

TESIS DEFENDIDA POR  
**Rita Guevara Alcaraz**  
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

---

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes  
*Director del Comité*

---

Dr. Julio Sheinbaum Pardo  
*Miembro del Comité*

---

Dr. J. Manuel Figueroa Rodríguez  
*Miembro del Comité*

---

Dr. Gilberto López Mariscal  
*Miembro del Comité*

---

Dr. J. Manuel Figueroa Rodríguez  
*Coordinador del programa de posgrado  
en Oceanografía Física*

---

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales  
*Director de Estudios de Posgrado*

Agosto de 2008

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
EN OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

---

**ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL FLUJO PRODUCIDO POR UN  
CILINDRO HORIZONTAL QUE SE MUEVE VERTICALMENTE EN  
UN FLUIDO ESTRATIFICADO**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

RITA GUEVARA ALCARAZ

Ensenada, Baja California, México, Agosto de 2008

**RESUMEN** de la tesis de **RITA GUEVARA ALCARAZ**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California. Agosto de 2008.

**ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL FLUJO PRODUCIDO POR UN  
CILINDRO HORIZONTAL QUE SE MUEVE VERTICALMENTE EN  
UN FLUIDO ESTRATIFICADO**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes  
Director de Tesis

Esta tesis estudia el flujo producido por el arranque instantáneo de un cilindro horizontal en un fluido estratificado por una variación lineal en el contenido de sal disuelta. En particular, el objetivo es determinar la forma en que la evolución del flujo depende de los parámetros del problema, es decir, del número de Reynolds ( $Re$ ), que mide la importancia de las fuerzas inerciales con respecto a las viscosas; y el número de Froude ( $Fr$ ), que mide la importancia de las fuerzas inerciales con respecto a las boyantes. El flujo es visualizado con las técnicas de sombragrafía y schlieren sintético pues estas detectan las fluctuaciones de densidad debido a la relación entre el gradiente de densidad y el gradiente del índice de refracción de la luz. El rango de los números adimensionales utilizado es  $760 < Re < 2000$  y  $0.4 < Fr < 5$ . Cuando las fuerzas inerciales son dominantes ( $Re > 1000$ ) en la estela del cilindro se forman dos remolinos de signos contrarios, a menos que la estratificación sea muy fuerte ( $Fr < 0.7$ ); en cambio, cuando en el flujo las fuerzas inerciales son moderadas ( $Re < 1000$ ) los remolinos sólo se forman si la estratificación es muy débil o inexistente ( $Fr > 2$ ). En general, conforme la estratificación aumenta el tamaño de los vórtices disminuye, su formación es más temprana y su vida más corta. Conforme las fuerzas inerciales aumentan la anomalía de densidad producida tras el paso del cilindro crece.

**Palabras Clave:** Vórtices en la estela de un cilindro, fluido estratificado, visualización de flujos

**ABSTRACT** of the thesis presented by **RITA GUEVARA ALCARAZ**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of **MASTER OF SCIENCE** in **PHYSICAL OCEANOGRAPHY**. Ensenada, Baja California. August, 2008.

**EXPERIMENTAL STUDY OF THE FLOW PRODUCED BY A  
HORIZONTAL CYLINDER MOVING VERTICALLY IN A  
STRATIFIED FLUID.**

This thesis studies the flow produced in the wake behind and impulsively started horizontal cylinder in a fluid stratified by a linear variation of dissolved-salt content. In particular, the objective is to determine the way in which the evolution of the flow depends on the parameters of the problem, this is to say, the Reynolds number ( $Re$ ), which measures the importance of inertial relative to viscous forces; and the Froude number ( $Fr$ ), which is a measure of the importance of inertial relative to buoyant forces. The flow is visualized using the shadowgraph and synthetic schlieren techniques because these detect density fluctuations due to the relation between the density gradient and the gradient of the refractive index of light. The range of the adimensional numbers used is  $760 < Re < 2000$  and  $0.4 < Fr < 5$ . When the inertial forces are dominant ( $Re > 1000$ ) two counter rotating vortices are formed in the wake of the cylinder unless the stratification is very strong ( $Fr < 0.7$ ); however, when the inertial forces in the flow are moderate ( $Re < 1000$ ) vortices are only formed if the stratification is very weak or non existent ( $Fr > 2$ ). In general, as stratification increases the size of the vortices diminishes, their formation occurs sooner and their life-spans are shorter. As inertial forces increase the density anomaly produced by the passing of the cylinder increases.

**Keywords:** Vortex flow, stratified fluid, flow visualization

# Dedicatoria

Con amor para la familia Vázquez Guevara

# Agradecimientos

Muchísimas gracias por ayudarme a realizar este trabajo, crecí en mente y en corazón.

Oscar *Somos como enanos sentados en los hombros de gigantes, y podemos ver mejor y ms lejos, no por nuestra propia eminenciavisual o corporal, sino porque su estatura nos eleva y sostiene. Bernardo de Chartres (siglo XII, citado por Juan de Salisbury)*

Manuel, Julio y Gilberto *El Arte es "yo"; la Ciencia es "nosotros". Claude Bernard*

Heriberto *El corazón tiene razones que la razón ignora. Blaise Pascal*

Mi familia *Nuestro cariño no depende de cosas como el espacio y el tiempo. Richard Bach*

Axel, Bárbara, Sarahí, Nadine, Felipe y Efraín *Los amigos son la familia que escoges.*

CONACyT, CICESE, Lupita Rodríguez y Gabino Garcia *El amigo ha de ser como el dinero, que antes de necesitarlo, se sabe el valor que tiene. Sócrates*

# Contenido

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
I.1	Flujos generados por el movimiento de un cilindro en fluidos homogéneos . . . . .	3
I.2	Flujos generados en fluidos estratificados . . . . .	8
<b>II</b>	<b>Teoría y métodos</b>	<b>11</b>
II.1	Trabajo experimental . . . . .	11
II.1.1	Estratificación lineal . . . . .	11
II.1.2	Perfil de densidad . . . . .	12
II.1.3	Generación del flujo con el arranque instantáneo de un cilindro .	14
II.2	Parámetros del problema . . . . .	16
II.2.1	Análisis dimensional . . . . .	16
II.3	Visualización . . . . .	20
II.3.1	Sombragrafía . . . . .	21
II.3.2	Schlieren sintético . . . . .	23
II.3.3	Diferencias entre el schlieren sintético y la sombragrafía . . . . .	26
II.4	Análisis digital de las imágenes . . . . .	27
II.4.1	Bases ópticas del schlieren sintético . . . . .	27
II.4.2	Mapas de densidad . . . . .	28
<b>III</b>	<b>Resultados</b>	<b>32</b>
III.1	Flujo producido por el arranque instantáneo de un cilindro en un fluido homogéneo . . . . .	32
III.2	Exploración de parámetros con información obtenida con sombragrafías en un fluido estratificado . . . . .	34
III.2.1	Perímetros . . . . .	36
III.2.2	Posición de los remolinos . . . . .	37
III.2.3	Etapas de la evolución del flujo . . . . .	38
III.2.4	Discusión de los resultados obtenidos con sombragrafía . . . . .	39
III.3	Resultados obtenidos con schlieren sintético . . . . .	41
III.3.1	Fluctuación y mapas de densidad . . . . .	42
III.3.2	Discusión de los resultados obtenidos con schlieren sintético . .	44

<b>IV</b>	<b>Discusión general y conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>Error de medición para la velocidad del cilindro</b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Error de medición para la posición de los vórtices</b>	<b>62</b>
<b>C</b>	<b>La propagación de la luz a través de un medio inhomogéneo</b>	<b>64</b>

# Índice de figuras

Figura		Página
1	Regímenes de flujo según el número de Reynolds . . . . .	4
2	Características geométricas de los remolinos con respecto al cilindro. . .	5
3	Formación de la estela periódica de vórtices opuestos (de Kármán). . .	6
4	Inestabilidades en la capa límite para número de Reynolds elevados . .	7
5	Esquema experimental para realizar la estratificación lineal . . . . .	13
6	Perfil de densidad medido con el refractómetro en el tanque experimental	14
7	Esquema del tanque experimental y sus dimensiones . . . . .	15
8	Esquema del arreglo experimental y ejemplo de una sombragrafía . . .	22
9	Esquema del desvío de los rayos de luz en una sombragrafía . . . . .	23
10	Esquema del arreglo experimental del schlieren sintético . . . . .	24
11	Esquema del arreglo experimental del schlieren clásico . . . . .	25
12	Obtención de un schlieren sintético . . . . .	26
13	Ejemplo de los vectores de desplazamiento de los puntos de malla de fondo	29
14	Ejemplo del experimento hecho en fluido homogéneo . . . . .	33
15	Datos reportados y experimentales para flujos en un fluido homogéneo	34
16	Tipo de comportamiento en el espacio de parámetros ( $Re, 1/Fr$ ) . . . .	35
17	Perímetros de remolinos para diferentes combinaciones de $Re$ y $Fr$ . . .	36
18	Distancia adimensional entre los remolinos y el cilindro ( $a/D$ ) . . . .	37
19	Distancia adimensional entre los centros de los remolinos ( $b/D$ ) . . . .	38
20	Secuencia de sombragrafías para un $Re = 2000$ y $Fr = 2$ . . . . .	40
21	Secuencia de schlieren sintéticos para un $Re = 1000$ y $Fr = 1$ . . . . .	43
22	Anomalía de densidad para un $Re = 1480$ y $Fr = 2$ . . . . .	45
23	Mapa de densidad para un $Re = 1480$ y $Fr = 2$ . . . . .	46
24	Anomalía de densidad para un $Re = 1000$ y $Fr = 1$ . . . . .	47
25	Mapa de densidad para un $Re = 1000$ y $Fr = 1$ . . . . .	48
26	Anomalía de densidad para un $Re = 760$ y $Fr = 1$ . . . . .	49
27	Mapa de densidad para un $Re = 760$ y $Fr = 1$ . . . . .	50
28	Mecanismo de generación de vorticidad . . . . .	52

1	Histograma de frecuencias de un experimento para medir el diámetro de un círculo . . . . .	63
1	Esquema de los rayos de luz refractados al viajar en otro medio . . . .	65

# Índice de tablas

Tabla	Página
I Evolución para los experimentos hechos con la combinación de los números adimensionales $Re$ y $Fr$ . . . . .	39

# I

## Introducción

Dentro de la dinámica de los fluidos geofísicos, los vórtices han captado interés y relevancia en la oceanografía física y la meteorología. Los remolinos atmosféricos pueden determinar el clima y el tiempo; en algunos casos estos fenómenos influyen en algunas actividades humanas (económicas y sociales). Una componente importante de la circulación global oceánica son los vórtices, estos transportan calor, sal y momento sobre grandes distancias, junto con propiedades biológicas y químicas como minúsculas algas clorofílicas o plancton que constituyen la alimentación básica de los peces. Los vórtices provocan diversos efectos en el océano, por ejemplo, los remolinos costeros son importantes para la dispersión de contaminantes (p. ej. Rosas (2008)); la interacción del talud con dos remolinos, en especial si giran en sentido opuesto, induce corrientes perpendiculares a la costa y favorece la renovación del agua de la plataforma continental (Vidal *et al.* (1994) citado por Sheinbaum *et al.* (1997)); por otro lado, la recurrencia de los remolinos subsuperficiales frente a B.C. modifican la concentración de sal dentro del giro subtropical del Pacífico Norte (Jerónimo y Gómez-Valdés, 2007).

Los movimientos de gran escala abarcan extensiones mayores a cientos de kilómetros

en la atmósfera y en el océano y tienen la característica de ser aproximadamente bidimensionales. Esta bidimensionalidad es consecuencia de tres factores: la estratificación por densidad (que en promedio aumenta conforme a la profundidad), la geometría del espacio donde se mueve el fluido (en la atmósfera y el océano la escala vertical es menor a la horizontal, lo cual favorece a los movimientos en esta dirección) y la rotación terrestre (que fuerza al fluido a moverse en planos horizontales). En general, las características del movimiento del fluido en un plano horizontal, son esencialmente las mismas en todo plano paralelo al horizonte. Los giros anticiclónicos desprendidos de la Corriente de Lazo en el Golfo de México son remolinos aproximadamente planos y horizontales (Monreal-Gómez y Salas-León (1997) y Sheinbaum *et al.* (1997)); y son similares a los observados en la corriente del Golfo en Norteamérica, en la corriente de Kuroshio en la región de Japón y en la corriente de Agulas al sur de África McDonald (1999). Todos éstos vórtices tienen su eje en la vertical.

Sin embargo, también existen remolinos con su eje horizontal, como por ejemplo, las calles de nubes formadas en la atmósfera. Son producidas por convección cuando las capas inferiores de aire son más cálidas y por lo tanto menos densas que las superiores, así que tienden a moverse hasta llegar a un estado estable, donde las capas de fluido ligeras están sobre capas pesadas (Miura (1986), Kelly (1984) y Sykes *et al.* (1988)). Otros vórtices horizontales son los producidos en el despegue, aterrizaje y vuelo de aeronaves. Su estudio es importante porque puede ayudar a minimizar riesgos en el tránsito aéreo pues, los aviones pequeños pueden quedar atrapados en estos remolinos y perder el control y la altitud (Scorer y Davenport (1970), Sarpkaya (1983), Hill (1975), entre otros). Por otro lado, los remolinos horizontales también son visibles en océanos y lagos, como acontece con el fenómeno conocido como corrientes de Langmuir, cuyo origen proviene de la interacción de la deriva de Stokes y el esfuerzo del viento (vea p.

ej. Faller y Caponi (1978) y Craik (1977)). Estos remolinos representan un mecanismo de mezcla y transporte vertical de plancton, gases y otras partículas en la capa de mezcla del océano; y esta materia en la superficie forma arreglos lineales en las zonas convergentes entre los remolinos.

Los remolinos y estelas han sido investigados mediante simulaciones numéricas o experimentalmente, por ejemplo con la traslación de objetos sumergidos en un fluido. Particularmente, el flujo generado con un cilindro ha sido estudiado en fluidos homogéneos en diferentes condiciones, por un arranque instantáneo y por el movimiento uniforme del cilindro (o del fluido si el cilindro está en reposo). No obstante, hay poca literatura enfocada en los fluidos estratificados. La siguiente sección centra estas investigaciones.

## **I.1 Flujos generados por el movimiento de un cilindro en fluidos homogéneos**

La clasificación de los flujos en laminar y turbulento es un resultado propiamente de la viscosidad del fluido. En un flujo laminar el movimiento de las partículas sigue trayectorias separadas y definidas sin intercambio transversal entre ellas y no hay mezcla. En cambio, en el flujo turbulento el movimiento de las partículas es errático, sin un orden establecido. Reynolds (1883) con base a sus experimentos, propuso el parámetro para distinguir ambos tipos de flujo mediante el número que lleva su nombre, el cual permite evaluar la preponderancia de las fuerzas viscosas sobre las inerciales. En el flujo generado por el movimiento de un cilindro en un fluido homogéneo, el número de Reynolds está definido por  $Re = DU/\nu$ , al considerar que el obstáculo tiene una longitud  $D$ , una velocidad  $U$  y una viscosidad cinemática  $\nu$ . Reynolds encontró que un flujo

laminar puede ser inestable cuando rebasa un valor crítico ( $Re_c$ ) y tornarse después en turbulento. De acuerdo con Williamson (1996), Roshko (1961) -citado por Gerich y Eckelmann (1982)-, Norberg (1994), Mutlu y Fredsøe (2006), entre otros, también es posible clasificar a los flujos en regímenes en función del valor del número de Reynolds.

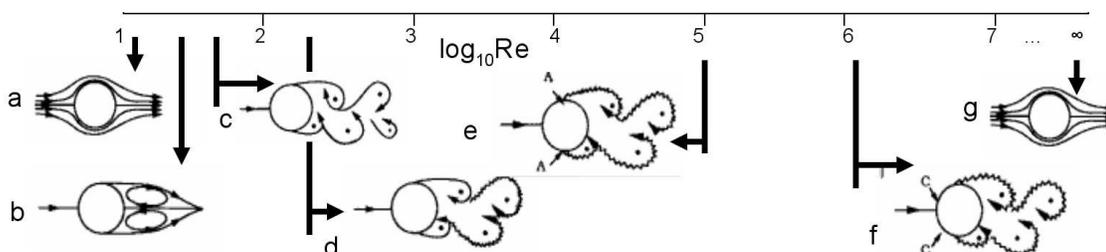


Figura 1: a) No hay formación de remolinos; b) formación de un par de vórtices estables en  $5 < Re < 49$ ; c) para  $Re > 49$  hay una estela periódica de vórtices; d) transición del flujo a turbulento; e) para  $300 < Re < 3 \times 10^5$  el flujo es turbulento, la separación de la capa límite es laminar A; f) la capa límite C es turbulenta en ambos lados; g) cuando  $Re$  es infinito, la viscosidad es cero, por lo que no hay arrastre y el flujo es parecido a  $Re < 5$

1) Flujo sin vórtices. Para números de Reynolds pequeños ( $Re < 5$ ) no aparecen vórtices detrás del cilindro, sólo un flujo laminar alrededor del cilindro. Las fuerzas viscosas predominan sobre las inerciales.

2) Flujo laminar estacionario. Para flujos con  $5 < Re < 49$  existe una zona de recirculación detrás del cilindro. Las partículas de fluido viajan alrededor del cilindro acelerándose y desacelerándose porque existe un campo de presión variable e induce una zona de recirculación. En el flujo existe una capa límite a lo largo de la superficie del cilindro; en ella la vorticidad no es nula y después de un corto tiempo la hoja de vorticidad sufre una separación. En consecuencia, el fluido que posee la vorticidad de mismo signo enrolla y forma un vórtice primario en la región de recirculación. Esto da origen a dos remolinos que giran en sentido contrario detrás del cilindro (vea por ejemplo, Batchelor (1977), Kundu y Cohen (2002)). Estos aumentan en intensidad

debido a la vorticidad suministrada desde la separación de la capa límite y en tamaño debido a la difusión de viscosidad (Chu y Liao, 1992).

Countanceau y Bouard (1977), en experimentos para un rango de  $5 < Re < 40$ , observaron la evolución temporal del flujo al variar el número de Reynolds y la influencia de las paredes del tanque experimental en la razón  $\lambda$  definida como el cociente entre el diámetro del cilindro y el del tanque. Con la evidencia experimental pudieron determinar que para números de Reynolds constantes, los remolinos son de menor tamaño conforme  $\lambda$  crece. Pero, conforme aumenta  $Re$  los remolinos viajan más alejados del cilindro e incrementa la distancia entre sus centros (crece la distancia  $a$  y la separación  $b$  mostradas en la Figura 2). Además, hay un incremento lineal de la longitud  $L$  de los remolinos. Por otra parte, el área total de los vórtices aumenta si a su vez disminuye  $\lambda$ . Countanceau y Bouard también obtuvieron un valor de Reynolds crítico ( $Re_c = 39.5$ ) cuando el ancho máximo del par de remolinos es cercano al diámetro del cilindro. Por otro lado, Li *et al.* (2004) obtuvieron que  $Re_c = 45 \sim 49$ .

