

Tesis defendida por
Fernando Andrade Canto

y aprobada por el comité

Dr. Julio Sheinbaum Pardo
Director del Comité

Dr. Julio Candela Pérez
Miembro del Comité

Dr. Luis Zavala Sansón
Miembro del Comité

Dr. Alejandro Francisco Parés Sierra
Miembro del Comité

Dr. José Antonio Martínez Alcalá
Miembro del Comité

Dr. Jesús Manuel Figueroa Rodríguez
*Coordinador del programa de
posgrado en Oceanografía Física*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de la dirección de Estudios de Posgrado

23 de abril de 2013

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA



Programa de Posgrado en Ciencias
en Oceanografía Física

Análisis Lagrangiano de la separación del remolino de la Corriente de Lazo

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

Presenta:

Fernando Andrade Canto

Ensenada, Baja California, México

2013

Resumen de la tesis de Fernando Andrade Canto, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Oceanografía Física.

Análisis Lagrangiano de la separación del remolino de la Corriente de Lazo

Resumen aprobado por:

Dr. Julio Sheinbaum Pardo

Determinar cómo y cuándo se separa el Remolino de la Corriente de Lazo (RCL) en el Golfo de México resulta complicado, ya que el remolino puede separarse y volverse a unir varias veces hasta que ocurre su separación final. Es común definir la separación del RCL utilizando campos Eulerianos, como la altura del nivel del mar. En este trabajo se sugiere que un análisis de tipo Lagrangiano es más adecuado para determinar el momento de separación del remolino. La idea básica es simple: la separación del RCL puede definirse como el momento en que las partículas que viajan del lado ciclónico de la Corriente de Lazo se desvían hacia el Este dirigiéndose directamente al Estrecho de Florida sin rodear al remolino. Las propiedades de los exponentes de tiempo finito de Lyapunov (FTLE, Finite Time Lyapunov Exponents, por sus siglas en inglés) se utilizan para estimar e identificar el “esqueleto” del flujo y las estructuras implicadas en los eventos de separación del remolino. Esto se lleva a cabo utilizando velocidades calculadas por medio de un modelo numérico de circulación oceánica NEMO (Nucleus for European Modelling of the Ocean). Ocho eventos de separación de RCLs se analizan mediante FTLEs definiendo además un índice “cuasi-Lagrangiano” que permite determinar con mayor precisión el momento de separación de los remolinos.

Se realiza un análisis Lagrangiano con velocidades calculadas por geostrofia a partir de datos de altimetría. Se muestra de nuevo que el índice “cuasi-Lagrangiano” permite estimar el momento en que el remolino se separa totalmente. Se utiliza además el concepto de Núcleos Hiperbólicos Lagrangianos (NHL) para definir en forma puramente Lagrangiana el momento de separación de los remolinos. Los resultados sugieren que la ausencia del NCL asociado al remolino indica que éste se ha separado.

Utilizando la misma metodología se analizan dos eventos de separación de RCLs usando velocidades del modelo NEMO a diferentes profundidades. Los resultados muestran que a profundidades mayores las partículas dejan de rodear al remolino antes que en la superficie, lo que sugiere que el proceso de separación inicia probablemente en las capas más profundas.

Palabras Clave: **punto hiperbolico, direccion de estiramiento, SSH, remolino, Corriente de Lazo**

Abstract of the thesis presented by Fernando Andrade Canto, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Doctor in Sciences in Physical Oceanography.

A Lagrangian approach to the Loop Current eddy separation

Abstract approved by:

Dr. Julio Sheinbaum Pardo

Determining when and how a Loop Current eddy (LCE) in the Gulf of Mexico will separate is a difficult task, since several detachment re-attachment processes can occur during one of these events. Separation is usually defined based on snapshots of Eulerian fields such as sea surface height (SSH) but here we suggest that a Lagrangian view of the LCE separation process is more appropriate and objective. The basic idea is very simple: separation should be defined whenever water particles from the cyclonic side of the Loop Current move swiftly from the Yucatan Peninsula to the Florida Straits instead of penetrating into the NE Gulf of Mexico. The properties of backward-time finite time Lyapunov exponents (FTLE) computed from a ocean circulation numerical model NEMO (Nucleus for European Modelling of the Ocean) of the Gulf of Mexico and Caribbean Sea are used to estimate the “skeleton” of flow and the structures involved in LCE detachment events. An Eulerian metric is defined, based on the slope of the strain direction of the instantaneous hyperbolic point of the Loop Current anticyclone that provides useful information to forecast final LCE detachments.

An Lagrangian analysis is performed using geostrophy velocities computed from altimetry data. It shows again that the “quasi-Lagrangian” index estimate the time when the eddie is completely separated. It also uses the recent concept of hyperbolic core to define in a purely Lagrangian separation. The results suggest that the absence of hyperbolic core indicates that the eddie is totally separated.

Finally, using the same methodology we analyze two RCL separation events using velocities at different depths, which are computed from the model NEMO. The results show that in deepest particles cease to surround the eddie before the surface, suggesting that the separation process begins probably in the deeper layers.

Keywords: Hyperbolic points, strain direccion, SSH, eddies, Loop Current.

Dedicatorias

A los creadores de Cacho, y a todos los que han influido en él;
pues de un modo u otro todos se encuentran en este trabajo....

A Santiago y Gonzalo.

Y a los que faltan también.

Agradecimientos

A todos los investigadores, estudiantes y personal del departamento de oceanografía por su enseñanza académica.

Al CONACyT y por su apoyo económico.

Gracias Julio por ayudarme a descubrir el mundo Lagrangiano y sus herramientas que tanto trabajo me costo entender y usarlas. Las cuales, deseo seguir usándolas y además compartir que he entendido con la misma paciencia que tu siempre has mostrado.

Gracias Luis por el apoyo e interés en este trabajo, sin el este trabajo no hubiese concluido.

Gracias a Fransisco y Josefina por el apoyo, criticas y comentarios que enriquecieron este trabajo.

A Oscar Velasco por compartir su conocimiento y su trabajo, gracias.

A José Ochoa y Julio Candela por los comentarios y consejos, gracias.

Al grupo CANEK por todo su apoyo.

A mis Padres.

A Lorena.

A Santiago y Gonzalo, por demostrarme que no todo son LCS.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Lista de Figuras	vii
1. Introducción	1
2. Descripción de las estructuras Lagrangianas coherentes (LCS)	8
2.1 Análisis dinámico de una función independiente del tiempo	8
2.1.1 Puntos fijos, definición y clasificación	9
2.1.2 Autovalores y clasificación de los puntos fijos	12
2.1.3 Variedades estables e inestables de los puntos hiperbólicos . .	15
2.2 Análisis dinámico de una función dependiente del tiempo	18
2.2.1 Obtención de las variedades	18
2.3 Exponentes de tiempo finito de Lypunov	19
3. Análisis Lagrangiano de la separación del RCL utilizando datos del modelo NEMO	24
3.1 Descripción del modelo de circulación oceánica NEMO	24
3.2 Calculo de los FTLE para la profundidad de 68m	26
3.2.1 Resultados	28
3.2.2 Síntesis y conclusiones-NEMO	38
4. Análisis Lagrangiano con velocidades geostróficas calculadas con altimetría	42
4.1 Altura del nivel del mar (SSH)	42
4.1.1 Velocidades geostróficas	43
4.2 FTLE	45
4.3 Resultados	46
4.3.1 Núcleo Hiperbólico Lagrangiano (NHL)	50
4.3.2 Aplicación de los Núcleos Hiperbólicos Lagrangianos	54
4.3.3 Análisis de la evolución de los NHL	55
4.3.4 Discusión	59
5. Descripción Lagrangiana del proceso de separación a diferentes profundidades con datos del modelo NEMO	61

	Página
5.1 Resultados	62
5.2 Resumen y discusión	66
6. Resumen final	68
Referencias bibliográficas	71
Abreviaturas	78
Apendice	79

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Imágenes instantáneas de la SSH generadas por AVISO (panel a), y la imagen compuesta de la Temperatura superficial del mar (SST) generadas por GOES SST, Louisiana State University (panel b), para Febrero 6, 2008. Notese que el contorno de los $17cm - SSH$ (línea negra) sugiere que el remolino de la CL (RCL) se ha separado por completo, mientras que la imagen compuesta de la SST indica que el remolino permanece unido	3
2	Imágenes semanales del campo de la SSH (AVISO) en m durante el evento de separación-reunión, que ocurre en Mayo-Junio 2008, en la parte superior derecha de cada imagen esta indicada la fecha. Una vez que la separación ocurre, el contorno de los $17cm - SSH$ no provee información suficiente para saber si el remolino puede volver a juntarse o no; como sucede en este evento.	4
3	Campo de velocidades producido por dos vórtices puntuales, en el cual se representa a dos remolinos centrados en el eje y . Ecuaciones del oscilador de Duffing que puede interpretarse como el campo de velocidades de dos vórtices (remolinos) centrados sobre el eje y en $(0,-1)$ y $(0,1)$	10
4	Puntos fijos (*) y las líneas de corriente para el campo de velocidades de la Figura 3	10
5	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, <i>punto hiperbólico</i> ; en este caso la trayectoria se acerca inicialmente para luego alejarse del punto fijo	14
6	$\lambda_1 = -i\omega, \lambda_2 = i\omega$, <i>punto elíptico</i> ; en este caso las trayectorias dan vueltas alrededor del punto fijo en forma de círculos o elipses	14
7	Flujo sin perturbación en donde se presenta la variedad estable W^s (línea roja) y variedad inestable W^u (línea negra); ambas variedades se acercan al punto hiperbólico (*)	17
8	Trayectoria hiperbólica $\gamma(t)$ línea negra; la variedad estable comienza su evolución en la dirección de compresión al tiempo $t + \Delta t$ (rojo) y la variedad inestable comienza su evolución en la dirección de estiramiento al tiempo $t - \Delta t$ (azul). Ambas variedades se acercan al punto hiperbólico al tiempo t	17

Figura	Página	
9	<p>Variedades estables (rojo) e inestables (negro) al tiempo t del oscilador de Duffing, donde las partículas que conforman a las variedades se acercan asintóticamente a la región hiperbólica y comienzan a cruzarse formando lóbulos, estructuras marcadas con el color amarillo y verde. Los lóbulos son las estructuras que permiten el intercambio de partículas del interior al exterior de los remolinos</p>	19
10	<p>Campos de los FTLE calculados hacia atrás (delante) en el tiempo, $\lambda_-(\lambda_+)$. En la primera (segunda) imagen los valores máximos de $\lambda_-(\lambda_+)$ están orientados en la dirección estiramiento (contracción) del punto hiperbólico, y están asociados a las variedades inestables (estables) o las LCS atractoras (repelentes).</p>	22
11	<p>Imágenes del campo de los FTLE en d^{-1} calculados hacia atrás en el tiempo por un periodo de 35 días, para el primero de Junio (panel izquierdo) y 30 de Junio (panel derecho) de la simulación del modelo correspondientes al año 2000. Regiones con tonos rojo intensos indican las posibles LCS atractoras (crestas). Estas imágenes muestran al Anticiclón de la Corriente de Lazo (ACL) cuando está unido (panel izquierdo) y cuando está separado (panel derecho). En ambos paneles se muestra el punto hiperbólico instantáneo (punto negro) calculado para el campo de velocidades de cada día, junto con éste se muestra la dirección de estiramiento (línea verde punteada), denominada de ACL en el texto. El punto de color azul claro marca una cresta en el lado oeste de la Corriente de Yucatán-Lazo (CY) la cual juega un importante rol en el proceso de separación. Para apreciar con mayor detalle las crestas involucradas en el proceso, en las imágenes inferiores c y d se hace un acercamiento a la región indicada en las imágenes a y b</p>	29

Figura

Página

- 12 Síntesis de dos estados del proceso de separación del Remolino de la Corriente de Lazo (ACL): en el panel a el remolino (sigue siendo ACL) esta unido. La CY (puntos verdes) se extiende hacia el norte envolviendo al ACL. La línea negra es la deACL (línea de estiramiento asociada al punto hiperbólico instantáneo (phACL) punto de color magenta) y su pendiente es negativa (noroeste-sureste). Al este del phACL se encuentra un ciclón $C1$. En panel b, el ACL se está separando. En el lado este, el ciclón $C1$ está situado mas al norte y dos nuevos remolinos aparecen, un ciclón $c2$ al lado oeste del phACL y un anticiclón por encima de Cuba. Estas estructuras juegan un papel muy importante en el proceso de separación del ACL. La CY se mueve directamente hacia el estrecho de florida rodeando al AC y se encuentra debajo de la cresta atractora. La deACL es ahora positiva (suroeste-noreste). 32
- 13 Series de tiempo usadas para determinar el estado de la CL y la separación del ACL. La línea punteada es la longitud del contorno de los $17cm - SSH$, mientras que línea continua representa al índice de la pendiente de la ACLde. Cada panel representa la evolución de estos índices para 5 periodos de separación de la simulación numérica correspondiente a Mayo-Agosto-1997, Junio-Agosto-1998, and Febrero-Abril-2002, Juio-Septiembre-2003, and Marzo-Junio-2004 respectivamente. La línea punteada vertical indica la separación final determinada del analisis de los FTLE. Los números y las líneas verticales en los paneles a y c son explicados en las Figuras 14 y 15. Caidas en el índice de la SSH sugieren que el remolino se ha separado. El índice de la pendiente indica que va a ver una separación sólo si el signo cambia de negativo a positivo. Notar que en varias ocasiones el índice de la SSH sugiere que el remolino está separado, mientras que el índice de la pendiente indica que el remolino permanece unido. 36

Figura	Página	
14	<p>Imágenes del campo de la SSH en m (panel superior) y el campo de los EFTL en d^{-1} (panel inferior) para los días indicados en la Figura 13a: Mayo 19, Junio 9, Agosto 9, y Septiembre 15 de 1997. El campo de la SSH en la segunda columna muestra a un ACL separado mientras que el campo de los FTLE esta altamente estructurado y la CY sigue envolviendo al ACL. La mayoría de las partículas (puntos de color verde a negro indican el día en que fueron sembradas; marcadas en la parte derecha inferior de cada imagen) sembradas a la derecha de la península de Yucatán, estas se dirigen hacia el norte siguiendo a la CY (triangulo amarillo) indicando que el ACL esta unido. Finalmente, en el último panel una cantidad considerable de partículas se mueve directamente hacia el este siguiendo la CY, indicando que el remolino esta totalmente separado.</p>	38
15	<p>Imágenes de la SSH en m (páneos superiores) y de los FTLE en d^{-1} (páneos inferiores) para los días indicados en la Figura 13c: Febrero 21, Marzo 19, Abril 17,y Mayo 12 del 2002. SSH para marzo y abril sugieren que el ACL esta separado mientras que los FTLE y las trayectorias de las partículas indican claramente que no hay una intrusión directa de particulas del lado oeste de la Corriente de Yucatán hasta Mayo 12 (última), donde el ACL está totalmente separado.</p>	39
16	<p>Acercamiento de los campos de los FTLE mostrados en la Figura 12 pero ahora se incluye los vectores de la velocidad en el borde del ACL y la CL. (a) Antes de la separación. (b) Después de la separación. La orientación de la dirección de estiramiento esta determinada por las posiciones relativas del ACL y la CL.</p>	41

- 17 Campos de los FTLE calculados con velocidades geostróficas a partir de la SSH (AVISO), para los días 10 y 30 de mayo, y 19 de junio del 2008. Línea punteada representa el contorno de los $17\text{cm} - SSH$, El phACL y su deACL están marcados por un punto de color magenta y una línea negra la deACL, respectivamente. De color magenta se representa la posición de las partículas pasivas advectadas con la corriente. En la primera imagen se muestra al remolino unido, donde las partículas se extienden hacia el norte bordeando al ACL. En la segunda imagen, el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ sugiere que el remolino está separado, mientras que la posición de las partículas y la pendiente indican lo contrario. Finalmente, la tercera imagen muestra al remolino unido. 48
- 18 Campos de los FTLE calculados con velocidades geostróficas calculadas a partir de la SSH (AVISO), para los días 21 de noviembre, 10 y 12 de diciembre del 2008. Línea punteada representa el contorno de los $17\text{cm} - SSH$, El phACL y su deACL están marcados por un punto de color magenta y una línea negra la deACL, respectivamente. En esta secuencia se puede apreciar al remolino unido, en la siguiente está separado, donde las partículas dejan de envolver al ACL, tanto el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ y la pendiente sugieren que el remolino está separado, finalmente el ACL se vuelve a unir, las partículas vuelven a bordear al ACL. . . . 48
- 19 Campos de los FTLE calculados con velocidades geostróficas calculadas a partir de la SSH (AVISO), para los días 9, 19, y 29 de junio; y 3 de julio del 2008. En la segunda imagen el remolino se está deformando y dividiendo en dos nuevas estructuras. La nueva estructura situada más al norte será el nuevo ACL. En la siguiente imagen se puede ver al nuevo ACL totalmente separado. Notar, que en la tercera y cuarta imagen el punto hiperbólico y su dirección de estiramiento no tienen relación con el punto hiperbólico que se muestra en las dos imágenes anteriores (paneles a y b). 49
- 20 Definición de la razón de repulsión $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ a un punto inicial \mathbf{x}_0 de una línea material $M(t)$. El vector \mathbf{n}_0 denota al vector unitario normal a $M(t_0)$ en \mathbf{x}_0 . Figura tomada de Farazmand y Haller (2012) 52

Figura	Página	
21	Nucleo Hiperbólico de una LCS para ese instante t_0 . Figura tomada de Olascoaga y Haller (2012). En el círculo azul, se encuentran las trayectorias \mathbf{x}_t que satisfacen las condiciones mencionadas para ser un núcleo hiperbólico, los cuales conforman el NHL	53
22	Evento Enero-Abril 2008. Panel superior campo de los FTLE donde la línea roja indica el contorno de los $17cm - SSH$, el punto negro y la línea verde punteada indica la posición y orientación de la dirección máxima de estiramiento asociada al NHL_{10} . EL panel inferior muestra la evolución temporal de la SSH en azul y de la dirección máxima de estiramiento del NHL_{10} en rojo con puntos azules; las cuatro líneas verticales punteadas en la grafica indican el día que representa cada imagen en los paneles superiores.	57
23	Evento Mayo-Julio 2008. Panel superior campo de los FTLE donde la línea roja indica el contorno de los $17cm - SSH$, el punto negro y la línea verde punteada indica la posición y orientación de la dirección máxima de estiramiento asociada al NHL_{10} . EL panel inferior muestra la evolución temporal de la SSH en azul y de la dirección máxima de estiramiento del NHL_{10} en rojo con puntos azules; las cuatro líneas verticales punteadas en la grafica indican el día que representa cada imagen en los paneles superiores.	58
24	Días 19 de mayo,9 de Junio,8 de Agosto y 15 de Octubre del 1997. Panel superior, Campos de los FTLE y trayectorias de partículas advectadas por la corriente a diferentes días (parte inferior de cada imagen indica el día que se soltaron) para la profundidad de $355m$. Panel intermedio, evolución de la dirección de la dirección de estiramiento del $phACL$ a diferentes profundidades. Panel inferior, en línea punteada la latitud máxima que alcanzan las partículas al ser advectadas por la corriente, línea continua negra (roja) indica la posición del $phACL$ a $68m$ ($355m$). (Lease texto)	64

Figura	Página	
25	días 21 de Febrero, 19 de Marzo, 17 de Abril, y 12 de Mayo del 2002. Panel superior, Campos de los FTLE y trayectorias de partículas advectadas por la corriente a diferentes días (parte inferior de cada imagen indica el día que se soltaron) para la profundidad de 355m. Panel intermedio, evolución de la dirección de estiramiento del phACL a diferentes profundidades. Panel inferior, en línea punteada la latitud máxima que alcanzan las partículas al ser advectadas por la corriente, línea continua negra (roja) indica la posición del phACL a 68m (355m). (Lease texto)	65
26	Vectores de velocidad para un punto hiperbólico donde. Los vectores $u_{i,j+1}$ y $u_{i+1,j}$ están asociados a la dirección de estiramiento y los vectores $u_{i,j}$ y $u_{i+1,j+1}$ a la de contracción. Las celdas $u_{i,j}$ no tienen el mismo signo en las contra-esquinas.	82
27	Evolución temporal de la intensidad de la hiperbolicidad $\lambda_{1,2}^2$ (líneas gruesas), y la razón de cambio de $\lambda'_{1,2}$ (líneas delgadas). Los cálculos se hicieron para la evolución del phACL del evento 2002	83

Capítulo 1

Introducción

En la región del Golfo de México existe un desarrollo petrolero que depende de la continua exploración y perforación de pozos, y con ello la posible presencia de contaminantes a causa de diversos factores, tales como el mal uso de los sistemas de extracción de petróleo o bien por accidentes. La presencia de mareas rojas y contaminantes como el petróleo derramado pueden afectar la pesca y la bio-diversidad que existe en dicha región, o afectar otras regiones aledañas. Por ello, resulta necesario estudiar detalladamente la circulación oceánica de la zona, así como también los procesos de transporte, intercambio y mezcla que ahí suceden. El entendimiento de estos procesos permite estimar el riesgo en regiones donde puede suceder un derrame, y estimar su trayectoria futura y la regiones que podría afectar. Determinar dichas trayectorias puede ayudar a determinar que regiones pueden estar conectadas y cuales no, tanto en un sentido dinámico como de transporte de propiedades físicas, químicas o biológicas. La circulación en el Golfo de México está fuertemente influenciada por la Corriente de Lazo (CL). Esta tiene su origen en el Canal de Yucatán, y une a la Corriente de Yucatán con la Corriente de Florida en la parte este del Golfo. La CL puede extenderse al Noroeste del GM ($24-28^\circ$), girando hacia la derecha para después dirigirse al sur a la Isla de Cuba y el Estrecho de Florida, o bien, dirigirse directamente del Canal de Yucatán al Estrecho de Florida (Candela *et al.*, 2002; Leben, 2005). Uno de los fenómenos más característicos de la región es el desprendimiento intermitente de remolinos anticiclónicos de la Corriente de Lazo en el Golfo de México (Sturges y Leben, 2000). Estos remolinos se encuentran entre las estructuras de mesoescala más grandes y energéticas en el océano (Lipphardt *et al.*, 2008). Al liberarse se dirigen al

oeste, interactuando con otras estructuras, y decayendo eventualmente en el interior por interacción con otros remolinos o al llegar a la plataforma continental. Debido a su tamaño, los remolinos de la CL representan un transporte importante de momento, calor y sal, y tienen un papel fundamental en la circulación en el Golfo de México, pudiendo incluso ser de mayor importancia que la circulación debida al esfuerzo del viento (Sturges *et al.*, 2010; Schmitz, 2005; Schmitz *et al.*, 2005).

