

TESIS DEFENDIDA POR

Angélica María Romero Arteaga

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes

Director del Comité

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Miembro del Comité

Dr. Julio Sheinbaum Pardo

Miembro del Comité

Dr. José Luis Ochoa de la Torre

Miembro del Comité

Dr. Jesús Manuel Figueroa Rodríguez

*Coordinador del programa de
posgrado en Oceanografía física*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

3 de marzo de 2011

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

VÓRTICES ESLABONADOS CUASI-ESTACIONARIOS

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

ANGÉLICA MARÍA ROMERO ARTEAGA

Ensenada, Baja California, México, marzo de 2011

RESUMEN de la tesis de **ANGÉLICA MARÍA ROMERO ARTEAGA**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA . Ensenada, Baja California, marzo de 2011.

VÓRTICES ESLABONADOS CUASI-ESTACIONARIOS

Resumen aprobado por:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes

Director de Tesis

En esta tesis se estudia la dinámica de dos o más vórtices filiformes toroidales —es decir, vórtices infinitamente delgados enrollados sobre un toro inmaterial— en un fluido ideal. Si los vórtices son idénticos e igualmente espaciados en una sección meridional del toro, la evolución del flujo depende de la razón de aspecto del toro (r_1/r_0 , donde r_0 es el radio del toro y r_1 es el radio de su sección transversal), el número de vórtices (N) y la topología de los vórtices (V_{pq} , donde p y q son enteros co-primos que indican el número de vueltas alrededor del eje de simetría del toro y de la línea central del toro, respectivamente). El movimiento del conjunto de vórtices NV_{1q} se calculó numéricamente mediante la aproximación de Rosenhead-Moore a la ley de Biot-Savart. El campo de velocidades se calculó con un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden y paso de tiempo fijo. Se encontró que cuando un pequeño número de vórtices están eslabonados en un toro delgado el sistema avanza a lo largo y rota alrededor del eje de simetría del toro de manera uniforme. Además, los vórtices conservan aproximadamente su forma en los siguientes casos. Vórtices V_{11} y V_{12} : para $N = 2, 3$ y $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$, y para $N = 4, 5$ y $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$. Vórtices V_{13} : para $N = 2, 3$ y $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$ y para $N = 4, 5$ y $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$.

Palabras Clave: vórtices filiformes toroidales

ABSTRACT of the thesis presented by **ANGÉLICA MARÍA ROMERO ARTEAGA**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of MASTER OF SCIENCES in PHYSICAL OCEANOGRAPHY . Ensenada, Baja California, March 2011.

QUASI-STEADY LINKED VORTICES.

In this thesis we study the dynamics of two or more toroidal filamentary vortices, i.e. thin tubular vortices coiled on an immaterial torus in an otherwise quiescent, ideal fluid. If the vortices are identical and equally spaced on a meridional section of the torus, the flow evolution depends on the torus aspect ratio (r_1/r_0 , where r_0 is the radius of the centreline and r_1 is the radius of the cross section), the number of vortices (N), and the vortex topology (V_{pq} , denoting a vortex that winds p times round the torus symmetry axis and q times round the torus centreline). The evolution of sets of NV_{1q} vortices was computed using the Rosenhead–Moore approximation to the Biot–Savart law to evaluate the velocity field and a fourth order Runge-Kutta scheme to advance in time. It was found that when a small number of vortices is coiled on a thin torus the system progressed along and rotated around the torus symmetry axis in an almost steady manner. Furthermore the vortices approximately preserved their shape in the following cases. V_{11} and V_{12} vortices: for $N = 2, 3$ and $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$; and for $N = 4, 5$ and $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$. V_{13} vortices: for $N = 2, 3$ and $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$ and for $N = 4, 5$ and $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$.

Keywords: toroidal filamentary vortices

*A la familia Romero
Arteaga y a mis más
queridos amigos.*

Agradecimientos

A Oscar Velasco por su disposición constante a resolver cualquier duda. Por su paciencia, apoyo y orientación en esta tesis.

A los miembros del comité de tesis, Pepé Ochoa, Julio Sheinbaum y Eugenio Méndez, por sus comentarios y sugerencias.

A mis padres, por su apoyo incondicional, por ser la base más importante de mi vida, gracias.

Gracias a mis compañeros de CICESE por las sugerencias que aportaron a éste trabajo.

Al CONACyT por su apoyo económico durante la realización de éste trabajo.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	xii
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1 Vórtices anulares	1
I.2 Movimiento vortiginoso	3
I.3 Lord Kelvin, J.J. Thomson y la teoría del átomo vortiginoso	4
I.4 Topología de los vórtices filiformes	4
II. TEORÍA Y MÉTODOS	8
II.1 Descripción del movimiento	8
II.1.1 Ecuación de movimiento, vorticidad y circulación	8
II.2 Métodos	10
II.2.1 Parámetros del problema.	10
II.2.2 Análisis dimensional	11
II.2.3 Condiciones iniciales	11
II.2.4 Condición de eslabonamiento	13
II.2.5 Modelo numérico del vórtice filiforme	14
II.2.6 Movimiento de vórtices filiformes	15
II.2.7 Velocidad de traslación U a lo largo del eje de simetría del toro	16
II.2.8 Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro	16
II.2.9 Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro	17
II.2.10 Velocidad de fase angular Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro	17
II.2.11 Proyección meridional	18
II.2.12 Polígono meridional	19

Contenido (continuación)

	Página
III. RESULTADOS	21
III.1 Vórtices con topología V_{11}	21
III.1.1 Uniformidad del movimiento	21
III.1.2 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0	23
III.1.3 Permanencia de la forma del vórtice	28
III.2 Vórtices con topología V_{12}	34
III.2.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0	34
III.2.2 Permanencia de la forma del vórtice	36
III.3 Vórtices con topología V_{13}	40
III.3.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0	40
III.3.2 Permanencia de la forma del vórtice	40
III.4 Vórtices con topología V_{14}	45
III.4.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0	45
III.4.2 Permanencia de la forma del vórtice	46
III.5 Vórtices con topología V_{15}	50
III.5.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0	50
III.5.2 Permanencia de la forma del vórtice	50
IV. Conclusiones	54
REFERENCIAS	56

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Vórtices anulares en la naturaleza. a) Vórtice producido por el respiradero de un delfín (de www.dolphinsofspiritofhawaii.com), b) Vórtice de humo producido por la exhalación del volcán Etna (de www.decadevolcano.net), c) Vórtice generado por el aleteo de un ave (modificado de Dickinson (2003)), d) Vórtice generado por el movimiento de la aleta de un pez (modificado de Eliot y George (2000)).	2
2	Los vórtices se representan por delgados tubos en color rojo y verde, los cuales se encuentran eslabonados sobre la superficie de un toro inmaterial (superficie azul) de radios r_0 y r_1 . Los ángulos θ y φ indican el ángulo alrededor del eje de simetría del toro y de la línea central del toro, respectivamente.	5
3	a) Nudo toroidal , b) Lazo toroidal , c) Hélice toroidal.	6
4	Distintas condiciones iniciales NV_{pq} sobre la superficie de un toro.	13
5	Condición inicial del polígono meridional de $N = 3$ vértices.	14
6	a) Punto P que gira alrededor del eje de simetría del toro (eje z). b) La línea de referencia AP se halla en la coordenada angular θ_1 en el tiempo t_1 y θ_2 en el tiempo t_2 . El desplazamiento angular neto en $\Delta t = t_2 - t_1$ es $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$	17
7	Punto P que gira alrededor de la línea central del toro. La línea de referencia BP se halla en la coordenada angular φ_1 en el tiempo t_1 y φ_2 en el tiempo t_2 . El desplazamiento angular neto en $\Delta t = t_2 - t_1$ es $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$	18
8	Punto P que gira alrededor del eje de simetría del toro. La línea de referencia OP se halla el desplazamiento A_1 de la cresta en el tiempo t_1 y A_2 en el tiempo t_2 . El desplazamiento de la cresta en $\Delta t = t_2 - t_1$ es $\Delta A = A_2 - A_1$	18
9	a) Proyección de un vórtice filiforme con topología V_{11} en un plano meridional del toro $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$	19
10	Intersección de tres vórtices (círculos) en un plano meridional $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ del toro en los vértices de un polígono de tres lados (números).	20

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
11	Evolución del conjunto $2V_{11}$. El conjunto se mueve a lo largo del eje de simetría del toro mientras conserva su forma. La posición de los vórtices se muestra en los siguientes tiempos: $T = 0$, $T = 4$ y $T = 8$	22
12	Desplazamiento en z , desplazamiento angular θ_e alrededor del eje de simetría del toro, desplazamiento angular ϕ alrededor de la línea central del toro y desplazamiento de fase angular θ_f alrededor del eje de simetría del toro.	23
13	Velocidad de traslación U de un vórtice filiforme V_{11} en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$	24
14	a) Dos vórtices eslabonados, cada uno con topología V_{11} . Antes de cerrarse en si mismo, cada vórtice da una vuelta $p = 1$ alrededor del eje de simetría del toro y una vuelta $q = 1$ alrededor de la línea central del toro. b) Un vórtice tubular anudado con topología V_{21} con $p = 2$ vueltas alrededor del eje de simetría del toro y una vuelta $q = 1$ alrededor de la línea central del toro.	25
15	Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro, en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad angular Ω_1 está escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$	26
16	Velocidad angular Ω_2 material alrededor de la línea central del toro, en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad angular Ω_2 esta escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$	27
17	Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro, en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad angular Ω_3 está escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$	27
18	Deformación de vórtices con topología V_{11} con $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.13$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.16$ (azul). La deformación de ambos conjuntos se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$	29

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
19	Deformación de vórtices con topología V_{11} con $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.12$ (azul). La deformación de ambos conjuntos se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 2, T = 4, T = 6$	30
20	Evolución de la longitud de un filamento con topología NV_{11} . El número N de filamentos eslabonados son: $N = 2, N = 3, N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto en todos los casos son: $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.13$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.16$ (azul).	31
21	Variación de los radios del toro $r_0(t)$ y radio $r_1(t)$ de la sección transversal del toro en color azul. El número de vórtices eslabonados con topología V_{11} es igual a $N = 2$ con las siguientes razones de aspecto: (a) $r_1/r_0 = 0.10$, (b) $r_1/r_0 = 0.13$, (c) $r_1/r_0 = 0.16$	32
22	Variación del radio $r_1(t)$ para los conjuntos $2V_{11}$ y $5V_{11}$, ambos con una razón de aspecto de $r_1/r_0 = 0.10$	32
23	Evolución del área de los siguientes polígonos: triángulo, cuadrado y un pentágono generado con $N = 3$ (morado), $N = 4$ (azul) y $N = 5$ (negro) vértices. La razón de aspecto es $r_1/r_0 = 0.10$ y $r_1/r_0 = 0.14$	33
24	Evolución del área de un polígono meridional. a) Polígono meridional con $N = 3$ vértices. b) Polígono meridional con $N = 4$ vértices. c) Polígono meridional con $N = 5$ vértices.	34
25	a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1, Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$	35
26	Deformación de vórtices con topología V_{12} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.13$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.16$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 2, T = 4, T = 6$	36
27	Deformación de vórtices con topología V_{12} para los casos $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.12$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 2, T = 4, T = 6$	37

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
28	Evolución de la longitud de un filamento V_{12} . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.16$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$	38
29	Evolución temporal del radio r_1 . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.16$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$	39
30	Evolución del área de un polígono generado con $N = 3$ vértices (línea verde) y $N = 5$ vértices (línea azul). La razón de aspecto es $r_1/r_0 = 0.12$.	39
31	a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$	41
32	Deformación de vórtices con topología V_{13} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.12$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.14$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$	42
33	Deformación de vórtices con topología V_{13} para los casos $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo) y $r_1/r_0 = 0.11$ (verde). La deformación de los vórtice se muestra en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$	43
34	Evolución de la longitud de un filamento V_{13} . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.14$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$	43
35	Evolución temporal del radio r_1 . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.14$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$	44
36	Evolución del área de un polígono generado con $N = 4$ vértices (línea verde) y $N = 5$ vértices (línea azul).La razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.11$. .	45
37	a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular materia Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$	46

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
38	Deformación de vórtices con topología V_{14} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.12$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 2, T = 4, T = 6$	47
39	Deformación de vórtices con topología V_{14} para los casos $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 2, T = 4$	48
40	Evolución de la longitud de un filamento V_{14} . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.12$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.11$	49
41	Evolución temporal del radio r_1 . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.14$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.11$	49
42	Evolución del área de un polígono generado con $N = 3$ vértices (línea verde) y $N = 4$ vértices (línea azul). La razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.11$.	50
43	a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1, Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$	51
44	Deformación de vórtices con topología V_{15} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo) y $r_1/r_0 = 0.11$ (verde). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 1, T = 2, T = 4$ y $T = 6$	52
45	Evolución de la longitud de un filamento con topología $2V_{15}$ y $3V_{15}$ en una razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.10$	53
46	Evolución temporal del radio r_1 para los vórtices $2V_{15}$ y $3V_{15}$ con $r_1/r_0 = 0.10$	53
47	Evolución del área de un polígono generado con $N = 3$ vértices cuando la razón de aspecto es $r_1/r_0 = 0.10$	53

Lista de Tablas

Tabla	Página
I Matriz de dimensiones	11

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

I.1 Vórtices anulares

Los vórtices anulares son estructuras tridimensionales en forma de una dona (rosquilla) o un neumático. Su forma corresponde a un tubo de vorticidad que se cierra en sus extremos. Por lo general siempre se considera que son axialmente simétricos, con una sección transversal pequeña comparada con su apertura.

Los vórtices anulares se mueven en el fluido que los rodea, trasladándose a lo largo de su eje de simetría en ocasiones preservan su forma anular por largo tiempo. Unas de sus propiedades dinámicas es la capacidad para transportar masa, momento o energía de forma eficiente. Este tipo de estructuras se encuentran en la naturaleza a diferentes escalas. Fenómenos como la exhalación de humo por las chimeneas de volcanes pueden producir vórtices anulares, con diámetros de hasta 180 metros y permanecer sin cambios en su forma durante más de 10 minutos. Otro ejemplo es el vórtice de humo generado por los fumadores al expulsar el humo a través de su boca, estos vórtices tienen diámetros del orden de centímetros y desaparecen rápidamente por efectos disipativos. Los delfines también generan vórtices anulares al expulsar burbujas de aire a través de su respiradero. Estas estructuras duran solamente algunos segundos antes de romperse en el agua (Shariff y Leonard (1992)). Los vórtices anulares también aparecen en el nado de los peces (Eliot y George (2000)), en el vuelo de las aves o durante la propulsión de algunos tipos de medusa (Dabiri (2009)).

La figura 1 muestra algunos ejemplos de vórtices anulares que existen en la natu-

raleza. A escala más pequeña, se encuentran por ejemplo aquellos vórtices formados

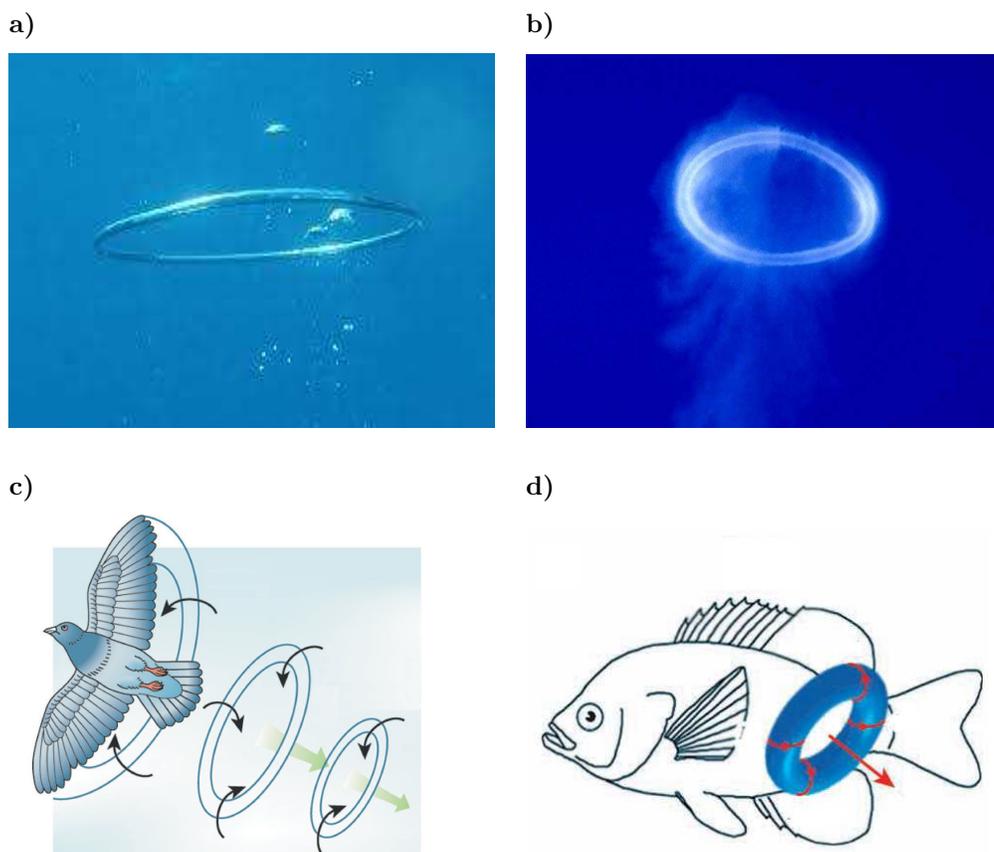


Figura 1. Vórtices anulares en la naturaleza. a) Vórtice producido por el respiradero de un delfín (de www.dolphinsofspiritofhawaii.com), b) Vórtice de humo producido por la exhalación del volcán Etna (de www.decadevolcano.net), c) Vórtice generado por el aleteo de un ave (modificado de Dickinson (2003)), d) Vórtice generado por el movimiento de la aleta de un pez (modificado de Eliot y George (2000)).

por la caída de gotas al interior de un fluido en reposo. Estos vórtices también se conocen como vórtices filiformes, su nombre proviene del latín *filum* que significa forma o apariencia de hilo. En los vórtices filiformes la vorticidad está confinada en una línea de vorticidad conocida como el núcleo de vorticidad.

I.2 Movimiento vortiginoso

El movimiento de un volumen de fluido ideal sujeto a fuerzas conservativas fue descrito por Helmholtz en 1858. Él muestra que este volumen puede moverse con una componente traslacional y una componente rotacional, mientras que experimenta cambios en su forma (vea por ejemplo Meleshko (2010)). Para describir estos resultados, Helmholtz introduce dos nuevos conceptos: línea de vorticidad, definida como una línea en donde todos sus puntos son tangentes al vector vorticidad y, tubo de vorticidad, que es una porción de líquido limitado por todas las líneas de vorticidad que pasan a través de un elemento de área infinitesimal. Con base en estas definiciones, Helmholtz estableció las tres leyes de movimiento del vórtice, expresadas de la siguiente manera (vea por ejemplo Velasco Fuentes (2007)):

I. Partículas de fluido originalmente libres de vorticidad permanecen libres de vorticidad.

II. Partículas de fluido que en cualquier tiempo forman una línea de vorticidad se mueven continuamente como una línea de vorticidad.

