

TESIS DEFENDIDA POR

Ruben Dario Suaza Jaque

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes

Director del Comité

Dr. Jesús Manuel Figueroa Rodríguez

Miembro del Comité

Dr. Alejandro Francisco Parés Sierra

Miembro del Comité

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

Miembro del Comité

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres

*Coordinador del programa de
posgrado en Oceanografía Física*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

2 de julio de 2013

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN OCEANOGRAFÍA FÍSICA**

**MÉTODO DE VÓRTICE EN CELDA TRIDIMENSIONAL PARA EL
ESTUDIO DE VÓRTICES SINFÍN**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

RUBEN DARIO SUAZA JAQUE

Ensenada, Baja California, México, Julio de 2013

RESUMEN de la tesis de **RUBEN DARIO SUAZA JAQUE**, presentada como requisito en la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA . Ensenada, Baja California, Julio de 2013.

MÉTODO DE VÓRTICE EN CELDA TRIDIMENSIONAL PARA EL ESTUDIO DE VÓRTICES SINFÍN

Resumen aprobado por:

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes

Director de Tesis

El método de vórtice en celda (VIC) es un modelo numérico usado en dinámica de fluidos, el cual se basa en una descripción lagrangiana de la vorticidad y euleriana de la velocidad para describir la evolución de un fluido incompresible y homogéneo. En este trabajo se desarrolla este modelo para el estudio tridimensional de vórtices, ya que las ventajas de este método sobre los demás son que permite reducir el tiempo de cómputo, incluye implícitamente efectos viscosos y no mantiene la conectividad entre elementos de vorticidad. La validación del modelo se llevó a cabo mediante el estudio del vórtice anular, ya que su dinámica bajo la condición de ser delgado es bien conocida. Para el cálculo de la velocidad de traslación del vórtice se obtuvo que el modelo aproxima en un 95.5% la velocidad teórica de un remolino de razón de aspecto $r_0/R = 0.1$ (r_0 es el radio del núcleo y R el radio del remolino). Por otra parte, las características de VIC permiten el estudio de la interacción tridimensional de vórtices en un flujo viscoso, por lo que en este trabajo se estudian los procesos de reconexión de dos vórtices de Rankine en una configuración ortogonal. El estudio de reconexión se realizó en términos de la separación entre los dos remolinos y se encontró que los procesos de reconexión cambian conforme la separación entre éstos aumenta. Además se cuantificó el tiempo en que se presenta la reconexión en función de la separación entre los vórtice y se obtuvo que este tiempo aumenta conforme la distancia entre los vórtices es mayor.

Palabras Clave: Método de vórtice, lagrangiana, euleriana, reconexión.

ABSTRACT of the thesis presented by **RUBEN DARIO SUAZA JAQUE**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of MASTER IN SCIENCES in PHYSICAL OCEANOGRAPHY . Ensenada, Baja California, July 2013.

THREE-DIMENSIONAL VORTEX-IN-CELL METHOD FOR THE STUDY OF ENDLESS VORTEX

The vortex-in-cell method (VIC) is a numerical model used in fluid dynamics. It is based on a Lagrangian description of the vorticity and on an Eulerian description of the velocity to depict the evolution of an incompressible and homogeneous fluid. We develop a VIC model to study three-dimensional vortices, since the advantages of this method over others is that it allows to reduce computer time, it includes implicitly viscous effects and it does not keep connection between vortex particles. Validation of the method was made with the vortex ring because its dynamics under certain conditions is well-known. We achieved to approximate in a 95.5% the theoretical velocity of a vortex with aspect ratio $r_0/R = 0.1$ (r_0 is the radius of the core y R the radius of the vortex). The characteristics of the VIC method enables us to study the tridimensional interaction of vortices in a viscous flow, thus in this work we study the reconnection process of two orthogonal Rankine vortices. The study of reconnection is made as a function of the separation between the two vortices. It was found that the reconnection process changes with the increase of the distance between the vortices. Furthermore we quantify the time in which the reconnection occurs as a function of the separation and it is found that the time increases with the separation increases.

Keywords: Vortex method, lagrangian, eulerian, reconnection.

*A mi madre por ser la luz
que motiva gran parte de
mi vida*

Agradecimientos

A Oscar Uriel Velasco por su orientación, discusión e ideas en la elaboración de esta tesis. Por ser un excelente profesor que siempre está dispuesto a colaborar y resolver dudas para el grato aprendizaje de los temas tratados en sus cursos.

Al Dr. Alejandro Parés, Dr. Manuel Figueroa y al Dr. Gilberto López por formar parte del comité de tesis. Sus comentarios y sugerencias guiaron la elaboración de esta tesis.

A todos los investigadores que con sus cursos ayudaron a mi formación académica y a encontrar el camino hacia mi tema de investigación.

A Marlon Alejandro por su amistad y compañía que se encargaron de auxiliarme en las tardes tristes y oscuras.

A Vladimir Toro por su colaboración y amistad durante mi estadía en Ensenada.

Al CONACyT por su apoyo económico, ya que sin él no hubiera sido posible realizar esta maestría.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	xii
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1 Preliminares Teóricos	3
II. VÓRTICE EN CELDA	6
II.1 Distribución de Partículas	9
II.2 Interpolación	11
II.3 Ecuaciones en la malla	15
II.4 Interpolación de la velocidad y su gradiente	18
II.5 Vorticidad Libre de Divergencia	18
II.6 Integración numérica	19
II.7 Difusión por Interpolación	20
III. VALIDACIÓN	22
III.1 Vórtice Anular	22
III.2 Velocidad de Traslación	25
III.3 Energía, Helicidad y Divergencia	27
III.4 Número de Reynolds Efectivo	32
III.5 Aspectos del Modelo VIC	34
III.5.1 Discretización Lagrangiana	34
III.5.2 Discretización Euleriana	37
III.5.3 Condiciones de Frontera	39
III.6 VIC-2D: Fusión y Rotación de Remolinos	40
IV. RECONEXIÓN DE VÓRTICES DE RANKINE ORTOGONALES	44
IV.1 Topología y Viscosidad en la Reconexión	46

Contenido (continuación)

	Página
IV.2 Vórtices de Rankine Ortogonales	49
IV.2.1 Condición Inicial	49
IV.2.2 Vórtices en Contacto	49
IV.2.3 Vórtices Separados	57
V. CONCLUSIONES	64
REFERENCIAS	66

Lista de Figuras

Figura		Página
1	A. Representación de la discretización del campo de vorticidad mediante un conjunto de N_p partículas. B. Imagen de la discretización de la vorticidad para un vórtice anular.	7
2	Diagrama de flujo para el modelo numérico VIC-3D	8
3	A. Representación del vórtice anular, el cual puede formarse por medio de un cilindro que se cierra sobre sí mismo; se ilustra el plano poloidal P1 y el plano toroidal P2. B. Distribución de partículas de vorticidad en el núcleo del vórtice anular, plano P1. C. Representación del núcleo de vorticidad con partículas ubicadas en dos aros, esto corresponde a un total de 25 partículas, las cuales tienen la misma área.	10
4	A. Vórtice anular representado por partículas de vorticidad. B. Sección poloidal P1 del vórtice anular. C. Sección toroidal P2 del vórtice anular.	11
5	Esquema de asignación de vorticidad TSC (Triangular shape Cloud) en una dimensión, éste usa tres puntos de malla y la forma de la asignación parece una pirámide, que asigna la porción que cae en cada celda al punto de malla correspondiente.	13
6	Magnitud de la vorticidad en la sección poloidal del vórtice anular. A. Interpolada mediante el esquema <i>CIC</i> . B. Interpolada mediante el esquema <i>TSC</i> . C. Diferencia entre contornos B. y C.	14
7	Magnitud de la vorticidad en la sección meridional del vórtice anular. A. Interpolada mediante el esquema <i>CIC</i> . B. Interpolada mediante el esquema <i>TSC</i> . C. Diferencia entre contornos B. y C.	15
8	Vorticidad de 8100 partículas interpoladas en una malla de 64^3 puntos mediante el esquema TSC, la vorticidad de cada partícula es 1. A. Remolino representado por isosuperficie de la vorticidad de valor 1, además planos de intercepción poloidal P1 y meridional P2. B. Magnitud de la vorticidad en plano P1. C. Magnitud de la vorticidad en plano P2. La barra de colores corresponde a las tres figuras.	23

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
9	<p>A. Vista tridimensional de la evolución de un vórtice anular de radio $R = 1$, núcleo $r_0 = 0.2$ y vorticidad de magnitud $\omega = 1$. La evolución corresponde a tres tiempos, $T^* = (0, 4, 8)$, los cuales se adimensionalizan con el tiempo T_R que gasta el remolino en recorrer una distancia igual a su radio. El vórtice evoluciona de la posición inicial de coordenada $Y = 7\pi/4$ hacia $Y = 0$ y en los tres casos se muestra el centro de masa del anillo (color rojo). B Vista en el plano ZY y corresponde a los mismos tiempos de evolución.</p>	24
10	<p>Posición del vórtice anular como función del tiempo (línea negra) simulado por el modelo VIC; el vórtice tiene radio $R = 1$, núcleo de radio 0.2 y vorticidad de magnitud $\omega = 1$. Se usan $N_p = 8100$ partículas para representar el vórtice y cada una de vorticidad unitaria. En rojo se presenta el ajuste con el fin de determinar la velocidad con la cual se desplaza el anillo, que corresponde a $U_{EP} = -0.0311$ y se basa en información de las partículas de vorticidad. El tiempo es adimensionalizado con el tiempo T_R que gasta el remolino en recorrer una distancia igual a su radio. . .</p>	26
11	<p>Energía cinética K (en porcentaje de su valor inicial K_0) como función del tiempo T^* para el vórtice anular simulado por el método VIC y descrito en la figura 10.</p>	28
12	<p>La helicidad como función del tiempo T^* para el vórtice anular simulado por el método VIC y descrito en la figura 10.</p>	29
13	<p>Divergencia de los campos como función del tiempo para el vórtice anular descrito en la figura 10. A. Divergencia de la vorticidad filtrada. B. Divergencia del campo de velocidades. C. Divergencia del potencial vectorial. D. Divergencia de la vorticidad (azul) y potencial vectorial (roja) para el caso que no se aplica el filtro de vorticidad descrito en la sección II.6. En los cuatro casos las divergencias son adimensionalizadas con el radio del remolino R y la magnitud de la vorticidad inicial. . . .</p>	30
14	<p>A. El vórtice anular y el plano normal al eje z sobre el cual se calcula la circulación y el impulso angular, los parámetros del remolino corresponden a los descritos en la figura 10. B. Razón entre la circulación y su valor inicial calculadas con información de la malla y en el plano mostrado en A, la circulación inicial se diferencia en un 0.8% con la asignada al remolino mediante partículas de vorticidad.</p>	32

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
15	A. Se gráfica la razón entre el momento angular y su valor inicial para el remolino descrito en la figura 10 y basados en la información del plano representado en la figura 14.A. B. Número de Reynolds efectivo como función del tiempo T^* , la línea azul representa el valor promedio $\bar{Re}^{eff} = 35000$	33
16	Cociente de la velocidad experimental y teórica en función del número de partículas de vorticidad que representan un vórtice anular, el cual tiene radio $R = 1$, núcleo de radio 0.2 y que se simula en una malla de 64^3 puntos. A. Se varia el número de partículas en el núcleo y se mantienen $N_l = 100$. B. Se mantienen $N_n = 81$ partículas en el núcleo y se varían estas en cada línea de vorticidad. En ambos casos se ilustra el tiempo de computo que gasta el modelo en realizar un solo ciclo de operaciones.	35
17	Colocación de partículas de vorticidad en el núcleo de un vórtice anular de radio $R = 1$ y medida de núcleo 0.3. Los cinco núcleos representan variación de n_a aros de 2 a 6, es decir, de 25 a 169 partículas. Se ilustran también los contornos de la magnitud de la vorticidad en una malla con 64 puntos y un espaciamiento $h = 0.098$, además en la parte superior se presenta la densidad de partículas por cada celda en el núcleo N_{pc}	36
18	Contornos de la magnitud de la vorticidad para el núcleo del remolino anular. A. Se usa una malla con 64^3 puntos y un espaciamiento $h = 0.098$. B. malla de 128^3 puntos con $h = 0.049$. C. 256^3 puntos de malla y espacio de malla $h = 0.0245$. El radio del núcleo del remolino en los tres casos es $r_0 = 0.1$ y se mantiene una densidad de partículas por celda de malla mayor que cinco.	37
19	Simulación de la interacción de dos vórtices de Rankine idénticos por medio del método VIC tridimensional. Se usan 16900 para representar cada vórtice, éstas son organizadas en 169 filamentos cada uno de los cuales contiene 100 partículas. Lo que se evidencia es un proceso de fusión entre los remolinos, ya que la razón entre la separación y el radio de los remolinos es 2.5, y es menor que el valor crítico. En A. Se ilustra la evolución en el plano normal al eje z. En B. Se presenta la evolución en el espacio tridimensional. El tiempo T^* en cada caso es adimensionalizado por el período de giro del vórtice de Rankine.	41

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
20	La misma situación descrita en la figura 18, con la diferencia que la razón entre la separación y el radio del remolino es 4, por lo que se evidencia un proceso de rotación entre los remolinos.	43
21	A. Esquema que presenta la reconexión de líneas de vorticidad. B. Diagrama que presenta la evolución de líneas de vorticidad y elementos de fluido bajo la acción del campo de velocidades.	47
22	Evolución de dos vórtices de Rankine ortogonales y en contacto, los vórtices son representados por partículas de vorticidad y sus parámetros son descritos en la sección IV.2.1	50
23	Evolución de dos vórtices de Rankine ortogonales y en contacto, los vórtices son representados por la isosuperficie de la vorticidad $\omega = 0.4\omega_0$ y sus parámetros son descritos en la sección IV.2.1	51
24	Fracción de la circulación en plano, $x = 13\pi/32$, donde los remolinos se conectan. A. La circulación se evalúa en el plano completo. B. La circulación se evalúa en la región del plano donde se presenta el proceso de reconexión.	53
25	Evolución de los contornos de la vorticidad en la región del plano (y, z) donde se presenta el proceso de reconexión, la coordenada x del plano es $13\pi/32$	54
26	Evolución de cantidades integrales. A. Energía B. Helicidad C. Enstrofía. En todos los casos se presenta la fracción de la cantidad integral sobre su valor inicial.	56
27	Evolución de dos vórtices de Rankine en una configuración ortogonal y con una fracción de separación $d/r = 3$. Los vórtices son representados por la isosuperficie de la vorticidad $\omega = 0.4\omega_0$ y sus parámetros son descritos en la sección IV.2.1	58
28	Fracción de la circulación, en la región del plano normal al eje x donde los remolinos se conectan, para cada fracción de separación d/r , que se especifica en la barra de colores.	59
29	Evolución de cantidades integrales para diferente separación entre los vórtices. A. Energía B. Helicidad C. Enstrofía. En todos los casos se presenta la fracción de la cantidad integral sobre su valor inicial y se presenta la barra de colores para cada separación entre los remolinos.	61

30	Tiempo de reconexión T_R (línea negra continua) como función de la fracción de separación d/r entre dos vórtices. La línea azul corresponde al tiempo en que inicia el proceso de reconexión T_i , la línea roja al tiempo en que finaliza T_f y la línea negra (discontinua) al intervalo en que se da el proceso.	63
----	---	----

Lista de Tablas

Tabla	Página
I Velocidad del vórtice anular para diferentes resoluciones.	38

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

En la mecánica de fluidos la descripción del flujo depende de la manera en la cual estén expresadas las ecuaciones de movimiento, ya sea en una representación Euleriana que usa puntos fijos del espacio o Lagrangiana que usa partículas para seguir el movimiento del fluido. Estas descripciones han jugado un papel fundamental en el desarrollo de métodos computacionales que son una alternativa para el estudio de fenómenos descritos por ecuaciones de movimiento cuya solución analítica no es posible debido a su complejidad; en el caso de los fluidos, por ejemplo, son paradigmáticas la ecuación de Navier-Stokes y la de Euler. Entre los métodos computacionales desarrollados están los que usan información de la malla (Eulerianos), por ejemplo los métodos de diferencias finitas, elemento finito, volumen finito, entre otros; tales métodos están sujetos a condiciones de estabilidad en el tiempo debido a los términos advectivos presentes en la ecuación de movimiento. Por otro lado están los métodos que usan trazadores para determinar las características del flujo (Lagrangianos) los cuales, bajo ciertas condiciones del flujo permiten describir la dinámica sin la presencia de términos no lineales en las ecuaciones de movimiento.

De los métodos lagrangianos en la dinámica de fluidos encontramos los métodos de vórtices, los cuales utilizan a la vorticidad como trazador, debido a que en muchos flujos incompresibles con altos números de Reynolds la vorticidad es una cantidad concentrada e invadida por flujo irrotacional. Así una de las formas en las que se basan los métodos de vórtices es expresar el campo de vorticidad como un conjunto

discreto de filamentos de vórtices, para los cuales es posible determinar su evolución usando la ley de Biot-Savart, siempre que el flujo se considere inviscido. Sin embargo la dinámica de todo fluido real está caracterizada por la presencia de efectos viscosos los cuales son fundamentales en la dinámica del flujo, como en el caso de la interacción de anillos de vórtices en los que se presentan procesos de reconexión (Kida y Takaoka, 1994). La reconexión es un mecanismo que altera la estructura topológica del campo de vorticidad y se presenta únicamente en flujos tridimensionales. Por tal motivo para su estudio se hace necesaria la aplicación de modelos numéricos que permitan incluir efectos viscosos y describir la evolución tridimensional de la vorticidad en el menor tiempo de cómputo. En métodos computacionales de vórtices, el modelo de vórtice en celda (VIC) satisface estas necesidades.

El método VIC fue introducido por Christiansen (1973), quién construyó el primer código para problemas en dos dimensiones en 1970 y lo aplicó en 1973 para el estudio de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz bidimensional (Christiansen, 1973; Stock, 2007), desde entonces el modelo ha sido usado ampliamente para el estudio de flujos bidimensionales (Velasco Fuentes, 2001, 2005). En 1981 se usa por primera vez el modelo VIC para el estudio de problemas tridimensionales (Couët *et al.*, 1981), en éste se usaron filamentos de vórtices con el fin de estudiar la evolución de vórtices anulares, pero se encontraron irregularidades en la predicción de la velocidad axial. Posteriormente Zawadski y Aref (1991) presentan un modelo VIC-3D en el cual usan partículas de vorticidad para simular colisiones de anillos; y evidencian así los mecanismos que permiten la reconexión de vórtices (Zawadski y Aref, 1991), que son el interés de este trabajo.

Las ventajas del método VIC sobre los métodos que usan la ley de Biot-Savart radica en la disminución del tiempo de cómputo, debido a que el número de operaciones para

N elementos escala como $N \log_2 N$ por lo que es más rápido; la inclusión de efectos viscosos, que implícitamente introduce el modelo y es el resultado de interpretar el error numérico como un proceso de difusión en el flujo; y por último, en este modelo la conectividad entre los elementos de vorticidad no es mantenida, lo cual permite que la sección transversal de los filamentos de vorticidad sea deformable. Estas características del método VIC lo hace una herramienta fundamental para llevar a cabo los objetivos del proyecto de investigación “Estudio numérico de vórtices sinfín” que se realiza en (CICESE). El proyecto busca un estudio tridimensional basado en simulación numérica de la dinámica de remolinos cuyo eje de rotación es una curva sin principio ni final. La relevancia del proyecto es incluir los efectos de la viscosidad y permitir que la sección transversal del remolino sea deformable. Como parte del proyecto de investigación, en este trabajo se desarrolla el modelo numérico VIC tridimensional basados en el modelo de Zawadski y Aref (1989). El segundo objetivo de este trabajo es validar el modelo numérico, para lo cual nos valemos del conocimiento teórico del remolino anular. Además, debido a que el modelo VIC es eficaz para simular flujos viscosos tridimensionales, una vez construido el modelo, se usa para estudiar los mecanismos de la reconexión entre vórtices. Este es un fenómeno que se presenta únicamente en este tipo de flujos y describir sus procesos es de gran importancia para la mecánica de fluidos. Para tal fin, se estudia la interacción de dos vórtices tubulares infinitos en términos de su separación y en una configuración ortogonal entre sí.

I.1 Preliminares Teóricos

El propósito de la mecánica de fluidos computacional es lograr una aproximación numérica a la solución de las ecuaciones que describen la dinámica del flujo de un

fluido. En el caso de un fluido incompresible, inviscido, homogéneo y sujeto sólo a la acción de fuerzas conservativas, la dinámica la describen la ecuación de Euler y la de continuidad

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

De estas ecuaciones se requiere el cálculo de las tres componentes de velocidad \mathbf{u} y de la presión p . Una alternativa para resolver este sistema es usar la conexión entre vorticidad y velocidad, ya que dada la importancia de la vorticidad en la dinámica del flujo resulta mejor describir éste en términos de la evolución de la vorticidad, definida como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (3)$$

Además también se relaciona con la circulación, concepto introducido por Kelvin en 1868, y que establece que la circulación Γ alrededor de una curva C es igual al flujo de las líneas de vorticidad a través de la superficie A delimitada por C , es decir

$$\Gamma = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A}. \quad (4)$$

Por otra parte, existe un número de condiciones suficientes para permitir la inversión de la ecuación (3) y poder determinar así la velocidad, pero para tal fin es necesario conocer la evolución del campo de vorticidad, la cual se obtiene al tomar el rotor de la ecuación (1) y que se conoce como la ecuación de vorticidad de Helmholtz

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (5)$$

la cual mediante las restricciones anteriores satisface los teoremas publicados por Helmholtz en 1858, a saber:

- Las líneas de vorticidad se mueven con el fluido
- La circulación en un tubo de vorticidad es constante a lo largo de su longitud
- La intensidad de un tubo de vorticidad permanece constante en el tiempo

Por los anteriores teoremas se tiene que el movimiento de la vorticidad es dado por la velocidad local del fluido, la cual se determina cinemáticamente a partir del campo de vorticidad, ecuación (3).