Aunque los mecanismos y la frecuencia de separación de estos remolinos han sido estudiados por diversos autores, algunos aspectos del proceso permanecen inciertos (Alveraz-Azcarate *et al.*, 2009; Maul y Vukovich, 1993; Sturges, 1994; Vukovich, 1995). Varios autores han analizado eventos en los que pequeños remolinos ciclónicos influyen en la separación del remolino de la CL (RCL) (Fratantoni *et al.*, 1998; Zavala-Hidalgo *et al.*, 2003; Chérubin *et al.*, 2006; Schmitz, 2005). Utilizando 3 años de datos de anclajes y altimetría, Athié *et al.* (2012) sugieren que el proceso puede estar asociado con anomalías ciclónicas producidas en el Mar Caribe desviando el núcleo de la CL hacia el este. Por otro lado, Sturges *et al.* (2010) encuentra que perturbaciones en el transporte de la corriente a menudo preceden a la de separación del remolino. El proceso de separación resulta ciertamente complicado si se considera que los remolinos pueden separarse y volverse a juntar frecuentemente.

Una herramienta fundamental para el estudio y caracterización del proceso de separación del RCL es la altimetría. Leben (2005) propuso una técnica para el seguimiento de la CL, en la que la separación del remolino está determinada por el momento en que se rompe el contorno de los 17 cm de la altura superficial del mar ($17 - SSH$, Sea Surface Height por su siglas en inglés) asociado al núcleo de velocidad máxima de la CL. Uno de los problemas de este método es que una vez que ocurre la separación, resulta complicado saber si el remolino volverá a juntarse o no. Otro problema

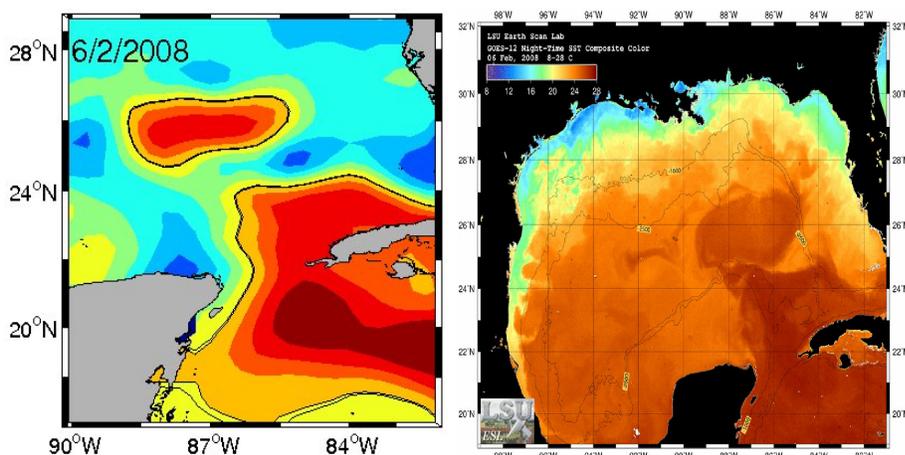


Figura 1. Imágenes instantáneas de la SSH generadas por AVISO (panel a), y la imagen compuesta de la Temperatura superficial del mar (SST) generadas por GOES SST, Louisiana State University (panel b), para Febrero 6, 2008. Notese que el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ (línea negra) sugiere que el remolino de la CL (RCL) se ha separado por completo, mientras que la imagen compuesta de la SST indica que el remolino permanece unido

es que cuando se tienen las imágenes de la temperatura superficial del mar (SST Sea Surface Temperature, por sus siglas en inglés), los campos de la SSH y la SST ofrecen información contradictoria. Por ejemplo, en la Figura 1 la SSH (panel a) muestra un remolino totalmente separado, mientras que la SST (panel b) sugiere que el remolino está unido todavía; ambas imágenes corresponden a la misma fecha. De manera similar, la Figura 2 presenta imágenes de la SSH para un evento de separación, donde se resalta el contorno $17 - SSH$ para mostrar la extensión de la CL dentro del Golfo de México (panel izquierdo). En el panel del centro, el remolino está separado, y como se mencionó anteriormente, no se puede determinar si el remolino se va volver a unir o no, tal como sucede en este caso (panel derecho). El análisis visual de este tipo de figuras nos permite estimar cuando comienza el proceso de separación, pero el método no permite identificar los detalles y dificulta determinar el momento exacto de separación.

Una causa del por qué sucede esto, es el hecho de que los mapas de la SSH, intrínsecamente

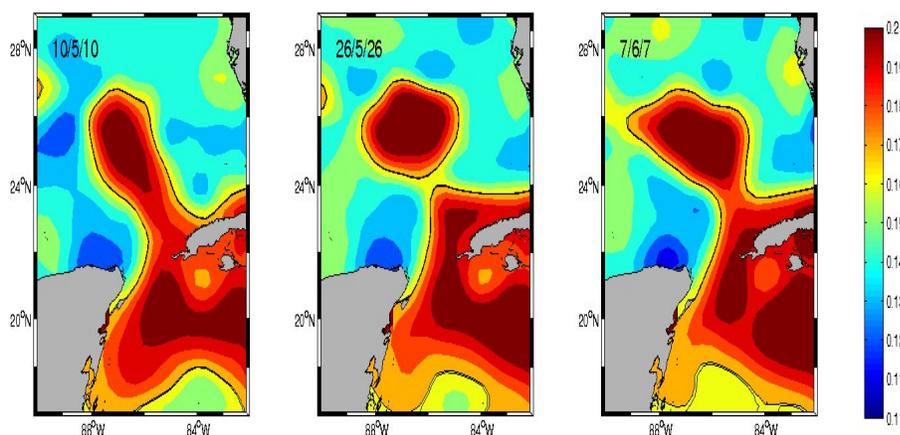


Figura 2. Imágenes semanales del campo de la SSH (AVISO) en m durante el evento de separación-reunión, que ocurre en Mayo-Junio 2008, en la parte superior derecha de cada imagen esta indicada la fecha. Una vez que la separación ocurre, el contorno de los $17cm - SSH$ no provee información suficiente para saber si el remolino puede volver a juntarse o no; como sucede en este evento.

proveen información de tipo Euleriano la cual solo permite estimar el campo de velocidad instantáneo y las líneas de corriente. Por el contrario, la información Lagrangiana obtenida a partir del movimiento de partículas advectadas por el flujo permite identificar mayores detalles del proceso de separación, como diversos estudios han mostrado de manera reciente. El punto de vista Euleriano considera las propiedades de un campo de flujo en cada punto fijo en el espacio y tiempo. El campo de velocidad es uno de los principales ejemplos de una descripción Euleriana. Este campo indica velocidad instantánea de los elementos del fluido a lo largo del el dominio en cuestión. La identidad y la procedencia de los elementos fluidos no son importantes: el campo de velocidades simplemente se refiere al movimiento de un elemento de fluido cualquiera que pase en cualquier punto a cada momento. En contraste, la perspectiva Lagrangiana se enfoca en la identidad de los elementos individuales del fluido. Es decir, realiza un seguimiento de la velocidad cambiante de las partículas a lo largo de su trayectoria a medida que son advectadas por el flujo. Debido a ello, para procesos de transporte resulta adecuado el

uso de conceptos Lagrangianos.

Con el fin de explicar la interacción de la CL y los remolinos adyacentes, Kuznetsov *et al.* (2002) calcularon y analizaron la evolución de las líneas materiales del campo velocidad cercano a la superficie, calculado por un modelo de circulación oceánico. Ellos mostraron que un análisis Lagrangiano provee mayor información acerca del proceso de separación del remolino, ya que el enfoque Lagrangiano permite identificar líneas materiales que representan barreras del transporte entre los remolinos y las corrientes adyacentes. En este trabajo el Anticiclón de la CL (ACL) se refiere a la estructura que dará forma al RCL después de la separación. El análisis Lagrangiano se ha utilizado también para determinar el momento exacto en que un vórtice se separa en experimentos de laboratorio, O'Farrell y Dabiri (2010) utilizaron los exponentes de tiempo finito de Lyapunov (FTLE por sus siglas en inglés) para identificar las estructuras coherentes Lagrangianas (LCS- Lagrangian Coherent Structures), y con ello estudiar el proceso de separación de vórtices generados en laboratorio. Ellos encontraron que desconexión de la LCS original es la que define o detona el proceso de separación del vórtice. Los FTLE proveen una medida de la razón máxima de separación máxima entre partículas de fluido, que inicialmente estaban separadas por una distancia pequeña en un tiempo finito (Lekien *et al.*, 2005, 2007; Mathur *et al.*, 2007)

Los valores máximos de FTLE permiten visualizar las principales LCS y con ello la estructura o esqueleto del flujo formado por remolinos y corrientes. Esto se debe a que las regiones de máxima separación generan máximos en el campo de los FTLE que se aproximan a líneas materiales atrayentes (repelentes) cuando se integra hacia atrás (adelante). Las líneas materiales delimitan la frontera entre dos regiones dinámicamente diferentes, por ello los valores máximos de estos exponentes permiten estimar barreras para el transporte, así como las posibles trayectorias de partículas pasivas que viajan a

lo largo de estas líneas materiales (Beron-Vera *et al.*, 2008; Shadden *et al.*, 2005, 2006). Aplicando la teoría de sistemas dinámicos y del análisis geométrico de un campo de velocidades instantáneo se obtienen los puntos elípticos e hiperbólicos del campo estacionario. Los primeros están asociados a centros de remolinos, mientras que los otros indican puntos de convergencia y al mismo tiempo de divergencia, por lo que las regiones asociadas a estos puntos indican regiones de alta mezcla (Velasco Fuentes y Marinone, 1999). En flujos dependientes del tiempo los puntos fijos pueden aparecer en un instante y desaparecer en el siguiente, por ello resulta complicado utilizar este tipo de conceptos en flujos variables. Aun así, diversos autores han logrado aplicarlos a flujos oceanográficos. Por ejemplo, Kuznetsov *et al.* (2002) sugieren que una condición necesaria para la separación del RCL es la presencia de un punto hiperbólico al RCL.

Olascoaga y Haller (2012) aplican los conceptos de las LCS y determinan un núcleo hiperbólico Lagrangiano, o sea una extensión del concepto de punto hiperbólico instantáneo en un sistema dependiente del tiempo. Los núcleos hiperbólicos Lagrangianos se refieren a segmentos de las LCS que de manera ininterrumpida mantienen una fuerte atracción. Dichos núcleos forman regiones hiperbólicas pequeñas que actúan como generalización de los puntos hiperbólicos para flujos dependientes del tiempo. Es decir, se determinan regiones que mantienen durante un cierto periodo sus propiedades hiperbólicas. Con las LCS y estos núcleos estiman las posibles trayectorias de partículas pasivas durante un evento de derrame de petróleo.

Con base en los estudios descritos, una hipótesis de trabajo de esta tesis es que la aplicación de conceptos Lagrangianos resulta mucho más adecuada que los del tipo Euleriano para estudiar el proceso de separación del RCL. Por lo tanto se considera la aplicación de los FTLE, entre otros conceptos Lagrangianos. No obstante, se debe

destacar que el uso de información Euleriana, como la SSH y el campo de velocidades, proporciona información complementaria que permite realizar un trabajo más detallado. Por ello se propone un método alternativo para entender el proceso de separación del RCL considerando ambos puntos de vista. Para ello, el presente trabajo se dividió en cinco partes. El Capítulo 2 describe los conceptos que se utilizan en los Capítulos subsecuentes, tales como punto hiperbólico instantáneo, los FTLE, la descripción de las LCS, entre otros aspectos. En el Capítulo 3, se realiza un análisis Lagrangiano de la separación del RCL utilizando velocidades para los 60m de profundidad calculadas a partir del modelo de circulación oceánica NEMO. En el Capítulo 4, se realiza un análisis similar utilizando corrientes geostroficas calculadas a partir de datos de nivel del mar de AVISO. En estos Capítulos, se utilizan los conceptos Lagrangianos para determinar el momento de la separación del RCL mediante un índice “cuasi-lagrangiano” basado en la dirección de estiramiento del punto hiperbólico asociado al RCL. Este índice se compara con el método utilizado para determinar el momento de la separación utilizando solo el contorno de los 17cm de la SSH, mencionado anteriormente (Leben, 2005). Al final de ambas secciones se describe la utilidad de los métodos. El Capítulo 5, analiza el proceso de separación a diferentes profundidades utilizando las velocidades calculadas con el modelo NEMO. Se compara la trayectoria de partículas que viajan con la Corriente de Lazo a dos profundidades diferentes, 60, y 355m, y la evolución del punto hiperbólico asociado al RCL para tres profundidades diferentes a 60, 355, y 700 metros. El objetivo es describir las similitudes y diferencias que pueden suceder durante el proceso de separación del RCL a diferentes profundidades. Finalmente el último Capítulo resume la utilidad de los conceptos aplicados en este trabajo.

Capítulo 2

Descripción de las estructuras Lagrangianas coherentes (LCS)

El concepto de Estructura Lagrangiana Coherente es relativamente novedoso, siendo una generalización de las variedades estables e inestables (Peacock y Dabiri, 2010). Dichas variedades son conceptos matemáticos usados en la teoría de sistemas dinámicos. A continuación se hace un recuento y se ilustran las ideas fundamentales de sistemas dinámicos utilizando campos analíticos sencillos, pero a la vez relevantes para el problema central de esta tesis. Los conceptos principales pueden comprenderse al analizar campos o flujos independientes del tiempo. Los resultados que de ahí se derivan se generalizan posteriormente a flujos con perturbaciones periódicas o flujos arbitrarios dependientes del tiempo. Para ello, primero se realiza un análisis dinámico del oscilador de Duffing, con el cual se simula la presencia de dos remolinos estacionarios y se discuten conceptos fundamentales. Posteriormente se estudia el caso en que este flujo se perturba con una función periódica y se discute la extensión de los resultados del caso estacionario. Con ello se define las propiedades de las variedades, y posteriormente se describe la técnica de los FTLE para identificar las LCS.

2.1 Análisis dinámico de una función independiente del tiempo

En esta sección se describe el análisis dinámico del oscilador de Duffing para explicar los conceptos de las variedades estables e inestables y trayectoria hiperbólicas. Las propiedades del Oscilador de Duffing permiten simular dos remolinos en dos dimensiones con el mismo signo de vorticidad, por ejemplo, negativa. Las velocidades están dadas por:

$$\frac{dx}{dt} = u = y - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = v = x \quad (1)$$

donde (u, v) indica la velocidad, y (x, y) indican las coordenadas cartesianas. En la figura 3 gráfica el campo de velocidad del flujo.

2.1.1 Puntos fijos, definición y clasificación

Los puntos fijos o de estancamiento correspondientes a un campo de velocidades cualquiera son aquellos donde la velocidad es igual a cero. Para localizar estos puntos se resuelven las ecuaciones $u = 0$ y $v = 0$, lo que implica

$$y - y^3 = 0 \quad x = 0 \quad (2)$$

Resolviendo 2 encontramos tres puntos fijos con coordenadas $(0, -1)$, $(0, 0)$, y $(0, 1)$, respectivamente. La estructura del flujo alrededor de cada punto fijo puede determinarse analizando el movimiento de una partícula cuya posición inicial sea cercana al punto fijo. En la figura 4 se presentan los puntos fijos junto con las líneas de corriente asociadas al campo de velocidades. Se puede apreciar dos estructuras “cusi-circulares” centradas en $(0, -1)$ y $(0, 1)$. Las líneas de corriente que pasan por $(0, 0)$ separan a estas dos estructuras del flujo “exterior”. Las propiedades de estos puntos se determinan a partir de las propiedades de la matriz que determina la evolución de perturbaciones alrededor de los puntos de equilibrio. Para ello se debe definir dicha matriz y posteriormente se requiere del cálculo de los autovalores para la clasificación de los puntos fijos. A continuación se describe de forma sencilla la definición de esta matriz que se le denominara \mathbf{M} y la obtención de sus autovalores.

Para definir dicha matriz, consideremos que x_o es un punto fijo del sistema. Si el vector

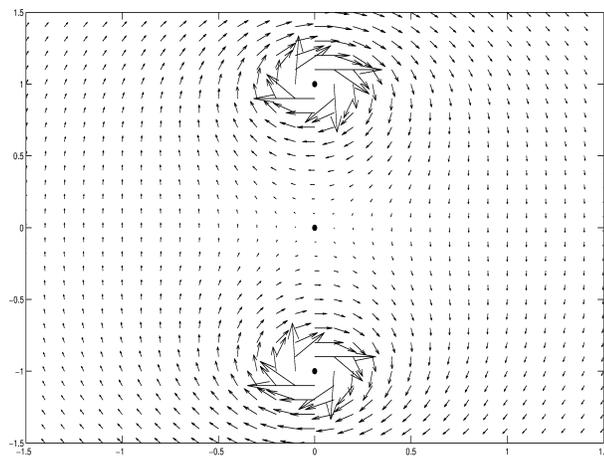


Figura 3. Campo de velocidades producido por dos vórtices puntuales, en el cual se representa a dos remolinos centrados en el eje y . Ecuaciones del oscilador de Duffing que puede interpretarse como el campo de velocidades de dos vórtices (remolinos) centrados sobre el eje y en $(0,-1)$ y $(0,1)$.

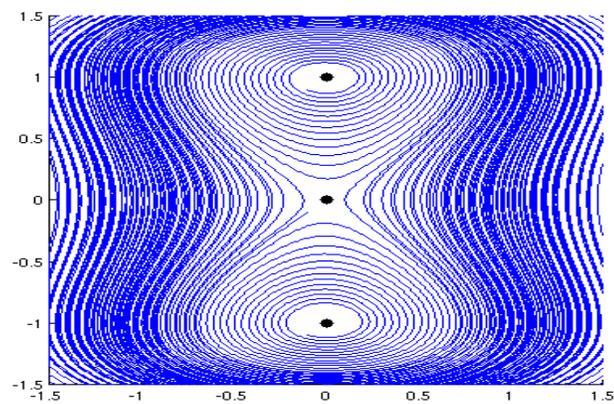


Figura 4. Puntos fijos (*) y las líneas de corriente para el campo de velocidades de la Figura 3

de velocidad se define por una función $\vec{f}(\vec{x})$,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}); \quad (3)$$

entonces

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = 0. \quad (4)$$

El incremento del vector de posición es $\vec{x} = (\vec{x} + \vec{\delta})$, donde $\vec{\delta}$ es una pequeña perturbación. Para el caso bidimensional se tiene que:

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \quad (5)$$

$$\vec{\delta} = (\delta x, \delta y) \quad (6)$$

$$\vec{f} = (f, g) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_0 + \delta_x) &= f(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) \\ \frac{d}{dt}(y_0 + \delta_y) &= g(x_0 + \delta_x, y_0 + \delta_y) \end{aligned}$$

Línealizando alrededor de (x_0, y_0) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta_x &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\delta_y + \dots \\ \frac{d}{dt}\delta_y &= \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\delta_x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}\delta_y + \dots \end{aligned}$$

donde $\partial f(x_0, y_0)/\partial x$ significa derivada de f evaluada en (x_0, y_0) . Entonces:

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta} = \nabla \vec{f}|_{(x_0, y_0)} \vec{\delta}, \quad (8)$$

y con ello se define la matriz del gradiente de la velocidad como:

$$M = \nabla \vec{f}|_{\vec{x}=(x_0, y_0)} \quad (9)$$

o

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Para el oscilador de Duffing, ecuación (2) se tiene para este caso:

$$f = y - y^3$$

$$g = x$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 3y^2$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

la matriz \mathbf{M} queda como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 - 3y^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

evaluando en el punto $(0, 0)$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

2.1.2 Autovalores y clasificación de los puntos fijos

Los autovalores de \mathbf{M} determinan la estructura del flujo alrededor de cada punto fijo, en tanto que sus autovectores indican la dirección del flujo. La solución para δ puede expresarse como

$$\vec{\delta} = \vec{d}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{d}_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores y \vec{d}_1 y \vec{d}_2 son los autovectores correspondientes. Al clasificar los puntos fijos podemos encontrar el comportamiento de las partículas alrededor de ellos.

Puntos hiperbólicos y elípticos

En este trabajo sólo nos concentraremos en 2 tipos de puntos fijos: el punto hiperbólico o punto silla y el punto elíptico. Las propiedades del flujo cercano a estos puntos se determinan con base en los autovalores y autovectores del gradiente de velocidad:

i punto hiperbólico, ambos autovalores son reales y $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$; también se le conoce como *punto silla*. (fig 5). En estos puntos el fluido es advectado en las direcciones de compresión hacia el punto fijo y conforme se acerca a este, el flujo es advectado en las direcciones de estiramiento alejándose del mismo.

ii punto elíptico, $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, donde ambos autovalores son puramente imaginarios. En este caso las trayectorias dan vueltas alrededor del punto fijo en forma de círculos o elipses (fig 6).

Considerando la ecuación $\|M - \lambda I\| = 0$, en la cual I es la matriz identidad y λ son los autovalores, se encuentra que para el oscilador de Duffing

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 - 3y^2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3y^2 - 1 = 0. \quad (12)$$

Esta ecuación se evalúa para los tres puntos fijos. Para (0,-1) tenemos

$$\lambda_{1+} = \sqrt{2}i \quad \lambda_{1-} = -\sqrt{2}i \quad (13)$$

para (0,0)

$$\lambda_{2+} = 1 \quad \lambda_{2-} = -1 \quad (14)$$

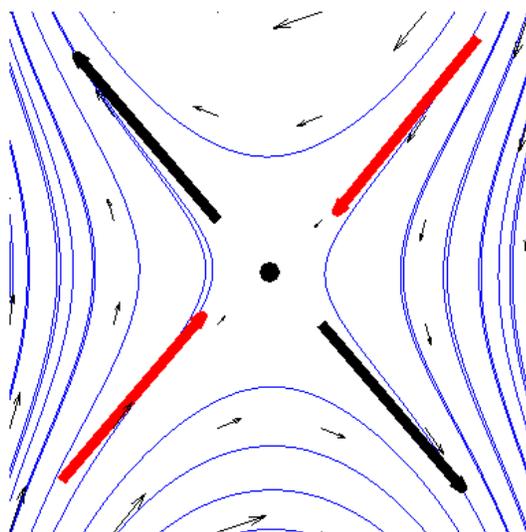


Figura 5. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, *punto hiperbólico*; en este caso la trayectoria se acerca inicialmente para luego alejarse del punto fijo

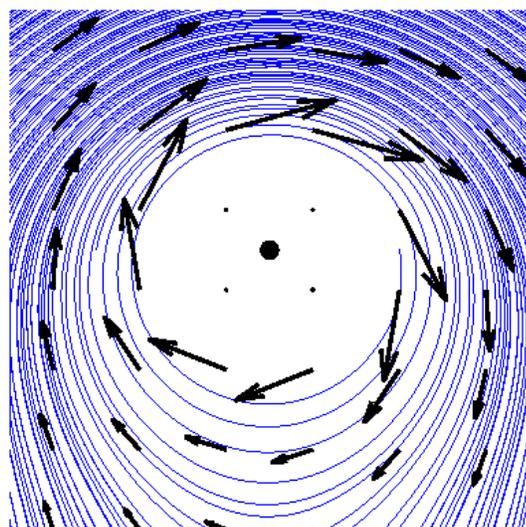


Figura 6. $\lambda_1 = -i\omega, \lambda_2 = i\omega$, *punto elíptico*; en este caso las trayectorias dan vueltas alrededor del punto fijo en forma de círculos o elipses

y para (0,1)

$$\lambda_3 = \sqrt{2}i \quad \lambda_{3-} = -\sqrt{2}i \quad (15)$$

Los autovalores de los puntos fijos con coordenadas (0,-1) y (0,1) corresponden a puntos elípticos,(ver Figura 6), y el punto fijo con coordenadas (0,0) corresponde a un punto hiperbólico, que en nuestro caso es el punto de mayor interés 5.

