

Tesis defendida por  
Jeasson Fabian Gonzalez Sierra  
y aprobada por el siguiente Comité

---

Oscar Uriel Velasco Fuentes

Director del Comité

---

Julio Sheinbaum Pardo

Miembro del Comité

---

José Luis Ochoa de la Torre

Miembro del Comité

---

Roger Sean Coudney Bueno

Miembro del Comité

---

Francisco Javier Ocampo Torres

Coordinador

Programa de Posgrado en  
Oceanografía Física

---

Dr. David Hilario Covarrubias  
Rosales

Director

Dirección de Estudios de Posgrado

4 de Junio del 2013

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE  
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



---

Programa de Posgrado en  
Ciencias en Oceanografía Física

---

Cálculo analítico de la velocidad de traslación de vórtices eslabonados

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

Jeasson Fabian Gonzalez Sierra

Ensenada, Baja California, México

2013

Resumen de la tesis de Jeasson Fabian Gonzalez Sierra, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física

## Cálculo analítico de la velocidad de traslación de vórtices eslabonados

Resumen aprobado por:

---

Oscar Uriel Velasco Fuentes

En esta tesis se estudia la traslación de vórtices tubulares de sección transversal finita cerrados sobre sí en una configuración eslabonada. Para lograr que esta configuración se traslade de forma uniforme los vórtices eslabonados se encuentran sobre la superficie de un toro. El movimiento es calculado a partir de la ley de Biot-Savart en términos del potencial vectorial, utilizando el método de expansión multipolar a primer orden en la razón de aspecto. El estudio analítico permite revisar la distribución de vorticidad en la sección transversal de los vórtices tubulares y su efecto sobre el movimiento de los mismos. Se encuentra que el estiramiento y doblamiento del vórtice especifican una distribución de vorticidad lineal en la sección transversal del vórtice.

Los términos a primer orden en el método de expansión multipolar retienen los efectos de la curvatura del vórtice, mediante un arreglo dipolar a lo largo de la línea central del mismo. Lo cual establece, para la traslación, resultados analíticos más exactos a medida que el vórtice se considera más delgado. La precisión del resultado encontrado mejora respecto al obtenido por Thomson (1883), quien retiene los efectos equivalentes al orden cero del método de expansión multipolar. Orden para el cual la distribución de vorticidad en la sección transversal es considerada como uniforme. La precisión de la expresión analítica para la traslación se evaluó por comparación con un modelo numérico, donde se evidenció una diferencia de alrededor del 2% para el caso de dos vórtices eslabonados.

Palabras clave: **vórtices eslabonados, traslación, expansión multipolar.**

Abstract of the thesis presented by Jeasson Fabian Gonzalez Sierra, as a partial requirement to obtain the Master degree in Physical Oceanography

## Analytical calculation of the translation velocity of linked vortex

Resumen aprobado por:

---

Oscar Uriel Velasco Fuentes

In this thesis we study the translation of closed tubular vortices of a finite transversal cross section in a linked configuration. To make this configuration travel in a uniform manner, the linked vortices must be found in the surface of a torus. The movement is determined by the Biot-Savart law, in terms of the vector potential, using the multipolar expansion method to a first order in the aspect ratio. The analytical study allows us to determine the vorticity distribution in the transversal cross section of the tubular vortices and the effects on its own movements. It is found that the stretching and bending of the vortex specify a linear vorticity distribution cross section of the vortex.

The first order terms of the multipolar expansion retain the effects of the curvature of the vortex, through a dipolar configuration along its central line. This establishes, for the translation, better analytical results as the vortex becomes thinner. The precision of the obtained result is improved with respect of the classical one, obtained by Thomson (1883), which retains the effects equivalent to the 0-th order of the multipolar expansion, order for which the vorticity distribution in the cross section is considered a constant. The precision of the translation given by the analytical expression is evaluated by comparing it with a numerical model, where a difference of around 2% is found for the case of 2 linked vortices.

Keywords: **linked vortex, translation, multipolar expansion.**

## Dedicatorias

A ti preciosa, por ser la voz en la soledad y la singularidad en la uniformidad. Por ser mi constante compañía y llenarme de motivos, esperanzas y sonrisas. A ti amor, por estar en mis sueños y ser una linda realidad.

A mis padres y abuela, cuyo amor ha cimentado las bases de mi vida y ha dado fortaleza para emprender nuevos caminos y cumplir logros con esfuerzo, amor y dedicación. A ti mi querida madre, porque siempre merecerás lo mejor de mí.

A ti “máster”, porque tus enseñanzas y ejemplos han definido mi perspectiva intelectual.

A Abby porque tu memoria siempre estará entre nosotros.

## Agradecimientos

A mi director de tesis, Oscar Velasco, por las incontables discusiones que sostuvimos entorno al problema de la dinámica de vórtices. Discusiones que resultaron muy formativas para mí y de las cuales estoy seguro se soportara, de ahora en adelante, mi desarrollo intelectual. Igualmente, aprecio todos sus comentarios, sobre las versiones anteriores a este documento, que permitieron concluir el esfuerzo de mi trabajo en un documento con mayor claridad y precisión en la exposición.

A los miembros de mi comité: Pepe Ochoa, Julio Sheinbaum y Roger Coudney por sus comentarios que fueron útiles en el desarrollo de este documento. En particular a Pepe Ochoa, quien siempre me hizo sentir bienvenido en su oficina, para discutir en medio de cortas pero amenas charlas las consideraciones físicas de mi problema y examinar la posibilidad existente de otras.

A mis maestros, de los que siempre tendré una enseñanza que recordar, en especial a Luis Zavala, Alejandro Pares, Edgar Pavía y Diana Tentori.

A CICESE por todas las herramientas que brindo a mi proceso formativo y por la calidez humana con que siempre fui recibido por parte de sus trabajadores, en especial a Lupita y Don Rafa quien siempre tuvo una sonrisa para comenzar el día.

A aquellos que fueron parte de mi vida este último año y con quienes paulatinamente pude compartir una sonrisa, un pensamiento y un sentimiento: Julio, Máximo, Jorge, Ramón, Eugenio, “kelvin”, Mirna, Cristian, Daniel, Silvio, Samuel, Wilson y Nancy.

A mi familia y a Renata por su apoyo.

A CONACYT por su apoyo a través de la beca de maestría (ref. 261163)

## CONTENIDO

	Página
Resumen	i
Abstract	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Lista de figuras	v
Lista de tablas	vi
1. Introducción	
1.1 Motivación	2
1.2 Problema.	4
2. Preliminares y métodos generales	
2.1 Introducción.	5
2.2 Ley de Biot-Savart.	6
2.3 Los anillos de Helmholtz.	8
2.4 Distribución de vorticidad lineal.	10
2.5 Distribución de vorticidad uniforme.	11
2.6 Limitaciones metodológicas.	12
3. Método de expansión multipolar	
3.1 El método.	14
3.1.1 Descripción local de un filamento de vorticidad.	16
3.1.2 Expansión de vorticidad para soluciones interiores.	19
3.1.3 Expansión asintótica de la Ley de Biot-Savart.	25
3.2 Traslación de un vórtice anular.	31
3.2.1 Discusión.	47
3.3 Campo inducido de un vórtice anular perturbado.	48
3.4 Traslación de un único vórtice perturbado.	53
3.5 Velocidad de Traslación de vórtices eslabonados.	60
3.5.1 Caso general: n vórtices eslabonados.	67
3.5.2 Discusión.	68
Conclusiones	74
Referencias bibliográficas	76
Apéndices	
A1. Geometría general de filamentos descritos armónicamente.	78
A2. Calculo del campo monopolar.	82
A3. Calculo del campo dipolar.	97
A4. Definición de coeficientes de Fourier.	122

## Lista de figuras

Figura		Página
1	Vórtices filiformes y tubulares.	1
2	Estado del arte, para la traslación de vórtices filiformes y tubulares.	3
3	Representación geométrica del problema.	4
4	Visualización transversal de un vórtice anular.	6
5	Ley de Biot-Savart, analogía eléctrica vs hidrodinámica.	8
6	Sistema coordenado local para un vórtice filiforme.	16
7	Representación de las contribuciones a la expansión multipolar.	29
8	Distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice.	31
9	Esquema de vectores para definir el potencial vectorial.	33
10	Representación geométrica del vórtice anular en el plano meridional.	46
11	Representación geométrica de un vórtice anular perturbado.	48
12	Comparación numérica entre resultados teóricos y numéricos.	69
13	Error asociado a la velocidad de traslación teórica y numérica en términos de la razón de aspecto de la configuración eslabonada para dos vórtices.	71
14	Error asociado a la velocidad de traslación teórica y numérica en términos de la razón de aspecto de la configuración eslabonada para tres y cuatro vórtices.	73



## Lista de Tablas

Tabla	Página
1 Comparación cuantitativa de errores asociados al modelo monopolar y dipolar para una configuración eslabonada de dos vórtices.	73
2 Comparación cuantitativa de errores asociados al modelo monopolar y dipolar para una configuración eslabonada de tres y cuatro vórtices.	73

# Capítulo 1

## Introducción

La vorticidad es fundamental en la comprensión de la dinámica de fluidos y matemáticamente es definida como el rotacional del campo de velocidades. La vorticidad es el doble de la velocidad angular local del fluido.

Junto con la vorticidad,  $\boldsymbol{\omega}$ , la circulación,  $\Gamma$ , es otro concepto importante en la dinámica de flujos vorticales y es definida como la integral curvilínea de la velocidad del fluido,  $\boldsymbol{u}$ , a lo largo de un circuito cerrado  $C$ .

La descripción de los flujos vorticales, hace uso de conceptos como tubo de vorticidad (entendido como el fluido acotado por una superficie de vorticidad, construida por las líneas de vorticidad que pasan a través de un curva cerrada), vórtice tubular (entendida como una región tubular de fluido dando vueltas) y vórtice filiforme (entendido como el caso particular de un vórtice tubular con grosor muy pequeño), los cuales permiten especificar la concentración de vorticidad en una región del espacio. La diferencia fundamental entre ambas estructuras corresponde al grosor asociado a las mismas. Los vórtices filiformes son infinitamente delgados y los vórtices tubulares son de sección transversal finita, cuyo interior se encuentra constituido por vórtices filiformes (figura 1). Por lo anterior, la influencia de una distribución de vorticidad arbitraria en el interior del vórtice resulta pertinente para el caso de un vórtice tubular mas no para un vórtice filiforme. Entonces, toda aproximación realizada sobre la distribución de vorticidad interior al vórtice es más exacta en la medida que su grosor es más pequeño.

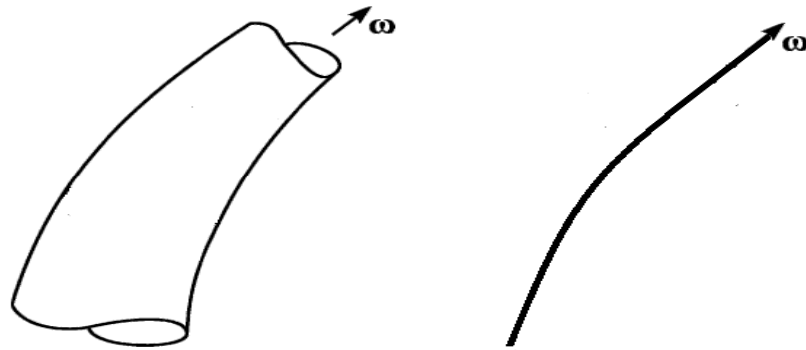


Figura1. A la izquierda la estructura de un vórtice tubular, a la derecha un vórtice filiforme curvilíneo.

Las ecuaciones de Helmholtz (Batchelor, 1967 ec. 7.1.5) que gobiernan la evolución de la vorticidad establecen una dependencia con la deformación y el estiramiento de las líneas de vorticidad. Así, una distribución de vorticidad inicial y una geometría del vórtice específica, resultan suficientes para determinar la distribución de vorticidad en todo momento. Esta dependencia, puede ser bien ilustrada para el caso de vórtices rectilíneos (estructuras vorticales cuya geometría es establecida por una línea recta de extensión infinita) y vórtices anulares (estructuras vorticales que se cierran sobre sí mismas en forma de círculos). Donde la ausencia de curvatura en los vórtices rectilíneos mantiene invariable la distribución de vorticidad inicialmente dada. Por el contrario, los vórtices anulares al poseer curvatura no nula, reorganizan su distribución de vorticidad interior debido al estiramiento de los filamentos interiores.

### 1.1 Motivación

El conocimiento sobre los vórtices se desarrolla a partir de estructuras básicas, como son los vórtices rectilíneos y anulares. Kelvin (1867a) establece originalmente el movimiento de traslación uniforme para éste último, bajo la consideración que el vórtice es tubular y tiene asociada una distribución de vorticidad lineal en su sección transversal, propia de su curvatura.

Como continuación a los estudios de Kelvin, Thomson (1883) demuestra analíticamente la velocidad de traslación de vórtices anulares y vórtices eslabonados. El desarrollo de Thomson (1883) considera una distribución de vorticidad uniforme sobre la sección transversal del vórtice, lo cual resulta de no retener los efectos de curvatura en dicha distribución. Las restricciones del modelo mencionado, suponen una sección transversal circular e indeformable y un

eslabonamiento definido por un toro inmaterial, que garantice la estacionaridad del movimiento (Kelvin, 1875).

Los resultados de Kelvin (1867a) y Thomson (1883) para la traslación uniforme de un vórtice anular, difieren entre sí, como consecuencia de las diferentes distribuciones de vorticidad que son consideradas. Por otra parte, resultados para la traslación de vórtices eslabonados que retengan efectos de curvatura en la distribución de vorticidad no han sido establecidos hasta la fecha. La figura 2, ilustra la diferencia mencionada de los resultados analíticos para la velocidad de traslación de vórtices anulares,  $V$ , y eslabonados,  $U$ . El caso para el cual la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice es promediada, equivale al orden cero de la expansión multipolar asociada a la distribución de vorticidad real. Finalmente, el caso para el cual la distribución de vorticidad en la sección transversal retiene los efectos de la curvatura, equivale al primer orden de la expansión multipolar asociada a la distribución de vorticidad real.

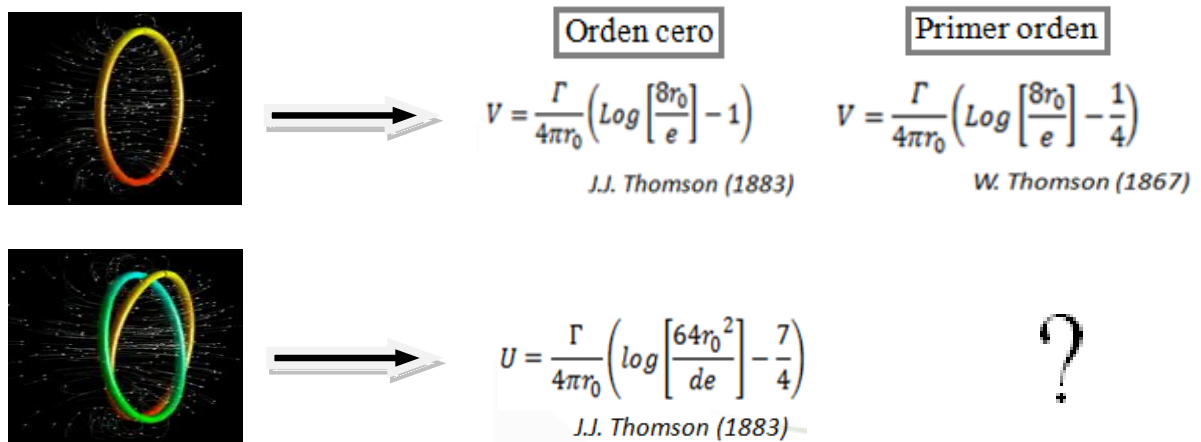


Figura2. Se presenta el estado del arte en lo que se refiere a resultados analíticos para la velocidad de traslación de vórtices anulares y vórtices eslabonados. Expresiones correspondientes a dos ordenes de aproximación diferentes para la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice.

En la figura las velocidades de traslación se encuentran en la dirección perpendicular al plano del círculo, en el caso del vórtice anular, y al plano del toro en el caso de los vórtices eslabonados. Donde  $\Gamma$  es la circulación de cada vórtice,  $r_0$  el radio de la línea central del toro,  $d$  la distancia mínima entre los vórtices eslabonados (que resulta ser igual al diámetro de la sección transversal del toro) y  $e$  el radio de la sección transversal de los vórtices.

La importancia de este trabajo se manifiesta por la existencia misma de estas estructuras

vorticales y sus propiedades de estabilidad y estacionaridad, en que se basan las hipótesis de Kelvin (1875) y las cuales se corroboraron numéricamente por Velasco Fuentes & Romero Arteaga (2011). Experimentalmente, las configuraciones de vórtices toroidales han sido creadas recientemente por Kleckner & Irvine (2013). Sin embargo, los vórtices creados resultan ser aun inestables, dado que su creación no brinda la misma energía a cada región del vórtice, lo que establece eventos de reconexión rápidamente. Probablemente, la causa de estos resultados se encuentre en el hecho que los vórtices creados no tienen las condiciones iniciales requeridas por las hipótesis de Kelvin sobre soluciones estacionarias (Velasco Fuentes, 2013).

Finalmente, el estudio de estructuras vorticales en general, resulta de importancia dada su constante presencia en los flujos de fluidos. Leonard (2003) establece que dentro de la gran diversidad de tipos de fluidos existentes, como lo son los incompresibles, los magnéticos, los geofísicos y los cuánticos, por decir solo unos cuantos, la presencia de estructuras vorticales en flujos turbulentos es un hecho. Irvine (2008) establece como las líneas de campo eslabonadas son soluciones estáticas de las ecuaciones de Maxwell, por lo que sus propiedades de propagación resultan importantes para la teoría de cristales líquidos y vórtices en helio súper fluido.

## **1.2 Problema**

Establecida la motivación que impulsa el presente estudio, se formula concretamente el problema de interés como sigue

Calcular analíticamente la velocidad de traslación de un par de vórtices anulares eslabonados, cuyas líneas centrales se encuentran sobre un toro inmaterial de razón de aspecto pequeña.

El problema formulado, requiere que se satisfagan las siguientes consideraciones iniciales: Primero, la condición inicial de la configuración es tal que la distancia mínima entre un anillo y otro es el diámetro de la sección transversal del toro. Segundo, se considera la sección transversal de cada vórtice permanentemente circular. Tercero, se considera una distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice acorde con los efectos generados por la curvatura del vórtice. Cuarto, la estructura vortical se encuentra en un fluido invíscido, incompresible y no acotado.

La configuración de vórtices en la formulación del problema es ilustrada por la figura 3

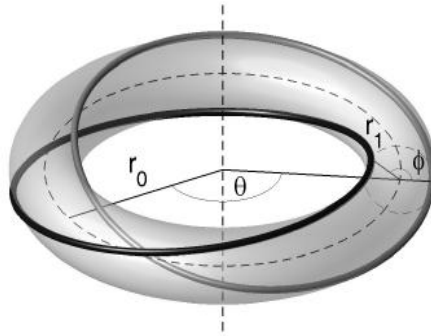


Figura 3. Representación geométrica de la configuración de vórtices en el caso de anillos eslabonados.  $r_0$  es el radio del toro sobre el cual se encuentran los vórtices anulares,  $r_1$  es el radio de la sección transversal del toro, mientras  $\theta$  es el ángulo longitudinal del toro y  $\phi$  su ángulo meridional. Tomada de Velasco Fuentes & Romero Arteaga, 2011, p. 573.

## Capítulo 2

### Preliminares y métodos generales

#### 2.1 Introducción

El estudio teórico de vórtices anulares fue originalmente planteado por Helmholtz (1858) mediante una serie de teoremas con los que demuestra que en un fluido ideal y de extensión infinita, los vórtices filiformes que se cierran sobre si formando anillos persisten en el tiempo.

El interés por las estructuras vorticales tiene su aparición como área de estudio cuando Thomson (1867) posteriormente Lord Kelvin, escribiera su trabajo “On vortex atoms”, en el que sugiere que los vórtices anulares mencionados por Helmholtz corresponden al verdadero átomo. A partir de esta consideración, los átomos se consideran como una forma especial de movimiento rotacional en un cierto fluido homogéneo, con lo cual la materia correspondería a un modo particular de dicho movimiento. Durante los siguientes años se desarrollaron las bases matemáticas de la teoría de vórtices bajo la pretensión de construir una formulación adecuada para este modelo atómico. Sin embargo, tal propósito pasó al olvido años antes de la muerte de W. Thomson en 1906, debido a los constantes éxitos del modelo atómico asociado a J.J. Thomson, Ernest Rutherford y Niels Bohr. No obstante, la teoría de vórtices y el interés que ésta impulsó, se convirtió en objeto de investigación para la hidrodinámica teórica.

Por otra parte, en lo que se refiere a los anillos de vórtice su estudio ha sido extenso y relevante para la comprensión de los flujos vorticales, por medio de diversas perspectivas analíticas, experimentales y numéricas, como lo muestra Widnall (1975). En lo que respecta a modelos analíticos, se identifican dos tipos de solución al problema de traslación de vórtices anulares, correspondientes a una distribución uniforme o lineal de vorticidad en la sección transversal del vórtice.

En este capítulo, se muestran los métodos de solución que han sido utilizados más frecuentemente para el problema de la traslación de vórtices anulares de sección transversal pequeña. Donde son distinguibles dos tipos de formulación: la primera basada en una solución integral del potencial asociado al anillo y la segunda basada en la solución diferencial de su función de corriente, propia de la simetría axial del vórtice. La recapitulación de estas técnicas y

sus consideraciones, cobra importancia en esta investigación dado que ello brinda las herramientas para resolver de manera analítica la traslación de vórtices eslabonados. Sin embargo, antes de presentar estas técnicas se introduce la ley que determina los efectos que un vórtice tiene sobre la región espacial exterior a éste, conocida como la ley de Biot-Savart.

La fig.4 muestra una fotografía del tipo de vórtices anulares que fueron inicialmente investigados en los comienzos de la dinámica de vórtices

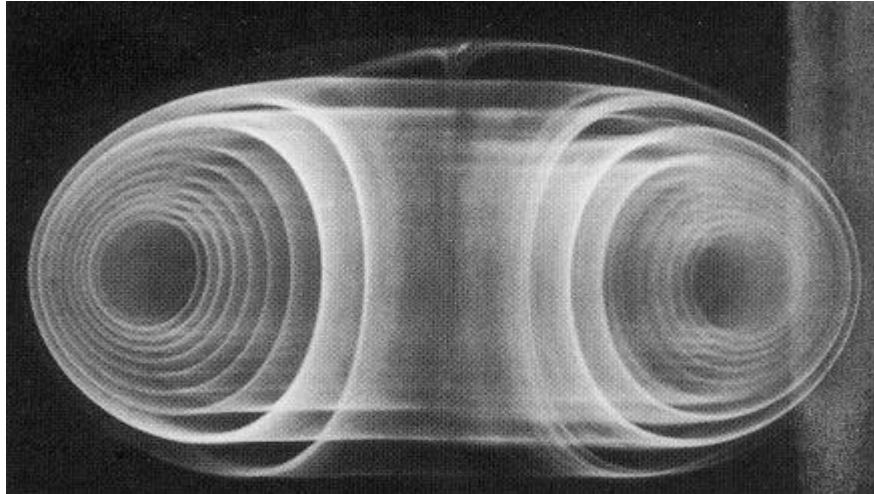


Figura 4. Fotografía transversal de un vórtice anular.  
Tomado de Lim & Nickels: Fluid Vortices, 1995, p. 96.

## 2.2 Ley de Biot-Savart

En mecánica, el movimiento de un sistema físico es establecido completamente cuando es determinada su evolución temporal. Para ésto, se establecen las interacciones de los elementos internos que constituyen el sistema y los efectos externos capaces de transmitir momentun. En un fluido, igualmente, el movimiento viene especificado por el campo de velocidad, generado ya sea por interacciones internas o externas al fluido, cuya dependencia con el tiempo determina la estacionaridad del movimiento. A partir, del teorema de descomposición de Helmholtz (J.Z. Wu, *et al* 2005), se encuentra que todo movimiento (representado por un campo vectorial de velocidad) puede ser descompuesto por dos campos bases; uno de los cuales es solenoidal,  $\mathbf{u}_v$  (sin divergencia o sin compresibilidad) y el otro irrotacional,  $\mathbf{u}_e$  (sin vorticidad).

Para el caso de vórtices eslabonados, conocer los efectos de la vorticidad en el campo de velocidad resulta fundamental para el problema de traslación. Pues el campo de velocidad



asociado permite el movimiento la estructura vortical. Los efectos mencionados son discutidos por Batchelor (1967), quien parte por reescribir el campo de velocidad,  $\mathbf{u}$ , para la región interior al vórtice como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{u}_c \quad (1)$$

Donde  $\mathbf{u}_c$  es un campo solenoidal e irrotacional propio de las condiciones de contorno del sistema y  $\mathbf{u}_v$  el campo asociado a la vorticidad existente en el fluido. Note, que  $\mathbf{u}_e$  ha sido omitido, ya que el fluido sobre el que se encuentra la estructura eslabonada es incompresible, entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_v = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{u}_v = \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

De suerte que resulta natural definir un potencial vectorial,  $\mathbf{A}$ , tal que

$$\mathbf{u}_v = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$

De las definiciones anteriores y usando la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  junto con la condición de norma,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , se obtiene que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{s} dV(\mathbf{x}') \quad (4)$$

Donde  $\mathbf{x}'$  es la posición sobre la cual se define el vórtice,  $\mathbf{x}$  es la posición sobre la cual se desean evaluar los efectos del mismo y  $s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Se sustituye (4) en (3) y se encuentra para (1) que

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{s^3} dV(\mathbf{x}') \quad (5)$$

Es importante resaltar la analogía existente entre la ecuación (5) y la formula electromagnética que relaciona la distribución estacionaria de corriente en un volumen dado con su campo magnético asociado (figura 5), quedando de manifiesto la siguiente analogía:

Al igual que la corriente eléctrica induce un campo magnético en el espacio bajo consideración, la vorticidad induce un campo de velocidad en su entorno

El campo inducido al que se hace referencia, es un campo exterior a la región donde es establecida la vorticidad y para el cual hay un campo de velocidad interior desde el que ésta se

define. El campo exterior como el interior debe acoplarse continuamente en la superficie que divide dichas regiones, que resulta ser la superficie del vórtice. Entonces, el campo exterior se modifica a medida que el campo interior también lo hace, es decir, a medida que la vorticidad cambia de una distribución a otra.

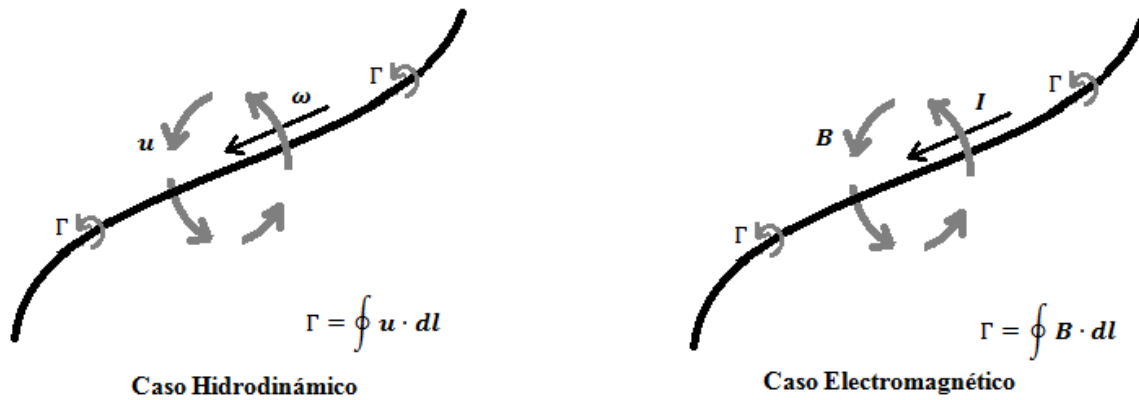


Figura 5. Representación de los campos inducidos correspondientes a la ley de Biot-Savart para los casos hidrodinámicos y electromagnéticos donde  $\omega$  es la vorticidad,  $u$  el campo de velocidad inducido,  $I$  la corriente y  $B$  el campo magnético inducido.

### 2.3 Los anillos de Helmholtz

En lo que se refiere a la hidrodinámica teórica el trabajo de Helmholtz es el punto de partida de cualquier investigación. Por este motivo, resulta de interés mencionar cómo su trabajo y formulación abrió las puertas al problema de los vórtices anulares o, como él los llama, al de filamentos circulares.

El estudio de Helmholtz (1858) surge a partir de la importancia que le da a los flujos que no admiten un potencial de velocidad asociado, para los cuales en su momento no era conocida ninguna integral de las ecuaciones de movimiento. Helmholtz (1858), llega a la existencia de flujos vorticales, y a su importancia, al demostrar que en un fluido acotado bajo la condición de no penetrabilidad en el contorno la existencia de un flujo potencial no es posible. A partir de esto, dos tipos de flujos excluyentes caracterizan el comportamiento de los sistemas fluidos, a saber, los flujos potenciales que no admiten rotación de sus elementos de fluido y los vorticales que sí la admiten. Helmholtz (1858), encuentra la ecuación de vorticidad bajo el supuesto que las fuerzas actuantes sobre el fluido son potenciales, con lo que obtiene los teoremas que deben satisfacer las regiones con vorticidad, a saber

✓ No es posible que un flujo adquiriera vorticidad diferente a la inicial cuando las fuerzas actuantes sobre el sistema son derivadas de algún potencial.

✓ Las partículas de fluido que pertenecen a una línea de vorticidad evolucionan trasladándose sobre dicha línea.

✓ Bajo las condiciones donde se cumple el teorema de Kelvin, el flujo neto de vorticidad es nulo a lo largo de un filamento de vorticidad. Entonces, los vórtices filiformes pueden terminar en los contornos del fluido, cerrándose sobre sí mismo o terminando en puntos dentro del fluido en donde la vorticidad es nula, (Velasco Fuentes, 2007).

Para encontrar una integral a las ecuaciones hidrodinámicas correspondientes a los flujos vorticales, con la consideración de incompresibilidad, Helmholtz (1858) estableció el campo de velocidad en términos de las funciones potenciales  $(P, L, M, N)$ . Donde el potencial  $(P)$  satisface la ecuación de Laplace (propia de la condición de incompresibilidad) y los potenciales  $(L, M, N)$  satisfacen ecuaciones de Poisson (propias de las componentes de vorticidad). Las soluciones de este sistema diferencial, para el caso de un filamento anular en un fluido no acotado, permiten concluir que el vórtice se mueve aproximadamente uniformemente y paralelo al eje del vórtice. La estacionaridad del movimiento se encuentra en el caso límite en que el radio de la línea central del vórtice es muy grande respecto a las otras dimensiones del vórtice.

La uniformidad del movimiento encontrado por Helmholtz (1858), para los vórtices anulares, es establecida por la constancia de la energía cinética durante su movimiento. Sin embargo, Helmholtz (1858) no determina una expresión analítica para este movimiento. Lo cual motivó a diferentes investigaciones, con diferentes interpretaciones en relación a la geometría de los filamentos, las dimensiones físicas de los vórtices y la distribución de vorticidad en su sección transversal.

Las interpretaciones y por tanto los resultados que surgieron en relación a la velocidad con la que se trasladan los vórtices anulares son de tres tipos (Meleshko & Aref, 2007). Los cuales se diferencian entre sí por el valor de la constante  $C$  en la expresión a continuación

$$V_{anillo} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left( \log \frac{8r_0}{r_1} - C \right) \quad (6)$$

Donde  $\Gamma$  es la circulación del vórtice,  $r_0$  el radio de la línea central del vórtice y  $r_1$  el radio de su sección transversal. Entonces, para diferentes consideraciones de la distribución de vorticidad,  $C$  tiene los siguientes valores característicos

1. Cuando la distribución de vorticidad dentro de la sección transversal varía linealmente con la distancia al eje del vórtice anular,  $C = \frac{1}{4}$ .
2. Cuando la distribución de vorticidad dentro de la sección transversal se considera uniforme,  $C = 1$ .
3. Cuando el vórtice se considera hueco, caso en el cual el fluido dentro de la sección transversal se considera una zona de estancamiento,  $C = \frac{1}{2}$ .

En lo que sigue se discuten los métodos que relacionan las distribuciones de vorticidad asociadas a  $C = 1$  y  $C = \frac{1}{4}$ . Es decir, que se determinan las consideraciones físicas y los métodos matemáticos utilizados para encontrar la solución al problema de traslación.