III. El producto del área transversal y la vorticidad de un tubo de vorticidad es constante sobre toda la longitud del tubo y no cambia con el tiempo.

Helmholtz estudió el movimiento de un caso particular al que llamó "vórtices filiformes circulares", determinó que estos vórtices se trasladan a lo largo de su eje de simetría conservando su forma.

En la dinámica de vórtices, este tipo de vórtices han sido objeto de diversos estudios analíticos, numéricos y experimentales. El movimiento, formación, velocidad, estabilidad y fusión de estos vórtices son algunos de los temas de interés. Incluso en 1867 William Thomson (Lord Kelvin), intentó construir una teoría del átomo basada en los vórtices anulares.

I.3 Lord Kelvin, J.J. Thomson y la teoría del átomo vortiginoso

A finales del siglo XIX Kelvin suponía que los vórtices de Helmholtz podrían ser la base de una nueva teoría atómica, al considerar que las estructuras atómicas podrían ser formadas por diversas configuraciones de tubos de vorticidad anudados o encadenados en la superficie de un toro inmaterial (vea por ejemplo Odifreddi (2006)). Kelvin(1875) conjeturó que dichas configuraciones conservarían su forma indefinidamente en un fluido ideal y serían estables bajo las ecuaciones de Euler, si eran lo suficientemente delgadas.

A diferencia de Kelvin, años más tarde J.J. Thomson abordó analíticamente el movimiento de N -vórtices eslabonados entre sí sobre la superficie de un toro de radio r_0 y cuya sección transversal tiene radio r_1 . Debido a la curvatura y torsión de los vórtices filiformes, Thomson lo simplificó al considerar el radio r_0 del toro infinito, vórtices infinitamente largos e infinitamente delgados de igual intensidad Γ , paralelos entre si y que intersectan un plano meridional en los vértices de un polígono regular. Demostró que dicha configuración tenía un movimiento estacionario y los cambios en el arreglo poligonal estaban acotados cuando el número de vórtices era $N \leq 6$ (Thomson (1883)).

I.4 Topología de los vórtices filiformes

La topología de un vórtice filiforme describe su curvatura y torsión sobre la superficie de un toro de radio r_0 y radio r_1 en su sección transversal. La topología de un vórtice filiforme permanece invariante bajo deformaciones continuas del vórtice. La topología está en función de dos número enteros co-primos p y q , donde p indica el número de vueltas que da el vórtice alrededor del eje de simetría del toro y q es el número de vueltas

alrededor de la línea central del toro (Velasco Fuentes (2010)). Así, cada vórtices V_{pq} da p y q vueltas antes de cerrarse en sí mismo.

El esquema de los vórtices filiformes eslabonados en un toro inmaterial se muestra en la figura 2, donde los vórtices filiformes se representan por delgados tubos en color verde y rojo sobre la superficie de un toro en color azul. En este ejemplo, cada uno de los vórtices filiformes posee topología V_{11} y ambos forman el conjunto $2V_{11}$.

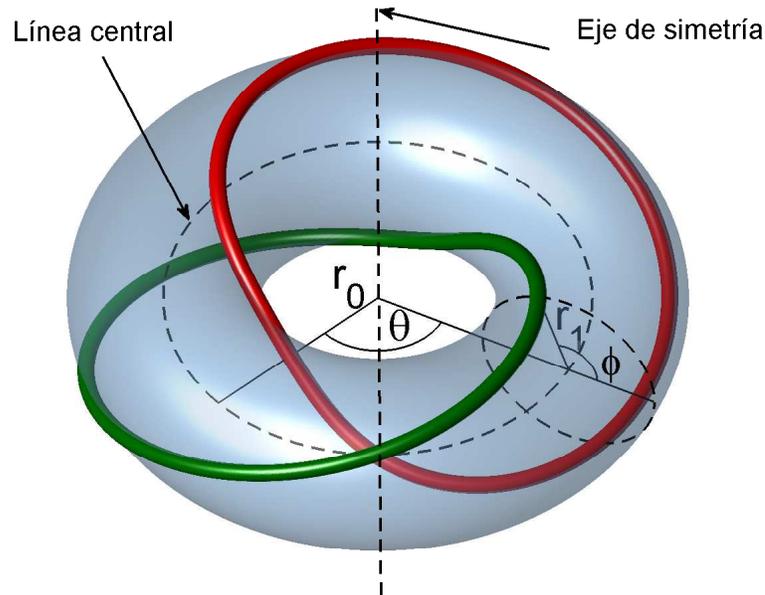


Figura 2. Los vórtices se representan por delgados tubos en color rojo y verde, los cuales se encuentran eslabonados sobre la superficie de un toro inmaterial (superficie azul) de radios r_0 y r_1 . Los ángulos θ y ϕ indican el ángulo alrededor del eje de simetría del toro y de la línea central del toro, respectivamente.

Si $p = 1$ y $q = 0$ el vórtice filiforme no se anuda y se le conoce con el nombre de vórtice anular, esta topología corresponde al vórtice que Helmholtz estudió y cuya permanencia llamó la atención de Kelvin para crear su teoría del átomo vortiginoso. Cuando $p > 1$ y $q > 1$ el vórtice filiformes es llamado nudo toroidal, cuando $p > 1$ y $q = 1$ se le conoce como lazo toroidal y para $p = 1$ y $q > 1$ se le conoce como hélice toroidal (vea figura 3). Estas tres últimas topologías también fueron planteadas por Kelvin como estructuras estacionarias y estables si eran lo suficientemente delgadas.

Se han obtenido resultados sobre la permanencia de un nudo toroidal sobre la su-

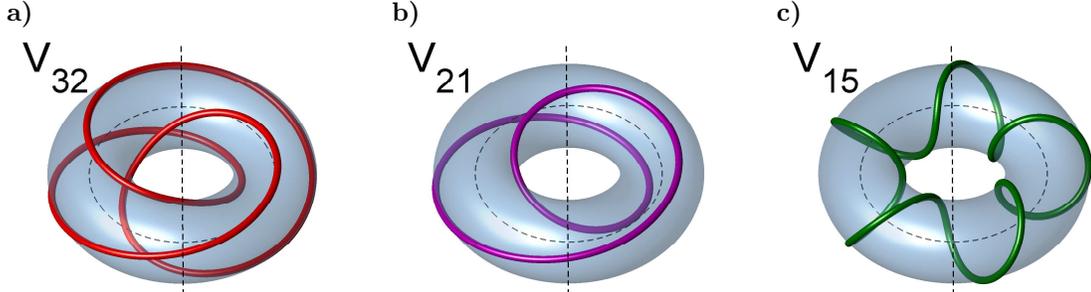


Figura 3. a) Nudo toroidal , b) Lazo toroidal , c) Hélice toroidal.

perficie de un toro, mediante el estudio numérico de la ley de Biot Savart (BS). Un vórtice anudado con topología V_{32} y V_{23} , preserva su forma por largo tiempo cuando la ley de BS es usada (Ricca *et al.*, 1999). Para ambos vórtices el radio del toro fue $r_0 = 1$ y un radio transversal $r_1 = 0.10$. El movimiento del vórtice anudado es descrito como un movimiento estacionario y estable al trasladarse y rotar a lo largo del eje de simetría del toro (Ricca *et al.*, 1999).

Velasco Fuentes (2010) analizó el movimiento y el flujo inducido por nudos, lazos y hélices toroidales sobre la superficie de un toro de radios $r_0 = 1$ y $r_1 = 0.10$. El campo de velocidades inducido por la presencia del vórtice filiforme se determinó mediante la aproximación de Rosenhead-Moore a la ley de BS (vea Leonard (1985)). Los resultados numéricos mostraron que nudos, lazos y hélices toroidales sobre la superficie de un toro, también describen una rotación y una traslación a lo largo del eje de simetría del toro (Velasco Fuentes (2010)). El estudio numérico de los vórtices filiformes mediante la ley de BS y la aproximación de Rosenhead-Moore se obtuvieron al considerar solo un filamento sobre la superficie de un toro de radios constantes ($r_0 = 1$ y $r_1 = 0.10$).

Por lo anterior es de interés estudiar el problema original planteado por J.J. Thomson sobre la invariancia de la forma de N vórtices filiformes eslabonados en la superficie de un toro de radio r_0 y radio r_1 en su sección transversal.

En esta tesis abordamos este problema al considerar $N = 2, 3, 4, 5$ vórtices es-

labonados sobre la superficie de un toro de radio $r_0 = 1$ y razón de aspecto acotada entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$. También se consideró el número de vueltas q alrededor de la línea central del toro entre $1 \leq q \leq 5$.

Se analizó la dependencia de las velocidades de traslación U , velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro, velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro y velocidad de fase angular Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro, en función de los parámetros N y r_1/r_0 .

La permanencia de la forma de los vórtices NV_{1q} se analizó cualitativamente con base en su proyección meridional. Cuantitativamente con la longitud de uno de ellos, la permanencia de un polígono meridional y la variación temporal de los radios (r_0 y r_1) del toro.

Con base en el análisis de estos cálculos, los resultados más importantes fueron los siguientes : Existe un número N_i de vórtices eslabonados a partir del cual el conjunto NV_{1q} no se mueve de manera uniforme cuando se consideran vórtices con una sección transversal grande ($r_1 = 0.16$).

Los conjuntos $2V_{11}$ y $3V_{11}$ preservaron mejor la forma de los vórtices cuando la razón de aspecto es grande ($r_1/r_0 = 0.16$). Para preservar la forma del conjunto $4V_{11}$, estos vórtices se eslabonaron en un toro con razón de aspecto acotada entre $0.10 \leq r_1 \leq 0.12$. Para conservar la forma del conjunto $5V_{11}$ fue necesario disminuir la razón de aspecto del toro entre $0.10 \leq r_1 \leq 0.11$.

Para preservar la forma del conjunto NV_{12} , NV_{13} , NV_{14} y NV_{15} con $N = 2, 3, 4, 5$ fue necesario que el conjunto éste eslabonado en un toro delgado cuya razón de aspecto se acota entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$.

Capítulo II

TEORÍA Y MÉTODOS

En este capítulo se describen las ecuaciones que rigen el movimiento de los vórtices filiformes, los cuales existen dentro de un fluido incompresible, sin viscosidad, en un medio infinito y sin fronteras. Es decir, consideramos un fluido ideal gobernado por las ecuaciones de Euler.

También se definen los parámetros que determinan la topología de los vórtices, se delimitan los valores de los radios del toro y del filamento. Posteriormente se especifica la condición para eslabonar vórtices filiformes alrededor de un toro inmaterial y se describe el modelo numérico que se usa para calcular las velocidades inducidas debido al propio filamento. Por último se describen los métodos empleados para evaluar la permanencia de la forma de los vórtices.

II.1 Descripción del movimiento

II.1.1 Ecuación de movimiento, vorticidad y circulación

El movimiento de un fluido incompresible en ausencia de viscosidad está descrito por el campo de velocidades $\vec{u}(t, \vec{x}) = (u, v, w)$ que satisface las siguientes ecuaciones:

Ecuación de conservación de masa

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1)$$

Ecuación de Euler

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla P = 0 \quad (2)$$

El rotacional del campo de velocidad es la vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$, que indica una medida de la rotación local del fluido. La dirección de $\vec{\omega}$ es a lo largo del eje de giro y su magnitud es $\omega = 2\Omega$, donde Ω es la velocidad angular de rotación. La ecuación de vorticidad para tal sistema es

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}. \quad (3)$$

Si todas las partículas del fluido cumplen que $\vec{\omega} = 0$, se dice que el fluido tiene un movimiento irrotacional. Sin embargo si alguna región del fluido en que $\vec{\omega} \neq 0$ entonces el fluido posee un movimiento rotacional, un ejemplo en 2D es el vórtice de Rankine (vea Saffman (1995)) donde toda la vorticidad está concentrada dentro de una circunferencia de radio a . Cuando varias líneas de vorticidad se agrupan y forman circuitos cerrados donde toda la vorticidad esta confinada en su interior, se le conocen como vórtices tubulares. La relación entre el concepto de vorticidad y circulación, se puede obtener al aplicar el teorema de Stokes al campo de velocidades $\vec{u}(t, \vec{x}) = (u, v, w)$:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}, \quad (4)$$

donde A es el área del contorno cerrado C , $d\vec{s}$ es un elemento del contorno que delimita el campo de vorticidad $\vec{\omega}$. Es decir que la circulación alrededor de un contorno C es igual al flujo de vorticidad a través del área A . El teorema de la circulación de Kelvin establece que la circulación sobre un contorno material permanece invariante (vea Batchelor (1977)).

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (5)$$

II.2 Métodos

II.2.1 Parámetros del problema.

De acuerdo al problema original planteado por J.J. Thomson, los parámetros necesarios para estudiar vórtices filiformes eslabonados sobre la superficie de un toro inmaterial son:

N : Número de filamentos eslabonados en la superficie del toro.

p : Número de vueltas alrededor del eje de simetría del toro.

q : Número de vueltas alrededor de la línea central del toro.

a : Radio de la sección transversal del vórtice filiforme.

Γ : Intensidad o circulación del vórtice filiforme.

r_0 : Radio del toro.

r_1 : Radio de la sección transversal del toro.

Los valores considerados en este trabajo para estos parámetros fueron los siguientes:

$$1 \leq N \leq 5$$

$$p = 1$$

$$1 \leq q \leq 5$$

$$a = 0.05$$

$$\Gamma = 1$$

$$r_0 = 1$$

$$0.10 \leq r_1 \leq 0.16$$

II.2.2 Análisis dimensional

Los parámetros fundamentales del problema son el radio del toro r_0 , el radio de la sección transversal r_1 del toro, el radio a del filamento, el número N de vórtices eslabonados, el número de vueltas p alrededor del eje de simetría del toro y el número de vueltas q alrededor de la línea central del toro. De tal forma, la matriz de dimensiones se expresa de la siguiente manera :

Tabla I. Matriz de dimensiones

	r_0	r_1	a	N	p	q
M	0	0	0	0	0	0
L	1	1	1	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0

Donde M representa unidades de masa, L de longitud y T de tiempo. El número total de variables es igual a 6 y el rango de la matriz es igual a 1, por lo que podemos escoger cinco grupos adimensionales : N , p , q , a/r_0 y r_1/r_0 .

El tiempo T característico del problema es el tiempo que tarda un vórtice anular V_{10} de intensidad Γ y sección transversal πa^2 avanzar una distancia iguala a un radio r_0 .

$$T = \frac{r_0}{U_0},$$

donde U_0 es la velocidad del vórtice anular

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[\log \frac{8r_0}{a} - \frac{1}{4} \right].$$

II.2.3 Condiciones iniciales

Para realizar las simulaciones numéricas del movimiento de los vórtices filiformes eslabonados, primero fue necesario indicar la topología del vórtice en términos de p y q , una vez definida la topología del vórtice V_{pq} se especificó el número N de vórtices

eslabonados y finalmente se designó una razón de aspecto r_1/r_0 . En todos los conjuntos NV_{pq} se utilizaron vórtices filiformes de radio $a = 0.05$ e intensidad $\Gamma = 1$, el radio del toro siempre fue de $r_0 = 1$.

El vector de posición \vec{x} de cada uno de los vórtices filiformes sobre la superficie del toro se determinó con las siguientes ecuaciones en coordenadas cartesianas (vea Velasco Fuentes (2010)):

$$\begin{aligned}x_i &= (r_0 + r_1 \cos \phi) \cos \theta, \\y_i &= (r_0 + r_1 \cos \phi) \sin \theta, \\z_i &= r_1 \sin \theta,\end{aligned}\tag{6}$$

donde $i = 1, \dots, N$ representa cada vórtice eslabonado, ϕ indica el ángulo alrededor de la sección transversal del toro y θ es el ángulo alrededor del eje de simetría del toro.

Los ángulos se representan en términos del número de vueltas p y q de la siguiente manera (vea Velasco Fuentes (2010)) :

$$\phi = qs - 2\pi(N - i)/N,\tag{7}$$

$$\theta = ps,\tag{8}$$

donde s es un parámetro a lo largo del filamento que varía de $0 < s < 2\pi$. La ecuación 7 indica el eslabonamiento ordenado de los N vórtices filiformes.

En la figura 4, se muestran algunos ejemplos de distintos vórtices eslabonados ($2V_{12}$, $2V_{13}$, $3V_{14}$ y $3V_{15}$) en la condición inicial. Note que vórtices con topología V_{10} se pueden acomodar en el toro sin eslabonarse o bien estar eslabonados, pero en éste último caso los vórtices no quedarían acomodados sobre la superficie de un toro.