Para determinar la dirección de estiramiento y la de contracción se debe determinar los autovectores. Los autovectores se encuentran resolviendo $[M - \lambda I]V = 0$, donde V es el autovector. Los autovectores para el punto hiperbólico son

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

2.1.3 Variedades estables e inestables de los puntos hiperbólicos

Una variedad está definida como un conjunto que localmente tiene la estructura del espacio euclidiano (Wiggins, 2003). El subespacio E^s que tiene como base a los autovectores asociados a autovalores con parte real negativa es una ***variedad estable*** para el punto fijo. El subespacio E^u que tiene como base a los autovectores asociados a los autovalores con parte real positiva se conoce como ***variedad inestable*** del punto fijo.

Las orbitas que inician en E^s se acercan asintóticamente al punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$ y las que inician en E^u se acercan al punto fijo cuando $t \rightarrow -\infty$. Esto nos lleva a las siguientes definiciones:

- **Variedad estable** W^s es el conjunto de órbitas que se acercan al punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$
- **Variedad inestable** W^u es el conjunto de órbitas que se acercan al punto fijo cuando $t \rightarrow -\infty$

Los puntos fijos junto con las variedades determinan las propiedades generales de las trayectorias. Las variedades definen el comportamiento del flujo puesto que el futuro de una trayectoria es completamente distinto cuando está localizada a uno u otro lado de la variedad, por ello se les denomina *separatrices*. En la Figura 7 se muestra la variedad estable e inestable del flujo de Duffing que asemeja dos vórtices puntuales; ambas se acercan al punto hiperbólico (punto azul).

Es posible encontrar campos de velocidades definidos para $-\infty < t < \infty$ solamente para modelos altamente idealizados. Para el caso en el que se tiene un intervalo de tiempo finito $0 < t < t_f$, la variedad estable se determina colocando una línea de partículas en la dirección de compresión al tiempo $t + \Delta t$ y se integra hacia atrás hasta el tiempo t . Para el caso de la variedad inestable se coloca una línea de partículas en dirección de estiramiento al tiempo $t - \Delta t$ y se integra hacia adelante hasta el tiempo t .

La **trayectoria hiperbólica** $\gamma(t)$ está caracterizada por tener propiedades similares a las de un punto hiperbólico, es decir repelen y atraen exponencialmente a dos conjuntos distintos de partículas. La **trayectoria hiperbólica** $\gamma(t)$ se define cuando el conjunto de variedades estables e inestables se acercan asintóticamente en $\gamma(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$, respectivamente (Malhorta y Wiggins, 1998). En la figura 8 se puede apreciar cómo las variedades estables e inestables (en color rojo y azul respectivamente) se acercan al punto fijo y la trayectoria hiperbólica $\gamma(t)$ (línea negra) que en este caso es la separatriz.

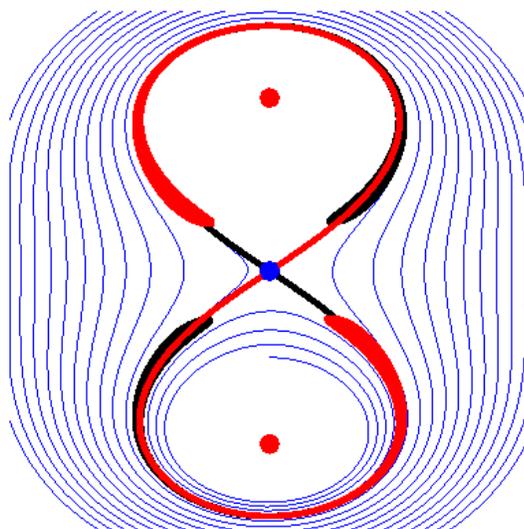


Figura 7. Flujo sin perturbación en donde se presenta la variedad estable W^s (línea roja) y variedad inestable W^u (línea negra); ambas variedades se acercan al punto hiperbólico (*)

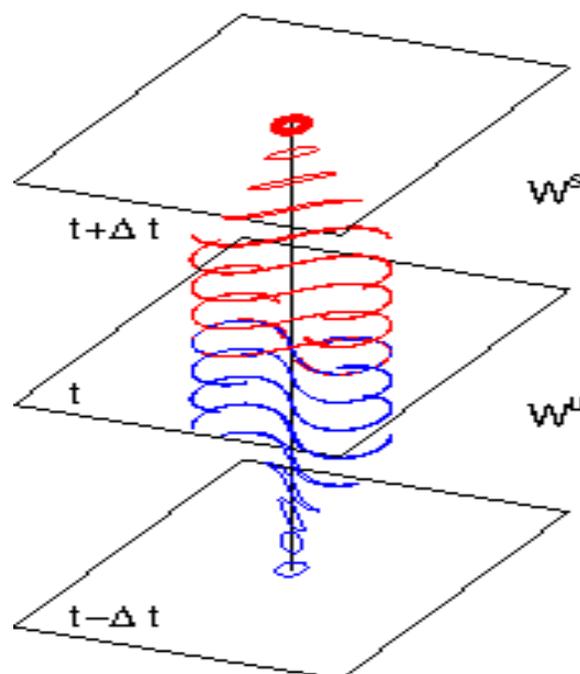


Figura 8. Trayectoria hiperbólica $\gamma(t)$ línea negra; la variedad estable comienza su evolución en la dirección de compresión al tiempo $t + \Delta t$ (rojo) y la variedad inestable comienza su evolución en la dirección de estiramiento al tiempo $t - \Delta t$ (azul). Ambas variedades se acercan al punto hiperbólico al tiempo t

2.2 Análisis dinámico de una función dependiente del tiempo

El análisis anterior considera un flujo independiente del tiempo. En esta sección se analiza un caso en el que se añade al flujo estacionario dado por la ecuación (1) una perturbación dependiente del tiempo en la dirección x ; de la forma $\Gamma \sin(\omega t)$, donde Γ es la amplitud y ω la frecuencia. El sistema queda como:

$$u = y - y^3 + \Gamma \sin(\omega t) \quad v = x; \quad (18)$$

2.2.1 Obtención de las variedades

Puesto que ahora el flujo depende del tiempo tenemos que encontrar los puntos fijos en diferentes tiempos. Para ello se determina el punto hiperbólico para $t + \Delta t$, de forma similar a como se obtuvo para el flujo independiente del tiempo. De la misma manera se obtiene el punto hiperbólico en $t - \Delta t$. Una vez que se determinan los puntos hiperbólicos se calculan los autovalores y determinan la dirección de compresión y estiramiento a cada tiempo ($t - \Delta t$ y $t + \Delta t$).

Para encontrar la variedad estable se coloca una línea de partículas en la dirección de compresión al tiempo $t + \Delta t$ y se integra hacia atrás en el tiempo hasta $t - \Delta t$. Para encontrar la variedad inestable se coloca la línea de partículas en la dirección de estiramiento al tiempo $t - \Delta t$ y se integra hacia adelante hasta $t + \Delta t$. En la Figura 9 se pueden ver la variedad estable (rojo) e inestable (negro) al tiempo t , las cuales se acercan asintóticamente al punto fijo. Ambas variedades al acercarse al punto hiperbólico comienzan a cruzarse, a consecuencia de que el flujo depende del tiempo, formando regiones conocidas como lóbulos (Wiggins, 1988; Koh y Legras, 2002; Beron-Vera *et al.*, 2008; Joseph y Legras, 2002; Mancho *et al.*, 2006).

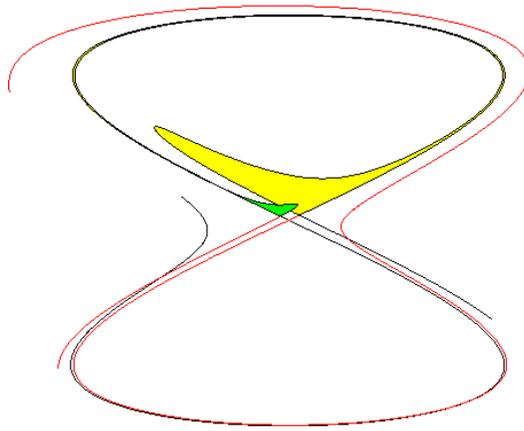


Figura 9. Variedades estables (rojo) e inestables (negro) al tiempo t del oscilador de Duffing, donde las partículas que conforman a las variedades se acercan asintóticamente a la región hiperbólica y comienzan a cruzarse formando lóbulos, estructuras marcadas con el color amarillo y verde. Los lóbulos son las estructuras que permiten el intercambio de partículas del interior al exterior de los remolinos

En la Figura 9 se muestran dos lóbulos uno en amarillo y otro en verde. Estos son el resultado de la intersección de las variedades estables e inestables y tienen un papel importante en el transporte en los flujos periódicos y cuasiperiódicos (Malhorta y Wiggins, 1998). Estas estructuras son zonas donde ocurre el transporte de partículas, siendo el área de los lobúlos proporcional a la masa transportada. Dichas estructuras son las responsables de intercambio de fluido entre los remolinos y el flujo exterior.

2.3 Exponentes de tiempo finito de Lypunov

Para flujos dependientes del tiempo no siempre es posible determinar los puntos fijos y, por lo mismo, sus variedades estables e inestables. Así mismo, la dependencia temporal implica que las trayectorias hiperbólicas sólo pueden durar ciertos periodos y cambiar sus propiedades (e incluso podrían no existir), por lo que para este tipo de flujos a las trayectorias hiperbólicas se les llama partículas hiperbólicas. Debido a ello, las variedades van dejando de influir en el comportamiento del flujo y nuevas líneas

materiales comienzan a tener una mayor importancia. Las LCS son líneas materiales (o estructuras de dimension $n - 1$, donde n es la dimension espacial del campo del flujo) en flujos dependientes del tiempo (Haller, 2000). Estas representan una generalización de las variedades estables e inestables, considerando sus propiedades físicas de ser atractoras y repelentes, respectivamente. Para flujos dependientes del tiempo o estacionarios las LCS coinciden con las líneas de corriente; sin embargo, cuando existe dependencia temporal las LCS atractoras y repelentes comienzan a interceptarse unas a otras varias veces formando lóbulos. Las LCS son líneas materiales que tienen un rol dominante en la atracción y repulsión de partículas en el flujo por un cierto periodo. Por ello, el estudio de las LCS permite la identificación de las barreras del transporte, de los mecanismos del transporte, y regiones de máxima dispersión (Beron-Vera *et al.*, 2008; Shadden *et al.*, 2005, 2006; Mathur *et al.*, 2007; Mancho *et al.*, 2006).

Una técnica muy útil para identificar las LCS consiste en calcular los Exponentes de Tiempo Finito de Lyapunov FTLE (Haller, 2001a, 2002; Shadden *et al.*, 2005; Lekien y Coulliette, 2007a; Shadden *et al.*, 2006; Olascoaga *et al.*, 2006; Lekien *et al.*, 2005, 2007; Mathur *et al.*, 2007). Los FTLE proveen una medida de la razón de separación entre partículas que inicialmente estaban separadas una distancia pequeña en un tiempo finito. Este método puede aplicarse para cualquier numero de dimensiones (Lekien y Coulliette, 2007a), pero sólo nos enfocaremos en el caso de dos dimensiones. Si $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ denota la posición inicial en el espacio $2D$ para una particular al tiempo t_0 , su posición a cualquier tiempo t , se denota por $\vec{x}(t; x_0, y_0)$, y se obtiene integrando la ecuación de la trayectoria

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(x, t) \quad (19)$$

donde $\vec{x} = (x, y)$ y $\vec{u} = (u, v)$ es el vector de la velocidad en 2 dimensiones. Los exponentes de Lyapunov se definen de la siguiente forma

$$\sigma_{t_0}^T = \frac{1}{2 |T|} \ln \lambda_{max}(\Delta), \quad (20)$$

donde λ_{max} denota el máximo autovalor del tensor de deformación de Cauchy-Green Δ :

$$\Delta(t; x_0, t_0) := \partial_{x_0} x(t; x_0, t_0)^* \partial_{x_0} x(t; x_0, t_0) \quad (21)$$

donde $*$ indica la matriz transpuesta y T es el tiempo de integración. El tensor de deformación contiene información acerca del nivel de estiramiento en el flujo. Si el autovalor más grande es mayor que la unidad, entonces el autovector asociado a este autovalor provee la dirección en donde ocurrirá la mayor separación. Por tanto, los autovalores de Δ proveen una medida de la razón de la separación entre partículas (Shadden *et al.*, 2005; Lekien *et al.*, 2007)

Los FTLE se calculan mediante la estimación de $\partial_{x_0} x(t_0+T; x_0, t_0)$ por diferencias finitas de las trayectorias de partículas cuyas posiciones iniciales se encuentran distribuidas sobre una malla regular usando el software MANGEN (Lekien y Coulliette, 2007a), una herramienta diseñada para sistemas dinámicos. Las regiones de máxima razón de separación producen los máximos del campo de FTLE. Estos máximos generalmente pueden asociarse con las LCS atractoras (repelentes) cuando se integra la trayectoria de las partículas hacia atrás (hacia adelante) en el tiempo. Las LCS atrayentes y repelentes delimitan la frontera entre regiones de fluidos con características dinámicas diferentes. Debe señalarse que los máximos de los FTLE no necesariamente son líneas materiales y toman valores altos en zonas de fuerte corte de velocidad, produciendo “falsas” LCS

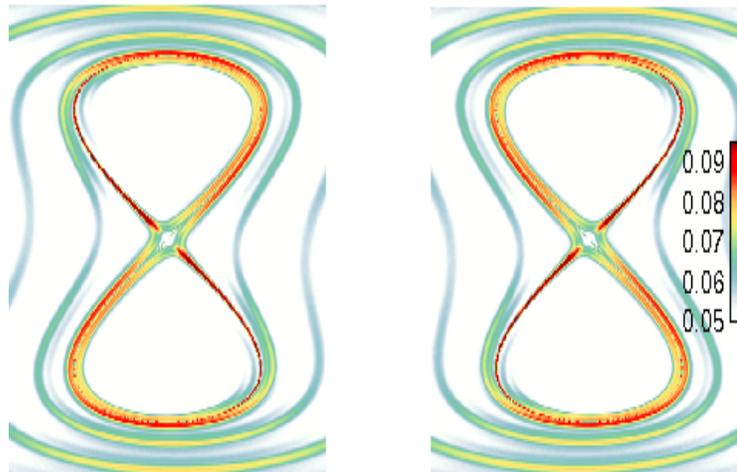


Figura 10. Campos de los FTLE calculados hacia atrás (delante) en el tiempo, $\lambda_- (\lambda_+)$. En la primera (segunda) imagen los valores máximos de $\lambda_- (\lambda_+)$ están orientados en la dirección estiramiento (contracción) del punto hiperbólico, y están asociados a las variedades inestables (estables) o las LCS atractoras (repelentes).

(Haller, 2001b; Olascoaga, 2010; Branicki y Wiggins, 2010; Branicki *et al.*, 2011)

La trayectoria de las partículas se determinó usando el esquema de Runge-Kutta de cuarto orden y un método bicúbico para la interpolación espacio-temporal del campo de velocidad a la posición de cada partícula. Para evaluar la ecuación (21), el programa MANGEN utiliza diferencias centradas y un método estándar para determinar los autovalores, véase Shadden *et al.* (2005); Lekien y Coulliette (2007a) para más detalles.

La Figura 10a (10b) presenta los FTLE $\lambda_- (\lambda_+)$ calculados hacia atrás (adelante) en el tiempo cuyos máximos representan a la LCS atractora (repelente) para el oscilador de Duffing sin perturbación. En este caso son iguales a las variedades estables e inestables, calculadas para el oscilador de Duffing sin perturbación las cuales se mostraron en la Figura 7.

Finalmente, el método de los FTLE permite identificar o estimar las principales LCS, sin que sea necesario encontrar un punto hiperbólico del campo de velocidades por un cierto período, como en el cálculo de las variedades estables e inestables. De tal

forma que los FTLE permiten estimar barreras para el transporte, así como las posibles trayectorias de partículas pasivas que viajan a lo largo de estas líneas materiales o LCS. Estas propiedades resultan bastante útiles en fluidos con una dependencia temporal arbitraria, como son los de la atmósfera y el océano.

Capítulo 3

Análisis Lagrangiano de la separación del RCL utilizando datos del modelo NEMO

La idea central de este trabajo, es que el RCL se separa cuando las partículas que viajan con la Corriente de Lazo se desvían hacia el este dejando de envolver al remolino. Uno de los métodos que se han aplicado para determinar el momento de separación del RCL ha sido el criterio de los $17\text{cm} - SSH$: la separación del remolino ocurre en el momento en que se rompe el contorno de los 17 cm de la altura superficial del mar. Uno de los problemas de este método es que una vez que ocurre la separación, resulta complicado saber si el remolino volverá a juntarse o no. Como se mencionó anteriormente, la trayectoria de las partículas no tiene que ser igual que las líneas de corriente o en este caso al contorno de los $17\text{cm} - SSH$. Esto se debe a que la SSH es una variable del tipo Euleriano. Por ello, el presente análisis considera la aplicación de métodos Lagrangianos, como los FTLE, que permitan un mayor entendimiento de la separación del RCL y permitan establecer el momento de la separación con mayor precisión.

3.1 Descripción del modelo de circulación oceánica NEMO

Para este trabajo se utilizan datos del modelo de circulación oceánica NEMO (Nucleus for European Modelling of the Ocean) de la simulación numérica de Jouanno *et al.* (2009), en la cual se implemento el modelo NEMO-AGRIF (AGRIF: Adaptive grid refinement in Fortran) para el Mar Caribe y el Golfo de México ($98^\circ O - 57^\circ O, 6^\circ N - 31^\circ N$). Este modelo resuelve las ecuaciones primitivas para un sistema en rotación. Las ecuaciones primitivas en coordenadas cartesianas son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla u - fv = \frac{\partial \phi}{\partial x} + F_u + D_u, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla v + fu = \frac{\partial \phi}{\partial y} + F_v + D_v, \quad (23)$$

que expresan el balance de momento en las direcciones x e y respectivamente, donde ϕ representa la presión dinámica y \vec{u} es el vector tridimensional de velocidad $\vec{u} = (u, v, w)$. Los forzamientos y disipación se encuentran representados por F y D respectivamente

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla T = F_T + D_T, \quad (24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla S = F_S + D_S, \quad (25)$$

que son las ecuaciones de calor y balance de sal,

$$\rho = \rho(T, S, P), \quad (26)$$

es la ecuación de estado, donde P es la presión,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-\rho g}{\rho_0}, \quad (27)$$

es la ecuación de momento vertical (balance hidrostático) y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

es la ecuación de continuidad para un fluido incompresible.

El modelo usa la aproximación de Boussinesq, la cual considera despreciables las variaciones de densidad en las ecuaciones de momento excepto en la fuerza de flotación en la ecuación de momento vertical. Además, el modelo resuelve explícitamente la variación de la superficie libre.

En la configuración de Jouanno *et al.* (2009) se utiliza dos mallas anidadas una de un 1/15 de grado (aproximadamente 7 km) que cubre el Mar Caribe y Golfo de México, y

otra que se anida dentro de una malla gruesa (1/3 de grado, 35 km de resolución) que cubre gran parte del Atlántico tropical. Ambas mallas tienen 46 niveles en la vertical que se van espaciando de 12 m desde la superficie a 250 m debajo de los 1500 m. Las dos mallas interactúan en ambos sentidos usando la metodología de Debreu (2000), lo que significa que la malla fina también influye en la dinámica de la malla gruesa. La simulación reportada por Jouanno *et al.* (2009), utiliza forzamientos climatológicos en la superficie. La simulación utilizada en este trabajo es una integración de 40-años (1958-2006, con 9 años de estabilización) con un forzamiento interanual generado por el re-análisis ERA40 corregido por Brodeau *et al.* (2010). Como se menciona en Jouanno *et al.* (2009), el modelo reproduce adecuadamente la circulación media y los remolinos característicos de la región. Aunque Jouanno *et al.* (2009) no discute la circulación en el Golfo de México, resultados preliminares de la corrida inter-anual (1958-2006) por Sheinbaum *et al.* (2010) indican que la simulación de la separación de los remolinos de la Corriente de Lazo requeridos para este estudio son consistentes con las observaciones. Se analizan salidas diarias del campo de velocidades y la SSH correspondientes a los años 1997 a 2004, en los cuales se identificaron ocho eventos de separación del RCL. La diferencia básica entre estos eventos son las varias separaciones-reconexiones de RCL que ocurren antes de que éste se separe por completo.

3.2 Cálculo de los FTLE para la profundidad de 68m

El presente análisis Lagrangiano se basa en las trayectorias de un cierto número de partículas advectadas por los campos calculados en las simulaciones. La velocidad utilizada para advectar las partículas corresponde al sexto nivel del modelo a 68 metros de profundidad. Esta profundidad se escogió cerca de la superficie pero a la vez por

debajo de la capa de mezcla para que las componentes ageostróficas fuesen parcialmente filtradas. Esto facilita la comparación de los resultados con los obtenidos a partir de velocidades geostróficas calculadas a partir de datos de altimetría. La velocidad vertical a esta profundidad no es exactamente cero, pero suficientemente pequeña, por lo que la velocidad horizontal puede ser considerada no divergente. Varios estudios (Olascoaga *et al.*, 2006; Kuznetsov *et al.*, 2002) sugieren que esta aproximación, la cual permite describir los procesos de transporte para las escalas de espacio y tiempo relevantes para la separación del RCL. Esta aproximación esta basada en que las capas horizontales son cuasi-paralelas en el plano $3d$. De acuerdo con Branicki y Kirwan (2010) esta suposición es válida si el producto de $H\epsilon$ es muy pequeño i.e., $H\epsilon \ll 1$, donde ϵ es el promedio del corte vertical para la capa con espesor H dividido entre el promedio de la velocidad horizontal. Para las capas centradas en los 68 metros (e.g. entre 58 y 78 m) se encontró que $H\epsilon \approx 0.06$, lo que respalda la suposición original. Esto sugiere que entre los 58 y 78 metros, los campos de velocidad son muy similares e implica que el calculo en 2 dimensiones puede aplicarse en este trabajo.