La ecuación de momento (5) (vorticidad-velocidad) tiene la ventaja de que no contiene a la presión y además satisface automáticamente la ecuación de continuidad; la simplificación obtenida con ésta es usada para el diseño de métodos numéricos que permiten la solución de las ecuaciones de Euler. En la medida que se sigue la traslación y la deformación de los elementos de fluido portadores de vorticidad, y debido a que (5) es el resultado de la aplicación de los teoremas de Helmholtz, se logra obtener una descripción cinemática y dinámica del comportamiento del fluido. Lo anterior es la base de los métodos de vórtices, ya que considera los elementos de fluido portadores de vorticidad como elementos computacionales mediante los cuales se describe el flujo (Cottet y Koumoutsakos, 2000).

Capítulo II

VÓRTICE EN CELDA

Para la construcción del modelo VIC consideramos un flujo incompresible con densidad constante y dominio periódico en cada una de sus tres direcciones cartesianas. La función vectorial $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es la posición de una partícula lagrangiana y $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ el vector de vorticidad asociado, de manera que la ecuación que describe la evolución de $\mathbf{x}(t)$ es

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{u} \quad (6)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad local del fluido. Ya que la partícula se desplaza a través del flujo, la vorticidad llevada por ésta evoluciona según la ec.(5), que en la representación lagrangiana se escribe como

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (7)$$

donde $\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}$ denota la derivada material de la vorticidad y el término $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ representa el estiramiento y doblamiento de las líneas de vorticidad. El objetivo es hallar una aproximación numérica que permita describir la dinámica del flujo a partir de la ec.(7). Para tal fin, el dominio se divide en un conjunto de cubos pequeños e iguales, cada uno de tamaño $h \times h \times h$, los cuales se denominan celdas y cuyos vértices forman una malla regular inmersa en el espacio que ocupa el fluido. Se discretiza el campo continuo de vorticidad por un conjunto de N_p partículas cada una con vorticidad $\boldsymbol{\omega}_n$ y etiquetada con un subíndice n . Cada partícula de vorticidad se identifica en el espacio por su vector posición \mathbf{x}_n y el arreglo inicial de las partículas dependerá de la forma de la región de vorticidad preestablecida, como muestra la figura 1.

El arreglo inicial de partículas en este caso es el correspondiente al de un vórtice anular, como se muestra en la figura 1.B, donde las líneas de vorticidad son una representación de la forma de éste. Conforme el flujo evolucione las partículas se moverán con la velocidad local del fluido, que como sabemos es una consecuencia del teorema de Helmholtz, es decir que las líneas de vorticidad son líneas materiales.

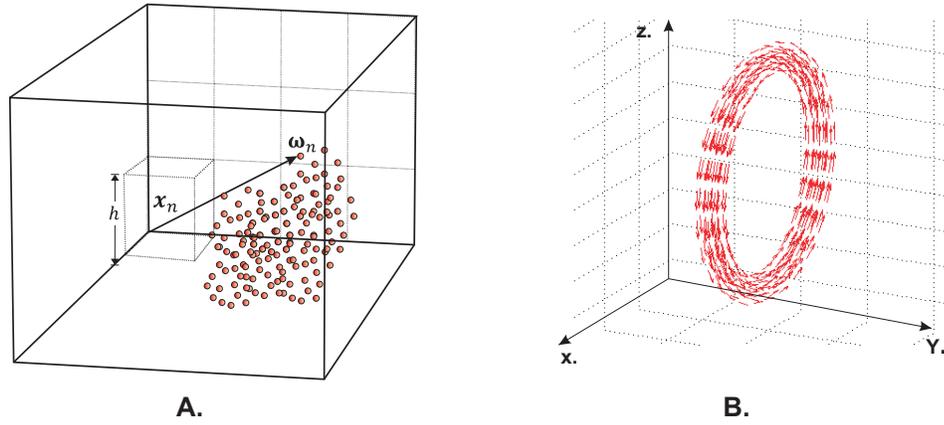


Figura 1. **A.** Representación de la discretización del campo de vorticidad mediante un conjunto de N_p partículas. **B.** Imagen de la discretización de la vorticidad para un vórtice anular.

El conjunto de N_p funciones \mathbf{x}_n y $\boldsymbol{\omega}_n$ constituyen una descripción completa de la evolución del campo continuo de vorticidad, por lo que es necesario integrar el conjunto de ecuaciones (6) y (7) para conocer su comportamiento. Las ecuaciones se etiquetan con el subíndice n correspondiente a la partícula de vorticidad $\boldsymbol{\omega}_n$,

$$\frac{D\mathbf{x}_n}{Dt} = \mathbf{u}_n \quad ; \quad \frac{D\boldsymbol{\omega}_n}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n$$

donde \mathbf{u}_n es el valor de la velocidad correspondiente a la localización \mathbf{x}_n de la n -ésima partícula y $(\boldsymbol{\omega}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n$ es el valor de $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ evaluado en \mathbf{x}_n . Por otra parte, la condición de incompresibilidad ec.(2) asegura la existencia de un vector potencial \mathbf{A} definido de manera usual por

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8)$$

y su relación con la vorticidad se obtiene al sacar el rotor de ec.(8)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}, \quad (9)$$

donde se supone que $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ec.(6) y ec.(7) es necesario conocer el campo de velocidad \mathbf{u} en ec.(6) y sus derivadas en ec.(7), para lo cual nos valemos de ec.(8) y ec.(9) y sus respectivas soluciones en la malla. De esta forma el modelo VIC es un método híbrido, ya que combina los métodos de partículas con los de malla.

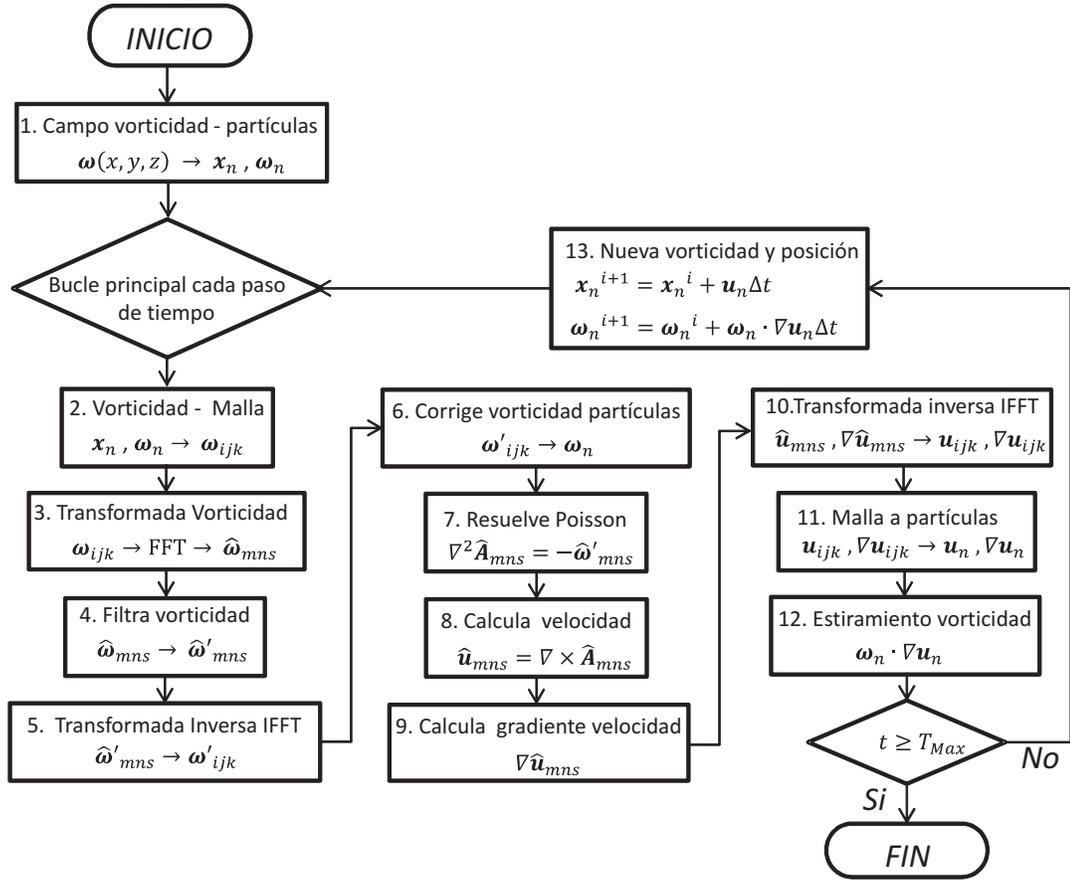


Figura 2. Diagrama de flujo para el modelo numérico VIC-3D

El modelo VIC se escribe en lenguaje de programación FORTRAN 95 y se usa el compilador de la plataforma Oracle Solaris Studio 12.3 para el sistema operativo Oracle

Linux. En la figura 2 se presenta el diagrama de flujo del modelo numérico VIC-3D; en la siguientes secciones se describen cada uno de los pasos y el procedimiento para resolver las tres ecuaciones de Poisson ec.(9) en la malla y después conocer la velocidad.

II.1 Distribución de Partículas

VIC es ideal para resolver problemas en los que la vorticidad está confinada en un número pequeño de tubos. El primer paso es representar ese campo de vorticidad con un número finito de partículas.

A la hora de validar el modelo VIC se quiere representar una región de vorticidad constante en forma de dona, el vórtice anular, como se muestra en la figura 3.A. Ésta se puede ver como un tubo que se cierra sobre sí mismo y en cuyo núcleo la vorticidad es uniforme. Cuando se distribuyen las partículas para obtener la forma de la región de vorticidad, es necesario tener presente que a cada partícula se le asigna un volumen V_p el cual dependerá del volumen que tenga esta región y del número de partículas usadas. Además la distribución de las partículas debe ser tal que estas conserven el volumen de la región de vorticidad establecida, en este caso la del vórtice anular.

Lo primero que se hace es distribuir partículas en una región circular que formará el núcleo y en la que cada partícula forma parte de un filamento de vorticidad, de manera que las partículas se distribuyen como se muestra en la figura 3.B; en ésta, la línea roja representa la frontera del núcleo con radio r_0 y en azul las partículas, como se observa en la figura. Se han distribuido ocho partículas en un aro de radio dr y se ha colocado una partícula en el centro, esta distribución garantiza que todas las partículas representan la misma área $A_0 = \frac{\pi dr^2}{4}$ y su suma es la del núcleo de vorticidad, $A_n = \pi r_0^2$. Por lo que el radio del aro en relación con el del núcleo resulta ser $dr = \frac{2}{3}r_0$. Como vemos,

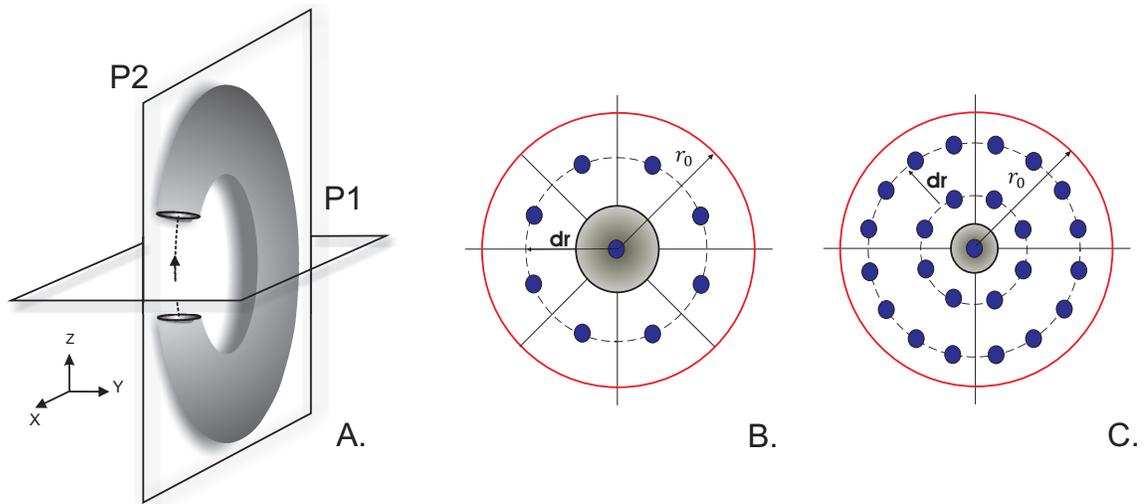


Figura 3. **A.** Representación del vórtice anular, el cual puede formarse por medio de un cilindro que se cierra sobre sí mismo; se ilustra el plano poloidal P1 y el plano toroidal P2. **B.** Distribución de partículas de vorticidad en el núcleo del vórtice anular, plano P1. **C.** Representación del núcleo de vorticidad con partículas ubicadas en dos aros, esto corresponde a un total de 25 partículas, las cuales tienen la misma área.

nueve partículas son pocas para representar una distribución continua, así que lo que se hace es distribuir partículas sobre n_a aros de manera que el número de partículas en cada aro será $8n_a$ y todas representan la misma área; la separación entre aros será dr y está dada por $dr = \frac{2r_0}{2n_a+1}$. Con esta configuración el número total de partículas que se usan para representar el núcleo es $N_n = 4n_a(n_a + 1) + 1$. En la figura 3.C se ilustra el caso en que se usan dos aros para tener un total de 25 partículas.

Ya que conocemos la forma en la que están distribuidas las partículas sobre el núcleo, sección poloidal P2 en la figura 3.A, el siguiente paso será distribuir cada una de las partículas a lo largo de la sección toroidal P2 del vórtice y que formarán parte de los filamentos de vorticidad. A lo largo de una línea que se cierra sobre sí misma, y que denominaremos línea central, cuyo radio R es el del vórtice anular, se asignará la partícula que se ubica en el centro del núcleo de vorticidad (ver figura 3.B). El objetivo es mantener el mismo volumen para cada partícula por lo que el perímetro de esta línea

$2\pi R$ se distribuye en N_l partículas, de manera que el volumen de una partícula en la línea central será $V_p = A_0\Delta l$ con $\Delta l = 2\pi RN_l^{-1}$ y debe ser el mismo para partículas que pertenecen a una línea diferente. De esta manera, a la línea de vorticidad j con radio R_j le corresponden $N_j = \frac{R_j}{R}N_l$ partículas. Con lo anterior, lo que se completa es una distribución que garantiza que todas las partículas tengan el mismo volumen.

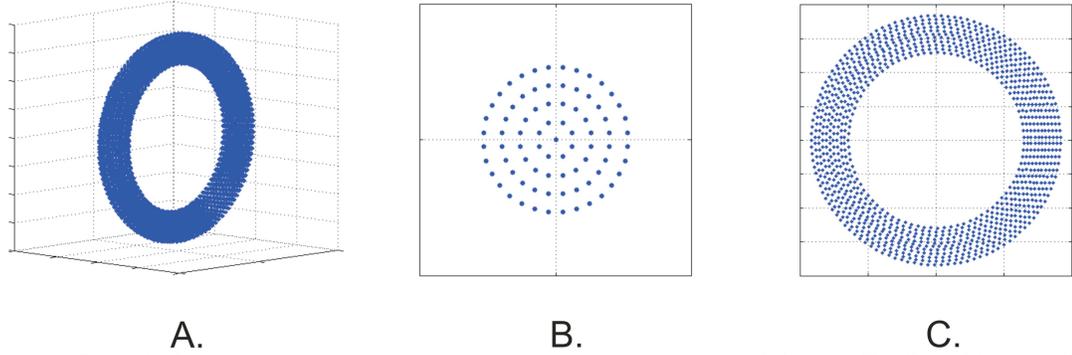


Figura 4. **A.** Vórtice anular representado por partículas de vorticidad. **B.** Sección poloidal P1 del vórtice anular. **C.** Sección toroidal P2 del vórtice anular.

En la figura 4 se ilustra el vórtice anular representado por partículas de vorticidad, también las secciones poloidal y toroidal de éste, con el objetivo de ver la forma en la cual se distribuyen las partículas.

II.2 Interpolación

En cualquier instante se conoce el campo de vorticidad en la malla al distribuir la vorticidad de cada partícula sobre los nodos de su correspondiente celda, lo cual se logra con un método de interpolación. Así lo que se busca es estimar el vector vorticidad, $\boldsymbol{\omega}_m$, en cierta posición de la malla, \boldsymbol{x}_m , como una contribución de todas las partículas, es decir

$$\boldsymbol{\omega}_m(\boldsymbol{x}_m) = \sum_n \frac{V_n}{h^3} \boldsymbol{\omega}_n \mathbf{W}(\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n). \quad (10)$$

Donde $\mathbf{W}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n)$ es una función de interpolación, V_n es el volumen de la n -ésima partícula y h es el espaciamiento de la malla. Existe una extensa familia de funciones de interpolación que ha sido descrita por Hockney y Eastwood (1988), en donde cada miembro satisface ciertos ordenes de suavizado en el resultante campo interpolado en malla. Para la representación tridimensional de la función de interpolación se usan productos de funciones de interpolación en una dimensión. Al tener en cuenta las tres direcciones espaciales esta función tiene la forma

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \mathbf{w}\left(\frac{x}{h}\right) \mathbf{w}\left(\frac{y}{h}\right) \mathbf{w}\left(\frac{z}{h}\right) \quad (11)$$

donde \mathbf{w} es una función polinomial que depende de la distancia relativa entre el nodo y las partículas.

El hecho de usar ec.(11) permite describir las funciones de asignación $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ en una sola dimensión. Así que de estas funciones tenemos la que corresponde al método *NGP* (Nearest Grid Point), el cual consiste en asignar todo el valor de la propiedad ω_n de una partícula al punto de malla más cercano. Este esquema es de orden cero, ya que su polinomio obedece al de una constante, por lo que es ineficiente ya que los valores asignados a la malla cambian discontinuamente. El siguiente esquema en orden es el *CIC* (Cloud in Cell) o conocido comúnmente como interpolador lineal, ya que este asigna la vorticidad a los dos puntos de malla más cercanos en el caso unidimensional, mientras que en el caso tridimensional usa un total de ocho puntos de malla; éste tiene la propiedad de satisfacer la continuidad en valor de la propiedad interpolada, más no la de continuidad en las derivadas.

Otro esquema es el denominado *TSC* (Triangular Shape Cloud) o nube piramidal, usa veintisiete nodos de malla para el caso tridimensional, es decir, tres para cada una de las direcciones; éste es de orden dos, por lo que es continuo en valor y su primera

derivada, su función polinomial en una dirección es cuadrática y está dada por

$$W(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \left(\frac{x}{h}\right)^2 & x \leq \frac{h}{2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{h}\right)^2 & \frac{h}{2} \leq x \leq \frac{3h}{2} \end{cases} \quad (12)$$

En la figura 5 se ilustra un diagrama que corresponde a la asignación del esquema *TSC*, que da una forma triangular a la propiedad interpolada, en una dirección. Este esquema tiene la desventaja de ser más costoso en cuanto a tiempo de computo se refiere, por utilizar más puntos de malla que *NGP* y *CIC*, pero representa de manera más suave y real el campo interpolado en la malla.

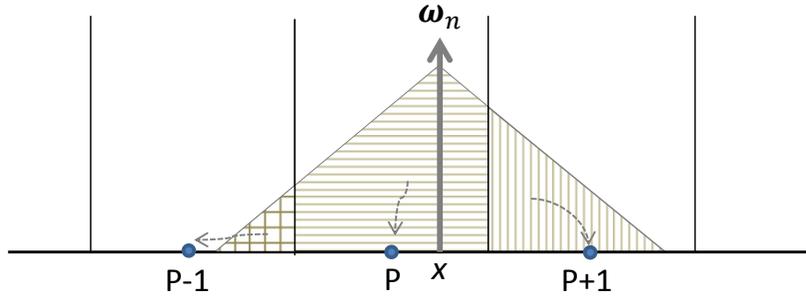


Figura 5. Esquema de asignación de vorticidad *TSC* (Triangular shape Cloud) en una dimensión, éste usa tres puntos de malla y la forma de la asignación parece una pirámide, que asigna la porción que cae en cada celda al punto de malla correspondiente.

Para ver qué elección, en cuanto a método de interpolación, es la mejor, se decide hacer una comparación entre el esquema *CIC* y el *TSC*, para lo cual usamos la distribución de vorticidad del vórtice anular. Para realizar tal comparación es necesario hacer la distribución de partículas de tal suerte que adquiera la forma de la región de vorticidad, como se explicó en la sección anterior. Usamos el vórtice representado por la figura 4 que tiene un radio $R = 1$, radio de núcleo $r_0 = 0.2$ y el valor de la vorticidad de cada partícula es $|\omega| = 1$. El número de partículas que conforman el núcleo son

$N_n = 81$ que corresponden a $n_a = 4$ aros, el número de partículas de la línea central es $N_l = 100$ y el número total de partículas es $N_p = 8100$. Ya que conocemos la forma en la que están distribuidas las partículas se procede a interpolar la vorticidad que éstas poseen a una malla regular de longitud 2π en cada una de sus tres direcciones y 64^3 puntos, de manera que su espaciamiento en una dirección es $h = 0.098$.