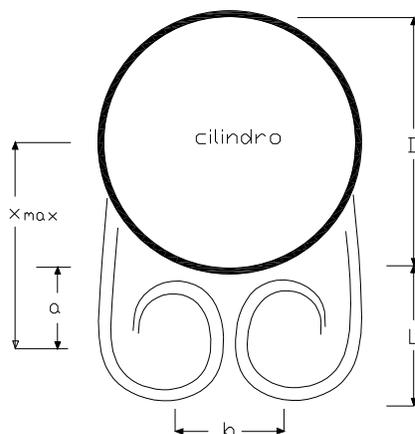


Figura 2: Definición de los parámetros que caracterizan la geometría de los remolinos formados detrás del cilindro por su movimiento o por el movimiento del fluido (con el cilindro en reposo).

3) Estela laminar de vórtices ( $49 < Re < 194$ ). En este rango existe una estela periódica de vórtices de signo opuesto (Figura 3) y conforme aumenta el número de Reynolds puede desarrollar inestabilidades. Por otra parte, con base en los métodos de la teoría de transporte de sistemas dinámicos, Duan y Wiggins (1995) establecieron que el número de Reynolds crítico es cercano a 190, y que para  $Re > 50$  el flujo es periódico en el tiempo.

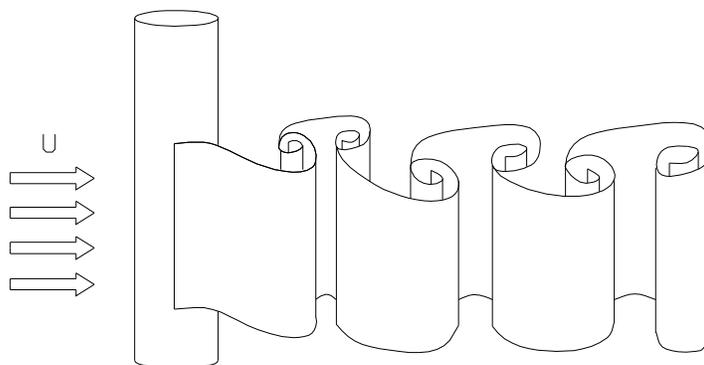


Figura 3: Formación de la estela periódica de vórtices opuestos (de Kármán) producida por el flujo uniforme de un fluido y un cilindro en reposo cuando  $Re > 49$ .

4) Estela en transición ( $194 < Re < 260$ ). La estela con vórtices deja de ser bidimensional y pueden observarse dos modos ( $A$  y  $B$ ) en la estela tridimensional (Leweke y Williamson (1998)). El modo  $A$  está asociado a la inestabilidad elíptica, ésta actúa al generar vorticidad perpendicular a la inicialmente existente y tiende a romper las regiones con líneas de corriente elípticas. En el modo  $A$  ( $194 < Re < 240$ ) hay una deformación en los remolinos y la formación de unos rollos en la estela con una longitud de onda (la cual decrece conforme  $Re$  aumenta) de 3 a 4 diámetros del cilindro. El modo  $B$  ( $Re > 240$ ) está ligado a la inestabilidad hiperbólica, y es el principio de una

estela de vórtices secundarios de escala pequeña.

5) Reynolds elevados. Para  $300 < Re < 3 \times 10^5$  el régimen es subcrítico, conforme  $Re$  aumenta, la transición a turbulento ocurre en la capa límite (como lo muestra la Figura 4), inicialmente en el punto de separación y cambia hacia la superficie del cilindro. En el rango de  $3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^5$  el régimen es crítico; la separación de la capa límite es turbulenta en un solo lado del cilindro y en el opuesto es laminar. El régimen supercrítico está dado en el rango  $3.5 \times 10^5 < Re < 1.5 \times 10^6$ , aquí la separación de la capa límite es turbulenta en ambos lados del cilindro. Cuando el régimen es de transición superior ( $1.5 \times 10^6 < Re < 4 \times 10^6$ ) sólo una parte de la capa límite es turbulenta y cuando el  $4 \times 10^6 < Re$  el régimen es conocido como transcrito; las capas límite son completamente turbulentas en ambos lados del cilindro.

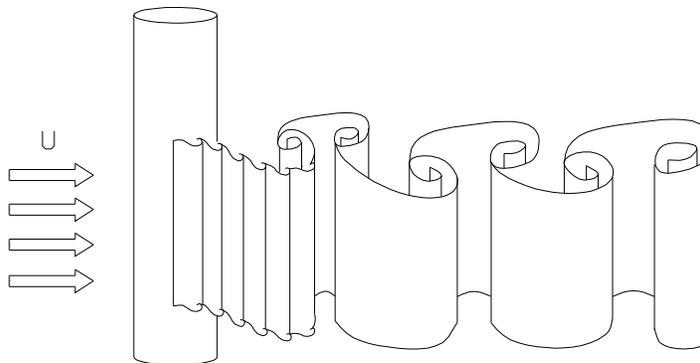


Figura 4: Formación de las inestabilidades en la capa límite para flujos con un número de Reynolds elevado en la estela periódica de vórtices opuestos; el flujo es de izquierda a derecha.

La información presentada constituye un punto de partida para la validación de investigaciones experimentales y simulaciones numéricas posteriores. Así, por ejemplo, Li

*et al.* (2004) desarrollaron un algoritmo con el método de mallas de Boltzmann para realizar simulaciones numéricas de flujos inestables con geometría curva, concluyeron que para  $Re < 40$  no hay una estela de vórtices y el valor calculado para las características geométricas ( $a, b, L$ ) de los remolinos concuerda con lo reportado por Bouard y Countanceau (1980). En los últimos años han sido relevantes las simulaciones numéricas en el estudio de la dinámica tridimensional del flujo, las dislocaciones de los remolinos, inestabilidades tridimensionales, etcétera (p. ej. Leweke y Williamson (1998), Thompson *et al.* (2001) y Williamson (1996)) . Sin embargo, el flujo generado detrás del cilindro es un fenómeno complejo que deja muchas incógnitas por resolver y trabajo por hacer.

## I.2 Flujos generados en fluidos estratificados

Un parámetro que indica la medida de la estratificación es el número de Froude, este está definido como la razón entre las fuerzas inerciales y las boyantes. Una fuerza boyante es la fuerza vertical ascendente ejercida por el fluido a una partícula de diferente densidad.

Boyer *et al.* (1989) investigaron experimentalmente el flujo generado por el movimiento uniforme de un cilindro en dirección horizontal en un fluido estratificado. Utilizaron un rango de número de Froude de  $0.02 < Fr < 13$  y un rango para el número de Reynolds de  $5 < Re < 4000$ , además de  $0.03 < D/H < 0.2$ , donde  $H$  es la altura del tirante de agua. Con experimentos hechos con la combinación de los parámetros ( $Re$  y  $Fr$ ) pudieron distinguir los regímenes de flujo; y los resultados son los siguientes: para estratificaciones intensas, (con  $Fr \leq 0.5$ ) y  $Re < 400$  no son visibles los vórtices, sólo patrones ondulantes detrás del cilindro; sin embargo, para el mismo rango de  $Re$  y con  $0.4 < Fr < 2$ , los remolinos son aproximadamente simétricos junto al cilindro seguidos de una estela ondulante; cuando las estratificaciones van de fuertes a moderadas,

para  $1 < Fr < 8$  y con  $80 < Re < 500$  hay una estela de vórtices, ésta es laminar ( $80 < Re < 350$ ) o turbulenta ( $350 < Re < 500$ ) si es que existe mezcla en escala pequeña; además, para la combinación particular de parámetros  $350 < Re < 1000$  y  $0.3 < Fr < 2$ , existe una región denominada de mezcla aislada, el flujo en esta región muestra dos pares de remolinos separados del cilindro y entre sí, los más alejados son los de menor tamaño y más anchos que el diámetro del cilindro; por último, para valores de  $Re > 500$  y  $Fr > 0.5$  existe una estela turbulenta de vórtices.

Ochoa y Woert (1977) investigaron experimentalmente, con esferas móviles inmersas en un fluido linealmente estratificado, el desarrollo de la capa límite y la desaparición del remolino detrás del obstáculo; y utilizaron un rango de parámetros de  $250 < Re < 1300$  y  $2 < Fr < 22$ . De acuerdo con sus resultados, para un valor fijo del número de Reynolds existe el desarrollo de vórtices cuando las estratificaciones moderadas ( $Fr > 7$ ). Sin embargo, cuando la estratificación aumenta los remolinos disminuyen su tamaño y hasta pueden desaparecer, es decir, que en lugar de vórtices exista una estela delgada detrás de la esfera; y en caso de tener una estratificación intensa pueden formarse ondas internas (también lo reporta Mowbray y Rarity (1967)). Torres (1997) obtuvo la solución numérica de estos experimentos y la concordancia entre sus cálculos y la evidencia experimental es altamente satisfactoria. Concluye que cuando la estratificación es débil, las isopícnas y líneas de corriente delinean el vórtice detrás de la esfera; pero, cuando la estratificación es mayor, las isopícnas tienden a juntarse y extenderse sobre una región mayor, y los remolinos adquieren forma plana y disminuyen su volumen.

Las simulaciones numéricas de estelas de vórtices muestran las inestabilidades inherentes del flujo que favorecen el decaimiento de los remolinos hasta llegar a su destrucción. En general, estas estelas pueden exhibir una inestabilidad elíptica -onda corta- o de Crow -onda larga- (Nomura *et al.* (2006)). Para una estratificación fuerte,

la inestabilidad elíptica es suprimida (Tsutsui (2003)). La inestabilidad de Crow exhibe una deformación simétrica de los núcleos con una longitud de onda que es función de la razón de aspecto  $r/b$ , donde  $r$  es el radio del remolino. Cuando crece esta inestabilidad hay un doblamiento de las estelas, y en consecuencia la formación de series de anillos de vorticidad, desorganización y rompimiento de los remolinos (Nomura *et al.* (2006), Sarpkaya (1983)). El torque baroclínico puede producir estructuras o filamentos vortiginosos verticales entre los remolinos principales, estos filamentos pueden envolver a los remolinos y substancialmente son intensificados por el estiramiento (Nomura *et al.* (2006), Holzäpfel *et al.* (2001)); además, estas estructuras intervienen en el intercambio de fluido en dirección transversal de los remolinos principales, en consecuencia minimizan la circulación y provocan turbulencia.

Esta disertación tiene como objetivo determinar la forma en que la evolución del flujo depende de los parámetros  $Re$  y  $Fr$ , que intervienen en la evolución del flujo en fluidos estratificados linealmente. El capítulo 2 contiene la teoría y métodos para realizar los experimentos; aquí expongo cómo efectuar una estratificación lineal con el “método de los dos tinacos” y la manera de generar el flujo con el movimiento de un cilindro horizontal; en este apartado, también desarrollo las dos técnicas de visualización utilizadas, el schlieren sintético y la sombragrafía, explico su montaje experimental y el análisis realizado a las imágenes capturadas del flujo. En el capítulo 3 presento los resultados obtenidos de la visualización y del estudio del flujo. En la parte final, en el capítulo 4, hago una discusión general de los resultados y presento las conclusiones.

## II

# Teoría y métodos

En este capítulo desarrollo el trabajo experimental realizado. Primeramente, explico el procedimiento a seguir al emplear el “método de los dos tinacos” para producir una estratificación lineal en el tanque experimental, seguido de la operación para generar el flujo con el movimiento de un cilindro. También describo el análisis dimensional del trabajo experimental. Posteriormente, desarrollo las técnicas de visualización utilizadas, la sombragrafía y el schlieren sintético; y finalmente, presento el análisis de las imágenes capturadas que permiten visualizar el flujo.

### II.1 Trabajo experimental

#### II.1.1 Estratificación lineal

El tanque donde realicé los experimentos lo llamo tanque experimental o simplemente  $T_e$ , es de acrílico y tiene dimensiones de 50x50 cm<sup>2</sup> de base y 60 cm de altura. Al iniciar un experimento el tanque experimental contiene agua estratificada linealmente, es decir, agua cuya densidad va a aumentar desde la superficie hasta el fondo. Para

obtener esta configuración utilicé el “método de los dos tinacos” que es popular en este tipo de experimentos. A continuación lo describo brevemente, el lector interesado en un análisis detallado del método puede consultar el trabajo de Hill (2002). La Figura 5 muestra el arreglo experimental. En el momento inicial el tanque experimental  $T_e$  está vacío, el tinaco  $T_s$  contiene agua con una concentración homogénea de sal; y el tinaco de mezcla  $T_m$  agua dulce. Al abrir la llave de paso, el agua salada fluye por gravedad desde  $T_s$  a  $T_m$ , donde un batidor eléctrico mezcla el agua salado con el agua dulce. Al mismo tiempo, una bomba hace fluir el agua desde  $T_m$  a el tanque experimental  $T_e$ . El agua entra a  $T_e$  desde el fondo, en donde una placa difusora y un conjunto de obstáculos evitan la formación de chorros y en consecuencia, minimizan la mezcla. Como la concentración de sal en el tinaco de mezcla aumenta continuamente, el agua que entra al tanque experimental es siempre más densa que el agua que estaba ahí y por ello se distribuye en el fondo, entonces, las parcelas de fluido menos densas quedan por encima de las más densas. Cuando el agua en el tanque experimental llega a una altura aproximada de 40 cm, apago la bomba y cierro la llave de paso. El llenado del tanque  $T_e$  debe realizarse de una manera lenta (aproximadamente una hora para ese volumen de agua). Esto también permite corroborar un llenado correcto al medir la concentración de sal en el tinaco de mezcla y regular las válvulas cuidadosamente.

### II.1.2 Perfil de densidad

Una vez que el tanque experimental alcanzó el nivel deseado, medí el perfil de densidad y comprobé la linealidad de la estratificación. Para ello, obtuve muestras de fluido con una pipeta de manera aleatoria en el plano horizontal y a incrementos constantes en la vertical (a cada 5 cm). Finalmente, obtuve su concentración de sal con el uso de

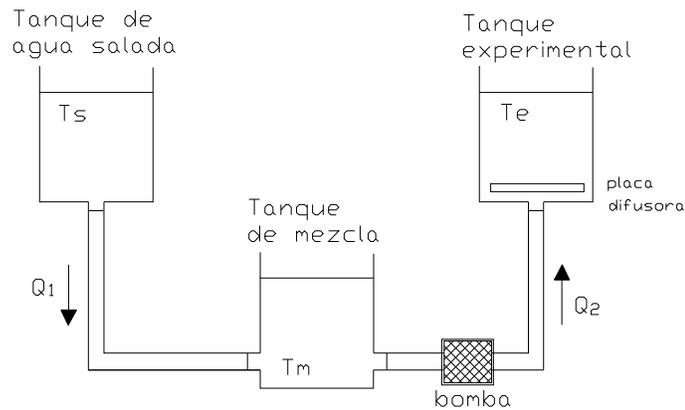


Figura 5: Esquema experimental para realizar la estratificación lineal en el tanque experimental  $T_e$  con el método de los dos tinacos (tanque  $T_s$  y  $T_m$ ). El agua salada del tanque  $T_s$  baja por gravedad al tanque  $T_m$  donde se mezclan y simultáneamente es bombeada al tanque experimental  $T_e$ ; el llenado es desde la parte inferior del tanque.

un refractómetro y con esta medición pude calcular la densidad del agua muestreada. Podemos ver en la Figura 6 un ejemplo del perfil de densidad medido en el tanque experimental.

Utilicé dos refractómetros (denominados  $R1$  y  $R2$ ), estos aparatos pueden medir la concentración de diferentes sustancias.  $R1$  tiene una resolución de  $0.1 \text{ g}/100\text{g}$  y un rango de  $0-10$  y  $R2$  tiene una resolución de  $0.2 \text{ g}/100\text{g}$  y un rango de  $0-28$ . Para todos los experimentos utilicé el mismo tipo de sal refinada (cloruro de sodio al  $99.99\%$ ). Lo primero fue calibrar los refractómetros con el agua y sal utilizada. En un litro de agua disolví diferentes cantidades de sal y medí su concentración con una muestra de esta solución. Con esta información obtuve las ecuaciones que relacionan la lectura de los dos refractómetros utilizados ( $A$ ) con la concentración de sal del fluido ( $C \text{ g l}^{-1}$ ); estas son las siguientes:  $C = 11.23A$  y  $C = 11.71A$ ; respectivamente para  $R1$  y  $R2$ .

Al conocer la concentración de sal con la lectura del refractómetro, calculé la densi-

dad  $D$  ( $\text{gcm}^{-3}$ ) de la muestra. Con datos reportados por West (1981) para agua salina obtuve la siguiente ecuación:  $D = (C + 1425)/1425$ .

Una vez concluido este procedimiento, con el tanque lleno y estratificado linealmente, pude generar el flujo como describo en la siguiente sección.

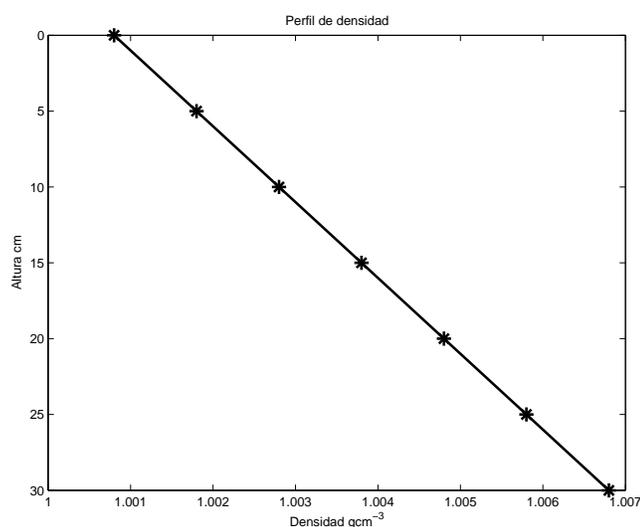


Figura 6: Perfil de densidad medido con el refractómetro en el tanque experimental. Cada lectura es a 5 cm en la vertical (la superficie del agua es en  $z=0$ ).

### II.1.3 Generación del flujo con el arranque instantáneo de un cilindro

En el tanque experimental existe un sistema poleas-motor que sujeta al cilindro y lo pone en movimiento al embobinarse los hilos. El sistema es regulado por un control de velocidad con autotransformado para un motor universal con reductor. Este dispositivo sirve para poder variar la velocidad del encarretado del hilo y en consecuencia la velocidad de movimiento del objeto.

Para medir la velocidad del cilindro utilicé un cronómetro para registrar el tiempo

necesario para que recorriera una distancia de 15 a 20 cm de carrera. Después de varias mediciones calculé el promedio de las velocidades calculadas y utilicé ese valor para caracterizar la velocidad del cilindro (vea el Apéndice 1).