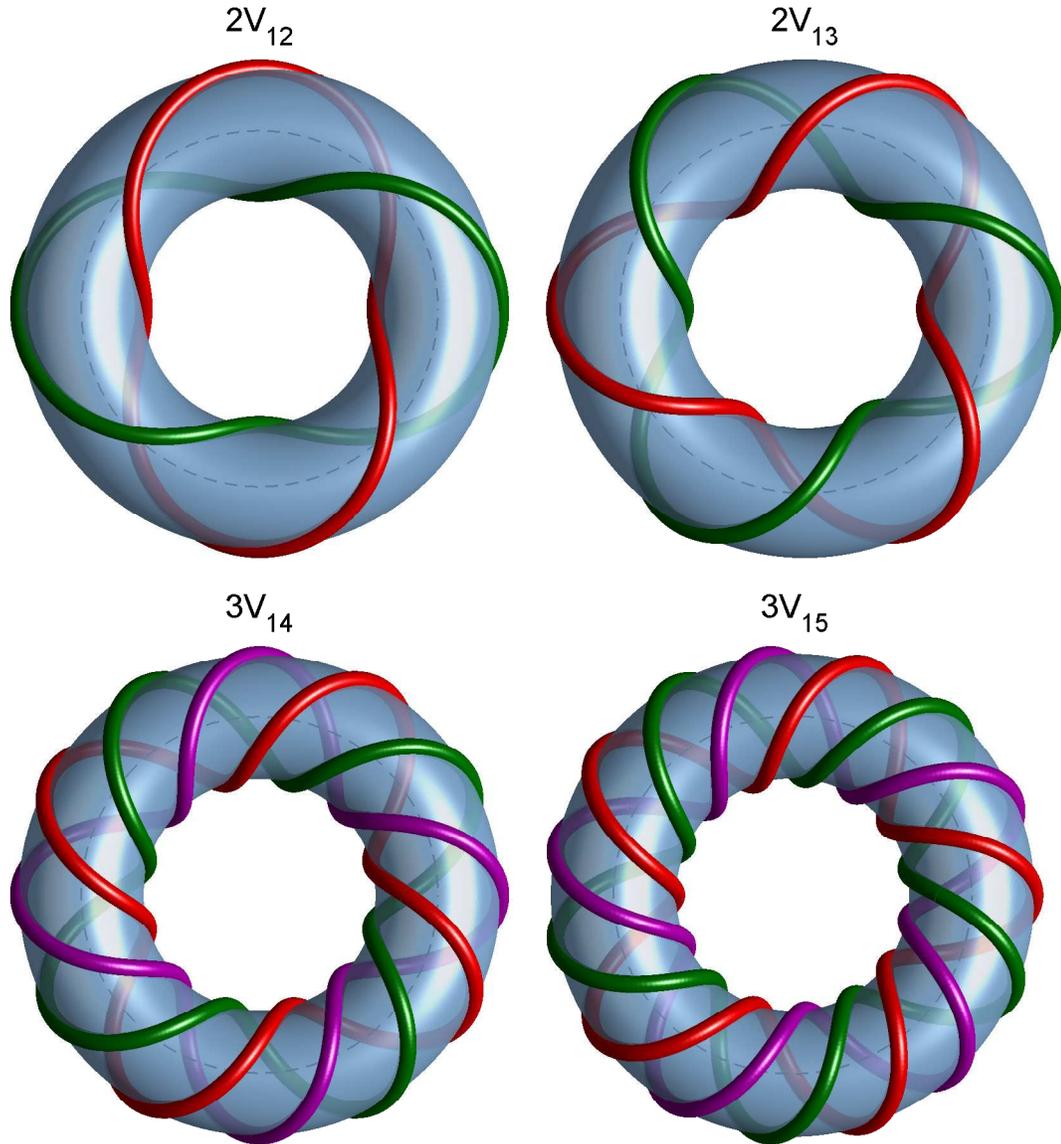


Figura 4. Distintas condiciones iniciales NV_{pq} sobre la superficie de un toro.

II.2.4 Condición de eslabonamiento

De acuerdo a la descripción que realizó Thomson para eslabonar vórtices filiformes en la superficie de un toro, nosotros supusimos que en la condición inicial el conjunto NV_{pq} de vórtices filiformes intersectan un plano meridional arbitrario en N puntos (uno por cada vórtice). Estos N puntos forman una figura geométrica a la que denominaremos polígono meridional. Por construcción el polígono meridional es un polígono regular (es decir, un polígono con todos sus lados iguales) en la condición inicial.

En la figura 5 se muestra la intersección de tres vórtices V_{11} en un plano meridional del toro en los $N = 3$ vértices de un polígono regular.

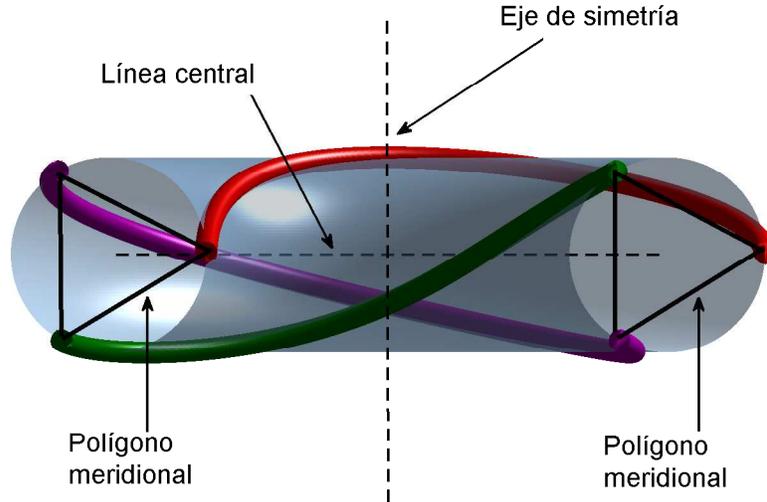


Figura 5. Condición inicial del polígono meridional de $N = 3$ vértices.

Otra condición es considerar que la sección transversal del toro πr_1^2 es pequeña comparada con su apertura es decir que $r_0 \gg r_1$ y además que $r_1 \gg a$.

II.2.5 Modelo numérico del vórtice filiforme

En condiciones ideales el campo de velocidad $\vec{u}(\vec{x})$ debido a un vórtice filiforme de intensidad Γ está gobernado por la ley de Biot - Savart (BS) (Saffman (1995)).

$$\vec{u}(\vec{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{(\vec{x} - \vec{r}(s)) \times d\vec{s}}{|\vec{x} - \vec{r}(s)|^3}, \quad (9)$$

donde \vec{x} es un punto en el interior del fluido donde se desea calcular la velocidad, $\vec{r}(s)$ es una posición sobre el filamento y la integral es a lo largo de todo el filamento cerrado.

Las soluciones analíticas explícitas a la ley de Biot- Savart (BS) sólo son conocidas para un número muy limitado de casos y la simulación numérica basada en ella requiere mucho tiempo de cómputo. Una de las desventajas de utilizar la aproximación de BS es la existencia de una singularidad cuando se desea calcular la velocidad inducida debido al propio filamento (vea por ejemplo Batchelor (1977)), como resultado la integral en

(9) se vuelve divergente. Una buena aproximación a la ley de BS para un vórtice con sección transversal delgada es la ecuación de Rosenhead- Moore (vea por ejemplo Leonard (1985)), que se expresa como

$$\vec{u}(\vec{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{(\vec{x} - \vec{r}(s)) \times d\vec{s}}{(|\vec{x} - \vec{r}(s)|^2 + \mu^2 a^2)^{3/2}}, \quad (10)$$

donde μ corresponde a una distribución constante de vorticidad del filamento de radio a .

En la simulación consideramos a lo más cinco vórtices eslabonados, cuya evolución fue resuelta al aplicar el método de Runge -Kutta de cuarto orden (RK4) con paso de tiempo fijo.

II.2.6 Movimiento de vórtices filiformes

Un cuerpo rígido es descrito por dos componentes de velocidad, estas componentes son:

Velocidad de traslación. Es el desplazamiento o cambio de posición que un cuerpo realiza en un intervalo de tiempo, es decir

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (11)$$

Velocidad angular. Para describir el movimiento de rotación de un cuerpo que gira alrededor de un eje arbitrario, se usan cantidades angulares como la velocidad angular, ésta determina el desplazamiento angular de un punto P sobre un círculo de radio r durante un intervalo de tiempo, como

$$\Omega = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}, \quad (12)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son los ángulos inicial y final en el intervalo de tiempo Δt .

II.2.7 Velocidad de traslación U a lo largo del eje de simetría del toro

Es conocido que un vórtice anular se traslada a lo largo de su eje de simetría (vea Thomson (1875), Thomson (1883)). Con base en este resultado, nosotros calculamos la velocidad de traslación de un vórtice con topología V_{pq} a lo largo del eje de simetría del toro, que en nuestro caso coincide con el eje z . Entonces en la ecuación 11, sólo tenemos que considerar la posición promedio a lo largo de z para todos los intervalos de tiempo Δt . A estos datos posteriormente se les realizó un ajuste lineal, donde la rapidez del cambio es la pendiente de la gráfica de z en función de t . Mientras mayor sea el valor de la pendiente mayor es la velocidad v_z , esta puede ser positiva si la partícula se mueve en la dirección creciente de z o negativa si se mueve en dirección contraria.

II.2.8 Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro

Se consideró el movimiento de un solo nodo que forma parte del filamento. Éste nodo se ubica a una distancia d_1 desde el punto A al punto P (vea figura 6). En la condición inicial ésta distancia es igual al radio r_0 del toro. En el plano del movimiento la línea de referencia AP que conecta al punto P con el eje de simetría del toro hace un ángulo θ con la dirección del eje x . Para obtener la velocidad angular primero calculamos el desplazamiento angular de P para todos los tiempos t_1, t_2, t_3, \dots , posteriormente se realizó un ajuste lineal con los datos obtenidos, siendo la pendiente de la recta la velocidad angular material a lo largo del eje de simetría del toro.

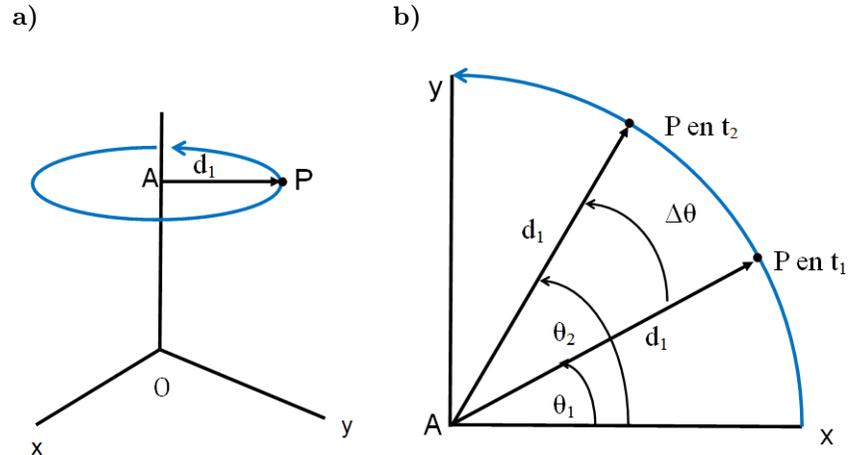


Figura 6. a) Punto P que gira alrededor del eje de simetría del toro (eje z). b) La línea de referencia AP se halla en la coordenada angular θ_1 en el tiempo t_1 y θ_2 en el tiempo t_2 . El desplazamiento angular neto en $\Delta t = t_2 - t_1$ es $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

II.2.9 Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro

Se consideró el movimiento de un solo nodo que forma parte del filamento. Éste nodo se ubica a una distancia d_2 desde el punto B al punto P (vea figura 7). En la condición inicial ésta distancia es igual al radio r_1 del toro. En el plano del movimiento la línea de referencia BP que conecta al punto P con la línea central del toro hace un ángulo φ con la dirección del eje y . Para calcular la velocidad angular primero calculamos el desplazamiento angular de P para todos los tiempos t_1, t_2, t_3, \dots , posteriormente a los datos obtenidos se les realizó un ajuste lineal donde la pendiente de la recta fue la velocidad angular material alrededor de la línea central del toro.

II.2.10 Velocidad de fase angular Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro

Se refiere a la velocidad de traslación de un punto de una onda. Por ejemplo, el movimiento de una cresta mientras la onda se desplaza en el espacio. La velocidad de

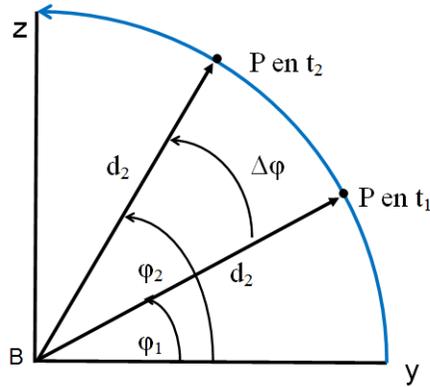


Figura 7. Punto P que gira alrededor de la línea central del toro. La línea de referencia BP se halla en la coordenada angular φ_1 en el tiempo t_1 y φ_2 en el tiempo t_2 . El desplazamiento angular neto en $\Delta t = t_2 - t_1$ es $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

desplazamiento de la cresta es la velocidad de fase angular Ω_3 (vea figura 8)

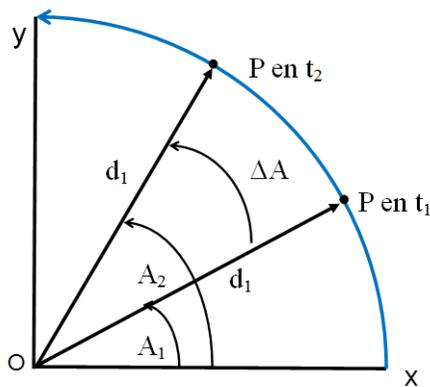


Figura 8. Punto P que gira alrededor del eje de simetría del toro. La línea de referencia OP se halla el desplazamiento A_1 de la cresta en el tiempo t_1 y A_2 en el tiempo t_2 . El desplazamiento de la cresta en $\Delta t = t_2 - t_1$ es $\Delta A = A_2 - A_1$.

II.2.11 Proyección meridional

La invariancia de un vórtice sobre la superficie de un toro, ha sido estudiada en términos de la conservación de su geometría cuando se desplaza largas distancias (Ricca, 1999). Para analizar la permanencia de la forma del filamento desde un punto de vista cualitativo, se trasladaron todos los puntos que definen el vórtice filiforme en el espacio (x, y, z) a un plano meridional del toro $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ (figura 9). El análisis de la permanencia

de la forma para un conjunto de N vórtices eslabonados se simplifica al considerar la evolución de uno de ellos.

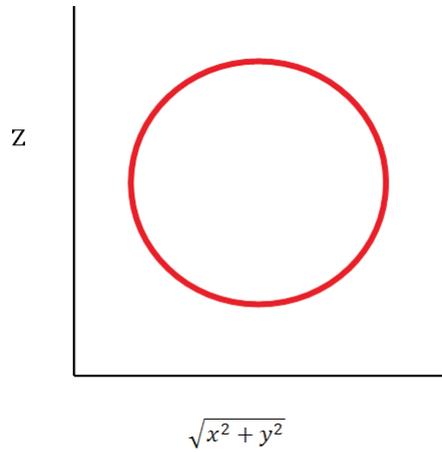


Figura 9. a) Proyección de un vórtice filiforme con topología V_{11} en un plano meridional del toro $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$.

II.2.12 Polígono meridional

Como medida de la permanencia de la forma del conjunto NV_{pq} se calculó el área del polígono meridional. La permanencia se estableció cuantitativamente con el criterio de que el área del polígono se encuentra acotado entre el -5% y 5% de su área calculada en su condición inicial. La figura 10 muestra en círculos la intersección de $N = 3$ vórtices con topología variable V_{pq} en los tres vértices del polígono meridional.

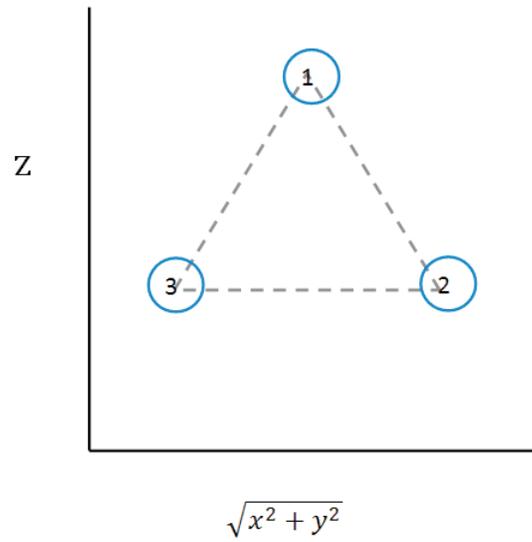


Figura 10. Intersección de tres vórtices (círculos) en un plano meridional $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ del toro en los vértices de un polígono de tres lados (números).

Capítulo III

RESULTADOS

A continuación se exponen los resultados sobre el movimiento y la permanencia de la forma de los siguientes conjuntos: NV_{11} , NV_{12} , NV_{13} , NV_{14} y NV_{15} . En todos éstos casos el número de vórtices eslabonados estuvo acotado entre $1 \leq N \leq 5$ y una razón de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$.

III.1 Vórtices con topología V_{11}

III.1.1 Uniformidad del movimiento

El movimiento de un conjunto de vórtices filiformes eslabonados con topología V_{11} se muestra en la figura 11. Cuando los vórtices se mueven lo hacen a lo largo de las siguientes componentes: Velocidad de traslación a lo largo del eje de simetría del toro (U), velocidad angular material Ω_1 y velocidad angular material Ω_2 .

Con el fin de determinar la uniformidad del movimiento de los vórtices filiformes, se analiza el desplazamiento espacial en z y los ángulos θ_e , ϕ y θ_f para un vórtice con topología $2V_{11}$.

Los desplazamientos espaciales y angulares del conjunto $2V_{11}$ eslabonado en una razón de aspecto igual a $r_1/r_0 = 0.10$ se muestra en la figura 12. Los desplazamientos a lo largo del eje de simetría del toro muestran que los vórtices se trasladan con velocidad uniforme U a lo largo del eje de simetría del toro. El desplazamiento angular θ_e muestra que los vórtices rotan con una velocidad angular material Ω_1 aproximadamente constante, como si fueran cuerpos rígidos en rotación. El ángulo ϕ con respecto a la

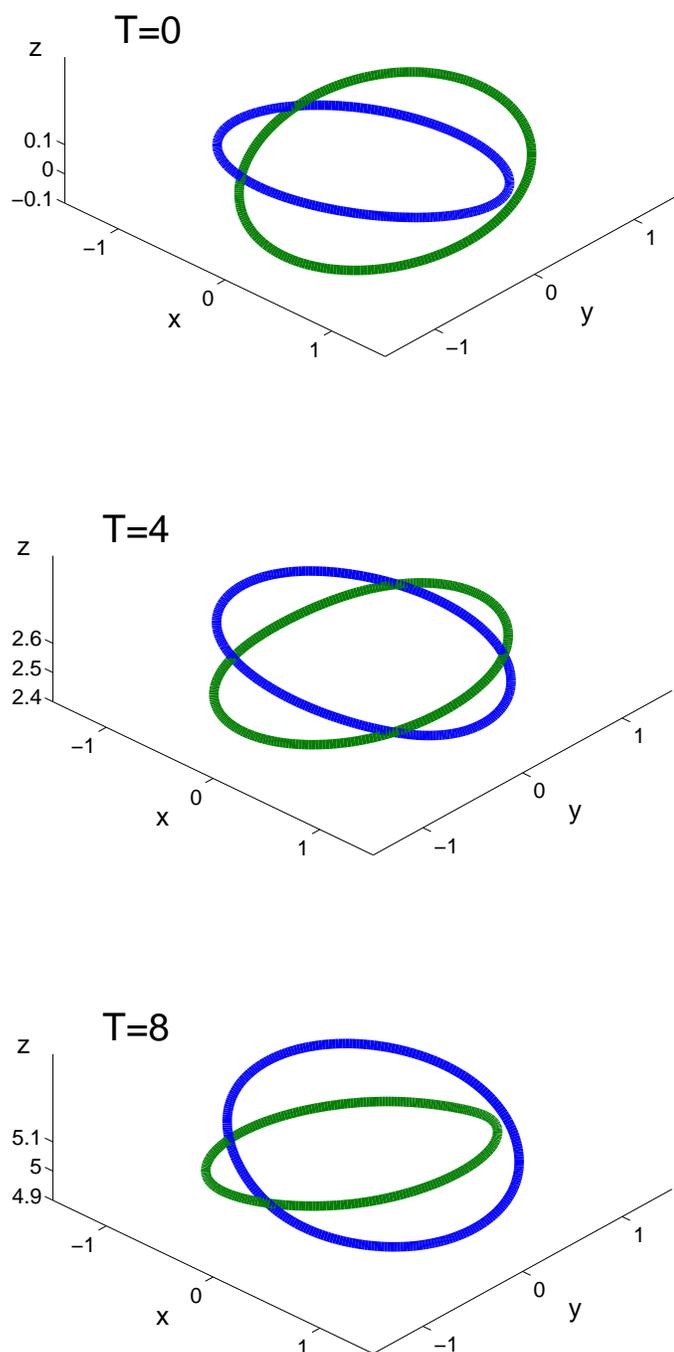


Figura 11. Evolución del conjunto $2V_{11}$. El conjunto se mueve a lo largo del eje de simetría del toro mientras conserva su forma. La posición de los vórtices se muestra en los siguientes tiempos: $T = 0$, $T = 4$ y $T = 8$.

línea central del toro decrece linealmente con una velocidad angular material Ω_2 aproximadamente constante. Por último se observó que el desplazamiento angular de fase θ_f crece linealmente con una velocidad de fase angular Ω_3 aproximadamente constante.