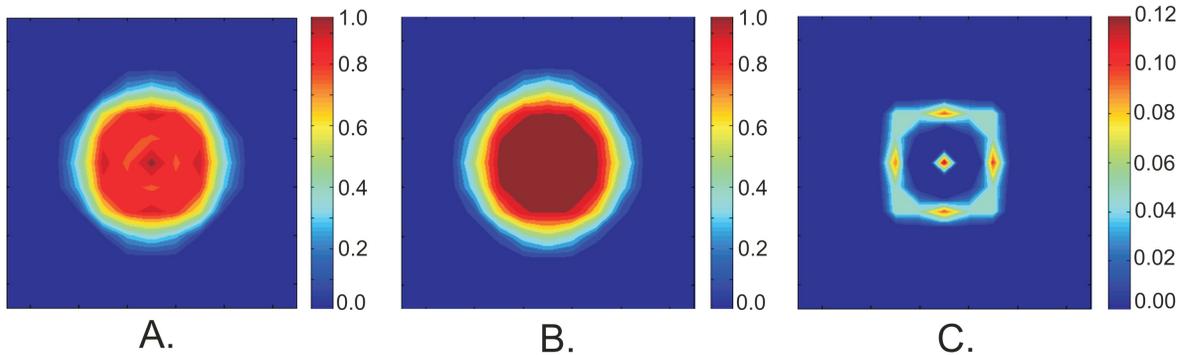


Figura 6. Magnitud de la vorticidad en la sección poloidal del vórtice anular. **A.** Interpolada mediante el esquema *CIC*. **B.** Interpolada mediante el esquema *TSC*. **C.** Diferencia entre contornos B. y C.

En la figura 6.A se ilustra una sección poloidal (plano P1) de la vorticidad, para el vórtice descrito antes, al interpolar con el esquema *CIC*; en la figura 6.B se presenta la misma pero interpolada con el esquema *TSC*. En la figura 6.C se grafica la diferencia entre los contornos de vorticidad interpolada por el esquema *TSC* y el esquema *CIC*. La figura 7.A muestra una sección toroidal (plano P2) de la vorticidad interpolada con el esquema *CIC*, mientras que la figura 7.B corresponden a la vorticidad interpolada con el esquema *TSC*. En la figura 7.C se da la diferencia entre los contornos de vorticidad en el plano P2 interpolada por *TSC* y *CIC*.

Como vemos de las figuras 6.A-B y 7.A-B la distribución de vorticidad interpolada por el esquema *TSC* es mucho más suave que la representada por *CIC*, pero su costo en tiempo de computó es $2\frac{1}{6}$ veces el tiempo del esquema *CIC*. Los beneficios en la representación de la vorticidad con la interpolación *TSC* son más que con *CIC*, ya que la

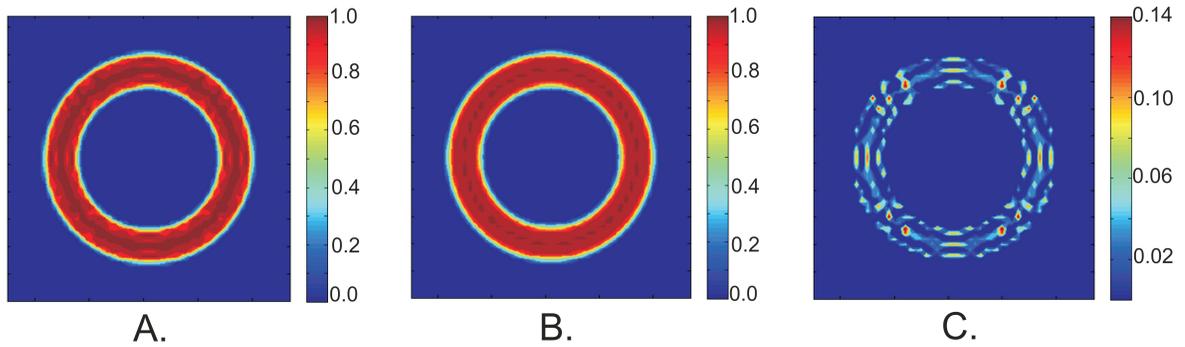


Figura 7. Magnitud de la vorticidad en la sección meridional del vórtice anular. **A.** Interpolada mediante el esquema *CIC*. **B.** Interpolada mediante el esquema *TSC*. **C.** Diferencia entre contornos B. y C.

comparación entre los contornos ilustrada en las figuras 6.C y 7.C muestran diferencias positivas del 10% de la vorticidad. Además experimentos numéricos llevados a cabo por algunos autores (Hockney y Eastwood, 1988; Couët *et al.*, 1981) establecen que la interpolación cuadrática presenta un mejor balance en cuanto al número de partículas requerido, el suavizado del campo de vorticidad, la facilidad de aplicación y la calidad de la representación de las pequeñas escalas en el flujo. Una vez que se ha decidido que el esquema de interpolación que se usa es *TSC*, el siguiente paso será resolver las ecuaciones en la malla.

II.3 Ecuaciones en la malla

Después de la redistribución de vorticidad en la malla el siguiente paso es resolver la ecuación (9) en la malla y así conocer el potencial \mathbf{A} en ésta. La ecuación obedece en su forma escalar a tres ecuaciones de Poisson con coeficientes constantes y para resolverla se usan condiciones de frontera periódicas en cada una de las tres direcciones. Estas condiciones se utilizan con el fin de cumplir varios objetivos; el primero es reducir el tiempo de computo, ya que con estas fronteras se usa algún *solucionador elíptico*

rápido que sobre una malla de N_g puntos resuelve la ecuación diferencial en un número de operaciones proporcional a $N_g \log_2 N_g$, y que para el caso de los *métodos de solución directos* esta cantidad de operaciones resulta ser de orden $O(N_g^2)$; el segundo objetivo es que estas condiciones permiten representar tubos de vorticidad infinitos y que corresponden al tipo de remolinos que nos interesa estudiar; por último, el problema de la reconexión de remolinos, que se tratara en el capítulo IV, se estudia de manera local y no su interacción con el exterior, como por ejemplo en el caso de fronteras sólidas las cuales son generadoras de vorticidad.

Las características de la ecuación (9) y el tipo de condiciones de frontera que se usan hacen que la Transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) sea el solucionador adecuado, dada la rapidez computacional que éste implica.

La razón por la cual usamos los compiladores de Oracle Solaris Studio 12.3, es que este desarrollador contiene un conjunto de subrutinas matemáticas optimizadas que se encuentran en sus librerías Sun Performance Library. Las librerías de Solaris Studio son basadas en las aplicaciones libres disponibles en Netlib. Solaris Studio ha mejorado estas aplicaciones y las ha encapsulado en su biblioteca. La biblioteca Sun Performance Library contiene rutinas para el cálculo de la FFT y de su transformada inversa en tres dimensiones. Éstas no están disponibles en Netlib, ya que son extensiones que realizó Solaris Studio de la rutina que contiene la transformada unidimensional. De esta manera, el fácil acceso a la transformada tridimensional de Fourier desde la plataforma de Oracle Solaris Studio 12.3, nos permite resolver la ecuación de Poisson y realizar el cálculo de la velocidad y de su gradiente en la malla.

La transformada de Fourier inversa en el espacio tridimensional de una componente

del potencial está dada por

$$A_{ijk} = \frac{1}{JLK} \sum_{m=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{K-1} \hat{A}_{mns} e^{-2\pi i \left(\frac{jm}{J} + \frac{ln}{L} + \frac{ks}{K} \right)}, \quad (13)$$

similarmente para la misma componente de vorticidad

$$\omega_{ijk} = \frac{1}{JLK} \sum_{m=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{K-1} \hat{\omega}_{mns} e^{-2\pi i \left(\frac{jm}{J} + \frac{ln}{L} + \frac{ks}{K} \right)} \quad (14)$$

donde i, j y k representan los puntos de malla en el espacio real, mientras que m, n y s son los números de onda en cada una de las direcciones. Se escoge que el número de puntos de malla en el espacio real sea el mismo para las tres direcciones, por lo que $J = L = K$ y el espaciamento entre puntos de malla sera $h = \frac{2\pi}{L}$; mientras que el dominio de los numeros de onda es de $-L/2$ a $L/2$ en pasos enteros. Al sustituir las ecuaciones (13) y (14) en la expresión de diferencias finitas de la ecuación de Poisson (9) se obtiene que

$$\hat{A}_{mns} = -\mathbf{D}_1^{-1}(\mathbf{k}) \hat{\omega}_{mns} \quad (15)$$

donde $\mathbf{D}_1(\mathbf{k}) = 2h^{-2} [\cos(mh) + \cos(nh) + \cos(sh) - 3]$ es el operador laplaciano en el esquema de diferencia-centrada. Este operador es similar al operador derivada en el espacio de Fourier que denotaremos por $\mathbf{D}_2(\mathbf{k}) = -i\mathbf{K}$ y para el cual algunos autores (Birdsall y Langdon, 1985; Zawadski, 1989) han mostrado que no presenta ninguna diferencia sobre el operador \mathbf{D}_1 . El operador \mathbf{D}_2 es el que se usa en el desarrollo del modelo, por lo que la ecuación (15) se expresa como

$$\hat{A}_{mns} = \frac{1}{m^2 + n^2 + s^2} \hat{\omega}_{mns} \quad (16)$$

Una vez que se conoce el vector potencial en el espacio de Fourier $\hat{\mathbf{A}}$ en cada uno de los nodos de la malla, se procede a calcular sus derivadas y a partir de éstas se evalúa el campo de velocidad en los puntos de malla ec.(8); así por ejemplo, la componente x

de la velocidad en el espacio de Fourier estará dada por

$$u = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \hat{u} = -i \left(n \hat{A}_z - s \hat{A}_y \right). \quad (17)$$

Después de conocer la velocidad en el espacio de Fourier se obtienen sus derivadas, con el fin de calcular el gradiente de cada una de las componentes; así que el gradiente de la componente x de velocidad en el espacio de Fourier será

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \rightarrow \quad \nabla \hat{u} = -i(m, n, s) \hat{u} \quad (18)$$

Una vez que se conoce \hat{u} y $\nabla \hat{u}$ en la malla para cada una de las componentes, se transforman al espacio real y de esta manera finalizan los cálculos en la malla.

II.4 Interpolación de la velocidad y su gradiente

Ya que se conoce la velocidad y el gradiente de cada una de sus componentes en la malla, el siguiente paso es interpolar estas cantidades a las posiciones donde se localizan las partículas, para lo cual se usa de nuevo el esquema de interpolación *TSC* el cual ha sido explicado en la sección II.2. Una vez que se conoce la velocidad y su gradiente para cada una de las partículas se procede a evaluar el lado derecho de la ecuación (7), el cual consiste en realizar el producto de la vorticidad con el tensor gradiente de velocidad $(\omega_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n$.

II.5 Vorticidad Libre de Divergencia

Aunque se use una función de interpolación de alto orden (*TSC*) y se hayan distribuido las partículas de manera homogénea, la vorticidad no mantiene su divergencia nula; por el contrario con los errores de integración y solución de ecuaciones de malla ésta aumenta

considerablemente. El aumento de la divergencia ocasiona que la forma ensamblada del arreglo de vorticidad no se mantenga conforme el fluido evoluciona (obsérvese capítulo III, figura 13). Para solucionar este problema se filtra la vorticidad en la malla una vez es transformada al espacio de Fourier $\widehat{\omega}(\mathbf{k})$, este filtro consiste en restar al campo $\widehat{\omega}(\mathbf{k})$ la parte divergente y está dado por (Zawadski, 1989)

$$\widehat{\omega}'(\mathbf{k}) = \widehat{\omega}(\mathbf{k}) - \frac{\mathbf{k} \cdot \widehat{\omega}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k}. \quad (19)$$

Donde \mathbf{k} es vector de onda en el espacio de Fourier, $\mathbf{k} \cdot \widehat{\omega}(\mathbf{k})$ representa la divergencia en el espacio de Fourier y $\widehat{\omega}'(\mathbf{k})$ es el nuevo campo libre de divergencia en el espacio de Fourier, que se verifica al multiplicar (19) por \mathbf{k} . El nuevo campo de vorticidad $\widehat{\omega}'(\mathbf{k})$ se usa para resolver (15)(ecuación de Poisson) y luego es transformado al espacio real. Una vez el campo libre de divergencia se conoce en la malla real, se procede a interpolar a las partículas con el fin de calcular el término referente al estiramiento en la ecuación (7), para la interpolación se usa el mismo esquema *TSC*.

II.6 Integración numérica

Los resultados de $(\omega_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n$ y la velocidad \mathbf{u}_n para cada partícula se usan para integrar numéricamente las $2N_p$ ecuaciones representadas por (6) y (7). La integración se realiza mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual consiste en obtener una solución sobre un intervalo mediante la combinación de cuatro pasos de integración del tipo Euler. Cada uno de estos pasos involucra una evaluación del lado derecho de (6) y (7), que se usa para igualar una expansión en series de Taylor de orden $O(\Delta t^5)$ (Press *et al.*, 1992). Así se determina la nueva posición de las partículas de vorticidad y a su vez se actualiza la vorticidad que éstas adquieren en su nueva posición, debido a la

deformación producida por el campo de velocidades. Todos los pasos de las secciones anteriores se completan en un paso de tiempo, de manera que el cálculo es retornado al paso 1, donde la distribución de vorticidad ahora esta determinada por su evolución.

II.7 Difusión por Interpolación

Cómo se planteó en la introducción de esta tesis, el modelo VIC tridimensional se construye con el fin de estudiar procesos de reconexión en vórtices de Rankine, donde la difusión viscosa de vorticidad es fundamental para su existencia. Hasta ahora no hemos visto cómo el efecto viscoso afectará la dinámica del los problemas simulados con el modelo, ya que éste se construye a partir de una formulación inviscida de las ecuaciones de movimiento. Así que hemos decidido dedicar esta sección a explicar cómo se presentan los efectos viscosos en el desarrollo del modelo, que en esencia se presentan debido al proceso de interpolación de la vorticidad de partículas a la vorticidad en la malla, y ya ha sido revisado por Zawadski (1989).

Lo primero es notar que el proceso de interpolación reemplaza un campo de vorticidad $\boldsymbol{\omega}$, por un nuevo campo de vorticidad $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, dicho proceso esta descrito por la ecuación (10) y que de manera continua se expresa como

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) = \int \boldsymbol{\omega} \sigma_h(\mathbf{x} - \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (20)$$

donde σ_h representa la función de interpolación, en este caso *TSC*, para la malla de paso h . La ecuación (20) es la integral de convolución y de ésta se observa que los dos campos de vorticidad son iguales sí σ_h es la función delta δ . La integral (20) en el espacio de Fourier se escribe como

$$\widehat{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}(\mathbf{k}) = \widehat{\sigma}_h(\mathbf{k}) \widehat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}), \quad (21)$$

y al restar en ambos lados el campo de vorticidad $\widehat{\omega}(\mathbf{k})$, obtenemos la diferencia entre el campo de vorticidad suavizado y el campo original en el espacio de Fourier, que se expresa como

$$\widehat{\omega}(\mathbf{k}) - \widehat{\omega}(\mathbf{k}) = -\mathbf{k}^2 \widehat{\omega}(\mathbf{k}) S(\mathbf{k}), \quad (22)$$

y en la que $S(\mathbf{k}) = (1 - \widehat{\sigma}(\mathbf{k}))/\mathbf{k}^2$. La ecuación (22) establece entonces que la diferencia entre los dos campos de vorticidad para algún modo de Fourier, $\omega_k(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, es proporcional a su laplaciano, $\nabla^2 \omega_k = -\mathbf{k}^2 \omega_k$. Además la forma funcional de $S(\mathbf{k})$ depende de la relación entre $\widehat{\sigma}$ y \mathbf{k} , es decir, la función de interpolación en la representación de Fourier y que para el esquema *TSC* tridimensional es

$$\widehat{\sigma}_h(\mathbf{k}) = \left[\frac{8}{mns h^3} \sin\left(\frac{mh}{2}\right) \sin\left(\frac{nh}{2}\right) \sin\left(\frac{sh}{2}\right) \right]^3, \quad (23)$$

donde los enteros m , n y s son de nuevo las componentes de \mathbf{k} . El análisis de la relación entre S y \mathbf{k} para la interpolación cuadrática ha mostrado que $S(\mathbf{k})$ varía ligeramente con \mathbf{k} , y que su magnitud es de orden k_{max}^{-2} , por lo que la diferencia entre el campo exacto y el campo interpolado es proporcional al laplaciano del campo interpolado (Zawadski, 1989). De esta manera se concluye que el efecto de interpolar la vorticidad de las partículas a la malla lleva consigo un paso de difusión, con coeficiente de difusión S , que domina en áreas del flujo donde el estiramiento es grande, ya que el campo suavizado se usa en el término de estiramiento de la ecuación de vorticidad (7).

Capítulo III

VALIDACIÓN

La validación del modelo numérico vórtice en celda tridimensional, VIC-3D, se realiza mediante el estudio del vórtice anular con vorticidad uniforme en su núcleo. Con el modelo numérico se evalúa la velocidad, U , de traslación del vórtice; se describe el comportamiento de las integrales de energía y helicidad. Además se comprueba si los campos de vorticidad, velocidad y potencial, mantienen la condición de ser campos solenoidales. Se calcula el número de Reynolds efectivo y se discuten aspectos relacionados con la resolución entre partículas y puntos de malla. Para finalizar la validación se examina el comportamiento del modelo VIC-3D a la hora de simular las características de flujos bidimensionales, para lo cual se simula la interacción de dos vórtices de Rankine idénticos.

III.1 Vórtice Anular

Los remolinos anulares son aquellos que se forman por una región de fluido que rota alrededor de un eje que se cierra sobre sí mismo; éstos se caracterizan por tener la forma de un anillo (toroide) en el cual las partículas se mueven en círculos sobre el eje en que se cierra el anillo. El remolino anular forma una región de vorticidad confinada en un tubo de sección transversal pequeña, la cual se propaga establemente en la dirección del eje de simetría (Batchelor, 1967). Su estudio se lleva a cabo por diversas razones, entre otras, porque su conocimiento permite ampliar la intuición respecto al movimiento de flujos vorticales, por la manera simple en que se pueden generar y también por su importancia

en diversos problemas de ingeniería (por ejemplo, en la perforación submarina). Otra razón que además ha llamado la atención es la belleza que describe su movimiento, la cual se puede apreciar en el jugueteo que realizan los delfines con anillos de aire, en los vórtices anulares que se forman cuando una gota cae en un vaso con agua o los remolinos de humo que pueden formar algunos fumadores (Shariff y Leonard, 1992).

La validación se realiza con un remolino anular con vorticidad uniforme en su núcleo, ya que bajo la consideración de que el remolino es delgado su desarrollo teórico está bien establecido. Para este tipo de remolinos, Kelvin en 1867 obtuvo una expresión analítica para la velocidad de traslación U en términos de su circulación y sus dimensiones, y la expresión está dada por (Saffman, 1992; Wu *et al.*, 2006)

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left\{ \log \left(\frac{8R}{r_0} \right) - \frac{1}{4} \right\} \quad (24)$$

en ésta R es el radio del remolino, r_0 es el radio del núcleo, Γ la circulación y la expresión es válida sólo para remolinos que cumplan $r_0/R \ll 1$.

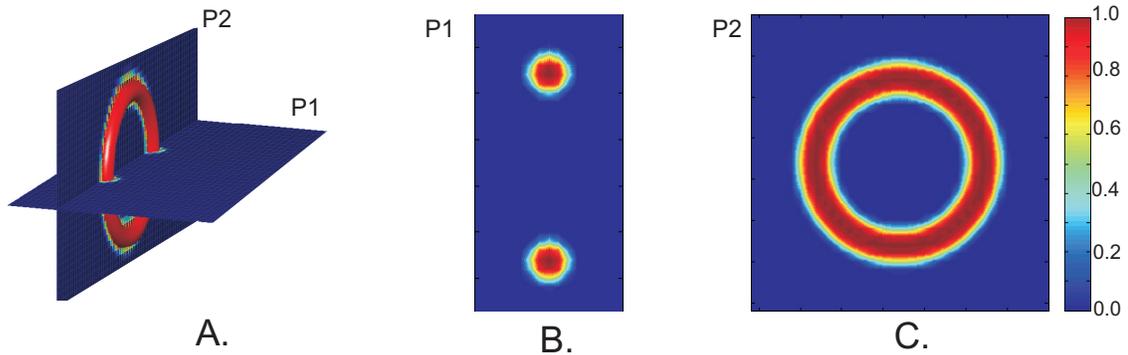


Figura 8. Vorticidad de 8100 partículas interpoladas en una malla de 64^3 puntos mediante el esquema TSC, la vorticidad de cada partícula es 1. **A.** Remolino representado por isosuperficie de la vorticidad de valor 1, además planos de intercepción poloidal P1 y meridional P2. **B.** Magnitud de la vorticidad en plano P1. **C.** Magnitud de la vorticidad en plano P2. La barra de colores corresponde a las tres figuras.

El objetivo es usar el modelo VIC tridimensional para evaluar la velocidad U del vórtice y de esta forma poder determinar la capacidad que tiene el modelo para simular

fenómenos vorticales. Por tanto, se simula el movimiento de un remolino con un radio $R = 1$, un núcleo de radio $r_0 = 0.2$ y una vorticidad de magnitud $\omega = 1$ que representa una circulación $\Gamma = 0.126$. La figura 7 muestra los contornos de vorticidad una vez que se interpola la vorticidad asignada a las partículas en la malla. En la figura 8.A se ilustra el remolino representado por la isosuperficie de la vorticidad $\omega = 1$ y dos planos que interceptan el remolino. El plano P1 representa los contornos para el núcleo y el plano P2 para un corte normal al eje de simetría, figura 8.B y 8.C, respectivamente.