Las trayectorias fueron calculadas usando el método Runge-Kutta de cuarto/quinto orden, y un método bicúbico para la interpolación espacio-temporal del campo de velocidades a las posiciones de las partículas. Para estos cálculos se utilizó el software MANGEN. La malla inicial es 4 veces más fina que la malla de la velocidad y esta compuesta por 1000×1000 partículas. Para evaluar la ecuación 20. MANGEN utiliza diferencias centradas y resuelve de forma estándar los auto-vectores, véase Shadden *et al.* (2005); Lekien y Coulliette (2007b) para los detalles. Los FTLEs fueron calculados para cada día por un periodo de 30 días, advectando las partículas hacia atrás en el tiempo 35 días, i.e. se integra la ecuación 19 de t_i a $t_i - 35$, $t_i = 1, 2, \dots, 30$. Este período captura los eventos de separación, incluidos los eventos de separación y

reconexión. Configuraciones similares se han aplicado en el Golfo de México para estudiar estructuras Lagrangianas superficiales y subsuperficiales (Olascoaga *et al.*, 2006, 2008; Beron-Vera *et al.*, 2008; Olascoaga, 2010)

3.2.1 Resultados

La Figura 11 muestra los FTLE calculados hacia atrás en el tiempo por 35 días para el primero de junio (Figura 11a) y el 30 de junio (Figura 11b) del año 2000. Las regiones con tonos rojos indican las crestas de los FLTE que permiten identificar las posibles LCS. Estos máximos generalmente pueden asociarse con las LCS, aunque debe señalarse que los FTLE no necesariamente son líneas materiales y toman valores altos en zonas de fuerte corte de velocidad produciendo “falsas” LCS (Haller, 2001b; Olascoaga, 2010; Branicki y Wiggins, 2010; Branicki *et al.*, 2011). Aun así, esta asociación entre FTLE y LCS resulta suficiente para los propósitos de este trabajo. En las figuras se pueden apreciar varias estructuras muy complejas y enredadas, pero también se identifican algunas estructuras que son relevantes para la separación del RCL. Estas se discuten en los párrafos siguientes

En las Figuras 11a y 11b el ACL, estructura que dará forma al RCL después de la separación, se encuentra aproximadamente en el centro del mapa y que puede ser identificado por los valores bajos de los FTLE los cuales están rodeados por valores altos de los FTLE. Debajo del ACL se encuentra un punto negro que marca el punto hiperbólico asociado a esta estructura, (phACL) y la línea punteada verde indica la dirección de estiramiento (deACL) asociada al phACL. El método para determinar dicho punto y su dirección de estiramiento se explican en el Apéndice A. La circulación en esta región es tal que se pueden encontrar varios puntos hiperbólicos en cada paso de tiempo, aunque

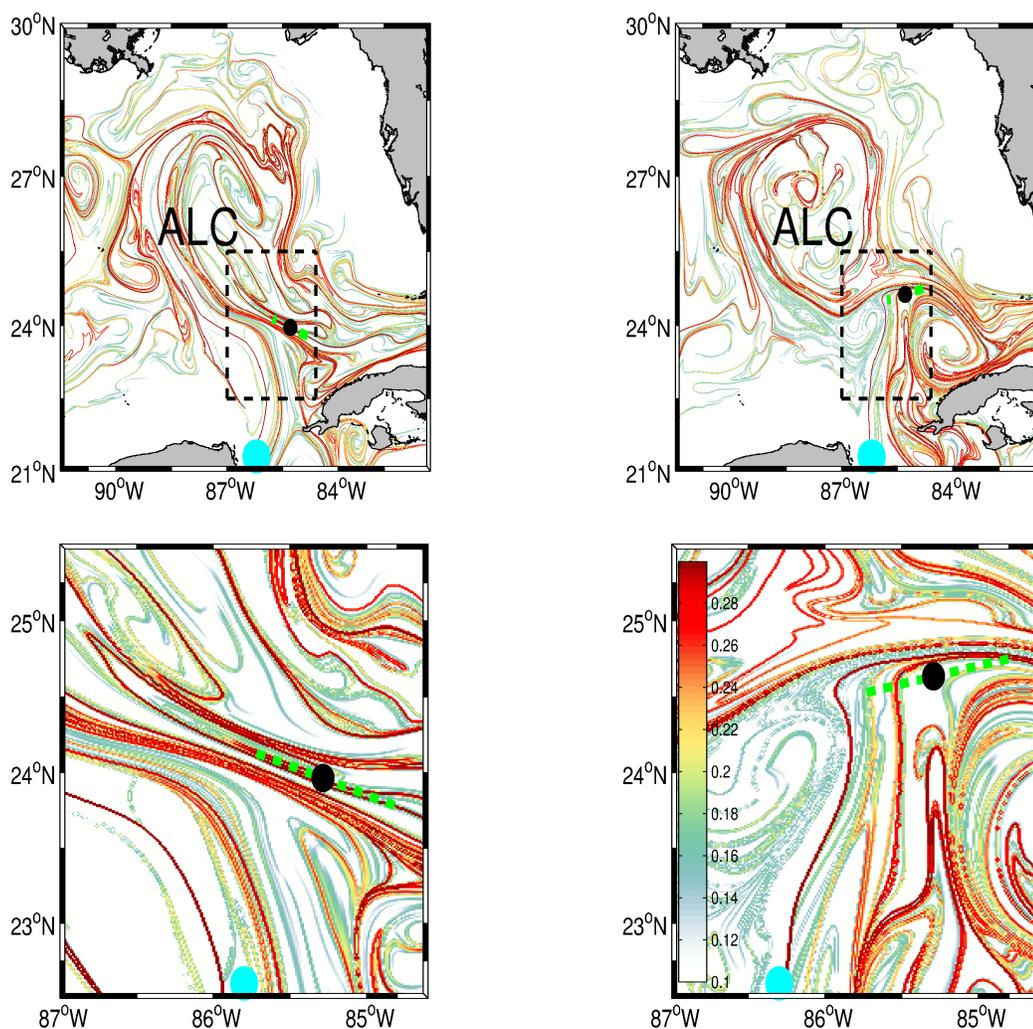


Figura 11. Imágenes del campo de los FTLE en d^{-1} calculados hacia atrás en el tiempo por un periodo de 35 días, para el primero de Junio (panel izquierdo) y 30 de Junio (panel derecho) de la simulación del modelo correspondientes al año 2000. Regiones con tonos rojo intensos indican las posibles LCS atractoras (crestas). Estas imágenes muestran al Anticiclón de la Corriente de Lazo (ACL) cuando está unido (panel izquierdo) y cuando está separado (panel derecho). En ambos paneles se muestra el punto hiperbólico instantáneo (punto negro) calculado para el campo de velocidades de cada día, junto con éste se muestra la dirección de estiramiento (línea verde punteada), denominada de ACL en el texto. El punto de color azul claro marca una cresta en el lado oeste de la Corriente de Yucatán-Lazo (CY) la cual juega un importante rol en el proceso de separación. Para apreciar con mayor detalle las crestas involucradas en el proceso, en las imágenes inferiores c y d se hace un acercamiento a la región indicada en las imágenes a y b

no siempre es posible relacionar uno de estos puntos al ALC. Se puede apreciar en estas figuras que el $phACL$ se encuentra en una region rodeado de valores altos de los FTLE y que la $deACL$ tiene una orientación aproximada con los máximos de los FTLE cerca del punto fijo.

Un círculo de color azul claro en la parte inferior de la Figura 11 marca el origen de la cresta asociada a la parte oeste de la Corriente de Yucatán. Los altos valores de esta cresta están ligados a la CL. A esta cresta se le denominara la Cresta de Yucatan (CY) debido a su origen, aunque se puede apreciar que la CY marca el borde de la CL. En la Figura 11a, se puede apreciar como esta corriente se extiende al norte rodeando al ACL para desviarse hacia el este y unirse con la corriente de Florida. En contraste, en la Figura 11b se puede ver que la corriente se desvía hacia el este dejando de envolver al ACL, el cual se encuentra totalmente separado de la CL.

Las diferencias entre estas dos condiciones del proceso de separación del RCL pueden ser apreciadas en las Figuras 11c y 11d, donde se hace un acercamiento a la región hiperbólica marcada por un rectángulo en las Figuras 11a y 11b. En la Figura 11c los valores altos de los FTLE son visibles entre las crestas paralelas al $deACL$ y CY mientras que en la Figura 11d se puede apreciar la presencia de valores pequeños de los FTLE entre estas dos crestas. Estos valores bajos de los FTLE se deben a que las partículas asociadas a estos valores viajan juntas a lo largo de la cresta (o se separan muy lentamente), de tal forma que las partículas que inicialmente se encontraban en el lado oeste (ciclónico) de la Corriente de Yucatán-Lazo ahora se mueven hacia el noreste atraídas por la CY. Nótese que la orientación de la dirección de estiramiento en las Figuras 11a y 11b es diferente. La ACLde está orientada noroeste-sureste en la Figura 11a, mientras que en la Figura 11b está orientada hacia el suroeste-noreste. Este cambio de orientación en la dirección de estiramiento cuando el ACL está separado

o por separarse se identificó en los ocho eventos que se analizaron en la tesis, lo que sugiere que puede ser útil para definir un índice de separación.

La Figura 12 ejemplifica las condiciones de las estructuras Lagrangianas antes y durante la separación total del ACL. El panel izquierdo representa la etapa inicial del proceso de separación, en el que pueden identificarse los siguientes procesos o características importantes:

- Presencia de una estructura ciclónica (C1) en la parte este de la CL.
- El phACL (punto de color magenta) se encuentra debajo del ACL y la orientación de la dirección de estiramiento (deALC - línea negra) es noroeste-sureste.
- Una cresta interior (puntos azules) paralelos al deACL en la región hiperbólica envuelve al ACL.
- Una cresta exterior (puntos verdes) que se extiende hacia el norte bordeando al ACL, y finalmente se une a la corriente de Florida.

En contraste, el panel derecho representa las condiciones del ACL cuando el remolino esta totalmente separado:

- Un remolino ciclónico (C2) en la parte oeste del punto hiperbólico (punto negro) opuesto al remolino ciclónico (C1), el cual se encuentra al norte de su posición antes de la separación.
- La CY deja de envolver al ACL y se desvía hacia el este por encima de la estructura anticiclónica localizada arriba de Cuba (Anticiclón Cubano, AC), marcando el exterior de la CL y uniéndose con la Corriente de Florida.

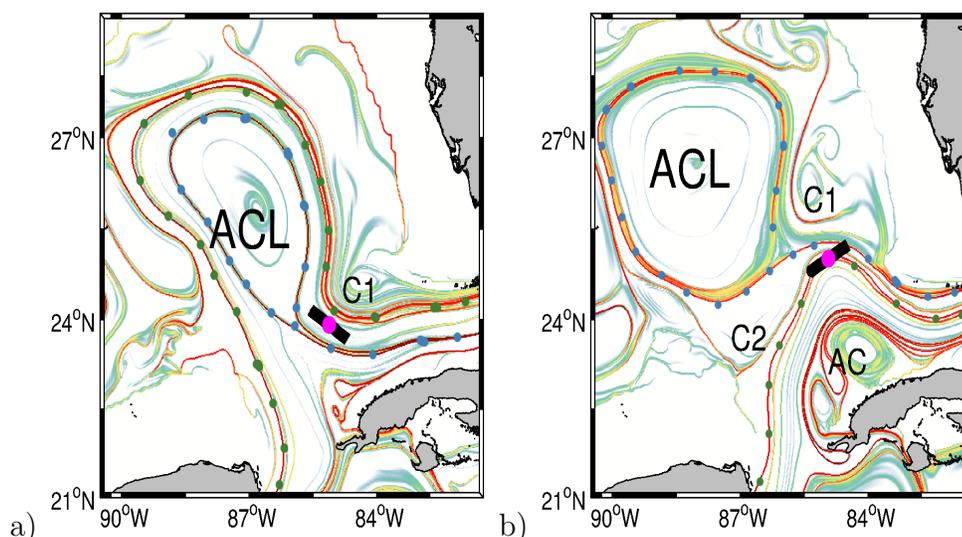


Figura 12. Síntesis de dos estados del proceso de separación del Remolino de la Corriente de Lazo (ACL): en el panel a el remolino (sigue siendo ACL) está unido. La CY (puntos verdes) se extiende hacia el norte envolviendo al ACL. La línea negra es la deACL (línea de estiramiento asociada al punto hiperbólico instantáneo (phACL) punto de color magenta) y su pendiente es negativa (noroeste-sureste). Al este del phACL se encuentra un ciclón $C1$. En panel b, el ACL se está separando. En el lado este, el ciclón $C1$ está situado más al norte y dos nuevos remolinos aparecen, un ciclón $c2$ al lado oeste del phACL y un anticiclón por encima de Cuba. Estas estructuras juegan un papel muy importante en el proceso de separación del ACL. La CY se mueve directamente hacia el estrecho de Florida rodeando al AC y se encuentra debajo de la cresta atractora. La deACL es ahora positiva (suroeste-noreste).

- La orientación de la deACL ahora es suroeste-noroeste, y la CY (puntos verdes) se encuentra por debajo de la cresta asociada al ACL (puntos azules).

Esto es consistente con observaciones de altimetría durante procesos de separación del ACL, en los cuales la Corriente de Lazo se extiende hacia el norte y es estrangulada por la presencia de remolinos ciclónicos formados en regiones similares (e.g. (Schmitz, 2005)).

Los máximos de los FTLE generalmente pueden asociarse con las LCS, por lo que permiten estimar las posibles trayectorias de partículas pasivas que viajan junto con estas estructuras. Por ello, las Figuras 11 y 12 muestran como la CY evoluciona con

el tiempo indicando la posible trayectoria de partículas pasivas que viajan con esta cresta. De esta forma, la CY determina cuando las partículas que se encuentran en el lado ciclónico de la Corriente de Yucatán van a moverse hacia el este en lugar de desplazarse hacia el noroeste rodeando al remolino. Por lo tanto, la posición de la CY podría ser un indicador confiable del estado del RCL, ya que permite estimar la trayectoria de las partículas que viajan con esta. Sin embargo, seguir a la CY resulta complicado.

Por otro lado, en las Figuras 11 y 12 la orientación de la deACL es “cuasi-paralela” a la CY, tanto cuando el remolino está unido (Figuras 11a y 12a) como cuando está separado (Figuras 11b y 12b). Considerando lo anterior, se puede formular de manera relativamente simple un índice Euleriano-Lagrangiano de la separación del ACL basado en los cambios observados en la pendiente de la dirección de estiramiento del punto hiperbólico, el cual parece indicar de manera cualitativa las propiedades del comportamiento Lagrangiano mencionado anteriormente. Como se muestra en las Figuras 11a y 12a cuando la CY envuelve al ACL, la dirección de estiramiento está orientada noroeste-sureste. En el momento en que la CY se desvía hacia el este, la orientación comienza a cambiar hasta que comienza a tener valores positivos y con una marcada orientación suroeste-noreste (vease Figuras 11b y 12b). Los valores negativos de la orientación de la deACL indican que el remolino está unido, por el contrario, el remolino se está separando cuando los valores de la orientación son positivos.

El cambio en la orientación de la deACL se calcula al determinar el punto hiperbólico instantáneo asociado al ACL, sus auto-valores y auto-vectores para cada día. La pendiente del deACL está dada por la orientación del autovector V^+ que corresponde al autovalor con parte positiva λ^+ de ∇U . Los valores negativos indican que la deACL está orientada en la dirección noroeste-sureste, mientras que los valores positivos in-

dican que la deACL está orientada suroeste-noreste y que el remolino esta próximo a separarse. Varios puntos hiperbólicos pueden aparecer en el flujo para cualquier paso de tiempo. Para identificar el punto hiperbólico asociado al ACL se desarrolló un método para reducir la incertidumbre generada por la presencia de otros puntos hiperbólicos (para mas detalles vease el Apendice A). Se debe mencionar que encontrar el phACL no fue siempre posible.

Una pregunta que surge es si las escalas de tiempo involucradas en estos cálculos y las relacionadas con la separación del RCL son coherentes, para garantizar que los campos evolucionan con lentitud suficiente. Tal condición permite relacionar la trayectoria del punto hiperbólico y sus autovalores-autovectores, calculados a partir del Jacobiano de la velocidad, con la presencia de una partícula hiperbólica cercana. Aunque el objetivo de este trabajo no es calcular una trayectoria hiperbólica, las condiciones establecidas (Haller y Poje, 1997) que permiten esta conexión se cumplen en todos los casos de separación (ver Apéndice A).

Con el fin de cuantificar los méritos del nuevo índice de separación, comparamos sus resultados con el método basado en calcular la longitud del contorno de los $17cm - SSH$ en varios eventos de separación del RCL. Se identificaron ocho eventos, los cuales son: mayo-agosto del 1997, junio-agosto del 1998, mayo-julio del 2000, agosto-noviembre del 2001, febrero-mayo del 2002, julio-septiembre del 2003, marzo-junio 2004 y abril-junio del 2005. Los eventos de 1998, 2000, 2001, 2005 son muy parecidos, y ambos índices dan resultados muy similares. En la Figura 13 se muestra la evolución de la pendiente del deALC (línea continua) y la longitud del contorno del $17cm - SSH$ (línea punteada) para los eventos 1997, 1998, 2002, 2003 y 2004. La línea vertical punteada indica la separación final del remolino determinada a partir del análisis visual de los FTLE, donde el lobulo rodeado por la CY se extiende directamente hacia el este hasta los 84°

oeste. Las líneas numeradas en paneles a y c indican los días mostrados en las Figuras 14 y 15 donde se grafican los campos de SSH y FTLE a diferentes tiempos, en dos casos particulares.

El contorno de los $17\text{cm} - SSH$ fue escogido por Leben (2005) para identificar la parte externa de la CL, por lo que valores altos de la longitud del contorno indican que el remolino está creciendo y está unido, mientras que los cambios bruscos a valores bajos sugieren que el remolino está separado. Los paneles a, c, e, y f muestran varias separaciones-fusiones de acuerdo a este método (línea punteada). En contraste, el índice de la pendiente (línea sólida) muestra valores negativos incluso cuando la altimetría indica separación, es decir, sugiere que el remolino sigue unido a pesar que el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ muestra varias separaciones. En particular, en el evento 2002 (panel c), la SSH indica que el remolino está separado durante la tercera semana de Febrero y se vuelve a unir casi 2 meses después, mientras que la pendiente muestra al remolino unido durante todo este período.

Con el fin de demostrar que el índice de la pendiente provee una información más representativa de la separación del RCL, se analizan en detalle los eventos 1997 y 2002, mediante diferentes imágenes de los campos de la SSH y los FTLE (Figuras 14 y 15), para los días marcados en la Figura 13a y 13c. Así mismo, se sembraron partículas pasivas en la parte oeste de la Corriente de Yucatán y se advectaron con el flujo. La posición de éstas se grafica con el campo de los FTLE con el fin de corroborar la interpretación de que los máximos de los FTLE permiten identificar estructuras que atraen a las partículas cercanas y forman el "esqueleto" del fluido (Mathur *et al.*, 2007; Shadden *et al.*, 2006; Beron-Vera *et al.*, 2008)

En la Figura 14, la segunda columna corresponde a las imágenes del 9 de junio 1997 el campo de SSH sugiere que el remolino está separado (panel superior), mientras que

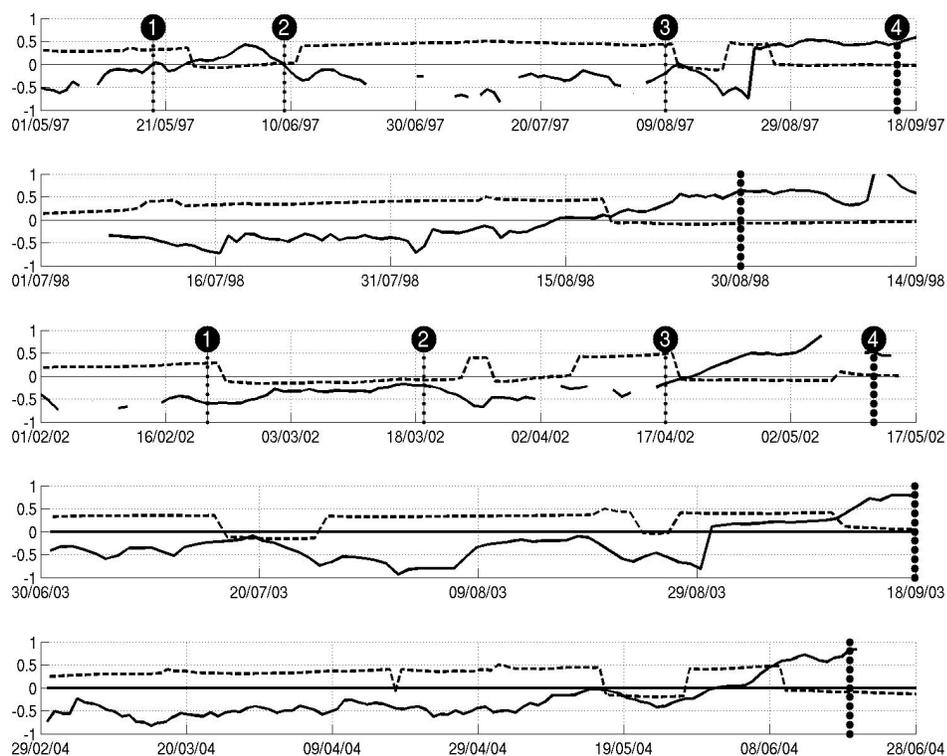


Figura 13. Series de tiempo usadas para determinar el estado de la CL y la separación del ACL. La línea punteada es la longitud del contorno de los $17\text{cm} - SSH$, mientras que línea continua representa al índice de la pendiente de la ACLde. Cada panel representa la evolución de estos índices para 5 periodos de separación de la simulación numérica correspondiente a Mayo-Agosto-1997, Junio-Agosto-1998, and Febrero-Abril-2002, Julio-Septiembre-2003, and Marzo-Junio-2004 respectivamente. La línea punteada vertical indica la separación final determinada del análisis de los FTLE. Los números y las líneas verticales en los paneles a y c son explicados en las Figuras 14 y 15. Caídas en el índice de la SSH sugieren que el remolino se ha separado. El índice de la pendiente indica que va a ver una separación sólo si el signo cambia de negativo a positivo. Notar que en varias ocasiones el índice de la SSH sugiere que el remolino está separado, mientras que el índice de la pendiente indica que el remolino permanece unido.

el campo de los FTLE se muestra altamente estructurado. En particular, el inicio de la CY está marcado por un triángulo amarillo, y aunque se encuentra ligeramente enredada aún rodea al ACL. Nótese que ciertas partículas se mueven hacia el este. Esta

puede ser una razón por la que el índice de la pendiente (línea continua en la Figura 13a) tiene valores positivos, indicando que el remolino se está separando. Sin embargo, el Anticiclón cubano (la estructura que se encuentra debajo del ACL, ver Figura 12) comienza a decrecer e impide que el remolino se separe totalmente. De los ocho eventos que se analizaron, este fue el único en el que el cambio de orientación de la pendiente no precede a la separación del ALC. En la cuarta columna se puede apreciar que tanto el campo de SSH como de los FTLE muestran al remolino separado, así mismo, casi todas las partículas se mueven hacia el este dejando de envolver al remolino. La esencia de este comportamiento es que la CY representa la frontera de un pequeño lóbulo que separa a la CL y al ACL, como una intrusión de las partículas claramente marcada. Cuando las partículas alcanzan los $84^{\circ}O$, la separación del ACL va a ocurrir..