#### 2.4 Distribución de vorticidad lineal

Como se mencionó en la introducción Kelvin fue el principal pionero en la construcción de la formulación de la dinámica de vórtices, y su mayor contribución es el teorema de circulación. Kelvin (1867) inspirado en el trabajo de Helmholtz (1858) sobre los filamentos circulares establece sin demostración por primera vez una expresión analítica para la velocidad de traslación de un vórtice anular. Donde es considerada una sección transversal con distribución de vorticidad de la forma lineal  $\frac{r}{r_0} \omega$ . Tal que

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left( \log \frac{8r_0}{r_1} - \frac{1}{4} \right) \quad (7)$$

Donde  $r_1$  es la sección transversal del vórtice, considerada pequeña respecto a la dimensión del radio de la línea central del vórtice,  $r_0$ . La velocidad de traslación  $V$  en términos de la velocidad del fluido en la superficie de su sección transversal ( $V_s = \omega r_1$ ) y de la velocidad en el centro del anillo ( $V_c = \frac{\Gamma}{2r_0}$ ) satisface las relaciones

$$V = \frac{r_1 V_s}{2\pi r_0} \left( \log \frac{8r_0}{r_1} - \frac{1}{4} \right)$$

$$V = \frac{\left(\log \frac{8r_0}{r_1} - \frac{1}{4}\right)}{2\pi} V_c$$

Las cuales permiten concluir que  $V > V_c$  y  $V < V_s$ . Los esfuerzos por corroborar el resultado de Kelvin, establecieron métodos útiles para solucionar el problema de traslación por autoinducción en estructuras vorticales.

Hicks (1885) se basa en el hecho que los potenciales propuestos por Helmholtz (1858) satisfacen una ecuación de Poisson y que su combinación permite construir una función de corriente de Stokes, para el campo de velocidad exterior al vórtice. La solución para la función de corriente, es encontrada en términos de armónicos toroidales, que son soluciones a la ecuación de Laplace para un dominio toroidal.

Dyson (1893) desarrolla alternativamente el cálculo para determinar el movimiento estacionario de vórtices anulares basado en los cálculos para los potenciales de los anillos de fluido en Saturno. Dyson (1893) supone una distribución de vorticidad lineal para la sección transversal del vórtice anular. Encuentra la solución al problema de traslación mediante el uso del operador desplazamiento, que en general simplifica los cálculos de inducción.

En el estudio del problema de traslación de vórtices eslabonados, el método de Dyson (1883) resulta fundamental, como se verá en el capítulo 3.

## 2.5 Distribución de vorticidad uniforme

Hasta el momento se han mencionado los métodos de solución desarrollados para determinar la traslación de vórtices anulares, con distribución lineal de vorticidad en la sección transversal. En lo que sigue, se considera el problema de traslación de un vórtice anular con distribución de vorticidad uniforme en la sección transversal. Consideración que resulta válida para vórtices infinitamente delgados, donde un promedio de la distribución de vorticidad real en el interior del vórtice resulta ser una buena aproximación.

Thomson (1883) soluciona el problema de traslación de vórtices anulares y eslabonados (figura.1), basado en las soluciones explícitas de la ecuación de Biot-Savart (5). Un aspecto que caracteriza principalmente el análisis de Thomson (1883) es la forma en que realiza la evaluación del efecto autoinducido del vórtice debido a su campo inducido, con el fin de evitar los problemas de convergencia existentes en (5). Para esta evaluación, procede a partir de dos

hechos puntuales: Primero, la superficie del vórtice es una superficie material. Segundo, el campo inducido puede ser evaluado en la superficie del vórtice para evitar cualquier tipo de singularidad. Thomson (1883) encuentra la traslación del vórtice, por comparación, entre la velocidad obtenida por el carácter material de la superficie del vórtice y la velocidad obtenida por la ley de Biot-Savart. Es importante resaltar que el campo inducido con el que trabaja Thomson (1883), corresponde al de un vórtice anular muy delgado. Consideración que permite despreciar la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice y considerar, por el contrario, su valor promedio concentrado en la línea central del vórtice.

La principal razón de las discrepancias en los resultados mostradas en la figura 1, está ligada al hecho que para ambas categorías de vórtices (*filiformes* y *tubulares*) hay distribuciones de vorticidad característicamente asociadas (*la uniforme* y *la lineal*). Esto, limitado a la importancia que se le dé a los efectos de la sección transversal del vórtice, tanto por su tamaño como por la distribución de vorticidad que pueda organizarse allí.

El trabajo de Thomson (1883) es importante para la presente investigación ya que su metodología se utiliza para evaluar los campos asociados a los vórtices eslabonados de interés.

## 2.6 Limitaciones metodológicas

En el capítulo 1 se expuso el problema de investigación y hasta el momento en lo que se lleva del capítulo 2 se han presentado los métodos de análisis clásicos para la solución al problema de traslación de vórtices anulares. Sin embargo, aunque los métodos aquí expuestos hacen referencia al problema de traslación, la geometría de los vórtices de interés (figura 3) es diferente a la configuración de los filamentos clásicamente estudiados (figura 4), para el caso de una distribución lineal de vorticidad. Por el contrario, para el caso de una distribución uniforme de vorticidad, la geometría de los filamentos de la investigación clásica coincide con los propósitos de investigación presentes mas no con los correspondientes a los efectos de la sección transversal del vórtice. Donde es importante resaltar que es objeto de esta investigación presentar resultados de traslación en los que los efectos de la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice son tenidos en cuenta.

Las diferencias mencionadas anteriormente, hacen que los métodos expuestos anteriormente no puedan ser aplicados de manera directa. A continuación, se listaran las razones por las cuales no es posible esto

*i)* Los métodos en los que se emplea la función de corriente de Stokes (por ejemplo el método de Hicks) suponen una simetría axial para la distribución de vorticidad. Sin embargo, los vórtices de interés resultan ser no coaxiales y en forma de círculos armónicamente perturbados. Con esto, la sección transversal del vórtice cambia de dirección por su propia curvatura y torsión a lo largo del ángulo axial del toro sobre el cual se encuentran los vórtices.

*ii)* Los métodos de inducción (por ejemplo el método de Thomson) resultan ser muy apropiados (en su planteamiento mas no en su solución analítica) para filamentos con geometrías arbitrarias. Dado que estos métodos sobrepasan las dificultades generadas por las asimetrías presentes en la configuración de los vórtices de interés. Sin embargo, el método es insatisfactorio a la hora de introducir los efectos de la sección transversal debidos a la distribución de vorticidad allí.

## Capítulo 3

### Método de expansión multipolar

#### 3.1 El método

El método de expansión multipolar se basa en la idea los campos solución de la ecuación de Biot-Savart, son fundamentales para conocer el movimiento inducido y autoinducido por una región con vorticidad arbitraria. En este sentido, este método resulta ser en esencia similar al planteado por Thomson (1883). Su principal diferencia radica en el hecho que el método multipolar brinda información sobre los efectos adicionales que tiene la existencia de una distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice, por la curvatura del vórtice.

La velocidad fuera del vórtice tubular se determina como solución de la ley de Biot-Savart para un dominio estipulado. Sometido a condiciones de frontera que garanticen la continuidad de las variables físicas en todo el espacio. La importancia que se satisfaga este acoplamiento permite resaltar el hecho que: El movimiento del filamento no depende únicamente de la distribución de vorticidad en la región interior de la sección transversal sino también de la geometría del filamento de vórtice que define su frontera. Como discuten Callegari & Ting (1978), trabajo que en adelante será citado como CT (cuando se haga referencia a una ecuación en ese artículo se usará, por ejemplo, CT A1).

El método de expansión multipolar ha sido utilizado por Fukumoto & Okulov (2005), trabajo que en adelante será citado como FO (cuando se haga referencia a una ecuación en ese artículo se usará, por ejemplo, FO 5), para la determinación del campo inducido por un vórtice helicoidal inmerso en un fluido no acotado. La relevancia inmediata de este método para los propósitos de esta investigación, radica en el hecho que los autores presentan un mecanismo basado en aproximaciones asintóticas del parámetro  $\varepsilon$ , expresado como

$$\varepsilon = \frac{\text{radio seccion trasversal del vortice}}{\text{radio de curvatura del vortice}}$$

que permite tratar de manera aproximada a la ley de Biot-Savart para distribuciones de vorticidad localizadas en estructuras tubulares de sección transversal finita.



La idea física que sustenta el uso de métodos asintóticos para establecer soluciones correctas al problema del movimiento de vórtices filiformes o tubulares nace de las características observables experimentalmente en los flujos con vorticidad. Donde se puede considerar que la totalidad de vorticidad en estos flujos está concentrada en regiones delgadas parecidas a tubos y lejos de estas regiones considerar campos de velocidad básicamente irrotacionales.

Antes de empezar con la descripción formal del método y su aplicación a la categoría de vórtices de interés se considera pertinente presentar con antelación un esquema más cualitativo del método. Esto, con el propósito de hacer más comprensible la formulación presentada en este capítulo.

El método de expansión multipolar es útil para solucionar indirectamente de manera analítica la ley de Biot-Savart, dada una cierta distribución de vorticidad. El método plantea su formulación a partir del potencial vectorial,  $\mathbf{A}$ , del campo inducido por un vórtice tubular, el cual es descrito mediante un sistema coordinado local de Frenet-Serret. Donde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV(\mathbf{x}')$$

El método de expansión multipolar analiza el potencial, separadamente, por las cantidades constituyentes que lo definen, a saber la configuración geométrica del vórtice y la distribución de vorticidad en el mismo. El término correspondiente a la geometría es simplificado haciendo uso de la expansión en Taylor del operador desplazamiento de Dyson. Por otro lado, la distribución de vorticidad es rescrita como una expansión en series de potencias del parámetro  $\varepsilon$ . Sin embargo, la expansión asociada a la distribución de vorticidad es restringida a los requerimientos impuestos dinámicamente por las ecuaciones de movimiento.

Una vez son llevadas a cabo las expansiones, se introducen en la expresión para el potencial. Donde se encuentran todos los efectos del grosor del vórtice concentrados a lo largo de su línea central. Cada término en esta nueva expresión integral representa un efecto adicional correspondiente a la sección transversal del vórtice. Así por ejemplo, el primer término encontrado representa el efecto de la geometría del vórtice, con una distribución de vorticidad media concentrada a lo largo de su línea central. El segundo término representa los efectos de la curvatura sobre la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice y el tercer término representa los efectos correspondientes a la deformación de la sección transversal del

vórtice. Finalmente, la traslación del vórtice se determina siguiendo el método de Thomson (1883) descrito en la sección 2.5, una vez es solucionado el problema integral al que se reduce el cálculo analítico de la velocidad inducida.

Así descrito el método, lo que resta del capítulo se encuentra organizado como sigue: En la sección 3.1.1 se describe localmente el vórtice desde un sistema de Frenet-Serret. En la sección 3.1.2 se establece la forma en que debe ser expandida la vorticidad para soluciones interiores de las ecuaciones dinámicas de movimiento en términos de una distribución inicial dada. En la sección 3.1.3 se establece la expansión geométrica del potencial vectorial del campo inducido en términos del sistema coordenado local y con esto se expresa la ecuación integral para el potencial. En la sección 3.2 se aplica el método al caso bien conocido de un vórtice anular para establecer su velocidad de traslación. En la sección 3.3 se aplica el método al caso de un vórtice anular perturbado que vive sobre la superficie de un toro. En la sección 3.4 se encuentra la velocidad de traslación de un par de vórtices anulares perturbados formando una configuración eslabonada. Finalmente, en la sección 3.5 se presentan las discusiones de dicho resultado de traslación.

### **3.1.1 Descripción local de un filamento de vorticidad**

Una manera adecuada en que puede ser presentada la ley de Biot-Savart para facilitar desarrollo en expansiones, es mediante la descripción de un sistema coordenado local (Frenet-Serret) el cual se mueva con el filamento. La descripción a partir de dicho sistema es ilustrado en la figura 7.

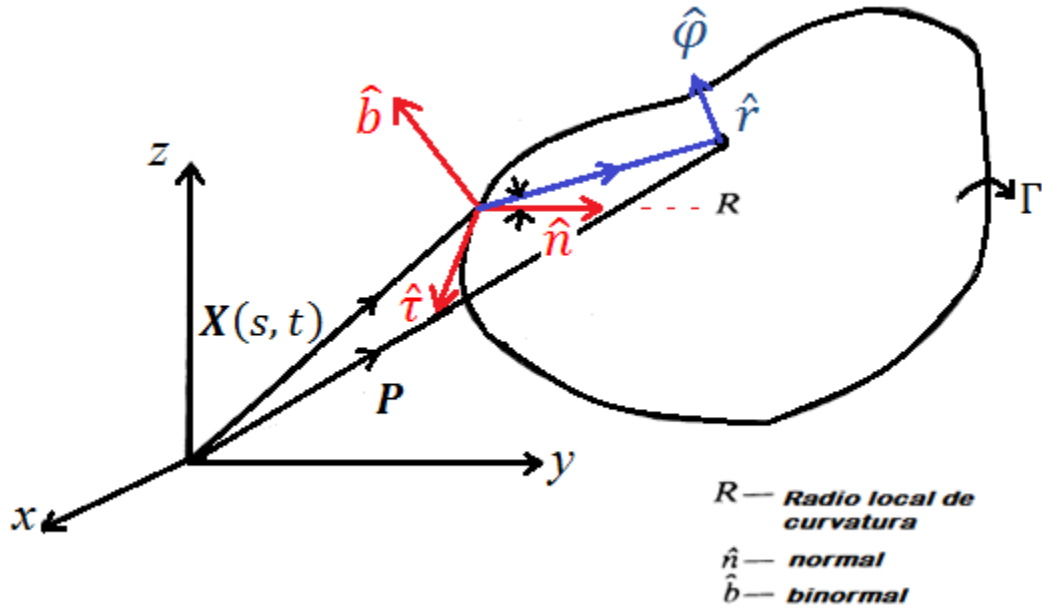


Figura 6. Sistema coordenado para la línea central de un vórtice tubular

En la figura se tiene una curva que representa la línea central de un vórtice tubular el cual se mueve en el espacio y es descrito por el sistema coordenado rectangular fijo con vectores unitarios  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . Si  $s$  representa la longitud de arco de la línea central del vórtice tubular desde un punto de referencia  $P_0$  en un tiempo de referencia,  $t$ , entonces la línea central del vórtice puede ser descrito paramétricamente como  $\mathbf{X}(s, t) = X(s, t)\hat{i} + Y(s, t)\hat{j} + Z(s, t)\hat{k}$  (CT, p. 167). De manera que desde un sistema coordenado local dicho filamento resulta ser especificado por los vectores unitarios tangente  $(\hat{\tau})$ , normal  $(\hat{n})$  y binormal  $(\hat{b})$  los cuales satisfacen las formulas Serret-Frenet (CT A.1) para la curva dada  $\mathbf{X}(s, t)$ , tal que

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \hat{\tau}\sigma \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial s} = \kappa\sigma\hat{n} \quad ; \quad \frac{\partial \hat{b}}{\partial s} = -T\sigma\hat{n} \quad ; \quad \frac{\partial \hat{n}}{\partial s} = (T\hat{b} - \kappa\hat{\tau})\sigma \quad (8)$$

Donde  $\kappa$  es la curvatura,  $T$  la torsión y  $\sigma$  un factor de normalización. Los cuales están definidos explícitamente como sigue (CT A.2 a,b,c)

$$\kappa = \frac{1}{\sigma} \left| \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial s} \right| \quad ; \quad T = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \hat{b}}{\partial s} \cdot \hat{n} \quad ; \quad \sigma = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} = |\mathbf{X}_s| \quad (9 a, b, c)$$

Donde  $\tilde{s}(s, t)$  la longitud de arco en el tiempo  $t$ .

El vector posición de un punto  $\mathbf{P}$  en el fluido fuera de la región en que es definida la línea central del vórtice tubular es expresado como (CT A.3)

$$\mathbf{X}_p = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \mathbf{X} + r\hat{\mathbf{r}} \quad (10)$$

O de otra manera en un sistema local rectangular, se tiene que (FO I)

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X} + r\cos\varphi\hat{\mathbf{n}} + r\sin\varphi\hat{\mathbf{b}} \quad (10a)$$

Donde el punto coordenado P es medido a partir del sistema de referencia curvilíneo  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{s}})$ , local sobre el vórtice filiforme.  $\hat{\mathbf{r}}$  es un vector unitario sobre el plano definido por los vectores normal y binormal,  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  es el ángulo medido desde el eje marcado por el vector normal, en un plano normal a  $\hat{\mathbf{s}}$ , con  $\hat{\mathbf{s}}$  el vector unitario a lo largo del filamento.

El sistema coordenado curvilíneo  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{s}})$ , tal como fue obtenido, presenta una dificultad basada en el hecho que el sistema curvilíneo no es ortogonal en general. La no ortogonalidad, es debida en particular a la torsión que presenta el vórtice, la cual cambia el origen del ángulo  $\phi$  respecto al vector normal a lo largo de la línea central del vórtice. Por este motivo, se reescribe la coordenada angular del sistema curvilíneo, tal que la referencia del ángulo se mantenga fija a pesar de los cambio en la normal por la torsión del vórtice. Con lo que se establece el sistema ortogonal  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{s}})$ . Donde (CT A.4 y A.5)

$$\theta = \phi - \theta_0 \quad \text{donde} \quad \frac{\partial\theta_0}{\partial s} = -\sigma T \quad (11)$$

Los vectores unitarios asociados a este sistema ortogonal, son definidos como (CT A.6 y A.7)

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\theta, s, t) = \hat{\mathbf{n}}\cos(\theta + \theta_0) + \hat{\mathbf{b}}\sin(\theta + \theta_0) \quad (12)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, s, t) = \hat{\mathbf{b}}\cos(\theta + \theta_0) - \hat{\mathbf{n}}\sin(\theta + \theta_0) \quad (13)$$

El diferencial de un punto coordenado cualquiera  $\mathbf{x}$  está dada a partir de la expresión diferencial de (10), como

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \hat{\mathbf{r}}dr + r d\hat{\mathbf{r}} \quad (14)$$

Que en términos de las propiedades del sistema coordenado local de las formulas de Frenet-Serret (8) se tiene que

$$d\mathbf{X} = \hat{\mathbf{t}}\sigma ds \quad ; \quad d\hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial s} ds + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} d\theta \quad (14a)$$

A partir de las ecuaciones (12), (13) y (8) se encuentra que (CT A.9 y A.10)

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial s} = -\kappa\sigma \text{Cos}(\theta + \theta_0)\hat{\mathbf{t}} + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial s} + T\sigma\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (14b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (14a,b) en (14) se encuentra que (CT p.168)

$$d\mathbf{x} = \sigma[1 - \kappa r \text{Cos}(\theta + \theta_0)]\hat{\mathbf{t}}ds + \hat{\mathbf{r}}dr + r\hat{\boldsymbol{\theta}}d\theta + r\left(\frac{\partial \theta_0}{\partial s} + T\sigma\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} ds \quad (14)$$

Sin embargo, de la definición (11) el último término de (14) es nulo. Entonces, los factores de escala propios de este sistema coordenado quedan definidos como (CT A.12)

$$h_r = 1 \quad ; \quad h_\theta = r \quad ; \quad h_s = \sigma[1 - \kappa r \text{Cos}(\theta + \theta_0)] \quad (15)$$

Como se ha mencionado con anterioridad, una de las cantidades más relevantes en el problema del movimiento de vórtices tubulares es la de su distribución de vorticidad. Entonces, resulta pertinente expresar dicha cantidad a partir del sistema de referencia local. Por definición, se tiene que la vorticidad es definida como,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Donde el campo de velocidad es expresable en términos del sistema local como  $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{X}} + u\hat{\mathbf{r}} + v\hat{\boldsymbol{\theta}} + w\hat{\mathbf{t}}$  con  $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + (\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}})\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . La razón por la cual  $\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0$ , está basada en la condición que al vórtice ser una región material la velocidad del fluido debe ser igual a la velocidad del vórtice en al menos un plano normal a la línea central del vórtice (CT p. 169). Con lo anterior se tiene para la vorticidad que

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{h_r h_\theta h_s} \begin{pmatrix} h_r \hat{\mathbf{r}} & h_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} & h_s \hat{\mathbf{t}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial s} \\ h_r u_r & h_\theta u_\theta & h_s u_s \end{pmatrix}$$

Donde  $u_r = (\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + u$ ,  $u_\theta = (\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}})\hat{\boldsymbol{\theta}} + v$  y  $u_s = w$ , donde se encuentra que (FO 4,5 y 6)

$$\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{h_s} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\sigma}{h_s} \kappa w \text{Sin}(\theta + \theta_0) - \frac{1}{h_s} \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (16a)$$

$$\omega_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma}{h_s} \kappa w \text{Cos}(\theta + \theta_0) + \frac{1}{h_s} \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (16b)$$

$$\omega_s = \zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (16c)$$

La importancia de los resultados de esta sección en el método de expansión multipolar radica en que a partir de una descripción local se definieron las ecuaciones (16) para las componentes de vorticidad. Las definiciones de estas componentes resultan útiles en la expansión de la ecuación de vorticidad para soluciones interiores. Además, los factores de escala (15) permiten redefinir el elemento de volumen asociado al dominio en el que se encuentra el vórtice en términos de sus propiedades geométricas como se lleva a cabo en la sección 3.1.3

### 3.1.2 Expansión de vorticidad para soluciones interiores

La expansión propuesta para la vorticidad, que facilite los cálculos de inducción deseados, no es arbitraria sino que debe seguir los requerimientos impuestos por las ecuaciones dinámicas que gobiernan el flujo en la región interior al vórtice. Para establecer estos requerimientos se escribirán las ecuaciones de Euler y de Helmholtz de manera adimensionalizada, donde las variables adimensionalizadas ( )<sup>\*</sup> son distinguidas por el siguiente escalamiento (*FOAI*)

$$r = \sigma_0 r^* \quad ; \quad s = R_0 s^* \quad ; \quad X = R_0 X^* \quad ; \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{R_0} \quad ; \quad T = \frac{T^*}{R_0} \quad ; \quad t = \frac{R_0^2}{\Gamma} t^*$$

$$(u, v, w) = \frac{\Gamma}{\sigma_0} (u^*, v^*, w^*) \quad ; \quad \psi = \Gamma \psi^* \quad ; \quad \dot{X} = \frac{\Gamma}{R_0} \dot{X}^* \quad ; \quad \frac{p}{\rho_f} = \left( \frac{\Gamma}{\sigma_0} \right)^2 p^* \quad (17)$$

Donde  $\rho_f$  es la densidad del fluido,  $p$  la presión del fluido,  $\sigma_0$  y  $R_0$  son el radio de la sección transversal del vórtice y el de curvatura, respectivamente.  $(u, v, w)$  son las componentes de la velocidad orientadas radialmente, angularmente y a lo largo del filamento, respectivamente. A partir de estas definiciones generales, la razón de aspecto  $\varepsilon$  queda expresada como  $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{R_0}$ .

Sean las ecuaciones de Euler con ausencia de fuerzas de cuerpo

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

y las ecuaciones de Helmholtz

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{u}$$

Entonces, a partir del escalamiento (17) las ecuaciones de Euler toman la siguiente forma (FO A2, A3, A4)

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \ddot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{e}_r + \varepsilon^2 \left[ \dot{u} + w(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_r) - (\dot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\
+ \frac{\varepsilon}{h_s} [w + \varepsilon^2 r(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_r)] \left( \varepsilon \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\partial u}{\partial s} + \sigma \kappa w \cos \phi \right) + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \\
= - \frac{\partial p}{\partial r}
\end{aligned} \tag{18a}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \ddot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{e}_\theta + \varepsilon^2 \left[ \dot{v} + w(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_\theta) - (\dot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_\theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\
+ \frac{\varepsilon}{h_s} [w + \varepsilon^2 r(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_r)] \left( \varepsilon \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v}{\partial s} - \sigma \kappa w \sin \phi \right) + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \\
= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{18b}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \ddot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\tau} + \varepsilon^2 \left[ \dot{w} - u(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_r) - v(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_\theta) - (\dot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_\theta) \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \\
+ \frac{\varepsilon}{h_s} [w + \varepsilon^2 r(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_r)] \left( \varepsilon \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial w}{\partial s} - \sigma \kappa (u \cos \phi - v \sin \phi) \right) \\
+ \left( u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w = - \frac{\varepsilon}{h_s} \frac{\partial p}{\partial s}
\end{aligned} \tag{18c}$$

Similarmente, la componente longitudinal de la ecuación de Helmholtz queda definida como sigue (FO A5) a partir de las ecuaciones (18a) y (18b)

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \left[ \dot{\zeta} - (\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_r) \omega_r - (\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_\theta) \omega_\theta \right] + \frac{\varepsilon}{h_s} [w + \varepsilon^2 r(\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_r)] \times \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial s} - \sigma \kappa (\omega_r \cos \phi - \omega_\theta \sin \phi) \right] \\
- \varepsilon^2 (\dot{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{e}_\theta) \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + u \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \\
= \omega_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\zeta}{h_s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\varepsilon \sigma}{h_s} \kappa (u \cos \phi - v \sin \phi) \zeta + \frac{\varepsilon^2}{h_s} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \dot{\mathbf{t}} \right) \zeta
\end{aligned} \tag{18d}$$

Por la definición del campo de velocidad (3), se tiene que  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Para el caso en que la componente tangencial del potencial se defina en términos de la función de corriente  $\psi$ , tal que

$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\sigma}{h_s} \psi$ . Las componentes de velocidad en el plano normal a la línea central del vórtice quedan establecidas como (FO A7 y A8)

$$u = \frac{\sigma}{h_s r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\varepsilon}{h_s} \frac{\partial A_\theta}{\partial s} - \varepsilon [(\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cos \phi + (\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \sin \phi] \quad (19a)$$

$$v = -\frac{\sigma}{h_s} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{h_s} \frac{\partial A_r}{\partial s} + \varepsilon [(\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sin \phi - (\dot{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \cos \phi] \quad (19b)$$

El parámetro  $\varepsilon$  en las ecuaciones (19) aparece por el escalamiento realizado a la función de corriente y a los factores de escala (FO p. 15)

Resulta aparentemente contradictorio que en el análisis de un vórtice filiforme de geometría arbitraria pueda ser posible hablar de función de corriente. Término usado frecuentemente para el caso en que los flujos se consideran bidimensionales o axialmente simétricos. Sin embargo, la introducción de una función de corriente en la especificación de las componentes de velocidad (19), bajo la descripción local, corresponde a la proyección del flujo sobre su sección transversal. Esta aproximación requiere que las contribuciones transversales de la vorticidad sean lo suficientemente pequeñas. Requerimiento que resulta válido para el movimiento cuasi estacionario de los vórtices. Entonces, resulta válido introducir la función de corriente  $\psi$  (FO 24), tal que  $\psi(\mathbf{x}) = (1 - \kappa r \cos \phi) \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}$ , la cual queda escrita a partir de los factores de escala (15) como  $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\sigma}{h_s} \psi$ .

Si se sustituyen las ecuaciones (19) para  $(u, v)$  en la componente longitudinal de la vorticidad (16c) se encuentra una condición auxiliar que relaciona la función de corriente,  $\psi$ , con la componente de vorticidad,  $\zeta$ . A primer orden en  $\varepsilon$  esta condición auxiliar queda establecida como (FO A9)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\varepsilon \sigma}{h_s} \kappa \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \phi - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -\frac{h_s}{\sigma} \zeta \quad (19c)$$

Donde se ha hecho uso de la condición de norma.

La expansión de la vorticidad, supone la posibilidad de expresar las soluciones de las ecuaciones (18) en términos de una expansión en series de potencias en el parámetro  $\varepsilon$ . Tal que

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \dots \quad ; \quad v = v^{(0)}(r, t) + \varepsilon v^{(1)} + \dots \quad ; \quad w = \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots \quad (20)$$



$$\psi = \psi^{(0)}(r, t) + \varepsilon\psi^{(1)} + \dots \quad \text{donde} \quad v^{(0)} = -\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial r}$$

La componente angular de la velocidad tiene una contribución a orden cero a diferencia de las otras dos componentes. Diferencia que se encuentra acorde con el hecho que la componente de la vorticidad dominante es la longitudinal.

La importancia que tiene la contribución a orden cero de la velocidad angular,  $v^{(0)}(r, t)$ , es el hecho que a partir de su dependencia temporal el estiramiento de las líneas de vorticidad puede ser introducido (*FO 15*). Esta dependencia se manifiesta cuando velocidades angulares diferentes, correspondientes a dos secciones transversales del vórtice, vecinas entre sí, causan un gradiente de presión que estira o contrae la región entre las secciones. Sin embargo, en el caso estacionario dicha dependencia no existe y el perfil de  $v^{(0)}$  resulta ser de la forma  $v^{(0)}(r)$ . Adicionalmente, el carácter invíscido de las ecuaciones de Euler permiten considerar a  $v^{(0)}$  como un perfil inicial arbitrariamente escogido.

La sustitución de la expansión (20) en las ecuaciones de vorticidad (16a – c) permite encontrar soluciones para las componentes de vorticidad en la forma de las ecuaciones (21a). Los términos asociados a cada orden hacen referencia a procesos físicos característicos según el tamaño de la razón de aspecto del vórtice. Los coeficientes que acompañan a  $\varepsilon^n$  se determinan por las ecuaciones de gobierno a orden  $n$ . Entonces

$$\omega_r = \varepsilon^2\omega_r^{(2)} + \dots \quad ; \quad \omega_\theta = \varepsilon^2\omega_\theta^{(2)} + \dots \quad ; \quad \zeta = \zeta^{(0)}(r) + \varepsilon\zeta^{(1)} + \dots \quad (21a)$$

La ecuación (18) a orden cero, establece para el coeficiente  $\zeta^{(0)}$  la siguiente definición

$$\zeta^{(0)} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv^{(0)}] \quad (21b)$$

Por otra parte, la ecuación de Euler (18a) a orden cero establece una expresión para la presión al mismo orden, tal que (*FO B6*)

$$p^{(0)} = \int_0^r \frac{[v^{(0)}(r')]^2}{r'} dr'$$

Similarmente, a primer orden la ecuación de vorticidad (18d) resulta expresada como (*B7*)

$$u^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial r} + \frac{v^{(0)}}{r} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \theta} = \kappa v^{(0)} \zeta^{(0)} \text{Sin}\phi \quad (22)$$

Donde el coeficiente de la expansión  $\zeta^{(1)}$  es obtenido por integración de la ecuación (22). Sin embargo, su determinación requiere conocer la contribución a primer orden de la componente de velocidad  $u$ , es decir  $u^{(1)}$ . La cual es obtenida a partir de las ecuaciones (19a, b) a primer orden. Donde la función de corriente a primer orden, por simplicidad se considera satisface la siguiente relación (FO B9)

$$\psi^{(1)} = \left[ \kappa \hat{\psi}_{11}^{(1)} + r B_{11}^{(1)} \right] \text{Cos}\phi + \left[ \kappa \hat{\psi}_{12}^{(1)} + r B_{12}^{(1)} \right] \text{Sin}\phi \quad (23)$$

Con

$$B_{11}^{(1)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial A_{r1}^{(0)}}{\partial s} - T A_{r2}^{(0)} - \dot{\mathbf{X}}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{b}} \quad ; \quad B_{12}^{(1)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial A_{r2}^{(0)}}{\partial s} + T A_{r1}^{(0)} + \dot{\mathbf{X}}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Donde la componente radial del potencial  $A_r^{(0)}$  es descompuesta como  $A_r^{(0)} = A_{r1}^{(0)} \text{Cos}\phi + A_{r2}^{(0)} \text{Sin}\phi$ . Por tanto, las expresiones a primer orden en las componentes de velocidad son obtenidas, tal que (FO B11 y B12)

$$u^{(1)} = -\frac{\kappa}{r} \left[ \hat{\psi}_{11}^{(1)} \text{Sin}\phi - \hat{\psi}_{12}^{(1)} \text{Cos}\phi \right] \quad (24a)$$

$$v^{(1)} = -\kappa \left\{ \left[ \frac{\partial \hat{\psi}_{11}^{(1)}}{\partial r} - r v^{(0)} \right] \text{Cos}\phi + \frac{\partial \hat{\psi}_{12}^{(1)}}{\partial r} \text{Sin}\phi \right\} \quad (24b)$$

La sustitución de la ecuación (24a) en (22) permite la determinación de  $\zeta^{(1)}$  vía la integral de la ecuación (22) con respecto a  $\theta$ , donde se encuentra que (FO B13 y B14)

$$\zeta^{(1)} = \kappa \left[ \hat{\zeta}_{11}^{(1)} \text{Cos}\phi + \hat{\zeta}_{12}^{(1)} \text{Sin}\phi \right] + \zeta_0^{(1)}(r) \quad (25a)$$

con

$$\hat{\zeta}_{11}^{(1)} = -\left[ \alpha \hat{\psi}_{11}^{(1)} + r \zeta^{(0)} \right] \quad ; \quad \hat{\zeta}_{12}^{(1)} = -\alpha \hat{\psi}_{12}^{(1)} \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{1}{v^{(0)}} \frac{d\zeta^{(0)}}{dr} \quad (25b)$$

Donde la función axialmente simétrica  $\zeta_0^{(1)}(r)$  puede ser absorbida dentro de la función arbitraria  $\zeta^{(0)}$  para el caso invíscido. Por otra parte, las ecuaciones para  $\hat{\psi}_{11}^{(1)}$  y  $\hat{\psi}_{12}^{(1)}$ , que definen

la función de corriente (23), son determinadas por la sustitución de la ecuación (25a) en la condición auxiliar (19c), con lo que se encuentra que (FO B15 y B16)

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{1}{r^2} + \alpha \right) \right] \hat{\psi}_{11}^{(1)} = v^{(0)} + 2r\zeta^{(0)} \quad (26a)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left( \frac{1}{r^2} + \alpha \right) \right] \hat{\psi}_{12}^{(1)} = 0 \quad (26b)$$

La solución de este conjunto de ecuaciones, que garantice que la solución sea finita en  $r = 0$ , es de la forma (FO B17 y B18)

$$\hat{\psi}_{11}^{(1)} = \Psi_{11}^{(1)} + c_{11}^{(1)} v^{(0)} \quad ; \quad \hat{\psi}_{12}^{(1)} = c_{12}^{(1)} v^{(0)}$$

Con

$$\Psi_{11}^{(1)} = v^{(0)} \left\{ \frac{r^2}{2} + \int_0^r \frac{dr'}{r' [v^{(0)}(r')]^2} \int_0^{r'} r'' [v^{(0)}(r'')]^2 dr'' \right\}$$

Con  $c_{11}^{(1)}$  y  $c_{12}^{(1)}$  constantes que dependen de la posición del origen  $r = 0$  en el sistema local. Para el caso en que el origen se encuentre en un punto a lo largo de la dirección de la normal al vórtice y donde su sección transversal resulte ser simétrica, se encuentra que  $c_{11}^{(1)} = -\frac{5}{8} \sigma_0^2$  y  $c_{12}^{(1)} = 0$ , (Fukumoto & Moffat 2000).