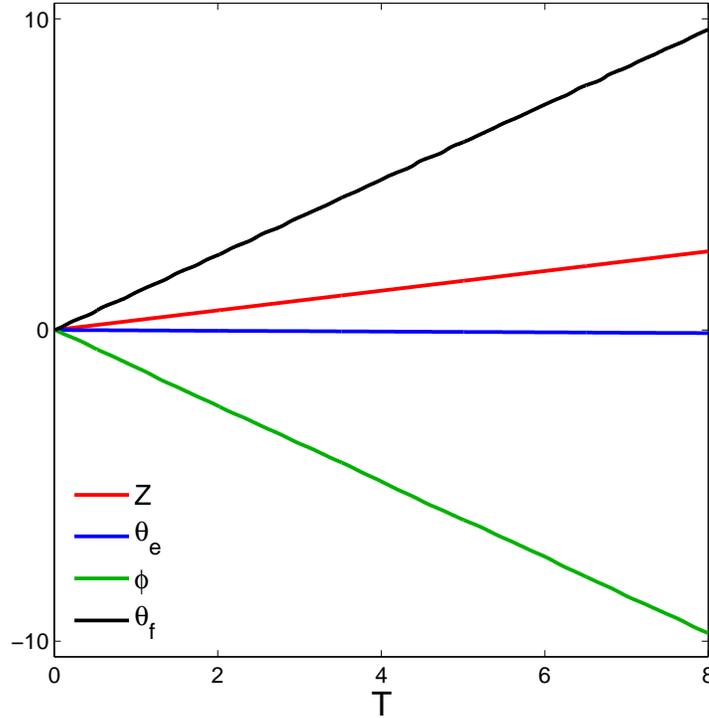


Figura 12. Desplazamiento en z , desplazamiento angular θ_e alrededor del eje de simetría del toro, desplazamiento angular ϕ alrededor de la línea central del toro y desplazamiento de fase angular θ_f alrededor del eje de simetría del toro.

La tendencia de las curvas de los distintos desplazamientos (espaciales y angulares) del conjunto $2V_{11}$ son similares a todos los demás casos (V_{12}, V_{13}, V_{14} y V_{15}) en los cuales se incrementa N y r_1/r_0 .

III.1.2 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0

Velocidad de traslación U a lo largo del eje de simetría del toro

La figura 13 muestra los contornos de U en función de N y r_1/r_0 para los vórtices con topología V_{11} . Los puntos negros representan el número N de vórtices eslabonados con distintas razones de aspecto r_1/r_0 en donde se calculó la velocidad.

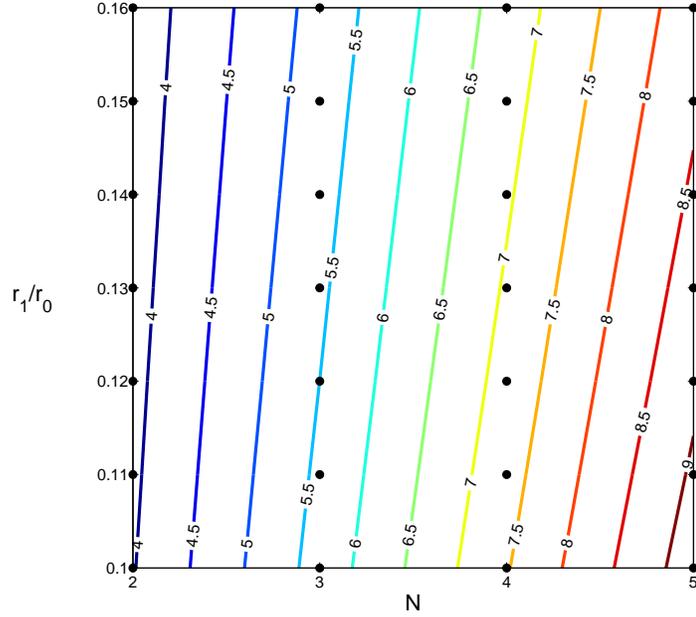


Figura 13. Velocidad de traslación U de un vórtice filiforme V_{11} en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$.

Podemos observar que las máximas velocidades de traslación U se encuentran en razones de aspecto pequeñas y número de vórtices grande, de hecho $U \approx 3/4NU_0$, donde U_0 es la velocidad de un vórtice anular $1V_{10}$ de intensidad Γ , radio r y sección transversal πa^2 :

$$U_0 = \frac{\Gamma}{4\pi r} \left[\log \frac{8r}{a} - \frac{1}{4} \right].$$

Velasco Fuentes (2010) obtuvo un resultado similar para un vórtice tubular anudado ($p \geq 1$), con $U \approx 3/4pU_0$, donde su velocidad de traslación U resultó ser proporcional al número de vueltas p que da el vórtice alrededor del eje de simetría del toro.

En la figura 14a se muestra el conjunto $2V_{11}$, donde cada uno de los dos vórtices con topología V_{11} da una vuelta $p = 1$ alrededor del eje de simetría del toro y una vuelta $q = 1$ alrededor de la línea central del toro. La velocidad U del conjunto $2V_{11}$ es aproximadamente igual al vórtice V_{21} que se muestra en la figura 14b.

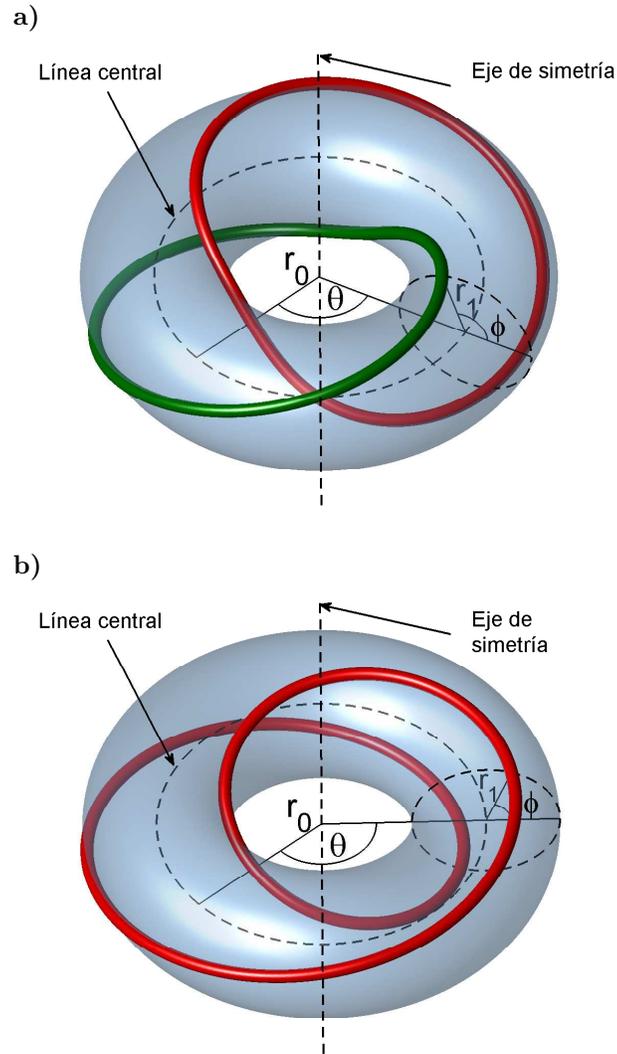


Figura 14. a) Dos vórtices eslabonados, cada uno con topología V_{11} . Antes de cerrarse en si mismo, cada vórtice da una vuelta $p = 1$ alrededor del eje de simetría del toro y una vuelta $q = 1$ alrededor de la línea central del toro. b) Un vórtice tubular anudado con topología V_{21} con $p = 2$ vueltas alrededor del eje de simetría del toro y una vuelta $q = 1$ alrededor de la línea central del toro.

Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro.

Se realizó el cálculo para Ω_1 con los mismos casos que se mencionaron para la velocidad de translación. La figura 15 muestra los contorno de la velocidad angular Ω_1 para N vórtices eslabonados NV_{11} , con $N = 2, 3, 4, 5$ sobre un toro cuya razón de aspecto fue $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$. La magnitud de Ω_1 crece uniformemente con N y decrece con r_1/r_0 .

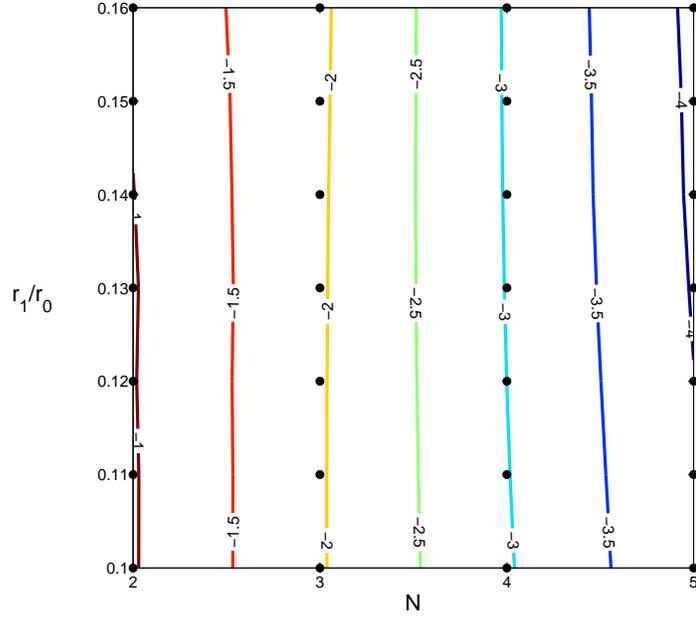


Figura 15. Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro, en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad angular Ω_1 está escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$.

Velocidad angular Ω_2 alrededor de la línea central del toro

Nuevamente consideramos los casos NV_{11} con $N = 2, 3, 4, 5$, y una razón de aspecto acotada en $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$. La velocidad angular Ω_2 se muestra en la figura 16, donde se observa que Ω_2 crece con incrementos de r_1/r_0 y decrece conforme se aumenta el número N de vórtices eslabonados.

Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro

La figura 17 muestra la velocidad angular de fase Ω_3 al considerar los casos NV_{11} con $N = 2, 3, 4, 5$, y una razón de aspecto acotada en $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$. Los resultados muestran que Ω_3 disminuye conforme aumenta r_1/r_0 y crece con N . Otro resultado fue que la magnitud de $\Omega_3 \approx \Omega_2$.

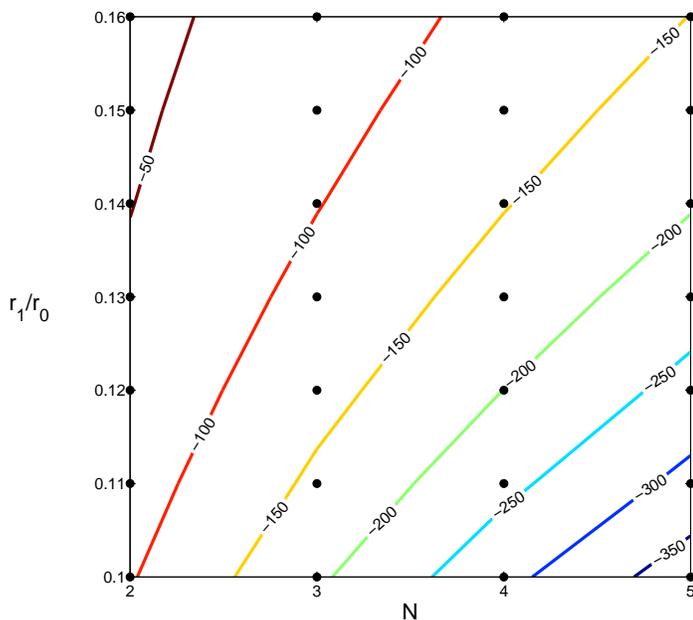


Figura 16. Velocidad angular Ω_2 material alrededor de la línea central del toro, en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad angular Ω_2 esta escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$.

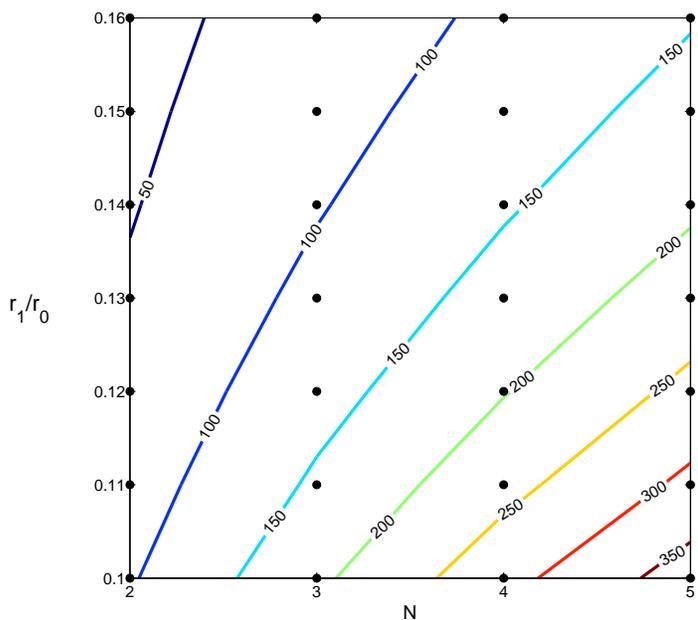


Figura 17. Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro, en función de N y r_1/r_0 . Donde N es el número de vórtices eslabonados y r_1/r_0 es la razón de aspecto de los radios del toro. La velocidad angular Ω_3 está escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$.

III.1.3 Permanencia de la forma del vórtice

La invariancia o permanencia de la forma del vórtice sobre la superficie de un toro, fue estudiada con su proyección en un plano meridional del toro, en términos de la longitud ($L(t)$) y de los radios del toro ($r_0(t)$ y $r_1(t)$). Decimos que el conjunto de vórtices conserva su forma cuando las variables antes mencionadas varían entre el -5% y el 5% de su valor inicial.

Proyección meridional de los vórtices NV_{11} con $N = 2, 3, 4, 5$

Los vórtices no modifican su topología cuando estos se trasladan y rotan a lo largo del eje de simetría del toro, ya que el campo de vorticidad cumple con la condición de Lipschitz, y en consecuencia una línea de vorticidad no puede atravesar a otra línea de vorticidad. Sin embargo, su forma se ve modificada debido a que los vórtices experimentan contracciones y estiramientos.

La figura 18 muestra la evolución de las proyecciones para $N = 2$ y $N = 3$ vórtices eslabonados en razones de aspecto igual a $r_1/r_0 = 0.10$, $r_1/r_0 = 0.13$ y $r_1/r_0 = 0.16$. Inicialmente las proyecciones poseen un radio igual a la razón de aspecto utilizada, éstas proyecciones permitieron observar que los conjuntos $2V_{11}$ y $3V_{11}$ mantienen su forma en toros cuya sección transversal es grande ($r_1/r_0 = 0.16$).

Al incrementar el número de vórtices eslabonados a $N = 4$ y $N = 5$ fue necesario acotar la razón de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$ para que las proyecciones del vórtice NV_{11} preservaran aproximadamente su proyección inicial (vea figura 19).

Longitud

Cuantitativamente la variancia del conjunto NV_{11} en función de su longitud se muestra en la figura 20. Donde L es la longitud de un filamento y L_0 es la longitud inicial. El número de vórtices eslabonados fue $N = 2, 3, 4, 5$ y las razones de aspecto para cada

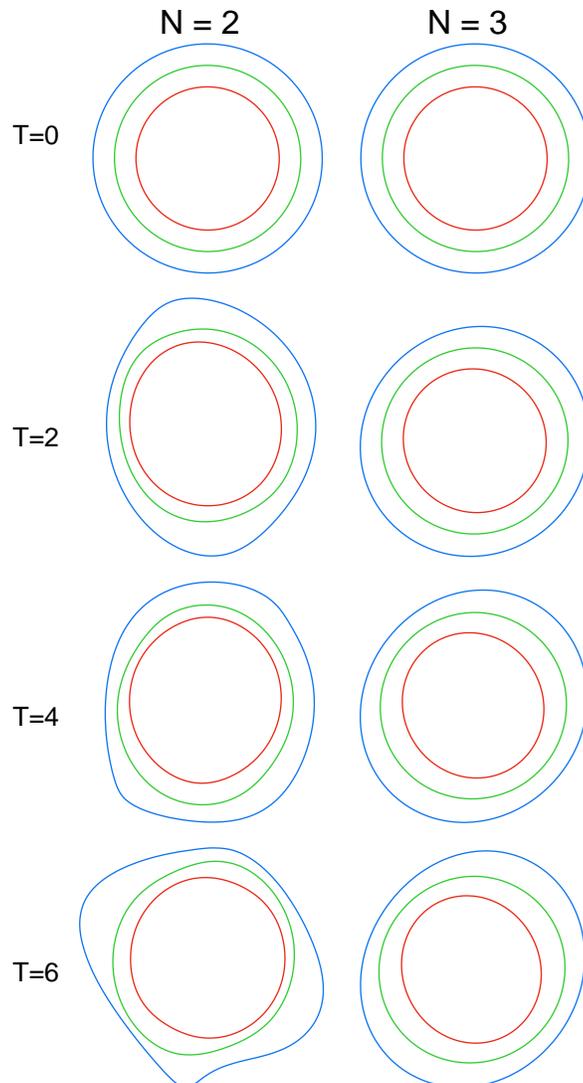


Figura 18. Deformación de vórtices con topología V_{11} con $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.13$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.16$ (azul). La deformación de ambos conjuntos se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 2, T = 4, T = 6$.

conjunto fueron $r_1/r_0 = 0.10$, $r_1/r_0 = 0.13$ y $r_1/r_0 = 0.16$.