El evento de separación del año 2002 mostrado en la Figura 13c resulta mas sorprendente en términos de la diferencia entre los dos criterios, pues la SSH muestra al remolino separado el día 20 de febrero y vuelve a juntarse casi dos meses después (ver línea punteada, Figura 13c). Por el contrario, el índice de la pendiente muestra al remolino unido (línea negra continua) durante el mismo período. En la Figura 15, los mapas de la SSH (paneles superiores) sugieren que el remolino está separado desde desde el 19 de marzo del 2002 (segunda columna) mientras que los FTLE y las trayectorias de las partículas indican claramente que el remolino permanece unido, ya que las partículas se extienden hacia el norte y no hay una intrusión de partículas que se muevan del oeste al este dejando de rodear al remolino. Esto sucede sólo hasta el 12 de mayo del 2002 (última columna). Se deber notar que en este caso el lóbulo formado por la CY es un poco más ancho en el lado oeste y alcanza los 83° oeste.

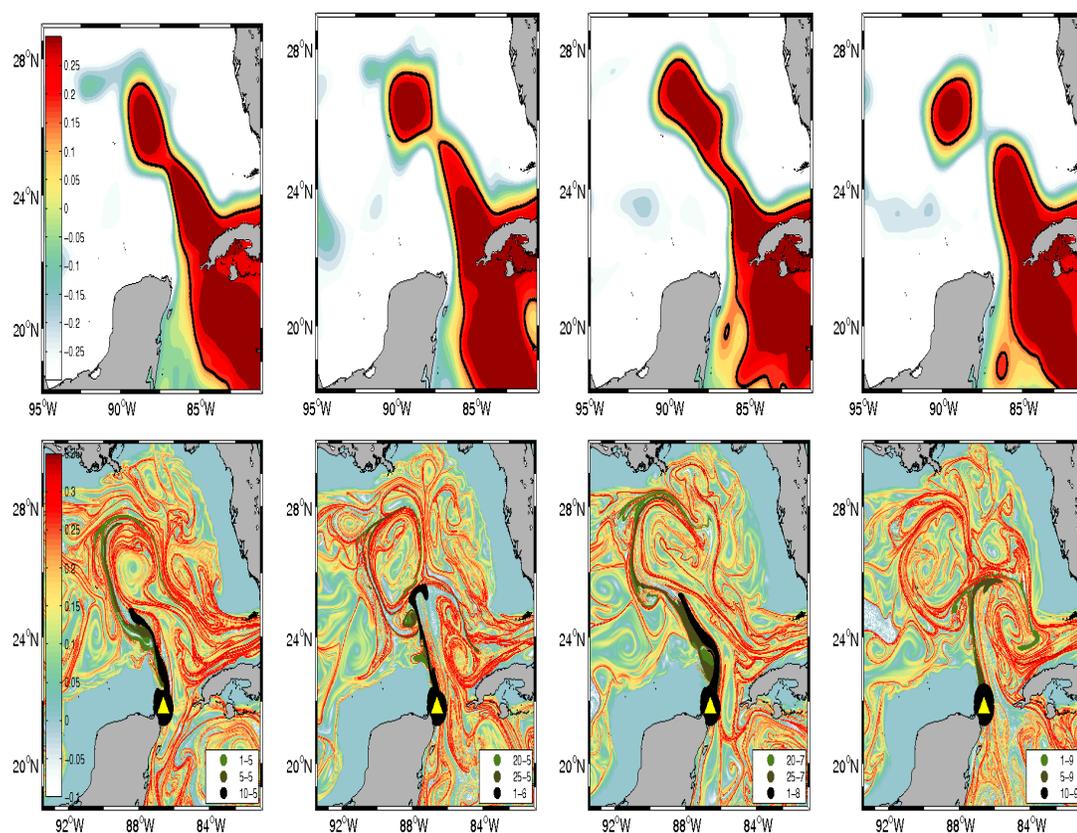


Figura 14. Imágenes del campo de la SSH en m (panel superior) y el campo de los EFTL en d^{-1} (panel inferior) para los días indicados en la Figura 13a: Mayo 19, Junio 9, Agosto 9, y Septiembre 15 de 1997. El campo de la SSH en la segunda columna muestra a un ACL separado mientras que el campo de los FTLE esta altamente estructurado y la CY sigue envolviendo al ACL. La mayoría de las partículas (puntos de color verde a negro indican el día en que fueron sembradas; marcadas en la parte derecha inferior de cada imagen) sembradas a la derecha de la península de Yucatán, estas se dirigen hacia el norte siguiendo a la CY (triangulo amarillo) indicando que el ACL esta unido. Finalmente, en el último panel una cantidad considerable de partículas se mueve directamente hacia el este siguiendo la CY, indicando que el remolino esta totalmente separado.

3.2.2 Síntesis y conclusiones-NEMO

Las Figuras 13a y 13c indican que el índice basado en la SSH no es muy representativo si se define la separación del ACL desde un punto de vista Lagrangiano. Sin embargo, es un índice que es muy fácil de calcular y que provee información muy útil. El propósito de este trabajo es esclarecer su contenido y complementarlo con índices que proveen

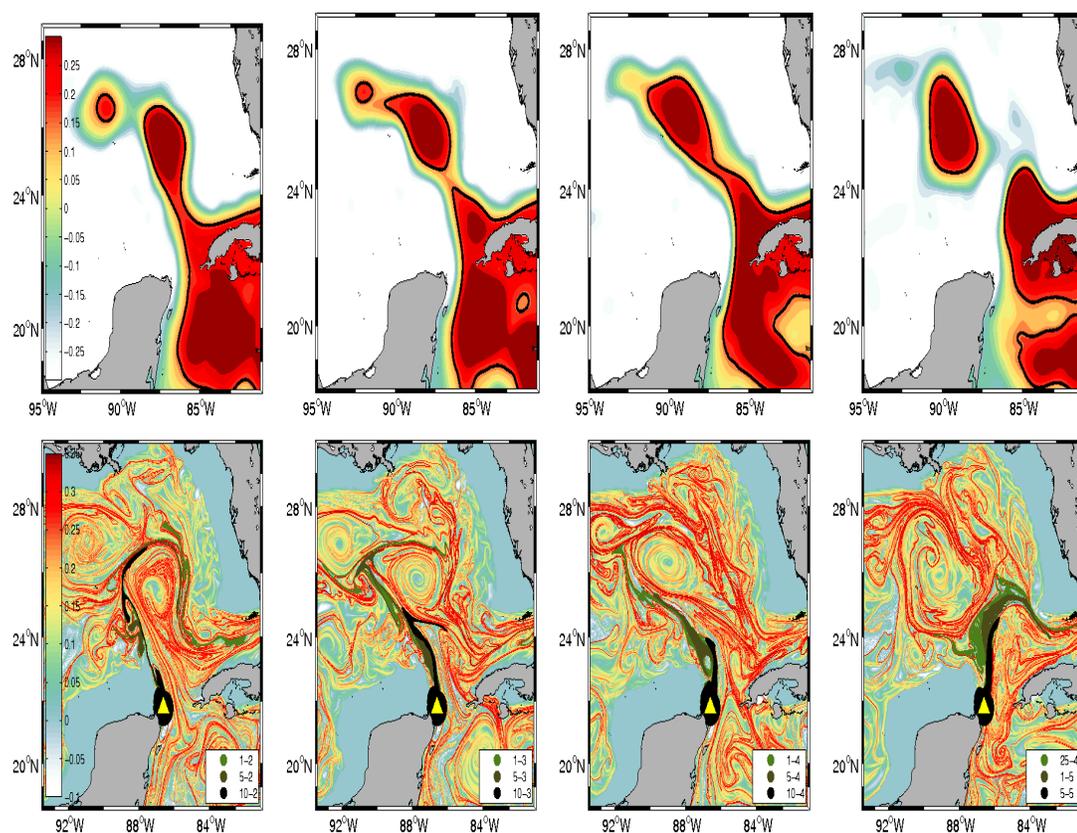


Figura 15. Imágenes de la SSH en m (páneos superiores) y de los FTLE en d^{-1} (páneos inferiores) para los días indicados en la Figura 13c: Febrero 21, Marzo 19, Abril 17, y Mayo 12 del 2002. SSH para marzo y abril sugieren que el ACL está separado mientras que los FTLE y las trayectorias de las partículas indican claramente que no hay una intrusión directa de partículas del lado oeste de la Corriente de Yucatán hasta Mayo 12 (última), donde el ACL está totalmente separado.

una información cuasi-Lagrangiana. Los mapas de los FTLE son relativamente complejos pero se pueden apreciar claramente las estructuras que intervienen en el proceso de separación, particularmente la Cresta de Yucatán, la cual juega un papel muy importante ya que indica el camino que pueden seguir partículas ubicadas del lado oeste o ciclónico de la Corriente de Yucatán-Lazo. Cuando estas partículas se mueven hacia el este uniéndose directamente la Corriente de Florida, se puede decir que el remolino está separado.

El trabajo reciente de Olascoaga y Haller (2012) lleva a cabo cálculos estrictamente Lagrangianos que pueden ser aplicados a este problema. Mientras tanto, el índice Euleriano basado en el cálculo del punto hiperbólico instantáneo asociado al ACL y su dirección de estiramiento permite reducir la incertidumbre para determinar el momento de separación del ACL. La pendiente negativa (noreste-suroeste) de esta dirección generalmente indica que el remolino está unido, mientras que la pendiente positiva (sureste-noroeste) indica que el remolino se está separando.

El índice basado en la pendiente está asociado con la separación del ACL debido a que su signo indica la posición relativa del remolino y la CL antes y después del proceso de separación. Estas posiciones determinan la dirección de estiramiento que eventualmente llevan a la separación del ACL. Esto se muestra en la Figura 12. Para analizar el proceso con más detalle, la Figura 16 presenta el mismo campo de los FTLE y las direcciones de estiramiento antes y después de la separación, pero ahora se incluyen los vectores de velocidad en el borde del ACL y la CL, delineados por los máximos de los FTLE. Antes de la separación, la influencia de la CL en el lado oeste del punto hiperbólico se dirige hacia el noroeste, mientras que el flujo en el lado este se dirige hacia el sureste, lo que hace que la pendiente sea negativa. Por el contrario, cuando el remolino está separado, la CL se dirige hacia el noreste, mientras que el ACL se dirige hacia el suroeste, por lo que la pendiente de la dirección de estiramiento ahora toma valores positivos.

Aunque el método sólo se ha aplicado a ocho eventos de separación, simulados numéricamente, los principales resultados indican que el índice de la pendiente es un buen indicador del estado de la Corriente de Lazo que también debería funcionar con otros modelos y velocidades geostroficas derivados de los datos de altimetría. Por lo tanto, los métodos Lagrangianos como los FTLE o similares parecen más adecuados y fiables para analizar, describir y determinar la separación del RCL.

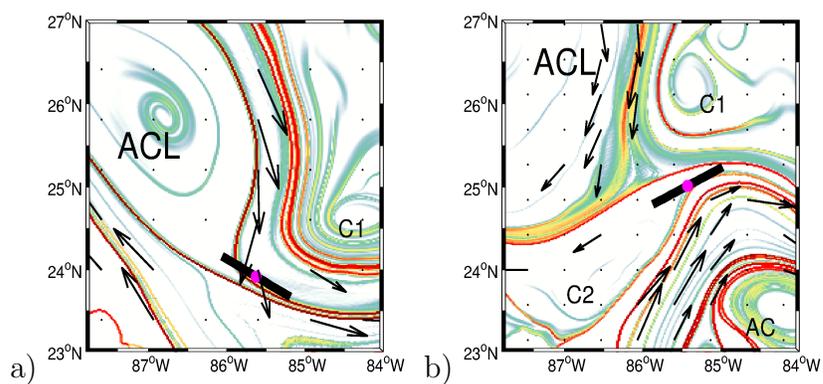


Figura 16. Acercamiento de los campos de los FTLE mostrados en la Figura 12 pero ahora se incluye los vectores de la velocidad en el borde del ACL y la CL. (a) Antes de la separación. (b) Después de la separación. La orientación de la dirección de estiramiento esta determinada por las posiciones relativas del ACL y la CL.

Capítulo 4

Análisis Lagrangiano con velocidades geostróficas calculadas con altimetría

En el Capítulo anterior se realizó un análisis Lagrangiano utilizando salidas de una simulación numérica de la circulación del mar Caribe y Golfo de México, en el que se identificaron las principales estructuras que intervienen en el proceso de separación del RCL. Así mismo, se propuso un índice “cuasi-Lagrangiano” que permite reducir la incertidumbre al momento de estimar la separación del RCL. Con el objetivo de examinar el estado del RCL en tiempo real, en este Capítulo se realiza un análisis similar utilizando datos obtenidos de la altura superficial del mar (SSH) y las velocidades geostróficas derivadas de los mismos. Los datos que se utilizan son de AVISO (Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic data), los cuales tienen una resolución horizontal de $35km$ aproximadamente y temporal de 1 a 7 días dependiendo del período de observación.

El objetivo de este Capítulo con mayor precisión el momento de la separación del remolino, la cual sucede cuando las partículas que viajan del lado ciclónico de la CL dejan de envolver al remolino. Nuevamente se utiliza el criterio del índice de la pendiente descrito en el Capítulo anterior. El uso de este índice, en conjunto con la aplicación de nuevos métodos estrictamente Lagrangianos, ayuda a lograr un mayor entendimiento del proceso de separación del RCL.

4.1 Altura del nivel del mar (SSH)

Los campos de SSH fueron producidos por Ssalto/Duacs (Ssalto multimission ground segment/Data Unification and Altimeter Combination System) y distribuidos por AVISO. Los campos se calcularon al combinar los datos a lo largo de las trazas de varios satélites.

Estos datos son calibrados, filtrados espacial y temporalmente e interpolados como describe Le Traon *et al.* (1998, 2003), con lo que se obtienen mapas semanales de la altura del mar. Estos mapas poseen una resolución espacial de un $1/3^\circ$ (aproximadamente $30km$) y el intervalo de tiempo elegido comienza en abril del 2006 y finaliza en diciembre del 2009. La altura absoluta del nivel del mar se define como la suma de la anomalía del nivel del mar y la altura dinámica media asociada a las corrientes promedio. (Para más detalles ver la página www.aviso.oceanobs.com).

4.1.1 Velocidades geostróficas

Partiendo de las ecuaciones primitivas el balance geostrófico adimensionalizando las ecuaciones y considerando

$$Ro_T \ll 1, \quad Ro \ll 1, \quad Ek \ll 1, \quad (29)$$

donde Ro_t es el número de Rossby temporal, Ro es el número de Rossby, y Ek es el número de Ekman (ver Cushman-Roisin y Beckers (2011))

En este límite suponiendo incompresibilidad y escalas horizontales mucho mayores que las verticales se obtiene el balance a orden cero

$$-fv = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (30)$$

donde u , v , y w representan las componentes de la velocidad en un sistema cartesiano (x, y, z) con z en la dirección vertical. f es el parámetro de Coriolis, ρ es la densidad, ρ_0 es la densidad promedio, p es la presión y g la gravedad.

De acuerdo a estas ecuaciones, las velocidades horizontales están dadas por el balance entre la fuerza del gradiente de presión horizontal y la fuerza de Coriolis. A este balance

se le denomina equilibrio geostrófico y da lugar a las corrientes geostróficas

$$u = \frac{-1}{\rho_0 f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (31)$$

las cuales son perpendiculares al gradiente de presión. Por lo tanto, en equilibrio geostrófico las partículas no se mueven de la alta presión a la baja presión sino que circulan alrededor de los centros de presión, a lo largo de las isóbaras. La dirección de rotación alrededor de una baja o alta presión depende del hemisferio ya que f cambia de signo.

La ecuación de momento vertical describe el equilibrio hidrostático entre el peso sobre el volumen y el gradiente vertical de presión

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (32)$$

donde ρ es la densidad total $\rho = \rho_0 + \rho'$. Integrando la ecuación (32) desde la superficie hasta una profundidad h se obtiene

$$p = p_0 + \int_{-h}^{\eta} g \rho dz = p_0 + \int_{-h}^0 \rho g dz + \rho_0 g \eta, \quad (33)$$

donde p_0 es la presión atmosférica en superficie y η es la altura del nivel del mar (SSH).

Sustituyendo esta ecuación en la solución para u y v en (31) se obtiene

$$u = \frac{-1}{\rho_0 f} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^0 g \rho dz - \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{\rho_0 f} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 g \rho dz + \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (34)$$

El gradiente de presión tiene dos términos, uno debido a la pendiente de la superficie del mar y otro a las variaciones horizontales de densidad en profundidad.

Las ecuaciones anteriores dan la velocidad geostrófica que resulta de las variaciones en la superficie del mar

$$u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (35)$$

Por otro lado, el parámetro de Coriolis está dado por $f = 2\Omega \sin \varphi$ (donde Ω es la velocidad angular de la tierra y φ la latitud). Considerando variaciones pequeñas de f (aproximación cuasigeostrófica, (Cushman-Roisin y Beckers, 2011)), podemos tomar f constante y definir una función de corriente

$$\Psi = \frac{g\eta}{f} \quad (36)$$

tal que

$$u_g = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_g = +\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (37)$$

Al considerar lo anterior, los contornos de la SSH permiten estimar las líneas de corriente asociadas al campo de velocidad.

Las velocidades geostróficas que se utilizan en este trabajo se calcularon con (35). Cerca de la costa la altura superficial tiene diversos errores y por lo tanto las velocidades geostróficas no son confiables. Le Traon *et al.* (1998, 2003) mencionan que los errores se deben a que las correcciones aplicadas a los datos de altimetría cerca de la costa no son adecuadas (filtrado de altas frecuencias, correcciones de marea, etc).

4.2 FTLE

De manera similar al cálculo de los FTLE con los datos de NEMO realizados en el Capítulo anterior, las trayectorias en este caso fueron calculadas usando el método Runge-Kutta de cuarto/quinto orden con un paso de tiempo fijo de 1 hora. La resolución

del campo de velocidad del modelo NEMO es de $1/15$ de grado (aproximadamente 7 km). En contraste, el campo de velocidad calculado con la SSH tiene una resolución espacial de $1/3^\circ$ (aproximadamente 35km). La “suavidad” de una trayectoria está dada por la “uniformidad” del campo de velocidad. Cuando el campo de velocidad tiene baja resolución y no es uniforme, el método lineal de interpolación no puede producir trayectorias de partículas ni FTLE suavizados, por ello se utiliza un método tricúbico para la interpolación espacio-temporal del campo de velocidades a las posiciones de las partículas que se colocan en una malla mucho mas fina. Por ello, el campo de velocidad para el Mar Caribe Norte y el Golfo de México se interpoló a una malla más fina también. La malla para calcular los FTLE es 4 cuatro veces más fina que la malla de la velocidad, ya interpolada, y está compuesta por 1000×1000 partículas. Los FTLEs fueron calculados para cada día por un periodo de 30 días, advectando las partículas hacia atrás en el tiempo 35 días, i.e. se integra la ecuación (19) desde t_i a $t_i - 35$ con $t = 1, 2, \dots, 30$. Este periodo captura los eventos de separación, incluidos los eventos de reconexión del RCL.

4.3 Resultados

Las Figuras 17 y 18 muestran al campo de los FTLE calculados con los datos de altimetría en ejemplos representativos. La línea punteada marca el contorno $17\text{cm} - SSH$. El punto hiperbólico (phACL) y su dirección de estiramiento (deACL) se indican con un punto rojo y una línea negra, respectivamente. El contorno de los $17\text{cm} - SSH$ delimita la región donde se encuentra el ACL y los máximos de los FTLE permiten identificar la estructura del mismo. De color magenta se representa la posición de las partículas pasivas advectadas por la corriente a diez días de haber sido liberadas en el

punto amarillo indicado en la parte oeste de la Corriente de Yucatán. Nótese que las partículas siguen los máximos de los FTLE.

La Figura 17 muestra el evento de separación de mayo-julio del 2008, para los días 10, 30 de mayo, y 19 de junio. En la segunda imagen el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ sugiere que el remolino se ha separado, mientras que la mayoría de las partículas siguen extendiéndose hacia el norte, bordeando al remolino. Así mismo la orientación de la deACL es noroeste-sureste (pendiente negativa) lo que sugiere que el remolino permanece unido. En la Figura 17c (imagen derecha) el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ y las partículas indican que el remolino está unido y la pendiente se mantiene negativa. Se debe mencionar que en la Figura 17c el remolino se está deformando y dividiendo en dos, como se puede apreciar de los máximos de los FTLE bordeados por el contorno de los $17\text{cm} - SSH$.

La Figura 18 muestra el evento de separación noviembre 2008-marzo 2009, para los días 21 de noviembre, 12 y 20 de diciembre. En la Figura 18b se observa que las partículas dejan de envolver al remolino, lo que indica que el remolino está totalmente separado. En la Figura 18c las partículas comienzan a rodear al remolino lo que indica que el remolino se ha vuelto a unir y la pendiente tiene valores negativos.

