

TESIS DEFENDIDA POR  
**Aleph Jiménez Domínguez**  
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

---

Dr. José Luis Ochoa de la Torre  
*Director del Comité*

---

Dr. Julio Sheinbaum Pardo  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes  
*Miembro del Comité*

---

Dr. José Antonio Martínez Alcalá  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Jesús Manuel Figueroa  
Rodríguez  
*Coordinador del programa de  
posgrado en Oceanografía Física*

---

Dr. David Hilario Covarrubias  
Rosales  
*Director de Estudios de Posgrado*

28 de Noviembre de 2008

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR  
DE ENSENADA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

---

**MOMENTO ANGULAR EN UN MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA  
CON FRICCIÓN LATERAL**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

**ALEPH JIMÉNEZ DOMÍNGUEZ**

Ensenada, Baja California, México, Noviembre del 2008.

**RESUMEN** de la tesis de **Aleph Jiménez Domínguez**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California, Noviembre 2008

## **MOMENTO ANGULAR EN UN MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA CON FRICCIÓN LATERAL**

Resumen aprobado por:

---

Dr. José Luis Ochoa de la Torre  
Director de Tesis

El modelo de gravedad reducida ha sido muy usado para la comprensión de muchos procesos oceánicos, y para la elaboración de modelos numéricos más acertados y de mayor complejidad. El momento angular es una cantidad que se debe conservar en sistemas aislados sin pares externos, pues las interacciones internas deben producir, por la tercera ley de Newton, pares internos que son compensatorios entre ellos. El momento angular es una propiedad extensiva que debe considerarse en su balance, para sistemas no aislados, las masas que se intercambien y los pares externos. En este estudio solo se analiza la componente vertical del momento angular y en la aproximación convencional de plano- $f$ . Con fronteras impermeables (i.e. sin intercambio de masa) los pares debidos a la distribución de presión y a los esfuerzos tangenciales deben ser los únicos involucrados en la variación del momento angular. Usando estas nociones se encuentra una parametrización consistente de la difusión lateral de momento. En este estudio se muestra la relevancia de esta parametrización en relación al balance de momento angular y la 'consistencia' con la energía. Otra parametrización que es consistente respecto a energía, persiste en defecto respecto al momento angular. Mediante un modelo en diferencias finitas, y ambiente Matlab, se presentan ejemplos que hacen patente el papel de los diferentes pares impuestos por condiciones de frontera, incluyendo un subdominio interno; con entradas y salidas de fluido.

**Palabras Clave:** Momento angular, Viscosidad, Gravedad reducida.

**ABSTRACT** of the thesis presented by **Aleph Jiménez Domínguez** as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree in PHYSICAL OCEANOGRAPHY. Ensenada, Baja California, México, November 2008.

## **ANGULAR MOMENTUM IN A REDUCED GRAVITY MODEL WITH LATERAL FRICTION**

Reduced gravity model it is a very used tool to understand many of the oceanic process, and in the elaboration of precise and more complex numerical models. The angular momentum it is a quantity that it should be conserved in isolated systems without external pairs, because the internal interactions should take place, for the third law of Newton, internal pairs that they should be compensated among them. The angular momentum it is an extensive property that must consider in his balance, for isolated systems, the masses that are exchanged and the external pairs. In this study it is only analyzed the vertical component of angular momentum and in the conventional approach of  $f$ -plane geometry. Impermeability at the boundaries (i.e. without exchange of mass) the pairs due pressure distribution and shear stresses must be the only involve in angular momentum variation. Using these notions we find a consistent parametrization of lateral diffusion of momentum. This work shows the relevance of this parametrization in relation to angular momentum balance and energy 'consistency'. Another parametrization that is consistent with energy, it persists in defect concerning the angular momentum. Using a finite difference model, and in Matlab ambient, it is shown some examples that make patent the role of the different pairs imposed by boundary conditions, including an internal sub-domain, with entrances and exits of fluid.

**Keywords:** Angular momentum, Viscosity, Reduced gravity.

## DEDICATORIA

A mi familia

## **AGRADECIMIENTOS ACADÉMICOS**

A CONACYT por el otorgamiento de la beca.

A José Luis Ochoa de la Torre, por el apoyo, esfuerzo y el conocimiento que me otorgo.

A Oscar Uriel Velasco Fuentes, a Julio Sheinbaum Pardo y a Antonio Martínez Alcalá por su tiempo, conocimiento y comentarios que realizaron al trabajo a lo largo de su desarrollo.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE).

## **AGRADECIMIENTOS**

A mis maestros del posgrado e investigadores del centro de investigación por sus comentarios personales.

A los técnicos del CICESE, los cuales tuve la oportunidad de conocer durante los cruceros.

A los estudiantes del posgrado.

A Elvira Karina Romero y Luis Enrique Martínez por su apoyo.

A Carlos Peynador por su apoyo y comprensión durante la finalización de este trabajo.

A mis amigos.

## CONTENIDO

	Página
<b>RESUMEN .....</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>ii</b>
<b>DEDICATORIA .....</b>	<b>iii</b>
<b>AGRADECIMIENTOS ACADÉMICOS.....</b>	<b>iv</b>
<b>AGRADECIMIENTOS.....</b>	<b>v</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>II. OBJETIVO.....</b>	<b>5</b>
<b>III. MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA.....</b>	<b>6</b>
<i>III.1 Ecuaciones del modelo y conservación de energía. ....</i>	<i>6</i>
<i>III.2 Momento angular.....</i>	<i>11</i>
<i>III.3 Esfuerzos tangenciales en el momento angular.....</i>	<i>14</i>
<b>IV. SIMULACIONES NUMÉRICAS. ....</b>	<b>18</b>
<b>V. DISCUSIONES Y CONCLUSIONES. ....</b>	<b>23</b>
<b>VI. REFERENCIAS.....</b>	<b>25</b>
<b>APÉNDICE A. Esquema de diferencias finitas.....</b>	<b>27</b>
<b>APÉNDICE B. Código en ambiente Matlab.....</b>	<b>29</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
1	Figura 1. Serie temporal del balance de masa integrado en el subdominio interior. La línea verde corresponde al lado derecho de (9), y en azul al lado izquierdo de la ecuación. Ambas integraciones son coincidentes a lo largo de cada punto de la serie.	18
2	Acercamiento de la Fig. 1 sobre un intervalo en la serie, en donde se observa que el modelo reproduce satisfactoriamente el balance de masa.	19
3	Acercamiento de la Fig. 1. sobre un intervalo diferente en la serie.	19
4	Serie de tiempo del balance del cambio momento angular total integrado en el subdominio interior. La línea verde corresponde al lado derecho de (45), y en azul el lado izquierdo de esta.	20
5	Acercamiento de la Fig. 4 sobre un intervalo en la serie en donde se observa que al inicio de la simulación las integraciones en ambos lados de (45) son coincidentes, y el balance se da.	20
6	Acercamiento de Fig. 4 sobre un intervalo en la serie distinto a la Fig. 5, en donde se observa que aunque no existe una coincidencia de los valores calculados de las integraciones, estos varían simultáneamente en el tiempo con el mismo comportamiento.	21
7	En la parte superior se muestra la vorticidad potencial como medio trazador de las partículas desde el tiempo inicial de la simulación, y se aprecia dos remolinos saliendo del subdominio interior (recuadro rojo) resultado del rompimiento de un remolino anticiclónico inestable. En la parte inferior de la figura se muestran dos series de tiempo de los términos de (45); la primera (superior) corresponde a los términos (i) en azul, (ii) en verde y (iii) en rojo; y la segunda (inferior) corresponde a los términos (iv) en azul y (v) en rojo.	22
8	Al igual que en la figura anterior, se observan dos remolinos al momento de entrar al subdominio interior. Ahora se observa que se ha invertido el valor (ganancias o pérdidas) de las contribuciones de los términos.	22
A.1	Distribución espacial de variables en la malla del modelo numérico. Al centro de la malla, en asterisco azul, se calcula la variable $h$ , alrededor de esta se distribuyen las variables que participan en el cálculo de dicha variable sobre el punto de la malla especificado.	27

**LISTA DE FIGURAS (CONTINUACIÓN)**

A.2	Ídem, en el cálculo de la variable $u$ .	28
A.3	Ídem, en el cálculo de la variable $v$ .	28

## I. INTRODUCCIÓN

La generación de modelos simplificados para lograr un mejor entendimiento de fenómenos diversos (e.g. Battisti y Hirst, 1989; Ripa, 1982; Sura *et al.*, 2000; Chapman, 1985) siempre ha sido una actividad de gran interés en la ciencia. En este tipo de modelos y para los relativos a la dinámica clásica, los principios de conservación de momento lineal, momento angular y energía son elementos esenciales a considerar. La deficiencia en alguno de estos principios es motivo de desconfianza sobre las implicaciones del modelo, y una reacción muy común, en tales casos, es mejorar tales modelos eliminando deficiencias.

El modelo de gravedad reducida en plano- $f$  es el ejemplo que en este estudio nos concierne, y en específico los términos con que se modela la difusión lateral de momento. Existen modelos de gravedad reducida que trabajan con variaciones en la topografía (Masuda y Mizuta, 1995). Sin embargo, esta tesis trabaja con un modelo cuya capa activa se encuentra por encima de una capa de profundidad infinita en reposo, y cuya diferencia de densidad entre ambas capas es dividida por una interfase. Con tal modelo es posible describir una variedad amplia de fenómenos oceánicos cuyo mérito en relación con observaciones es más por el entendimiento que proporciona que por la reproducción de ellas. Modelos de mayor complejidad reproducen con mayor acierto las observaciones y con el poder de cómputo actual es relativamente fácil acudir a soluciones numéricas para la mayoría de los fenómenos de interés. La motivación de este estudio surge de contribuir al entendimiento, por medio del modelo de gravedad reducida, o equivalentemente el barotrópico de fondo plano, de la formulación que dicta la variación del momento angular de volúmenes en dominios específicos. En el caso de dominios sin intercambio de masa con el exterior estas causas son, dados los principios fundamentales de conservación, los pares provenientes de las fuerzas externas. Estos pares provienen entonces de los esfuerzos en la frontera, y se pueden acomodar también fuerzas gravitacionales. En el caso que se consideren intercambios a través de las fronteras, las contribuciones de los volúmenes de entradas y salidas participaran en el balance del momento angular. La analogía con el balance de masa, que es un principio aun más primitivo en mecánica clásica que los de momento lineal, angular y de energía, ayuda a clarificar el significado de la formulación matemática. Varios estudios analizan en forma o interés similar algún aspecto particular del

modelo de gravedad reducida. Entre ellos son básicos para este estudio los ejemplos de Shchepetkin y O'Brien (1996), quienes argumentan sobre los beneficios numéricos y la relevancia física de las parametrizaciones, el de Gent (1993), quien clarifica el uso de una de estas parametrizaciones en relación con la energía, y el de Schär y Smith (1993), quienes argumentan sobre la formalidad de la parametrización. Estos trabajos no analizan la perspectiva de la conservación del momento angular al grado que esta tesis desarrolla.