Hasta el momento se ha presentado la expansión tipo perturbativa para una distribución de vorticidad arbitraria, en la región interior del vórtice. Donde los coeficientes de la expansión resultan establecidos según los requerimientos de las ecuaciones de movimiento. La importancia de los resultados de esta sección en el método de expansión multipolar radica en la ecuación (25), la cual determina los efectos a primer orden en  $\varepsilon$  de la distribución de vorticidad.

### 3.1.3 Expansión asintótica de la ley de Biot-Savart

En esta sección se analiza la ley de Biot-Savart correspondiente a un vórtice tubular, en el cual la distribución de vorticidad es principalmente dominada por la componente longitudinal a lo largo de la línea central del vórtice. El análisis es llevado a cabo a partir del potencial vectorial asociado al campo inducido, el cual es definido por (5) como sigue

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

Como se ha mencionado, la expansión multipolar de la ley de Biot-Savart requiere la descripción de ésta en términos de un sistema coordenado local. En el cual el elemento diferencial  $dV'$  es definido a partir del determinante de la transformación jacobiana  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\tilde{x},\tilde{y},s)}$ . Tal que,

$$dV' = h_r h_\theta h_s = r\sigma(1 - \kappa\tilde{x})drd\theta ds = (1 - \kappa\tilde{x})d\tilde{x}d\tilde{y}ds.$$

Con  $(\tilde{x}, \tilde{y}, s)$  son las componentes cartesianas de un punto interior al vórtice, descrito a partir de un sistema coordenado local. El plano formado por  $\tilde{x} - \tilde{y}$  se encuentra normal a la línea central del vórtice y paralelo a su sección transversal. Donde  $s$  es la componente a lo largo del vector tangente  $\hat{\mathbf{t}}$ . Por definición, se tiene que  $\tilde{x} = r\cos\theta$  y  $\tilde{y} = r\sin\theta$  (ver figura 7a).

Establecido el elemento de volumen, las coordenadas locales y el hecho que la componente de vorticidad longitudinal,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') = \zeta\hat{\mathbf{t}}$ , es dominante. Se encuentra para el potencial la siguiente expresión

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_{||} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\zeta(\tilde{x}, \tilde{y}, s)\hat{\mathbf{t}}(1 - \kappa\tilde{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{X} - \tilde{x}\hat{\mathbf{n}} - \tilde{y}\hat{\mathbf{b}}|} dV' \quad (27a)$$

Donde el vector posición del vórtice, se encuentra definido como,  $\mathbf{x}' = \mathbf{X} + \tilde{x}\hat{\mathbf{n}} + \tilde{y}\hat{\mathbf{b}}$ .

El subíndice  $||$  indica el hecho que se está representando la contribución longitudinal de la vorticidad únicamente, lo que supone a dicha componente dominante en los efectos de inducción. Sin embargo, para mayor claridad en la notación dicho subíndice será omitido de aquí en adelante.

Con el propósito de hacer más simple la ecuación (27a), se hace uso del operador desplazamiento, análogamente a Dyson (1893). El mecanismo esencial del operador desplazamiento es tal que cuando es aplicado a una función su aplicación resulta en una función idéntica a la original pero trasladada un cierta cantidad propia del operador. Por ejemplo, para el caso unidimensional, dado el operador  $\mathcal{L}$  se tiene que (Dyson 1893, p. 1082)

$$\mathcal{L}^t[f(x)] = f(x + t) \quad \text{donde} \quad \mathcal{L}^t = e^{t\frac{d}{dx}}$$

Entonces si  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|}$  se puede definir el operador  $\mathcal{L} = \exp[-\tilde{x}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) - \tilde{y}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)]$ , tal que (FO p. 3)

$$\mathcal{L}[f(\mathbf{x})] = \exp[-\tilde{x}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) - \tilde{y}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)] \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}-\tilde{x}\hat{\mathbf{n}}-\tilde{y}\hat{\mathbf{b}}|}$$

El operador nabla está definido respecto al argumento de la función, es decir a lo largo del vórtice. Entonces, la ecuación (27a) toma la siguiente forma (FO 12)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int ds \left\{ \iiint \zeta(\tilde{x}, \tilde{y}, s) \hat{\mathbf{t}}(1 - \kappa\tilde{x}) \exp[-\tilde{x}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) - \tilde{y}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)] \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} \right\} d\tilde{x}d\tilde{y} \quad (27b)$$

En lo que sigue, se expande en series de Taylor el operador desplazamiento. Con lo que el potencial vectorial queda expresado como (FO 13)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int ds \left\{ \iiint \zeta(\tilde{x}, \tilde{y}, s) \left( 1 - \kappa\tilde{x} - \tilde{x}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) - \tilde{y}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \tilde{x}^2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)^2 + 2\tilde{x}\tilde{y}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla) + \tilde{y}^2(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)^2 \right] + \kappa\tilde{x}^2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) + \kappa\tilde{y}^2(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \\ &\left. \left. + \dots \right) \frac{\hat{\mathbf{t}}(s)}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|} \right\} d\tilde{x}d\tilde{y} \quad (27c) \end{aligned}$$

Esta ecuación representa la expresión que deben satisfacer los campos inducidos debido a un vórtice con *geometría y distribución de vorticidad* arbitraria. La expansión establecida entre paréntesis es propia de la geometría del vórtice y principalmente del grosor asociado a éste. Los términos aquí involucrados representan los efectos en la inducción, debidos al grosor del vórtice y por ende a la distribución de vorticidad existente en la sección transversal del mismo.

La expansión del potencial vectorial correspondiente al método de expansión multipolar, requiere se introduzca la forma expandida de la vorticidad  $\zeta(\tilde{x}, \tilde{y}, s)$ . Entonces, a partir de las ecuaciones (21) y (25) la vorticidad queda reescrita como (FO 14)

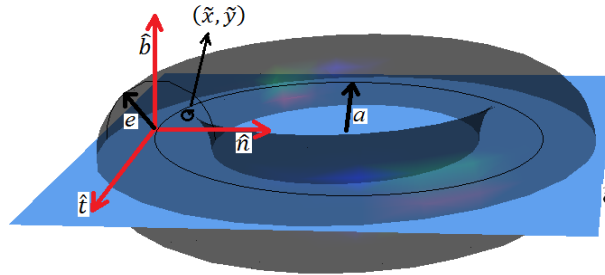
$$\zeta(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = \zeta_0 + \zeta_{11} \cos\phi + \zeta_{12} \sin\phi + \zeta_{21} \cos 2\phi + \dots \quad (28)$$

Donde

$$\zeta_0 \approx \zeta^{(0)}(r) \quad ; \quad \zeta_{11} \approx \kappa \hat{\zeta}_{11}^{(1)}(r) \quad ; \quad \zeta_{12} \approx \kappa \hat{\zeta}_{12}^{(1)}(r) \quad ; \quad \zeta_{21} \approx \kappa^2 \hat{\zeta}_{21}^{(2)}(r)$$

La potencia en  $\kappa$  indica el orden de la expansión asintótica. En  $\hat{\zeta}_{ij}^{(k)}$ , el supraíndice  $k$  indica el orden de la expansión,  $i$  el modo de Fourier con  $j=1$  y  $2$  correspondiente a las componentes independientes  $\text{Cos}(i\phi)$  y  $\text{Sin}(i\phi)$ , respectivamente. (*Recuerde:*  $\kappa$  representa la curvatura del filamento)

La importancia que tiene la ecuación (28) en el método de expansión multipolar es fundamental. La descripción local de la vorticidad en esta ecuación, relativa a la línea central del vórtice, descompone la vorticidad en efectos independientes entre sí que contribuyen a la distribución de vorticidad. La dominancia de cada efecto resulta representada por el orden de la expansión. Así, a medida que son retenidos los primeros ordenes de la expansión, los efectos asociados resultan ser más apreciables para vórtices de razón de aspecto más pequeña. Por ejemplo, a orden cero (contribución monopolar),  $\zeta_0$ , representa la condición inicial en la distribución de vorticidad del vórtice. Donde dicha condición inicial (como un promedio de la distribución en la sección transversal) es concentrada a lo largo de la geometría prescrita por la línea central del vórtice (ver figura 7b). Por otro lado, los términos correspondientes al primer modo de Fourier (contribución dipolar) representan el efecto de los déficits y excesos de vorticidad alrededor de la condición inicial establecida a orden cero, y los cuales son debidos a la curvatura del vórtice (ver figura 7b).



(a)

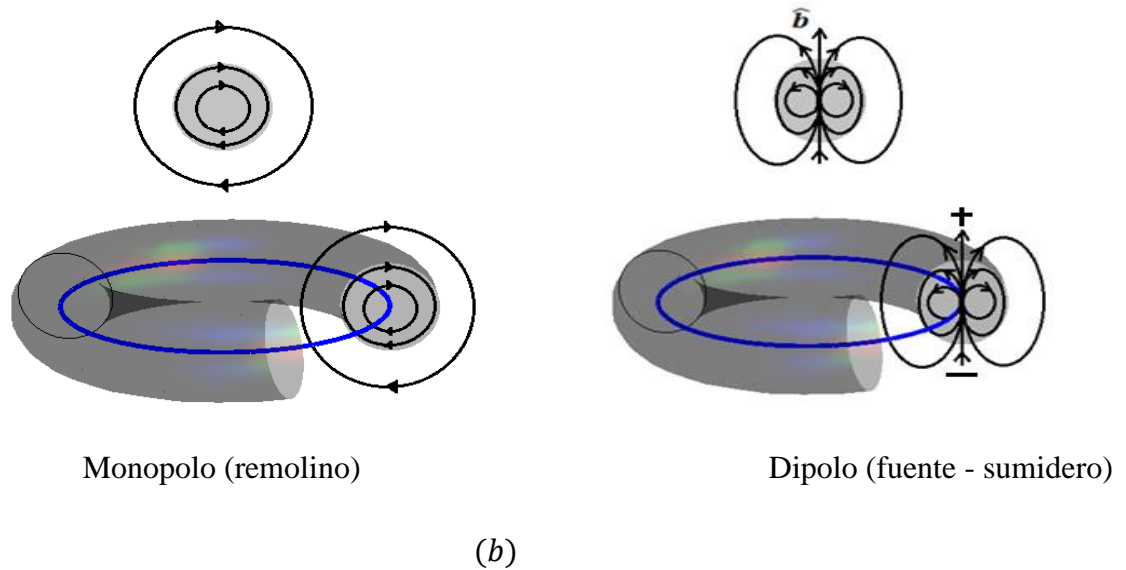


Figura 7. a) Coordenadas interiores a la sección transversal del vórtice,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , para el caso de un vórtice tubular anular de radio de línea central  $a$ , sección transversal  $e$  sobre un plano a una altura  $z$ . b) visualización de los campos de velocidad referidos a los efectos de orden monopolar y dipolar, arriba caso 2D y abajo caso 3D.

Una escogencia apropiada del origen del sistema coordenado local, permite en el termino a primer orden de (28) omitir el segundo modo de Fourier, ya que  $c_{12}^{(1)} = 0$ . Entonces, el primer modo de Fourier a primer orden representa una distribución dipolar con su eje a lo largo del vector binormal, debido a que el ángulo,  $\phi$ , es medido respecto al vector normal.

La dependencia entre la distribución de vorticidad en el interior del vórtice y su geometría, resulta más clara a partir de las definiciones (22) y (24a) involucradas en el primer orden de la expansión (28). El análisis de la sección anterior permitió encontrar la ecuación diferencial (22) que satisface a primer orden el coeficiente no nulo,  $\zeta_{11}$ , del primer modo de Fourier. Donde se encuentra que la dependencia de este coeficiente con el ángulo  $\theta$  existe en la medida que exista la curvatura asociada al vórtice (lo cual se obtiene mediante una sustitución de 24a en 22). Físicamente, la curvatura trae consigo estiramiento en las regiones interiores al vórtice lo cual da origen a cambios en la sección transversal de dichas regiones dado su carácter material. Sin embargo, este proceso debe satisfacer el teorema Kelvin, para lo cual surgen distribuciones de vorticidad propias de la curvatura del vórtice (ver figura 9).

En lo que sigue, se retienen los términos a primer orden en la expansión (28), tal que (FO p. 3)  $\zeta(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = \zeta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \zeta_0 + \kappa \hat{\zeta}_{11}^{(1)}(r) \cos\phi$ . Donde se introducen en la ecuación (27c). Por tanto, el potencial resulta descompuesto aproximadamente por dos contribuciones, la debida a efectos monopolar y a efectos dipolares.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{A}(\mathbf{x})_m + \mathbf{A}(\mathbf{x})_d \quad (29)$$

Donde (FO 17-18)

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\hat{\boldsymbol{\tau}}(s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{8\pi} \int \left\{ \Gamma^{(3)} \left( \frac{1}{2} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)^2 + (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)^2 + \kappa(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)] \right) \right. \\ \left. - \kappa Z_{11}^{(1)} [\kappa + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)] \right\} \frac{\hat{\boldsymbol{\tau}}(s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds \end{aligned} \quad (31)$$

Con  $\Gamma$  la circulación y  $\Gamma^{(3)}$  y  $Z_{11}^{(1)}$  los momentos de vorticidad, que se definen como sigue (FO 19)

$$\Gamma = 2\pi \int_0^\infty r \zeta^{(0)} dr \quad ; \quad \Gamma^{(3)} = 2\pi \int_0^\infty r^3 \zeta^{(0)} dr \quad ; \quad Z_{11}^{(1)} = 2\pi \int_0^\infty r^2 \zeta_{11}^{(1)} dr$$

El primer termino en (29), representa a primer orden el potencial asociado al campo de flujo inducido por un vórtice tubular, cuya distribución de vorticidad es promediada y concentrada a lo largo de su línea central, ecuación (30). Por otra parte, las formas de  $Z_{11}^{(1)}$  y  $\Gamma^{(3)}$  hacen evidente que el termino de corrección  $\mathbf{A}(\mathbf{x})_d$  tiene en cuenta la estructura interna de la sección transversal del vórtice. Sin embargo, una simplificación adicional es realizada sobre el potencial dipolar  $\mathbf{A}(\mathbf{x})_d$ , con el propósito de hacer más simples los cálculos correspondientes.

Las segundas derivadas en la ecuación (31) pueden ser rescritas al establecer la identidad  $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)^2 + (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)^2 = \nabla^2 - (\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla)^2$ . Donde se hace uso del hecho que (FO 20)

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} = 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{X} \quad (32)$$

como especifican Fukumoto & Okulov (2005), el corazón del método de expansión multipolar es cancelar la mayor cantidad de términos en la etapa de la formulación del problema,



a partir del uso combinado del operador desplazamiento y la naturaleza armónica de la ecuación (32). Por lo que la ecuación (31) puede ser simplificada teniendo en cuenta que (FO 21)

$$(\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} = - \left( \hat{\mathbf{t}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} = - \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|}$$

Por tanto, después de una integración parcial la ecuación (31) toma la siguiente forma (FO 22 y 23)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_{||d} = - \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\Gamma^{(3)}}{8\pi} (\kappa_s \hat{\mathbf{n}} + \kappa T \hat{\mathbf{b}}) + d^{(1)} \kappa \hat{\mathbf{t}} (\kappa + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)) \right\} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds \quad (33a)$$

Donde el subíndice  $s$  en la curvatura indica una diferenciación parcial con respecto a  $s$ , con

$$d^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ 2\pi \int_0^\infty r^2 \hat{\zeta}_{11}^{(1)} dr \right] - \frac{1}{2} \left[ 2\pi \int_0^\infty r^3 \zeta^{(0)} dr \right] \right\} \quad (33b)$$

las ecuaciones (33) suponen que el perfil  $\zeta^{(0)}$  es uniforme a lo largo del vórtice y que la derivada de  $\Gamma^{(3)}$  respecto a  $s$  es despreciable durante la integración parcial.

Obtenido el potencial vectorial (30), Fukumoto & Okulov (2005) concluyen que el termino dipolar es una corrección a los efectos de la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice. Esta corrección, resulta representada por el campo inducido de una línea de dipolos a lo largo de la línea central del vórtice con su eje en dirección binormal (ver figura 8). La distribución de vorticidad en esta corrección, resulta como consecuencia de la curvatura del vórtice. De manera que, las líneas de vorticidad sobre el lado convexo se estiren y las del lado cóncavo se contraigan. Consecuencia de este proceso, sobre el lado convexo la vorticidad aumenta y sobre el lado cóncavo disminuye, lo que genera zonas de vorticidad opuesta en la sección transversal del vórtice (dipolos), ver figura 9. Finalmente, resulta importante notar que el dipolo en mención corresponde a un dipolo fuente sumidero ya que éste mantiene la singularidad del problema sobre la línea central del vórtice.

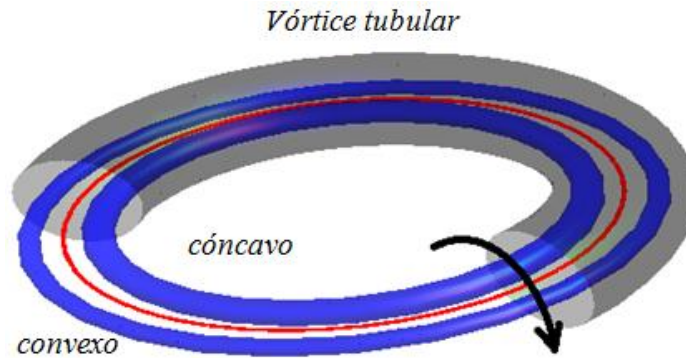


Figura 8. Se representa el efecto que la curvatura tiene sobre las regiones interiores al vórtice tubular y el cual se manifiesta mediante estiramiento y contracción de las regiones interiores a la sección transversal del vórtice.

Una vez establecido el método formalmente, en la siguiente sección se aplicara la expansión multipolar para el caso de un vórtice anular. El propósito de esta aplicación es familiarizarse con la técnica y el método en un caso bien conocido y discutido. Para así, proceder más seguramente en el caso de nuestro interés, a saber, el caso correspondiente a vórtices eslabonados.

### 3.2 Traslación de un vórtice anular

La solución del problema de translación para vórtices anulares, se obtiene a partir de la evaluación del campo inducido en la superficie de dichos vórtices. La obtención de este campo mediante el método de expansión multipolar, requiere establecer la distribución de vorticidad inicial,  $\zeta^{(0)}$ , en la sección transversal del vórtice. El vórtice anular en cuestión, se considera posee una distribución de vorticidad, inicialmente uniforme, con una sección transversal circular e indeformable. En este caso, el perfil inicial de velocidad angular,  $v^{(0)}$ , se supone proporcional a la distancia radial sobre la sección transversal del vórtice e inversamente proporcional en la región exterior a ésta.

El vórtice anular de esta sección posee un radio de sección transversal  $r_1$ . Donde el potencial (29) queda definido en términos de los parámetros  $(\Gamma^{(3)}, d^{(1)}, \zeta^{(0)}, \hat{\zeta}_{11}^{(1)})$ . La especificación explícita de estos parámetros, para el vórtice anular, es posible a partir de la definición arbitraria para el perfil  $v^{(0)}(r)$ . Tal que

$$v^{(0)}(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r_1^2} r & (r \leq r_1) \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & (r > r_1) \end{cases} \quad (34)$$

Por tanto

$$\zeta^{(0)} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r v^{(0)}] = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{\Gamma}{2\pi r_1^2} r^2 \right] & (r \leq r_1) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{\Gamma}{2\pi} \right] & (r > r_1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{\pi r_1^2} & (r \leq r_1) \\ 0 & (r > r_1) \end{cases} \quad (35a)$$

De las ecuaciones (25) se define una expresión para  $\alpha$ . A partir de un escalamiento adecuado para (35a) que permita establecer la función Heaviside  $H$ , tal que

$$H(r - r_1) = \frac{\zeta^{(0)}}{\left(\frac{\Gamma}{\pi r_1^2}\right)} = \begin{cases} 1 & 0 < r \leq r_1 \\ 0 & r > r_1 \end{cases}$$

Por tanto  $\frac{d}{dr} [H] = \delta(r - r_1)$ , o lo que es lo mismo  $\frac{d}{dr} [\zeta^{(0)}] = \frac{\Gamma}{\pi r_1^2} \delta(r - r_1)$ . Entonces  $\alpha = \frac{2\pi r_1}{\Gamma} \frac{\Gamma}{\pi r_1^2} \delta(r - r_1) = \frac{2}{r_1} \delta(r - r_1)$ , para lo cual se ha evaluado la velocidad en la superficie del vórtice, es decir, se ha hecho  $v^{(0)} = v^{(0)}(r_1)$ . Con lo que se encuentra que (FO 37)

$$\zeta_{11}^{(1)} = -[\alpha \hat{\psi}_{11}^{(1)} + r \zeta^{(0)}] = \begin{cases} -\frac{\Gamma}{\pi r_1^2} r & r \leq r_1 \\ 0 & r > r_1 \end{cases} \quad (35b)$$

Se usan las ecuaciones (35a) y (35b) para definir la intensidad del dipolo  $d^{(1)}$ , correspondiente al primer orden de la expansión multipolar, definida por (33b). Donde se encuentra que

$$d^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ -2\pi \int_0^{r_1} \frac{\Gamma}{\pi r_1^2} r^3 dr \right] - \frac{1}{2} \left[ 2\pi \int_0^{r_1} \frac{\Gamma}{\pi r_1^2} r^3 dr \right] \right\} = -\frac{3}{16\pi} \Gamma r_1^2 \quad (35c)$$

Finalmente, para el momento de vorticidad  $\Gamma^{(3)}$  se tiene que

$$\Gamma^{(3)} = 2\pi \int_0^{r_1} \frac{\Gamma}{\pi r_1^2} r^3 dr = \frac{\Gamma}{2} r_1^2 \quad (35d)$$

A continuación, se especifica la geometría del vórtice anular en el sistema coordenado local de Frenet-Serret. Con el propósito de llevar a cabo el cálculo de las integrales (30) y (33a).

El problema de convergencia que presenta el campo de velocidad inducido obtenido por la ley de Biot–Savart, debe tenerse en cuenta para la evaluación de los efectos inducidos y autoinducidos. En la figura 9, se ilustra el hecho que la inducción al ser una evaluación exterior no tiene problemas de convergencia. Sin embargo, para la autoinducción el problema de convergencia es claro sobre la línea central del vórtice. Por lo cual todo efecto de autoinducción es evaluado sobre la superficie del vórtice.

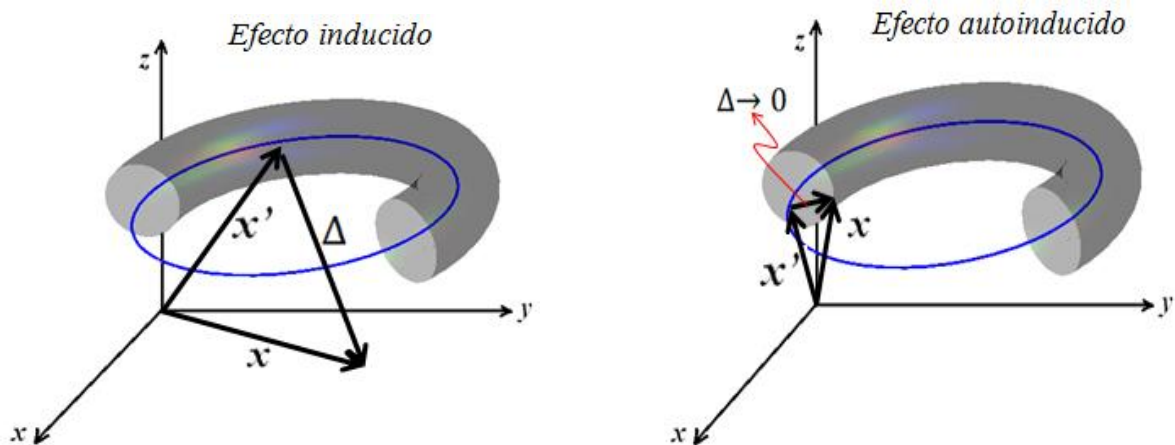


Figura 9 A la izquierda la evaluación del campo inducido, a la derecha la evaluación correspondiente al caso autoinducido, en la figura  $x$  representa la posición de evaluación,  $x'$  la posición del vórtice y  $\Delta$  la diferencia entre dichas posiciones.

La geometría para el vórtice anular resulta especificada por el siguiente conjunto de vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{t}} = -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}} \quad \text{tangente unitario}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = -\cos\theta\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\hat{\mathbf{j}} \quad \text{normal unitario}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{k}} \quad \text{binormal unitario}$$

$$\kappa = \frac{1}{r_0} \quad \text{curvatura}$$

$$T = 0 \quad \text{torsion}$$

Donde  $\theta$  representa la coordenada angular, respecto al eje  $x$ , y  $r_0$  el radio de apertura del vórtice. De suerte que el potencial monopolar (30) queda expresado como

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\text{Sin}\theta \hat{\mathbf{i}} + \text{Cos}\theta \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + \xi^2 - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)}} d\theta$$

Donde las coordenadas  $(r_0, \theta, z')$  especifican un punto sobre el vórtice filiforme y las coordenadas  $(r, \varphi, z)$  un punto arbitrario fuera del vórtice. Donde se define  $\xi = z - z'$ . Entonces, de la definición (5) el campo de velocidad monopolar queda expresado como sigue, una vez el potencial vectorial es descompuesto como  $\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = A_m(\mathbf{x})_x \hat{\mathbf{i}} + A_m(\mathbf{x})_y \hat{\mathbf{j}} + A_m(\mathbf{x})_z \hat{\mathbf{k}}$ . Con  $A_m(\mathbf{x})_z \hat{\mathbf{k}} = 0$  para el caso de un vórtice anular. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m = \nabla \times \mathbf{A}_m(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial A_m(\mathbf{x})_y}{\partial z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_x}{\partial z} \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_y}{\partial x} - \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \\ &= u_m \hat{\mathbf{i}} + v_m \hat{\mathbf{j}} + w_m \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Por simplicidad se define  $q = r^2 + r_0^2 + \xi^2$ . Por lo que se encuentra explícitamente que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \text{Cos}\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)}} d\theta \right] \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \text{Sin}\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)}} d\theta \right] \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \text{Cos}\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)}} d\theta \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \text{Sin}\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)}} d\theta \right] \right) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Para determinar el campo monopolar inducido, es necesario tener en cuenta que:  $\frac{\partial q}{\partial z} = 2\xi$ ,  $\frac{\partial q}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial y} = 2r \frac{\partial r}{\partial y}$ . Además del hecho que  $2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta) = 2rr_0 [\text{Cos}\varphi \text{Cos}\theta + \text{Sin}\varphi \text{Sin}\theta] = 2r_0 x \text{Cos}\theta + y \text{Sin}\theta$ . Las cuales que resultan ser expresiones útiles en el cálculo de las componente del campo monopolar inducido. Así que por diferenciación directa se obtiene que

$$u_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \text{Cos}\theta}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \quad (36a)$$

$$v_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \quad (36b)$$

Y para la componente vertical

$$w_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]\right) d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} [2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]\right) d\theta \right\}$$

$$w_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} (r_0 \cos\theta - r \cos\varphi) d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} (r_0 \sin\theta - r \sin\varphi) d\theta \right\}$$

Así que simplificando se tiene que

$$w_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r_0(x \cos\theta + y \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \quad (36c)$$

El cálculo del campo dipolar como la corrección sobre los campos de inducción obtenidos por las ecuaciones (36a, b, c), es establecido para determinar los efectos que tiene la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice. Para lo cual se usará la ecuación (33), que resulta simplificada por la geometría del vórtice anular, tal que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_d = -\frac{1}{2} \int d^{(1)}\kappa (\kappa + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)) \frac{\hat{\mathbf{r}}(s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds$$

$$= -\frac{3\Gamma r_1^2}{32} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r_0} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \right) \frac{-\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_d = -\frac{3\Gamma r_1^2}{32} \left\{ \int_0^{2\pi} -\sin\theta \left[ \frac{1}{r_0} + \left( -\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta \hat{\mathbf{i}} \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \cos\theta \left[ \frac{1}{r_0} + \left( -\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta \hat{\mathbf{j}} \right\}$$

resolviendo las derivadas, el potencial dipolar queda expresado como

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x})_d = & \frac{3\Gamma r_1^2}{32\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{r_0 \sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \right. \right. \\
& + \frac{\sin\theta \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial x} - 2r_0 \cos\theta \right) \\
& + \left. \frac{\sin^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial y} - 2r_0 \sin\theta \right) \right\} d\theta \hat{\mathbf{i}} \\
& + \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_0 \sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \right. \\
& - \frac{\sin\theta \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial y} - 2r_0 \sin\theta \right) \\
& \left. - \frac{\cos^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial x} - 2r_0 \cos\theta \right) \right\} d\theta \hat{\mathbf{j}} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x})_d = & \frac{3\Gamma r_1^2}{32\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{r_0 \sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \right. \right. \\
& + \frac{\sin\theta \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) (-2r \cos\varphi - 2r_0 \cos\theta) \\
& + \left. \frac{\sin^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) (-2r \sin\varphi - 2r_0 \sin\theta) \right\} d\theta \hat{\mathbf{i}} \\
& + \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_0 \sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \right. \\
& - \frac{\sin\theta \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) (-2r \sin\varphi - 2r_0 \sin\theta) \\
& \left. - \frac{\cos^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) (-2r \cos\varphi - 2r_0 \cos\theta) \right\} d\theta \hat{\mathbf{j}} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x})_d = & \frac{3\Gamma r_1^2}{32\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{r_0 \sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} + \frac{r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \right. \\
& \left. - \frac{\sin\theta (r \cos\varphi \cos\theta + r \sin\varphi \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta \hat{\mathbf{i}} \\
& + \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_0 \sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)}} - \frac{r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \left. + \frac{\cos\theta (r \cos\varphi \cos\theta + r \sin\varphi \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta \hat{\mathbf{j}} \Big] \tag{37}
\end{aligned}$$

Descomponiendo el potencial dipolar, se tiene que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})_d = \mathbf{A}_d(\mathbf{x})_x \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{A}_d(\mathbf{x})_y \hat{\mathbf{j}} + \mathbf{A}_d(\mathbf{x})_z \hat{\mathbf{k}}$$

Con  $\mathbf{A}_d(\mathbf{x})_z \hat{\mathbf{k}} = 0$  para el caso de un vórtice anular. Por tanto, el correspondiente campo de velocidad dipolar queda determinado como

$$\mathbf{u}_d = \nabla \times \mathbf{A}_d(\mathbf{x}) = -\frac{\partial A_d(\mathbf{x})_y}{\partial z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial A_d(\mathbf{x})_x}{\partial z} \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial A_d(\mathbf{x})_y}{\partial x} - \frac{\partial A_d(\mathbf{x})_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = u_d \hat{\mathbf{i}} + v_d \hat{\mathbf{j}} + w_d \hat{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned} u_d = & \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta - \frac{3\Gamma}{32\pi} r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3\xi r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \\ & + \frac{3\Gamma}{32\pi} r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3\xi \cos\theta (x \cos\theta + y \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \end{aligned} \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} v_d = & \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta - \frac{3\Gamma}{32\pi} r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3\xi r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \\ & + \frac{3\Gamma}{32\pi} r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3\xi \sin\theta (x \cos\theta + y \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \end{aligned} \quad (38b)$$

$$\begin{aligned} w_d = & \frac{3\Gamma}{32\pi} \left[ \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial x} - 2r_0 \cos\theta \right) d\theta \right. \\ & - r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} \left( -\frac{3}{2} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial x} - 2r_0 \cos\theta \right) d\theta \\ & + r_1^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos\theta (x \cos\theta + y \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} \left( -\frac{3}{2} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial x} - 2r_0 \cos\theta \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\cos^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{3\Gamma}{32\pi} \left[ \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y} - 2r_0 \sin\theta\right) d\theta \right. \\
& \quad - r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y} - 2r_0 \sin\theta\right) d\theta \\
& \quad + r_1^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\partial q}{\partial y} - 2r_0 \sin\theta\right) \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\sin^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta \right] \\
w_d = & \frac{3\Gamma}{32\pi} \left[ \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos\theta(-r\cos\varphi + 2r_0 \cos\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \right. \\
& \quad - r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3r_0 \cos\theta(-r\cos\varphi + 2r_0 \cos\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \\
& \quad + r_1^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)(-r\cos\varphi + 2r_0 \cos\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta + \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \sin\theta(-r\sin\varphi + 2r_0 \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\
& \quad - r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3r_0 \sin\theta(-r\sin\varphi + 2r_0 \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \\
& \quad + r_1^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{3\sin\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)(-r\sin\varphi + 2r_0 \sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sin^2\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta \left. \right]
\end{aligned}$$

Resolviendo, se encuentra que

$$\begin{aligned}
w_d = & \frac{3\Gamma}{32\pi} \left[ \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta - r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3r_0^2 - 3r_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \right. \\
& \quad + r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3r_0(x\cos\theta + y\sin\theta) - 3(x\cos\theta + y\sin\theta)^2}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \\
& \quad \left. + r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \left[ \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{2r_0^2 - r_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \right. \\
&\quad \left. - r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{3r_0^2 - 6r_0(x\cos\theta + y\sin\theta) + 3(x\cos\theta + y\sin\theta)^2}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \right] \\
w_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \left[ \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{2r_0^2 - r_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \right. \\
&\quad \left. - 3r_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{[r_0 - (x\cos\theta + y\sin\theta)]^2}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{5/2}} d\theta \right] \tag{38c}
\end{aligned}$$

Con el fin de simplificar las ecuaciones (38a, b, c), no son retenidos en las componentes de velocidad los términos a orden  $O(1/r^5)$ . Entonces

$$u_d = \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \tag{38a}$$

$$v_d = \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \tag{38b}$$

$$w_d = \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{2r_0^2 - r_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \tag{38c}$$

El desarrollo de las integrales (36) y (38), necesario para la obtención explícita del campo de velocidad, se lleva a cabo mediante una expansión en Fourier del término  $\frac{1}{[q - 2rr_0\cos(\varphi - \theta)]^{3/2}}$ .

