

TESIS DEFENDIDA POR  
**Axel Iram Rosas Campos**  
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

---

Dr. Luis Zavala Sansón  
*Director del Comité*

---

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Jesús Manuel Figueroa Rodríguez  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Helmut Maske Rubach  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Jesús Manuel Figueroa Rodríguez  
*Coordinador del programa de posgrado  
en Oceanografía Física*

---

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales  
*Encargado del Despacho de la  
Dirección de Estudios de Posgrado*

7 de Marzo de 2008

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

---

**DISPERSIÓN EN UN FLUJO TURBULENTO BIDIMENSIONAL EN  
PRESENCIA DE UNA FRONTERA**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

AXEL IRAM ROSAS CAMPOS

Ensenada, Baja California, México, Marzo de 2008

**RESUMEN** de la tesis de **AXEL IRAM ROSAS CAMPOS**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California. Marzo de 2008.

## **DISPERSIÓN EN UN FLUJO TURBULENTO BIDIMENSIONAL EN PRESENCIA DE UNA FRONTERA**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Luis Zavala Sansón  
Director de Tesis

En este trabajo se estudia de manera experimental el problema de la dispersión de partículas en un flujo turbulento bidimensional en presencia de una frontera, utilizando un método práctico y relativamente sencillo para realizar experimentos de dispersión en un sistema de dimensiones reducidas. El estudio de la dispersión de una nube de trazadores tiene importantes aplicaciones como puede ser la predicción de la distribución de un derrame de petróleo o la distribución de material químico o biológico en la superficie del océano.

El objetivo general es determinar cómo la presencia de una frontera afecta las medidas de dispersión de un grupo de trazadores adyacente a una de las paredes del dominio, para lo cual se diseñaron dos tipos de experimentos. En el primer tipo se liberan partículas desde regiones alejadas de las paredes del tanque y en el segundo se liberan desde una región adyacente a una de las paredes del mismo. De la información obtenida se calcularon las escalas de tiempo y longitud lagrangianas, la dispersión absoluta, la dispersión relativa y los exponentes de Lyapunov de escala finita para tres números de Reynolds distintos.

Los resultados de la dispersión absoluta para los experimentos del primer tipo muestran un alto grado de isotropía mientras que para los experimentos del segundo tipo se vuelven anisotrópicas, pues la pared representa una barrera física al movimiento libre de los trazadores. Por su parte, las curvas de dispersión relativa para los experimentos del primer tipo muestran también un alto grado de isotropía, mientras que para los experimentos del segundo tipo la información es ambigua, por lo que se concluye que la dispersión relativa no es una medida adecuada para observar la influencia de la frontera. El análisis de los exponentes de Lyapunov de escala finita muestra los regímenes de dispersión en función de la escala de separación entre dos partículas. En los dos tipos de experimentos existen al menos dos regímenes diferentes, uno para escalas comparables al tamaño de los vórtices y otro para escalas mayores.

**Palabras Clave:** Turbulencia, dispersión lagrangiana, escalas integrales, dispersión absoluta, dispersión relativa, exponentes de Lyapunov.

**ABSTRACT** of the thesis presented by **AXEL IRAM ROSAS CAMPOS** as a partial requirement to obtain the **MASTER IN SCIENCE** degree in **PHYSICAL OCEANOGRAPHY**. Ensenada, Baja California. March 2008.

**DISPERSION IN A BIDIMENSIONAL TURBULENT FLOW IN THE PRESENCE OF A BOUNDARY**

This thesis studies the problem of particle dispersion in a turbulent bidimensional flow in the presence of a boundary by using a practical and relatively simple method for carrying out dispersion experiments in a system of reduced dimensions. The study of the dispersion of a cloud of tracers from a lagrangian point of view has important applications such as the prediction of an oil spill or the distribution of chemical or biological material on the ocean surface.

The general objective of this work is to determine how the presence of a boundary affects the measures of dispersion of a group of tracers adjacent to one of the walls of the domain, and for this purpose two types of experiments were designed. In the first type particles were set free from regions placed at a distance from the walls of the tank and in the second type they were set free from a region adjacent to one of the walls of the tank. From the information obtained lagrangian time and space scales, absolute dispersion, relative dispersion and finite scale Lyapunov exponents were calculated for three different Reynolds numbers.

The results for absolute dispersion in the experiments of the first type show a high degree of isotropy, while those of the second type become anisotropic because the presence of the wall represents a physical barrier for the free movement of particles. The relative dispersion curves in the experiments of the first type also show a high degree of isotropy, while those for the second type are inconclusive, and it is concluded that relative dispersion is not a suitable measure for determining the influence of the boundary. The finite scale Lyapunov exponents analysis shows dispersion regimes as a function of the separation scale between two particles. In both types of experiments there exists at least two different regimes, one for scales comparable to the size of the vortices and another for larger scales.

**Keywords:** Turbulence, lagrangian dispersion, integral scales, absolute dispersion, relative dispersion, Lyapunov exponents.

# Dedicatoria

A mi familia, en especial a mi madre, por su amor, paciencia y apoyo no sólo durante los años que duró la maestría, sino siempre. Gracias por creer en mi.

A Brenda López, por todo.

# Agradecimientos

Al Dr. Luis Zavala por darme la oportunidad de trabajar con el y por la enorme paciencia que me mostró durante la realización de esta tesis.

A mis sinodales, Dr. Oscar Velasco, Dr. Jesús Figueroa y Dr. Helmut Maske por sus valiosos comentarios y sugerencias. Sin duda sus aportaciones contribuyeron a mejorar este proyecto.

A mis maestros del DOF. Gracias por todo.

Al personal del DOF, en especial a Lupita Rodríguez, por su ayuda durante mi estancia en el departamento.

A mis compañeros de generación Rita, Bárbara, Sarahí y Felipe por su amistad y apoyo durante este tiempo y a mis compañeros del DOF, en especial a Miguel Tenreiro y César Coronado, que de alguna forma me ayudaron a mejorar este trabajo, ya sea a través de discusiones sobre el contenido o con soporte técnico sobre el uso de LaTeX.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca que me permitió realizar mis estudios de maestría.

A mis amigos Rafael Reynaga, Sergio Arregui, Karla Escalante, Héctor Arias y Juan Carlos Martain por el apoyo moral.

# Contenido

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
I.1	Naturaleza de la turbulencia . . . . .	2
I.2	Turbulencia bidimensional . . . . .	3
I.3	Dispersión turbulenta . . . . .	4
I.4	Dispersión costera . . . . .	6
I.5	Objetivos . . . . .	8
I.6	Estructura de la tesis . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Teoría y experimentos</b>	<b>11</b>
II.1	Marco teórico . . . . .	11
II.1.1	Escalas integrales . . . . .	13
II.1.2	Medidas de dispersión . . . . .	17
II.1.3	Exponentes de Lyapunov de escala finita . . . . .	19
II.2	Arreglo experimental . . . . .	21
II.2.1	Vórtices forzados eléctricamente . . . . .	22
II.2.2	Descripción de los experimentos . . . . .	24
II.2.3	Tipos de experimentos . . . . .	26
<b>III</b>	<b>Resultados</b>	<b>29</b>
III.1	Caracterización del flujo turbulento . . . . .	29
III.2	Análisis estadístico . . . . .	32
III.2.1	Escalas lagrangianas . . . . .	34
III.2.2	Dispersión absoluta . . . . .	36
III.2.3	Dispersión relativa . . . . .	40
III.2.4	Exponentes de Lyapunov de escala finita . . . . .	46
<b>IV</b>	<b>Discusiones</b>	<b>52</b>
<b>V</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>

# Índice de figuras

Figura		Página
1	Distribución de clorofila durante un evento de surgencia en la costa de California, EEUU. . . . .	7
2	Filtraciones naturales de petróleo en el canal de Santa Bárbara, California, EEUU. . . . .	7
3	Serie de tiempo turbulenta. . . . .	13
4	Trayectorias de una sola partícula en cuatro experimentos dentro del mismo flujo turbulento. . . . .	15
5	Función de autocorrelación. . . . .	16
6	Fuerza de Lorentz inducida. . . . .	23
7	Dipolo generado en una capa delgada de agua mediante la fuerza de Lorentz. . . . .	23
8	Arreglo experimental. . . . .	25
9	Trayectorias trazadas por las partículas de poliamida dentro del flujo. . . . .	26
10	Diseños experimentales utilizados en este proyecto. . . . .	28
11	Escalas de longitud y velocidad de los flujos turbulentos . . . . .	30
12	Trayectorias de partículas en los experimentos alejados de la pared con $Re=230$ . . . . .	33
13	Trayectorias de partículas en los experimentos desde la pared con $Re=230$ . . . . .	34
14	Escalas lagrangianas para $Re=136$ en los experimentos alejados de la pared. . . . .	36
15	Componentes $x$ e $y$ de la dispersión absoluta para los experimentos alejados de la pared. . . . .	37
16	Dispersión absoluta total para los experimentos alejados de la pared. . . . .	38
17	Comportamiento asintótico de la dispersión absoluta total para los experimentos alejados de la pared. . . . .	39
18	Componentes $x$ e $y$ de la dispersión absoluta para los experimentos desde de la pared. . . . .	40
19	Dispersión absoluta total para los experimentos desde la pared. . . . .	41
20	Comportamiento asintótico de la dispersión absoluta en los experimentos desde la pared. . . . .	42

21	Componentes $x$ e $y$ de dispersión relativa para los experimentos alejados de la pared. . . . .	43
22	Dispersión relativa total para los experimentos alejados de la pared. . .	44
23	Dispersión relativa total en escala semi-logarítmica para los experimentos alejados de la pared. . . . .	45
24	Dispersión relativa total en escala logarítmica para los experimentos alejados de la pared. . . . .	46
25	Componentes de dispersión relativa para los experimentos desde la pared.	47
26	Dispersión relativa total para los experimentos desde la pared. . . . .	48
27	Dispersión relativa total en escala semi-logarítmica para los experimentos desde la pared. . . . .	49
28	Dispersión relativa total en escala logarítmica para los experimentos desde la pared. . . . .	50
29	Exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos alejados de la pared. . . . .	51
30	Exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos desde la pared. . . . .	51

# Índice de tablas

Tabla		Página
I	Escalas de movimiento y números de Reynolds para cada flujo. . . . .	31
II	Escalas integrales lagrangianas como función de Re para los experimentos alejados de la pared. . . . .	35
III	Escalas integrales lagrangianas como función de Re para los experimentos desde de la pared. . . . .	36
IV	Etapas de crecimiento exponencial ( $D^2 \sim e^{mt}$ ) y como potencia del tiempo ( $D^2 \sim t^{2\alpha}$ ) en los experimentos alejados de la pared. . . . .	43
V	Etapas de crecimiento exponencial ( $D^2 \sim e^{mt}$ ) y como potencia del tiempo ( $D^2 \sim t^{2\alpha}$ ) en los experimentos desde la pared. . . . .	46
VI	Etapas de crecimiento indicadas por los exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos alejados de la pared. Régimen super difusivo (SD) y régimen de separación exponencial constante (SEC). . .	48
VII	Etapas de crecimiento indicadas por los exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos desde la pared. Régimen super difusivo (SD) y régimen de separación exponencial constante (SEC). . . . .	50

# I

## Introducción

Todos tenemos una idea de lo que es la turbulencia, al menos desde un punto de vista cualitativo, pero una definición estricta del concepto requiere necesariamente el uso de argumentos estadísticos. Hace casi ya 90 años de la publicación de dos de los trabajos pioneros más importantes sobre el tema de dispersión turbulenta (Taylor, 1921; Richardson, 1926) y, a pesar de numerosos avances en el área, nuestra habilidad para predecir distribuciones de contaminantes y variaciones en las fluctuaciones de su concentración sigue siendo limitada (Yeung, 2001). La dispersión turbulenta está en la base de muchos procesos físicos, biológicos e industriales y muchos de estos procesos tienen un impacto relevante sobre nuestra vida cotidiana, como por ejemplo, en el tema ambiental, la concentración de un contaminante en la atmósfera o sobre la costa, por lo que el entendimiento de este fenómeno resulta de vital importancia.

Comenzamos este trabajo con una exposición sobre algunas de las características más importantes que debe satisfacer todo flujo turbulento para ser considerado como tal. Definimos bajo qué condiciones podemos hablar de turbulencia bidimensional y presentamos de manera breve la importancia de la dispersión turbulenta en el océano.

Después, explicamos en qué consiste el presente estudio y cuáles son nuestros objetivos dentro del mismo. Finalmente, cerramos este capítulo definiendo la estructura del presente estudio.

## I.1 Naturaleza de la turbulencia

La mayoría de los flujos que nos encontramos tanto en la naturaleza como en aplicaciones de ingeniería son turbulentos. En general, es difícil aplicar a tales flujos un estudio analítico estricto, por lo que, como mencionan Kundu y Cohen (2002), nos vemos forzados a emplear intuición física y argumentos estadísticos para su análisis. El primer paso para entender la difusión turbulenta y el destino de concentraciones de trazadores es entender algunas características básicas sobre turbulencia. Si bien la definición de turbulencia no es única, existen varias propiedades que un flujo turbulento (FT) debe de poseer para ser considerado como tal. Los autores anteriormente citados definen algunas de las características de los FT de la siguiente manera:

- a) Aleatoriedad: los FT son irregulares, caóticos e impredecibles. La velocidad del flujo es impredecible en el sentido de que conocer la velocidad instantánea a un tiempo es insuficiente para predecir la velocidad un instante después.
- b) Difusividad: otra característica de los FT es su alto grado de difusividad. Las fluctuaciones de velocidad generadas en los FT transportan momento, calor y concentraciones de trazadores y este transporte turbulento es significativamente más efectivo que la difusión molecular por sí sola.
- c) Vorticidad: Un FT tiene altos niveles de vorticidad fluctuante. En cualquier instante, existen movimientos vorticales, llamados remolinos (*eddies*), dentro del flujo.

Estos remolinos varían en tamaño desde la escala geométrica más grande del flujo hasta la escala más pequeña, donde domina la difusión molecular.

- d) Disipación: la cuarta característica de los FT es la disipación de energía cinética. Los remolinos evolucionan en el tiempo constantemente y la energía cinética turbulenta es transferida desde los remolinos más grandes a los más pequeños mediante un proceso conocido como la cascada de energía (en tres dimensiones). En las escalas más pequeñas, la energía es disipada en forma de calor por efectos viscosos. Para mantener la turbulencia, se necesita entonces una fuente constante de energía hacia el flujo a través de las escalas mayores.

## I.2 Turbulencia bidimensional

Normalmente, los FT ocupan las tres dimensiones espaciales, pero en algunos casos el movimiento en una dirección se puede suprimir y podemos hablar entonces de hidrodinámica bidimensional. El grado hasta el cual podemos desprestigiar una tercera dimensión, por ejemplo la dirección vertical, depende de la razón de las escalas laterales a las verticales y del grado al cual las fuerzas impuestas, tales como las asociadas a efectos de rotación o de un campo magnético, como será el caso en el presente estudio, resultan en una fuerte anisotropía del flujo.

En las últimas décadas se ha puesto mucho interés en el estudio de flujos turbulentos en dos dimensiones dada su aplicación en geofísica y astrofísica (Sommeria y Moreau, 1982; Tabeling *et al.*, 1991; Cardoso *et al.*, 1994; Hansen *et al.*, 1998). Las simulaciones y experimentos que surgen de estos estudios representan modelos simples de turbulencia oceánica y atmosférica. A esto se suma el hecho de que, en comparación con el caso en tres dimensiones, la simulación numérica directa (DNS) es relativamente

accesible. Además, el estudio de la turbulencia en dos dimensiones es de interés por sí mismo debido a la singularidad de los fenómenos que en ella se manifiestan, donde la cascada inversa de energía representa un ejemplo prominente. Este fenómeno consiste en la transferencia de energía de las escalas de movimiento pequeñas a las grandes y fue predicho a final de la década de los años 60 por Kraichnan (1967) y confirmado experimentalmente más tarde por Sigia y Aref (1981), Frisch y Sulem (1984) y Paret y Tabeling (1997), entre otros.

Por otro lado, lejos de estar homogéneamente distribuido, el campo de vorticidad de flujos bidimensionales está concentrado en dominios localizados que se comportan como entes coherentes. La existencia de estas estructuras introduce una inhomogeneidad básica en el campo de velocidad. Entonces, la turbulencia bidimensional es el resultado de un complejo proceso de distorsión del campo de velocidad, producido y sostenido por estas estructuras coherentes (vórtices) y sus interacciones (Elhmaïdi *et al.*, 1993).