La motivación original de este estudio surgió de cuestionamientos sobre las causas del desprendimiento de remolinos anticiclónicos por estrangulación de meandros, fenómeno que es recurrente en varias corrientes oceánicas. La generación de este tipo de remolinos, con diámetros del orden de 100 km, ocurre por ejemplo en las corrientes de Brasil, de Agulhas, y de Lazo. El caso particular de la Corriente de Lazo sucede en el interior de un recinto con entradas y salidas muy determinadas; el Golfo de México. Algunos estudios argumentan sobre la relevancia del flujo de vorticidad potencial en el fenómeno del desprendimiento de remolinos (Candela *et al.*, 2002; Oey, 2003), pero poco se ha dicho de este problema desde la perspectiva del momento angular. Salmon (1998) discute cómo la conservación de vorticidad potencial es una manifestación de la de momento angular, aunque en forma puntual. El momento angular cuantifica en forma integral el movimiento rotatorio a diferencia de la vorticidad, en particular la llamada vorticidad potencial, que lo cuantifica puntualmente. En la geometría del Golfo de México tiene sentido considerar un modelo de gravedad reducida con una entrada, el Canal de Yucatán, y una salida, el Estrecho de Florida. El cambio en la masa de la capa activa depende entonces únicamente de los transportes a través de las secciones de frontera que llamamos abiertas (i.e. por donde puede entrar o salir agua oceánica). Y este tipo de entendimiento, pero para el momento angular, es la ocupación fundamental de este estudio. Sin embargo la especificación del momento angular en estos remolinos rebasa los objetivos de este trabajo, porque sus dimensiones son muy extensas para el modelo en plano 'f', o en otros términos porque la variación de la coordenada vertical con latitud implica considerar todas las componentes del momento angular. En este trabajo solo se formula un problema bidimensional donde la coordenada 'vertical' no cambia de dirección, y por momento angular se entiende solo su componente vertical. Este estudio es, entonces, de asuntos

previos a la aplicación de cálculos de momento angular en fenómenos de mayor escala que requieren modelos en, digamos al menos, plano “Beta”, como el de Egger (2001).

Simulaciones numéricas (Clercx *et al.*, 1998) y experimentos de laboratorio (Maasen *et al.*, 2002) sobre el decaimiento turbulento en 2D en un dominio cuadrado con paredes verticales y fluidos viscosos (sin deslizamiento en fronteras) revelan el papel dominante que juega la presión en la frontera en el cambio del momento angular de fluido. Las simulaciones numéricas de los autores mencionados fueron para una capa de fluido de grosor uniforme sin variación alguna en tiempo o espacio; un modelo aun mas sencillo que el de gravedad reducida. En cuerpos sólidos se suele especificar el momento angular respecto al centro de masa, el cual permanece inmóvil para el modelo de grosor uniforme, pero como en fluidos en general el grosor es variable entonces el centro de masa no tiene que permanecer estacionario, y se acostumbra usar el centro del dominio. El cambio en el momento angular lo establecen los pares relacionados al forzamiento en las fronteras sólidas (i.e. paredes verticales) y, para el problema clásico de arranque impulsivo de la rotación del tanque partiendo con el fluido en reposo (i.e. en ingles “*spin up*”), son el forzamiento dominante (van Heijst *et al.* 2003).

Los efectos ‘laterales’ de la difusión de momento suelen ser añadidos al modelo inviscido de gravedad reducida reemplazando coeficientes laminares de viscosidad con turbulentos y solo manteniendo términos que mantienen completo el sistema de ecuaciones. Las consecuencias de este tipo de parametrizaciones en relación a la conservación de energía han sido tratadas por varios autores, entre ellos Schär y Smith (1993), Shchepetkin y O’Brien (1996) y Gent (1993), el último de ellos acomoda en los términos difusivos el grosor de la capa para obtener efectos viscosos que solo conduzcan a disminuir, o al menos no aumentar, la energía cinética. La parametrización especificada en este trabajo, y proveniente de las formalidades planteadas por Schär y Smith (1993), difiere de la más usada tanto en oceanografía como en meteorología. En esta tesis se demuestra que una parametrización de efectos viscosos que es consistente con requisitos sobre el momento angular, también es, en forma similar a la propuesta por Gent (1993), consistente con requisitos sobre energía. Las cuatro parametrizaciones usadas proveen un panorama de,

inconsistencia a tanto energía como momento angular, como de consistencia a ambos, o a solo uno.

Con el uso de simulaciones numéricas se ilustran los efectos de los esfuerzos normales o presión y el intercambio de masa en el balance de momento angular. El momento angular se calcula desde un subdominio abierto, llamado subdominio interior, que excluye la región que inicialmente se encuentra en reposo y sin variación del grosor de capa, y que se encuentra dentro de una caja rectangular con fronteras cerradas y condición de libre deslizamiento sobre la frontera. En el subdominio interior los efectos por fricción, aún con la parametrización más común, la cual es inconsistente con requisitos para energía y momento angular, son despreciables y el intercambio de volúmenes de agua implica la contribución dominante en el balance de momento angular.

Las demás secciones de esta tesis son: II. Objetivos, donde se reestablecen en forma concisa asuntos discutidos en la I. Introducción, III. Modelo, donde se exhiben las ecuaciones básicas y se desarrollan las integrales pertinentes, IV Simulaciones Numéricas, para ilustrar los resultados analíticos, con ejemplos de la evolución de un remolino anticiclónico inestable como condición inicial y cuantificando el momento angular, V. Discusiones y Conclusiones, donde se argumentan algunos resultados y conclusiones de las secciones anteriores, y VI. Referencias. En el Apéndice A se dan detalles de la distribución espacial de las variables en el modelo numérico, y en el Apéndice B se lista el programa en ambiente Matlab y un CD adjunto incluye copia de la tesis, programa, salidas del programa y programas de visualización.

## **II. OBJETIVO.**

El propósito de este estudio es formular la conservación de momento angular para el modelo de gravedad reducida, poniendo particular atención a:

- la forma en que se parametriza la difusión horizontal de momento,
- al efecto de los esfuerzos en las fronteras, y
- al efecto que tienen las entradas y salidas de fluido.

Un elemento importante de esta tesis es la demostración de la conservación tanto del momento angular como de energía para una de las cuatro parametrizaciones discutidas. En este estudio también se codifica el modelo de gravedad reducida en ambiente MATLAB y se presentan ejemplos que ilustran el papel de los esfuerzos tangenciales y normales en la frontera, y los intercambios de fluido en fronteras abiertas.

### III. MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA.

El modelo de gravedad reducida aplicado usa una aproximación de la columna oceánica a solo dos capas, la profunda e inferior sumamente gruesa en comparación con la superficial, y el contraste de densidades entre estas capas mucho menor que la de cualquiera de ellas. Como se nota de tal descripción esta aproximación es de aplicabilidad muy limitada (i.e. no admite problemas en los que la topografía juegue un papel importante), pero permite el análisis de muchos fenómenos de mesoescala que en esencia son movimientos de la capa ligera y delgada que flota sobre otra profunda, gruesa e inerte. Este modelo ha sido usado por un sinnúmero de autores para clarificar diversos procesos oceánicos; muchos de ellos para cuestiones con remolinos, como su evolución en casos inestables (Ripa y Jiménez, 1988), colapso de ellos (Pavía, 1992), y otros (p.ej. Hurlburt y Thompson, 1980; Pavía y López, 1994).

#### III.1 Ecuaciones del modelo y conservación de energía.

El modelo de gravedad reducida (ver p.ej. Vallis, 2005, Gill, 1982) que en esta tesis se considera consiste de la ecuación de momento,

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \underline{f} \times \underline{v} = -g' \nabla h + \underline{\Theta}(h, \underline{v}), \quad (1)$$

que incluye la parametrización, por especificarse en breve, de procesos viscosos horizontales (i.e. el término  $\underline{\Theta}(h, \underline{v})$ , un operador diferencial), junto con la ecuación de conservación de masa,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \underline{v}) = 0. \quad (2)$$

que en la aproximación de incompresibilidad es simplemente la conservación de volumen. En estas ecuaciones se usa, o mas adelante se usará, la notación:  $\underline{v} = u \underline{i} + v \underline{j}$  es el vector de velocidad horizontal (en la capa superior y activa), con  $\underline{i}$  el vector unitario en la dirección paralela al eje coordenado  $x$ ,  $\underline{j}$  el vector unitario perpendicular a  $\underline{i}$  y en la dirección paralela al eje coordenado  $y$ ,  $t$  es el tiempo,  $\nabla = \underline{i} \partial / \partial x + \underline{j} \partial / \partial y$  es el operador diferencial *nabla* (y consecuentemente  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  es el operador laplaciano en la

horizontal),  $\underline{f} = 2\Omega\underline{k}$  es el termino de Coriolis con  $\underline{k}$  tal que  $\underline{k} = \underline{i} \times \underline{j}$ , opuesto en dirección a la gravedad y  $\Omega$  la magnitud de la frecuencia angular planetaria,  $h$  es el grosor de la capa activa,  $g' = g[(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2]$  es la gravedad reducida donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las densidades de la capa superior (activa) e inferior (inerte) y  $g$  la magnitud de la aceleración gravitacional, y  $\sigma$  es el coeficiente de viscosidad cinemática, con unidades de  $m^2 \cdot s^{-1}$  (i.e. de coeficiente de difusividad).

