

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

**PASO DE UN REMOLINO BAROTRÓPICO A TRAVÉS DE UN
ESTRECHO**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:
MATÍAS DURÁN MATUTE

RESUMEN de la tesis de **MATÍAS DURÁN MATUTE**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California. Julio de 2006.

PASO DE UN REMOLINO BAROTRÓPICO A TRAVÉS DE UN ESTRECHO

Resumen aprobado por:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Director de Tesis

Se presenta el análisis de un flujo compuesto por un remolino que es transportado por una corriente hacia un estrecho. Flujos con estas características se encuentran en varios lugares de los océanos, como en los pasos de las antillas menores y el canal de Yucatán.

Se utiliza un modelo numérico de vórtice en celda con el que se calcula el paso de vorticidad en función de los parámetros del problema; a saber: la intensidad relativa del remolino, el ancho del estrecho y la posición inicial del remolino. Se analiza el transporte y la mezcla en el flujo por medio de la geometría lagrangiana, los exponentes de Lyapunov de tamaño finito (ELTF) y el tiempo de residencia. En el laboratorio se realizan experimentos sobre una mesa rotatoria.

Se observan tres tipos de comportamiento: paso total, paso parcial y bloqueo total que dependen de los parámetros del problema. Existe una correspondencia entre la forma de las variedades, la de un gradiente fuerte en los mapas tiempos de residencia y la de los máximos locales de los mapas de los ELTF. Esta forma es un espiral que va de la pared hacia el remolino cuyas diferencias para los diferentes tipos de comportamiento son cuantitativas. En los mapas de ELTF se observa que la mezcla es máxima alrededor del remolino; sin embargo, para que ésta sea entre el remolino y el flujo ambiente, las variedades tienen que entrar en el remolino lo cual sólo sucede si éste choca con la barrera. En los experimentos el destino final del remolino depende de la viscosidad la cual no está presente en el modelo numérico. Sin embargo, antes de que el remolino choque con la pared el modelo invíscido hace una buena aproximación del comportamiento del remolino.

Palabras clave: remolino, estrecho, advección caótica.

ABSTRACT of the thesis presented by **MATÍAS DURÁN MATUTE** as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in PHYSICAL OCEANOGRAPHY. Ensenada, Baja California, Mexico. July 2006.

PASSAGE OF A BAROTROPIC VORTEX THROUGH A GAP IN A WALL

A flow composed by a vortex transported by a current towards a gap in a wall is analyzed. Such flow exists in the ocean, for example in the various passages of the Lesser Antilles and in the Yucatan Channel.

The flow evolution is computed with a vortex-in-cell numerical model. Vorticity passage through the gap is calculated as a function of the problem's parameters: the vortex relative intensity, the gap's width and the vortex initial position. Transport and mixing in the flow are analyzed through the lagrangian geometry, finite-size Lyapunov exponents (FSLE) and residence time.

Three different behaviors, that depend on the problem's parameters, are observed: total passing, partial passing y total blocking. A correspondence exists between the shape of the invariant manifolds, a strong gradient in the residence time maps and the FSLE maps' local maxima; this characteristic shape is a spiral that goes from the wall towards the vortex. The shape's differences for different behaviors are quantitative. On the FSLE maps it is observed that mixing around the vortex is maximum. In order for the mixing to be between the vortex and the ambient flow, the manifolds must enter the vortex which only happens when it collides with the wall. Laboratory experiments are performed in a rotating table, and they show that the fate of the vortex depends on viscosity which is not present in the numerical model. Nonetheless, before the vortex comes close to the wall the inviscid model is a good approximation of the vortex behavior.

Keywords: vortex, gap in a wall, chaotic advection.

*A mis abuelas:
Elia y Esmeralda.*

Agradecimientos

A mi director de tesis, Oscar Velasco, por su apoyo y el inmejorable ambiente de trabajo que creó.

A los miembros de mi comité: Luis Zavala, Pepe Ochoa y Joaquín Álvarez por sus comentarios y sugerencias que fueron de mucha utilidad.

A los investigadores del DOF, en especial a Guido Marinone, Edgar Pavía y Manuel López, por su apoyo y enseñanzas a lo largo de estos dos años.

A Raúl Moreno, Gabino García, Gabriel Valdéz y otros miembros del taller de tecnomecánica por la fabricación del aparato experimental, y a Armando Ledo por su trabajo en la parte electrónica.

A Lupita Rodríguez, Elvia Serrano, Alina Morales y Roberto Soto por toda su ayuda.

Al Dr. Filonov por su apoyo y orientación.

A mis amigos por lograr mantenerme en un nivel de locura aceptable, en especial a Aleph, David, Domitilo, César, Fernando, Héctor, Lorena, Julien, Rocío, Luis Siero, Beto, Efraín, Ana Laura, Maru, Miguel, Rita, Silvia, Felipe, Bárbara, Vane, Ligeia, Viviana, Omar y a mis amigos del aikido.

A Juan Pablo y Sharon por hacerme sentir como de la familia.

A Tona y Silvia por su ayuda y amistad.

A Esmeralda, Inés, Juan Manuel y Octavio ya que sin ustedes no sería lo que soy (para bien y para mal).

A Tania por su apoyo y por sacarme una sonrisa aunque el horizonte no pinte bien.

A CONACYT por su apoyo a través de una beca de maestría (ref. 189300).

Contenido

	página
Contenido	vii
Lista de figuras	x
Lista de tablas	xiv
I Introducción	1
II Teoría y métodos	5
II.1 Planteamiento del problema	5
II.2 Modelo físico	6
II.3 Análisis dimensional	7
II.4 Tipos de remolino	8
II.5 Modelo numérico	11
II.6 El efecto de una pared sobre un remolino	14
II.7 Advección Caótica	15
II.7.1 Geometrías euleriana y lagrangiana	17
II.7.2 Exponentes de Lyapunov de tamaño finito	20
II.8 Experimentos de laboratorio	21

Contenido (continuación)	página
III Resultados del modelo numérico	23
III.1 Remolino de Rankine centrado	24
III.2 Remolino de Rankine no centrado	27
III.3 Remolino con perfil suave	29
III.4 Efecto del grosor de la barrera	30
III.5 Discusión	31
IV Advección Caótica	33
IV.1 La geometría lagrangiana	33
IV.2 Tiempo de residencia	39
IV.2.1 Permanencia	40
IV.2.2 Antigüedad	42
IV.3 Exponentes de Lyapunov de tamaño finito (ELTF)	43
IV.4 Discusión	46
V Experimentos	48
V.1 Parámetros adimensionales	48
V.1.1 Perfil de un remolino	48
V.1.2 Velocidad de la corriente	49
V.1.3 Parámetros adimensionales	50
V.2 Resultados	52
V.3 Discusión	52
VI Conclusiones	56

Contenido (continuación)	página
VI.1 Trabajo futuro	58
A Validación del modelo	60
A.1 La barrera	60
A.2 Dipolo contra un cuadrado	61
A.3 Fronteras abiertas	62
A.4 Resolución del modelo	64
B Geometrías de un remolino al lado de una pared	66
B.1 Función de corriente	66
B.2 Campo de velocidades	67
B.3 Geometría del flujo	68
B.3.1 Puntos fijos	68
B.3.2 Linealización alrededor de los puntos fijos	69
B.3.3 Autovalores y autovectores de las matrices	69
B.3.4 Variedades y retrato de fase	70
Bibliografía	72

Lista de figuras

figura		página
1	Esquema del problema.	5
2	Perfil de vorticidad de dos remolinos: de Rankine (línea continua) y uno <i>suave</i> con $n = 2$ (línea discontinua).	9
3	Perfil de velocidad para un remolino de Rankine (línea continua) y uno <i>suave</i> $n = 2$ (línea discontinua)	10
4	Esquema de la interpolación CIC.	14
5	Vorticidad para un remolino de Rankine dentro de una caja para diferen- tes tiempos	15
6	Vista lateral (izquierda) y superior (derecha) del aparato experimental.	22
7	Evolución del remolino para $\Gamma' = 40$, $D' = 3$ y $y'_0 = 0$ y diferentes tiempos.	25
8	Evolución del remolino para $\Gamma' = 48$, $D' = 3$ y $y'_0 = 0$ y diferentes tiempos.	25
9	Evolución del remolino para $\Gamma' = 56$, $D' = 3$, $y'_0 = 0$ y diferentes tiempos.	26
10	Vorticidad corriente abajo del estrecho en función de las condiciones iniciales y del tiempo transcurrido para $y'_0 = 0$	26
11	Vorticidad corriente abajo del estrecho en función de las condiciones iniciales y del tiempo transcurrido para $y'_0 = 0$	27
12	Vorticidad corriente abajo del estrecho en función de las condiciones iniciales y del tiempo transcurrido para $y'_0 = -5$	28

figura	Lista de figuras (continuación)	página
13	Vorticidad corriente abajo del estrecho en función de las condiciones iniciales y del tiempo transcurrido para $y'_0 = 5$	28
14	Mapas de la diferencia en la vorticidad corriente abajo del estrecho entre un remolino de Rankine y uno suave para $1 \leq D' \leq 3$, $20 \leq \Gamma' \leq 56$, $y'_0 = 0$ y diferentes tiempos.	30
15	Parte del dominio para el caso de una barrera con un grosor de $15R$. El círculo representa al remolino al tiempo $t = 0$	31
16	Geometría euleriana para el tiempo $t = 0.25t'$ para el caso de paso total con filamentación ($\Gamma' = 40$, $D' = 3$, $y'_0 = 0$).	34
17	Geometría euleriana modificada para el tiempo $t = 0.25t'$ para el caso de paso total con filamentación ($\Gamma' = 40$, $D' = 3$, $y'_0 = 0$).	34
18	Variedades en diferentes tiempos con $D' = 3$, $\Gamma' = 40$ y $y'_0 = 0$. En rojo la variedad inestable y en azul la estable.	36
19	En azul, la variedad estable al tiempo $t = 0$ para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$. El círculo negro representa el borde del remolino.	37
20	Variedad inestable en rojo con $\Gamma' = 38$, $D' = 5$ y $y'_0 = 0$ (paso total sin filamentación). En negro, la posición de los vórtices puntuales utilizados en el modelo. La figura a la derecha es un acercamiento	37
21	Igual que la figura anterior pero con $\Gamma' = 40$, $D' = 3$ (paso total con filamentación)	38
22	Igual que la figura anterior pero con $\Gamma' = 60$ (bloqueo total).	38
23	Igual que la figura anterior pero con $\Gamma' = 46$ (paso parcial).	38

figura	Lista de figuras (continuación)	página
24	Mapas de permanencia para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$	40
25	Mapas del valor absoluto del laplaciano de la permanencia para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$	41
26	Mapas de permanencia para una malla pequeña.	42
27	Mapas de la antigüedad para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$	43
28	Esquema para obtener los exponentes de Lyapunov.	44
29	Mapa de los ELTF para $\Gamma' = 38$, $D' = 5$ y $y'_0 = 0$	45
30	Promedio (izquierda) y máximo (derecha) de los ELTF contra tiempo.	45
31	Máximo de los ELTF contra Γ' . Se observa una relación prácticamente lineal.	46
32	Fotografía de larga exposición de un remolino. Velocidad de rotación de la mesa: 8 r.p.m. Tiempo de extracción: 2 revoluciones. Profundidad: 20 cm. Profundidad del tubo: 4 cm.	49
33	Perfil de velocidad angular para uno de los experimentos. Los puntos marcan los datos experimentales y la curva la aproximación por mínimos cuadrados.	50
34	Campo de velocidad aproximado de la corriente que se obtiene moviendo la barrera y cambiando el marco de referencia. La línea negra es el borde del dominio donde hay datos experimentales.	51
35	Vorticidad y función de corriente para la <i>corriente</i> en los experimentos. La línea negra es el borde del dominio donde hay datos experimentales.	51
36	Experimento 1: $\Gamma' \simeq 34$ y $D' = 3$. Los cuadros en el fondo son de 20 cm de lado.	53

figura	Lista de figuras (continuación)	página
37	Experimento 2: igual que en la figura anterior con $\Gamma' \simeq 50$	54
38	Experimento 3: igual que en la figura anterior con $\Gamma' \simeq 103$	55
39	Dipolo contra un cuadrado. Se presentan las líneas de corriente para el dipolo y en el centro el cilindro cuadrado	61
40	Diagrama de una esquina de la frontera sólida.	61
41	Pruebas a un dipolo contra un cilindro cuadrado	63
42	a) Función de corriente para el remolino en un canal seminfinito con la barrera en $x = 500$. b) Función de corriente para el remolino modificado por la condición de frontera en un canal con una barrera en $x = 500$. La frontera izquierda está en $x = 0$	64
43	a) Mapa de error en la magnitud de la velocidad para los dos remolino. b) Diferencia en el ángulo de la velocidad para los dos remolinos.	64
44	Campo de velocidades para un dipolo en una corriente uniforme. La corriente tiene una velocidad igual a la del dipolo pero en dirección opuesta.	68
45	Geometría lagrangiana del flujo. Las cruces indican las partículas hiperbólicas, los círculos indican las partículas elípticas y las líneas son las variedades.	71

Lista de tablas

tabla	página
I Valores del área del remolino rodeada por la variedad estable al tiempo $t = 0$ en porcentaje del área del remolino y valores del perímetro de ésta misma variedad dentro del remolino	39

Capítulo I

Introducción

Los remolinos son una componente esencial de la circulación oceánica. Son responsables de parte del transporte y dispersión de organismos, contaminantes, momento, calor y salinidad, entre otros. Durante los últimos cincuenta años, el estudio de los fluidos geofísicos como lo son la atmósfera y el océano ha crecido en importancia debido al interés en el medio ambiente y en la predicción de ciertos fenómenos naturales, como tormentas y huracanes. Los experimentos numéricos y de laboratorio son de gran importancia en la modelación de fenómenos de gran escala ya que se realizan bajo condiciones controladas. El movimiento de remolinos, bajo estas condiciones, ha sido estudiado cuando interactúan con costas o barreras (Carnevale et al., 1997; Zavala Sansón y van Heijst, 2000; Zavala Sansón et al., 1999); cuando interactúan con obstáculos diferentes (Cenedese et al., 2005; Johnson y McDonald, 2004b), y en ausencia de fronteras (Velasco Fuentes y van Heijst, 1994). En este trabajo se estudia el paso de un remolino que es advectado por una corriente a través de un estrecho, proceso que todavía está lejos de entenderse. Esta situación ocurre en diferentes lugares del planeta Tierra como en el Canal de Yucatán (Guerrero Moreno, 2005) y en los pasos entre las Antillas Menores (Goni y Johns, 2003).

Entre los remolinos oceánicos anticiclónicos más grandes se encuentran los que se desprenden de la Corriente Norte de Brasil (CNB) (Goni y Johns, 2003). La CNB viaja hacia el noroeste a lo largo de las costas sudamericanas y tiene como frontera al sur a la corriente Surecuatorial y al norte a la contracorriente Norecuatorial (Fratantoni et al., 1995). Se estima que entre ocho y nueve remolinos de unos 400 km de diámetro se desprenden cada año de la retroflexión de la CNB y se desplazan hacia el Caribe a unos 15 cm/s e inducen un transporte total medio anualizado de aproximadamente 9.3 Sv ($1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) (Johns et al., 2003). Después, estos remolinos se dirigen hacia las Antillas Menores, un grupo de islas que separan al Océano Atlántico del Mar Caribe. Al utilizar altimetría se ha observado que algunos de ellos logran entrar al Caribe y posteriormente se desintegran o su señal en la superficie se vuelve demasiado débil (Goni y Johns, 2003).

Dentro del Caribe existen remolinos originados ahí mismo además de los que se introducen por los pasos entre las Antillas Menores. Algunos de estos remolinos viajan hacia el Canal de Yucatán, localizado entre la península de Yucatán y la punta oeste de Cuba, por donde se ha observado el paso de algunos de ellos hacia el Golfo de México (Guerrero Moreno, 2005). Además, al utilizar mediciones de velocidad, temperatura y salinidad en el canal, se ha observado que la variabilidad de mesoescala parece estar dominada por el paso de remolinos (Abascal et al., 2003). Simulaciones numéricas con las que se estudió la conectividad de la variabilidad de mesoescala en el Océano Atlántico, el Mar Caribe y el Golfo de México, sirvieron para documentar el paso de partes de remolinos del Mar Caribe hacia el Golfo de México a través del Canal de Yucatán (Murphy y Hulburt, 1999).

Se han hecho trabajos numéricos y analíticos del problema simplificado del paso de un remolino por una abertura en una pared. Simmons y Nof (2002) utilizaron un modelo analítico y un modelo numérico de gravedad reducida. Encontraron una solución

analítica para un lente con cero vorticidad potencial advectado por el efecto planetario β . Además, para los experimentos numéricos usaron como mecanismos de advección tanto a β como a una corriente uniforme a través de la abertura. Encontraron que los remolinos intensos, comparados con la corriente, se mantienen simétricos con respecto a su eje mientras son drenados a través de chorros atrapados a lo largo de la pared. Este tipo de lentes no se deforman por los esfuerzos debidos a la corriente. Los lentes débiles se comprimen a través del hueco para poder pasar. Simmons y Nof (2000) también exploraron el problema de colisiones de remolinos contra barreras con varios huecos. Este último tiene una mayor conexión con el paso de remolinos a través de las Antillas Menores debido al tamaño relativo entre los remolinos y las islas.

Posteriormente, Johnson y McDonald (2004a) presentaron dos modelos del comportamiento de un remolino cerca de una abertura en una barrera infinitamente larga. En el primer modelo se considera un vórtice puntual para el cual se encuentran las trayectorias analíticamente. En el segundo se considera un vórtice de Rankine cuya evolución se calcula numéricamente con un modelo que usa mapeo conforme y dinámica de contornos con eliminación de filamentos. Estudiaron el comportamiento de remolinos que se mueven debido al efecto con la pared y son advectados por diferentes configuraciones de corrientes. Encontraron que, dependiendo de las condiciones iniciales, algunos remolinos advectados por una corriente perpendicular a la pared, al acercarse al borde de la barrera, se separan y una parte pasa a través de la abertura y otra no pasa.

Además, el trabajo de Cenedese (2002) es un antecedente importante para los experimentos de laboratorio de esta tesis. Ella estudia el choque de remolinos contra un cilindro. Realizó experimentos en donde se mueve al cilindro hacia el remolino y lo comparó con el caso en donde el remolino se acerca al cilindro por el efecto de un fondo inclinado que simula a β . Encontró que el mover el cilindro aumenta las posibilidades de que el remolino se divida.

Los trabajos anteriormente mencionados están relacionado con éste ya que se estudia el comportamiento de un remolino que es advectado hacia un estrecho por una corriente en un canal infinitamente largo. Sin embargo, los estudios realizados por Simmons y Nof (2000, 2002) son diferentes físicamente debido a que en este caso el remolino es barotrópico y no baroclínico. Los objetivos son:

- Describir cualitativa y cuantitativamente el comportamiento del remolino.
- Determinar las condiciones para el paso del remolino por el estrecho.
- Determinar la capacidad del remolino para transportar masa a través del estrecho o, planteado inversamente, su capacidad para hacer que no pase masa.

En el capítulo 2 planteo detalladamente el problema, y presento el marco teórico y los métodos. Utilizo un modelo numérico de vórtice en celda para explorar el espacio de parámetro (capítulo 3) y métodos de la teoría de sistemas dinámicos para analizar las salidas del modelo (capítulo 4). Presento los resultados de experimentos de laboratorio sobre una mesa rotatoria los que se comparan cualitativa con los de secciones anteriores (capítulo 5). Finalmente, en el capítulo 6, discuto los resultados y se presento las conclusiones del trabajo. El cuantificar la mezcla y el transporte, y los experimentos de laboratorio para el flujo que se estudia en este problema no se ha hecho anteriormente.

Capítulo II

Teoría y métodos

II.1 Planteamiento del problema

Se tiene un canal infinitamente largo con una barrera perpendicular a sus paredes, la cual tiene en su centro una abertura de ancho D de la superficie al fondo. A lo largo del canal fluye una corriente que lejos de la barrera es uniforme con velocidad U . Corriente arriba de la barrera se coloca un remolino de radio R , mucho menor que el ancho del canal, y vorticidad relativa ω , perpendicular al plano x, y (figura 1). La corriente advecta al remolino hacia la barrera.

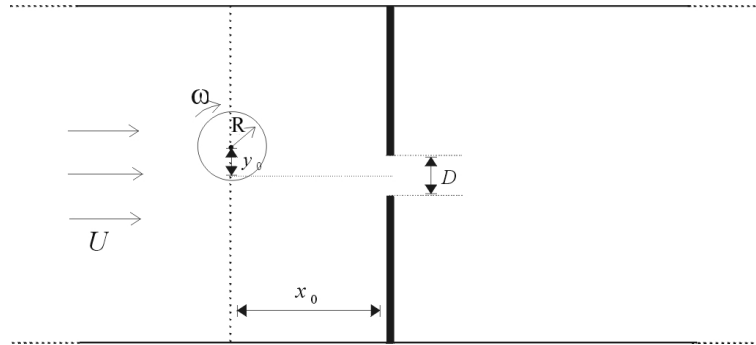


Figura 1. Esquema del problema.