En algunos casos se observa una importante deformación del ACL en forma de “8” cuando hay reconexión, como se aprecia en la Figura 17c. Para discutir esto con mayor detalle, la Figura 19 muestra una continuación de la Figura 17. En la Figura 19b el remolino comienza a deformarse y dividirse en dos, por lo que comienza a aparecer una región hiperbólica entre las dos estructuras anticiclónicas rodeadas por el contorno de los $17\text{cm} - SSH$; la estructura situada más al norte será el nuevo ACL. En la tercera imagen, dicho ACL permanece unido, y la dirección de estiramiento del nuevo

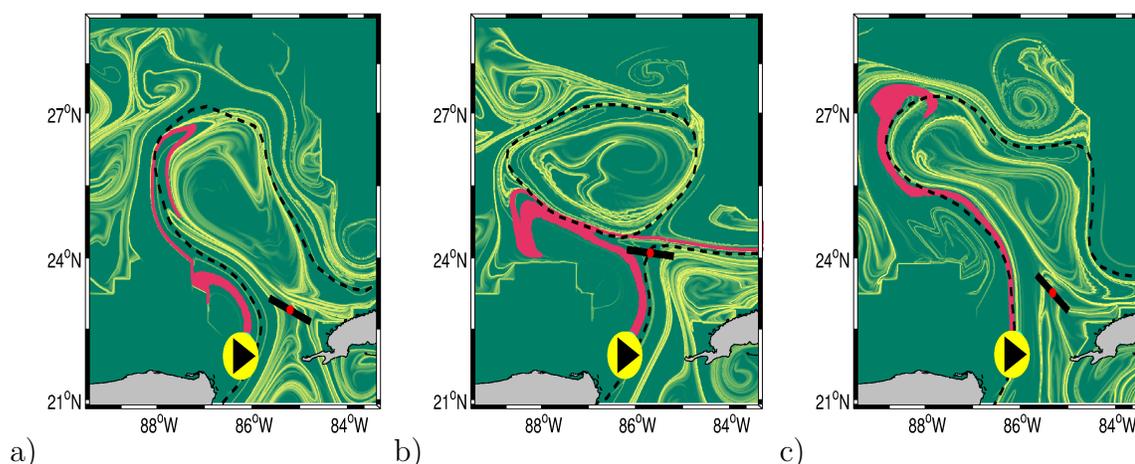


Figura 17. Campos de los FTLE calculados con velocidades geostróficas a partir de la SSH (AVISO), para los días 10 y 30 de mayo, y 19 de junio del 2008. Línea punteada representa el contorno de los $17\text{cm} - SSH$, El phACL y su deACL están marcados por un punto de color magenta y una línea negra la deACL, respectivamente. De color magenta se representa la posición de las partículas pasivas advectadas con la corriente. En la primera imagen se muestra al remolino unido, donde las partículas se extienden hacia el norte bordeando al ACL. En la segunda imagen, el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ sugiere que el remolino está separado, mientras que la posición de las partículas y la pendiente indican lo contrario. Finalmente, la tercera imagen muestra al remolino unido.

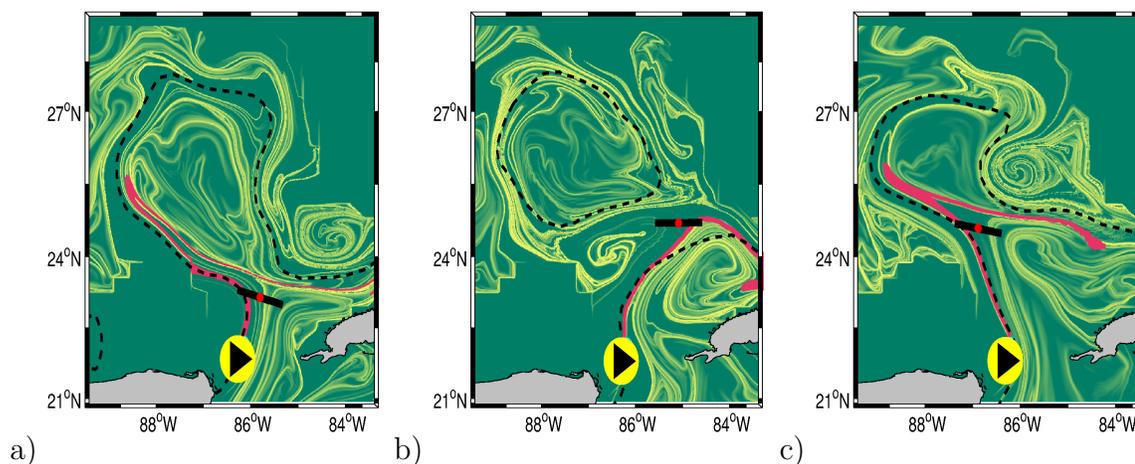


Figura 18. Campos de los FTLE calculados con velocidades geostróficas calculadas a partir de la SSH (AVISO), para los días 21 de noviembre, 10 y 12 de diciembre del 2008. Línea punteada representa el contorno de los $17\text{cm} - SSH$, El phACL y su deACL están marcados por un punto de color magenta y una línea negra la deACL, respectivamente. En esta secuencia se puede apreciar al remolino unido, en la siguiente está separado, donde las partículas dejan de envolver al ACL, tanto el contorno de los $17\text{cm} - SSH$ y la pendiente sugieren que el remolino está separado, finalmente el ACL se vuelve a unir, las partículas vuelven a bordear al ACL.

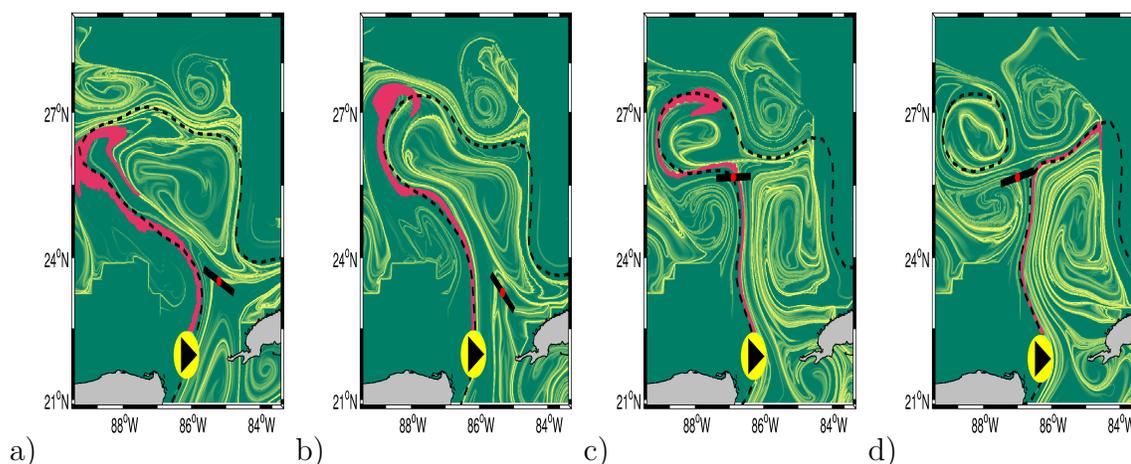


Figura 19. Campos de los FTLE calculados con velocidades geostróficas calculadas a partir de la SSH (AVISO), para los días 9, 19, y 29 de junio; y 3 de julio del 2008. En la segunda imagen el remolino se está deformando y dividiendo en dos nuevas estructuras. La nueva estructura situada más al norte será el nuevo ACL. En la siguiente imagen se puede ver al nuevo ACL totalmente separado. Notar, que en la tercera y cuarta imagen el punto hiperbólico y su dirección de estiramiento no tienen relación con el punto hiperbólico que se muestra en las dos imágenes anteriores (paneles a y b).

punto hiperbólico sugiere que el remolino está en proceso de separación. Finalmente, en la cuarta imagen el remolino está totalmente separado. Se debe notar que el punto hiperbólico en las Figuras 19c y 19d está asociado a esta nueva estructura y no tiene ninguna relación con los dos puntos hiperbólicos que se muestran en las Figuras 19a y 19b.

En los casos presentados la orientación de la deACL indica nuevamente estado del ACL y la trayectoria de las partículas que viajan del lado ciclónico de la CL; de manera análoga a los casos estudiados con el modelo NEMO en el Capítulo anterior. No obstante, resulta complicado determinar si el remolino se va a volver a unir o no utilizando sólo el punto hiperbólico. Esto se debe a que el punto hiperbólico se determina a partir de la geometría del campo instantáneo de velocidad. Para extender el análisis de la separación del RCL se utilizan a continuación nuevos conceptos Lagrangianos.

4.3.1 Núcleo Hiperbólico Lagrangiano (NHL)

Olascoaga y Haller (2012) realizan un análisis del derrame de petróleo del 2010 definiendo los Núcleos Hiperbólicos Lagrangianos (NHL) asociados a las LCS atractoras. Este tipo de núcleos permite identificar regiones que mantienen su hiperbolicidad por un cierto periodo de manera uniforme, al contrario del punto hiperbólico instantáneo que se define para un tiempo único. Dicho análisis permite, junto con los máximos de los FTLE o su extensión denominadas “strainlines” (Olascoaga y Haller, 2012), predecir la ruta hacia donde se pueden ir las partículas cercanas al NHL. La permanencia de dicho núcleo permite examinar la interacción del remolino con la estructura anticiclónica asociada a la CL, lo cual puede ayudar a determinar si el remolino se volverá a unir, aún cuando las partículas hayan dejado de rodear al ACL. Por el contrario, la ausencia de este núcleo indica o sugiere que la interacción del remolino con la estructura anticiclónica es nula y el remolino está totalmente separado.

Para determinar el NHL primero se debe definir la región de interés. En dicha región se define un dominio centrado en un punto hiperbólico con una malla regular de resolución muy fina. La posición de cada partícula se integra hacia atrás en el tiempo por un cierto período. Usando las trayectorias integradas hacia atrás se obtiene el tensor de deformación de Cauchy-Green para cada paso de tiempo, el cual se calcula de la siguiente forma:

$$C_{t_0}^{t_0+T}(x_0) = [\nabla \mathbf{F}_{t_0}^{t_0-T}]^* \nabla \mathbf{F}_{t_0}^{t_0-T}, \quad (38)$$

donde $*$ indica la matriz transpuesta, y el gradiente de deformación $\nabla \mathbf{F}_{t_0}^{t_0-T}$ se obtiene al diferenciar el mapa de flujo integrado hacia atrás $\mathbf{F}^{t_0-T}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_0 - T; t_0, \mathbf{x}_0)$ con respecto a la posición inicial \mathbf{x}_0 de las partículas.

Farazmand y Haller (2012); Haller y Beron-Vera (2012); Olascoaga y Haller (2012) demuestran que las LCS son parte de las líneas de estiramiento (“strainlines”) cuya ecuación esta dada por

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{ds} = \xi_1(\mathbf{x}_0(s)) \quad (39)$$

donde ξ_1 y ξ_2 son autovectores del Tensor de Cauchy-Green en \mathbf{x}_0 con autovalores λ_1 y λ_2 , tales que $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ y $|\xi_i| = 1$; $i = 1, 2$.

Un segmento γ_0 de estas líneas de estiramiento será una LCS si

$$\langle \xi_2(\mathbf{x}_0), \nabla^2 \lambda_2(\mathbf{x}_0) \xi_2(\mathbf{x}_0) \rangle < 0 \quad (40)$$

para toda $\mathbf{x} \in \gamma_0$. De todas estas LCS aquellas que se mantienen como tales (es decir no cambian sde atractoras a repelentes) se les denomina núcleos hiperbólicos y son la extensión más practica de los puntos hiperbólicos en sistemas con dependencia temporal arbitraria.

La hiperbolicidad está caracterizada por la atracción y repulsión, las cuales se deben estimar sobre una curva por la cual puede pasar una partícula. Para calcular dicha hiperbolicidad se puede considerar una curva suave $M(t_0)$ al tiempo t_0 , la cual es advectada por el flujo a una línea material dependiente del tiempo $M(t) = \mathbf{F}_{t_0}^t(M(t_0))$. Para cada punto $\mathbf{x}_0 \in M(t_0)$ se puede determinar un vector normal \mathbf{n}_0 a $M(t_0)$ y seguir su evolución sobre el mapa de flujo linealizado, $\nabla \mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)\mathbf{n}_0$, utilizando el hecho de que $\mathbf{n}_0 = \xi_2$ se mantiene a lo largo de la LCS. Para analizar que tan repelente es la línea material $M(t_0)$, denotamos la longitud de la componente normal a la superficie del vector advectado como $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ (Farazmand y Haller, 2012), como se muestra en la Figura 20. Donde $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ es la razón normal de repulsión de $M(t)$ a lo largo de la

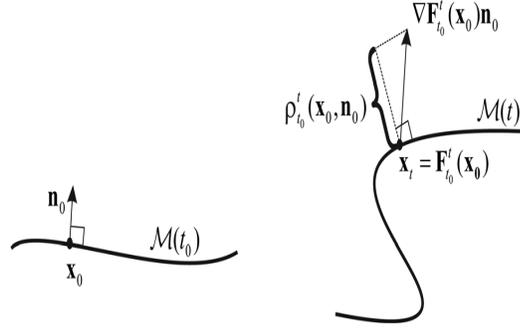


Figura 20. Definición de la razón de repulsión $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ a un punto inicial \mathbf{x}_0 de una línea material $M(t)$. El vector \mathbf{n}_0 denota al vector unitario normal a $M(t_0)$ en \mathbf{x}_0 . Figura tomada de Farazmand y Haller (2012)

trayectoria $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$. Como se muestra en Olascoaga y Haller (2012) en dos dimensiones las direcciones tangencial y normal a una trayectoria $M(t_0)$ están relacionadas con los autovectores del Tensor de Cauchy-Green, ξ_1 y ξ_2 respectivamente.

Haller (2011) plantea que la $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ se puede calcular por medio del tensor de deformación de Cauchy-Green:

$$\rho_{t_0}^{t_0-T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0) = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{n}_0, [\mathbf{C}_{t_0}^{t_0-T}]^{-1} \mathbf{n}_0 \rangle}} \quad (41)$$

donde $\langle \rangle$ indica el producto punto euclidiano.

Si $\rho_{t_0}^{t_0-T} > 1$, entonces $M(t)$ será repelente por todo el periodo t_0 a $t_0 + T$ a lo largo de la trayectoria que comenzó en \mathbf{x}_0 . De manera similar, si $\rho_{t_0}^{t_0-T} < 1$, implica que $M(t)$ será atractora durante dicho periodo.

Una trayectoria \mathbf{x}_t asociada a una LCS atractora que permanece dentro de una región hiperbólica uniforme por un periodo $[t_0 - T, t_0]$, será un núcleo hiperbólico, si la derivada

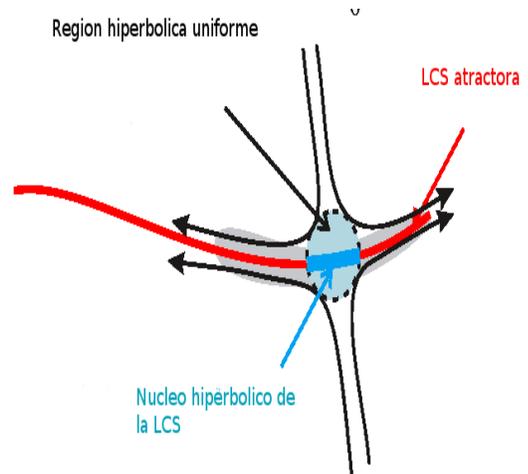


Figura 21. Núcleo Hiperbólico de una LCS para ese instante t_0 . Figura tomada de Olascoaga y Haller (2012). En el círculo azul, se encuentran las trayectorias \mathbf{x}_t que satisfacen las condiciones mencionadas para ser un núcleo hiperbólico, los cuales conforman el NHL

temporal de la razón normal de repulsión $\partial_t \rho$ es negativa para todos los valores de t en $[t_0 - T, t_0]$. Esto puede interpretarse como que la razón normal de repulsión ρ va aumentando de manera uniforme de t_0 a $t_0 - T$.

Las trayectorias \mathbf{x}_t que satisfacen la condición anterior forman el núcleo asociado a la LCS, como se muestra en la Figura 21. La posiciones iniciales \mathbf{x}_0 de las trayectorias \mathbf{x}_t que conforman los núcleos hiperbólicos indicarán las posiciones de los núcleos. Asociado a estos núcleos, se tiene un autovector ξ_1 (ξ_2) tangente (normal) al $M(t_0)$, calculado a partir del Tensor de deformación de Cauchy-Green, ecuación (38). La orientación de la dirección máxima de estiramiento esta dada por el autovector ξ_1 . De todas las trayectorias con hiperbolicidad uniforme durante todo período, se toma un porcentaje (del 1%) las cuales representan las regiones hiperbólicas más significativas e intensas, tal como se describe en Olascoaga y Haller (2012). El promedio de la posición inicial \mathbf{x}_0 de los núcleos que satisfacen lo anterior indicará la posición del NHL asociado a la LCS.

4.3.2 Aplicación de los Núcleos Hiperbólicos Lagrangianos

Como se mencionó anteriormente, durante el proceso de separación el remolino tiende a deformarse y dividirse en dos o más remolinos. Por consiguiente resulta complicado determinar el punto hiperbólico asociado al remolino que se va a liberar. Para identificarlo, se siguió la siguiente metodología:

- Primero se considera el instante en que decae abruptamente el contorno de los $17cm - SSH$, y se determina el punto hiperbólico que se encuentra más cercano a dicho contorno y que esté asociado al ACL; que se denota como ph_i
- Para encontrar el punto hiperbólico para el siguiente paso de tiempo se define un círculo con radio de un grado centrado en el punto encontrado ph_i . El nuevo punto hiperbólico que se encuentre dentro del círculo será el punto hiperbólico para ese día. A dicho punto se le denominará ph_{i+1} . Si dentro del círculo aparecen varios puntos hiperbólicos, se toma el más cercano al punto hiperbólico del día anterior. Para encontrar el punto hiperbólico subsecuente se realiza el mismo procedimiento pero utilizando el punto hiperbólico ph_{i+1} y así sucesivamente.

Los puntos hiperbólicos se buscan hacia adelante en el tiempo hasta que el remolino se vuelve a unir, es decir, que el contorno de los $17cm - SSH$ vuelve a envolver al remolino, o bien cuando deje de aparecer el punto hiperbólico por 5 o más días (cuando el remolino se separa totalmente). Esto se hace debido a que el remolino se puede deformar, por lo que puede aparecer una nueva región hiperbólica. Para conocer las propiedades de la región hiperbólica se considera el punto hiperbólico 5 días antes de la separación.

Una vez determinada la posición del punto hiperbólico para cada día se define una malla de partículas de $280km \times 280km$ con una resolución de 0.02° , centrada en dicho punto.

Las trayectorias de las partículas de esta malla se integran hacia atrás en el tiempo por 10 días y se calcula la razón normal de repulsión $\rho_{t_0}^{t_0-T}$ y su derivada temporal $\partial_t \rho_{t_0}^{t_0-T}$. Las trayectorias en las que $\partial_t \rho_{t_0}^{t_0-T}$ sea negativa durante un cierto periodo, serán los núcleos hiperbólicos. Para los casos analizados, si $\partial_t \rho_{t_0}^{t_0-T}$ fue al menos negativa por un 40% del periodo (4 días) se le consideró un núcleo hiperbólico. De todos estos, núcleos sólo se toma el 1% más intenso. El promedio de la posición inicial de dichos núcleos, indica la posición del Núcleo Hiperbólico Lagrangiano, NHL_{10} .

Los NHL representan trayectorias uniformemente hiperbólicas por un cierto periodo (4 días en el presente caso). Su existencia indica que durante al menos 4 días se tiene una región uniformemente hiperbólica o bien que domina la repulsión y atracción donde se ubican. La existencia del núcleo es relevante pues significa que todavía existe una unión del ACL con el otro remolino a pesar de que las partículas dejen de rodear al ACL. Por el contrario, si no logra encontrar ningún NHL en la región que se analiza, ello implica que en dicha región no domina la atracción y estiramiento por lo que el ACL ya no está “atado”. En otras palabras lo que se propone como conclusión de nuestro análisis es que la existencia (ausencia) del NHL es un indicador de que el RCL sigue unido (separado).

4.3.3 Análisis de la evolución de los NHL

Las Figuras 22, y 23 muestran cuatro instantes del RCL para los eventos enero-abril del 2008 y mayo-julio del 2008. En el panel superior se muestra los FTLE, la línea punteada roja indica el contorno de los $17cm - SSH$, la posición y dirección máxima de estiramiento del NHL_{10} están indicadas por el punto negro y la línea verde punteada, respectivamente. El panel inferior muestra la evolución del contorno de los

$17cm - SSH$ en azul, en rojo con puntos azules la pendiente asociada a la dirección de máximo estiramiento del NHL_{10} ; las líneas punteadas (en la vertical) marcan el tiempo que corresponde a las imágenes de los paneles superiores. Se debe mencionar que la orientación de la dirección máxima de estiramiento asociada al NHL puede utilizarse de manera similar a la pendiente de la deACL. Es decir, cuando la orientación o pendiente de la dirección máxima de estiramiento sea negativa el remolino está unido (las partículas siguen envolviendo al ACL); por el contrario, si la pendiente es positiva el remolino se ha separado (las partículas dejan de envolver al remolino).

En la Figura 22a el contorno de los $17cm - SSH$ sugiere un remolino separado. Cercano al NHL_{10} se pueden apreciar valores máximos de los FTLE (azul intenso) que conectan al ACL con la estructura anticiclónica que se encuentra debajo de ésta. La presencia de estos máximos asociados al NHL indican que el remolino está unido. Entre la primera y segunda marca del panel inferior, no se pudo determinar el NHL entre un día y otro, es por ello que se gráfica solo el punto y no la línea roja. Después de la segunda marca, tanto el contorno de los $17cm - SSH$ y la pendiente de la dirección máxima de estiramiento sugieren que el remolino se ha unido. Debido a que el remolino se puede deformar y dividir en dos estructuras anticiclónicas, puede aparecer otra región hiperbólica asociada al nuevo anticiclón. Debido a ello se deja de analizar la región hiperbólica, hasta que el contorno de los $17cm - SSH$ sugiera que el remolino se ha separado. En dicho instante se vuelve a determinar los NHL asociados a la región hiperbólica asociada al nuevo anticiclón. Las Figuras 22c y 22d muestran los NHL_{10} asociados a la nueva región hiperbólica; junto a ellos se pueden apreciar valores máximos de los FTLE que conectan al ACL con la estructura anticiclónica inferior. En la última imagen se puede apreciar que el ACL se está alejando. En los siguientes pasos de tiempo no se detecta un NHL para dicha región. Esto sugiere que dicha región deja de

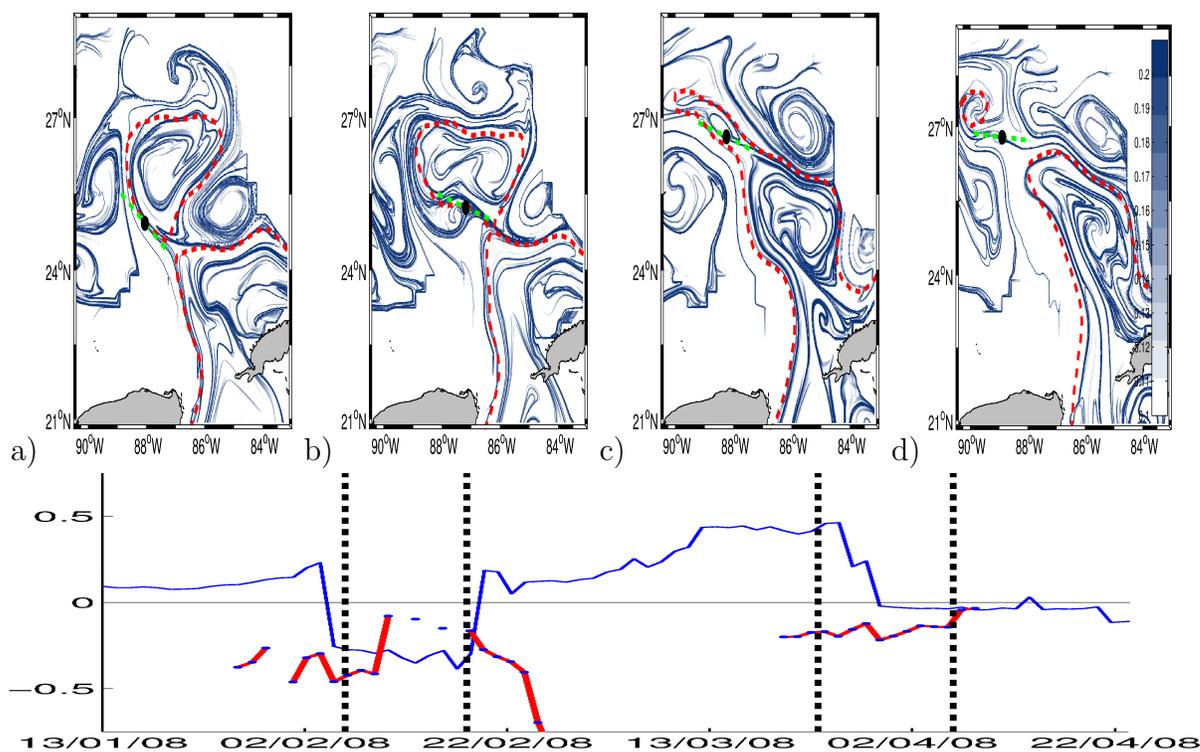


Figura 22. Evento Enero-Abril 2008. Panel superior campo de los FTLE donde la línea roja indica el contorno de los $17\text{cm} - SSH$, el punto negro y la línea verde punteada indica la posición y orientación de la dirección máxima de estiramiento asociada al NHL_{10} . EL panel inferior muestra la evolución temporal de la SSH en azul y de la dirección máxima de estiramiento del NHL_{10} en rojo con puntos azules; las cuatro líneas verticales punteadas en la grafica indican el día que representa cada imagen en los paneles superiores.

ser hiperbólica de manera uniforme por lo que la interacción del remolino con la otra estructura anticiclónica es mínima o nula, y con ello se puede concluir que el remolino se ha separado totalmente.