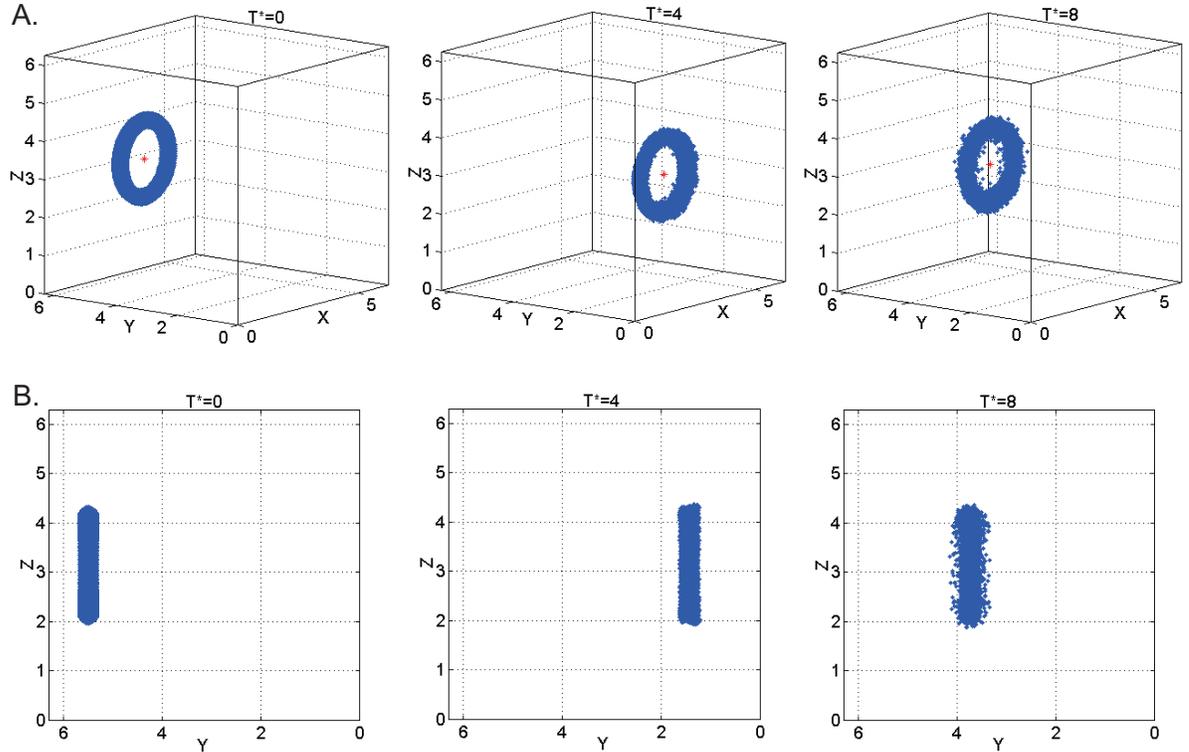


Figura 9. **A.** Vista tridimensional de la evolución de un vórtice anular de radio $R = 1$, núcleo $r_0 = 0.2$ y vorticidad de magnitud $\omega = 1$. La evolución corresponde a tres tiempos, $T^* = (0, 4, 8)$, los cuales se adimensionalizan con el tiempo T_R que gasta el remolino en recorrer una distancia igual a su radio. El vórtice evoluciona de la posición inicial de coordenada $Y = 7\pi/4$ hacia $Y = 0$ y en los tres casos se muestra el centro de masa del anillo (color rojo). **B** Vista en el plano ZY y corresponde a los mismos tiempos de evolución.

Para representar el vórtice hemos usado $N_p = 8100$ partículas, cuatro aros para el núcleo ($N_n = 81$ partículas) y cien partículas a lo largo de la línea central. El dominio

tiene una longitud de 2π en cada una de las tres direcciones y se usan 64 puntos de malla para cada dirección, lo cual establece un paso de malla $h = 0.098$. En todas las simulaciones el tiempo t de evolución del remolino es adimensionalizado por el tiempo T_R que éste gasta en recorrer una distancia igual a su radio R , de manera que $T^* = t/T_R$. El paso de tiempo Δt , para la integración de las ecuaciones de evolución, se escoge de manera que la razón $T_R/\Delta t = 300$.

En la figura 9 se ilustra el vórtice anular representado por las partículas de vorticidad para tres tiempos diferentes y en dos perspectivas distintas, su evolución es de la posición inicial de coordenada $Y = 7\pi/4$ hacia $Y = 0$. En la figura se observa que el remolino presenta una ligera variación de su forma a medida que evoluciona hasta un tiempo $T^* = 8$, pero tienen un comportamiento estable durante todo su recorrido. Entre el intervalo de tiempo $T^* = (4, 8)$ el remolino atraviesa la frontera periódica en $Y = 0$, por lo que en $T^* = 8$ se encuentra detrás de su localización en $T^* = 4$. En rojo se muestra el centro de masa del anillo, el cual se usa para calcular la velocidad de traslación mediante un ajuste por cuadrados mínimos de las diferentes posiciones del anillo.

III.2 Velocidad de Traslación

La velocidad de traslación del vórtice anular a lo largo del eje de simetría se calcula a partir de la información de las posiciones de las partículas de vorticidad. Esta información es utilizada para calcular el centro de masa de la configuración de partículas y seguir su evolución en el tiempo. La posición del centro de masa del vórtice, a lo largo del eje de simetría, como función del tiempo es presentado en la figura 10 con puntos negros. La línea de color rojo representa el ajuste, mediante el cual se obtiene que la velocidad de traslación del anillo es $U_{EP} = -0.0311$.

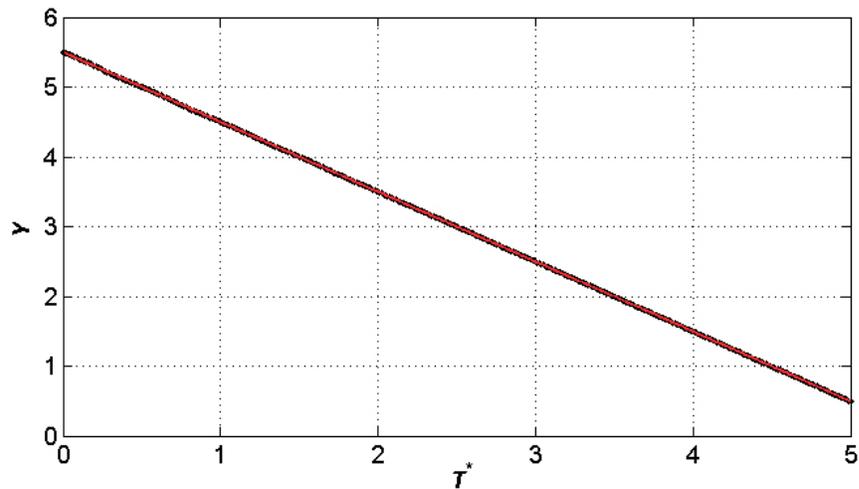


Figura 10. Posición del vórtice anular como función del tiempo (línea negra) simulado por el modelo VIC; el vórtice tiene radio $R = 1$, núcleo de radio 0.2 y vorticidad de magnitud $\omega = 1$. Se usan $N_p = 8100$ partículas para representar el vórtice y cada una de vorticidad unitaria. En rojo se presenta el ajuste con el fin de determinar la velocidad con la cual se desplaza el anillo, que corresponde a $U_{EP} = -0.0311$ y se basa en información de las partículas de vorticidad. El tiempo es adimensionalizado con el tiempo T_R que gasta el remolino en recorrer una distancia igual a su radio.

Como se observa en la figura, el movimiento del remolino es uniforme a lo largo del eje de simetría hasta el tiempo $T^* = 5$. Este comportamiento uniforme se mantiene durante toda la evolución del remolino, $T^* = 12$, a pesar de que el remolino varía un poco su forma inicial. De esta manera vemos que el modelo VIC-3D cumple con una de las características fundamentales de este tipo de vórtices, y es que su velocidad sea constante, según lo establece ec.(24). Al usar la fórmula para la velocidad de traslación ec.(24) se obtiene que su valor es $U_T = -0.0344$, por lo que se tiene una diferencia de 9.6% en la predicción de la velocidad para un remolino con las anteriores condiciones de simulación.

Otra forma de calcular la velocidad de traslación del anillo se basa en utilizar la información de la malla. Para este cálculo se usa el valor de la vorticidad en el plano P1, descrito en la figura 8, de manera que con su magnitud en cada punto calculamos

el centroide de la vorticidad. Al seguir la posición del centroide a lo largo del eje de simetría se obtiene para el vórtice, con las condiciones antes descritas, una velocidad de $U_{EM} = -0.0310$. Esta velocidad corresponde a una diferencia de 9.88% con respecto al valor teórico. Al usar información de las partículas y de la malla se observa que existe una diferencia pequeña (0.28%) entre ambos tipos de información, por tanto, en lo sucesivo se calcula la velocidad del remolino basados en la información de partículas de vorticidad. En la sección III.5 veremos cómo mejora el valor de la velocidad cuando aumentamos la resolución de la malla.

III.3 Energía, Helicidad y Divergencia

En un fluido incompresible, inviscido y homogéneo existen varias cantidades físicas que se conservan, entre estas encontramos la energía cinética, K , y la helicidad, H , y corresponden a invariantes de la ecuación de Euler. Estas cantidades matemáticamente se definen como

$$K = \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^2 dV \quad ; \quad H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV \quad (25)$$

donde $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ y la integración es realizada sobre el dominio total de fluido, además estas cantidades son conservadas para un flujo contenido en un cubo periódico (Kida y Takaoka, 1994), que es el caso de nuestras fronteras. La conservación de la energía cinética establece que en el flujo no se dan procesos disipativos. La helicidad por otra parte está relacionada con la estructura topológica de las líneas de vorticidad, de manera que su invarianza en el tiempo es debida a que no existen procesos de eslabonamiento ni anudamiento de las líneas de vorticidad (Moffatt y Tsinober, 1992); para que esta cantidad no se conserve es necesaria la presencia de viscosidad en el flujo, por lo que se conoce como invariante inviscido.

En un flujo viscoso la razón de cambio de la energía cinética es proporcional a la enstrofía. Esta es una cantidad integral que se define como:

$$S = \int \omega^2 dV, \quad (26)$$

donde $\omega^2 = \omega \cdot \omega$ y al igual que la energía cinética es la integral de la magnitud al cuadrado de un campo, en este caso el de vorticidad. Esta cantidad es conservada en un flujo bidimensional e inviscido, mientras que en flujos tridimensionales inviscidos cambia debido al término de estiramiento de las líneas de vorticidad que aparece en ec.(7).

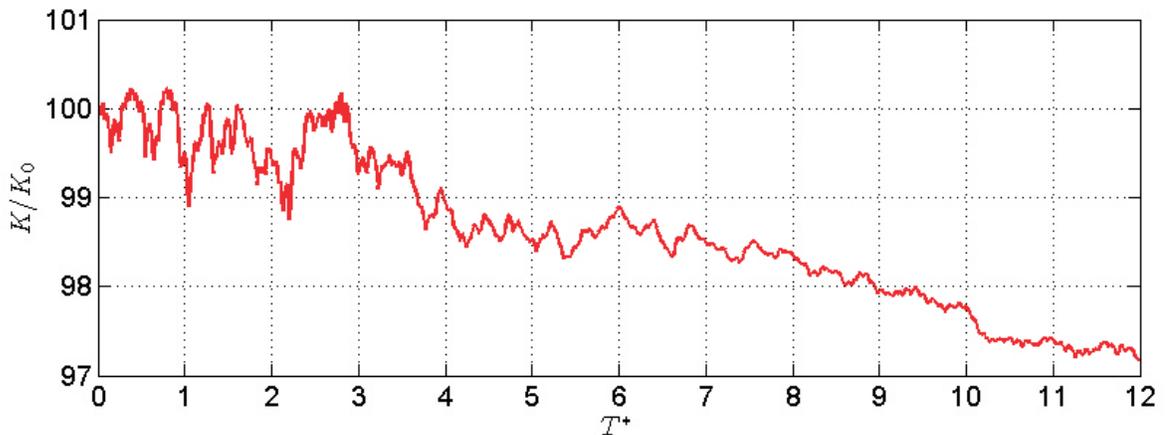


Figura 11. Energía cinética K (en porcentaje de su valor inicial K_0) como función del tiempo T^* para el vórtice anular simulado por el método VIC y descrito en la figura 10.

Para la validación del modelo calculamos la energía cinética y la helicidad para el vórtice anular, ya que con estas cantidades podemos ver la influencia del error numérico que se interpreta como un efecto viscoso en el flujo. En la figura 11 se ilustra la energía cinética para el remolino descrito anteriormente; en ésta la ordenada representa la energía cinética K en porcentaje de su valor inicial K_0 , mientras que la abscisa el tiempo T^* , que corresponde al tiempo adimensionalizado. Cómo se observa en la figura, el remolino ha recorrido doce veces una distancia igual a su radio R , es decir que

atraviesa dos veces el cubo periódico. En su recorrido presenta una pérdida máxima de energía de 2.8% para $T^* = 12$, además de que su tendencia muestra un decaimiento casi lineal con el tiempo. La razón de cambio de la energía cinética indica una disminución en la intensidad del campo de velocidad, la cual en un fluido se puede presentar por la presencia de efectos viscosos. Así que las pérdidas porcentuales de la energía nos muestran que el error numérico por integración e interpolación se puede manifestar como un efecto pequeño de difusión viscosa, el cual hasta $T^* = 12$ no afecta el movimiento uniforme que caracteriza al remolino. Estos efectos disipativos además se explicaron en la sección II.7.

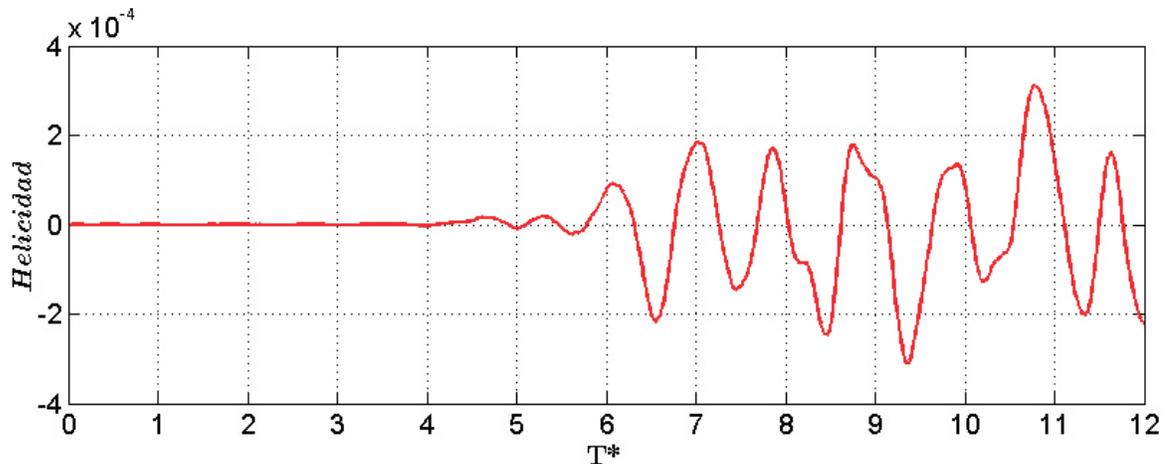


Figura 12. La helicidad como función del tiempo T^* para el vórtice anular simulado por el método VIC y descrito en la figura 10.

En la figura 12 se presenta la helicidad como función del tiempo, esta cantidad como una medida de la estructura topológica da cuenta de la presencia de efectos disipativos. Para el anillo, en este caso se mantiene alrededor de cero hasta el tiempo $T^* = 4$ y presenta un comportamiento oscilatorio para tiempos mayores. Esta cantidad está relacionada con el ligero cambio de forma que tiene el anillo y que se hace evidente a partir de $T^* = 4$ (ver figura 9). Al Realizar cálculos de la helicidad de dos vórtices anulares eslabonados encontramos que ésta tiene un valor inicial de $H = 0.032$, la cual

resulta ser cien veces mayor que la máxima helicidad que presenta el remolino. Lo importante de la comparación es que esta cantidad deja ver que los efectos viscosos son pequeños, ya que la helicidad se mantiene del orden 10^{-4} por lo menos hasta el tiempo $T^* = 12$, donde los cambios de forma son pequeños para la distancia considerable que recorre el remolino.

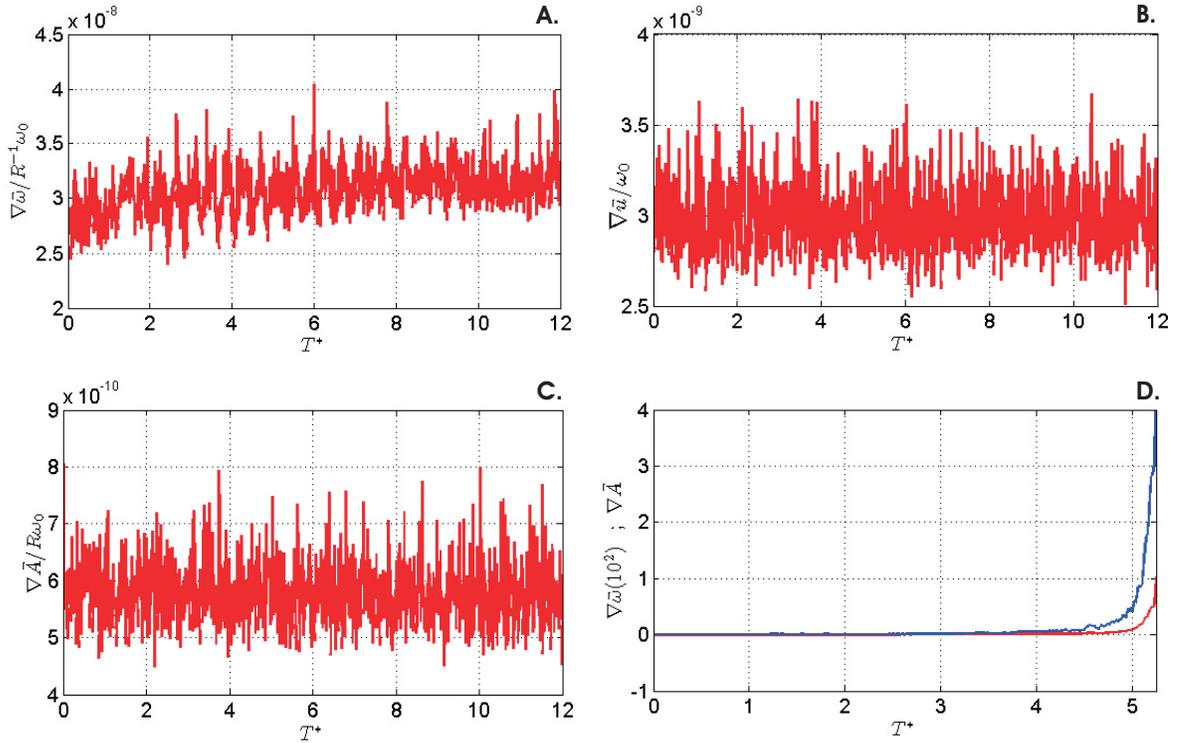


Figura 13. Divergencia de los campos como función del tiempo para el vórtice anular descrito en la figura 10. **A.** Divergencia de la vorticidad filtrada. **B.** Divergencia del campo de velocidades. **C.** Divergencia del potencial vectorial. **D.** Divergencia de la vorticidad (azul) y potencial vectorial (roja) para el caso que no se aplica el filtro de vorticidad descrito en la sección II.6. En los cuatro casos las divergencias son adimensionalizadas con el radio del remolino R y la magnitud de la vorticidad inicial.

Por otra parte, tenemos tres campos que deben de ser solenoidales en el flujo del vórtice anular. Estos son la velocidad \mathbf{u} por la condición de incompresibilidad, la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ por ser el rotor de la velocidad y el potencial \mathbf{A} mediante el cual podemos satisfacer la ecuación (9). Para verificar si estas tres condiciones se cumplen en el vórtice

simulado con el modelo VIC, se muestran en la figura 13 una gráfica de la divergencia de los campos como función del tiempo. En cada caso la divergencia es escalada por la longitud y frecuencia característica R y ω_0 , que corresponden al radio del remolino y a su vorticidad inicial, respectivamente. La figura 13.A muestra la divergencia del campo de vorticidad filtrado, la cual es de orden 10^{-9} para todo el tiempo de evolución y oscila alrededor de 3; el mismo comportamiento se presenta en la divergencia de la velocidad, figura 13.B, ya que oscila alrededor de 3 y se mantiene del mismo orden. Por otro lado, la divergencia del vector potencial es de un orden menor (10^{-10}) y oscila alrededor de 6, como muestra la figura 13.C. La divergencia de las tres cantidades descritas anteriormente corresponden al caso en que se aplica el filtro de vorticidad, descrito en la sección II.5, mediante el cual el modelo cumple con las condiciones físicas dentro de la aproximación numérica. Esto permite que la región de vorticidad evolucione de manera estable hasta el tiempo considerado, $T^* = 12$.

Se realizaron experimentos con el mismo vórtice anular, pero esta vez sin aplicar el filtro de vorticidad. Las consecuencias de esta acción son mostradas en la figura 13.C, en la cual se ilustra la divergencia de la vorticidad y la divergencia del potencial; líneas azul y roja respectivamente. El resultado más importante es que la divergencia de la vorticidad se desarrolla rápidamente y alcanza un valor de 300 para un tiempo $T^* = 5.25$. El mismo comportamiento se obtiene para el potencial vectorial, el cual alcanza el valor de 1 para el mismo tiempo. De esta manera se observa que sin aplicar el filtro el campo de vorticidad y el potencial no cumplen la condición de ser solenoidales. Además el desarrollo de la divergencia de los campos lo que provoca es que el modelo se desestabilice y el remolino no evolucione para tiempos mayores que $T^* = 5.25$, con este resultado se demuestra la importancia de filtrar la vorticidad para que sea libre de divergencia.