El remolino inicia a una distancia de la barrera $x_0 \gg R$ en la dirección x y a una

distancia y_0 con respecto al eje del canal en la dirección y . El remolino es barotrópico en un fluido homogéneo en rotación.

II.2 Modelo físico

Las ecuaciones que gobiernan el flujo son las de Navier-Stokes que incluyen el término de Coriolis, y la de conservación de masa. Si se considera al agua como un fluido incompresible quedan como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

donde $\mathbf{u}$, ρ , ν , P son la velocidad, la densidad, la viscosidad y la presión dinámica del fluido, respectivamente. $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema.

Para el modelo numérico se utilizan dos aproximaciones más: flujo bidimensional [$\mathbf{u} = (u, v)$] y fluido invíscido ($\nu = 0$), debido al teorema de Taylor-Proudman y por la relativamente poca importancia de los efectos viscosos. Sin embargo, en los experimentos de laboratorio la viscosidad siempre juega un papel relevante cuando existen fronteras sólidas. Al aplicar el rotacional a la ecuación (1) con estas aproximaciones se obtiene la ecuación de conservación de vorticidad

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0, \quad (3)$$

donde D/Dt es la derivada material. Esta última ecuación es la que resuelve el modelo numérico.

II.3 Análisis dimensional

Los parámetros relevantes para este problema son R , el radio del remolino, D , el tamaño de la abertura, Γ , la circulación del remolino, y, U la velocidad de la corriente. La circulación del remolino está dada por

$$\Gamma = \int \omega dA.$$

La posición inicial del remolino es (x_0, y_0) , pero como $x_0 \gg R$ no se considera este parámetro, mas sí y_0 . Inicialmente no se contempla el ancho de la barrera como parámetro relevante aunque sea finito y el ancho del canal siempre se mantiene fijo. Una escala de tiempo característica del problema es $t' = R/U$.

La matriz dimensional para el problema es

	R	D	y_0	U	Γ
L	1	1	1	1	2
T	0	0	0	-1	-1

donde L es la longitud y T tiempo. El número de variables es 5 y el rango de la matriz es 2, por lo que se tienen $5 - 2 = 3$ variables adimensionales. Para obtenerlas se dejan fijos el radio del remolino y su circulación, obteniéndose el sistema

$$\Pi_1 = \Gamma^a R^b D^c$$

$$\Pi_2 = \Gamma^a R^b y_0^c$$

$$\Pi_3 = \Gamma^a R^b U^c$$

cuya solución es

$$D' = D/R$$

$$y' = y_0/R$$

$$\Gamma' = \Gamma/UR.$$

II.4 Tipos de remolino

En este trabajo, se utiliza la siguiente familia de remolinos

$$\omega = \begin{cases} \omega_n [1 - (r/a_n)^n], & 0 \leq r \leq a_n \\ 0, & a_n < r \end{cases} \quad (4)$$

donde r es la coordenada radial; ω_n , la vorticidad máxima; a_n , el radio donde $\omega \neq 0$, y n es un parámetro constante. Cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene el perfil de vorticidad para un remolino de Rankine, con $\omega = \omega_\infty$ constante en $0 \leq r \leq a_\infty$ y nulo afuera (vea la figura 2). El radio de máxima velocidad de un remolino de Rankine es $R_\infty = a_\infty$. En cambio, cuando n es pequeño (e.g. ~ 2) se obtiene un perfil de vorticidad más cercano al de los remolinos creados en el laboratorio por el método de succión (capítulo V). Definimos a un remolino con perfil suave como aquel que está dado por la ecuación (4) con $n = 2$. La elección de esta familia de perfiles de vorticidad es debido a que es muy práctico el obtener los diferentes perfiles sólo variando el parámetro n .

Para obtener el perfil de velocidad a partir del de vorticidad (4) se utiliza la ecuación de Poisson que relaciona a la función de corriente ψ con la vorticidad

$$\nabla^2 \psi = -\omega = \begin{cases} -\omega_n [1 - (r/a_n)^n], & 0 \leq r \leq a_n \\ 0, & a_n < r. \end{cases} \quad (5)$$

Al suponer simetría axial, $\psi = \psi(r)$, se reduce la ecuación (5) a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = -\omega \quad (6)$$

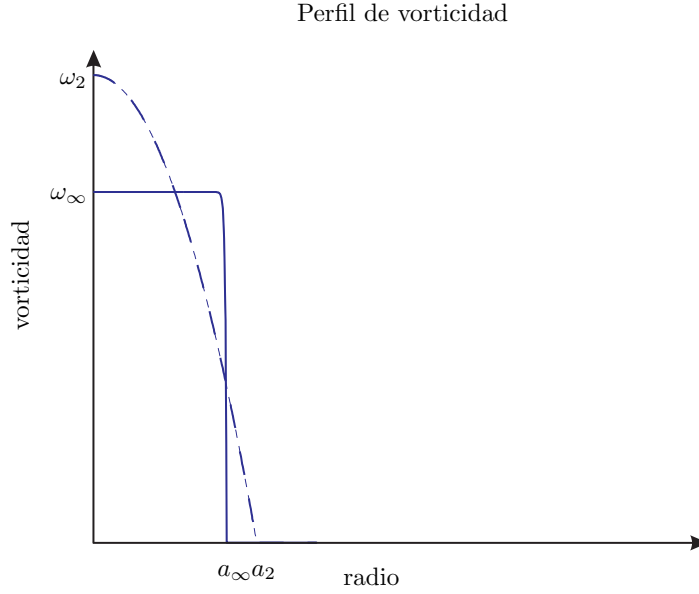


Figura 2. Perfil de vorticidad de dos remolinos: de Rankine (línea continua) y uno *suave* con $n = 2$ (línea discontinua). Los remolinos tienen la misma circulación Γ y el mismo radio de máxima velocidad $R = a_\infty$.

de donde

$$\psi = \begin{cases} -\omega_n r^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{(r/a_n)^n}{(n+2)^2} \right] + A_n \ln r + B_n, & 0 \leq r \leq a_n \\ C_n \ln r + D_n, & a_n < r, \end{cases} \quad (7)$$

donde A_n, B_n, C_n y D_n son constantes de integración. Nótese que $\ln r \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow 0$, por lo que $A_n = 0$ para evitar una singularidad en el origen.

La velocidad del fluido $\mathbf{u}$ se obtiene a partir de $\mathbf{u} = \nabla \times \psi \mathbf{k} = -\boldsymbol{\theta}(d\psi/dr)$, donde $\mathbf{k}$ es el vector unitario en la dirección vertical y $\boldsymbol{\theta}$ en la dirección angular. Al resolver esta expresión se tiene

$$u_\theta = \begin{cases} \omega_n r \left[\frac{1}{2} - \frac{(r/a_n)^n}{n+2} \right], & 0 \leq r \leq a_n \\ -\frac{C_n}{r}, & a_n < r. \end{cases} \quad (8)$$

C_n se calcula a partir de la continuidad en la velocidad y se obtiene que

$$\psi = \begin{cases} -\omega_n r^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{(r/a_n)^n}{(n+2)^2} \right] + B_n, & 0 \leq r \leq a_n \\ -\frac{\omega_n a_n^2}{2} \left[\frac{n}{n+2} \right] \ln r + D_n, & a < r. \end{cases} \quad (9)$$

$$u_\theta = \begin{cases} \omega_n r \left[\frac{1}{2} - \frac{(r/a_n)^n}{n+2} \right], & 0 \leq r \leq a_n \\ \omega_n a_n^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right] \frac{1}{r}, & a_n < r. \end{cases} \quad (10)$$

El perfil de velocidad angular (10) se grafica en la figura 3 para un remolino de Rankine y uno con perfil suave.

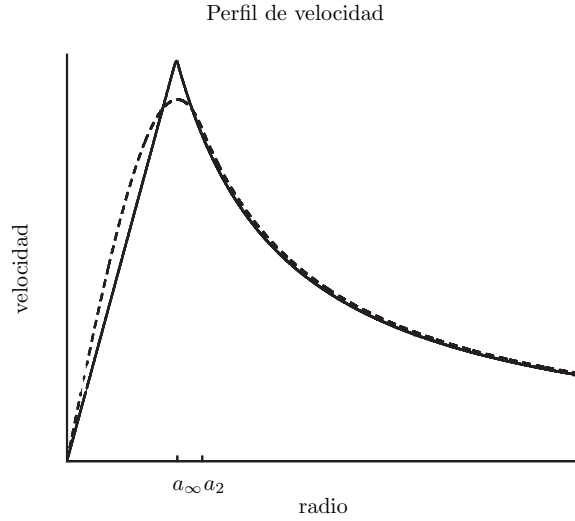


Figura 3. Perfil de velocidad para un remolino de Rankine (línea continua) y uno *suave* $n = 2$ (línea discontinua). Los dos tienen la misma circulación y el mismo radio $R = a_\infty$

El radio de máxima velocidad, que aquí definimos como el radio del remolino, está dado por

$$R_n = a_n \left[\frac{n+2}{2(n+1)} \right]^{1/n}. \quad (11)$$

De esta forma se obtiene que si un remolino suave y uno de Rankine tienen la misma circulación entonces el radio donde la vorticidad es diferente de cero para el primero es $a_2 = \sqrt{3/2}R_2$; en cambio, para el segundo es $a_\infty = R_\infty$.

En un remolino de Rankine la vorticidad ω_R es uniforme, por lo que la circulación está dada por

$$\Gamma_\infty = \int \omega_R dA = \omega_\infty \int dA = \pi\omega_\infty a_\infty^2$$

donde ω_∞ es la vorticidad del remolino y a_∞ es el parámetro utilizado en la ecuación (4). En cambio, la circulación de un remolino con un perfil dado por esta misma ecuación para una n cualquiera está dada por

$$\Gamma_n = 2\pi\omega_n \int_0^{a_n} [1 - (r/a_n)^n] r dr = \pi\omega_n a_n^2 \frac{n}{n+2}. \quad (12)$$

Si un remolino de Rankine y uno con n cualquiera tienen el mismo radio R entonces para que sus circulaciones sean iguales se debe cumplir que

$$\omega_n = \frac{n+2}{n} \left(\frac{n+2}{2(n+1)} \right)^{2/n} \omega_\infty. \quad (13)$$

II.5 Modelo numérico

Para resolver numéricamente la ecuación de conservación de vorticidad (3) se utiliza un modelo de vórtice en celda (VEC). Este tipo de modelos ha sido utilizado anteriormente para estudiar diferentes flujos sin viscosidad, e.g. Christiansen (1973).

Un modelo de VEC consiste en aproximar una distribución continua de vorticidad $\omega(x, y)$, mediante un gran número de vórtices puntuales (VP) distribuidos en el espacio. Después, se interpola la vorticidad obtenida de los VP en los puntos de una malla discreta. Posteriormente se calcula la función de corriente resolviendo la ecuación de

Poisson $\nabla^2\psi = -\omega$. A partir de esta función se obtiene la velocidad en los puntos de la malla, la cual se interpola a la posición de los VP para obtener su velocidad. Con esta velocidad se calcula el desplazamiento de los VP, los cuales se avanzan y se repite el proceso.

El algoritmo del modelo fue escrito en MATLAB y consta de los siguientes pasos:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. Condiciones iniciales | $\omega(x, y) \rightarrow \mathbf{x}_k, \omega_k$ |
| 2. Interpolación a malla rectangular | $\mathbf{x}_k, \omega_k \rightarrow \omega_{ij}$ |
| 3. Función de corriente | $\nabla_{ij}^2\psi_{ij} = -\omega_{ij}$ |
| 4. Campo de velocidad | $\mathbf{u}_{ij} = \nabla_{ij} \times \psi_{ij}\mathbf{k}$ |
| 5. Asignación de velocidad | $\mathbf{u}_{ij} \rightarrow \mathbf{u}_k$ |
| 6. Nueva posición del vórtice | $\mathbf{x}_k^{n+1} = \mathbf{x}_k^n + \mathbf{u}_k\Delta t$ |

donde los subíndices i, j indican el punto de malla y el subíndice k denota un VP. El superíndice n la iteración en el tiempo.

La vorticidad de un VP se define como una delta de Dirac, $\omega_k = \delta(x - x_k, y - y_k)$. Para eliminar la singularidad se le asigna una circulación constante y un área pequeña de tal manera que su vorticidad sea finita. La distribución inicial de VP y la magnitud de la vorticidad de cada uno se define dependiendo del problema a considerar. En este trabajo la distribución inicial, para originar al vórtice, es en círculos concéntricos y la magnitud de la vorticidad se asigna utilizando la ecuación (4). Para $r > a$ la vorticidad es nula por lo que no hay VP (vea la figura 2). La densidad promedio de VP para crear a un remolino en este trabajo es aproximadamente de 63 VP por celda. A partir de la distribución inicial de VP, se interpola la vorticidad a una malla cartesiana (paso 2), cuyas dimensiones son diferentes dependiendo del propósito de la simulación.

Para calcular la función de corriente (paso 3) se resuelve la ecuación de Poisson con

diferencias finitas,

$$\nabla^2 \psi_{ij} = \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{ij} + \psi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = -\omega_{ij}. \quad (14)$$

En las fronteras sólidas se utiliza la condición de deslizamiento libre ($\psi = \text{cte}$). En las paredes (figura 1) de la parte izquierda, viendo en dirección de la corriente, la función de corriente se define como $\psi_{\text{sup}} = A$ y en las paredes de la parte derecha como $\psi_{\text{inf}} = B$; donde A, B son constantes que determinan el flujo a lo largo del canal. Este flujo uniforme se fuerza en las fronteras abiertas del dominio. Para lograr esto, si el dominio es de $p \times q$ celdas entonces

$$\psi_{0l} = \psi_{pl} = \frac{A - B}{q}l + B$$

para $l = 0, 1, \dots, q$.

El campo de velocidad en la malla se obtiene al calcular $\mathbf{u}_{ij} = \nabla \times \psi_{ij} \mathbf{k}$. La asignación de la velocidad a cada VP se hace mediante la interpolación lineal de *nube en celda* CIC (*cloud-in-cell* en inglés). Ésta consiste en lo siguiente: cuando una partícula con vorticidad ω_k se encuentra en la posición $(\delta x, \delta y)$ dentro de una celda de dimensiones $(\Delta x, \Delta y)$ en cuyas esquinas la velocidad es $\mathbf{u}_{i,j}, \mathbf{u}_{i+1,j}, \mathbf{u}_{i+1,j+1}, \mathbf{u}_{i,j+1}$ (figura 4), entonces su velocidad es

$$\mathbf{u}_k = f_1 \mathbf{u}_{i,j} + f_2 \mathbf{u}_{i,j+1} + f_3 \mathbf{u}_{i+1,j} + f_4 \mathbf{u}_{i+1,j+1}$$

donde

$$f_1 = (\Delta x - \delta x)(\Delta y - \delta y) / \Delta x \Delta y$$

$$f_2 = (\Delta x - \delta x) \delta y / \Delta x \Delta y$$

$$f_3 = \delta x(\Delta y - \delta y)/\Delta x \Delta y$$

$$f_4 = \delta x \delta y / \Delta x \Delta y.$$

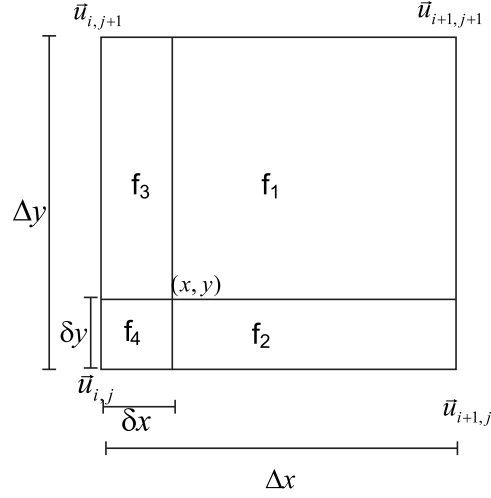


Figura 4. Esquema de la interpolación CIC.

Dos puntos a resaltar acerca del modelo son el error debido a la condición en las fronteras abiertas y la definición de la barrera dentro del dominio, especialmente sus esquinas. El error del primer punto se reduce alejando el remolino de las fronteras laterales. En el Apéndice A se describe con detalle la validación del modelo, sus errores y otros aspectos técnicos.

II.6 El efecto de una pared sobre un remolino

El efecto de las paredes sobre un remolino ha sido objeto de varios trabajos (e.g. Carnevale et al., 1997). En el caso de un fluido invíscido el efecto de la pared se puede explicar por el método de imágenes, que consiste en colocar un remolino de signo con-

trario a la misma distancia de la pared pero del otro lado, y así cumplir la condición de frontera. Esto implica que el remolino se mueve, junto a su imagen, como si fuera una rueda pero en dirección contraria a la de esta comparación. En la figura 5 se presenta la evolución de un remolino en una caja donde se observa cómo el remolino se mueve debido a las paredes.

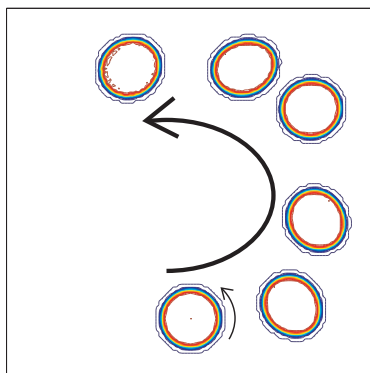


Figura 5. Vorticidad para un remolino de Rankine dentro de una caja para diferentes tiempos. El remolino comienza en la parte inferior de la figura al centro y se mueve hacia la derecha.

II.7 Advección Caótica

Los flujos suelen estudiarse desde dos puntos de vista: el euleriano y el lagrangiano. El primero consiste en tener los valores de alguna propiedad del flujo en posiciones fijas en el espacio, mientras que en el segundo se tiene el valor de la propiedad siguiendo a cada partícula de fluido. Cada uno proporcionan información distinta. Por ejemplo, la mezcla de fluidos consiste en estirar y doblar regiones y a su distribución en el espacio (Ottino, 1989). El campo de velocidad de un flujo para un cierto tiempo da muy poca o nada de información acerca de la mezcla y el transporte entre diferentes regiones del flujo. En cambio, para analizar a profundidad estos fenómenos se han utilizado métodos

de sistemas dinámicos, en particular lo que se conoce como *advección caótica* (ver Aref, 2002) que utilizan el punto de vista lagrangiano del campo de velocidad.

Estos métodos consisten en encontrar estructuras geométricas que dividen al flujo en regiones donde las trayectorias de partículas son cualitativamente diferentes. El problema de advección inicia con el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

donde $\mathbf{x}$ es la posición de una partícula y $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de velocidad del flujo. Para un flujo bidimensional e incompresible se reescriben estas ecuaciones utilizando la función de corriente ψ como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (16)$$

donde x y y son las coordenadas cartesianas de la posición de alguna partícula.

Este último sistema de ecuaciones se conoce dentro de los sistemas dinámicos como un sistema hamiltoniano, donde el hamiltoniano es precisamente la función de corriente. Para el análisis de este tipo de sistemas se cuenta con herramientas matemáticas ya desarrolladas con las que se obtiene información acerca del transporte y la mezcla en el flujo. Los sistemas hamiltonianos son un caso particular de los sistemas dinámicos. En general se el número de grados de libertad del sistema está definido como la mitad del número de dimensiones. Es sabido que cuando el sistema tiene un sólo grado de libertad (flujo bidimensional estacionario) no es caótico. Aunque en este trabajo ψ es bidimensional, también depende del tiempo por lo que el sistema tiene un grado y medio de libertad (tres dimensiones x , y y t), es decir, existe la posibilidad de que no sea integrable y sí caótico. Por esto, la mezcla de un fluido es una representación visual de un sistema hamiltoniano caótico (Ottino, 1989).

Para flujos con una perturbación periódica el problema se aborda utilizando un mapeo de Poincaré, el cual conserva el área. Esto es, en lugar de estudiar las trayectorias continuas en el tiempo sólo se consideran la posiciones de las partículas cada cierto intervalo de tiempo, donde éste es precisamente el periodo de la perturbación. En este caso se puede aplicar el teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) en donde las curvas cerradas en el mapeo de Poincaré (llamadas curvas KAM) son barreras para el transporte.

Sin embargo, para un flujo con una dependencia temporal aperiódica, lo cual por lo general implica un tiempo finito (excepto si el campo de velocidad es una solución analítica de las ecuaciones de Navier-Stokes), otro tipo de herramientas tienen que utilizarse. Diferentes métodos han sido empleados para encontrar las estructuras geométricas que definen las regiones de mezcla en flujos bidimensionales con dependencia temporal aperiódica, por ejemplo:

- Obtención de la geometría lagrangiana comparando con la geometría euleriana (Velasco Fuentes, 2005)
- Cálculo del determinante del Jacobiano de la velocidad (Haller, 2000)
- Cálculo de los exponentes de Lyapunov (e.g. d'Odivio et al., 2004)
- Cálculo de tiempos de residencia

Algunos de estos métodos son utilizados en este trabajo y se describen con detalle en secciones posteriores.

