tiene como base a los autovectores asociados a autovalores con parte real negativa se denomina la **variedad estable** para el punto fijo. El subespacio E^u que tiene como base a los autovectores asociados a los autovalores con parte real positiva se conoce como **variedad inestable** del punto fijo.

Las orbitas que inician en E^s se acercan asintóticamente al punto fijo cuando $t \to \infty$ y las que inician en E^u se acercan al punto fijo cuando $t \to -\infty$. Esto nos lleva a las siguientes definiciones:

- Variedad estable W^s es el conjunto de órbitas que se acercan al punto fijo cuando $t \to \infty$
- Variedad inestable W^u es el conjunto de órbitas que se acercan al punto fijo cuando $t \to -\infty$

Los puntos fijos junto con las variedades determinan las propiedades generales de las trayectorias. Las variedades definen el comportamiento del flujo puesto que el futuro de una trayectoria es completamente distinto cuando está localizada a uno u otro lado de la variedad, por ello se les denomina *separatrices*. En la figura 9 se muestran la variedad estable e inestable del flujo producido por dos vórtices puntuales en color rojo y azul respectivamente, ambas se acercan al punto hiperbólico (*). A dichas estructuras se les considera barreras para el transporte, puesto que una partícula que se encuentre dentro del remolino no podrá cruzar la variedad y salir del remolino, de la misma forma si una partícula se encuentra fuera del remolino esta no podrá cruzar la variedad y por lo tanto no podrá entrar al remolino.

Es posible encontrar campos de velocidades definidos para $-\infty < t < \infty$ solamente para modelos altamente idealizados. De tal forma que para el caso en el que se tiene un intervalo de tiempo finito $0 < t < t_f$, la variedad estable se determina colocando una línea de partículas en la dirección de compresión en $t + \Delta t$ e integrando hacia atrás hasta el tiempo t. Para el caso de la variedad inestable se coloca una línea de partículas en dirección de estiramiento al tiempo $t - \Delta t$ y se integra hacia adelante hasta el tiempo t.

Con el cálculo de las variedades se puede determinar la **trayectoria hiperbólica**, la cual está caracterizada por tener propiedades similares a las de un punto hiperbólico, es decir dichas trayectorias repelen y atraen a dos conjuntos distintos de partículas (exponencialmente en el tiempo). La **trayectoria hiperbólica** $\gamma(t)$ se define cuando el conjunto de variedades estables e inestables se acercan asintóticamente al punto hiperbólico asociado a la trayectoria $\gamma(t)$ cuando $t \to \infty$ y $t \to -\infty$, respectivamente (Rogerson *et al.*, 1999). En la figura 10 se puede apreciar cómo las variedades estables e inestables, en color rojo y azul respectivamente, se acercan al punto fijo relacionado a la trayectoria hiperbólica, línea negra.



Figura 9: Flujo sin perturbación en donde se presenta la variedad estable W^s (línea roja) y variedad inestable W^u (linea azul); ambas variedades se acercan al punto hiperbólico (*).



Figura 10: Trayectoria hiperbólica $\gamma(t)$ linea negra; la variedad estable comienza su evolución en la direción de compresión al tiempo $t + \Delta t$ (rojo) y la variedad inestable comienza su evolución en la dirección de estiramiento al tiempo $t - \Delta t$ (azul). Ambas variedades se acercan al punto hiperólico asociado a la trayectoria hiperbólica al tiempo t.

II.2. Análisis dinámico de una función dependiente del tiempo

El análisis anterior considera un flujo independiente del tiempo. En esta sección se analiza un caso en el que se añade al flujo estacionario dado por la ecuación (5) una pertubación dependiente del tiempo de la forma $Ay \operatorname{sen}(t)$, donde A es la amplitud y t el tiempo, de este modo la función de corriente está dada por:

$$\psi = \psi_{vp_1} + \psi_{vp_1} + Ay \operatorname{sen}(t) = \frac{\gamma}{2\pi} lnr_1 + \frac{\gamma}{2\pi} lnr_2 + Ay \operatorname{sen}(t),$$
(19)

de donde se obtienen las velocidades:

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{(y-1)}{(x^2 + (y-1))^2} + \frac{(y+1)}{(x^2 + (y+1))^2} \right] + A\operatorname{sen}(t),$$
(20)

$$v = -\frac{\gamma x}{2\pi} \left[\frac{1}{(x^2 + (y-1))^2} - \frac{1}{(x^2 + (y+1))^2} \right],$$
(21)

Para flujos periódicos como éste, es posible aplicar el mapeo de Poincaré, el teorema KAM, por Kolmogorov, Arnold y Moser (Wiggins, 1990), y la dinámica de lóbulos con las cuales se puede analizar el transporte e intercambio de partículas entre el flujo exterior y los remolinos. Sin embargo, como el objetivo es estudiar el caso general dependiente del tiempo aquí sólo veremos la aplicación de la dinámica de lóbulos la cual, sin embargo, puede usarse tanto con flujos periódicos como con flujos no periódicos.

Para flujos dependientes del tiempo es difícil determinar o visualizar las regiones donde exista una trayectoria hiperbólica. Por tal motivo a continuación se describen otros métodos como el criterio de Okubo-Weiss, los exponentes de tamaño finito de Lyapunov y el cálculo de las variedades estables e inestables para encontrar las trayectorias hiperbólicas.

Primero se discute la base y la aplicación del criterio de Okubo-Weiss , posteriormente el método de los exponentes de tamaño finito de Lyapunov y finalmente el cálculo de las variedades y dinámica de lóbulos.

Criterio de Okubo-Weiss(Q)

El criterio de Okubo-Weiss permite identificar las regiones de un flujo donde domina el estiramiento (puntos hiperbólicos) y las regiones donde domina la vorticidad (puntos elípticos o remolinos). Sin embargo, este criterio tiene ciertas limitaciones. En este trabajo lo utilizamos considerando el siguiente argumento:

En flujos dependientes del tiempo es probable que regiones donde a un cierto tiempo domina el estiramiento (o vorticidad) modifiquen sus características para tiempos diferentes. Sin embargo, si nos fijamos en el valor promedio del parámetro de Okubo-Weiss en el período de interés, éste identificará las regiones que en promedio mantienen sus propiedades de hiperbolicidad o elipticidad, y por lo tanto será un buen indicador de donde puede ser posible encontrar partíclas hiperbólicas.

El criterio de Okubo-Weiss (Okubo, 1970; Weiss, 1991) considera fluidos bidimensionales incompresibles y no viscosos en los que la evolución temporal está gobernada por la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \overrightarrow{u} \bullet \nabla \overrightarrow{u} = -\nabla P, \tag{22}$$

$$\nabla \bullet \overrightarrow{u} = 0, \tag{23}$$

donde \overrightarrow{u} es la velocidad para un flujo en dos dimensiones y P es la presión.