Para lo cual se expandirá el caso más sencillo de  $\frac{1}{[q' - \cos(\psi)]^{3/2}}$  donde la expansión resulta expresada como

$$\frac{1}{[q' - \cos(\psi)]^{3/2}} = c_0 + c_1 \cos\psi + c_2 \cos 2\psi + \dots + c_n \cos n\psi \tag{39a}$$

Donde los coeficientes de Fourier  $c_n$ , resultan definidos como sigue

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi}{[q' - \cos(\psi)]^{3/2}} d\psi \quad ; \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{[q' - \cos(\psi)]^{3/2}} d\psi \tag{39b}$$

La solución para los coeficientes de Fourier (39b) es llevado a partir del modelo de Thomson (1883). Donde se indica un método práctico para determinar los coeficientes de Fourier de una serie en términos de coeficientes de Fourier más sencillos de obtener. Por ejemplo, determinar  $c_n$  a partir de los coeficientes  $b_n$  correspondientes a la expansión

$$\frac{1}{[q' - \text{Cos}(\psi)]^{1/2}} = b_0 + b_1 \text{Cos}\psi + b_2 \text{Cos}2\psi + \dots + b_n \text{Cos}n\psi \quad (40a)$$

Donde

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos}n\psi}{[q' - \text{Cos}(\psi)]^{1/2}} d\psi \quad ; \quad b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{[q' - \text{Cos}(\psi)]^{1/2}} d\psi \quad (40b)$$

De la comparación entre las ecuaciones (40) y (39), es posible obtener las siguientes relaciones (Thomson 1883, 22)

$$c_n = \frac{2n+1}{(q'^2 - 1)} (q' b_n - b_{n+1}) \quad (41)$$

donde

$$b_0 = \frac{2}{\pi \sqrt{q'+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \text{Sin}\phi}} \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{2}{q'+1}$$

Para el caso en que  $k$  sea cercano a la unidad, la integral es  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \text{Sin}\phi}} = \log \frac{4}{k_1}$ , con  $k_1 = \sqrt{1-k^2}$  (no confunda este  $k$  con el asociado a la curvatura). Con ésto, los coeficientes (3.33b) quedan definidos como

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - n^2 \right) x \right\} \left\{ \log \frac{16(2+x)}{x} - 4f(n) \right\} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} x \left( \frac{1}{4} - n^2 \right) \quad \text{con} \quad x = q' - 1$$

Donde  $f(n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$ . Entonces, de la ecuación (41) se tiene para (39b) que

$$c_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[ \frac{2}{x} - \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) \left\{ \log \frac{16(2+x)}{x} - 4f(n) \right\} - \left( n^2 + \frac{3}{4} \right) \right] \quad (42)$$

Obtenidos los coeficientes de Fourier (42) asociados a la función (39a), los coeficientes son reescritos de manera adecuada para la función de interés  $\frac{1}{[q-2rr_0\cos(\varphi-\theta)]^{3/2}}$ . Por lo cual las integrales que definen los coeficientes de Fourier, toman la siguiente forma

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi}{[q-2rr_0\cos(\psi)]^{3/2}} d\psi \quad \text{entonces} \quad c_n = \frac{1}{\pi(2rr_0)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi}{[q'-\cos(\psi)]^{3/2}} d\psi$$

con

$$q' = \frac{q}{2rr_0} ; \quad x = \frac{\{(r-r_0)^2 + \xi^2\}}{2rr_0} ; \quad 2+x = \frac{\{(r+r_0)^2 + \xi^2\}}{2rr_0} ; \quad \frac{2+x}{x} = \frac{\{(r+r_0)^2 + \xi^2\}}{\{(r-r_0)^2 + \xi^2\}}$$

Establecida la expansión de Fourier. El cálculo explícito del campo de velocidad inducido resulta simplificado, como se muestra a continuación

$$u_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \cos \theta}{[q-2rr_0\cos(\varphi-\theta)]^{3/2}} d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\xi r_0 [\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi]}{[q-2rr_0\cos \psi]^{3/2}} d\psi$$

$$u_m = \frac{\Gamma}{4\pi(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \xi r_0 [\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi] [c_0 + c_1 \cos \psi + \dots + c_n \cos n\psi] d\psi$$

Simplificando por las condiciones de ortogonalidad,  $u_m$  es expresada como sigue

$$u_m = \frac{\Gamma}{4\pi(2rr_0)^{3/2}} \xi r_0 c_1 \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos \varphi \cos^2 \psi d\psi$$

Entonces

$$u_m = \frac{\Gamma}{4(2rr_0)^{3/2}} \xi r_0 c_1 \cos \varphi \quad (43a)$$

Igualmente, para  $v_m$  se tiene que

$$v_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \cos \theta}{[q-2rr_0\cos(\varphi-\theta)]^{3/2}} d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\xi r_0 [\sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \psi]}{[q-2rr_0\cos \psi]^{3/2}} d\psi$$

$$v_m = \frac{\Gamma}{4\pi(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \xi r_0 [\sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \psi] [c_0 + c_1 \cos \psi + \dots + c_n \cos n\psi] d\psi$$

Simplificando por las condiciones de ortogonalidad,  $v_m$  es expresada como sigue

$$v_m = \frac{\Gamma}{4\pi(2rr_0)^{3/2}} \xi r_0 c_1 \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \text{Sin}\varphi \text{Cos}^2\psi d\psi$$

Entonces

$$v_m = \frac{\Gamma}{4(2rr_0)^{3/2}} \xi r_0 c_1 \text{Sin}\varphi \quad (43b)$$

Finalmente, para la componente vertical del campo monopolar se tiene que

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r_0(x\text{Cos}\theta + y\text{Sin}\theta)}{[q - 2rr_0\text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2}{[q - 2rr_0\text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi - \int_0^{2\pi} \frac{r_0(x\text{Cos}(\psi + \varphi) + y\text{Sin}(\psi + \varphi))}{[q - 2rr_0\text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \frac{r_0^2}{(2rr_0)^{3/2}} \int_0^{2\pi} [c_0 + c_1\text{Cos}\psi + \dots + c_n\text{Cosn}\psi] d\psi \right. \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \frac{r_0 x [\text{Cos}\varphi\text{Cos}\psi - \text{Sin}\varphi\text{Sin}\psi]}{[q - 2rr_0\text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \frac{r_0 y [\text{Sin}\psi\text{Cos}\varphi + \text{Sin}\varphi\text{Cos}\psi]}{[q - 2rr_0\text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \frac{2c_0 r_0^2}{(2rr_0)^{3/2}} \right. \\ &\quad - \frac{r_0 x}{(2rr_0)^{3/2}} \int_0^{2\pi} [\text{Cos}\varphi\text{Cos}\psi - \text{Sin}\varphi\text{Sin}\psi] [c_0 + c_1\text{Cos}\psi + \dots + c_n\text{Cosn}\psi] d\psi \\ &\quad \left. - \frac{r_0 y}{(2rr_0)^{3/2}} \int_0^{2\pi} [\text{Sin}\psi\text{Cos}\varphi + \text{Sin}\varphi\text{Cos}\psi] [c_0 + c_1\text{Cos}\psi + \dots + c_n\text{Cosn}\psi] d\psi \right\} \end{aligned}$$

Simplificando por las condiciones de ortogonalidad,  $w_m$  es expresada como sigue

$$w_m = \frac{\Gamma}{4} \frac{2c_0 r_0^2}{(2rr_0)^{3/2}} - \frac{\Gamma}{4} \frac{r_0 x c_1 \text{Cos}\varphi}{(2rr_0)^{3/2}} - \frac{\Gamma}{4} \frac{r_0 x c_1 \text{Sin}\varphi}{(2rr_0)^{3/2}} = \frac{\Gamma}{4} \frac{2c_0 r_0^2}{(2rr_0)^{3/2}} - \frac{\Gamma}{4} \frac{r_0 c_1 r}{(2rr_0)^{3/2}}$$

$$w_m = \frac{\Gamma}{4(2rr_0)^{3/2}} (2c_0r_0^2 - r_0c_1r) \quad (43c)$$

De esta manera, a partir de las ecuaciones (43) es determinado explícitamente el campo monopolar inducido por un vórtice anular. A continuación, se procede igualmente con el cálculo correspondiente a los campos de corrección dipolares. Los cuales representan los efectos, en la velocidad, debidos a la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice, que es afectada por curvatura del mismo. Entonces, de las ecuaciones (38) se tiene que

$$\begin{aligned} u_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \cos\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos(\psi + \varphi) [c_0 + c_1 \cos\psi + \dots + c_n \cos n\psi] d\psi \\ u_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} [\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi] [c_0 + c_1 \cos\psi + \dots + c_n \cos n\psi] d\psi \\ u_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0 c_1 \cos\varphi}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos^2\psi d\psi = \frac{3\Gamma}{32} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0 c_1 \cos\varphi}{(2rr_0)^{3/2}} \\ u_d &= \frac{3\Gamma r_1^2}{32(2rr_0)^{5/2}} 2\xi r_0 c_1 \cos\varphi \end{aligned} \quad (44a)$$

Por otro parte,

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi r_0 \sin\theta}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin(\psi + \varphi) [c_0 + c_1 \cos\psi + \dots + c_n \cos n\psi] d\psi \\ v_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} [\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi] [c_0 + c_1 \cos\psi + \dots + c_n \cos n\psi] d\psi \\ v_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0 c_1 \sin\varphi}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \cos^2\psi d\psi = \frac{3\Gamma}{32} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{\xi r_0 c_1 \sin\varphi}{(2rr_0)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$v_d = \frac{3\Gamma r_1^2}{32(2rr_0)^{5/2}} 2\xi r_0 c_1 \text{Sin}\varphi \quad (44b)$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned} w_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{2r_0^2 - r_0(x\text{Cos}\theta + y\text{Sin}\theta)}{[q - 2rr_0\text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \left[ \frac{2r_0^2}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{1}{[q' - \text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_0x}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\text{Cos}(\psi + \varphi)}{[q' - \text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi - \frac{r_0y}{(2rr_0)^{3/2}} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\text{Sin}(\psi + \varphi)}{[q' - \text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi \right] \\ w_d &= \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{1}{(2rr_0)^{3/2}} \left[ 2r_0^2 \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{1}{[q' - \text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi - r_0x \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\text{Cos}(\psi + \varphi)}{[q' - \text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi \right. \\ &\quad \left. - r_0y \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{\text{Sin}(\psi + \varphi)}{[q' - \text{Cos}\psi]^{3/2}} d\psi \right] \end{aligned}$$

Se resuelve mediante la expansión en Fourier establecida y se simplifica a partir de propiedades de ortogonalidad, tal que

$$w_d = \frac{3\Gamma}{32\pi} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{1}{(2rr_0)^{3/2}} [4r_0^2\pi c_0 - r_0x\pi c_1\text{Cos}\varphi - r_0y\pi c_1\text{Sin}\varphi]$$

$$w_d = \frac{3\Gamma}{32} \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{1}{(2rr_0)^{3/2}} [4r_0^2c_0 - r_0rc_1]$$

Nótese que el primer término dentro de los corchetes cuadrados tiene un factor de 2, “adicional”, el cual resulta de la diferencia entre las definiciones de los coeficientes  $c_n$  y  $c_0$ . Por tanto

$$w_d = \frac{3\Gamma}{32} \frac{r_1^2}{(2rr_0)^{5/2}} [8rr_0c_0 - 2r^2c_1] \quad (44c)$$

Los resultados dados por (44) especifican el campo de velocidad inducido por el vórtice, con la corrección dipolar deseada. Por tanto, el campo inducido total queda expresado como la superposición de las contribuciones monopolar y dipolar dadas por las ecuaciones (43) y (44), tal que

$$u = u_m + u_d = \frac{\Gamma}{4(2rr_0)^{3/2}} \xi r_0 c_1 \cos\varphi + \frac{3\Gamma r_1^2}{32(2rr_0)^{5/2}} 2\xi r c_1 \cos\varphi \quad (45a)$$

$$v = v_m + v_d = \frac{\Gamma}{4(2rr_0)^{3/2}} \xi r_0 c_1 \sin\varphi + \frac{3\Gamma r_1^2}{32(2rr_0)^{5/2}} 2\xi r c_1 \sin\varphi \quad (45b)$$

$$w = w_m + w_d = \frac{\Gamma}{4(2rr_0)^{3/2}} (2c_0 r_0^2 - r_0 c_1 r) + \frac{3\Gamma}{32} \frac{r_1^2}{(2rr_0)^{5/2}} [8rr_0 c_0 - 2r^2 c_1] \quad (45c)$$

La determinación de la velocidad de traslación se obtiene a partir del hecho que la superficie que acota el vórtice anular es material. La cual es especificada en coordenadas cilíndricas como sigue, véase figura 10

$$\rho = r_0 + r_1 \cos\chi \quad (46a)$$

$$z = \mathfrak{z} + r_1 \sin\chi \quad (46b)$$

Donde  $\mathfrak{z}$  representa la posición a lo largo del eje  $z$  del plano del vórtice

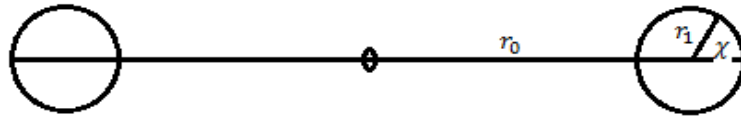


Figura 10 Representación en el plano meridional de un vórtice anular

La aplicación de la condición de una superficie material sobre la superficie del vórtice anular, a saber que la variación material sea nula, es posible para la ecuación (46b). Entonces, la componente vertical de esta condición resulta especificada por

$$w = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + r_1 \cos\chi \cdot \mathcal{X} \quad \text{con} \quad \mathcal{X} = \frac{d\chi}{dt} \quad (47)$$

Con lo que se evidencian dos contribuciones a la velocidad vertical, la primera debida a efectos de traslación (primer término de la ecuación (47)) y la segunda debido a los efectos de rotación internos en el vórtice (segundo término de la ecuación (47)).

La relevancia de la ecuación (47) para el problema de la traslación del vórtice, radica en el hecho que esta expresión permite una comparación con la velocidad vertical, evaluada en la



superficie, obtenida a partir de la ley de Biot-Savart (45c). Para lo cual se debe tener en cuenta que

$$r = \rho \quad ; \quad \xi = r_1 \sin \chi \quad ; \quad x = \frac{\{(r - r_0)^2 + \xi^2\}}{2rr_0} = \frac{r_1^2}{2r_0^2}$$

Donde  $rr_0 = r_0^2 + r_1 r_0 \cos \chi \approx r_0^2$ . Así, los coeficientes de los que depende la componente vertical del campo de velocidad inducido (45c) quedan expresados como.

$$2c_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[ \frac{4r_0^2}{r_1^2} + \frac{1}{4} \left( \log \frac{64r_0^2}{r_1^2} - 4f(0) \right) - \frac{3}{4} \right] = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[ \frac{4r_0^2}{r_1^2} + \frac{1}{4} \left( \log \frac{64r_0^2}{r_1^2} \right) - \frac{3}{4} \right]$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[ \frac{4r_0^2}{r_1^2} - \frac{3}{4} \left( \log \frac{64r_0^2}{r_1^2} - 4f(1) \right) - \frac{7}{4} \right] = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[ \frac{4r_0^2}{r_1^2} - \frac{3}{4} \left( \log \frac{64r_0^2}{r_1^2} \right) + \frac{5}{4} \right]$$

Donde se utilizaron las siguientes relaciones  $f(0) = 0$  y que  $f(1) = 1$

Los términos asociados a la contribución interna, distinguidos por ser coeficientes de  $\cos \chi$ , son omitidos. La velocidad de traslación del plano del vórtice queda definida como

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{\Gamma r_0^2}{4(2rr_0)^{3/2}} (2c_0 - c_1) + \frac{3\Gamma}{32} \frac{r_1^2 r_0^2}{(2rr_0)^{5/2}} [8c_0 - 2c_1]$$

donde

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left( \log \frac{8r_0}{r_1} - 1 \right) + \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left( \frac{3}{4} \right) \quad (48)$$

### 3.2.1 Discusión

La expresión (48) resalta como el primer término a la derecha resulta ser la contribución a la traslación debida al efecto puramente monopolar (equivalente al resultado de Thomson 1883). Donde se considera el promedio de la vorticidad en la sección transversal al vórtice concentrada a lo largo de su línea central. Por otra parte, el segundo término representa la contribución a la traslación debida al efecto dipolar. La cual tiene en cuenta la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice, debida a los efectos de curvatura del mismo. Finalmente, la suma de ambas contribuciones, resulta en la siguiente expresión para la velocidad de traslación

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left( \log \frac{8r_0}{r_1} - \frac{1}{4} \right) \quad (48)$$

Que equivale a los resultados de Kelvin 1867. La importancia de esta sección mas que la obtención correcta de las expresiones analíticas es la interpretación física asociada a cada término en la solución (48). Adicionalmente es importante notar como a partir de la consideración inicial de una distribución de vorticidad uniforme, el resultado del método de expansión multipolar concuerda con el resultado del modelo de Kelvin. Para el cual la distribución de vorticidad lineal era considerada como una condición inicial estacionaria, ver Fukumoto & Moffat (2000)

### 3.3 Campo inducido de un vórtice anular perturbado

En la sección anterior se uso el método de expansión multipolar para familiarizar al lector con la técnica y el procedimiento requerido para conocer la traslación de un vórtice tubular correspondiente a su autoinducción. Ahora bien, la formulación del problema (capítulo 1) requiere que los vórtices involucrados en el eslabonamiento se supone sean de la forma mostrada en la figura 11. Entonces, el campo inducido por los vórtices involucrados en el eslabonamiento resulta diferente al encontrado en la sección anterior, debido a la perturbación armónica que sufre el vórtice anular para encontrarse sobre la superficie del toro deseado.

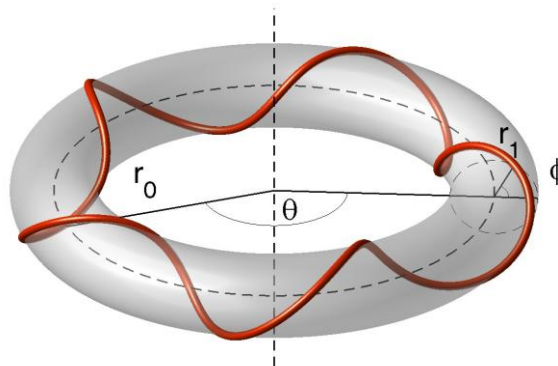


Figura 11. Representación geométrica de los vórtices involucrados en el eslabonamiento.  $r_0$  es el radio del toro sobre el cual se encuentran los vórtices anulares,  $r_1$  es el radio de la sección transversal del toro,  $e$  es el radio de la sección transversal de los vórtices, mientras  $\theta$  es el ángulo longitudinal del toro y  $\phi$  su ángulo meridional. Tomada de Velasco Fuentes (2013).

Para determinar el campo inducido por el vórtice de la figura 11, mediante el método de expansión multipolar, se comienza por establecer su geometría. De suerte que a partir de un sistema coordenado cilíndrico, se tiene que

$$\rho = r_0 + \alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta) \quad (49a)$$

$$z = \mathfrak{z} + \gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta) \quad (49b)$$

Que en coordenadas cartesianas toma la siguiente forma

$$x = \rho \text{Cos}(\theta) = [r_0 + \alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Cos}(\theta) \quad (50a)$$

$$y = \rho \text{Sin}(\theta) = [r_0 + \alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Sin}(\theta) \quad (50b)$$

$$z = \mathfrak{z} + \gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta) \quad (50c)$$

Donde los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$  son cantidades pequeñas, dada la razón de aspecto del toro inmaterial. Entonces, a partir de las ecuaciones (50) se establece el sistema coordenado de Frenet-Serret (ver apéndice A), tal que

Vector tangente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{r_0} \{ & -r_0 \text{Sin}(\theta) - \text{Sin}(\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \\ & - n \text{Cos}(\theta) [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{i}} + r_0 \text{Cos}(\theta) \\ & + \text{Cos}(\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] - n \text{Sin}(\theta) [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{j}} \\ & - n [\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{k}} \} \end{aligned} \quad (A1.1a)$$

Vector normal:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} = \{ & -\text{Cos}(m\theta) - \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1 + n^2) \\ & + 2n \text{Sin}(m\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{i}} \\ & - \text{Sin}(\theta) - \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1 + n^2) - 2n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{j}} \\ & - n^2 \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{k}} \} \end{aligned} \quad (A1.1c)$$

Vector binormal:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} = & \left[ -n^2 \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right] \hat{\mathbf{i}} \\ & + \left[ -n^2 \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] + n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right] \hat{\mathbf{j}} \\ & + \left[ 1 + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (\text{A1.1d})$$

Curvatura:

$$\kappa \approx \frac{1}{r_0} \left( 1 + 2 \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1 + n^2) \right)^{1/2} \quad (\text{A1.1b})$$

Torsión:

$$T = \frac{n}{r_0} (n^2 - 1) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \quad (\text{A1.1e})$$

Las ecuaciones A1 son introducidas en el potencial vectorial definido por el método de expansión multipolar, similarmente a la sección anterior. Donde la contribución monopolar y dipolar del potencial vectorial, se definen como (ecuación 30 y 33)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x})_m &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathbf{t}}(s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})_d &= -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\Gamma^{(3)}}{8} (\kappa_s \hat{\mathbf{n}} + \kappa T \hat{\mathbf{b}}) + d^{(1)} \kappa \hat{\mathbf{t}} (\kappa + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)) \right\} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds \end{aligned}$$

La determinación de la contribución monopolar y dipolar, son calculadas analíticamente (ver apéndice A2 y A3). A continuación, se presenta la contribución monopolar y dipolar de los campos inducidos por un vórtice anular perturbado. Donde son retenidos, únicamente, los términos a primer orden en los parámetros geométricos del vórtice, a saber  $(\alpha_n, \beta_n, \delta_n, \gamma_n)$ . Encontrándose para la contribución monopolar de la componente  $x$  de la velocidad la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
u_m = & \frac{\Gamma}{4} (\xi r_0 A_1 \text{Cos}(\varphi)) \\
& + \frac{\Gamma}{8} (2\gamma_n A_n (\gamma_n \text{Sin}(n\varphi) - \delta_n \text{Cos}(n\varphi)) \\
& + [\xi r_0 B_{n+1} + \{(n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n\} A_{n+1}] \text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& + [\xi r_0 B_{n-1} - \{(n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n\} A_{n-1}] \text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& + [\xi r_0 C_{n+1} + \{(n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n\} A_{n+1}] \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& + [\xi r_0 C_{n-1} - \{(n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n\} A_{n-1}] \text{Sin}[(n-1)\varphi])
\end{aligned} \tag{A2.4a}$$

Para la contribución monopolar de la componente y de la velocidad

$$\begin{aligned}
v_m = & \frac{\Gamma}{4} (\xi r_0 A_1 \text{Sin}(\varphi)) + \frac{\Gamma}{8} (-x n A_n (\gamma_n \text{Sin}(n\varphi) + \delta_n \text{Cos}(n\varphi)) \\
& - \{ \{(n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n\} A_{n+1} + \xi r_0 C_{n+1} \} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& - \{ \{(n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n\} A_{n-1} - \xi r_0 C_{n-1} \} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& + \{ \{(n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n\} A_{n+1} + \xi r_0 B_{n+1} \} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& + \{ \{(n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n\} A_{n-1} - \xi r_0 B_{n-1} \} \text{Sin}[(n-1)\varphi])
\end{aligned} \tag{A2.6a}$$

Para la contribución monopolar de la componente z de la velocidad

$$\begin{aligned}
w_m = & \frac{\Gamma}{4} (2A_0 r_0^2 - A_1 r_0 r + r_0^2 (B_n \text{Cos}(n\varphi) + C_n \text{Sin}(n\varphi)) \\
& + 2r_0 [\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)] A_n \\
& + \frac{1}{2} r [(n-1)A_{n-1} - (n+1)A_{n+1}] (\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)) \\
& - \frac{1}{2} r_0 r [(B_{n+1} + B_{n-1}) \text{Cos}(n\varphi) + (C_{n+1} + C_{n-1}) \text{Sin}(n\varphi)])
\end{aligned} \tag{A2.7a}$$

Similarmente, para la contribución dipolar de la componente x de la velocidad

$$u_d = \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} (\xi A_1 \text{Cos}(\varphi))$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left( \xi B_{n+1} + \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right) \cos[(n+1)\varphi] \\
& + \left[ m\xi B_{n-1} - \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \cos[(n-1)\varphi] \\
& + \left[ \xi C_{n+1} + \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right] \sin[(n+1)\varphi] \\
& + \left[ m\xi C_{n-1} - \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \sin[(n-1)\varphi]
\end{aligned} \tag{A3.3a}$$

Para la contribución dipolar de la componente  $y$  de la velocidad

$$\begin{aligned}
v_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} (\xi A_1 \sin(\varphi) + \\
& \frac{1}{2} (- \left[ \xi C_{n+1} + \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right] \cos[(n+1)\varphi] \\
& + \left[ m\xi C_{n-1} - \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \cos[(n-1)\varphi] \\
& + \left[ m\xi B_{n+1} + \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right] \sin[(n+1)\varphi] \\
& - \left[ m\xi B_{n-1} - \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \sin[(n-1)\varphi]
\end{aligned} \tag{A3.4a}$$

Para la contribución dipolar de la componente  $z$  de la velocidad

$$\begin{aligned}
w_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} (4r_0 A_0 - r A_1 \\
& + 2mr_0 \{ B_n \cos(n\varphi) + C_n \sin(n\varphi) \} + \{ 3 + 4(n^2+1) \} A_n [\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)] \\
& - \frac{1}{2} r (B_{n+1} + B_{n-1}) \cos(n\varphi) - \frac{1}{2} r (C_{n+1} + C_{n-1}) \sin(n\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ -\left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} A_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} A_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi]
\end{aligned} \tag{A3.5a}$$

El campo inducido establecido en esta sección, corresponde a un vórtice anular perturbado armónicamente con cuatro parámetros libres de amplitud, a saber  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ , y uno relacionado con el enrollamiento meridionalmente del vórtice alrededor del toro, a saber  $n$ . En la siguiente sección se evaluará el campo de inducción aquí obtenido para determinar la traslación de este vórtice.

### 3.4 Traslación de un único vórtice perturbado

En esta sección se establecerá la traslación del vórtice tubular de la sección anterior. Similarmente a la sección 3.2, se determinan las componentes de la velocidad obtenidas de la condición que la superficie del vórtice es material, y se compara con las componentes obtenidas por el cálculo de inducción de la sección anterior.

Donde la superficie del vórtice tubular perturbado, es expresada por las siguientes ecuaciones

$$\rho = r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) + e \cos \chi$$

$$z = \mathfrak{z} + \gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta) + e \sin \chi$$

La condición material para  $\rho$  queda expresada como sigue

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\alpha_n}{dt} \cos(n\theta) + \frac{d\beta_n}{dt} \sin(n\theta) - n(\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)) \frac{d\theta}{dt} - e \sin \chi \frac{d\chi}{dt}$$

Donde los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$  se han supuesto independientes de la posición. En la ecuación  $\frac{D\rho}{Dt} = \mathfrak{R}$  representa la velocidad radial del vórtice en su superficie.

En lo que sigue, se supone que el vórtice no tiene giro, es decir que el movimiento del fluido se sostiene con la mismas partículas de materia sobre las secciones transversales del vórtice, por tanto  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ . Por lo anterior, la velocidad radial queda expresada como

$$\mathfrak{R} = \frac{d\alpha_n}{dt} \cos(n\theta) + \frac{d\beta_n}{dt} \sin(n\theta) - e \sin \chi \frac{d\chi}{dt} \quad (51)$$

En lo que respecta a los cálculos del campo inducido de la sección anterior, se tiene que la velocidad radial correspondiente a la ecuación (51) puede ser reescrita de la forma

$$\mathfrak{R} = u \cos(m\theta) + v \sin(m\theta)$$

Con

$$u = u_m + u_d \quad ; \quad v = v_m + v_d$$

Dado que la ecuación (51) corresponde a la superficie del vórtice, las componentes  $u$  y  $v$  deben ser evaluadas, también, en la superficie del vórtice. Donde

$$r = r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta) + e \cos \chi$$

$$\xi = \gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta) + e \sin \chi$$

Entonces, la velocidad radial queda expresada como sigue. Donde han sido retenidos, únicamente, los términos a primer orden en los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ .



$$\begin{aligned}
\Re &= \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 \{ \gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta) + e \text{Sin}\chi \} A_1 \\
&+ \frac{\Gamma}{8} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 \gamma_n \{ (n-1)A_{n+1} - (n+1)A_{n-1} \} \text{Cos}(n\theta) \\
&+ \frac{\Gamma}{8} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 \delta_n \{ (n-1)A_{n+1} - (n+1)A_{n-1} \} \text{Sin}(n\theta)
\end{aligned} \tag{52}$$

Por comparación entre las ecuaciones (51) y (52) se tiene que

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 A_1 \tag{53a}$$

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 \gamma_n \left[ A_1 + \frac{1}{2} \{ (n-1)A_{n+1} - (n+1)A_{n-1} \} \right] \tag{53b}$$

$$\frac{d\beta_n}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 \delta_n \left[ A_1 + \frac{1}{2} \{ (n-1)A_{n+1} - (n+1)A_{n-1} \} \right] \tag{53c}$$

Como el análisis realizado es de primer orden en los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$  el coeficiente  $A_n = S_n$  se define, aproximadamente, evaluando la superficie del vórtice como;  $r = r_0 + e \text{Cos}\chi$  y  $\xi = e \text{Sin}\chi$ . Por lo anterior, se obtiene que  $x = \frac{e^2}{2r_0^2}$  (nota: Los coeficientes de Fourier  $(A_n, B_n, C_n)$  son definidos en el apéndice A4). Entonces,  $S_n$  queda expresado como

$$S_n = \frac{1}{2\pi r_0^3} \left[ \frac{4r_0^2}{e^2} - \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4f(n) \right\} - \left( n^2 + \frac{3}{4} \right) \right]$$

A partir de lo cual las ecuaciones (53) quedan expresadas explícitamente de la siguiente manera

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{1}{2\pi r_0^2} \left[ \frac{4r_0^2}{e^2} - \frac{3}{4} \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + \frac{5}{4} \right] \tag{54a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_n}{dt} &= \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{\gamma_n}{2\pi r_0^2} \left[ -n^2 \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + 1 \right\} + 3 + 2 \left( n^2 - \frac{3}{4} \right) (f(n+1) + f(n-1)) \right. \\
&\quad \left. + 2n \left( n^2 - \frac{5}{4} \right) (f(n+1) - f(n-1)) \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d\beta_n}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{\delta_n}{2\pi r_0^2} \left[ -n^2 \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + 1 \right\} + 3 + 2 \left( n^2 - \frac{3}{4} \right) (f(n+1) + f(n-1)) \right. \\ \left. + 2n \left( n^2 - \frac{5}{4} \right) (f(n+1) - f(n-1)) \right]$$

Reteniendo los términos más importantes en las expresiones para  $\frac{d\alpha_n}{dt}$  y  $\frac{d\beta_n}{dt}$ , se encuentra que

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{1}{2\pi r_0^2} \gamma_n \left[ -n^2 \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4f(n) + 1 \right\} \right] \quad (54b)$$

$$\frac{d\beta_n}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{1}{2\pi r_0^2} \delta_n \left[ -n^2 \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4f(n) + 1 \right\} \right] \quad (54c)$$

Las ecuaciones (54b, c) determinan, en términos del parámetro de enredamiento meridional, la evolución temporal de las amplitudes de la perturbación radial que caracterizan la geometría del vórtice tubular. Por otra parte, la ecuación (54a) describe la rotación que tienen los elementos de fluido en el interior de la sección transversal del vórtice.