### **I.3 Dispersión turbulenta**

Los FT resultan en una rápida mezcla no sólo de los agentes externos que se introducen en ellos, sino en general de las propiedades del fluido. Sin embargo, a pesar de muchos años de investigación sobre difusión turbulenta (Yeung, 2001), nuestra habilidad para predecir distribuciones medias de contaminantes y variaciones de concentración es usualmente muy limitada. Sabemos, además, que estos procesos de transporte están dominados por la acción advectiva de fluctuaciones desordenadas de velocidad en el tiempo y el espacio (Monin y Yaglom, 1971). Como resultado, un punto de vista lagrangiano siguiendo el movimiento de elementos materiales infinitesimales de fluido (que por definición se mueven con el flujo local instantáneo) es conceptualmente natural y

de uso práctico para describir el transporte turbulento (Yeung, 2002). Sin embargo, la caracterización de las estructuras coherentes y de los campos turbulentos que las rodean se ha desarrollado principalmente bajo un marco de referencia Euleriano. Los efectos de estas estructuras coherentes sobre la capacidad de dispersión turbulenta han sido menos estudiados en un marco de referencia lagrangiano, pero la mayoría de las mediciones experimentales de flujos geofísicos de gran escala (casi bidimensionales) están en la forma de observaciones lagrangianas como el seguimiento de globos en la atmósfera (Richardson, 1926) o de boyas en el océano que van a la deriva libremente (Falco *et al.*, 2000; Salas *et al.*, 2001; Poulain y Niiler, 1989; García-Olivares *et al.*, 2007). Tradicionalmente, el progreso en el área de la turbulencia ha sido obstaculizado por una falta generalizada de datos lagrangianos experimentales que, a pesar de algunos avances recientes (Voth *et al.*, 1998; Ott y Mann, 2000) son aún muy difíciles de obtener.

Resulta pues esencial lograr un entendimiento de la estadística lagrangiana de trazadores advectados en turbulencia completamente desarrollada para generar modelos de dispersión y mezcla en muchas aplicaciones físicas (Biferale *et al.*, 2006). En esta línea de investigación se han hecho importantes contribuciones que incluyen el estudio de la estadística del desplazamiento de partículas individuales de fluido para describir las características espaciales de una nube de elementos marcados que se difunde. En estos estudios fundamentales se analiza la probabilidad de encontrar fluido previamente marcado en cualquier punto del espacio (Taylor, 1921), el movimiento relativo de pares de partículas (Richardson, 1926) y la conexión formal entre la estadística del movimiento de partículas de fluido y el campo de concentración de un contaminante que se difunde (Batchelor, 1949, 1952).

## I.4 Dispersión costera

Tradicionalmente, el océano es el destino final de muchos contaminantes debido a su gran volumen y su gran capacidad de asimilación. La liberación de contaminantes, ya sea desde fuentes tierra adentro o costeras, afecta nuestra forma de vida de diversas maneras, desde la contaminación directa de organismos comestibles hasta procesos indirectos de impacto negativo sobre ecosistemas marinos y terrestres. La descarga de aguas residuales ricas en sedimento o nutrientes hacia el océano juega un papel muy importante en muchos procesos físicos, biológicos y químicos, como la alteración de la línea de costa y su topografía (Gross, 1978), eutroficación en lagos y estuarios, daños a corales y el afloramiento nocivo de algas en regiones costeras (Sindermann, 1988; Dubinsky y Stambler, 1996). Tales efectos se observan no sólo en las proximidades de la fuente, sino en regiones más extensas determinadas principalmente, en el caso del mar, por el transporte físico de las masas de agua (Lekien *et al.*, 2005). Sin embargo, durante los últimos años, el interés por los temas ambientales en general, y por la conservación de la calidad del agua en regiones costeras, en particular, ha aumentado (Carlton, 1998; Mestres, 2002; Leslie, 2005).

En la Figura 1 se muestra una imagen de satélite de la distribución de clorofila durante la evolución de un evento de surgencia en la costa de California, EEUU, y en la Figura 2 se muestra la dispersión de petróleo que se filtra de manera natural hacia el mar (*natural oil seeps*) en las costas del canal de Santa Bárbara, California, EEUU. Ambas representan ejemplos de fenómenos de dispersión turbulenta en el océano y en ambos casos la turbulencia oceánica induce la dispersión del trazador a lo largo de distancias de entre decenas y centenas de kilómetros fuera de la costa. En el caso de la descarga de un río o de la contaminación producida por actividades industriales

en la costa, estas distancias podrían ser de un orden menor. Es importante por lo tanto tener la capacidad de modelar estos procesos para, en primer lugar, entender su funcionamiento y la manera en que evolucionan y, en segundo, poder ofrecer soluciones a los problemas que conllevan.

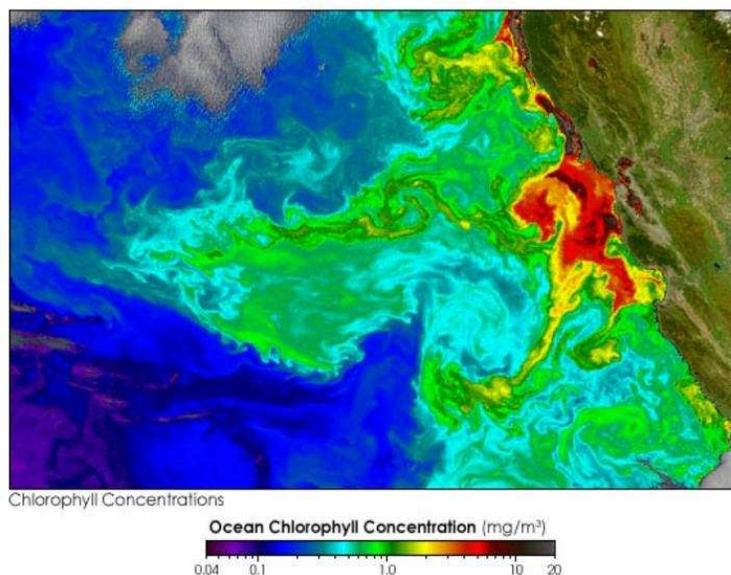


Figura 1: Imagen de satélite de la distribución de clorofila durante un evento de surgencia en la costa de California, EEUU. SeaWiFS project, NASA/Goddard Space Flight Center, 16 de Marzo de 2004.

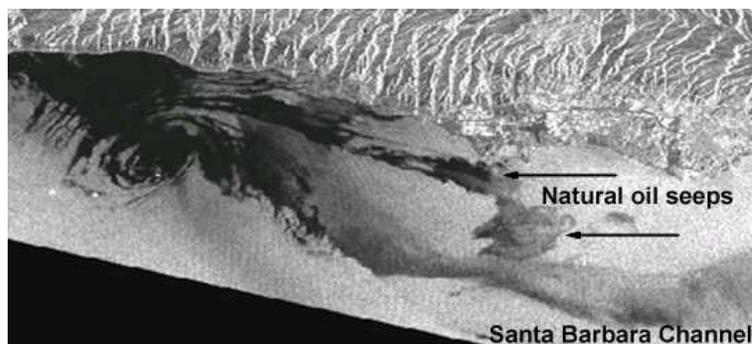


Figura 2: Imagen de SAR de filtraciones naturales de petróleo en el canal de Santa Bárbara, California, EEUU. ESA, 13 de Enero de 1996.

En este trabajo hacemos un estudio experimental del problema de la dispersión observando el movimiento de partículas que son advectadas de manera pasiva dentro de

un flujo turbulento bidimensional, haciendo énfasis en el efecto que tiene la presencia de una frontera física dentro del dominio experimental sobre las medidas de dispersión. Con este fin hemos diseñado dos tipos de experimentos. La primer serie de experimentos consiste en liberar un grupo de trazadores a partir de 9 regiones colocadas a cierta distancia dentro del tanque, de manera que puedan considerarse como alejados de las paredes del mismo, y hacer mediciones de la dispersión de los trazadores en esta configuración. En la segunda serie de experimentos las partículas son liberadas desde una región adyacente a una de las paredes del dominio experimental y de nuevo medimos su dispersión. Comparando las medidas de dispersión obtenidas en ambas configuraciones podremos determinar cómo la presencia de una frontera física afecta tales mediciones. El tipo de experimentos que hemos realizado representa un modelo muy simple de un problema geofísico real como lo es la dispersión costera de un agente externo, ya sea clorofila, fitoplancton o algún contaminante.

## I.5 Objetivos

En este proyecto pretendemos lograr los siguientes objetivos:

### **Objetivo general**

Describir y analizar la dispersión producida por un flujo turbulento en dos dimensiones en presencia de una frontera.

### **Objetivos particulares**

- Generar experimentalmente un flujo turbulento bidimensional mediante métodos electromagnéticos y caracterizarlo mediante la determinación de sus números de

Reynolds.

- Obtener los parámetros estadísticos relevantes al problema de la dispersión de trazadores lagrangianos, i.e. dispersión absoluta y dispersión relativa.
- Obtener medidas de los exponentes de Lyapunov de escala finita para determinar los regímenes de separación exponencial presentes en los diferentes flujos turbulentos.
- Determinar el efecto de la presencia de una frontera sobre las propiedades dispersivas de una fuente de trazadores adyacente a una de las paredes del dominio.
- Estudiar la posible conexión entre las observaciones obtenidas de los experimentos de laboratorio y la dispersión de trazadores cerca de una costa en un flujo geofísico real.

## I.6 Estructura de la tesis

El presente trabajo está organizado en 5 capítulos, incluyendo este capítulo introductorio, y una lista de referencias al final del mismo.

En el capítulo II presentamos los marcos teórico y experimental sobre los cuales se basa este estudio. En la sección II.1 definimos las escalas integrales (EI), las medidas de dispersión utilizadas, i.e. dispersión absoluta y relativa, y los exponentes de Lyapunov de escala finita (ELEF). En la sección II.2 explicamos la manera de generar vórtices en una capa delgada de fluido conductor mediante métodos electromagnéticos y damos una descripción detallada del procedimiento experimental que adoptamos. Concluimos el capítulo haciendo una importante distinción entre los dos tipos de experimentos

que hemos realizado, alejados y cercanos a la(s) pared(es) del tanque experimental, y explicando por qué es necesario utilizar estas dos configuraciones.

En el capítulo III presentamos los resultados obtenidos para los dos tipos de experimentos realizados. Comenzamos el capítulo con una caracterización de los flujos generados en base a la determinación de sus números de Reynolds y procedemos, en la sección III.2, a presentar el análisis estadístico de las EI, las medidas de dispersión absoluta y relativa y los ELEF.

El capítulo IV lo dedicamos a discutir las diferencias que surgen de la comparación de los resultados presentados en el capítulo anterior. Empezamos la discusión haciendo énfasis en la manera en que hemos obtenido los datos, pues ésta difiere sustancialmente de la metodología empleada en otros trabajos sobre dispersión. La metodología que empleamos consiste en hacer el seguimiento de trazadores en diferentes realizaciones del mismo experimento y posteriormente reunir la información de sus trayectorias como si hubieran sido liberadas en un solo experimento. También, argumentamos que la pérdida de isotropía en las curvas de dispersión de los experimentos cercanos a la pared tiene que ver precisamente con la presencia de ésta, pues la pared actúa impidiendo el movimiento libre de las partículas en la dirección perpendicular a la misma.

Finalmente, en el capítulo V, resumimos las principales conclusiones que hemos obtenido en este trabajo.

# II

## Teoría y experimentos

En este capítulo asentamos las bases, tanto teóricas como experimentales, sobre las que está elaborado el presente estudio. En la sección II.1 definimos los conceptos de escalas lagrangianas, las medidas estadísticas de dispersión absoluta y relativa y los exponentes de Lyapunov de escala finita, cuyos resultados presentamos en el siguiente capítulo en el mismo orden en que aquí aparecen. En la sección II.2 describimos cómo generar vórtices en una capa delgada de fluido conductor utilizando la fuerza de Lorentz y explicamos en detalle el arreglo experimental utilizado. Concluimos en capítulo explicando los dos tipos de experimentos realizados para este trabajo y la importancia detrás de estas dos configuraciones.

### II.1 Marco teórico

Como describimos en el capítulo anterior, adoptar un punto de vista lagrangiano resulta natural al estudiar problemas de mezcla y transporte en turbulencia. En el caso oceanográfico, el uso de boyas lagrangianas ha demostrado ser una alternativa viable,

y relativamente económica, para muestrear regiones poco conocidas del océano. Con la información estadística obtenida de las trayectorias seguidas por estas boyas, se han caracterizado las propiedades difusivas en varias regiones del mar para, por un lado, entender las propiedades dinámicas del océano y, por el otro, saber cómo la actividad de mesoescala actúa como un mecanismo efectivo para distribuir energía, momento y calor en tales regiones (Poulain y Niiler, 1989; Falco *et al.*, 2000; Lacorata *et al.*, 2001; Salas *et al.*, 2001; García-Olivares *et al.*, 2007).

En general, nos interesa medir tanto la traslación como la distorsión de una nube de trazadores, puesto que la primera medida nos indica hacia donde se mueve la nube y la segunda nos dice cómo se mezcla con sus alrededores. La media y la varianza de la concentración de un trazador se pueden medir utilizando estadística de una sola partícula, esto es, dispersión absoluta, mientras que la covarianza de la concentración requiere de conocimiento acerca del movimiento relativo de grupos de partículas, o sea, dispersión relativa (LaCasce y Ohlmann, 2003).

Por su parte, el exponente de Lyapunov de escala finita (ELEF) es de uso práctico pues representa el análogo matemático de un experimento con trazadores: un conjunto de trazadores, con ciertas distancias iniciales, es seguido en el tiempo mientras éstos son advectados dentro del flujo. El ELEF, que es una generalización del exponente de Lyapunov clásico (Aurell *et al.*, 1996; Artale *et al.*, 1997), es inversamente proporcional al tiempo que le toma a un par de trazadores alcanzar una separación prescrita. Esta medida ha sido utilizada para analizar el transporte en regiones semi encerradas del océano, donde las fronteras, a distancias finitas, afectan la circulación de la región, tales como el mar Mediterráneo (d'Ovidio *et al.*, 2004; García-Olivares *et al.*, 2007), el Adriático (Lacorata *et al.*, 2001) y el Golfo de México (LaCasce y Ohlmann, 2003).

### II.1.1 Escalas integrales

Debido a la naturaleza impredecible de la turbulencia, nos vemos en la necesidad de utilizar medidas estadísticas para su descripción. La práctica usual es describir la velocidad como la suma de un valor promedio sobre varias realizaciones de un experimento más una fluctuación. Denotamos los valores promediados del conjunto de  $N$  realizaciones con una barra

$$\bar{u}(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k(t) \quad (1)$$

donde  $u_k(t)$  indica el valor en la  $k$ -ésima realización. Esta operación también se conoce como promedio del ensamble (*ensemble average*). A una serie de tiempo, como la que se muestra en la Figura 3, la llamamos estadísticamente estacionaria si los valores medios permanecen constantes a través del intervalo que nos interesa.

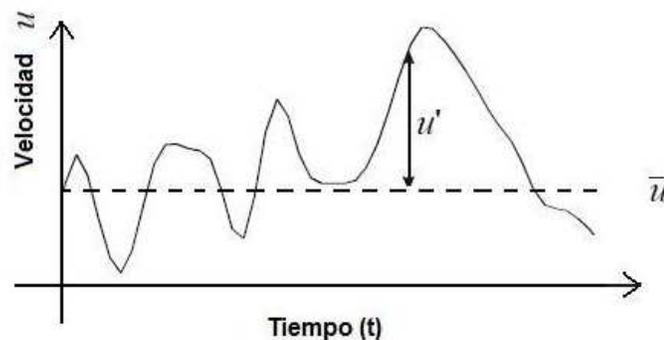


Figura 3: Serie de tiempo turbulenta. La curva muestra un registro de velocidad turbulenta, que se describe en términos de una descomposición de Reynolds, i.e. una velocidad media más una fluctuación.

La velocidad instantánea se puede descomponer en la suma de una cantidad promedio más una fluctuación

$$u = \bar{u} + u' \quad (2)$$

donde  $u'$  es la fluctuación, esto es, la desviación del valor promedio (Figura 3). Este procedimiento se conoce como descomposición de Reynolds. El promedio de la fluctuación es cero por definición y utilizamos cantidades estadísticas de órdenes mayores, como la varianza, para describir la magnitud de estas fluctuaciones:

$$\tilde{u}^2 = \overline{u'^2} \quad (3)$$

La raíz cuadrada de la varianza, la desviación estándar ( $\sqrt{\overline{u'^2}}$ ), se denota por  $\tilde{u}$ .

En 1921, Taylor publicó uno de los resultados más importantes en la teoría sobre difusión turbulenta (para una exposición más detallada ver Kundu y Cohen (2002), capítulo 13, sección 15). Este resultado provee una conexión entre los coeficientes de difusión y las propiedades turbulentas de un flujo. Consideremos partículas individuales liberadas desde un origen de coordenadas a tiempos distintos, como se muestra en la Figura 4. La posición de la partícula después de un tiempo  $T$  será

$$\vec{X} = \int_0^T \vec{u} dt \quad (4)$$

donde  $\vec{u}$  es la velocidad (lagrangiana) de la partícula.