Como se aprecia en la figura 20, las longitudes de los vórtices NV_{11} con razones de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.13$ siempre se mantuvieron por abajo de la cota de estabilidad, mientras que para una razón de aspecto igual a $r_1/r_0 = 0.16$, se observó que los conjuntos $4V_{11}$ y $5V_{11}$ presentaron un crecimiento monótono en su longitud.

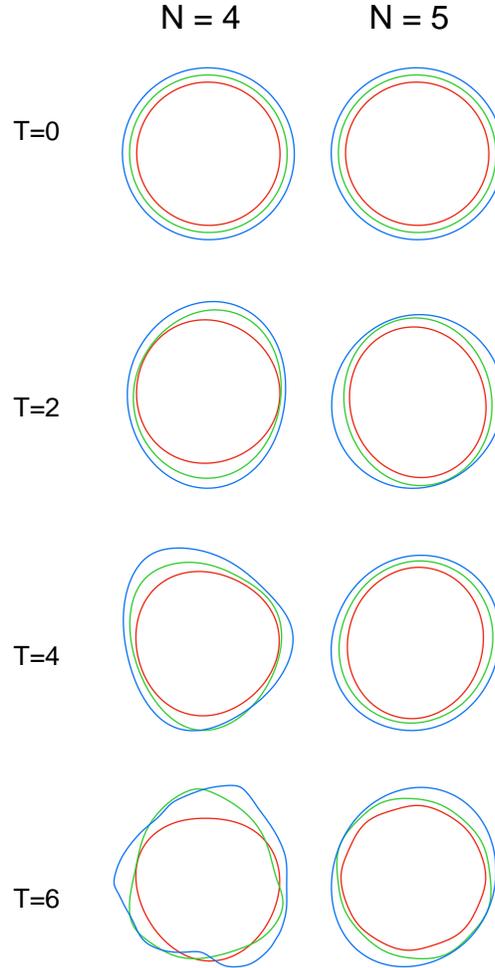


Figura 19. Deformación de vórtices con topología V_{11} con $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.12$ (azul). La deformación de ambos conjuntos se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$.

Radios del toro

A continuación se muestra la variación de los radios $r_0(t)$ y $r_1(t)$ del toro cuando se se eslabona el conjunto $2V_{11}$ (figura 21). Se observó que ambos radios permanecen invariantes a incrementos en la razón de aspecto de $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$. Independientemente del valor de N , en términos generales el valor de $r_1(t)$ crece antes de que lo haga $r_0(t)$ cuando r_1/r_0 aumenta.

También se observó que al considerar un toro delgado ($r_1/r_0 = 0.10$) y un número mayor de filamentos eslabonados (N), las fluctuaciones de los valores de $r_1(t)$ disminu-

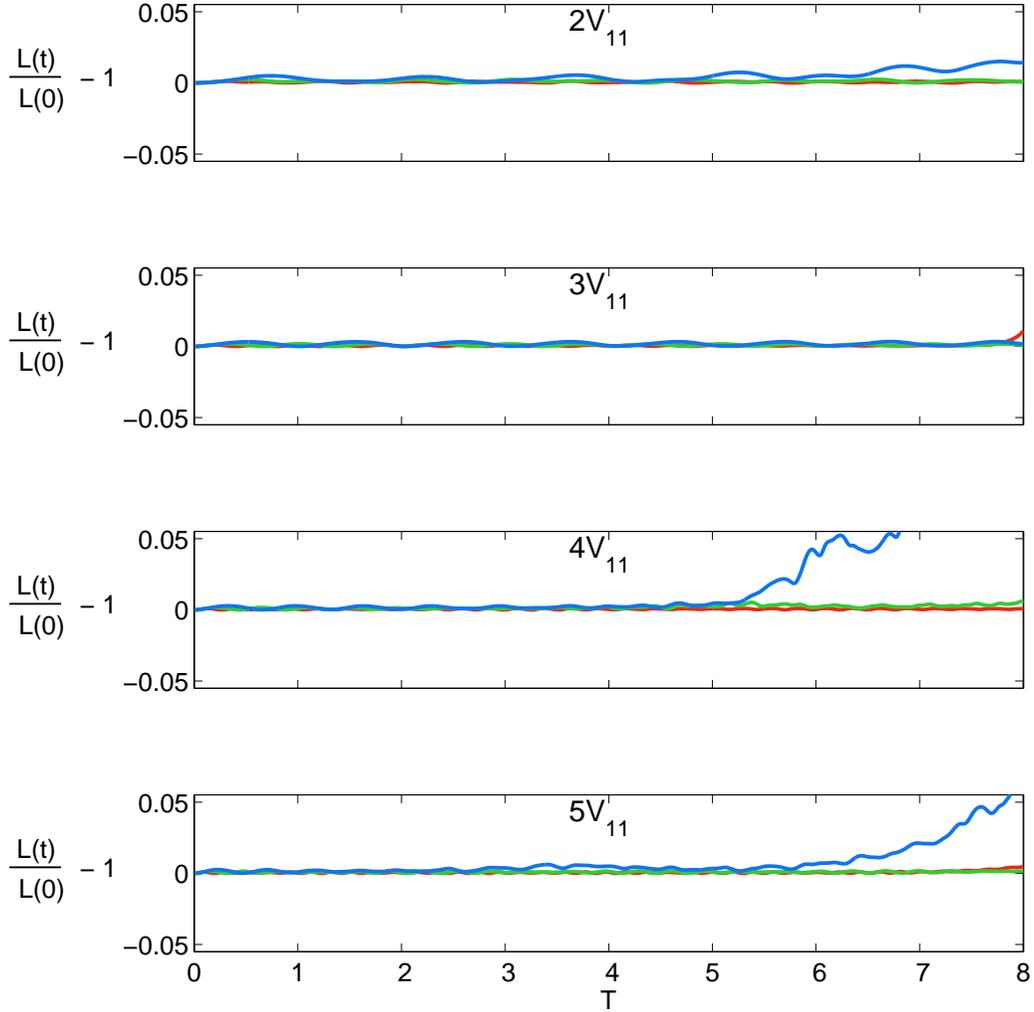


Figura 20. Evolución de la longitud de un filamento con topología NV_{11} . El número N de filamentos eslabonados son: $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto en todos los casos son: $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.13$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.16$ (azul).

uyen. La figura 22 muestra éste resultado, donde el radio $r_1(t)$ del conjunto $5V_{11}$ es más estable que el del conjunto $2V_{11}$.

Para poder visualizar las fluctuaciones del radio $r_1(t)$ éstos valores se acotaron entre el 0.1% y -0.1% de su valor inicial. No se eligió el radio $r_0(t)$ para analizar la permanencia de la forma de los vórtices, ya que las variaciones se encontraron acotadas entre el 0.01% y -0.01% de su valor inicial.

De acuerdo a los resultados anteriores, se concluye que la forma de los conjuntos $2V_{11}$ y $3V_{11}$ sobre la superficie de un toro se mantiene durante toda su evolución y que

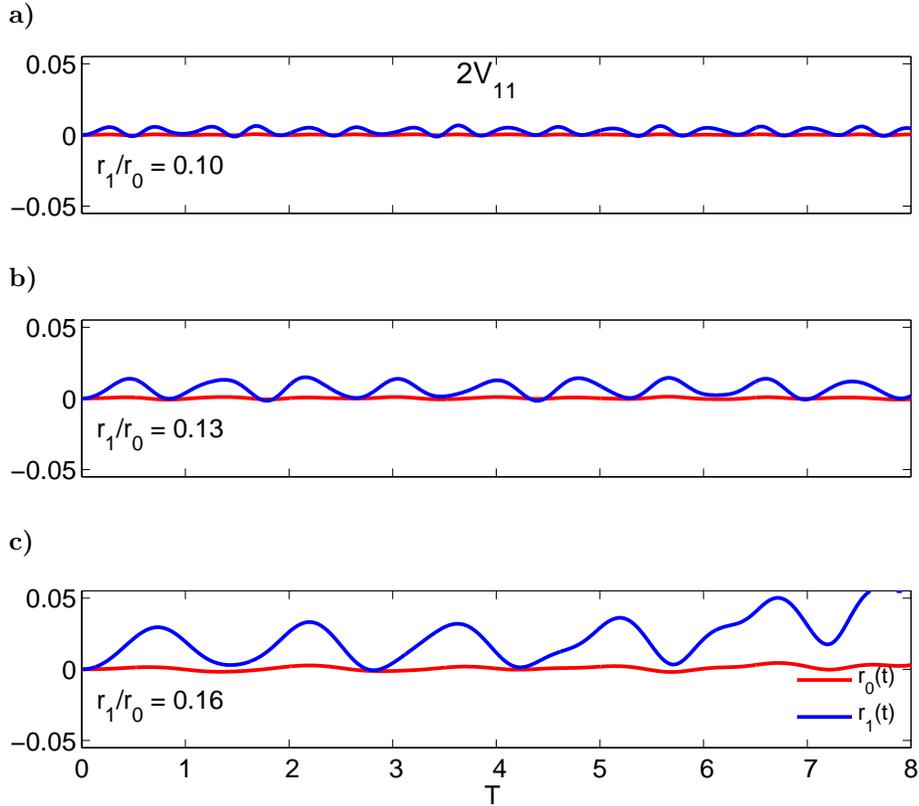


Figura 21. Variación de los radios del toro $r_0(t)$ y radio $r_1(t)$ de la sección transversal del toro en color azul. El número de vórtices eslabonados con topología V_{11} es igual a $N = 2$ con las siguientes razones de aspecto: (a) $r_1/r_0 = 0.10$, (b) $r_1/r_0 = 0.13$, (c) $r_1/r_0 = 0.16$.

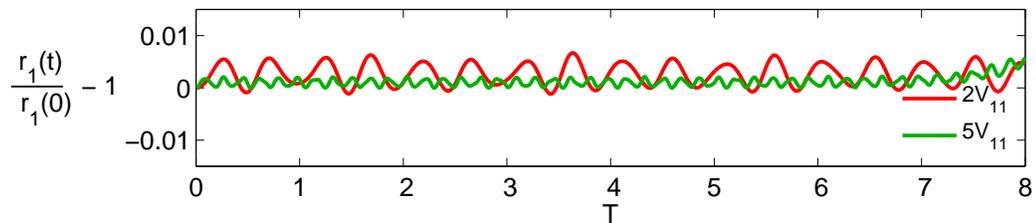


Figura 22. Variación del radio $r_1(t)$ para los conjuntos $2V_{11}$ y $5V_{11}$, ambos con una razón de aspecto de $r_1/r_0 = 0.10$

la forma de los conjuntos $4V_{11}$ y $5V_{11}$ se preserva sólo hasta $T = 7$.

Permanencia del polígono meridional

Se analizó el área del polígono meridional de tres, cuatro y cinco vértices ($N = 3, 4, 5$) para razones de aspecto $r_1/r_0 = 0.10$ y $r_1/r_0 = 0.14$ (figura 23). Donde A es el área del polígono de N vértices y A_0 el área de la condición inicial. Para ambas razones de

aspecto los polígonos estuvieron en la cota de estabilidad.

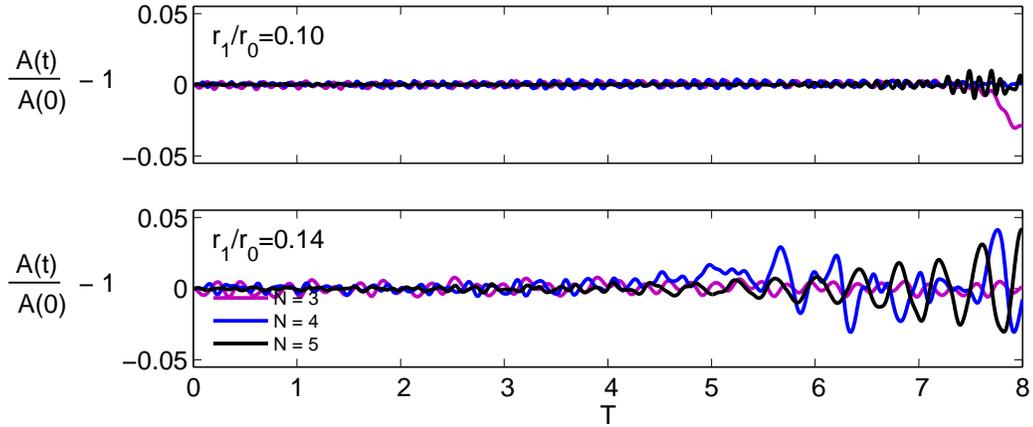


Figura 23. Evolución del área de los siguientes polígonos: triángulo, cuadrado y un pentágono generado con $N = 3$ (morado), $N = 4$ (azul) y $N = 5$ (negro) vértices. La razón de aspecto es $r_1/r_0 = 0.10$ y $r_1/r_0 = 0.14$.

La figura 24 muestra el caso $N = 3$, $N = 4$ y $N = 5$ vértices con $r_1/r_0 = 0.10$, $r_1/r_0 = 0.12$ y $r_1/r_0 = 0.14$. El caso $N = 3$ preserva la forma del polígono meridional durante toda la evolución del vórtice V_{11} , mientras que los casos $N = 3, 4$ sólo preservan la forma del polígono para una razón de aspecto entre $0.10 < r_1/r_0 < 0.12$.

De acuerdo a los resultados que se obtuvieron al analizar la longitud, los radios del toro y la permanencia del polígono meridional concluimos que los vórtices con topologías $2V_{11}$ y $3V_{11}$ conservan mejor su forma cuando la razón de aspecto es grande $r_1/r_0 = 0.16$. Para que la forma de los vórtices sobre la superficie del toro permaneciera cuando el número de vórtices se incrementó a $N = 4, 5$, fue necesario eslabonarlos en toros delgados ($0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$).

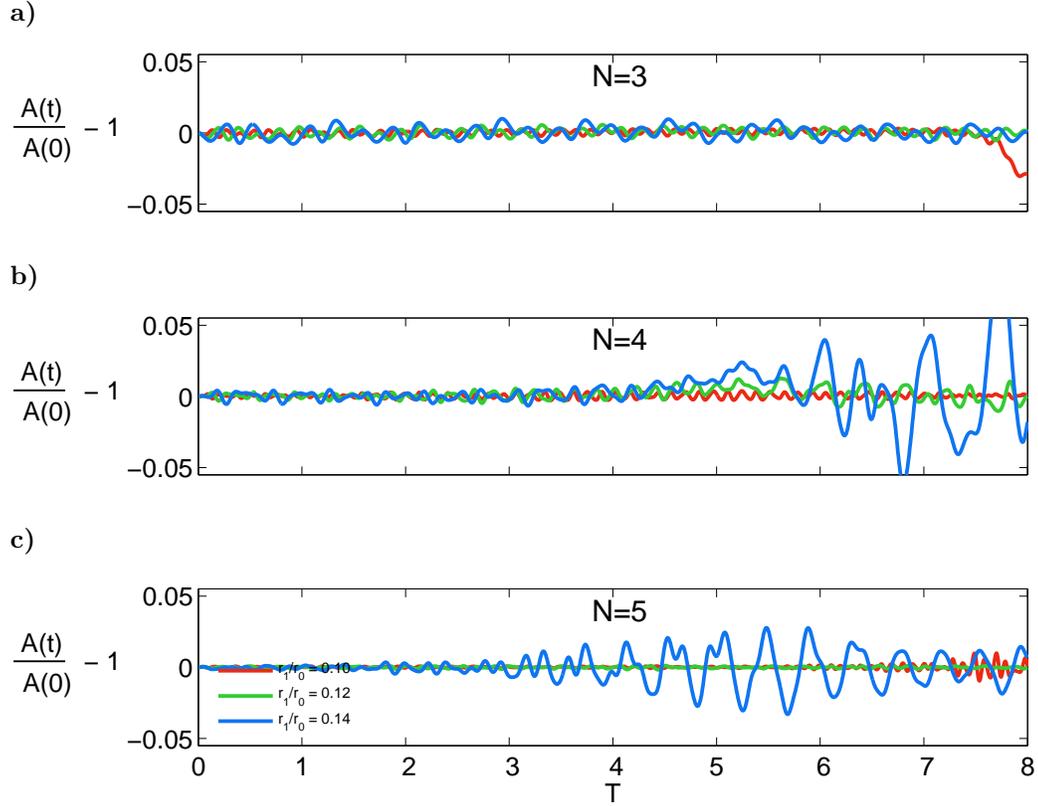


Figura 24. Evolución del área de un polígono meridional. a) Polígono meridional con $N = 3$ vértices. b) Polígono meridional con $N = 4$ vértices. c) Polígono meridional con $N = 5$ vértices.

III.2 Vórtices con topología V_{12}

III.2.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0

Los contornos de U , Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 al variar el número N de vórtices eslabonados entre $2 \leq N \leq 5$ y una razón de aspecto r_1/r_0 entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$ se muestran en la figura 25.

En ella se observa que la velocidad de traslación U y la velocidad angular material Ω_1 de todos los vórtices NV_{12} , decrece uniformemente con r_1/r_0 y crece con N (figuras 25a y 25b). Se observa también que los vórtices poseen una velocidad angular material Ω_2 que crece con r_1/r_0 y N (figura 25c) y una velocidad de fase Ω_3 que crece con incrementos en N y decrece con r_1/r_0 (figura 25d).

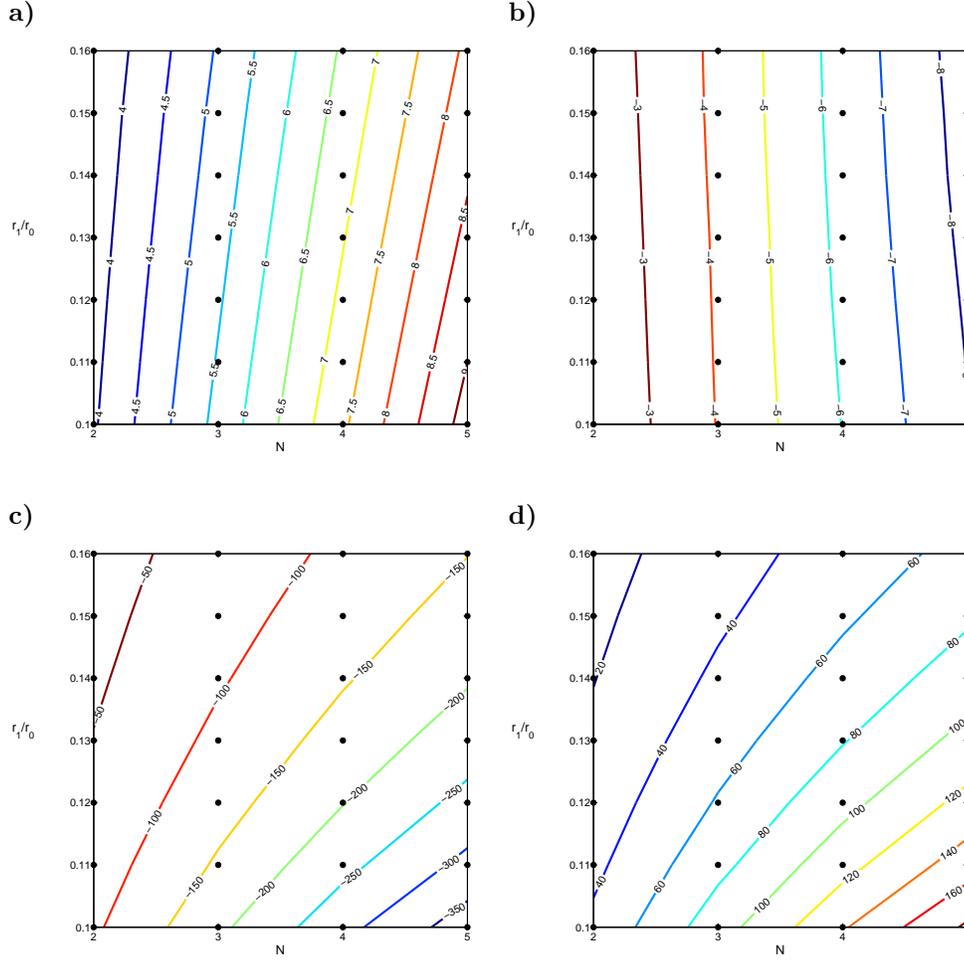


Figura 25. a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$.