Las formas de parametrización de efectos viscosos que en este estudio se consideran son:

$$\Theta(\underline{r}, t) = \sigma \nabla^2 \underline{v} \equiv \sigma (\nabla^2 u) \underline{i} + \sigma (\nabla^2 v) \underline{j}, \quad (3)$$

$$\Theta(\underline{r}, t) = \sigma h^{-1} \nabla \cdot (h \nabla \underline{v}) \equiv \sigma h^{-1} \nabla \cdot (h \nabla u) \underline{i} + \sigma h^{-1} \nabla \cdot (h \nabla v) \underline{j}, \quad (4)$$

$$\Theta(\underline{r}, t) = \sigma h^{-1} \nabla^2 (h \underline{v}) \equiv \sigma h^{-1} \nabla^2 (hu) \underline{i} + \sigma h^{-1} \nabla^2 (hv) \underline{j}, \quad (5)$$

y una última cuyo coeficiente viscoso no tiene las unidades de una difusividad

$$\text{y } \nu \Theta(\underline{r}, t) = \mu h^{-1} \nabla^2 \underline{v} \equiv \mu h^{-1} (\nabla^2 u) \underline{i} + \mu h^{-1} (\nabla^2 v) \underline{j}. \quad (6)$$

Estas formulas, o modificaciones ligeras de estas, han sido propuestas y usadas por diversos autores (ver Shchepetkin y O'Brien, 1996). Sin aseverar categóricamente, la que parece ser más usada es la (3), formula de la que Gent (1993) hace notar sus inconvenientes físicos. En lo que sigue mantendremos la notación  $\Theta(\underline{r}, t)$  para designar en forma general las posibles parametrizaciones.

La simplificación inviscida de este modelo (i.e. sin efectos viscosos, escogiendo  $\Theta(\underline{r}, t) = 0$ ) tiene varias cualidades de interés mecánico, entre ellas destaca que para dominios cerrados (i.e. con fronteras impermeables) la energía es invariable en el tiempo. Es decir, que la energía inicial, dada por las condiciones iniciales, permanece inalterable al transcurrir el tiempo. Otra cualidad es que, dependiendo de las simetrías en las condiciones de frontera, el momento angular también es invariable. Específicamente con  $\Theta(\underline{r}, t) = 0$ , para un dominio circular cerrado, la cantidad:

$$L_T = \int_D \underline{k} \cdot h \underline{r} \times (\underline{v} + \Omega \underline{k} \times \underline{r}) dA, \quad (7)$$

y, para cualquier dominio cerrado, la cantidad

$$E = \frac{1}{2} \int_D (h |\underline{v}|^2 + g' h^2) dA \quad (8)$$

donde  $dA$  denota la diferencial de área y la integral es en el dominio (denotado por  $D$ ) son invariantes en el tiempo para condiciones iniciales muy generales (i.e. al menos aquellas en que el momento angular y la energía sean calculables y finitas). El calificativo cerrado se refiere a cuando las fronteras son impermeables e impiden cualquier salida o entrada de fluido a través de ellas.

Para hacer notar que bajo esas condiciones  $dE/dt = 0$  es conveniente mostrar primero la ley de conservación de masa en su forma integral. En el modelo de gravedad reducida la densidad de las capas son uniformes e invariables en el tiempo, y se usa la aproximación de flujo tridimensional incompresible, por ello la conservación de masa se reduce a conservación de volumen ocupado. A partir de la ecuación (2) y para un dominio finito limitado por una frontera inmóvil se obtiene, a partir del Teorema de Gauss o de la definición de divergencia:

$$\frac{d}{dt} \int_D h dA = - \oint_{\partial D} h \underline{v} \cdot \underline{n} d\ell \quad (9)$$

donde  $\underline{n}$  es el vector unitario perpendicular a la frontera, señalada con  $\partial D$ , y hacia el exterior del dominio y  $d\ell$  es la diferencial de distancia a lo largo del contorno frontera. Se debe reconocer que el volumen ocupado por fluido, o de la capa activa (i.e.

$$V = \int_D h dA \quad (10)$$

) es la cantidad cuya razón de cambio esta dictada por (9). Al considerar dominios cerrados con fronteras impermeables (i.e. sin intercambio de fluido a través de la frontera)  $V$  debe mantenerse invariable. La condición de impenetrabilidad en fronteras cerradas es

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{en} \quad \partial D, \quad (11)$$

la cual estipula que la componente de la velocidad del fluido hacia fuera o dentro del dominio, sobre la frontera, es nula. Esta condición es menos restrictiva que la de no deslizamiento aplicable en el modelo con viscosidad, pero, con o sin viscosidad, la existencia de fronteras impermeables obliga en acuerdo con (2) y (10):

$$\frac{dV}{dt} = 0. \quad (12)$$

La ecuación de densidad de energía se obtiene más fácilmente a partir de expresar (1) como:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{f} + \underline{\omega}) \times \underline{v} = -\nabla b + \underline{\Theta}(h, \underline{v}), \quad (13)$$

donde:

$$b = |\underline{v}|^2 / 2 + g'h, \quad (14)$$

es la función de Bernoulli, y

$$\underline{\omega} = (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \underline{k} \quad (15)$$

es la vorticidad relativa. El producto punto entre (13) y  $h\underline{v}$  produce

$$h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\underline{v}|^2}{2} \right) + h\underline{v} \cdot \nabla b = h\underline{v} \cdot \underline{\Theta}(h, \underline{v}), \quad (16)$$

y multiplicando  $b$  por (2) se obtiene

$$\left( \frac{|\underline{v}|^2}{2} + g'h \right) \frac{\partial h}{\partial t} + b \nabla \cdot (h\underline{v}) = 0, \quad (17)$$

por lo que considerando la suma de (16) y (17) resulta la ecuación de densidad de energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{|\underline{v}|^2}{2} + g' \frac{h^2}{2} \right) + \nabla \cdot (hb\underline{v}) = h\underline{v} \cdot \underline{\Theta}(h, \underline{v}), \quad (18)$$

donde se debe reconocer a  $h|\underline{v}|^2/2$  y  $g'h^2/2$  como las densidades (por unidad de área) de energía cinética y potencial, a  $hb\underline{v}$  como el flujo de energía, y al término del lado derecho como los efectos por fricción. De (18), al igual que con la deducción de (9), se cumple :

$$\frac{dE}{dt} = -\oint_{\partial D} hb\underline{v} \cdot \underline{n} d\ell + \int_D h\underline{v} \cdot \underline{\Theta}(h, \underline{v}) dA, \quad (19)$$

ecuación en la que se ha usado la definición (8), es decir la energía expresada como la integral de la densidad de energía en el dominio a considerar. A partir de esta fórmula se obtiene que para el caso sin fricción y en un dominio con fronteras impermeables (ver (11)) la energía no varía en el tiempo (i.e.  $dE/dt = 0$ ).

El estudio de Gent (1993) hace notar que seleccionando (4) se logra cumplir, en el modelo de gravedad reducida, requisitos disipativos asociados a la difusión de momento y que ocurren en modelos más generales. Específicamente, considerando la identidad

$$\int_D u \nabla \cdot (h \nabla u) dA = \oint_{\partial D} h u \nabla u \cdot \underline{n} d\ell - \int_D h |\nabla u|^2 dA \quad (20)$$

que resulta del teorema de la divergencia y  $\nabla \cdot (uh \nabla u) = u \nabla \cdot (h \nabla u) + h \nabla u \cdot \nabla u$ , para (4)

$$\begin{aligned} \int_D h \underline{v} \cdot \underline{\Theta}(h, \underline{v}) dA &\equiv \sigma \int_D [u \nabla \cdot (h \nabla u) + v \nabla \cdot (h \nabla v)] dA = \\ &= \sigma \oint_{\partial D} h (u \nabla u + v \nabla v) \cdot \underline{n} d\ell - \sigma \int_D h (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dA \\ &= \sigma \oint_{\partial D} h \nabla \frac{u^2 + v^2}{2} \cdot \underline{n} d\ell - \sigma \int_D h (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dA \end{aligned} \quad (21)$$

lo cual es consistente con que la fricción produzca una disipación de la energía cinética, o sea un termino definido negativo (i.e. un sumidero) (Shchepetkin y O'Brien, 1996, Gent, 1993). En otras palabras lo que se requiere de los términos difusivos de momento es que no aumenten la energía cinética, aunque provoquen un flujo no advectivo de energía. Una parametrización que no cumpla con estos requisitos es inconsistente.

Las ecuaciones (9) y (19) son ejemplos concretos de lo que aquí llamamos principios de conservación. Estos provienen de integrar, en cierto dominio específico, alguna 'densidad', y las ecuaciones que describen tal 'densidad' deben obligar que la razón de cambio de la integral dependa de las 'entradas' y 'salidas' por la frontera, y en caso que exista dependencia de lo que sucede en el interior esta debe ser 'consistente'. Ciertamente, en general no es del todo claro el significado de 'ser consistente', pero para ciertas propiedades se puede argumentar sobre los requisitos que definen 'consistencia'. Los ejemplos de 'consistencia' que ofrecen tanto Gent (1993) como Shchepetkin y O'Brien, (1996) tienen esta concepción.

El uso de (3) en lugar de (4) provoca

$$\int_D h \underline{v} \cdot \underline{\Theta}(h, \underline{v}) dA \equiv \sigma \int_D h [u \nabla^2 u + v \nabla^2 v] dA$$

por lo que, para analizar solo uno de los dos sumandos de la integral, y usando la identidad

$\nabla \cdot (hu \nabla u) = hu \nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla (hu) = hu \nabla^2 u + h |\nabla u|^2 + u \nabla u \cdot \nabla h$ , se tiene

$$\sigma \int_D hu \nabla^2 u dA = \sigma \oint_{\partial D} hu \nabla u \cdot \underline{n} d\ell - \sigma \int_D h |\nabla u|^2 dA - \sigma \int_D u \nabla u \cdot \nabla h dA \quad (22)$$

El problema con (22) es que hay condiciones iniciales o estados particulares para los que la fricción provocaría un aumento de energía cinética independiente del posible (y aceptable) por: i) flujos a través de la frontera y ii) por transferencia de potencial a cinética. Esto

sucedería cuando  $-\int_D h[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]dA - \frac{1}{2}\int_D \nabla(|\underline{v}|^2) \cdot \nabla h dA > 0$ , lo cual es posible pues el segundo término de estos sumandos no es de signo definido. Este comportamiento no es consistente con la noción de fricción, y es el defecto que Gent (1993) hace notar.

El uso de (6) implica

$$\begin{aligned} \int_D h \underline{v} \cdot \underline{\Theta}(h, \underline{v}) dA &= \mu \int_D \underline{v} \cdot \nabla^2 \underline{v} dA = \mu \int_D [u \nabla \cdot \nabla u + v \nabla \cdot \nabla v] dA = \\ &= \mu \oint_{\partial D} \nabla \frac{u^2 + v^2}{2} \cdot \underline{nd} \ell - \mu \int_D (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dA \end{aligned} \quad (23)$$

que, al igual que (21) con el uso de (4), es consistente con la noción de una difusión de momento que independientemente de producir un flujo difusivo de energía, su acción interna no provoque en forma alguna un incremento de energía. Esta parametrización (6) tiene entonces la misma cualidad de consistencia que Gent (1993) hace notar, en relación a la energía, con la (4).