II.7.1 Geometrías euleriana y lagrangiana

El primer método consiste en obtener la geometría lagrangiana lo cual es equivalente a encontrar las partículas hiperbólicas (PH) y las variedades asociadas a éstas; para lo-

grarlo se utiliza como una primera aproximación a la geometría euleriana. Este método ha sido utilizado anteriormente por Velasco Fuentes (2001, 2005) para analizar la mezcla y el transporte en diferentes flujos. Las PH se caracterizan por atraer y repeler fuertemente otras partículas en direcciones preferenciales. Las variedades son curvas materiales formadas por las partículas que se acercan y alejan de las PH. Las variedades sirven como barreras y están asociadas a la mezcla en el fluido.

Definición de las geometrías euleriana y lagrangiana

La geometría euleriana es como una fotografía instantánea del flujo y consiste de tres elementos:

- Puntos de estancamiento (PE) tipo ensilladura
- PE tipo centro
- Líneas de corriente que pasan por el PE tipo ensilladura

Los puntos de estancamiento son aquellos en donde la velocidad instantánea es igual a cero. Los de ensilladura son aquellos que tienen una dirección preferential de estiramiento y a la vez otra de compresión. Por último, los PE de tipo centro son aquellos que tienen líneas de corriente cerradas a su alrededor.

Si el campo de velocidad bidimensional está dado, al tiempo t_i , por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)$, entonces los PE son aquellos donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) = 0$. La estructura del flujo alrededor de un PE se determina al analizar el movimiento de partículas en la vecindad de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$. Al linealizar el movimiento alrededor de $\mathbf{x}$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \mathbf{M}\delta\mathbf{x} \quad (17)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

A partir de la solución de la ecuación (17) se clasifica al flujo alrededor de un PE dependiendo de los eigenvalores (λ_1, λ_2) de $\mathbf{M}$. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ entonces es un punto tipo ensilladura. Si $\lambda_{1,2} = \pm ib$ donde $b \in \mathbb{R}$ entonces es un punto tipo centro. Si $\lambda_1 = \pm ib$ donde $b \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 = 0$ se tiene un punto parabólico. Como se trata de un flujo donde $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, estos son los únicos tipos de PE que pueden existir.

La geometría lagrangiana tiene también tres elementos, equivalentes a los de la geometría euleriana:

- Partículas hiperbólicas
- Partículas elípticas
- Variedades invariantes

Las partículas hiperbólicas son aquellas que tienen una dirección preferencial por la cual otras partículas se acercan y otra por la cual se alejan de ella asintóticamente. Para las partículas elípticas el fluido circula alrededor de ellas. Las variedades invariantes son curvas materiales (formadas siempre por las mismas partículas) que sirven como barreras que dividen regiones del fluido donde las trayectorias son cualitativamente diferentes y están asociadas a las direcciones preferenciales de estiramiento y compresión de las partículas hiperbólicas.

En ocasiones los términos partícula hiperbólica y trayectoria hiperbólica se utilizan indistintamente. En este trabajo, se considera una trayectoria hiperbólica como aquella que sigue una partícula hiperbólica. Desde el punto de vista matemático, las trayectorias hiperbólicas y la hiperbolicidad de las partículas están definidas con respecto a un

tiempo infinito; sin embargo, existen trabajos en donde se discuten las limitaciones y diferencias cuando se trabaja con tiempos finitos (vea por ejemplo Haller y Poje, 1998).

Construcción de la geometría lagrangiana

Encontrar la posición de una partícula hiperbólica no siempre es una tarea sencilla. Por lo general se empieza por una buena aproximación que puede ser un PE del tipo ensilladura, ya que cuando el flujo es estacionario la geometría lagrangiana y la euleriana son idénticas. Para obtener la posición de la PH en un tiempo $t = t_0$ se toma la posición del PE en un tiempo anterior $t = t_0 - T$ y se coloca un segmento compuesto de partículas en la dirección de estiramiento. Luego se integra hacia adelante en el tiempo hasta $t = t_0$. Después se coloca otro segmento en la dirección de compresión del PE en el tiempo posterior $t = t_0 + T$ y se integra hacia atrás. La intersección de los dos segmentos en $t = t_0$ corresponde a la posición de la PH.

Una vez que se tiene la posición de la PH para diferentes tiempos, digamos t_1, t_2, t_3 tal que $t_1 < t_2 < t_3$, es posible obtener las variedades invariantes asociadas al tiempo t_2 . Para calcular la variedad estable (W^e) para el tiempo t_2 se coloca un pequeño segmento compuesto de partículas en la dirección de compresión de la PH en el tiempo t_3 y se integra hacia atrás en el tiempo. Se hace lo equivalente para el tiempo t_1 con la dirección de estiramiento integrando hacia adelante en el tiempo para obtener la variedad inestable (W^i).

II.7.2 Exponentes de Lyapunov de tamaño finito

Una característica de los sistemas caóticos es su sensibilidad a las condiciones iniciales ($\mathbf{x}_i$). La divergencia de la trayectoria de partículas con diferentes condiciones iniciales es medida utilizando los exponentes de Lyapunov por lo que estos exponentes son, además, una forma de cuantificar el estiramiento (característica básica de la mezcla) en

un flujo. En un sistema caótico las condiciones iniciales tienden a separarse de forma proporcional a $\exp^{\lambda t}$ conforme $t \rightarrow \infty$ donde λ es el exponente de Lyapunov. En casos donde se tiene un tiempo finito, como en éste, se pueden utilizar los exponentes de Lyapunov de tamaño finito (ELTF)

$$\lambda(\mathbf{x}_i, t_i; \delta_0, \delta_f) \equiv \frac{1}{\tau} \log \frac{\delta_f}{\delta_0} \quad (18)$$

donde τ es el tiempo que tardan en separarse una distancia δ_f . δ_0 es la distancia inicial (d'Odivio et al., 2004). Se adimensionalizan los ELTF tomando

$$\lambda' = \lambda t' \quad (19)$$

donde t' es la escala temporal definida en II.3. En este trabajo se utiliza el promedio de ELTF a lo largo de la trayectoria de una partícula y nos referiremos a este promedio simplemente como ELTF.

II.8 Experimentos de laboratorio

Se realizan experimentos para observar el comportamiento de un remolino en un fluido real y comparar con los resultados del modelo numérico. La corriente uniforme del modelo es simulada en los experimentos mediante un cambio de marco de referencia: la barrera es la que se mueve en lugar del fluido; por lo que la velocidad de la *corriente* es igual a la velocidad de la barrera pero con sentido opuesto. Además de la simulación de la corriente por un cambio de marco de referencia, en los experimentos el tanque tiene una longitud finita más corta que la del dominio numérico.

Los experimentos se realizan en un tanque rectangular de 100×60 cm y 30 cm de altura en una mesa rotatoria. Se colocó un puente a lo ancho del tanque sobre dos

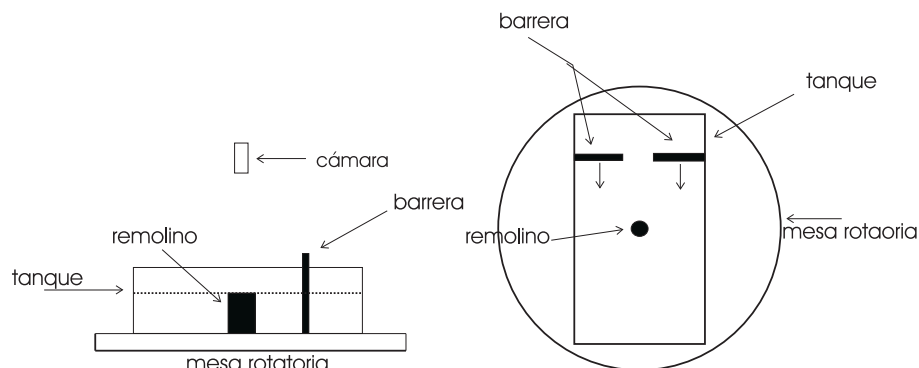


Figura 6. Vista lateral (izquierda) y superior (derecha) del aparato experimental.

rieles ubicados en sus bordes. A dicho puente se sujetan dos paletas de 1 cm de ancho que llegan hasta el fondo del tanque y simulan las barreras perpendiculares al canal (figura 6). El largo de las paletas se varía dependiendo del ancho del estrecho deseado. El puente junto con las paletas son movidos a una velocidad constante mediante un sistema de poleas y un motor de corriente directa, el cual está alimentado por una fuente de poder montada sobre la mesa.

El tanque se llena hasta una profundidad de 20 cm. Posteriormente, la mesa es puesta a rotar a 8 r.p.m hasta que el fluido adquiere rotación de cuerpo sólido. Se genera un remolino ciclónico en el centro del tanque por el método de succión que consiste en extraer fluido durante un determinado tiempo. La extracción se realiza por gravedad a través de una manguera de 1 cm de diámetro. La diferencia de altura entre la superficie del agua y la cubeta donde se deposita el agua después de ser extraída es de 80 cm. Después se enciende la fuente de poder y las paletas se mueven hacia el remolino.

Se utiliza tinta para marcar el remolino y observar la evolución del flujo. Los experimentos son filmados con una cámara de video que se coloca sobre el tanque.

Capítulo III

Resultados del modelo numérico

Se utiliza el modelo numérico descrito en la sección II.5 para analizar el paso de vorticidad a través del estrecho, variando los parámetros del problema. La malla es de 525×150 celdas y la barrera tiene un grosor de $R/2$, donde $R = 7.5$ celdas. Inicialmente se estudia la evolución de remolinos de Rankine en $y'_0 = 0, 5, -5$ variando D' y Γ' . Posteriormente, se compara el paso de vorticidad de estos con el de remolinos con perfil suave ($n = 2$). Finalmente, se realizan simulaciones con una barrera de ancho $15R$ para observar la importancia de este parámetro. Para todas las simulaciones el remolino empieza en $x_0 = 110$ celdas.

Para observar el comportamiento del remolino en el espacio de parámetros se hacen corridas con diferentes condiciones iniciales. Posteriormente, se calcula la vorticidad corriente abajo de la barrera para diferentes tiempos y las diferentes corridas, la cual se normaliza dividiendo entre la vorticidad total inicial. La vorticidad en el flujo es sólo debida al remolino, por lo que la vorticidad corriente abajo del estrecho equivale al porcentaje de la vorticidad del remolino que pasa.

III.1 Remolino de Rankine centrado

Se coloca un remolino de Rankine con un radio $R = 7.5$ celdas, centrado con respecto al estrecho ($y'_0 = 0$), y se varían Γ' y D' . Los límites para la variación de los parámetros son $40 \leq \Gamma' \leq 70$ y $1 \leq D' \leq 19$. Se toma $D' \leq 19$ ya que $D' = 20$ es el ancho del canal. El paso de tiempo es $\Delta t = 0.005t'$, donde $t' = R/U$ fue definido anteriormente como una escala temporal característica del problema. Este valor de Δt es tal que cualquier partícula tarda alrededor de 10 pasos de tiempo en transitar por una celda. Los límites de Γ' son determinados a partir de los resultados de corridas preliminares.

Para un remolino de Rankine centrado se observan tres tipos de comportamiento cualitativamente diferentes, correspondientes a: un paso total (el remolino pasa completamente, figura 7), un paso parcial (sólo parte del remolino pasa, figura 43) y un bloqueo total (el remolino no pasa, figura 9). En las figuras 10 y 11 se muestra el paso de vorticidad dependiendo de los valores de Γ' y D' para diferentes tiempos. En el último recuadro de cada una se observan los tres tipos de comportamiento y su variación en el espacio de parámetros. El paso parcial sólo se da para valores pequeños de D' ; mientras que el paso total se da conforme D' crece y Γ' disminuye. Además, en la figura 11 se puede observar que para D' pequeñas ($1 \leq D' \leq 3$) el paso de vorticidad prácticamente no depende de éste parámetro.

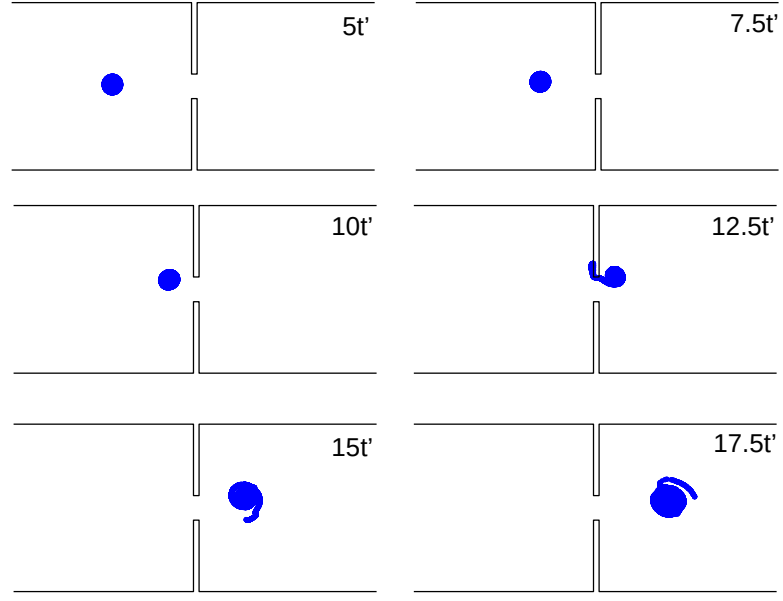


Figura 7. Evolución del remolino para $\Gamma' = 40$, $D' = 3$ y $y'_0 = 0$ y los diferentes tiempos señalados en cada recuadro. Los puntos negros representan los vórtices puntuales del modelo.

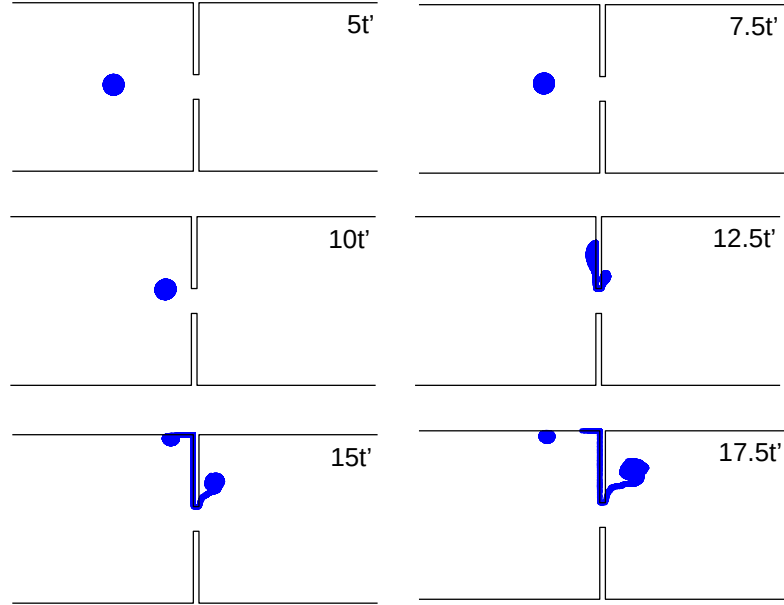


Figura 8. Igual que en la figura 7 pero ahora $\Gamma' = 48$.

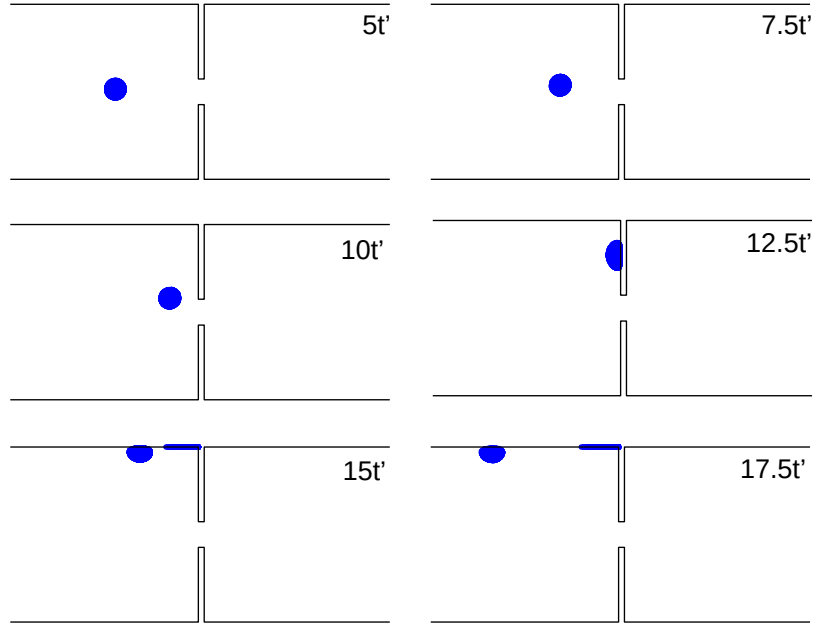


Figura 9. Igual que en la figura 7 pero ahora $\Gamma' = 56$.

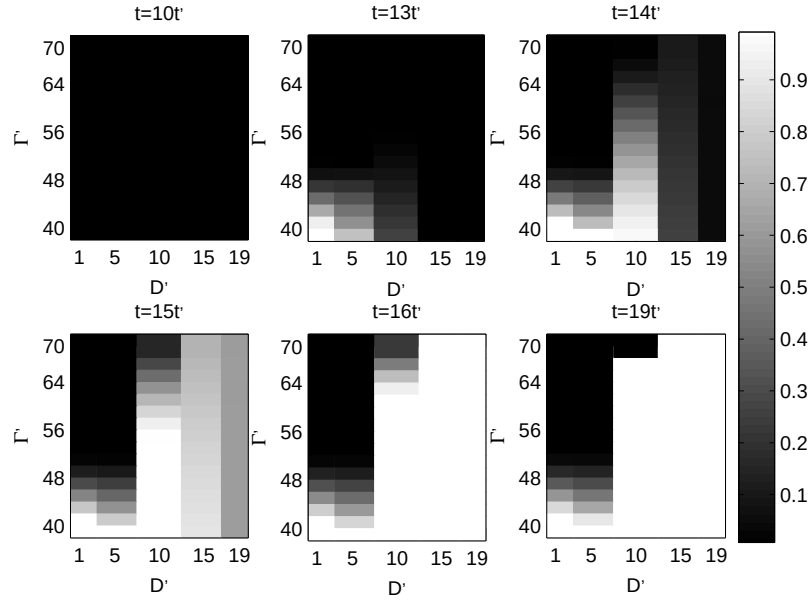


Figura 10. Vorticidad corriente abajo del estrecho en función de las condiciones iniciales y del tiempo transcurrido para $y'_0 = 0$.

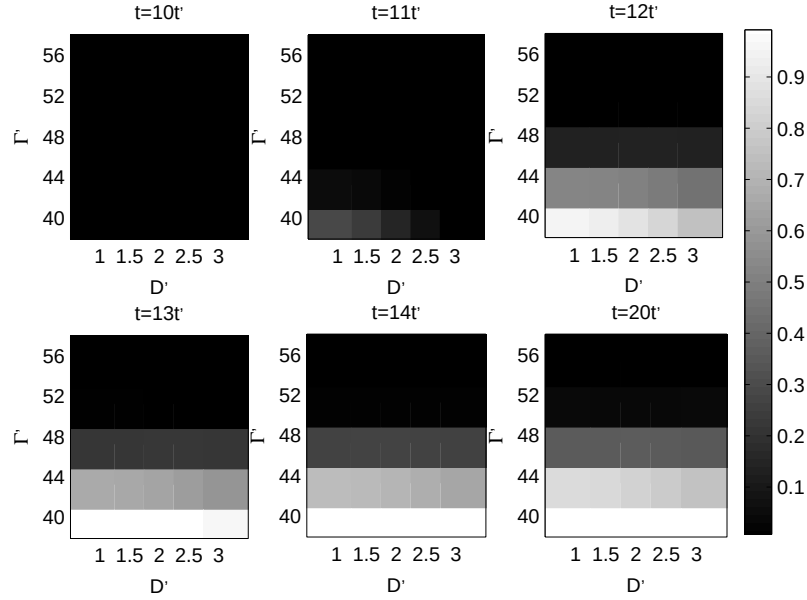


Figura 11. Igual que la figura 10 pero haciendo un acercamiento a la esquina inferior izquierda.

III.2 Remolino de Rankine no centrado

Para analizar el paso de vorticidad variando y'_0 se tienen dos series de corridas: una con $y'_0 = -5$ y la otra con $y'_0 = 5$ (figuras 12 y 13). En ambos casos $D' = 1, 5, 10, 15, 19$, pero el rango de Γ' es diferente para cada caso.