En la Figura 23, se muestra un proceso similar al descrito anteriormente donde la SSH sugiere una separación previa, mientras que los FTLE y la presencia de los NHL indican que el RCL permanece unido. Así mismo en la Figura 23d se puede apreciar que el NHL determinado para dicho instante no se encuentra cerca de la región hiperbólica. La ausencia de estos puntos junto con una nueva posición del NHL indica que el remolino se ha separado totalmente.

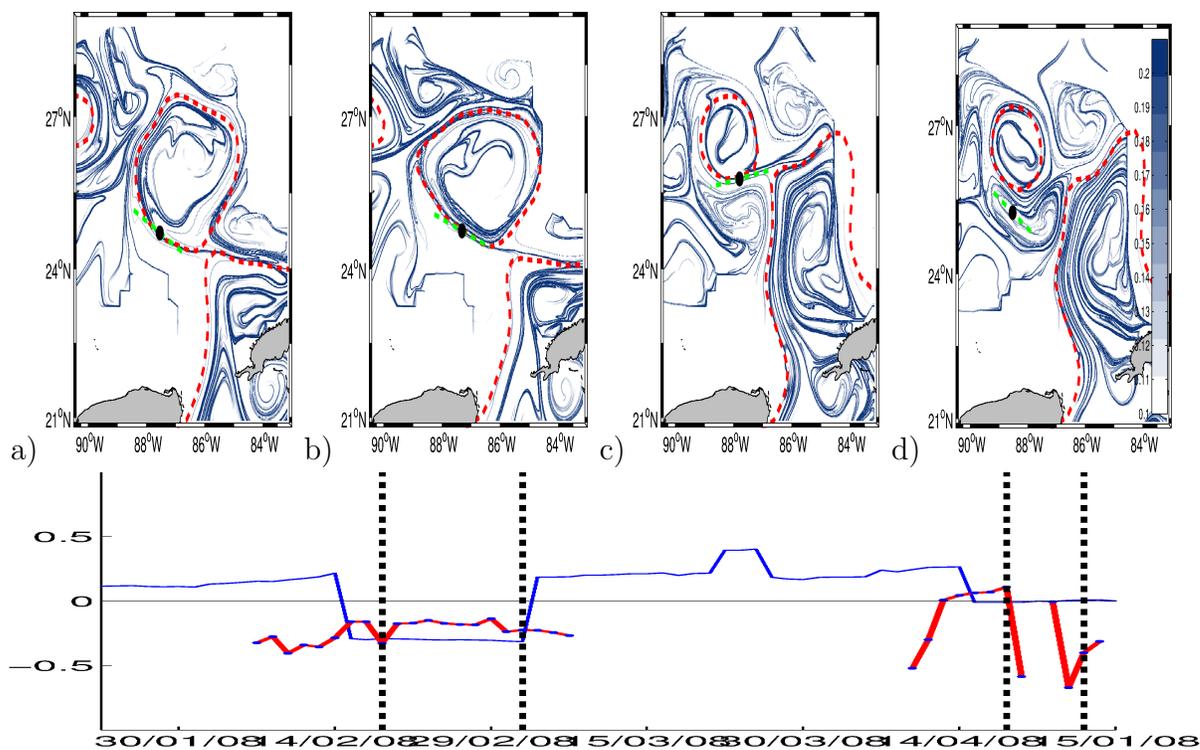


Figura 23. Evento Mayo-Julio 2008. Panel superior campo de los FTLE donde la línea roja indica el contorno de los $17\text{cm} - SSH$, el punto negro y la línea verde punteada indica la posición y orientación de la dirección máxima de estiramiento asociada al NHL_{10} . EL panel inferior muestra la evolución temporal de la SSH en azul y de la dirección máxima de estiramiento del NHL_{10} en rojo con puntos azules; las cuatro líneas verticales punteadas en la grafica indican el día que representa cada imagen en los paneles superiores.

4.3.4 Discusión

La aplicación de metodologías Lagrangianas para determinar y entender el proceso de separación del Remolino de la Corriente de Lazo permite una mejor descripción de su proceso de separación. Con ello se pueden apreciar las principales estructuras que intervienen en dicho proceso de separación.

Los resultados mostrados en las Figuras 17 y 18 indican que el remolino está en apariencia separado, pues la pendiente asociada al deACL es positiva. Sin embargo el remolino se vuelve a unir, ya que la trayectoria de las partículas vuelven a rodear al remolino y la pendiente adquiere valores negativos. Lo anterior, indica que el criterio de la pendiente se puede aplicar para estimar si el remolino se va a separar o no. Sin embargo, en algunos casos se presenta una notable deformación del ACL en forma de “8”, es decir, en dos estructuras anticiclónicas. Como consecuencia, y debido a la naturaleza Euleriana del punto hiperbólico instantáneo, no se puede estimar la interacción entre estas dos estructuras. Debido a ello resulta complicado determinar si el remolino se va a separar totalmente o no. La aplicación de los NHL permite estimar si el ACL sigue interactuando con la estructura anticiclónica, ya que determina regiones hiperbólicas que mantienen su hiperbolicidad por un cierto periodo. Esto puede interpretarse como que la región mantiene sus propiedades de atracción-repulsión (estiramiento-contracción) por un cierto periodo de manera uniforme, lo que significa que el remolino interactúa con la estructura anticiclónica por ese periodo, de tal forma que el remolino sigue “atado”. Por el contrario, cuando la región no mantiene su hiperbolicidad uniforme, es decir, el remolino deja de interactuar con la estructura anticiclónica, el remolino se ha separado totalmente.

Como se mencionó anteriormente la orientación de la dirección máxima de estiramiento

del NHL permite estimar la futura trayectoria de las partículas que viajan cerca de una LCS. Por ello, la orientación de dirección máxima de estiramiento del NHL tiene propiedades similares a la dirección de estiramiento del punto hiperbólico, y permite estimar si las partículas que viajan del lado ciclónico de la Corriente de Lazo dejan de envolver al remolino o no. Así mismo, la aplicación de este concepto permite reducir la incertidumbre que se genera cuando las partículas dejan de envolver al remolino y posteriormente se vuelve a unir.

Finalmente, el concepto de los NHL se aplicó a dos eventos por lo que no puede ser concluyente. No obstante, los resultados sugieren que la aplicación de conceptos Lagrangianos puede ayudar a reducir la incertidumbre para estimar el estado del RCL.

Capítulo 5

Descripción Lagrangiana del proceso de separación a diferentes profundidades con datos del modelo NEMO

El objetivo de este Capítulo es extender el análisis Lagrangiano a diferentes profundidades utilizando los datos del Modelo NEMO. El objetivo es hacer una descripción de lo que puede suceder con las trayectorias de las partículas que viajan con la CL, el phACL, y describir o mostrar la formación de pequeños remolinos ciclónicos o anticiclónicos que se forman a diferentes profundidades. Maul *et al.* (1985) describen un flujo profundo en el Canal de Yucatán, el cual se dirige hacia el sur y es parte del balance de continuidad asociado a la formación del ACL dentro de la CL. Según sus resultados, el excedente del flujo de entrada al Golfo de México en la capa superior que se requiere para la formación del remolino es parcialmente compensada por el flujo de salida en la capa profunda hacia el Mar Caribe por el Canal de Yucatán. Esta idea es examinada por Bunge *et al.* (2002) usando datos de anclajes para el periodo septiembre 1999 - junio 2000 tomados durante el programa de observación CANEK (Candela *et al.*, 2002; Sheinbaum *et al.*, 2002). Este análisis fue realizado por un periodo de 6 meses, de noviembre 1999 a abril 2000, y los resultados descartan el evento de separación. Los autores encuentran una cierta correlación entre la razón de expansión de la CL y el flujo de salida profundo de la Corriente de Yucatán.

Utilizando un modelo de dos capas, Hurlburt y Thompson (1980) se centran en el papel de la inestabilidad barotrópica alimentada por la energía cinética de la capa superior cuando el ACL se está separando. La formación del remolino, en este caso, no está determinada por inestabilidades, sino más bien estas crecen de manera rápida cuando el remolino crece o bien cuando la CL se extiende al norte. Ellos encontraron que la capa inferior del modelo cercana al ACL se caracteriza por pares de ciclones y anticiclones

profundos (Sturges *et al.*, 1993; Welsh y Inoue, 2000). Vukovich y Maul (1985) sugieren que los ciclones pueden intensificarse debido a procesos de inestabilidad. Por otro lado, Chérubin *et al.* (2006) describen que un remolino ciclónico situado en la parte oeste del Canal de Yucatán aparece primero en regiones profundas y luego aparece en la superficie.

Al considerar lo anterior, un análisis Lagrangiano a diferentes profundidades puede ayudar a identificar diferentes estructuras que intervienen en el proceso de separación y que no se pueden apreciar en las capas superficiales. Un ejemplo relevante es la formación y evolución de remolinos ciclónicos que se forman en las capas inferiores. Por otro lado, al seguir la trayectoria de las partículas que viajan con la CL se puede estimar la influencia de esta a diferentes profundidades.

5.1 Resultados

Para este análisis se calcula los FTLE y el phACL de la misma manera que se describe en el Capítulo 3, donde se realiza un análisis Lagrangiano al campo de velocidades para $68m$. En este caso, se calcularon los FTLE y la dirección de estiramiento del punto hiperbólico a tres profundidades, $68m$, $355m$, $700m$.

Las Figuras 24 y 25 se muestra el campo de los FTLE y la trayectoria de partículas para la profundidad de $355m$ en dos ejemplos representativos (paneles superiores). En la parte inferior de cada imagen se indican los días en que fueron soltadas las partículas en la corriente. En el panel intermedio se muestra la evolución de la pendiente de los puntos hiperbólicos a diferentes profundidades, línea negra para $68m$, línea roja $355m$ y línea azul para los $700m$. Finalmente, en el panel inferior se grafica la latitud del phACL en línea negra (roja) continua para la profundidad de $68m$ ($355m$). La línea punteada

negra (roja) representa la latitud máxima que alcanzan las partículas pasivas al ser advectadas con la corriente a 68m (355m). Nótese que, las líneas verticales punteadas indican el día de cada imagen de los paneles superiores.

En la primera imagen de la Figura 24 se puede apreciar que las partículas a 355m se extienden hacia el norte bordeando al RCL. Sin embargo, en los tiempos siguientes las partículas dejan de mostrar dicho comportamiento; esto se podría interpretar como que el remolino a dicha profundidad ya se ha separado. Sin embargo, si se considera la evolución de la pendiente del phACL se encuentra que para las tres profundidades es similar, indicando que el remolino permanece unido. Finalmente en el último panel se observa que la latitud máxima de las partículas asociada a los 68m (línea punteada) se encuentra por encima de la latitud del phACL (línea negra continua). Esto sugiere que las partículas que viajan con la corriente se extienden hacia el norte bordeando al ACL. Por el contrario, la latitud máxima de las partículas a 355m antes de la segunda marca se encuentra debajo de la latitud asociada al phACL de las dos profundidades. Esto sugiere que a 355m la Corriente de Yucatán comienza a dejar de envolver al remolino. En la Figura 25, en las tres primeras imágenes se puede apreciar que las partículas se extienden y bordean al ACL. A su vez, el panel inferior muestra que la latitud máxima de las partículas a 355m es casi igual a la latitud del phACL para las dos profundidades. Después de la tercera marca las partículas dejan de extenderse hacia el norte, por lo que su latitud máxima comienza a estar por debajo de la latitud de los phACL. Esto sugiere que la corriente de Yucatán deja de extenderse hacia el norte dejando de envolver al ACL a los 355m antes que a los 68m. Se debe notar que la evolución de la pendiente para las tres profundidades parece ser similar durante todo el proceso.

En el segundo panel de las Figuras 24 y 25 la evolución de la pendiente asociadas a la dirección de estiramiento del phACL para las tres profundidades es muy similar, lo que

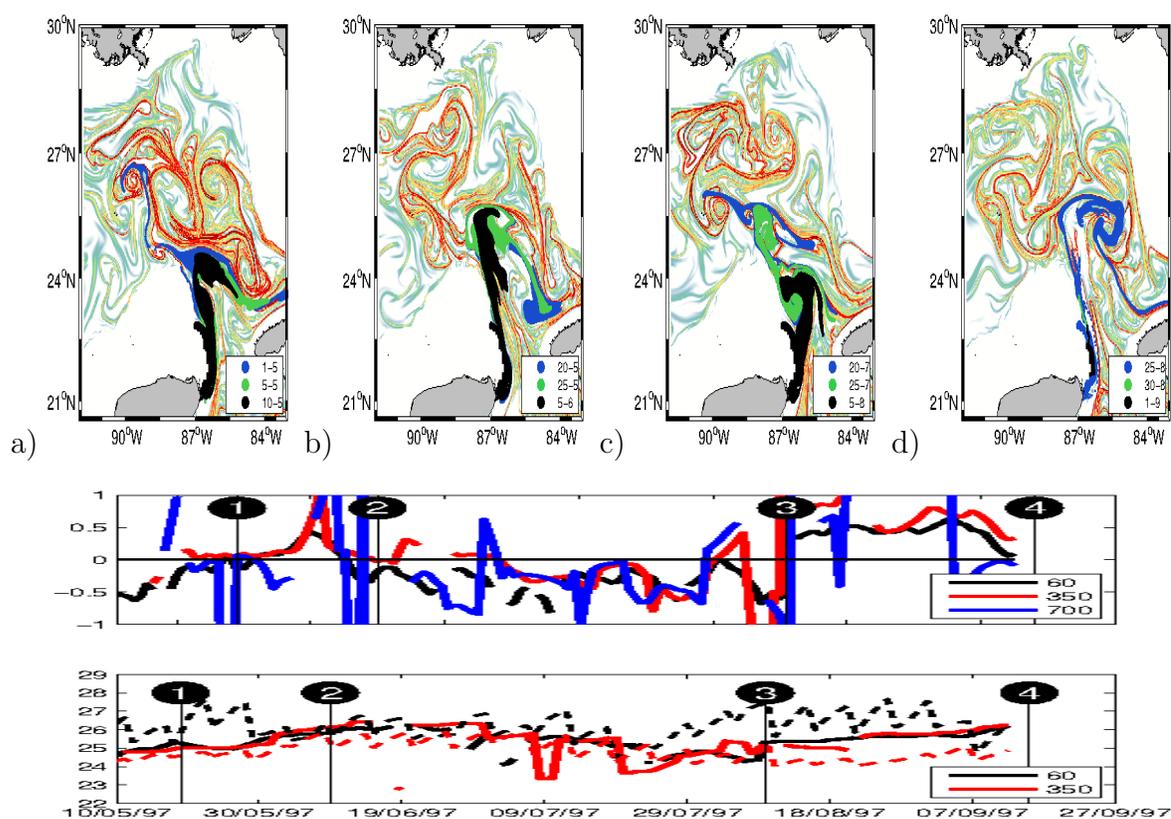


Figura 24. Días 19 de mayo, 9 de Junio, 8 de Agosto y 15 de Octubre del 1997. Panel superior, Campos de los FTLE y trayectorias de partículas advectadas por la corriente a diferentes días (parte inferior de cada imagen indica el día que se soltaron) para la profundidad de 355m. Panel intermedio, evolución de la dirección de la dirección de estiramiento del pACL a diferentes profundidades. Panel inferior, en línea punteada la latitud máxima que alcanzan las partículas al ser advectadas por la corriente, línea continua negra (roja) indica la posición del pACL a 68m (355m). (Lease texto)

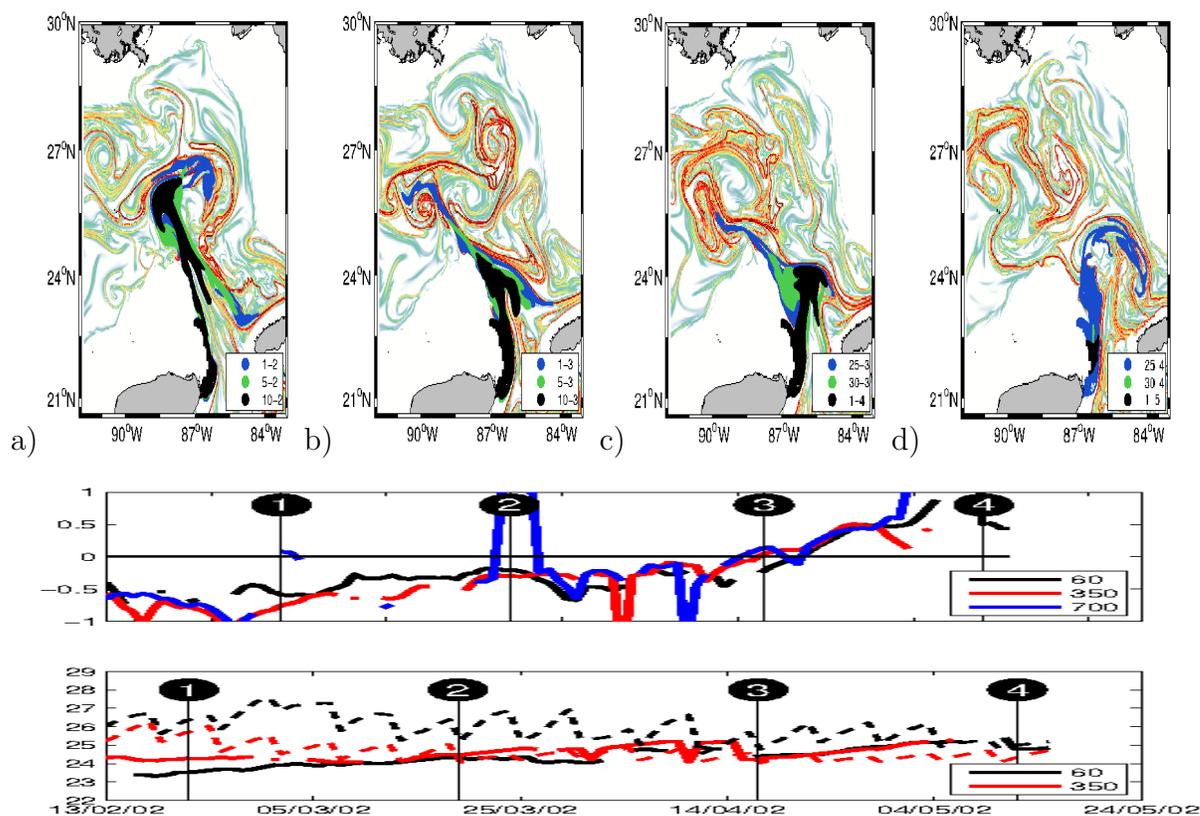


Figura 25. días 21 de Febrero, 19 de Marzo, 17 de Abril, y 12 de Mayo del 2002. Panel superior, Campos de los FTLE y trayectorias de partículas advectadas por la corriente a diferentes días (parte inferior de cada imagen indica el día que se soltaron) para la profundidad de 355m. Panel intermedio, evolución de la dirección de estiramiento del phACL a diferentes profundidades. Panel inferior, en línea punteada la latitud máxima que alcanzan las partículas al ser advectadas por la corriente, línea continua negra (roja) indica la posición del phACL a 68m (355m). (Lease texto)

puede indicar que el remolino sigue unido, aunque la latitud máxima de las partículas a los $355m$ indique lo contrario.

Así mismo, el hecho de que la latitud máxima de las partículas a $355m$ no siempre supere a la latitud del phACL antes de la separación puede asociarse al debilitamiento de la Corriente de Yucatán en dichas profundidades. Este debilitamiento de la corriente puede estar asociado a inestabilidades de la corriente.

5.2 Resumen y discusión

Los resultados descritos de dos eventos de separación analizados a diferentes profundidades no pueden ser concluyentes. Sin embargo, se debe destacar dos puntos. Primero, la diferencia de la latitud máxima de las trayectoria de las partículas a diferentes profundidades. La segunda es la presencia del phACL a diferentes profundidades y la similitud de la pendiente de estos puntos entre sí.

Como se mencionó anteriormente, el resultado de que la latitud máxima de las partículas a $355m$ sea menor que la latitud máxima de las partículas a $68m$ y de los dos puntos hiperbólicos puede estar asociado a procesos de debilitamiento de la Corriente de Yucatán con la profundidad. Aunado a ello, dicho debilitamiento de la corriente puede estar relacionado a la formación de inestabilidades, las cuales pueden propiciar la formación de remolinos ciclónicos situados al oeste del Canal de Yucatán. Sin embargo, el análisis de dos eventos, junto con la ausencia de cálculos mas complejos, solo permite sugerir posibles causas de dichas inestabilidades.