Por último, el uso de (5) implica

$$\begin{aligned} \int_D h \underline{v} \cdot \underline{\Theta}(h, \underline{v}) dA &= \sigma \int_D \underline{v} \cdot \nabla^2 (h \underline{v}) dA = \sigma \int_D [u \nabla^2 (hu) + v \nabla^2 (hv)] dA = \\ &= \sigma \oint_{\partial D} [u \nabla (hu) + v \nabla (hv)] \cdot \underline{nd} \ell - \sigma \int_D h (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dA - \frac{\sigma}{2} \int_D \nabla (|\underline{v}|^2) \cdot \nabla h dA \end{aligned} \quad (24)$$

de donde se implica la imposibilidad de asegurar disminución de energía; el término de extrema derecha no es de signo definido, y por lo tanto, si es lo suficientemente positivo indica un incremento en la energía.

De lo anterior se concluye que (3) y (5) son inconsistentes con el principio de conservación de energía y la noción de una fricción que no pueda incrementar la energía. Y tanto (4), descrita por Gent (1993), como (6) son consistentes con los argumentos de energía y fricción.

### III.2 Momento angular.

El postulado relevante de esta tesis es la noción que las interacciones internas de sistemas aislados no provocan cambio en el momento angular; éste se debe conservar, ser invariable en el tiempo. Aquí, el sentido de aislado es ausencia de pares externos; los pares internos solo redistribuirán los ‘remolinos’ (o estructuras, cualesquiera que sean los

aprelativos de ellas) sin alterar la propiedad integral de momento angular. Claro esta que los pares producidos y la pérdida o entrada de masa en la frontera hacen no-aislado al sistema. A diferencia de la energía, los procesos friccionales no deben causar, en su acción interna al dominio, un cambio en el momento angular, ya que la Tercera Ley de Newton plantea que para cada pareja de partículas, las fuerzas que se ejercen entre sí son iguales en magnitud y en sentido opuesto y colineales, por lo que su contribución a la fuerza neta es cero, y en un sistema aislado esta ley conduce al principio de conservación de momento angular. En lo que continua, primero se hará notar cómo se puede obtener, considerando momento angular, un sistema ‘aislado’ (i.e. sin pares ocasionados por efectos en la frontera) en el caso sin fricción y posteriormente se analizan las cuatro parametrizaciones.

La componente vertical del momento angular definida respecto a  $\underline{r} = \underline{0}$  en (7) se puede separar en las contribuciones relativa y planetaria;

$$L_T = L + L_p = \underline{k} \cdot \int_D \underline{r} \times (h\underline{v}) dA + \frac{f}{2} \int_D hr^2 dA, \quad (25)$$

donde  $f = |\underline{f}| = 2\Omega$ ,  $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$  es el vector de posición, y  $r = |\underline{r}|$ . La contribución planetaria solo cambia por la redistribución de masa, es decir por el cambio del momento de inercia (i.e.  $I = \int_D hr^2 dA$ ). La contribución planetaria se puede reescribir como  $I\Omega$ , donde la correspondencia para cuerpos sólidos es inmediata. Entonces, en un dominio fijo (i.e. con fronteras inmóviles que son las únicas que se consideran en este estudio, aunque no necesariamente impermeables), por diferenciación, el cambio de momento angular esta dado por:

$$\frac{dL_T}{dt} = \frac{dL}{dt} + \frac{dL_p}{dt} = \int_D \underline{k} \cdot \left( \underline{r} \times \frac{\partial h\underline{v}}{\partial t} \right) dA + \frac{f}{2} \int_D r^2 \frac{\partial h}{\partial t} dA. \quad (26)$$

Aunque es posible hacer las deducciones en forma independiente de algún sistema de coordenadas, el uso de alguno evita notaciones involucrando divergencias de tensores, y aquí se usa el cartesiano, o sea

$$L_T = L + L_p = \int_D h(xv - yu) dA + \Omega \int_D hr^2 dA = \int_D \lambda dA + I\Omega \quad (27)$$

donde hemos introducido la densidad de momento angular por unidad de área:

$$\lambda \equiv h(xv - yu) = \underline{k} \cdot (h\underline{r} \times \underline{v}). \quad (28)$$

Para obtener la ecuación de  $\partial h \underline{v} / \partial t$  se multiplican  $h$  por la ecuación (1),  $\underline{v}$  por la ecuación (2) y sumando estos productos se obtiene, en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial hu}{\partial t} = -\nabla \cdot (hu \underline{v}) + fhv - \frac{\partial \gamma}{\partial x} + h\Theta_x, \quad (29)$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t} = -\nabla \cdot (hv \underline{v}) - fhu - \frac{\partial \gamma}{\partial y} + h\Theta_y, \quad (30)$$

donde se ha introducido las definiciones  $\gamma = g'h^2/2$  y  $\Theta = \Theta_x \underline{i} + \Theta_y \underline{j}$ . Usando (26),

$$dL_T / dt = \int_D (x \partial hv / \partial t - y \partial hu / \partial t) dA + \Omega \int_D r^2 \partial h / \partial t dA, \quad (31)$$

y substituyendo (29), (30) y (2) se tiene

$$\frac{dL_T}{dt} = \int_D \{ x[-\nabla \cdot hv \underline{v} - fhu - \frac{\partial \gamma}{\partial y} + h\Theta_y] - y[-\nabla \cdot hu \underline{v} + fhv - \frac{\partial \gamma}{\partial x} + h\Theta_x] - \frac{f}{2} r^2 \nabla \cdot h \underline{v} \} dA. \quad (32)$$

De esta expresión podemos notar que  $\nabla \cdot \lambda \underline{v} = \nabla \cdot (xhv \underline{v} - yhu \underline{v}) = x \nabla \cdot hv \underline{v} - y \nabla \cdot hu \underline{v}$ , pues  $h \underline{v} \underline{v} \cdot \nabla x - hu \underline{v} \cdot \nabla y = h \underline{v} \underline{v} - hu \underline{v} = 0$ , y que

$x[-fhu] - y[+fhv] - fr^2 \nabla \cdot h \underline{v} / 2 = -f(hr \cdot \underline{v} + r^2 \nabla \cdot h \underline{v} / 2) = -f \nabla \cdot (r^2 h \underline{v} / 2)$ , por lo que

$$\int_D \{ x[-\nabla \cdot hv \underline{v} - fhu] - y[-\nabla \cdot hu \underline{v} + fhv] - \frac{f}{2} r^2 \nabla \cdot h \underline{v} \} dA = - \oint_{\partial D} (\lambda + fhr^2/2) \underline{v} \cdot \underline{n} d\ell. \quad (33)$$

Insistiendo en usar densidades por unidad de área se tendría, recordando que  $f/2 = \Omega$ ,  $\lambda + fhr^2/2 = \lambda + \Omega \delta I / \delta A$  con  $\delta I / \delta A \equiv hr^2$  definiendo la densidad de momento inercial por unidad de área (ver (25) y comentario anexo). La expresión (33) establece el flujo, a través de la frontera, de la densidad de momento angular relativo y planetario, ambos nulos cuando la frontera es impermeable.

Otra contribución a  $dL/dt$  proviene del efecto de la presión, esta es:

$$\int_D \{ x[-\frac{\partial \gamma}{\partial y}] - y[-\frac{\partial \gamma}{\partial x}] \} dA = \underline{k} \cdot \int_D \nabla \gamma \times \underline{r} dA = \underline{k} \cdot \int_D \nabla \times (\gamma \underline{r}) dA = \oint_{\partial D} \gamma \underline{r} \cdot d\underline{\ell}. \quad (34)$$

Por lo que, en ausencia de fricción, la ecuación para la razón de cambio del momento angular es:

$$\frac{dL_T}{dt} = - \oint \lambda \underline{v} \cdot \underline{n} d\ell - \frac{f}{2} \oint hr^2 \underline{v} \cdot \underline{n} d\ell + \oint \gamma \underline{r} \cdot d\underline{\ell}, \quad (35)$$

.....(i).....(ii).....(iii)

donde las tres integrales son en el contorno frontera (cuya especificación,  $\partial D$ , se eliminó). Los términos (i) e (ii) ya han sido interpretados, el (iii) corresponde a los pares que la distribución de presión ejerce en la frontera del dominio (van Heijst *et al.*, 2003). Para fronteras impermeables solo (iii) persiste, pues los ‘flujos de densidades’ se han eliminado. La observación mas relevante aquí es que en fronteras que son circunferencias concéntricas a  $\underline{r}=0$  (iii) es nula, pues, en esa geometría,  $\underline{r}$  y  $d\underline{\ell}$  son ortogonales. Y esta particularidad persiste aún si la frontera es permeable. Esta observación esta íntimamente relacionada con las cuestiones de ‘variables ignorables’ en la formulación lagrangeana. Las ecuaciones (1) y (2) tienen la simetría azimutal asociada a la conservación de momento angular (y del traslado en tiempo de origen para energía), pero también las condiciones de frontera deben cumplir con la simetría azimutal para lograr la invariancia (Ripa, 1981). Otra posibilidad para que (iii) sea nula es que la presión, y por consecuencia  $\gamma$ , sea uniforme en la frontera aunque esta fuese muy irregular (i.e. una presión uniforme en la frontera induce par nulo).

### III.3 Esfuerzos tangenciales en el momento angular.

Los esfuerzos tangenciales que se formulan por (3) y (4) no conducen a una formulación ‘consistente’, pues no permiten el requisito de calcular sus efectos con únicamente las condiciones en la periferia del dominio. En la sección III.1 se discutió el sentido de consistencia según Gent (1993) y Shchepetkin y O’Brien (1996) en relación con la energía. Para que la inclusión de esfuerzos tangenciales, producto de la fricción lateral, sea consistente con el principio de conservación de momento angular se debe cumplir que en ausencia de pares externos, la contribución debida a los pares internos se deben cancelar al calcular la integral.

Veamos primero la parametrización (5). Los términos en (32) provenientes de la fricción son:

$$\frac{dL_F}{dt} = \int_D h[x\Theta_y - y\Theta_x]dA \quad (36)$$

donde, se ha definido la contribución particular a tratar, en este caso  $dL_F/dt$ . La sustitución de (5) en el integrando de (36) conduce a  $h[x\Theta_y - y\Theta_x] = x\nabla \cdot \nabla hv - y\nabla \cdot \nabla hu$ , por lo que usando la identidad

$\nabla \cdot \nabla xhv = \nabla \cdot (x\nabla hv + hv\underline{i}) = x\nabla \cdot \nabla hv + \nabla hv \cdot \underline{i} + \partial hv / \partial x = x\nabla^2 hv + 2\partial hv / \partial x$  y su similar para el otro sumando;

$$\frac{dL_F}{dt} = \sigma \oint_{\partial D} \nabla(xhv - yhu) \cdot \underline{nd}\ell - 2\sigma \oint_{\partial D} h\underline{v} \cdot d\underline{\ell} \tag{37}$$

.....(iv).....(v).....