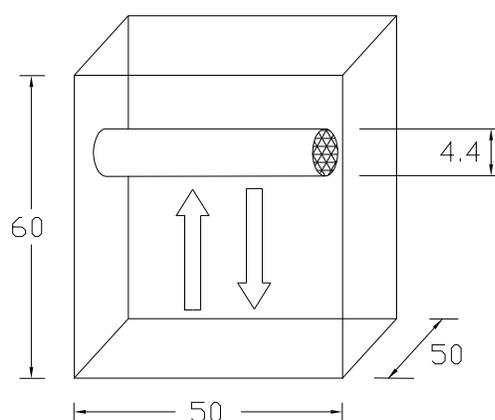


Figura 7: Esquema del tanque experimental y sus dimensiones en centímetros. El cilindro tiene un diámetro de 4.4 cm y su eje en la horizontal; su translación es en dirección vertical (de abajo hacia arriba y viceversa).

El cilindro horizontal es de acrílico y su diámetro es de 4.4 cm, como vemos en la Figura 7, y su translación es en dirección vertical. El desplazamiento cumple una carrera promedio de 30 cm. Al mismo tiempo que accioné el motor, el cilindro comienza a moverse y la cámara colocada frente al tanque (conectada a la computadora) empezó a fotografiar e hizo un registro de la imagen capturada cada décima de segundo. Esta vasta información recopilada permite visualizar el flujo.

Es posible obtener la distancia real entre dos puntos cualquiera en estas imágenes al saber la cantidad de pixeles existentes entre ellos y multiplicarlas por un factor; este factor es la razón entre el valor de una distancia real o de referencia y el número de pixeles contenidos en esta distancia; y considero un pixel cuadrado. El cálculo del error

de la medición está en el Apéndice 2.

## II.2 Parámetros del problema

En los puntos anteriores mostré las condiciones para realizar cada experimento. Con ello podemos diferenciar los parámetros involucrados. Dadas las condiciones en el diseño experimental, los parámetros inamovibles son: el diámetro del cilindro  $D$  y la geometría del tanque experimental. Considero constante a la viscosidad  $\nu = 1.1 \times 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ , pues la variación máxima de la viscosidad entre las masas de agua es el cinco por ciento de  $\nu$  (si considero una concentración mínima de NaCl de  $1 \text{gl}^{-1}$  y máxima de  $30 \text{gl}^{-1}$ ; ya que  $\nu$  varía debido a que la concentración salina incrementa con la profundidad). Los parámetros variables son la velocidad de movimiento del cilindro  $U$  y la frecuencia de Brunt-Väisälä  $N^2$ . Con lo anterior se pueden calcular los números adimensionales que caracterizan al flujo con el teorema de Buckingham.

### II.2.1 Análisis dimensional

Los parámetros relevantes para el problema son la viscosidad del agua, la frecuencia de Brunt-Väisälä, el diámetro y la velocidad del cilindro. Las dimensiones del tanque experimental ancho  $A$  y largo  $W$  no son parámetros relevantes: por considerar que la razón  $D/A \ll 1$  y es un flujo bidimensional, pues se considera el flujo generado por el arranque instantáneo del cilindro; no existe una estela de vórtices intermitente ni el desarrollo de los modos inestables (elíptico e hiperbólico) citados por Leweke y Williamson (1998) y Thompson *et al.* (2001). La matriz de dimensiones para el problema es

	$\nu$	D	U	N
$M$	0	0	0	0
$L$	2	1	1	0
$T$	-1	0	-1	-1

donde  $M$  es la masa,  $L$  es la longitud y  $T$  tiempo. El número de variables es 4 y el rango de la matriz es 2, por lo cual hay  $4 - 2 = 2$  variables adimensionales, estas son:  $Fr = U/ND$  y  $Re = UD/\nu$ .

Así, los dos números adimensionales que caracterizan el flujo son el número de Reynolds  $Re$  y el número de Froude  $Fr$ , las cuales fueron definidas en el capítulo anterior.

En la dinámica de fluidos, el estudio de los flujos debido al movimiento de cuerpos rígidos inmersos en un fluido es un problema recurrente (en la formación de estelas y vórtices, por ejemplo). Estos estudios pueden ser experimentales o mediante simulaciones numéricas, lo cual permite variar parámetros tales como la geometría, velocidad y recorrido del obstáculo. No obstante, el flujo generado en fluidos estratificados es diferente al de fluidos homogéneos, enseguida veremos por qué.

La ecuación de Navier Stokes sirve para modelar el movimiento de los fluidos. Para los flujos en un fluido con densidad constante la ecuación es:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla P - \rho\bar{g} + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad (1)$$

En general, la presión de un fluido en movimiento puede descomponerse en

$$P(x, y, z, t) = P_0(z) + P'(x, y, z, t) \quad (2)$$

donde  $P_0$  es la presión hidrostática y  $P'$  es la anomalía de presión debida al movimiento.

Al sustituir en la ecuación anterior queda

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla P_0 - \nabla P' - \rho \bar{g} + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad (3)$$

El balance hidrostático esta dado por:  $\rho \bar{g} = -\nabla P_0$ . Entonces, la ecuación puede ser reescrita como

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla P' + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad (4)$$

En la ecuación desaparece la gravedad. Consecuentemente, también desaparece su efecto en la dirección vertical. Si sumerjo un objeto con la misma densidad del fluido y lo muevo en cualquier dirección (vertical, horizontal o cual sea), el flujo será el mismo.

Sin embargo, para los flujos en fluidos estratificados ocurre algo diferente. Para este caso la densidad no es constante en las ecuaciones y es definida como

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (5)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de referencia en el estado en reposo y  $\rho'$  es la perturbación debida al movimiento. Reescribo la ecuación de Navier Stokes, entonces

$$(\rho_0 + \rho') \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla P' - \rho' \bar{g} + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad (6)$$

dado que  $\rho_0 \bar{g} = -\nabla P_0$  están en balance perfecto por el balance hidrostático en reposo (vea Paterson (1989)). En esta ecuación existe el efecto de la gravedad. El segundo término del lado derecho es el que da origen a las fuerzas de flotación, lo cual implica la relevancia de la orientación del flujo en el resultado. Si un objeto con densidad  $\rho$ , que permanece en reposo, lo movemos sobre el plano horizontal en cualquier dirección obtenemos un flujo equivalente. Pero, es diferente si el movimiento es en dirección vertical. Además, el flujo generado de abajo hacia arriba como de arriba hacia abajo es el mismo. Enseguida expongo esta proposición.

Si en una altura dada  $z$ , tomo una parcela de fluido con una densidad  $\rho(z)$  y la traslado a una altura superior en  $z + h$ , ésta sufrirá una fuerza descendente de  $g[\rho(z + h) - \rho(z)]V$ , donde  $V$  es el volumen de fluido,  $g$  es la gravedad y  $h$  la distancia de traslado. Si en lugar de llevar la parcela a una altura superior fuera a una inferior (en  $z - h$ ), sufrirá una fuerza ascendente de  $g[\rho(z - h) - \rho(z)]V$ . Con la segunda ley de Newton puedo escribir para ambos casos:

$$-\rho(z)V \frac{d^2h}{dt^2} = g[\rho(z + h) - \rho(z)]V \quad (7)$$

$$+\rho(z)V \frac{d^2h}{dt^2} = g[\rho(z - h) - \rho(z)]V \quad (8)$$

Por series de Taylor (al considerar  $h$  pequeña)

$$\rho(z + h) = \rho(z) + \frac{d\rho}{dz}h \quad (9)$$

$$\rho(z - h) = \rho(z) - \frac{d\rho}{dz}h \quad (10)$$

Con lo anterior y la aproximación de Boussinesq, al considerar que la perturbación  $\rho'$  es muy pequeña comparada con  $\rho_0$ , las ecuaciones quedan

$$-\rho_0V \frac{d^2h}{dt^2} = g \frac{d\rho}{dz}hV \quad (11)$$

$$+\rho_0V \frac{d^2h}{dt^2} = -g \left( \frac{d\rho}{dz} \right) hV \quad (12)$$

En el tanque experimental  $d\rho/dz < 0$ , por lo que finalmente se obtiene:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz} h = 0 \quad (13)$$

La última ecuación es la de un oscilador armónico; entonces, para ambos casos, las parcelas de fluido sufren una fuerza (ya sea hacia arriba o abajo) de igual magnitud sólo que de sentido opuesto y oscilan con la frecuencia de Brunt-Väisälä, definida como  $N^2 = -g\rho_0^{-1}\partial\rho/\partial z$ ; y es una medida de la estratificación (vea por ejemplo, Turner (1977)).

## II.3 Visualización

El cilindro en movimiento produce una perturbación en el medio y los cambios en la densidad no son visibles a simple vista. Para visualizar las heterogeneidades en un medio transparente (como el aire, el agua y el vidrio) existen varias técnicas; el lector interesado en ellas puede consultar el trabajo de Settles (2001). A continuación describo brevemente algunas de ellas.

La técnica del schlieren de Toepler o un schlieren clásico utiliza luces, el objeto de estudio, lentes o espejos, filtros, y otros componentes; todos ellos pueden estar colocados en forma alineada o en un arreglo tipo  $Z$  y utilizar espejos parabólicos; el montaje debe ser preciso y el presupuesto de todo el equipo varía debido a la calidad, tamaño y forma de los espejos y lentes. Hoy en día, existen equipos especiales para realizar este tipo de visualización en el mercado. Una manera más sencilla pero de menor calidad comparada al realizar un schlieren clásico, es ver la discontinuidad o la distorsión de un fondo que revela el objeto de estudio situado delante de él. Otra técnica es el schlieren de Moiré, ésta utiliza dos mallas con líneas paralelas, la primera representa el fluido en un estado sin perturbar y la segunda cuando sufre alteración. La superposición de las dos mallas puede revelar un flujo. Sin embargo el resultado es de poca calidad pues son visibles las líneas de las mallas. El schlieren sintético es una adaptación de la técnica del schlieren de Moiré, con la ventaja que al realizarlo las mallas de fondo no son visibles, sólo el flujo. Y la técnica que ocupa un sencillo montaje y ningún dispositivo complejo es la sombragrafía. Por la facilidad y ventajas utilicé las últimas técnicas. Estas proporcionan información de las fluctuaciones de los gradientes de densidad en medios no homogéneos. Ambas están basadas en la relación existente entre el gradiente de densidad y el gradiente del índice de refracción de la luz  $n$ . Empero, aunque sus

principios sean los mismos, una sombragrafía y un schlieren sintético tienen diferencias sustanciales.

### II.3.1 Sombragrafía

Una sombragrafía es literalmente el dibujo de una sombra, esta proyección brinda información cualitativa de los gradientes de densidad. Es sencillo obtenerla y para el montaje experimental solamente necesitamos una fuente de luz, el objeto experimental (en este caso el flujo generado) y una pantalla donde sea visible la sombra, como muestra la Figura 8.

Cuando aun no está perturbado el medio, la fuente de luz colocada a una distancia  $h$  de la pantalla ilumina uniformemente la pantalla. Pero cuando existe el objeto experimental (cuando hay la perturbación) es posible ver en la superficie iluminada las inhomogeneidades del medio. Esto es debido a que algunos rayos de luz sufren refracción; y quedan desviados de su camino original por un ángulo  $\varepsilon$ . Por lo anterior, cuando el rayo llega a la pantalla o papel opaco está desplazado a una distancia  $\Delta a$  respecto de su punto de llegada original. Hay un gradiente en el ángulo de deflexión  $\partial\varepsilon/\partial x$  y  $\partial\varepsilon/\partial z$ , el cual provoca un aumento de luminosidad en el punto de llegada y un déficit en el punto original. La modificación en la iluminación solo ocurre en la sombragrafía cuando hay un cambio -o gradiente- en el gradiente del índice de refracción, es decir, cuando  $\partial^2 n/\partial x^2$  o  $\partial^2 n/\partial z^2$  son diferentes de cero. Al hacer una sombragrafía debe considerarse que una sombra no representa el tamaño natural del objeto. No obstante, puede favorecer el arreglo experimental al tener una diferencia mínima de tamaño respecto al original. En la Figura 9, el objeto proyecta una sombra con dimensión  $d'$  y es posible calcular el aumento de tamaño  $m$  del objeto con la simple

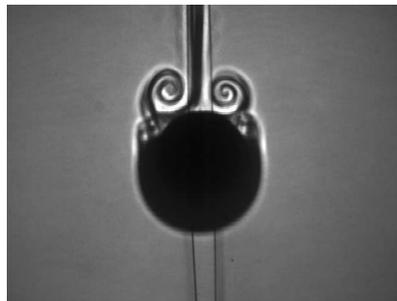
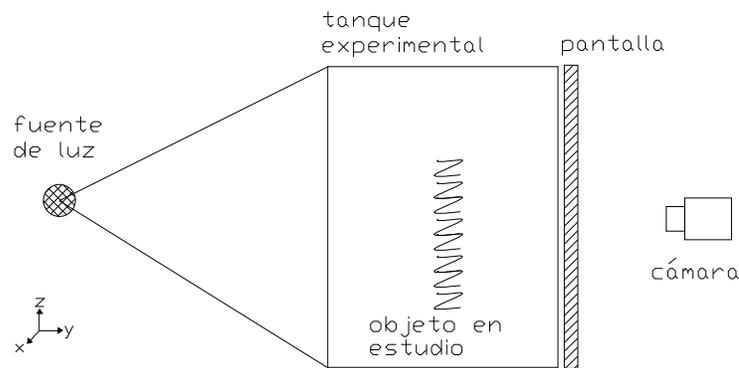


Figura 8: El arreglo experimental (*arriba*) necesita una fuente de luz que ilumine al objeto experimental y una pantalla opaca. La sombra proyectada en la pantalla (*abajo*) es resultado del desvío de los rayos de luz el cual provoca un aumento o déficit de luminosidad en los puntos de llegada.

expresión  $m = h/(h - s)$ , donde  $h$  es la distancia entre la fuente de luz y la pantalla y  $s$  es la distancia entre el objeto de estudio y la pantalla, (vea Settles (2001)). En los experimentos aquí analizados observamos el resultado integrado del flujo, es decir, la imagen captada es la proyección del flujo en un plano perpendicular al eje del cilindro. Por ello, en las sombragrafías existe un incremento del 23% en promedio en el tamaño de las sombras.

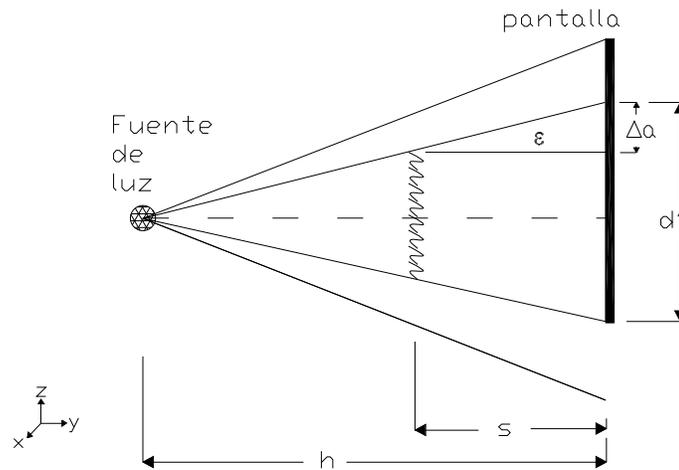


Figura 9: Esquema de una sombragrafía. La sombra proyectada en la pantalla no es del tamaño natural del objeto de estudio, pues es resultado del desvío a un ángulo  $\varepsilon$  de los rayos de luz refractados (a una distancia  $\Delta a$ ). La distancia entre la fuente de luz y la pantalla es  $h$  y la distancia entre el objeto de estudio y la pantalla es  $s$ .

### II.3.2 Schlieren sintético

El schlieren sintético es una herramienta de visualización que ocupa un trazador no intrusivo: el mismo fluido; además, utiliza tecnología de procesamiento de imágenes, es simple y permite obtener información cuantitativa del campo de densidad en flujos.

El montaje a utilizar, ilustrado en la Figura 10, consta de una fuente de luz, la pantalla o malla de fondo, el objeto de estudio y una cámara. La malla de fondo utilizada es sin más la proyección de puntos de una diapositiva. Un schlieren sintético es el resultado de la diferencia entre dos exposiciones: una en un estado base (en el tiempo  $t = 0$ ) y otra en un estado perturbado (en  $t = t_0$ ). La resta de las dos fotografías permite ver la distribución del trazador porque existe un cambio en los puntos de malla de fondo en la imagen de  $t = t_0$  (de ahí la importancia en escoger una malla adecuada). Entonces, podemos visualizar el flujo al tener la secuencia de algunos schlieren sintéticos

en tiempos consecutivos.

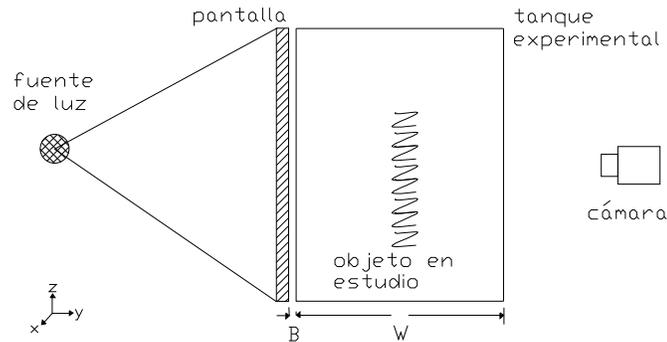


Figura 10: Esquema del arreglo experimental del schlieren sintético. Es necesaria una fuente de luz y una malla de fondo en la pantalla (la proyección de una diapositiva hace la malla de fondo), el objeto de estudio y una cámara que capture imágenes a diferentes tiempos en la pantalla.

El schlieren sintético está basado en el schlieren clásico. El montaje experimental que vemos en Figura 11 del schlieren clásico requiere equipo técnicamente complejo y costoso, como espejos parabólicos y lentes (vea por ejemplo, Dalziel *et al.* (2000)). A diferencia del schlieren clásico, el schlieren sintético es económico y fácil de implementar (p. ej. las mallas de fondo pueden adaptarse a diferentes espacios de pequeño y gran formato). También, si existen imperfecciones ópticas (como falta de contraste en las imágenes), es posible hacer correcciones digitales.