Procediendo similarmente, para la componente en  $z$ , la condición material queda expresada como

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma_n}{dt} \cos(n\theta) + \frac{d\delta_n}{dt} \sin(n\theta) - n[\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] \frac{d\theta}{dt} + e \cos \chi \frac{d\chi}{dt}$$

Donde  $\frac{Dz}{Dt} = w$  representa la velocidad vertical del vórtice en su superficie. Entonces, la velocidad vertical queda definida como sigue

$$w = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma_n}{dt} \cos(n\theta) + \frac{d\delta_n}{dt} \sin(n\theta) + e \cos \chi \frac{d\chi}{dt} \quad (55)$$

Donde  $\frac{d\beta}{dt}$  representa la velocidad de traslación del vórtice, el cual recuérdese no tiene giro.

En lo que respecta a los cálculos del campo inducido de la sección anterior, se tiene que la velocidad vertical correspondiente a la ecuación (55) puede ser reescrita de la forma

$$w = w_m + w_d$$

De suerte que

$$\begin{aligned}
w &= \frac{\Gamma}{4} (2A_0 r_0^2 - A_1 r_0 r + \frac{3e^2}{8r_0^2} (4A_0 r_0^2 - A_1 r_0 r)) \\
&+ \frac{1}{2} r \left[ \left[ (n-1) + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left\{ \left( \frac{n(n^2+4)}{3} \right) - (2n^2+3) \right\} \right] A_{n-1} \right. \\
&\quad \left. - \left[ (n+1) + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left\{ \left( \frac{n(n^2+4)}{3} \right) + (2n^2+3) \right\} \right] A_{n+1} \right] [\alpha_n \cos(n\varphi) \\
&\quad + \beta_n \sin(n\varphi)] \\
&+ A_n r_0 \left[ 2 + \frac{3e^2}{8r_0^2} (7 + 4n^2) \right] [\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)] \\
&\quad + r_0^2 \left( 1 + \frac{3e^2}{4r_0^2} \right) (B_n \cos(n\varphi) + C_n \sin(n\varphi)) \\
&- \frac{1}{2} r_0 r \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) [(B_{n+1} + B_{n-1}) \cos(n\varphi) + (C_{n+1} + C_{n-1}) \sin(n\varphi)] \tag{56}
\end{aligned}$$

Por comparación de las ecuaciones (56) y (56), una vez esta última es evaluada con  $r$  en la superficie del vórtice, se encuentra para la velocidad de traslación del vórtice que

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 2A_0 r_0^2 - A_1 r_0 r_0 + \frac{3e^2}{8r_0^2} (4A_0 r_0^2 - A_1 r_0^2) \right) \tag{57a}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 A_1 \tag{57b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma_n}{dt} &= \frac{\Gamma}{4} \left( \frac{1}{2} r_0 \alpha_n \left[ \left[ (n-1) + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left\{ \left( \frac{n(n^2+4)}{3} \right) - (2n^2+3) \right\} \right] A_{n-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[ (n+1) + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left\{ \left( \frac{n(n^2+4)}{3} \right) + (2n^2+3) \right\} \right] A_{n+1} \right] - \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) A_1 r_0 \alpha_n \right. \\
&\quad \left. + A_n r_0 \alpha_n \left[ 2 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left( 7 + 4 \frac{n^2}{m^2} \right) \right] - \frac{1}{2} r_0^2 \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) (B_{n+1} + B_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. + r_0^2 \left( 1 + \frac{3e^2}{4r_0^2} \right) B_n \right) \tag{57c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta_n}{dt} = & \frac{\Gamma}{4} \left( \frac{1}{2} r_0 \beta_n \left[ \left[ (n-1) + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left\{ \left( \frac{n(n^2)+4}{3} \right) - (2n^2+3) \right\} \right] A_{n-1} \right. \right. \\
& - \left. \left[ (n+1) + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left\{ \left( \frac{n(n^2)+4}{3} \right) + (2n^2+3) \right\} \right] A_{n+1} \right] - \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) A_1 r_0 \beta_n \\
& + A_n r_0 \beta_n \left[ 2 + \frac{3e^2}{8r_0^2} (7+4n^2) \right] - \frac{1}{2} r_0^2 \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) (C_{n+1} + C_{n-1}) \\
& + r_0^2 \left( 1 + \frac{3e^2}{4r_0^2} \right) C_n \Big) \tag{57d}
\end{aligned}$$

Sustituyendo, explícitamente, los coeficientes de Fourier en las ecuaciones (57). Se encuentra que

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left\{ \left[ \log \left( \frac{8r_0}{e} \right) - \frac{1}{4} + \frac{3e^2}{8r_0^2} \left\{ \frac{5}{8} \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - \frac{11}{8} \right\} \right] \right\} \tag{58a}$$

Donde los coeficientes establecidos en el apéndice A4, permiten encontrar que

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{1}{2\pi r_0^2} \left[ \frac{4r_0^2}{e^2} - \frac{3}{4} \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + \frac{5}{4} \right] \tag{58b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma_n}{dt} = & \frac{\Gamma}{4} r_0 \alpha_n \left( r_0 \frac{d}{dr_0} \left\{ S_n - \frac{1}{2} (S_{n+1} + S_{n-1}) \right\} + \frac{1}{2} \{ (n-m)S_{n-1} - (n+m)S_{n+1} \} - mA_1 + 2A_n \right. \\
& + r_0 \frac{d}{dr} \{ 2S_0 - S_1 \} \\
& + \frac{\Gamma}{4} r_0 \alpha_n \frac{3e^2}{8r_0^2} \left( r_0 \frac{d}{dr_0} \left\{ 2S_n - \frac{1}{2} (S_{n+1} + S_{n-1}) \right\} \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[ \left\{ \left( \frac{n(n^2+4)}{3} \right) - (2n^2+3) \right\} S_{n-1} - \left\{ \left( \frac{n(n^2+4)}{3} \right) + (2n^2+3) \right\} S_{n+1} \right] \\
& \left. - S_1 + 2 \left( \frac{7}{2} + 2n^2 \right) S_n + r_0 \frac{d}{dr} \{ 4S_0 - S_1 \} \right)
\end{aligned}$$

Tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma_n}{dt} = & \frac{\Gamma}{4} \frac{1}{2\pi r_0^2} \alpha_n \left( \left[ (n^2-1) \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + n^2 + \frac{3}{2} + 2 \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) f(n) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) (f(n+1) + f(n-1)) + 2n \left( n^2 - \frac{17}{4} \right) (f(n-1) - f(n+1)) \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{3e^2}{8r_0^2} \left[ \left\{ \frac{11}{8} \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + \frac{17}{8} - 4f(n) + \frac{21}{4} (f(n+1) + f(n-1)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - 2(f(n+1) - f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 3 - 4f(n) + 8(f(n+1) + f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^2 \left\{ 2 \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + \frac{17}{6} + 16f(n) + \frac{56}{3} (f(n+1) + f(n-1)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{19}{6} (f(n+1) - f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^3 \left\{ -4 \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4 + 16f(n) + 8(f(n+1) - f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^4 \left\{ \frac{8}{3} \left( \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + 1 \right) - \frac{16}{3} (f(n+1) + f(n-1)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{2}{3} (f(n+1) + f(n-1)) \right\} \right] \right)
\end{aligned}$$

(58c)

Similarmente para  $\frac{d\delta_n}{dt}$ , se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta_n}{dt} &= \frac{\Gamma}{4} \frac{1}{2\pi r_0^2} \beta_n \left( (n^2 - 1) \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + n^2 + \frac{3}{2} + 2 \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) f(n) \right. \\
& \quad \left. - 3 \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) (f(n+1) + f(n-1)) + 2n \left( n^2 - \frac{17}{4} \right) (f(n-1) - f(n+1)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{2} + 6n - 3n^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{3e^2}{8r_0^2} \left[ \left\{ \frac{11}{8} \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + \frac{17}{8} - 4f(n) + \frac{21}{4} (f(n+1) + f(n-1)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - 2(f(n+1) - f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 3 - 4f(n) + 8(f(n+1) + f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^2 \left\{ 2 \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + \frac{17}{6} + 16f(n) + \frac{56}{3} (f(n+1) + f(n-1)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{19}{6} (f(n+1) - f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^3 \left\{ -4 \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4 + 16f(n) + 8(f(n+1) - f(n-1)) \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n^4 \left\{ \frac{8}{3} \left( \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) + 1 \right) - \frac{16}{3} (f(n+1) + f(n-1)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{2}{3} (f(n+1) + f(n-1)) \right\} \right] \right)
\end{aligned}$$

(58d)

Las ecuaciones (58c, d), determinan la evolución de las amplitudes de la perturbación vertical que caracterizan la geometría del vórtice tubular en término del parámetro de enredamiento meridional. Por otra parte, la ecuación (58a) establece la velocidad de traslación del vórtice en términos de sus parámetros físicos y geométricos. Las ecuaciones (54b, c) y (58c, d) evidencian una relación proporcional entre la razón de cambio de las amplitudes verticales con el valor en cada instante de sus amplitudes radiales y viceversa. Donde en cada caso es dada de manera diferente y determinada exclusivamente por el parámetro de enredamiento meridional  $n$ .

Los resultados obtenidos en esta sección, son a primer orden en los parámetros que determinan la geometría del vórtice filiforme y a primer orden en el parámetro de razón de aspecto del método de expansión multipolar.

### 3.5 Velocidad de traslación de vórtices eslabonados.

El cálculo de la velocidad de traslación de vórtices eslabonados, como se ha mencionado con anterioridad, requiere del conocimiento del campo inducido asociado. La consideración que los vórtices involucrados en el eslabonamiento tengan una sección transversal circular, indeformable. Es una aproximación adecuada (Thomson, 1883) para el caso en que la distancia de separación entre ambos vórtices resulta mucho mayor comparado con el tamaño del diámetro de la sección transversal de cada vórtice. Para el caso en que se da el eslabonamiento de vórtices, el requerimiento de Thomson, se presenta como un argumento teórico para organizar los vórtices involucrados en el eslabonamiento mediante polígonos regulares inscritos en la superficie transversal del toro. No obstante, esta organización es establecida principalmente por el carácter estacionario que le brinda a la evolución de la configuración. En el caso de dos vórtices eslabonados el arreglo es tal, que las posiciones de los vórtices se encuentran diametralmente opuestas para cada plano transversal del toro.

En el caso de eslabonamiento, la geometría de los vórtices sigue la geometría especificada por el apéndice A1, de manera que al establecer el eslabonamiento de dos vórtices, se tiene para el vórtice (*I*) la siguiente geometría

$$\rho = r_0 + \alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta) \quad (59a)$$

$$z = \mathfrak{z} + \gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta) \quad (59b)$$

E idénticamente para el vórtice (*II*), se tiene que

$$\rho = r_0' + \alpha_n' \text{Cos}(n\theta) + \beta_n' \text{Sin}(n\theta) \quad (60a)$$

$$z = \mathfrak{z} + \gamma_n' \text{Cos}(n\theta) + \delta_n' \text{Sin}(n\theta) \quad (60b)$$

Para comenzar, ambos vórtices serán diferenciados por la magnitud de sus intensidades y el tamaño de sus secciones transversales. Tal que para el vórtice (*I*) se tiene una intensidad (circulación)  $\Gamma$  y un radio de sección  $e$ , mientras que para el vórtice (*II*) se tiene una intensidad (circulación)  $\Gamma'$  y un radio de sección  $e'$ .

Permítase,  $A_n^{11}$  representar el valor del coeficiente  $A_n$  (ver apéndice A4) debido al vórtice (*I*) en un punto sobre su propia superficie. Igualmente,  $A_n^{12}$  representa el valor del coeficiente  $A_n$  debido al vórtice (*I*) en un punto sobre la superficie del vórtice (*II*).  $A_n^{21}$  representa el valor del

coeficiente  $A_n$  debido al vórtice (II) en un punto sobre la superficie del vórtice (I) y  $A_n^{22}$  representa el valor del coeficiente  $A_n$  debido al vórtice (II) en un punto sobre su propia superficie.

El uso de la ecuación (52) expresada a primer orden en los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ , permite establecer la velocidad radial inducida por el vórtice (I) sobre el vórtice (II), tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{I \rightarrow II} = & \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) r_0 \{ \gamma_n' \cos(n\varphi) + \delta_n' \sin(n\varphi) \} A_1^{12} \\ & + \frac{1}{2} \{ (n-1)A_{n+1}^{12} - (n+1)A_{n-1}^{12} \} (\gamma_n \cos(n\varphi) + \delta_n \sin(n\varphi)) \end{aligned} \quad (61a)$$

De la definición de los coeficientes  $A_n$ , se evidencia la dependencia con la variable  $x$ . La cual para el arreglo mencionado en los vórtices eslabonados se encuentra satisface la siguiente expresión  $x = \frac{(d)^2}{2r_0^2}$ . Donde  $d = 2r_1$  es el diámetro del toro inmaterial. Entonces, a partir de estas definiciones (3.55a) queda explícitamente expresada como

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{I \rightarrow II} = & \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{1}{2\pi r_0^2} \left\{ (\gamma_n' \cos(n\varphi) + \delta_n' \sin(n\varphi)) \left( \frac{4r_0^2}{d^2} - \frac{3}{4} \log \frac{64r_0^2}{d^2} + \frac{5}{4} \right) \right. \\ & + \left\{ -\frac{4r_0^2}{d^2} - \left( n^2 - \frac{3}{4} \right) \log \frac{64r_0^2}{d^2} \right. \\ & + n \left[ 4 \left( (n+1)^2 - \frac{1}{4} \right) f(n+1) - 4 \left( (n-1)^2 - \frac{1}{4} \right) f(n-1) - 4n \right] \\ & - \left[ 4 \left( (n+1)^2 - \frac{1}{4} \right) f(n+1) + 4 \left( (n-1)^2 - \frac{1}{4} \right) f(n-1) \right. \\ & \left. \left. \left. - 2 \left( n^2 + \frac{1}{4} \right) \right] \right\} (\gamma_n \cos(n\varphi) + \delta_n \sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

Que al retener los términos más importantes en la expresión, la simplificación queda escrita como

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{I \rightarrow II} = & \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{1}{2\pi r_0^2} \left\{ (\gamma_n' \cos(n\varphi) + \delta_n' \sin(n\varphi)) \left( \frac{4r_0^2}{d^2} - \frac{3}{4} \log \frac{64r_0^2}{d^2} \right) \right. \\ & \left. + \left\{ -\frac{4r_0^2}{d^2} - \left( n^2 - \frac{3}{4} \right) \log \frac{64r_0^2}{d^2} \right\} (\gamma_n \cos(n\varphi) + \delta_n \sin(n\varphi)) \right\} \end{aligned} \quad (61b)$$



Por otra parte, la velocidad radial debida al vórtice (*II*) en la superficie del mismo, viene expresada por el resultado de las ecuaciones (3.47*b*) y (3.47*c*) como sigue,

$$\mathfrak{R}_{II \rightarrow II} = \frac{\Gamma'}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{-n^2}{2\pi r_0^2} \{ \gamma_n' \text{Cos}(n\varphi) + \delta_n' \text{Sin}(n\varphi) \} \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4f(n) + 1 \right\}$$

Que al retener los términos más importantes en la expresión, la simplificación queda escrita como

$$\mathfrak{R}_{II \rightarrow II} = \frac{\Gamma'}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{-n^2}{2\pi r_0^2} \{ \gamma_n' \text{Cos}(n\varphi) + \delta_n' \text{Sin}(n\varphi) \} \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) \quad (61c)$$

Donde las ecuaciones (54*b*) y (54*c*), utilizadas, resultan de los términos más significativos, tal que

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{\gamma_n}{2\pi r_0^2} \left[ -n^2 \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4f(n) + 1 \right\} \right]$$

$$\frac{d\beta_n}{dt} = \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{\delta_n}{2\pi r_0^2} \left[ -n^2 \left\{ \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) - 4f(n) + 1 \right\} \right]$$

A partir de la componente radial de la condición material obtenida a partir de (60*a*), se encuentra que la velocidad radial neta del vórtice (*II*) queda definida, alternativamente, como

$$\mathfrak{R} = \frac{d\alpha_n'}{dt} \text{Cos}(n\varphi) + \frac{d\beta_n'}{dt} \text{Sin}(n\varphi) \quad (62a)$$

Donde los coeficientes  $\left( \frac{d\alpha_n'}{dt}, \frac{d\beta_n'}{dt} \right)$  son definidos, por comparación, a partir de las velocidades radiales obtenidas por las ecuaciones (61*b*) y (61*c*), donde se define que

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{I \rightarrow II} + \mathfrak{R}_{II \rightarrow II} \quad (62b)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_n'}{dt} &= \frac{\Gamma'}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{-n^2}{2\pi r_0^2} \gamma_n' \log \left( \frac{64r_0^2}{e^2} \right) \\ &+ \frac{\Gamma}{4} \left( 1 + \frac{3e^2}{8r_0^2} \right) \frac{1}{2\pi r_0^2} \left\{ \gamma_n' \left( \frac{4r_0^2}{d^2} - \left( \frac{3}{4} \right) \log \frac{64r_0^2}{d^2} + \frac{5}{4} \right) + \gamma_n \left( -\frac{4r_0^2}{d^2} - \left( n^2 - \frac{3}{4} \right) \log \frac{64r_0^2}{d^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

(63a)

Donde se han supuesto dominantes los términos dependientes de  $d$ .

Por otra parte, de manera similar se obtiene para  $\beta_n'$  la siguiente relación

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_n'}{dt} = & \left(1 + \frac{3e^2}{8r_0^2}\right) \frac{1}{8\pi r_0^2} \left\{ -n^2 \Gamma' \delta_n' \log\left(\frac{64r_0^2}{e^2}\right) + \Gamma \delta_n' \left(\frac{4r_0^2}{d^2} - \frac{3}{4} \log\frac{64r_0^2}{d^2}\right) \right. \\ & \left. + \Gamma \delta_n \left(-\frac{4r_0^2}{d^2} - \left(n^2 - \frac{3}{4}\right) \log\frac{64r_0^2}{d^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (63b)$$

Definidas las ecuaciones (63a,b), resulta establecida la expresión correspondiente al movimiento radial de un par de vórtices tubulares que se encuentran eslabonados entre sí, y en donde han sido retenido los efectos monopulares y dipolares.

A continuación, se analizará el comportamiento correspondiente a la evolución de vórtices eslabonados en la dirección vertical al plano del toro. Para comenzar, se requiere definir el efecto vertical que tiene el vórtice (I) sobre la superficie su propia superficie, y el efecto vertical que el campo inducido por el vórtice (I) tiene sobre la línea central del vórtice (II).

El uso de la ecuación (56) expresada a primer orden en los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ , permite establecer la velocidad vertical inducida por el vórtice (I) sobre el vórtice (II). Donde la contribución monopolar de esta componente de velocidad es establecida como

$$\begin{aligned} w_m = & \frac{\Gamma}{4} (2A_0 r_0^2 - A_1 r r_0 \\ & + r_0^2 (B_n \cos(n\varphi) + C_n \sin(n\varphi)) + 2r_0 [\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)] A_n \\ & + \frac{1}{2} r [(n-1)A_{n-1} - (n+1)A_{n+1}] (\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)) \\ & - \frac{1}{2} r_0 r [(B_{n+1} + B_{n-1}) \cos(n\varphi) + (C_{n+1} + C_{n-1}) \sin(n\varphi)] \end{aligned}$$

La cual debe ser evaluada sobre la superficie del vórtice. De suerte que para esta contribución, el efecto inducido en el vórtice (II) por el vórtice (I) resulta expresado como sigue

$$\begin{aligned}
w_{m(I \rightarrow II)} &= \frac{\Gamma}{4} r_0 (2A^{12}_0 r_0 - A^{12}_1 r'_0) - \frac{\Gamma}{4} r_0 [\alpha_n' \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n' \text{Sin}(n\varphi)] A^{12}_1 \\
&+ \frac{\Gamma}{4} r_0^2 [\alpha_n' \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n' \text{Sin}(n\varphi)] \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dr'} + \frac{d}{dr} \right) \left\{ 2A^{12}_0 - \frac{r'_0}{r_0} A^{12}_1 \right\} \\
&+ \frac{\Gamma}{4} \left\{ \frac{1}{2} r_0^2 \left( \frac{d}{dr'} + \frac{d}{dr} \right) \left\{ A^{12}_n - \frac{r'_0}{2r_0} (A^{12}_{n+1} + A^{12}_{n-1}) \right\} + 2r_0 A^{12}_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} r_0' [(n-1)A^{12}_{n-1} - (n+1)A^{12}_{n+1}] \right\} [\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)]
\end{aligned} \tag{63a}$$

Similarmente, para la contribución dipolar se encuentra que

$$\begin{aligned}
w_{d(I \rightarrow II)} &= \frac{3\Gamma e^2}{32r_0^2} (4r_0^2 A^{12}_0 - r r_0 A^{12}_1 \\
&+ 2r_0^2 \{B_n \text{Cos}(n\varphi) + C_n \text{Sin}(n\varphi)\} + r_0 \{3 + 4(n^2 + 1)\} A^{12}_n [\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)] \\
&\quad - \frac{1}{2} r r_0 (B^{12}_{n+1} + B^{12}_{n-1}) \text{Cos}(n\varphi) - \frac{1}{2} r r_0 (C^{12}_{n+1} + C^{12}_{n-1}) \text{Sin}(n\varphi) \\
&\quad + \frac{1}{2} r \left\{ \left[ \left( \frac{n}{3} (n^2 + 4) \right) - (2n^2 + 3) \right] A^{12}_{n-1} \right. \\
&\quad \quad \left. - \left[ \left( \frac{n}{3} (n^2 + 4) \right) + (2n^2 + 3) \right] A^{12}_{n+1} \right\} (\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi))
\end{aligned}$$

La cual debe ser evaluada sobre la superficie del vórtice. De suerte que para esta contribución, el efecto inducido en el vórtice (II) por el vórtice (I) resulta expresado como sigue

$$\begin{aligned}
w_{d(I \rightarrow II)} &= \frac{3\Gamma e^2}{32r_0^2} r_0 (4A^{12}_0 r_0 - A^{12}_1 r'_0) - \frac{3\Gamma e^2}{32r_0^2} r_0 [\alpha_n' \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n' \text{Sin}(n\varphi)] A^{12}_1 \\
&+ \frac{3\Gamma e^2}{32r_0^2} r_0^2 [\alpha_n' \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n' \text{Sin}(n\varphi)] \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dr'} + \frac{d}{dr} \right) \left\{ 4A^{12}_0 - \frac{r'_0}{r_0} A^{12}_1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\Gamma e^2}{32r_0^2} \left\{ \frac{1}{2} r_0^2 \left( \frac{d}{dr'} + \frac{d}{dr} \right) \left\{ 2A^{12}_n - \frac{r_0'}{2r_0} (A^{12}_{n+1} + A^{12}_{n-1}) \right\} + r_0 4 \left( n^2 + \frac{7}{4} \right) A^{12}_n \right. \\
& + \frac{1}{2} r_0' \left[ \left[ \left( \frac{n}{3} (n^2 + 4) \right) - (2n^2 + 3) \right] A^{12}_{n-1} \right. \\
& \left. \left. - \left[ \left( \frac{n}{3} (n^2 + 4) \right) + (2n^2 + 3) \right] A^{12}_{n+1} \right] \right\} [\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)]
\end{aligned}$$

A continuación, se evalúan los coeficientes  $A_0$  y se define la igualdad  $r'_0 = r_0$ . Con lo cual se determina  $w_{I \rightarrow II}$ , que resulta ser la superposición de las contribuciones independientes  $w_{m(I \rightarrow II)}$  y  $w_{d(I \rightarrow II)}$ . Tal que

$$\begin{aligned}
w_{m(I \rightarrow II)} &= \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - 1 \right] - \frac{\Gamma}{4\pi r_0^2} (\alpha_n' \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n' \text{Sin}(n\varphi)) \left[ \frac{4r_0^2}{d^2} + \frac{3}{2} \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) \right] \\
& + \frac{\Gamma}{4\pi r_0^2} (\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)) \left[ \frac{4r_0^2}{d^2} + \left( n^2 + \frac{1}{4} \right) \log \left( \frac{64r_0^2}{d^2} \right) \right] \\
w_{d(I \rightarrow II)} &= \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left( \frac{3e^2}{4d^2} + \frac{15e^2}{32r_0^2} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - \frac{11}{10} \right] \right) \\
& - \frac{\Gamma}{4\pi r_0^2} \frac{3e^2}{16r_0^2} (\alpha_n' \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n' \text{Sin}(n\varphi)) \left[ \frac{6r_0^2}{d^2} - \frac{9}{4} \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) \right] \\
& + \frac{\Gamma}{4\pi r_0^2} \frac{3e^2}{16r_0^2} (\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)) \left[ \frac{2r_0^2}{d^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{127}{3} n^2 + \frac{79}{4} \right) \log \left( \frac{64r_0^2}{d^2} \right) + \frac{4}{3} n^4 \log \left( \frac{64r_0^2}{d^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

La expresión para  $w_{I \rightarrow II} = w_{m(I \rightarrow II)} + w_{d(I \rightarrow II)}$ , queda establecida como

$$\begin{aligned}
w_{I \rightarrow II} &= \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - 1 + \frac{3e^2}{4d^2} + \frac{15e^2}{32r_0^2} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - \frac{11}{10} \right] \right] \\
& - \frac{\Gamma}{4\pi r_0^2} (\alpha_n' \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n' \text{Sin}(n\varphi)) \left[ \frac{4r_0^2}{d^2} + \frac{9e^2}{8d^2} + \frac{3}{2} \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - \frac{3e^2}{16r_0^2} \left\{ \frac{9}{4} \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Gamma}{4\pi r_0^2} (\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)) \left[ \frac{4r_0^2}{d^2} + \frac{3e^2}{8d^2} + \left( n^2 + \frac{1}{4} \right) \log \left( \frac{64r_0^2}{d^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3e^2}{16r_0^2} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{127}{3} n^2 + \frac{79}{4} \right) \log \left( \frac{64r_0^2}{d^2} \right) + \frac{4}{3} n^4 \log \left( \frac{64r_0^2}{d^2} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Por otra parte, la determinación de la velocidad de traslación de dos vórtices eslabonados, requiere determinar el efecto vertical, autoinducido, correspondiente al vórtice (II). A partir de las ecuaciones (3.48) y (3.51a, c y d) se encuentra que

$$w_{(II \rightarrow II)} = \frac{\Gamma'}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{e} \right) - \frac{1}{4} \right] + \frac{\Gamma'}{4\pi r_0^2} (\alpha_n' \cos(n\varphi) + \beta_n' \sin(n\varphi)) \left[ 2(n^2 - 1) \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) \right]$$

En lo que sigue, se encuentra la componente vertical de la condición material aplicada a (60b). tal que

$$w = \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\gamma_n'}{dt} \cos(n\theta) + \frac{d\delta_n'}{dt} \sin(n\theta) \quad (64)$$

La comparación de (64) con la velocidad vertical, neta, obtenida por el cálculo de inducción y determinada como la superposición de  $w_{(I \rightarrow II)}$  y  $w_{(II \rightarrow II)}$ , permite encontrar la velocidad con la que se traslada el plano en el que vive la estructura vortical eslabonada. Donde se encuentra que

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\Gamma'}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{e} \right) - \frac{1}{4} \right] + \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - 1 + \frac{3e^2}{4d^2} + \frac{15e^2}{32r_0^2} \left\{ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - \frac{11}{10} \right\} \right] \quad (65)$$

Expresión que representa la velocidad de traslación de el vórtice II en una configuración de vórtices eslabonados con circulaciones  $\Gamma'$  y  $\Gamma$ , sobre un toro, especificado, por su radio de línea central  $r_0$  y diametral transversal  $d$ . Los vórtices involucrados en el eslabonamiento tienen secciones transversales con radio  $e$ . Sin embargo, para que la traslación de la configuración sea uniforme y su movimiento en general sea estacionario se debe satisfacer que  $\Gamma' = \Gamma$ . Con ésto, la ecuación 65) toma la siguiente forma

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{64r_0^2}{de} \right) - \frac{5}{4} + \frac{3e^2}{4d^2} + \frac{15e^2}{32r_0^2} \left\{ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - \frac{11}{10} \right\} \right] \quad (65a)$$

El resultado de la ecuación (65a) ha sido establecido mediante un análisis a primer orden en los parámetros de la configuración eslabonada, a saber  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n, d)$ . Entonces, en los cálculos del campo de velocidad presentados en esta sección fueron omitidos los términos no

lineales y mixtos asociados a estos parámetros. Sin embargo, la contribución de estos efectos fue establecida por Thomson (1883), para el caso monopolar, por un valor de  $\frac{\Gamma}{4\pi r_0} \frac{1}{4}$  (Thomson 1883 p.90). La contribución no lineal, establecida por Thomson, resulta suficiente para reescribir (65a) y establecer la siguiente expresión para la traslación de vórtices eslabonados.

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{64r_0^2}{de} \right) - 1 + \frac{3e^2}{4d^2} + \frac{15e^2}{32r_0^2} \left\{ \log \left( \frac{8r_0}{d} \right) - \frac{11}{10} \right\} \right] \quad (66)$$

### 3.5.1 Caso general: n vórtices eslabonados

El caso general, corresponde a una configuración de vórtices eslabonados en los que se involucran  $n$  vórtices. Para este caso, la velocidad de traslación de la configuración requiere calcular y evaluar la influencia sobre el vórtice  $n$  debido a la inducción de los otros  $n - 1$  vórtices y el efecto autoinducido del vórtice mismo. De la ecuación (61) el efecto inducido por los  $n - 1$  vórtices depende exclusivamente de su distancia al  $n$ -ésimo vórtice a lo largo del plano transversal del toro sobre el cual se encuentran los vórtices. La distancia entre vórtices se encuentra estipulada por el arreglo de los mismos sobre la superficie del toro en que se encuentran. La cual por condiciones de estacionaridad se supone determinada por el polígono de  $n$  vértices inscrito en la superficie transversal del toro, para cualquier plano meridional. Por lo anterior, se tiene para la traslación de  $n$  vórtices eslabonados la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{z}}{dt_n} = & \frac{\Gamma_n}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{e} \right) \right. \\ & + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_i}{4\pi r_0} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{\sqrt{2}r_1 * \sqrt{1 - \cos \left( i \frac{2\pi}{n} \right)}} \right) - 1 + \frac{3}{4} \frac{e^2}{2r_1^2 * \left[ 1 - \cos \left( i \frac{2\pi}{n} \right) \right]} \right. \\ & \left. \left. + \frac{15e^2}{32r_0^2} \left[ \log \left( \frac{8r_0}{\sqrt{2}r_1 * \sqrt{1 - \cos \left( i \frac{2\pi}{n} \right)}} \right) - \frac{11}{10} \right] \right] \right] \end{aligned} \quad (67)$$

Tenga en cuenta que la condición que

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt_I} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt_{II}} = \dots = \frac{d\mathfrak{z}}{dt_{\#}}$$

Se satisface en el caso particular que  $\Gamma_I = \Gamma_{II} = \dots = \Gamma_{\#}$ , la cual es una restricción en los vórtices para garantizar la estacionaridad del movimiento de toda la configuración. *Recuerde:* que el resultado obtenido por la ecuación (67) corresponde al caso de  $n$  vórtices eslabonados con sección transversal  $e$ . Los cuales se encuentran sobre un toro inmaterial y están organizados por medio de un polígono regular de  $n$  vértices. La circulación  $\Gamma$  de los vórtices se considera idéntica para todos. El toro posee un radio de la línea central de  $r_0$  y un diámetro  $d$  de la sección transversal.

### 3.5.2 Discusión

La velocidad de traslación (66), es el resultado de los efectos de inducción y autoinducción entre los vórtices de la configuración eslabonada. El efecto dipolar en la traslación del vórtice, relativo a la autoinducción, se manifiesta como una cantidad constante que hace más rápida la traslación del vórtice. Tal efecto depende del inverso del radio de la línea central del toro sobre el cual se encuentran los vórtices. Por otra parte, relativo a la inducción, se tiene que el efecto dipolar, igualmente, hace más rápida la traslación del vórtice. Sin embargo en este caso, esta contribución no solo depende del inverso del radio de la línea central del toro sino también del cuadrado de la razón de aspecto entre las distancias transversales involucradas.

La validación del resultado obtenido en esta sección es llevada a cabo mediante la comparación con los resultados arrojados por el modelo numérico de Velasco Fuentes & Romero Arteaga (2011). A partir del cual se calcula el movimiento de vórtices eslabonados, basados en la aproximación de Rosenhead-Moore para la ley de Biot-Savart. Esta aproximación soluciona el problema de convergencia de esta ley mediante la adición de una constante arbitraria referida a los efectos de la estructura interna del vórtice que deseen ser retenidos.