Primero hay que notar que (iv) se puede describir como  $\oint_{\partial D} \sigma \nabla \lambda \cdot \underline{nd}\ell$  lo cual esta de acuerdo con interpretar a  $\sigma \nabla \lambda$  como el flujo difusivo de la densidad de momento angular relativo, y que (v) se obtiene, análogo al termino de presión (iii), por medio del teorema de Stokes.

Ahora veamos que para el caso de frontera circular las condiciones de:

- 1-no intercambio de masa, y
- 2-‘no esfuerzo tangencial’ en la frontera

conducen a  $dL_T / dt = 0$ . Para esto hay que interpretar el sentido de la condición 2. La geometría circular y la condición 1 son para que las contribuciones en (32) se mantengan nulas. La integral (iv) de (37) se reduce a  $\sigma \oint_{\partial D} \frac{\partial hru_\theta}{\partial r} d\ell$ , donde se ha usado  $u_\theta$  para la

componente azimutal de la velocidad, y se sobrentiende que la evaluación del integrando es en el radio de la frontera. La componente radial es nula por condición 1. La integral (v) de (37) resulta ser  $-\sigma \oint_{\partial D} 2hu_\theta d\ell$ , por lo que si se cumple:

$$\frac{\partial hru_\theta}{\partial r} - 2hu_\theta = 0 \tag{38}$$

$dL_F / dt$  será nula. La expresión (38) es la extensión natural de la condición de ‘no esfuerzo tangencial’ (en general especificado como deslizamiento libre) para el caso de capas de grosor uniforme. La componente pertinente, al caso, del tensor de deformación en

coordenadas polares es  $e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$  (Batchelor 1967, ver apéndice 2), la

componente tangencial del esfuerzo, que aquí se denota por  $\tau_{r\theta}$ , es entonces

$$\tau_{r\theta} = \sigma \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \tag{39}$$

pues  $u_r$ , la componente radial es constante (nula) en todos los  $\theta$ . La ecuacion (38) se puede reescribir como

$$\frac{\partial hu_\theta}{\partial r} - \frac{hu_\theta}{r} = 0, \tag{40}$$

donde el grosor de la capa hace un papel análogo a una integral en la vertical, muy de acuerdo con la aproximación del modelo de gravedad reducida. Tomando (5) y (37) la condición de ‘no esfuerzo tangencial’ es (40).

Un defecto con (3) y (4) estriba en que no se logra formular una forma similar a (37); no permiten que en general (36) sea calculable con integrales del contorno en la frontera. Para (4) la expresión (36) da

$$\frac{dL_F}{dt} = \sigma \oint_{\partial D} h(x\nabla v - y\nabla u) \cdot \underline{nd}l - \sigma \oint_{\partial D} h\underline{v} \cdot d\underline{\ell} + \sigma \underline{k} \cdot \int_D \nabla h \times \underline{v} dA \tag{41}$$

Para (3) la expresión (36) resulta en

$$\frac{dL_F}{dt} = \sigma \oint_{\partial D} h(x\nabla v - y\nabla u) \cdot \underline{nd}l - \sigma \oint_{\partial D} h\underline{v} \cdot d\underline{\ell} + \sigma \underline{k} \cdot \int_D \nabla h \times \underline{v} dA + \sigma \int_D (x\nabla v - y\nabla u) \cdot \nabla h dA \tag{42}$$

Tanto (41) como (42) indican que las parametrizaciones correspondientes (i.e. (3) y (4)) son inconsistentes con la conservación de momento angular, pues no hay forma de solo lograr pares por efectos en fronteras; los pares internos no se cancelan entre si. Que la evaluación de  $dL_F / dt$  no se pueda lograr con sólo las condiciones en la frontera, es lo que califica la inconsistencia.

Sin embargo recordemos que al usar (5) y lograr ser consistente con nociones del momento angular se genera un defecto en la energía, ver (24). Esto no sucede con (6), la cual produce para (36)  $\frac{dL_F}{dt} = \mu \int_D (x\nabla^2 v - y\nabla^2 u) dA$ . Por lo que trasladando el resultado en (37) (i.e. sustituyendo  $h = 1$  en el desarrollo para (37)):

$$\frac{dL_F}{dt} = \mu \oint \nabla(xv - yu) \cdot \underline{nd}l - 2\mu \oint \underline{v} \cdot d\underline{\ell} \tag{43}$$

.....(iv).....(v).....

En cuyo caso la condición de ‘no esfuerzo tangencial’ o deslizamiento libre es

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} = 0. \quad (44)$$

Entonces (6) es consistente con argumentos sobre los efectos que la difusión lateral de momento debe tener sobre la energía y el momento angular.

Por último, podemos agregar la contribución por los esfuerzos tangenciales en (43) al resultado en (35), resultando finalmente

$$\frac{dL_r}{dt} = - \oint \lambda \underline{v} \cdot \underline{nd} \ell - \frac{f}{2} \oint h r^2 \underline{v} \cdot \underline{nd} \ell + \oint \gamma \underline{r} \cdot d \underline{\ell} + \mu \oint \nabla(xv - yu) \cdot \underline{nd} \ell - 2\mu \oint \underline{v} \cdot d \underline{\ell} \dots (45)$$

.....(i).....(ii).....(iii).....(iv).....(v)

la cual resulta ser una expresión al cambio del momento angular consistente con el principio de conservación de momento angular, bajo las especificaciones de condición de frontera apropiadas.

#### IV. SIMULACIONES NUMÉRICAS.

Se realizaron integraciones numéricas del balance de masa (9) y el cambio de momento angular total (45) en un área cerca al centro del dominio, al que denominaremos subdominio interior, con el propósito de ilustrar los resultados analíticos obtenidos y la importancia que posee cada uno de los términos que contribuyen en el cambio de momento angular al integrar sobre el contorno. Las integraciones se realizan con un modelo de gravedad reducida escrito en diferencias finitas.

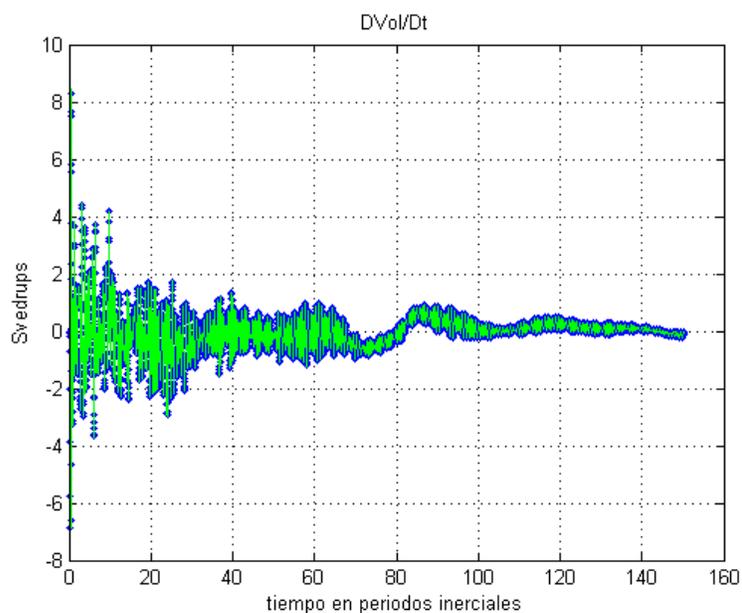


Figura 2. Serie temporal del balance de masa integrado en el subdominio interior. La línea verde corresponde al lado derecho de (9), y en azul al lado izquierdo de la ecuación. Ambas integraciones son coincidentes a lo largo de cada punto de la serie.

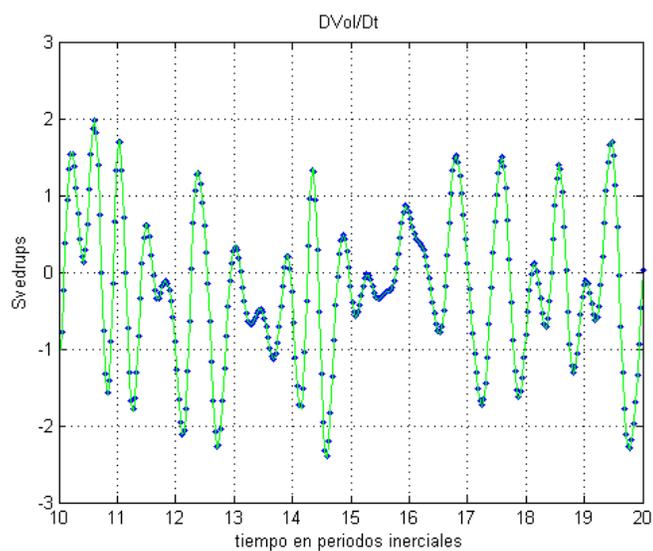


Figura 3. Acercamiento de la Fig. 1 sobre un intervalo en la serie, en donde se observa que el modelo numérico reproduce satisfactoriamente el balance de masa.

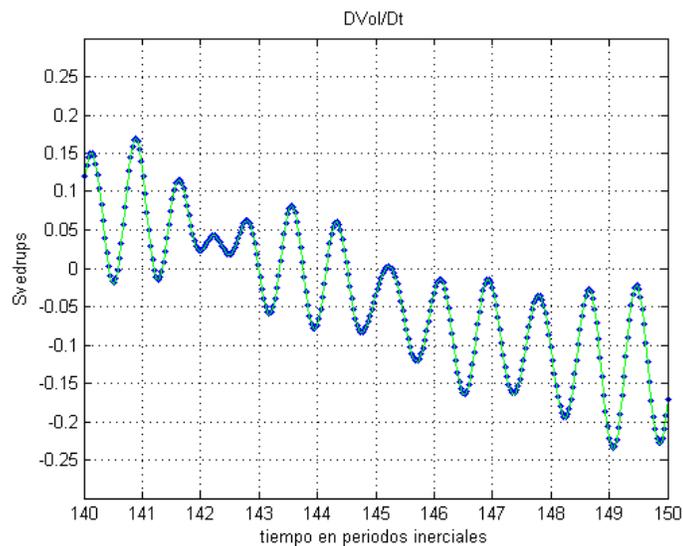


Figura 4. Acercamiento de la Fig. 1. sobre un intervalo diferente en la serie.