La malla de fondo puede ser de líneas o puntos. El uso de líneas permite la visualización de las fluctuaciones en la dirección perpendicular a ellas, es decir, si utilizo líneas horizontales puedo visualizar  $\partial\rho'/\partial z$  (es insensible a la  $\partial\rho'/\partial x$ ). Aquí sólo usé malla de puntos para poder distinguir las fluctuaciones horizontales y verticales. Para escoger las características de la malla, debemos considerar que si usamos pocos puntos

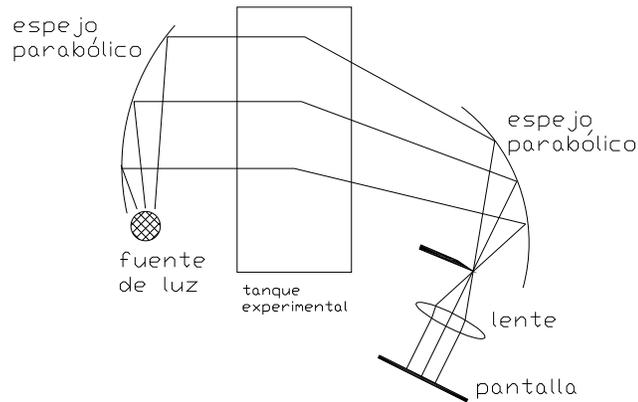


Figura 11: Esquema del arreglo experimental del schlieren clásico. EL objeto de estudio o también llamado *schlieren* está en el tanque experimental. El montaje consta de espejos parabólicos y una lente que reflejan los rayos de luz en una pantalla. Existen arreglos experimentales con otro número de lentes o espejos para hacer un schlieren clásico.

no habrán datos suficientes para poder visualizar el objeto de estudio; en cambio, si utilizamos demasiados puntos generalmente incrementa los resultados erróneos al analizar las imágenes (este análisis está descrito en la Sección II.4.2). Además, es preferible usar una malla regular pues facilita la definición en las operaciones de los algoritmos. Finalmente, una propiedad más de los puntos es que no deben ser demasiado finos pues no serían distinguibles ante la turbidez del agua en las imágenes capturadas.

Cada pixel representa una coordenada espacial dentro de la imagen y tiene un valor de intensidad de luz monocromática. Convencionalmente los niveles de intensidad son 0 para el negro (intensidad nula) y 255 para el blanco (intensidad máxima). La imagen es representada entonces como una matriz de números que constituyen el resultado de la digitalización. Conocida la intensidad de cada pixel  $P_{ij}$  en la fotografía del estado base y en la de un estado perturbado, la resta  $P_{ij}(t) - P_{ij;0}$  da como resultado el schlieren sintético (visible en la Figura 12).

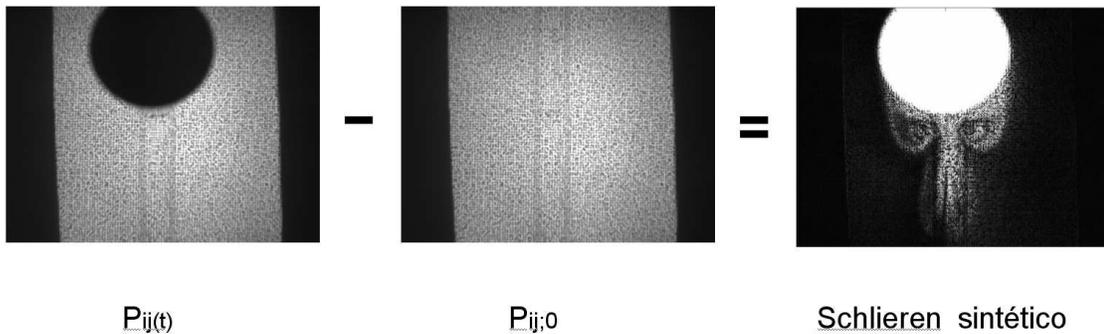


Figura 12: Ejemplo de la cuantificación de luz de una imagen digital, cada pixel tiene un valor en la escala de luz monocromática de 0 (negro) a 255 (blanco). Cada imagen se representa como una matriz de números, sólo hay que restar las matrices de dos imágenes dadas (una en  $t=0$  y otra en  $t = t_0$ ) y obtenemos un schlieren sintético que muestra el movimiento del fluido.

### II.3.3 Diferencias entre el schlieren sintético y la sombragrafía

Las técnicas de visualización descritas son sencillas y muy útiles para obtener información en el laboratorio. Ambas son adecuadas para visualizar fenómenos en dos dimensiones; pues las dos usan una pantalla plana para representar la deflexión de los rayos de luz.

La sombragrafía provee información cualitativa y el schlieren sintético tanto cualitativa como cuantitativa. La sombragrafía muestra el desplazamiento del rayo refractado y el schlieren la deflexión de los haces de luz. Una sombragrafía responde a la segunda derivada espacial del índice de refracción  $\partial^2 n / \partial x^2$ ; y el schlieren sintético responde a la primera derivada  $\partial n / \partial x$ . No obstante, la sombragrafía tiene la ventaja de ser simple, directa y no necesita elementos delicados (como espejos y lentes), solamente luz y una superficie para proyectarse; en cambio el schlieren sintético necesita una computadora y una cámara para lograr visualizar el objeto de estudio.

La sombragrafía tiene una menor sensibilidad (en general) que el schlieren sintético (éste puede mostrar detalles donde la sombragrafía no lo hace). La menor sensibilidad

en la sombografía es porque tiene un cambio de escala considerable al no colocar bien la fuente de luz; también, tiene la desventaja de no proyectar una sombra nítida si el objeto de estudio está alejado de la pantalla -hasta llegar al punto de no visualizarse-; y porque los rayos de luz se sobreponen, cruzan e interceptan antes de formar la sombra en la pantalla pueden formarse “cáusticas” (zonas iluminadas o no) que muestran información errónea del objeto de estudio.

## II.4 Análisis digital de las imágenes

### II.4.1 Bases ópticas del schlieren sintético

El principio para obtener un schlieren es la relación existente entre las fluctuaciones de la densidad y el índice de refracción de la luz. Estas fluctuaciones provocan el movimiento aparente de la malla de fondo en la imagen (cuando el fluido está perturbado) en dirección horizontal ( $x$ ) y vertical ( $z$ ). Para el arreglo mostrado en la Figura 10, este movimiento está dado por las siguientes ecuaciones.

$$\Delta\xi = \frac{1}{2}W(W + 2B)\frac{1}{n_0}\frac{\partial n'}{\partial x} \quad (14)$$

$$\Delta\zeta = \frac{1}{2}W(W + 2B)\frac{1}{n_0}\frac{\partial n'}{\partial z} \quad (15)$$

donde  $W$  es el largo del tanque experimental y  $B$  la distancia entre la pantalla y la pared del tanque (Figura 10).

Los rayos de luz tienen siempre una componente en la dirección  $y$ ; los cambios en los gradientes de  $n$  están dados en el plano  $xz$ . Los desplazamientos  $\Delta\xi$  son a lo ancho del tanque y  $\Delta\zeta$  en dirección vertical. La variación del índice de refracción causada por el flujo en estudio es  $n'$  y el valor característico del fluido es  $n_0$  (por ejemplo,  $n_0$  del agua es 1.3332). Vea el apéndice 3.

West (1981) encontró que la relación entre el índice de refracción y la densidad del agua salada es aproximadamente lineal (citado por Dalziel *et al.* (2000)):

$$\nabla n = \frac{dn}{d\rho} \nabla \rho = \beta \frac{n_0}{\rho_0} \nabla \rho \quad (16)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de referencia ( $1000 \text{ kgm}^{-3}$ ) y  $\beta = 0.184$ . Al sustituir las ecuaciones antes mencionadas en las ecuaciones 14 y 15, resultan las ecuaciones 17 y 18 que relacionan las fluctuaciones de la densidad y el aparente movimiento de la malla de fondo.

$$\Delta \xi = \frac{1}{2} W(W + 2B) \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} \quad (17)$$

$$\Delta \zeta = \frac{1}{2} W(W + 2B) \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial z} \quad (18)$$

## II.4.2 Mapas de densidad

Sabemos que para obtener la información cuantitativa del campo de densidad es necesario calcular los desplazamientos  $\Delta \xi$  y  $\Delta \zeta$ . Entonces, analicé las imágenes con una variante de la Velocimetría de un Patrón Reconocido (*PMV*, por sus siglas en inglés). Es una técnica no intrusiva y correlaciona dos imágenes: una en estado base (en el tiempo  $t = 0$ ) y la segunda en estado perturbado (en  $t = t_0$ ). Primero, seleccioné un área adyacente al cilindro donde existe el flujo en ambas fotografías, después, un algoritmo hecho en Matlab lee cada pixel de la sección de la imagen y localiza los mínimos locales de luz, es decir, los puntos de malla, correlaciona las imágenes y calcula el desplazamiento de los puntos. La distancia entre los puntos definidos en la malla de fondo es  $\sim 4$  pixeles en  $t = 0$ ; por lo anterior, el algoritmo permite un movimiento máximo de 3 pixeles a los puntos. Así, cuando los puntos cambian de posición, es posible diferenciar el movimiento de cada uno. Sin lo anterior y cuando existe una malla con demasiados puntos sería difícil obtener desplazamientos certeros. La separación de la cámara

al tanque para los diferentes experimentos fue regularmente de 40 cm; por lo cual, la separación de los puntos en la malla es de aproximadamente 0.1 cm.

La salida del algoritmo anterior muestra el vector de desplazamiento de los puntos. Puede ser que algún vector no siga el patrón marcado por los vectores contiguos, (es decir, cambie de sentido o tenga un tamaño diferente). Por ello, hice una depuración de dicha salida con un nuevo algoritmo; solo seleccioné el vector y éste fue eliminado o cambió de sentido (transformó  $[x, y]$  en  $[-x, -y]$ ). Finalmente, hice una interpolación lineal de los vectores de desplazamiento en una malla regular. La resolución de la malla es de 0.1 cm.

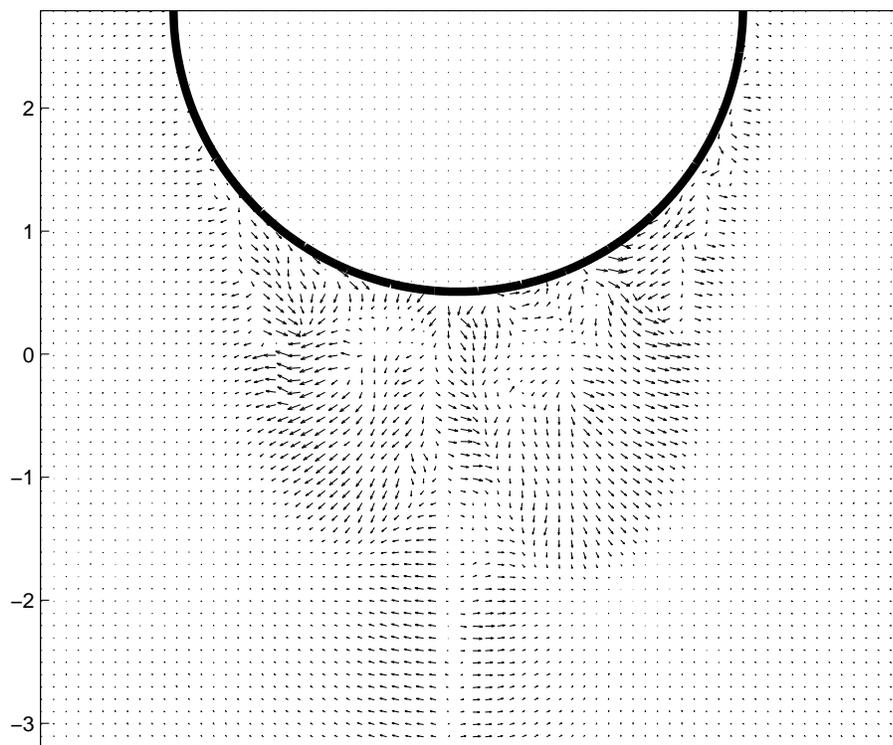


Figura 13: Ejemplo de salida del algoritmo que calcula el desplazamiento de los puntos de malla de fondo. El movimiento del cilindro es ascendente y la imagen representa una región adyacente al cilindro. Al centro es visible la estela y en la parte superior dos vórtices.

Ya calculados los desplazamientos de los puntos (mostrados en la Figura 13), lo

restante para calcular las fluctuaciones de densidad es resolver las ecuaciones 17 y 18 para el dominio seleccionado. Considero constante

$$R = \frac{1}{2}W(W + 2B)\frac{\beta}{\rho_0}$$

donde,  $B = 0$  y  $W = 0.5$  m (por el montaje experimental utilizado); discretizo las ecuaciones y obtengo:

$$\Delta\xi = R\frac{\rho'_{i+1} - \rho'_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (19)$$

$$\Delta\zeta = R\frac{\rho'_{j+1} - \rho'_j}{z_{j+1} - z_j} \quad (20)$$

entonces, un algoritmo resuelve las ecuaciones anteriores reescritas como:

$$\rho'_{i+1} = \frac{\Delta\xi(x_{i+1} - x_i)}{R} + \rho'_i \quad (21)$$

$$\rho'_{j+1} = \frac{\zeta(z_{j+1} - z_j)}{R} + \rho'_j \quad (22)$$

Como los vectores de desplazamiento  $\Delta\xi$  y  $\Delta\zeta$  están en una malla regular, entonces la diferencia  $(x_{i+1} - x_i)$  es igual a 0.1 y es igual a  $(z_{j+1} - z_j)$ , denominados  $\Delta x$  y  $\Delta z$  respectivamente y  $R = 2.3 \times 10^{-5}$ . Con estos valores obtuve  $\rho'_{i+1}$  y  $\rho'_{j+1}$  de las ecuaciones anteriores.

Primeramente, escogí un punto  $\theta$  lejano al cilindro y consideré que la fluctuación de densidad en ese punto es cero. Después, encontré los valores del dominio horizontal ( $\rho'_{i+1}$ ) a partir de  $\theta$  y resolví desde  $i = 1$  hasta  $m$  (donde  $m$  es el ancho de mi dominio dividido entre  $\Delta x$ ). Por último, hice un barrido en la vertical, es decir, calculé ( $\rho'_{j+1}$ ) desde  $j = 1$  hasta  $n$  (donde  $n$  es el alto de mi dominio dividido entre  $\Delta z$ ). Y con ello obtuve las fluctuaciones de densidad para la región deseada. Para validar estos resultados hice un mapa base o sintético el cual representa las fluctuaciones de densidad originadas por dos remolinos (con la suma de tres exponenciales), mantuve constantes

los valores de  $R$ ,  $\Delta x$  y  $\Delta z$  antes mencionados y calculé los desplazamientos  $\Delta\xi$  y  $\Delta\zeta$ . Con estos valores obtuve  $\rho'_{i+1}$  y  $\rho'_{j+1}$  con el algoritmo previamente descrito y los comparé con las fluctuaciones del mapa base. Los resultados fueron satisfactorios. De igual manera al resolver las ecuaciones planteadas en un sentido horizontal. Otro camino para obtener los valores de la fluctuación es calcular la divergencia de las ecuaciones 17 y 18 y obtener la ecuación de Poisson. Resolví ésta numéricamente con la condición de frontera  $\rho' = 0$  en las orillas. Los resultados no fueron satisfactorios porque no es conocido el valor de  $\rho'$  en la frontera.

Obtenemos el mapa de densidad del fluido al sumar  $\rho_0(z) + \rho'(x, z)$ ,  $\rho_0(z)$  es conocida en todo el tirante de agua desde el momento de llenado del tanque experimental y el mapa de  $\rho'(x, z)$  está dado para cierta región en diferentes tiempos.

# III

## Resultados

Con la información obtenida al utilizar las técnicas de visualización de sombragrafía y schlieren sintético, exploré el comportamiento del flujo en el espacio de parámetros ( $Re, Fr$ ). Presento a continuación las mediciones, cálculos y las características cualitativas y cuantitativas del flujo (en un fluido homogéneo y estratificado), además de una discusión de los resultados.

### III.1 Flujo producido por el arranque instantáneo de un cilindro en un fluido homogéneo

El tanque experimental contuvo agua dulce para los experimentos en un fluido homogéneo. Por ello, no utilicé las técnicas de visualización antes mencionadas (sombragrafía y schlieren sintético). Utilicé tinta como trazador la cual tiene una densidad ligeramente mayor al agua dulce; esto no afecta el resultado experimental, ya que utilizo una cantidad mínima de tinta comparada con el volumen de agua. Coloqué la tinta en la superficie del agua cuando el cilindro estaba en la parte superior. Así cuando

bajó el objeto llevó consigo el trazador. La Figura 14 muestra el flujo generado por el movimiento del cilindro. Una desventaja al utilizar tinta es que en algunas ocasiones solo es visible parte del remolino, esto debido a la cantidad insuficiente de colorante utilizado o capturado por los vórtices. Además, después de realizar algunos experimentos el agua del tanque experimental queda sucia, por lo que la visualización es más difícil.

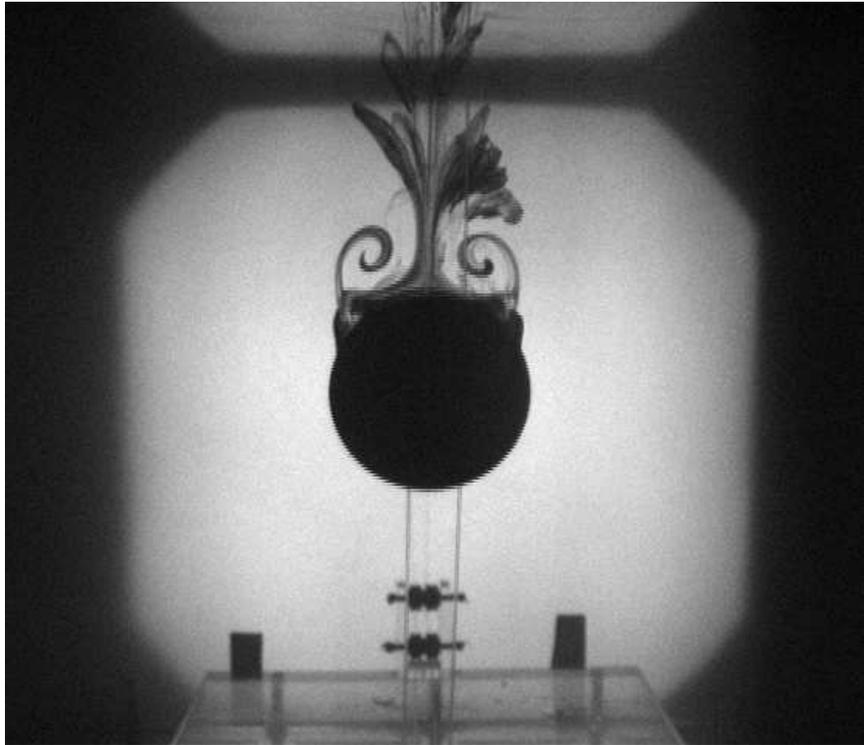


Figura 14: Ejemplo del experimento hecho en fluido homogéneo (agua dulce). Son visibles los remolinos detrás del cilindro con el uso de tinta como trazador ( $Re = 1480$ ). El movimiento del cilindro es descendente.

Experimenté para diferentes números de Reynolds y registré el flujo con una serie de fotografías capturadas cada segundo. Para comparar con lo reportado por Bouard y Countanceau (1980) obtuve la distancia entre el centro de los remolinos y centro del cilindro ( $X_{max}$ ) para un tiempo adimensional  $t = t_*U/D$ , donde  $t_*$  es el tiempo transcurrido desde que inicia el movimiento del cilindro. La Figura 15 muestra los

resultados. Con  $Re$  variable, obtuve datos similares a los reportados por Bouard y Coutanceau (al hacer una interpolación lineal); sólo en el experimento  $Re = 1000$ , el valor  $X_{max}/D$  tuvo un valor menor (de 8%) al citado.