Cuando para un remolino $y'_0 < 0$ entonces inicialmente el efecto imagen tiende a moverlo hacia el estrecho; mientras que si $y'_0 > 0$ el efecto imagen tiende a alejarlo del estrecho. Para los dos casos se observa en las figuras 12 y 13 una diferencia, con respecto a los remolinos centrados, en los valores de Γ' con los que se da el cambio de comportamiento. Sin embargo, también se aprecian efectos de las paredes laterales del canal.

Para $y'_0 = -5$ el paso de vorticidad inicia en valores grandes de Γ' y D' hacia valores pequeños conforme pasa el tiempo, nuevamente diferente al caso de los remolinos

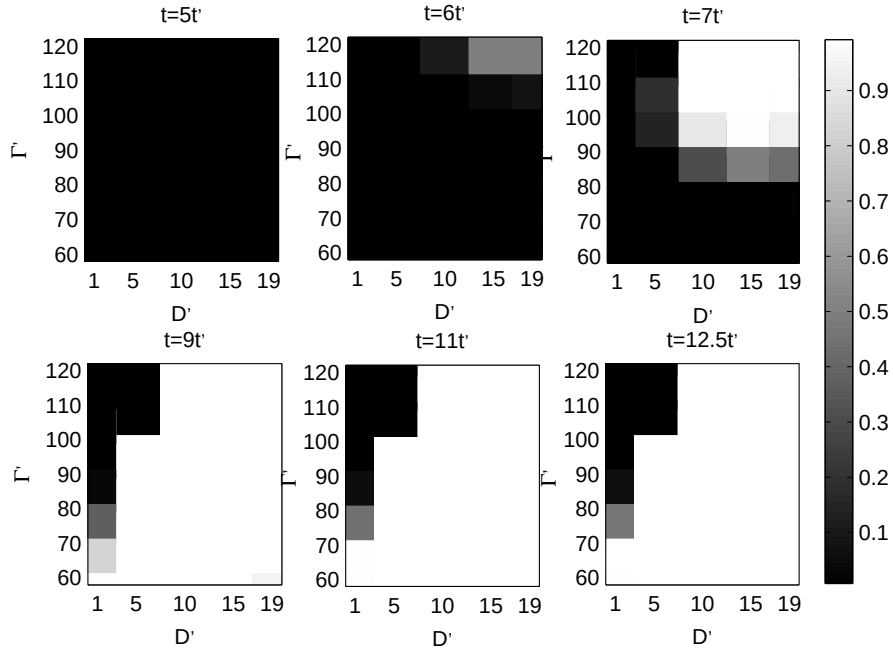


Figura 12. Igual que la figura 10 pero con $y'_0 = -5$.

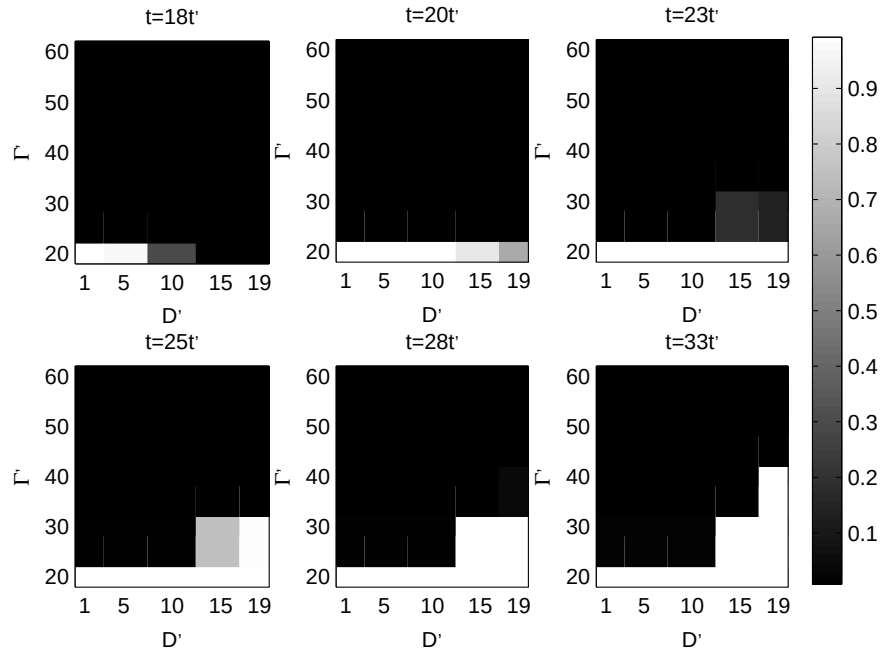


Figura 13. Igual que en la figura 10 pero para $y'_0 = 5$.

centrados. Se infiere que debido al efecto de la pared derecha, viendo en la dirección de la corriente, los remolinos se mueven a una velocidad mayor a U . Esto también se ve reflejado en la escala temporal: el remolino tarda menos en llegar a la barrera.

Para el caso de $y'_0 = 5$ existe un valor de Γ' para el cual el efecto de la pared hace que el remolino se estanque. En otras palabras, el efecto imagen hace que el remolino se mueva corriente arriba con la misma magnitud que la corriente hace que se mueva corriente abajo. Así que para este caso también entra en juego el efecto de la pared. Este valor de Γ' puede ser calculado analíticamente mediante

$$\Gamma'_{\text{lim}} = \frac{-2\pi}{\sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{y'_0}{y_0'^2 - (nA'/2)^2} \right)} = \frac{4A'}{\tan(y'_0\pi/A')} \quad (20)$$

donde A' es el ancho del canal dividido entre el radio. Esta expresión se calcula por el método de imágenes. La velocidad de un remolino por su imagen $V = \Gamma/2\pi d$ donde d es la distancia del centro del remolino al centro de su imagen. Se tiene que utilizar un número infinito de imágenes ya que al estar dentro de un canal se puede ver que como cuando algo está entre dos espejos.

La cercanía con la pared superior también se ve reflejada en la escala temporal de tal manera que el remolino tarda más en llegar a la barrera conforme Γ' aumenta.

III.3 Remolino con perfil suave

En el capítulo 2 se definieron las diferencias en el perfil de vorticidad y de velocidad entre un remolino de Rankine y uno *suave*. En esta sección se estudian las diferencias en el paso de vorticidad entre estos dos remolinos, en el caso en que ambos están centrados.

En la figura 14 se observan diferencias en la vorticidad corriente abajo del estrecho entre ambos remolinos. Se muestra la vorticidad de un remolino de Rankine menos la de

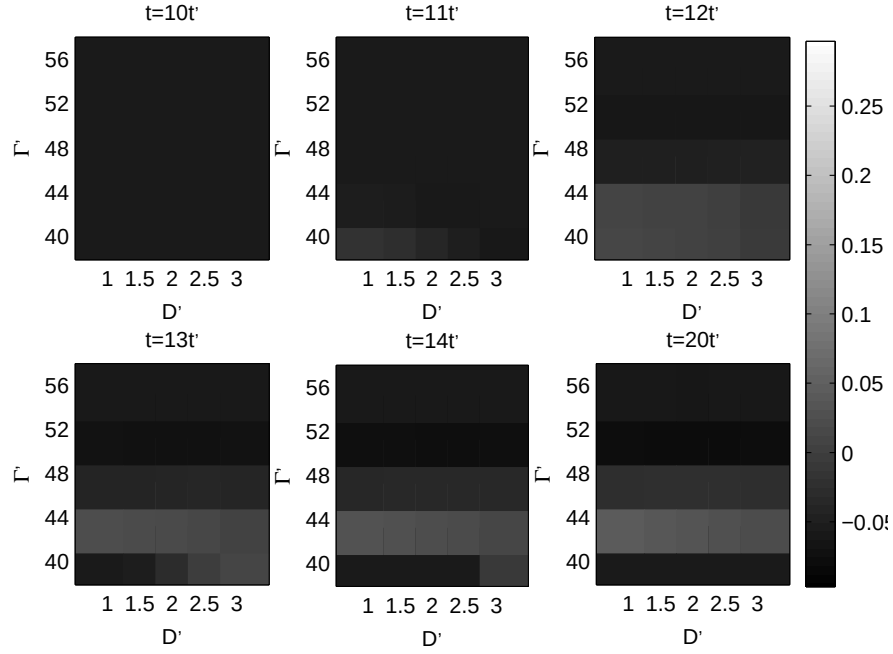


Figura 14. Mapas de la diferencia en la vorticidad corriente abajo del estrecho entre un remolino de Rankine y uno suave para $1 \leq D' \leq 3$, $20 \leq \Gamma' \leq 56$, $y'_0 = 0$ y los diferentes tiempos indicados en la parte superior de cada recuadro.

uno suave. Estas diferencias van de 0 hasta 23% de la vorticidad total. Las diferencias tienden a cero cuando hay un paso o bloqueo total para un remolino de Rankine. La evolución corriente abajo es, obviamente, muy distinta.

III.4 Efecto del grosor de la barrera

A primera vista pareciera que el grosor de la barrera es un parámetro relevante en cuanto al paso de vorticidad y al tipo de comportamiento del remolino. Para evaluar la importancia de este parámetro se hacen simulaciones con el grosor de la barrera de $15R$ (figura 15), variando nuevamente Γ' y D' para un remolino de Rankine con $y'_0 = 0$.

Al calcular la vorticidad que pasa a través del estrecho y compararla con los resultados de las simulaciones anteriores, se encuentran diferencias del 0 al 2%; lo cual indica que el grosor de la barrera no es relevante para el paso de vorticidad. Sin embargo está

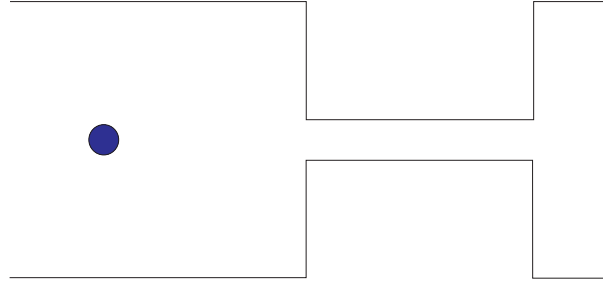


Figura 15. Parte del dominio para el caso de una barrera con un grosor de $15R$. El círculo representa al remolino al tiempo $t = 0$.

claro que el flujo corriente abajo es muy distinto.

III.5 Discusión

A partir de las simulaciones numéricas con distintos valores de Γ' , D' y y'_0 , se observan tres comportamientos cualitativamente diferentes del remolino: paso total, paso parcial y bloqueo total; de tal manera que es más probable que el remolino pase al aumentar D' y disminuir Γ' y y'_0 . Al variar Γ' no siempre existe el paso parcial en la transición entre el paso total y el bloqueo total .

Al variar y'_0 , además de cambios en el rango de valores de Γ' donde ocurre el cambio de régimen, se observaron diferencias importantes con respecto al caso del remolino centrado. Algunas de estas diferencias son explicadas por la cercanía de las paredes laterales del canal con respecto al remolino; por ejemplo, cuando $y'_0 > 0$ existe un límite para Γ' en el que el remolino se estanca dado por la ecuación (20). En esta ecuación aparece como un parámetro el ancho relativo del canal cuya importancia no se analiza en este trabajo, al mantenerlo fijo, pero sobretodo cuando $y'_0 \neq 0$ influye en el comportamiento del remolino. Por esta influencia resulta difícil el explicar el comportamiento del remolino con $y'_0 = -5,5$ sin hablar de las paredes laterales del canal. Para analizar el cambio en el paso de vorticidad con respecto a la variación de

la posición relativa entre el estrecho y el remolino sin que el efecto de las paredes del canal fueran tan importantes, se podría colocar un remolino centrado con respecto al canal y desplazar al canal hacia alguno de los lados. Sin embargo, para esta opción la corriente sería diferente.

Al comparar un remolino de Rankine con uno de perfil suave se observan diferencias de hasta 23% en cuanto a la cantidad de vorticidad que pasa cuando hay un paso parcial. Estas diferencias tienden a cero cuando hay un paso total o un bloqueo total para el remolino de Rankine, por lo que las fronteras entre los diferentes tipos de comportamiento permanecen prácticamente iguales.

Al comparar las simulaciones con anchos de barrera $R/2$ y $15R$, no se observan diferencias en el tipo de comportamiento, y sólo diferencias máximas de 2% en el paso de vorticidad. Esto sugiere que la dependencia con respecto al ancho de la barrera es despreciable.

Aunque la existencia del paso parcial depende de los tres parámetros adimensionales variados, se observa que para que se presente este comportamiento el remolino tiene que chocar con la barrera. Debido a lo anterior se tiene que al aumentar D' disminuye la posibilidad de que ocurra un paso parcial. En el siguiente capítulo se muestra que el análisis de las salidas del modelo mediante métodos de sistemas dinámicos proporciona más información sobre las diferencias entre los tres tipos comportamiento.

Capítulo IV

Advección Caótica

IV.1 La geometría lagrangiana

Se utilizan cuatro simulaciones numéricas en una malla de 875×250 celdas, con un remolino en la posición inicial $(x_0, y_0) = (184, 0)$. En el apéndice A se explica por qué la resolución es mayor que en el capítulo anterior. La primera simulación corresponde a un paso total sin filamentación ($\Gamma' = 38$, $D' = 5$); mientras que la segunda, a un paso total con filamentación ($\Gamma' = 40$, $D' = 3$). La tercera y la cuarta corresponden a un bloqueo total ($\Gamma' = 60$, $D' = 3$) y a un paso parcial ($\Gamma' = 46$, $D' = 3$), respectivamente. Se consideran los resultados del capítulo anterior para la selección de los valores de Γ' y D' .

Para encontrar las PH y sus variedades asociadas se utiliza el método descrito en la sección II.7. En este problema la dependencia temporal es muy importante por lo que la posición de los PE de tipo ensilladura no corresponde a la de los PH; para que estos se encuentren más cerca se sustrae un promedio de la velocidad de traslación del remolino en 100 pasos de tiempo del campo de velocidad. De esta manera, la nueva función de corriente queda definida como $\psi_m(x, y, t) = \psi(x, y, t) - u_{\text{rem}}(t)x - v_{\text{rem}}(t)y$ (figura 17),

donde $u_{\text{rem}}(t), v_{\text{rem}}(t)$ son las componentes de la velocidad de traslación del remolino en el tiempo t . La velocidad del remolino se obtuvo midiendo el desplazamiento del punto de estancamiento elíptico asociado al remolino. Se utilizan los PE de tipo ensilladura de la función de corriente modificada como una primera aproximación para la partícula hiperbólica (PH).

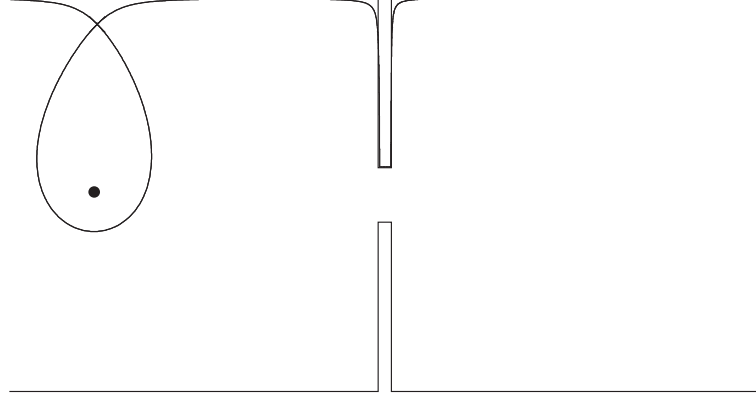


Figura 16. Geometría euleriana para el tiempo $t = 0.25t'$ para el caso de paso total con filamentación ($\Gamma' = 40$, $D' = 3$, $y'_0 = 0$). El punto es el PE de tipo centro, y la línea delgada es la línea de corriente que pasa por el PE tipo ensilladura.

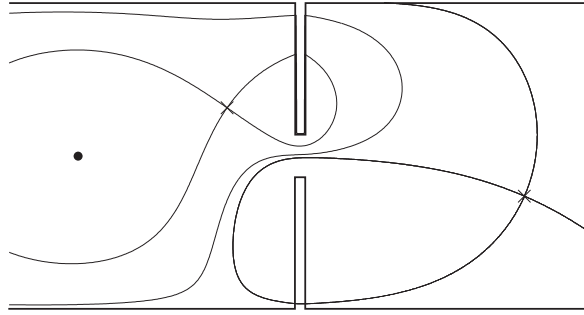


Figura 17. Geometría euleriana modificada para el tiempo $t = 0.25t'$ para el caso de paso total con filamentación ($\Gamma' = 40$, $D' = 3$, $y'_0 = 0$).

Este método tiene sus limitaciones. La primera es que no para todo PE corresponde

una PH. La segunda es que para disminuir la dependencia temporal se tiene que restar la velocidad del remolino al flujo total; sin embargo, la velocidad del remolino en ocasiones es muy difícil o imposible de calcular cuando el remolino se divide o existe una gran filamentación. Por último, aunque se disminuya la dependencia temporal, la posición de la PH y del PE no coinciden exactamente. Sin embargo, se encuentra la posición de la PH a cincuenta pasos de tiempo del inicio de la simulación. La variedad inestable se calcula colocando un segmento pequeño compuesto de partículas en la dirección de estiramiento que se integra hasta el final de la simulación. Para calcular la variedad inestable se coloca un segmento pequeño en la dirección de compresión sobre la PH a 50 pasos de tiempo de final de la simulación y se integra hasta su inicio. Cada simulación tiene un total de aproximadamente cuatro mil pasos de tiempo.

En la figura 18 se muestran las variedades para diferentes tiempos con $D' = 3$, $\Gamma' = 40$ y $y'_0 = 0$; corresponde al caso de paso total con filamentación. De la misma forma se obtienen las variedades para los otros tres casos; sin embargo, se centra la atención en la variedad estable al inicio y en la variedad inestable al final de la simulación.

En la figura 19 se observa que la forma geométrica de la variedad estable al tiempo $t = 0$ es parecida en las cuatro simulaciones: una línea que parte de la barrera superior hacia el remolino rodeándolo en espiral en sentido opuesto al giro del remolino. Estas espirales en cierto punto se cierran sobre sí mismas encerrando un área pequeña, y regresan prácticamente sobre ellas. La diferencia radica en aspectos cuantitativos tales como el área y el perímetro de la región del remolino encerrada por la variedad.

En las figuras 20 a 22, se observa la variedad inestable al final de la simulación, además de la posición de los vórtices puntuales utilizados en el modelo. En este caso existen diferencias cualitativas.

Para el paso total sin filamentación existe una PH que permanece así hasta el final de la simulación. Además, las variedades no entran al remolino, por lo que el perímetro

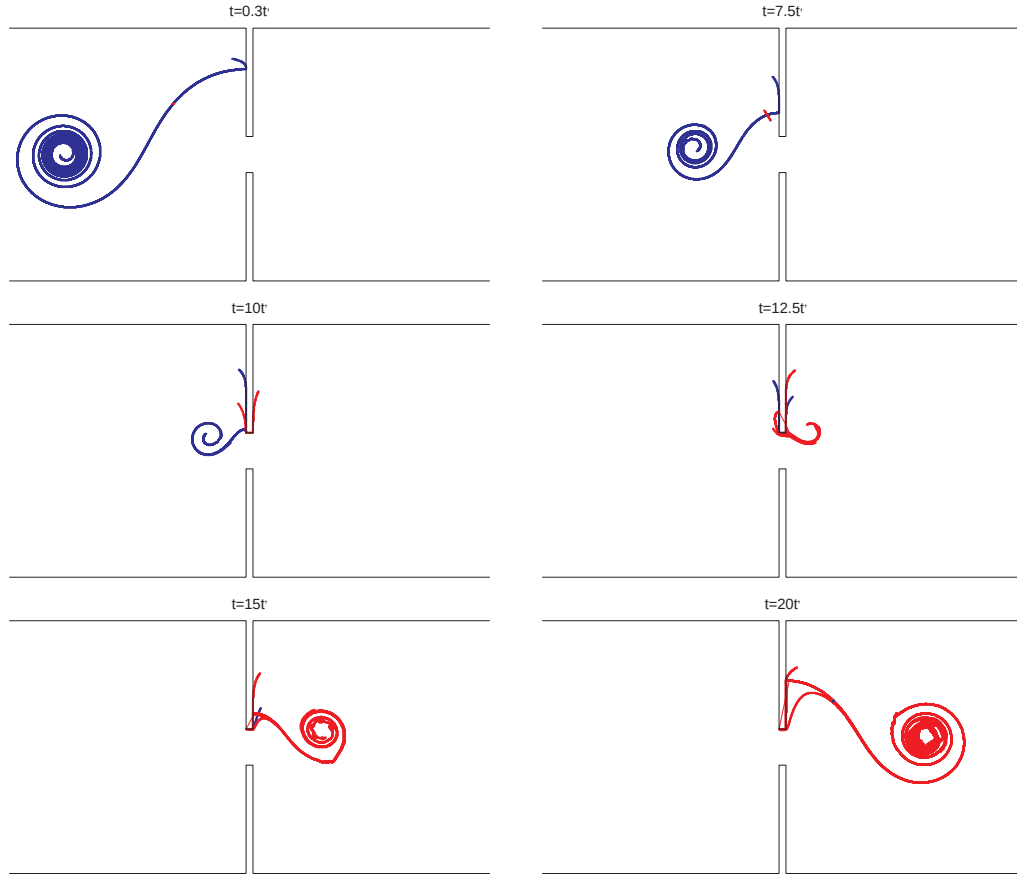


Figura 18. Variedades en diferentes tiempos con $D' = 3$, $\Gamma' = 40$ y $y'_0 = 0$. En rojo la variedad inestable y en azul la estable.

de la variedad dentro del remolino es nulo al igual que el área del mismo que rodea (figuras 19a y 20).