Para el estudio de los campos de deformación y vorticidad, el criterio de Okubo-Weiss propone una ecuación de evolución del gradiente de vorticidad $\nabla \omega$, el cual se obtiene de la diferenciación de la ecuación (22):

$$\frac{d\nabla\omega}{dt} + D^t\nabla\omega = 0,$$
(24)

donde ω es la vorticidad, D es el tensor del gradiente de velocidad $(\nabla \vec{u})$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$
(25)

у

$$\overrightarrow{\omega} = \nabla \times \overrightarrow{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},\tag{26}$$

es la vorticidad que se conserva en cada elemento de fluido, $\frac{d\omega}{dt}=0.$

Suponiendo que el tensor del gradiente de la velocidad D varía lentamente (de aquí surge una de sus limitaciones) respecto al tensor del gradiente de la vorticidad, la ecuación 26 se reduce a una ecuación lineal con coeficientes constantes. Bajo esta hipótesis el criterio infiere que el comportamiento del gradiente de vorticidad está localmente determinado por la naturaleza de los valores propios del gradiente de velocidad. Estos autovalores son las raíces de la ecuación:

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}(\sigma^2 - \omega^2),\tag{27}$$

donde σ es la deformación,

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,\tag{28}$$

y σ_1 y σ_2 son parte de la componente simétrica del gradiente de velocidad:

$$\sigma_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y},\tag{29}$$

$$\sigma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$
(30)

De tal forma que el parámetro de Okubo-Weiss queda definido como

$$Q = \sigma^2 - \omega^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \omega^2,$$
(31)

o bien

$$Q = \partial_x u \partial_y v - \partial_y u \partial_x v. \tag{32}$$

Está claro entonces que si Q < 0 domina la rotación (regiones elípticas) y cuando Q > 0, domina el estiramiento (regiones hiperbólicas).

Con la intención de visualizar las regiones donde en promedio se mantienen las propiedades de vorticidad o estiramiento, se obtuvo el promedio de Q para el periódo de $t - \Delta t$ a $t + \Delta t$. En la figura 11 se muestra el promedio de Q, los valores positivos indican a regiones donde domina el estiramiento, mientras que las regiones negativas domina la vorticidad. En esta figura se observa la presencia de dos regiones con valores negativos y alrededor de dichas estructuras se aprecia valores positivos en la que se puede apreciar un contorno centrado en (0,0) donde los valores son positivos y conforme se alejan de dicho punto los valores decaen, esto sugiere la posible presencia de una partícula hiperbólica en la region centrada en (0,0).



Figura 11: Gráfica del promedio del parametro de Okubo-Weiss para la ecuación 19 en el que se aprecia la presencia de dos regiones donde el valor es negativo (vorticidad) y una region centrada en (0,0) con valores positivos (estiramiento).

Exponentes de tamaño finito de Lyapunov

La técnica de los exponentes de tamaño finito de Lyapunov permiten visualizar las regiones donde la mezcla es máxima así como posibles barreras para el transporte entre los remolinos y el flujo exterior, por lo que resulta una técnica diferente para visualizar las variedades estables e inestables.

Una forma matemática de caracterizar el estiramiento en un fluido es por medio de los exponentes de Lyapunov, λ , que pueden ser definidos como la razón de separación exponencial de dos trayectorias separadas infinitesimalmente al tiempo inicial(Lacorata *et al.*, 2001):

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \lim_{\delta(0) \to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta(0)},\tag{33}$$

donde $\delta = ||x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)||$ es la distancia entre dos trayectorias al tiempo t. Los exponentes de tiempo finito de Lyapunov se obtienen omitiendo el primer límite $t \to \infty$ en la ecuación 33. Con ello se encuentra la razón de crecimiento sobre un intervalo finito τ

$$\gamma_{\tau} = \lim_{\delta(0) \to 0} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta(\tau)}{\delta(0)}.$$
(34)

El exponente γ_{τ} es útil para determinar las diferentes regiones de mezcla en diversos fluidos. Sin embargo, resulta imposible aplicar límites infinitos o infinitesimales a un campo de velocidades finito. Así mismo, Haller (2000) señala que γ_{τ} no siempre permite ver con claridad las variedades. Un método menos confuso para caracterizar dichas regiones es el de los exponentes de tamaño finito de Lyapunov (ETFL). Este término es inversamente proporcional al tiempo en que dos partículas pasivas inicialmente separadas una distancia δ_0 alcanzan una separación predeterminada δ_f . De esta forma, el exponente de tamaño finito de Lyapunov se define como:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_f}{\delta_0},\tag{35}$$

donde t es el tiempo en el que el par de partículas alcanzan la separación δ_f . Estos exponentes han sido utilizados para caracterizar procesos de dispersión (Lacorata *et al.*, 2001), así como, para visualizar estructuras lagrangianas tales como barreras de transporte (Koh y Legras, 2002; d'Ovidio *et al.*, 2004). Para ello se hacen mapas espaciales de estos exponentes. En nuestro caso el procedimiento fue el siguiente:

- 1. Se crea una malla cuadrada con una separación inicial δ_0 tanto en el eje x como el eje y que cubre la malla original del modelo y se fija la distancia máxima de separación entre dos partículas δ_f y el período de integración τ . Estas partículas son advectadas por el flujo por lo que pueden permanecer juntas por períodos largos o bien puede que se separen exponencialmente en el tiempo. Cuando la separación entre estas partículas no llega a la separación predeterminada δ_f al cumplirse el tiempo de integración predeterminado τ , la integración de su trayectoria se detiene y se considera la separación final entre las dos partículas Δ . Si las partículas se separan rápidamente de modo que alcancen la separación predeterminda δf antes del tiempo τ entonces se detiene la integración y se toma el tiempo Δt . De esta forma los exponentes pueden ser calculados de la siguiente manera:
 - $\lambda(\delta_0, \Delta, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\Delta}{\delta_0} \to$ cuando no alcanzan la separación máxima.
 - $\lambda(\delta_0, \delta_f, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\delta_f}{\delta_0} \rightarrow$ cuando alcanzan a la separación máxima.
- 2. Para mayor precisión en la obtención de estos exponentes se toma de la malla una quinteta de partículas en lugar de un par, esta metodología está basada en d'Ovidio et al. (2004) en la cual seleccionan el valor máximo del exponente considerando cuatro trayectorias inicialmente separadas un δ_0 de la partícula de referencia. En resumen, se toma la quinteta, tomando la partícula central como partícula de referencia y las otras cuatro separadas inicialmente δ_0 , dos en el eje x y las otras dos en el eje y. Estos cuatro pares de partículas son advectados por el campo de velocidad usando las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$ y se calcula el valor del exponente tomando el par de partículas que alcanza la separación δ_f en el menor tiempo. Si ninguno de los pares de partículas llegan a la separación δ_f en el intervalo de tiempo τ , se detiene la integración y se toma la separación maxima de las cuatro respecto a la partícula de referencia. Este procedimiento puede ser mas eficiente si se evalúa la separación de

dos pares de partículas, en lugar de la quinteta, uno en el eje x y otro en el eje y. Estos dos pares se evalúa la separación maxima de forma similar al método mencionado anteriormente.