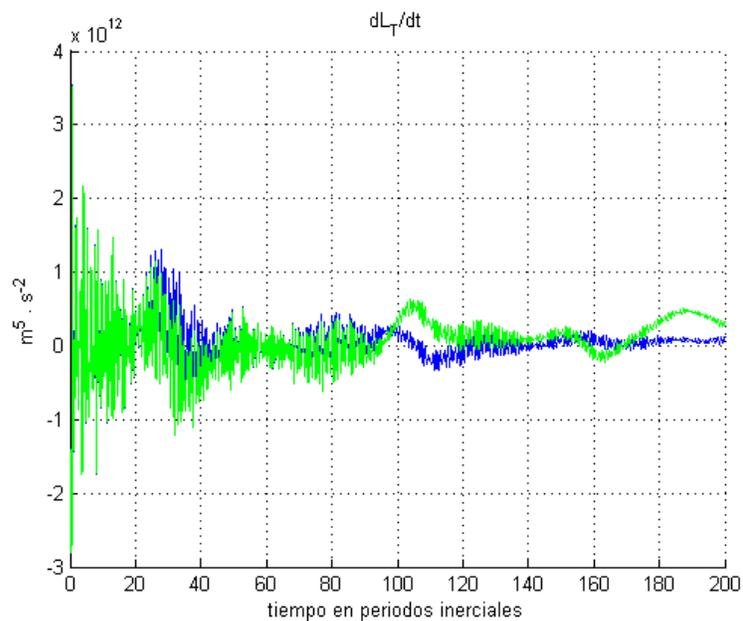


Figura 5. Serie de tiempo del balance del cambio momento angular total integrado en el subdominio interior. La línea verde corresponde al lado derecho de (45), y en azul el lado izquierdo de esta.

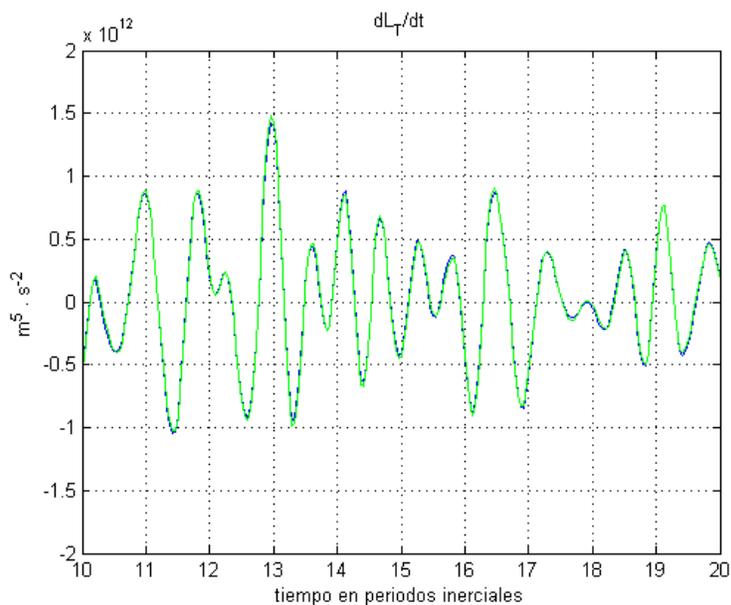


Figura 6. Acercamiento de la Fig. 4 sobre un intervalo en la serie en donde se observa que al inicio de la simulación las integraciones en ambos lados de (45) son coincidentes, y el balance se dá.

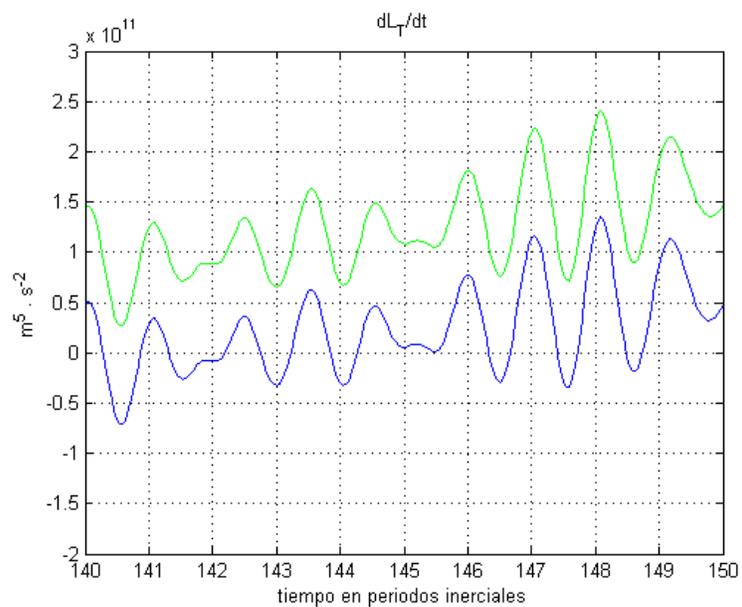


Figura 7. Acercamiento de Fig. 4 sobre un intervalo en la serie distinto a la Fig. 5, en donde se observa que aunque no existe una coincidencia de los valores calculados de las integraciones, estos varían simultáneamente en el tiempo con el mismo comportamiento.

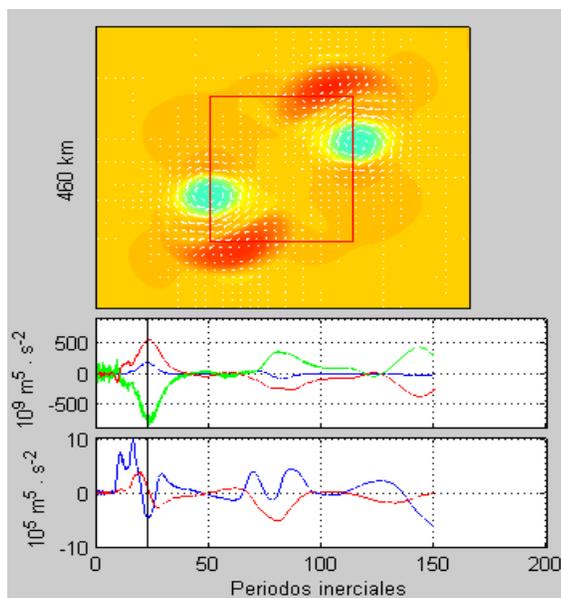


Figura 8. En la parte superior se muestra la vorticidad potencial como medio trazador de las partículas desde el tiempo inicial de la simulación, y se aprecia dos remolinos saliendo del subdominio interior (recuadro rojo) resultado del rompimiento de un remolino anticiclónico inestable. En la parte inferior de la figura se muestran dos series de tiempo de los terminos de (45); la primera (superior) corresponde a los términos (i) en azul, (ii) en verde y (iii) en rojo; y la segunda (inferior) corresponde a los términos (iv) en azul y (v) en rojo.

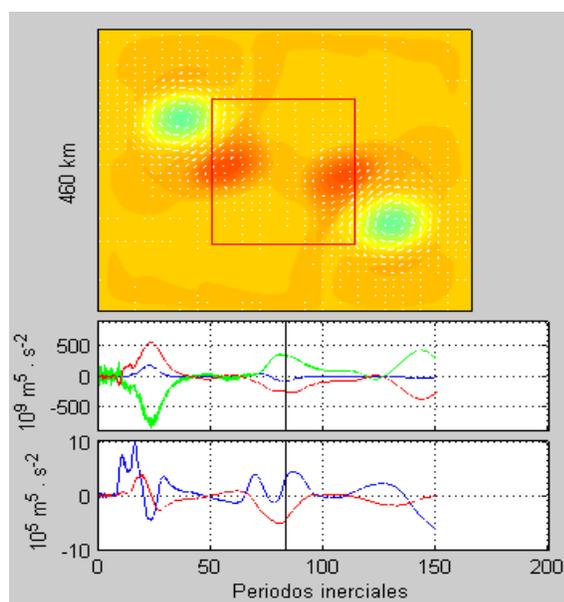


Figura 9. Al igual que en la figura anterior, se observan dos remolinos al momento de entrar al subdominio interior. Ahora se observa que se ha invertido el valor (ganancias o pérdidas) de las contribuciones de los términos.

## V. DISCUSIONES Y CONCLUSIONES.

El estudio de Gent (1993) argumenta que la modelación de fricción debe producir disipación ‘neta’ de energía cinética, específicamente que independiente de las transferencias entre potencial y cinética, la contribución friccional debe disminuir la cinética. Para ello se requiere que la contribución en la densidad de energía cinética, la parametrización de fricción solo resulte en dos términos, uno que sea la divergencia de un flujo difusivo y otro que sea definido negativo (tal vez cero pero no positivo). La fricción, para cualquier conjunto de campos de velocidad y grosor de capa, no debe causar un aumento de energía. Este es el requisito principal que es de esperarse por efectos viscosos; en ausencia de entradas o salidas de energía en la frontera, la difusión de momento no puede producir aumento alguno en la energía cinética ni modificar la potencial directamente.

Una aproximación acorde con el modelo de gravedad reducida y la noción de momento angular parametriza la fricción lateral de la forma (5). Con esta parametrización se logra la cancelación de pares internos, y admite la conservación de momento angular, logrando su invariancia en el tiempo cuando los pares externos son nulos. Para esta parametrización la condición de deslizamiento libre es (40). Sin embargo (5) no es consistente con los principios sobre energía.

Shchepetkin y O’Brien (1996) mencionan sobre la apropiada implementación del término de fricción, de tal forma que sea físicamente consistente, aún cuando el propósito de esta implementación sea la de prevenir inestabilidades numéricas. La razón de ello, es la de evitar que se violen principios fundamentales de la física que reduzcan la fidelidad de la solución numérica. Aunque la derivación física de una forma físicamente consistente del término de la disipación en el contexto de la teoría de aguas someras es una tarea complicada (sino casi imposible), el demostrar que, bajo las condiciones apropiadas, (6) cumple con principios de conservación de cantidades físicas fundamentales (i.e. momento angular y energía), así como de otras propiedades y requerimientos como los planteados por Gent (1993 y Shchepetkin y O’Brien (1996), ofrece un punto de apoyo para su uso en el modelo gravedad reducida. En este caso la condición de deslizamiento libre es (44).