III.4 Número de Reynolds Efectivo

Como parte del proceso de validación del modelo se desea conocer de que orden es la disipación producida por el error numérico, y para esto se ha calculado el número de Reynolds efectivo. Matemáticamente este se define como (Koumoutsakos, 1997; Velasco Fuentes, 2005)

$$Re^{eff}(t) = \frac{\Gamma(t)}{\nu^{eff}(t)}, \quad (27)$$

donde Γ es la circulación del remolino y ν^{eff} la viscosidad efectiva. La viscosidad efectiva se calcula a partir del conocimiento de la integral del segundo momento de la vorticidad, el impulso angular, que esta dado por $M_{xy} = \int (x^2 + y^2)\omega da$. La viscosidad efectiva también se relaciona con el tiempo y la circulación, y su expresión matemática es

$$\nu^{eff}(t) = \frac{M_{xy}(t) - M_{xy}(0)}{4\Gamma(t)t}. \quad (28)$$

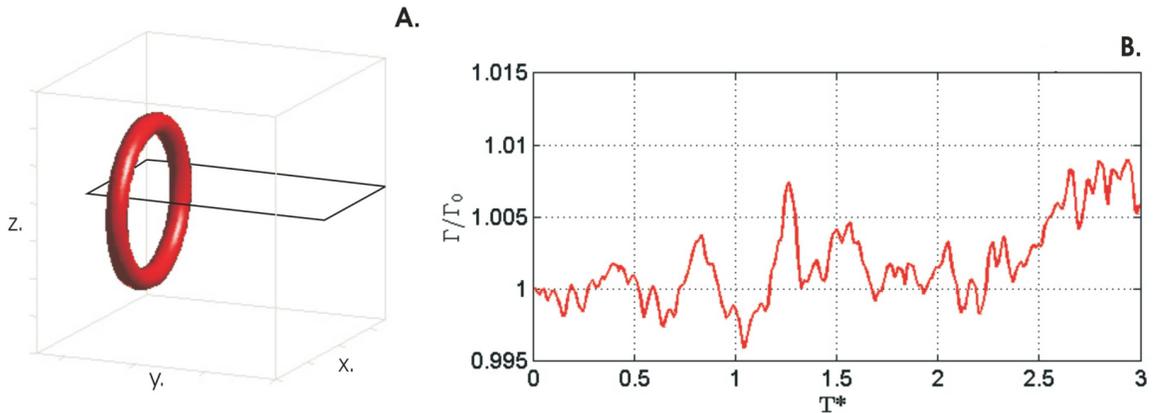


Figura 14. **A.** El vórtice anular y el plano normal al eje z sobre el cual se calcula la circulación y el impulso angular, los parámetros del remolino corresponden a los descritos en la figura 10. **B.** Razón entre la circulación y su valor inicial calculadas con información de la malla y en el plano mostrado en A, la circulación inicial se diferencia en un 0.8% con la asignada al remolino mediante partículas de vorticidad.

Para el cálculo del número de Reynolds se evalúa la circulación y el momento en una sección poloidal del remolino para cada instante de tiempo, esta sección corresponde

al plano mostrado en la figura 14.A. En la figura 14.B se presenta la razón entre la circulación Γ y su valor inicial Γ_0 como función del tiempo para el remolino descrito en la sección III.1. El valor inicial de la circulación basado en información de la malla es $\Gamma_0 = 0.125$ y presenta una diferencia de 0.8% con respecto al valor asignado al remolino mediante las partículas. En la gráfica se observa un crecimiento del 0.98% alrededor de $T^* = 3$ y un decrecimiento del 0.4% alrededor de $T^* = 1$. La razón del impulso angular

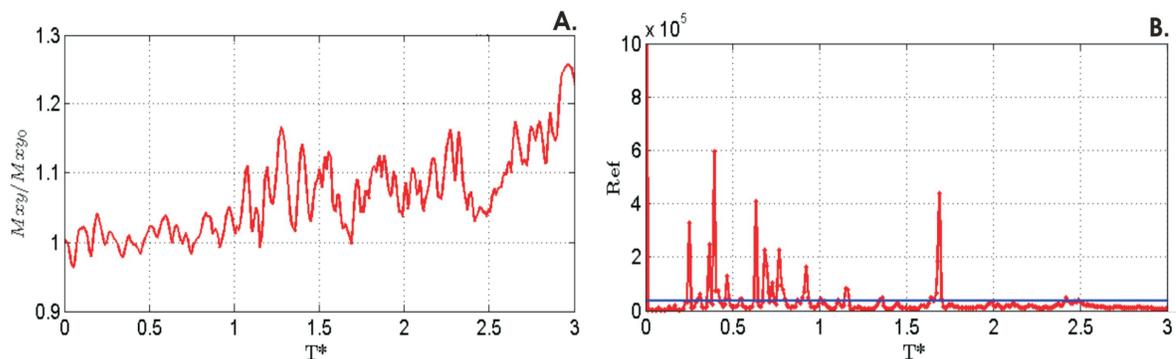


Figura 15. **A.** Se gráfica la razón entre el momento angular y su valor inicial para el remolino descrito en la figura 10 y basados en la información del plano representado en la figura 14.A. **B.** Número de Reynolds efectivo como función del tiempo T^* , la línea azul representa el valor promedio $\bar{Re}^{eff} = 35000$.

a su valor inicial es mostrada en la figura 15.A; en ésta se observa un comportamiento fluctuante pero con una tendencia creciente del momento, el cual alcanza un aumento máximo del 27% alrededor de $T^* = 3$. Estas dos cantidades deberían de ser conservadas en el caso que el fluido fuera completamente inviscido, y como vemos la circulación se mantiene dentro del margen de conservación. Con base en la información de las dos gráficas anteriores, en la figura 15.B se muestra el número de Reynolds efectivo como función del tiempo. Se observa que éste se mantiene del orden de 10^5 para el remolino y su valor promedio, que se muestra con la línea azul en la figura, es $\bar{Re}^{eff} = 35000$. Con el valor obtenido para el número de Reynolds efectivo podemos concluir que los efectos de disipación numérica son pequeños, por lo que el modelo VIC permite estudiar la

dinámica de flujos cuasi-inviscidos.

III.5 Aspectos del Modelo VIC

III.5.1 Discretización Lagrangiana

Anteriormente se realizaron los cálculos de la velocidad de traslación del vórtice anular representado con $N_p = 8100$ partículas de vorticidad, con radio $R = 1$, núcleo de radio $r_0 = 0.2$, magnitud de vorticidad $|\omega| = 1$ y simulado en una malla de 64^3 puntos. El objetivo de esta sección es calcular la velocidad de traslación del remolino en función del número de partículas de vorticidad y de la resolución de malla en la que se solucionan las ecuaciones, y a partir de estos resultados discutir aspectos como el tiempo de computo y la convergencia del modelo. Para realizar este experimento, lo primero que hacemos es variar el número de partículas de vorticidad, para lo cual usamos el vórtice descrito al inicio de esta sección, y variamos tanto las partículas en el núcleo, N_n , como a lo largo del filamento central, N_l . Los resultados son mostrados en la figura 16, donde la ordenada corresponde a la razón entre la velocidad experimental y la velocidad teórica, mientras que la abscisa representa el número de partículas, además en las dos gráficas de la figura se presenta el tiempo de computo. El tiempo de computo corresponde al tiempo que gasta el modelo en realizar un sólo ciclo en el cual ejecuta todas sus operaciones y que, como es de esperar, aumenta conforme el número de partículas lo hace.

En la figura 16.A se varía la cantidad de partículas en el núcleo al variar el número de aros n_a , de 1 hasta 7, mientras que el número de partículas a lo largo de la línea central mantiene igual para todos los casos, $N_l = 100$. Podemos ver en la gráfica que

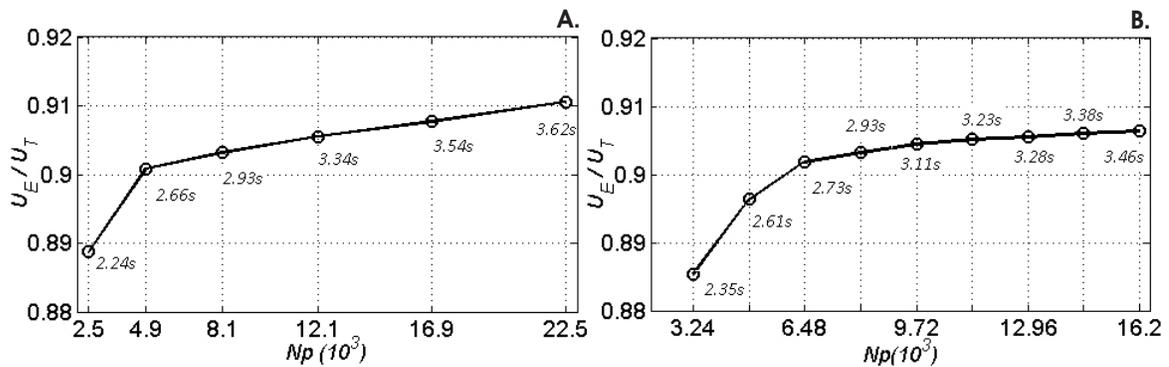


Figura 16. Cociente de la velocidad experimental y teórica en función del número de partículas de vorticidad que representan un vórtice anular, el cual tiene radio $R = 1$, núcleo de radio 0.2 y que se simula en una malla de 64^3 puntos. **A.** Se varía el número de partículas en el núcleo y se mantienen $N_l = 100$. **B.** Se mantienen $N_n = 81$ partículas en el núcleo y se varían estas en cada línea de vorticidad. En ambos casos se ilustra el tiempo de cómputo que gasta el modelo en realizar un solo ciclo de operaciones.

la velocidad mejora conforme aumentamos el número de partículas, con un 88.8% para 2500 partículas y un 91.1% para 22500, lo que supone una mejora del 2.3% para un aumento de 20000 partículas. Además a partir de 4900 partículas el comportamiento parece ser lineal con una razón de crecimiento de aproximadamente $5.68 \times 10^{-5} N_p^{-1}$, lo que resulta ser una razón de cambio pequeña. También se observa que el tiempo de cómputo cambia poco y se mantiene del mismo orden, éste aumenta 1.38s para un cambio de 20000 partículas.

En la figura 16.B se varía el número de partículas de la línea central N_l , de 40 a 200, pero se mantienen $N_n = 81$ partículas para todos los casos. De esta manera, se observa en la gráfica que la velocidad mejora conforme aumenta el número de partículas con un 88.6% para 3240 partículas y un 90.7% para 16200. Lo anterior supone una diferencia de 2.1% para un aumento de 12960 partículas, es decir de 160 a lo largo de la línea central. También se observa que la velocidad simulada parece tener un crecimiento asintótico alrededor de 0.91, lo que supone que una separación entre partículas menor que el paso de malla $h = 0.098$ da buenos resultados. En el remolino simulado con $N_l = 100$ esta

separación $\Delta l = 0.063$ y corresponde a la situación usada en las secciones anteriores. Por último, vemos que el tiempo de computo tiene el mismo comportamiento que en el caso de la figura 16.A.

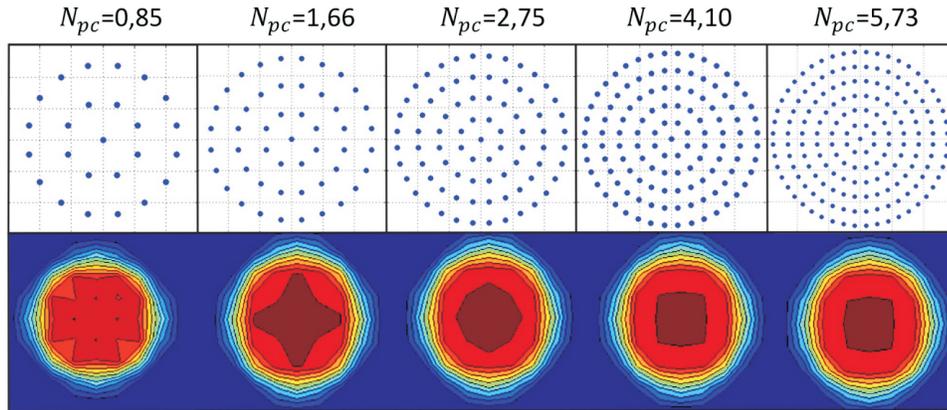


Figura 17. Colocación de partículas de vorticidad en el núcleo de un vórtice anular de radio $R = 1$ y medida de núcleo 0.3. Los cinco núcleos representan variación de n_a aros de 2 a 6, es decir, de 25 a 169 partículas. Se ilustran también los contornos de la magnitud de la vorticidad en una malla con 64 puntos y un espaciamento $h = 0.098$, además en la parte superior se presenta la densidad de partículas por cada celda en el núcleo N_{pc} .

Con el fin de ver por qué una cantidad pequeña de partículas en el núcleo nos aleja de la velocidad teórica, en la figura 17 mostramos el núcleo de un remolino de radio $r_0 = 0.3$, representado en una malla de paso $h = 0.098$ y $\Delta l = 0.098$. En la figura se ilustra la colocación de las partículas de vorticidad y el resultado de su interpolación en la malla mediante el esquema *TSC*. El número de aros n_a varía de 2 a 6, es decir, de 25 a 169 partículas en el núcleo, que tiene área $A_n = \pi r_0^2$. Con base en esta información se calcula el número aproximado de partículas por celda de área h^2 , que está dado por $N_{pc} = N_n h^2 / \pi r_0^2$ y corresponde al valor mostrado en la parte superior de cada núcleo en la figura 17. Al observar la figura 17 vemos que una buena representación del núcleo se da con una densidad, $N_{pc} > 4$. Esto coincide muy bien con los resultados de la figura 16.A, en la cual tal densidad de partículas se obtiene a partir de 8100 partículas, lo que

obedece a una buena predicción de la velocidad comparada con una densidad menor.

III.5.2 Discretización Euleriana

La segunda parte del análisis tiene que ver con la resolución de la malla en la que se solucionan la ecuación de Poisson y se calculan los gradientes de la velocidad. Para esto usaremos un vórtice anular con razón de aspecto (r_0/R) más pequeña que la de los remolinos anteriores. El vórtice que simulamos tiene un núcleo de radio $r_0 = 0.1$, un radio $R = 1$ ($r_0/R = 0.1$) y una magnitud de vorticidad $|\boldsymbol{\omega}| = 1$. Con estas características el remolino se propaga con una rapidez de $U_T = 1.03 \times 10^{-2}$. En la figura 18 ilustramos los contornos de la magnitud de la vorticidad para el remolino en tres mallas de resolución diferente, en **A.** una malla de 64^3 puntos y espacio de malla $h = 0.098$, **B.** malla de 128^3 puntos y $h = 0.049$, **C.** malla de 256^3 puntos y espaciamento $h = 0.0245$.

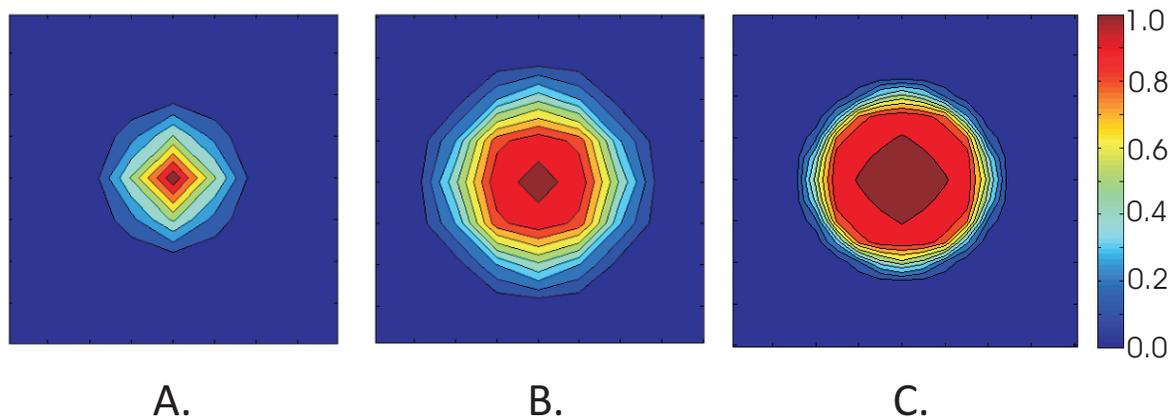


Figura 18. Contornos de la magnitud de la vorticidad para el núcleo del remolino anular. **A.** Se usa una malla con 64^3 puntos y un espaciamento $h = 0.098$. **B.** malla de 128^3 puntos con $h = 0.049$. **C.** 256^3 puntos de malla y espacio de malla $h = 0.0245$. El radio del núcleo del remolino en los tres casos es $r_0 = 0.1$ y se mantiene una densidad de partículas por celda de malla mayor que cinco.

Para representar el núcleo en los tres casos se mantiene la densidad de partículas

$N_{pc} > 5$ y la separación entre partículas a lo largo de la línea central $\Delta l < h$. En la figura 18 se aprecia que la mejor representación se obtiene cuando la resolución es alta (malla de 256^3 puntos), aun cuando el número de partículas en los tres casos es grande. También se observa el uso de una malla 64^3 puntos realiza una mala representación de la vorticidad, ya que el núcleo parece tener un radio mucho menor. Esto se debe a que el radio del núcleo y el espacio de malla son aproximados $h \approx r_0$, lo cual ocasiona que la vorticidad de las partículas distribuidas en el núcleo se concentre en un solo punto. Así que para representar la vorticidad de un remolino anular realmente delgado, y para el que es válida la expresión (24), es necesario tener una buena resolución de malla y un número de partículas considerable. Además, para ver cómo estos resultados afectan la velocidad que simula el modelo, en la tabla 1 mostramos las velocidades simuladas, U_E , obtenidas para cada una de las resoluciones. En la tabla se muestra el número de partículas a lo largo de la línea central N_l , el número de partículas en el núcleo N_n , el número de partículas total N_p y el tiempo de computo T . También se presenta el error porcentual entre la velocidad teórica y la simulada.

Tabla I. Velocidad del vórtice anular para diferentes resoluciones.

Resolución	N_n	N_l	N_p	$T(s)$	$U(10^{-3})$	%
64^3	81	100	8100	2.87	8.72	15.5
128^3	121	200	24200	42.3	9.60	7.0
256^3	225	400	90000	340.4	9.86	4.58

La tabla 1 muestra que conforme aumentamos la resolución la velocidad alcanzada por el modelo se aproxima a la obtenida teóricamente. Para una resolución de 256^3 puntos se alcanza un error relativo del 4.58%; pero esto exige a su vez más partículas

de vorticidad con el fin de representar una distribución de vorticidad suave y además aumenta considerablemente el tiempo de computo. Lo que nos muestran claramente los resultados de la tabla es que el modelo numérico VIC tridimensional converge a la velocidad teórica cuando la resolución tanto en partículas como en puntos de malla es grande. Además de esto se observó que durante todas las simulaciones el remolino mantiene un comportamiento estable.

III.5.3 Condiciones de Frontera

Por último discutimos un aspecto relacionado con el comportamiento de las fronteras y la región de vorticidad. Como sabemos el modelo se construye con un conjunto de condiciones de frontera periódicas, de manera que la región de vorticidad tiene copias sucesivas de ella en cada una de las seis caras del cubo periódico. Así que cuando las dimensiones de la región de vorticidad son de tamaño considerable parte de ésta se encuentra cerca a las fronteras, de manera que su evolución esta determinada por la interacción con sus copias en las fronteras. Para mostrar como este aspecto del modelo afecta la predicción de la velocidad de traslación de un remolino, simulamos un vórtice anular con un radio mayor que 1. El radio del remolino es $R = 1.57$, su núcleo tiene radio $r_0 = 0.3$, la magnitud de la vorticidad es $|\omega| = 1$ y la simulación se realiza en una malla de 64^3 puntos. La velocidad que se obtiene con el modelo alcanza un 83% del valor de la velocidad teórica, mientras que en un anillo de radio más pequeño $R = 1$, la velocidad que simula el modelo es el 90.4% del valor teórico. Esto muestra que la interacción de un remolino con sus copias reduce el valor de la velocidad en un 7% para este caso particular. Así que a la hora de simular algún problema físico con el modelo VIC-3D lo mejor es tener presente que la región de vorticidad este lo suficientemente

lejos de las fronteras para que sus copias no influyan en su evolución.

III.6 VIC-2D: Fusión y Rotación de Remolinos

Como parte del proceso de validación del modelo VIC tridimensional, se desea comprobar si éste describe las características esenciales de los flujos bidimensionales. Para esto decidimos simular la interacción de dos vórtices de Rankine paralelos e idénticos. Este problema ha sido estudiado por décadas y sus características esenciales ya se han discutido, donde quizás la existencia de una distancia crítica es la más importante. Si la distancia entre los vórtices es d y sus radios r_0 , la distancia crítica $d_c/r_0 \approx 3.3$, establece que para valores por debajo de este valor los vórtices se fusionan en uno solo; mientras que para valores por encima de éste, los vórtices rotan uno alrededor del otro sin fusionarse (vea, por ejemplo, Velasco Fuentes (2001)).