Este procedimiento se realiza integrando hacia adelante y hacia atrás en el tiempo por un período $\pm \Delta t$ centrado en t. Y los valores obtenidos en cada punto se mapean. Los resultados de la integración hacia adelante se denominan $\lambda_+(x, y)$ y de la integración hacia atrás se denominan $\lambda_-(x, y)$. Para el flujo dado por la ecuación 19 se tomó como separación inicial δ_0 y como separación maxima δ_f . El periodo de integración τ fue de Δt . Se colocó la malla de partículas al tiempo t, y se integró hacia delante en el tiempo para de obtener λ_+ y hacia atrás para calcular λ_- .

Para visualizar dichas estructuras se gráfica $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$. En las regiones donde las partículas permanecen juntas largos periodos tanto λ_+ como λ_- son mínimos, por lo que $\lambda = \lambda_+ - \lambda_- \simeq 0$; este tipo de valores se pueden apreciar en la figura 12. Al considerar las regiones donde la compresión y el estiramiento son dominantes el término puede quedar como $\lambda = \lambda_+$ o $\lambda = -\lambda_-$. Los valores positivos representan las regiones de compresión mientras que los valores negativos representan las de estiramiento.



Figura 12: Campo de $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$, donde se puede apreciar los valores positivos asociados a regiones de compresión y los valores negativos a regiones de estiramiento.

Obtención de las variedades para un flujo dependiente del tiempo

Para obtener las variedades en este caso, se analizó el campo de velocidades por las ecuaciones 20 y 21 para el intervalo de tiempo $t - \Delta t$ a $t + \Delta t$. Al considerar un flujo dependiente del tiempo se debe encontrar los puntos fijos en diferentes tiempos, para ello se determina el punto hiperbólico para $t + \Delta t$, de forma similar a como se obtuvo para el flujo independiente del tiempo. De la misma manera se obtuvo el punto hiperbólico en $t - \Delta t$. Al determinar los puntos hiperbólicos se clasifican los autovalores y determinar así la dirección de compresión y estiramiento a cada tiempo t- Δt y t+ Δt .

Para encontrar la variedad estable se coloca una línea de partículas en la dirección de compresión al tiempo $t + \Delta t$ y se integra hacia atrás en el tiempo hasta $t - \Delta t$. Para encontrar la variedad inestable se coloca la línea de partículas en la dirección de estiramiento al tiempo $t - \Delta t$ y se integra hacia adelante hasta $t + \Delta t$. En la figura 13 se muestra la variedad estable (rojo) e inestable (azul) al tiempo t, las cuales se acercan asintóticamente al punto fijo (•). Se puede apreciar como ambas variedades comienzan a cruzarse al acercarse al punto hiperbólico, a consecuencia de que el flujo cambia con el tiempo, formando las regiones conocidas como lóbulos, dichas estructuras son las responsables de intercambio de fluido entre los remolinos y el flujo exterior, puesto que las variedades representan barreras para el transporte. A continuación se describe la dinámica de lóbulos, técnica con la que se analiza el proceso de transporte y mezcla generado por un campo con dependencia temporal.

Dinámica de Lóbulos

Los lóbulos son el resultado de la intersección de las variedades estables e inestables y tienen un papel importante en el transporte en los flujos periódicos y cuasiperiódicos (Malhorta y Wiggins, 1998). Estas estructuras son zonas donde ocurre el transporte de partículas, siendo el área de los lóbulos proporcional a la masa transportada. Para determinar estas estructuras es necesario definir los límites de las regiones formadas por las intersecciones de las variedades, denominados puntos de intersección primaria p.i.p.


Figura 13: Variedades estables (rojo) e inestables (azul) al tiempo t, donde las partículas que conforman a las variedades se acercan asintóticamente al punto fijo (\bullet).

Definición. Sea un punto $q \ \epsilon W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$, donde W^s y W^u se refieren respectivamente a la variedad estable e inestable correspondientes al punto fijo p_0 . Sea $S[p_0, q]$ el segmento que conecta a p_0 con q sobre $W^s(p_0)$ y $U[p_0, q]$ el segmento que conecta a p_0 con q sobre $W^u(p_0)$. Entonces q es un punto de intersección primaria (p.i.p) si $S[p_0, q]$ y $U[p_0, q]$ se cruzan solo en q y p_0 , ver fig 14.



Figura 14: Se muestra el punto fijo p_0 la variedad estable $S[p_0, q]$ (rojo) y la inestable $U(p_0, q)$ (azul), siendo la intersección de estas variedades $S(p_0, q) \cap U(p_0, q)$ al punto de intersección primaria p.i.p.

Definición. Sean p y q puntos de intersección primaria adyacentes donde S[q, p] y U[q, p]son segmentos de $W^s(p_0)$ y $W^u(p_0)$ respectivamente, que tienen a q y p en sus extremos. La región limitada por los segmentos S[q, p] y U[q, p] se define como un *lóbulo*, (ver Fig.15). Los lóbulos son regiones materiales del fluido, esto significa que el fluido contenido dentro del lóbulo en cualquier instante de tiempo permanecerá dentro del mismo durante todo el tiempo que éste exista. Esto se debe a que el lóbulo está formado por superficies invariantes, por tanto las partículas dentro de estas estructuras no pueden salirse del lóbulo. Así mismo, la cantidad de masa transportada es proporcional al área de los lóbulos. Para definir el lóbulo de captura y el de expulsión se debe definir previamente una *pseudo-separatriz*:



Figura 15: Los puntos de interesección primaria p y q, definen una region limitada por los segmentos U(p,q) y S(p,q) denominada lóbulo.

Definición. Para definir el área interior y exterior de un remolino es necesario definir un *p.i.p.* cualquiera tal que $q \in W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$; entonces, el contorno $S[q, p_0] \cup U[q, p_0]$ se denomina *pseudo-separatriz*; el contorno formado por los segmentos de las variedades estables e inestables que pasan por p_0 (punto hiperbólico) y q (punto de intersección primaria *p.i.p.*) está definido como **pseudo-separatriz**; como se aprecia en la figura 16. La región limitada por la *pseudo-separatriz* (línea discontinua) que encierra al punto elíptico es definida como la región interior R.I., la región exterior es R.E.

Puesto que la perturbación es periódica, entonces existe un número infinito de puntos de intersección primaria (Malhorta y Wiggins, 1998) por lo que es conveniente definir a la seudo-separatriz de la forma mas parecida a la separatriz del flujo no perturbado.

