

TESIS defendida por
Pedro Rosales Grano
y aprobada por el siguiente comité:

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres
Director de tesis

Dr. José Luis Ochoa de la Torre
Miembro del comité

Dr. Federico Graef Ziehl
Miembro del comité

Dr. Jaak Monbaliu
Miembro del comité

Dr. Luis Zavala Sansón
Coordinador del posgrado en
Oceanografía Física

Dr. Raúl Ramón Castro Escamilla
Director de Estudios de Posgrado

Mayo de 2006

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

**INTERACCIÓN ENTRE OLAS Y CORRIENTES EN AGUAS DE
PROFUNDIDAD FINITA: EFECTOS EN LOS ESFUERZOS CON EL
FONDO.**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

PEDRO ROSALES GRANO

Ensenada, Baja California, México. Mayo de 2006.

RESUMEN de la tesis de Pedro Rosales Grano, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California, México. Mayo de 2006.

INTERACCIÓN ENTRE OLAS Y CORRIENTES EN AGUAS DE PROFUNDIDAD FINITA: EFECTOS EN LOS ESFUERZOS CON EL FONDO.

Resumen aprobado por:

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres

Director de tesis

Se investigaron los cambios que se producen en los esfuerzos con el fondo, al considerar olas que se propagan sobre un campo de corrientes no estacionario e inhomogéneo, en aguas de profundidad finita. Se utilizó un sistema que acopla un modelo espectral de olas y un modelo hidrodinámico de tipo barotrópico, forzado por el viento y la marea. El sistema se aplicó en el Mar de Norte mediante 4 mallas anidadas. En la de más alta resolución, frente a la costa de Bélgica se realizaron experimentos numéricos en modo desacoplado y acoplado, transfiriendo en tiempo y espacio la elevación de la superficie libre y las componentes horizontales de la velocidad del modelo hidrodinámico al modelo de olas. Para calcular el término de disipación de la energía por fricción con el fondo en el modelo de olas, se utilizó una formulación propuesta durante el experimento JONSWAP, (Hasselmann *et al.*, 1973) y otra desarrollada por Christoffersen y Jonsson (1985) (CJ85), la diferencia fundamental entre éstas, es que la formulación JONSWAP no considera el proceso de interacción entre las olas y las corrientes, mientras que la formulación CJ85 lo hace explícitamente. Los resultados de los experimentos numéricos se compararon en dos estaciones, entre ellos y con las mediciones de oleaje disponibles para los días 5 a 20 de octubre de 1997. Durante el periodo de análisis, se presentaron dos eventos con condiciones de tormenta, asociados con campos de viento provenientes del suroeste para el primero y noroeste para el segundo. Para realizar las comparaciones se consideró como referencia un experimento desacoplado que utiliza la formulación JONSWAP. Las diferencias en los esfuerzos entre el experimento de referencia y un experimento acoplado que utiliza la formulación JONSWAP, estuvieron asociadas a las variaciones del nivel del mar producidas por la marea. Cuando se consideró el proceso de interacción olas-corrientes a través de la inclusión de la formulación CJ85, los esfuerzos máximos fueron mayores a los calculados en el experimento de referencia. Los resultados mostraron que el uso de la formulación que considera el proceso de interacción olas-corrientes en el término de disipación de energía del modelo de olas, tiene un efecto significativo en la determinación de los esfuerzos en el fondo. En general los esfuerzos se subestiman cuando se calculan utilizando la formulación JONSWAP.

Palabras clave: *fricción con el fondo, olas, corrientes, modelos acoplados.*

ABSTRACT of the thesis of Pedro Rosales Grano, presented as partial requirement to obtain the degree of DOCTOR OF SCIENCE in PHYSICAL OCEANOGRAPHY. Ensenada, Baja California, México. May of 2006.

WAVE-CURRENTS INTERACTION IN COASTAL WATERS: EFFECTS ON THE
BOTTOM SHEAR STRESS.

Computer simulation of wave and current fields in the North Sea are performed with a coupled model system to study the influence of wave-current interactions on the bottom shear stress in coastal waters. A third generation wave spectral model is coupled with a tide-surge model which provides current and water level information, to take into account the current field and their interactions with the waves in order to calculate the bottom stress. Two different expressions for bottom friction are used, the simple expression derived from the JONSWAP experiment (Hasselmann *et al.*, 1973), and the expression given by Christoffersen y Jonsson (1985), which takes into account wave-current interaction at the bottom. The coupled model system is applied to four nested grids to reach a fine spatial resolution near the Belgium coast. The results from coupled and uncoupled numerical experiments are compared with measurements of waves taken during October of 1997, at two stations where water depth is in average 13.2m and 11.9m. A couple of events of moderate to high waves are analyzed: one from 7 to 11 October with significant waves up to 3.2m and another one from 12 to 15 October with significant wave values up to 3.8m. Those two events are associated with different wind regimes, SW winds for the first period and NW for the second one. The calculations of bottom shear stress when taking into account wave-current interactions are compared with reference runs where only waves are considered to calculate the energy dissipation at the bottom. Small differences on bottom shear stress results are observed mainly related to the Doppler effect when coupled and uncoupled runs using the JONSWAP expression were compared. However, when wave-current interactions are taken into account using the expression of Christoffersen and Jonsson, the calculated maximum bottom stress is usually doubled for coupled model runs compared to the reference runs results. The results clearly show that the formulation of the bottom friction dissipation that accounts for the effect of wave current interaction has quite a significant effect on the determination of the bottom shear stress.

Key words: *Bottom friction, Waves, Currentes, Coupling models.*

Dedicatoria

A mi esposa Rosa

A mis hijos Pedro y Lulú

A la memoria de mi padre

Agradecimientos

- Al pueblo de México por la beca otorgada a través del CONACYT y de la oficialía mayor de la SEP.
- Al Instituto Tecnológico de Guaymas por el permiso otorgado para la realización del programa doctoral.
- A los investigadores del DOF por su decidido apoyo.
- A mi director Dr. Francisco Javier Ocampo Torres y a mi comité de tesis formado por los doctores: José Luis Ochoa de la Torre, Federico Graef Ziehl y Jaak Monbaliu.
- Al proyecto México–Bélgica *Wave–current interactions in shallow waters* (CONACYT, Bélgica–FNRS J200.760/2003), por el apoyo durante mi estancia en la U.K. de Leuven.
- Esta tesis representa una contribución al proyecto “Análisis del intercambio entre el océano y la atmósfera (intOA) mediante mediciones directas y observaciones remotas” (SEP-2003-C02-44718), CONACYT, como parte del apoyo para la investigación básica.
- A los doctores Pedro Osuna y Roberto Padilla por su amistad, asesoría y comentarios.
- A mis amigos y compañeros de generación en especial a Gilberto y David.

Índice	Pag.
I. Introducción	1
I.1. Antecedentes	3
I.2. Objetivo	6
II. Los modelos numéricos	8
II.1. El modelo WAM ciclo 4 (WAMC4)	8
II.2. El modelo hidrodinámico (HD)	13
II.3. El modelo de capa límite (CJ85)	16
III. Metodología	28
III.1. Mallas numéricas	28
III.2. Información meteorológica	31
III.3. Experimentos numéricos	32
IV. Resultados y discusiones	36
IV.1. Experimentos I y II	36
IV.2. Experimentos I y III	39
IV.3. Experimentos I y IV	47
IV.4. Experimentos II y IV	53
IV.5. Experimentos III y IV	54
V. Conclusiones	60
Referencias	63
A. Definición de parámetros estadísticos	67

Índice de figuras

Pag.

1.	Área de estudio y batimetría (profundidades en metros), se muestran las cuatro mallas utilizadas. El cuadro exterior representa la malla Gruesa y los interiores (del más grande al más pequeño) las mallas Local1, Local2 y Fina, esta última es la considerada en este estudio. De la malla Gruesa se obtuvieron condiciones de frontera para la malla Local1 y así sucesivamente hasta la malla Fina.	29
2.	Batimetría y localización de las estaciones Westhinder (WHI) y Bol Van Heist (BVH). Las profundidades están dadas en metros.	31
3.	Condiciones prevalecientes de viento durante el periodo de simulación, los datos de viento se obtuvieron de la oficina meteorológica del Reino Unido (UKMO) y la base de datos se extrajo de la estación WHI.	33
4.	Series de tiempo de a) H_s y b) T_{m02} para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos I y II respectivamente	37
5.	Series de tiempo de diferencias de H_s (ΔH_s) y T_{m02} (ΔT_{m02}) entre el experimento I y el experimento II (Exp. II - Exp. I), en las estaciones WHI (a y b) y BVH (c y d).	40
6.	Series de tiempo de τ para a) estación WHI, y c) estación BVH, experimento I (línea roja) y experimento II (línea azul). Diferencias de esfuerzos en el fondo ($\Delta\tau$) entre los experimentos II y I para b) estación WHI y d) estación BVH	41
7.	Series de tiempo de a) H_s y b) T_{m02} para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos I y III respectivamente	42
8.	Series de tiempo de τ_{\max} (línea roja), $\bar{\tau}$ (línea negra) para el experimento III y τ (línea azul) para el experimento I, en las estaciones WHI (panel superior) y BVH (panel inferior).	44

Índice de figuras (continuación)

Pag.

9. Distribución espacial de H_s (código de colores y contornos), dirección promedio de las olas (vectores en negro) y condiciones prevalecientes de viento en la estación WHI (vectores en azul). Los paneles de la izquierda representan condiciones típicas para viento suroeste a las 09:00, 12:00 y 18:00 horas de octubre 9, mientras que los de la derecha corresponden a condiciones de viento noroeste a las 15:00, 18:00 y 21:00 horas de octubre 13. 45
10. Campos de diferencias de esfuerzos ($\Delta\tau$) entre el experimento III y el experimento I, para condiciones de viento suroeste (paneles de la izquierda) y noroeste (paneles de la derecha). Las fechas y horas seleccionadas son las mismas que las de la figura 9. 46
11. Series de tiempo de a) H_s y b) T_{m02} para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos I y IV respectivamente. 49
12. Series de tiempo de τ_{\max} (línea roja), $\bar{\tau}$ (línea negra) para el experimento IV y τ (línea azul) para el experimento I, en las estaciones WHI (panel superior) y BVH (panel inferior). 50
13. Campos de diferencias de esfuerzos ($\Delta\tau$) entre el experimento IV y el experimento I, para condiciones de viento suroeste (paneles de la izquierda) y noroeste (paneles de la derecha). Las fechas y horas seleccionadas son las mismas que las de la figura 9. 51
14. Series de tiempo de a) H_s y b) T_{m02} para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos III y IV respectivamente. 54
15. Series de tiempo de τ_{\max} en las estaciones WHI (panel superior) y BVH (panel inferior), para el experimento III (línea roja) y para el experimento IV (línea negra). 55
16. Campos de diferencias de esfuerzos ($\Delta\tau$) entre el experimento IV y el experimento III, para condiciones de viento suroeste (paneles de la izquierda) y noroeste (paneles de la derecha). Las fechas y horas seleccionadas son las mismas que las de la figura 9. 57

Índice de tablas

Pag.

1.	Cobertura geográfica, resolución y pasos de tiempo para los términos advectivos de los modelos WAMC4 y HD para las mallas de cálculo utilizadas en este trabajo, el paso de tiempo para los términos fuente del WAMC4 fue de 10min, excepto en la malla fina donde fue de 5min. Los datos para la construcción de las batimetrías son los mismos que los utilizado en Osuna y Monbaliu (2004).	30
2.	Localización y profundidad media de las estaciones mostradas en la figura 2. Los valores de profundidad corresponden al nodo más cercano de la malla de resolución fina.	31
3.	Experimentos numéricos. Desacoplado significa sin intercambio de información entre el WAMC4 y el HD. Acoplado significa que el HD transfiere η , u y v al WAMC4.	34

I. Introducción

Una de las suposiciones que se hacen para simplificar las teorías clásicas de olas es considerar que éstas se propagan sobre un medio en reposo, es decir los únicos movimientos del agua son producidos por las velocidades orbitales, esta situación rara vez se presenta en el océano, generalmente se tienen campos de corrientes, generados por el viento o de marea que interactúan con las olas. El problema de la propagación de las olas sobre un campo de corrientes es complicado desde el punto de vista matemático, físicamente se trata de ondas que se propagan en un medio inhomogéneo, dispersivo, disipativo, anisotrópico y en movimiento (Jonsson, 1990). Las escalas de tiempo y espacio asociadas con las corrientes normalmente son muy grandes (del orden de horas y kilómetros) comparadas con las asociadas a las olas (del orden de segundos y decenas de metros), lo que implica que la corriente pueda considerarse estacionaria con respecto al movimiento producido por las olas. Adicionalmente la magnitud y la dirección de la corriente puede variar, principalmente debido a la marea o el esfuerzo del viento y en aguas someras por la fricción con el fondo.

Son varios los mecanismos físicos mediante los cuales se manifiesta la interacción entre las olas y las corrientes, Wolf y Prandle (1999) mencionan que las corrientes pueden ser afectadas por las olas: 1) a través del tensor de radiación (Longuet-Higgins y Stewart, 1964), el exceso de flujo de momento debido a la presencia de las olas genera transporte de masa que interactúa con las corrientes inducidas por el viento o la marea, este efecto es más notorio cerca de la costa. 2) mediante el coeficiente de arrastre superficial asociado al viento que se modifica en función de la edad de la ola, afectando la transferencia de momento del viento a la superficie del mar que finalmente contribuirá en la generación de corrientes. 3) y mediante la fricción con el fondo que experimenta una corriente y que se modifica con la presencia de las olas.

Las corrientes afectan las olas: 1) influyendo en los procesos de generación (el

área de generación efectiva cambia en presencia de la corriente) y propagación de las olas (inducen refracción). 2) modificando la frecuencia de las olas a través del efecto Doppler, se presenta modulación de la frecuencia absoluta por corrientes no estacionarias y modulación de la frecuencia intrínseca por propagación de las olas sobre campos de corrientes con gradientes espaciales. 3) incrementando la pendiente, cuando las olas viajan en dirección opuesta a la corriente, la longitud de onda se reduce y la altura se incrementa debido a la conservación de acción. 4) modificando el esfuerzo en el fondo generado por las velocidades orbitales de las olas. Este último efecto es el que se analiza con más detalle en el presente trabajo.

En las regiones costeras y sobre la plataforma continental, el movimiento de partículas inducido por las olas ocurre en toda la columna de agua. Las velocidades orbitales de las olas generan esfuerzos en el fondo y una capa límite turbulenta (CLTO), la magnitud de estas velocidades cambia debido a variaciones en la altura de la columna de agua asociadas a la marea. Por otro lado las corrientes también generan esfuerzos en el fondo y su respectiva capa límite turbulenta (CLTC). Cuando hay olas y corrientes actuando simultáneamente sobre el fondo, los esfuerzos se modifican debido a la interacción que existe entre el movimiento de las partículas inducido por las olas y las corrientes, esta interacción afecta la dinámica de la capa límite turbulenta, la cual juega un papel importante en la disipación de la energía y en la predicción de patrones de circulación costeros. La rugosidad del fondo también contribuye a modificar la turbulencia en la capa límite.

En un ambiente donde interactúan olas y corrientes, la dinámica del flujo en la capa límite del fondo está gobernada por: el gradiente vertical de las velocidades orbitales asociado a las olas; el gradiente vertical de la velocidad de la corriente; la rugosidad del fondo; la profundidad del agua; y la dirección relativa entre la corriente y la propagación del oleaje. El flujo total en la capa límite turbulenta en el fondo es resultado de una

interacción complicada entre las olas y las corrientes por la influencia del esfuerzo con el fondo.

Para explicar la dinámica que se presenta en un ambiente somero donde interactúan olas y corrientes es común dividir el flujo en dos capas: a) una capa cercana al fondo, dominada por la acción de las olas. La CLTO debido a la naturaleza oscilatoria de las velocidades asociadas a las olas, tiene aproximadamente la mitad del periodo de una ola para desarrollarse, por lo que su ancho es del orden de centímetros, entonces el gradiente de velocidad en la CLTO es intenso, así como la turbulencia y el esfuerzo cortante generado, y b) una capa del orden de metros dominada por la corriente (generada por la marea o el viento).

En la CLTC el gradiente vertical de velocidad y por lo tanto la turbulencia y el esfuerzo cortante son menores que los generados en la CLTO para velocidades del mismo orden de magnitud. La dinámica de la capa límite turbulenta generada por la acción combinada de olas y corrientes regula la pérdida de energía del oleaje por fricción con el fondo.

Un aspecto importante de incluir el proceso de interacción olas-corrientes en el cálculo de los esfuerzos en el fondo, es que estos están directamente relacionados con el movimiento de los sedimentos, no solamente en las playas, también en zonas de la plataforma continental, donde generalmente se depositan productos de dragado, también ocurre que durante eventos de huracanes gran cantidad de sedimentos que forman las playas son transportados hacia zonas más profundas. El destino de estos sedimentos, si serán o no suspendidos, depende de la magnitud de los esfuerzos en el fondo.

I.1. Antecedentes

Se han realizado diversos estudios teóricos para tratar de explicar las interacciones entre las olas y las corrientes. La interacción olas-corrientes bajo condiciones ideales fue revisada por Jonsson (1990), entre los mecanismos de interacción se encuentra la

refracción de olas por corrientes y la generación de olas de altura extraordinaria, no incluye los efectos de la interacción olas-corrientes con estructuras ni con el fondo marino. Davies y Lawrence (1994) al estudiar la interacción entre el flujo generado por el viento y la turbulencia asociada con las olas, encontraron cambios significativos en la amplitud y la fase de la marea en zonas someras, como consecuencia del incremento de los efectos de la fricción con el fondo. Se han propuesto varios modelos para estudiar la dinámica de la CLTO y la pérdida de energía por fricción con el fondo. Malarkey y Davies (1998), los clasifican en modelos con coeficiente de viscosidad turbulenta invariantes con respecto al tiempo y en modelos que relacionan el esfuerzo promedio con el gradiente vertical de velocidad a través de una escala característica de longitud (distancia que viajan remolinos turbulentos antes de colisionar con otros). Dentro de los modelos con coeficientes de viscosidad turbulenta que no dependen del tiempo y que consideran el proceso de interacción olas-corrientes, están los de Grant y Madsen (1979) (GM79) y Christoffersen y Jonsson (1985) (CJ85), estos proponen una forma específica del coeficiente de viscosidad turbulenta. El modelo propuesto por GM79 tiene algunas desventajas con respecto al CJ85, como el suponer una velocidad ficticia de referencia y utilizar cantidades que no tienen una interpretación física. El modelo CJ85 proporciona soluciones analíticas que son relativamente fáciles de implementar en la computadora y requieren poco tiempo de cálculo. El uso operacional de la formulación CJ85 requiere de su implementación en un modelo de olas que intercambie información con un modelo de corrientes. El intercambio de información debe realizarse a través del término de pérdida de energía por fricción con el fondo del modelo de olas, la información a transferir son las componentes horizontales de la velocidad de la corriente y la variación de profundidad del modelo de corrientes al modelo de olas, otros términos que deben transferirse son el tensor de radiación y la rugosidad de la superficie libre modificada por las olas. Este es precisamente el tema de interés en ésta tesis.

Pocos modelos consideran la interacción entre las olas y las corrientes. En años recientes se han realizado esfuerzos para desarrollar modelos espectrales de olas, que incorporen las variaciones en el nivel del mar y las corrientes generadas por la marea o el viento. Durante el proyecto EU-MAST III PROMISE (PRE-Operational Modelling In the Seas of Europe) (Monbaliu *et al.*, 2000; Prandle, 2000; Ozer *et al.*, 2000), se modificó el modelo de olas WAM ciclo 4 (Komen *et al.*, 1994) (WAMC4 de aquí en adelante), que predice la evolución espacial y temporal del espectro de olas, para aplicarse en aguas someras (originalmente fue diseñado para aplicaciones en aguas profundas), se le implementaron procesos físicos que modifican la propagación de la energía de las olas en aguas de profundidad finita. La versión del WAMC4 modificada fue acoplada a un modelo hidrodinámico bidimensional que resuelve las ecuaciones de aguas someras (HD de aquí en adelante) predice en espacio y tiempo la elevación de la superficie libre y las componentes horizontales de la velocidad de las corrientes (Van den Eynde *et al.*, 1995), generando un sistema que relaciona los dos modelos numéricos mediante un esquema de acoplamiento que permite un intercambio eficiente de información. Ozer *et al.* (2000) describen el desarrollo del sistema y reportan una serie de experimentos en el Mar del Norte acerca de la sensibilidad de ambos modelos al acoplamiento. Adicionalmente la formulación CJ85 se incluyó en la versión modificada del WAMC4. Ozer *et al.* (2000) sugieren que el WAMC4 modificado utilizando la formulación CJ85 para calcular la pérdida de energía por fricción con el fondo requiere de verificación.