Cuando las razones de aspecto estuvieron acotadas entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$, la velocidad de traslación U y la velocidad angular material Ω_2 fueron aproximadamente iguales al conjunto NV_{11} . Para éstas mismas razones de aspecto, se obtuvo que la velocidad angular material Ω_1 y la velocidad de fase angular Ω_3 del conjunto NV_{11} es aproximadamente el doble de la que se observó en el conjunto NV_{12} .

III.2.2 Permanencia de la forma del vórtice

Proyección meridional de los vórtices NV_{12} con $N = 2, 3, 4, 5$

Cualitativamente las deformaciones de los vórtices se analizaron con la proyección de uno de los vórtices del conjunto NV_{12} en un plano coordenado $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. En la figura 26 se observan las deformaciones de los vórtices $2V_{12}$ y $3V_{12}$, ambos conjuntos con razones de aspecto de $r_1/r_0 = 0.10$, $r_1/r_0 = 0.13$ y $r_1/r_0 = 0.16$.

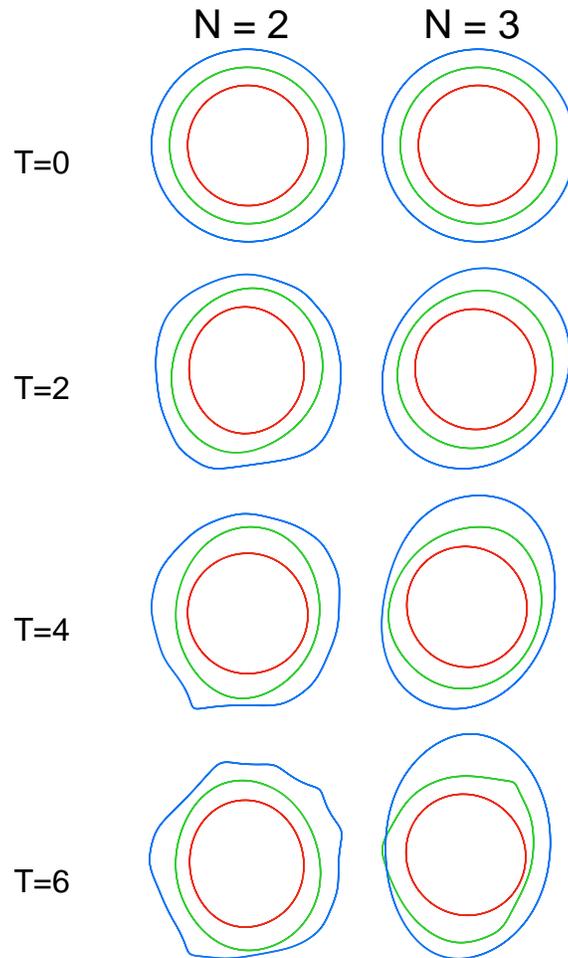


Figura 26. Deformación de vórtices con topología V_{12} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.13$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.16$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$.

Las deformaciones de los casos $4V_{12}$ y $5V_{12}$ se observan en la figura 27. Pero la complejidad del problema al aumentar el número de vórtices eslabonados implicó que

la razón de aspecto del toro tuviese que acotarse entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$ para que los vórtices preservaran su forma.

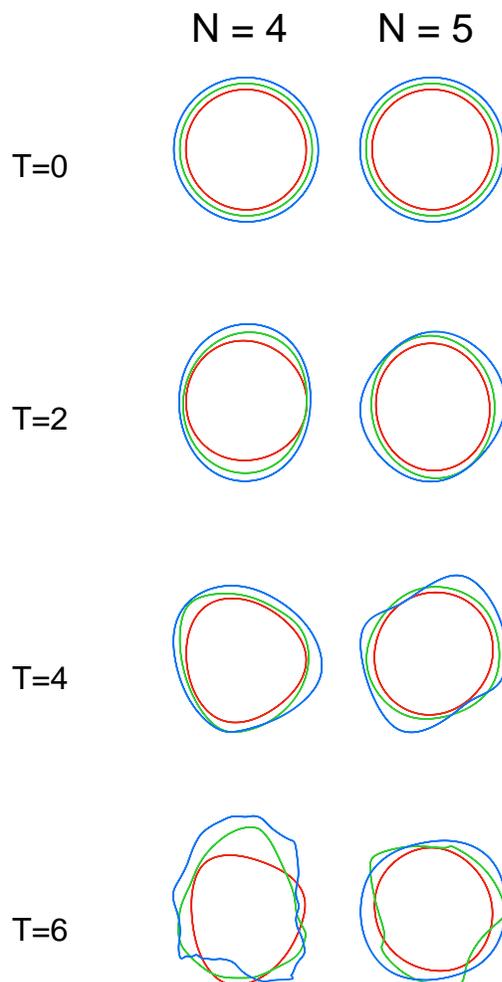


Figura 27. Deformación de vórtices con topología V_{12} para los casos $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.12$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$.

Cualitativamente las proyecciones meridionales de los vórtices V_{12} fueron similares al caso V_{11} cuando $N = 2, 3, 4$, sin embargo cuando el número de vórtices eslabonados aumentó a $N = 5$ las deformaciones ocurrieron en un menor tiempo.

Longitud

Otra de las medidas de la permanencia de los vórtices V_{12} es la métrica de su longitud. La evolución temporal de la longitud de uno de los vórtices del conjunto $2V_{12}$, $3V_{12}$, $4V_{12}$ y $5V_{12}$ se muestra en la figura 28. Los conjuntos $2V_{12}$ y $3V_{12}$ preservaron su longitud cuando la sección transversal del toro fue grande ($r_1/r_0 = 0.16$), cuando el número de vórtices eslabonados aumentó a $N = 4$ y $N = 5$ la razón de aspecto decreció hasta $r_1/r_0 = 0.12$, ambos resultados fueron similares al conjunto V_{11} .

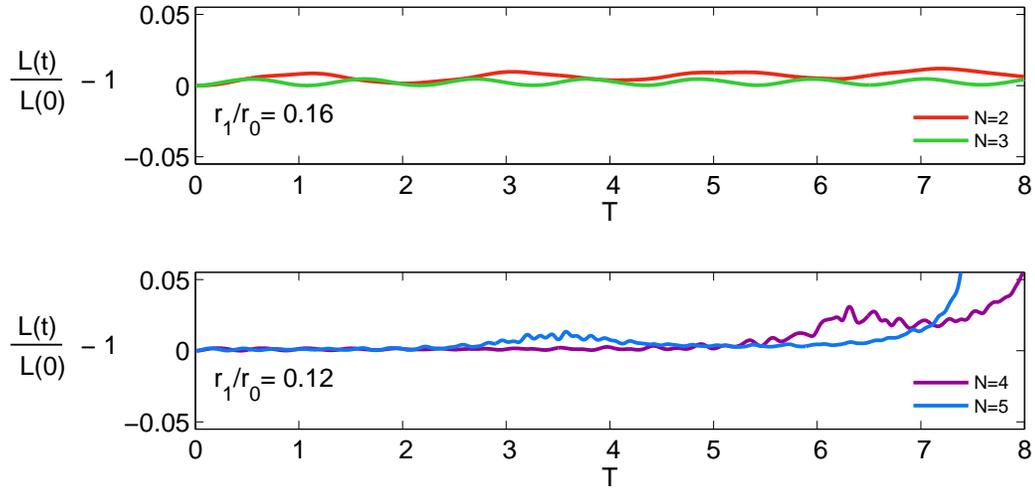


Figura 28. Evolución de la longitud de un filamento V_{12} . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.16$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$.

Radio r_1 de la sección transversal del toro

La figura 29 muestra la variación del radio de la sección transversal del toro. Para preservar la forma de los vórtices con topología $2V_{12}$ y $3V_{12}$ la razón de aspecto fue $r_1/r_0 = 0.16$. Cuando el número de filamentos eslabonados aumentó a $N = 4$ y $N = 5$, el máximo valor de la razón de aspecto en donde los vórtices fueron invariantes fue de $r_1/r_0 = 0.12$. Nuevamente ambos resultados fueron similares al caso V_{11} .

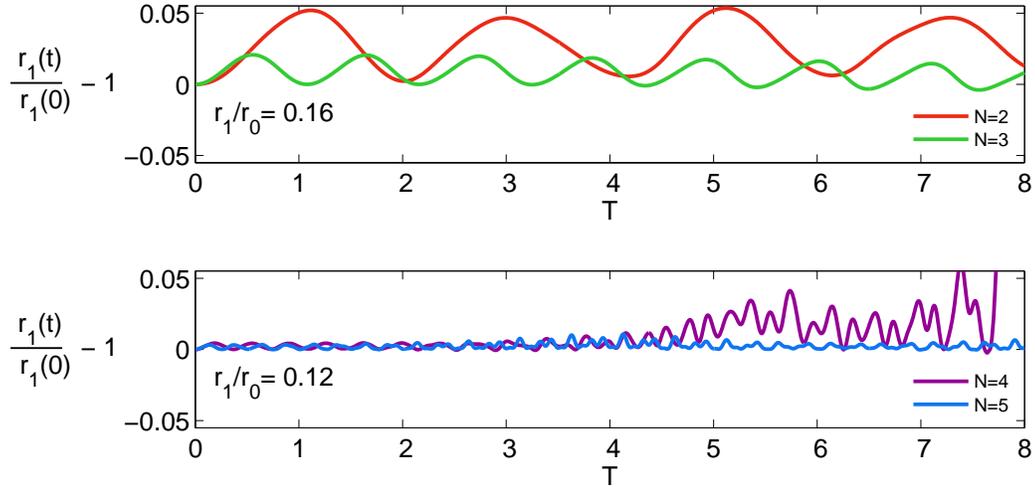


Figura 29. Evolución temporal del radio r_1 . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.16$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$.

Permanencia del polígono meridional

En la figura 30 se compara la evolución temporal del área del polígono meridional con $N = 3$ vértices y $N = 5$ vértices. Para comparar las distintas áreas de los polígonos, se considero la razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.12$ porque de acuerdo a los resultados anteriores, se observó que los vórtices $5V_{12}$ fueron invariantes sólo para razones de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$.

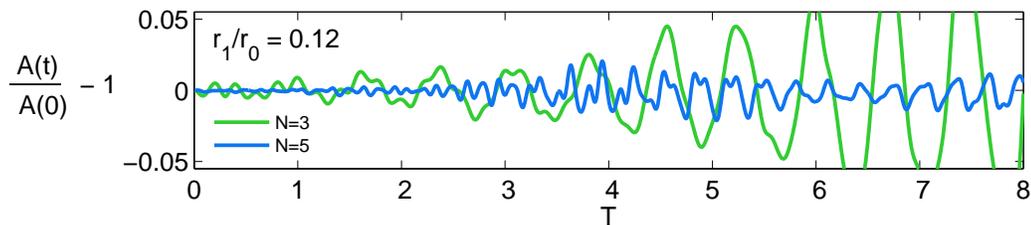


Figura 30. Evolución del área de un polígono generado con $N = 3$ vértices (línea verde) y $N = 5$ vértices (línea azul). La razón de aspecto es $r_1/r_0 = 0.12$.

De acuerdo a los resultados obtenidos para evaluar la permanencia de la forma de los conjuntos $2V_{12}$, $3V_{12}$, $4V_{12}$ y $5V_{12}$, se tiene que los conjuntos $2V_{12}$ y $3V_{12}$ son invariantes en su forma durante toda su evolución cuando la razón de aspecto se encuentra entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$. Cuando los conjuntos son $4V_{12}$ y $5V_{12}$, la forma de estos vórtices

se mantiene durante toda su evolución, si la razón de aspecto se encuentra entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$.

III.3 Vórtices con topología V_{13}

III.3.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0

Las velocidades U , Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 del conjunto NV_{13} para $2 \leq N \leq 5$ y diferentes razones de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$, se muestran en la figura 31. Se observa que la velocidad de traslación U y la velocidad angular material Ω_1 de todos los vórtices NV_{13} , decrece uniformemente con r_1/r_0 y crece con N (figuras 31a y 31b). También se observa que los vórtices describen una velocidad angular material Ω_2 que crece con r_1/r_0 y N (figura 31c) y que las velocidades de fase Ω_3 crecen con incrementos en N y decrece con r_1/r_0 (figura 31d).

Cuando las razones de aspecto estuvieron acotadas entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$, las velocidades de traslación U y la velocidad angular material Ω_2 del conjunto de vórtices NV_{13} fueron aproximadamente iguales a las observadas en el conjunto NV_{11} . Para éstas mismas razones de aspecto, se obtuvo que la velocidad angular material Ω_1 y la velocidad de fase angular Ω_3 del conjunto NV_{11} fueron aproximadamente el triple de la que se observa en el conjunto NV_{13} .

III.3.2 Permanencia de la forma del vórtice

Proyección meridional de los vórtices NV_{13} con $N = 2, 3, 4, 5$

Las deformaciones del vórtice se analizaron cualitativamente con la proyección de uno de los vórtices del conjunto NV_{pq} en un plano coordenado $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. En la figura 32 se observan las deformaciones de dos topologías diferentes, uno es la proyección de

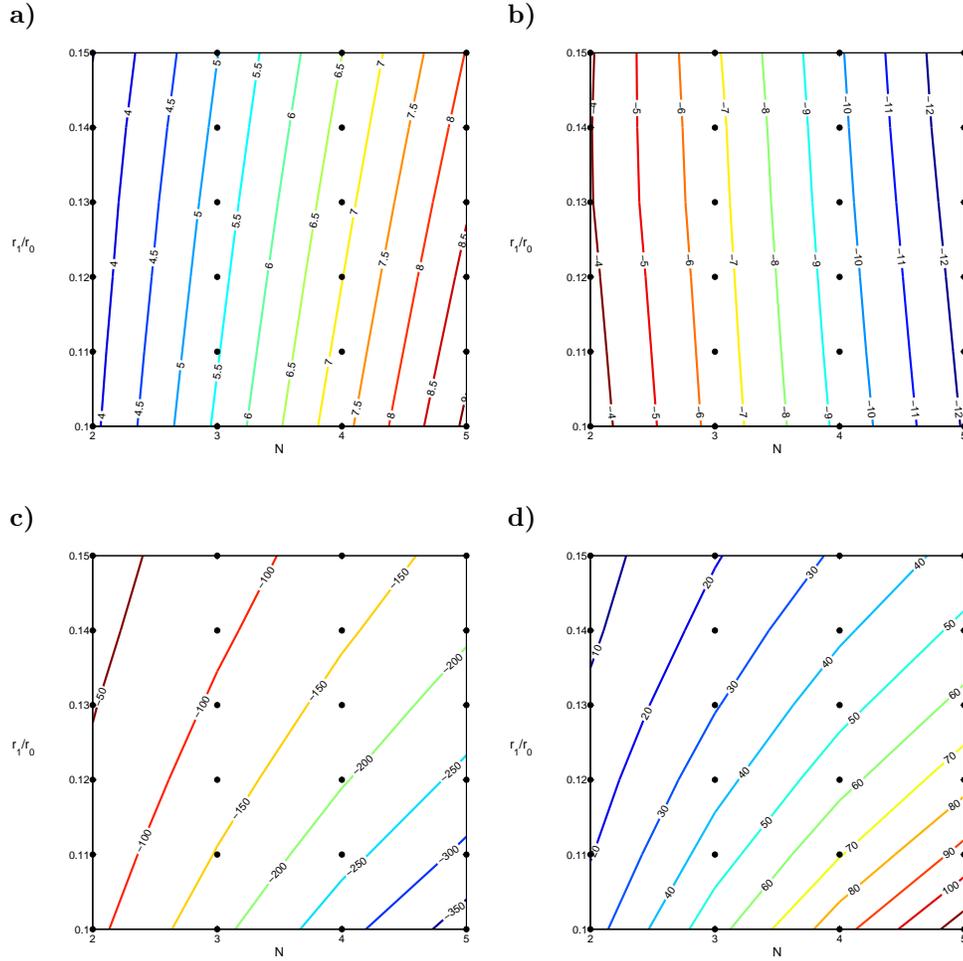


Figura 31. a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$.

un vórtice perteneciente al conjunto $2V_{13}$ (derecha) y otro es la proyección de un vórtice perteneciente al conjunto $3V_{13}$ (izquierda). Ambas proyecciones con razones de aspecto de $r_1/r_0 = 0.10$, $r_1/r_0 = 0.13$ y $r_1/r_0 = 0.16$ en color rojo, verde y azul, respectivamente. La complejidad del problema al aumentar el número de vórtices eslabonados (casos $4V_{13}$ y $5V_{13}$) implicó que la razón de aspecto del toro tuviese que acotarse entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$, para poder preservar la forma de los vórtices (vea figura 33).