La posición media de las partículas, promediada sobre muchas realizaciones del mismo experimento dentro de un flujo turbulento homogéneo y estacionario, es cero, i.e. el origen. Sin embargo, la varianza de sus desplazamientos no es cero, y está dada por

$$\overline{X^2} = 2\tilde{u}^2 \int_0^t \int_0^{t'} R_L d\tau dt' \quad (5)$$

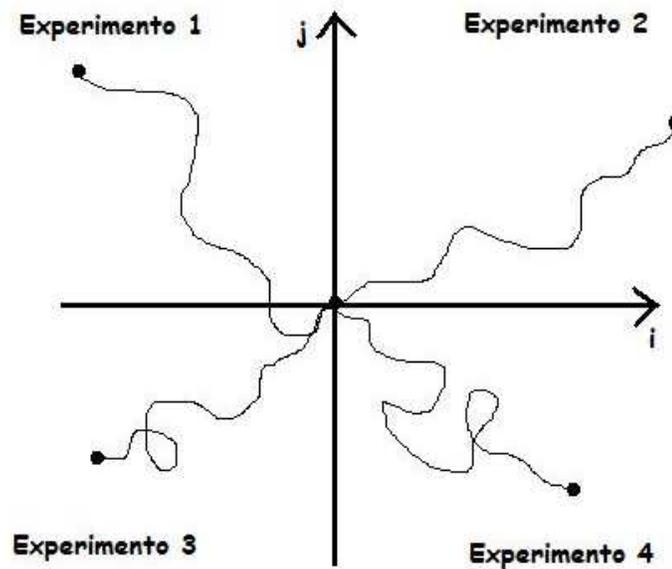


Figura 4: Una partícula es liberada desde el origen en un flujo turbulento homogéneo y estacionario. Las cuatro trayectorias representan el resultado de cuatro realizaciones del mismo experimento.

donde  $R_L$  es la autocorrelación de la velocidad:

$$R_L = \frac{\overline{u(t)u(t + \tau)}}{\tilde{u}^2} \quad (6)$$

La autocorrelación es una medida de la memoria del flujo, en otras palabras, qué tan bien correlacionados están los futuros valores de la velocidad con los valores actuales.

Podemos definir una escala de tiempo para este proceso de la forma

$$T_L = \int_0^{\infty} R_L d\tau \quad (7)$$

y podemos observar de la Figura 5 que el el área bajo la curva del rectángulo de ancho  $T_L$  es igual al área bajo la curva  $R_L$ .  $T_L$  se conoce como la escala lagrangiana de tiempo del flujo, y da lugar a la definición de una escala lagrangiana espacial:

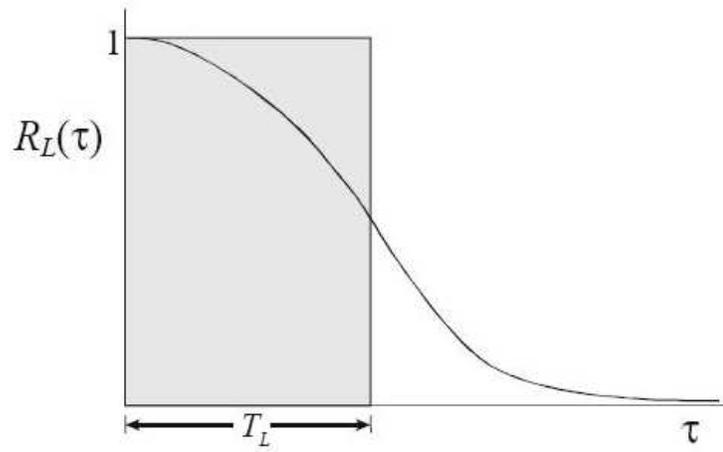


Figura 5: Normalmente, la función de autocorrelación tiene la forma que se muestra en la figura. Tiende a cero para tiempos largos, en otras palabras, la partícula eventualmente "olvida" su velocidad original. Para tiempos cortos, sin embargo, la velocidad está fuertemente correlacionada con su velocidad original.

$$L_L = \tilde{u} \int_0^{\infty} R_L d\tau = \tilde{u} T_L \quad (8)$$

Para tiempos menores a  $T_L$  y distancias mas pequeñas que  $L_L$ , las velocidades están generalmente bien correlacionadas y  $R_L$  se aproxima a 1. En otras palabras, las escalas integrales lagrangianas de tiempo y espacio  $T_L$  y  $L_L$ , respectivamente, representan el tiempo y espacio durante el cual el trazador recuerda su recorrido. Puesto que en este estudio tratamos con series de tiempo finitas y dado que  $R_L$  no alcanza un límite constante conforme aumenta el tiempo, utilizamos la aproximación de integrar  $R_L$  desde el origen hasta el tiempo del primer cruce por cero (Poulain y Niiler, 1989; Salas *et al.*, 2001). Esto nos da valores que deben ser considerados más como cotas superiores que como valores límites de la autocorrelación (Poulain y Niiler, 1989).

Por otra parte, para obtener una estadística confiable se requiere, como es usual, tener la mayor cantidad de información posible. En nuestro caso, esto equivale a tener la

mayor cantidad de trayectorias independientes. Como mencionamos arriba, el tiempo que tarda la velocidad de una partícula en descorrelacionarse, la escala integral de tiempo  $T_L$ , podemos considerarlo también como el momento en que una sección de la trayectoria se hace independiente de la siguiente, esto es, el momento en el que la partícula comienza un nuevo recorrido, pues no tiene ya memoria de su recorrido hasta ese punto. Así, dividimos las trayectorias en secciones que corresponden a la distancia recorrida por las partículas en la escala lagrangiana de tiempo  $T_L$  para obtener una serie de subtrayectos independientes, lo cual aumenta considerablemente la cantidad de datos disponibles (Poulain y Niiler, 1989).

### II.1.2 Medidas de dispersión

Para obtener información sobre la advección de partículas podemos estudiar la dispersión absoluta y relativa. Ambos conceptos están basados en el promedio sobre un ensamble de partículas advectadas pasivamente por un flujo turbulento.

#### Dispersión absoluta

La dispersión absoluta, también conocida como dispersión de una sola partícula (*single-particle dispersion*), provee una medida de la separación cuadrática media de partículas individuales a un tiempo  $t$ , y está definida como (vea por ejemplo Provenzale (1999)):

$$A^2(t; t_0) = \langle |\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{X}_i(t_0)|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{X}_i(t_0)|^2 \quad (9)$$

donde  $\langle \dots \rangle$  indica un promedio sobre el ensamble de partículas,  $\mathbf{X}_i(t)$  es la posición de la  $i$ -ésima partícula al tiempo  $t$ ,  $t_0$  es el tiempo al que se han liberado las partículas y  $N$  es el número de partículas en el ensamble. Para flujos turbulentos homogéneos, las

posiciones iniciales de las partículas no son de importancia, pues sus desplazamientos serán los mismos independientemente del punto de partida.

Una primera aproximación a la descripción de las características dispersivas del flujo puede ser el calcular difusividades a partir de la estadística de las trayectorias del ensamble de partículas. Esto se puede comparar con la teoría de dispersión por turbulencia homogénea de Taylor (1921). Esta teoría ha sido utilizada ampliamente para analizar datos lagrangianos de los océanos del mundo y para interpretar resultados de dispersión (Colin de Verdiere, 1983; Krauss y Böning, 1987; Brink *et al.*, 1991; Haynes y Barton, 1991).

Para un régimen estadísticamente estacionario y homogéneo, la difusividad lagrangiana  $K$  y la dispersión están relacionadas con la función de correlación lagrangiana mediante (Taylor, 1921)

$$K \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{X^2(t)} = \tilde{u}^2 \int_0^t R_L d\tau \quad (10)$$

Existen dos casos límites que son independientes del comportamiento detallado de  $R_L$ :

$$\overline{X^2(t)} = A^2(t; t_0) = \begin{cases} \tilde{u}^2 t^2 & \text{cuando } t \rightarrow 0, \text{ o aprox. } t < T_L \text{ y } R_L \rightarrow 1 \\ 2\tilde{u}^2 T_L t & \text{cuando } t \rightarrow \infty, \text{ o aprox. } t \gg T_L \text{ y } R_L \rightarrow 0 \end{cases} \quad (11)$$

El primer caso es el comportamiento para tiempos cortos y el segundo límite asintótico corresponde al régimen de caminata aleatoria, donde la dispersión de partículas está gobernada por la ecuación de advección-difusión con la difusividad definida en la ecuación (10) (Poulain y Niiler, 1989).

## Dispersión relativa

Por su parte, la dispersión relativa está definida como la separación cuadrática media a un tiempo  $t$  entre un par de partículas  $i$  y  $j$  inicialmente cercanas. Matemáticamente, viene dada por la relación (vea por ejemplo Provenzale (1999)):

$$D^2(t; t_0, d_0) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^N |\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{X}_j(t)|^2 \quad (12)$$

donde  $n = \frac{N(N-1)}{2}$  es el número de pares en el ensamble y  $d_0$  es la distancia inicial entre ellos. Hacemos la suma sobre  $(i, j) = 1, \dots, N$  y usamos la condición  $i > j$  para evitar duplicar pares, dado que el par  $(1,2)$  es igual al par  $(2,1)$ .

### II.1.3 Exponentes de Lyapunov de escala finita

El exponente de Lyapunov máximo (ELM), o clásico,  $\lambda$  representa una medida de la inestabilidad de la evolución temporal de un sistema dinámico. Está definido como la razón de separación exponencial, promediada sobre tiempo infinito, de parcelas de fluido con una separación inicial infinitesimal. Matemáticamente, viene dado por la relación (vea por ejemplo Lacorata *et al.* (2001) y García-Olivares *et al.* (2007))

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \quad (13)$$

donde  $\delta(t)$  representa la distancia entre dos trayectorias al tiempo  $t$ . Cuando  $\lambda > 0$  se dice que el sistema es caótico. Sin embargo, en un sistema cerrado donde las fronteras a distancias finitas influyen sobre la circulación, el ELM es de uso práctico limitado. Para estudiar los procesos de dispersión no asintóticos Aurell *et al.* (1996) y Artale *et al.* (1997) introdujeron el exponente de Lyapunov de escala finita (ELEF).

Un problema potencial de la dispersión relativa como medida tiene que ver con las medias de los promedios, dado que se promedian distancias a tiempos fijos. Así, por ejemplo, un par separado 10 km se promedia con un par separado solamente 1 km. Si la dispersión es dominada por estructuras del mismo tamaño que las separaciones de las partículas, promediar pares con diferentes separaciones podría opacar estas dependencias (LaCasce y Ohlmann, 2003; Boffetta y Sokolov, 2002). Un enfoque alternativo consiste entonces en promediar tiempos a distancias fijas y esta es precisamente la idea detrás del (ELEF).

Para calcular el ELEF, escogemos un conjunto de distancias que se incrementan multiplicativamente por una cantidad  $r$ :

$$\delta_n = r \cdot \delta_{n-1} = r^n \delta(0) \quad (14)$$

y después calculamos el tiempo que se requiere para que la separación entre cada par de partículas crezca a un  $\delta_n$  sucesivo. Tomamos  $r=\sqrt{2}$ , decisión que solamente determina la cantidad total de separaciones a considerar, i.e. un valor de  $r$  muy pequeño significa incrementos pequeños en la separación de las partículas mientras que un valor de  $r=2$  representa el doble de la distancia. Promediando los tiempos resultantes para todos los pares posibles separados una distancia dada, el ELEF está definido como (Aurell *et al.*, 1996; Artale *et al.*, 1997)

$$\lambda(\delta) = \frac{1}{\langle \tau_r(\delta) \rangle} \ln r \quad (15)$$

donde, de nuevo, el promedio  $\langle \dots \rangle$  lo realizamos sobre todos los pares de trayectorias en el ensamble con una separación inicial  $\delta$ .

De acuerdo con Lacorata *et al.* (2001), el ELEF tiene las siguientes propiedades:

a) En el límite de separaciones infinitesimales entre trayectorias,  $\delta \rightarrow 0$ , el ELEF tiende al ELM.

b) En el caso de difusión estándar,  $\langle \delta(t)^2 \rangle \sim t$ , encontramos que  $\lambda(\delta) \sim \delta^{-2}$  y la constante de proporcionalidad es del orden del coeficiente de difusión.

c) Cualquier pendiente  $> -2$  en una gráfica  $\lambda(\delta)$  vs  $\delta$  indica un comportamiento super difusivo.

d) En particular, cuando  $\lambda(\delta) = \text{constante}$  sobre un intervalo de escalas, tenemos separación exponencial entre trayectorias a una tasa constante dentro de ese intervalo (advección caótica).

Por último, definimos un coeficiente difusivo de escala finita dado por el ELEF de la forma (Artale *et al.*, 1997)

$$K_{ef}(\delta) = \lambda(\delta) \cdot \delta^2 \quad (16)$$

Así, el ELEF nos permite estimar las propiedades de difusión a partir de la escala espacial  $\delta$ .

## II.2 Arreglo experimental

En esta sección establecemos los conceptos experimentales fundamentales para el desarrollo de este estudio. Comenzamos exponiendo la manera en que podemos aprovechar un mecanismo electromagnético para generar un campo turbulento bidimensional. Después, damos una descripción del arreglo experimental que utilizamos y la manera en que colectamos la información y concluimos con una descripción de las dos configuraciones experimentales utilizadas y su importancia para lograr los objetivos de este trabajo.

## II.2.1 Vórtices forzados eléctricamente

En aplicaciones industriales y en estudios básicos de investigación, la fuerza de Lorentz (FL) se utiliza a menudo para producir vórtices en un fluido conductor. Una corriente eléctrica y un campo magnético inducen una fuerza de cuerpo, la FL, que actúa en una dirección perpendicular a los campos aplicados:

$$\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (17)$$

donde  $\vec{j}$  es la densidad de corriente y  $\vec{B}$  es el vector de campo magnético.

La manera más conveniente de generar la FL para los propósitos de este trabajo es creando un campo magnético estático en la dirección vertical dentro del fluido utilizando imanes permanentes y haciendo pasar una corriente eléctrica en la dirección horizontal a través de un par de electrodos. La interacción entre ambos campos genera una FL que mueve al fluido de la misma forma que lo haría cualquier fuerza de cuerpo.

En la Figura 6 se muestra una representación esquemática de la FL inducida. Debido al forzamiento, y dado que el fluido se encuentra dentro de un recipiente de dimensiones reducidas, se crean dos vórtices: uno con circulación positiva y otro con circulación negativa. Estos vórtices, tomados como un par, forman un dipolo.

Tomando en cuenta la componente del campo magnético en la dirección vertical, Salas *et al.* (2001) obtuvieron y resolvieron la ecuación:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega - \frac{j}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (18)$$

donde  $\vec{u} = (u, v)$  es la velocidad horizontal de las parcelas de fluido,  $B$  es la componente vertical del campo magnético,  $\rho$  la densidad del fluido,  $\nu$  la viscosidad,  $j$  la corriente y  $\omega$  la componente vertical de la vorticidad. Para resolver la ecuación anterior, los autores

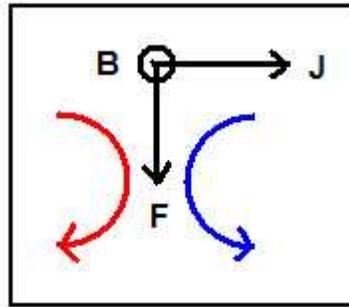


Figura 6: Fuerza de Lorentz inducida. La corriente eléctrica va de izquierda a derecha y el vector campo magnético apunta perpendicular a la página, saliendo de ella. La interacción entre ambas genera, siguiendo la regla de la mano derecha, una fuerza en la dirección que se muestra en la figura.

consideraron que el grosor de la capa es despreciable y que el fluido se desliza libremente. El patrón de flujo resultante se muestra en la Figura 7. La configuración particular que se muestra en esta figura depende de las direcciones del campo magnético (perpendicular al plano de la figura y saliendo de ésta) y de la corriente eléctrica (paralela al plano de la figura y de derecha a izquierda).

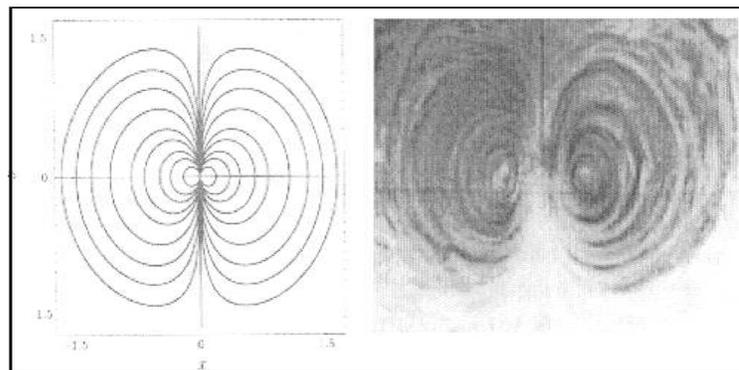


Figura 7: Dipolo generado en una capa delgada de fluido conductor utilizando la fuerza de Lorentz. El lado derecho de la figura muestra las líneas de corriente del flujo que se forma al someter una capa delgada de agua a un forzamiento de Lorentz. El lado izquierdo de la figura muestra el modelo teórico calculado por los autores. Tomada de Salas *et al.* (2001).