Para el paso total con filamentación se observa también la presencia de una PH hasta el final de la simulación. Además, las variedades sí entran al remolino (figuras 19b y 21) y se observa una zona de mezcla importante a su alrededor, al final de la simulación (figura 21).

Al inicio de la simulación de bloqueo total existe sólo una PH. Al final, el remolino está pegado a la pared. Cuando esto sucede existen dos PH, lo cual se puede ver en el apéndice B. El pasar una PH a varias PH se le conoce como bifurcación. Además, para este caso, la variedad estable no entra al remolino (figura 19d) sino que lo rodea por

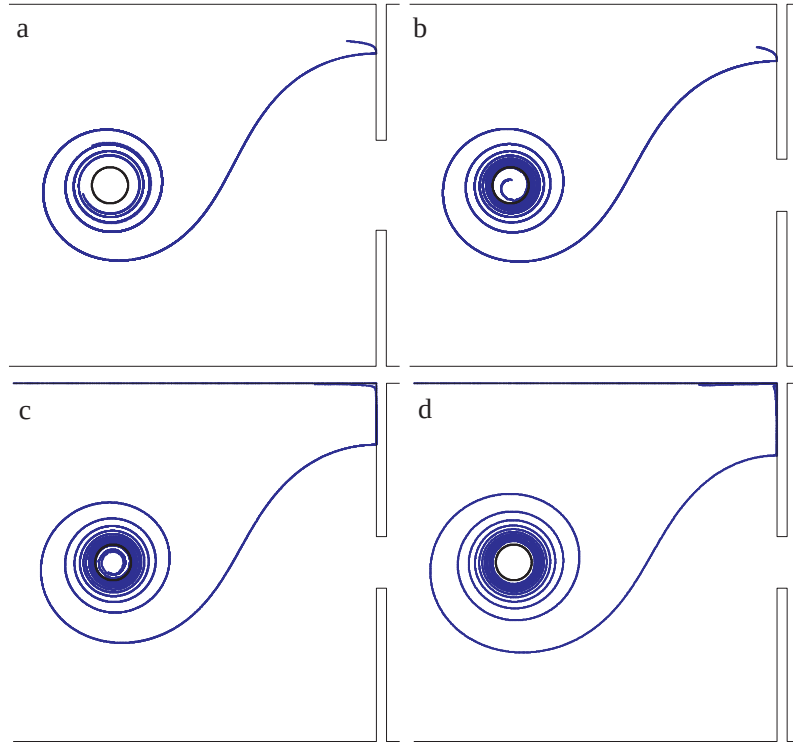


Figura 19. En azul, la variedad estable al tiempo $t = 0$ para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$. El círculo negro representa el borde del remolino.

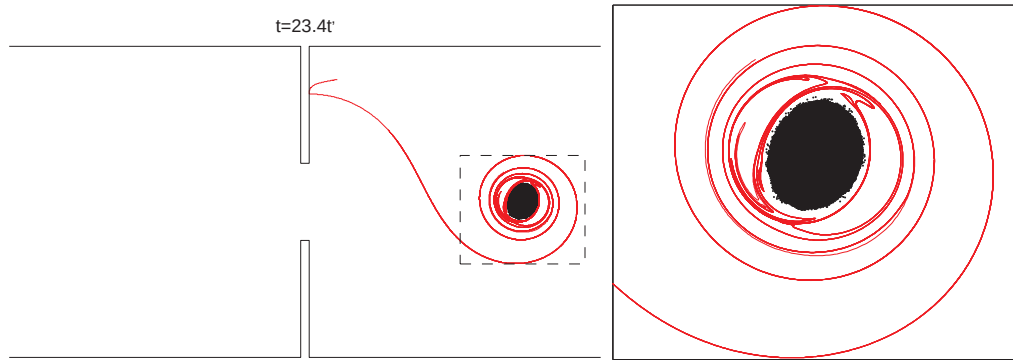


Figura 20. Variedad inestable en rojo con $\Gamma' = 38$, $D' = 5$ y $y'_0 = 0$ (paso total sin filamentación). En negro, la posición de los vórtices puntuales utilizados en el modelo. La figura a la derecha es un acercamiento

completo al igual que la variedad inestable (figura 22).

Para el paso parcial, inicialmente se tiene una PH y posteriormente el remolino choca con la barrera y se parte en dos (figuras 19c y 23). Una parte queda corriente

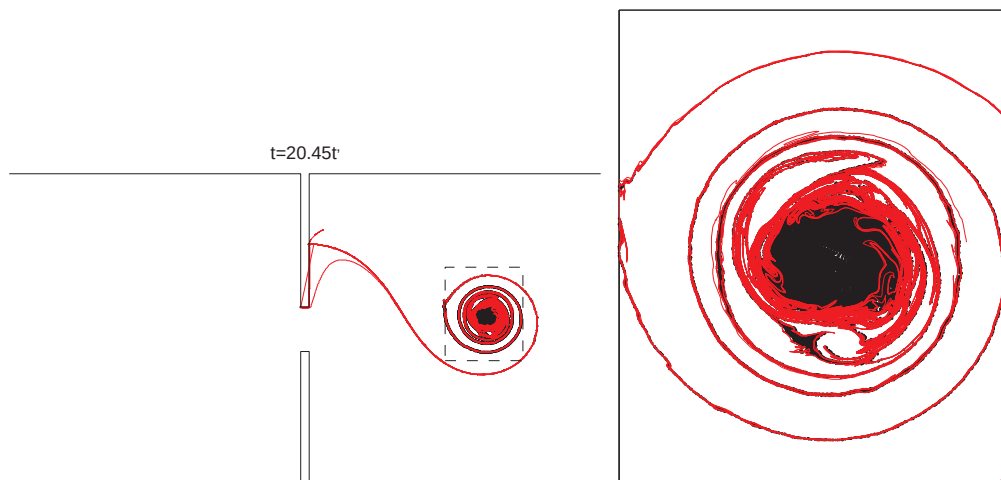


Figura 21. Igual que la figura anterior pero con $\Gamma' = 40$, $D' = 3$ (paso total confilamentación)

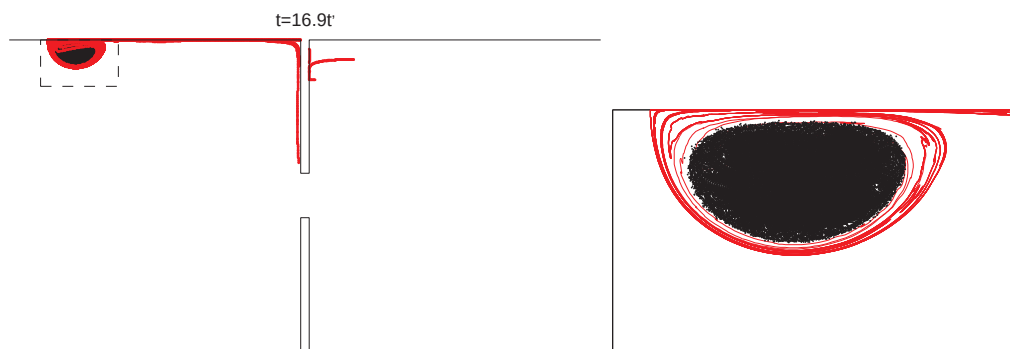


Figura 22. Igual que la figura anterior pero con $\Gamma' = 60$ (bloqueo total).

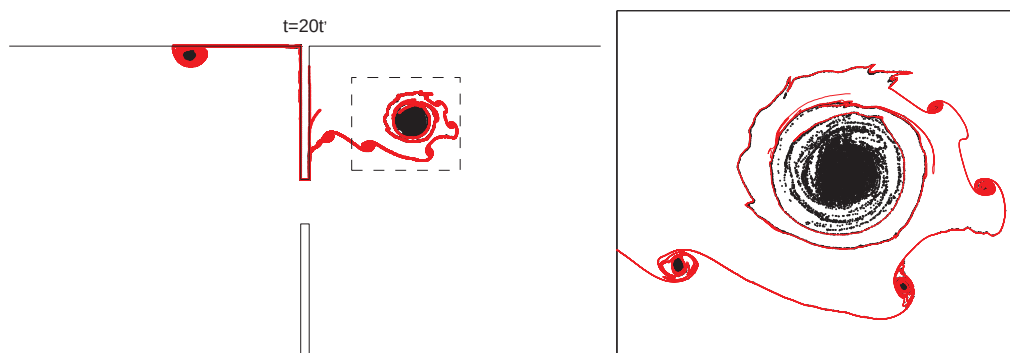


Figura 23. Igual que la figura anterior pero con $\Gamma' = 46$ (paso parcial).

arriba y la otra pasa. Ahora se observan dos PH que acompañan a la primera parte, la cual se va pegada a la pared. El flujo corriente abajo del estrecho es complicado para un análisis cuidadoso debido a una serie de pequeños remolinos que se forma a lo largo de un filamento de vorticidad. La variedad estable se construye utilizando sólo las dos PH que al final de la simulación están corriente arriba del estrecho.

En la tabla I se presentan los datos del área encerrada por la variedad, como porcentaje del área total del remolino, y el perímetro de la misma para las cuatro simulaciones.

Comportamiento	Área	Perímetro
Paso total sin filamentación	0	0
Paso total con filamentación	1	$44R$
Paso parcial	32	$66R$
Bloqueo total	144	0

Tabla I. Valores del área del remolino rodeada por la variedad estable al tiempo $t = 0$ en porcentaje del área del remolino y valores del perímetro de ésta misma variedad dentro del remolino

IV.2 Tiempo de residencia

El tiempo de residencia, t_{res} , es el tiempo que una partícula se encuentra en alguna región; es función de la posición inicial de las partículas y sirve como medida del transporte en un flujo. En este trabajo se hicieron dos cálculos diferentes: permanencia y antigüedad. El primero es el tiempo que una partícula permanece corriente arriba del estrecho, mientras que el segundo es el tiempo que una partícula ha estado corriente abajo al termino de la simulación.

IV.2.1 Permanencia

Para calcular la permanencia se coloca una malla rectangular de partículas corriente arriba del estrecho y se integra hacia adelante en el tiempo, desde $t = 0$ hasta el final de la simulación. Esto se hace para las cuatro simulaciones utilizadas para obtener las geometrías lagrangianas.

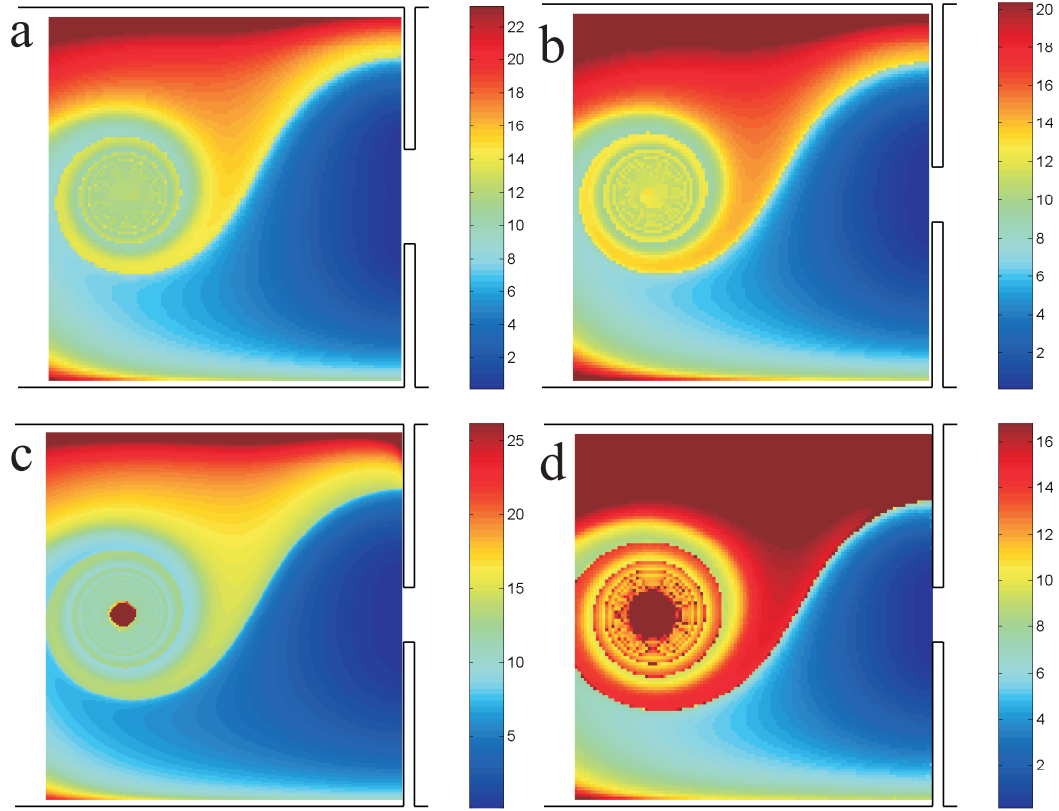


Figura 24. Mapas de permanencia para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$. Una unidad en la escala de colores es igual a t' . En los cuatro mapas se observa un espiral y un gradiente fuerte.

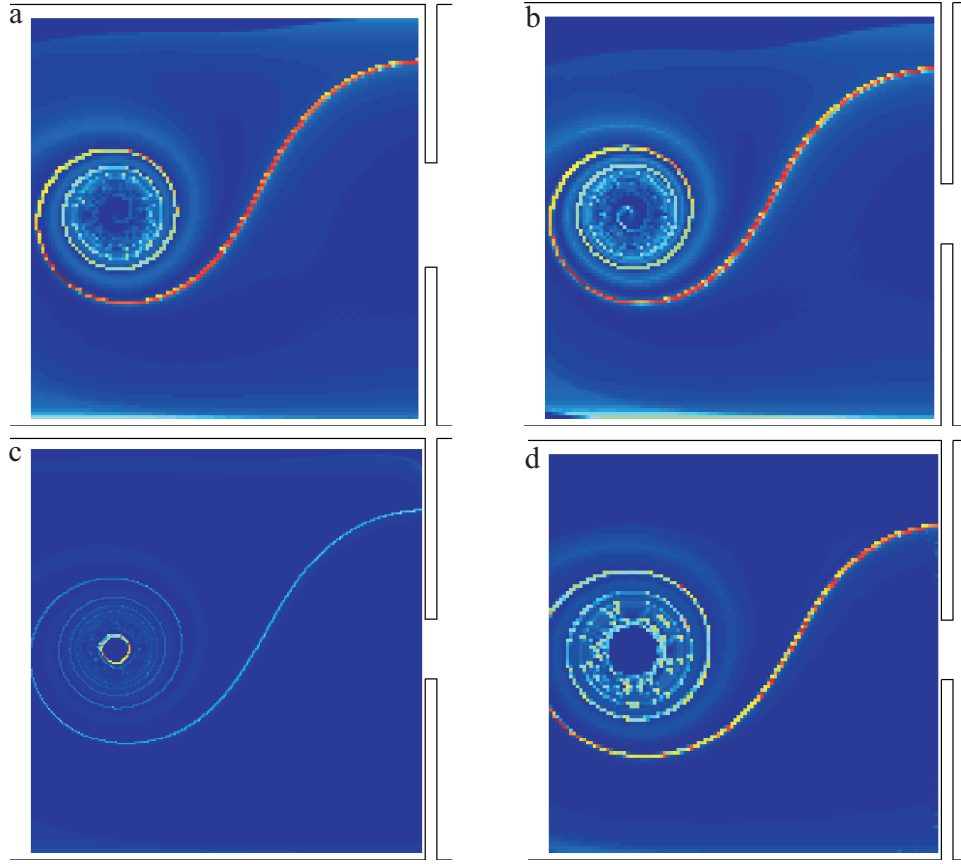


Figura 25. Mapas de la magnitud del gradiente de la permanencia para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$. En los cuatro mapas se observa una espiral que representa un fuerte gradiente del tiempo de residencia.

Los mapas de la permanencia (figura 24) están caracterizados por un fuerte gradiente en forma de espiral alrededor del remolino. A partir de la magnitud del gradiente del campo de tiempo de residencia $|\nabla t_{\text{res}}|$ se obtiene la línea de máximo gradiente mostrada en la figura 25. Al comparar las variedades estables al tiempo $t = 0$ con los mapas de $|\nabla t_{\text{res}}|$, existe una concordancia visual.

Además de las mallas de partículas presentadas anteriormente, se utilizan otras más pequeñas para observar en detalle la relación entre la permanencia y la variedad estable dentro del remolino (figura 26). Los resultados muestran una relación entre la permanencia y la variedad estable lo que nos permite profundizar en el significado físico de las variedades.

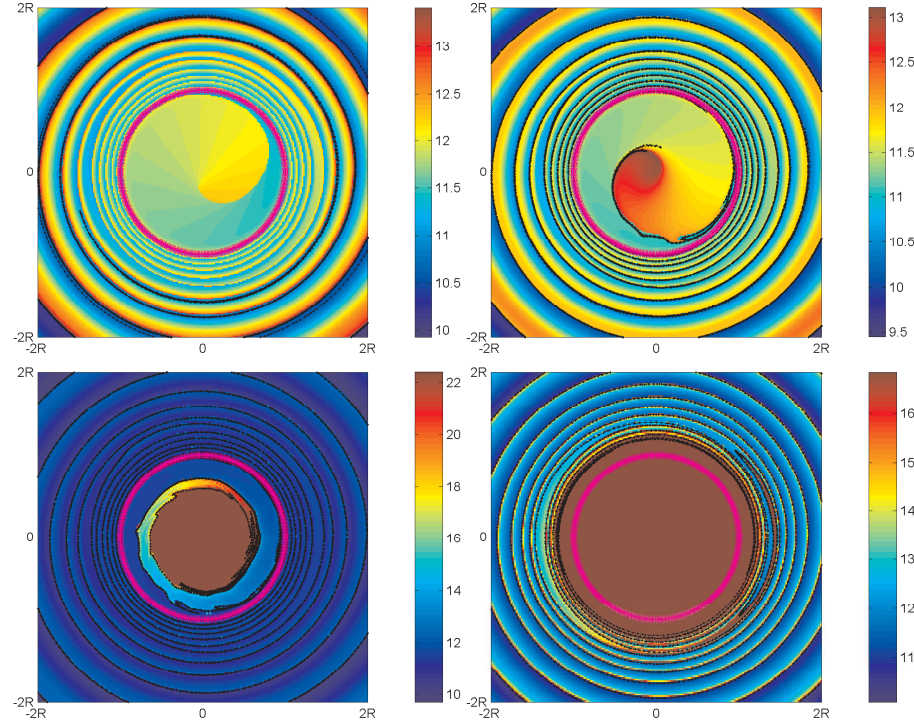


Figura 26. Mapas de permanencia para una malla pequeña. Una unidad en la escala de colores es igual a t' . En rosa se muestra la circunferencia del remolino y en negro la variedad estable

IV.2.2 Antigüedad

Para calcular la antigüedad se coloca una malla rectangular de partículas corriente abajo del estrecho y se integra hacia atrás en el tiempo. En la figura 27 se presentan mapas de la antigüedad en donde para los casos del paso total se observa una espiral muy parecida a la obtenida para la permanencia. Para el paso parcial también se observa una espiral pero distorsionada, mientras que para el bloqueo total no existe una espiral. Hay una correspondencia entre un gradiente importante en el tiempo de antigüedad y la variedad inestable para el tiempo final de la simulación. También se puede extraer este gradiente calculando la magnitud del gradiente de la antigüedad.