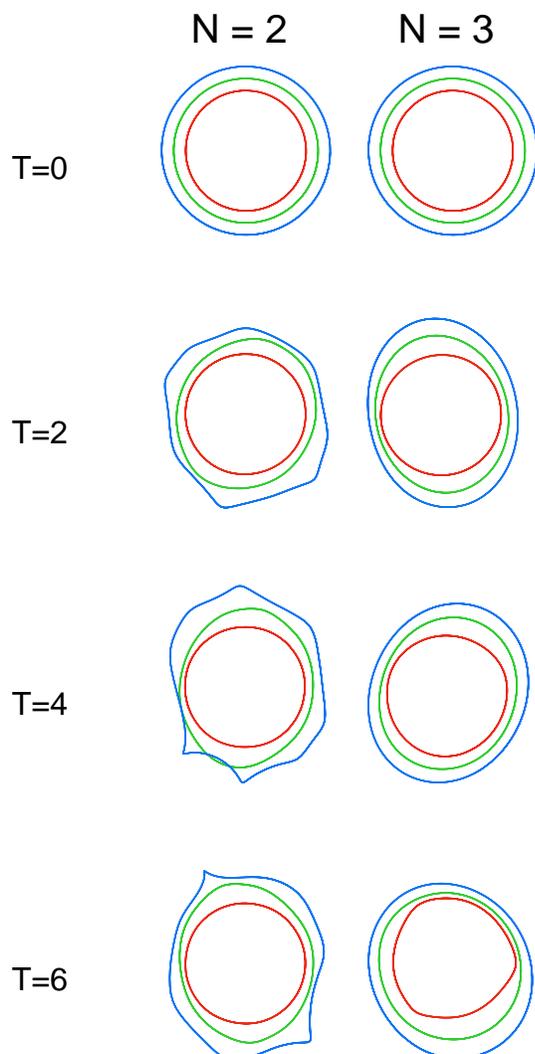


Figura 32. Deformación de vórtices con topología V_{13} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.12$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.14$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$.

Longitud

La evolución temporal de la longitud de uno de los vórtices V_{13} para distintos N y r_1/r_0 se muestra en la figura 34. Los conjuntos con $N = 2$ y $N = 3$ vórtices eslabonados conservaron su forma cuando la sección transversal del toro fue grande ($r_1/r_0 = 0.14$), cuando el número de vórtices eslabonados aumentó a $N = 4$ y $N = 5$ la forma de los vórtices se mantuvo en una razón de aspecto acotada entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$. Observe que es necesario disminuir la razón de aspecto para que el mismo número de

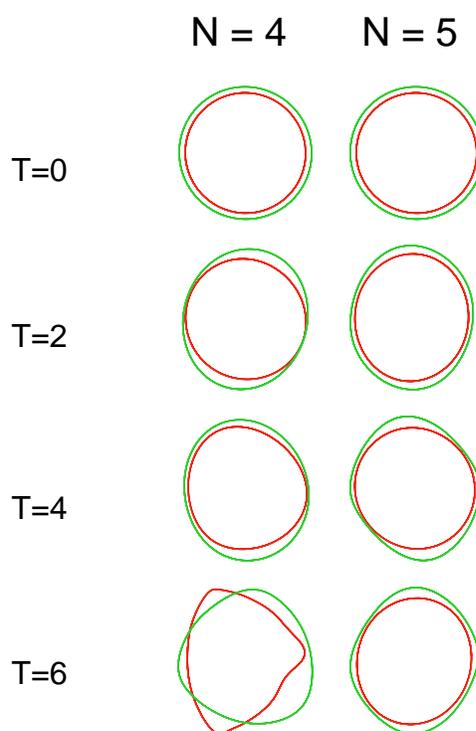


Figura 33. Deformación de vórtices con topología V_{13} para los casos $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo) y $r_1/r_0 = 0.11$ (verde). La deformación de los vórtice se muestra en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0, T = 2, T = 4, T = 6$.

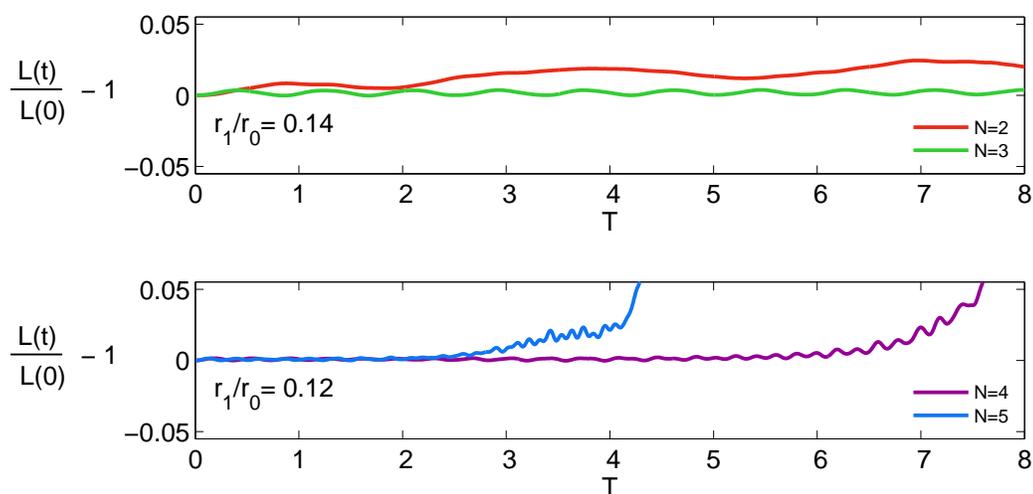


Figura 34. Evolución de la longitud de un filamento V_{13} . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.14$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$.

vórtices que se eslabonaron en el caso $NV11$ preserve su forma sobre la superficie del toro.

Radio r_1 de la sección transversal del toro

La figura 35 muestra la variación del radio de la sección transversal. Cuando la razón de aspecto fue $r_1/r_0 = 0.14$, el número de filamentos que se pudo eslabonar para preservar la forma de los vórtices con topología V_{13} fue $N = 2$ y $N = 3$. Cuando el número de filamentos eslabonados aumentó a $N = 4$ y $N = 5$, los vórtices fueron invariantes sólo para razones de aspecto pequeñas entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$ igual que en el caso NV_{11} .

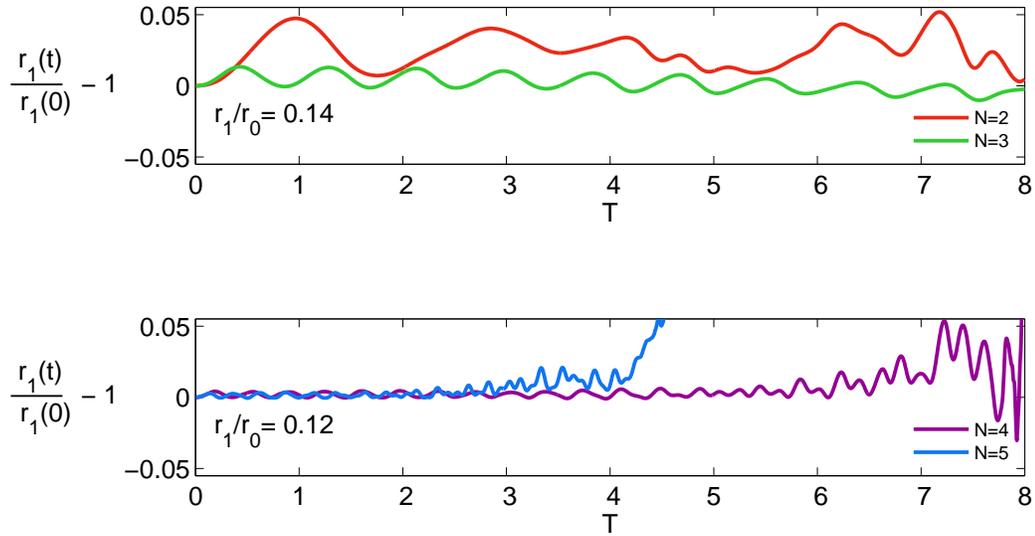


Figura 35. Evolución temporal del radio r_1 . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.14$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.12$.

Permanencia del polígono meridional

La evolución temporal del área del polígono meridional con $N = 3$ y $N = 4$ vértices se muestra en la figura 36. Para comparar las distintas áreas de los polígonos, se consideró la razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.12$ porque de acuerdo a los resultados anteriores, los vórtices $4V_{13}$ son invariantes sólo para razones de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$. De acuerdo a los análisis para evaluar la permanencia de la forma de los conjuntos $2V_{13}$, $3V_{13}$, $4V_{13}$ y $5V_{13}$, los resultados son los siguientes. Los conjuntos $2V_{13}$ y $3V_{13}$

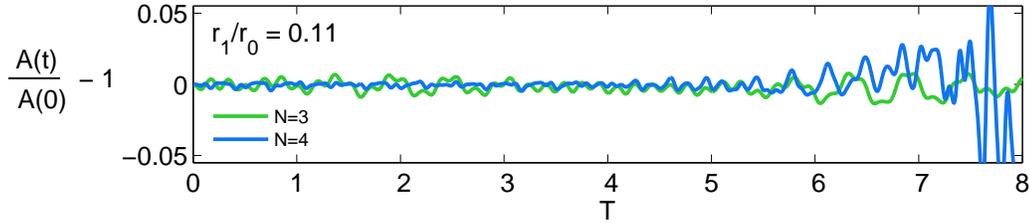


Figura 36. Evolución del área de un polígono generado con $N = 4$ vértices (línea verde) y $N = 5$ vértices (línea azul). La razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.11$.

son invariantes en su forma durante toda su evolución cuando la razón de aspecto se encuentra entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$. La forma del conjunto $4V_{13}$ se mantiene durante toda su evolución si la razón de aspecto se encuentra entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$. La forma del conjunto $5V_{13}$ se mantiene sólo para razones de aspecto pequeñas ($r_1/r_0 = 0.10$).

III.4 Vórtices con topología V_{14}

III.4.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0

Las velocidades U , Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 para cada uno de los conjuntos NV_{14} al variar la razón de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$ se muestran en la figura 37. Se observa que la velocidad U de todos los vórtices NV_{14} decrecen uniformemente con r_1/r_0 y crece con N al igual que la velocidad angular material Ω_1 (figuras 37a y 37b). Se observa también que los vórtices describen una velocidad angular material Ω_2 que crece con r_1/r_0 y N (figura 37c) y por último se observa que la velocidad de fase Ω_3 crece con incrementos en N y decrece con r_1/r_0 (figura 37d).

Cuando las razones de aspecto estuvieron acotadas entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$, las velocidades de traslación U y la velocidad angular material Ω_2 del conjunto de vórtices NV_{14} fueron aproximadamente iguales a las que se observaron en el conjunto NV_{11} . Para éstas mismas razones de aspecto, se obtuvo que la velocidad angular material Ω_1

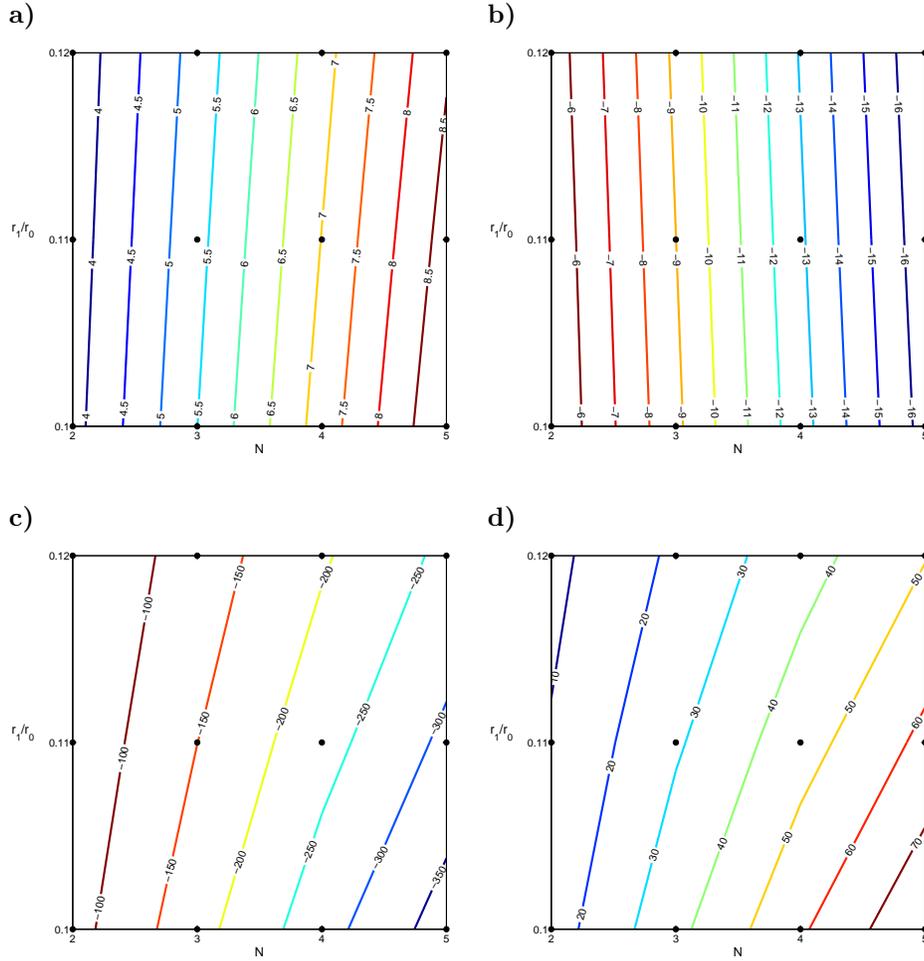


Figura 37. a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular materia Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$.

y la velocidad de fase angular Ω_3 del conjunto NV_{11} fue aproximadamente cuatro veces más de la que se observó en el conjunto NV_{14} .

III.4.2 Permanencia de la forma del vórtice

Proyección meridional de los vórtices NV_{13} con $N = 2, 3, 4, 5$

Cualitativamente las deformaciones de los vórtices se analizan con la proyección de uno de los vórtices del conjunto NV_{14} en un plano coordenado $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. En la figura

38 se observa la evolución temporal del vórtice $2V_{14}$ y $3V_{14}$ en los mismos tiempos que el conjunto V_{11} . Debido al aumento en el número de vueltas q , las razones de aspecto para ambos conjuntos son menores que los empleados en el caso V_{11} , de tal forma que las razones de aspecto para éste caso fueron : $r_1/r_0 = 0.10$, $r_1/r_0 = 0.11$ y $r_1/r_0 = 0.12$.

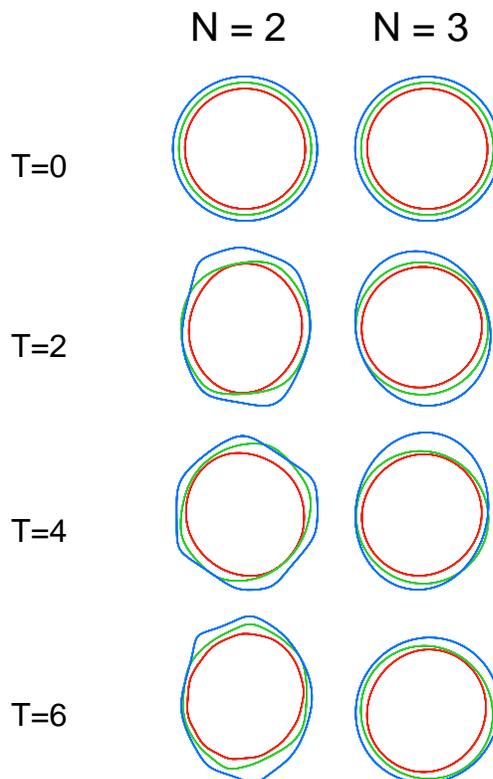


Figura 38. Deformación de vórtices con topología V_{14} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde) y $r_1/r_0 = 0.12$ (azul). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$, $T = 6$.

La complejidad del problema al aumentar el número N de vórtices eslabonados y el número de vueltas q alrededor de la línea central, como por ejemplo los casos $4V_{14}$ y $5V_{14}$, implicaron una disminución en la razón de aspecto del toro entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$. Para que los vórtices se movieran de manera uniforme, el tiempo disminuyó hasta $T = 4$ (vea figura 39).

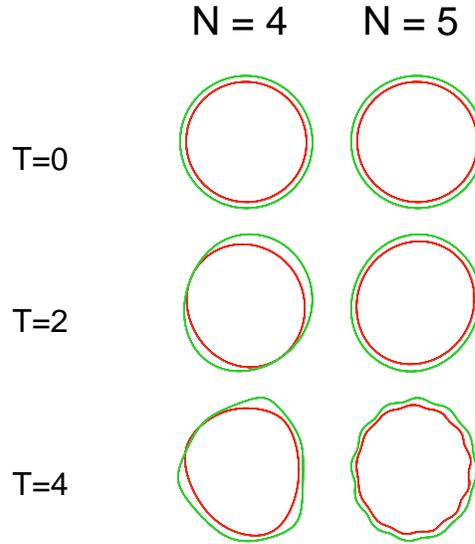


Figura 39. Deformación de vórtices con topología V_{14} para los casos $N = 4$ y $N = 5$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo), $r_1/r_0 = 0.11$ (verde). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 2$, $T = 4$.

Longitud

El conjunto con topología $2V_{14}$ y $3V_{14}$, conservaron su forma durante toda su evolución cuando la sección transversal del toro estuvo entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$. Cuando el número de vórtices eslabonados aumentó a $N = 4$ y $N = 5$, la razón de aspecto decreció entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$. Éstos vórtices ya no se mueven de forma uniforme cuando $T = 4$, tiempo a partir del cual el conjunto no preserva su forma (vea figura 40).

Radio r_1 de la sección transversal del toro

La figura 41 muestra la variación del radio de la sección transversal del toro. Cuando la razón de aspecto fue $r_1/r_0 = 0.12$, el número de filamentos que se pueden eslabonar para que la forma de los vórtices se preservara fue $N = 2$ y $N = 3$, igual que en el conjunto V_{11} . Cuando el número de filamentos eslabonados aumentó a $N = 4$ y $N = 5$, el máximo valor de la razón de aspecto en donde los vórtices fueron invariantes fue igual a $r_1/r_0 = 0.11$.

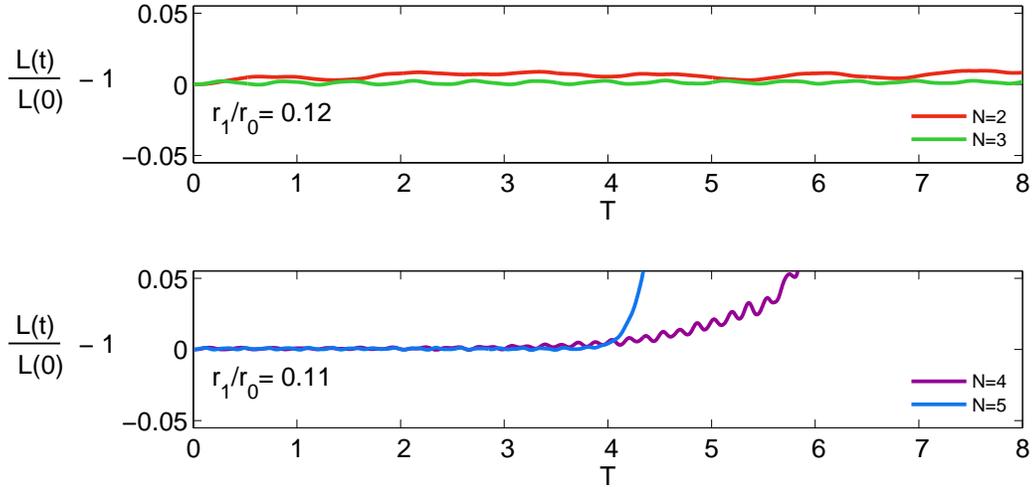


Figura 40. Evolución de la longitud de un filamento V_{14} . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.12$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.11$.