En esta sección escogemos dos valores de la razón d/r_0 , uno que se encuentra por debajo de la razón crítica, $d/r_0 = 2.5$, y el otro por encima, $d/r_0 = 4$. El vórtice de Rankine en cada caso está configurado por un tubo de vorticidad infinito orientado en la dirección z , en el cual las partículas de vorticidad en el núcleo se distribuyen de la misma forma que para el núcleo del vórtice anular, como se explicó en la sección II.1. Cada partícula de vorticidad en el núcleo forma parte de un filamento de vorticidad en el que escogemos la separación entre partículas $\Delta l = dr$, es decir del orden del radio de cada partícula, ya que recordemos que en el núcleo una partícula tiene área $A_0 = \frac{\pi dr^2}{4}$. Por lo tanto, el volumen de cada partícula sera $V_p = \frac{\pi dr^3}{4}$. El número de partículas a lo largo de cada filamento N_l , en función del radio del remolino y del número de partículas en el núcleo es $N_l = (2n_a + 1)\pi/r_0$. Para la simulación usamos $N_p = 16900$ partículas para cada vórtice, las cuales se distribuyen en $N_n = 169$ filamentos y cada filamento

contiene $N_l = 100$ partículas de vorticidad; la magnitud de la vorticidad es $|\omega| = 1$, el radio del núcleo de cada vórtice es $r_0 = 0.2$ y la simulación se realiza en una malla con 64^3 puntos.

En la figura 19 se presenta la evolución de los dos remolinos representados por partículas de vorticidad, para el caso en que la separación es $d/r_0 = 2.5$. En la figura el tiempo adimensionalizado, T^* , es la razón entre el tiempo t y el periodo de rotación del vórtice de Rankine T . En **A.** los remolinos son proyectados sobre el plano x-y para cuatro tiempos diferentes $T^* = (0, 1, 2, 3)$.

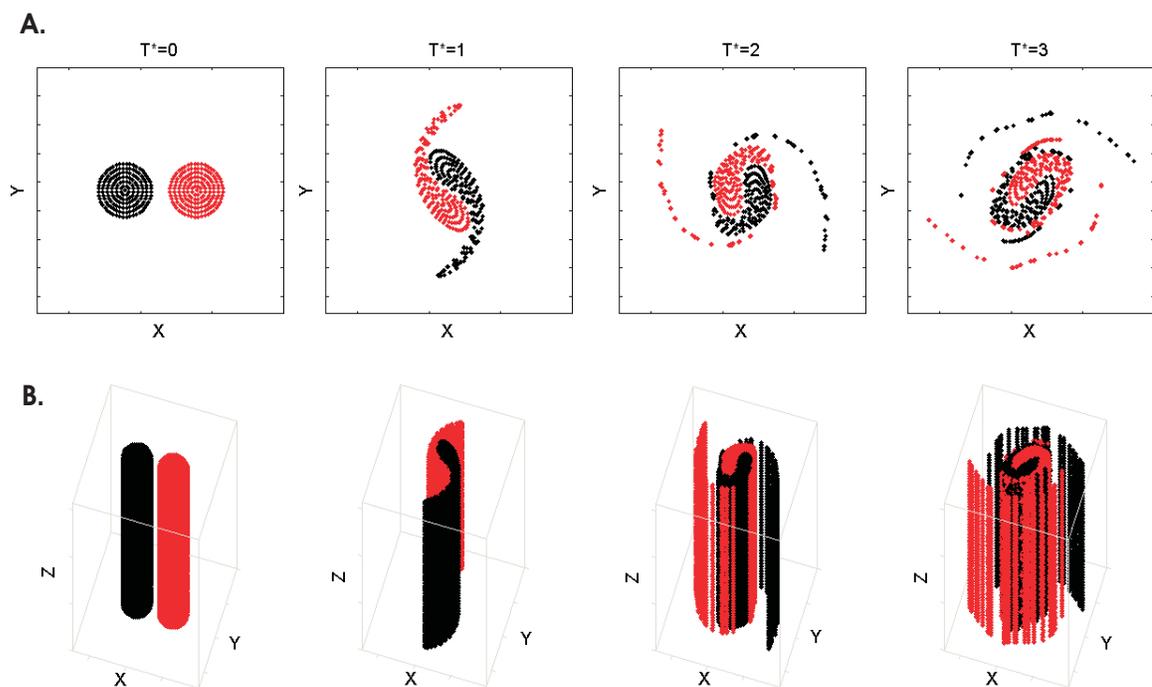


Figura 19. Simulación de la interacción de dos vórtices de Rankine idénticos por medio del método VIC tridimensional. Se usan 16900 para representar cada vórtice, éstas son organizadas en 169 filamentos cada uno de los cuales contiene 100 partículas. Lo que se evidencia es un proceso de fusión entre los remolinos, ya que la razón entre la separación y el radio de los remolinos es 2.5, y es menor que el valor crítico. En **A.** Se ilustra la evolución en el plano normal al eje z. En **B.** Se presenta la evolución en el espacio tridimensional. El tiempo T^* en cada caso es adimensionalizado por el período de giro del vórtice de Rankine.

Como observamos en la figura, la simulación realizada con el modelo VIC nos mues-

tra un escenario en el cual los dos remolinos se fusionan. Este proceso inicia con un acercamiento entre los vórtices, que además rotan y sufren alta deformación como se observa en $T^* = 1$. La deformación continúa hasta estirar los extremos de cada remolino en forma de delgados filamentos como se aprecia en $T^* = 2$. Por último, para $T^* = 3$, se observa cómo el fluido en la región central continúa mezclándose y adquiere la forma de un vórtice elíptico, mientras expulsa fluido en forma de filamentos.

En la figura 19.B se presentan los resultados en una vista tridimensional, con el fin de ver cómo es la interacción de los remolinos a lo largo de la dirección z . De la imagen creemos que es claro el comportamiento bidimensional que mantiene el modelo a la hora de simular este tipo de estructuras, ya que el fluido mantiene su estructura columnar a lo largo de toda la simulación. La figura también deja ver claramente el proceso de filamentación que sufren los remolinos en el plano x-y, mientras que mantiene la simetría en la dirección z . Además el despliegue de los filamentos de vorticidad en las tres dimensiones es claro, y concuerda con las características que se han evidenciado en experimentos de laboratorio (Velasco Fuentes, 2001). Esto nos permite concluir que el término $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u})$ que resuelve el modelo, no introduce resultados anómalos a la evolución de los filamentos de vorticidad.

La evolución de los dos remolinos para el caso en que la separación es $d/r_0 = 4$ se presenta en la figura 20. En ésta T^* es el tiempo adimensionalizado de la misma forma que en el caso de $d/r_0 = 2.5$, pero se muestran imágenes de la simulación en cuatro tiempos diferentes, $T^* = (0, 2, 4, 6)$, con el fin de observar mejores aspectos del comportamiento del fluido. En la figura 20.A, los remolinos proyectado en el plano x-y, nos muestran que no hay proceso de fusión entre los remolinos y que por el contrario estos presenta rotación uno alrededor del otro, como era de esperar dada la separación que presentan los vórtices. También se observa que la rotación esta acompañada de

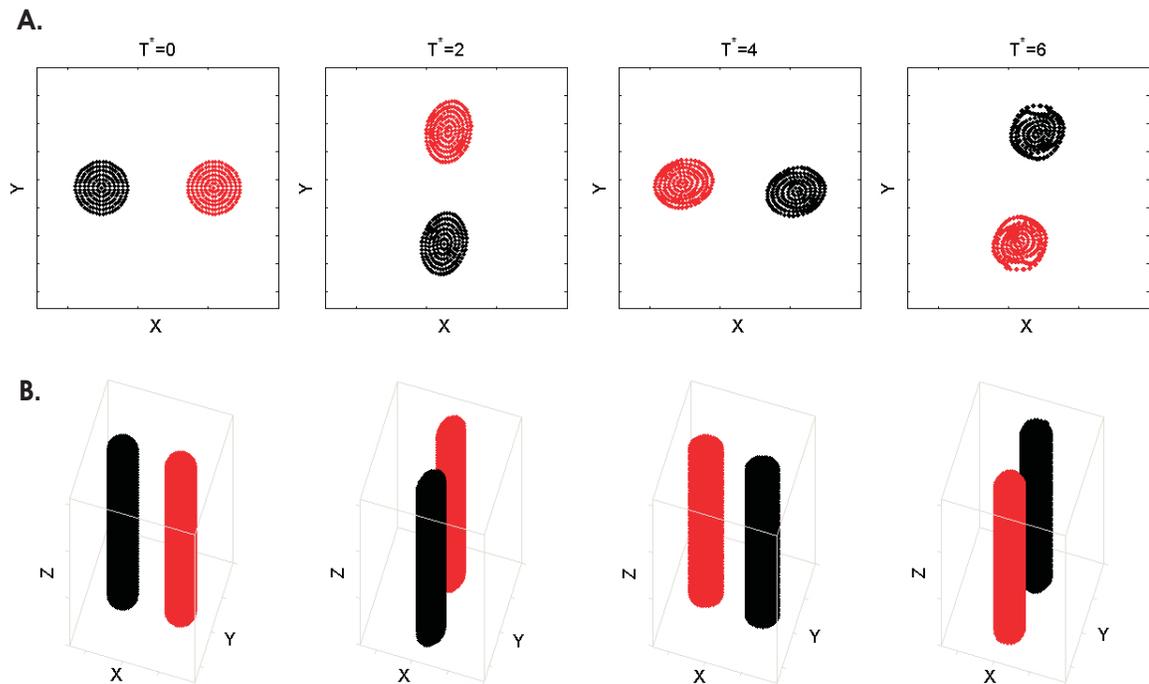


Figura 20. La misma situación descrita en la figura 18, con la diferencia que la razón entre la separación y el radio del remolino es 4, por lo que se evidencia un proceso de rotación entre los remolinos.

una alto estiramiento del núcleo, como se evidencia en $T^* = (2, 4)$. En la figura 20.B de la misma forma se presentan los resultados en el espacio tridimensional, y como es claro los remolinos mantienen simetría a lo largo del eje z , por lo que se cumple con la característica propia de los flujos bidimensionales. Con estas observaciones concluimos la prueba del modelo VIC tridimensional, el cual claramente describe el comportamiento general observado de la interacción de dos vórtices de Rankine idénticos.

Capítulo IV

RECONEXIÓN DE VÓRTICES DE RANKINE ORTOGONALES

La reconexión de vórtices es un proceso que se evidencia en la interacción tridimensional de estructuras vorticales, en las cuales no se mantiene la estructura topológica del campo de vorticidad, y su presencia se da únicamente en fluidos con viscosidad (Kida y Takaoka, 1994). Este ha sido un problema de mucho interés en la física fundamental y en la ingeniería de los fluidos. En la física, porque hay quienes defienden la hipótesis de que es el proceso esencial que permitirá elucidar el comportamiento de los flujos turbulentos, en la medida que estos flujos son vistos como una maraña de vórtices tubulares delgados que interactúan continuamente (Melander, 1988; Melander y Hussain, 1988). En la ingeniería, porque será una herramienta clave para el control del movimiento de fluidos, que permitirá por ejemplo, el conocimiento de los mecanismos que generan ruido en los aeroplanos (Hussain y Duraisamy, 2011). Su importancia, además, no sólo se limita al espacio de la física clásica, sino que sus fronteras se han expandido hasta la física cuántica; donde su estudio con helio líquido superfluido ha permitido que se distingan las diferencias y similitudes con el proceso clásico (Zuccher *et al.*, 2012).

Crow en 1970 publica un trabajo, el primer referente teórico de la reconexión de vórtices, en el que realiza un análisis de inestabilidad de dos vórtices tubulares que se desprenden de la punta de las alas de un avión (Crow, 1970). Sin embargo, posteriormente el estudio del proceso de reconexión de vórtices se dirige hacia la parte experimental. Por ejemplo, observaciones de laboratorio de la colisión de dos remolinos

anulares revelan que, como resultado de la interacción, se dan dos reconexiones sucesivas, las cuales son visualizadas con tinta y humo(Fohl y Turner, 1975; Oshima y Asaka, 1977; Oshima y Izutsu, 1988). Por otra parte, las simulaciones numéricas ofrecen la ventaja de desarrollar campos de flujo complicados y medir cantidades físicas asociadas, por lo que su llegada permitió dar gran desarrollo a los procesos de la reconexión de vórtices. Entre la gran cantidad de estudios numéricos destacan los relacionados con la interacción de vórtices tubulares antiparalelos(Melander y Hussain, 1988, 1989; Melander y Zabusky, 1988), en donde su estudio se debe, tal vez, al histórico análisis de Crow(1970). También destaca el estudio numérico de la interacción de dos vórtices anulares(Ashurst y Meiron, 1987; Aref y Zawadzki, 1991), que puede asociarse con la facilidad de generar estos vórtices en el laboratorio y la posibilidad de comparar así resultados.

Las simulaciones descritas anteriormente se caracterizan por mantener simetría en su condición inicial, y aunque resulte ser una situación simple que mantiene algunas características esenciales de la reconexión, estudios experimentales han demostrado que en interacciones asimétricas de vórtices, la reconexión también está presente(Freytmuth, 1989). Además no hay razón para pensar que en un flujo turbulento las interacciones entre vórtices mantenga alguna dirección preferencial. Así que en este capítulo estudiamos el comportamiento de vórtices tubulares que interactúan formando un ángulo de 90° . Este es un problema que se ha estudiado por medio de simulaciones numéricas(Zabusky y Melander, 1989; Boratav *et al.*, 1992), pero no con el mismo énfasis que se ha dado a los vórtices antiparalelos. Nuestro objetivo es simular la interacción de dos vórtices de Rankine por medio del método vórtice en celda tridimensional. En este método la viscosidad numérica es suficientemente baja ($Re \approx 35000$) para despreciar efectos como la modificación del perfil de vorticidad por difusión, pero no es cero y por tanto es

suficiente para permitir la reconexión. Con base en la información numérica proporcionada por el modelo, describimos las características esenciales que se presentan cuando se varía la distancia de separación entre los remolinos, y para lo cual nos basamos en el comportamiento de la circulación y las integrales de energía, helicidad y enstrofía.

IV.1 Topología y Viscosidad en la Reconexión

Antes de presentar condiciones y resultados sobre nuestras simulaciones creemos que es indispensable entender los aspectos físicos que subyacen a la reconexión de las estructuras vorticales, por esto queremos dedicar esta sección a presentar los procesos topológicos y la importancia de la viscosidad en la reconexión.

Un flujo puede ser representado por una línea material o un filamento de vorticidad, para el cual el estado de anudamiento o eslabonamiento da cuenta de su propiedad topológica, por lo que se puede decir que la configuración geométrica del flujo mantiene invariante su topología siempre que bajo continua deformación éste no cambie sus propiedades topológicas (Wu *et al.*, 2006). En los fluidos reales los cambios topológicos son frecuentes, ocurren a través de la formación y desaparición de conexiones físicas que se dan en escalas de tiempo pequeñas, comparadas con el tiempo de evolución, y que cambian drásticamente el patrón del flujo. Las reconexiones se dan cuando las líneas de campo, en este caso líneas de vorticidad, se encuentran en un punto de cruce. Este punto actúa como una bifurcación donde hay más de una elección de dirección, en el que además las líneas de campo se encuentran en dirección opuesta y se recombinan por un proceso de *corte y conecte*, el cual preserva la orientación del campo (Ricca y Berger, 1996; Kida y Takaoka, 1994). Este proceso es ilustrado en la figura 21.A, en la cual se presenta una línea de vorticidad inicialmente en forma de anillo torcido y después del

proceso de reconexión se convierte en dos líneas de vorticidad, por lo que ha cambiado así su topología. La viscosidad es la propiedad de los fluidos reales que permite la reconexión de remolinos, ya que es por esta cantidad que aparecen los efectos disipativos que afectan la evolución del fluido y su topología, como se observa a continuación.

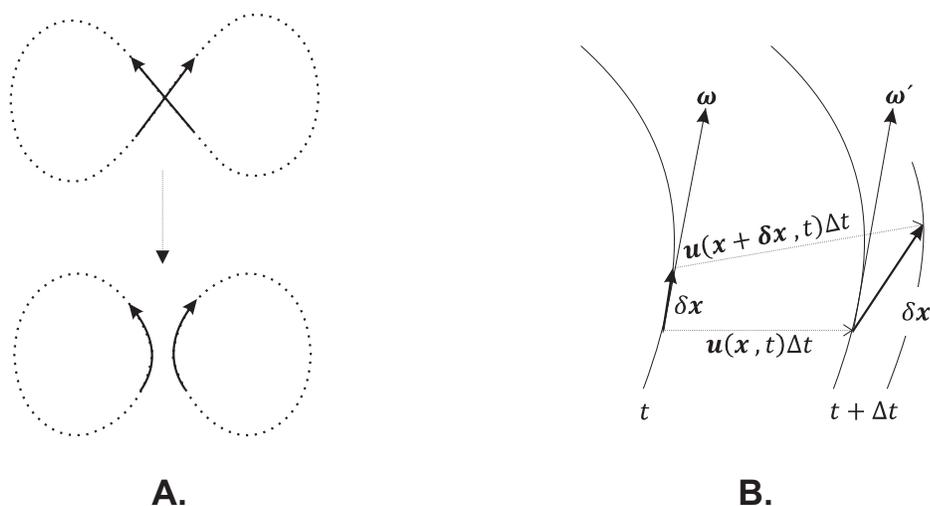


Figura 21. **A.** Esquema que presenta la reconexión de líneas de vorticidad. **B.** Diagrama que presenta la evolución de líneas de vorticidad y elementos de fluido bajo la acción del campo de velocidades.

En un flujo inviscido la identificación, en cualquier instante de tiempo, de las líneas de vorticidad puede hacerse debido a que una línea de vorticidad es una línea material, como fue establecido por los teoremas de vorticidad de Helmholtz (1858). La identificación en cambio no puede realizarse en un flujo con viscosidad, ya que elementos de fluido que en un instante de tiempo son comunes a una línea de vorticidad no lo serán en un tiempo posterior (Kida y Takaoka, 1994). Para ver por qué no serán comunes, consideremos dos elementos de fluido que pertenecen a una línea de vorticidad en el tiempo t y que están separados por una distancia $\delta\mathbf{x}$, así que la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ y $\delta\mathbf{x}$ son paralelos, como se ilustra en la figura 21.B. En un paso de tiempo infinitesimal Δt los

elementos de fluido son advectados por el campo de velocidad \mathbf{u} , por lo que su posición relativa $\delta\mathbf{x}'$, estará dada por

$$\delta\mathbf{x}' = \delta\mathbf{x} + [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]\Delta t,$$

y el campo de vorticidad en la nueva posición $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t$, y en el tiempo $t + \Delta t$, se puede expresar como

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}\Delta t.$$

Al expresar en forma diferencial $\delta\mathbf{x}'$ y usar la ecuación de vorticidad para un flujo viscoso en el campo de vorticidad $\boldsymbol{\omega}'$, las ecuaciones anteriores se pueden expresar como

$$\delta\mathbf{x}' = \delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{u}\Delta t \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{u}\Delta t + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}\Delta t. \quad (30)$$

Si en la ecuación (30) la viscosidad, ν , es cero, se obtiene que la evolución en el tiempo de $\delta\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\omega}$ es la misma, ya que en el instante t los campos son paralelos, es decir que las líneas de vorticidad se mueven como si estuvieran pegadas en el fluido. En la ecuación (30) el término referente a la difusión viscosa de vorticidad, $\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$, es el responsable de destruir la identidad entre líneas de vorticidad y líneas materiales. De manera que la componente en la dirección de $\delta\mathbf{x}$ causa la diferencia en estiramiento de la línea de vorticidad y de la línea material, mientras que la componente normal a $\delta\mathbf{x}$ se encarga de la desviación en dirección de los dos tipos de líneas. Es por este término que la viscosidad es fundamental en la reconexión, ya que este rompe la estructura material del campo y además permite que la líneas de vorticidad sufran rápidos cambios en dirección durante el proceso de reconexión (Ricca y Berger, 1996; Kida y Takaoka, 1994).

IV.2 Vórtices de Rankine Ortogonales

IV.2.1 Condición Inicial

En esta sección realizamos el estudio de la reconexión de dos vórtices de Rankine en función de la separación entre ellos, para esto variamos la separación adimensional de los vórtices, d/r , de 2 a 4 en pasos de 0.25. La condición inicial son dos vórtices de Rankine idénticos en una configuración ortogonal, uno se orienta a lo largo del eje x , el otro se orienta a lo largo del eje z y ambos tienen vorticidad en sentido positivo de su correspondiente eje. Cada uno de los vórtices está representado por $N_p = 51442$ partículas de vorticidad, las cuales se distribuyen en $N_n = 289$ filamentos y cada filamento está formado por $N_l = 178$ partículas. La magnitud de la vorticidad es $|\omega_0| = 1$, el radio del núcleo de cada vórtice es $r = 0.3$ y las simulaciones se realizan en una malla de 64^3 puntos. La evolución se describe en términos del tiempo T^* , que es el tiempo adimensionalizado con el período de rotación del vórtice de Rankine. El caso en que los remolinos están en contacto corresponde a la razón $d/r = 2.0$ y se analiza en la sección IV.2.2. Para visualizar el caso en que los remolinos están separados escogemos la razón $d/r = 3.0$, pero el análisis lo realizamos en función de las distintas separaciones, como se podrá observar en la sección IV.2.3.

IV.2.2 Vórtices en Contacto

Visualización

En la figura 22 presentamos los resultados de la simulación de dos vórtices de Rankine en contacto y con las condiciones anteriormente descritas. Los remolinos en la figura son representados por partículas de vorticidad y se muestran nueve tiempos de evolución,

con énfasis en los intervalos de tiempo cercanos a la reconexión.