Para explicar el proceso de captura y expulsión de partículas, consideremos la presencia de dos lóbulos, uno en la región delimitada por la *seudo-sepratriz*, es decir la region interior R.I. y el otro en la región exterior R.E.; ver figura 17. Nótese el lóbulo que se encuentra dentro de la región interior, definida previamente, es denominado el lóbulo de captura, mientras que el lóbulo que se encuentra fuera de la región interior es definido como lóbulo de expulsión, consecuentemente dicho proceso da lugar al intercambio de partículas entre los remolinos y el flujo exterior.

Resumen

En este capítulo se analizó una función de corriente independiente del tiempo, en dicho análisis se determinaron los puntos fijos, su clasificación y la obtencción de las variedades estables e inestables, con lo que se determinó una trayectoria hiperbólica. Al determinar los puntos fijos y su clasificación es posible caracterizar las propiedades del flujo.

Para el flujo con una perturbación periódica en el tiempo se aplicó el criterio de Okubo-Weiss, los exponentes de tamaño finito de Lyapunov con lo que se determinaron las regiones donde domina el estiramiento y vorticidad así como las regiones de estiramiento y compresión que convergen precisamente a la zona de estiramiento ubicada por el criterio de Okubo-Weiss. Una vez determinadas estas regiones se obtuvieron las variedades estables e inestables para cada tiempo, al graficar dichas variedades a tiempos distintos es posible caracterizar las propiedades del flujo a cada tiempo. Estas estructuras al acercarse al



Figura 16: La región limitada por la *pseudo-separatriz* (línea discontinua) y que encierra a punto elíptico es la region interior R.I., R.E es la región exterior.



Figura 17: Lóbulo para el flujo estacionario asociada a 2 vórtices puntuales con una perturbación $Ay \operatorname{sen}(t)$ en la función de corriente, en el que se determinan tres puntos de interseccion primaria con lo que se tienen dos lóbulos. El lóbulo en color rojo es el de captura (LC) mientras que el de color azul es el de expulsión (LE) los cuales se encuentran dentro y fuera del remolino.

punto hiperbólico comienzan a cruzarse a medida que el flujo cambia de velocidad. Dichas intersecciones ocasionan que se formen estructuras definidas como lóbulos, los cuales son los responsables del intercambio de fluído entre el flujo exterior y los remolinos.

III. Descripción del modelo y los datos de velocidad

Para analizar la circulación superficial del Mar Caribe y el Canal de Yucatán utilizaremos las técnicas descritas en el capítulo anterior. Para ello se requiere de un campo de velocidad de alta resolución espacial y temporal. Como no existen observaciones suficientes con estas características se decidió utilizar salidas de modelos de circulación oceánica en lugar de datos reales.

Para este trabajo se utilizaron datos del modelo de circulación oceánica ROMS (Regional Ocean Modeling System). Este modelo es un sistema de simulación oceánica el cual resuelve las ecuaciones primitivas para un sistema en rotación. Las ecuaciones primitivas en coordenadas cartesianas son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla u - fv = \frac{\partial \phi}{\partial x} + F_u + D_u, \tag{36}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla v + fu = \frac{\partial \phi}{\partial y} + F_v + D_v, \tag{37}$$

que expresan el balance de momento en las direcciones x e y respectivamente, donde ϕ representa la presión dinámica.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla T = F_T + D_T, \tag{38}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla S = F_S + D_S,\tag{39}$$

son la ecuaciones de calor y balance de salinidad,

$$\rho = \rho(T, S, P), \tag{40}$$

es la ecuación de estado

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-\rho g}{\rho_0},\tag{41}$$

es la ecuación de momento vertical (balance hidrostático) y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{42}$$

la ecuación de continuidad para un fluido incompresible.

El modelo usa la aproximación de Boussinesq, la cual considera despreciables las variaciones de densidad en las ecuaciones de momento excepto en la fuerza de flotación en la ecuación de momento vertical. Además, el modelo resuelve explícitamente la variación de la superficie libre. Los forzamientos y la disipación se encuentran representados por los términos F y D, respectivamente.

En la vertical, las ecuaciones primitivas son discretizadas sobre una topografía variable usando coordenadas generalizadas (Song y Haidvogel, 1994). Las coordenadas verticales generalizadas permiten incrementar la resolución en regiones de interés (superficie y fondo). En la horizontal pueden usarse coordenadas curvilíneas ajustadas a las fronteras. El modelo utiliza tiempos mas cortos para evaluar la elevación en la superficie y momentum barotrópico y utiliza tiempos más largos para evaluar los cambios en temperatura, salinidad y momentum baroclínico, para después combinar ambos resultados. En su aplicación al Golfo de México y Mar Caribe, el ROMS tiene 30 "niveles sigma", que siguen a la topografía en aguas someras manteniendo alta la resolución superficial en aguas profundas. El modelo tiene una resolución horizontal de 1/10 de grado, está forzado por flujos de calor y vientos obtenidos de la climatología COADS (Comprehensive Ocean-Atmosphere Data Set).

El modelo ROMS para el Caribe y Golfo de México utiliza una topografía modificada en algunos lugares con datos generados por los cruceros oceanográficos CANEK. Este modelo se corre por un tiempo equivalente a 5 años tomando los valores de frontera abierta de los últimos 5 años generados por un modelo ROMS para el Atlántico Norte de una corrida de 20 años. El dominio numérico está rotado para optimizar el número de puntos de malla sobre el nivel del mar, como se puede apreciar en la figura 18.

Los datos utilizados son las velocidades horizontales a una profundidad de 30 m por un período de un mes, los datos tienen una resolución temporal de 6 horas. Se utiliza un mes de datos basados en estudios anteriores que sugieren que las variedades lagrangeanas pueden tener esta escala temporal en la zona (Kuznetsov *et al.*, 2002). Considerando la

dificultad para trabajar con una malla irregular rotada, el campo de datos se interpoló a una malla regular utilizando la rutina griddata de MATLAB (basada en la triangulación de Delaunay). La malla regular tiene una resolución de un cuarto de grado.



Figura 18: Campo de velocidades a 30m de profundidad del modelo ROMS en una malla rotada para optimizar el número de puntos de malla sobre el mar

Con la intención de analizar el intercambio generado por remolinos y el flujo externo, se analizó la región ubicada entre $30^{\circ}N$ y $17^{\circ}N$ y $-95^{\circ}W$ y $-78^{\circ}W$ como se muestra en la figura 19. La figura muestra claramente la presencia de dos remolinos anticiclónicos, uno en el Caribe y otro en el Golfo de México.



Figura 19: Campo de velocidades a 30m de profundidad del modelo ROMS interpolado a la malla rectangular, en la que se muestra la región de estudio para este trabajo

IV. Análisis de la circulación superficial del Mar Caribe y el Canal de Yucatán

La metodología explicada en el capítulo dos puede generalizarse y aplicarse a flujos más complicados, como por ejemplo a salidas de modelos númericos. Los resultados matemáticos que permiten dicha generalización a flujos arbitrarios dependientes del tiempo se han obtenido recientemente, ver Kuznetsov *et al.* (2002); Toner y Poje (2004); Velasco Fuentes y Marinone (1999). Por ello en este capítulo analizaremos los resultados obtenidos aplicando diferentes técnicas de analísis de estructuras lagrangeanas en flujos más realistas.