El uso de modelos acoplados de olas y corrientes ha sido reportado por Choi *et al.* (2003) quienes aplican un sistema acoplado en el Mar Amarillo para estudiar las interacciones entre las mareas y la elevación del nivel del mar producida por el viento y las olas durante el monzón de invierno de 1983, estos autores encuentran diferencias significativas entre los resultados del sistema acoplado y el desacoplado (sin intercambio de información entre los modelos), sugieren el uso de modelos hidrodinámicos tridimen-

sionales y encuentran que cuando se considera el acoplamiento, las velocidades y los coeficientes de arrastre en el fondo se incrementan significativamente en aguas someras de hasta 50m de profundidad. Xie *et al.* (2003) acoplan el modelo espectral de olas WAMC4 con el modelo POM (Princeton Ocean Model), para estudiar numéricamente la interacción entre las olas y las corrientes a través de los esfuerzos en la superficie y en el fondo. Los resultados del estudio mostraron la importancia de incorporar los efectos de las olas en el cálculo del esfuerzo del viento sobre la superficie del mar y de las corrientes en general. Se encontró que los modelos que calculan la elevación del nivel del mar durante las tormentas, sin tomar en cuenta el acoplamiento con las olas, subestiman dicha elevación, pues no consideran la acumulación de agua generada por el oleaje.

En este trabajo se utiliza el sistema acoplado descrito por Ozer *et al.* (2000). El sistema ha sido empleado por Osuna y Monbaliu (2004) para estudiar la interacción entre las olas, mareas y la elevación del nivel del mar producida por el viento, sus resultados principales mostraron que las diferencias relativas entre las alturas significantes y los periodos promedio calculados por el modelo desacoplado con respecto al acoplado fueron del orden de 3% y 20% respectivamente.

I.2. Objetivo

Los modelos tradicionales de olas no consideran el proceso de interacción entre las olas y las corrientes. Para incluirlo una alternativa es acoplar los modelos de olas a modelos que describen el campo de corrientes y el de elevación de la superficie libre, de tal forma que se intercambie información en tiempo y espacio entre ambos. Haciendo uso de modelos acoplados, este trabajo tiene como propósito determinar los cambios que se producen en los parámetros integrales de las olas (altura y periodo) y en los esfuerzos en el fondo como consecuencia de la interacción entre las olas y las corrientes en aguas de profundidad finita. Se realiza un análisis cualitativo y cuantitativo mediante

comparaciones entre los resultados de experimentos numéricos y con mediciones. Al modelo de olas del sistema acoplado se le implementa la formulación CJ85 en el término de pérdida de energía por fricción con el fondo para considerar el efecto de la interacción olas-corrientes. Como referencia para las comparaciones, se utilizan los resultados del sistema desacoplado usando la formulación JONSWAP en el término que describe la pérdida de energía por fricción con el fondo del modelo de olas.

II. Los modelos numéricos

En esta sección se describen los modelos numéricos utilizados, en primer lugar el modelo espectral de olas (WAMC4) modificado para aplicaciones en aguas someras, luego el modelo hidrodinámico (HD) para determinar el campo de corrientes y la elevación de la superficie libre del mar, información que se transfiere al modelo de olas durante el acoplamiento, y la formulación CJ85 para calcular la pérdida de energía por fricción con el fondo considerando la interacción entre las olas y las corrientes.

II.1. El modelo WAM ciclo 4 (WAMC4)

El primer esquema de predicción operacional de oleaje fue desarrollado por Sverdrup y Munk (1947), quienes utilizaron ecuaciones empíricas para predecir el oleaje local y el de tormentas lejanas. Desde entonces se ha realizado una gran cantidad de investigaciones. Entre los resultados más relevantes está la introducción del espectro de energía de las olas por Pierson *et al.* (1955) y el uso de este concepto en el trabajo de Gelci *et al.* (1957), que consistió en la predicción de la evolución del campo de olas mediante la ecuación de balance de energía, en ese tiempo los procesos físicos que regulan la evolución de espectro estaban pobremente entendidos por lo que Gelci y colaboradores utilizaron expresiones empíricas para calcularlos. Los procesos de mayor importancia que regulan la evolución del espectro en aguas profundas son: el suministro de energía por el viento, el intercambio de energía entre componentes espectrales debido a interacciones no lineales y la disipación de la energía por rompiente. Phillips (1957) y Miles (1957), trabajando independientemente desarrollaron teorías para explicar el suministro de energía del viento a las olas. Hasselmann (1962) explica la transferencia de energía entre componentes espectrales mediante interacciones no lineales, la importancia de este fenómeno en el desarrollo del espectro quedó manifiesta durante el Joint North Sea Wave Project, (JONSWAP, Hasselmann *et al.*, 1973). Hasselmann (1974) desarrolla un modelo

matemático para explicar la disipación de la energía de las olas por rompiente en aguas profundas. Una vez que se contó con expresiones matemáticas para explicar los procesos físicos más importantes en la evolución del oleaje en aguas profundas, se desarrollaron rápidamente modelos numéricos de olas, basados en la ecuación de conservación de energía. Los modelos se clasificaron de acuerdo a la exclusión (primera generación) o inclusión (segunda generación) del término fuente de interacciones no lineales. Durante el proyecto Sea WAve Modelling Project (SWAMP, SWAMP Group, 1984), se encontraron algunos inconvenientes de estos modelos. Ninguno de los modelos de primera o segunda generación pueden reproducir el desarrollo del espectro. Aunque con una calibración adecuada dan resultados útiles para ciertos campos de viento, no son confiables cuando los campos de viento cambian rápidamente como en el caso de huracanes. Esto se explica en términos de la ausencia, en el caso de los modelos de primera generación o la inadecuada parametrización para los modelos de segunda generación, del término de transferencia de energía entre componentes espectrales. La inclusión explícita del término de interacciones no lineales fue prohibitiva por los altos costos computacionales. Hasselmann y Hasselmann (1985), simplificaron con parametrizaciones el término de transferencia no lineal y tal trabajo abrió las puertas para el desarrollo de los modelos de tercera generación. Es en este punto donde gracias al esfuerzo de varios científicos fue posible el desarrollo del modelo WAM (WAve Modelling, Komen *et al.*, 1994) el cual es considerado como el prototipo de un modelo de tercera generación; la versión más reciente de modelo es el WAM ciclo 4 (WAMC4).

Battjes (1994) clasifica el WAMC4 como un modelo espectral que promedia la fase, esta clase de modelos sólo dan información acerca de la densidad de energía (o densidad de acción) para ciertas frecuencias (o números de onda) y direcciones discretas, la fase relativa de cada componente es desconocida, por lo que no es posible reconstruir la superficie del mar a partir del espectro del oleaje. Su contraparte, los modelos que

resuelven la fase (*e.g.* Boussinesq y los de pendiente moderada), describen la evolución de la superficie del mar en función del espacio y el tiempo. Las escalas espaciales de las olas y la dificultad de introducir términos de forzamiento en los modelos que resuelven la fase son una fuerte limitación para su uso, generalmente se utilizan en zonas protegidas como el interior de puertos o marinas y para simular condiciones de oleaje donde la fricción es despreciable y la energía esencialmente se conserva.

El WAMC4 que originalmente fue diseñado para aplicaciones a escala global y regional, fue modificado por Prandle (2000) y Monbaliu *et al.* (2000) para aplicaciones en aguas someras, donde los efectos del fondo influyen notablemente en la dinámica de la propagación del oleaje. Las modificaciones incluyeron los efectos de refracción por profundidad y por corrientes, se consideró también la pérdida de energía por fricción con el fondo y la interacción entre las olas y las corrientes. El WAMC4 tiene capacidad de anidamiento es decir, un dominio espacial global con baja resolución genera condiciones de frontera para un dominio de más alta resolución (incluido en el de baja resolución).

En el modelo, la evolución del espectro se determina sin ninguna suposición *a priori* de su forma. La ecuación que gobierna el desarrollo del espectro es la ecuación de balance de energía, incluye advección en el espacio geográfico y espectral (dirección y frecuencia), suministro de energía por el viento, disipación debido a la rompiente en aguas profundas, transferencia de energía entre componentes espectrales debido a interacciones no lineales y varias opciones para estimar la pérdida de energía por fricción con el fondo. Una descripción amplia del modelo se puede consultar en Komen *et al.* (1994). En coordenadas cartesianas la ecuación de balance de energía es:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c_x E) + \frac{\partial}{\partial y}(c_y E) + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(c_\sigma \frac{E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (c_\theta E) = S_{tot}, \quad (1)$$

donde $E(x, y, t, \theta, \sigma)$, es el espectro de energía de las olas, t es el tiempo, σ es la frecuencia angular intrínseca, θ es la dirección de la ola medida en sentido horario con respecto al norte verdadero, c_x y c_y son las velocidades de propagación de la energía en el espacio

geográfico y c_σ y c_θ son las velocidades de propagación en el espacio espectral (espacio de la frecuencia y la dirección) y se calculan de acuerdo con:

$$c_x = (c_g \cos \theta + u) \quad (2)$$

$$c_y = (c_g \sin \theta + v) \quad (3)$$

$$c_\theta = -\frac{1}{k} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial m} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \right] \quad (4)$$

$$c_\sigma = -\frac{\partial \sigma}{\partial h} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h \right] - C_g \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \quad (5)$$

donde $C_g = \partial \sigma / \partial \mathbf{k}$ es la velocidad de grupo, $\mathbf{u} = (u, v)$ es la velocidad de la corriente, h es la profundidad del agua, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ es el vector número de onda cuyo módulo es k , s y m son coordenadas espaciales en la dirección de propagación de la ola (θ) y perpendicular a ésta, respectivamente.

El lado izquierdo de la ecuación (1) representa la razón de cambio local de la densidad de energía, su propagación en el espacio geográfico, la modificación de la frecuencia y la refracción debida a la variación espacial de la profundidad y la corriente. El lado derecho (S_{tot}) representa los términos fuente que incluyen los efectos de generación (suministro de energía por el viento, S_{in}), disipación de energía (S_{ds}) y transferencia de energía entre componentes espectrales debido a interacciones no lineales (S_{nl}). En el término de disipación de energía (S_{ds}) se incluye la pérdida de energía por rompiente en aguas profundas (S_{wc}) y someras (S_{br}) y la disipación de la energía por fricción con el fondo (S_{bf}). La ecuación (1) es equivalente a la ecuación de conservación de densidad de acción, la cual se conserva aún en presencia de corrientes (Phillips, 1977).

En este trabajo se utilizaron las formulaciones estándar para los términos fuente del WAMC4, excepto para la disipación por fricción con el fondo donde se utilizó la expresión derivada del experimento JONSWAP (Hasselmann *et al.*, 1973) y la formulación CJ85 (Christoffersen y Jonsson, 1985) la cual considera explícitamente el proceso de interacción olas–corrientes. El término de disipación de la energía debido a fricción

con el fondo está dado por:

$$S_{bf}(x, y, t, \sigma, \theta) = -\frac{C_f}{g} \frac{\sigma^2}{\sinh^2 kh} E(x, y, t, \sigma, \theta), \quad (6)$$

donde C_f es un coeficiente de disipación, σ es la frecuencia relativa (intrínseca), g representa la gravedad y θ es la dirección de \mathbf{k} (el vector número de onda).

Las diferentes formulaciones para calcular la disipación de la energía por fricción con el fondo difieren principalmente en la expresión utilizada para el coeficiente de disipación C_f (Padilla-Hernández y Monbaliu, 2001). Utilizando la formulación JONSWAP S_{bf} se calcula mediante

$$S_{bf}(x, y, t, \sigma, \theta) = -\frac{\Gamma}{g^2} \frac{\sigma^2}{\sinh^2 kh} E(x, y, t, \sigma, \theta) \quad (7)$$

donde $\Gamma = 0.038 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$. El modelo JONSWAP está implementado como formulación estándar en la ecuación que calcula el término S_{bf} en el WAMC4. El modelo que considera la interacción olas y corrientes en el calculo del término S_{bf} se explicará en la siguiente sección.

Computacionalmente los modelos espectrales del oleaje basados en la ecuación de balance de energía (o acción), utilizan dos pasos en tiempo ya que resuelven dos escalas temporales distintas. Para la advección (lado izquierdo de la ecuación 1) se resuelve sólo la ecuación de conservación de energía utilizando un esquema explícito de primer orden, una vez que la energía es advectada, se le agrega el efecto de los términos fuente (lado derecho de la ecuación 1), esto se puede hacer ya que los términos fuente sólo tienen un efecto local. Los pasos de tiempo para para la advección están limitados por la condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). La contribución de los términos fuente se agrega utilizando un esquema semi-implícito hacia adelante. El paso en tiempo para los términos fuente se elige de acuerdo a la variabilidad intrínseca del espectro, la cual a su vez depende de la variabilidad del viento, corrientes y la batimetría. El paso de tiempo debe capturar la variabilidad espectral inducida por el viento, producida por

la batimetría y los cambios espectrales producidos por las corrientes. Por ejemplo, para las condiciones del sur del Mar del Norte, cerca de la costa, la resolución espacial de los vientos podría ser de 60km y la temporal de 3hrs, las corrientes son típicamente semidiurnas. Pasos de tiempo de 1hr para los términos fuentes capturan la variabilidad de las corrientes y los vientos, pero ocurre que la energía viaja entre 10km y 15km en una hora. En ese espacio se tiene una alta variabilidad en la batimetría, y por lo tanto en el espectro, que no va a ser capturada si se utiliza un paso en tiempo de 1hr para los términos fuente. Entonces el paso de tiempo para los términos fuente debe de ser determinado por la variabilidad espectral inducida por la batimetría. El esquema numérico para resolver la advección de la energía y el método de solución para los términos fuente se puede consultar en Komen *et al.* (1994). Los pasos de tiempo utilizados en este trabajo para la advección y los términos fuente del WAMC4 se muestran en la tabla 1.

En el WAMC4 la longitud de onda se calcula utilizando una tabla con valores de profundidad que varían logarítmicamente. La tabla contiene 63 valores iniciando desde los 2m e incrementándose sucesivamente por un factor de 1.1. Para calcular el espectro de energía se utilizan 25 frecuencias, iniciando en 0.04hz e incrementándose sucesivamente por un factor de 1.1. La resolución en el espacio direccional es de 30°.

II.2. El modelo hidrodinámico (HD)

El modelo hidrodinámico es un modelo bidimensional que resuelve las ecuaciones de aguas someras Van den Eynde *et al.* (1995), y fue desarrollado por la Unidad de Manejo de Modelos Matemáticos del Mar del Norte [MUMM, por sus siglas en inglés]. La versión operacional estándar se modificó para incorporar información del modelo de olas (*i.e.*, tensor de radiación y la rugosidad de la superficie de la cual es función el esfuerzo del viento). El modelo resuelve las ecuaciones que gobiernan el movimiento en coordenadas polares o cartesianas. El conjunto de ecuaciones en coordenadas cartesianas

es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho_w h} (\tau_s^x - \tau_b^x) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_w h} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P_a}{\partial y} + \frac{1}{\rho_w h} (\tau_s^y - \tau_b^y) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_w h} \left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

donde u y v son las componentes horizontales de la velocidad, f es el parámetro de Coriolis, η es la elevación de la superficie libre, ρ_w representa la densidad del agua, $h = H(x, y) + \eta$ es la profundidad total de la columna de agua ($H(x, y)$ es la profundidad local referida al nivel medio del mar), P_a es la presión atmosférica, (τ_s^x, τ_s^y) son las componentes del esfuerzo en la superficie libre, (τ_b^x, τ_b^y) son las componentes del esfuerzo en el fondo, A_h es el coeficiente de difusión horizontal y $S_{ij}(i, j = x, y)$ es el tensor de radiación inducido por la presencia de las olas (Longuet-Higgins y Stewart, 1964).

En el modelo, el coeficiente de difusión horizontal A_h se define como un parámetro proporcional a la profundidad local ($A_h = 20H$). En las fronteras verticales se hace la suposición de deslizamiento libre. La condición requiere que en las fronteras verticales,

$$A_h^{fs} = 0,$$

se requiere también la condición de flujo nulo a través de las fronteras sólidas,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario en dirección normal a la frontera sólida y $\mathbf{u}(= u, v)$ es el vector de velocidad horizontal. El esfuerzo del viento $\boldsymbol{\tau}_s$ en la superficie se parametriza

como,

$$\boldsymbol{\tau}_s = \rho_a C_D \mathbf{U}_{10} |\mathbf{U}_{10}| \quad (11)$$

donde ρ_a es la densidad del aire y \mathbf{U}_{10} es la velocidad del viento medida a 10m sobre la superficie del mar, C_D es el coeficiente de arrastre superficial. El esfuerzo en el fondo $\boldsymbol{\tau}_b$ se parametriza de manera similar,

$$\boldsymbol{\tau}_b = \rho_w r \mathbf{u} |\mathbf{u}| \quad (12)$$

donde r es un coeficiente adimensional de arrastre en el fondo se calcula de:

$$r = \frac{g}{(C_{z0} H^{\alpha_p})^2} \quad (13)$$

donde C_{z0} es el parámetro de Chézy que se define como constante, α_p es un parámetro constante igual o mayor que cero.

En las fronteras abiertas la elevación de la marea ($\bar{\eta}_{fa}$) se calcula utilizando 8 armónicos de la marea,

$$\bar{\eta}_{fa}(t) = \sum_{i=1}^8 f_i^c A_i \cos[\omega_i^c t + (V_i^c + n_i^c) - P_i] . \quad (14)$$

Para cada constituyente la frecuencia angular (ω_i^c), la amplitud A_i y la fase (P_i), deben especificarse. El resto de los términos; f_i^c (factor nodal) y $(V_i^c + n_i^c)$ (la fase de la constituyente de equilibrio con respecto al meridiano de Greenwich) se calculan internamente en el modelo. La amplitud y la fase de las 8 constituyentes: Q_1 , O_1 , P_1 , K_1 , N_1 , M_2 , S_2 y K_2 , se obtuvieron del Northeast Atlantic Model desarrollado por Flather (1981). En las fronteras abiertas se impone la condición de gradiente de velocidad igual a cero,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 .$$

Para incluir la variación de la presión atmosférica se considera el efecto del barómetro invertido,

$$\eta_{fa} = \bar{\eta}_{fa} + (P_{ref} - P_a)/g\rho_a,$$

donde P_{ref} es una presión de referencia igual a 1013 milibares.

II.3. El modelo de capa límite (CJ85)

El modelo CJ85 predice el campo de velocidad y sus esfuerzos asociados, en un ambiente donde interactúan olas y corrientes simultáneamente, supone que el esfuerzo en el fondo es la suma vectorial de los esfuerzos generados por las olas y las corrientes. El modelo se divide en dos submodelos que consideran la dinámica de la capa límite producida por la corriente y por las olas (CLTO). El submodelo I es válido para valores de $u_{fm}/(k_N\omega_a) < 3.47$, donde u_{fm} es la velocidad de fricción asociada a la velocidad orbital del oleaje en el fondo, ω_a es la frecuencia angular absoluta ($\omega_a = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$), y k_N es la rugosidad del fondo; y el submodelo II es válido para valores de $u_{fm}/(k_N\omega_a) \geq 3.47$. La diferencia fundamental entre los submodelos I y II es la definición de los coeficientes de viscosidad turbulenta en la CLTO. Del modelo se obtienen soluciones analíticas para los factores de fricción de olas (f_w) y corrientes (f_c), velocidades de fricción producidas por la corriente (u_{fc}), velocidad de fricción en la CLTO (u_{fm}), esfuerzos máximos en el fondo (τ_{bm}) y ancho de la capa límite (δ_w).

A continuación se describen las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido en un ambiente combinado de olas y corrientes, en primer término se presentan y aplican las suposiciones que se hacen para simplificar las ecuaciones que rigen el movimiento dentro y fuera de la CLTO. Después se definen los coeficientes de viscosidad turbulenta para ambos submodelos, con ellos se resuelven las ecuaciones pertinentes y se obtienen expresiones matemáticas para calcular los factores de fricción de olas y corrientes.