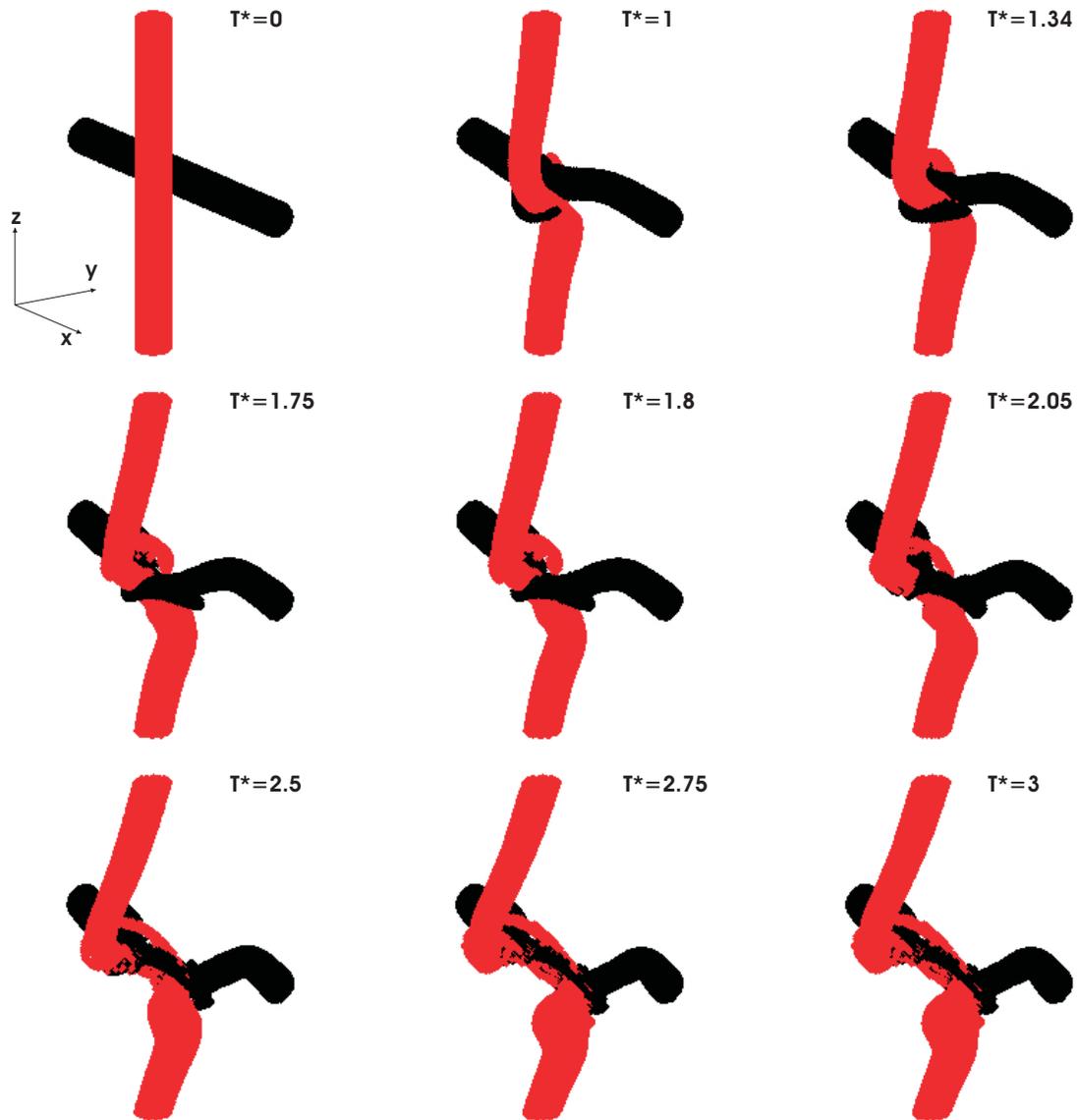


Figura 22. Evolución de dos vórtices de Rankine ortogonales y en contacto, los vórtices son representados por partículas de vorticidad y sus parámetros son descritos en la sección IV.2.1

En el tiempo $T^* = 0$ se observan los dos vórtices tubulares ortogonales, en la dirección x el de color negro y en la dirección z el de color rojo. Conforme éstos empiezan a evolucionar en el tiempo aparece la deformación, la cual obedece al sentido de la vorticidad en cada remolino, de manera que el remolino de color negro se deforma

en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Además surgen del exterior de cada remolino un gancho el cual abraza al otro remolino, como se observa en $T^* = 1$.

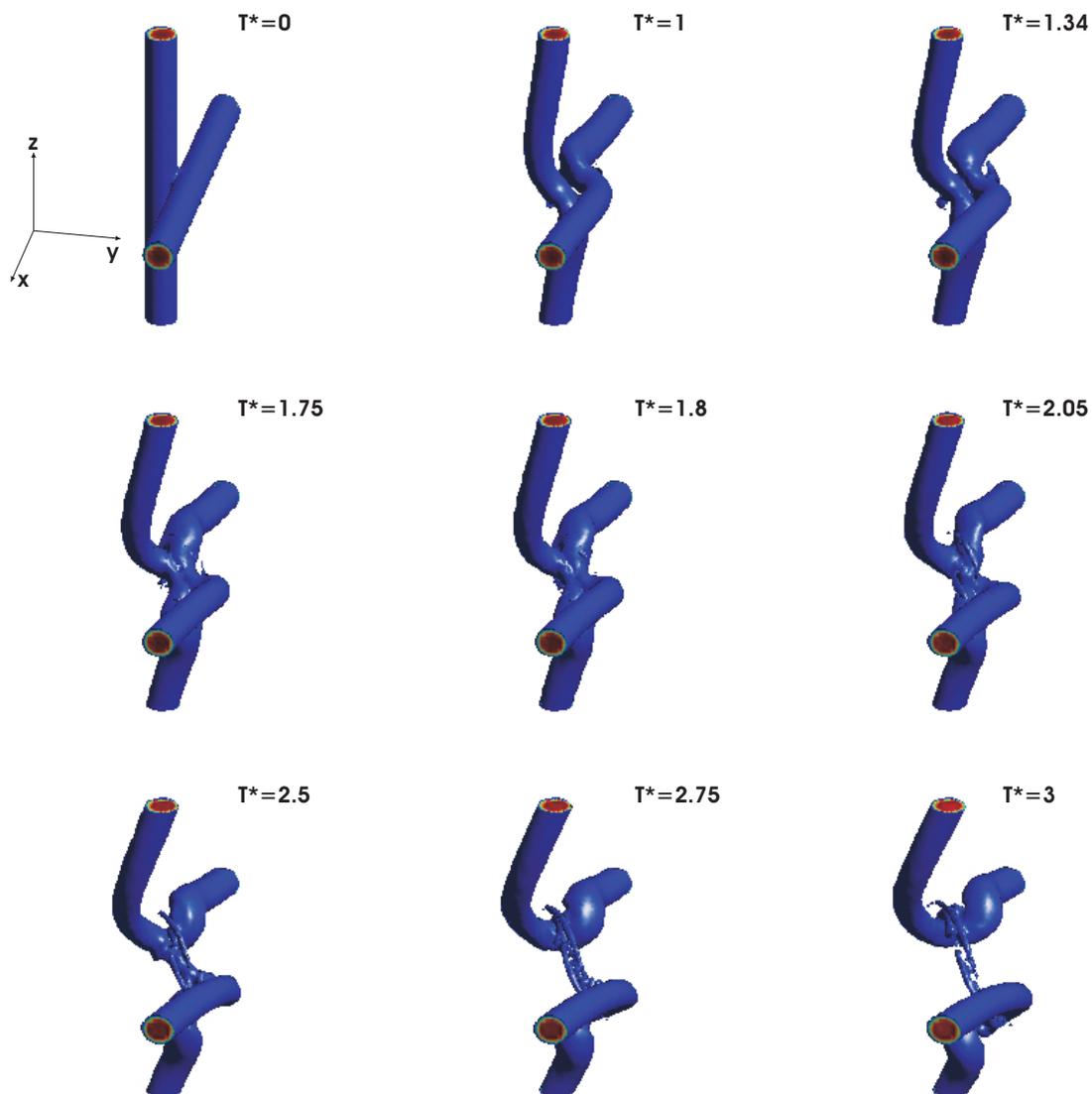


Figura 23. Evolución de dos vórtices de Rankine ortogonales y en contacto, los vórtices son representados por la isosuperficie de la vorticidad $\omega = 0.4\omega_0$ y sus parámetros son descritos en la sección IV.2.1

Estos ganchos de vorticidad han sido reportados por Boratav *et al.* (1992), quien los ha llamado *fingers* y los ha descrito únicamente en remolinos en contacto. Otra característica importante de estos ganchos es que se presentan sólo en la interacción

ortogonal de remolinos (Boratav *et al.*, 1992). Entre los tiempos 1.34 a 1.75, los remolinos son deformados hasta el punto de que la parte central de cada uno se encuentren en una configuración antiparalela con el otro. Además los ganchos son intensificados y enroscados con mayor fuerza sobre cada uno de los remolinos, provocándose entre sí lo que parece un estrangulamiento. Los remolinos parecen reconectarse entre 1.75 y 2.05, y los ganchos parecen ser los encargados de cortar los remolinos para que éstos se unan. De manera que la parte superior del remolino z se une con la parte posterior del remolino en x ; y la parte inferior del remolino z se une con la parte anterior del remolino x , y así finaliza el proceso de reconexión, como se ilustra en la figura. En el intervalo de tiempo comprendido entre 2.05 y 3 los remolinos reconectados comienzan a separarse uno del otro por la inducción que provoca el campo de vorticidad. En el proceso de separación los nuevos remolinos dejan un puente de vorticidad entre ellos que se disipa conforme estos aumentan su separación.

En la figura 23 se presenta la evolución de los dos remolinos pero esta vez representados por la isosuperficie de la magnitud de la vorticidad $\omega = 0.4\omega_0$ y en una perspectiva diferente. En la representación de isosuperficie los ganchos son menos intensos, al igual que el puente que se forma después de la reconexión, además para valores de isosuperficie mayores los ganchos y puentes no se observan. En la figura se aprecia claramente que los vórtices se encuentran antiparalelos y en contacto para $T^* \approx 1.34$; y que inician la separación a partir de $T^* \approx 2.05$. Por tanto el proceso de reconexión se da entre estos dos tiempos y tiene una duración de aproximadamente 0.7.

Circulación

Para evaluar el comportamiento de la circulación y la vorticidad en el momento de la reconexión, se realiza un corte a los tubos en un plano normal al eje x ubicado

en $x = 13\pi/32$. La coordenada del plano corresponde a la región donde los tubos comienzan el proceso de reconexión, además en este plano se estudia sólo la componente x de la vorticidad y su circulación asociada Γ . En la figura 24 ilustramos dos gráficas que corresponden a la fracción de circulación Γ sobre su valor inicial Γ_0 . En **A.** se presenta la fracción evaluada en un plano que cubre todo el dominio, por lo que sus dimensiones son $2\pi \times 2\pi$. En **B.** la fracción sólo corresponde a una región del plano y es la zona donde parte de ambos tubos se encuentra en posición antiparalela y se conectan, para posteriormente separarse.

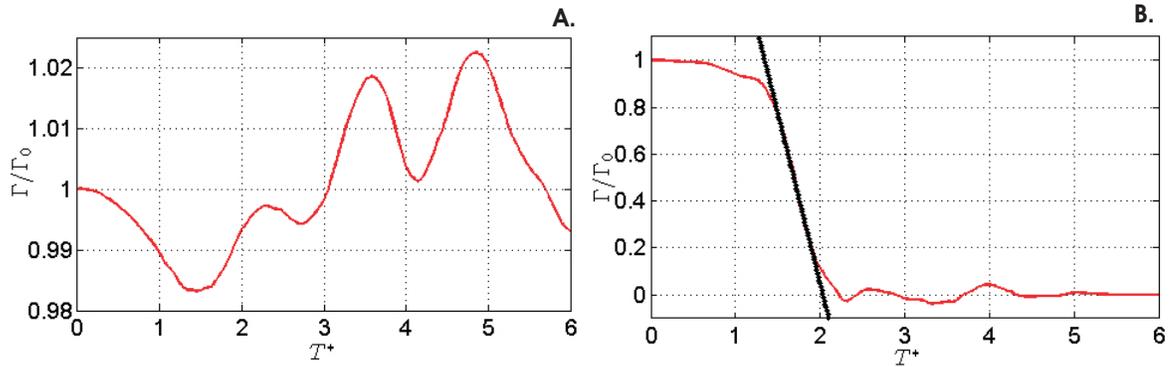


Figura 24. Fracción de la circulación en plano, $x = 13\pi/32$, donde los remolinos se conectan. **A.** La circulación se evalúa en el plano completo. **B.** La circulación se evalúa en la región del plano donde se presenta el proceso de reconexión.

En la figura 24.A identificamos dos eventos que están relacionados con la evolución de los remolinos. El primero corresponde al decaimiento de la circulación que se presenta en el intervalo de tiempo $T^* = (0, 1.34)$; y que se presenta como resultado de la deformación, la cual ocasiona que la componente x de la vorticidad se debilite. En esta etapa la circulación alcanza su valor mínimo cuando los remolinos se encuentran en posición antiparalela, ya que aparece una región negativa de vorticidad con la cual se da inicio al proceso de reconexión. El segundo evento se debe al cambio de circulación para tiempos mayores a 1.34; en éste la circulación aumenta debido a que la parte su-

terior del tubo orientado en z ingresa al plano para conectarse con la parte posterior del tubo x . De manera que el nuevo remolino llena el plano de vorticidad positiva con una región mucho mayor que la del núcleo inicial; y su valor fluctúa por el movimiento de este nuevo tubo reconectado.

La figura 24.B la describimos con ayuda de los contornos de la vorticidad evaluados en la región para la cual se ha calculado la circulación que ésta representa. En la figura 25 se presentan estos contornos y obedecen a la componente x de vorticidad para diferentes tiempos. Se observa que al tiempo $T^* = 0$ sólo hay vorticidad positiva y es la debida al remolino x , en la figura 24.B esto corresponde a la máxima circulación. Para el

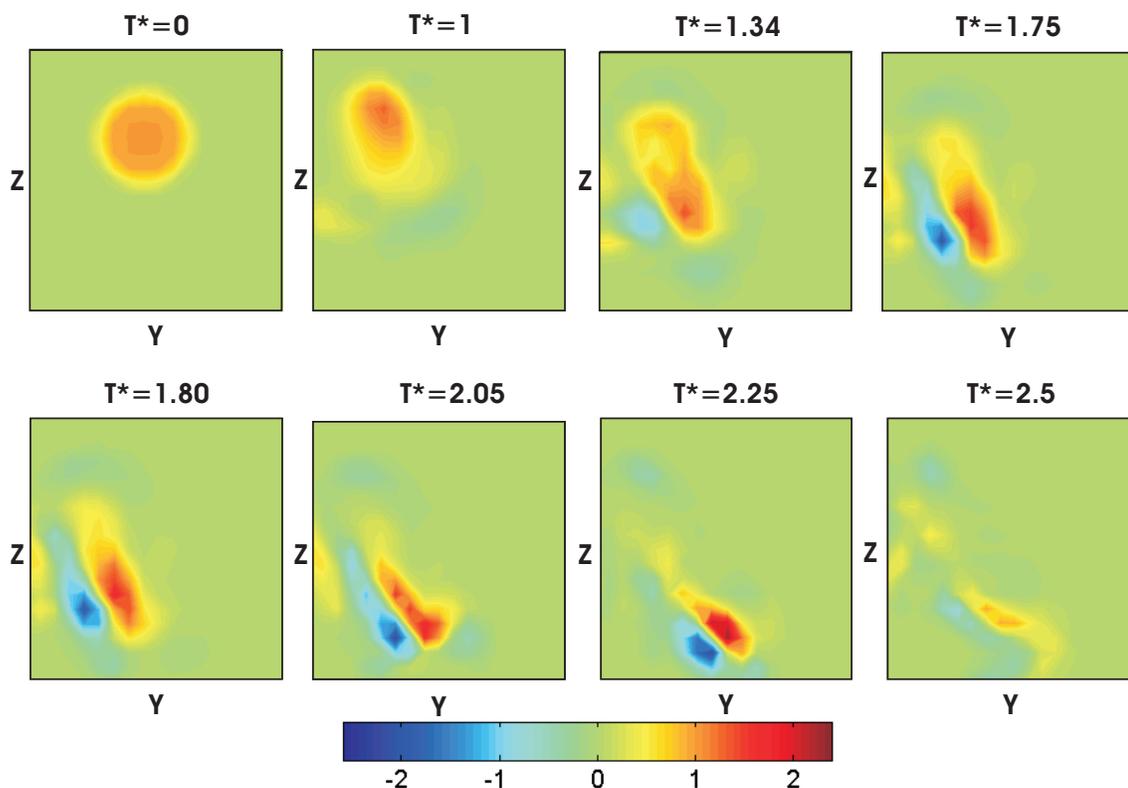


Figura 25. Evolución de los contornos de la vorticidad en la región del plano (y, z) donde se presenta el proceso de reconexión, la coordenada x del plano es $13\pi/32$.

tiempo $T^* = 1$ se observa que el núcleo se deforma, se desplaza a la izquierda y además se ve la aparición de los ganchos que se describieron anteriormente. En la circulación

vemos que este comportamiento obedece a una pérdida del 8%, pero el cambio realmente abrupto de esta cantidad inicia para $T^* \approx 1.3$, como muestra la figura 24.B. Al tiempo 1.34 en los contornos de vorticidad se observa la formación de una estructura dipolar que disminuye la circulación inicial hasta en un 10%. Esta estructura se intensifica y se propaga en el intervalo de tiempo (1.34, 2.05), donde al final del intervalo la circulación cae en un 90%. Para tiempos posteriores a 2.05 la estructura dipolar empieza a perder intensidad hasta el punto de desaparecer, al igual que sucede con la circulación, como se observa en ambas figuras. Este comportamiento obedece al inicio del proceso de separación de los dos nuevos remolinos reconectados.

En la figura 24.B además se observa una recta de color negro, la cual se ha ajustado a la fracción de circulación en la cual se presenta el decaimiento lineal. Esta recta ha sido usada por Melander y Hussain(1989) para identificar el intervalo de tiempo en el cual se presenta la reconexión. Ellos definen el punto de corte de ésta con la recta $\Gamma/\Gamma_0 = 1$ como el tiempo T_i en que da inicio el proceso de reconexión, mientras que para el tiempo en el cual finaliza el proceso no tiene claridad, pero nosotros lo escogemos como el tiempo en que la recta intercepta a $\Gamma/\Gamma_0 = 0$ y lo denotamos como T_f . Los tiempos de reconexión que obtenemos a partir de la recta son $T_i = 1.34$ y $T_f = 2.05$, y corresponden a un intervalo de reconexión $\Delta T_R = 0.71$. Por esta razón el tiempo inicial y final corresponden a los tiempos que hemos decidido mostrar en la visualización y en los contornos de vorticidad.

Energía, Helicidad y Enstrofia

Las integrales de energía cinética, helicidad y enstrofia son presentadas en la figura 26 como fracciones de su valor inicial. En **A.** se observa que la energía decae hasta el tiempo en el cual los remolinos se separan, $T^* \approx 2.7$, y su pérdida máxima es un 3.2%

del valor inicial. De esta manera, el intervalo en el cual interactúan los remolinos para fusionarse es en el que más se disipa energía. En **B**, se grafica la helicidad sobre el valor absoluto de su valor inicial; en ésta se observa cómo la helicidad empieza a cambiar de $T^* = 1$ en adelante, se desarrolla rápidamente durante el intervalo de reconexión y alcanza su máximo cuando los remolinos han cambiado por completo su topología. Además decae conforme la separación tiene lugar, aproximadamente en 2.5.

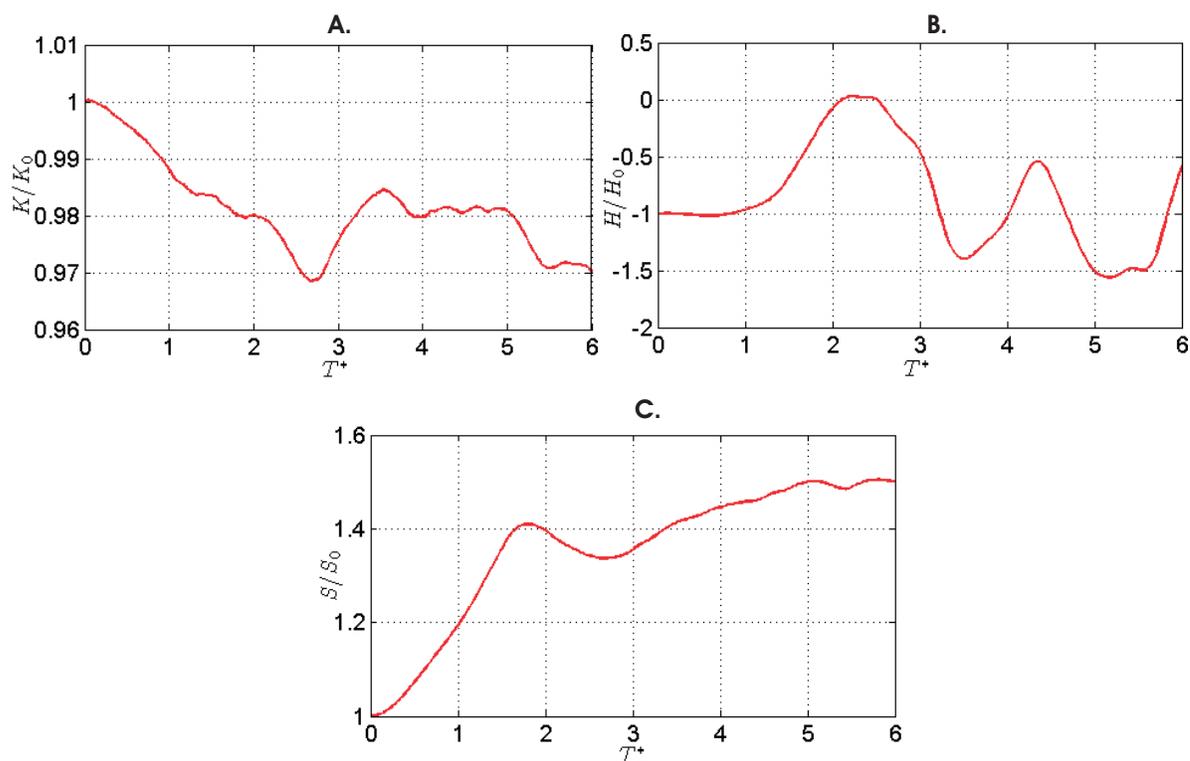


Figura 26. Evolución de cantidades integrales. **A.** Energía **B.** Helicidad **C.** Enstrofía. En todos los casos se presenta la fracción de la cantidad integral sobre su valor inicial.