IV.1. Obtención de la geometría euleriana

Las propiedades geométricas de un flujo bidimensional están determinadas por las características de los puntos críticos o puntos fijos (donde la velocidad es cero) y las líneas de corriente asociadas a estos puntos. En particular los puntos fijos de interés son los puntos elípticos y los puntos hiperbólicos discutidos en el capitulo dos. Para el caso del flujo dependiente del tiempo los puntos hiperbólicos pueden existir para un instante o peródo y desaparecer luego, por ello, para el caso del flujo instantáneo a este tipo de punto se considerara como punto silla. Para el campo mensual de velocidades del modelo ROMS, los puntos elípticos incluyen las espirales estables e inestables, así como los puntos elípticos, ya que este tipo de puntos describen estructuras descritas como remolinos. Estos elementos geométricos determinan la advección de partículas en el flujo, es decir las partículas cercanas al punto elíptico rotan alrededor de dicho punto, mientras que partículas en regiones cercanas al punto hiperbólico, se acercan o se alejan del punto.

La velocidad (U, V) para posiciones arbitrarias (x, y) es calculada a partir de las velocidades sobre la malla por el algoritmo bilineal de cuatro puntos, (ver Hockney y Eastwood (1981)):

$$\begin{bmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} u_{i,j} & u_{i+1,j} & u_{i,j+1} & u_{i+1,j+1} \\ v_{i,j} & v_{i+1,j} & v_{i,j+1} & v_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\Delta - \delta x)(\Delta - \delta y) \\ \delta x(\Delta - \delta y) \\ (\delta - \delta x)\delta y \\ \delta x\delta y \end{bmatrix},$$
(43)

donde $\delta x = x - i\Delta$ y $\delta y = y - j\Delta$, con Δ la separación entre punto y punto de la malla, e (*i*, *j*) denota la esquina baja a la izquierda de la celda donde se encuentra el punto (*x*, *y*). Para determinar los puntos fijos y caracterizarlos se siguió la metodología descrita por Velasco Fuentes y Marinone (1999), en la cual los puntos fijos son calculados encontrando las celdas donde $u_{i,j}$ o $v_{i,j}$ no tienen el mismo signo en las contra- esquinas. Las propiedades de estos puntos está dada por el determinante de la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix},\tag{44}$$

Los autovalores de esta matriz son las raíces del polinomio:

$$\lambda^2 - (U_x + V_y)\lambda + U_x V_y - U_y V_x, \tag{45}$$

donde los subíndices indican la aproximación por diferencias finitas de las derivadas sobre el punto fijo. Los autovalores de J determinan si el punto fijo es hiperbólico o elíptico, como se mencionó en el capítulo dos.

IV.2. Cálculo de partículas hiperbólicas

Como se mencionó en la sección anterior, el cálculo de trayectorias hiperbólicas en flujos arbitrarios dependientes del tiempo es relativamente complicado pues pueden existir puntos silla a un cierto tiempo pero estos pueden desaparecer o moverse de lugar. Por



Figura 20: Geometría euleriana en la que se pueden ver los puntos hiperbólicos y elípticos (*) y las líneas de corriente asociadas a estos puntos.

ello, los cálculos deben hacerse en períodos finitos y debe garantizarse que las variedades identificadas correspondan a los puntos silla encontrados inicialmente aunque estos se muevan. Esta situación hace que la búsqueda de puntos fijos tenga que realizarse a diferentes tiempos y que las propiedades que definen una trayectoria hiperbólica puede que no se satisfagan en el intervalo de tiempo escogido; por ello en este análisis se considera la existencia de una partícula hiperbólica, la cual está definida como una párticula material que atrae a un conjunto de partículas y repele otro exponencialmente en el tiempo.

Al analizar el campo superficial de velocidades para el Mar Caribe a un tiempo dado es posible determinar los puntos fijos de una manera sencilla al igual que en el ejemplo analítico presentado en el capítulo anterior. Sin embargo, al considerar la evolución temporal de estos puntos resulta complicado determinar o visualizar las regiones donde existe una partícula hiperbólica. Esto es consecuencia de la alta variabilidad de las corrientes, así como la advección de los remolinos en la zona, entre otros factores.

Por lo tanto resulta complicado tratar cada punto silla como una posible región hiperbólica. Por tal motivo se utiliza el criterio de Okubo-Weiss, los exponentes de tamaño finito de Lyapunov y el cálculo de variedades con el objeto de encontrar las partículas hiperbólicas.

Criterio de Okubo-Weiss(Q)

El criterio de Okubo-Weiss permite identificar las regiones de un flujo donde domina el estiramiento (puntos hiperbólicos) y las regiones donde domina la vorticidad (puntos elípticos o remolinos). Este método ha sido utilizado con éxito en experimentos numéricos (Elhmaidi *et al.*, 1993) y en el análisis basados en datos de altimetría en el océano (Guerrero, 2005; Isern-Fontanet *et al.*, 2002). Para analizar el campo de velocidades para el Mar Caribe y el Golfo de México se aplicó el criterio para cada tiempo utilizando la siguiente expresión del parámetro de Okubo-Weiss

$$Q = \partial_x u \partial_y v - \partial_y u \partial_x v, \tag{46}$$

o bien

$$Q = \sigma^2 - \omega^2, \tag{47}$$

donde σ es la deformación o estiramiento, y ω la vorticidad. Está claro entonces que regiones donde Q < 0 domina la rotación (regiones elípticas) y cuando Q > 0, domina el estiramiento (regiones hiperbólicas).

Sin embargo, en flujos dependientes del tiempo es probable que regiones donde a un cierto tiempo domina el estiramiento (o vorticidad) modifiquen sus características para tiempos diferentes. Sin embargo si nos fijamos en el valor promedio del parámetro de Okubo-Weiss para el período de interés, este identificará las regiones que en promedio mantienen sus propiedades de hiperbolicidad o elipticidad, y por lo tanto en principio parece ser un buen indicador para encontrar posibles partículas hiperbólicas. La figura 21 muestra el promedio de Q para todo el mes de datos. En el Canal de Yucatán se puede apreciar una región donde los valores son positivos junto con la presencia de dos regiones con valores negativos, una en el Mar Caribe y la otra en el Golfo de México, esto sugiere la posible persistencia de un punto silla junto con dos remolinos para el mes de datos, y en consecuencia la probable existencia de una partíula hiperbólica.



Figura 21: Promedio temporal del párametro de Okubo-Wiess para el mes de datos donde se pueden observar las regiones donde los valores negativos indican que domina la vorticidad, mientras que los valores positivos se encuentran relacionados al estiramiento. Como se puede apreciar, en la región del Canal de Yucatán dominan los valores positivos, por lo que es posible considerar la presencia de una partícula hiperbólica en dicha zona.