La ecuación de momento es una representación de la segunda ley de Newton, esta ley establece que la razón de cambio de momento de un elemento de fluido se debe al balance de fuerzas que actúan sobre él mismo, la simplificación y por lo tanto la solución de la ecuación depende del fenómeno físico que se quiere explicar. Para el caso que nos ocupa la ecuación de momento se simplifica suponiendo que la corriente es estacionaria y el fondo es localmente horizontal y que los esfuerzos cortantes en secciones verticales, la

fuerza de Coriolis y la de mareas son despreciables. Después de aplicar las suposiciones a la ecuación general de momento, la ecuación que determina el movimiento horizontal queda,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_w} \nabla p = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_w} \right) \quad (15)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad horizontal de las partículas, t es el tiempo, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ es el gradiente horizontal, w es la velocidad vertical de las partículas, z es la coordenada vertical (positiva hacia arriba), $\boldsymbol{\tau}$ es el esfuerzo total en una sección horizontal, ρ_w es la densidad del agua y p es la presión total. Las variables p y \mathbf{u} consisten de una parte estacionaria (producida por la corriente) y una parte oscilatoria (asociada a las olas) esto es,

$$p = p_c + p_w \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_w \quad (17)$$

los subíndices c y w representan las componentes debidas a la corriente y a las olas respectivamente. Considerando olas lineales, el valor promedio de las ecuaciones (16) y (17) en un periodo de ola es: $\langle p \rangle = p_c$, $\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}_c$, pues el $\langle p_w \rangle = 0$ y $\langle \mathbf{u}_w \rangle = 0$, esto significa que no hay transporte de masa por efecto de las olas. Utilizando el concepto de viscosidad turbulenta (los esfuerzos son proporcionales a los gradientes verticales de velocidad) el esfuerzo se expresa como,

$$\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_w} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial z} \quad (18)$$

donde ϵ representa el coeficiente de viscosidad turbulenta, que se supone independiente del tiempo. Tomando el valor promedio de la ecuación (18),

$$\frac{\langle \boldsymbol{\tau} \rangle}{\rho_w} = \left\langle \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial z} \right\rangle = \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial z} = \frac{\boldsymbol{\tau}_c}{\rho_w}. \quad (19)$$

Por la ecuación (18) y (19) el esfuerzo consiste de una parte estacionaria y una parte oscilatoria es decir,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_w \quad (20)$$

con,

$$\frac{\boldsymbol{\tau}_w}{\rho_w} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial z}. \quad (21)$$

La ecuación (20) también es válida en el fondo,

$$\boldsymbol{\tau}_b = \boldsymbol{\tau}_{cb} + \boldsymbol{\tau}_{wb} \quad (22)$$

donde el subíndice b indica que la cantidad es evaluada en el fondo, también se cumple que $\langle \boldsymbol{\tau}_b \rangle = \boldsymbol{\tau}_{cb}$.

Tomando el valor promedio de la ecuación (15), se obtiene una ecuación para el movimiento asociado a las corrientes,

$$(\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_c + \langle (\mathbf{u}_w \cdot \nabla) \mathbf{u}_w \rangle + \langle w \frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial z} \rangle + \frac{1}{\rho_w} \nabla p_c = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_c}{\rho_w} \right) \quad (23)$$

el primer término de la ecuación (23) se puede eliminar al suponer que las corrientes son de variación espacial lenta y de gran escala comparada con las olas, también el segundo y tercer término se pueden despreciar debido a la suposición de olas lineales. La ecuación (23) queda,

$$\frac{1}{\rho_w} \nabla p_c = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_c}{\rho_w} \right). \quad (24)$$

Integrando la ecuación (24) y utilizando las condiciones en la frontera: $\boldsymbol{\tau}_c = 0$ en $z = h$ (h es la profundidad del agua) y $\boldsymbol{\tau}_c = \boldsymbol{\tau}_{cb}$ en $z = 0$, se tiene:

$$\boldsymbol{\tau}_{cb} = -h \nabla p_c \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\tau}_c = \boldsymbol{\tau}_{cb} \left(1 - \frac{z}{h} \right). \quad (26)$$

Introduciendo la ecuación (19) en (26) se obtiene una ecuación que describe el movimiento asociado a la corriente

$$\rho_w \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial z} = \boldsymbol{\tau}_{cb} (1 - z/h) \quad 0 \leq z \leq h. \quad (27)$$

Restando el balance de la corriente estacionaria (ecuación 24) a la ecuación (15), y despreciando los términos de segundo orden, se obtiene una ecuación asociada al

movimiento de las olas,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial t} + (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_w + \frac{1}{\rho_w} \nabla p_w = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_w}{\rho_w} \right). \quad (28)$$

Fuera de la CLTO de ancho δ_w el lado derecho de la ecuación (28) se puede despreciar, lo que significa que $\boldsymbol{\tau}_w \approx 0$ para $z \geq \delta_w$,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial t} + (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_w + \frac{1}{\rho_w} \nabla p_w = 0 \quad z \geq \delta_w. \quad (29)$$

Aplicando la ecuación (29) en el límite superior de la CLTO ($z = \delta_w$), donde $\mathbf{u}_w = \mathbf{u}_{wb}$ y $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_c(\delta_w)$ la ecuación (29) se transforma en,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{wb}}{\partial t} + (\mathbf{u}_c(\delta_w) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{wb} + \frac{1}{\rho_w} \nabla p_w = 0. \quad (30)$$

La velocidad de la corriente en $z = \delta_w$ es menor que la velocidad de la ola por lo que el segundo término de la ecuación (30) se puede despreciar, entonces para $z = \delta_w$ se obtiene,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{wb}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \nabla p_w = 0. \quad (31)$$

Restando la ecuación (31) de (28) y utilizando la ecuación (21), se obtiene una ecuación para el movimiento asociado a las olas dentro de la CLTO,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_w - \mathbf{u}_{wb}) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_w}{\rho_w} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial z} \right) \quad z \leq \delta_w. \quad (32)$$

En conclusión las ecuaciones que rigen el movimiento dentro de la CLTO son (27) y (32) y fuera de ésta son (27) y (29). Para resolverlas es necesario definir expresiones para el coeficiente de viscosidad turbulenta dentro y fuera de la capa límite.

La teoría lineal de olas predice que las velocidades de las partículas bajo la acción de las olas tienen un comportamiento oscilatorio, por lo tanto el esfuerzo $\boldsymbol{\tau}_w$ producido por las olas tendrá un comportamiento similar (ecuación 21), entonces es posible definir

los vectores,

$$\mathbf{u}_w = \frac{\mathbf{k}}{k} u_w = \frac{\mathbf{k}}{k} u_{wm} e^{i(\theta+\chi)} \quad (33)$$

$$\mathbf{u}_{wb} = \frac{\mathbf{k}}{k} u_{wb} = \frac{\mathbf{k}}{k} u_{wbm} e^{i(\theta)} \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\tau}_w = \frac{\mathbf{k}}{k} \tau_w = \frac{\mathbf{k}}{k} \tau_{wm} e^{i(\theta+\phi)} \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{wb} = \frac{\mathbf{k}}{k} \tau_{wb} = \frac{\mathbf{k}}{k} \tau_{wbm} e^{i(\theta+\phi_b)} \quad (36)$$

donde $\mathbf{k}/k = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ es un vector unitario en la dirección de propagación de la ola (α) (\mathbf{k} es el número de onda y k su magnitud), que indica la dirección de los vectores \mathbf{u}_w , \mathbf{u}_{wb} , $\boldsymbol{\tau}_w$ y $\boldsymbol{\tau}_{wb}$, cuyas magnitudes están dadas por u_w , u_{wb} , τ_w , τ_{wb} respectivamente, siendo u_{wm} , u_{wbm} , τ_{wm} , τ_{wbm} sus amplitudes. Las fases χ , ϕ y ϕ_b de \mathbf{u}_w , $\boldsymbol{\tau}_w$ y $\boldsymbol{\tau}_{wb}$ respectivamente son relativas a la velocidad de las partículas bajo la acción de las olas \mathbf{u}_{wb} , θ está dada por; $\theta = (\omega_a t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ donde ω_a es la frecuencia absoluta de la ola y $\mathbf{x} = (x, y)$.

El esfuerzo en el fondo inducido por la corriente queda determinado por

$$\boldsymbol{\tau}_{cb} = \frac{\mathbf{U}}{U} \tau_{cb} \quad (37)$$

donde,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{u}_c dz, \quad (38)$$

siendo U y τ_{cb} la magnitud de \mathbf{U} y $\boldsymbol{\tau}_{cb}$, respectivamente.

El esfuerzo total en el fondo se determina mediante la suma del esfuerzo producido por la corriente en dirección $\mathbf{U}/U = (\cos \delta, \sin \delta)$ (δ es la dirección de la corriente) y el esfuerzo producido por las velocidades orbitales del oleaje en dirección \mathbf{k}/k , por lo que el esfuerzo total en el fondo queda determinado por,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_b &= \frac{\mathbf{U}}{U} \tau_{cb} + \frac{\mathbf{k}}{k} \tau_{wbm} \Re\{e^{i(\theta+\phi_b)}\} \\ &= \tau_{wbm} (\vartheta \cos \delta + \cos(\theta + \phi_b) \cos \alpha, \vartheta \sin \delta + \cos(\theta + \phi_b) \sin \alpha) \end{aligned} \quad (39)$$

donde:

$$\vartheta = \frac{\tau_{cb}}{\tau_{wbm}} = \frac{f_c}{f_w} \left(\frac{U}{u_{wbm}} \right)^2, \quad (40)$$

con los factores de fricción para corrientes (f_c) y para olas (f_w) definidos por:

$$f_c = \frac{2\tau_{cb}}{\rho_w U^2} \quad (41)$$

$$f_w = \frac{2\tau_{wbm}}{\rho_w u_{wbm}^2}. \quad (42)$$

De la ecuación (39) el esfuerzo máximo total en el fondo es,

$$\boldsymbol{\tau}_{bm} = \tau_{wbm} m = \frac{1}{2} f_w \rho_w u_{wbm}^2 m \quad (43)$$

con

$$m = \sqrt{1 + \vartheta^2 + 2\vartheta |\cos(\delta - \alpha)|}. \quad (44)$$

El factor de fricción para corrientes f_c está definido sólo para corrientes, mientras que el factor de fricción para olas f_w está definido sólo para olas. En un ambiente combinado de olas y corrientes f_c y f_w son dependientes entre sí. De la ecuación (43) se observa la dependencia de $\boldsymbol{\tau}_{bm}$ con el parámetro m , para $m = 1$ sólo hay contribución de las olas, de tal forma que el valor de m es una medida de la contribución por fricción con el fondo al proceso de interacción olas-corrientes.

La diferencia fundamental entre los submodelos I y II es la definición de los coeficientes de viscosidad turbulenta. Ambos submodelos consideran una capa límite interna (producida por las olas) con coeficiente de viscosidad ϵ_w y una capa límite externa (producida por la corriente) con coeficiente de viscosidad ϵ_c , todos los coeficientes de viscosidad se suponen independientes del tiempo y se definen como sigue, submodelo I:

$$\epsilon_c = \kappa z(1 - z/h) u_{fc} \quad \delta_w < z \leq h \quad (45)$$

$$\epsilon_w = \beta k_N u_{fm} \quad 0 \leq z \leq \delta_w \quad (46)$$

submodelo II:

$$\epsilon_c = \kappa z(1 - z/h)u_{fc} \quad \delta_w < z \leq h \quad (47)$$

$$\epsilon_w = \kappa z u_{fm} \quad k_N/30 \leq z \leq \delta_w \quad (48)$$

donde $\kappa(=0.40)$ es la constante de von Kármán, k_N es la rugosidad de Nikuradse y $\beta(=0.0747)$ es una constante de la CLTO, u_{fc} y u_{fm} son las velocidades de fricción para la corriente y el oleaje respectivamente y se definen como,

$$u_{fc} = \sqrt{\tau_{cb}/\rho_w} = \sqrt{1/2f_c} U \quad (49)$$

$$u_{fm} = \sqrt{\tau_{bm}/\rho_w} = \sqrt{1/2mf_w} u_{wbm} \quad (50)$$

donde τ_{bm} es la amplitud de $\boldsymbol{\tau}_{bm}$ (ecuación 43), es decir es el esfuerzo máximo en el fondo. La velocidad de fricción producida por la corriente u_{fc} , refleja la intensidad de la turbulencia en la capa límite generada por la corriente y está basada en el esfuerzo promedio en el fondo (ecuación 19). En contraste la velocidad de fricción u_{fm} , refleja la intensidad de la turbulencia en la CLTO y está basada en el máximo esfuerzo en el fondo.

En la capa límite generada por la corriente el coeficiente de viscosidad turbulenta se modela con un perfil parabólico en ambos submodelos, la diferencia está en el coeficiente de viscosidad en la CLTO. El submodelo I se aplica para condiciones en donde la rugosidad del fondo domina la turbulencia, esta aproximación produce buenos resultados para valores de $u_{wbm}/(k_N\omega_a)$ de entre 1.3 y 50. Por otro lado, el submodelo II es para rugosidades pequeñas y utiliza un coeficiente de viscosidad turbulenta lineal en la CLTO. En un medio donde interactúan olas y corrientes las velocidades de fricción (u_{fc} y u_{fm}) dependen una de la otra.

El submodelo I

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento (27, 29 y 32), se resuelven dentro y fuera de la CLTO. Las soluciones proporcionan fórmulas para las velocidades de fricción,

esfuerzos cortantes, factores de fricción y ancho de la capa límite. Los factores de fricción f_c y f_w , quedan en función de cuatro cantidades adimensionales

$$\frac{u_{wbm}}{k_N \omega_a} = \frac{a_{bm} \sigma}{k_N \omega_a}, \frac{k_N}{h}, \frac{U}{u_{wbm}}, (\delta - \alpha)$$

donde σ es la frecuencia relativa de la ola y a_{bm} es el desplazamiento de las partículas bajo la acción de la ola en $z = \delta_w$. De esta forma se puede analizar el comportamiento de los factores de fricción en función de las variables físicas que intervienen en la dinámica de la CLTO.

Soluciones para el movimiento asociado a las olas

La ecuación (29) gobierna el movimiento fuera de la CLTO y suponiendo que la corriente es uniforme en toda la columna de agua, se obtiene la solución para ondas lineales.

En el interior de la capa límite el movimiento está gobernado por la ecuación (32) con el coeficiente de viscosidad dado por (46) lo que resulta en,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}_w - \mathbf{u}_{wb}) = \epsilon_w \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{u}_w) \quad (51)$$

las condiciones en las fronteras son:

$$\mathbf{u}_w = 0 \quad z = 0 \quad (52)$$

$$\mathbf{u}_w \rightarrow \frac{\mathbf{k}}{k} u_{wbm} \cosh kz \cos \theta \quad z \rightarrow \infty \quad (53)$$

la condición de frontera (53), establece que lejos del fondo la solución se aproxima a la solución para ondas lineales. Cerca del fondo, es decir para $z \approx \delta_w$ el $\cosh kz \approx 1$. Suponiendo el coeficiente de viscosidad turbulenta (ϵ_w) constante la solución de (51) sujeta a las condiciones de frontera (52) y (53) es

$$\mathbf{u}_w = \frac{\mathbf{k}}{k} u_{wbm} (\cos \theta - e^{-\gamma z} \cos(\theta - \gamma z)) \quad (54)$$

donde

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega_a}{2\epsilon_w}} = \sqrt{\frac{\omega_a}{2\beta k_N u_{fm}}} \quad (55)$$

a partir de la solución, se pueden obtener expresiones para el ancho de la capa límite δ_w

$$\delta_w = r_i \frac{\pi}{2} \gamma^{-1} \quad (56)$$

donde $r_i (= \sqrt{2}/\pi)$ es un factor adimensional, y para el factor de fricción f_w ,

$$\frac{f_w}{m} = \frac{2\beta}{J} \quad (57)$$

con

$$J = \frac{u_{wbm}}{k_N \omega_a} \sqrt{\frac{m f_w}{2}} = \frac{u_{fm}}{k_N \omega_a}. \quad (58)$$

Los valores del parámetro J hacen la diferencia entre el uso de los submodelos I ó II. Utilizando las ecuaciones (44), (57) y (58) y considerando que el flujo es producido sólo por las olas ($m = 1$) el factor de fricción f_w queda determinado por

$$f_w = 2(\beta k_N \omega_a / u_{wbm})^{2/3},$$

f_w determina el esfuerzo máximo producido por las olas. En un ambiente donde interactúan olas y corrientes el esfuerzo total es m veces más grande (ecuación 43), es a través del parámetro m que se puede cuantificar la interacción entre las olas y las corrientes.

Soluciones para el movimiento asociado a las corrientes

Dentro de la CLTO se resuelve la ecuación (27), con el coeficiente de viscosidad turbulenta dado por la ecuación (46). Suponiendo que $\delta_w \ll h$ y utilizando la condición de frontera $\mathbf{u}_c = 0$ en $z = 0$, se obtiene la relación lineal

$$\mathbf{u}_c = \frac{\boldsymbol{\tau}_{cb}}{\rho_w \beta k_N u_{fm}} z \quad 0 \leq z \leq \delta_w. \quad (59)$$

Fuera de la CLTO se resuelve la ecuación (27), con el coeficiente de viscosidad dado por la ecuación (45) y se obtiene la solución logarítmica,

$$\mathbf{u}_c = \frac{\boldsymbol{\tau}_{cb}}{\rho_w \kappa u_{fc}} \ln \frac{z}{\delta_w} + \frac{\boldsymbol{\tau}_{cb}}{\rho_w \beta k_N u_{fm}} \quad \delta_w \leq z \leq h. \quad (60)$$

En $z = \delta_w$ las ecuaciones (59) y (60) se acoplan, por lo que la ecuación (60) queda

$$\mathbf{u}_c = \frac{\tau_{cb}}{\rho_w \kappa u_{fc}} \ln \frac{30z}{k_A} = \frac{\tau_{cb}}{\tau_{cb}} \frac{u_{fc}}{\kappa} \ln \frac{30z}{k_A} \quad \delta_w \leq z \leq h \quad (61)$$

en (61) se introdujo el concepto de rugosidad aparente dado por

$$\frac{k_A}{k_N} = 30 \frac{\delta_w}{k_N} \exp \left(- \frac{\kappa \delta_w}{\beta k_N} \sqrt{\frac{\vartheta}{m}} \right). \quad (62)$$

Debido a la existencia de la CLTO, la corriente experimenta un esfuerzo mayor al que se produciría sólo por corrientes y por lo tanto la rugosidad se siente más grande que la rugosidad de Nikuradse k_N ; esto se refleja a través de la rugosidad aparente, la cual depende de k_N y de las características del flujo.

El factor de fricción f_c en un ambiente combinado de olas y corrientes, se calcula a partir de

$$\sqrt{\frac{2}{f_c}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{11h}{k_N} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{k_A}{k_N} \quad (63)$$

para movimiento producido sólo por corrientes ($k_A = k_N$) f_c queda determinado por

$$\sqrt{2/f_c} = 2.5 \ln(11h/k_N).$$

El submodelo II

A continuación se presenta la solución de las ecuaciones para el submodelo II dentro y fuera de la capa límite turbulenta generada por las olas, la diferencia fundamental entre los submodelos I y II es la definición del coeficiente de viscosidad turbulenta utilizado en la capa límite generada por el oleaje.

Soluciones para el movimiento asociado al oleaje

Fuera de la CLTO los submodelos I y II dan los mismos resultados, por lo que las ecuaciones de la teoría lineal de olas son válidas.

La ecuación (32) gobierna el movimiento dentro de la CLTO, con el coeficiente de viscosidad definido por la ecuación (48),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}_w - \mathbf{u}_{wb}) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa z u_{fm} \frac{\partial \mathbf{u}_w}{\partial z} \right) \quad (64)$$

la solución de la ecuación (64) se expresa en términos de las funciones *ker* y *kei* de Kelvin (Christoffersen y Jonsson, 1985). El ancho de la capa límite generada por las olas (δ_w), está dado por,

$$\frac{\delta_w}{k_N} = n \kappa J \quad (65)$$

donde $n(=0.367)$ es un parámetro adimensional. La determinación de n en el submodelo II es tan importante como la determinación de r_i en el submodelo I (ecuación 56). Los resultados afectan directamente a δ_w y a k_A y por lo tanto al esfuerzo cortante, así como al cálculo de los factores de fricción.

El factor de fricción f_w se calcula de

$$\frac{m}{4.07\sqrt{mf_w}} + \log \frac{1}{4.07\sqrt{mf_w}} = -0.1164 + \log \left(\frac{a_{bm}\omega_r}{k_N\omega_a} \right). \quad (66)$$

Soluciones para el movimiento asociado a la corriente

Dentro de la CLTO, se resuelve la ecuación (27) con el coeficiente de viscosidad dado por (48). Suponiendo que $\delta_w \ll h$ se encuentra la solución logarítmica para la velocidad de la corriente

$$\mathbf{u}_c = \frac{\tau_{cb}}{\rho_w \kappa u_{fm}} \ln \frac{30z}{k_N} \quad z \leq \delta_w. \quad (67)$$

Fuera de la CLTO se resuelve la ecuación (27) con el coeficiente de viscosidad dado por (47) y se obtiene la solución

$$\mathbf{u}_c = \frac{\tau_{cb}}{\rho_w \kappa u_{fm}} \left(\ln \frac{30z}{k_A} \right) \quad z \geq \delta_w \quad (68)$$

donde se ha incluido la rugosidad aparente para el submodelo II y utilizado $u_{fc}/u_{fm} = \sqrt{\vartheta/m}$,

$$\frac{k_A}{k_N} = \left(30 \frac{\delta_w}{k_N} \right)^{1-\sqrt{\vartheta/m}}. \quad (69)$$

El factor de fricción f_c se calcula a partir de

$$\sqrt{\frac{2}{f_c}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{30h}{k_A} + \frac{1}{\kappa} \frac{\delta_w}{h} \left(1 - \frac{u_{fc}}{u_{fm}} + \frac{k_N}{30\delta_w} \right), \quad (70)$$

como $\delta_w \ll h$ el último término de (70) desaparece. La ecuación para calcular el factor de fricción para el submodelo II es idéntica a la ecuación (63) para el submodelo I, pero con k_A/k_N dado por (69).