En la Figura 5 se muestra la serie completa de la simulación de el cambio de momento angular total, a diferencia de los cálculos realizados con el volumen, se puede observar que sobre ciertos intervalos en la serie el balance del cambio de momento angular no se establece satisfactoriamente (Fig. 5), y existen otros en los cuales se aprecia que coinciden de acuerdo a lo expresado en (45) (Fig. 6). Algunas de las razones probables por la cuales no se logra establecer el balance en cada uno de los puntos de la simulación, son que 1) la ecuación (45) (uno o más términos de lado derecho) que describe el cambio de momento angular es impreciso en su derivación, 2) que las ecuaciones del modelo desarrollado en diferencias finitas, prescritas para las integraciones numéricas no permitan reproducir el balance, o 3) que exista una inconsistencia en el esquema que se utiliza para realizar los cálculos numéricos respecto al esquema del modelo del cual se obtienen las salidas para realizar tales cálculos.

La primera serie en la Figura 8, que muestra la evolución temporal de los términos (i), (ii) y (iii) permite determinar que estos son los términos dominantes en la variación del cambio de momento angular, pues su orden de magnitud es hasta cuatro veces mayor que la contribución debido a los términos disipativos, siendo estos despreciables en su contribución al cambio de momento angular. Esta relación es similar para cada una de las parametrizaciones presentadas en este estudio. Los términos (ii) y (iii), que corresponden a un flujo vinculado a Coriolis, y la presión normal a la frontera, respectivamente, son los que en mayor proporción tienden a contrarrestarse, ya que la contribución en magnitud del flujo de momento angular relativo (iii) es menor a (i) y (ii). Cabe recordar que en la integración sobre un geometría circular (y sobre cualquier geometría siempre que la presión sea constante), la aportación al momento angular por la presión en las fronteras es nulo, por lo que el balance se dará principalmente por los flujos de momento angular relativo y el asociado al término de Coriolis, a través de las fronteras.

Las proyecciones a este estudio son: 1) el mejoramiento de los resultados en las integraciones numéricas, 2) especificar entradas y salidas con flujos de masa a través de la frontera impermeable ,3) trabajar en modelos más complejos (e.g. modelos en plano- $\beta$ ), y 4) establecer un vínculo del cambio de momento angular y la vorticidad potencial a través de cálculos en la frontera.

## VI. REFERENCIAS.

Batchelor, G.K. 1967. Fluid Dynamics. Cambridge University Press. 615 pp.

Battisti, D.S. y A. C. Hirst. 1989. Interannual variability in a tropical atmosphere-ocean model of the basic state, ocean geometry and nonlinearity. *J. Atmos. Sci.* 46(12): 1687-1712 p.

Candela, J., J. Sheinbaum, J. Ochoa y A. Badan. 2002. The potential vorticity flux through the Yucatan Channel and the Gulf Current in the Gulf of Mexico. *Geophys. Res. Lett.* 29(22): doi:10.1029/2002GL015587.

Chapman, D. C. 1985. Numerical treatment of cross-shelf open boundaries in a barotropical coastal ocean model. *J. Phys. Oceanogr.* 15:1060-1075 p.

Clercx, H.J.H., S.R. Maassen y G.J.F van Heijst. 1998. Spontaneous spin-up during the decay of 2D turbulence in a square container with rigid boundaries. *Phys. Rev. Lett.* 80(23):5129-5132 p.

Egger, J. (2001). Angular momentum of  $\beta$ -plane flows. *J. Atmos. Sci.*, 58: 2502-2508 p.

Gent, P.R. 1993. The energetically consistent shallow-water equations. *J. Atmos. Sci.* 50(9):1323-1325 p.

Gill, A. E. (1982). Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press, Inc. 662. pp

Hurlburt, H.E. y J.D. Thompson. 1980. A numerical study of Loop Current intrusions and eddy shedding. *J. Phys. Oceanogr.* 10: 1611-1651 p.

Maassen, S.R., H.J.H. Clercx y G.J.F. van Heijst. 2002. Self-organization of quasi-two-dimensional turbulence in stratified fluids in square and circular containers. *Phys. Fluids.* 14:2150-2169 p.

Masuda, A. y G. Mizuta. 1995. A study on the effects of bottom topography on deep circulation with a diffusive reduced-gravity model. *J. Phys. Oceanogr.* 25: 374-390 p.

Oey, L.Y. y H.C. Lee. 2003. Effects of winds and Caribbean eddies on the frequency of Loop Current eddy shedding: A numerical model study. *J. Geophys. Res.* 108(C10). doi: 10.1029/2002JC001698.

Pavía, E.G. 1992. The breakup of frontal filaments. *J. Phys. Oceanogr.* 22(4):399-403 p.

Pavía, E.G. y M. López. 1994. Long-term evolution of elongated warm eddies. *J. Phys. Oceanogr.* 24(10):2201-2208 p.

Ripa, P. 1981. Symmetries and conservation laws for internal gravity waves. *AIP Conf. Proc.* 76:281-306 p.

Ripa, P. 1982. Nonlinear wave-wave interactions in a one-layer reduced-gravity model on the equatorial  $\beta$  plane. *J. Phys. Oceanogr.* 12: 97-111 p.

Ripa P. y S. Jiménez. 1988. Evolution of an unstable elongated eddy. *J. Phys. Oceanogr.* 18:1202-1205 p.

Schär, C. y R. B. Smith. 1993. Shallow-water flow past isolated topography. Part I: Vorticity production and wake formation. *J. Atmos. Sci.* 50(10):1373-1400 p.

Shchepetkin, A.F. y J. O'Brien. 1996. A physically consistent formulation of lateral friction in shallow-water equation ocean models. *Mon. Wea. Rev.* 124:1285-1300 p.

Sura, P., F. Lunkeit y K. Fraedrich. 2000. Decadal variability in a simplified wind-driven ocean model. *J. Phys. Oceanogr.* 30: 1917-1930 p.

Vallis, G. K. 2005. *Atmospheric and Oceanic Fluids Dynamics. Fundamentals and Large-Scale Circulation.* Cambridge. 745 pp

Van Heijst, G.J.F., H.J.H. Clercx y S.R. Maassen. 2003. A note on the effects of solid boundaries on confined decaying 2D turbulence. En : O.U. Velasco Fuentes, J. Sheinbaum y J. Ochoa (eds.). *Nonlinear Processes in Geophysical Fluids.* Kluwer Academic Publishers. 305-324 p.

### APÉNDICE A. *Esquema de diferencias finitas.*

Los detalles de la distribución espacial de las variables en el modelo numérico, son mostrados a continuación, en un espacio bi-dimensional. Para el modelo numérico se ha hecho uso de una malla C Arakawa, presentando tres variables dependientes en el arreglo. La presentación de las variables para identificarlas se hace en círculo rojo para la componente zonal de la velocidad  $u$ , en triángulo verde la componente meridional  $v$  y en asterisco azul para el grosor de la capa superior del sistema  $h$ .

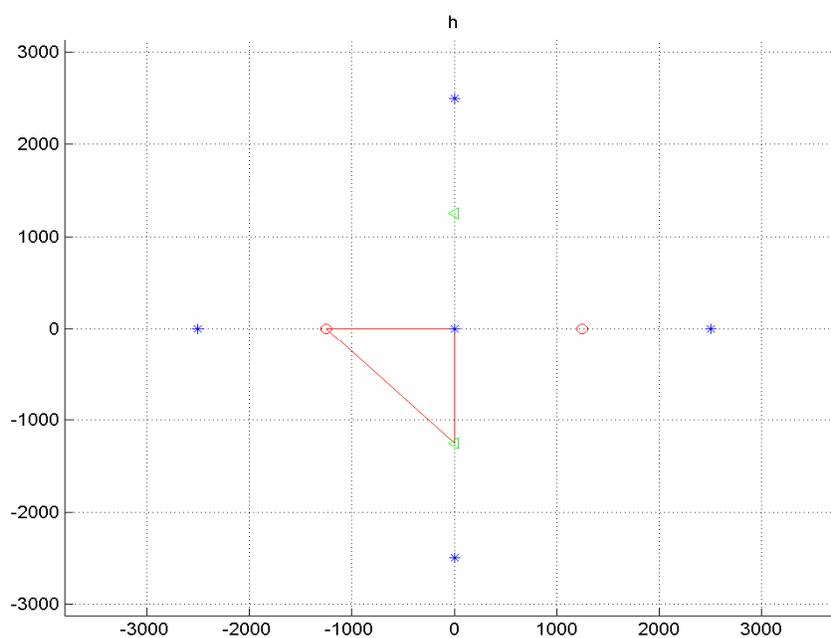


Figura A. 1. Distribución espacial de variables en la malla del modelo numérico. Al centro de la malla, en asterisco azul, se calcula la variable  $h$ , alrededor de esta se distribuyen las variables que participan en el cálculo de dicha variable sobre el punto de la malla especificado.

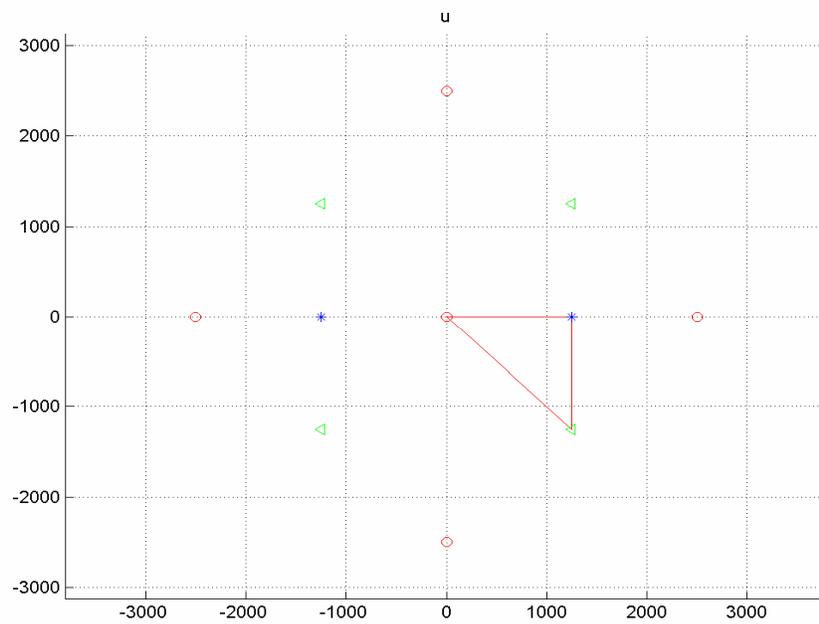


Figura. A.2. Ídem, en el cálculo de la variable  $u$ .