Podemos ver entonces que combinando un campo magnético y una corriente eléctrica es posible crear vórtices dentro de un fluido conductor. Autores como Tabeling *et al.*

(1991); Cardoso *et al.* (1994) y Hansen *et al.* (1998), entre otros, han mostrado que es posible crear un campo de vórtices girando en sentidos opuestos utilizando un arreglo de imanes permanentes cuyo campo magnético se dispone de manera alternada. En los experimentos realizados en este trabajo utilizamos un arreglo similar para generar un campo turbulento, tal como se describe en la siguiente sección. Cabe mencionar, además, que de esta forma sólo pueden ser forzadas capas muy delgadas de fluido ( $<4$  cm), ya que el campo magnético decae rápidamente en la dirección vertical.

## II.2.2 Descripción de los experimentos

Los experimentos los llevamos a cabo dentro de un tanque, abierto, de acrílico transparente de 3 mm de grosor, con una base de 30x30 cm y una altura de 15 cm. Utilizamos una solución de agua con bicarbonato de sodio al 5% para aumentar su conductividad y el grosor de la capa de fluido se mantuvo constante en 1 cm dentro del tanque. Debajo del tanque colocamos un arreglo de 10x10 imanes permanentes de Neodimio (NdFeB) con sus ejes magnéticos orientados en el sentido vertical y con sus polos alternados. Los imanes tienen un diámetro de 1.27 cm, un grosor de 3 mm y un campo magnético de magnitud 10.8K G. La distancia entre ellos fue 2.5 cm, de centro a centro. En lados opuestos del tanque colocamos dos barras de cobre a manera de electrodos para hacer pasar una corriente eléctrica a través del fluido, los cuales conectamos a una fuente de poder con una diferencia de potencial que variamos entre los 8 y los 25 volts. En la Figura 8 mostramos el arreglo experimental de manera esquemática.

La primera parte de los experimentos consistió en la caracterización de los flujos turbulentos generados mediante sus números de Reynolds, por lo tanto empezamos por visualizar el campo de velocidades para cada flujo. La visualización de estos campos de

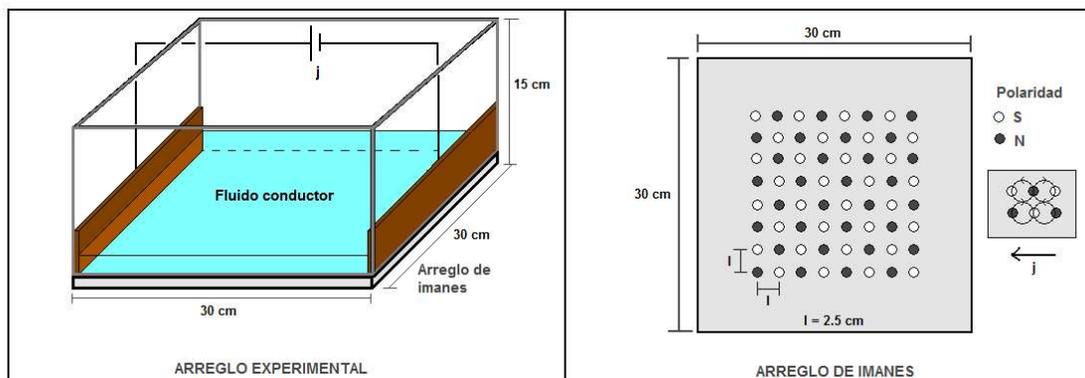


Figura 8: Arreglo experimental.

velocidades la realizamos esparciendo partículas de poliamida en la superficie del fluido en reposo; la poliamida, un polvo fino de  $50 \mu\text{m}$  de diámetro, actúa como un trazador que podemos seguir durante la realización de cada experimento. Es importante mencionar que partículas individuales de poliamida difícilmente pueden ser observadas a simple vista, por lo que seguimos pequeños cúmulos de trazadores. Con una cámara digital colocada encima del tanque, tomamos series de fotografías de cada flujo y a partir de ellas determinamos las coordenadas de algunos cúmulos a distintos tiempos. Con esta información, y dado que conocemos el tiempo transcurrido entre cada fotografía, pudimos hacer un estimado de la velocidad de rotación de los vórtices en cada uno de los flujos, i.e. para cada voltaje, mediante una relación geométrica simple, como describimos a continuación.

Para determinar la ecuación de un círculo, basta con que conozcamos tres puntos, o coordenadas, del mismo. Con esta idea, y considerando solamente los trazadores que se encuentran circulando en la parte más alejada del centro de cada vórtice, es decir, que se encuentran describiendo un círculo máximo, podemos determinar la ecuación de dicho círculo, esto es, la trayectoria del trazador, utilizando relaciones geométricas, como mostramos de manera esquemática en la Figura 9. De las series de fotografías identi-

ficamos pequeños cúmulos que cumplían esta condición de describir círculos máximos y, tras obtener sus coordenadas a distintos tiempos, calculamos las trayectorias que describen, dándonos una primera aproximación al tamaño de los remolinos, el cual es del orden de 1.5 cm de radio, en promedio. Puesto que también conocemos el tiempo entre cada punto de la trayectoria (entre cada fotografía), pudimos calcular la distancia recorrida por los trazadores, esto es, la longitud del arco descrito, y de ahí estimamos la velocidad de los vórtices (del orden de  $1 \text{ cms}^{-1}$ ).

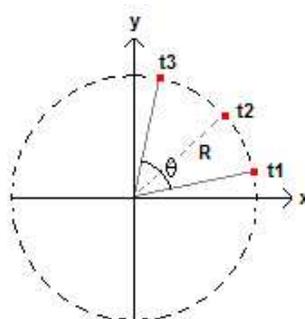


Figura 9: Dadas las coordenadas de tres puntos sobre un círculo, es posible determinar la ecuación de dicho círculo. Si, además, conocemos el tiempo que transcurre entre cada punto de la trayectoria, es posible estimar el tamaño de los remolinos dentro del flujo y la distancia recorrida por las partículas.

### II.2.3 Tipos de experimentos

Como explicamos en el primer capítulo, uno de los objetivos principales de este trabajo es determinar el efecto que tiene la presencia de una frontera sobre las medidas de dispersión de una fuente de trazadores adyacente a dicha frontera. La segunda parte de los experimentos consistió entonces en obtener y analizar trayectorias de trazadores individuales y determinar su dispersión dentro del tanque en función de las características del flujo (voltaje o número de Reynolds) y de su cercanía con la(s) pared(es) del tanque.

Para esta parte utilizamos como trazadores pequeñas piezas de papel, de 2x2 mm aproximadamente, dado que para obtener trayectorias resulta más sencillo seguir este tipo de trazador que el polvo que describimos anteriormente. Estas partículas fueron sembradas en la(s) región(es) de interés, descrita(s) más abajo, con el fluido en reposo y después encendimos la fuente de poder a un voltaje dentro del intervalo de los 8 a los 25 volts para inducir el movimiento de la capa de agua. Registramos el desplazamiento de las partículas con el uso de una cámara de video colocada por encima del tanque y conectada a una PC. De estas imágenes obtuvimos las coordenadas de cada uno de los trazadores cada segundo durante un periodo de muestreo de 1 minuto, es decir, varias veces el periodo de rotación de los vórtices.

Para identificar los efectos de una frontera del tanque sobre la dispersión de partículas, diseñamos dos tipos de experimentos. En los experimentos del primero tipo, que designamos como tipo A, delimitamos 9 regiones circulares dentro del tanque como se muestra en la Figura 10(a), con un diámetro de  $d=2.6$  cm. Dentro de cada una colocamos 15 partículas en total, cuyas trayectorias fueron registradas. Es importante mencionar en este punto que las partículas de cada región no fueron colocadas simultáneamente, debido a que tienden a pegarse entre sí por efecto de la tensión superficial. Para resolver este problema, optamos por realizar 15 experimentos con una sola partícula en cada región y posteriormente agrupar los datos de las trayectorias como si todas hubieran sido obtenidas de la misma realización del experimento. Justificamos esta forma de obtener los datos en base a la hipótesis inicial que hacemos sobre la naturaleza de los flujos con los que trabajamos, esto es, que dichos flujos son homogéneos y estadísticamente estacionarios. Además, como demuestran los resultados que presentamos en el siguiente capítulo, las mediciones de las propiedades de dispersión mediante este procedimiento son razonablemente coherentes con las que se esperarían si las 15 partículas se hubiesen

liberado al mismo tiempo. Esto era de esperarse, además, dado el control que tenemos sobre el campo turbulento mediante el voltaje aplicado. Cabe mencionar que en los estudios de dispersión de boyas oceánicas tampoco se utilizan datos simultáneos.

En los experimentos del tipo B colocamos 15 partículas en una sola región adyacente a una de las paredes del tanque, como mostramos en la Figura 10(b), siguiendo el mismo procedimiento de colocar una partícula en cada realización del experimento. El radio de esta región semicircular fue de  $r = d/2 = 1.3$  cm. La razón de este segundo diseño es, de nuevo, para poder contrastar los resultados de los experimentos tipo A con los del B y determinar así el efecto que tiene la frontera sobre las propiedades de dispersión del flujo.

Finalmente, definimos las direcciones  $x$  e  $y$  como aquellas longitudinal y transversal a la orientación de los electrodos dentro del tanque, respectivamente, como se muestra en la Figura 10.

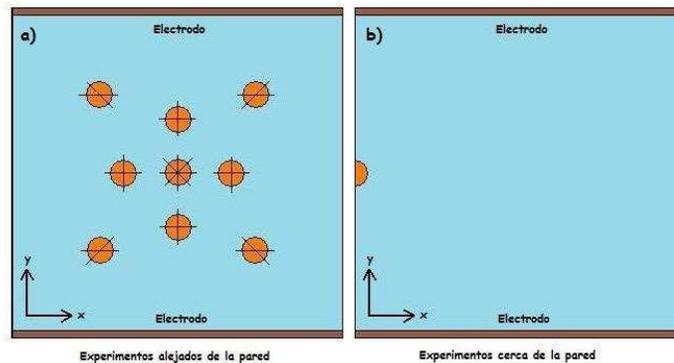


Figura 10: Diseños experimentales utilizados en este proyecto. a) en los experimentos del tipo A las partículas se liberaron desde las 9 regiones mostradas en la figura; b) en los experimentos del tipo B las partículas se liberan desde una región adyacente a una de las paredes del tanque. Contrastando los resultados de ambas configuraciones es posible determinar la influencia de la pared sobre las propiedades dispersivas del flujo.

# III

## Resultados

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos de los experimentos realizados. En la sección III.1 mostramos las características de los remolinos que hemos generado según su número de Reynolds. Posteriormente, en la sección III.2 presentamos el análisis estadístico de la dispersión de partículas mediante curvas de dispersión absoluta y relativa, así como de los exponentes de Lyapunov de escala finita.

### III.1 Caracterización del flujo turbulento

Con el objetivo de determinar experimentalmente el carácter de los flujos turbulentos con los que trabajamos en este proyecto, hicimos estimaciones de las escalas de longitud y velocidad de los vórtices inducidos electromagnéticamente, según la descripción que hicimos en la sección II.2.2. Para ello, llevamos a cabo experimentos con cinco voltajes diferentes: 8, 13, 16, 19 y 25 V. Para cada voltaje hicimos 15 realizaciones de cada experimento y promediamos los datos para obtener los resultados y la desviación estándar de las mediciones que se presentan a continuación.

En la parte superior de la Figura 11 mostramos el radio de los vórtices que se generan dentro del tanque en función del voltaje aplicado. Como mencionamos en el párrafo anterior, cada punto de la gráfica es el resultado de promediar los valores de 15 experimentos. La línea punteada denota el comportamiento medio del radio de los remolinos, el cual tiene un valor promedio de 1.36 cm. Esto implica que los remolinos tienen un diámetro promedio de alrededor de 2.72 cm. Aunque este valor es ligeramente mayor que la separación de 2.5 cm entre centros de los imanes dentro del arreglo, el tamaño de los remolinos es consistente tomando en cuenta, por un lado, las desviaciones de los valores promedio de estas mediciones, que variaron entre los  $\pm 0.20$  cm y  $\pm 0.31$  cm y por el otro, el hecho de que los remolinos no son perfectamente circulares, sino que van sufriendo pequeñas distorsiones en su forma conforme transcurre el experimento.

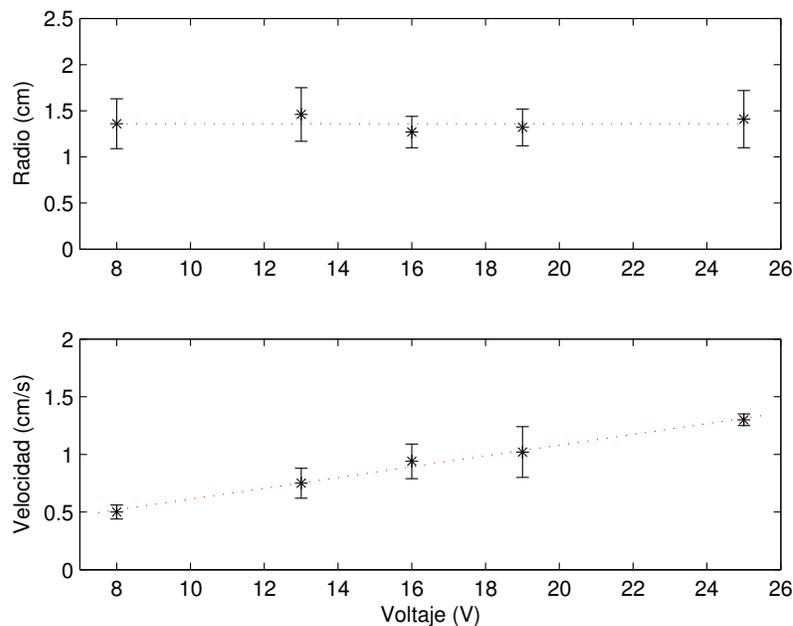


Figura 11: Radio promedio (parte superior) y velocidad tangencial (parte inferior) de los remolinos en función del voltaje aplicado en el tanque.

La velocidad tangencial de estos mismos remolinos, que definimos como  $v_t = \frac{R\Delta\theta}{\Delta t}$

y describimos en la sección II.2.2, en función del voltaje aplicado se muestra en la parte inferior de la Figura 11. Vemos claramente que existe una relación lineal entre la velocidad tangencial de los vórtices y el voltaje aplicado en el tanque, registrándose velocidades en el intervalo de  $0.5 \text{ cms}^{-1}$  para el voltaje mínimo de 8V a  $1.30 \text{ cms}^{-1}$  para el máximo de 25V. La desviación más pequeña del valor promedio estimado fue de  $\pm 0.05 \text{ cms}^{-1}$  para el valor a 25V y la máxima se presentó en el valor a 19V, con un valor de  $\pm 0.22 \text{ cms}^{-1}$ .

El número de Reynolds se define como

$$Re = \frac{v_t 2R}{\nu} \quad (1)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido. En nuestro caso  $\nu=0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ , que es el valor que corresponde al agua a  $20^\circ\text{C}$ . El número  $Re$  es un indicador de la importancia relativa entre los términos inerciales y los viscosos y es uno de los parámetros más importantes en la dinámica de fluidos. Con esto en mente, los valores de voltaje corresponden con valores de  $Re$  para cada flujo. En la Tabla I hemos resumido la información de la Figura 11 y los respectivos valores de  $Re$  para cada flujo.

Tabla I: Escalas de movimiento y números de Reynolds para cada flujo.

	8V	13V	16V	19V	25V
<i>Radio</i> (cm)	$1.36 \pm 0.27$	$1.46 \pm 0.29$	$1.27 \pm 0.17$	$1.32 \pm 0.20$	$1.41 \pm 0.31$
<i>Velocidad</i> (cm/s)	$0.50 \pm 0.06$	$0.75 \pm 0.13$	$0.94 \pm 0.15$	$1.02 \pm 0.22$	$1.33 \pm 0.05$
<i>Re</i>	136	210	230	300	360

En lo que sigue, hablaremos indistintamente de voltaje o número  $Re$  al referirnos a los distintos flujos en los experimentos realizados, bajo el entendido que la equivalencia entre ambos es clara y ésta ha quedado establecida en los valores de la tabla anterior.

## III.2 Análisis estadístico

En la sección II.2.3 dijimos que se realizaron dos tipos de experimentos, donde la diferencia entre ambos consiste en la manera en que se disponen las regiones a partir de las cuales se liberan los trazadores (ver la Figura 10). Los experimentos del tipo A nos permiten medir las propiedades de dispersión del flujo para partículas que inicialmente se encuentran lejos de las fronteras, mientras que los del tipo B están diseñados para trazadores que inician su trayectoria desde una de las paredes del tanque. El objetivo es determinar la influencia de la(s) frontera(s) contrastando los resultados obtenidos con estos dos conjuntos de experimentos.

Realizamos 15 experimentos a 8, 16 y 25 V, i.e.  $Re=136, 230, 360$  (Tabla I). Sembramos las partículas en la región de interés con el fluido en reposo, encendimos la fuente de poder a uno de los voltajes dados y registramos la posición de cada trazador cada segundo durante 1 minuto.

Los resultados que presentamos a continuación corresponden a aquellos en los que las regiones de muestreo están alejadas de la pared de interés (experimentos tipo A, Figura 10(a)). Como ilustración, mostramos las trayectorias de las partículas dentro del flujo a  $Re=230$  en la Figura 12(a).