En la figura 22, panel izquierdo (22a) se grafican las líneas de corriente junto con sus puntos fijos para el promedio del campo de velocidades correspondiente al promedio del mes de datos de la simulación del ROMS y en el panel derecho se gráfica el parámetro de Okubo-Weiss para el mismo campo (figura 22b). En la figura 22a se aprecia varios puntos hiperbólicos y elípticos; sin embargo, en la figura 22b se puede notar que que no domina la vorticidad (valores negativos) o de estiramiento (valores positivos) en ciertas regiones. Tanto en la figura 21 como en 22 se puede apreciar una region donde domina el estiramiento (posible trayectoria hiperbólica) centrada en el Canal de Yucatán, la cual parece persistir y mantener su integridad a lo largo del mes de datos disponible.



Figura 22: El panel (a) muestra las líneas de corriente, junto con los puntos elípticos e hiperbólicos para el promedio de la simulación del mes. El panel (b) muestra el promedio del parámetro de Okubo-Weiss para la misma simulación. Como se puede apreciar en el panel (a) la región cercana a la Isla de Cuba parece tener varios remolinos ya que hay varios puntos elípticos ahí. Sin embargo al comparar con el panel (b), el parámetro Okubo-Weiss en esa región muestra valores neutros.

Exponentes de tamaño finito de Lyapunov

La técnica de los exponentes de tamaño finito de Lyapunov es apropiada para aplicaciones oceanográficas (d'Ovidio *et al.*, 2004; Koh y Legras, 2002). Estos exponentes han sido utilizados para caracterizar procesos de dispersión (Lacorata *et al.*, 2001), así como, para visualizar estructuras lagrangianas tales como barreras de transporte entre los remolinos y el flujo exterior, (Koh y Legras, 2002; d'Ovidio *et al.*, 2004), para ello se hacen mapas espaciales de estos exponentes.

En este caso el procedimiento fue similar al descrito en el capítulo dos, en el cual se utilizó una quinteta de partículas en lugar de dos. Por ello que se creó una malla con una separación inicial δ_0 de 0,01° (1,1km) que abarca la región de interés. Así mismo se fijo la separación máxima δ_f de 1° (110km) con un periodo de integración τ de 12.5 dias. Al igual forma que en el capítulo dos, se consideró que si la separación entre las partículas no llega a la separación predeterminada δ_f , la integración de su trayectoria se detiene cuando se llega al tiempo de integración predeterminado τ , tomando la separación final entre las dos partículas Δ . Del mismo, modo si las partículas se separan rápidamente de modo que alcancen la separación predeterminada δf antes del tiempo se detiene la integración y se toma el tiempo Δt . Los exponentes de tamaño finito de Lyapunov son calculados de la siguiente manera:

 $\lambda(\delta_0, \Delta, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\Delta}{\delta_0} \to$ cuando no alcanzan la separación máxima.

 $\lambda(\delta_0, \delta_f, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\delta_f}{\delta_0} \rightarrow$ cuando alcanzan a la separación máxima.

Para encontrar los exponentes de tamaño finito de Lyapunov con los cuales se podrán visualizar las estructuras lagrangianas se colocó la malla de partículas al tiempo 12,5 días del mes de datos disponibles, y se integró hacia delante en el tiempo con la intención de obtener λ_+ y hacia atrás para calcular λ_- .

Para visualizar dichas estructuras se gráfica $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$. En las regiones donde las partículas permanecen juntas largos periodos tanto λ_+ como λ_- son mínimos por lo que $\lambda = \lambda_+ - \lambda_- \simeq 0$; este tipo de valores se pueden apreciar en la figura 23. Al considerar las



Figura 23: Campo de $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$, los valores positivos corresponden a las regiones de compresión y los valores negativos a las regiones de estiramiento.

regiones donde la compresión y el estiramiento son dominantes el término puede quedar como $\lambda = \lambda_+$ o $\lambda = -\lambda_-$. Los valores positivos representan las regiones de compresión mientras que los valores negativos representan las de estiramiento. Las regiones donde los valores tanto negativos como positivos son máximos representan barreras para el transporte entre el flujo exterior y el interior del remolino, por lo valores máximos de λ se encuentran asociados a las variedades, donde los valores positivos de λ están asociados a la variedad estable y los valores negativos de λ a la variedad inestable.

Obtención de las variedades estables e inestables

Antes de hacer el cálculo explícito de las variedades estables e inestables podemos resumir los resultados obtenidos con el paramétro de Okubo-Weiss y los exponentes de tamaño finito de Lyapunov de la siguiente manera:

- Al hacer un promedio del parámetro de Okubo-Weiss para el mes de datos del campo de velocidad encontramos que en el Canal de Yucatán hay una región donde domina el estiramiento con dos regiones adyacentes, una al norte y otra al sur, en las que domina la vorticidad.
- Usando los exponentes de tamaño finito de Lyapunov se obtienen las regiones de estiramiento y compresión que se intersectan precisamente en la zona de estiramiento ubicada por el criterio de Okubo-Weiss.

Estos resultados son hasta cierto punto "heurísticos", por tal motivo para demostrar la existencia de una trayectoria hiperbólica en el Canal de Yucatán se debe determinar las variedades estables e inestables. Para determinar dichas estructuras se visualizó la evolución de los dos remolinos adyacentes a la posible partícula hipérbolica, por medio de las líneas de corriente con sus respectivos puntos fijos para cada tiempo t. Al visualizar dichas estructuras, el remolino ubicado al sur comienza a decaer entre los días 24 y 26. Consecuentemente, se consideró como período de itegración del primer día al día 25 del mes de datos para el cálculo de las variedades.

Una vez determinado el periodo de integración se procedió de la siguiente manera:

- Se calcularon las direcciones de compresión y estiramiento asociadas a los puntos silla localizados en el Canal de Yucatán para los días 1 y 25 del campo de velocidad correspondientes.
- 2. Para encontrar la variedad inestable se integraron las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$ usando un conjunto de partículas colocadas a lo largo de la dirección de estiramiento en el primer día. La integración se realiza hasta el día 25 y se obtiene la posición de las partículas en cada tiempo.

3. La variedad estable se calcula poniendo partículas en la dirección de compresión del punto silla en el día 25 e integrando hacia atrás en el tiempo hasta primer día, obteniendo la posición de las partículas para cada tiempo.

En la figura 24 se muestran las variedades estables (rojo) y las inestables (azul) para el día 12.5; Como se puede apreciar, ambas variedades se acercan asintóticamente al punto hiperbólico, con lo que se demuestra la existencia de una partícula hiperbólica.



Figura 24: Variedad estable (rojo) e inestable (azul).