Los resultados de esta comparación son visualizados por la figura 12 para el caso de vórtices con radio de sección transversal,  $e = 0.05$ , de intensidad  $\Gamma = 1$  y sobre un toro inmaterial de radio de sección transversal  $r_1 = 0.1$  y radio de la línea central,  $r_0 = 1$

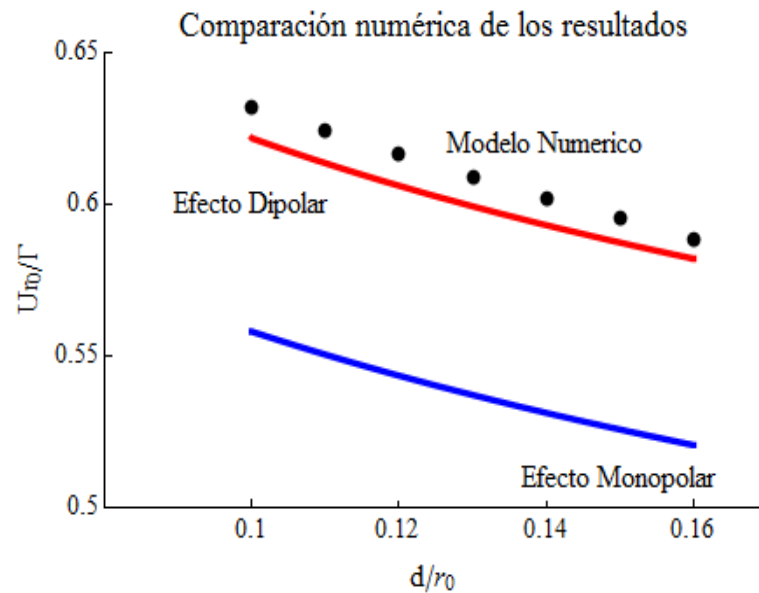
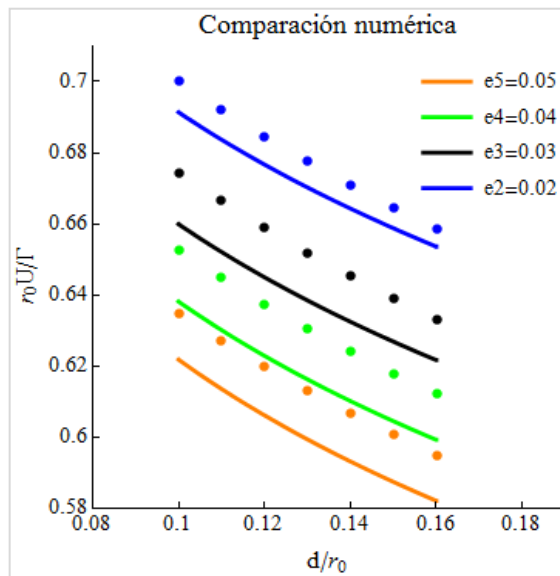


Figura 12. Velocidad de traslación numérica (círculos negros) para la configuración de dos vórtices eslabonados, velocidad de traslación monopolar (línea azul) encontrada teóricamente por Thomson (1883) y velocidad de traslación dipolar (línea roja), encontrada teóricamente en esta investigación, la cual retiene efectos dipolares producidos por la distribución de vorticidad en la sección transversal de los vórtices eslabonados.

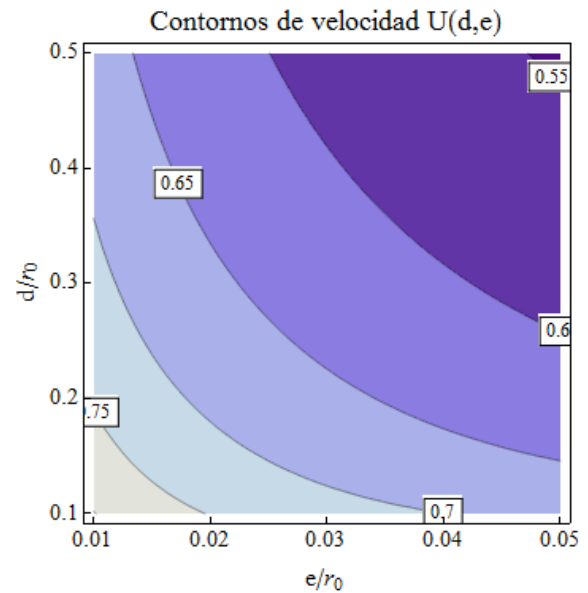
El resultado (3.60) establece que la velocidad de traslación de los vórtices eslabonados aumenta considerablemente, respecto al modelo monopolar, en la medida que los efectos dipolares son tenidos en cuenta. La velocidad (66) corrige en un 86% el error de los resultados monopulares, que tienen un error del orden de  $\sim 14\%$  respecto a los resultados numéricos. Con ésto, el error de la ecuación (66), resultado principal de esta tesis, es tan solo del 2% respecto a los resultados numéricos (figura 12).

Con el propósito de conocer más detalladamente cómo es el comportamiento de la solución obtenida, ecuación (66), se analiza el error asociado en términos del espacio de parámetros que caracterizan la configuración eslabonada. En la figura 13a se presenta una comparación entre los resultados teóricos y numéricos para diferentes consideraciones del grosor del vórtice. En la figura 13b se ilustran los contornos de velocidad para diferentes valores del diámetro transversal del toro inmaterial y de la sección transversal de los vórtices. En las figuras 13c-d se presentan los aspectos característicos del término dipolar en la velocidad de traslación de la configuración.

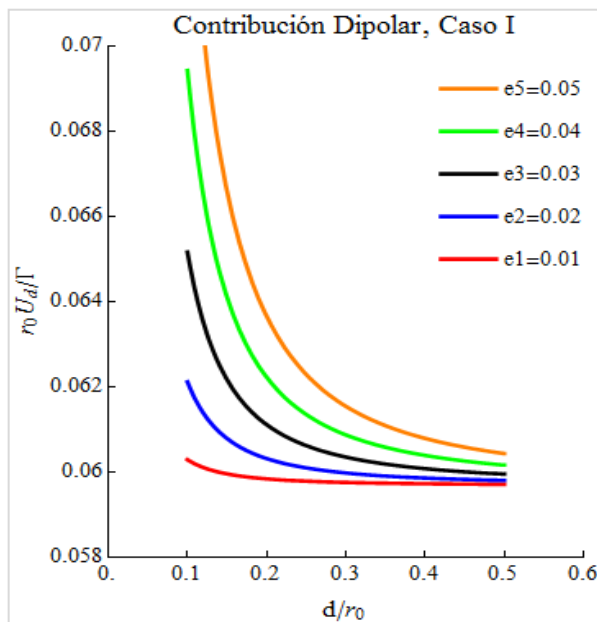




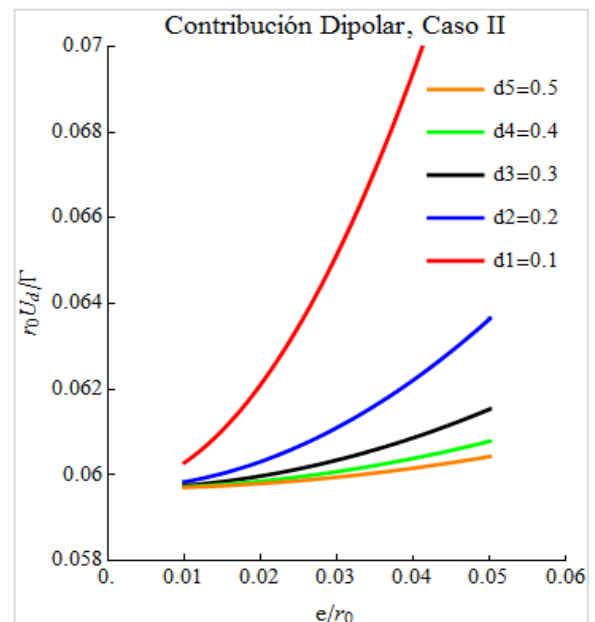
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 13 a) Comparación entre la velocidad numérica (círculos negros) y la velocidad teórica (línea) para diferentes valores del radio transversal del vórtice conforme cambia la separación entre vórtices involucrados en el eslabonamiento, b) Contornos de la velocidad para valores diferentes del diámetro transversal del toro inmaterial (eje-y) y de la sección transversal de los vórtices (eje-x), c) y d) representan el efecto que la contribución dipolar tiene sobre la velocidad de traslación de la configuración eslabonada según cambie la separación entre vórtices o el grosor del vórtice, respectivamente.

La figura muestra cómo a medida que el vórtice es más delgado el resultado dado por la ecuación (66) se hace más exacto, no obstante a medida que el vórtice crece el error asociado no

crece proporcionalmente tal como puede verse en la tabla 1. Por otra parte, los contornos de velocidad evidencian el hecho que la velocidad de traslación decrece a medida que incrementa el grosor del vórtice o la separación entre los vórtices involucrados en el eslabonamiento. La figura 13 *c-d* evidencia el hecho que la contribución dipolar disminuye hiperbólicamente con el incremento de la distancia de separación entre los vórtices, donde la razón de cambio de tal decremento disminuye en la medida que el grosor del vórtice sea menor. En contraste, la contribución dipolar incrementa parabólicamente según como el grosor del vórtice aumenta, donde la razón de cambio de tal incremento disminuye a medida que la separación entre vórtices es más grande.

Tabla1. Los errores relativos al modelo numérico correspondientes a los resultados para la velocidad de traslación, encontrada tanto por el modelo teórico aquí desarrollado, el cual retiene los efectos dipolares de los vórtices involucrados en el eslabonamiento, como para el modelo clásico de Thomson, el cual retiene solo efectos monopolares, (el signo menos indica que los valores numéricos están por debajo de los valores teóricos).

Dos vórtices eslabonados					
Radio transversal del vórtice	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
Modelo monopolar + dipolar	-3.18%	1.06%	2.08%	2.27%	2.33%
Modelo monopolar	5.60%	11.0%	12.73%	13.56%	14.06%

Por otra parte, la sección 3.5.1 establece el caso general del resultado establecido por la ecuación (66), para el caso en que más de dos vórtices son eslabonados. A continuación, se presentan los errores relativos al modelo numérico asociados al modelo teórico (67) y al modelo monopolar, para 3 y 4 vórtices anulares en una configuración eslabonada. Similarmente al caso de dos vórtices eslabonados, en la figura 14 se presentan los resultados teóricos comparados con los resultados correspondientes al modelo numérico para diferentes grosores del vórtice, donde dicha comparación es numéricamente determinada por la tabla 2.

Cuantitativamente los errores asociados a ambos modelos (monopolar y dipolar) son comparados por la siguiente tabla

Tabla2. Los errores relativos al modelo numérico correspondientes a los resultados para la velocidad de traslación encontrada, tanto por el modelo teórico aquí desarrollado, el cual retiene los efectos dipolares de los vórtices involucrados en el eslabonamiento, como por el modelo clásico de Thomson, el cual retiene solo efectos monopulares. Nótese que los errores encontrados son dados para 3 y 4 vórtices involucrados en la configuración de eslabonamiento, (el signo menos indica que los valores numéricos están por debajo de los valores teóricos).

Tres vórtices eslabonados						
Radio transversal del vórtice	0.005	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
Modelo monopolar + dipolar	-2.93%	1.94%	5.32%	6.10%	6.17%	6.23%
Modelo monopolar	3.38%	8.87%	13.05%	14.39%	14.97%	15.31%
Cuatro vórtices eslabonados						
Radio transversal del vórtice	0.005	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
Modelo monopolar + dipolar	1.02%	5.02%	7.78%	8.33%	8.22%	7.83%
Modelo monopolar	23.83%	30.16%	35.37%	37.42%	38.54%	39.29%

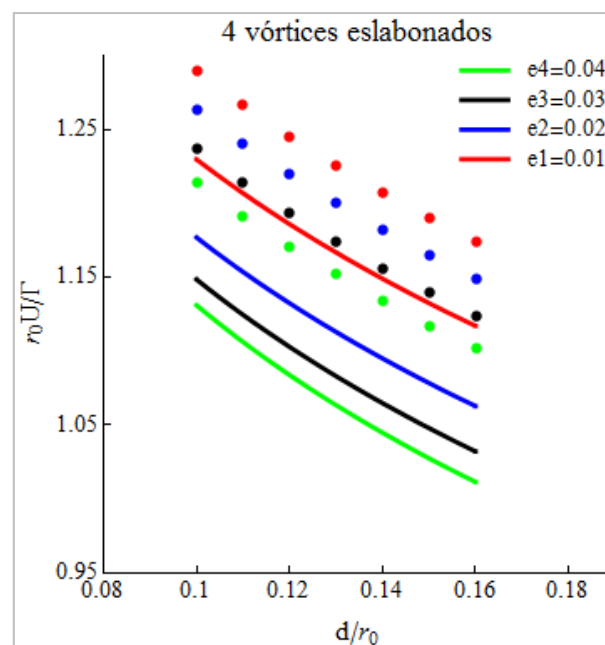
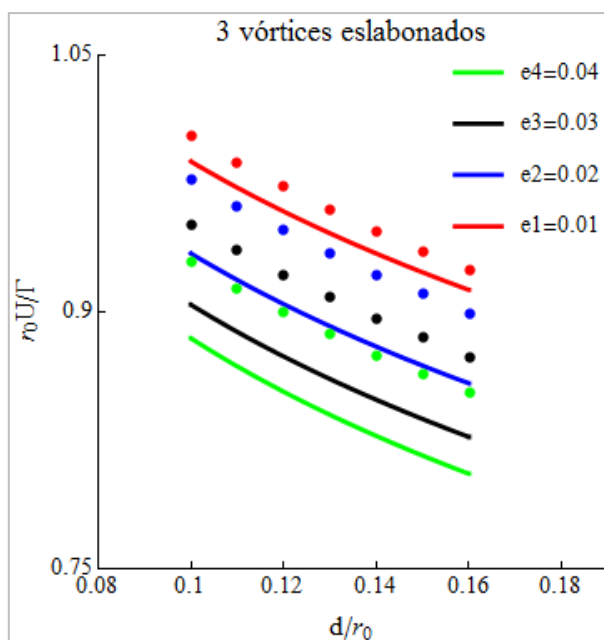


Figura 14 Comparación de los resultados, para la velocidad de traslación, entre el modelo numérico y el teórico aquí desarrollado, para configuraciones eslabonadas involucrando 3(izquierda) y 4 (derecha) vórtices.

### **Conclusiones**

El trabajo descrito en esta tesis respondió a la necesidad de conocer los efectos del grosor de un vórtice, relativos a la autoinducción e inducción, asociados a una estructura de vórtices eslabonados que se encuentran sobre la superficie de un toro. La importancia de estos efectos en la traslación de la configuración es fundamental y fue establecida aquí de manera analítica.

Los campos de velocidad asociados a los vórtices fueron encontrados siguiendo el método de expansión multipolar para la ley de Biot-Savart y evaluados para efectos de traslación siguiendo el método de Thomson. Las soluciones encontradas correspondientes al caso de vórtices eslabonados (figura 2) suponen un arreglo en el cual los vórtices se encuentran sobre la superficie de un toro inmaterial, tienen la misma intensidad (dado el carácter estacionario de dicha arreglo) y se encuentran enrollados alrededor del toro un número  $n$  de veces (figura 12). Entonces, dada la geometría de los vórtices involucrados en el eslabonamiento, el método de expansión multipolar resulta ser muy útil para establecer los campos inducidos de esta configuración.

Se encontró para una aproximación de primer orden en la expansión multipolar de la ley de Biot-Savart que el campo inducido asociado a los vórtices de interés se encuentra influenciado principalmente por dos aspectos: El primero, referido a la geometría del vórtice, y el segundo, propio del efecto de la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice correspondiente a la curvatura del mismo. Lo cual permite aclarar el dilema al que frecuentemente se llega cuando se debe determinar la distribución de vorticidad en la sección transversal de los vórtices. Donde se encuentra que tanto la distribución uniforme como la lineal resultan ser distribuciones independientes correspondientes a efectos dominantes de ordenes diferentes, cuya superposición resulta ser solo una aproximación al perfil real de la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice.

Así, la distribución de vorticidad en la sección transversal de un vórtice no es impuesta arbitrariamente según la complejidad que quiera considerarse. Esta consideración corresponde directamente con el número de efectos que quieran considerarse, en la evolución del vórtice, debidos esencialmente a la geometría (forma) del mismo.

Por otra parte, se encontró que el término dipolar hace más veloces a los vórtices. En la autoinducción este término es constante y dependiente únicamente del radio de la línea central del toro. En la inducción, correspondiente a la interacción mutua entre vórtices, el término dipolar depende de la razón de aspecto al cuadrado de las distancias transversales asociadas, correspondiente a la mínima separación entre vórtices y al radio de la sección transversal del vórtice.

De suerte que una aproximación de primer orden en los efectos de la distribución de vorticidad en la sección transversal del vórtice, introducen en la traslación de una par de vórtices eslabonados una velocidad adicional a la configuración. La cual se encuentra caracterizada por los siguientes dos aspectos geométricos I) el inverso del radio de la línea central del toro y II) el cuadrado de la razón entre el radio de la sección transversal de los vórtices y su distancia de separación.

En general se ha encontrado que la velocidad de traslación de los vórtices eslabonados disminuye a medida que aumenta el grosor del vórtice o la separación entre los vórtices involucrados. Sin embargo, aumenta con el número de vórtices involucrados en el eslabonamiento.

La formula encontrada en esta tesis para la velocidad de traslación de dos vórtices eslabonados produce valores que difieren en 2% de los resultados numéricos obtenidos con la aproximación de Rosenhead-Moore a la ley de Biot-Savart. Para un rango de razón de aspecto  $\frac{e}{r_1}$  mayor a 0.15, dados los problemas de convergencia propias de la solución analítica de Biot-Savart cuando  $e \rightarrow 0$ . Similarmente, se encuentra una discrepancia dentro del orden del 6% y 8% para configuraciones eslabonadas de 3 y 4 vórtices. Por otra parte, los resultados analíticos encontrados son validos para razones de aspecto,  $e/r_0$ , no más grandes que 0.21, las cuales se encuentran dentro del 3% de error.

## Referencias bibliográficas

Batchelor G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press.

Callegari A.J., Ting L. (1978). Motion of a Curved Vortex Filament with Decaying Vortical Core and Axial Velocity. *SIAM J. Appl. Math.* 35: 148-175, *en el texto este trabajo es citado como CT.*

Dyson F.W. (1893). The Potential of an Vortex Ring. Part II. *Phil. Trans. R. Soc. London* 184: 1041-1106.

Fukumoto Y., Okulov V.L. (2005). The Velocity Field Induced by a Helical Vortex Tube. *Physics of Fluids*, 17: 107101-1-107101-19, *en el texto este trabajo es citado como FO.*

Fukumoto Y., Moffat H.K. (2000). Motion and Expansion of a Viscous Vortex Ring: Part I. *J. Fluid Mech.*, 417: 1-45.

Helmholtz H. (1858). Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Z. Reine Angew. Math.* 55: 25-55 (Traducido en ingles por P.G. Tait *Phil. Mag.* 33, 485-512, 1867).

Hicks W.M. (1885). Research on the Theory of Vortex Ring. Part II. *Phil. Trans. R. Soc. London* 176: 725-780.

Irvine T.M., Bouwmeester D. (2008). Linked and Knotted Beams of Light. *Nature Phys.* 4: 716-720.

Kleckner D., Irvine T.M. (2013). Creation and Dynamics of Knotted Vortex. *Nature Physics*, 9: 253-258.

Leonard A. (2003). Reconnection of Colliding Vortex Ring. *Phys. Rev. Lett.*, 90 (5): 054501-1-054501-4.

Lim T.T & Nickels T.B (1995). *Vortex Rings*. In *Fluid Vortices*. Dordrech, Kluwer.

- Meleshko V., Aref H. (2007). A Bibliography of Vortex Dynamics 1858-1956. *Advances in Applied Mechanics*, 41: 196-232
- Sheila E. Widnall (1975). The Structure and Dynamics of Vortex Filament. *Annu. Rev. Fluid Mech.* p. 141-165.
- Thomson J.J. (1883). *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*. Cambridge, McMillan.
- Thomson W. (1867a). The Translatory Velocity of a Circular Vortex Ring. Appended to Prof. Tait's Translation of Helmholtz's Memoir on Vortex Motion; *Phil. Mag.* XXXIII pp. 511-512.
- Thomson W. (1867b). Vortex Atoms. *Phil Mag*, 34: 15-24.
- Thomson W. (1875). Vortex Statics. *Proc. R. Soc. Edin.* 9: 59-73.
- Velasco Fuentes O. (2007). On the Topology of Vortex Lines and Tubes. *J. Fluid Mech.* 584: 147-156.
- Velasco Fuentes O., Romero Arteaga (2011). Quasi-Steady Linked Vortices With Chaotic Streamlines. *J. Fluid Mech.* 687: 571-583.
- Velasco Fuentes O. (2013). Quasi-Steady Endless Vortices With Chaotic Streamlines. En: Klapp et al. Memorias del XVIII Congreso de la División de Dinámica de Fluidos, 21- 23 de Noviembre del 2012.
- Wu J.Z., Ma H.Y. & Zhou M.D. (2005). *Vorticity and Vortex Dynamics*. New York, NY, Springer.

## Apéndices

### A1. Geometría de filamentos circulares perturbados armónicamente

A partir de las ecuaciones de la geometría del vórtice (50), se establecen los vectores asociados al sistema de Frenet-Serret para un vórtice anular perturbado armónicamente. Para esta descripción se ha introducido el parámetro  $n$  (número entero) que indica el número de veces que el vórtice da vuelta alrededor del toro sobre su plano meridional. Además de esto, la descripción geométrica del vórtice se encuentra expresada en términos de los parámetros relacionados con la amplitud de su perturbación, a saber  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ . Entonces dada la geometría de las ecuaciones (50) se tiene que

$$x = \rho \cos(\theta) = [r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) \quad (50a)$$

$$y = \rho \sin(\theta) = [r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) \quad (50b)$$

$$z = \mathfrak{z} + \gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta) \quad (50c)$$

Mencionado lo anterior se tiene que el vector tangente unitario, tiene la forma

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{r_0} \left( \frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{r_0} \{ & -r_0 \sin(\theta) - \sin(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] - n \cos(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)], \\ & r_0 \cos(\theta) + m \cos(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \\ & - n \sin(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)], -n[\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] \} \quad (A1.1a) \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (A1.1a) se puede definir la curvatura del filamento, siguiendo la definición que

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right\| \quad \text{donde} \quad \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{\|r_0 \hat{\mathbf{t}}\|} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta}$$



Donde aproximadamente  $\|r_0 \hat{\mathbf{t}}\| \approx r_0$ . Además

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} = \frac{1}{r_0} \left( \frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}, \frac{d^2z}{d\theta^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\theta} = \frac{1}{r_0} \{ & -r_0 \cos(\theta) - \cos(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)](1 + n^2) \\ & + 2n \sin(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)], -r_0 \sin(\theta) \\ & - \sin(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)](1 + n^2) \\ & - 2n \cos(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)], -n^2[\gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta)] \} \end{aligned}$$

Así

$$\kappa = \frac{1}{r_0^2} \sqrt{\left( \frac{d^2x}{d\theta^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{d\theta^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{d\theta^2} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} \kappa = \frac{1}{r_0^2} ( & r_0^2 + 2r_0 \cos(\theta) \{ \cos(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)](1 + n^2) \\ & - 2n \sin(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \} \\ & + 2r_0 \sin(\theta) \{ \sin(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)](1 + n^2) \\ & + 2n \cos(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \} + \dots)^{1/2} \end{aligned}$$

Omitiendo los términos de orden mayor en los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \kappa & \approx \frac{1}{r_0^2} (r_0^2 + 2r_0[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)](1 + n^2))^{1/2} \\ \kappa & \approx \frac{1}{r_0} \left( 1 + 2 \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] (1 + n^2) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (A1.1b)$$

Por otra parte, para definir el vector normal se tiene que

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$$

Haciendo uso de la ecuación (A1.1b) tal que se exprese la curvatura como  $\kappa \approx \frac{1}{r_0}$ . Entonces, el vector normal puede ser reescrito como sigue

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{\kappa r_0^2} \left( \frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}, \frac{d^2z}{d\theta^2} \right) \approx \frac{1}{r_0} \left( \frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}, \frac{d^2z}{d\theta^2} \right)$$

Por tanto

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{\kappa r_0^2} \left( \frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}, \frac{d^2z}{d\theta^2} \right) \approx \frac{1}{r_0} \left( \frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}, \frac{d^2z}{d\theta^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} = & \left\{ -\text{Cos}(m\theta) - \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1 + n^2) \right. \\ & + 2n\text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right], -\text{Sin}(\theta) \\ & - \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1 + n^2) \\ & \left. - 2n\text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right], -n^2 \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A1.1c})$$

Por su parte, el vector binormal queda determinado a partir de las ecuaciones (A1.1a) y (A1.1c), tal que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{1}{r_0} \frac{dx}{d\theta} & \frac{1}{r_0} \frac{dy}{d\theta} & \frac{1}{r_0} \frac{dz}{d\theta} \\ \frac{1}{r_0} \frac{d^2x}{d\theta^2} & \frac{1}{r_0} \frac{d^2y}{d\theta^2} & \frac{1}{r_0} \frac{d^2z}{d\theta^2} \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}} \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2z}{d\theta^2} - \frac{dz}{d\theta} \frac{d^2y}{d\theta^2} \right) + \hat{\mathbf{j}} \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{dz}{d\theta} \frac{d^2x}{d\theta^2} - \frac{dx}{d\theta} \frac{d^2z}{d\theta^2} \right) \\ &+ \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{dx}{d\theta} \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2x}{d\theta^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}} = & \frac{1}{r_0^2} [r_0 \text{Cos}(m\theta) (-n^2 [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)]) \\
& + n [\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] (-r_0 \text{Sin}(\theta))] \hat{\mathbf{i}} \\
& + \frac{1}{r_0^2} [(-r_0 \text{Cos}(\theta)) (-n [\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)]) \\
& + n^2 [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)] (-r_0 \text{Sin}(\theta))] \hat{\mathbf{j}} \\
& + \frac{1}{r_0^2} [(-r_0 \text{Sin}(\theta)) (-r_0 \text{Sin}(\theta) - m \text{Sin}(m\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \\
& - n \text{Cos}(\theta) [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)]) \\
& - (-r_0 \text{Cos}(\theta)) (r_0 \text{Cos}(\theta) + \text{Cos}(\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \\
& - n \text{Sin}(\theta) [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)])] \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Simplificando los términos, se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}} = & \left[ -n^2 \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right] \hat{\mathbf{i}} \\
& + \left[ -n^2 \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] + n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right] \hat{\mathbf{j}} \\
& + \left[ 1 + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right] \hat{\mathbf{k}} \tag{A1.1d}
\end{aligned}$$

Para completar la descripción geométrica del vórtice representado por las ecuaciones (50), a continuación es definida su torsión asociada, la cual está definida en términos del vector normal y binormal como sigue

$$T = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds}$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \frac{1}{r_0} \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{d\theta} &= \frac{n}{r_0} (n^2 - 1) \cos(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \hat{\mathbf{i}} \\ &+ \frac{n}{r_0} (n^2 - 1) \sin(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \hat{\mathbf{j}} \\ &- \frac{n}{r_0} \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Así que haciendo uso de la ecuación (A1.1c), se obtiene la siguiente expresión para la torsión una vez son omitidos los términos de orden superior en los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ , tal que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{r_0} \left\{ n(n^2 - 1) \cos^2(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. + n(n^2 - 1) \sin^2(\theta) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \right\} \end{aligned}$$

Que más simplificadamente resulta en

$$T = \frac{n}{r_0} (n^2 - 1) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \quad (\text{A1.1e})$$

## A2. Cálculo del campo monopolar.

En lo que sigue de este apéndice, se desarrolla el cálculo correspondiente al efecto monopolar del campo inducido generado por un vórtice anular perturbado armónicamente y descrito geoméricamente por A1. Tal que si

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \frac{1}{r_0} \left\{ -r_0 \sin(\theta) - \sin(\theta) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \right. \\ &\quad \left. - n \cos(\theta) [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \right\} \hat{\mathbf{i}}, \\ & r_0 \cos(\theta) + \cos(\theta) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \\ &\quad \left. - n \sin(\theta) [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \right\} \hat{\mathbf{j}}, -n [\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathbf{t}}(s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds \quad (30)$$

Toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \{ & -r_0 \sin(\theta) - \sin(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \\
& - n \cos(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \hat{\mathbf{i}} + r_0 \cos(\theta) \\
& + \cos(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] - n \sin(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \hat{\mathbf{j}} \\
& - n[\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] \hat{\mathbf{k}} \} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta \tag{A2.1}
\end{aligned}$$

Con  $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} = \frac{1}{\sqrt{q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)}}$  de manera similar a como se procedió con el vórtice anular en la sección 3.2. Sin embargo, para este caso  $q = r^2 + \rho^2 + \xi'^2$  es una función dependiente del ángulo  $\theta$ , dada las relaciones  $\rho = \rho(\theta)$  y  $z' = z'(\theta)$ . Entonces desde (A2.1) se tiene que

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = A_m(\mathbf{x})_x \hat{\mathbf{i}} + A_m(\mathbf{x})_y \hat{\mathbf{j}} + A_m(\mathbf{x})_z \hat{\mathbf{k}}$$

Similarmente a como se procedió en el caso del vórtice anular se tiene que la contribución monopolar del campo inducido queda expresada como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m &= \nabla \times \mathbf{A}_m(\mathbf{x}) \\
&= \left( \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_z}{\partial y} - \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_x}{\partial z} - \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} \\
&+ \left( \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_y}{\partial x} - \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = u_m \hat{\mathbf{i}} + v_m \hat{\mathbf{j}} + w_m \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Evaluando la ecuación para  $\mathbf{u}_m$  desde la ecuación (A2.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
u_m &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} (n[\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)](r \sin \varphi - \rho \sin(\theta)) + \xi r_0 \cos(\theta) \\
&- r_0 \cos(\theta)[\gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta)] + \xi \cos(\theta)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \\
&- n \xi \sin(\theta)[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)]) \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $\frac{\partial q}{\partial z} = 2(\xi - [\gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta)])$

$$\begin{aligned}
u_m = & \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\xi r_0 \cos(\theta) + \gamma_n [\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] \\
& - r_0 n \sin(\theta) [\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] - r_0 \cos(\theta) [\gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta)] \\
& + \xi \cos(\theta) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \\
& - n \xi \sin(\theta) [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)]) \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\
u_m = & \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \xi r_0 \cos(\theta) + \gamma_n [\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] \right. \\
& + \frac{1}{2} \{ (n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n \} \cos[(n+1)\theta] \\
& - \frac{1}{2} \{ (n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n \} \cos[(n-1)\theta] \\
& + \frac{1}{2} \{ (n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n \} \sin[(n+1)\theta] \\
& \left. - \frac{1}{2} \{ (n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n \} \sin[(n-1)\theta] \right) \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned} \tag{A2.2}$$

La solución explícita de la integral para  $u_m$  es obtenida usando una expansión en series de Fourier del término  $\frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}}$ . Sin embargo, dada la dependencia de  $q$  con los parámetros de la perturbación, la expansión en mención debe seguir unas características particulares tal como lo menciona J.J. Thomson (1883). Por lo anterior, la expansión para dicho termino queda postulada como sigue

$$\sum_s^{\infty} (A_s + B_s \cos(n\theta) + C_s \sin(n\theta) + D_s \cos(2n\theta) + E_s \sin(2n\theta)) \cos[s(\varphi - \theta)] \tag{A2.3}$$

Donde  $A_s$  es un término independiente a  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ ,  $B_s$  y  $C_s$  son términos a primer orden en estos parámetros y  $D_s$  y  $E_s$  resultan ser términos a segundo orden. Entonces, una vez establecida la expansión resulta más cómodo mediante la ortogonalidad de las funciones resolver las integrales propuestas por la ecuación (A2.2).