Como se puede observar, las trayectorias recorren la mayor parte del dominio, y en varios casos se puede notar la presencia de los vórtices. Las regiones visitadas por las partículas aumentan conforme  $Re$  se incrementa. Para apreciar con mayor claridad el comportamiento individual, en la Figura 12(b) se muestran las trayectorias de cuatro partículas dentro del mismo flujo. Al inicio de los experimentos las partículas se desplazan lentamente, pero tras unos cuantos segundos comienzan a ser dispersadas rápidamente y, en ocasiones, son atrapadas por algún remolino. Si llegan a alguna de

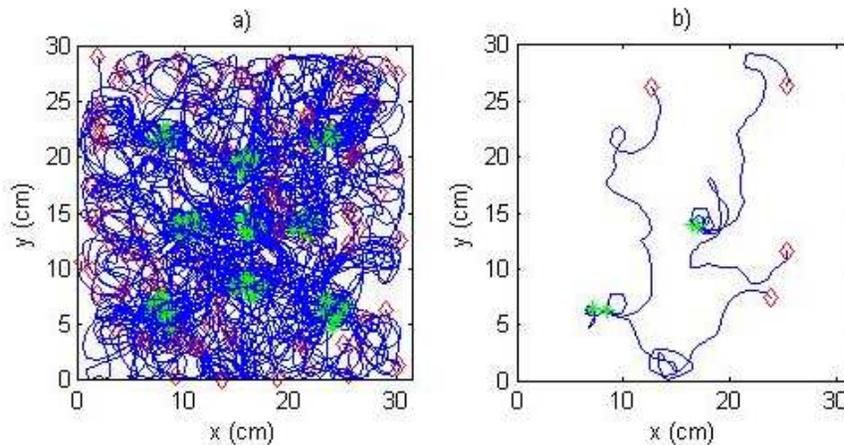


Figura 12: Trayectorias de partículas en los experimentos alejados de la pared con  $Re=230$ . a) Trayectorias de todas las partículas dentro del experimento, b) Trayectorias de 4 partículas dentro del flujo. En ambos casos (\*) indica el punto inicial y (◇) el punto final de la trayectoria.

las paredes, rápidamente son regresadas al interior por la acción de los vórtices más exteriores.

Presentamos ahora los resultados de los experimentos que se realizaron liberando los trazadores desde la región adyacente a la pared (experimentos tipo B, Figura 10(b)). De manera ilustrativa, en la Figura 13(a) mostramos las trayectorias de las partículas dentro del flujo a  $Re=230$  y la en la Figura 13(b) mostramos solamente las trayectorias de 4 partículas dentro de ese mismo flujo. Como en el caso A, las regiones del tanque visitadas por las partículas aumenta como función del número de Reynolds. De las trayectorias que siguieron las partículas en esta configuración se hace evidente la presencia de una estructura vortical frente a la región de donde fueron liberadas. Cuando las partículas comienzan a desplazarse, lo hacen de una manera más lenta que las de los experimentos tipo A y les toma varios segundos moverse a la región interior del tanque, pues la estructura antes mencionada las regresa a su punto inicial.

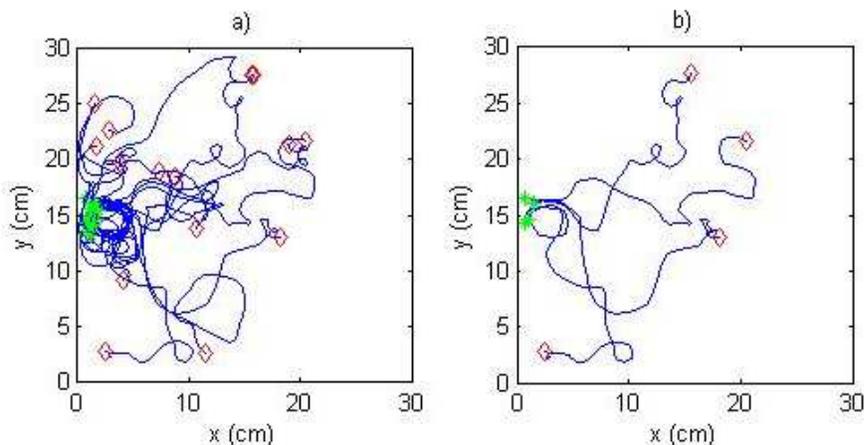


Figura 13: Trayectorias de partículas en los experimentos desde la pared con  $Re=230$ . a) Trayectorias de todas las partículas dentro del experimento, b) Trayectorias de 4 partículas dentro del flujo. En ambos casos (\*) indica el punto inicial y ( $\diamond$ ) el punto final de la trayectoria.

### III.2.1 Escalas lagrangianas

En la sección II.1.2 planteamos que una forma de obtener un mayor número de datos para hacer una estadística confiable es dividir la trayectoria de cada partícula en secciones más pequeñas, donde la condición es que estas subsecciones de trayectoria sean independientes entre sí. Esta independencia está asegurada por las escalas integrales lagrangianas de espacio y tiempo,  $L_L$  y  $T_L$ , definidas en las ecuaciones (7) y (8) respectivamente.

Calculamos las componentes de velocidad, que denotamos por  $u$  y  $v$  en la dirección  $x$  e  $y$  respectivamente, de cada una de las partículas a lo largo de su trayectoria y a partir de estos valores determinamos  $T$ ,  $L$  y la difusividad lagrangiana  $K$ , ecuación (10), para los tres casos estudiados. Los resultados obtenidos para los experimentos tipo A se muestran en la Tabla II, donde los subíndices indican la escala asociada con la dirección correspondiente.

Para el flujo a  $Re=136$  el valor de la escala integral de tiempo,  $T_L$ , tiene un límite

Tabla II: Escalas integrales lagrangianas como función de  $Re$  para los experimentos alejados de la pared.

	Re=136	Re=230	Re=360
$T_u$ (s)	$4.23 \pm 1.60$	$3.34 \pm 1.48$	$2.88 \pm 1.16$
$T_v$ (s)	$4.06 \pm 1.49$	$3.59 \pm 1.47$	$2.72 \pm 1.17$
$L_u$ (cm)	$1.26 \pm 0.69$	$1.92 \pm 1.15$	$2.08 \pm 1.17$
$L_v$ (cm)	$1.21 \pm 0.68$	$2.12 \pm 1.20$	$2.03 \pm 1.31$
$K_u$ ( $cm^2/s$ )	$0.44 \pm 0.31$	$1.31 \pm 1.05$	$1.79 \pm 1.24$
$K_v$ ( $cm^2/s$ )	$0.43 \pm 0.34$	$1.46 \pm 1.05$	$1.80 \pm 1.53$

superior menor a 5 s y la escala de longitud,  $L_L$ , es menor a 2 cm, lo cual significa que segmentos de trayectoria de 5 segundos de duración o 2 cm de extensión pueden ser considerados como segmentos independientes. Indicamos esto mediante los círculos en las trayectorias de la Figura 14. Para los tres flujos, el valor de las componentes de  $T_L$ ,  $L_L$  y  $K$  son, además, muy similares entre sí (para cada flujo) y esto es señal de que los flujos tienen cierto grado de isotropía. Con base en la similaridad de estos valores también tenemos una primera indicación de que el diseño experimental es adecuado, pues cuando las partículas están lejos de las paredes del tanque no debería existir una dirección preferencial para su desplazamiento.

Por su parte, los experimentos tipo B muestran cotas superiores del mismo orden de magnitud que los tipo A, como puede verse en la Tabla III, pero notamos que los valores de la difusividad  $K$  son mayores en la dirección  $x$  que en la dirección  $y$  en contraste con los del tipo A. Esta discrepancia entre la difusión en ambas direcciones es una primera señal de la influencia de la frontera, la cual analizamos con mayor profundidad en las siguientes secciones.

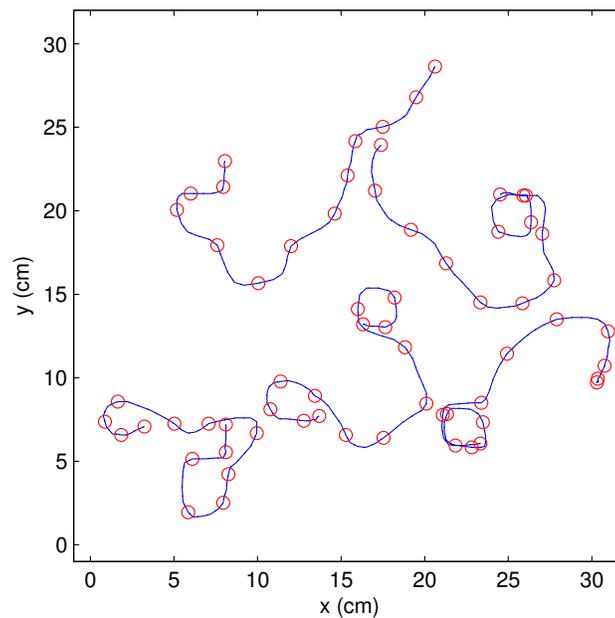


Figura 14: Escalas lagrangianas para  $Re=136$  en los experimentos alejados de la pared. Los círculos en las trayectorias definen los subtrayectos independientes definidos por las escalas integrales. Se muestra la trayectoria de una partícula por región.

Tabla III: Escalas integrales lagrangianas como función de  $Re$  para los experimentos desde de la pared.

	$Re=136$	$Re=230$	$Re=360$
$T_u$ (s)	$4.50 \pm 0.82$	$4.01 \pm 1.93$	$3.39 \pm 1.42$
$T_v$ (s)	$3.80 \pm 0.67$	$3.60 \pm 1.66$	$3.13 \pm 1.73$
$L_u$ (cm)	$1.46 \pm 0.40$	$1.95 \pm 1.39$	$2.64 \pm 1.70$
$L_v$ (cm)	$0.95 \pm 0.31$	$1.46 \pm 0.74$	$2.37 \pm 2.26$
$K_u$ ( $cm^2/s$ )	$0.60 \pm 0.23$	$1.14 \pm 1.03$	$2.41 \pm 2.20$
$K_v$ ( $cm^2/s$ )	$0.31 \pm 0.16$	$0.74 \pm 0.42$	$2.25 \pm 3.16$

### III.2.2 Dispersión absoluta

En la Figura 15 se muestran las curvas de dispersión absoluta (es decir, con respecto a la posición inicial de las partículas) para las componentes  $x$  e  $y$  de los experimentos

tipo A para  $Re=136$ , 230 y 360. El resultado más importante es el carácter isotrópico de la dispersión, que se pone de manifiesto en estas curvas. Cabe destacar este comportamiento dado que las componentes de la dispersión son cantidades calculadas para todo tiempo, de 0 a 60 segundos. En este sentido, esta es una evidencia más sólida de la isotropía del flujo que la proporcionada por las escalas lagrangianas. Por otro lado, en la Figura 16 mostramos cómo la magnitud de la dispersión absoluta aumenta en función del  $Re$ . Este comportamiento es de esperarse tomando en cuenta que vórtices más intensos tendrán mayor capacidad de dispersar partículas.

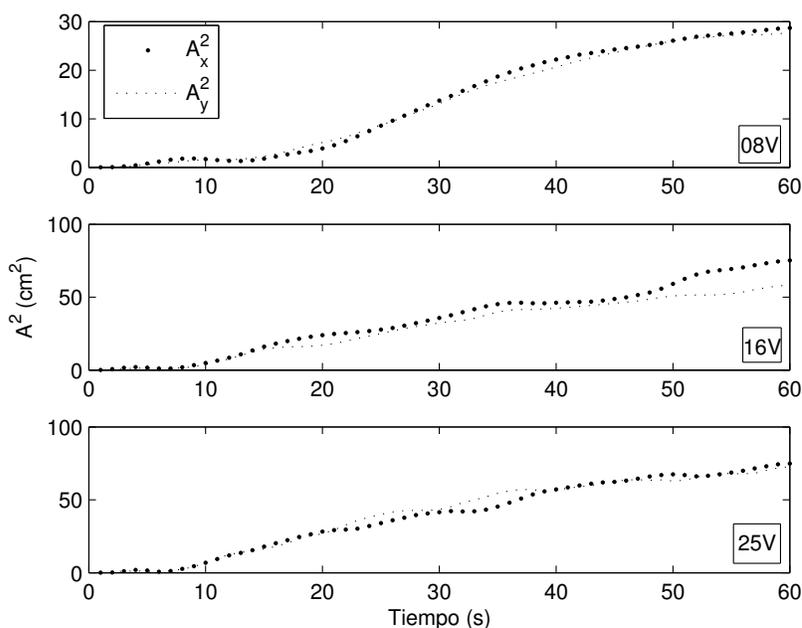


Figura 15: Componentes  $x$  e  $y$  de la dispersión absoluta para los experimentos alejados de la pared. Las componentes indican que los tres flujos,  $Re=136$ , 230 y 360, presentan un alto grado de isotropía.

Siguiendo nuestra hipótesis inicial de que los flujos son homogéneos y estadísticamente estacionarios, podemos comparar estos resultados con aquellos que predice la teoría de Taylor (1921). Recordemos de la discusión de la sección II.1.2 que la teoría de Taylor predice que para tiempos pequeños ( $t \ll T_L$ )  $A^2 \sim t^2$ , mientras que para

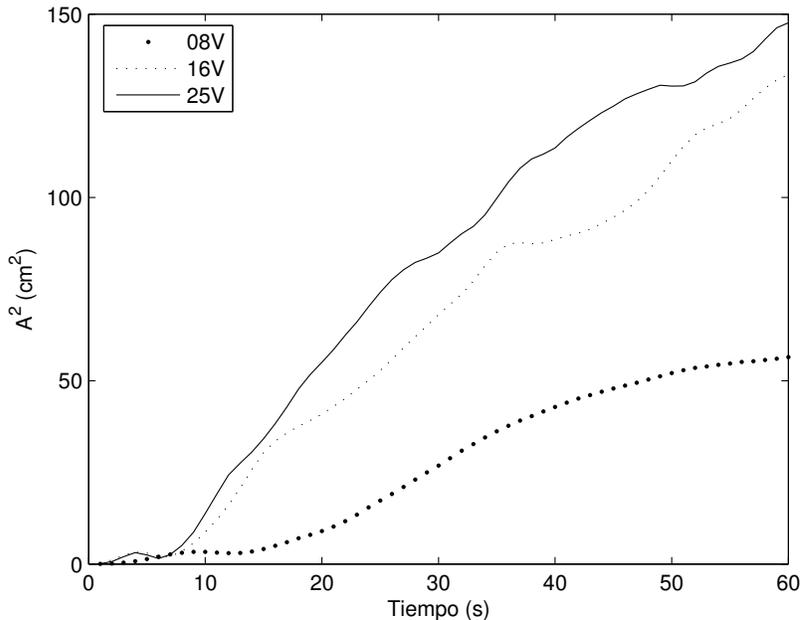


Figura 16: Dispersión absoluta total para los experimentos alejados de la pared. La magnitud de la dispersión absoluta crece como función del  $Re$ , i.e., voltajes mayores.

tiempos grandes ( $t \gg T_L$ )  $A^2$  crece con  $t$ . En la Figura 17 se muestran los datos de dispersión absoluta en escalas logarítmicas para poder apreciar estas dependencias en los experimentos lejos de la pared (tipo A).

Los flujos a  $Re=230$  y  $360$  satisfacen la teoría de Taylor para tiempos pequeños en el intervalo de 2 a 3 y 3 a 4 segundos respectivamente, mientras que para los tiempos grandes se comportan de la manera esperada en los intervalos de 15 a 35 y 20 a 40 segundos, aproximadamente. Aunque esta correspondencia se muestra sólo de manera aproximada, cabe destacar que permite considerar que este tipo de experimentos cumple los comportamientos asintóticos predichos.

Por su parte, los resultados de dispersión absoluta para los experimentos desde la pared (tipo B), Figura 18, muestran que ésta es mayor en la dirección  $x$  que en la dirección  $y$ . Este resultado es una fuerte indicación del papel que juega la frontera

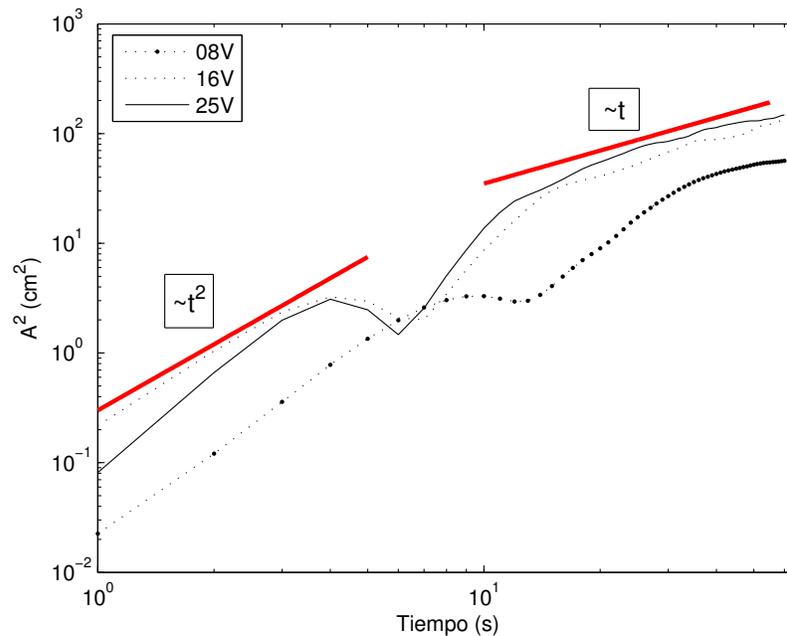


Figura 17: Comportamiento asintótico de la dispersión absoluta total para los experimentos alejados de la pared. La línea continua ajustada indica el comportamiento asintótico predicho por la teoría de Taylor en esos intervalos.

sobre las propiedades de dispersión: tiende a hacer que la dispersión sea mayor en la dirección perpendicular a la misma. De manera análoga a los experimentos tipo A, también la magnitud de  $A^2(t)$  aumenta conforme se incrementa el voltaje en el tanque, como puede verse en la Figura 19.