En la figura 25a se pueden apreciar las regiones obtenidas por medio de los exponentes de de tamanõ finito de Lyapunov y en la figura 25b las variedades estables (rojo) e inestables(azul). Al comparar ambas graficas, se puede apreciar notable semejanza de las estructuras calculadas con los exponentes de tamaño finito de Lyapunov con las variedades estables e inestables.



Figura 25: (a) Exponentes de tamaño finito de Lyapunov, (b) las variedades estables (rojo) e inestables (azul). Los valores máximos de los exponentes forman estrucuras muy similares a las variedades.

Dinámica de lóbulos

Con la finalidad de analizar el transporte o intercambio de partículas entre los remolinos y el flujo exterior, utilizamos la dinámica de lóbulos. Como se mencionó en la sección anterior, las variedades representan una barrera entre el flujo exterior y el interior del remolino, es decir si una partícula se encuentra dentro del remolino esta no podrá cruzar la variedad y permanecerá dentro de este; del mismo modo, una partícula en el exterior



Figura 26: Variedades estables e inestables junto con tres puntos de intersección primaria (p.i.p.), dando lugar a dos lóbulos L1 y L2 en la región del Golfo de México

no podrá introducirse dentro del remolino. Sin embargo, existen regiones limitadas por segmentos de ambas variedades definidos como lóbulos los cuales permiten el transporte entre estas dos regiones; la cantidad de masa transportada es proporcional al área de los lóbulos.

En la figura 26 se muestran las variedades estables e inestables para el día 12 en la región del Golfo de México. Ambas variedades se intersectan en tres puntos, definidos como puntos de intersección primaria (p.i.p.), dando lugar a dos lóbulos L1 y L2.

Al considerar que dichas estructuras son importantes en el proceso de intercambio de fluido entre el exterior e interior del remolino es importante definir al lóbulo de captura y al de expulsión. Para ello se debe definir la región interior y exterior de dicho remolino, por lo que se determinó la seudo-separatriz del mismo modo que en el capítulo dos, es decir se determinó el contorno formado por las variedades estables e inestables que pasan por el punto hiperbólico y el punto de intersección primaria. Por lo que se definió la región interior y exterior del remolino como se muestra en la figura 27 donde la línea punteada es la variedad inestable euleriana, la variedad estable en color rojo y en azul la variedad inestable.



Figura 27: La variedades estable (rojo) e inestable (azul). Así mismo se muestra la seudoseparatriz (línea punteada), que permite identificar la region interior RI y la region exterior RE. Donde la region interior RI delimitada por la línea punteada tiene un area aproximada de $78,000Km^2$

Al definir la región interior y la exterior del remolino se determinó al lóbulo L1 como el de captura (LC) y L2 el de expulsión (LE). En la figura 28 se muestra al lóbulo de captura

(verde) y a de expulsión (amarillo).



Figura 28: Lóbulos de captura LC (verde) y expulsion LE (amarillo). EL lóbulo de expulsión tiene un area de $4200.0km^2$ y el de captura de $1390.0km^2$

Como se mencionó anteriormente ,los lóbulos son estructuras donde ocurre el intercambio de fluido entre los remolinos y el flujo exterior, siendo la cantidad de masa transportada proporcional al área de los lóbulos. Por tal motivo, se calculó el área evaluando la región delimitada por la seudo-separatriz, ver figura 27, siendo de 78,000 km^2 . De forma similar se calculó el área de los lóbulos, evaluando la región delimitada por la intersección de las dos variedades en los puntos de intersección primaria (*p.i.p.*), siendo de 1398.149 y 4220.2208 km^2 para el área de captura y expulsión, respectivamente. Puesto que la masa transportada es proporcional al área del lóbulo, se determinó el porcentaje de masa transportada, siendo de 1.8 y 5.4 por ciento, respectivamente.

Los lóbulos son regiones materiales del fluido, lo que significa que el fluido contenido dentro del mismo en cualquier instante permanecerá dentro del mismo para todo el tiempo que éste exista, por tal motivo se integro la trayectoria de un cierto número de partículas que se encontraban dentro de dichos lóbulos a un tiempo t=12.5 dias y se integro hacia adelante, en la figura 29 se muestra la evolución de los lóbulos con dicho conjunto de partíulas y se puede apreciar como dichas partículas permanecen dentro de los lóbulos.

En dicha figura se aprecia la presencia de dos lóbulos, por lo que no es posible afirmar que el intercambio de partículas entre el remolino y el exterior es nulo; sin embargo, se debe tomar en cuenta que sólo se trabajó con un mes de datos. Este hecho da lugar a analizar la evolución temporal de los dos remolinos incluyendo el mes anterior al utilizado en este trabajo con el fin de determinar si existe tal intercambio de partículas entre los remolinos y el flujo exterior.



Figura 29: Evolución de los lóbulos en la que se puede apreciar cómo las partículas no pueden cruzar las variedades.

V. Resumen final y conclusiones

En este trabajo se utilizó un mes de datos de velocidades superficiales (30 metros de profundidad) del modelo ROMS del Golfo de Mexicó y Mar Caribe. Las características de la circulación lagrangiana asociada a estas velocidades fue analizada utilizando métodos de sistemas dinámicos. Algunas de las técnicas utilizadas son hasta cierto punto heurísticas y están mas bien basadas en lo que se espera desde el punto de vista físico, pues no hay todavía demostraciones matemáticas que garanticen sus resultados al cien por ciento. Entre estas metoologías tenemos el calculo de valores promedio del parámetro de Okubo-Weiss y el de los exponentes de tamaño finito de Lyapunov. Con lo que se determinó:

- Utilizando el criterio de Okubo-Weiss se encontraron las regiones donde podrían existir remolinos en el campo de velocidades a cada tiempo. Al hacer un promedio para el mes de datos se determinó que en el Canal de Yucatán existe una región donde domina el estiramiento junto con la presencia de dos regiones adyacentes, una al norte y otra al sur, donde domina la vorticidad.
- Al aplicar los exponentes de tamaño finito de Lyapunov se confirmó que en el Canal de Yucatán existe una región donde domina el estiramiento. También se determinaron las regiones donde la compresión y el estiramiento son dominantes.

Considerando los resultados anteriores se realizó el cálculo de las variedades, con lo que se determinó la partícula hiperbólica, confirmando la utilidad de las técnicas mencionadas anteriormente. Al comparar las variedades con los exponentes de tamaño finito de Lyapunov, se aprecia una clara similitud. Al utilizar dichos exponentes es posible obtener una buana aproximación de las variedades de forma sencilla y eficaz.