III. Metodología

Cuando las olas se aproximan a aguas someras, la presencia del fondo induce una serie de procesos lineales y no lineales que afectan la evolución del espectro. Graber y Madsen (1988) mencionan que la distribución de la energía en el espectro está controlada principalmente por la fricción con el fondo, éste es el proceso clave de la interacción entre las mareas, la elevación del nivel del mar producida por el viento y las olas. Adicionalmente las corrientes de marea y las corrientes generadas por el viento durante las tormentas producen un medio en movimiento, inhomogéneo y no estacionario sobre el cual se propagan las olas, la interacción entre las olas y este medio en movimiento se intensifica cerca de la costa, produciendo cambios en las características del campo de olas. La fricción con el fondo se incrementa al interactuar las velocidades orbitales de las olas con las corrientes. Para realizar investigación numérica de la interacción entre olas y corrientes en zonas someras se requiere que las mallas de cálculo tengan resolución espacial fina para poder representar adecuadamente los procesos que ocurren en las complejas batimetrías costeras, estos cálculos son muy demandantes en términos de recursos computacionales, por lo que se utiliza anidamiento de mallas en las zonas de interés.

III.1. Mallas numéricas

El sistema acoplado de modelos (WAMC4-HD) se aplicó en el Mar del Norte mediante una serie de 4 mallas anidadas sucesivamente (Gruesa, Local1, Local2 y Fina), en esta región las mareas y la intensidad de las corrientes producen un medio no estacionario e inhomogéneo sobre el cual se propagan las olas, induciendo la interacción olas-corrientes (Tolman, 1990). La figura 1 muestra el área de cobertura geográfica de cada una de las mallas. Las características más relevantes de las mallas numéricas se presentan en la tabla 1.

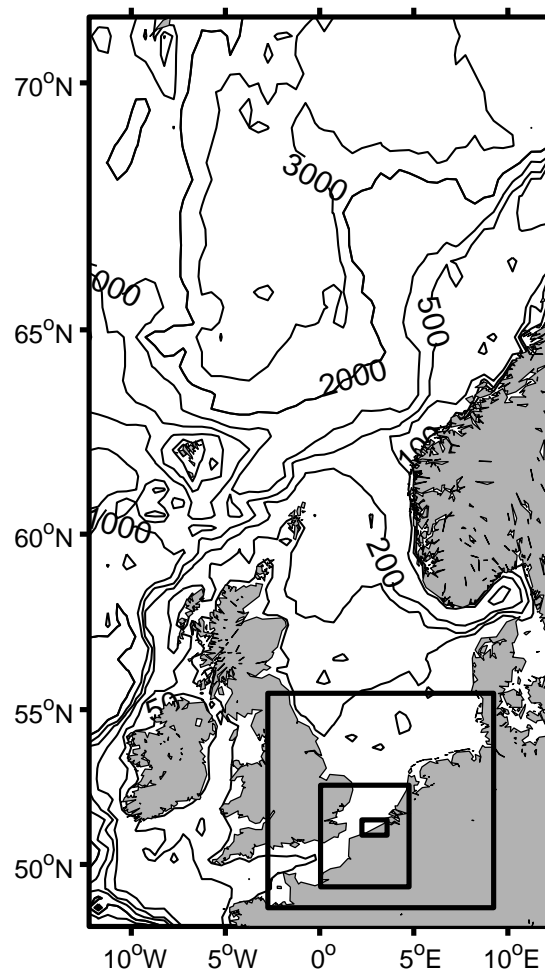


Figura 1: Área de estudio y batimetría (profundidades en metros), se muestran las cuatro mallas utilizadas. El cuadro exterior representa la malla Gruesa y los interiores (del más grande al más pequeño) las mallas Local1, Local2 y Fina, esta última es la considerada en este estudio. De la malla Gruesa se obtuvieron condiciones de frontera para la malla Local1 y así sucesivamente hasta la malla Fina.

Durante el proceso de anidamiento, las condiciones de frontera de la malla Local1 fueron generadas en la malla Gruesa, para la malla Local2 las condiciones de frontera se generaron en la malla Local1 y para la malla Fina las condiciones de frontera fueron producidas en la malla Local2, en todos los casos las condiciones de frontera se generaron utilizando el sistema desacoplado. En el modelo de olas se utilizó la formulación JONSWAP para calcular la disipación de la energía por fricción con el fondo. Los resultados obtenidos en la malla Fina son los analizados en este estudio. Para el modelo

Tabla 1: Cobertura geográfica, resolución y pasos de tiempo para los términos advectivos de los modelos WAMC4 y HD para las mallas de cálculo utilizadas en este trabajo, el paso de tiempo para los términos fuente del WAMC4 fue de 10min, excepto en la malla fina donde fue de 5min. Los datos para la construcción de las batimetrías son los mismos que los utilizado en Osuna y Monbaliu (2004).

Malla	Área	Res. (lat × lon)	Advección
Gruesa	47°50'N - 71°10'N, 12°15'W - 12°15'E	1/3° × 1/2°	WAMC4: 10 min, HD: 1 min
Local1	48°30'N - 55°30'N, 02°45'W - 09°15'E	1/15° × 1/10°	WAMC4: 2 min, HD: 1 min
Local2	49°14'N - 52°38'N, 00°03'E - 04°45'E	1/45° × 1/30°	WAMC4: 1 min, HD: 1 min
Fina	50°59'N - 51°30'N, 02°27'E - 03°53'E	1/135° × 1/90°	WAMC4: 30 s, HD: 15 s

HD el procedimiento de anidamiento consistió en transferir los valores de elevación de la superficie libre (η) de los puntos de las fronteras de la malla gruesa que coinciden con los puntos del siguiente nivel de refinamiento de malla, para el resto de los puntos los valores transferidos fueron interpolados mediante polinomios (Akima, 1991). En el dominio del tiempo todos los valores de elevación fueron transferidos por lo que no se hizo interpolación.

Las características hidrodinámicas del sur del Mar del Norte y la presencia de sedimentos arenosos permiten la formación de bancos de arena en la costa de Bélgica. La batimetría detallada de la malla Fina utilizada en este trabajo se muestra en la figura 2, se incluye la localización de las estaciones Westhinder (WHI) y Bol Van Heist (BVH). En las estaciones WHI y BVH se obtuvieron series de tiempo de altura significativa (H_s) y periodo de olas (T_{m02}) a partir de mediciones y calculadas por el modelo. En la tabla 2 se presentan los datos de localización y profundidad de las estaciones. La batimetría muestra la presencia de bajos hacia el noreste y barras de arena hacia el suroeste del orden de 10km de longitud, ± 2 km de ancho y se encuentran a pocos metros bajo la superficie (Williams *et al.*, 2000). Los sedimentos marinos consisten de arena fina a media (0.125 - 0.250mm).

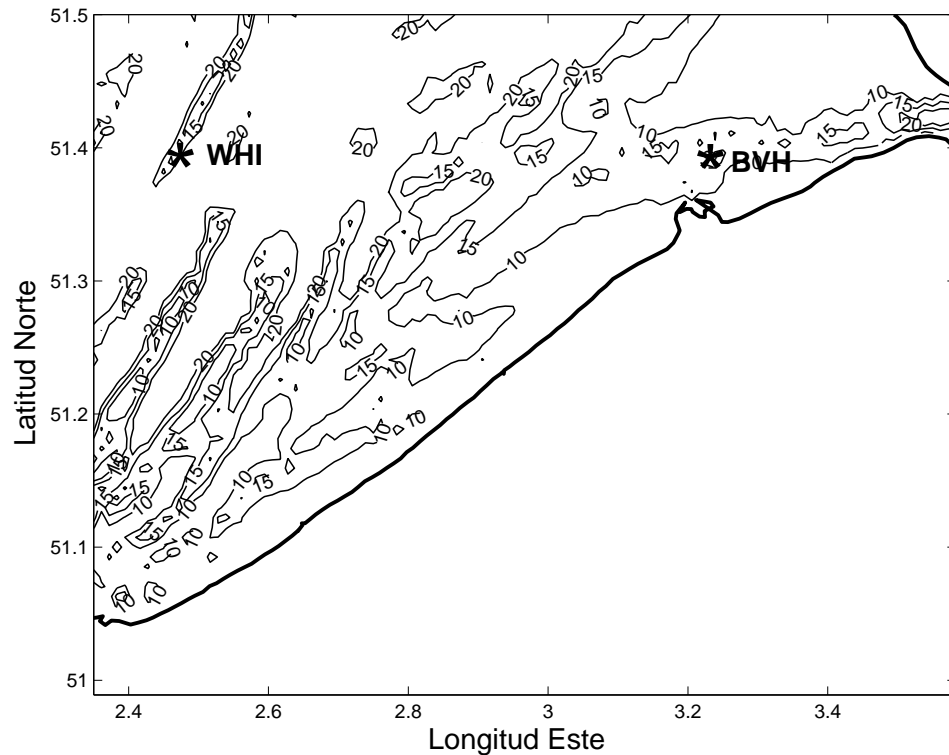


Figura 2: Batimetría y localización de las estaciones Westhinder (WHI) y Bol Van Heist (BVH). Las profundidades están dadas en metros.

Tabla 2: Localización y profundidad media de las estaciones mostradas en la figura 2. Los valores de profundidad corresponden al nodo más cercano de la malla de resolución fina.

Estación	Latitud	Longitud	Profundidad (m)
WHI	51°23'04" N	02°26'40" E	13.2
BVH	51°22'45" N	03°12'29" E	11.9

III.2. Información meteorológica

Para el propósito del estudio la información analizada correspondió al periodo de simulación del 5 al 20 de octubre de 1997. La información meteorológica (componentes de la velocidad del viento a 10m y la presión atmosférica) para forzar los modelos HD y WAMC4 se obtuvieron de la base de datos de MUMM, quienes reciben rutinariamente

la información de la oficina meteorológica del Reino Unido (UKMO), la información tiene una resolución temporal de 6 horas y una resolución espacial regular de 1.25° por 1.25° . A las 00:00GMT y 12:00GMT la información corresponde a modelos de predicción que incluyen asimilación de datos, mientras que para las 06:00GMT y las 18:00GMT la información corresponde sólo al modelo de predicción.

Durante el periodo del análisis se presentaron dos eventos meteorológicos importantes, cada uno caracterizado por la presencia de vientos de magnitud máxima de 15 y 13m/s respectivamente pero de diferente dirección. La figura 3 muestra las condiciones de viento prevalecientes durante el periodo de simulación, los datos corresponden a la estación WHI. Al inicio del mes (no se muestra en la figura) se presentaron vientos del noroeste, a partir del día 5 un sistema de baja presión empezó a producir vientos débiles del suroeste, que aumentaron considerablemente su magnitud del día 7 al 11, para el día 11 el régimen cambia a noroeste a medida que avanza la depresión, el día 12 el viento del noroeste alcanza una magnitud 13m/s y envía swell del norte del Mar del Norte hacia el sur. Esta condición de viento norte permanece hasta el 15 de octubre, a partir del día 16 la magnitud del viento se reduce a 5m/s en promedio y la dirección cambia a viento del sur. Los dos eventos meteorológicos considerados son 1) del 7 al 11 de dirección suroeste y magnitud de entre 5 y 15m/s, 2) del día 12 al 15 de dirección noroeste y magnitud de entre 4 y 13m/s.

III.3. Experimentos numéricos

Se realizaron cuatro experimentos numéricos. En los experimentos desacoplados (I y III), se implementó el sistema de modelos sin intercambio de información entre los modelos HD y WAMC4. Para calcular la disipación de la energía por fricción con el fondo en el WAMC4, se utilizó la formulación JONSWAP durante el Experimento I, mientras que en el Experimento III se utilizó la formulación CJ85.

En los experimentos acoplados (II y IV) el sistema de modelos se implementó con

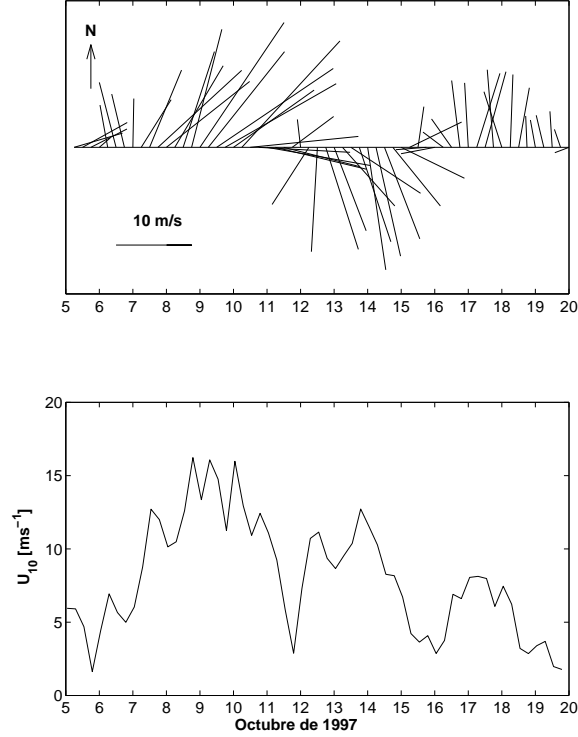


Figura 3: Condiciones prevalcientes de viento durante el periodo de simulación, los datos de viento se obtuvieron de la oficina meteorológica del Reino Unido (UKMO) y la base de datos se extrajo de la estación WHI.

transferencia de información entre los modelos HD y WAMC4. En este trabajo el término acoplado se refiere a transferencia de información en un sentido, esto es se transfiere la elevación de la superficie libre (η) y las dos componentes de la velocidad de la corriente (u, v), del modelo HD al WAMC4. Las formulaciones utilizadas para calcular la pérdida de energía por fricción con el fondo en el WAMC4, fueron JONSWAP para el Experimento II y CJ85 para el Experimento IV. En la tabla 3 se presenta la nomenclatura utilizada para hacer referencia a los experimentos.

Para aplicar la formulación CJ85 es necesario definir el parámetro de rugosidad (k_N). En un trabajo realizado por Luo y Monbaliu (1994), se encontró que un valor típico de k_N para las condiciones de flujo en el sur del Mar del Norte es $k_N = 0.02\text{m}$. El esfuerzo en el fondo calculado por el sistema de modelos cuando se utiliza la formulación CJ85 se representa como una matriz (esfuerzo como una función de la frecuencia y la

Tabla 3: Experimentos numéricos. Desacoplado significa sin intercambio de información entre el WAMC4 y el HD. Acoplado significa que el HD transfiere η , u y v al WAMC4.

Experimento	Descripción	Fórmula para calcular la pérdida de energía por fricción con el fondo
I	Desacoplado	JONSWAP (Exp. de referencia)
II	Acoplado	JONSWAP
III	Desacoplado	CJ85
IV	Acoplado	CJ85

dirección) por lo que se definen parámetros integrales para comparar los resultados con los que se obtienen cuando se utiliza la formulación JONSWAP (esta formulación calcula un sólo valor en cada punto de malla y para cada paso de tiempo). El esfuerzo asociado con la componente de máxima energía (τ_p) en el espectro de olas resultó igual al esfuerzo máximo (τ_{\max}), este último fue utilizado en las comparaciones. También se definió un valor promedio ($\bar{\tau}$) calculado de acuerdo a

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \tau(\sigma, \theta) w(\sigma, \theta) d\sigma d\theta \quad (71)$$

donde:

$$w(\sigma, \theta) = \frac{\tau(\sigma, \theta)}{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \tau(\sigma, \theta) d\sigma d\theta} \quad (72)$$

Se utilizó los resultados del experimento desacoplado que calcula la pérdida de energía por fricción con el fondo con la formulación JONSWAP como referencia para hacer la comparación con el resto de los experimentos. La formulación JONSWAP es

una de las ecuaciones más utilizadas en modelos desacoplados (implementada como formulación estándar en el WAMC4) para calcular el esfuerzo con el fondo, sin embargo no considera el efecto de la interacción entre olas y corrientes y no interpreta la pérdida de energía por fricción con el fondo en términos de procesos físicos.

Con base en los resultados de los experimentos numéricos se realizaron comparaciones entre series de tiempo y campos de variables hidrodinámicas, en especial los esfuerzos en el fondo. Los resultados de los experimentos numéricos así como las comparaciones entre ellos se presentan en la siguiente sección.

IV. Resultados y discusiones

En esta sección se presentan las comparaciones entre las mediciones y los resultados de los experimentos numéricos. La tabla 3 muestra las características de los experimentos y la identificación de éstos para referencia. El principal objetivo del trabajo es determinar el efecto de incluir el proceso de interacción olas y corrientes en la determinación de los esfuerzos en el fondo y se realiza de manera relativa con respecto al experimento de referencia (Experimento I). Por otra parte no es la intención del presente trabajo realizar una calibración del modelo ni tampoco tratar de reproducir las observaciones.

IV.1. Experimentos I y II

En la figura 4 se muestran las series de tiempo de la altura significativa de las olas (H_s) (Ver apéndice A, para la definición de parámetros estadísticos) y sus periodos calculados a partir del segundo momento espectral (T_{m02} , equivalente al periodo calculado cuando se utiliza el criterio de cruces por cero), para las mediciones y los resultados de los experimentos I y II en las estaciones WHI y BVH. De la simulación numérica realizada se seleccionó el periodo del 7 al 15 de octubre para el análisis, en donde se presentaron dos eventos meteorológicos importantes, cada uno caracterizado por la presencia de vientos de magnitud máxima de 15m/s y 13m/s respectivamente pero de diferente dirección, el primer evento fue del 7 al 11 de octubre con altura significativa del orden de 3.2m y el segundo del 12 al 15 de octubre con altura significativa del orden de 3.8m. Los regímenes de viento asociados a los dos eventos fueron, suroeste para el primero y noroeste para el segundo.