Si comparamos estos resultados con lo que se esperaría de la teoría de Taylor, vemos en la Figura 20 que el flujo a  $Re=360$  muestra crecimiento asintótico a partir de los 40 segundos aproximadamente ( $t \gg T$ ). Sin embargo, en general, observamos una menor correspondencia con el comportamiento descrito por la teoría de Taylor para flujos homogéneos y estacionarios. Aparentemente, y durante el resto de este trabajo lo seguiremos discutiendo, la cercanía de las partículas a la frontera tiene una influencia en la manera en la que se dispersan respecto de la misma.

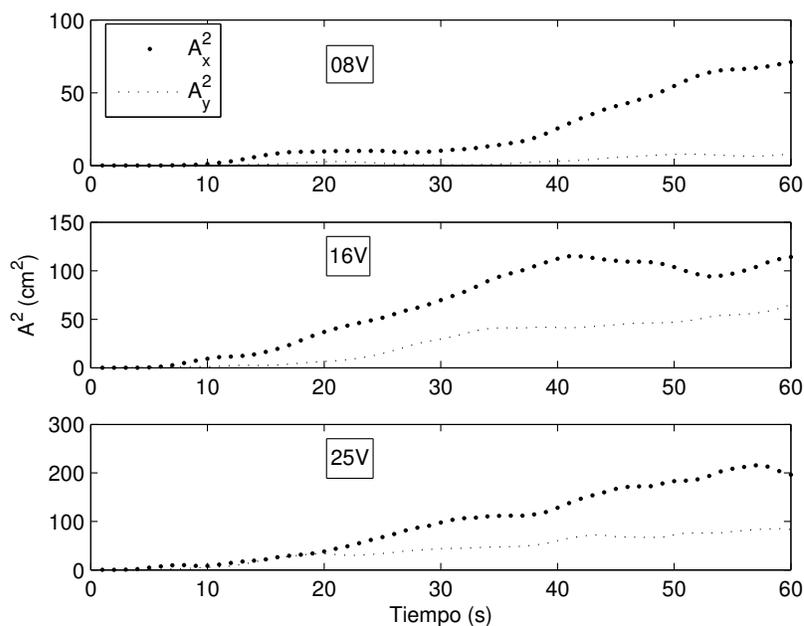


Figura 18: Componentes  $x$  e  $y$  de la dispersión absoluta para los experimentos desde de la pared. Las componentes para estos experimentos muestran que las partículas se dispersan más en la dirección  $x$  que en la dirección  $y$ .

### III.2.3 Dispersión relativa

En esta sección presentamos los resultados de la dispersión entre pares de partículas, en lugar de la dispersión respecto a su posición inicial. Las componentes  $x$  e  $y$  de la dispersión relativa (DR) para los experimentos tipo A discutidos hasta ahora se muestran en la Figura 21, mientras que en la Figura 22 se muestra la dispersión relativa total, ecuación (12), para los mismos. En la primera se puede apreciar, de nuevo, el carácter isotrópico que presentan estos tres flujos, lo cual reafirma lo encontrado con la dispersión absoluta: las propiedades de dispersión no tienen una dirección preferencial. De nuevo, también, el aumento en magnitud de la DR es función del voltaje aplicado dentro del tanque.

Para apreciar mejor la relación entre la DR y el tiempo, presentamos los resultados

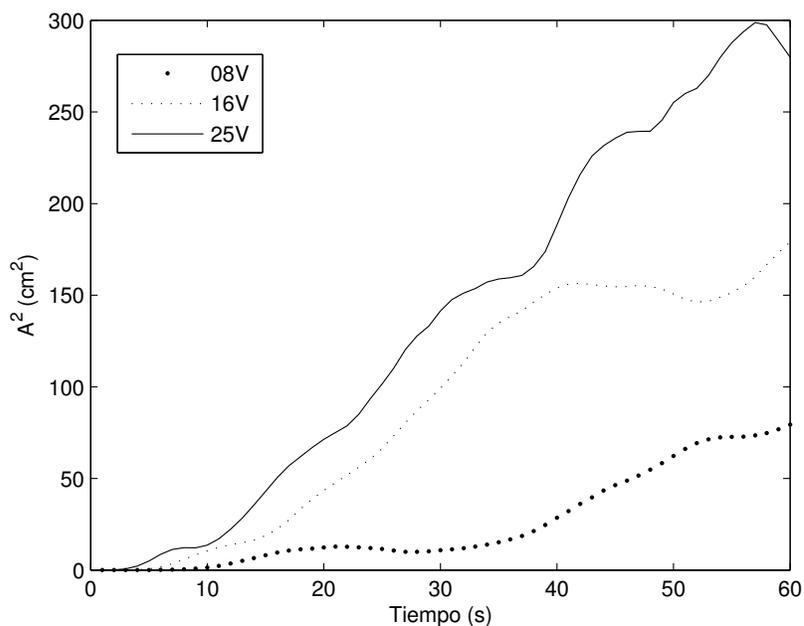


Figura 19: Dispersión absoluta total para los experimentos desde la pared. La separación cuadrática media aumenta como función del voltaje aplicado en el tanque.

de la DR total en gráficas semi-logarítmicas en la Figura 23. Las tres curvas muestran un máximo relativo, alrededor de los 10 s para el flujo a  $Re=136$  y alrededor de los 5 s para los flujos a  $Re=230$  y  $360$ . Este máximo es representativo del tiempo que las partículas tardan en separarse entre sí.

Podemos ajustar los datos de las tres curvas a una recta a diferentes intervalos de tiempo, lo cual nos indica que existe crecimiento exponencial en el tiempo a esas escalas, esto es,  $D^2 \sim e^{mt}$  y observamos este comportamiento tanto antes como después del máximo relativo. Para el flujo a  $Re=136$ , está presente hasta los 30 segundos, mientras que para los flujos a  $Re=230$  y  $360$  lo podemos observar para tiempos menores de 20 segundos.

De la misma forma, cuando podemos ajustar los datos a una recta en una gráfica con escalas logarítmicas tenemos una dependencia de la variable independiente como

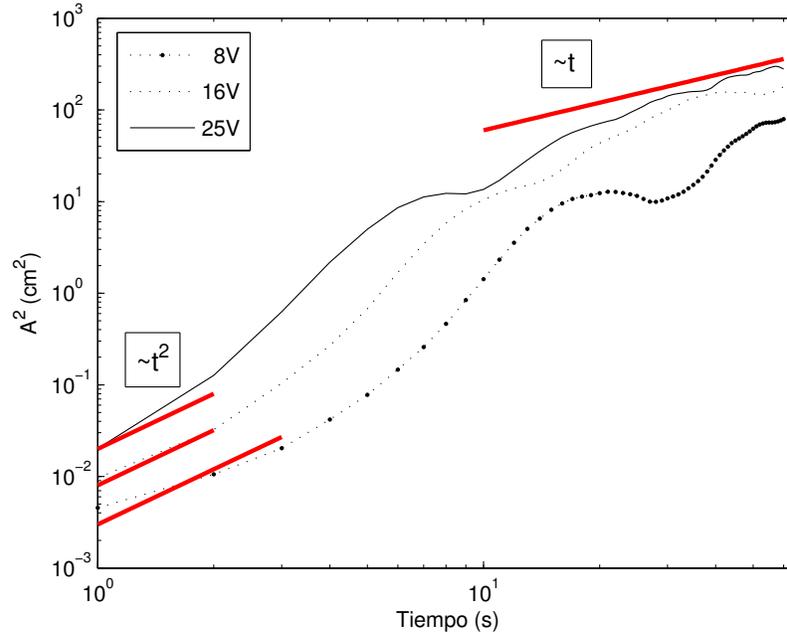


Figura 20: Comportamiento asintótico de la dispersión absoluta en los experimentos desde la pared. Las líneas sólidas indican el comportamiento asintótico predicho por la teoría de Taylor.

una potencia, en este caso del tiempo, i.e.  $D^2 \sim t^{2\alpha}$ , notando que para un valor de  $\alpha = \frac{1}{2}$  tenemos difusión estándar y para  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  tenemos un régimen de difusión anómala (Lacorata *et al.*, 2001).

Podemos observar este comportamiento para tiempos mayores a 30 segundos en el flujo a  $Re=136$ , con  $2\alpha=0.81$ , en la Figura 24. Los flujos a  $Re=230$  y  $360$  muestran este comportamiento a partir de los 17 segundos aproximadamente, con  $2\alpha=1.00$  y  $0.92$  respectivamente, lo cual significa que están dentro del régimen de difusión estándar. En la Tabla IV resumimos la información de las Figuras 23 y 24.

En la Figura 25 mostramos las componentes  $x$  e  $y$  de la DR para los experimentos tipo B. La isotropía observada en el caso A no se conserva en el flujo a  $Re=136$ , donde la DR en la dirección  $x$  es mayor que en la dirección  $y$ . Para  $Re=230$  y  $360$  las componentes de la dispersión crecen a un ritmo similar, pero esta similitud no es

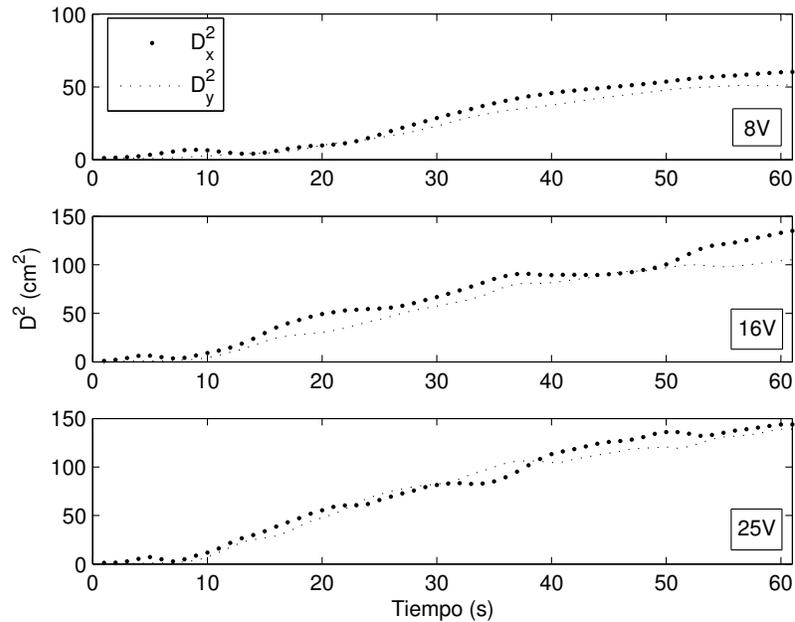


Figura 21: Componentes  $x$  e  $y$  de dispersión relativa para los experimentos alejados de la pared.

Tabla IV: Etapas de crecimiento exponencial ( $D^2 \sim e^{mt}$ ) y como potencia del tiempo ( $D^2 \sim t^{2\alpha}$ ) en los experimentos alejados de la pared.

$Re$	Pendiente (m) (1/s)	Crecimiento exponencial	Pendiente ( $2\alpha$ )	Crecimiento como potencia
136	0.20	2-9 s	0.81	>30 s
	0.11	14-30 s		
230	0.45	1-4 s	1.00	>17 s
	0.30	7-15 s		
360	0.46	2-5 s	0.92	>17 s
	0.44	7-12 s		

tan evidente como en los experimentos tipo A. Aun así, estos comportamientos no nos permiten determinar de manera concluyente una diferencia entre los experimentos lejos y cerca de la pared, por lo que la DR no parece ser una buena medida de la influencia

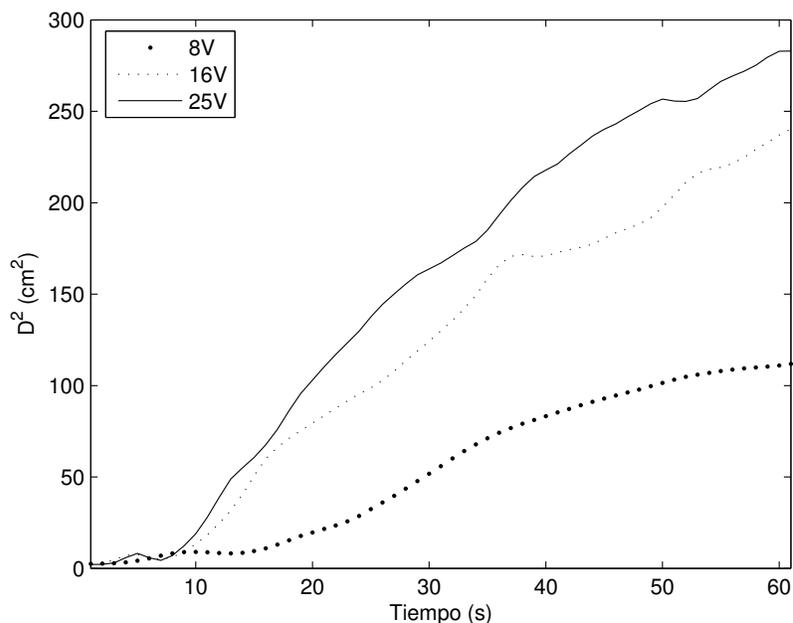


Figura 22: Dispersión relativa total para los experimentos alejados de la pared. La magnitud de la dispersión relativa aumenta como función de la  $Re$ , esto, es, aumenta para voltajes mayores.

de la frontera.

Por otro lado, la magnitud de la DR total, que mostramos en la Figura 26, aumenta como función del voltaje aplicado y es del mismo orden de magnitud que los experimentos tipo A, aunque en este caso la curva para el flujo a  $Re=360$  es menos suave. Cabe mencionar la similitud (cualitativa) de esta curva con las obtenidas por Lacorata *et al.* (2001) usando boyas de deriva oceánicas. Al presentar los resultados en una gráfica semilogarítmica, observamos que, a diferencia de los experimentos tipo A que presentaban un máximo relativo, los del tipo B presentan una región de separación casi constante alrededor de los 17, 10 y 8 segundos respectivamente, Figura 27.

También, como en el caso anterior, los resultados muestran que existen dos zonas de crecimiento exponencial, antes y después de la región de separación constante discutida en el párrafo anterior.

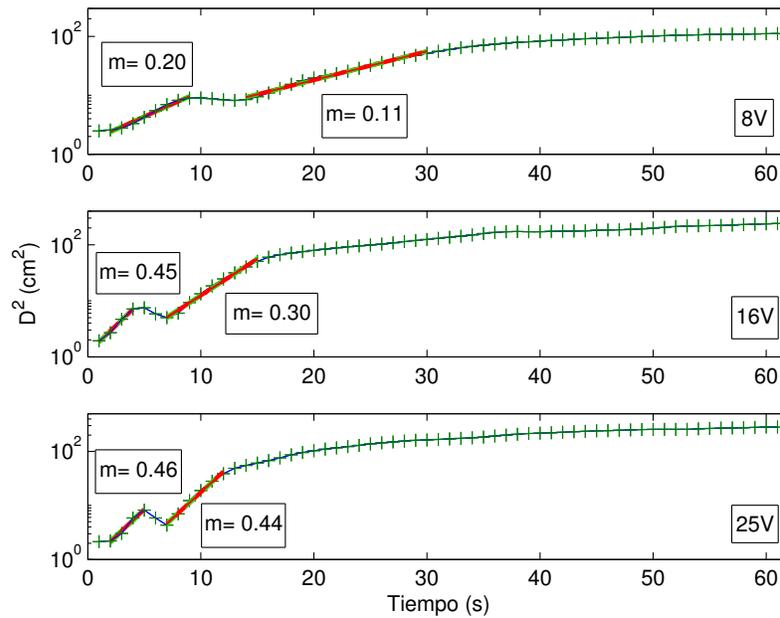


Figura 23: Dispersión relativa total en escala semi-logarítmica para los experimentos alejados de la pared.

Podemos aproximar el crecimiento de la DR a escalas de tiempo mayores también en este caso como una potencia del tiempo, como presentamos en la Figura 28. observamos esta relación entre los 28 y 51 segundos para el flujo a 8V, de los 21 a los 40 segundos para el flujo a 16V y de los 25 a los 60 segundos para el flujo a 25V. Las rectas ajustadas en estos intervalos nos dan valores de  $2\alpha=2.34$ , 1.87 y 1.02, respectivamente. Resulta interesante notar que este último valor indica que el flujo a 25V, para escalas de tiempo mayores de 25 segundos, cae dentro del régimen de difusión estándar, al igual que en los experimentos alejados de la pared. Resumimos la información de las Figuras 27 y 28 en la Tabla V.