Al aplicar la dinámica de lóbulos, se analizó la presencia y evolución de dos lóbulos localizados en el remolino del Golfo de México y se investigarón los posibles mecanismos de transporte entre los remolinos y las corrientes presentes. Sin embargo el mes de datos no fue suficiente para determinar si existe intercambio de fluido. Por lo tanto se pretende extender dicho análisis para un año de datos incluyendo el mes mencionado en este trabajo. Con base en lo anterior se establecen las siguientes conclusiones:

- Los tres métodos utilizados para caracterizar la propiedades dinámicas del flujo dan resultados consistentes y similares. Siendo cada método de utilidad para analizar ciertas características de la circulación, ya sea utilizando un solo método o la combinación de los tres, dependiendo de las características del flujo y los objetivos del estudio que se desee realizar.
- El parámetro de Okubo-Weiss es una herramienta útil para la caracterización de remolinos y regiones donde domine el estiramiento y vorticidad. Así mismo este parámetro permite caracterizar de una forma sencilla y eficiente posibles regiones donde pueda existir una trayectoria hiperbólica.
- Los exponentes de tamaño finito de Lyapunov permiten detectar las barreras de transporte entre los remolinos y el flujo exterior, así como regiones donde la mezcla es máxima.

- A su vez al aplicar estos exponentes permiten de una forma sencilla la caracterización de trayectorias hiperbólicas en la región de estudio.
- Al determinar las variedades estables e inestables para cada tiempo, se pudo aplicar la dinámica de lóbulos con la cual se puede apreciar los posibles mecanismos de transporte entre los remolinos presentes en el Golfo de México y Mar Caribe.

Literatura Citada

- Andrade, C. A. y Barton, E. D. (2000). Eddy development and motion in the Caribbean Sea. J. Geosphys. Res, 105(26): 191–201.
- Candela, J., Sheinbaum, J., Ochoa, J., y Badan, A. (2002). The potential vorticity flux through the Yucatan Channel and the Loop Current in the Gulf of Mexico. *Geophys. Res. Lett*, **29 (22): 2059**.
- Carton, J. A. y Chao, Y. (1999). Caribbean Sea Eddies inferred from topex/poseidon altimetry and 1/6 Atlantic Ocean model simulatation. *Geophys. Res.*, **104**: 7743–7752.
- Donald, V. H. y Molinari, R. L. (1979). Deep currents in the Yucatan Strait. J. Geophys. Res., 84(C1): 359–362.
- d'Ovidio, F., Fernández, V., Hernandez-García, E., y López, C. (2004). Mixing structures in the mediterranean sea from finite-size Lyapunov exponents. *Gephys. Res. Let.*, **31**(17): L17203.
- Elhmaidi, D., Provenzale, A., y Babiano, A. (1993). Elementary topology of twodimensional turbulence from lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. J. Fluid Mech., 257: 533–558.
- Fratantoni, D. y Richardson, P. The evolution and demise of North Brazil Current rings. Journal of Physical Oceanography En proceso.
- Fratantoni, D., Johns, W., y Townsend, T. (1995). Rings of the North Brazil Current: Their structure and behaviour inferred from observations and numerical simulation. J. Geophys. Res, 100(10): 633–654.
- Gordon, A. (1967). Circulation of the Caribbean Sea. J. Geophys. Res., 72(24): 6207–6223.
- Guerrero, L. (2005). Identificación y seguimiento de remolinos en el Mar Caribe. Tesis de maestría, CICESE. 84.

- Haller, G. (2000). Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. Chaos, (10): 99-108.
- Hockney, R. y Eastwood, J. W. (1981). Computer Simulations using Particles. McGraw-Hill. 562.
- Isern-Fontanet, J., Garcia-Ladona, E., y Font, J. (2002). Identification of marine eddies from altimetric maps. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **20(5)**: 772-778.
- Johns, W., Zantopp, R., y Goni, G. (2003). Cross-gyre transport by North Brazil Current rings, Interhemispheric Water Exchange in the Atlantic Ocean. Elsevier Oceanographic Series, 68: 411–442.
- Kinder, T. H., Heburn, G. W., y Green, A. W. (1985). Some aspects of the Caribbean Circulation. Mar. Geol, 68: 25–52.
- Koh, T. y Legras, B. (2002). Hyperbolic lines and the stratospheric polar vortex. Chaos, (12): 382–394.
- Kuznetsov, L., Toner, M., Kirwan, A. D., Jones, M., Kantha, y Choi, J. (2002). The Loop Current and adjacent rings delineate by lagrangian analysis. J. Mar. Res., 60(3): 405–429.
- Lacorata, G., Aurell, E., y Vulpiani, A. (2001). Drifter dispersion in the Adriatic Sea: Lagrangian data and chaotic model. Ann. Geophys., 19: 121-129.
- Malhorta, N. y Wiggins, S. (1998). Geometric structures, lobe dynamics, and lagrangian transport in flows with aperiodic time-depence, with applications to rossby wave flow.
 J. Nonlinear Sciencie, 8(4): 401–456.
- Maul, G. A. y Vukovich, F. M. (1993). The relationship between variations in the Gulf of Mexico Loop Current and the straits of florida volume transport. J. Phys Oceanogr, 23: 785–796.

- Molinari, R. L. M. S., Brooks, I., Atwood, D., y Duckett., C. (1981). Surface currents in the Caribbean Sea as deduced from lagrangian observations. J. Geophys. Res., 86: 6537–6542.
- Murphy, S. J., Harley, E. H., y O'brien, J. (1999). Connectivity of eddy variability in the Caribbean Sea, the Gulf of Mexico, and the Atlantic Ocean. J. of Geophys. Res., 104(C1): 1431–1453.
- Oey, L.-Y., Lee, H., y Jr, W. S. (2003). Effects of winds and caribbean eddies on the frequency of Loop Current eddy shedding: A numerical model study. J. Geophys. Res., 108(C10): 1–22.
- Okubo, A. (1970). Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep-Sea Res*, (17): 445–454.
- Richardson, P. (2005). Caribbean Current and eddies as observed by surface drifters. Deep-Sea Research II, II(52): 429–463.
- Rogerson, A., Miller, P., Pratt, L., y Jones, C. (1999). Lagrangian motion and fluid exchange in a barotropic meandering jet. *Journal of Physical Oceanography*, **29**: 2635–2655.
- Sheinbaum, J., Candela, J., Badan, A., y Ochoa., J. (2002). flow structure and transport in Yucatan Channel. *Geophys. Res. Lett.*, **29(3)**: 1–6.
- Sheng, J. y Tang, L. (2003). A numerical study of circulation in the western Caribbean Sea. J. Phys. Oceanogr, (33): 2049–2069.
- Song, Y. T. y Haidvogel, D. (1994). A semi-implicit primitive equation ocean circulation model using a generalized topography-following coordinate system. J. Comput. Phys., (115): 228–244.
- Toner, M. y Poje, A. C. (2004). Lagrangian velocity statics of directed launch strategies in Gulf of Mexico model. Nonlinear Processes in Geophysics, 11: 35–46.

- Velasco Fuentes, O. y Marinone, S. (1999). A numerical study of the lagrangian circulation in the Gulf of California. *Journal of Marine Systems*, 22: 1–12.
- Weiss, J. (1991). The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D*, (48): 273–294.
- Wiggins, S. (1990). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York : Springer-Verlag, 672.