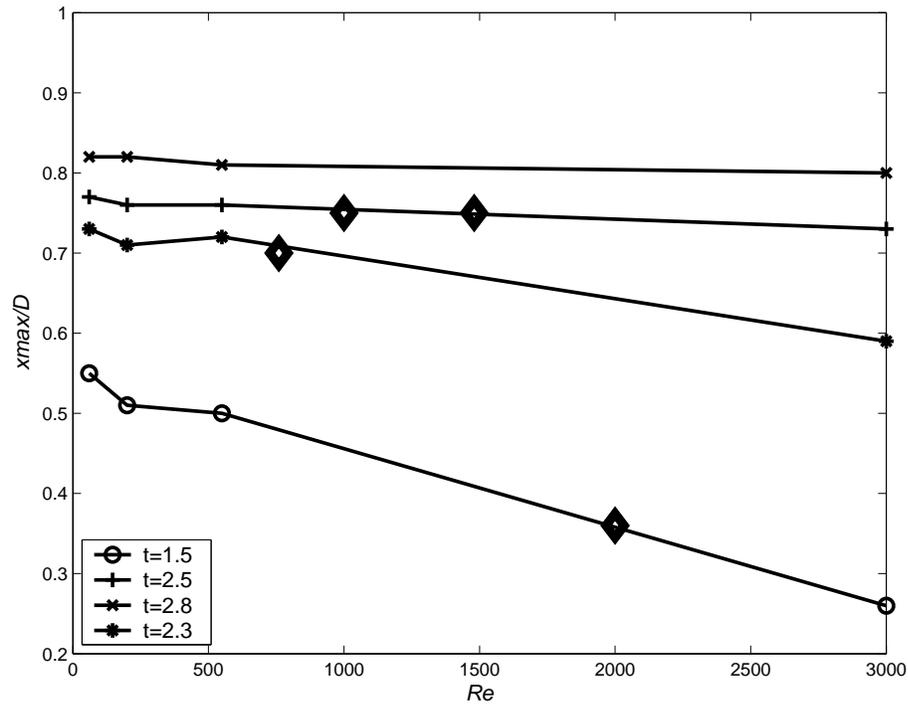


Figura 15: Datos reportados por Bouard y Contanceau (1980) ( $\times, +, *, \circ$ ) para diferentes números de Reynolds; los datos experimentales obtenidos en rombos. Cada línea representa un tiempo adimensional ( $t = t * U/D$ ).

## III.2 Exploración de parámetros con información obtenida con sombragrafías en un fluido estratificado

Hice diferentes experimentos al combinar los números Reynolds y de Froude. Los rangos utilizados fueron  $760 < Re < 2000$  y  $0.4 < Fr < 5$  (también utilicé  $Fr = \infty$  para el

caso homogéneo). Las observaciones revelan dos tipos de flujos: con y sin remolinos. La Figura 16 resume todos los experimentos. El eje de las ordenadas representa el inverso del número de Froude; cuando  $1/Fr = 0$  el fluido es homogéneo y valores altos indica estratificaciones intensas. Los triángulos representan los experimentos donde no es posible ver remolinos a lo largo de la carrera hecha por el cilindro. Los encontramos en dos zonas, cuando es mínima la velocidad del cilindro ( $Re$  mínimo experimental) y cuando la estratificación es fuerte ( $1/Fr > 1$ ). Los cuadros representan los experimentos donde son visibles remolinos. Vemos que estos ocurren en un rango de números de Reynolds de medios a altos en combinación con estratificaciones de moderadas a leves ( $1/Fr \leq 1$ ).

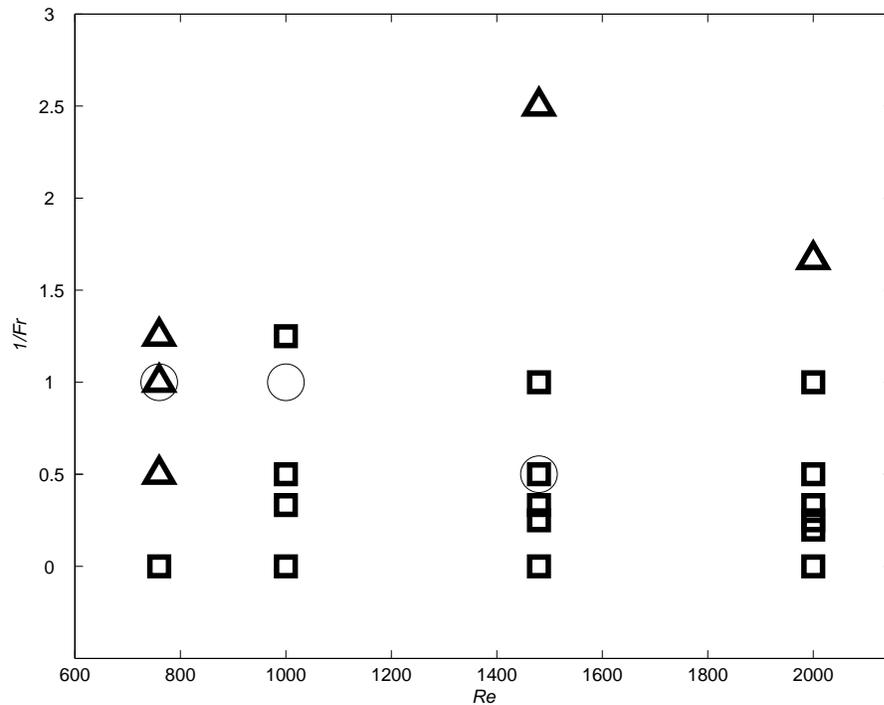


Figura 16: Tipo de comportamiento en el espacio de parámetros  $(Re, 1/Fr)$ . Muestra en triángulo los experimentos donde no son visibles los remolinos a diferencia de los cuadros donde si lo son. Los círculos representan experimentos hechos con la técnica de schlieren sintético (Sección II.3.2). Cuando  $1/Fr = 0$  el fluido es homogéneo.

### III.2.1 Perímetros

De los experimentos marcados con un cuadrado -donde son visibles los remolinos- obtuve sus características geométricas y su posición respecto al cilindro.

Delineé el contorno envolvente de los vórtices y visualicé el área total ocupada por los remolinos. Los experimentos fueron con diferentes números de Froude y con números de Reynolds de 2000, 1480 y 1000 (Figura 17).

Para los experimentos con números de Reynolds de 2000 y 1480 el área de los remolinos crece conforme aumenta el número de Froude, es decir, son de mayor tamaño en estratificaciones bajas. Los experimentos hechos con  $Re = 1000$  no tienen esta característica; las líneas envolventes no muestran un orden.

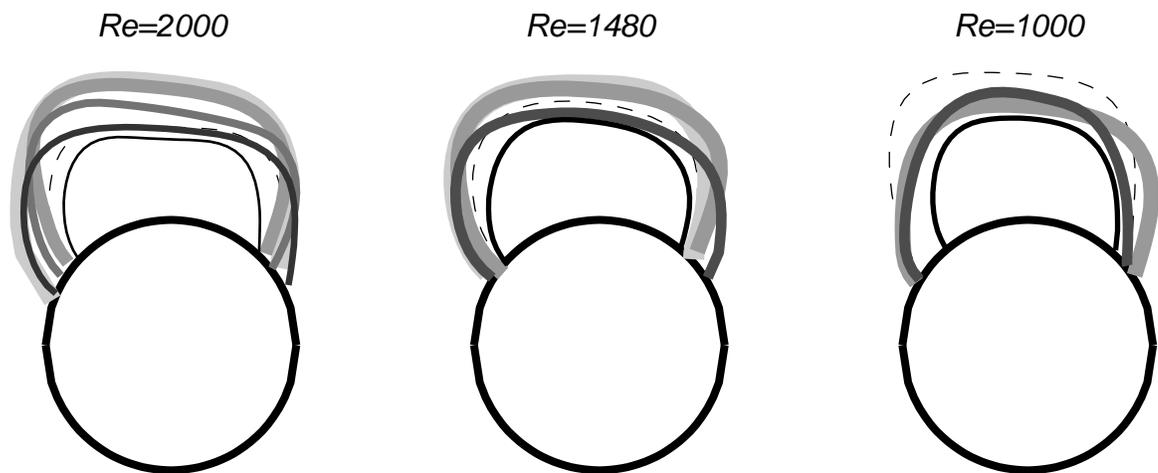


Figura 17: Contornos envolventes para diferentes números de Reynolds, de izquierda a derecha  $Re = 2000$ ,  $Re = 1480$  y  $Re = 1000$ . El grosor de la línea indica la magnitud de la estratificación, los contornos delgados y oscuros corresponden a estratificaciones más fuertes que los gruesos y claros. La línea punteada es el perímetro de los remolinos en un fluido homogéneo.

### III.2.2 Posición de los remolinos

Para  $Re = 1000$  la distancia ( $a$ ) entre los remolinos y el cilindro disminuye al aumentar la estratificación, es decir, conforme crece  $1/Fr$ . Pero para  $Re = 1480$  y  $Re = 2000$ , el valor de  $a/D$  varía y llega a un valor máximo en  $1/Fr = 0.5$  y  $1/Fr = 0.3$  respectivamente. Como vemos en la Figura 18, en los tres casos, la separación  $a$  disminuye para estratificaciones fuertes y cuando  $Fr = 1$  tiene un valor aproximado de 0.16.

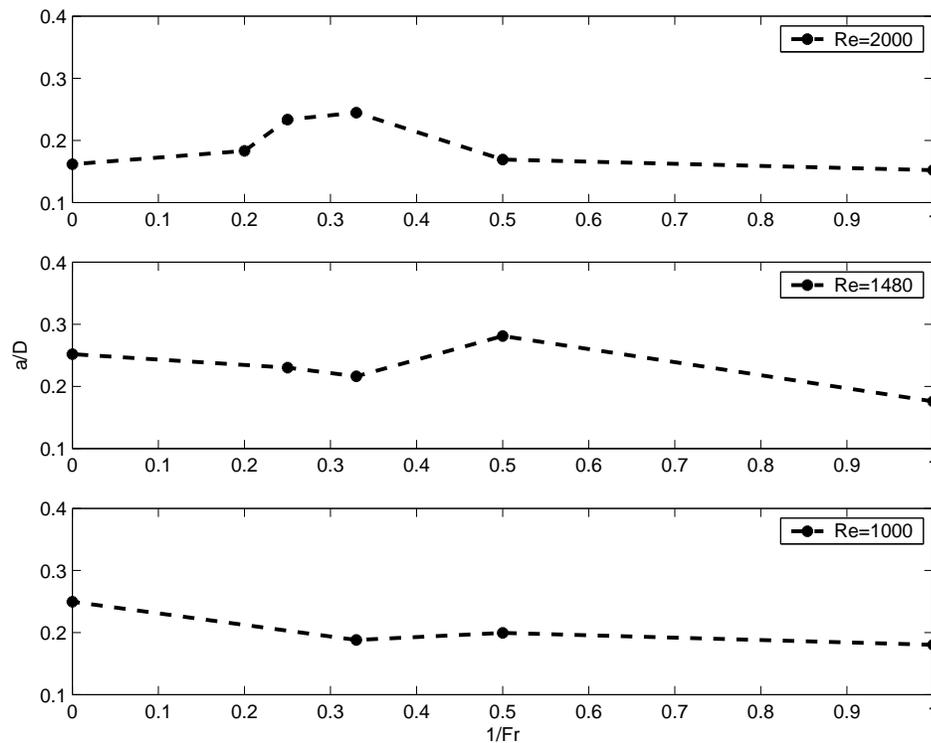


Figura 18: Distancia adimensional entre los remolinos y el cilindro ( $a/D$ ) en función de la estratificación para tres valores del número de Reynolds. Cuando  $1/Fr = 0$  el fluido es homogéneo.

La distancia ( $b$ ) entre los centros de los remolinos tiene un comportamiento similar. La Figura 19 muestra que conforme aumenta la estratificación (aumenta  $1/Fr$ ) disminuye la distancia entre los centros. Para el caso  $Re = 1480$  podemos observar un valor máximo cuando  $1/Fr = 0.3$  y luego decrece  $b/D$ . Cuando  $Fr = 1$  el valor de esta

distancia disminuye conforme decrece el número de Reynolds.

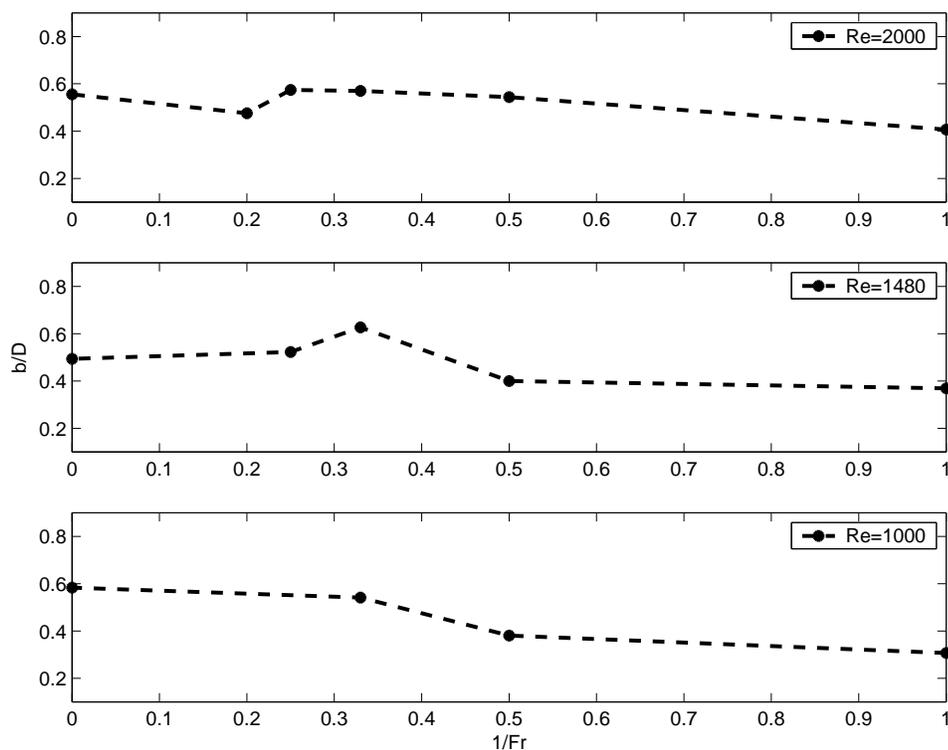


Figura 19: Distancia adimensional entre los centros de los remolinos ( $b/D$ ) en función de la estratificación para tres valores del número de Reynolds. Cuando  $1/Fr = 0$  el fluido es homogéneo.

Para  $Re = 1480$  y  $Re = 1000$  en  $1/Fr = 0.3$ , la relación  $a/b$  tiene el mismo valor, dentro del margen de error; pero, en otros puntos no coincide ni existe un patrón de comportamiento en los tres casos al variar el número de Froude.

### III.2.3 Etapas de la evolución del flujo

En las sombragrafías mostradas en la Figura 20 son visibles los cambios de los remolinos en el tiempo. Esta evolución la divido en cuatro etapas (elegidas porque fácilmente son distinguibles en las imágenes): 1) cuando sucede la separación de la hoja de vorticidad (inicialmente visibles los remolinos); 2) la formación del remolino (ya formados

los vórtices tienen fronteras bien delineadas); 3) cuando los remolinos son inestables (las fronteras sufren deformación como ondulaciones y pierden su forma); y 4) cuando desaparecen los remolinos (no hay estructura de vórtices). La siguiente tabla resume los tiempos para experimentos hechos con  $Re = 2000$  y  $Re = 1480$  para diferentes estratificaciones ( $Fr = 1, 2, 3$ ).

Tabla I: Evolución para los experimentos hechos con la combinación de los números adimensionales  $Re$  y  $Fr$ . Los tiempos son desde que inicia el movimiento el cilindro y están en segundos. (\*) Durante el tiempo total de carrera no alcanzaron a destruirse los remolinos.

	Fr	Separación de la hoja de vorticidad	Formación del remolino	Decaimiento total de los remolinos
$Re = 2000$	Fr=1	$1.7 \pm 0.1$	$2.3 \pm 0.1$	$3.7 \pm 0.2$
	Fr=2	$1.6 \pm 0.1$	$2.4 \pm 0.1$	$4.8 \pm 0.1$
	Fr=3	$1.9 \pm 0.1$	$2.7 \pm 0.1$	$5.5 \pm 0.3$
$Re = 1000$	Fr=1	$3.6 \pm 0.3$	$4.5 \pm 0.3$	$6.4 \pm 0.4$
	Fr=2	$3.6 \pm 0.4$	$5.2 \pm 0.1$	$9.3 \pm 0.1$
	Fr=3	$3 \pm 0.3$	$5 \pm 0.1$	$> 10^*$

### III.2.4 Discusión de los resultados obtenidos con sombragrafía

La visualización con sombragrafía proporciona información cualitativa de los remolinos. Las observaciones experimentales muestran que cuando en el flujo las fuerzas inerciales son moderadas ( $Re < 1000$ ) los remolinos sólo se forman si la estratificación es muy débil o inexistente ( $Fr > 2$ ); en cambio, cuando las fuerzas inerciales son dominantes ( $Re > 1000$ ) en la estela del cilindro se forman dos remolinos de signos contrarios, a menos que la estratificación sea muy fuerte ( $Fr < 0.7$ ). Aquí la intensidad de la estratificación no es suficiente para impedir la formación de vorticidad; solamente disminuye el tamaño de los vórtices.