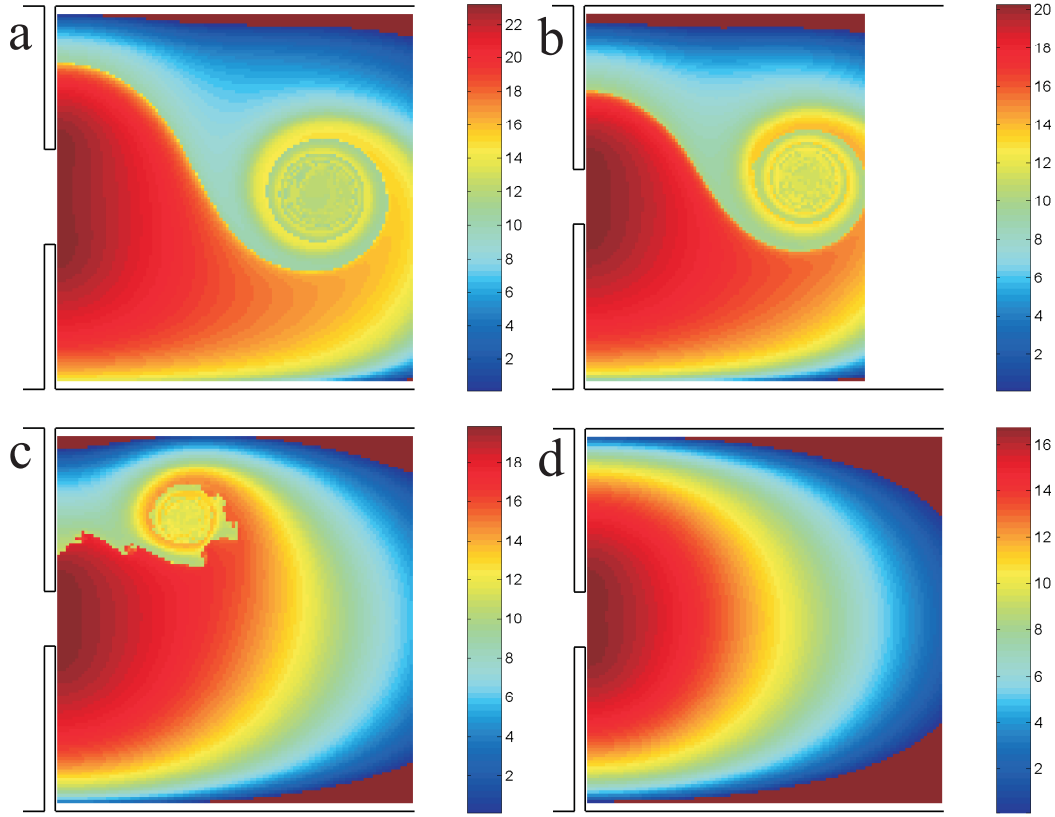


Figura 27. Mapas de la antigüedad para las cuatro simulaciones: a) $\Gamma' = 38$, b) $\Gamma' = 40$, c) $\Gamma' = 46$, d) $\Gamma' = 60$. La escala de colores es t' . En los tres primeros se observa una espiral que ya no se observa en el último.

IV.3 Exponentes de Lyapunov de tamaño finito (ELTF)

Para calcular los ELFT definidos en la sección II.7.2. Se empieza con una malla rectangular de partículas, P_{ij} , donde cada partícula tiene cuatro *satélites* (figura 28), dos en la dirección x y dos en la dirección y . La distancia inicial entre cada par de satélites es δ_0 de la ecuación (19) que se tomó $\delta_0 = 2$. Todas las partículas se advectan; cada paso de tiempo se mide la separación entre cada par de satélites (S_{ij1}, S_{ij2}) y (S_{ij3}, S_{ij4}) . De las dos distancias calculadas entre los pares de satélites se toma la mayor y cuando ésta es mayor que δ_f , la cual se tomó como $\delta_f = 4$, entonces se calcula λ y se renormaliza a los satélites (se vuelven a colocar a una distancia $\delta_0/2$ de la partícula P_{ij}), se siguen

advectando y se repiten los pasos. Al final se saca un promedio de todas las λ calculadas para cada partícula P_{ij} . Esta técnica ha sido utilizada anteriormente para calcular los exponentes de Lyapunov de tiempo finito (Shadden et al., 2005).

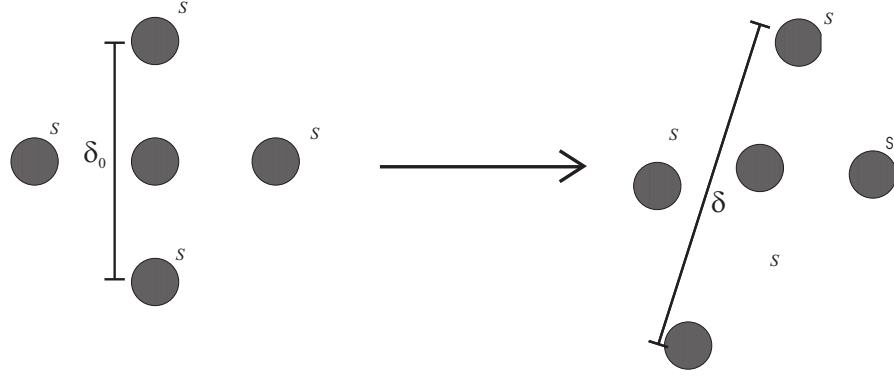


Figura 28. Esquema para obtener los exponentes de Lyapunov. Del lado izquierdo se muestra la posición inicial de la partícula y sus satélites y del derecho su posición después de ser advectados.

Se colocó una malla rectangular de partículas cuyo paso de malla es igual a tres celdas de la malla del modelo. La malla de partículas cubre las celdas $200 \leq x \leq 420$ y $10 \leq y \leq 240$ del modelo al tiempo $t = 0$. Esto se hizo para las cuatro simulaciones que han sido estudiadas en este capítulo. En la figura 29 se presenta el mapa de los ELTF para $\Gamma' = 38$, $D' = 5$ y $y'_0 = 0$ y se observa una figura similar a la obtenida para los tiempos de residencia. Además se observa un círculo donde los ELTF son máximos alrededor del remolino. Estas características también están presentes en los mapas para $\Gamma' = 40$, $\Gamma' = 46$ y $\Gamma' = 60$.

Se cuantificó la diferencia entre los cuatro casos calculando el máximo y el promedio de los EFTL en la malla. Estos resultados se presentan en la la figura 30 en donde se observa que los valores son mayores conforme Γ' crece. Además, el valor máximo es prácticamente constante a lo largo de la simulación, mientras que hay una mayor variación en el promedio.

Finalmente, se graficó el valor máximo de los ELTF contra Γ' (figura 31) para ver

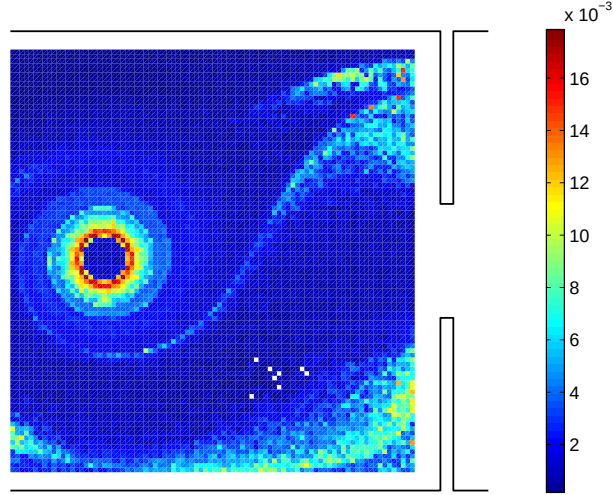


Figura 29. Mapa de los ELTF para $\Gamma' = 38$, $D' = 5$ y $y'_0 = 0$. Se observa una figura similar a la obtenida en los mapas de tiempo de residencia y un círculo donde los ELFT son máximos alrededor del remolino.

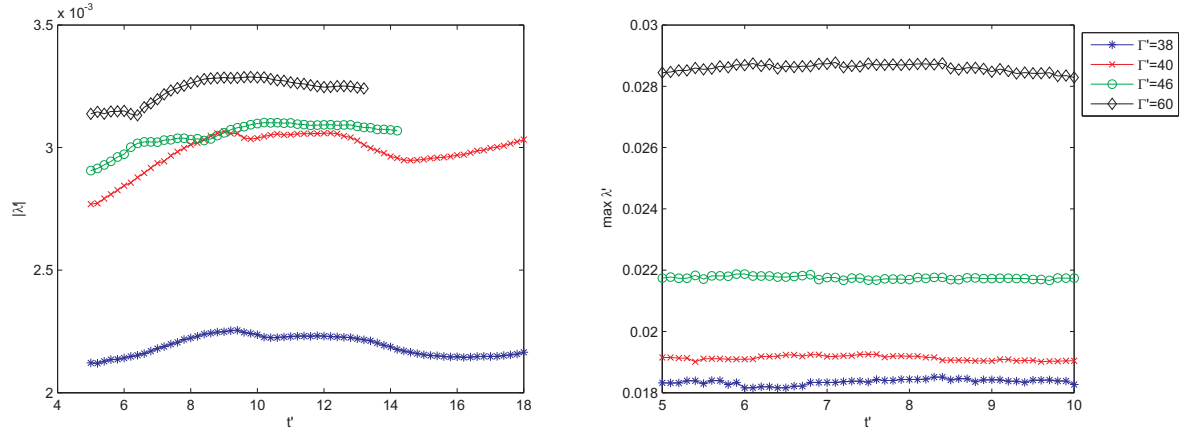


Figura 30. Promedio (izquierda) y máximo (derecha) de los ELTF contra tiempo. Se observa una variación del promedio a lo largo del tiempo para el promedio la cual no se observa para el máximo. En general los valores de los ELFT crecen entre mayor sea Γ' .

la relación entre estas dos cantidades que parece prácticamente lineal.

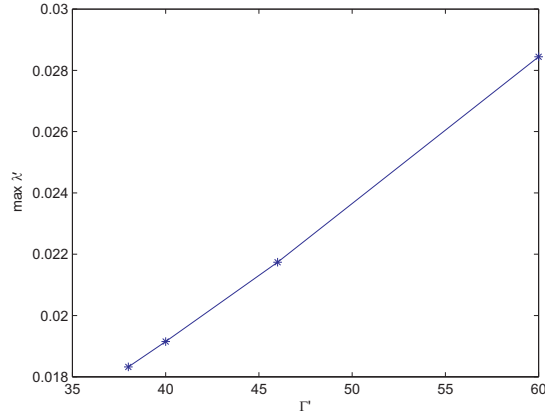


Figura 31. Máximo de los ELTF contra Γ' . Se observa una relación prácticamente lineal.

IV.4 Discusión

El primer rasgo importante a señalar es que se encuentra por lo menos una PH en todos los casos analizados. Esto es relevante ya que no existen PH en una corriente uniforme con un remolino, por lo que la presencia del estrecho es responsable de su existencia. En trabajos futuros se buscarán las condiciones necesarias para la existencia de una PH.

Además de encontrar una PH al principio de cada simulación se observó bifurcación en dos simulaciones: de una a dos PH para el bloqueo total y de una a por lo menos tres PH para el paso parcial. De estas últimas, dos siguen a la parte del remolino que se queda corriente arriba, y del lado derecho de la pared se sabe que existe por lo menos una. Esto último se ve claramente si se compara con un paso total. Sin embargo, debido a que el flujo es complicado corriente abajo del estrecho, no se hace un análisis detallado de esta parte donde es probable que existan más PH.

Las diferencias cualitativas del flujo se ven reflejadas como diferencias cuantitativas en la variedad estable al tiempo $t = 0$. Dos diferencias relevantes son el área del remolino encerrada por la variedad y el perímetro de ésta dentro del remolino. Sólo cuando la variedad estable entra a un remolino es cuando existe filamentación. El área rodeada

por la variedad es prácticamente equivalente a la parte del remolino que se queda.

El tiempo de residencia está caracterizado por un fuerte gradiente en espiral que rodea al remolino, el cual se observa claramente al graficar el valor absoluto de su laplaciano. Al sobreponer la variedad estable a estos mapas de tiempos de residencia, y en especial a los del valor absoluto del laplaciano, se observa una correspondencia. En todos los casos la equivalencia es casi exacta, excepto en el del paso total sin filamentación donde la variedad no se estira lo suficiente para cubrir completamente la línea del gradiente fuerte del tiempo de residencia. En el paso parcial existen algunas partículas del remolino que se quedan corriente arriba del estrecho, pero que no están dentro de la variedad. Entonces, el área rodeada por esta variedad es cercana al área del remolino que permanece corriente arriba.

Las variedades sirven como barreras que dividen al flujo en regiones donde las trayectorias de las partículas son cualitativamente diferentes. Estas regiones adquieren un significado físico más profundo al compararlas con los tiempos de residencia.

A partir del cálculo de los ELTF se observó que la mezcla es máxima alrededor del remolino y que la intensidad de esta mezcla crece con Γ' . Parece que la relación entre estos dos parámetros es lineal. Se necesita cubrir en mayor medida el espacio de parámetros para ver el efecto de D' y y'_0 . Aunque los valores de los EFTL alrededor del remolino aumentan conforme Γ' crece esto no implica que la mezcla entre el fluido ambiente y el remolino lo haga, para que ésta exista se tiene dar filamentación para lo cual, como se mencionó anteriormente, el remolino tiene que chocar con la pared.

Capítulo V

Experimentos

El aparato experimental, así como otros detalles de los experimentos son descritos en la sección II.8. Inicialmente, se realizan nueve experimentos para calcular la circulación (Γ) y el radio (R) del remolino generado y así poder calcular los parámetros adimensionales Γ' y D' . Posteriormente, se presentan los resultados para tres experimentos característicos.

V.1 Parámetros adimensionales

V.1.1 Perfil de un remolino

Con la mesa rotando a 8 r.p.m. se extraen 2 litros de fluido durante dos revoluciones con lo que se forma el remolino ciclónico circular. Luego se esparcen partículas de papel sobre la superficie libre. Se filma el experimento y del video se extraen imágenes a intervalos constantes de 0.2 s. Al sumar 5 de éstas, utilizando programas especiales de cómputo escritos en MATLAB, se forma una fotografía de larga exposición como la de la figura 32.

A partir de estas fotografías se mide la distancia recorrida por las partículas y

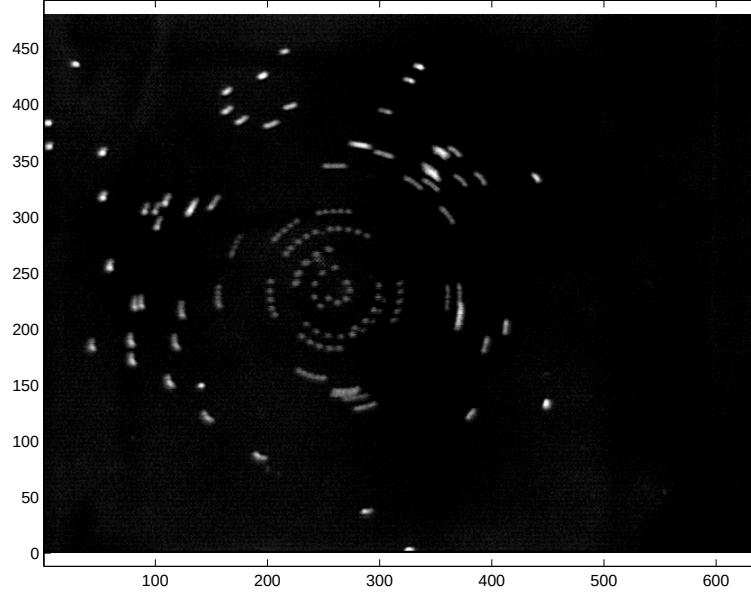


Figura 32. Fotografía de larga exposición de un remolino. Velocidad de rotación de la mesa: 8 r.p.m. Tiempo de extracción: 2 revoluciones. Profundidad: 20 cm. Profundidad del tubo: 4 cm.

se calcula el perfil de velocidad tangencial del remolino. A este perfil se le ajusta, por mínimos cuadrados, un perfil de velocidad del tipo de la ecuación (10) con $n = 2$ (figura 33). Se obtienen las mejores aproximaciones para $\omega_2 = 7,1 \pm 1.2 \text{ s}^{-1}$ y $a_2 = 3.2 \pm 0.2 \text{ cm}$, lo que da un radio de máxima velocidad en $R_2 = 2.6 \pm 0.2 \text{ cm}$, expresión (11), lo cual es cercano a lo obtenido en trabajos anteriores (Trieling et al., 1998).

De estos resultado se obtuvo la circulación a partir de la ecuación (12) y posteriormente el promedio para los remolinos con las características de generación antes mencionadas, $\Gamma = 111 \pm 6 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$.

V.1.2 Velocidad de la corriente

Se calcula el campo de velocidad de la *corriente*, antes de mover las paletas, con la mesa rotando a 8 r.p.m. Esto se hace para comparar cualitativamente el campo de velocidad y la función de corriente en los experimentos y en el modelo numérico. Se distribuyen partículas de papel sobre la superficie y se obtienen nuevamente fotografías de larga

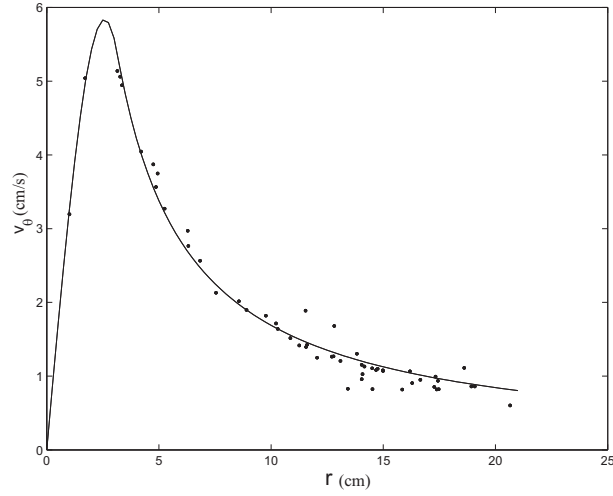


Figura 33. Perfil de velocidad angular para uno de los experimentos. Los puntos marcan los datos experimentales y la curva la aproximación por mínimos cuadrados.

exposición de las trayectorias de las partículas. Con ellas se calcula la velocidad de las partículas y se interpola a una malla regular, a la cual se le resta la velocidad de la barrera (figura 34). En la figura 35 se tiene la vorticidad y la función de corriente de la *corriente* ocasionada por el movimiento de las paletas y el cambio de marco de referencia. Se observa que la función de corriente es similar a la obtenida en el modelo numérico y no se observa a primera vista una asimetría con respecto al eje del canal. Se concentra la atención corriente arriba del estrecho ya que del otro lado el flujo se vuelve turbulento y obviamente existen diferencias importantes con respecto a las soluciones del modelo.

V.1.3 Parámetros adimensionales

Al tener los valores experimentales de $\Gamma = 111 \pm 6 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, $R = 2.6 \pm 0.2 \text{ cm}$ y los valores de los parámetros adimensionales que nos interesan, se calculan los valores de U y D a utilizar en los experimentos.

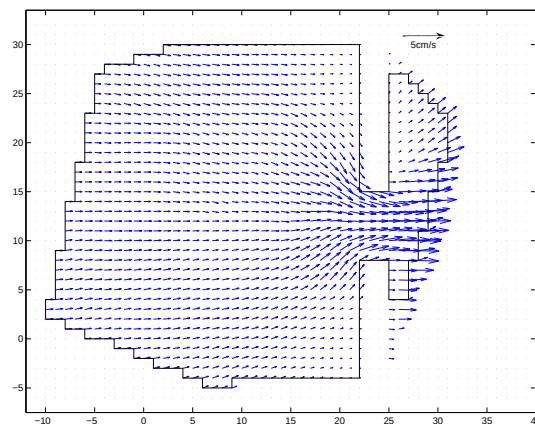


Figura 34. Campo de velocidad aproximado de la corriente que se obtiene moviendo la barrera y cambiando el marco de referencia. La línea negra es el borde del dominio donde hay datos experimentales.

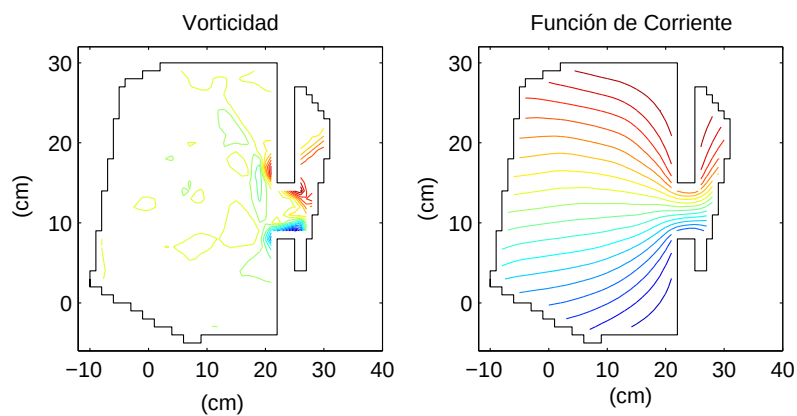


Figura 35. Vorticidad y función de corriente para la *corriente* en los experimentos. La línea negra es el borde del dominio donde hay datos experimentales.

V.2 Resultados

Se realizaron experimentos para ocho combinaciones diferentes de Γ' y D' manteniendo $y'_0 \approx 0$. En estos experimentos se marcó el remolino con tinta de color. La evolución del flujo se presenta en las figuras 36, 37 y 38 para tres experimentos. Se puede ver que la mancha de tinta es más grande que el remolino ya que la cuadrícula del fondo en estas figuras es de 20 cm de lado y que el radio del remolino es de aproximadamente 2.6 cm.