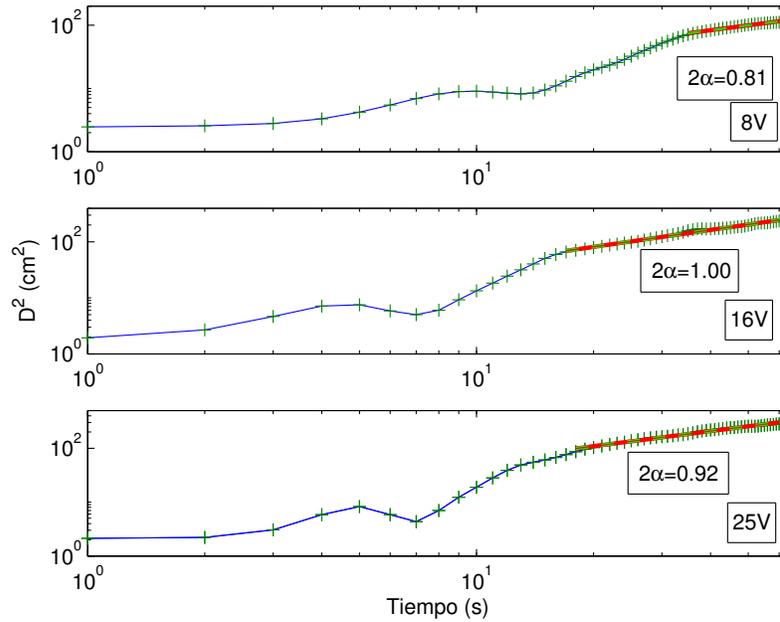


Figura 24: Dispersión relativa total en escala logarítmica para los experimentos alejados de la pared. Las líneas continuas denotan regiones de crecimiento como una potencia del tiempo.

Tabla V: Etapas de crecimiento exponencial ( $D^2 \sim e^{mt}$ ) y como potencia del tiempo ( $D^2 \sim t^{2\alpha}$ ) en los experimentos desde la pared.

$Re$	Pendiente (m) (1/s)	Crecimiento exponencial	Pendiente ( $2\alpha$ )	Crecimiento como potencia
136	0.19	8-14 s	2.34	28-51 s
	0.15	19-24 s		
230	0.26	5-9 s	1.87	21-40 s
	0.23	11-19 s		
360	0.33	3-7 s	1.02	25-60 s
	0.25	9-16 s		

### III.2.4 Exponentes de Lyapunov de escala finita

Examinamos ahora los resultados de los ELEF para los diferentes flujos. Recordemos que el ELEF representa una medida de la tasa de separación exponencial entre un par de

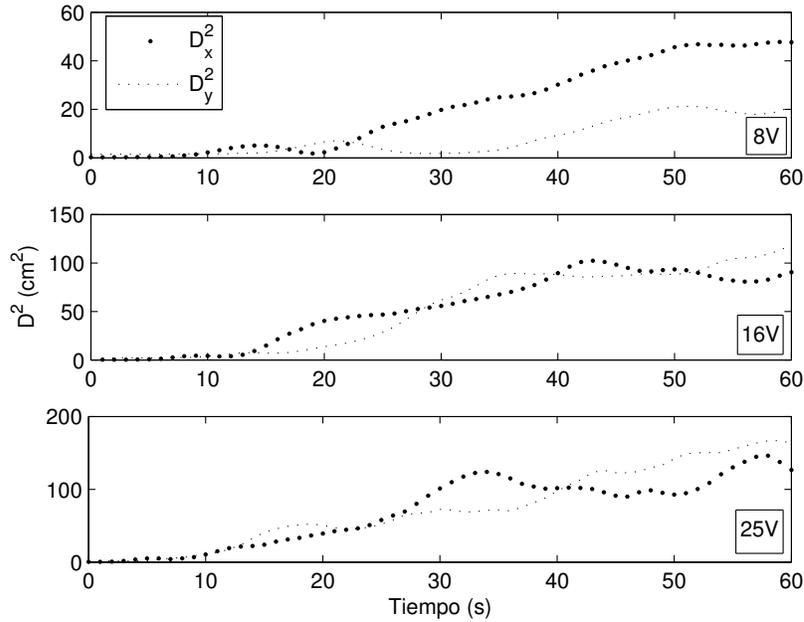


Figura 25: Componentes de dispersión relativa para los experimentos desde la pared.

partículas como función de la escala de longitud (a la que están separadas inicialmente), y que para este cálculo tomamos en cuenta todos los pares de trayectorias posibles en el ensamble. Para 135 partículas, resultan un total de 9045 pares disponibles en los experimentos A, mientras que los ELEF en los experimentos del tipo B los estimamos a partir de 105 pares.

Las curvas de la Figura 29 corresponden a los flujos a 8, 16 y 25V, respectivamente, para los experimentos A. La forma que presentan las curvas indica las propiedades de dispersión en varias escalas de movimiento dentro de los flujos.

Para valores de  $\delta < 10$  cm, los tres flujos presentan un régimen super difusivo, ya que la pendiente  $m > -2$  en ese intervalo (sección II.1.3), seguido de un régimen de separación exponencial aproximadamente constante para  $\delta > 10$  cm. Hemos resumido esta información en la Tabla VI, donde también presentamos, como ilustración, el coeficiente de difusión dependiente de la escala  $K \sim \lambda \delta^2$ .

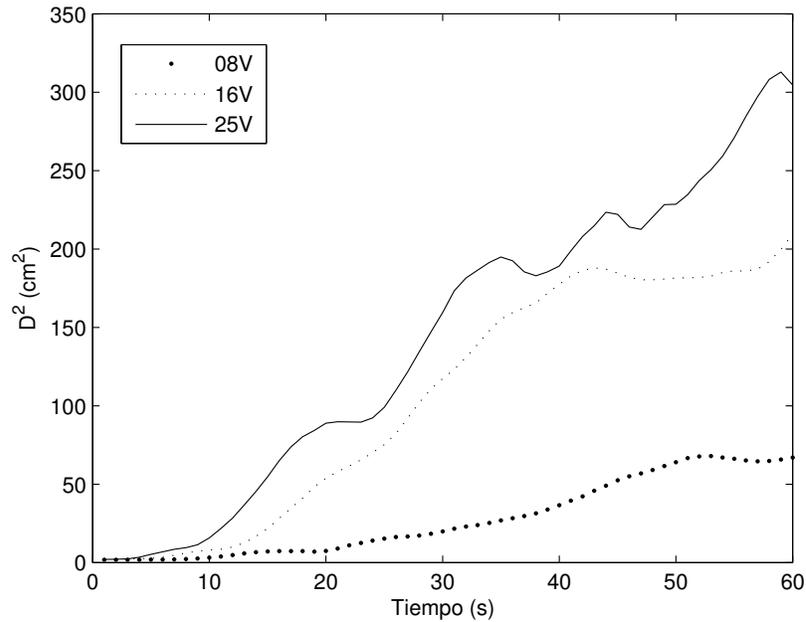


Figura 26: Dispersión relativa total para los experimentos desde la pared. La separación cuadrática media entre los pares de partículas aumenta como función del voltaje aplicado en el tanque.

Tabla VI: Etapas de crecimiento indicadas por los exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos alejados de la pared. Régimen super difusivo (SD) y régimen de separación exponencial constante (SEC).

$Re$	Pendiente (m)	Intervalo	$K$ ( $cm^2s^{-1}$ )
136	-0.59	2-8 cm	0.40 ( $\delta=4$ cm)
	$\sim 0$	8-12 cm	1.73 ( $\delta=10$ cm)
230	-0.76	2-8 cm	0.64 ( $\delta=4$ cm)
	$\sim 0$	8-14 cm	2.22 ( $\delta=10$ cm)
360	-0.84	2-8 cm	0.79 ( $\delta=4$ cm)
	$\sim 0$	8-14 cm	2.31 ( $\delta=10$ cm)

En cuanto a los ELEF para los experimentos tipo B, las curvas de la Figura 30 sugieren un régimen adicional de dispersión. Observamos esto claramente para los flujos  $Re=230$  y  $360$ , en donde tenemos una etapa de separación exponencial constante

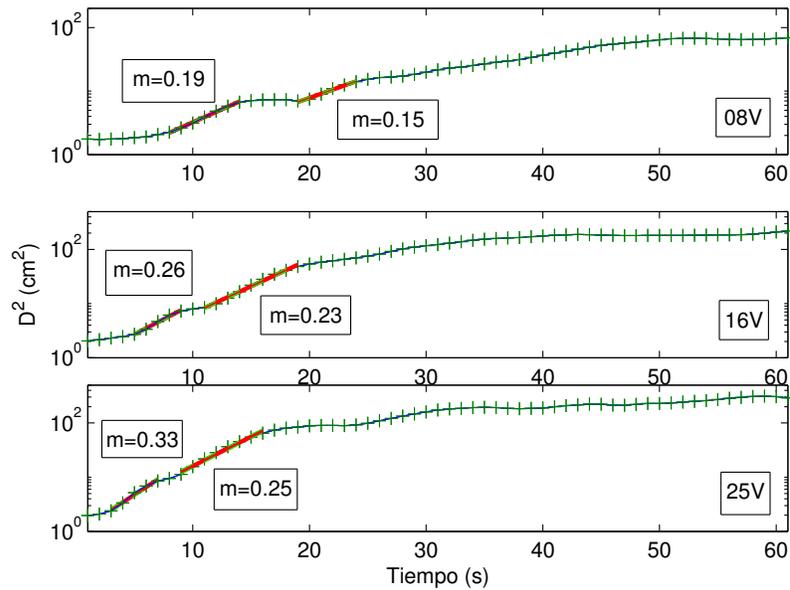


Figura 27: Dispersión relativa total en escala semi-logarítmica para los experimentos desde la pared. Las líneas continuas indican zonas de separación exponencial entre pares.

(2-6 cm) seguido de un régimen super difusivo ( $m > -2$ ), y para escalas mayores ( $\delta > 14$  cm) de nuevo otra etapa de separación exponencial, pero ahora a una tasa mayor. Al igual que en el caso de la DR, el flujo a  $Re=136$  tiene un comportamiento diferente, ya que sólo observamos prácticamente un solo régimen con difusión constante a cualquier escala. La información de estas curvas la presentamos en la Tabla VII.

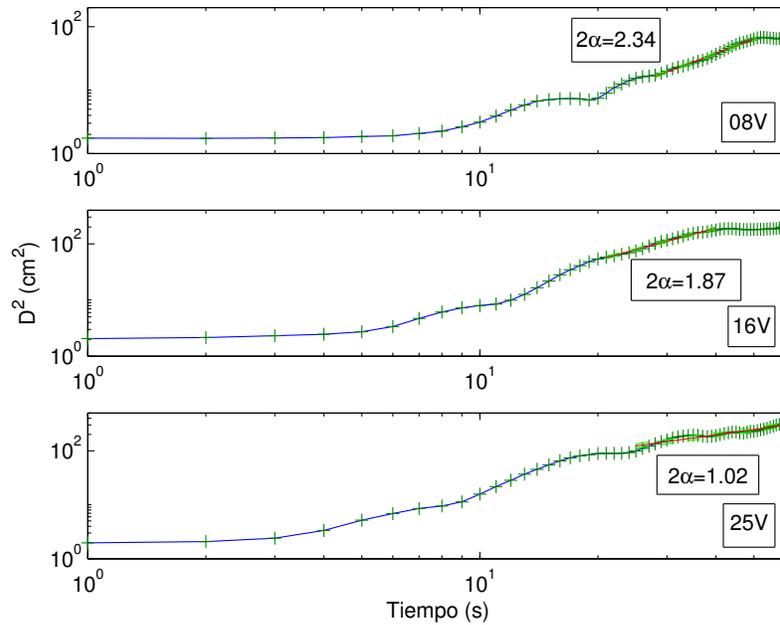


Figura 28: Dispersión relativa total en escala logarítmica para los experimentos desde la pared. Los ajustes indican regiones de crecimiento como una potencia del tiempo

Tabla VII: Etapas de crecimiento indicadas por los exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos desde la pared. Régimen super difusivo (SD) y régimen de separación exponencial constante (SEC).

$Re$	Pendiente (m)	Intervalo	$K (cm^2 s^{-1})$
136	$\sim 0$	2-30 cm	0.51 ( $\delta=4$ cm)
230	$\sim 0$	2-6 cm	0.92 ( $\delta=4$ cm)
	-0.96	6-16 cm	3.44 ( $\delta=10$ cm)
360	$\sim 0$	2-6 cm	0.95 ( $\delta=4$ cm)
	-0.84	6-10 cm	2.43 ( $\delta=8$ cm)

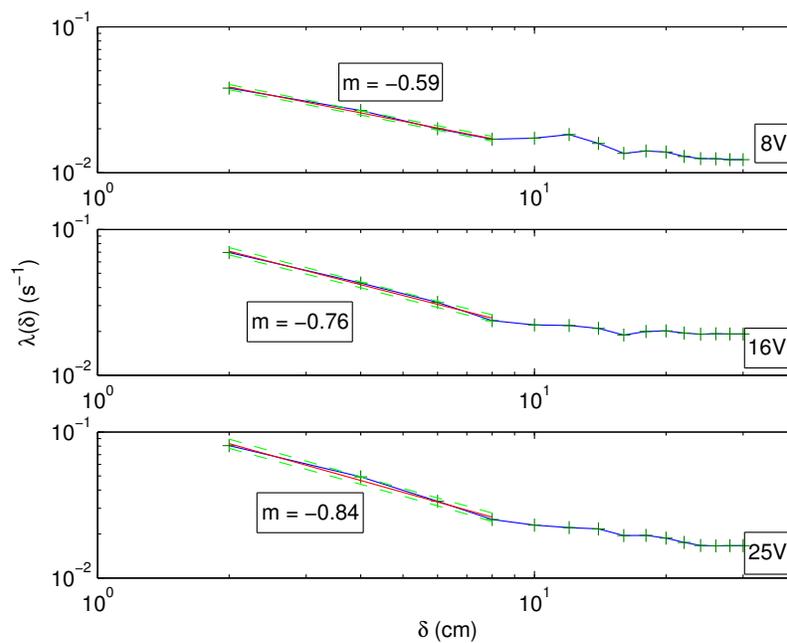


Figura 29: Exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos alejados de la pared.

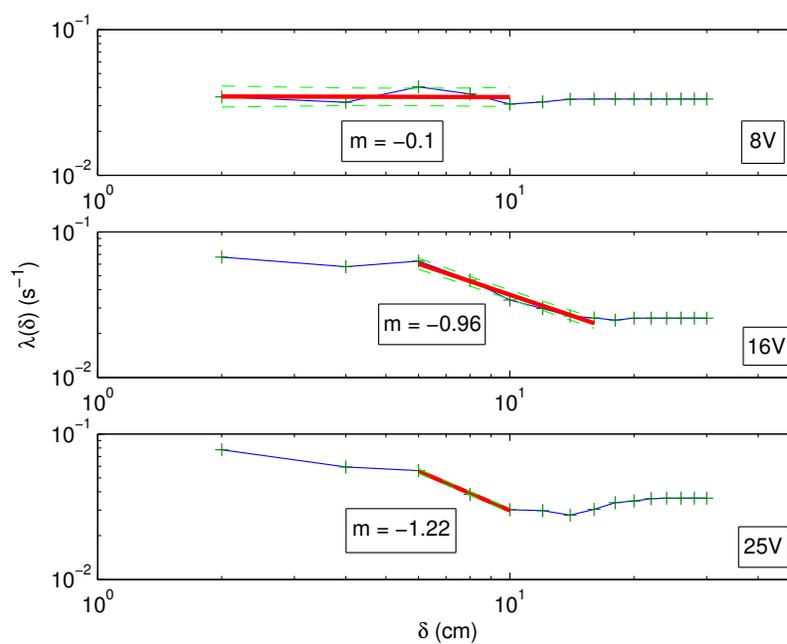


Figura 30: Exponentes de Lyapunov de escala finita para los experimentos desde la pared. Régimen super difusivo (SD) y régimen de separación exponencial constante (SEC).

# IV

## Discusiones

Discutiremos ahora los diferentes resultados obtenidos tanto para los experimentos tipo A (alejados de la pared) como los del tipo B (desde la pared) notando las diferencias encontradas, sus posibles causas y haciendo hincapié en el papel que juega la presencia de la pared.