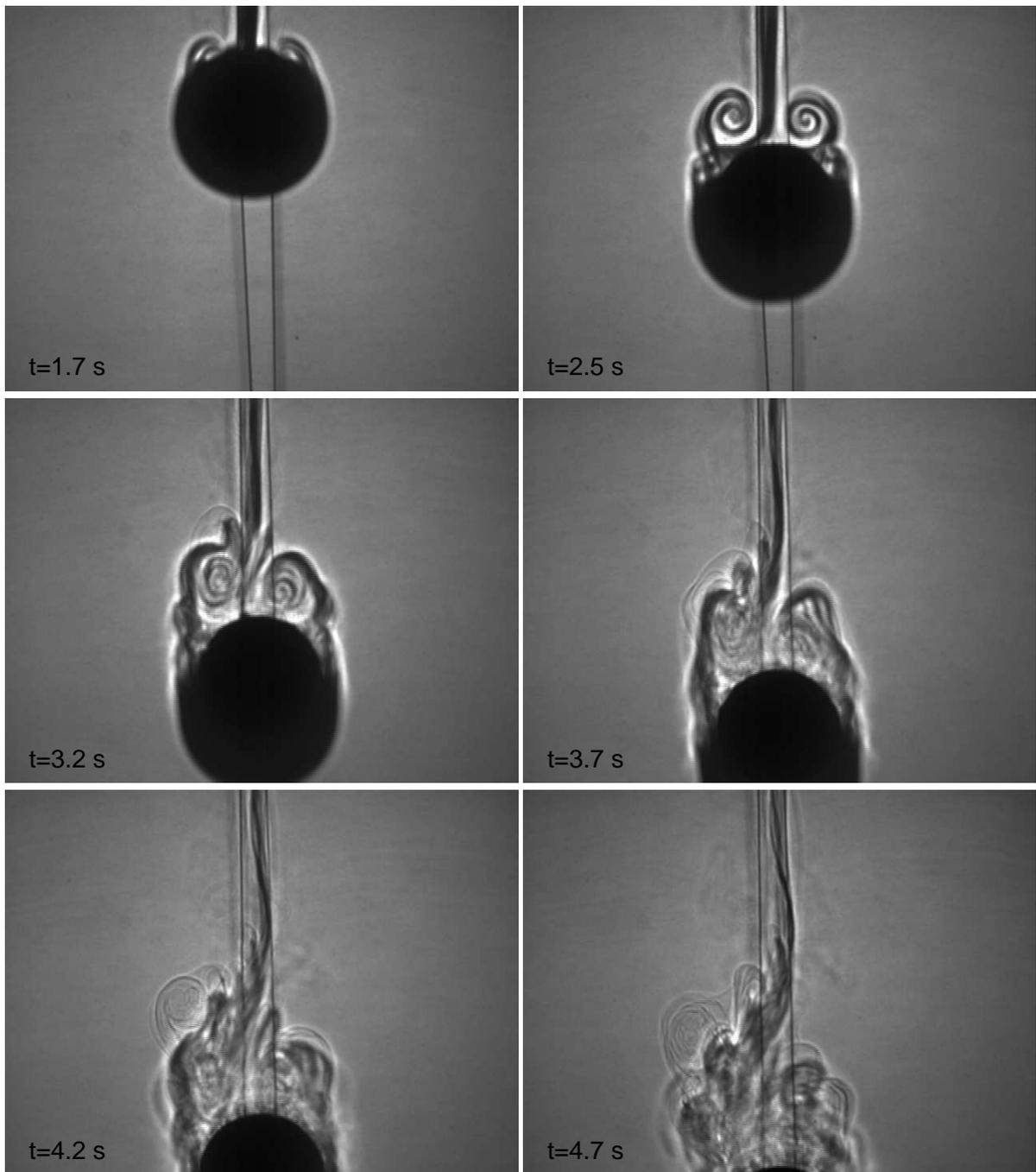


Figura 20: Secuencia de sombragrafías en el tiempo para un experimento con  $Re = 2000$  y  $Fr = 2$ . El movimiento del cilindro es descendente. La primer imagen ( $t = 1.71$  s) muestra la separación de la hoja de vorticidad; para un  $t = 2.5$  s vemos los vórtices formados; y el decaimiento de los remolinos es visible cuando  $t = 4.7$  s.

La estratificación inhibe la formación de los remolinos; los perímetros de los vórtices muestran cómo disminuye el tamaño de los vórtices al intensificarse la estratificación, es decir, cuando el número de Froude tiene valores menores. Este resultado también fue obtenido con simulaciones numéricas por Torres (1997) para el caso de una esfera y por Nomura *et al.* (2006) para una estela de vórtices detrás del cilindro.

Las separaciones entre el centro de los remolinos y de los vórtices al cilindro no tiene un patrón para el rango de números de Reynolds analizados; pero con estratificaciones de moderadas a fuertes ( $Fr < 3$ ) las distancias decrecen para todos los casos.

Una comparación de la evolución de los experimentos con  $Re = 2000$  y  $Re = 1000$  muestra lo siguiente: para un número de Reynolds fijo, en fluidos más estratificados los vórtices aparecen más rápidamente y su duración es más corta; y para un número de Froude fijo, para número de Reynolds mayores los vórtices se forman antes que para número de Reynolds menores.

En los experimentos no observé ondas internas. Mowbray y Rarity (1967) reportan que cuando  $U/ND > 0.9$  estas ondas no son visibles (para una esfera con un diámetro  $D$  y con velocidad  $U$ ). Para los experimentos que presento, el valor mínimo de  $U/ND = 0.9$ . Entonces, los experimentos realizados tienen un parámetro mayor a 0.9, con lo cual, si consideramos válido el resultado de Mowbray y Rarity, podemos corroborar que no hay ondas internas.

### III.3 Resultados obtenidos con schlieren sintético

Con el schlieren sintético visualicé el comportamiento del fluido (como muestra la Figura 21); además, obtuve las fluctuaciones de densidad y los mapas de densidad para diferentes tiempos. Primeramente, calculé el desplazamiento de los puntos de malla de

fondo ( $\Delta\xi$  y  $\Delta\zeta$ ) con el algoritmo descrito en la Sección II.4.2. Por último, el mapa de densidad lo generé al sumar el perfil medido (vea la Sección II.1.2) más su fluctuación antes dicha. A continuación reporto los resultados de tres experimentos: dos realizados con  $Fr = 1$  y  $Re = 1000$  y  $Re = 760$ ; y uno con  $Fr = 2$  y  $Re = 1480$ . En las últimas figuras (de la 22 a la 27) encontramos los mapas de fluctuación de densidad y de los campos completos de densidad para los casos mencionados.

### III.3.1 Fluctuación y mapas de densidad

Las anomalías de densidad para los experimentos realizados tienen un comportamiento similar en la deformación de las isopicnas. En el estado inicial (reposo) las isopicnas son horizontales. En los primeros segundos, después de haber iniciado el movimiento del cilindro, hay una estela al centro. En el mapa de densidad las isopicnas están deformadas y muestran una forma puntiaguda y elevada al centro. En los siguientes segundos, los mapas de anomalía exponen la formación incipiente de los vórtices. Conforme el cilindro sigue su curso las isopicnas ya perturbadas pierden su forma afilada y adquieren formas curvas en la región cercana al cilindro; además, en esta zona las anomalías tienen un valor mayor. Cuando está formado completamente el remolino la anomalía tiene un valor de  $0.17 \text{ kgm}^{-3}$  para  $Re = 760$  y  $Fr = 1$ ; de  $0.35 \text{ kgm}^{-3}$  para  $Re = 1000$  y  $Fr = 1$ ; y de  $0.22 \text{ kgm}^{-3}$  para  $Re = 1480$  y  $Fr = 2$ . En el mapa de densidad, las isopicnas tienen varias sinuosidades en la parte central, intensificadas en la parte cercana al cilindro. Vemos en los mapas de densidad que para una altura, el valor de la densidad disminuye conforme pasa el tiempo.

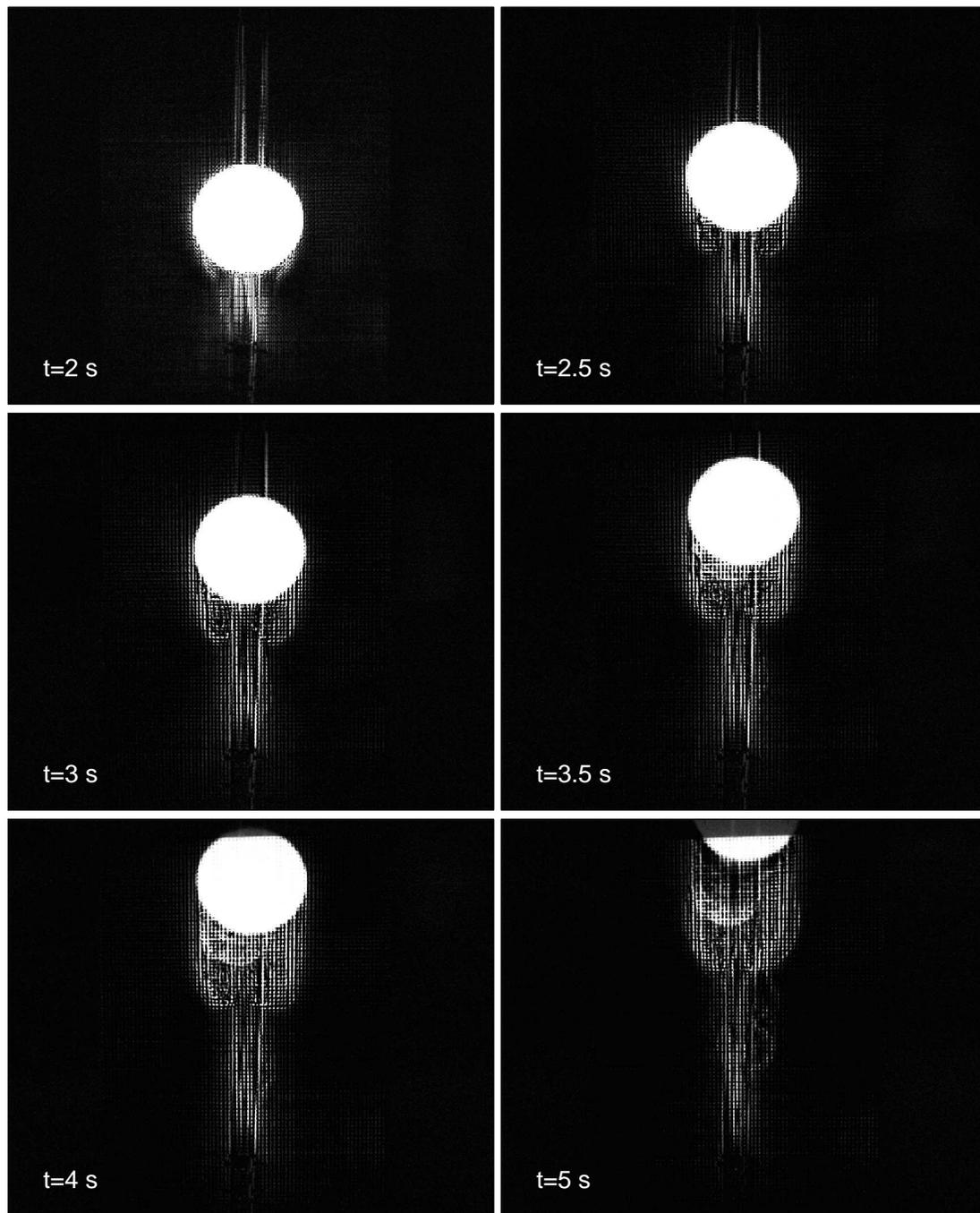


Figura 21: Secuencia de schlieren sintéticos para un  $Re = 1000$  y  $Fr = 1$ ; para un tiempo de 2-5 s. El movimiento del cilindro es ascendente. El tirante de agua es de 40 cm.

### III.3.2 Discusión de los resultados obtenidos con schlieren sintético

Los mapas de anomalía de densidad (Figuras 22, 24 y 26) indican la perturbación de las isopícnas a lo largo de la carrera del cilindro y da una visión global de las estructuras del flujo. Para todos los experimentos es evidente la intrusión de agua en los primeros segundos y las isolíneas delinean una estela vertical al centro. Conforme el cilindro asciende, las líneas de mayor anomalía bordean el obstáculo; y su valor aumenta cuando los remolinos se deforman y hay mezcla hasta el momento en que decaen. El valor inicial de las isopícnas, en los mapas completos de densidad (Figuras 23, 25 y 27) de una altura dada disminuye porque el agua lateral a la estela es menos densa y reemplaza el volumen del cilindro y el fluido transportado por los remolinos; esta variación es menor conforme la velocidad del cilindro disminuye.

Para los experimentos con  $Fr = 1$ , las isolíneas de anomalía de densidad difieren en magnitud para tiempos iguales ya que con números de Reynolds mayores la formación de los vórtices es más temprana; además las líneas muestran que para  $Re = 1000$  el tamaño de los remolinos es mayor. Asimismo, en los campos completos de densidad (Figuras 23 y 27) las isopícnas son más suaves cuando el número de Reynolds es 760 y de lo contrario con el número de Reynolds igual a 1000.

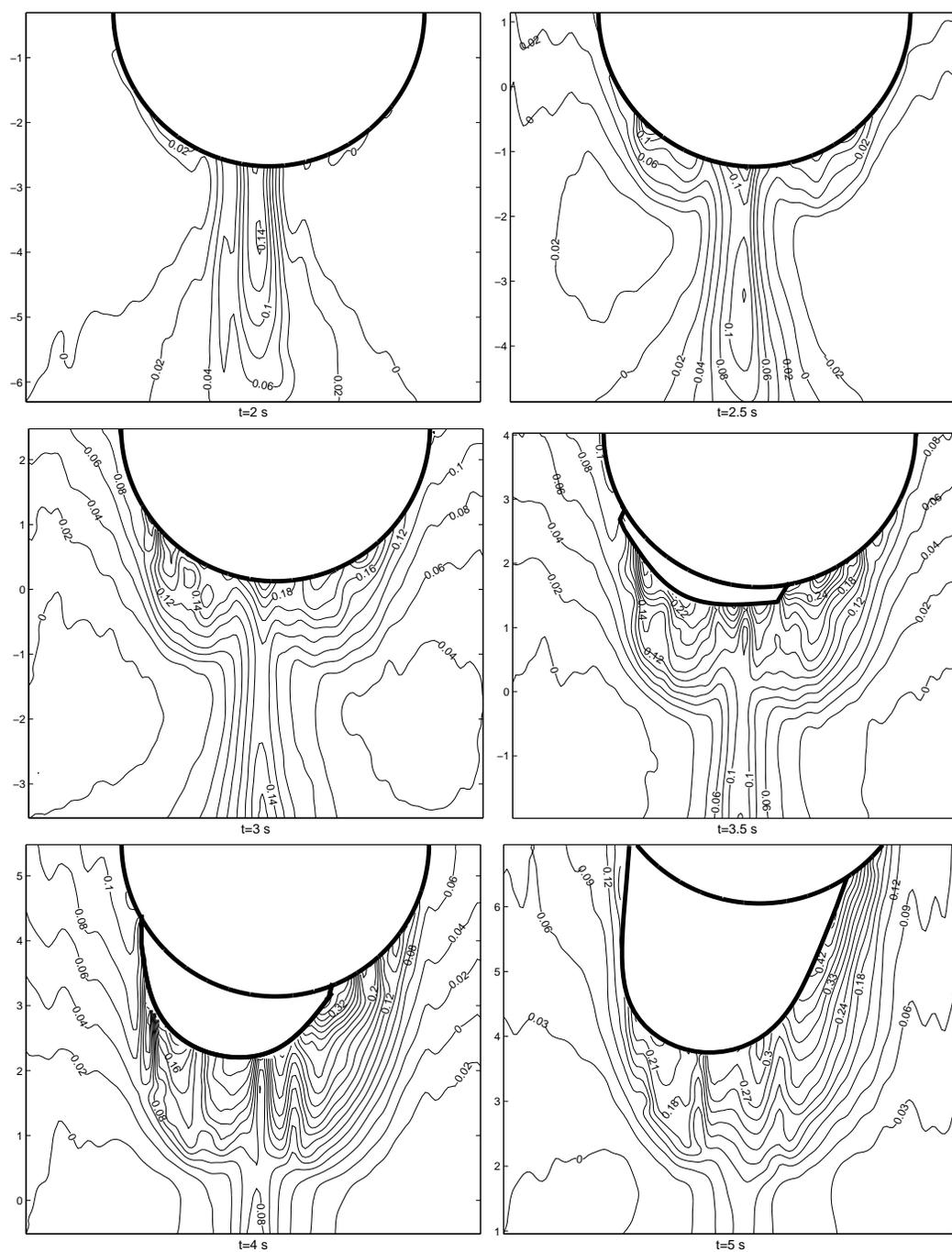


Figura 22: Anomalia de densidad para un  $Re = 1480$  y  $Fr = 2$  para un tiempo de 2-5 s. El movimiento del cilindro es ascendente. El tirante de agua es de 40 cm. El cero en la escala vertical está localizado a 22.25 cm desde el fondo del tanque experimental.

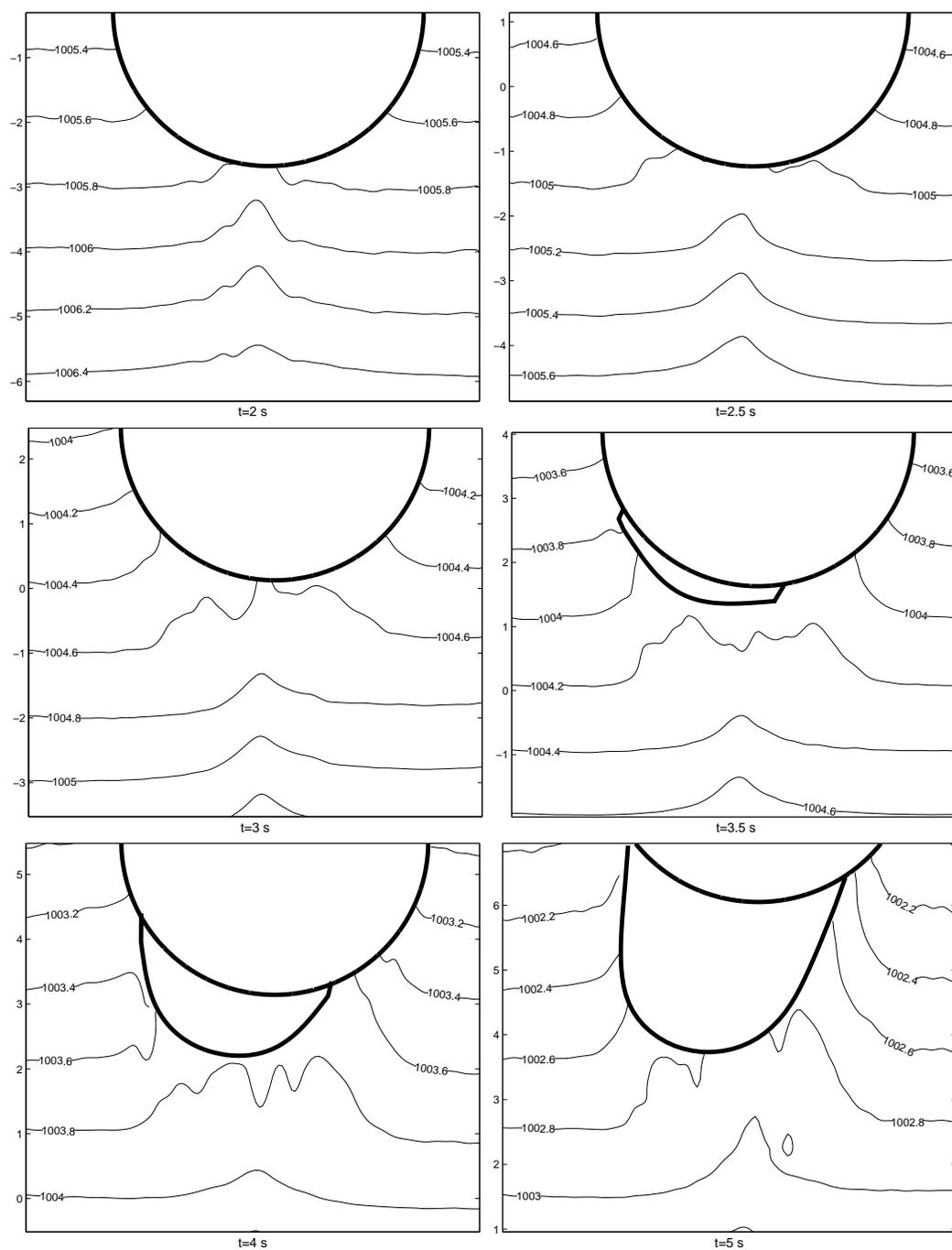


Figura 23: Mapa de densidad para un  $Re = 1480$  y  $Fr = 2$  para un tiempo de 2-5 s. El movimiento del cilindro es ascendente. El tirante de agua es de 40 cm. El cero en la escala vertical está localizado a 22.25 cm desde el fondo del tanque experimental.