La forma explícita en que quedan expresados los campos inducidos desde la ecuación (A2.2) resulta claramente diferenciada por el valor  $n$ . Luego, la solución correspondiente a A2.2 comienza por formularse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
u_m = & \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\xi r_0 \text{Cos}(\theta) \\
& \times \{A_1 \text{Cos}[(\varphi - \theta)] + B_{n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& + B_{n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& + C_{n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)]\} \\
& + yn\gamma_n \text{Sin}(n\theta) \\
& \times \{A_n \text{Cos}[n(\varphi - \theta)] + B_{2n} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)] + C_0 \text{Sin}(n\theta) \\
& + C_{2n} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)]\} - yn\delta_n \text{Cos}(n\theta) \\
& \times \{A_n \text{Cos}[n(\varphi - \theta)] + B_0 \text{Cos}(n\theta) + B_{2n} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)]\} \\
& + \frac{1}{2} \{(n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n\} \text{Cos}[(n+1)\theta] \\
& \times \{A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - m\theta)] \\
& + B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\} \\
& - \frac{1}{2} \{(n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n\} \text{Cos}[(n-1)\theta] \\
& \times \{A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)]\} \\
& + \frac{1}{2} \{(n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n\} \text{Sin}[(n+1)\theta] \\
& \times \{A_{n+1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\{(n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n\}\text{Sin}[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{A_{n-1}\text{Cos}[(n-1)(\varphi-\theta)] + B_1\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi-\theta)] \\
& \quad + B_{2n-1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(2n-1)(\varphi-\theta)] + C_1\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi-\theta)] \\
& \quad + C_{2n-1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(2n-1)(\varphi-\theta)]\}d\theta
\end{aligned}$$

Desarrollando la integral se obtiene que

$$\begin{aligned}
u_m = & \frac{\Gamma}{4}(\xi r_0 \times \{A_1\text{Cos}(\varphi) \\
& + \frac{1}{2}(B_{n+1}\text{Cos}[(n+1)\varphi] + B_{n-1}\text{Cos}[(n-1)\varphi] + C_{n+1}\text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& + C_{n-1}\text{Sin}[(n-1)\varphi])\} \\
& + yn\gamma_n \times \{A_n\text{Sin}(n\varphi) + C_0 + \frac{1}{2}(B_{2n}\text{Sin}(2n\varphi) - C_{2n}\text{Cos}(2n\varphi))\} - yn\delta_n \\
& \quad \times \{A_n\text{Cos}(n\varphi) + B_0 + \frac{1}{2}(B_{2n}\text{Cos}(2n\varphi) + C_{2n}\text{Sin}(2n\varphi))\} \\
& + \frac{1}{2}\{(n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n\} \\
& \quad \times \{A_{n+1}\text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& + \frac{1}{2}(B_1\text{Cos}(\varphi) + B_{2n+1}\text{Cos}[(2n+1)\varphi] - C_1\text{Sin}(\varphi) + C_{2n+1}\text{Sin}[(2n+1)\varphi])\} \\
& - \frac{1}{2}\{(n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n\} \\
& \quad \times \{A_{n-1}\text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& + \frac{1}{2}(B_1\text{Cos}(\varphi) + B_{2n-1}\text{Cos}[(2n-1)\varphi] + C_1\text{Sin}(\varphi) + C_{2n-1}\text{Sin}[(2n-1)\varphi])\} \\
& + \frac{1}{2}\{(n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n\} \\
& \quad \times \{A_{n+1}\text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& + \frac{1}{2}(B_1\text{Sin}(\varphi) + B_{2n+1}\text{Sin}[(2n+1)\varphi] + C_1\text{Cos}(\varphi) - C_{2n+1}\text{Cos}[(2n+1)\varphi])\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\{(n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n\} \\
& \times \left\{ A_{n-1}\text{Sin}[(n-1)\varphi] \right. \\
& \quad + \frac{1}{2}(-B_1\text{Sin}(\varphi) + B_{2n-1}\text{Sin}[(2n-1)\varphi] + C_1\text{Cos}(\varphi) \\
& \quad \left. - C_{2n-1}\text{Cos}[(2n-1)\varphi]) \right\} \tag{A2.4}
\end{aligned}$$

Reorganizando la expresión de una manera más compacta, se obtiene

$$\begin{aligned}
u_m &= \frac{\Gamma}{4}(\xi r_0 A_1 \text{Cos}(\varphi)) \\
& \quad + \frac{\Gamma}{8}(2ynA_n(\gamma_n \text{Sin}(n\varphi) - \delta_n \text{Cos}(n\varphi)) \\
& \quad + [\xi r_0 B_{n+1} + \{(n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n\}A_{n+1}]\text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& \quad + [\xi r_0 B_{n-1} - \{(n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n\}A_{n-1}]\text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& \quad + [\xi r_0 C_{n+1} + \{(n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n\}A_{n+1}]\text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& \quad + [\xi r_0 C_{n-1} - \{(n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n\}A_{n-1}]\text{Sin}[(n-1)\varphi]) \\
& \quad + \frac{\Gamma}{8}(2yn[\gamma_n\{2C_0 + B_{2n}\text{Sin}(2n\varphi) - C_{2n}\text{Cos}(2n\varphi)\} - \delta_n\{2B_0 + B_{2n}\text{Cos}(2n\varphi) + C_{2n}\text{Sin}(2n\varphi)\}]) \\
& \quad + \{[\xi\alpha_n - r_0\gamma_n]B_1 + [\xi\beta_n - r_0\delta_n]C_1\}\text{Cos}(\varphi) \\
& \quad + n\{[\xi\beta_n - r_0\delta_n]B_1 - [\xi\alpha_n + r_0\gamma_n]C_1\}\text{Sin}(\varphi) \\
& \quad + \frac{1}{2}\{[(n+1)\xi(\alpha_n B_{2n+1} - \beta_n C_{2n+1}) + (n-1)r_0(\gamma_n B_{2n+1} - \delta_n C_{2n+1})]\}\text{Cos}[(2n+1)\varphi] \\
& \quad - \frac{1}{2}\{[(n-1)\xi(\alpha_n B_{2n-1} - \beta_n C_{2n-1}) + (n+1)r_0(\gamma_n B_{2n-1} - \delta_n C_{2n-1})]\}\text{Cos}[(2n-1)\varphi] \\
& \quad + \frac{1}{2}\{[(n+1)\xi(\beta_n B_{2n+1} + \alpha_n C_{2n+1}) + (n-1)r_0(\delta_n B_{2n+1} + \gamma_n C_{2n+1})]\}\text{Sin}[(2n+1)\varphi] \\
& \quad - \frac{1}{2}\{[(n-1)\xi(\beta_n B_{2n-1} + \alpha_n C_{2n-1}) + (n+1)r_0(\delta_n B_{2n-1} + \gamma_n C_{2n-1})]\}\text{Sin}[(2n-1)\varphi]) \\
& \tag{A2.4a}
\end{aligned}$$

En lo que sigue se procederá a determinar la componente de velocidad  $v_m$ , la cual se obtiene a partir de su definición. Donde se establece que

$$v_m = \left( \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_x}{\partial z} - \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_z}{\partial x} \right)$$

Retomando nuevamente la ecuación (A2.1) correspondiente al potencial monopolar, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \{ & -r_0 \text{Sin}(\theta) - \text{Sin}(\theta)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \\ & - n \text{Cos}(\theta)[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{i}} + r_0 \text{Cos}(\theta) \\ & + \text{Cos}(\theta)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] - n \text{Sin}(\theta)[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{j}} \\ & - n[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{k}} \} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Se obtiene la siguiente expresión integral

$$\begin{aligned} v_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} & (\xi r_0 \text{Sin}(\theta) + xn[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \\ & + r_0 n \text{Cos}(\theta)[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] - r_0 \text{Sin}(\theta)[\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)] \\ & + \xi \text{Sin}(\theta)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \\ & + n\xi \text{Cos}(\theta)[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)]) \frac{1}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} & \left( \xi r_0 \text{Sin}(\theta) - xn[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \right. \\ & - \frac{1}{2} \{ (n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n \} \text{Cos}[(n+1)\theta] \\ & - \frac{1}{2} \{ (n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n \} \text{Cos}[(n-1)\theta] \\ & + \frac{1}{2} \{ (n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n \} \text{Sin}[(n+1)\theta] \\ & \left. + \frac{1}{2} \{ (n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n \} \text{Sin}[(n-1)\theta] \right) \frac{1}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

De manera similar a la anterior componente, la ecuación (A2.5) es reescrita por la expansión en Fourier propuesta y simplificada por la ortogonalidad de las funciones involucradas

$$\begin{aligned}
v_m = & \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\xi r_0 \text{Sin}(\theta) \\
& \times \{A_1 \text{Cos}[(\varphi - \theta)] + B_{n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& + B_{n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& + C_{n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)]\} \\
& - xn\gamma_n \text{Sin}(n\theta) \\
& \times \{A_n \text{Cos}[n(\varphi - \theta)] + B_{2n} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)] + C_0 \text{Sin}(n\theta) \\
& + C_{2n} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)]\} + xn\delta_n \text{Cos}(n\theta) \\
& \times \{A_n \text{Cos}[n(\varphi - \theta)] + B_0 \text{Cos}(n\theta) + B_{2n} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[2n(\varphi - \theta)]\} \\
& - \frac{1}{2} \{(n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n\} \text{Cos}[(n+1)\theta] \\
& \times \{A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\} \\
& - \frac{1}{2} \{(n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n\} \text{Cos}[(n-1)\theta] \\
& \times \{A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)]\} \\
& + \frac{1}{2} \{(n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n\} \text{Sin}[(n+1)\theta] \\
& \times \{A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& + C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \{ (n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n \} \text{Sin}[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] \} d\theta
\end{aligned}$$

Desarrollando las integrales se obtiene que

$$\begin{aligned}
v_m = & \frac{\Gamma}{4} (\xi r_0 \times \{ A_1 \text{Sin}(\varphi) \\
& + \frac{1}{2} (B_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] - B_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi] - C_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& + C_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi]) \} \\
& - xn\gamma_n \times \{ A_n \text{Sin}(n\varphi) + C_0 + \frac{1}{2} (B_{2n} \text{Sin}(2n\varphi) - C_{2n} \text{Cos}(2n\varphi)) \} + xn\delta_n \\
& \quad \times \{ A_n \text{Cos}(n\varphi) + B_0 + \frac{1}{2} (B_{2n} \text{Cos}(2n\varphi) + C_{2n} \text{Sin}(2n\varphi)) \} \\
& - \frac{1}{2} \{ (n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n \} \\
& \quad \times \{ A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& \quad + \frac{1}{2} (B_1 \text{Cos}(\varphi) + B_{2n+1} \text{Cos}[(2n+1)\varphi] - C_1 \text{Sin}(\varphi) + C_{2n+1} \text{Sin}[(2n+1)\varphi]) \} \\
& - \frac{1}{2} \{ (n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n \} \\
& \quad \times \{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& \quad + \frac{1}{2} (B_1 \text{Cos}(\varphi) + B_{2n-1} \text{Cos}[(2n-1)\varphi] + C_1 \text{Sin}(\varphi) + C_{2n-1} \text{Sin}[(2n-1)\varphi]) \} \\
& + \frac{1}{2} \{ (n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n \} \\
& \quad \times \{ A_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& \quad + \frac{1}{2} (B_1 \text{Sin}(\varphi) + B_{2n+1} \text{Sin}[(2n+1)\varphi] + C_1 \text{Cos}(\varphi) - C_{2n+1} \text{Cos}[(2n+1)\varphi]) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \{ (n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n \} \\
& \times \left\{ A_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi] \right. \\
& + \frac{1}{2} (-B_1 \text{Sin}(\varphi) + B_{2n-1} \text{Sin}[(2n-1)\varphi] + C_1 \text{Cos}(\varphi) \\
& \left. - C_{2n-1} \text{Cos}[(2n-1)\varphi] \right\} \quad (A2.6)
\end{aligned}$$

Reorganizando la expresión de una manera más compacta, se obtiene

$$\begin{aligned}
v_m &= \frac{\Gamma}{4} (\xi r_0 A_1 \text{Sin}(\varphi)) \\
& + \frac{\Gamma}{8} (-xnA_n(\gamma_n \text{Sin}(n\varphi) + \delta_n \text{Cos}(n\varphi)) \\
& - \{ \{ (n+1)\xi\beta_n + (n-1)r_0\delta_n \} A_{n+1} + \xi r_0 C_{n+1} \} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& - \{ \{ (n-1)\xi\beta_n + (n+1)r_0\delta_n \} A_{n-1} - \xi r_0 C_{n-1} \} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& + \{ \{ (n+1)\xi\alpha_n + (n-1)r_0\gamma_n \} A_{n+1} + \xi r_0 B_{n+1} \} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& + \{ \{ (n-1)\xi\alpha_n + (n+1)r_0\gamma_n \} A_{n-1} - \xi r_0 B_{n-1} \} \text{Sin}[(n-1)\varphi] \\
& - xn\gamma_n \{ 2C_0 + B_{2n} \text{Sin}(2n\varphi) - C_{2n} \text{Cos}(2n\varphi) \} \\
& + xn\delta_n \{ 2B_0 + B_{2n} \text{Cos}(2n\varphi) + C_{2n} \text{Sin}(2n\varphi) \} \\
& + n [ - \{ \xi\beta_n + r_0\delta_n \} B_1 + \{ \xi\alpha_n + r_0\gamma_n \} C_1 ] \text{Cos}(\varphi) \\
& + [ \{ \xi\alpha_n - r_0\gamma_n \} B_1 + \{ \xi\beta_n - r_0\delta_n \} C_1 ] \text{Sin}(\varphi) \\
& - \frac{1}{2} [ \{ (n+1)\xi(\beta_n B_{2n+1} + \alpha_n C_{2n+1}) + (n-1)r_0(\delta_n B_{2n+1} + \gamma_n C_{2n+1}) \} ] \text{Cos}[(2n+1)\varphi] \\
& - \frac{1}{2} [ \{ (n-1)\xi(\beta_n B_{2n-1} + \alpha_n C_{2n-1}) + (n+1)r_0(\delta_n B_{2n-1} + \gamma_n C_{2n-1}) \} ] \text{Cos}[(2n-1)\varphi] \\
& + \frac{1}{2} [ \{ (n+1)\xi(\alpha_n B_{2n+1} - \beta_n C_{2n+1}) + (n-1)r_0(\gamma_n B_{2n+1} - \delta_n C_{2n+1}) \} ] \text{Sin}[(2n+1)\varphi]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} [\{(n-1)\xi(\alpha_n B_{2n-1} - \beta_n C_{2n-1}) + (n+1)r_0(\gamma_n B_{2n-1} - \delta_n C_{2n-1})\}] \text{Sin}[(2n-1)\varphi] \quad (\text{A2.6a})$$

Finalmente, para completar el campo monopolar se calcula a continuación la componente vertical asociada, tal que siguiendo su definición se tiene que

$$w_m = \left( \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_y}{\partial x} - \frac{\partial A_m(\mathbf{x})_x}{\partial y} \right)$$

Recordando nuevamente la ecuación (A2.1)

$$\begin{aligned} A_m(\mathbf{x}) = & \frac{\Gamma}{4\pi} \int \left\{ -r_0 \text{Sin}(\theta) - \text{Sin}(\theta)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \right. \\ & - n \text{Cos}(\theta)[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{i}} + r_0 \text{Cos}(\theta) \\ & + \text{Cos}(\theta)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] - n \text{Sin}(\theta)[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{j}} \\ & \left. - n[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \hat{\mathbf{k}} \right\} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta \quad (\text{A2.1}) \end{aligned}$$

Se obtiene la siguiente expresión integral

$$\begin{aligned} w_m = & \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} (r_0 \text{Cos}(\theta)(\rho \text{Cos}(\theta) - r \text{Cos} \varphi) \\ & + \text{Cos}(\theta)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)](\rho \text{Cos}(\theta) - r \text{Cos} \varphi) \\ & - n \text{Sin}(\theta)[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)](\rho \text{Cos}(\theta) - r \text{Cos} \varphi) \\ & + r_0 \text{Sin}(\theta)(\rho \text{Sin}(\theta) - r \text{Sin} \varphi) \\ & + \text{Sin}(\theta)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)](\rho \text{Sin}(\theta) - r \text{Sin} \varphi) \\ & + n \text{Cos}(\theta)[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)](\rho \text{Sin}(\theta) \\ & - r \text{Sin} \varphi)) \frac{1}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \end{aligned}$$

Omitiendo los términos de segundo orden en  $w_m$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
w_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} & (r_0 \cos(\theta) ([r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) - r \cos \varphi) \\
& + \cos(\theta) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] (r_0 \cos(\theta) - r \cos \varphi) \\
& - n \sin(\theta) [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] (r_0 \cos(\theta) - r \cos \varphi) \\
& + r_0 \sin(\theta) ([r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) - r \sin \varphi) \\
& + \sin(\theta) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] (r_0 \sin(\theta) - r \sin \varphi) \\
& + n \cos(\theta) [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] (r_0 \sin(\theta) \\
& - r \sin \varphi)) \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} & (r_0 \cos(\theta) ([r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) - x) \\
& + \cos(\theta) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] (r_0 \cos(\theta) - x) \\
& - n \sin(\theta) [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] (r_0 \cos(\theta) - x) \\
& + r_0 \sin(\theta) ([r_0 + \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) - y) \\
& + \sin(\theta) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] (r_0 \sin(\theta) - y) \\
& + n \cos(\theta) [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] (r_0 \sin(\theta) \\
& - y)) \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} & \left( r_0^2 + 2r_0 [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] - r_0 (x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \right. \\
& + \frac{1}{2} (n+1) (y\beta_n - x\alpha_n) \cos[(n+1)\theta] + \frac{1}{2} (n-1) (y\beta_n + x\alpha_n) \cos[(n-1)\theta] \\
& - \frac{1}{2} (n+1) (y\alpha_n + x\beta_n) \sin[(n+1)\theta] \\
& \left. - \frac{1}{2} (n-1) (y\alpha_n - x\beta_n) \sin[(n-1)\theta] \right) \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

De manera que siguiendo la expansión en Fourier propuesta por (A2.3) y haciendo uso de la ortogonalidad de las funciones, es posible reescribir la integral para  $w_m$  como sigue

$$w_m = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} (r_0^2 \times \{A_0 + B_n \cos(n\theta) \cos[n(\varphi - \theta)] + C_n \sin(n\theta) \cos[n(\varphi - \theta)]\})$$

$$\begin{aligned}
& +2r_0\alpha_n\text{Cos}(n\theta) \\
& \quad \times \{A_n\text{Cos}[n(\varphi - \theta)] + B_0\text{Cos}(n\theta) + B_{2n}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[2n(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[2n(\varphi - \theta)]\} + 2r_0\beta_n\text{Sin}(n\theta) \\
& \quad \times \{A_n\text{Cos}[n(\varphi - \theta)] + B_{2n}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[2n(\varphi - \theta)] + C_0\text{Sin}(n\theta) \\
& \quad + C_{2n}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[2n(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r_0x\text{Cos}(\theta) \times \{A_1\text{Cos}[(\varphi - \theta)] + B_{n+1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{n-1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{n-1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r_0y\text{Sin}(\theta) \times \{A_1\text{Cos}[(\varphi - \theta)] + B_{n+1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{n-1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{n-1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}(n+1)(y\beta_n - x\alpha_n)\text{Cos}[(n+1)\theta] \\
& \quad \times \{A_{n+1}\text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n+1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n+1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}(n-1)(y\beta_n + x\alpha_n)\text{Cos}[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{A_{n-1}\text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n-1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n-1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(n+1)(y\alpha_n + x\beta_n)\text{Sin}[(n+1)\theta] \\
& \quad \times \{A_{n+1}\text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n+1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n+1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(n-1)(y\alpha_n - x\beta_n)\text{Sin}[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{A_{n-1}\text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n-1}\text{Cos}(n\theta)\text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n-1}\text{Sin}(n\theta)\text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)]\}d\theta
\end{aligned}$$

Desarrollando las integrales se obtiene

$$\begin{aligned}
w_m &= \frac{\Gamma}{4}(r_0^2 \times \{2A_0 + B_n\text{Cos}(n\varphi) + C_n\text{Sin}(n\varphi)\} \\
& + 2r_0\alpha_n \times \left\{A_n\text{Cos}(n\varphi) + B_0 + \frac{1}{2}(B_{2n}\text{Cos}(2n\varphi) + C_{2n}\text{Sin}(2n\varphi))\right\} + 2r_0\beta_n \\
& \quad \times \left\{A_n\text{Sin}(n\varphi) + C_0 + \frac{1}{2}(B_{2n}\text{Sin}(2n\varphi) - C_{2n}\text{Cos}(2n\varphi))\right\} \\
& - r_0x \times \left\{A_1\text{Cos}(\varphi) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2}(B_{n+1}\text{Cos}[(n+1)\varphi] + B_{n-1}\text{Cos}[(n-1)\varphi] + C_{n+1}\text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& \quad \left. - C_{n-1}\text{Sin}[(n-1)\varphi])\right\} \\
& - r_0y \times \left\{A_1\text{Sin}(\varphi) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2}(B_{n+1}\text{Sin}[(n+1)\varphi] + B_{n-1}\text{Sin}[(n-1)\varphi] - C_{n+1}\text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& \quad \left. + C_{n-1}\text{Cos}[(n-1)\varphi])\right\} \\
& + \frac{1}{2}(n+1)(y\beta_n - x\alpha_n) \\
& \quad \times \left\{A_{n+1}\text{Cos}[(n+1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(B_1\text{Cos}(\varphi) + B_{2n+1}\text{Cos}[(2n+1)\varphi] - C_1\text{Sin}(\varphi) + C_{2n+1}\text{Sin}[(2n+1)\varphi])\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(n-1)(y\beta_n + x\alpha_n) \\
& \quad \times \left\{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(B_1 \text{Cos}(\varphi) + B_{2n-1} \text{Cos}[(2n-1)\varphi] + C_1 \text{Sin}(\varphi) + C_{2n-1} \text{Sin}[(2n-1)\varphi]) \right\} \\
& - \frac{1}{2}(n+1)(y\alpha_n + x\beta_n) \\
& \quad \times \left\{ A_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(B_1 \text{Sin}(\varphi) + B_{2n+1} \text{Sin}[(2n+1)\varphi] + C_1 \text{Cos}(\varphi) - C_{2n+1} \text{Cos}[(2n+1)\varphi]) \right\} \\
& - \frac{1}{2}(n-1)(y\alpha_n - x\beta_n) \\
& \quad \times \left\{ A_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(-B_1 \text{Sin}(\varphi) + B_{2n-1} \text{Sin}[(2n-1)\varphi] + C_1 \text{Cos}(\varphi) \right. \\
& \quad \left. - C_{2n-1} \text{Cos}[(2n-1)\varphi]) \right\} \tag{A2.7}
\end{aligned}$$

Reorganizando la expresión de una manera más compacta, se obtiene

$$\begin{aligned}
w_m &= \frac{\Gamma}{4}(2A_0r_0^2 - A_1r_0r \\
& + r_0^2(B_n \text{Cos}(n\varphi) + C_n \text{Sin}(n\varphi)) + 2r_0[\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)]A_n \\
& + \frac{1}{2}r[(n-1)A_{n-1} - (n+1)A_{n+1}](\alpha_n \text{Cos}(n\varphi) + \beta_n \text{Sin}(n\varphi)) \\
& - \frac{1}{2}r_0r[(B_{n+1} + B_{n-1})\text{Cos}(n\varphi) + (C_{n+1} + C_{n-1})\text{Sin}(n\varphi)] \\
& + 2r_0(\alpha_n B_0 + \beta_n C_0) + r_0\{(\alpha_n B_{2n} - \beta_n C_{2n})\text{Cos}(2n\varphi) + (\alpha_n C_{2n} + \beta_n B_{2n})\text{Sin}(2n\varphi)\} \\
& + \frac{1}{2}\{(ny\beta_n - x\alpha_n)B_1 - (ny\alpha_n + x\beta_n)C_1\}\text{Cos}(\varphi) \\
& + \frac{1}{2}\{(-y\alpha_n - nx\beta_n)B_1 - (y\beta_n - nx\alpha_n)C_1\}\text{Sin}(\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} r [(n-1)B_{2n-1} - (n+1)B_{2n+1}] (\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)) \\
& + \frac{1}{4} r [(n-1)C_{2n-1} - (n+1)C_{2n+1}] (\alpha_n \sin(2n\varphi) - \beta_n \cos(2n\varphi))
\end{aligned} \tag{A2.7a}$$

Con esto, el campo monopolar inducido por el vórtice asociado a la geometría indicada por las ecuaciones (50a, b y c) resulta especificado por (A2.5, 6 y 7).

### A3. Calculo del campo dipolar.

El cálculo del campo dipolar inducido por el vórtice especificado en A1 es obtenido, por definición, mediante el rotacional del potencial dipolar (31). Donde

$$\mathbf{A}_{||d}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\Gamma^{(3)}}{8\pi} (\kappa_s \hat{\mathbf{n}} + \kappa T \hat{\mathbf{b}}) + d^{(1)} \kappa \hat{\mathbf{r}} (\kappa + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)) \right\} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} ds \tag{31}$$

Donde  $\Gamma^{(3)}$  y  $d^{(1)}$  son cantidades especificados por las ecuaciones (35c - d), respectivamente para el caso de un vórtice anular. Sin embargo, en esta ocasión se define como  $e$  a la sección transversal del vórtice y a  $r_1$  como la sección transversal del toro sobre el que se encuentran los vórtices eslabonados (capítulo 1). Entonces

$$\Gamma^{(3)} = \frac{\Gamma}{2} e^2 \quad ; \quad d^{(1)} = -\frac{3}{16\pi} \Gamma e^2 \tag{35c}$$

Por otra parte, siguiendo la ecuación (A1.1b) tal que

$$\kappa \approx \frac{1}{r_0} \left( 1 + \frac{2}{r_0} \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] (1 + n^2) \right)^{1/2} \tag{A1.1b}$$

Se encuentra que

$$\kappa_s = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \approx \frac{n}{r_0^2} \frac{(1 + n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right]}{\left( 1 + \frac{2}{r_0} \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] (1 + n^2) \right)^{1/2}}$$

$$\kappa_s \approx \frac{n}{r_0^2} (1 + n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \quad (\text{A3.1})$$

El cálculo sobre el potencial dipolar se realiza a primer orden. Por otra parte, para simplificar los cálculos se supone que la curvatura puede ser definida de la siguiente manera

$$\kappa \approx \frac{1}{r_0} \left[ 1 + \frac{1}{r_0} \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1 + n^2) + \dots \right]$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\parallel d}(\mathbf{x}) = & -\frac{\Gamma e^2}{32\pi} \int \left\{ \frac{n}{r_0^2} (1 + n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] [-\text{Cos}(\theta)\hat{\mathbf{i}} - \text{Sin}(\theta)\hat{\mathbf{j}}] + \frac{1}{r_0} \right. \\ & \cdot \frac{n}{r_0} (n^2 - 1) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \cdot \mathbf{1} \hat{\mathbf{k}} \left. \right\} \frac{ds}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} \\ & + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi} \int \left\{ \frac{1}{r_0^2} \left[ 1 + 2 \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1 + n^2) \right] \left\{ -\text{Sin}(\theta) \right. \right. \\ & - \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] - n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{i}} \\ & + \text{Cos}(\theta) + \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \\ & - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{j}} - n \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{k}} \left. \right\} \\ & \left. + \kappa \hat{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \right\} \frac{r_0 d\theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{1/2}} \\ = -\frac{1}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \{ [x - \rho \text{Cos}(\theta)]\hat{\mathbf{i}} + [y - \rho \text{Sin}(\theta)]\hat{\mathbf{j}} \\ + (\xi - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)])\hat{\mathbf{k}} \} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\parallel a}(\mathbf{x}) = & -\frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int n \left\{ (1+n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] [-\text{Cos}(\theta)\hat{\mathbf{i}} - \text{Sin}(\theta)\hat{\mathbf{j}}] \right. \\
& \left. + (n^2-1) \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{k}} \right\} \frac{d\theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left[ 1 + 2 \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1+n^2) \right] \left\{ -\text{Sin}(\theta) \right. \\
& - \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \\
& - n \text{Cos}(n\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{i}} + \text{Cos}(\theta) \\
& + \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{j}} \\
& \left. - n \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{k}} \right\} \frac{d\theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} \\
& - \frac{3\Gamma e^2}{32\pi} \int \left[ 1 + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1+n^2) \right] \left\{ -\text{Sin}(\theta) \right. \\
& - \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] - n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{i}} \\
& + \text{Cos}(\theta) + \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \\
& \left. - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{j}} - n \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \hat{\mathbf{k}} \right\} \\
& \left\{ \left( -\text{Cos}(\theta) - \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1+n^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + 2n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right) \frac{[x - \rho \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& - \left( \text{Sin}(\theta) + \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1+n^2) \right. \\
& \left. + 2n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right) \frac{[y - \rho \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \\
& \left. - n^2 \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \frac{(\xi - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)])}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta
\end{aligned}$$

Dada la extensión de la expresión que define el potencial dipolar, ésta se analizara por componentes separadamente, de suerte que omitiendo términos de segundo orden se obtiene para la componente  $x$

$$\begin{aligned}
A_{||d}(\mathbf{x})_x = & -\frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ -n(1+n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right\} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ -\text{Sin}(\theta) - \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right. \\
& \quad - n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \\
& \quad \left. - 2(1+n^2) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right\} \frac{d\theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi} \int (\text{Sin}(\theta)) \left\{ \left( -\text{Cos}(\theta) - \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1+n^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right) \frac{[x - \rho \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad - \left( \text{Sin}(\theta) + \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] (1+n^2) \right. \\
& \quad \left. \left. + 2n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right) \frac{[y - \rho \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. - n^2 \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \frac{\xi}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} \\
& + \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \left\{ \frac{-\text{Cos}(\theta)[x - r_0 \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} - \frac{\text{Sin}(\theta)[y - r_0 \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} \\
& \quad + n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \left\{ \frac{-\text{Cos}(\theta)[x - r_0 \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\text{Sin}(\theta)[y - \rho \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} \\
& \quad + (1+n^2) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \left\{ \frac{-\text{Cos}(\theta)[x - r_0 \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\text{Sin}(\theta)[y - r_0 \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta
\end{aligned}$$

Organizando aun más la expresión para esta componente del potencial dipolar se obtiene

$$\begin{aligned}
A_{||d}(\mathbf{x})_x = & -\frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ -\frac{n}{m^2} (m^2 + n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Cos}(m\theta) \right\} \frac{1}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - m\theta)]^{1/2}} d\theta \\
+ \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int & \left\{ -\text{Sin}(\theta) - \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right. \\
& - n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \\
& \left. - 2(1 + n^2) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right\} \frac{d\theta}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{1/2}} \\
+ \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int & \{ (-r_0 \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) [x - r_0 \text{Cos}(\theta)] \\
& + r_0 [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) \\
& - \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) [x - r_0 \text{Cos}(\theta)] [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] (1 + n^2) \\
& + 2n \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) [x - r_0 \text{Cos}(\theta)] [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \\
& - (r_0 \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) [y - r_0 \text{Sin}(\theta)] \\
& - r_0 [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) \\
& + \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) [y - r_0 \text{Sin}(\theta)] [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] (1 + n^2) \\
& + 2n \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) [y - r_0 \text{Sin}(\theta)] [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \\
& - n^2 \xi [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Sin}(\theta) \} \\
& - \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [x - r_0 \text{Cos}(\theta)] \\
& \quad - \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [y - r_0 \text{Sin}(\theta)] \\
& - n \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] [x - r_0 \text{Cos}(\theta)] \\
& \quad - n \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] [y - r_0 \text{Sin}(\theta)] \\
& - (1 + n^2) \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [x - r_0 \text{Cos}(\theta)] \\
& \quad - (1 + n^2) \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [y \\
& \quad - r_0 \text{Sin}(\theta)] \} \frac{1}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

(A3.2a)

Para la componente y del potencial dipolar se obtiene que

$$\begin{aligned}
A_{||d}(\mathbf{x})_y = & -\frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ -n(1+n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right\} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)|} d\theta \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ \text{Cos}(\theta) + \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right. \\
& \quad \left. - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right. \\
& \quad \left. + 2(1+n^2) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right\} \frac{d\theta}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{1/2}} \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi} \int \left[ -\text{Cos}(\theta) \left\{ \left( -\text{Cos}(\theta) - \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right) (1+n^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right\} \frac{[x - \rho \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. - \left( \text{Sin}(\theta) + \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right) (1+n^2) \right. \\
& \quad \left. + 2n \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right\} \frac{[y - \rho \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \\
& \quad \left. - n^2 \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\delta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \frac{(\xi - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)])}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} \\
& - \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \left\{ \left( -\text{Cos}(\theta) \right) \frac{[x - \rho \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. - \left( \text{Sin}(\theta) \right) \frac{[y - \rho \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} \\
& + n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \left\{ \left( -\text{Cos}(\theta) \right) \frac{[x - \rho \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. - \text{Sin}(\theta) \frac{[y - \rho \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} \\
& - (1+n^2) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \left\{ \left( -\text{Cos}(m\theta) \right) \frac{[x - \rho \text{Cos}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& \quad \left. - \text{Sin}(\theta) \frac{[y - \rho \text{Sin}(\theta)]}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right\} d\theta
\end{aligned}$$



Organizando aun más la expresión para esta componente del potencial dipolar se obtiene

$$\begin{aligned}
A_{||a}(x)_y &= -\frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ -n(1+n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right\} \frac{d\theta}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{1/2}} \\
&+ \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ \text{Cos}(\theta) + \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right. \\
&\quad \left. - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2(1+n^2) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right\} \frac{d\theta}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{1/2}} \\
&+ \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left[ \{ (r_0[x - r_0 \text{Cos}(\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \right. \\
&\quad - r_0[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&\quad + (1+n^2)[x - r_0 \text{Cos}(\theta)] [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&\quad - 2n[x - r_0 \text{Cos}(\theta)] [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) \} \\
&\quad + (r_0[y - r_0 \text{Sin}(\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&\quad - r_0[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&\quad + (1+n^2)[y - r_0 \text{Sin}(\theta)] [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&\quad + 2n[y - r_0 \text{Sin}(\theta)] [\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \} \\
&\quad \left. + n^2 \xi [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Cos}(\theta) \right] \\
&+ [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [x - \rho \text{Cos}(\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&\quad + [\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [y - \rho \text{Sin}(\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&- n[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] [x - \rho \text{Cos}(\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\theta) \\
&\quad - n[\alpha_n \text{Sin}(n\theta) - \beta_n \text{Cos}(n\theta)] [y - \rho \text{Sin}(\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Sin}(\theta) \\
&+ (1+n^2)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [x - \rho \text{Cos}(\theta)] \text{Cos}(\theta) \text{Cos}(\theta) \\
&\quad + (1+n^2)[\alpha_n \text{Cos}(n\theta) + \beta_n \text{Sin}(n\theta)] [y \\
&\quad - \rho \text{Sin}(\theta)] \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\theta) \} \frac{1}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