Ambos experimentos subestiman la altura significativa de las olas. Cuando se presentan olas de poca altura las diferencias entre las mediciones y los resultados de los experimentos son menores. De acuerdo con Monbaliu *et al.* (1997), Cardone y Resio (1998), Ozer *et al.* (2000), el modelo WAMC4 tiende a subestimar H_s y T_{m02} , especial-

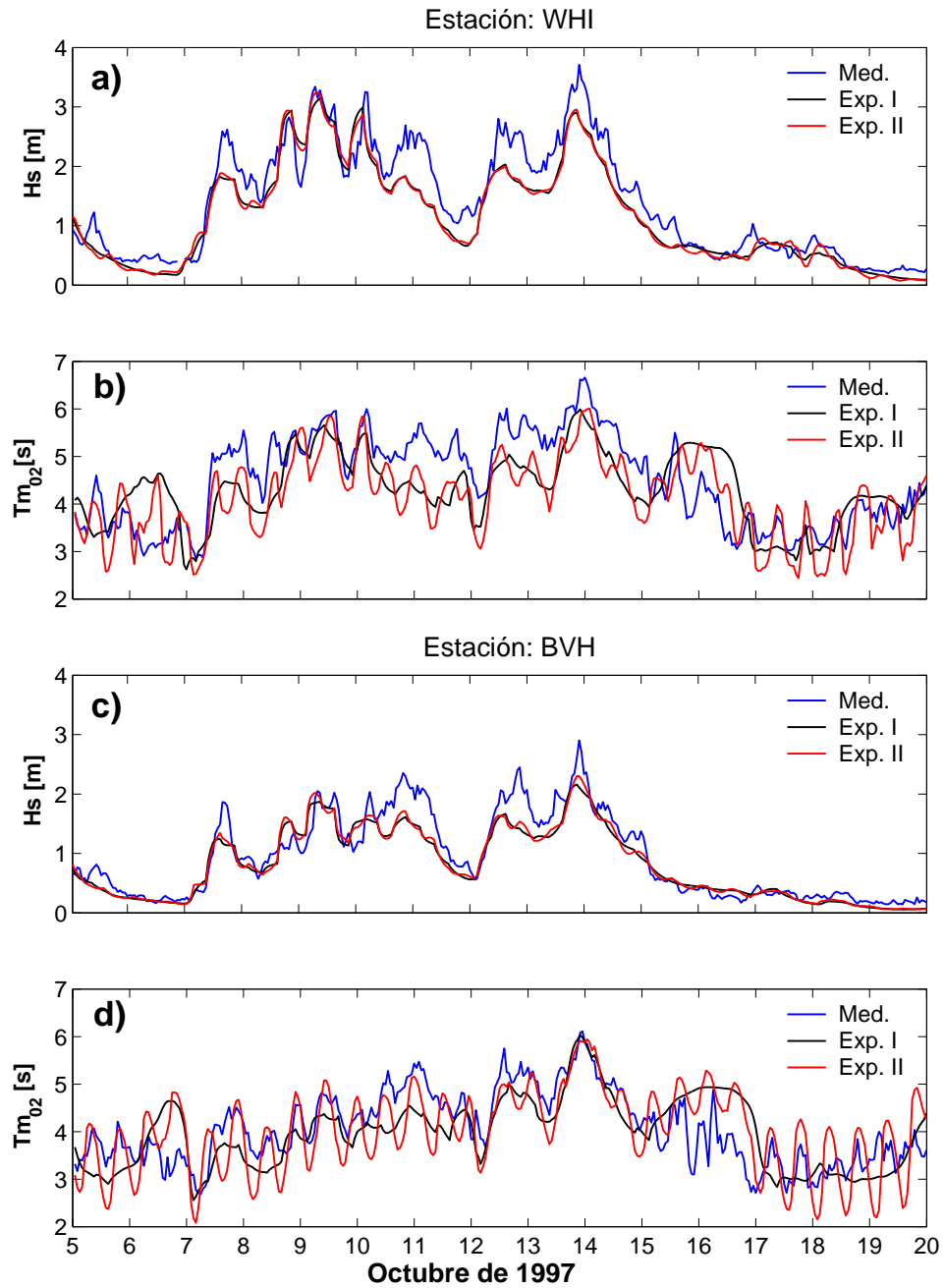


Figura 4: Series de tiempo de a) H_s y b) T_{m02} para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos I y II respectivamente

mente durante los periodos de tormenta. La subestimación de H_s disminuye hacia la costa; en la estación WHI el bias (ver definición en apéndice A) es de -0.23m y -0.21m para los experimentos I y II respectivamente, mientras que en BVH fue de -0.12m y -

0.11m para los experimentos I y II. Las series de tiempo de T_{m02} muestran una tendencia similar; subestimación principalmente durante los eventos de tormenta, la cual tiende a disminuir hacia la costa ($bias=-0.27s$ en WHI, y $-0.07s$ en BVH para el experimento II). Cardone y Resio (1998) sugieren que el esquema de propagación implementado en el WAMC4 podría producir una subestimación del oleaje proveniente de tormentas lejanas.

Para las condiciones de la plataforma continental Belga esta subestimación de H_s y T_{m02} es más pronunciada durante eventos con viento de dirección norte, pues bajo éstas condiciones el tiempo de propagación de las olas es mayor para alcanzar la estación BVH que en el caso de los vientos con dirección suroeste, donde las series de tiempo de H_s muestran menos diferencias entre las H_s calculadas y las obtenidas de mediciones. Se observa también en la figura 4 la similitud entre las series de T_{m02} calculadas durante el experimento II y las mediciones, en particular las oscilaciones observadas, las cuales están asociadas con la influencia de la marea, inclusive las fases de las mismas son similares (días 17 al 20 en la estación BVH).

Se muestran en la figura 5 las diferencias entre las series de tiempo de H_s (ΔH_s) y T_{m02} (ΔT_{m02}) entre los experimento II y I (Exp. II - Exp. I). El efecto del acoplamiento es evidente en el cálculo de H_s (y T_{m02}), las diferencias ΔH_s (ΔT_{m02}) son del orden de $\pm 0.18m$ ($\pm 1.0s$). Durante los periodos de tormenta las diferencias de H_s se incrementan, especialmente durante los vientos del suroeste y para la estación WHI. En la estación más somera (BVH) el incremento en las diferencias de H_s se observa también durante los eventos de tormenta.

En el experimento II (el sistema de modelos se utilizó en modo acoplado), las variaciones del nivel del mar (η) y el campo de velocidades (u y v) fueron transferidos del modelo hidrodinámico (HD) al modelo de olas (WAMC4). Es evidente en ambas series de tiempo de las diferencias (ΔH_s y ΔT_{m02}) que las oscilaciones están asociadas con la variación del nivel del mar causada por la componente semidiurna de la marea. De

acuerdo con la teoría lineal de olas las variaciones en el T_{m02} dependen de la magnitud de la velocidad de la corriente, del ángulo que forma la dirección de la corriente con la dirección de propagación de la ola y de la frecuencia intrínseca de la ola, por otro lado la variación del nivel del mar induce un cambio de profundidad lo que modifica la magnitud de las velocidades orbitales inducidas por las olas en el fondo y por lo tanto los esfuerzos en el fondo, lo que provoca una variación en la disipación de la energía y por consecuencia en las alturas de las olas ya que la H_s está relacionada directamente con la energía.

El esfuerzo en el fondo calculado de los experimentos I y II para ambas estaciones (WHI y BVH) se muestra en la figura 6 (a y c). Los valores máximos del esfuerzo en el fondo son de 3N/m^2 . El efecto de acoplar el modelo hidrodinámico y el modelo de olas se observa como ligeras variaciones sobre todo el periodo de simulación, las oscilaciones que se muestran están asociadas con la variación del nivel del mar generado por la marea, aún durante periodos de olas bajas (15-19 de octubre).

La diferencia relativa de los esfuerzos en el fondo entre los experimentos I y II fue del orden de 0.5N/m^2 en la mayor parte de la serie de tiempo (Fig. 6 b y d). Las diferencias más grandes están asociadas con los eventos de tormenta (7-11 y 12-15 octubre), especialmente en la estación WHI donde las alturas significantes son ligeramente más altas que las observadas en la estación BVH.

IV.2. Experimentos I y III

Para determinar en detalle el efecto de las dos formulaciones utilizadas para calcular el coeficiente de disipación (C_f) en la función fuente (S_{bf}) y en el esfuerzo en el fondo (τ), se realizó una comparación entre los resultados de los experimentos I y III. Ambos experimentos utilizan el sistema desacoplado es decir no hay transferencia de η , u o v del modelo hidrodinámico al modelos de olas.

La altura significativa de las olas y los periodos típicos (H_s y T_{m02}), calculados de

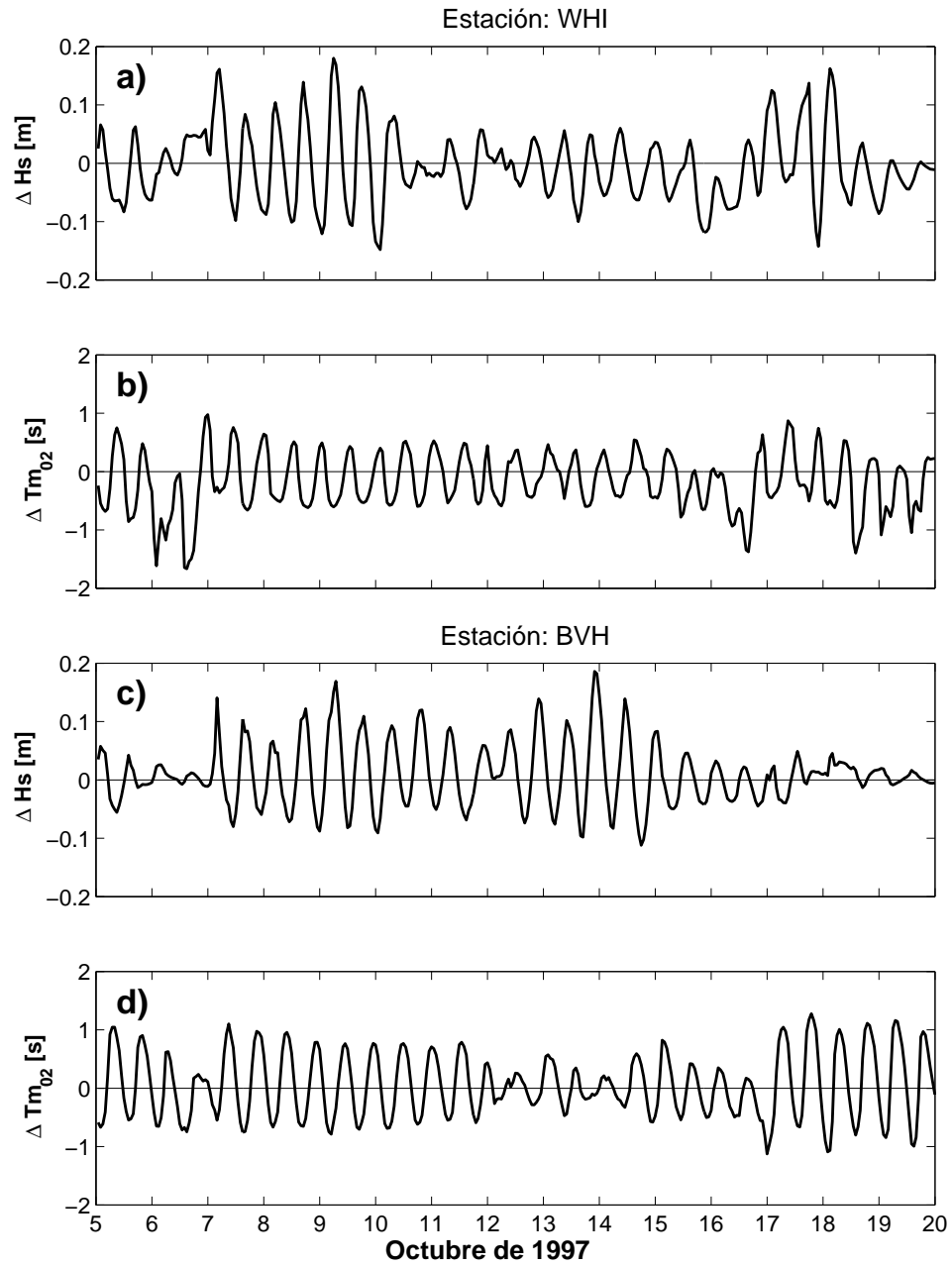


Figura 5: Series de tiempo de diferencias de H_s (ΔH_s) y $T_{m_{02}}$ ($\Delta T_{m_{02}}$) entre el experimento I y el experimento II (Exp. II - Exp. I), en las estaciones WHI (a y b) y BVH (c y d).

los experimentos I y III, así como las mediciones realizadas durante el periodo de análisis se muestran en la figura 7 para las estaciones WHI y BVH. En términos generales se puede observar que H_s y $T_{m_{02}}$ están subestimados en el experimento III, los resultados son similares a los obtenidos en los experimentos I y II.

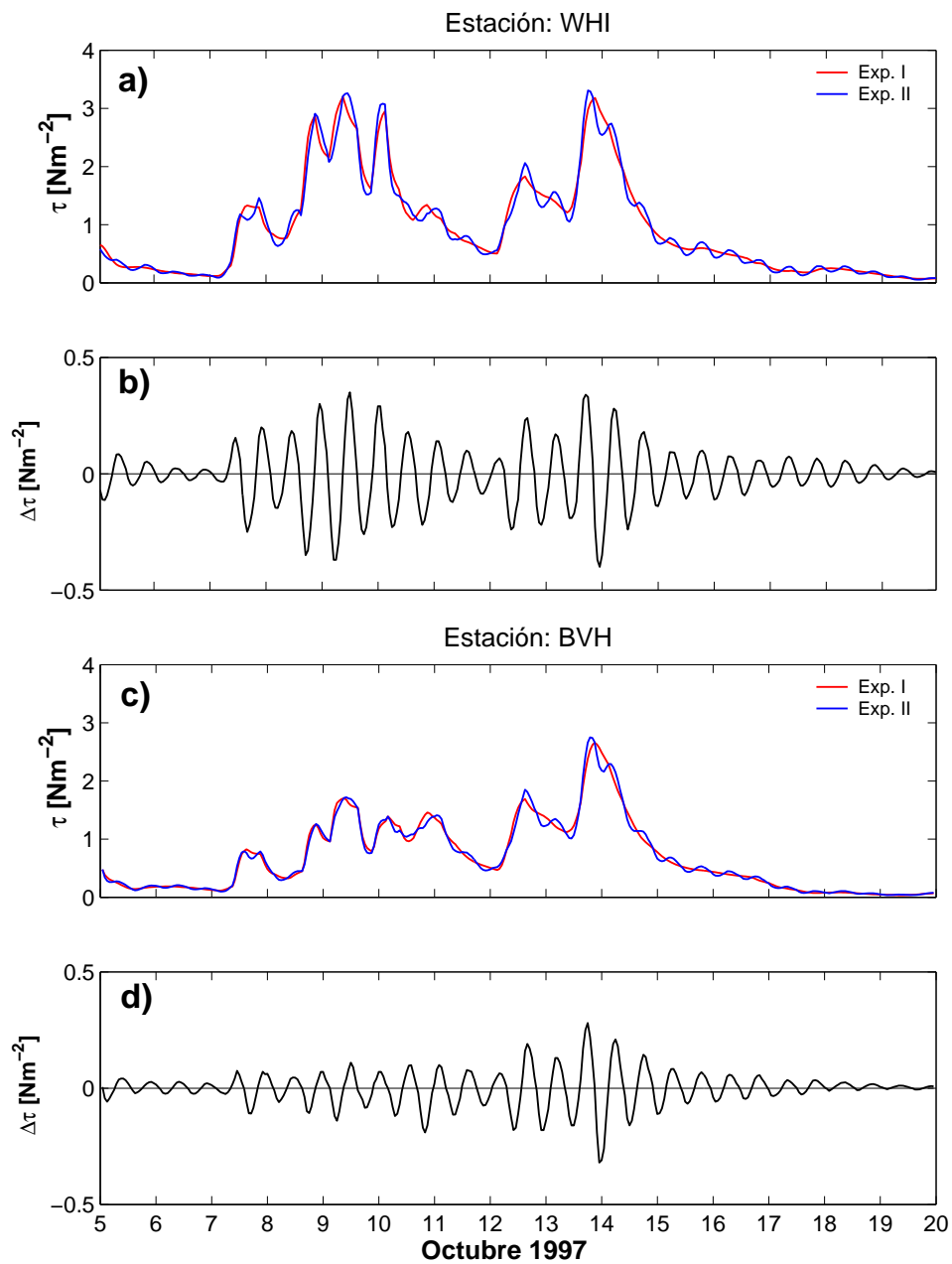


Figura 6: Series de tiempo de τ para a) estación WHI, y c) estación BVH, experimento I (línea roja) y experimento II (línea azul). Diferencias de esfuerzos en el fondo ($\Delta\tau$) entre los experimentos II y I para b) estación WHI y d) estación BVH

Las diferencias en H_s y T_{m02} entre los experimentos III y I son más notorias en la estación BVH en comparación con la estación WHI, especialmente durante los periodos de tormenta. El coeficiente de disipación (C_f) se considera constante en el experimento

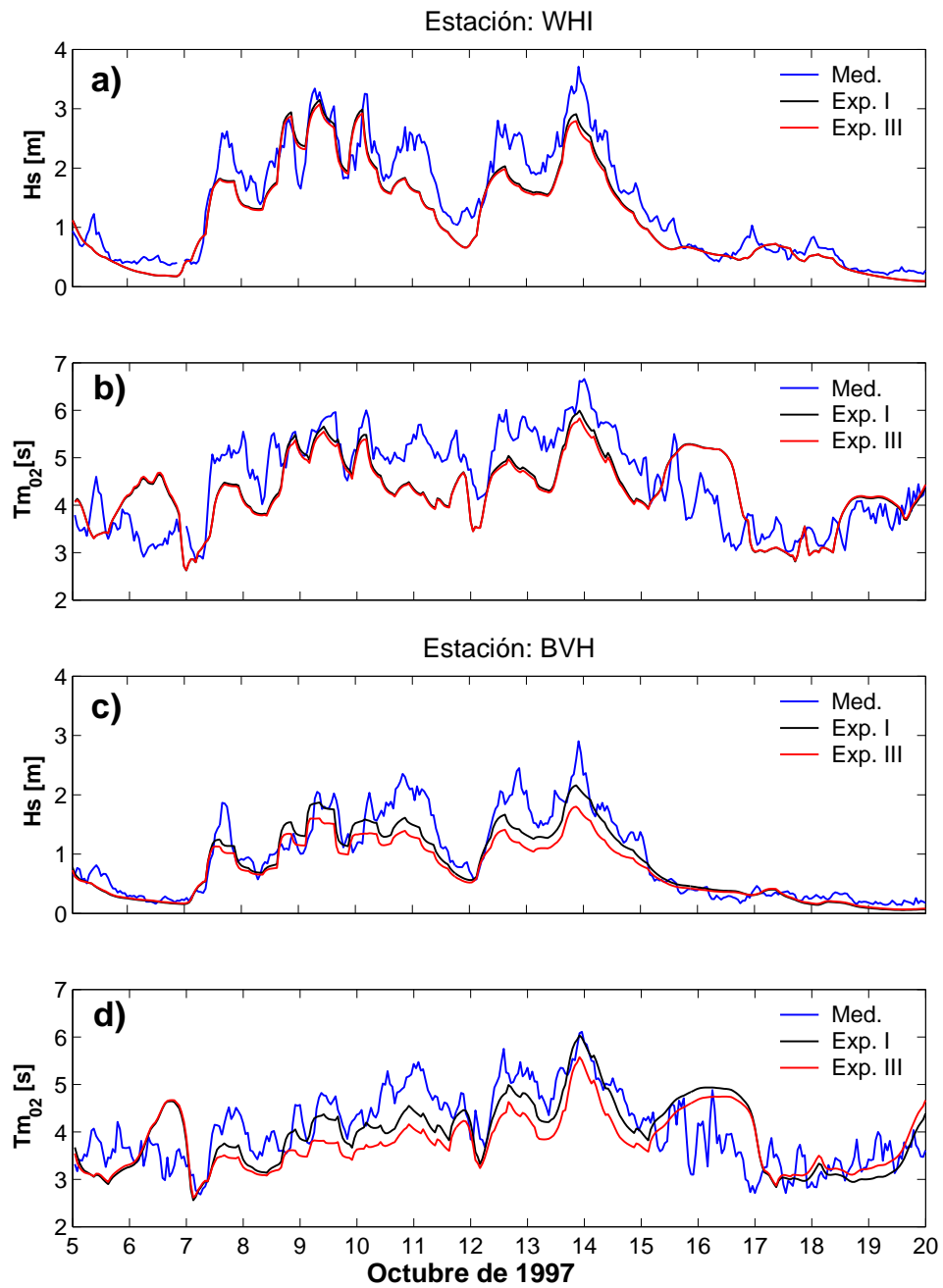


Figura 7: Series de tiempo de a) H_s y b) T_{m02} para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos I y III respectivamente

I mientras que en el experimento III la formulación utilizada (CJ85) toma en cuenta las características de las olas y la rugosidad del fondo, esto genera modificaciones en el balance de energía (debido a que el término fuente S_{bf} del WAMC4 cambia) y por lo

tanto el espectro se modifica, como la H_s y el T_{m02} se calculan a partir de los momentos espectrales (ver apéndice A) también cambian. Debido a que los dos experimentos (I y III) son desacoplados, no se observan oscilaciones asociadas a la marea en las series de tiempo de T_{m02} .

Las series de tiempo de esfuerzos en el fondo calculados durante los experimentos I (τ) y III ($\bar{\tau}$, τ_{\max}) en las estaciones WHI y BVH se muestran en la figura 8. En la estación WHI, τ_{\max} fue generalmente mayor que el esfuerzo calculado en el experimento I, las diferencias entre τ_{\max} y los esfuerzos calculados en el experimento I son mayores durante el evento de viento suroeste (7-11 de octubre) que durante el evento con viento del noroeste (13-15 octubre). Durante periodos de olas bajas (5-8 y 16-20 octubre) los esfuerzos en el fondo fueron similares en ambos experimentos.

Para la estación BVH, los τ_{\max} calculados durante el experimento III son similares a los calculados durante el experimento I. En ocasiones y principalmente durante condiciones de olas relativamente altas (9-12 de octubre, por ejemplo), el esfuerzo en el fondo determinado durante el experimento I fue mayor que τ_{\max} .

En los eventos de viento suroeste (9-12 de octubre), τ_{\max} es mayor en la estación WHI que el simulado en la estación BVH, inducido por las olas altas generadas debido al tamaño del fetch asociado con la estación WHI. Para el caso del evento con viento del noroeste, el fetch activo es similar en ambas estaciones. Sin embargo las olas son más altas en la estación WHI cuando se comparan con la estación BVH, esto puede deberse a que el efecto de fondo induce mayor disipación de energía en la estación BVH.