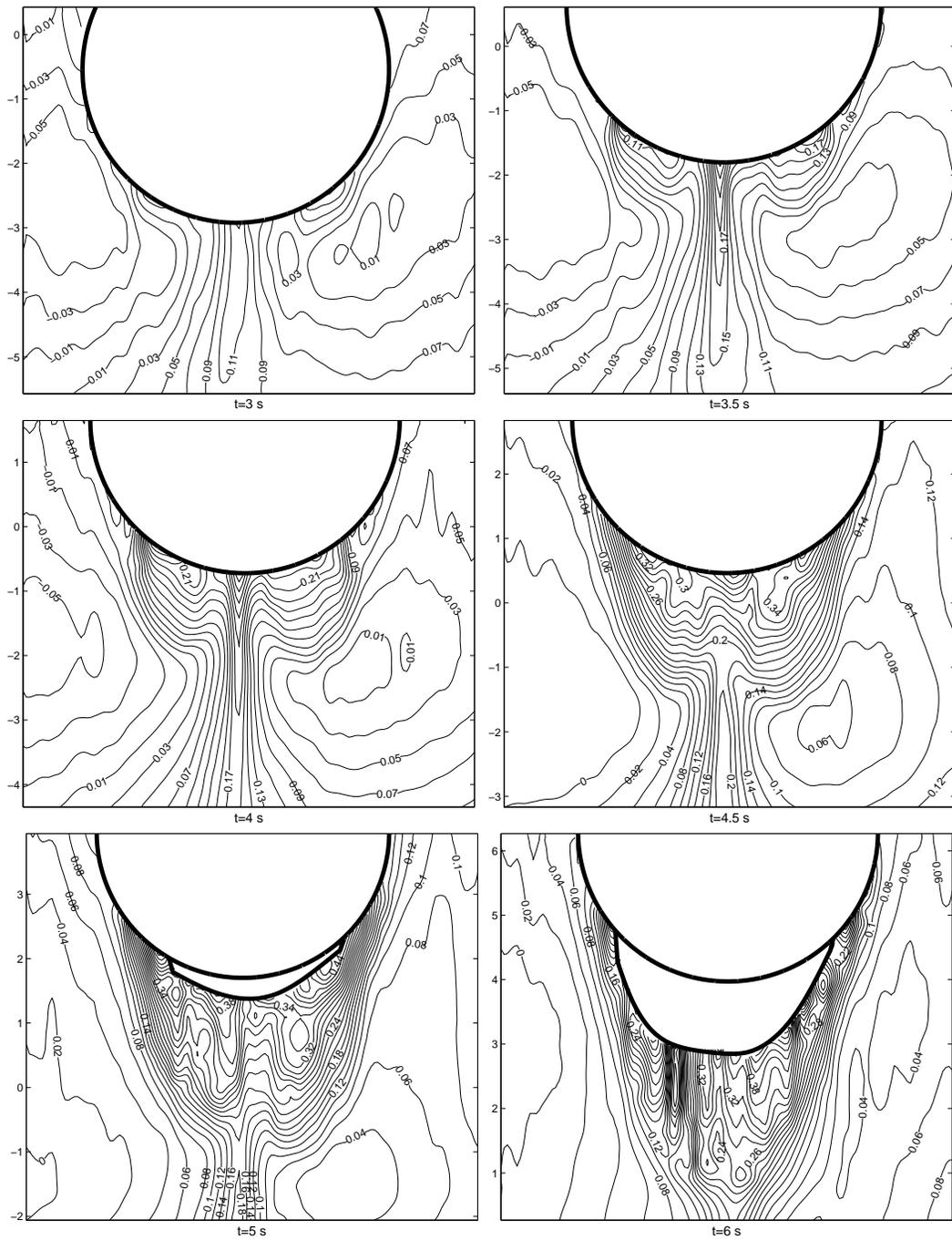


Figura 24: Anomalia de densidad para un  $Re = 1000$  y  $Fr = 1$  para un tiempo de 3-6 s. El movimiento del cilindro es ascendente. El tirante de agua es de 40 cm. El cero en la escala vertical está localizado a 21.55 cm desde el fondo del tanque experimental.

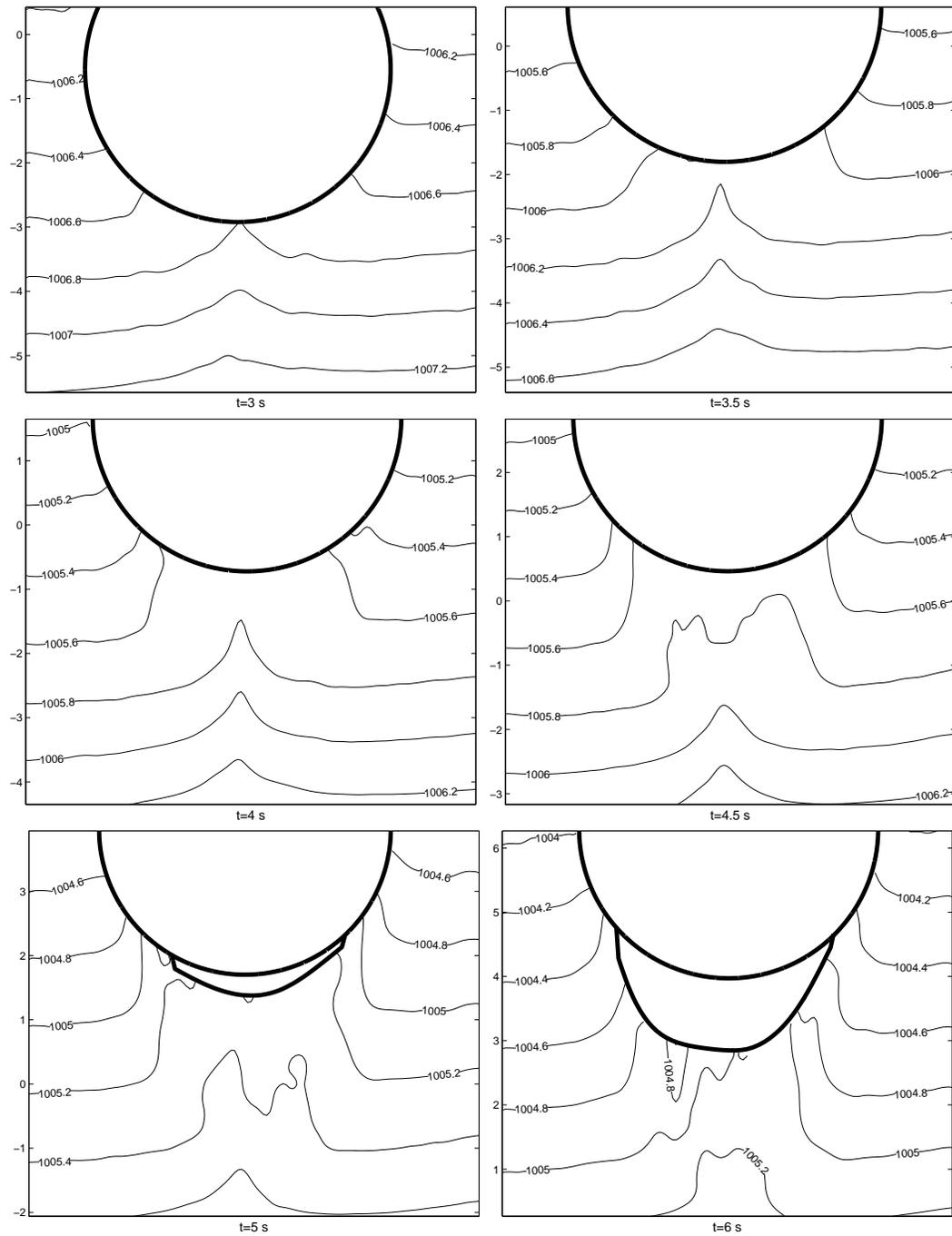


Figura 25: Mapa de densidad para un  $Re = 1000$  y  $Fr = 1$  para un tiempo de 3-6 s. El movimiento del cilindro es ascendente. El tirante de agua es de 40 cm. El cero en la escala vertical está localizado a 21.55 cm desde el fondo del tanque experimental.

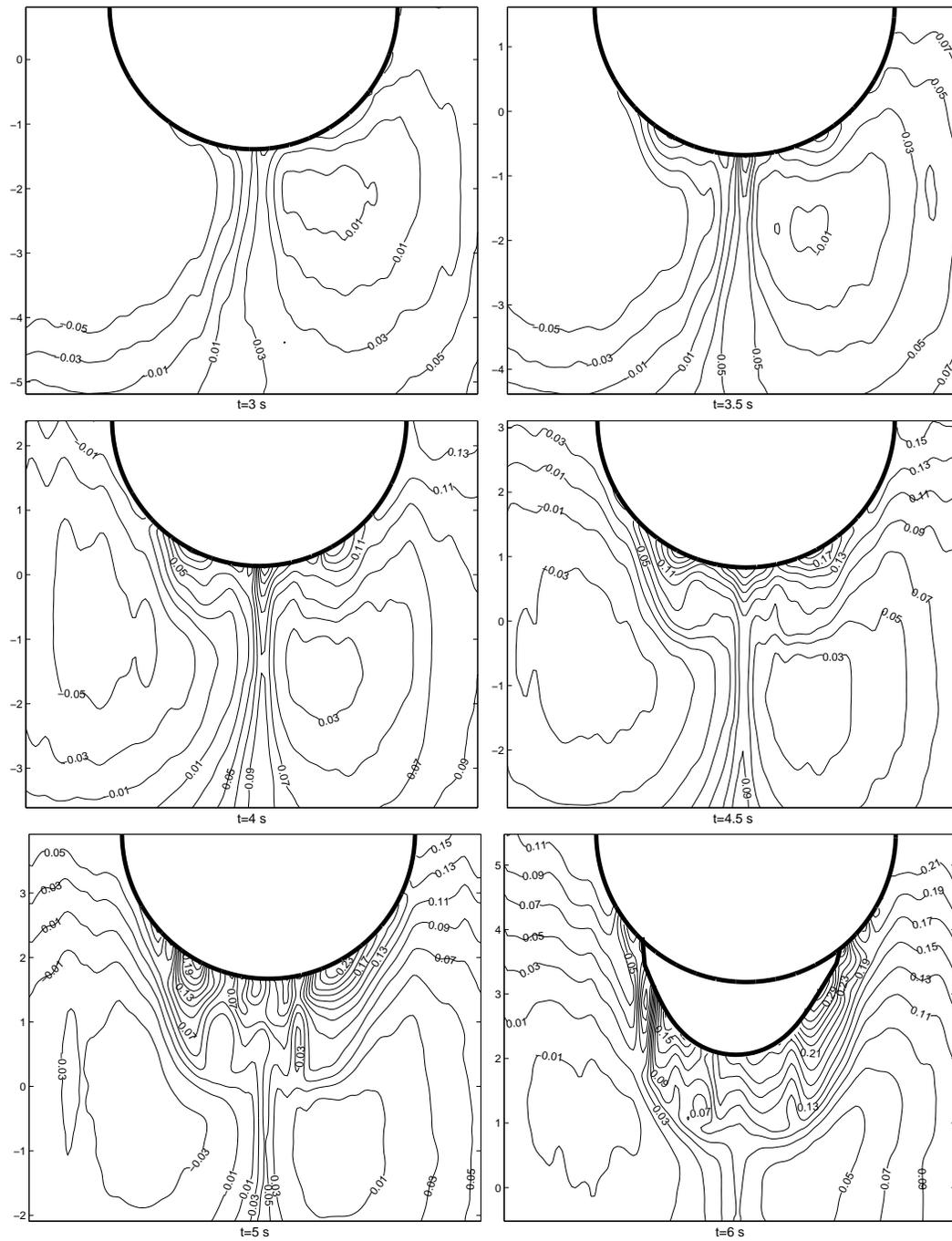


Figura 26: Anomalia de densidad para un  $Re = 760$  y  $Fr = 1$  para un tiempo de 3-6 s. El movimiento del cilindro es ascendente. El tirante de agua es de 40 cm. El cero en la escala vertical está localizado a 21.5 cm desde el fondo del tanque experimental.

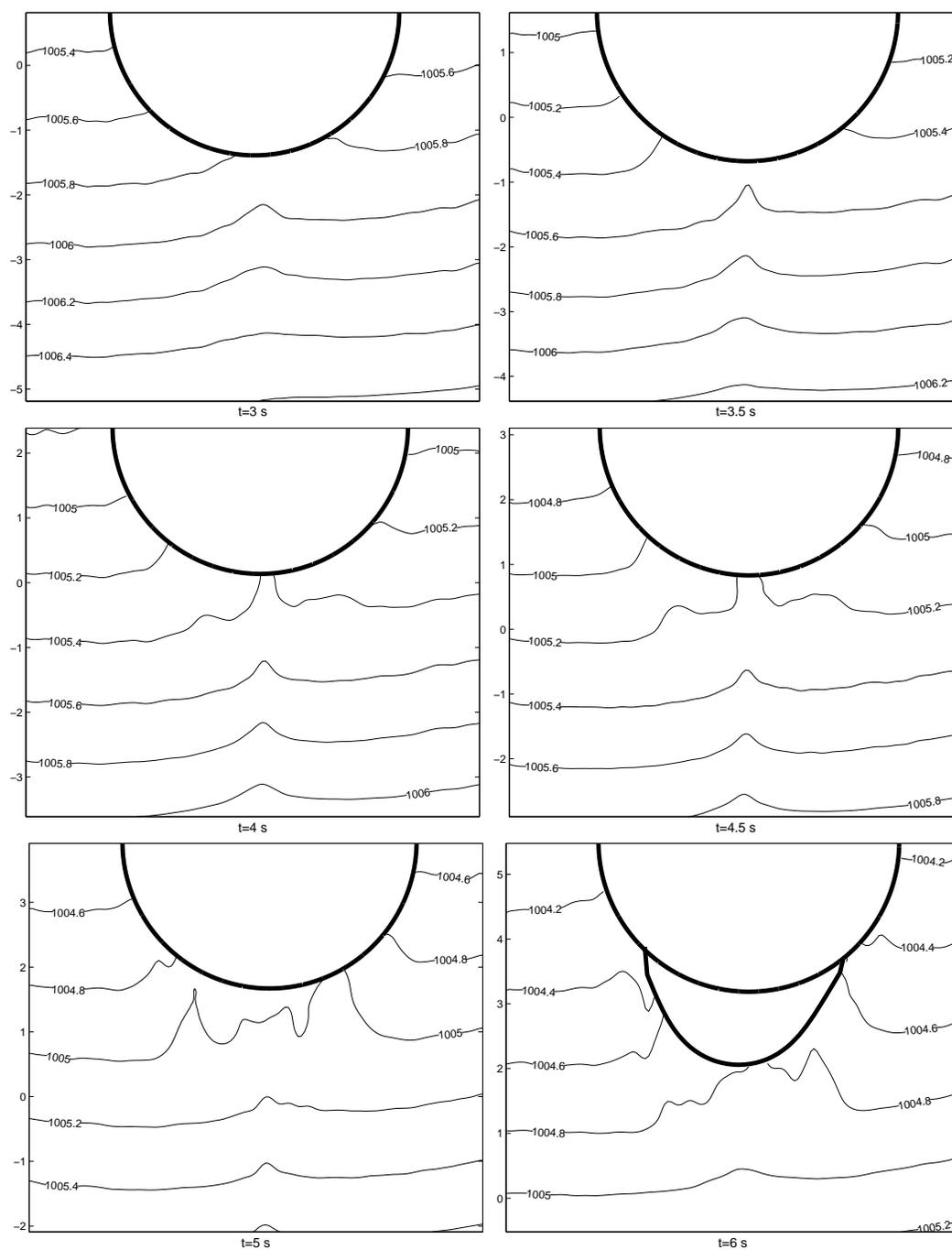


Figura 27: Mapa de densidad para un  $Re = 760$  y  $Fr = 1$  para un tiempo de 3-6 s. El movimiento del cilindro es ascendente. El tirante de agua es de 40 cm. El cero en la escala vertical está localizado a 21.5 cm desde el fondo del tanque experimental.

## IV

# Discusión general y conclusiones

Esta tesis es resultado del estudio experimental del flujo generado por el movimiento vertical de un cilindro horizontal, en un fluido estratificado por una variación lineal en el contenido de sal disuelta.

En el estado inicial de los experimentos la estratificación en el tanque experimental cumple  $d\rho/dz < 0$ , con el cero del eje  $z$  es la superficie del agua. Las parcelas de fluido de igual densidad están acomodadas horizontalmente y cuando el cilindro atraviesa el fluido con una velocidad ( $U$ ) genera un flujo, las parcelas dejan de tener su acomodo inicial, las isopícnas oscilan, adquieren una deformación en la parte central y existe mezcla. Estas perturbaciones y los cambios de densidad no son visibles a simple vista. Por ello, es conveniente utilizar las técnicas de visualización llamadas sombragrafía y el schlieren sintético, ambas proporcionan información de las fluctuaciones de los gradientes de densidad en medios heterogéneos. Estas técnicas tienen un montaje experimental sencillo. La sombragrafía tiene la ventaja de ser simple y es recomendable para ver patrones y la geometría de flujos. No obstante, tiene menor sensibilidad (en general) que el schlieren sintético y representa un tamaño diferente al real del objeto de

estudio. Por ejemplo, para el experimento hecho con las mismas condiciones,  $Re = 760$  y  $Fr = 1$ , la técnica schlieren sintético evidencia la existencia de dos remolinos que giran en sentido opuesto detrás del cilindro; en cambio, la sombragrafía sólo es visible una estela al centro.

Los experimentos, con diferentes números de Reynolds y Froude, muestran que el grado de estratificación afecta el comportamiento del flujo; los rangos utilizados son  $760 < Re < 2000$  y  $0.4 < Fr < 5$ . Los vórtices ya formados continúan su viaje hasta ser completamente destruidos a consecuencia de diferentes factores e inestabilidades las cuales pueden ser resultado -entre otras cosas- de la existencia de las fuerzas boyantes en la celda de recirculación pues acarrear agua de cierta densidad a regiones con diferente densidad. También, los gradientes de densidad horizontales generan vorticidad horizontal (con el eje de rotación paralelo al eje del cilindro), de signo opuesto a través de un torque baroclínico y con ello la circulación decrece.