(A3.2b)

Finalmente, para la componente  $z$  del potencial dipolar se obtiene que

$$\begin{aligned}
 A_{||d}(\mathbf{x})_z &= \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int \left\{ -n \left[ \frac{\gamma_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\delta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \right. \\
 &\quad - n[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)](x \text{Cos}(\theta) + y \text{Sin}(\theta)) \\
 &\quad \left. + n[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)]r_0 \right\} \frac{1}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \quad (A3.2c)
 \end{aligned}$$

Expresado explícitamente el potencial dipolar. Se encuentra el campo de velocidad dipolar inducido por el vórtice con la geometría correspondiente al apéndice A1. Antes de esto, se reescribe el potencial como sigue

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{x}) = A_{||d}(\mathbf{x})_x \hat{\mathbf{i}} + A_{||d}(\mathbf{x})_y \hat{\mathbf{j}} + A_{||d}(\mathbf{x})_z \hat{\mathbf{k}}$$

De suerte que el campo dipolar inducido queda expresado como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_d &= \nabla \times \mathbf{A}_{||d}(\mathbf{x}) \\
 &= \left( \frac{\partial A_{||d}(\mathbf{x})_z}{\partial y} - \frac{\partial A_{||d}(\mathbf{x})_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial A_{||d}(\mathbf{x})_x}{\partial z} - \frac{\partial A_{||d}(\mathbf{x})_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} \\
 &\quad + \left( \frac{\partial A_{||d}(\mathbf{x})_y}{\partial x} - \frac{\partial A_{||d}(\mathbf{x})_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = u_d \hat{\mathbf{i}} + v_d \hat{\mathbf{j}} + w_d \hat{\mathbf{k}}
 \end{aligned}$$

Entonces para la componente  $x$  del campo se obtiene la siguiente expresión en la cual se han omitido los términos de orden superior como aquellos que son  $O\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|^5}\right)$

$$\begin{aligned}
 u_d &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \frac{n[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \text{Sin}(\theta)}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ n(1 + n^2) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right\} \frac{(\xi - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)])}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ \text{Cos}(\theta) + \text{Cos}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \right. \\
& \quad - n \text{Sin}(\theta) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \\
& \quad + 2(1+n^2) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right\} \frac{(\xi - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)])}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Reescribiendo la expresión y omitiendo todos los términos de segundo orden, se tiene que

$$\begin{aligned}
u_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} (-n[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \text{Sin}(\theta) \\
& \quad - \frac{1}{3} n(1+n^2) \xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \\
& + \left\{ \xi \text{Cos}(\theta) - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)] \text{Cos}(\theta) + \xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right. \\
& \quad - n \xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \\
& \quad + 2(1+n^2) \xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right\} \frac{1}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Organizando la expresión de un modo más adecuado, se obtiene

$$\begin{aligned}
u_d &= \frac{3\Gamma r_1^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} (\xi \text{Cos}(\theta) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (n-1)\gamma_n \left[ (1+n^2) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \text{Cos}[(n+1)\theta] \\
& - \frac{1}{2} \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (1+n^2) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \text{Cos}[(n-1)\theta] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (1+n^2) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \text{Sin}[(n+1)\theta]
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{(n+1)\delta_n - \left[(1+n^2)\left(\frac{n}{3}-2\right) + (n-1)\right]\xi\frac{\beta_n}{r_0}\right\}\text{Sin}[(n-1)\theta]$$

$$) \times \frac{1}{[q - 2rr_0\text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta$$

Encontrada esta expresión para la componente  $x$  del campo inducido dipolar. A continuación, se utiliza la expansión en Fourier (A2.3) y la ortogonalidad de las funciones involucradas para desarrollar las integrales en cuestión, tal que

$$u_d = \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} (\xi \text{Cos}(\theta))$$

$$\times \{A_1 \text{Cos}[(\varphi - \theta)] + B_{n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)]$$

$$+ B_{n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)]$$

$$+ C_{n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)]\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{(n-1)\gamma_n + \left[(n^2+1)\left(\frac{n}{3}+2\right) + (n+1)\right]\xi\frac{\alpha_n}{r_0}\right\} \text{Cos}[(n+1)\theta]$$

$$\times \{A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)]$$

$$+ B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)]$$

$$+ C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\}$$

$$- \frac{1}{2}\left\{(n-1)\gamma_n + \left[(n^2+1)\left(\frac{n}{3}-2\right) + (n-1)\right]\xi\frac{\alpha_n}{r_0}\right\} \text{Cos}[(n-1)\theta]$$

$$\times \{A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)]$$

$$+ B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)]$$

$$+ C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)]\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{(n-1)\delta_n + \left[(n^2+1)\left(\frac{n}{3}+2\right) + (n+1)\right]\xi\frac{\beta_n}{r_0}\right\} \text{Sin}[(n+1)\theta]$$

$$\times \{A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)]$$

$$+ B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)]$$

$$+ C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)]\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \text{Sin}[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] \} d\theta
\end{aligned}$$

Desarrollando las integrales, se obtiene

$$\begin{aligned}
u_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} \left( \xi \times \left\{ A_1 \text{Cos}(\varphi) \right. \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} (B_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] + B_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] + C_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& \quad \left. \left. + C_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi] \right\} \right. \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 \text{Cos}(\varphi) + B_{2n+1} \text{Cos}[(2n+1)\varphi] - C_1 \text{Sin}(\varphi) + C_{2n+1} \text{Sin}[(2n+1)\varphi]) \right\} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 \text{Cos}(\varphi) + B_{2n-1} \text{Cos}[(2n-1)\varphi] + C_1 \text{Sin}(\varphi) + C_{2n-1} \text{Sin}[(2n-1)\varphi]) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 \text{Sin}(\varphi) + B_{2n+1} \text{Sin}[(2n+1)\varphi] + C_1 \text{Cos}(\varphi) - C_{2n+1} \text{Cos}[(2n+1)\varphi]) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\left\{(n-1)\delta_n - \left[(n^2+1)\left(\frac{n}{3}-2\right) + (n-1)\right]\xi\frac{\beta_n}{r_0}\right\} \\
& \quad \times \left\{A_{n-1}\text{Sin}[(n-1)\varphi]\right. \\
& \quad + \frac{1}{2}(-B_1\text{Sin}(\varphi) + B_{2n-1}\text{Sin}[(2n-1)\varphi] + C_1\text{Cos}(\varphi) \\
& \quad \left. - C_{2n-1}\text{Cos}[(2n-1)\varphi])\right\} \tag{A3.3}
\end{aligned}$$

Reorganizando la expresión de una manera más compacta, se obtiene

$$\begin{aligned}
u_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} (\xi A_1 \text{Cos}(\varphi)) \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{64r_0} \left( \left[ \xi B_{n+1} + \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}+2\right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right] \text{Cos}[(n+1)\varphi] \right. \\
& + \left[ m\xi B_{\frac{n}{m}-1} - \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}-2\right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& + \left[ \xi C_{n+1} + \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}+2\right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right] \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& + \left[ \xi C_{n-1} - \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}-2\right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \text{Sin}[(n-1)\varphi] \\
& + \left\{ \left[ -\gamma_n + [2(n^2+1)+1]\xi\frac{\alpha_n}{r_0} \right] B_1 + \left[ -\delta_n + [2(n^2+1)+1]\xi\frac{\beta_n}{r_0} \right] C_1 \right\} \text{Cos}(\varphi) \\
& + \left\{ \left[ n\delta_n + \left[ \frac{n}{3}(n^2+1)+n \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right] B_1 - \left[ n\gamma_n + \left[ \frac{n}{3}(n^2+1)+n \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right] C_1 \right\} \text{Sin}(\varphi) \\
& + \frac{1}{2} \left[ \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}+2\right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} B_{2n+1} \right. \\
& \quad \left. - \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}+2\right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} C_{2n+1} \right] \text{Cos}[(2n+1)\varphi] \\
& - \frac{1}{2} \left[ \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}-2\right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} B_{2n-1} \right. \\
& \quad \left. - \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1)\left(\frac{n}{3}-2\right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} C_{2n-1} \right] \text{Cos}[(2n-1)\varphi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[ \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} B_{2n+1} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} C_{2n+1} \right] \text{Sin}[(2n+1)\varphi] \\
& - \frac{1}{2} \left[ \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} C_{2n-1} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} B_{2n-1} \right] \text{Sin}[(2n-1)\varphi]
\end{aligned} \tag{A3.3a}$$

Para la componente  $y$  del campo dipolar inducido se obtiene la siguiente expresión en la cual se han omitido los términos de orden superior como aquellos que son  $O\left(\frac{1}{|x-\mathbf{X}|^5}\right)$

$$\begin{aligned}
v_d = & \frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} \left\{ -n(n^2+1) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right\} \frac{(\xi - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)])}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ \text{Sin}(\theta) + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right. \\
& \quad \left. + n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right. \\
& \quad \left. + 2(n^2+1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\beta_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) \right] \text{Sin}(\theta) \right\} \frac{(\xi - [\gamma_n \text{Cos}(n\theta) + \delta_n \text{Sin}(n\theta)])}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - m\theta)]^{3/2}} \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \frac{n[\gamma_n \text{Sin}(n\theta) - \delta_n \text{Cos}(n\theta)] \text{Cos}(\theta)}{[q - 2rr_0 \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Reescribiendo la expresión y omitiendo todos los términos de segundo orden, se tiene que

$$v_d = \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} n(n^2+1) \xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \text{Sin}(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \text{Cos}(n\theta) \right] \text{Cos}(\theta) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \xi \sin(\theta) - [\gamma_n \cos(n\theta) + \delta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) + \xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \sin(\theta) \right. \\
& \quad + n\xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \cos(\theta) \\
& \quad + 2(n^2 + 1)\xi \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \sin(\theta) \left. \right\} \\
& + n[\gamma_n \sin(n\theta) - \delta_n \cos(n\theta)] \cos(\theta) \frac{1}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Organizando la expresión de un modo más adecuado, se obtiene

$$\begin{aligned}
v_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} (\xi \sin(\theta) \\
& - \frac{1}{2} \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \cos[(n+1)\theta] \\
& - \frac{1}{2} \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \cos[(n-1)\theta] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \sin[(n+1)\theta] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \sin[(n-1)\theta] \\
& \left. \right) \times \frac{1}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Encontrada esta expresión para la componente  $y$  del campo inducido dipolar, a continuación se utiliza la expansión en Fourier (A2.3) y la ortogonalidad de las funciones involucradas para desarrollar las integrales en cuestión, tal que

$$\begin{aligned}
v_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} (m\xi \sin(m\theta) \\
& \quad \times \{ A_1 \cos[(\varphi - \theta)] + B_{n+1} \cos(n\theta) \cos[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{n-1} \cos(n\theta) \cos[(n-1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1} \sin(n\theta) \cos[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{n-1} \sin(n\theta) \cos[(n-1)(\varphi - \theta)] \}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \text{Cos}[(n+1)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] \} \\
& -\frac{1}{2} \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \text{Cos}[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] \} \\
& +\frac{1}{2} \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \text{Sin}[(n+1)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi - \theta)] \} \\
& +\frac{1}{2} \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \text{Sin}[(n-m)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi - \theta)] \} d\theta
\end{aligned}$$

Desarrollando las integrales

$$\begin{aligned}
v_d = \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} & \left( \xi \times \left\{ A_1 \text{Sin}(\varphi) \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (B_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] - B_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi] - C_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \\
& \left. \left. + C_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 \text{Cos}(\varphi) + B_{2n+1} \text{Cos}[(2n+1)\varphi] - C_1 \text{Sin}(\varphi) + C_{2n+1} \text{Sin}[(2n+1)\varphi]) \right\} \\
& -\frac{1}{2} \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 \text{Cos}(\varphi) + B_{2n-1} \text{Cos}[(2n-1)\varphi] + C_1 \text{Sin}(\varphi) + C_{2n-1} \text{Sin}[(2n-1)\varphi]) \right\} \\
& +\frac{1}{2} \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (B_1 \text{Sin}(\varphi) + B_{2n+1} \text{Sin}[(2n+1)\varphi] + C_1 \text{Cos}(\varphi) - C_{2n+1} \text{Cos}[(2n+1)\varphi]) \right\} \\
& +\frac{1}{2} \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (-B_1 \text{Sin}(\varphi) + B_{2n-1} \text{Sin}[(2n-1)\varphi] + C_1 \text{Cos}(\varphi) \right. \\
& \quad \left. - C_{2n-1} \text{Cos}[(2n-1)\varphi]) \right\}
\end{aligned} \tag{A3.4}$$

Reorganizando la expresión de una manera más compacta, se obtiene

$$v_d = \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} \xi A_1 \text{Sin}(\varphi)$$

$$+\frac{3\Gamma e^2}{64r_0} \left( - \left[ \xi C_{n+1} + \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right] \text{Cos}[(n+1)\varphi] \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \xi C_{n-1} - \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \text{Cos}[(n-1)\varphi] \\
& + \left[ \xi B_{n+1} + \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n+1} \right] \text{Sin}[(n+1)\varphi] \\
& - \left[ m \xi B_{\frac{n}{m}-1} - \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} A_{n-1} \right] \text{Sin}[(n-1)\varphi] \\
& + \left[ \left\{ n\delta_n - \left[ \frac{n}{3}(n^2+1) + n \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} B_1 + \left\{ -n\gamma_n + \left[ \frac{n}{3}(n^2+1) + n \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} C_1 \right] \text{Cos}(\varphi) \\
& + \left[ \left\{ -\delta_n + [2(n^2+1) + 1] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} C_1 + \left\{ -\gamma_n + [2(n^2+1) + 1] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} B_1 \right] \text{Sin}(\varphi) \\
& - \left[ \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} B_{2n+1} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} C_{2n+1} \right] \text{Cos}[(2n+1)\varphi] \\
& - \left[ \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} B_{2n-1} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} C_{2n-1} \right] \text{Cos}[(2n-1)\varphi] \\
& + \left[ \left\{ (n-1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} B_{2n+1} \right. \\
& \quad \left. - \left\{ (n-1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} + 2 \right) + (n+1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} C_{2n+1} \right] \text{Sin}[(2n+1)\varphi] \\
& + \left[ \left\{ (n+1)\gamma_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\alpha_n}{r_0} \right\} B_{2n-1} \right. \\
& \quad \left. - \left\{ (n+1)\delta_n + \left[ (n^2+1) \left( \frac{n}{3} - 2 \right) + (n-1) \right] \xi \frac{\beta_n}{r_0} \right\} C_{2n-1} \right] \text{Sin}[(2n-1)\varphi]
\end{aligned}
\tag{A3.4a}$$

Finalmente para la componente  $z$  del campo inducido se obtiene la siguiente expresión en la cual se han omitido los términos de orden superior como aquellos que son  $O\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|^5}\right)$

$$\begin{aligned}
w_d = & \int_0^{2\pi} \left( \frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ n(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \sin(\theta) \right\} \frac{[x - r_0 \cos(\theta)]}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& - \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ \cos(\theta) + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \cos(\theta) \right. \\
& \quad - n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \sin(\theta) \\
& \quad \left. \left. + 2(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \cos(\theta) \right\} \frac{[x - \rho \cos(\theta)]}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \right. \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ (r_0 \cos(\theta) \cos(\theta) + (n^2 + 1) [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) \cos(\theta) \right. \\
& \quad - 2n [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \sin(\theta) \cos(\theta) \\
& \quad + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) \cos(\theta) \\
& \quad - n [\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + (n^2 + 1) [\alpha_n \cos(n\theta) \\
& \quad \left. \left. + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) \cos(\theta) \right\} \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\
& + \int \frac{\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ n(n^2 + 1) \left[ -\frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \cos(\theta) \right\} \frac{[y - r_0 \sin(\theta)]}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} \\
& - \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ \sin(\theta) + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \sin(\theta) \right. \\
& \quad + n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \cos(\theta) \\
& \quad \left. \left. + 2(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \sin(\theta) \right\} \frac{[y - \rho \sin(\theta)]}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \left\{ (r_0 \sin(\theta) \sin(\theta) + (n^2 + 1)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) \sin(\theta) \right. \\
& \quad + 2n[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + n[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + (n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \sin(\theta) \sin(\theta) \left. \right\} \frac{1}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Reescribiendo la expresión y omitiendo todos los términos de segundo orden, se tiene que

$$\begin{aligned}
w_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} \left\{ n(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \sin(\theta) \right\} [x - r_0 \cos(\theta)] \right. \\
& - \left\{ \cos(\theta) + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \cos(\theta) - n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \sin(\theta) \right. \\
& \quad \left. + 2(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \cos(m\theta) \right\} [x - r_0 \cos(\theta)] \\
& \quad \left. + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos^2(\theta) \right. \\
& \quad \left. + \left\{ (r_0 \cos(\theta) \cos(\theta) + (n^2 + 1)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) \cos(\theta) \right. \right. \\
& \quad \quad - 2n[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \sin(\theta) \cos(\theta) \\
& \quad \quad + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) \cos(\theta) \\
& \quad \quad - n[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad \quad \left. + (n^2 + 1)[\alpha_n \cos(n\theta) \right. \\
& \quad \quad \left. + \beta_n \sin(n\theta)] \cos(\theta) \cos(\theta) \right\} \left. \right\} \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta \\
& + \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{3} n(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \cos(\theta) \right\} [y - r_0 \sin(\theta)] \\
& - \left\{ \sin(\theta) + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \sin(\theta) + n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \cos(\theta) \right. \\
& \quad \left. + 2(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \sin(\theta) \right\} [y - r_0 \sin(\theta)] \\
& \quad + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ (r_0 \sin(\theta) \sin(\theta) + (n^2 + 1)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + 2n[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + n[\alpha_n \sin(n\theta) - \beta_n \cos(n\theta)] \cos(\theta) \sin(\theta) \\
& \quad + (n^2 + 1)[\alpha_n \cos(n\theta) \\
& \quad + \beta_n \sin(n\theta)] \sin(\theta) \sin(\theta) \} \frac{1}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
w_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} n(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] \{ [x \sin(\theta) - y \cos(\theta)] \} \\
& - \left\{ (x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) + \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] (x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \right. \\
& \quad + n \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \sin(n\theta) - \frac{\beta_n}{r_0} \cos(n\theta) \right] (y \cos(\theta) - x \sin(\theta)) \\
& \quad + 2(n^2 + 1) \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] (x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \left. \right\} \\
& \quad + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \\
& + \left\{ r_0 + r_0 \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] + 2(n^2 + 1)r_0 \left[ \frac{\alpha_n}{r_0} \cos(n\theta) + \frac{\beta_n}{r_0} \sin(n\theta) \right] \right\} \\
& + \{ r_0 + (n^2 + 1)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] + [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \\
& \quad + (n^2 + 1)[\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)] \} \frac{1}{[q - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Organizando la expresión de un modo más adecuado, se obtiene

$$\begin{aligned}
w_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} 2r_0 - (x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \\
& \quad + \{ 3 + 4(n^2 + 1) \} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} \text{Cos}[(n+1)\theta] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} \text{Cos}[(n-1)\theta] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ -\left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} \text{Sin}[(n+1)\theta] \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \right\} \text{Sin}[(n-1)\theta] \\
& \quad \left. \right) \times \frac{1}{[q - 2r\rho \text{Cos}(\varphi - \theta)]^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

Encontrada esta expresión para la componente  $z$  del campo inducido dipolar. A continuación, se utiliza la expansión en Fourier (A2.3) y la ortogonalidad de las funciones involucradas para desarrollar las integrales en cuestión, tal que

$$\begin{aligned}
w_d = & \frac{3\Gamma e^2}{32\pi r_0} \int_0^{2\pi} (2r_0 \times \{A_0 + B_n \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[n(\varphi - \theta)] + C_n \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[n(\varphi - \theta)]\} \\
& - x \text{Cos}(\theta) \times \{A_1 \text{Cos}[(\varphi - \theta)] + B_{n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(n-1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -y\sin(\theta) \times \{A_1\cos[(\varphi - \theta)] + B_{n+1}\cos(n\theta)\cos[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{n-1}\cos(n\theta)\cos[(n-1)(\varphi - \theta)] + C_{n+1}\sin(n\theta)\cos[(n+1)(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{n-1}\sin(n\theta)\cos[(n-1)(\varphi - \theta)]\} \\
& + \{3 + 4(n^2 + 1)\}\alpha_n\cos(n\theta) \\
& \quad \times \{A_n\cos[n(\varphi - \theta)] + B_0\cos(n\theta) + B_{2n}\cos(n\theta)\cos[2n(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n}\sin(n\theta)\cos[2n(\varphi - \theta)]\} \\
& + \{3 + 4(n^2 + 1)\}\beta_n\sin(n\theta) \\
& \quad \times \{A_n\cos[n(\varphi - \theta)] + B_{2n}\cos(n\theta)\cos[2n(\varphi - \theta)] + C_0\sin(n\theta) \\
& \quad + C_{2n}\sin(n\theta)\cos[2n(\varphi - \theta)]\} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} - \frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad + \left. \left[ \left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} - \frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right) \right] \alpha_n \right\} \cos[(n+1)\theta] \\
& \quad \times \{A_{n+1}\cos[(n+1)(\varphi - \theta)] + B_1\cos(n\theta)\cos[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n+1}\cos(n\theta)\cos[(2n+1)(\varphi - \theta)] + C_1\sin(n\theta)\cos[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n+1}\sin(n\theta)\cos[(2n+1)(\varphi - \theta)]\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} - \frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad + \left. \left[ \left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} + \frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right) \right] \alpha_n \right\} \cos[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{A_{n-1}\cos[(n-1)(\varphi - \theta)] + B_1\cos(n\theta)\cos[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + B_{2n-1}\cos(n\theta)\cos[(2n-1)(\varphi - \theta)] + C_1\sin(n\theta)\cos[(\varphi - \theta)] \\
& \quad + C_{2n-1}\sin(n\theta)\cos[(2n-1)(\varphi - \theta)]\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ - \left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( - \frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad + \left[ - \left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( - \frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \left. \right\} \text{Sin}[(n+1)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n+1} \text{Cos}[(n+1)(\varphi-\theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi-\theta)] \\
& \quad + B_{2n+1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi-\theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi-\theta)] \\
& \quad + C_{2n+1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n+1)(\varphi-\theta)] \} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \left[ - \left( \frac{xn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( - \frac{x}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad + \left[ \left( \frac{yn(n^2+4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( - \frac{y}{r_0} (2n^2+3) \right) \right] \alpha_n \left. \right\} \text{Sin}[(n-1)\theta] \\
& \quad \times \{ A_{n-1} \text{Cos}[(n-1)(\varphi-\theta)] + B_1 \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi-\theta)] \\
& \quad + B_{2n-1} \text{Cos}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi-\theta)] + C_1 \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(\varphi-m\theta)] \\
& \quad + C_{2n-1} \text{Sin}(n\theta) \text{Cos}[(2n-1)(\varphi-\theta)] \} d\theta
\end{aligned}$$

Desarrollando las integrales

$$\begin{aligned}
w_d &= \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} (2r_0 \times \{ 2A_0 + B_n \text{Cos}(n\varphi) + C_n \text{Sin}(n\varphi) \} \\
& - x \times \left\{ A_1 \text{Cos}(\varphi) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \left( B_{\frac{n}{m}+1} \text{Cos} \left[ \left( \frac{n}{m} + 1 \right) \varphi \right] + B_{\frac{n}{m}-1} \text{Cos} \left[ \left( \frac{n}{m} - 1 \right) \varphi \right] + C_{\frac{n}{m}+1} \text{Sin} \left[ \left( \frac{n}{m} + 1 \right) \varphi \right] \right. \\
& \quad \left. + C_{\frac{n}{m}-1} \text{Sin} \left[ \left( \frac{n}{m} - 1 \right) \varphi \right] \right\} \\
& - y \times \left\{ A_1 \text{Sin}(\varphi) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \left( B_{n+1} \text{Sin}[(n+1)\varphi] - B_{n-1} \text{Sin}[(n-1)\varphi] - C_{n+1} \text{Cos}[(n+1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + C_{n-1} \text{Cos}[(n-1)\varphi] \right\} \\
& + \{ 3 + 4(n^2+1) \} \alpha_n \times \left\{ A_n \text{Cos}(n\varphi) + B_0 + \frac{1}{2} \left( B_{2n} \text{Cos}(2n\varphi) + C_{2n} \text{Sin}(2n\varphi) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\{3 + 4(n^2 + 1)\}\beta_n \times \left\{ A_n \sin(n\varphi) + C_0 + \frac{1}{2}(B_{2n} \sin(2n\varphi) - C_{2n} \cos(2n\varphi)) \right\} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n + \left[ \left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n+1} \cos[(n + 1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(B_1 \cos(\varphi) + B_{2n+1} \cos[(2n + 1)\varphi] - C_1 \sin(\varphi) + C_{2n+1} \sin[(2n + 1)\varphi]) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n + \left[ \left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n-1} \cos[(n - 1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(B_1 \cos(\varphi) + B_{2n-1} \cos[(2n - 1)\varphi] + C_1 \sin(\varphi) + C_{2n-1} \sin[(2n - 1)\varphi]) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n + \left[ -\left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n+1} \sin[(n + 1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(B_1 \sin(\varphi) + B_{2n+1} \sin[(2n + 1)\varphi] + C_1 \cos(\varphi) - C_{2n+1} \cos[(2n + 1)\varphi]) \right\} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n + \left[ \left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( m - \frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times \left\{ A_{n-1} \sin[(n - 1)\varphi] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left( -B_1 \sin(\varphi) + B_{2n-1} \sin \left[ \left( \frac{2n}{m} - 1 \right) \varphi \right] + C_1 \cos(\varphi) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - C_{2n-1} \cos[(2n - 1)\varphi] \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A3.5}$$

Reorganizando la expresión de una manera más compacta, se obtiene

$$w_d = \frac{3\Gamma e^2}{32r_0} (4r_0 A_0 - r A_1)$$

$$\begin{aligned}
& +2r_0\{B_n\cos(n\varphi) + C_n\sin(n\varphi)\} + \{3 + 4(n^2 + 1)\}A_n[\alpha_n\cos(n\varphi) + \beta_n\sin(n\varphi)] \\
& \quad - \frac{1}{2}r(B_{n+1} + B_{n-1})\cos(n\varphi) - \frac{1}{2}r(C_{n+1} + C_{n-1})\sin(n\varphi) \\
& \quad - \frac{1}{2}\left\{\left[-\left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) + \left(-\frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\beta_n\right. \\
& \quad \quad \left. + \left[\left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) - \left(-\frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\alpha_n\right\}A_{n+1}\cos[(n + 1)\varphi] \\
& \quad + \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) + \left(-\frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\beta_n\right. \\
& \quad \quad \left. + \left[\left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) + \left(-\frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\alpha_n\right\}A_{n-1}\cos[(n - 1)\varphi] \\
& \quad + \frac{1}{2}\left\{\left[-\left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) + \left(-\frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\beta_n\right. \\
& \quad \quad \left. + \left[-\left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) + \left(-\frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\alpha_n\right\}A_{n+1}\sin[(n + 1)\varphi] \\
& \quad - \frac{1}{2}\left\{\left[-\left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) - \left(-\frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\beta_n\right. \\
& \quad \quad \left. + \left[\left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right) + \left(-\frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\right]\alpha_n\right\}A_{n-1}\sin[(n - 1)\varphi] \\
& \quad + \frac{1}{2}\left(\left[\left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right)\beta_n + \left(-\frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\alpha_n\right]B_1\right. \\
& \quad \quad \left. + \left[\left(-\frac{x}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\beta_n - \left(\frac{yn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right)\alpha_n\right]C_1\right)\cos(\varphi) \\
& \quad + \frac{1}{2}\left(\left[-\left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right)\beta_n + \left(-\frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\alpha_n\right]B_1\right. \\
& \quad \quad \left. + \left[\left(-\frac{y}{r_0}(2n^2 + 3)\right)\beta_n + \left(\frac{xn(n^2 + 4)}{r_0 \cdot 3}\right)\alpha_n\right]C_1\right)\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\{3 + 4(n^2 + 1)\} \left\{ (\alpha_n B_0 + \beta_n C_0) + \frac{1}{2} (\alpha_n B_{2n} - \beta_n C_{2n}) \text{Cos}(2n\varphi) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (\beta_n B_{2n} + \alpha_n C_{2n}) \text{Sin}(2n\varphi) \right\} \\
& - \frac{1}{4} \left\{ \left[ -\left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n + \left[ \left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times (B_{2n+1} \text{Cos}[(2n + 1)\varphi] + C_{2n+1} \text{Sin}[(2n + 1)\varphi]) \\
& + \frac{1}{4} \left\{ \left[ \left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n + \left[ \left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times (B_{2n-1} \text{Cos}[(2n - 1)\varphi] + C_{2n-1} \text{Sin}[(2n - 1)\varphi]) \\
& + \frac{1}{4} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n + \left[ -\left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times (B_{2n+1} \text{Sin}[(2n + 1)\varphi] - C_{2n+1} \text{Cos}[(2n + 1)\varphi]) \\
& - \frac{1}{4} \left\{ \left[ -\left( \frac{xn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{x}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \beta_n \right. \\
& \quad \left. + \left[ \left( \frac{yn(n^2 + 4)}{r_0} \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{y}{r_0} (2n^2 + 3) \right) \right] \alpha_n \right\} \\
& \quad \times (B_{2n-1} \text{Sin}[(2n - 1)\varphi] - C_{2n-1} \text{Cos}[(2n - 1)\varphi])
\end{aligned} \tag{A3.5a}$$

#### A4. Coeficientes de Fourier

En este apéndice se definen los coeficientes de Fourier, correspondientes a la expansión del término  $\frac{1}{[q-2rr_0 \text{Cos}(\varphi-\theta)]^{3/2}}$ . El cual interviene tanto en la definición del potencial como en la del campo inducido asociado. Estos coeficientes son obtenidos a partir de los coeficientes encontrados en la sección 3.2 para el caso del vórtice anular. Sin embargo, la diferencia de éstos con los coeficientes aquí establecidos, es la dependencia con los parámetros de la perturbación  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ . Por lo anterior, la expansión de Fourier para este caso fue supuesta tal como se estipula en la ecuación (A2.3), donde

$$\sum_s^{\infty} (A_s + B_s \cos(n\theta) + C_s \sin(n\theta) + D_s \cos(2n\theta) + E_s \sin(2n\theta)) \cos[s(\varphi - \theta)] \quad (A2.3)$$

Para determinar los coeficientes  $(A_s, B_s, C_s, D_s, E_s)$ , se definirá  $S'_n = \frac{1}{(2r\rho)^{3/2}} c_n$ , tal que la expansión toma la forma

$$\frac{1}{[q - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta)]^{3/2}} = S'_0 + S'_1 \cos(\varphi - \theta) + \dots + S'_n \cos[n(\varphi - \theta)]$$

Donde  $q = r^2 + \rho(\theta)^2 + \xi(\theta)^2$ , una expansión en Taylor de  $S'_n$  alrededor de  $\rho = r_0$  y  $\xi = z - \mathfrak{z}$ , define  $S_n = S'_n(\rho = r_0, \xi = z - \mathfrak{z})$ . Entonces, a partir de Thomson (1883) se encuentra que la expansión en Taylor resulta dada en términos de ordenes diferentes de los parámetros  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ , acorde con la forma de la ecuación A2.3, tal que por comparación se tienen las siguientes definiciones, (Thomson, 1883 p.29)

$$A_n = S_n \quad (A4.1a)$$

$$B_n = \alpha_n \frac{\partial S_n}{\partial a} - \gamma_n \frac{\partial S_n}{\partial z} \quad (A4.1b)$$

$$C_n = \beta_n \frac{\partial S_n}{\partial a} - \delta_n \frac{\partial S_n}{\partial z} \quad (A4.1c)$$

$$D_n = \frac{1}{4} \left\{ (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \frac{\partial^2 S_n}{\partial a^2} - 2(\alpha_n \gamma_n + \beta_n \delta_n) \frac{\partial^2 S_n}{\partial a \partial z} + (\gamma_n^2 + \delta_n^2) \frac{\partial^2 S_n}{\partial z^2} \right\} \quad (A4.1d)$$

$$E_n = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_n \beta_n^2 \frac{\partial^2 S_n}{\partial a^2} - (\alpha_n \delta_n + \gamma_n \beta_n) \frac{\partial^2 S_n}{\partial a \partial z} + \gamma_n \delta_n \frac{\partial^2 S_n}{\partial z^2} \right\} \quad (A4.1e)$$