El esfuerzo promedio ($\bar{\tau}$) calculado durante el experimento III es siempre menor que el esfuerzo en el fondo calculado en el experimento I. Esto muestra que al utilizar el valor promedio ($\bar{\tau}$) para determinar por ejemplo, transporte de sedimentos, éste podría ser subestimado.

Para comparar la distribución espacial del esfuerzo se determinó la diferencia entre

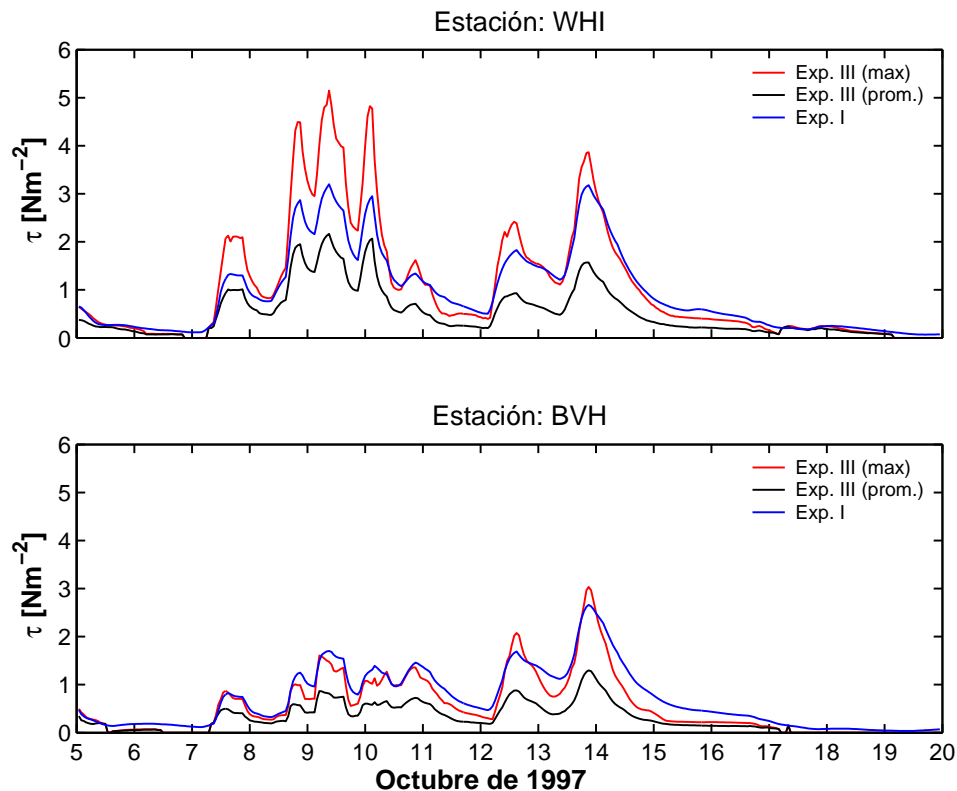


Figura 8: Series de tiempo de τ_{\max} (línea roja), $\bar{\tau}$ (línea negra) para el experimento III y τ (línea azul) para el experimento I, en las estaciones WHI (panel superior) y BVH (panel inferior).

los esfuerzos máximos calculados en el experimento III (τ_{\max}) menos los obtenidos del experimento I ($\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau$). Se seleccionaron fechas y horas específicas asociadas a oleaje extremo para cada uno de los eventos meteorológicos importantes (viento del suroeste y del noroeste). La evolución del campo de olas obtenido del experimento IV se muestra en la figura 9, para las 09:00, 12:00 y 18:00 horas del 9 de octubre en los paneles de la izquierda (viento del suroeste) y para las 15:00, 18:00 y 21:00 horas del 13 de octubre en los paneles de la derecha (viento del noroeste). El código de colores representa la altura significativa de las olas y los vectores la dirección media del oleaje, la velocidad del viento proporcionada por la UKMO se considera uniforme en toda la malla fina y está representada por el vector en azul. La evolución de las diferencias de los campos de esfuerzos ($\Delta\tau$) se muestran en secuencia en la figura 10, para las mismas

fechas y horas que la figura anterior (los paneles de la izquierda corresponden al día 9 de y los de la derecha al día 13 de octubre). Los valores positivos muestran regiones donde τ_{\max} (Experimento III) fue mayor que el τ calculado en el experimento I.

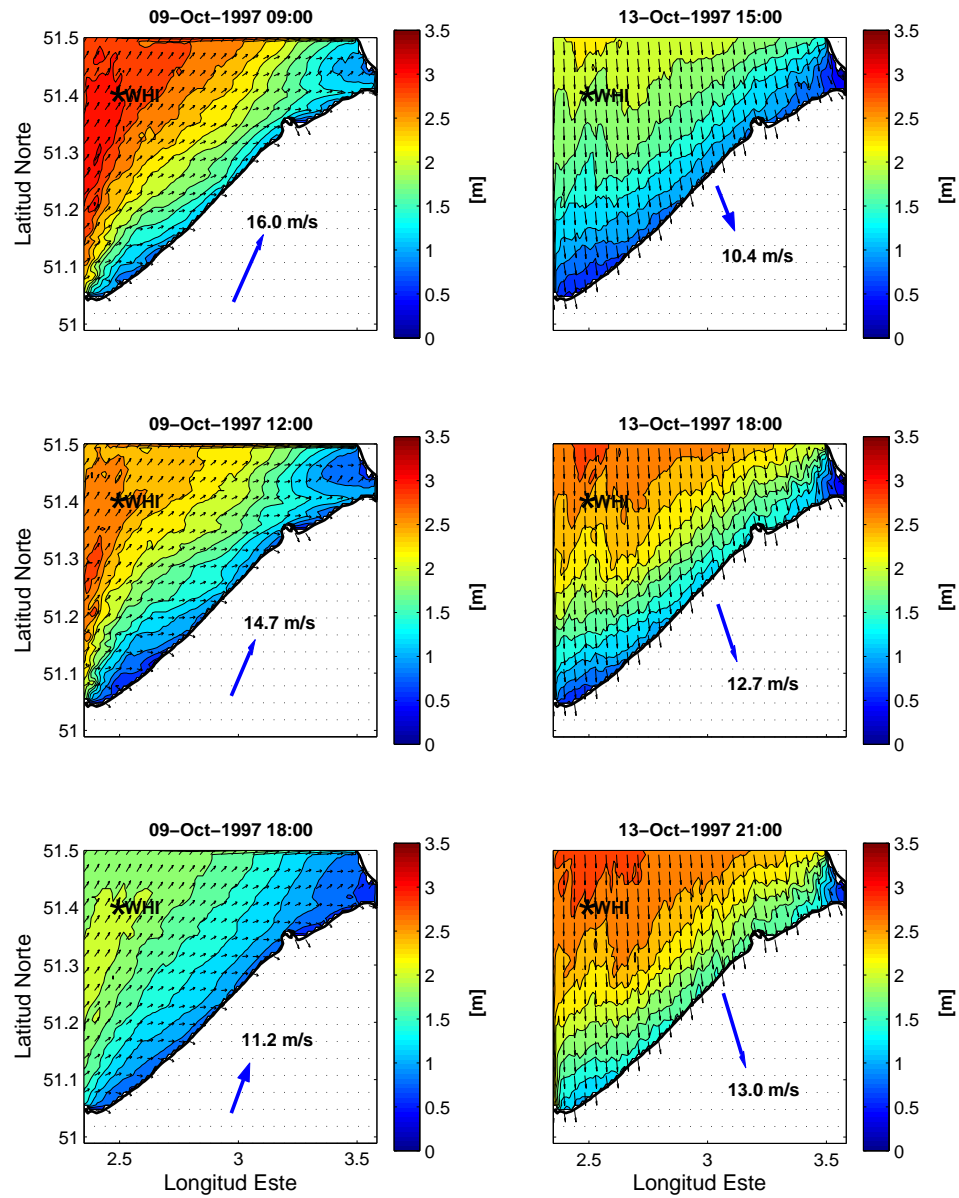


Figura 9: Distribución espacial de H_s (código de colores y contornos), dirección promedio de las olas (vectores en negro) y condiciones prevalecientes de viento en la estación WHI (vectores en azul). Los paneles de la izquierda representan condiciones típicas para viento suroeste a las 09:00, 12:00 y 18:00 horas de octubre 9, mientras que los de la derecha corresponden a condiciones de viento noroeste a las 15:00, 18:00 y 21:00 horas de octubre 13.

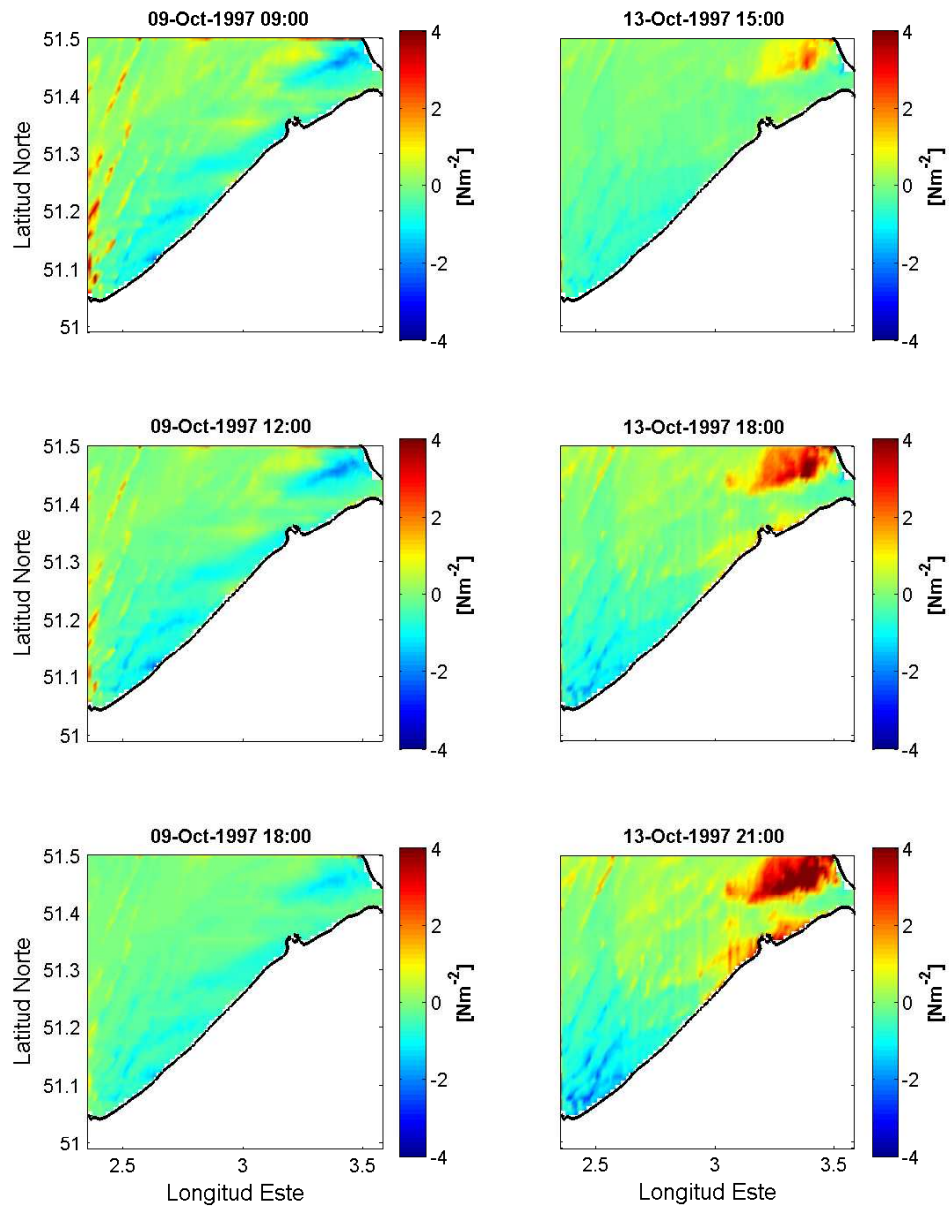


Figura 10: Campos de diferencias de esfuerzos ($\Delta\tau$) entre el experimento III y el experimento I, para condiciones de viento suroeste (paneles de la izquierda) y noroeste (paneles de la derecha). Las fechas y horas seleccionadas son las mismas que las de la figura 9.

Durante los vientos del suroeste (paneles de la izquierda en la figura 10), los valores positivos se observan generalmente lejos de la costa para los tres paneles, mientras que los valores negativos se presentan cerca de la costa. Se observa el efecto de las barras de arena principalmente para las 09:00 y 12:00 horas, para este evento se observan

resultados positivos en la porción oeste del área de interés. Los valores positivos cubren menos área durante el evento de viento suroeste a las 18:00 horas, cuando la altura del oleaje disminuye considerablemente, la influencia se muestra ligeramente sólo en las barras más prominentes en la porción suroeste.

Los paneles de la derecha en la figura 10 representan los resultados ($\Delta\tau$) para las condiciones de viento noroeste (octubre 13 a las 15:00, 18:00, y 21:00 horas). El campo de olas muestra mayor energía en el segundo (18:00 horas) y último panel (21:00 horas). Conforme el campo de olas se incrementa, el esfuerzo en el fondo durante el experimento III también se incrementa mostrando amplias áreas de valores positivos de ($\Delta\tau$), especialmente en la mitad superior. Es evidente que los bancos de arena localizados al noreste del área influyen en el cálculo del esfuerzo en el fondo a través del coeficiente de fricción (C_f) mostrado en la ecuación (6), especialmente cuando las olas se aproximan del norte.

IV.3. Experimentos I y IV

Se realizó una comparación entre los experimentos I (experimento de referencia) y IV (sistema acoplado). En el experimento IV el modelo HD transfirió información del nivel del mar (η) y las componentes horizontales de la velocidad de la corriente (u , v) al WAMC4. Adicionalmente la función fuente para calcular la disipación de la energía por fricción con el fondo incluyó la formulación CJ85 para determinar el coeficiente de disipación, considerando el efecto de la interacción olas-corrientes por fricción con el fondo.

La figura 11 muestra las series de tiempo de H_s y T_{m02} obtenidas como resultados de los experimentos I y IV y las observaciones realizadas en las estaciones WHI y BVH. Las diferencias entre las H_s calculadas en los experimentos I y IV son más pequeñas en WHI que en BVH. Las diferencias en la estación BVH son mayores durante los periodos de tormenta, en especial durante el evento con viento noroeste (13-15 de octubre,

por ejemplo). En las diferencias entre las H_s de los experimento I y IV se encontraron pequeñas oscilaciones asociadas con las variaciones del nivel del mar debidas a la transferencia de η del HD al WAMC4. El efecto del acoplamiento también se observa en las series de tiempo de $T_{m_{02}}$ en ambas estaciones, las oscilaciones están relacionadas con la componente semidiurna de la marea a través del efecto Doppler.

Durante el experimento IV el esfuerzo en el fondo se calculó considerando el proceso de interacción olas-corrientes. Se encontraron diferencias significativas entre los resultados del experimento IV y el de referencia (experimento I).

En la figura 12 se muestran las series de tiempo del esfuerzo máximo en el fondo (τ_{\max}) y el esfuerzo promedio en el fondo ($\bar{\tau}$) obtenidos del experimento IV, así como el esfuerzo en el fondo calculado durante el experimento I (τ) para las estaciones BVH y WHI. En condiciones de olas bajas (5-7 y 15-17 de octubre) los esfuerzos máximos y promedio son similares incluyendo la presencia de oscilaciones debidas a la variación en las corrientes y el nivel del mar. Las mayores diferencias se observan durante los periodos de tormenta.

En particular para los resultados en la estación WHI, los valores de τ del experimento I (línea azul en la figura 12), son siempre menores que los τ_{\max} obtenidos durante el experimento IV, en especial durante los periodos de tormenta (7-11 y 13-15 octubre).

Durante las condiciones de olas bajas en la estación BVH, el esfuerzo en el fondo obtenido durante el experimento IV (máximo y promedio) muestran una fuerte influencia del efecto de la marea, los valores máximos alcanzan valores similares a los que se obtienen en condiciones de olas altas. Por ejemplo los máximos valores alcanzados en el experimento IV durante la primer parte del periodo de simulación (5-7 de octubre) son del orden de 3Nm^{-2} mientras que el esfuerzo en el fondo del experimento I es sólo de 0.2Nm^{-2} . Influencia similar de las condiciones de marea se observan para otros periodos de olas bajas (15-17 de octubre, por ejemplo).

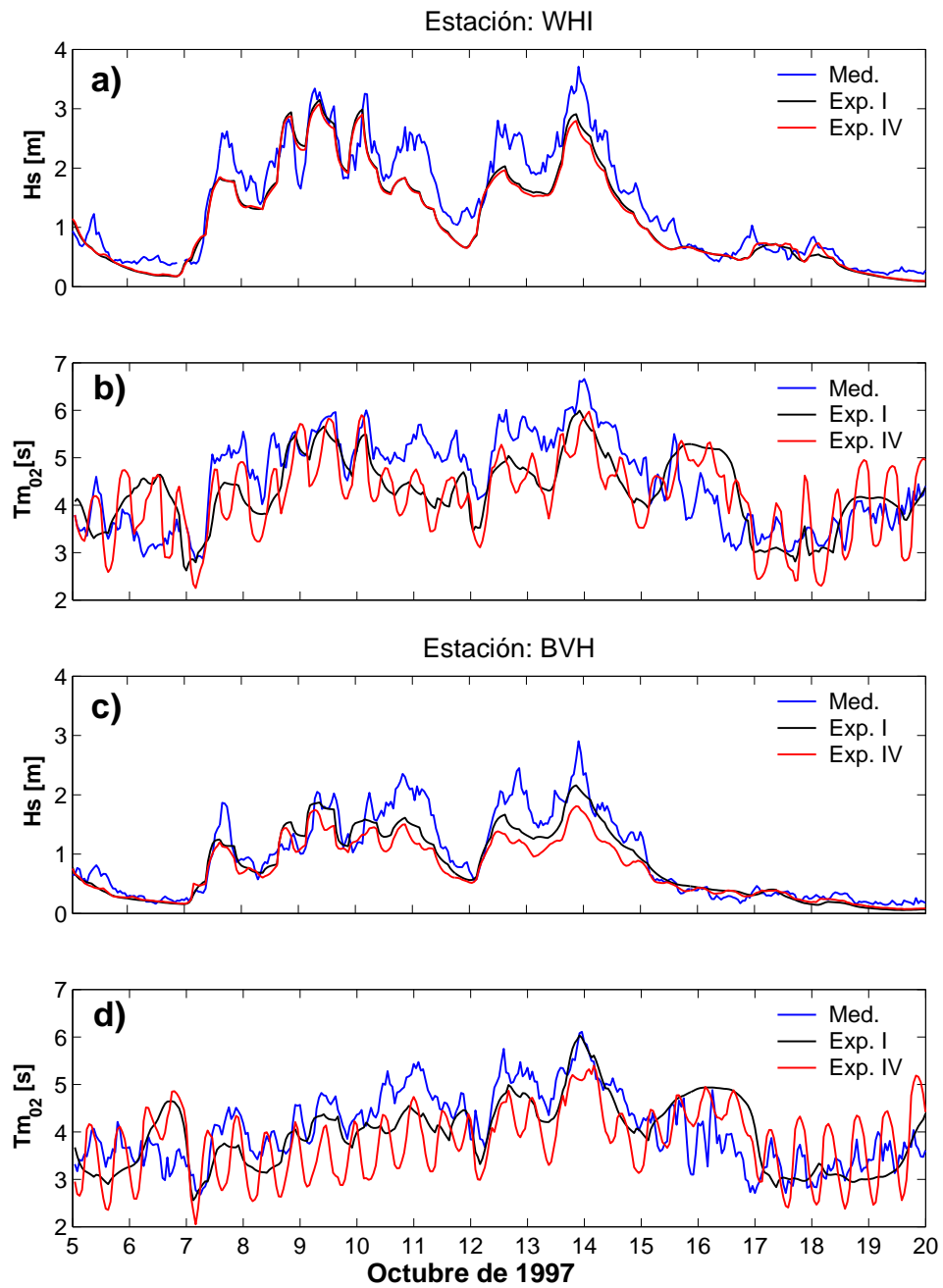


Figura 11: Series de tiempo de a) H_s y b) $T_{m_{02}}$ para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos I y IV respectivamente.

Durante los periodos de tormenta, los valores de los esfuerzos en la estación BVH son más bajos que en WHI. Sin embargo, durante condiciones de olas bajas la situación se invierte, se obtienen valores altos de los esfuerzos en el fondo en la estación BVH, que

están asociados con la corriente de marea. En general las olas son más bajas en la estación más somera (BVH), adicionalmente, se observan máximos primarios y secundarios de forma alternada para los esfuerzos en el fondo durante las condiciones de olas bajas en la estación BVH, este no es el caso para la estación WHI.