En primer lugar, es importante subrayar y discutir algunos aspectos del procedimiento experimental debido a que se introdujeron diferencias sustanciales respecto a la metodología utilizada en otros trabajos de dispersión. Mientras que en algunos estudios se han empleado sistemas complicados de rastreo de partículas (Voth *et al.*, 1998; Ott y Mann, 2000) o inclusive hasta partículas imaginarias (integrando el campo de velocidad) (García-Olivares *et al.*, 2007), la metodología aquí utilizada consiste en hacer el seguimiento de trazadores en diferentes realizaciones del mismo experimento y posteriormente reunir la información de sus trayectorias como si hubieran sido liberadas en un solo experimento. Este procedimiento se aplicó para evitar que las partículas (con dimensiones  $\sim 2$  mm) colocadas en una pequeña región circular (diámetro  $\sim 2.5$  cm) se pegaran entre sí. La isotropía mostrada por las curvas de dispersión absoluta en los

experimentos A y B y por la dispersión relativa en los experimentos A, así como la similitud de los valores de las escalas lagrangianas avalan esta manera de obtener datos suficientes y confiables para calcular medidas de dispersión. En otras palabras, se ha desarrollado un método útil y relativamente sencillo para realizar experimentos de dispersión lagrangiana en un sistema de dimensiones reducidas.

Vale la pena mencionar que la liberación de trazadores a diferentes tiempos es similar a lo que típicamente se hace con datos de boyas de deriva en el océano, en donde las boyas son liberadas a tiempos y en lugares muy diferentes. En el caso oceanográfico esta es una necesidad práctica debida a la dificultad, tanto física como económica, de liberar un número grande de boyas al mismo tiempo. Esta liberación suele realizarse con días (Salas *et al.*, 2001) o meses (Lacorata *et al.*, 2001) de diferencia, por lo que las boyas se ven sujetas a la influencia de diferentes estados de movimiento del océano. Las medidas de dispersión así obtenidas pueden ser contaminadas o inclusive ser espurias, lo que no ocurre en nuestro caso dado el control que tenemos sobre el campo turbulento.

En contraste, los datos experimentales ofrecen notorias ventajas sobre los datos oceanográficos, gracias al control que se ejerce sobre el flujo dispersor. En este trabajo el flujo se controla electromagnéticamente, de manera que las escalas de tiempo y velocidad son conocidas de antemano. Esta ventaja se refleja en la suavidad de las curvas de dispersión obtenidas, las cuales contrastan, por ejemplo, con el comportamiento notoriamente irregular de la dispersión relativa calculada por Lacorata *et al.* (2001) en el Mar Adriático. Cabe mencionar también la regularidad de las curvas de dispersión relativa obtenidas por LaCasce y Ohlmann (2003), debida en principio al gran número de boyas utilizadas en su estudio (731) y al diseño de sus experimentos en escalas temporales y espaciales.

Es importante mencionar el número de datos con los que se está trabajando, dado

que tanto la dispersión absoluta ( $A^2$ ) como la relativa ( $D^2$ ) son medidas estadísticas. Para los experimentos tipo A, los cálculos de  $A^2$  se obtuvieron de 15 partículas en cada una de las 9 regiones muestreadas para un total de 135 trayectorias mientras que en los experimentos tipo B contamos con 15 trayectorias totales. Contrastando esta cantidad de información con algunas de las principales referencias de este proyecto, el trabajo de Poulain y Niiler (1989) contó con 29 boyas (un lance de 20 en Julio de 1985 y otro de 9 en Marzo de 1989) mientras que Salas *et al.* (2001) trabajaron con 15 boyas, respectivamente, para obtener también medidas de  $A^2$ . Poulain y Niiler (1989) afirman que al hacer una descripción de las características de un flujo con un número limitado de boyas se pueden introducir errores importantes, sin embargo, consideran su estadística como robusta.

Por otro lado, en los experimentos tipo A las mediciones de  $D^2$  se obtuvieron de 945 pares (105 pares en cada región) mientras que para los experimentos tipo B se utilizó 105 pares. Para obtener medidas de  $D^2$  Lacorata *et al.* (2001) utilizaron 36 boyas (obtenidas de 5 lances entre Diciembre de 1994 y Marzo de 1996) y LaCasce y Ohlmann (2003) contaron con 731 boyas (obtenidas de dos conjuntos de 389 lanzadas entre Octubre de 1993 y otro de 342 lanzadas en Febrero de 1996) de las cuales trabajaron con 140 que cumplieron ciertos requisitos. Las mediciones de Lacorata *et al.* (2001) son irregulares y lo atribuyen no a una estadística pobre, sino a un problema intrínseco de  $D^2$  como medida de dispersión. Según estos autores, para un sistema finito,  $D^2$  puede dar una imagen errónea debido a las fluctuaciones en el tiempo que tardan las partículas al pasar del régimen exponencial al de difusión estándar. Por su parte, las curvas de LaCasce y Ohlmann (2003) son sorprendentemente regulares debido a, como ya se mencionó, el gran número de datos disponibles y a la forma en que diseñaron los muestreos. Este último resultado, aunado a los nuestros, nos hace pensar que la irregularidad de las

curvas de  $D^2$  obtenidas por Lacorata *et al.* (2001) es precisamente efecto de la falta de datos experimentales y a la irregularidad temporal en que fueron liberadas las boyas, más que un problema intrínseco de  $D^2$  como medida de dispersión.

Las curvas  $A^2$  y  $D^2$  mostradas en el capítulo anterior para los experimentos tipo A muestran un alto grado de isotropía. Esto es de esperarse ya que las partículas se encuentran alejadas de las paredes; no hay razón, en principio, para que la dispersión ocurra en una dirección preferente. Así, según vemos de las figuras correspondientes, las partículas se mueven, en promedio, de la misma forma en ambas direcciones durante todo el periodo de muestreo. Al mismo tiempo, la isotropía es un reflejo del buen control que se tiene sobre el flujo turbulento, pues los parámetros responsables de éste se mantienen constantes (dentro de los límites experimentales): el campo magnético, la conductividad del agua y la geometría de los imanes; mientras que sobre el parámetro que se hace variar, i.e. la corriente eléctrica, se tiene un buen control utilizando la fuente de poder.

Por su parte, los resultados de  $A^2$  para los experimentos del tipo B muestran que las medidas de dispersión se vuelven anisotrópicas. La forma de las curvas indica que las partículas se dispersan en mayor grado en la dirección  $x$  (perpendicular a la pared) que en la dirección  $y$ . Este comportamiento se debe a que la pared representa una barrera física al movimiento de los trazadores en la dirección perpendicular a la misma.

Las curvas de  $D^2$  en los experimentos tipo B, por su parte, no ofrecen información concluyente sobre el efecto de la pared sobre las propiedades dispersivas del flujo en esta configuración. Este resultado podría no ser tan inesperado si tomamos en cuenta que después de cierto tiempo las partículas se encuentran lo suficientemente lejos de la pared para que su separación relativa no se vea afectada por la misma.

Al comparar los resultados de  $A^2$  obtenidos en este trabajo con lo que se espera de la

teoría de Taylor para flujos homogéneos y estadísticamente estacionarios la correspondencia es mayor para tiempos largos ( $t \gg T$ ) que para los tiempos cortos. Es decir, la dispersión absoluta llega a crecer de manera aproximadamente proporcional al tiempo ( $A^2 \sim t$ ), mientras que es difícil concluir que crece proporcionalmente al cuadrado del tiempo ( $A^2 \sim t^2$ ) al inicio de los experimentos, sobre todo, debido a que hay muy pocos puntos experimentales a esta escala. Aún con esto, nuestra conclusión es que dicha teoría es insuficiente para interpretar los datos obtenidos, pues la correspondencia entre los resultados y los comportamientos asintóticos predichos para tiempos cortos y largos se da sólo en intervalos de tiempo muy pequeños. Es importante señalar que, al menos cualitativamente, nuestros resultados son similares a los presentados por Salas *et al.* (2001). Sin embargo, estos autores afirman observar una buena relación entre los experimentos y la teoría de Taylor, lo cual puede ser discutible a la luz de lo que aquí hemos observado.

# V

## Conclusiones

Describimos las propiedades dispersivas de un flujo turbulento en dos dimensiones de manera experimental para dos casos: cuando las partículas dispersadas se encuentran alejadas de una pared o frontera (tipo A) y cuando éstas se encuentran cercanas a la frontera (tipo B).

Presentamos una metodología que difiere de aquellas empleadas en otros trabajos sobre dispersión. Los resultados sobre la isotropía de las curvas de dispersión absoluta y relativa, así como la similitud entre los valores de las escalas lagrangianas de tiempo y espacio  $T_L$  y  $L_L$ , respectivamente, muestran que los experimentos realizados representan un método útil y relativamente sencillo para realizar estudios de dispersión en el laboratorio en un sistema de dimensiones reducidas.

Para ambos tipos de experimentos, se observa que la escala integral lagrangiana de tiempo  $T_L$  disminuye, mientras que la de longitud  $L_L$  aumenta en función del voltaje aplicado en el tanque, es decir, conforme se incrementa el número de Reynolds, lo cual es de esperarse pues remolinos más intensos generan a su vez flujos más intensos.

La similitud entre los valores de las escalas lagrangianas para cada caso estudiado

en los experimentos tipo A es un primer indicativo de la isotropía que presentan dichos flujos y esto se confirma mediante los resultados de dispersión absoluta.

En los experimentos tipo B, la isotropía que habían mostrado las curvas de dispersión en la configuración tipo A se pierde, lo cual es consecuencia de la presencia de la pared, pues esta representa una barrera física al movimiento libre de partículas en esa dirección.

Para estos mismos experimentos las curvas de dispersión relativa no ofrecen mayor información en cuanto al efecto de la pared sobre las propiedades dispersivas del flujo debido a una falta de datos experimentales.

Los exponentes de Lyapunov de escala finita muestran que existen al menos dos etapas de crecimiento a lo largo de todo el intervalo de escalas de longitud en los dos tipos de experimentos realizados. Para los tipo A, existe inicialmente un régimen de difusión que es más rápido que la difusión estándar hasta la escala de 10 cm, seguido de un régimen de separación exponencial constante hasta los 14 cm. Para los experimentos del tipo B, existe separación exponencial constante hasta los 6 cm, seguido de un régimen super difusivo en escalas de hasta 10 cm. En todos los casos, estas escalas de longitud son del orden o mayores que el tamaño de los remolinos.

# Literatura citada

- Artale, V., Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., y Vulpiani, A. (1997). Dispersion of Passive Tracers in Closed Basins: Beyond the Diffusion Coefficient. *Phys. Fluids*, **9**, (11):3162–3171.
- Aurell, E., Boffetta, G., Crisanti, A., Paladin, G., y Vulpiani, A. (1996). Growth of Infinitesimal Perturbations in Turbulence. *Phys. Rev Lett.*, **77**, (7):1262–1265.
- Batchelor, G. K. (1949). Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence. I. Eulerian Analysis. *Aust. J. Sci. Res.*, **2**, 437–450.
- Batchelor, G. K. (1952). Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence. II. The relative Motion of Particles. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, 345–361.
- Biferale, L., Boffetta, G., Celani, A., Lanotte, A., y Toschi, F. (2006). Lagrangian Statistics in Fully Developed Turbulence. *J. of Turbulence*, **7**, (6):1–12.
- Boffetta, G. y Sokolov, I. M. (2002). Statistics of Two-Particle Dispersion in Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Fluids*, **14**, (9):3224–3232.
- Brink, K. H., Beardsley, R. C., Niiler, P. P., Abbott, M., Huyer, A., Ramp, S., Stanton, T., y Stuart, D. (1991). Statistical Properties of Near Surface Flow in the California Coastal Transition Zone. *J. Geophys. Res.*, **96**, 14693–14706.

- Cardoso, O., Marteau, D., y Tabeling, P. (1994). Quantitative Experimental Study of the Free Decay of Quasi-Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Rev. E*, **49**, (1):454–461.
- Carlton, J. T. (1998). Apostrophe to the Ocean. *Conservation Biology*, **12**, 1165–1167.
- Colin de Verdiere, A. (1983). Lagrangian Eddy Statistics from Surface Drifters in the Eastern North Atlantic. *J. Mar. Res.*, **41**, 375–398.
- d’Ovidio, F., Fernández, V., Hernández-García, E., y López, C. (2004). Mixing Structures in the Mediterranean Sea from Finite-Size Lyapunov Exponents. *Geophys. Res. Lett.*, **31**, (L17203):1–4.
- Dubinsky, Z. y Stambler, N. (1996). Marine Pollution and Coral Reefs. *Global Change Biology*, **2**, 511–526.
- Elhmaïdi, D., Provenzale, A., y Babiano, A. (1993). Elementary Topology of Two-Dimensional Turbulence from a Lagrangian Viewpoint and Single-Particle Dispersion. *J. Fluid Mech.*, **257**, 533–558.
- Falco, P., Griffa, A., Puolain, P. M., y Zambianchi, E. (2000). Transport Properties in the Adriatic Sea as Deduced from Drifter Data. *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, (8):2055–2071.
- Frisch, U. y Sulem, P. L. (1984). Numerical Simulation of the Inverse Energy Cascade in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, **27**, 1921.
- García-Olivares, A., Isern-Fontanet, J., y García-Ladona, E. (2007). Dispersion of Passive Tracers and Finite-Scale Lyapunov Exponents in the Western Mediterranean Sea. *Deep-Sea Res. I*, **54**, 253–268.

- Gross, M. G. (1978). Effects of Waste Disposal Operations in Estuaries and the Coastal Ocean. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, **6**, 127–143.
- Hansen, A. E., Marteau, D., y Tabeling, P. (1998). Two-Dimensional Turbulence and Dispersion in a Freely Decaying System. *Phys. Rev. E*, **58**, (6):7261–7271.
- Haynes, R. y Barton, E. D. (1991). Lagrangian Observations in the Iberian Coastal Transition Zone. *J. Geophys. Res.*, **90**, 14731–14741.
- Kraichnan, R. H. (1967). Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, **10**, 1417–1423.
- Krauss, W. y Böning, C. W. (1987). Lagrangian Properties of Eddy Fields in the Northern North Atlantic as Deduced from Satellite-Tracked Buoys. *J. Mar. Res.*, **45**, 259–291.
- Kundu, K. P. y Cohen, I. (2002). *Fluid Mechanics*. Academic Press Inc. 2nd Ed. 730 pp.
- LaCasce, J. H. y Ohlmann, C. (2003). Relative Dispersion at the Subsurface of the Gulf of Mexico. *J. Mar. Res.*, **61**, (3):285–312.
- Lacorata, G., Aurell, E., y Vulpiani, A. (2001). Drifter Dispersion in the Adriatic Sea: Lagrangian Data and Chaotic Model. *Annales Geophysicae*, páginas (19):121–129.
- Lekien, F., Coulliette, C., Mariano, A. J., Ryan, E. H., Shay, L. K., Haller, G., y Marsden, J. E. (2005). Pollution release tied to invariant manifolds: a case study for the coast of Florida. *Physica D*, **210**, 1–20.
- Leslie, H. M. (2005). A Synthesis of Marine Conservation Planning Approaches. *Conservation Biology*, **19**, 1701–1713.

- Mestres, M. (2002). *Three-Dimensional Simulation of Pollutant Dispersion in Coastal Waters*. Tesis de doctorado, Universidad Politécnic de Catalunya. 301 pp.
- Monin, A. S. y Yaglom, A. M. (1971). *Statistical Fluid Mechanics*. MIT Press.
- Ott, S. y Mann, J. (2000). An Experimental Investigation of the Relative Diffusion of Particle Pairs in Three-Dimensional Turbulent Flow. *J. Fluid Mech.*, **422**, 196–212. 207223.
- Paret, J. y Tabeling, P. (1997). Experimental Observation of the Two-Dimensional Inverse Energy Cascade. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 4162–4165.
- Poulain, P. M. y Niiler, P. (1989). Statistical Analysis on the Surface Circulation in the California Current Using Satellite-Tracked Drifters. *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 1588–1603.
- Provenzale, A. (1999). Transport by Coherent Barotropic Vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**, 55–93.
- Richardson, L. F. (1926). Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph. *Proc. R. Soc. London*, **110**, 709–737. Series A.
- Salas, J., García-Ladona, E., y Font, J. (2001). Statistical Analysis of the Surface Circulation in the Algerian Current Using Lagrangian Buoys. *J. Mar. Sys.*, **29**, 65–89.
- Sigia, E. D. y Aref, H. (1981). Point Vortex Simulation of the Inverse Energy Cascade in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, **24**, 171.
- Sindermann, C. J. (1988). Biological Indicators and Biological Effects of Estuarine/Coastal Pollution. *J. of the American Water Resources Association*, **24**, 931–939.

- Sommeria, J. y Moreau, R. (1982). Coral Reef Primary Productivity: A Beggar's Banquet. *Trends in Ecology and Evolution*, **3**, 106–111.
- Tabeling, P., Burkhart, S., Cardoso, O., y Willaime, H. (1991). Experimental Study of Freely Decaying Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, (27):3772–3775.
- Taylor, G. I. (1921). Diffusion by Continuous Movements. *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 196–212.
- Voth, G. A., Satyanarayanan, K., y Bodenschatz, E. (1998). Lagrangian Acceleration Measurements at Large Reynolds Numbers. *Phys. Fluids*, **10**, 2268–2280.
- Yeung, P. K. (2001). Lagrangian Characteristics of Turbulence and Scalar Transport in Direct Numerical Simulations. *J. Fluid Mech.*, **427**, 241–274.
- Yeung, P. K. (2002). Lagrangian Investigations of Turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **34**, 115–142.