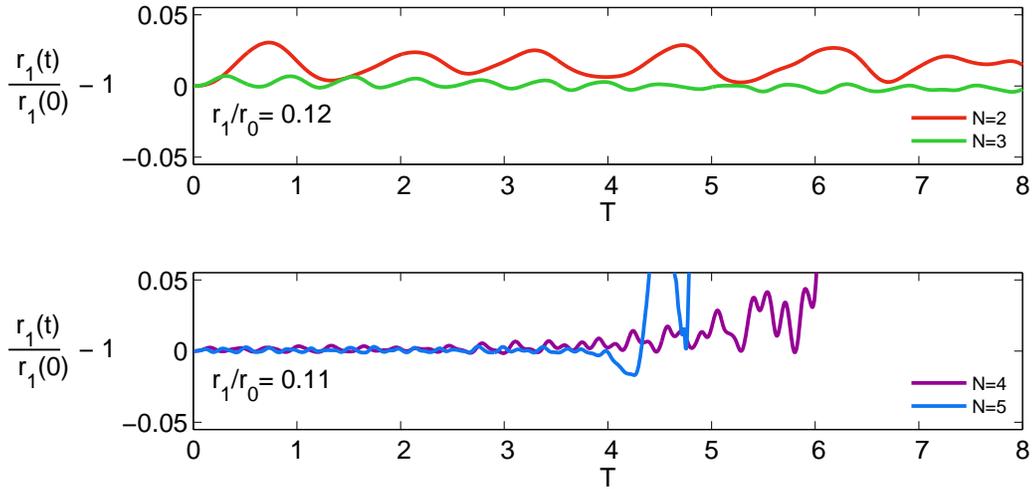


Figura 41. Evolución temporal del radio r_1 . La razón de aspecto para $N = 2$ y $N = 3$ es $r_1/r_0 = 0.14$. La razón de aspecto para $N = 4$ y $N = 5$ es $r_1/r_0 = 0.11$.

Permanencia del polígono meridional

La evolución temporal del área del polígono con $N = 3$ y $N = 4$ vértices se muestra en la figura 42. Para comparar las distintas áreas de los polígonos, se consideró la razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.11$ porque se observó que los vórtices $4V_{14}$ fueron invariantes sólo para razones de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$. En términos generales, la forma de los vórtices $2V_{14}$ y $3V_{14}$ se mantiene invariante durante toda su evolución cuando la razón de aspecto se encuentra entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$. Los conjuntos $4V_{14}$ y $5V_{14}$ preservan

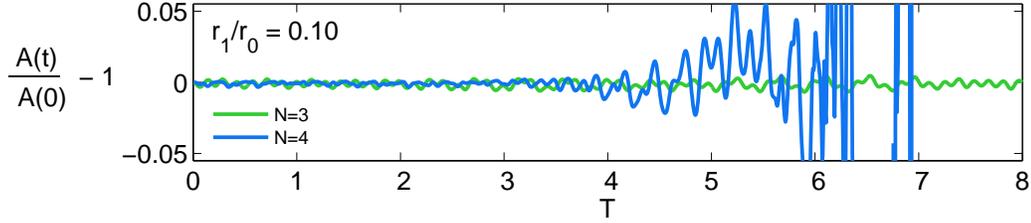


Figura 42. Evolución del área de un polígono generado con $N = 3$ vértices (línea verde) y $N = 4$ vértices (línea azul). La razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.11$

su forma si la razón de aspecto se encuentra entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$. La diferencia entre éstos conjuntos es el tiempo en el cual preservan su forma, ya que el conjunto $4V_{14}$ lo hace durante toda su evolución mientras que el conjunto $5V_{14}$ permanece sólo hasta $T = 4$. El movimiento de éste tipo de topologías (V_{14}) cada vez más complejas, preservan su forma en menos tiempo en comparación con el conjunto NV_{11} .

III.5 Vórtices con topología V_{15}

III.5.1 Velocidades del vórtice en función de N y r_1/r_0

Las velocidades U , Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 para cada uno de los conjuntos NV_{15} con $r_1/r_0 = 0.10$ y $r_1/r_0 = 0.11$ se muestran en la figura 43. Se observa que todos los vórtices NV_{15} poseen una velocidad U y velocidad angular material Ω_1 que decrecen uniformemente con r_1/r_0 y crecen con N (figuras 43a y 43b). Los vórtices también poseen una velocidad angular material Ω_2 que crece con r_1/r_0 y N (figura 43c) y cuyas velocidades de fase Ω_3 crecen con incrementos en N y decrece con r_1/r_0 (figura 43d).

III.5.2 Permanencia de la forma del vórtice

Proyección meridional de los vórtice NV_{15} con $N = 2, 3, 4, 5$

Cualitativamente las deformaciones de los vórtices se analizan con la proyección de uno de los vórtices del conjunto NV_{15} en un plano coordenado $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. En la

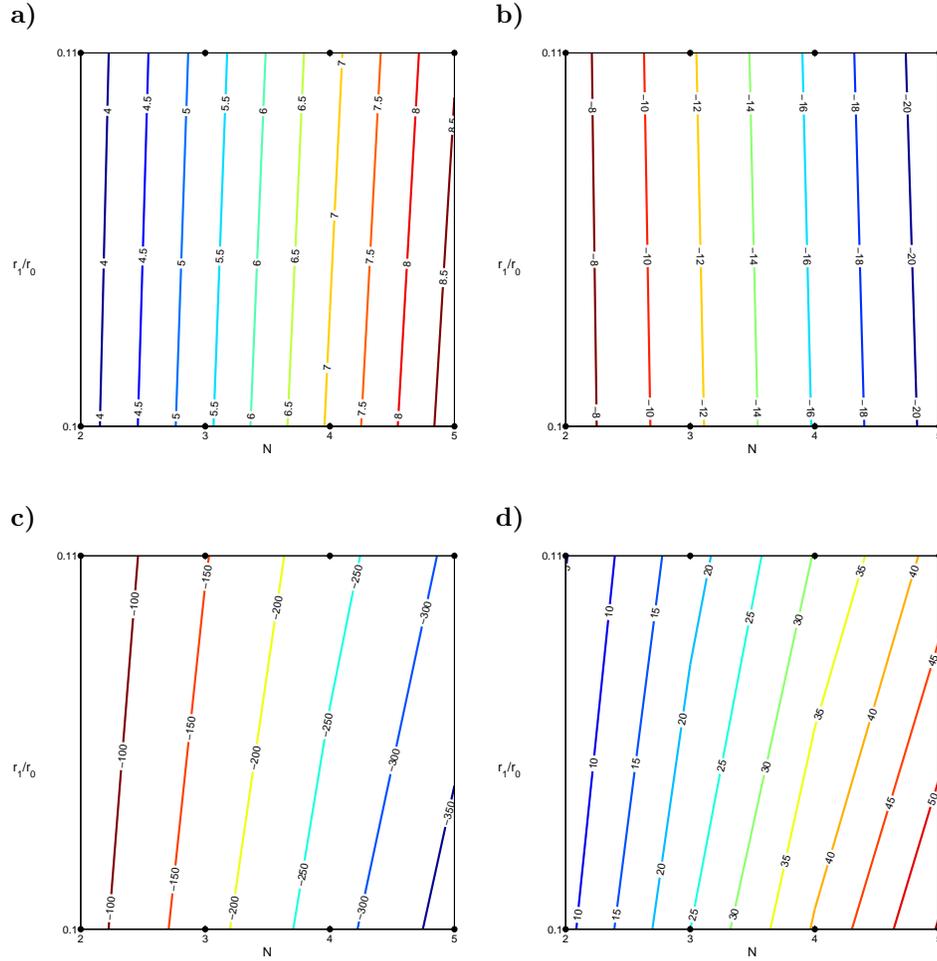


Figura 43. a) Velocidad de traslación U , b) Velocidad angular material Ω_1 alrededor del eje de simetría del toro. c) Velocidad angular material Ω_2 alrededor de la línea central del toro. d) Velocidad angular de fase Ω_3 alrededor del eje de simetría del toro. La velocidad de traslación U está escalada por $\Gamma/2\pi r_0$. Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 están escalada por $\Gamma/4\pi r_0^2$.

figura 44 se observa la evolución temporal del vórtice $2V_{15}$ y $3V_{15}$. Éstos preservan su forma en los mismos tiempos que el conjunto NV_{11} pero en razones de aspecto pequeñas ($0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$). Cuando el número de vórtices eslabonados fue $N = 4$ y $N = 5$, éstos preservan su forma en una razón de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$ pero sólo mantuvieron su forma hasta $T = 5$, por lo que a continuación solamente se analizaran los vórtices $2V_{15}$ y $3V_{15}$.

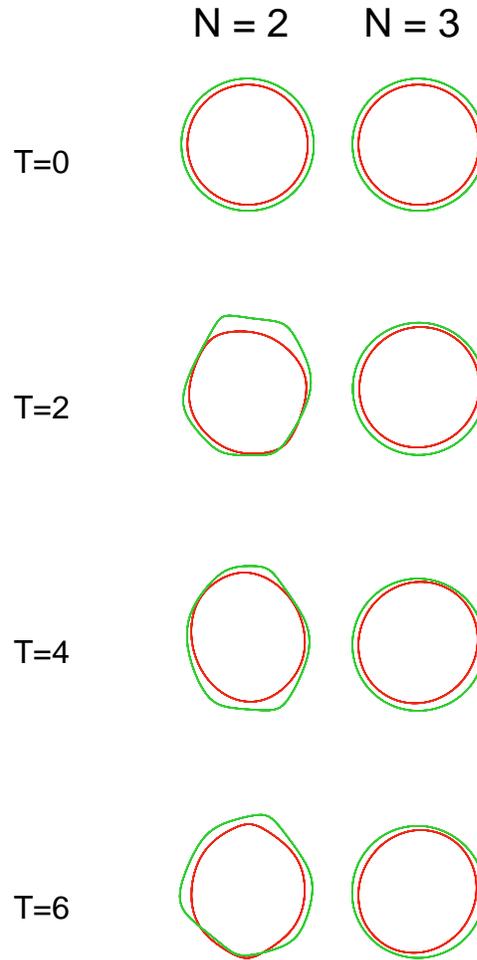


Figura 44. Deformación de vórtices con topología V_{15} para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Las razones de aspecto son $r_1/r_0 = 0.10$ (rojo) y $r_1/r_0 = 0.11$ (verde). La deformación de los vórtice se muestran en los siguientes tiempos adimensionales : $T = 0$, $T = 1$, $T = 2$, $T = 4$ y $T = 6$.

Longitud

Los conjuntos con topología $2V_{15}$ y $3V_{15}$ en comparación con el caso NV_{11} conservaron su forma durante toda su evolución en una razón de aspecto igual a $r_1/r_0 = 0.10$ (vea figura 45).

Radio r_1 de la sección transversal del toro

Para preservar la forma del conjunto NV_{15} , éstos únicamente pueden eslabonarse en una razón de aspecto igual a $r_1/r_0 = 0.10$. En la figura 46 se muestra la variación del

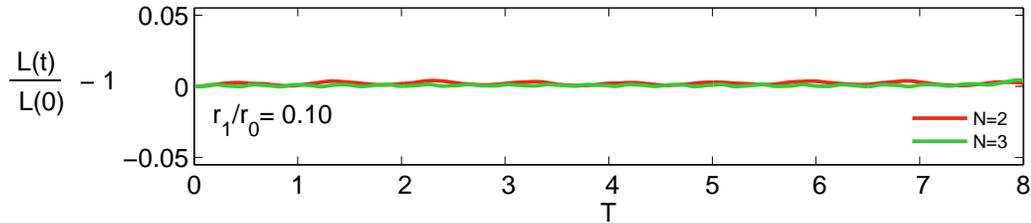


Figura 45. Evolución de la longitud de un filamento con topología $2V_{15}$ y $3V_{15}$ en una razón de aspecto $r_1/r_0 = 0.10$.

radio r_1 del toro cuando los vórtices eslabonados tienen topología $2V_{15}$ y $3V_{15}$.

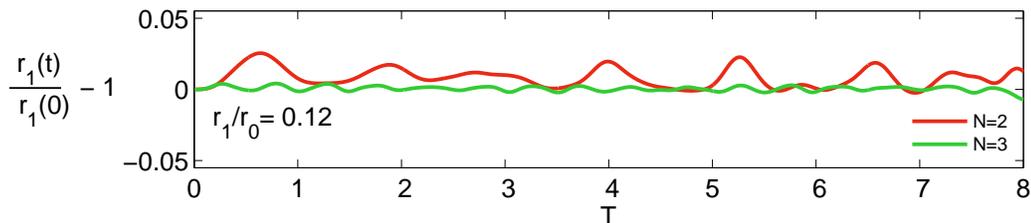


Figura 46. Evolución temporal del radio r_1 para los vórtices $2V_{15}$ y $3V_{15}$ con $r_1/r_0 = 0.10$.

Polígono meridional.

La evolución temporal del área del polígono meridional con $N = 3$ vértices se muestra en la figura 47. Se observa que el área se mantiene dentro de la cota de estabilidad y por lo tanto la forma del vórtice $3V_{15}$ se preserva durante toda su evolución.

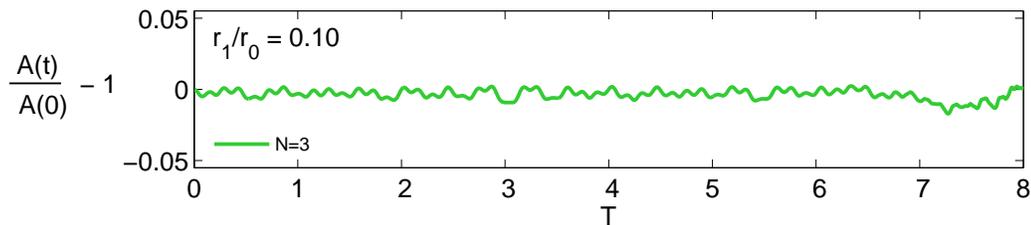


Figura 47. Evolución del área de un polígono generado con $N = 3$ vértices cuando la razón de aspecto es $r_1/r_0 = 0.10$.

La permanencia de los los vórtices con topologías más complejas ($2V_{15}$ y $3V_{15}$) se mantienen invariantes en su forma durante toda su evolución temporal cuando la razón de aspecto es $r_1/r_0 = 0.10$.

Capítulo IV

Conclusiones

De los resultados numéricos presentados concluimos que conforme se aumenta el número N de vórtices eslabonados, mayor será su velocidad de traslación U y su velocidad angular material Ω_1 . Ambas velocidades decrecen uniformemente cuando los vórtices se eslabonan sobre la superficie de un toro cuya razón de aspecto crece. Los vórtices rotan con mayor velocidad angular material Ω_2 al aumentar r_1/r_0 y N , mientras que la velocidad de fase Ω_3 decrece con incrementos de r_1/r_0 y crece con incrementos de N . Para tener permanencia de la forma de los vórtices al incrementar la razón de aspecto del toro r_1/r_0 , es necesario disminuir el número N de vórtices que se eslabonan. Para razones de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$, los vórtices filiformes son cuasi estacionarios sólo cuando el número de filamentos eslabonados es pequeño ($N = 2, 3$).

El aumento en el número de vueltas q alrededor de la línea central del toro, no favorece la permanencia de la forma de los vórtices.

Los vórtices con $q = 1$ presentan un movimiento cuasi estacionario cuando la razón de aspecto se encuentra entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$ y el número de filamentos eslabonados varía entre $2 \leq N \leq 5$.

Para preservar el estado cuasi estacionario de vórtices con $q = 2$, sólo es posible eslabonar $N = 2, 3$ vórtices con una razón de aspecto acotada entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.16$, mientras que con $N = 4, 5$ vórtices se requiere una razón de aspecto entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$.

Cuando $q = 3$ y $N = 2, 3$, el estado cuasi estacionario se preserva cuando la razón de aspecto está acotada entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.14$, mientras que si $N = 4$ se requiere una

razón de aspecto acotada entre $0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$, cuando $N = 5$, sólo se conserva éste estado para una razón de aspecto igual a $r_1/r_0 = 0.10$.

Para conservar un estado cuasi estacionario de vórtices con $q = 4$, es necesario disminuir el número de vórtices hasta $N = 3$ y sólo es posible eslabonarlos en toros delgados ($0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.12$).

Los vórtices con $q = 5$ mantienen un estado cuasi estacionario cuando el número de vórtices eslabonados es hasta $N = 3$ y la razón de aspecto del toro es pequeña ($0.10 \leq r_1/r_0 \leq 0.11$).

Con base en estos resultados, concluimos que los vórtices filiformes que conservan un estado cuasi estacionarios con más de dos vórtices eslabonados en toros con razón de aspecto grande ($0.10 < r_1/r_0 < 0.16$) son los vórtices con topología V_{11} .

A partir de nuestros resultados, ahora sabemos que las conjeturas realizadas por J.J. Thomson sobre la permanencia de la forma y del movimiento uniforme de vórtices eslabonados en la superficie de un toro están acotadas en función de los radios del toro y del número de vueltas alrededor de la línea central del toro.

Referencias

- Batchelor, G. K. (1977). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Dabiri, J. (2009). Optimal vortex formation as a unifying principle in biological propulsion. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **41**: 17–33.
- Dickinson, M. (2003). Animal locomotion: How to walk on water. *Nature*, **424**: 621–622.
- Eliot, G. y George, V. (2000). A hydrodynamic analysis of fish swimming speed: Wake structure and locomotor force in slow and fast labriform swimmers. *The Journal of Experimental Biology*, **203**: 2379–2393.
- Leonard, A. (1985). Computing three dimensional incompressible flows with vortex elements. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **17**: 523–559.
- Meleshko, V. (2010). Coaxial axisymmetric vortex rings: 150 years after helmholtz. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **24**: 403–431.
- Odifreddi, P. (2006). *La matemática del siglo XX : de los conjuntos a la complejidad*. Buenos Aires, Katz.
- Ricca, R., Samuels, D. C., y Barenghi, C. F. (1999). Evolution of vortex knots. *Journal of Fluid Mechanics*, **391**: 29–44.
- Saffman, P. G. (1995). *Vortex dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Shariff, K. y Leonard, A. (1992). Vortex rings. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **24**: 235–279.
- Thomson, J. J. (1883). *A treatise on the motion of vortex rings*. MacMillan & Co.
- Thomson, W. (1875). Vortex statics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **9**: 115–128.
- Velasco Fuentes, O. (2010). Chaotic streamlines in the flow of knotted and unknotted vortices. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **24**: 189–193.
- Velasco Fuentes, O. U. (2007). On the topology of vortex lines and tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, **584**: 147–156.