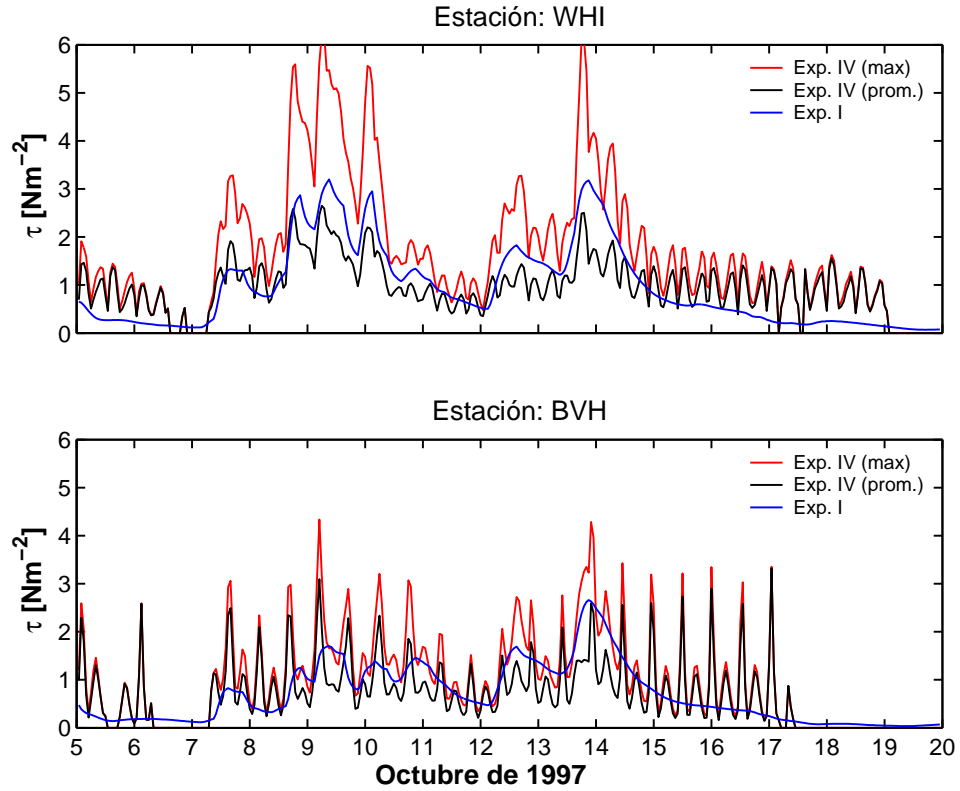


Figura 12: Series de tiempo de τ_{\max} (línea roja), $\bar{\tau}$ (línea negra) para el experimento IV y τ (línea azul) para el experimento I, en las estaciones WHI (panel superior) y BVH (panel inferior).

Para comparar los resultados de los esfuerzos en el fondo obtenidos del experimento IV (τ_{\max}) con los del experimento de referencia (τ calculado del experimento I) se determinaron las diferencias de los campos ($\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau$) y se muestran con el código de colores en la figura 13, también se muestra el campo de corrientes obtenido del modelo HD (vectores en negro), la elevación de la marea se presenta en el interior de cada panel como referencia. De forma similar a la figura 10, $\Delta\tau$ se muestra para las condiciones de viento suroeste en los paneles de la izquierda, y para las condiciones de

viento noroeste en los paneles de la derecha. La distribución espacial de $\Delta\tau$ se presenta para las mismas fechas y horas especificadas en la figura 10. Los campos de altura significativa y la dirección media de las olas para referencia, se muestran en la figura 9 (estos resultados corresponden al experimento IV).

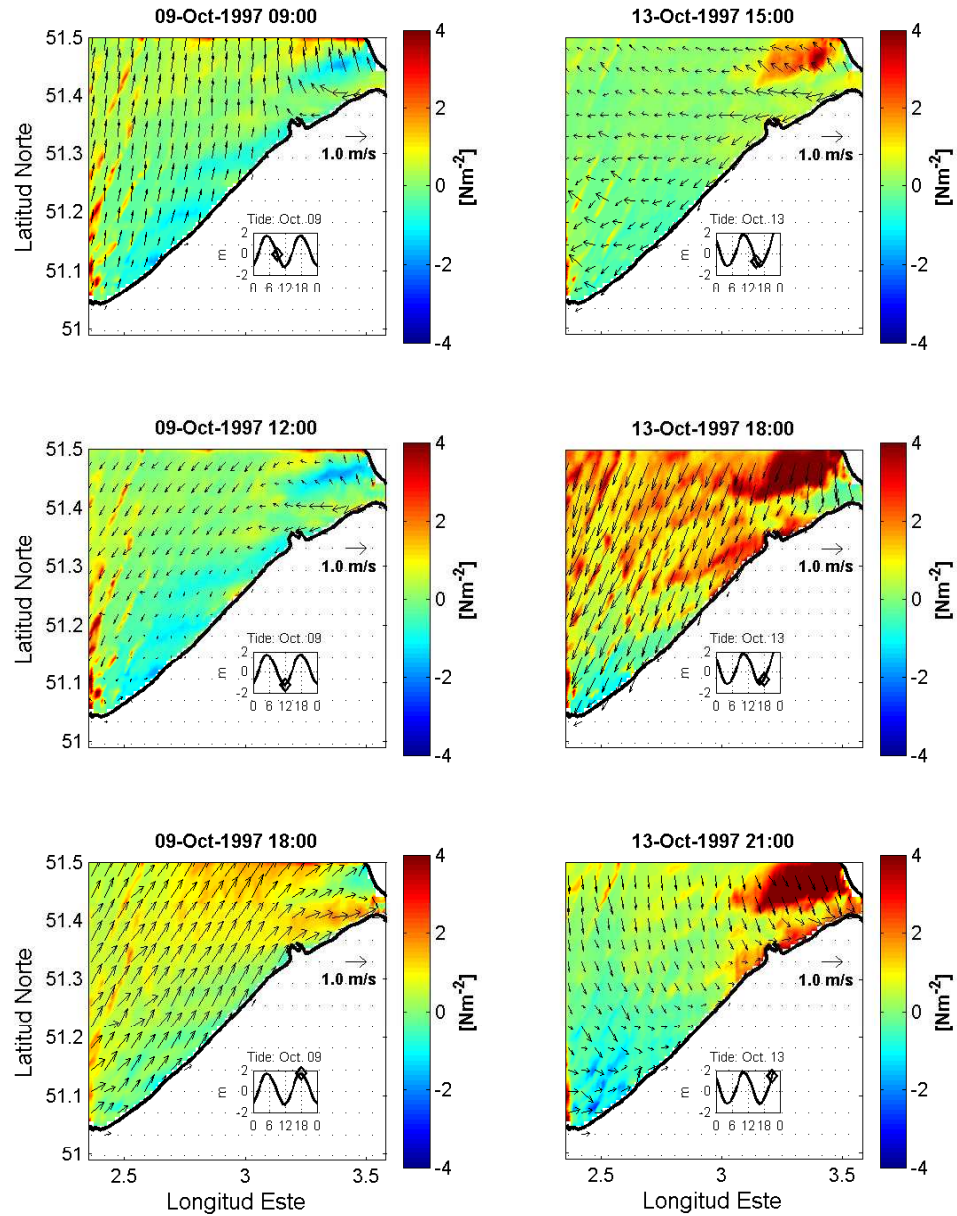


Figura 13: Campos de diferencias de esfuerzos ($\Delta\tau$) entre el experimento IV y el experimento I, para condiciones de viento suroeste (paneles de la izquierda) y noroeste (paneles de la derecha). Las fechas y horas seleccionadas son las mismas que las de la figura 9.

Para el evento de viento suroeste, en octubre 9 la altura de ola significativa disminuyó de las 09:00 a las 12:00 horas permaneciendo constante la dirección. A medida que las condiciones de marea cambian (pasa del nivel medio a marea baja) el campo de corrientes experimenta considerables cambios (de moderados a bajos en magnitud y de dirección norte a dirección suroeste). A las 18:00 horas, la altura significativa continúa disminuyendo (es la más baja de las tres horas seleccionadas) el campo de corrientes se intensifica y la dirección cambia a noreste (la misma dirección que la del oleaje), la marea se encuentra en su nivel más alto. Son evidentes los cambios en los esfuerzos en el fondo, como se muestra en la figura 13 (panel inferior a la izquierda). Las áreas con valores positivos para $\Delta\tau$ sólo se presentan en los bancos de arena y en las regiones de barras sumergidas para las 9:00 y las 12:00hrs, los resultados del experimento IV (τ_{\max}) fueron mayores que los del experimento de referencia (τ , calculado del experimento I) a las 18:00 horas, para prácticamente toda el área de estudio, sin embargo el efecto de los bancos de arena se observa débilmente.

Olas relativamente altas y corrientes moderadas bajo condiciones de marea baja inducen un incremento en el τ_{\max} comparado con τ , en particular en la zona de los bancos y barras de arena. Estas características se identifican claramente en los mapas de $\Delta\tau$ a las 9:00 y 12:00 horas.

Para las condiciones de viento del noroeste, en octubre 13, la altura de ola significativa se incrementa de las 15:00 a las 21:00 horas, mientras que el campo de corrientes fue de bajo a moderado a las 15:00 y 21:00 horas, y más intenso entre estos dos eventos (a las 18:00 horas).

Corrientes y olas relativamente bajas inducen valores altos de $\Delta\tau$ en la zona de los bancos de arena ubicados al noreste del área de estudio (a las 15:00 horas del 13 de octubre), estos se muestran como valores positivos. El efecto de corrientes intensas y olas altas se manifiesta por los valores positivos de $\Delta\tau$ en casi toda el área para octubre

13 a las 18:00 horas, con la característica particular de que la marea estuvo cerca de su nivel más bajo. Tres horas más tarde en contraste (corrientes débiles) las zonas de la barras de arena al suroeste del área de estudio no inducen valores altos de $\Delta\tau$ aún con las olas más altas de los 3 paneles de la derecha, la particularidad es que el nivel de marea es alto. Adicionalmente, valores positivos altos de $\Delta\tau$ sólo se observan en la región de los bancos de arena y en la parte superior del área costera bajo estudio, donde las olas alcanzan primero la parte norte del área de estudio.

La combinación de olas de altura moderada a altas y corrientes fuertes el 13 de octubre a las 18:00 horas proporciona un importante aumento de τ_{\max} (calculado del experimento IV) al compararlo con el esfuerzo en el fondo calculado en el experimento de referencia (experimento I). El nivel bajo de la marea se espera incrementa el esfuerzo en el fondo producido por las olas, por esta razón aún cuando las olas son altas durante el 13 de octubre a las 21:00 horas, no se encuentran valores altos positivos para $\Delta\tau$ debido principalmente a que el nivel de la marea se encuentra cerca de su punto más alto.

IV.4. Experimentos II y IV

Se realizó una comparación entre los resultados de los experimentos II y IV. En ambos experimentos el modelo HD transfirió información del nivel del mar (η) y las componentes horizontales de la velocidad de la corriente (u y v) al WAMC4. La diferencia fundamental entre los experimentos fue el cálculo del coeficiente de fricción C_f (ecuación 6). Para el experimento II se utilizó la formulación JONSWAP la cual considera el C_f constante, mientras que en el experimento IV se utilizó la formulación CJ85 que incluye el proceso de interacción entre las olas y las corrientes en el cálculo del C_f .

Al comparar las series de tiempo de H_s obtenidas de los experimentos II y IV se observaron pocas diferencias en la estación WHI, no así para la estación BVH donde las diferencias fueron del orden de 0.5m durante el evento asociado a viento proveniente

del noroeste, siendo mayores las alturas calculadas durante el experimento II. Al comparar las diferencias de campos de H_s se encontró que en la mayor parte de la malla de cálculo las H_s determinadas durante el experimento II fueron mayores, incrementándose las diferencias hacia las zonas someras. Esto se explica en términos del cálculo del C_f , (ecuación 6) el cual se incrementa al considerar la influencia de la corriente (experimento IV) y por lo tanto también se incrementa la pérdida de energía del oleaje por fricción con el fondo. En el cálculo de los esfuerzos el campo de corrientes juega un papel determinante, en general para campos de corrientes de magnitud moderada a intensa los esfuerzos calculados durante el experimento IV fueron mayores que los calculados durante el experimento II.

IV.5. Experimentos III y IV

Hasta aquí se han comparado los resultados de los experimentos numéricos que utilizaron la formulación CJ85 (desacoplado y acoplado) con el experimento de referencia (experimento I). En esta sección los resultados del experimento III (desacoplado) se comparan con los del experimento IV (acoplado). Ambos experimentos utilizan la formulación CJ85 para calcular la pérdida de energía por fricción con el fondo. Las series de tiempo de H_s y T_{m02} para las estaciones WHI y BVH se muestran en la figura 14. Las diferencias de H_s en la estación WHI son del orden de 0.05m mientras que en la estación BVH son del orden de 0.15m. El efecto del acoplamiento es más notorio para H_s en la estación BVH. Las oscilaciones inducidas por la componente semidiurna de la marea son evidentes en las series de tiempo de T_{m02} en ambas estaciones.

Los esfuerzos máximos en el fondo (τ_{\max}) calculados en los experimentos III y IV en ambas estaciones (WHI y BVH) se muestran en la figura 15. En general los esfuerzos calculados durante el experimento IV fueron mayores que los calculados en el experimento III. Las diferencias son mayores en la estación BVH, aún en condiciones de olas bajas (días 5-7 y 15-17), durante estos periodos los esfuerzos están controlados

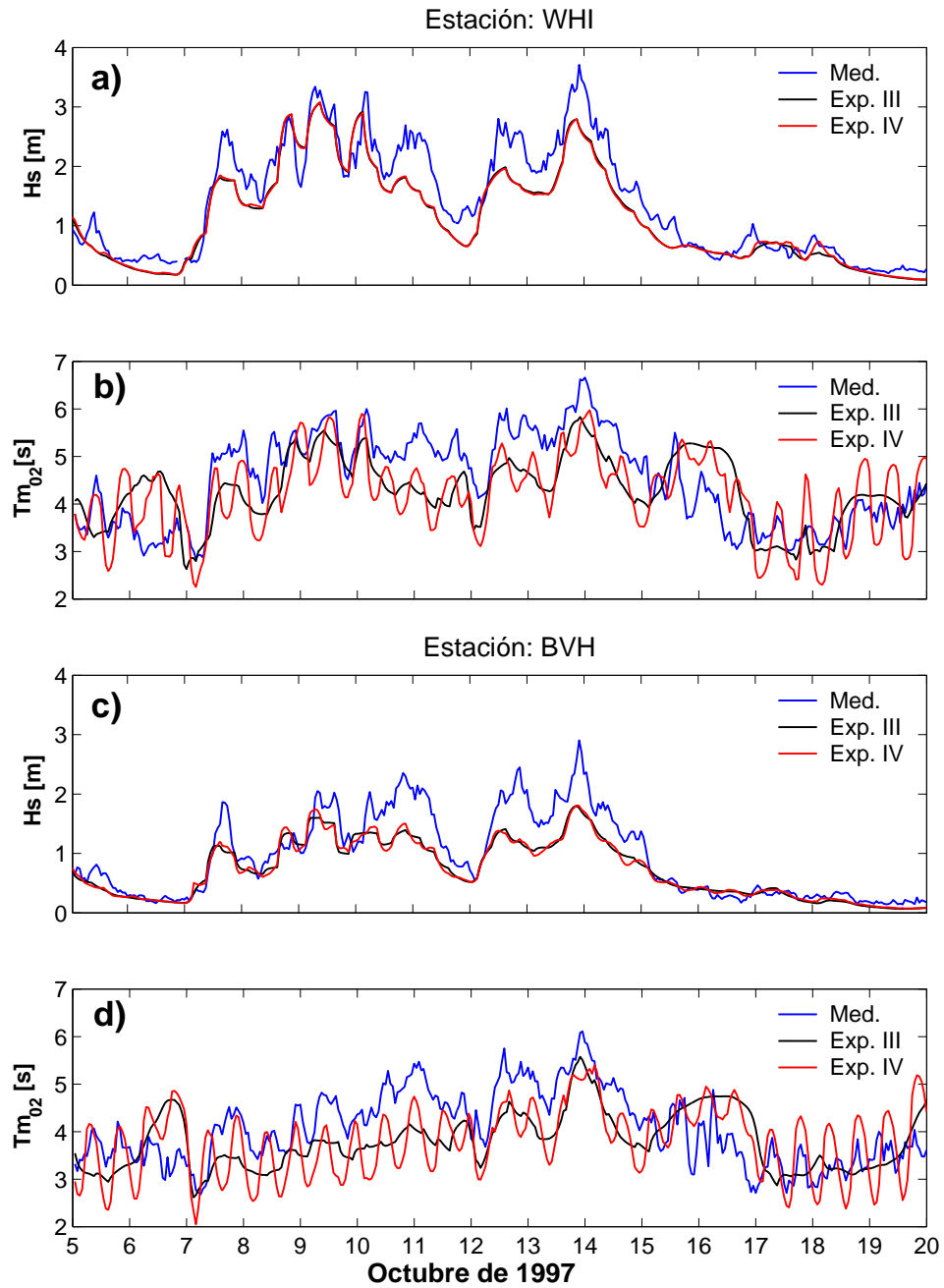


Figura 14: Series de tiempo de a) H_s y b) T_{m02} para la estación WHI, y para la estación BVH (c y d, respectivamente), la línea azul representa las mediciones y las líneas negra y roja los resultados de los experimentos III y IV respectivamente.

principalmente por la corriente de marea. Durante los periodos de tormenta los esfuerzos son generados principalmente por las velocidades orbitales de las olas, lo que se puede deducir de las diferencias entre los esfuerzos en el fondo calculados entre los experimentos

III y IV, éstas son pequeñas y no muestran oscilaciones (días 8-11, en la estación WHI). Durante los periodos de altura de ola menores en la estación WHI las diferencias en los esfuerzos son más pronunciadas (días 5-7, 15-17).

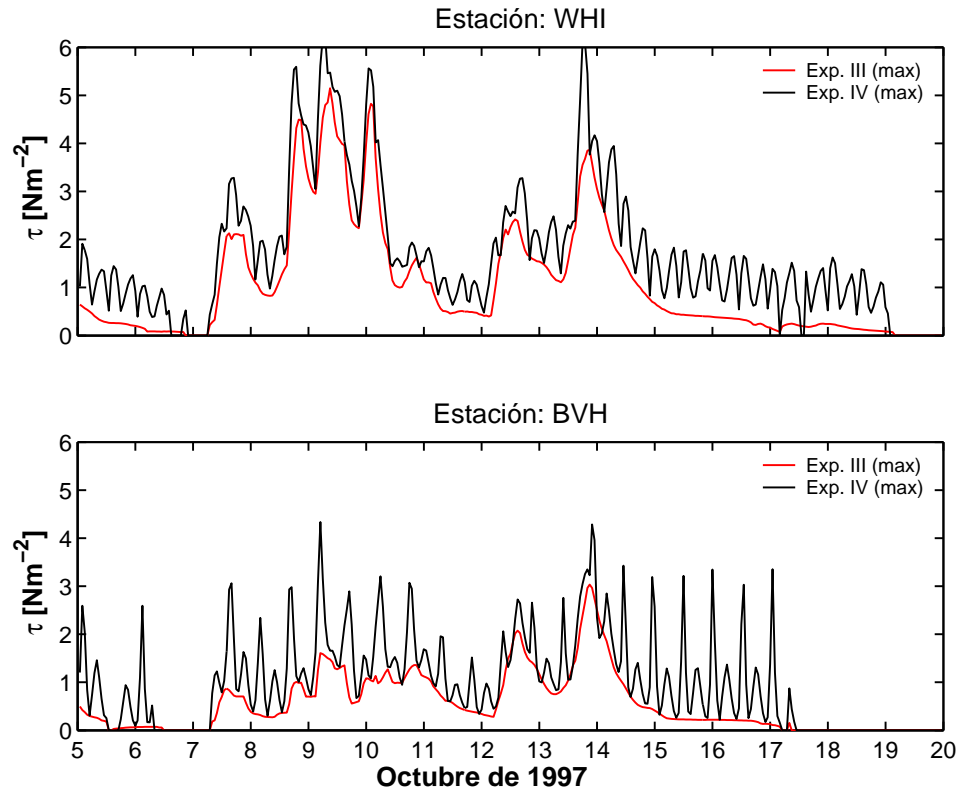


Figura 15: Series de tiempo de τ_{\max} en las estaciones WHI (panel superior) y BVH (panel inferior), para el experimento III (línea roja) y para el experimento IV (línea negra).