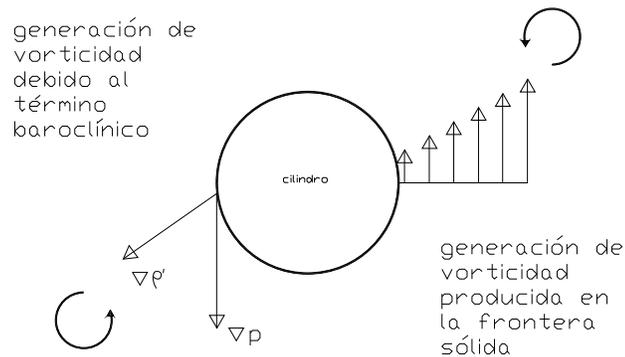


Figura 28: Mecanismo de generación de vorticidad debido a los gradientes de densidad horizontales y la producida en la frontera sólida.

Las observaciones experimentales muestran que cuando  $Re < 1000$  los remolinos sólo se forman si la estratificación es muy débil o inexistente ( $Fr > 2$ ); en cambio,

cuando ( $Re > 1000$ ) en la estela del cilindro se forman dos remolinos de signos contrarios, a menos que la estratificación sea muy fuerte ( $Fr < 0.7$ ). La intensidad de la estratificación no es suficiente para impedir la formación de vorticidad detrás del cilindro; solamente aparecen sus efectos en la disminución de tamaño de los remolinos.

Para un número de Reynolds fijo (experimentos con  $Re = 1480$  y  $Re = 2000$ ) el perímetro de los remolinos disminuye conforme aumenta la estratificación. Con estratificaciones moderadas a fuertes ( $Fr \leq 2$ ) disminuye la distancia de separación entre los vórtices y el cilindro y la distancia entre los centros de los propios remolinos. Entonces, el efecto primordial de una estratificación moderada es la reducción de la separación entre los remolinos y su deformación. Para una estratificación fuerte, el torque baroclínico provoca una deformación en los vórtices, que exista mezcla y en consecuencia colapsen. Con base en los resultados, con con números de Reynolds y Froude más bajos a los aquí mostrados, pueden verse solamente estelas detrás del cilindro y cuando la estratificación es muy intensa pueden existir ondas internas.

Una comparación de la evolución de los experimentos con  $Re = 2000$  y  $Re = 1000$  muestra que para un número de Reynolds fijo, en fluidos más estratificados los vórtices aparecen más rápidamente y su duración es más corta; y para un número de Froude fijo, que para un número de Reynolds mayor, los vórtices tardan menos en ocurrir.

La técnica del schlieren sintético permite obtener mapas de la anomalía de densidad, éstos muestran una visión global de las estructuras del flujo. Para todos los experimentos es evidente la intrusión de agua en los primeros segundos y conforme el cilindro asciende, las líneas de mayor anomalía bordean el obstáculo y su valor aumenta hasta el momento en que decaen los vórtices; además, para una estratificación fija, el valor de las isolíneas de anomalía de densidad aumentan con números de Reynolds mayores. En los mapas de densidad (al sumar  $\rho_0(z) + \rho'(x, z)$ ), el valor inicial de las isopícnas

de una altura dada disminuye porque el agua lateral menos densa reemplaza el volumen del cilindro en movimiento y el fluido transportado por los remolinos; esta variación es menor conforme la velocidad del cilindro disminuye.

# Literatura citada

- Batchelor, G. (1977). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Bouard, R. y Countanceau, M. (1980). The early stage of development of the wake behind and impulsively started cylinder for  $40 < Re < 10000$ . *Journal of Fluid Mechanics*, **101**, 583–607.
- Boyer, D., Davis, P., Fernando, H., y Zhang, X. (1989). Linearly stratified flow past an horizontal circular cylinder. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **328**, 501–528.
- Chu, C. y Liao, Y. (1992). A quantitative study of the flow around an impulsively started circular cylinder. *Experiments in fluids*, **13**, 137–146.
- Countanceau, M. y Bouard, R. (1977). Experimental determination for the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **79**, 231–256.
- Craik, A. (1977). The generation of Langmuir circulations by an instability mechanism. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, **81**, 209–223.
- Dalziel, S., Hughes, G., y Sutherland, B. (2000). Whole-field density measurements by synthetic schlieren. *Experiments in fluids*, **28**, 322–335.

- Duan, J. y Wiggins, S. (1995). Lagrangian transport and chaos in the near wake of a cylinder in the time-periodic regime: A dynamical system approach. *Applied mechanics*, páginas 104–144.
- Faller, A. y Caponi, E. (1978). Laboratory studies of wind-driven Langmuir Circulations. *Journal of Geophysical Research*, **83**, 3617–3633.
- Gerich, D. y Eckelmann, H. (1982). Influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, **122**, 109–121.
- Hill, D. F. (2002). General density gradients in general domains: The “Two Tank” method revisited. *Experiments in fluids*, **32**, 434–440.
- Hill, F. (1975). A numerical study of the descent of a vortex pair in a stably stratified atmosphere. Part 1. *Journal of Fluid Mechanics*, **71**, 1–13.
- Holzäpfel, F., Gerz, T., y Baumann, R. (2001). The turbulent decay of trailing vortex pairs in stably stratified environments. *Aerospace Science and Technology*, **5**, 95–108.
- Jerónimo, G. y Gómez-Valdés, J. (2007). A subsurface warm-eddy off northern Baja California in July 2004. *Geophysical Research Letters*, **34**.
- Kelly, R. (1984). Horizontal roll and boundary-layer interrelationships observed over Lake Michigan. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **41**, 1816. No. 11.
- Kundu, P. y Cohen, I. M. (2002). *Fluid Mechanics*. Academic Press.
- Leweke, T. y Williamson, C. (1998). Three-dimensional instabilities in wake transition. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **17**, 571–586.

- Li, Y., Shock, R., Zhang, R., y Chen, H. (2004). Numerical study of flow pas an impulsively started cylinder by the lattice-Boltzman method. *Journal of Fluid Mechanics*, **519**, 273–300.
- McDonald, N. R. (1999). The motion of geophysical vortices. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **357**, 3427–3444.
- Miura, Y. (1986). Aspect ratios of longitudinal rolls and convection cells observed during cold air outbreaks. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **43**, 26–38.
- Monreal-Gómez, M. y Salas-León, D. (1997). Circulación y estructura termohalina del Golfo de México. *Contribuciones a la Oceanografía Física en México, Monografía 3*, 183–199. Unión geofísica mexicana.
- Mowbray, D. y Rarity, S. (1967). The internal wave pattern produced by a sphere moving vertically in a density stratified liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, **30**, 489–495.
- Mutlu, B. y Fredsøe, J. (2006). *Hydrodynamics around cylindrical structures*. World Scientific.
- Noda, B. O. (1997). *Introducción al análisis gráfico de datos experimentales*. UNAM.
- Nomura, K. K., Tsutsui, H., Mahoney, D., y Rottman, J. W. (2006). Short-wavelength instability and decay of a vortex pair in a stratified fluid. *Journal of Geophysical Research*, **553**, 283–322.
- Norberg, C. (1994). An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio. *Journal of Fluid Mechanics*, **258**, 258–287.

- Ochoa, J. y Woert, M. L. V. (1977). Flow visualization of boundary layer separation in a stratified fluid. página 28. No publicado.
- Paterson, A. (1989). *A first course in fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- Reynolds, O. (1883). An Experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **35**, 84–99.
- Rosas, A. (2008). *Dispersión en un flujo turbulento bidimensional en presencia de una frontera*. Tesis de maestría, CICESE.
- Roshko, A. (1961). Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, **10**, 345–356.
- Sarpkaya, T. (1983). Trailing vortices in homogeneous and density-stratified media. *Journal of Fluid Mechanics*, **136**, 85–109.
- Scorer, R. y Davenport, L. (1970). Contrails and aircraft downwash. *Journal of Fluid Mechanics*, **43**, 451–464.
- Settles, G. (2001). *Schlieren and shadowgraph techniques*. Springer.
- Sheinbaum, J., Zavala, L., y Candela, J. (1997). Modelación numérica del Golfo de México y Mar Caribe. *Contribuciones a la Oceanografía Física en México*, **Mono-grafía 3**, 243–264. Unión geofísica mexicana.
- Sykes, R., Lewellen, W., y Henn, D. (1988). Horizontal roll and boundary-layer interrelationships observed over Lake Michigan. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **45**, 2556–2569. No. 18.

- Thompson, M., Leweke, T., y Williamson, C. (2001). The physical mechanism of transition in bluff body wakes. *Journal of Fluids and Structures*, **15**, 607–616.
- Torres, C. R. (1997). *Comportamiento de esferas en flujos estratificados*. Tesis de doctorado, CICESE.
- Tsutsui, H. (2003). *Evolution of a counter-rotating vortex pair in a stably stratified fluid*. Tesis de maestría, University of California.
- Turner, J. (1977). *Bouyancy effects in fluids*. Cambridge University Press.
- West, R. (1981). *Handbook of chemistry and physics*. C.R.C. Press.
- Williamson, C. (1996). Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **28**, 477–539.

# Apéndice A

## Error de medición para la velocidad del cilindro

La velocidad a la que viaja el cilindro es una medición indirecta, es decir, es resultado de operaciones realizadas con dos o más mediciones directas, de  $X$  (la distancia recorrida por el cilindro) y  $T$  (el tiempo que tomó para recorrer esa distancia). La velocidad  $V$  es el cociente de  $X/T$ ; como es una operación aritmética con valores experimentales el resultado tiene una incertidumbre  $dV$ . Para calcular  $V \pm dV$  necesito conocer  $T \pm dT$  y  $X \pm dX$ . A continuación se muestra el cálculo de cada uno de ellos. Con un cronómetro digital (con resolución de 0.01 s) registré el tiempo  $T$ . Entonces  $dT$  es la mitad de la mínima lectura posible con el aparato: 0.005 s. Todas las mediciones inician con un  $t=0$ ; entonces

$$T \pm dT = T \pm 0.005 \text{ s}$$

La lectura de  $X$  la hice con una regla con una resolución de 0.5 cm; con la diferencia de la posición de origen y la final pude obtener ésta. Para la distancia tenemos que

$$X \pm dX = (X_2 - X_1) \pm (dS_2 + dX_1)$$

donde  $dX$  para ambas lecturas es de 0.25 cm debido a que la regla introduce una incertidumbre máxima igual a la mitad de la división más pequeña de la escala (vea por ejemplo, Noda (1997)); entonces,

$$X \pm dX = (X_2 - X_1) \pm (0.5) \text{ cm}$$

Con los resultados anteriores puedo calcular la incertidumbre  $dV$  como:

$$\frac{dV}{V} = \sqrt{\left(\frac{0.5}{X}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{T}\right)^2}$$

Así, la velocidad reportada para el cilindro es:

$$V \pm dV = \frac{X}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{0.5}{X}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{T}\right)^2} \frac{X}{T}$$

Para los diferentes experimentos las velocidades ( $cms^{-1}$ ) con su error son:

$$V1 = 1.9 \pm 0.1$$

$$V2 = 2.5 \pm 0.1$$

$$V3 = 3.7 \pm 0.1$$

$$V4 = 5 \pm 0.1$$

## Referencia

Noda, B. O. (1997). *Introducción al análisis gráfico de datos experimentales*. UNAM.

## Apéndice B

# Error de medición para la posición de los vórtices

Con el objeto de hacer una estimación del error en la digitalización de las lecturas de las dimensiones de los remolinos, hice el siguiente experimento: elabore una imagen en matlab con las dimensiones aproximadas de las lecturas que digitalizo. Hice un círculo de dimensiones conocidas y lo ubiqué en el centro de una imagen haciendo que las proporciones del tamaño del círculo y el tamaño real del cilindro concuerden. Después de esto, realicé un algoritmo en matlab con el cual puedo obtener longitudes o distancias dentro de una imagen a partir de las coordenadas de dos puntos. Con dicho algoritmo medí el diámetro del círculo de prueba 290 veces, la Figura 1 muestra los resultados de este experimento. La distribución de frecuencias indica que es parecida a la distribución normal. Para ver que tan parecida es la distribución a una normal obtuve el sesgo y la curtosis, a saber que para la distribución normal el sesgo es 0 y la curtosis es 3.

Sesgo

$$s = \frac{1}{n\sigma^3} \sum (x - \mu)^3$$

Curtosis

$$k = \frac{1}{n\sigma^4} \sum (x - \mu)^4$$

Donde  $s$  es el sesgo,  $k$  la curtosis,  $n$  el número de datos,  $\sigma$  es la desviación estándar de la muestra,  $x$  son los elementos de la muestra y  $\mu$  es la media. Para el experimento obtuve un sesgo de 0.02 y una curtosis de 2.88 lo cual indica que es semejante a una distribución normal. Con ello, puedo decir que el error asociado a la digitalización es de:

$$e = \sigma$$

El valor de  $\sigma$  es del orden al tamaño de un pixel. Por lo cual, es posible considerar el error de las digitalizaciones es de más menos un pixel.

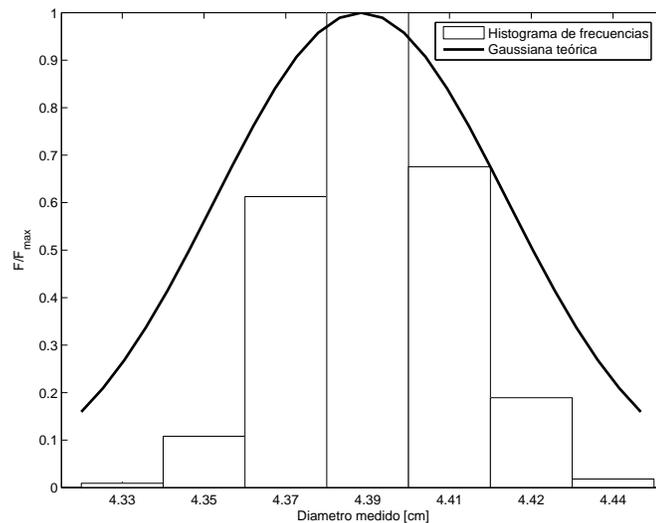


Figura 1: Histograma de frecuencias hecho para un experimento de 290 eventos para medir el diámetro de un círculo.

# Apéndice C

## La propagación de la luz a través de un medio inhomogéneo

La velocidad de la luz cambia al viajar a través de la materia. El índice de refracción  $n$  en un medio transparente denota este cambio. Por definición  $n = c_0/c$  donde  $c_0$  es la velocidad de la luz en el vacío ( $3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$ ) y  $c$  es la velocidad local de la luz en otro medio.

Para el aire y otros gases existe una relación lineal entre el índice de refracción y la densidad del gas  $\rho$ , que es:

$$n - 1 = k\rho$$

donde  $k$  es el coeficiente de Gladstone-Dale, con iluminación visible, en el aire  $k = 0.23 \text{cm}^3\text{g}^{-1}$ ; para otros gases varía entre 0.1 y 1.5.

La relación entre  $n$  y  $\rho$  existe también para líquidos y sólidos pero es más compleja que la ecuación anterior y la refracción en estos medios es mayor. Por ejemplo,  $(n - 1)$  para el aire estándar es solo de 0.000292, en cambio para el agua es alrededor de tres ordenes de magnitud mayor; y para plásticos transparentes y vidrio es mucho mayor

aún. Por lo cual, es menor la sensibilidad óptica necesaria para ver la refracción en líquidos y sólidos que en el aire.

La óptica geométrica da una buena aproximación de cómo el rayo de luz refractado (cuando viaja de un medio a otro con diferente índice de refracción) puede ser expresado como una función del gradiente del índice de refracción.

Si existe una iluminación paralela en el plano  $xz$  (sin cambio en su dirección principal el eje  $y$ ); y un desplazamiento rectilíneo de los rayos de luz sin la presencia del objeto en estudio (resultado de una perturbación). Como muestra la Figura 1, el gradiente vertical del índice de refracción es negativo ( $dn/dz < 0$ ) y el gradiente es nulo en el eje  $x$  y  $y$ . Los rayos de luz sufren una deflexión a la región de mayor índice de refracción. Un plano de luz es inicialmente vertical en  $y_1$ ; también normal al eje óptico (línea horizontal  $y$ ). Conforme pasa el plano de luz a través del objeto en estudio (desde  $y_1$  hasta  $y_2$ ), recorre una distancia  $\Delta y$  en un tiempo diferencial  $\Delta t$  y es refractado en un ángulo  $\Delta \varepsilon$ .

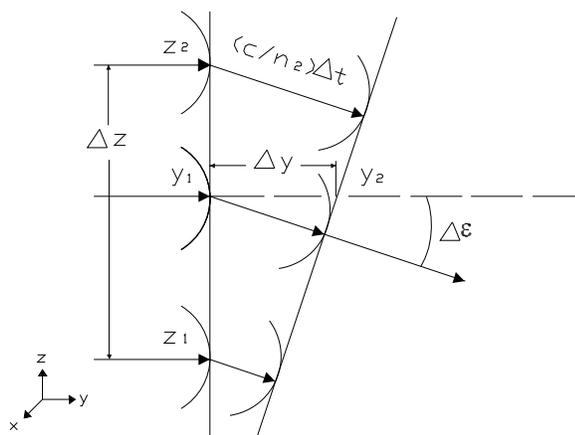


Figura 1: Esquema de los rayos de luz refractados al viajar en otro medio; el gradiente vertical del índice de refracción es negativo ( $dn/dz < 0$ ) y el gradiente es nulo en el eje  $x$  y  $y$

Podemos escribir que  $\Delta t = \Delta y n / c_0$ . La velocidad de la luz local en el medio es  $c_0/n$ ; y el ángulo  $\Delta \varepsilon$  por construcción será

$$\Delta \varepsilon = \frac{c_0/n_2 - c_0/n_1}{\Delta z} \Delta t$$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores obtengo que

$$\Delta \varepsilon = \frac{n}{c_0} \frac{c_0/n_2 - c_0/n_1}{\Delta z} \Delta y = \frac{n}{n_1 n_2} \frac{n_1 - n_2}{\Delta z} \Delta y$$

el término de  $n/n_1 n_2$  puede ser simplificado a  $1/n$  en el límite cuando  $\Delta z$  tiende a cero.

Y al hacer las diferencias finitas tender a cero queda:

$$\frac{d\varepsilon}{dy} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}$$

y en la otra componente para los flujos bidimensionales es

$$\frac{d\varepsilon}{dy} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$$

Éstas expresiones son las bases matemáticas para una sombragrafía y un schlieren sintético (Settles, 2001).

## Referencia

Settles, G. (2001). *Schlieren and shadowgraph techniques*. Springer.