En la figura 36 se observa que la barrera se acerca al remolino y la mancha de tinta pasa completamente por el estrecho. En la figura 37 se puede ver como cuando, a diferencia del experimento anterior, una parte del remolino se detiene corriente arriba del estrecho. Lo anterior se observa en los recuadros para $t = 24, 25, 28$ s, como una pequeña mancha de tinta al lado de la barrera que vista en detalle es un pequeño dipolo. Finalmente en la figura 38 se observa que cuando el remolino llega a la pared se encuentra completamente de un lado del estrecho por lo que parecería que no va a pasar. Para el tiempo $t = 39$ s se aprecia la formación de un dipolo que al tiempo $t = 51$ s se dirige hacia el estrecho y de esta forma el remolino pasa.

Los valores de los parámetros adimensionales corresponden según el modelo numérico a los tres tipos de comportamiento. Sin embargo, en los tres experimentos se observa al final que toda la mancha de tinta pasa a través del estrecho (aún cuando la barrera se encuentra sólo a la mitad de su recorrido). También se observa la formación de vorticidad de signo contrario cuando el remolino se acerca a la pared.

V.3 Discusión

En los experimentos se observó que para los diferentes valores de Γ' y D' el remolino siempre pasa por el estrecho aún cuando en el modelo no sucede esto. Esto se observa en las figuras 38, 37 y 36. Para fluidos viscosos, a diferencia de los invíscidos, la condición

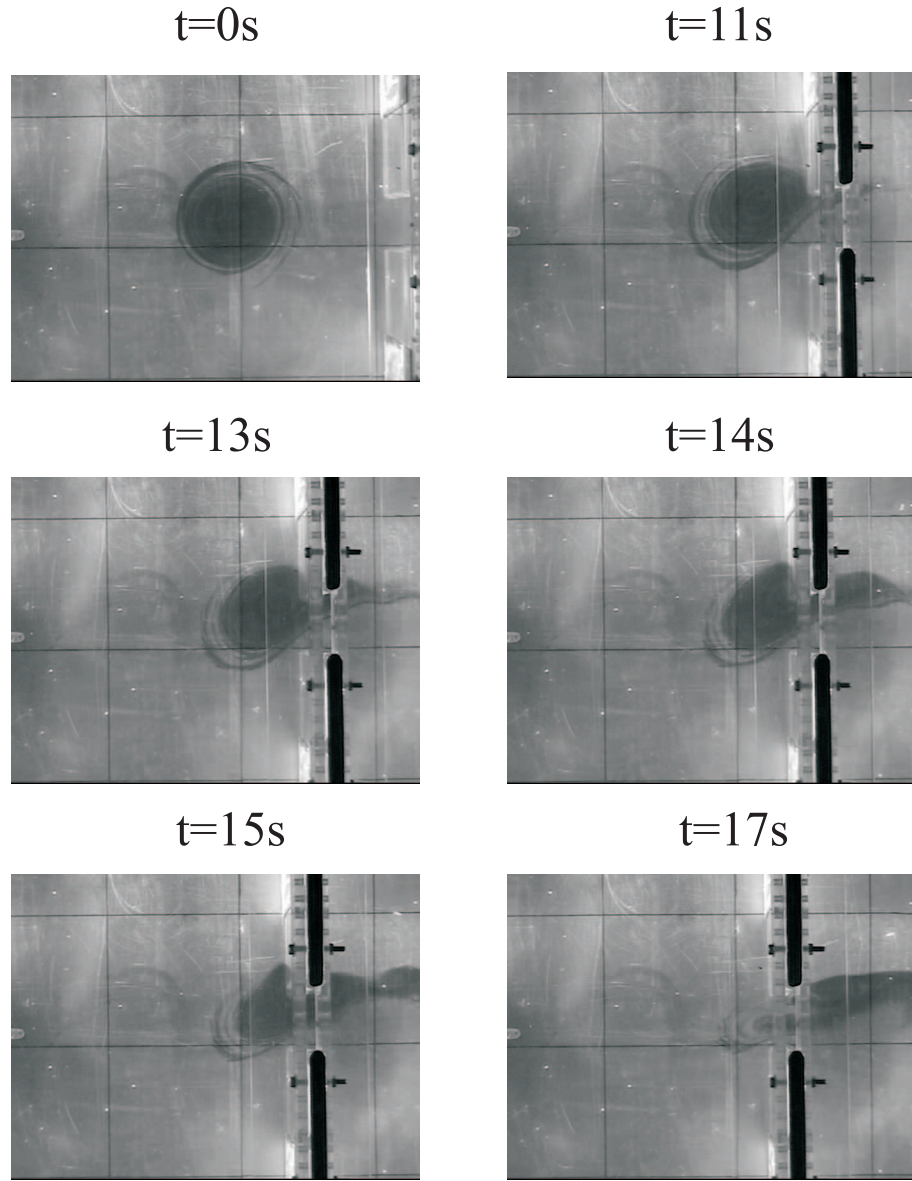


Figura 36. Experimento 1: $\Gamma' \simeq 34$ y $D' = 3$. Los cuadros en el fondo son de 20 cm de lado.

de frontera es de no deslizamiento. Esta condición hace que se forme vorticidad de signo contrario en la capa límite de las paredes del estrecho cuando se acerca un remolino. Este fenómeno se observa claramente en los experimentos, como en la figura 36 donde se forma un dipolo que posteriormente se dirige al estrecho. Sin embargo, se observa también que el modelo representa bien el comportamiento hasta que la viscosidad comienza a afectar al flujo. El cambio del marco de referencia para los experimentos

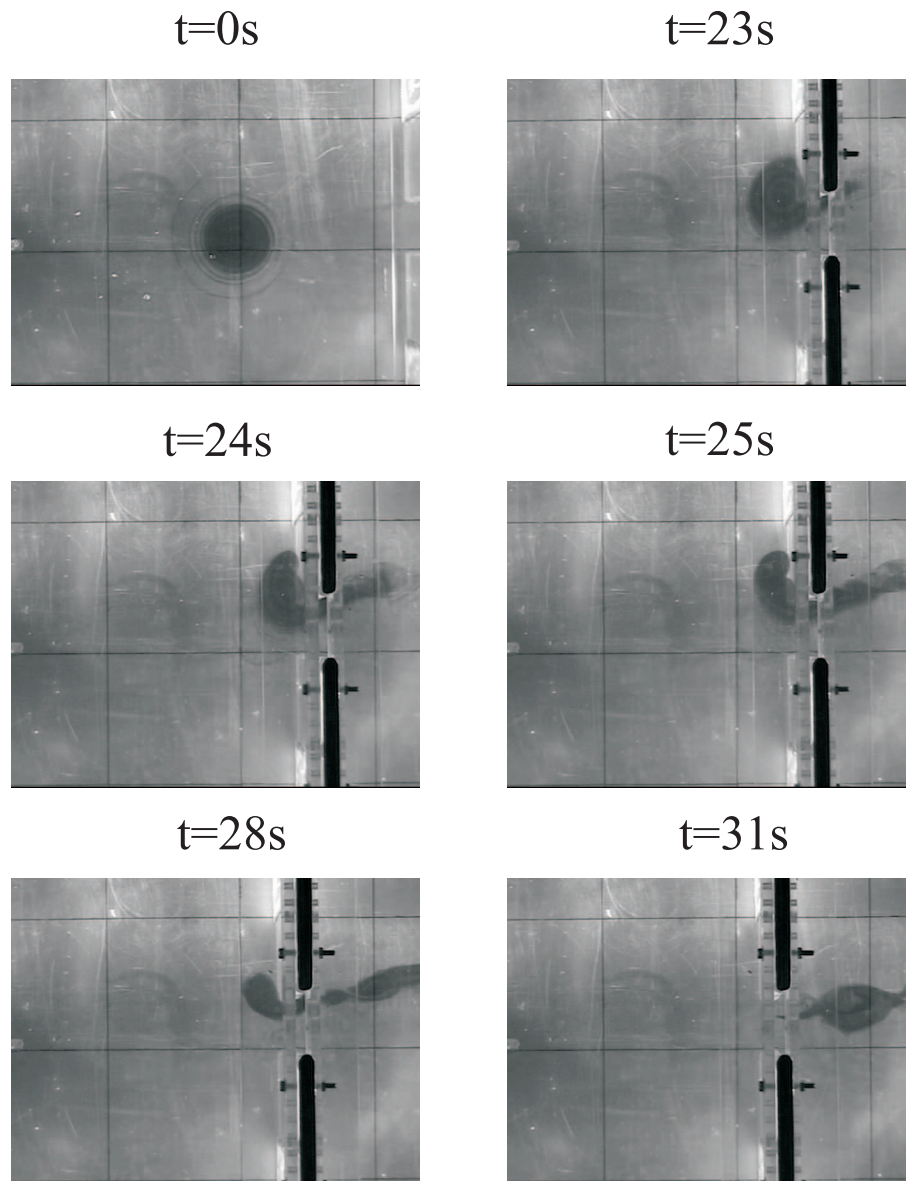


Figura 37. Experimento 2: igual que en la figura anterior con $\Gamma' \simeq 50$.

funciona entonces correctamente.

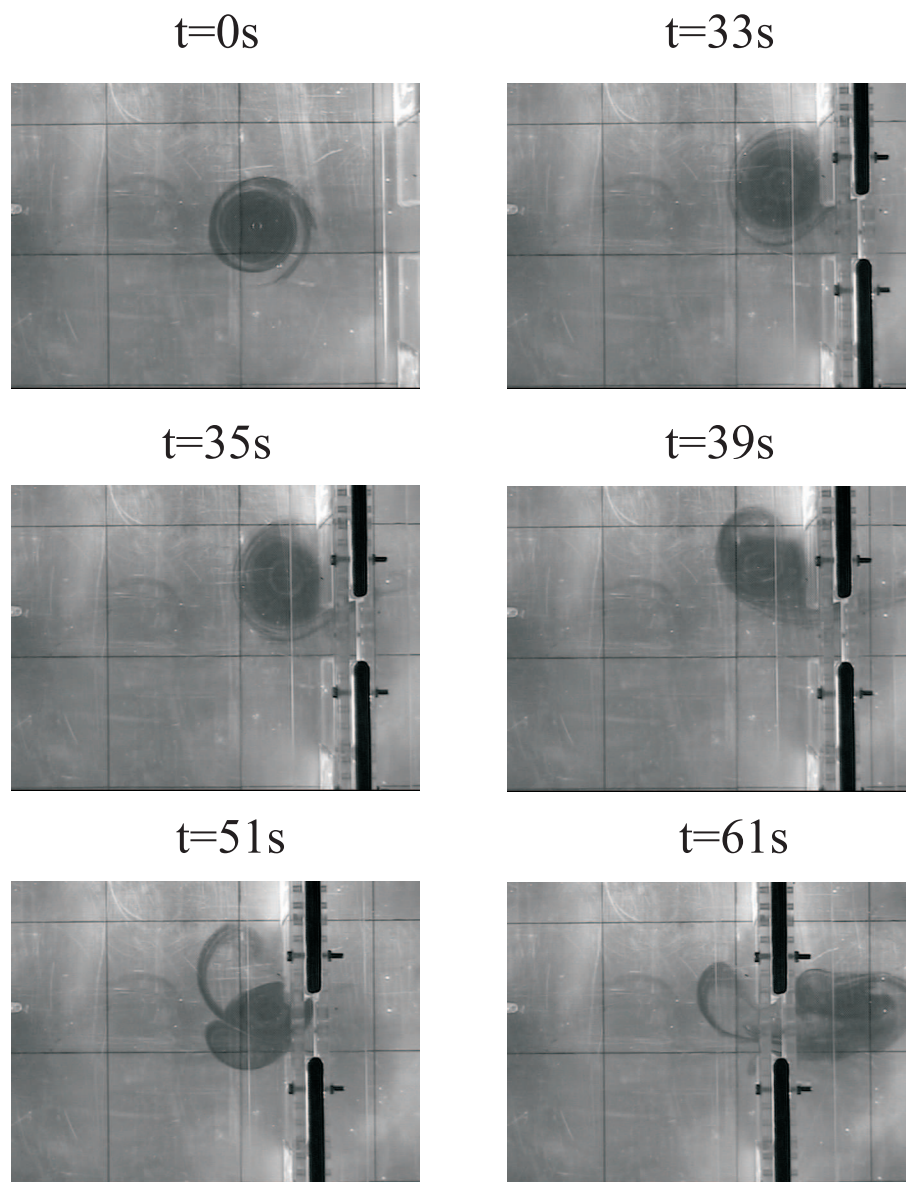


Figura 38. Experimento 3: igual que en la figura anterior con $\Gamma' \simeq 103$.

Capítulo VI

Conclusiones

Se utilizaron tres métodos para analizar el problema de un remolino advechado hacia un estrecho en una pared. Primero un modelo numérico con el cual se calculó la cantidad de vorticidad que pasa a través del estrecho. Posteriormente, se analizaron las salidas del modelo con métodos de sistemas dinámicos para estimar el transporte y la mezcla en el flujo. Por último se realizaron experimentos de laboratorio.

En el modelo numérico se observaron tres tipos de comportamiento del remolino cualitativamente diferentes: paso total, paso parcial y bloqueo total. El tipo de comportamiento depende del valor de los parámetros adimensionales $\Gamma' = \Gamma/(UR)$, $D' = D/R$ y $y'_0 = y_0/R$, de la siguiente manera:

- cuando Γ' aumenta es menos probable que el remolino pase
- cuando D' aumenta es más probable que el remolino pase
- cuando y'_0 aumenta es menos probable que el remolino pase.

El que sea menos probable que el remolino pase al aumentar Γ' está relacionado con el efecto de la pared sobre el remolino, ya que entre más intenso sea el remolino más

se va a desviar hacia un lado del estrecho. También se observó que la dependencia con respecto al ancho de la barrera es despreciable.

En cuanto al paso parcial y la filamentación del remolino se observó que sólo suceden cuando el remolino choca con la pared, lo cual está en acuerdo con los resultados de Johnson y McDonald (2004a). Por lo que la posibilidad de un paso parcial disminuye conforme D' aumenta.

Se encontraron las geometrías euleriana y lagrangiana para cuatro puntos del espacio de parámetros. La dependencia temporal del problema hizo que se tuviera que corregir la geometría euleriana para que sea similar a la lagrangiana, restando la velocidad del remolino al campo de velocidad. Al hacer esta corrección se encontró la geometría lagrangiana utilizando como aproximación los puntos de estancamiento de tipo ensilladura de la geometría euleriana.

En la geometría lagrangiana, la variedad estable para $t = 0$ tienen una forma característica que se observa para los cuatro diferentes casos. Existe una diferencia cuantitativa en esta variedad dependiendo del comportamiento del remolino. Los dos parámetros relevantes son el área del remolino rodeada por la variedad y el perímetro de la variedad dentro del remolino. Si este perímetro es nulo entonces no hay filamentación, mientras que el área parece estar asociada a la cantidad del remolino que se queda corriente arriba del estrecho.

Existe una relación entre un gradiente fuerte en forma de espiral en los mapas de tiempo de residencia y las variedades. De la relación entre la permanencia y la variedad estable al tiempo $t = 0$, se concluye que la variedad divide al flujo en regiones en donde las partículas:

- tarda poco en pasar por el estrecho
- tardan mucho en pasar por el estrecho

- nunca pasan por el estrecho.

Además, del cálculo de tiempos de residencia se concluye que la presencia de un remolino suficientemente fuerte puede hacer que fluido ambiente no pase por el estrecho.

La variedad inestable para un tiempo cercano al final de la simulación nos indica la mezcla y la filamentación; sin embargo, éstas son difíciles de cuantificar. Para esto se calcularon los ELTF de donde se observa que la mezcla es mayor conforme Γ' crece aunque para que esta ocurra entre el remolino y el fluido ambiente el remolino tiene que chocar con la barrera. El remolino es un *mezclador* en este flujo.

En el dispositivo experimental, el cambio de marco de referencia es una forma aceptable de simular una corriente en un canal. De los experimentos de laboratorio se puede concluir que la viscosidad puede cambiar el destino final del remolino pero que el modelo invíscido es una buena representación de lo que sucede antes de que la viscosidad empiece a jugar un papel determinante en la evolución del flujo que es cuando el remolino *choca* con alguna de las paredes.

VI.1 Trabajo futuro

Como trabajo futuro se van a realizar nuevos experimentos para observar el gradiente importante en el tiempo de residencia de las partículas y se van a hacer cálculos de los ELTF para las simulaciones numéricas, integrando hacia atrás en el tiempo

El campo de velocidad para los experimentos numéricos no está definido de forma única en las esquinas de la frontera sólida. Esto presenta varios problemas discutidos en el apéndice. Una pregunta que surge es: ¿Existe una configuración en la esquinas que no implique discontinuidad en el campo de velocidad y que no permita que las partículas entren?

Al calcular las variedades estables al tiempo $t=0$ para simulaciones de cuatro pun-

tos del espacio de parámetros se observa que el tipo de comportamiento parece estar relacionado con el área del remolino rodeada por la variedad. ¿Existe un área mínima del remolino encerrada por la variedad estable en el tiempo $t = 0$ para que haya un paso parcial?

En un flujo uniforme con un remolino en donde no hay un estrecho no existe una partícula hiperbólica. En el flujo estudiado aquí sí se encuentra una partícula hiperbólica. ¿De que depende la existencia y la intensidad de ésta partícula?

Para los casos de paso parcial y bloqueo total se observa una bifurcación de la partícula hiperbólica: inicialmente existe una y posteriormente existen dos o más. ¿Cómo se da esta bifurcación de partículas hiperbólicas?

Se propone, también, como trabajo a futuro utilizar un modelo numérico donde se incluya la viscosidad para comparar con los experimentos de laboratorio. Además de realizar mediciones con velocimetría por imágenes de partículas a lo largo de todo el experimento para poder cuantificar las diferencias con los modelos numéricos ya sea invíscido o viscoso.

Apéndice A

Validación del modelo

El modelo de vórtice en celda ha sido utilizado en varios experimentos numéricos anteriormente; sin embargo, para este problema se realizaron algunas modificaciones como son la colocación de un obstáculo sólido en el interior del dominio y el forzar un flujo uniforme. Para validar estas modificaciones se hicieron varias pruebas y se cuantificó el error. Se revisaron tres cosas: la presencia de un obstáculo dentro del dominio, el error por las condiciones de frontera laterales del dominio y la resolución.

A.1 La barrera

Se cuantifica el error debido a la barrera haciendo pruebas con un dipolo que choca contra un cuadrado, los cuales están centrados el uno con respecto al otro (figura 39).

La condición de frontera en el obstáculo es $\psi = \text{cte}$; sin embargo, existe una singularidad en las esquinas para el campo de velocidad. Si en la esquina la velocidad $\mathbf{u}$ tiene una componente hacia el obstáculo al interpolar esto permite que partículas entren, violando así la condición de impenetrabilidad (figura 40). Se exploran diferentes opciones para no violar esta condición en las esquinas. Finalmente se decidió tomar $\mathbf{u} = 0$. Esta opción convierte a las esquinas en puntos de estancamiento pero con ella no existe una

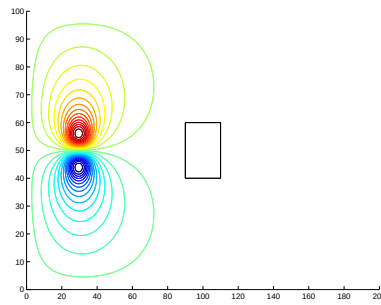


Figura 39. Dipolo contra un cuadrado. Se presentan las líneas de corriente para el dipolo y en el centro el cilindro cuadrado

discontinuidad en el campo de velocidad. El que no exista esta discontinuidad es importante ya que sino se generan oscilaciones de alta frecuencia al resolver las trayectorias de las partículas.

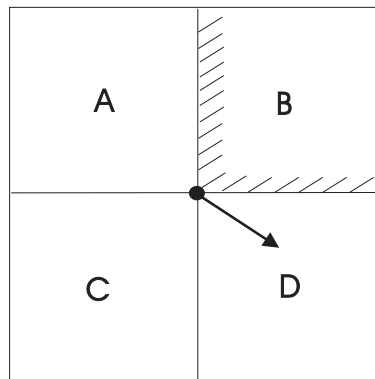


Figura 40. Diagrama de una esquina de la frontera sólida. La celda B es parte de la *tierra* y la otras son *fluido*. La esquina está en el centro y se muestra un vector de la velocidad. Con éste, partículas de la celda A podrían entrar a la barrera.