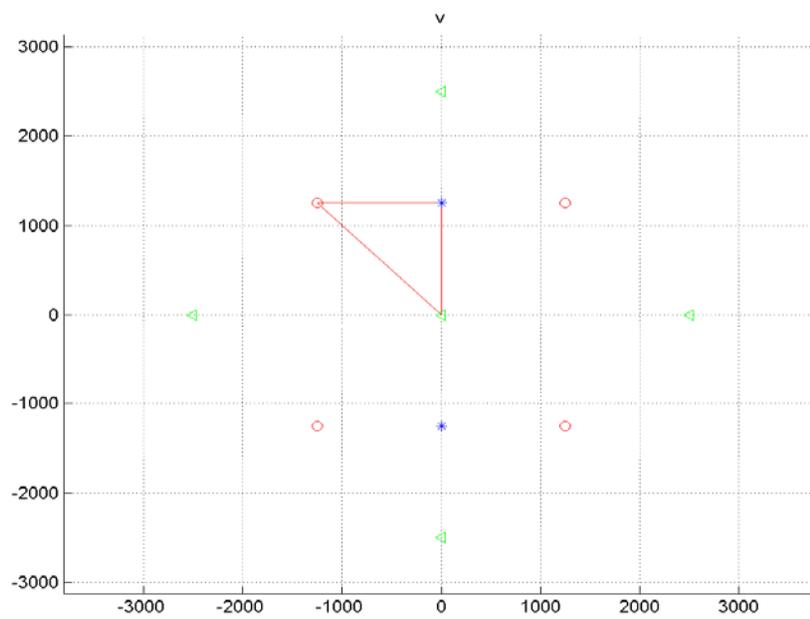


Figura. A.3. Ídem, en el cálculo de la variable  $v$ .

## APÉNDICE B. *Código en ambiente Matlab.*

Se incluye a continuación el programa del modelo numérico, desarrollado en Matlab.

```

% Archivo de texto que escribe en diferencias finitas
% las ecuaciones de aguas someras en un sistema de
% gravedad reducida (1 ½ capa).

% PARAMETROS Y CONDICIONES INICIALES.

nx=210; ny=185; % Número de celdas en la malla.
dx=2500; dy=dx; % Longitud del diferencial a lo largo de x y y .
xl=dx*nx; yl=dy*ny; % Longitud del dominio en dirección x y y .
Rt=6.37e6; % Radio terrestre.
rho=1025; % Densidad de la capa superior del modelo.
gr=0.015; % Gravedad reducida.
ho=400; % Profundidad de la capa superior del modelo.
c=sqrt(gr*ho);
nu=20.1; nu=nu*ho; % Coeficiente de viscosidad cinemática.

% Habilita o deshabilita el cálculo de los terminos no lineales en ecuaciones de momentum
% (ru) y continuidad (rh).
ru=1; rh=1;
tf=86400*7; % Tiempo final.
dt=0.1*dx/c
dt=200; % Diferencial de tiempo.
iend=round(tf/dt); % Numero de iteraciones.
alpha=0.245; % Coeficiente de Asselin-Robert: 0.05<=alpha<=0.1.

```

```

hh=meshgrid(1:nx,1:ny);
hh=zeros(size(hh));
uu=hh;vv=hh;
h(1:ny,1:nx,1)=hh;h(:,2)=h(:,1);h(:,3)=h(:,1);
u(1:ny,1:nx,1)=uu;u(:,2)=u(:,1);u(:,3)=u(:,1);
v(1:ny,1:nx,1)=vv;v(:,2)=v(:,1);v(:,3)=v(:,1);

% CORIOLIS

lat=22;omega=2*pi/(86400*(1-1/365.25));
fo=2*omega*sin(lat*pi/180);

T=2*pi/fo;
nt=round(T/dt);
T=nt*dt;fo=2*pi/T;
lat=180*asin(0.5*fo/omega)/pi;
Beta=0*(2*omega*cos(lat*pi/180))/Rt;

j=1:ny;i=1:nx;[i,j]=meshgrid(i,j);
fu=fo+Beta*(j-0.5)*dy;
fv=fo+Beta*(j-1)*dy;

periodo=86400; sk=5; fac=100;
x=1:nx;y=1:ny; x=(x-round(mean(x)))*dx;y=(y-round(mean(y)))*dy;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);

```

% Construcción de un Remolino anticiclónico a partir de ciclostrofia.

% (Nota: puede prescribirse cualquier condición inicial.)

```

R00=67*dx;a00=1.20524;
RA=R00;kn=2*pi/RA;
rr=sqrt(xx.*xx+yy.*yy);
hh=h(:,1);hh=0*hh;uu=hh;vv=hh;
a0=a00/gr;hh=a0*(cos(2*pi*rr/RA)+1);
ii=find(rr>RA/2);hh(ii)=0;
rr=xx-dx/2;rr=sqrt(rr.*rr+yy.*yy);
uu=-4*gr*a0*kn^2*sinc(kn*rr/pi);
uu=sqrt(fo^2+uu)-fo;
ii=find(rr > RA/2);uu(ii)=0; % uu es la vel.angular para uu
uu=real(uu);
uu=-uu.*yy/2;
rr=xx+dy/2;rr=sqrt(rr.*rr+yy.*yy);
vv=-4*gr*a0*kn^2*sinc(kn*rr/pi);
vv=sqrt(fo^2+vv)-fo;
ii=find(rr>RA/2);vv(ii)=0;
vv=real(vv);vv=vv.*xx/2;
hh=hh+ho;

h(:,1)=h(:,1)+hh;h(:,2)=h(:,1);h(:,3)=h(:,1);
u(:,1)=u(:,1)+uu;u(:,2)=u(:,1);u(:,3)=u(:,1);
v(:,1)=v(:,1)+vv;v(:,2)=v(:,1);v(:,3)=v(:,1);

```

```

% INICIA CICLO DE ITERACIONES.
for k=1:iend
    ind3=mod(k+1,3)+1;
    ind2=mod(k,3)+1;
    ind1=mod(k-1,3)+1;
    t=(k-1)*dt;
    n=n+1;

% Algoritmos para el cálculo en diferencias finitas de  $u$ ,  $v$  y  $h$ .

uu=u(:, :, ind2); vv=v(:, :, ind2); hh=h(:, :, ind2);
j=2:ny-1; i=2:nx-1;
% du/dt.
    uudx=uu(j,i); uudx=uudx.*(uu(j,i+1)-uu(j,i-1))/(2*dx);
    vudy=0.25*(vv(j,i)+vv(j+1,i)+vv(j+1,i-1)+vv(j,i-1)); fvu=fu(j,i).*vudy;
    vudy=vudy.*(uu(j+1,i)-uu(j-1,i))/(2*dy);
    gpx=gr*(hh(j,i)-hh(j,i-1))/dx;
    nuu=nu*((u(j,i+1,ind1)-2*u(j,i,ind1)+u(j,i-1,ind1))/dx^2 +...
        (u(j+1,i,ind1)-2*u(j,i,ind1)+u(j-1,i,ind1))/dy^2);
    nuu=nuu./(h(j,i,ind1)+h(j,i-1,ind1))*0.5;
    u(j,i,ind3)=u(j,i,ind1)+2*dt*(fvu-ru*(uudx+vudy)-gpx+nuu);
% dv/dt.
    vvdy=vv(j,i).*(vv(j+1,i)-vv(j-1,i))/(2*dy);
    uvdx=0.25*(uu(j,i)+uu(j-1,i)+uu(j-1,i+1)+uu(j,i+1)); fuv=fv(j,i).*uvdx;
    uvdx=uvdx.*(vv(j,i+1)-vv(j,i-1))/(2*dx);
    gpy =gr*(hh(j,i)-hh(j-1,i))/dy;
    nuu=nu*((v(j,i+1,ind1)-2*v(j,i,ind1)+v(j,i-1,ind1))/dx^2+...
        (v(j+1,i,ind1)-2*v(j,i,ind1)+v(j-1,i,ind1))/dy^2);
    v(j,i,ind3)=v(j,i,ind1)+2*dt*(-fuv-ru*(uvdx+vvdy)-gpy+nuu);
    nuu=nuu./(h(j,i,ind1)+h(j-1,i,ind1))*0.5;

```

```

% dh/dt
udx=(uu(j,i+1)-uu(j,i))/dx;vdy=(vv(j+1,i)-vv(j,i))/dy;
uhdx= 0.5*(uu(j,i+1)+uu(j,i)).*(hh(j,i+1)-hh(j,i-1))/(2*dx);
vhdy= 0.5*(vv(j+1,i)+vv(j,i)).*(hh(j+1,i)-hh(j-1,i))/(2*dy);
h(j,i,ind3)=h(j,i,ind1)-2*dt*(hh(j,i).*(udx+vdy)+rh*(uhdx+vhdy));

% CONDICIONES DE FRONTERA.
% Condición de frontera del campo de velocidad.
i=1:nx;
    % Frontera Sur.
    u(1, i,ind3)=u(2, i,ind3);           % Deslizamiento Libre (DL)
    v(1, i ,ind3)=-v(3, i,ind3);
    v(2, i,ind3)=0;                       % Impenetrabilidad (IM)

    % Frontera Norte.
    u(ny, i,ind3)=u(ny-1, i,ind3);      % DL
    v(ny, i,ind3)=0;                       % IM

j=1:ny;
    % Front. Oeste.
    v(j,1,ind3)=v(j,2,ind3);           % DL
    u(j,1,ind3)=-u(j,3,ind3);
    u(j,2,ind3)=0;                       % IM

    % Frontera Este.
    v(j,nx,ind3)=v(j,nx-1,ind3);       % DL
    u(j,nx,ind3)=0;                       % IM

```

```
% Condición de frontera del grosor de la capa.
```

```
h(1,1:nx,ind3)=ho;           % Sur.  
h(ny,1:nx,ind3)=ho;        % Norte.  
h(1:ny,1,ind3)=ho;         % Oeste.  
h(1:ny,nx,ind3)=ho;        % Este.
```

```
% Filtro de Asselin-Robert.
```

```
u(:, :, ind2)=u(:, :, ind2)+alpha*(u(:, :, ind3)+u(:, :, ind1)-2*u(:, :, ind2));  
v(:, :, ind2)=v(:, :, ind2)+alpha*(v(:, :, ind3)+v(:, :, ind1)-2*v(:, :, ind2));  
h(:, :, ind2)=h(:, :, ind2)+alpha*(h(:, :, ind3)+h(:, :, ind1)-2*h(:, :, ind2));
```

```
% FIN DEL CICLO DE ITERACIONES.
```

```
end
```