En la figura 15 se observa que en la estación WHI las diferencias entre los esfuerzos en el fondo son más grandes durante el evento de viento noroeste, en BVH ocurre lo contrario, esta tendencia se debe a la distribución de las alturas de las olas predichas por el sistema desacoplado y acoplado (ver figura 14).

Los campos de diferencias de esfuerzos ($\Delta\tau$) entre los experimentos IV y III para las tres fechas y horas seleccionadas en octubre 9 y 13 se muestran en la figura 16, también se muestran las condiciones de marea y los campos de corrientes (los paneles de la izquierda corresponden al evento con viento suroeste y los de la derecha al evento

con viento noroeste).

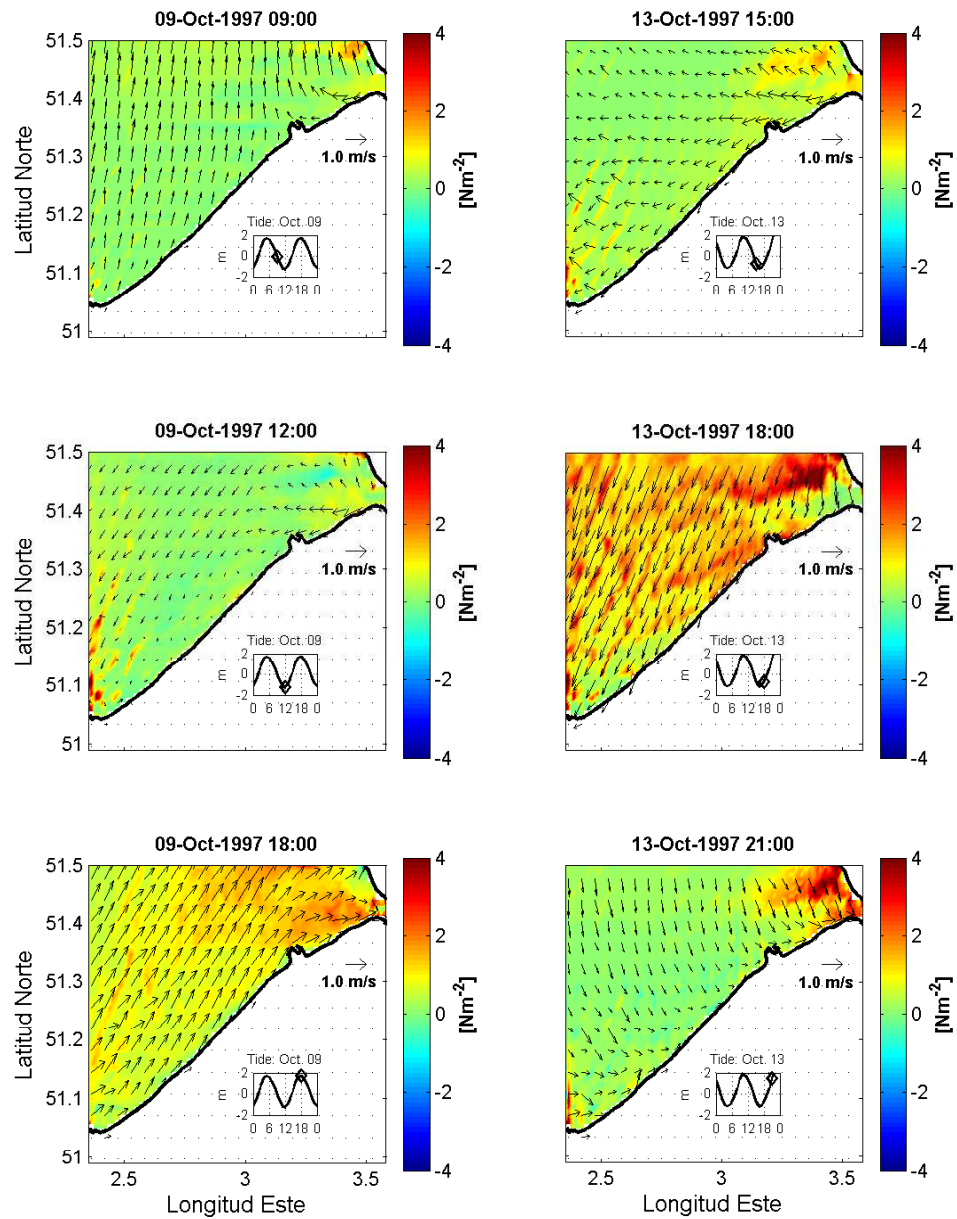


Figura 16: Campos de diferencias de esfuerzos ($\Delta\tau$) entre el experimento IV y el experimento III, para condiciones de viento suroeste (paneles de la izquierda) y noroeste (paneles de la derecha). Las fechas y horas seleccionadas son las mismas que las de la figura 9.

Se observa de la figura 9 que la altura de ola disminuye y la dirección permanece casi constante el 9 de octubre de las 9:00 a las 18:00 horas (evento de viento suroeste). Se puede ver que también la velocidad del viento disminuye gradualmente. Las diferencias

entre los campos de esfuerzos calculados durante los experimentos IV y III, a las 9:00 horas es muy pequeña, cercana a cero en la mayor parte del área de estudio (panel superior izquierdo en la figura 16).

Hay valores ligeramente positivos de $\Delta\tau$ sobre los bancos de arena (porción noreste del área de estudio), este efecto está asociado con el campo de corrientes el cual incrementa el esfuerzo en el fondo para el experimento IV a través de la interacción olas-corrientes considerada en la formulación CJ85.

A las 12:00 horas los valores positivos de $\Delta\tau$ son más notorios al suroeste, sobre las barras de arena. Los campos de corrientes están en dirección opuesta a las olas, y algunos valores negativos de $\Delta\tau$ se presentan sobre los bancos de arena (porción noreste de la zona de estudio). Como el nivel del mar se encuentra en su punto más bajo, esto sugiere que la profundidad juega un papel importante en la intensificación del esfuerzo en el fondo. A las 18:00 horas el campo de corrientes es intenso y los valores positivos de $\Delta\tau$ son más pronunciados, los campos de corrientes muestran la misma dirección que las olas. En este caso se espera una intensificación de los esfuerzos debido al proceso de interacción olas-corrientes, de acuerdo con la ecuación (44) el parámetro m indica que la fuerza de la interacción depende de la dirección relativa entre las olas y las corrientes, siendo ésta más intensa conforme se reduce el ángulo entre la dirección de las olas y las corrientes. Aún si las olas son relativamente bajas (comparadas con las condiciones de las 9:00 y las 12:00 horas), $\Delta\tau$ es generalmente mayor que para las condiciones de las 9:00 y las 12:00 horas.

Las diferencias de los esfuerzos en el fondo ($\Delta\tau$) para las condiciones de viento noroeste, se muestran en los paneles de la derecha de la figura 16. La velocidad del viento se incrementa de 10 m/s a 13 m/s de las 15:00 a las 21:00 horas en octubre 13. Las alturas de las olas también se incrementan durante este periodo de tiempo.

Los máximos esfuerzos en el fondo calculados durante el experimento IV se ob-

tienen cuando las olas son de altura moderada, las corrientes son fuertes y están en la misma dirección (octubre 13 a las 18:00 horas), no sólo sobre los bancos de arena, (porción noreste del área de estudio) y en las barras de arena (región suroeste), sino prácticamente en toda el área de interés se observan valores positivos de $\Delta\tau$. A las 15:00 horas la dirección de la corriente es casi perpendicular a la dirección de propagación de las olas y se observan valores positivos de $\Delta\tau$ principalmente sobre los bancos y las barras de arena, donde se presentan corrientes intensas. A las 21:00 horas la marea se encuentra cerca de su punto más alto y la velocidad de la corriente es moderada con prácticamente la misma dirección que las olas. Sin embargo las diferencias de los esfuerzos con el fondo $\Delta\tau$, son cercanas a cero con excepción de los bancos de arena.

V. Conclusiones

El objetivo del trabajo fue cuantificar los cambios que se producen en los esfuerzos en el fondo cuando hay una superposición de flujos de diferentes escalas temporales y espaciales (olas y corrientes generadas por viento o marea). Se utilizó un sistema que consiste de un modelo espectral de olas (WAMC4, modificado para su aplicación en aguas someras), acoplado a un modelo hidrodinámico bidimensional forzado por el viento y la marea (HD). El sistema transfiere en tiempo y espacio la elevación de la superficie libre y las componentes horizontales de la velocidad de la corriente del HD al WAMC4, esto significa que el sistema fue acoplado en un sentido. En el término de disipación de energía por fricción con el fondo del WAMC4, se implementó la formulación propuesta por Christoffersen y Jonsson (1985) (CJ85), que considera explícitamente el proceso de interacción olas–corrientes.

Se realizaron cuatro experimentos numéricos, dos de ellos (I y III) utilizaron la versión desacoplada del sistema (sin intercambio de información entre los modelos), la diferencia fue la formulación implementada para calcular el coeficiente de disipación (C_f), en el término de pérdida de energía por fricción con el fondo del WAMC4 (S_{bf}), una de las formulaciones considera que el C_f es constante (JONSWAP)(experimento I), la otra considera explícitamente la interacción entre olas y corrientes (CJ85) (experimento III). En los dos experimentos restantes (II y IV) se utilizó la versión acoplada del sistema y las mismas formulaciones para calcular el coeficiente de disipación que en los experimentos I y III respectivamente.

Los efectos del acoplamiento entre el modelo de olas y el modelo hidrodinámico se observaron claramente en las series de tiempo de H_s y T_{m02} calculadas durante los experimentos II y IV (experimentos acoplados), aún en el caso en el que se utilizó la formulación JONSWAP para calcular la pérdida de energía por fricción con el fondo (experimento II). Las oscilaciones presentes en las series de H_s , T_{m02} y τ están asociadas

con la componente semidiurna de la marea. Las series de tiempo de H_s y τ mostraron diferencias significativas entre los experimentos II y I para los periodos de olas altas, y la influencia de la marea se observó en todo el periodo de simulación.

Cuando se utiliza el sistema acoplado y la formulación JONSWAP en el WAMC4, la única influencia del campo de corrientes es mediante la advección de la energía en el modelo de olas, mientras que el cálculo del término de disipación de la energía por fricción con el fondo se ve afectado por la variación de la profundidad debida a la marea. Las diferencias en los esfuerzos con el fondo entre los experimentos I y II fueron del orden de 0.5N/m^2 . Las mayores diferencias en los esfuerzos están asociadas con los periodos de olas altas que se presentaron durante las tormentas (del 7 al 11 y del 12 al 15 de octubre), especialmente en la estación WHI, pues la altura significativa es ligeramente mayor que la observada en la estación BVH.

Cuando se utiliza el sistema desacoplado (experimentos I y III) las diferencias entre los resultados del modelo y las mediciones son más pronunciadas en la estación más somera (BVH), esto se debe principalmente a la disipación de la energía por fricción con el fondo. El esfuerzo en el fondo calculado cuando se utiliza la formulación CJ85 muestra, en general, valores mayores que los que se obtienen cuando se utiliza la formulación JONSWAP. Para la condición de viento suroeste el esfuerzo en el fondo se intensifica sobre las barras y bancos de arena cuando se utiliza la formulación CJ85. Para la condición de viento noroeste se observan resultados similares, intensificación de los esfuerzos en el fondo en zonas someras en la porción noreste del área de simulación.

Los resultados mostraron claramente que el uso de la formulación que considera el proceso de interacción olas corrientes en el cálculo de los esfuerzos en el fondo, tiene un efecto significativo en la determinación de los mismos. En general los esfuerzos se subestiman cuando se calculan utilizando la formulación JONSWAP, cuyo uso es común en la mayoría de los modelos operacionales. Aún cuando no se cuenta con mediciones

que permitan hacer comparaciones con los resultados numéricos, se considera que la formulación CJ85 incluye la mayor parte de la física que interviene en el cálculo de los esfuerzos con el fondo en un ambiente donde interactúan olas y corrientes.

Al comparar los resultados de los experimentos III y IV (ambos utilizan la formulación CJ85), se encontró que los esfuerzos en el fondo calculados por el experimento IV (sistema acoplado) son mayores que en el experimento III (sistema desacoplado), en particular cuando el campo de corrientes está en la misma dirección que el campo de olas, como por ejemplo el panel medio de los paneles de la derecha de la figura 16. El incremento es moderado sobre los bancos y barras de arena para otras direcciones del campo de corrientes. Es evidente que el campo de oleaje juega un papel parcialmente importante en el cálculo de los esfuerzos en el fondo. Se encontraron incrementos significativos en los esfuerzos en el fondo, para campos de altura de olas de bajas a moderadas bajo condiciones de viento suroeste (ver panel inferior izquierdo en la figura 16).

Referencias

- Akima, H. (1991). A method of univariate interpolation that has the accuracy of a third-degree polynomial. *ACM Trans. Math. Softw.*, **17**(3): 341–366.
- Battjes, J. (1994). Shallow water wave modelling. En: *Proc. Int. Symp.: Waves - Physical and Numerical Modelling, Vol. I*, páginas 1–23, Univ. of British Columbia, Vancouver, agosto 21–24.
- Cardone, V. J. y Resio, D. T. (1998). An assessment of wave modelling technology. En: *Proceedings of the 5th International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting*, página 468–495, Melbourne, Florida, enero 26–30.
- Choi, B. H., Eum, H. M., y Woo, S. B. (2003). A synchronously coupled tide-wave-surge model of Yellow Sea. *Coastal Engineering*, **47**: 381–398.
- Christoffersen, J. B. y Jonsson, I. G. (1985). Bed friction and dissipation in a combined current and wave motion. *Ocean Engineering.*, **12**(5): 387–423.
- Davies, A. M. y Lawrence, J. (1994). Examining the influence of wind and wave turbulence on tidal currents, using a three-dimensional hydrodynamic model including wave-current interaction. *J. Phys. Oceanogr.*; **24**: 2441–2460.
- Flather, R. (1981). Results from a model of the North East Atlantic relating to the Norwegian Coastal Current. En: *Proceeding of the Norwegian Coastal Current Symposium, Vol II*, página 427–458, University of Bergen, Bergen, septiembre 9-12, 1980.
- Gelci, R., Cazalé, H., y Vassal, J. (1957). Prévion de la houle. La méthode des densités spectroangulaires. *Bulletin d'information du Comité central d'Océanographie et d'Etude des Côtes*, **9**: 416–435.

- Graber, H. C. y Madsen, O. S. (1988). A finite-depth wind-wave model. part 1: Model description. *J. Phys. Oceanogr.*, **18**: 1,465–1,483.
- Grant, W. D. y Madsen, O. S. (1979). Combined wave and current interaction with a rough bottom. *J. Geophys. Res.*, **84**: 1797–1808.
- Hasselmann, K. (1962). On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, part 1: General theory. *J. Fluid Mech.*, **12**: 481–501.
- Hasselmann, K. (1974). On the spectral dissipation of ocean waves due to whitecapping. *Boundary Layer Meteorol.*, **6**: 107–127.
- Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D. E., Enke, K., Ewing, J. A., Gienapp, H., Hasselmann, D. E., Kruseman, P., Meerburg, A., Müller, P., Olbers, D. J., Richter, K., Sell, W., y Walden, H. (1973). Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, **8**(12): 1–95. Suppl. A.
- Hasselmann, S. y Hasselmann, K. (1985). Computation and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. part I: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer. *J. Phys. Oceanogr.*, **15**: 1369–1377.
- Jonsson, I. G. (1990). Wave-current interactions. *The Sea*. Ocean Engineering Science. En: B. LeMehaute and D.M. Hanes (Eds.), Vol. **9A**, J. Wiley and Sons, New York, 65–120.
- Komen, G. J., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S., y Janssen, P. A. E. M. (1994). *Dynamics and modelling of ocean waves*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Longuet-Higgins, M. S. y Stewart, R. W. (1964). Radiation stress in water waves, a physical discussion with applications. *Deep-Sea Research*, **11**: 529–563.

- Luo, W. y Monbaliu, J. (1994). Effects of the bottom friction formulation on the energy balance for gravity waves in shallow water. *J. Geophys. Res.*, **99**(C9): 18,501–18,511.
- Malarkey, J. y Davies, A. G. (1998). Modelling wave-current interactions in rough turbulent bottom boundary layers. *Ocean Engineering.*, **25**(2–3): 119–141.
- Miles, J. W. (1957). On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.*, **3**: 185–204.
- Monbaliu, J., Zhang, M. Y., De Becker, K., Hargreaves, J., Luo, W., Flather, R., Carretero, J. C., G.-L. M., Lozano, I., Stawarz, M., Günther, H., Rosenthal, W., y Ozer, J. (1997). Wam model intercomparisons—North Sea. Reporte técnico 47, Proudman Oceanographic Laboratory, Birkenhead, Liverpool, U. K. 49 p.
- Monbaliu, J., Padilla-Hernández, R., Hargreaves, J., Carretero-Albiach, J., Luo, W., Sclavo, M., y Günther, H. (2000). The spectral wave model wam adapted for applications with high spatial resolution. *Coastal Engineering*, **41**: 41–62.
- Osuna, P. y Monbaliu, J. (2004). Wave-current interaction in the Southern North Sea. *J. Marine Systems*, **52**: 65–87.
- Ozer, J., Padilla-Hernández, R., Monbaliu, J., Alvarez Fanjul, E., Carretero Albiach, J., Osuna, P., Yu, J., y Wolf, J. (2000). A coupling module for tides, surges and waves. *Coastal Engineering*, **41**: 95–124.
- Padilla-Hernández, R. y Monbaliu, J. (2001). Energy balance of wind waves as a function of the bottom friction formulation. *Coastal Engineering*, **43**: 131–148.
- Phillips, O. M. (1957). On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.*, **2**: 415–417.

- Phillips, O. M. (1977). *The dynamics of the upper ocean*. Cambridge University Press, London. 336 p.
- Pierson, Jr, W. J., Neumann, G., y James, R. W. (1955). Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics. Reporte técnico 603, U. S. Hydrographic Office.
- Prandle, D. (2000). Operational oceanography in coastal waters. *Coastal Engineering*, **41**: 3–12.
- Sverdrup, H. U. y Munk, W. H. (1947). Wind, sea, and swell: theory of relations for forecasting. Reporte técnico 601, U. S. Hydrographic Office. 44 p.
- SWAMP Group (1984). *Ocean wave modelling*. Plenum Press, New York. 256 p.
- Tolman, H. (1990). The influence of unsteady depths and currents of tides on wind-wave propagation in shelf seas. *J. Phys. Oceanogr.*, **20**: 1166–1174.
- Van den Eynde, D., Scory, S., y Malisse, J.-P. (1995). Operational modelling of tides and waves in the North Sea on the convex c230 at mumm. En *European Convex User's Conference*, Brussels, Belgium, octubre 24–27.
- Williams, J., MacDonald, N., O'Connor, B., y Pan, S. (2000). Offshore sand bank dynamics. *J. Marine Systems*, **24**: 153–173.
- Wolf, J. y Prandle, D. (1999). Some observations of wave-current interaction. *Coastal Engineering*, **37**: 471–485.
- Xie, L., Pietrafesa, L. J., y Wu, K. (2003). A numerical study of wave-current interaction through surface and bottom stresses: Coastal ocean response of hurricane Fran of 1996. *J. Geophys. Res.*, **108**, C2, 3049. DOI : 10.1029/2001JC001078.

A. Definición de parámetros estadísticos

1. Altura significativa de olas: se define como el promedio de la tercera parte de las olas más altas de un registro:

$$H_s = \frac{3}{N} \sum_{N=1}^{N/3} H_i$$

donde N es el número total de olas del registro y las H_i están acomodadas en orden decreciente, es decir,

$$H_1 > H_2 > \dots H_{N/3}.$$

H_s también puede calcularse mediante:

$$H_s = 4\sqrt{m_0}$$

donde m_0 es el momento espectral cero. Los momentos espectrales se definen como:

$$m_i = \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{max}} E(\sigma, \theta) \sigma^i d\sigma d\theta \quad (73)$$

donde m_i es el i -ésimo momento espectral, σ_{min} y σ_{max} son las frecuencias mínima y máxima resueltas en el espectro. $E(\sigma, \theta)$ es el espectro de energía, que depende de la frecuencia (σ) y de la dirección (θ).

2. Periodo del segundo momento espectral,

$$T_{m_{02}} = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}$$

donde m_0 y m_2 están dados por la ecuación (73). El $T_{m_{02}}$ es equivalente al periodo que se obtiene cuando éste se determina utilizando el criterio de cruces por cero.

3. Promedio del error absoluto (bias) definición.

$$bias = \left[\sum (\mathbf{m} - \mathbf{o}) \right] / N = \bar{\mathbf{m}} - \bar{\mathbf{o}} \quad (74)$$

donde $\bar{\mathbf{o}}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ representa el valor promedio de las observaciones (\mathbf{o}) y predicciones (\mathbf{m}), respectivamente.