A.2 Dipolo contra un cuadrado

Ya que el problema es simétrico, el dipolo después de pasar al cilindro tiene que tener características similares a las que tenía antes. Se calcularon cinco características del dipolo antes y después del choque:

- forma

- velocidad
- dispersion de ψ contra ω
- distancia entre centros
- coordenada y de cada uno de los centros de los remolinos

En la figura A.2 se observa que en las cinco pruebas las diferencias son mínimas para un remolino que está del lado derecho y uno que está del lado izquierdo.

A.3 Fronteras abiertas

En las fronteras sólidas se utiliza la condición de deslizamiento libre ($\psi = \text{cte}$). En las paredes del lado izquierdo, viendo en la dirección de la corriente, la función de corriente se define como $\psi_{\text{sup}} = A$ y en las paredes del lado derecho como $\psi_{\text{inf}} = B$; donde A, B son constantes. En las fronteras abiertas del dominio se fuerza un flujo uniforme. Para lograr esto, si el dominio es de $n \times m$ celdas entonces

$$\psi_{0l} = \psi_{nl} = \frac{A - B}{m}l + B$$

para $l = 0, 1, \dots, m$. Esta condición deforma al remolino cerca de la frontera al forzar un flujo uniforme, como se observa en la figura A.3.

Para calcular el error debido a esta deformación se calcula de forma analítica la función de corriente para un remolino puntual en un canal seminfinito

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[(x - x_0)^2 + (y - 2nA - y_0)^2]^{1/2} \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \ln[(x - x_0)^2 + (y - 2nA + nA/|n| + y_0)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

que se obtuvo al sumar la contribución de un número infinito de imágenes. Los valores en

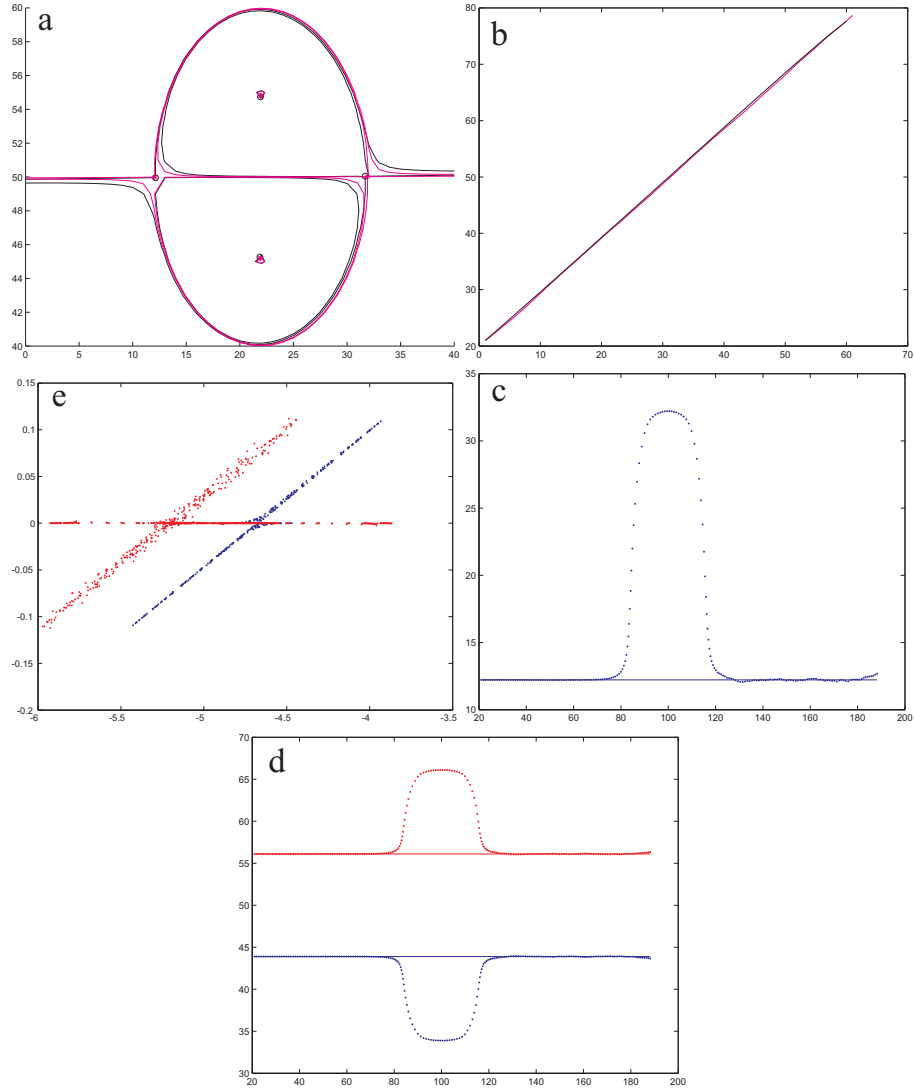


Figura 41. Pruebas a un dipolo contra un cilindro cuadrado. Se compara a) la geometría euleriana, b) la velocidad (gráfica de distancia contra tiempo) y c) la dispersión de ψ contra ω para un remolino del lado derecho del cilindro (azul) y otro del lado izquierdo (rojo), d) la distancia entre los centros a lo y e) la coordenada y de los centros a lo largo de la simulación.

la frontera de la ecuación (21) se utilizan para calcular los valores en el dominio para la función de corriente de un remolino de Rankine en un canal seminfinito. Posteriormente se compara con la del remolino deformado calculando el error relativo de la magnitud de la velocidad y la diferencia de su dirección (figura A.3).

Si el remolino se encuentra a una distancia grande de las fronteras abiertas entonces

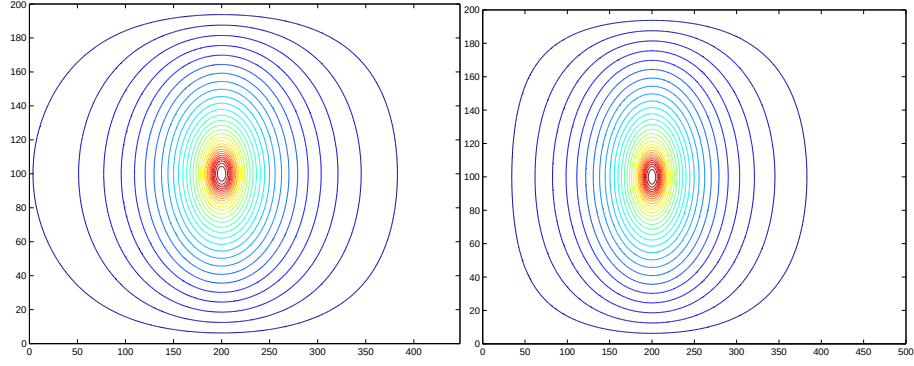


Figura 42. a) Función de corriente para el remolino en un canal seminfinito con la barrera en $x = 500$. b) Función de corriente para el remolino modificado por la condición de frontera en un canal con una barrera en $x = 500$. La frontera izquierda está en $x = 0$

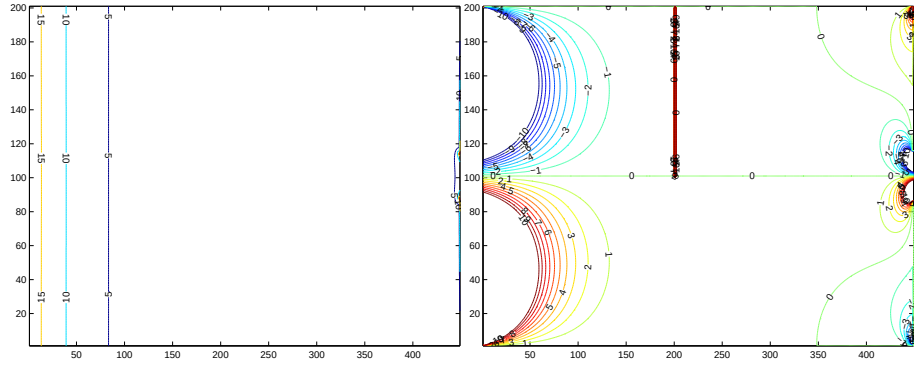


Figura 43. a) Mapa de error en la magnitud de la velocidad para los dos remolino. b) Diferencia en el ángulo de la velocidad para los dos remolinos.

el error cerca del mismo es pequeño. Por esta razón la posición inicial del remolino tiene que ser lejos de la frontera lateral, por lo que se trabaja con salidas del modelo donde esta condición se cumpla.

A.4 Resolución del modelo

Al aumentar la resolución el error numérico disminuye pero el tiempo de computo aumenta. Se busca una resolución donde el error numérico sea pequeño y el tiempo de computo sea razonable.

Se hacen cuatro experimentos con diferente resolución, para los cuales ya se utiliza

el problema del remolino advectado por una corriente uniforme en un canal infinito. El tamaño de la malla es de 875×250 , 700×200 , 525×150 y 350×100 correspondiente a un radio del remolino de 12.5, 10, 7.5 y 5 celdas, respectivamente. Los experimentos se hicieron para $\Gamma' = 2.3$ y $D' = 3$, un paso parcial. Se comparan las posiciones finales de los centros de los remolinos y el paso de vorticidad por el estrecho.

El error relativo máximo en el paso de vorticidad entre las simulaciones con $R = 7.5$ y $R = 12.5$ es de $\sim 4\%$; mientras que el error al final de las simulaciones es menor al 1%, por lo que se considera que $R = 7.5$ es adecuado para explorar el espacio de parámetros. Sin embargo, la distancia entre los centros de los remolinos al final de la simulación es de hasta tres veces el radio inicial del remolino normalizado, por lo que para los métodos de sistemas dinámicos se utiliza una alta resolución con $R = 12.5$. Se utilizan simulaciones de baja resolución para explorar el espacio de parámetros ya que las de alta resolución son muy costosas en términos del tiempo de cálculo.

Apéndice B

Geometrías de un remolino al lado de una pared

Se estudia el problema estacionario de un remolino al lado de una pared. Éste puede ser substituido por un dipolo en una corriente uniforme, siempre y cuando la velocidad de esta corriente sea igual a la velocidad de propagación del dipolo pero en dirección contraria.

B.1 Función de corriente

La función de corriente para un vórtice puntual que gira contrareloj y está centrado en el origen es

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (22)$$

donde Γ es la circulación del remolino, y r es la distancia radial desde el origen. Al hacer un cambio de coordenadas podemos reescribir (22) como

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Para un flujo uniforme en la dirección $-x$ la función de corriente es

$$\psi = -Uy$$

donde $U = cte > 0$ es la velocidad de la corriente.

Al colocar dos remolinos en $(0, a)$ y $(0, -a)$, tenemos, respectivamente

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y + a)^2}$$

donde el segundo remolino gira a favor de las manecillas del reloj.

Finalmente la función de corriente, para el flujo que se pretende estudiar aquí, es

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln \sqrt{x^2 + (y + a)^2} - \ln \sqrt{x^2 + (y - a)^2}) - Uy \quad (23)$$

Se sabe que la velocidad de propagación de un dipolo es $\frac{\Gamma}{2\pi d}$, donde d es la distancia entre los centros de los remolinos. De esta forma tenemos que $U = \frac{\Gamma}{4\pi a}$.

B.2 Campo de velocidades

El campo de velocidad del flujo se obtiene a partir de

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

De tal forma que a partir de (23) se obtiene que

$$u = \frac{\Gamma a}{\pi} \frac{x^2 - y^2 + a^2}{(x^2 + (y + a)^2)(x^2 + (y - a)^2)} - U \quad (24)$$

$$v = \frac{\Gamma a}{\pi} \frac{2xy}{(x^2 + (y+a)^2)(x^2 + (y-a)^2)}. \quad (25)$$

El campo de velocidad dado por (24) y (25) se grafica en la figura 44.

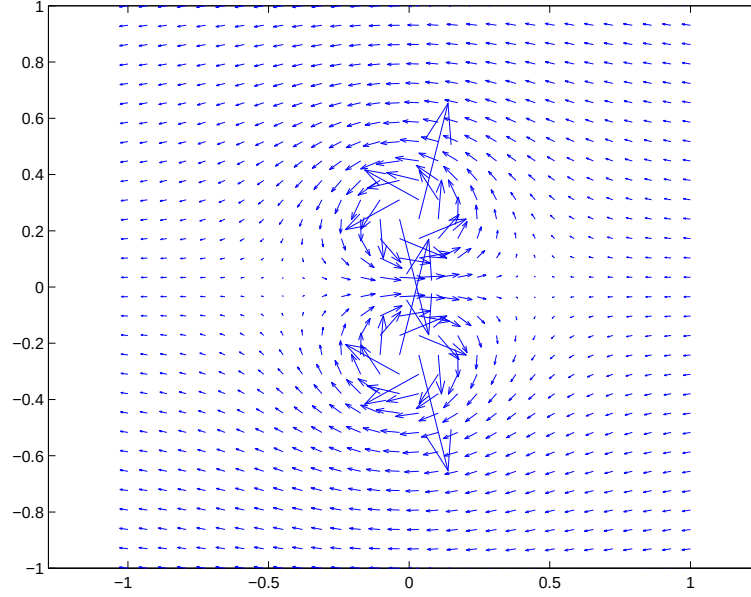


Figura 44. Campo de velocidades para un dipolo en una corriente uniforme. La corriente tiene una velocidad igual a la del dipolo pero en dirección opuesta.

B.3 Geometría del flujo

B.3.1 Puntos fijos

Como se trata de un flujo estacionario la geometría euleriana y la lagrangiana son idénticas. Para encontrar a los puntos fijos se resuelven las siguientes ecuaciones

$$\frac{\Gamma a}{\pi} \frac{x^2 - y^2 + a^2}{(x^2 + (y+a)^2)(x^2 + (y-a)^2)} - U = 0$$

$$\frac{\Gamma a}{\pi} \frac{2xy}{(x^2 + (y+a)^2)(x^2 + (y-a)^2)} = 0$$

Para las que se encuentran cuatro posibles soluciones

$$P_{12} = (\pm a\sqrt{3}, 0)$$

$$P_{34} = (0, \pm ia\sqrt{3})$$

Sin embargo, los dos últimos puntos no nos interesan ya que P_{34} son imaginarios.

B.3.2 Linealización alrededor de los puntos fijos

Definimos la matriz $\mathbf{M}$ como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

De tal forma que para el punto P_1 se tiene que

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\gamma}{\pi a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y para el punto P_2 que

$$M_2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\gamma}{\pi a^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B.3.3 Autovalores y autovectores de las matrices

Para el punto P_1 tenemos los autovalores:

$$\lambda_{11,12} = \pm \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\gamma}{\pi a^2},$$

cuyos autovectores son

$$\hat{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para el punto P_1 tenemos los autovalores

$$\lambda_{21,22} = \pm \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\gamma}{\pi a^2}$$

cuyos autovectores son

$$\hat{e}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya que para los dos puntos fijos $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, los dos puntos son hiperbólicos.

B.3.4 Variedades y retrato de fase

A continuación se presentan las gráficas de las variedades estables e inestables. Las variedades se calcularon colocando partículas cerca de los puntos fijos en las direcciones de compresión y estiramiento e integrando numéricamente la trayectoria. Para la variedad estable se integra hacia atrás en el tiempo. Para la inestable se integra hacia adelante en el tiempo. Para la integración se utilizó la rutina *ODE45* con una tolerancia de 10^{-12} .

Se presenta la geometría lagrangiana que consta de las variedades, las partículas hiperbólicas (PE tipo ensilladura) y las partículas elípticas (PE tipo centro). De esta forma se observa que para un remolino pegado a una pared existen dos partículas hiperbólicas.

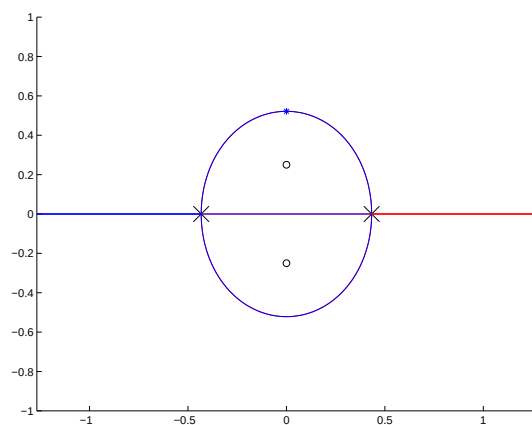


Figura 45. Geometría lagrangiana del flujo. Las cruces indican las partículas hiperbólicas, los círculos indican las partículas elípticas y las líneas son las variedades.

Referencias

- Abascal, A. J., Sheinbaum, J., Candela, J., Ochoa, J., y Badán, A. (2003). Analysis of flow variability in the Yucatan Channel. *Journal of Geophysical Research*, 108(C12):3381.
- Aref, H. (2002). The development of chaotic advection. *Physics of Fluids*, 14(4):1315–1325.
- Carnevale, G. F., Velasco Fuentes, O. U., y Orlandi, P. (1997). Inviscid dipole-vortex rebound from a wall or coast. *Journal of Fluid Mechanics*, 351:75–103.
- Cenedese, C. (2002). Laboratory experiments on mesoscale vortices colliding with a seamount. *Journal of Geophysical Research*, 107(C63053):doi:10.1029/2000JC000599.
- Cenedese, C., Adduce, C., y Fratantoni, D. M. (2005). Laboratory experiments on mesoscale vortices interacting with two islands. *Journal of Geophysical Research*, 110(C09023):doi:10.1029/2004JC002734.
- Christiansen, J. P. (1973). Numerical simulations of hydrodynamics by method of point vortices. *Journal of Computational Physics*, 13(3):363–379.
- d’Odivio, F., Fernández, V., Hernández-García, E., y López, C. (2004). Mixing structures in the Mediterranean Sea from finite-size Lyapunov exponents. *Geophysical Research Letters*, 31(L17203):doi:10.1029/2004GL020328.

- Fratantoni, D. M., Johns, W. E., y Townsend, T. (1995). Rings of the North Brazil Current: Their structure and behavior inferred from observations and a numerical simulation. *Journal of Geophysical Research*, 100:10633–10654.
- Goni, G. J. y Johns, W. E. (2003). *Synoptic study of warm rings in the North Brazil Current retroflection region using satellite altimetry*. En: G. J. Goni y P. Malanotte-Rizzoli (eds.). *Interhemispheric Water Exchange in the Atlantic Ocean*. Volumen 68 de *Elsevier Oceanographic Series*, Elsevier, Amsterdam, páginas 335–356.
- Guerrero Moreno, L. (2005). Identificación y seguimiento de remolinos en el Mar Caribe. Tesis de Maestría, CICESE, 87 pp.
- Haller, G. (2000). Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. *Chaos*, 10(1):99–108.
- Haller, G. y Poje, A. C. (1998). Finite time transport in aperiodic flows. *Physica D*, 119:352–380.
- Johns, W. E., Zantopp, R. J., y Goni, G. J. (2003). Synoptic study of warm rings in the North Brazil Current retroflection region using satellite altimetry . En: G. J. Goni y P. Malanotte-Rizzoli (eds.). *Interhemispheric Water Exchange in the Atlantic Ocean*. Volumen 68 de *Elsevier Oceanographic Series*, Elsevier, Amsterdam, páginas 411–441.
- Johnson, E. R. y McDonald, N. R. (2004a). The motion of a vortex near a gap in a wall. *Physics of fluids*, 16(2):462–469.
- Johnson, E. R. y McDonald, N. R. (2004b). The motion of a vortex near two circular cylinders. *Proceedings of the Royal Society of London Series a-Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 460:939–954.

- Murphy, S. J. y Hulburt, H. E. (1999). The conectivity of eddy variability in the Caribbean Sea, the Gulf of Mexico, and the Atlantic Ocean. *Journal of Geophysical Research*, 104(C1):1431.
- Ottino, J. M. (1989). *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1era edición.
- Shadden, S. C., Lekien, F., y E., M. J. (2005). Definition of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D*, 212:271–304.
- Simmons, H. L. y Nof, D. (2000). Islands as eddy splitters. *Journal of Marine Research*, 58(6):919–956.
- Simmons, H. L. y Nof, D. (2002). The squeezing of eddies through gaps. *Journal of Physical Oceanography*, 32(1):314–335.
- Trieling, R. R., Linssen, A. H., y van Heijst, G. J. F. (1998). Monopolar vortices in an irrotational annular shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 360:273–294.
- Velasco Fuentes, O. U. (2001). Chaotic advection by two interacting finite-area vortices. *Physics of Fluids*, 13:901–902.
- Velasco Fuentes, O. U. (2005). Vortex filamentation: its onset and its role on axisymmetrization and merger. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 40:23–42.
- Velasco Fuentes, O. U. y van Heijst, G. J. F. (1994). Experimental study of dipolar vortices on a topographic beta plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 259:79–106.
- Zavala Sansón, L. y van Heijst, G. J. F. (2000). Interaction of barotropic vortices with

coastal topography: Laboratory experiments and numerical simulations. *Journal of Physical Oceanography*, 30(9):2141–2162.

Zavala Sansón, L., van Heijst, G. J. F., y Janssen, F. J. J. (1999). Experiments on barotropic vortex-wall interaction on a topographic beta plane. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 104(C5):10917–10932.