La presencia del phACL a diferentes profundidades y la similitud de la orientación de la pendiente asociada a su dirección de estiramiento, permite considerar que el ACL permanece unido a pesar de que las partículas a $355m$ dejen de envolverlo. Esto sugiere

que el RCL se separará solo cuando las partículas que viajan con la Corriente de Yucatán dejen de extenderse hacia el norte, desviándose hacia el este y dejando de envolver al ACL en todas las capas.

Capítulo 6

Resumen final

En este trabajo de tesis se analizaron diferentes eventos de separación del remolino de la Corriente de Lazo, utilizando salidas del modelo NEMO y datos de altimetría (AVISO). En el primer análisis en el que se utilizó los datos del modelo, el análisis Lagrangiano permitió determinar las principales estructuras que intervienen en el proceso de separación. Así mismo, se determinó un índice basado en la pendiente de la dirección de estiramiento del punto hiperbólico del anticiclón de la Corriente de Lazo que permite reducir la incertidumbre al momento de estimar si el remolino se va a separar o no. Cuando la pendiente de la dirección de estiramiento es negativa el remolino está unido; por el contrario, si la pendiente es positiva el remolino se está separando y por lo tanto las partículas comenzaran a desviarse hacia el este dejando de bordear al remolino.

Al realizar el análisis con datos de altimetría, el índice de la pendiente funciona de manera similar, ya que cuando la pendiente tiene valores positivos las partículas dejan de rodear al remolino, el cual se ha separado. No obstante, en ciertos eventos se vuelve a juntar. Al utilizar el punto hiperbólico y su dirección de estiramiento no siempre es evidente si el remolino se va a volver a unir o no. Por ello, se calculó los Núcleos Hiperbólicos Lagrangianos (NHL) que permiten identificar regiones donde la hiperbolicidad se mantiene de manera uniforme por un cierto periodo. Esto significa que el remolino interactúa con la estructura anticiclónica por ese periodo aunque las partículas que viajan con la CL dejen de rodearlo. Lo anterior sugiere que el remolino sigue “atado” y puede volver a unirse. Por el contrario, cuando la región no mantiene su hiperbolicidad uniforme, es decir no se puede determinar un NHL entonces el remolino deja de interactuar con la estructura anticiclónica adyacente, y por tanto el remolino

se ha separado totalmente. El NHL permite estimar si el remolino permanece “atado” o no. Asociado al NHL también se determina la dirección máxima de estiramiento con la que se puede estimar la dirección en la que viajan las partículas que se aproximan a dicho núcleo, de manera similar a la dirección de estiramiento del punto hiperbólico. En el Capítulo anterior se determinó diferentes puntos hiperbólicos asociados al RCL para diferentes profundidades. Las pendientes de estos puntos son similares durante el evento de separación. Conforme cambia la profundidad la trayectoria de las partículas que viajan con la CL se modifica, de tal forma que las partículas que van con la CL a 355m dejan de envolver al RCL antes que las que viajan a 68m. No obstante, la orientación de la dirección de estiramiento del punto hiperbólico comienza a cambiar cuando el remolino se está separando cerca de la superficie. Que las partículas a los 355m dejen de envolver al RCL antes que a los 68m puede asociarse a que el proceso de separación comienza en el fondo y luego en la superficie. Por otro lado, que la orientación de la dirección de estiramiento a los 355m indique que el remolino está unido, mientras las partículas dejan de rodear al RCL a tal profundidad, sugiere que el remolino está “atado” en dicha profundidad. Finalmente el RCL se separará cuando las partículas que viajan con la CL dejen de envolver al remolino desde la superficie hasta el fondo.

La presencia de una región hiperbólica durante el proceso de separación del RCL permite estimar con mayor precisión el momento en el que sucede. Kuznetsov *et al.* (2002) mencionan que la presencia de un punto hiperbólico asociado al RCL indica el inicio del proceso de separación. En este trabajo se analizó la evolución del punto hiperbólico, lo que permitió identificar de manera objetiva el proceso de separación. De tal forma que la aparición de un punto hiperbólico indica el inicio del proceso de separación, el

cual debe terminar en el momento en que dicho punto pierde su hiperbólicidad o bien cuando dicho punto desaparece totalmente.

La aplicación de metodologías Lagrangianas permite identificar las principales estructuras que intervienen en el proceso de la separación del RCL. Así mismo, permite identificar con mayor precisión el momento de separación del RCL. La aplicación de estas metodologías junto con conceptos Eulerianos como la SSH, el criterio de Okubo-Weiss, entre otros, permite un mayor entendimiento de la circulación, y procesos como el de la separación del RCL.

Referencias bibliográficas

- Alvera-Azcarate, A., Barth, A., y Weisberg, R. (2009). The surface circulation of the caribbean sea and the gulf of mexico as inferred from satellite altimetry. *Journal of Physical Oceanography*, **39**(3): 640–657.
- Athié, G., Candela, J., Ochoa, J., y Sheinbaum, J. (2012). Impact of caribbean cyclones on the detachment of loop current anticyclones. *Journal of Geophysical Research*, **117**(C3): C03018–1–12.
- Beron-Vera, F., Olascoaga, M., y Goni, G. (2008). Oceanic mesoscale eddies as revealed by lagrangian coherent structures. *Geophysical Research Letters*, **35**(12): L12603–1–7.
- Branicki, M. y Kirwan, D. (2010). Stirring: The eckard paradigm revisited. *International journal of engineering science*, **458**(11): 1027–1042.
- Branicki, M. y Wiggins, S. (2010). Finite-time lagrangian transport analysis: stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories and finite-time lyapunov exponents. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **17**: 1–36.
- Branicki, M., Mancho, A., y Wiggins, S. (2011). A lagrangian description of transport associated with a front–eddy interaction: Application to data from the north-western mediterranean sea. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **240**(3): 282–304.
- Brodeau, L., Barnier, B., Treguier, A., Penduff, T., y Gulev, S. (2010). An era40-based atmospheric forcing for global ocean circulation models. *Ocean Modelling*, **31**(3-4): 88–104.

- Bunge, L., Ochoa, J., Badan, A., Candela, J., y Sheinbaum, J. (2002). Deep flows in the yucatan channel and their relation to changes in the loop current extension. *Journal of Geophysical Research*, **107**(C12): 26–1–7.
- Candela, J., Sheinbaum, J., Ochoa, J., Badan, A., y Leben, R. (2002). The potential vorticity flux through the yucatan channel and the loop current in the gulf of mexico. *Geophysical Research Letters*, **29**(22): 16–1–6.
- Chérubin, L., Morel, Y., y Chassignet, E. (2006). Loop current ring shedding: the formation of cyclones and the effect of topography. *Journal of physical oceanography*, **36**(4): 569–591.
- Cushman-Roisin, B. y Beckers, J.-M. (2011). *Introduction to geophysical fluid dynamics: physical and numerical aspects*. Academic Press.
- Debreu, L. (2000). *Raffinement adaptatif de maillage et methode de zoom. Application aux modeles docean*. Tesis de doctorado, Universite Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Farazmand, M. y Haller, G. (2012). Computing lagrangian coherent structures from their variational theory. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **22**(1): 013128–1–13.
- Fratantoni, P., Lee, T., Podesta, G., y Muller-Karger, F. (1998). The influence of loop current perturbations on the formation and evolution of tortugas eddies in the southern straits of florida. *Journal of geophysical research*, **103**(C11): 24–759–779.
- Haller, G. (2000). Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **10**(1): 99–108.

- Haller, G. (2001a). Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **149**(4): 248–277.
- Haller, G. (2001b). Lagrangian structures and the rate of strain in a partition of two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, **13**: 3365–1–21.
- Haller, G. (2002). Lagrangian coherent structures from approximate velocity data. *Physics of fluids*, **14**: 1851–1861.
- Haller, G. (2011). A variational theory of hyperbolic lagrangian coherent structures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **240**(7): 574–598.
- Haller, G. y Beron-Vera, F. (2012). Geodesic theory of transport barriers in two-dimensional flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*.
- Haller, G. y Poje (1997). Eddy growth and mixing in mesoscale oceanographic flows. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **4**(4): 223–235.
- Hurlburt, H. y Thompson, J. D. (1980). A numerical study of loop current intrusions and eddy shedding. *Journal of Physical Oceanography*, **10**(10): 1611–1651.
- Joseph, B. y Legras, B. (2002). Relation between kinematic boundaries, stirring, and barriers for the antarctic polar vortex. *Journal of the atmospheric sciences*, **59**(7): 1198–1212.
- Jouanno, J., Sheinbaum, J., Barnier, B., y Molines, J. (2009). The mesoscale variability in the caribbean sea. part ii: Energy sources. *Ocean Modelling*, **26**(3-4): 226–239.
- Koh, T. y Legras, B. (2002). Hyperbolic lines and the stratospheric polar vortex. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **12**(2): 382–394.

- Kuznetsov, L., Toner, M., Kirwan, J., Jones, C., Kantha, L., y Choi, J. (2002). The loop current and adjacent rings delineated by lagrangian analysis of the near-surface flow. *Journal of marine research*, **60**(3): 405–429.
- Le Traon, P., Nadal, F., y Ducet, N. (1998). An improved mapping method of multisatellite altimeter data. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **15**(2): 522–534.
- Le Traon, P., Faugere, Y., Hernandez, F., Dorandeu, J., Mertz, F., y Ablain, M. (2003). Can we merge geosat follow-on with topex/poseidon and ers-2 for an improved description of the ocean circulation? *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **20**(6): 889–895.
- Leben, R. (2005). Altimeter-derived loop current metrics. *Geophys. Monogr.*, **161**: 181–293.
- Lekien, F. y Coulliette, C. (2007a). Chaotic stirring in quasi-turbulent flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **365**(1861): 3061–3084.
- Lekien, F. y Coulliette, C. (2007b). Chaotic stirring in quasi-turbulent flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **365**(1861): 3061–3084.
- Lekien, F., Coulliette, C., Mariano, A., Ryan, E., Shay, L., Haller, G., y Marsden, J. (2005). Pollution release tied to invariant manifolds: A case study for the coast of florida. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **210**(1): 1–20.

- Lekien, F., Shadden, S., y Marsden, J. (2007). Lagrangian coherent structures in n-dimensional systems. *Journal of Mathematical Physics*, **48**: 065404–1–19.
- Lipphardt, B., Poje, A., Kirwan, A., Kantha, L., y Zweng, M. (2008). Death of three loop current rings. *Journal of Marine Research*, **66**(1): 25–60.
- Malhorta, N. y Wiggins, S. (1998). Geometric structures, lobe dynamics, and lagrangian transport in flows with aperiodic time-dependence, with applications to rossby wave flow. *J. Nonlinear Science*, **8**(4): 401–456.
- Mancho, A., Small, D., y Wiggins, S. (2006). A tutorial on dynamical systems concepts applied to lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets: Theoretical and computational issues. *Physics reports*, **437**(3): 55–124.
- Mathur, M., Haller, G., Peacock, T., Ruppert-Felsot, J., y Swinney, H. (2007). Uncovering the lagrangian skeleton of turbulence. *Physical review letters*, **98**(14): 144502–1–4.
- Maul, G. y Vukovich, F. (1993). The relationship between variations in the gulf of mexico loop current and straits of florida volume transport. *Journal of physical oceanography*, **23**(5): 785–796.
- Maul, G. A., Mayer, D. A., y Baig, S. R. (1985). Comparisons between a continuous 3-year current-meter observation at the sill of the yucatan strait, satellite measurements of gulf loop current area, and regional sea level. *Journal of Geophysical Research*, **90**(C5): 9089–9096.
- O’Farrell, C. y Dabiri, J. (2010). A lagrangian approach to identifying vortex pinch-off. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **20**(1): 017513–1–10.

- Okubo, A. (1970). Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. **17**(3): 445–454.
- Olascoaga, M. (2010). Isolation on the west florida shelf with implications for red tides and pollutant dispersal in the gulf of mexico. *Nonlinear processes in geophysics*, **17**(6): 685–696.
- Olascoaga, M. y Haller, G. (2012). Forecasting sudden changes in environmental pollution patterns. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **109**(13): 4738–4743.
- Olascoaga, M., Rypina, I., Brown, M., Beron-Vera, F., Kocak, H., Brand, L., Halliwell, G., y Shay, L. (2006). Persistent transport barrier on the west florida shelf. *Geophysical research letters*, **33**(22): L22603–1–5.
- Olascoaga, M., Beron-Vera, F., Brand, L., y Koçak, H. (2008). Tracing the early development of harmful algal blooms on the west florida shelf with the aid of lagrangian coherent structures. *Journal of geophysical research*, **113**(c12): c12014–1–6.
- Peacock, T. y Dabiri, J. (2010). Introduction to focus issue: Lagrangian coherent structures. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **20**(1): 017501–1–10.
- Schmitz, W. (2005). Cyclones and westward propagation in the shedding of anticyclonic rings from the loop current. *Geoph. Monog. Series*, **161**: 241–261.
- Schmitz, W., Biggs, D., Lugo-Fernandez, A., Oey, L., y Sturges, W. (2005). A synopsis of the circulation in the gulf of mexico and on its continental margins. *Geophys. Monogr.*, **161**: 11–30.

- Shadden, S., Lekien, F., y Marsden, J. (2005). Definition and properties of lagrangian coherent structures from finite-time lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **212**(3): 271–304.
- Shadden, S., Dabiri, J., y Marsden, J. (2006). Lagrangian analysis of fluid transport in empirical vortex ring flows. *Physics of Fluids*, **18**: 047105–1–11.
- Sheinbaum, J., Candela, J., Badan, A., y Ochoa, J. (2002). Flow structure and transport in the yucatan channel. *Geophysical Research Letters*, **29**(3): 10–1–4.
- Sheinbaum, J., Perez-Brunius, P., Lopez, J., Barnier, B., y Molines, J. (2010). Circulation in the gulf of mexico from a 40 year run of a two-way nested nemo-agrif numerical model. *Ocean Sciences Meeting(2010)*.
- Sturges, W. (1994). The frequency of ring separations from the loop current. *Journal of physical oceanography*, **24**(7): 1647–1651.
- Sturges, W. y Leben, R. (2000). Frequency of ring separations from the loop current in the gulf of mexico: A revised estimate. *Journal of Physical Oceanography*, **30**(7): 1814–1819.
- Sturges, W., Evans, J., Welsh, S., y Holland, W. (1993). Separation of warm-core rings in the gulf of mexico. *Journal of physical oceanography*, **23**(2): 250–268.
- Sturges, W., Hoffmann, N., y Leben, R. (2010). A trigger mechanism for loop current ring separations. *Journal of Physical Oceanography*, **40**(5): 900–913.
- Velasco Fuentes, O. y Marinone, S. (1999). A numerical study of the lagrangian circulation in the gulf of california. *Journal of marine systems*, **22**(1): 1–12.

- Vukovich, F. (1995). An updated evaluation of the loop current's eddy-shedding frequency. *J Geophys. Res.*, **100**: 8655–8659.
- Vukovich, F. M. y Maul, G. A. (1985). Cyclonic eddies in the eastern gulf of mexico. *Journal of physical Oceanography*, **15**(1): 105–117.
- Weiss, J. (1991). The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **48**(2): 273–294.
- Welsh, S. E. y Inoue, M. (2000). Loop current rings and the deep circulation in the gulf of mexico. *Journal of geophysical research*, **105**(C7): 16951–16959.
- Wiggins, S. (1988). *Global bifurcations and chaos: analytical methods*. Springer, New York.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer, New york.
- Zavala-Hidalgo, J., Morey, S., y O'Brien, J. (2003). Cyclonic eddies northeast of the campeche bank from altimetry data. *Journal of physical oceanography*, **33**(3): 623–629.

Abreviaturas

Abreviatura	nombre completo
CL	Coriente de Lazo
RCL	Remolino de la CL
ACL	Anticiclón de la CL
phACL	punto hiperbólico asociado al ACL
deACL	dirección de estiramiento asociado al phACL
$17cm - SSH$	contorno de los $17cm$ de la SSH
NHL	Núcleo Hiperbólico Lagrangiano
NHL_{13}	Núcleo Hiperbólico Lagrangiano calculado para 13 días
NHL_{10}	Núcleo Hiperbólico Lagrangiano calculado para 10 días
$FTLE$	Finite Time Lyapunov Exponents
LCS	Lagrangian Coherent Structure
SSH	Sea Surface Height
SST	Sea Surface Temperature
CY	Corriente de Yucatán

Apendice

Como se mencionó en la Introducción, Kuznetsov *et al.* (2002) sugieren que la presencia de un punto hiperbólico asociado al anticiclón de la CL (ACL) denota el inicio del proceso de separación. Así mismo, la posición del punto hiperbólico y la orientación de la dirección de estiramiento de este punto permiten estimar la posición y orientación de la variedad inestable o la LCS atractora. En este caso, este punto permite identificar la LCS atractora asociada al ACL y con ello estimar la interacción del ACL con otras estructuras.

Debido a la presencia de otras estructuras coherentes como remolinos ciclónicos y anticiclónicos, se pueden encontrar otros puntos hiperbólicos que generan incertidumbre. Por ello, se desarrolló un método para determinar el punto hiperbólico asociado al ALC. Este método se describe a continuación:

- La región donde puede aparecer el punto hiperbólico durante el proceso de separación del RCL se determinó al analizar visualmente los campos de SSH y velocidad. De esta forma se consideró el área delimitada entre $89 - 83^{\circ}$ Oeste y $23 - 28^{\circ}$ Norte como la región donde generalmente ocurre la separación.
- Los campos de velocidad horizontal fueron filtrados en ambas direcciones (lon,lat). Las estructuras anticiclónicas implicadas en el proceso de separación son rodeadas por el cero del SSH, por tal motivo las velocidades fuera de este contorno se hicieron cero para el cálculo que se hace a continuación.
- Para determinar la región donde se podría encontrar el punto hiperbólico, se consideró el criterio de Okubo-Weiss, el cual identifica las regiones donde la vorti-

cidad o el estiramiento son dominantes (Okubo, 1970; Weiss, 1991). Este criterio se aplicó en la región anteriormente descrita.

El parámetro de Okubo-Weiss W se define como:

$$W = s_n^2 + s_s^2 - \zeta^2 \quad (42)$$

donde s_n , s_s , y ζ son las componentes normales y de corte del tensor $\nabla \vec{u}$ y la vorticidad relativa del flujo definidos como:

$$s_n = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad s_s = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (43)$$

donde x y y son coordenadas cartesianas y u y v son las componentes de la velocidad horizontal.

El parámetro W separa al flujo bidimensional en dos regiones diferentes: la región dominada por la vorticidad ($W < 0$), y la región dominada por la deformación o el corte ($W > 0$). Los valores máximos del parámetro de Okubo-Weiss indican las regiones donde la deformación es mayor, y esta puede indicar o acotar a la región hiperbólica asociada al ALC.

Una vez identificada la región hiperbólica, el punto fijo se encontró usando la metodología descrita en Velasco Fuentes y Marinone (1999) para determinar los puntos de estancamiento para cada lapso de tiempo (el campo de velocidades para cada día). Los puntos fijos son calculados encontrando las celdas donde $u_{i,j}$ o $v_{i,j}$ no tienen el mismo signo en las contra- esquinas (donde las $u_{i,j}$ y $v_{i,j}$ son las velocidades zonales y meridionales, respectivamente), ver Figura 26.

Las propiedades de los puntos de estancamiento están dadas por los autovalores y sus autovectores calculados a partir de $\nabla \vec{u}$ para cada punto:

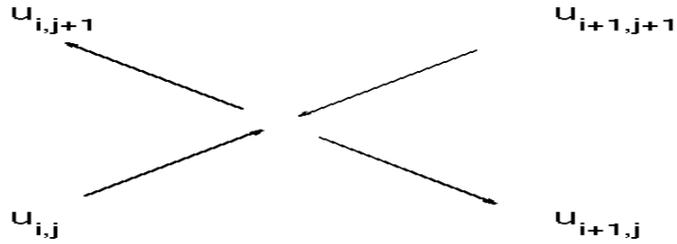


Figura 26. Vectores de velocidad para un punto hiperbólico donde. Los vectores $u_{i,j+1}$ y $u_{i+1,j}$ están asociados a la dirección de estiramiento y los vectores $u_{i,j}$ y $u_{i+1,j+1}$ a la de contracción. Las celdas $u_{i,j}$ no tienen el mismo signo en las contra-esquinas.

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

Si los dos autovalores de esta matriz son reales y de signo contrario, el punto fijo es del tipo hiperbólico. El autovector asociado al autovalor positivo (negativo) representa la dirección de estiramiento (contracción).

El método descrito anteriormente es Euleriano por naturaleza, y Mancho *et al.* (2006) muestran que se debe tener cuidado de no obtener o interpretar los resultados de estos cálculos en términos Lagrangianos en general. Haller y Poje (1997) definen un criterio que garantiza que se puede relacionar las propiedades del punto hiperbólico instantáneo con la presencia de una partícula hiperbólica. La Figura 27 presenta una gráfica de la serie temporal del cuadrado de los autovalores del Jacobiano de la velocidad y su derivada temporal para la separación del evento de 2002. Para los campos de velocidad con lenta evolución este último debe ser menor que los autovalores al cuadrado y esto se cumple en todos nuestros experimentos. La separación del RCE involucra estructuras bien definidas de mesoescala, y la evolución de las regiones o puntos

hiperbólicos de interés es relativamente lenta. Esto puede explicar por qué la pendiente índice funciona.

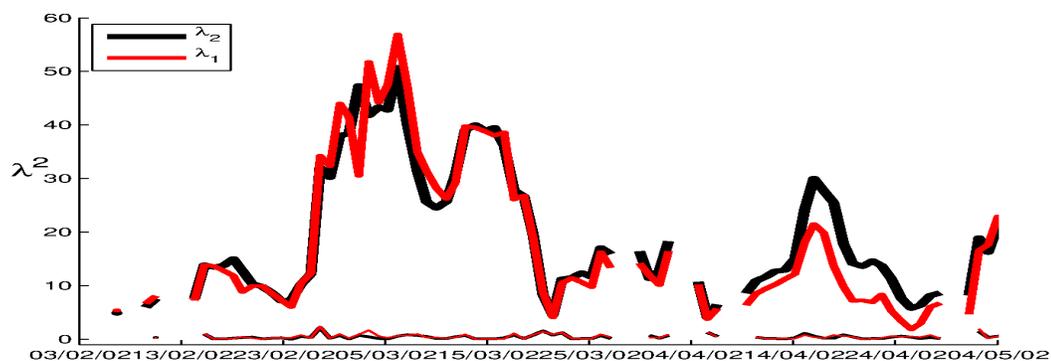


Figura 27. Evolución temporal de la intensidad de la hiperbolicidad $\lambda_{1,2}^2$ (líneas gruesas), y la razón de cambio de $\lambda'_{1,2}$ (líneas delgadas). Los calculos se hicieron para la evolucion del phACL del evento 2002