La enstrofía es importante en mecánica de fluidos, en especial en los flujos turbulentos, ya que su razón de cambio está asociada con la razón de estiramiento al que están sometidos los filamentos o líneas de vorticidad y que son producto de la deformación que se presenta en la interacción de las estructuras vorticales (Wu *et al.*, 2006). En la gráfica **C**, se ilustra la fracción de enstrofía, en ésta vemos como la enstrofía se desa-

rolla rápidamente hasta alcanzar un primer máximo en el tiempo $T^* = 1.8$, el cual se encuentra dentro del intervalos de reconexión. La primera fase de desarrollo de esta cantidad corresponde bien con la etapa donde los vórtices de Rankine son mayormente estirados y deformados para alcanzar la posición de reconexión y dar inicio al proceso. Luego de su primer máximo ésta cantidad decae, lo cual puede estar asociado con la parte de la separación, en la cual los remolinos se desplazan sin mayor deformación. Finalmente, para tiempos posteriores a la reconexión, la enstrofia crece pero con una razón de cambio mucho menor a la etapa inicial.

IV.2.3 Vórtices Separados

Visualización

Conforme aumenta la distancia de separación entre los remolinos se observa que los ganchos que se presentaban al inicio de la interacción de los vórtices en contacto son menos intensos, hasta el punto que desaparecen por completo para la fracción $d/r = 3$. En la figura 27 se ilustra la evolución de los dos vórtices de Rankine representados con la isosuperficie de vorticidad, $\omega = 0.4\omega_0$, para la fracción de separación $d/r = 3$. Se presenta para el tiempo $T^* = 0$ la configuración inicial; para el tiempo $T^* = 2$ una imagen previa a la reconexión, en la cual no se evidencia la presencia de ganchos, que surgen para razones de separación $d/r < 3$. Para el mismo tiempo se observa que los vórtices se deforman para alcanzar la posición antiparalela. Esta deformación es mayor conforme la distancia de separación entre los vórtices aumenta, ya que estos tienen que ser estirados una distancia considerable para que logren encontrarse en la zona de reconexión.

Otro aspecto importante que se distingue en la figura 27 con respecto a la figura

23, son los tiempos en los que se da el proceso de reconexión. Ya que en $T^* \approx 2.75$ los

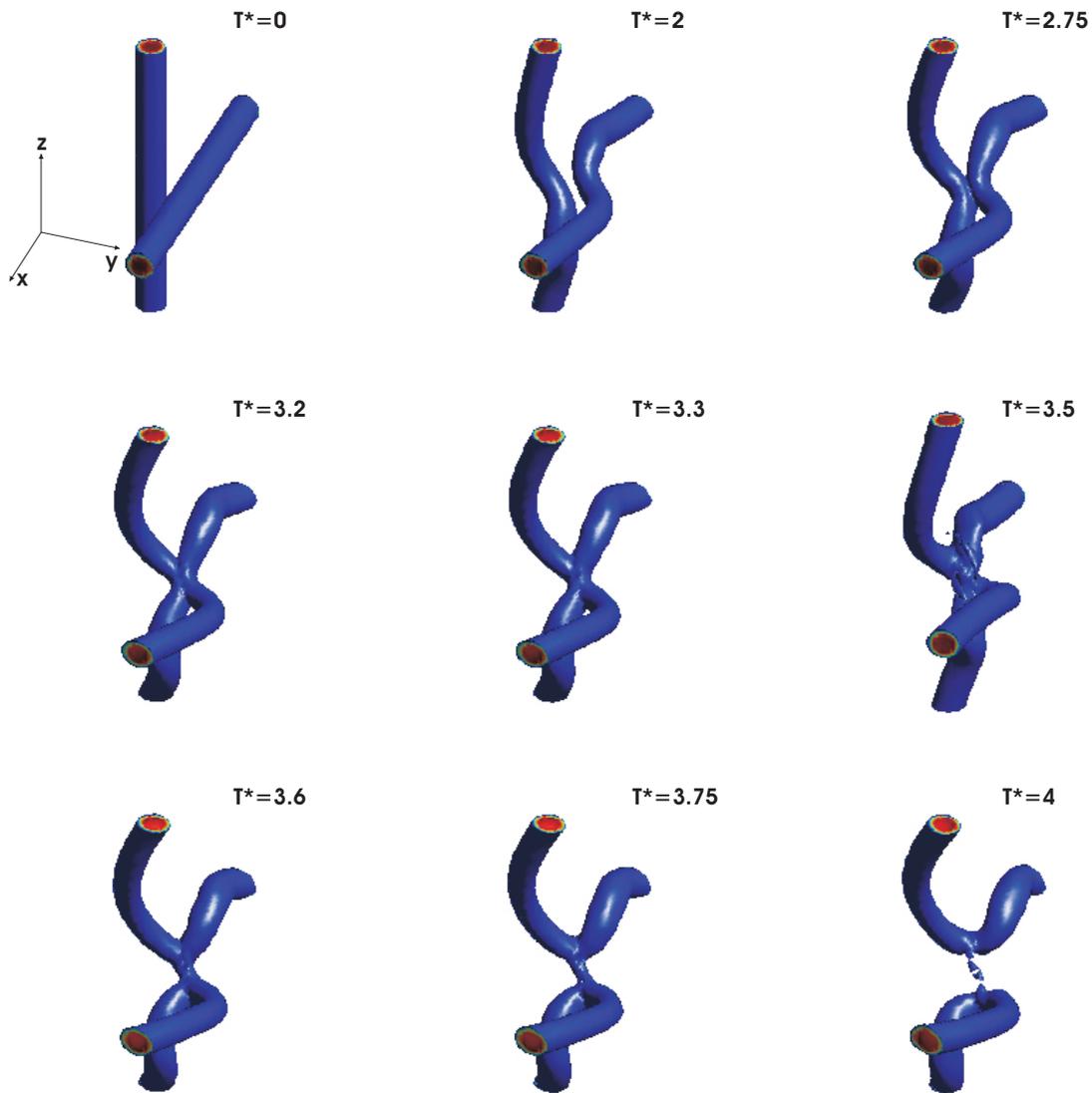


Figura 27. Evolución de dos vórtices de Rankine en una configuración ortogonal y con una fracción de separación $d/r = 3$. Los vórtices son representados por la isosuperficie de la vorticidad $\omega = 0.4\omega_0$ y sus parámetros son descritos en la sección IV.2.1

vórtices son antiparalelos, en $T^* \approx 3.3$ presentan una etapa intermedia de reconexión y en $T^* \approx 3.5$ inician la separación. Cada uno de estos tiempos es mayor en más de una unidad de tiempo que para el caso en que los remolinos están en contacto. Además con las observaciones de los otros casos de la fracción d/r , se tiene que el tiempo en que

inicia el proceso de reconexión aumenta conforme la distancia de separación entre los vórtices también lo hace.

Por último, en la evolución se aprecia que una vez que finaliza el proceso de reconexión e inicia la etapa de separación, los restos de vorticidad que forman el puente entre los dos remolinos reconectados disminuye en comparación con el caso en que los remolinos están conectados. Esto se observa claramente para el tiempo $T^* = 4$ en la figura 26, así que la disminución de la intensidad de los puentes se presenta con el aumento de la fracción d/r entre los vórtices, pero los puentes nunca dejan de aparecer.

Circulación

La circulación, evaluada en la región del plano donde se presenta la reconexión y en la cual únicamente aparece la estructura dipolar, es presentada en la figura 28. En la ordenada aparece la circulación como una fracción de su valor inicial para cada uno de los casos de separación estudiados aquí, y que se indican en la figura por la barra de colores.

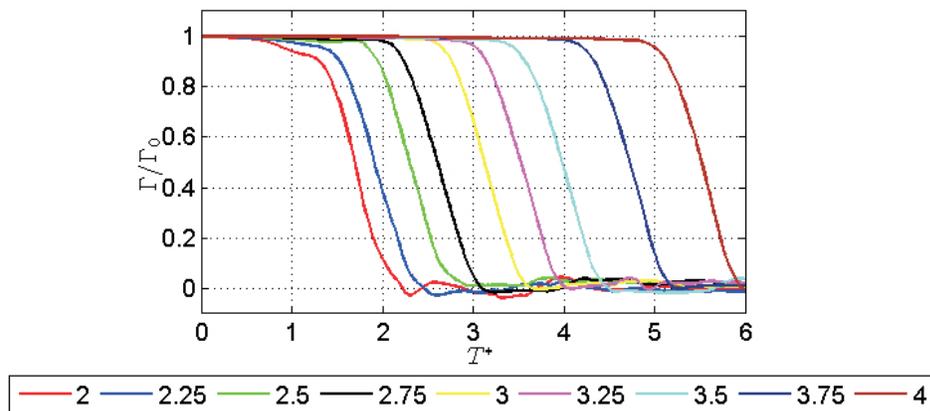


Figura 28. Fracción de la circulación, en la región del plano normal al eje x donde los remolinos se conectan, para cada fracción de separación d/r , que se especifica en la barra de colores.

En la figura se observa que la circulación tiene el mismo comportamiento para cada uno de los casos de separación. Éste se caracteriza por un decaimiento lento hasta un tiempo $T^* \approx T_i$ donde inicia el proceso de reconexión, un decaimiento rápido y lineal dentro del lapso que se presenta la reconexión; y para tiempos mayores que T_f se alcanza el valor de cero circulación.

La diferencia que se presenta en la circulación para los diferentes valores de separación, se debe a un corrimiento hacia la derecha de los valores de tiempo T_i y T_f . Esto indica que al aumentar la separación se aumenta el tiempo T_i en que inicia el evento de reconexión y el tiempo T_f en que finaliza, pero el intervalo en que sucede ($T_f - T_i$) se mantiene aproximadamente constante. El corrimiento además no se presenta de forma gradual, ya que si comparamos las funciones de circulación para las fracciones 2 y 2.25 se observa que estas están más cerca que para las fracciones 3.75 y 4.

Energía, Helicidad y Enstrofia

Con el fin de ver cómo la separación entre los vórtices afecta las cantidades integrales, en la figura 29 se presentan la energía, la helicidad y la enstrofia como función del tiempo para las diferentes razones d/r . En la figura además se muestra la barra de colores para especificar el valor de la fracción d/r entre cada remolino y las cantidades integrales corresponden a una fracción de su valor inicial. En 29.A, se observa que la energía no parece mostrar un comportamiento funcional similar para todas las separaciones, pero sí que la razón de cambio de la energía en el tiempo disminuye conforme la separación aumenta. Así por ejemplo, para el caso en que los remolinos están en contacto se tiene una pérdida del 3% de energía para el tiempo $T^* = 2.5$, mientras que para el caso $d/r = 3$ se tiene una pérdida del 0.5% para el mismo tiempo. Esto supone que la disipación viscosa afecta menos la evolución del fluido conforme la separación entre los

remolinos aumenta.

En la helicidad, figura 29.B, vemos que su desarrollo disminuye para la etapa previa a la reconexión conforme la separación de los vórtices aumenta. También se aprecia que para $d/r \leq 3$ esta cantidad alcanza un aumento por encima del 50% para tiempos menores que 3, mientras que para $d/r > 3$ ese aumento se da para tiempos por encima de 4.5. Esto corresponde a que el aumento de la separación hace lento el reordenamiento de las líneas de vorticidad en cada remolino durante la etapa previa a la reconexión. Pero de nuevo para esta cantidad tampoco hay una forma funcional clara con respecto a la separación.

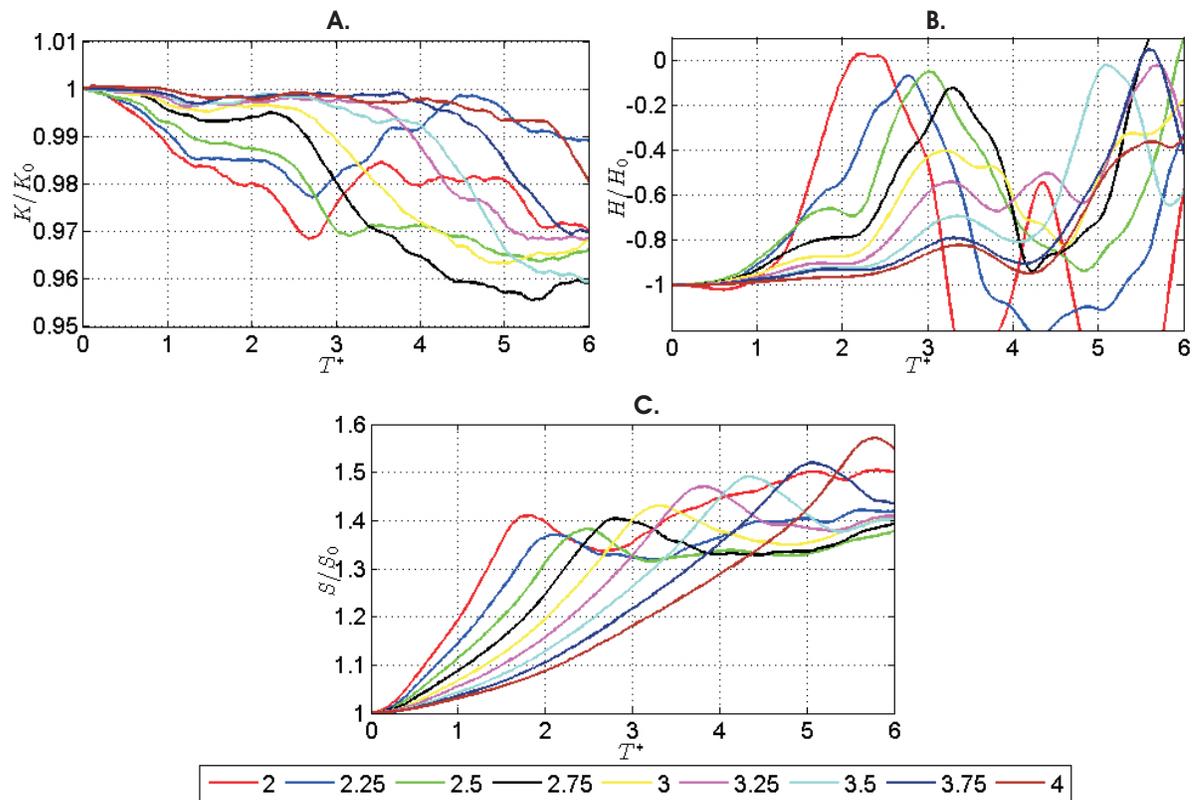


Figura 29. Evolución de cantidades integrales para diferente separación entre los vórtices. **A.** Energía **B.** Helicidad **C.** Enstrofia. En todos los casos se presenta la fracción de la cantidad integral sobre su valor inicial y se presenta la barra de colores para cada separación entre los remolinos.

Por otra parte, la enstrofia muestra un comportamiento similar entre las diferentes separaciones. Para todos los casos esta cantidad presenta una razón de cambio positiva para la etapa previa a la reconexión. La razón de cambio además disminuye con el aumento de la separación entre vórtices, como se observa en la figura 29.C. Con respecto al caso de los vórtices en contacto, el primer máximo de esta cantidad es desplazado hacia la derecha conforme la separación crece entre los remolinos. Además basados en la visualización de la reconexión por partículas e isosuperficies de vorticidad, se observa que este máximo coincide con un tiempo intermedio del intervalo en el que se da el proceso de reconexión. En otras palabras, este tiempo se da dentro del proceso en el que los vórtices se encuentran en posición antiparalela hasta que estos empiezan a separarse, y que por tanto definimos como el tiempo de reconexión T_R . La enstrofia además permite corroborar el aumento del estiramiento de los remolinos con la separación, conclusión que se había obtenido con la visualización, ya que el máximo de enstrofia además aumenta conforme los remolinos aumentan la separación.

Separación - Tiempo de Reconexión

En la figura 30 presentamos el tiempo de reconexión T_R (línea negra continua) como función de la fracción d/r , basados en la información de la enstrofia. De la figura, claramente se observa que, conforme aumenta la distancia de separación entre los remolinos, el tiempo en el que se da el evento de reconexión aumenta. Esta consideración se había hecho basados en las observaciones, pero con esta representación podemos claramente cuantificar este evento. Así por ejemplo, de la figura vemos que el tiempo de reconexión para el caso en que los remolinos están en contacto es $T_R = 1.75$, mientras que para el caso de separación $d/r = 3$ este es $T_R = 3.3$, y sus configuraciones puede además apreciarse en las figuras 23 y 27, respectivamente. Además, en la figura también se

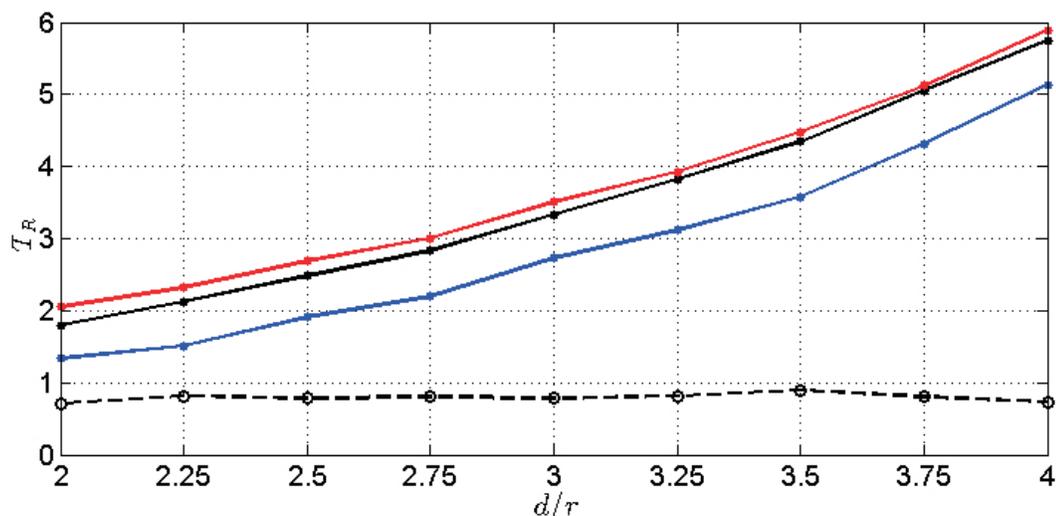


Figura 30. Tiempo de reconexión T_R (línea negra continua) como función de la fracción de separación d/r entre dos vórtices. La línea azul corresponde al tiempo en que inicia el proceso de reconexión T_i , la línea roja al tiempo en que finaliza T_f y la línea negra (discontinua) al intervalo en que se da el proceso.

observa que los tiempos entre dos separaciones sucesivas se alejan conforme aumenta la fracción d/r , observación que se había hecho basados en las gráficas de la circulación.

En la figura también se ilustra el tiempo T_i en que inicia el proceso de reconexión (línea azul), el tiempo T_f en que finaliza (línea roja) y el intervalo de tiempo que dura el proceso (línea negra discontinua). De la figura se observa que el tiempo T_R se encuentra dentro del intervalo en el cual se presenta la reconexión para cada una de las separaciones. Además se observa que el intervalo en que ocurre la reconexión tiene un comportamiento aproximadamente constante con el aumento de la separación entre los remolinos.

Capítulo V

CONCLUSIONES

Se desarrolla el modelo numérico vórtice en celda tridimensional y se caracterizan sus propiedades, en cuanto a resolución de partículas, resolución de la malla y aspectos relacionados con las fronteras.

Se realiza la validación del modelo VIC-3D con el calculo de la velocidad de traslación de un vórtice anular delgado. Para lo cual se obtiene una mayor precisión en la velocidad cuando se usa una alta resolución de malla, 95.4% para una resolución de 256^3 puntos. El aumento de la resolución en la malla implica un aumento del número de partículas y del tiempo de computo.

El comportamiento bidimensional es bien representado por el modelo, ya que la evolución de la vorticidad requiere que se realice el calculo de los términos de estiramiento y doblamiento de la vorticidad y este no introduce resultados espurios en la solución de flujos bidimensionales.

La interacción de dos vórtices de Rankine ortogonales cambia conforme la distancia entre ellos aumenta. Con el aumento de la separación aumenta la deformación entre los remolinos. Los ganchos de vorticidad que surgen al inicio de la interacción entre dos vórtices se presenta solamente para razones $d/\epsilon < 3$. Los puentes de vorticidad que se forman después de la reconexión son menos intensos con el aumento de la distancia entre los vórtices.

Se identifica un tiempo que permite cuantificar el evento de reconexión como función de la separación entre los remolinos. Este tiempo se basa en la integral de enstrofia y

se encuentra en el intervalo en el que se presenta el evento de reconexión, para cada separación.

Los resultados numéricos nos permiten concluir que el tiempo de reconexión aumenta con la separación entre los remolinos, siendo su razón de cambio mayor con el aumento de la separación. Además que el intervalo de tiempo que dura el proceso de reconexión se comporta aproximadamente constante con el aumento de la separación entre los remolinos.

Referencias

- Aref, H. y Zawadzki, I. (1991). Linking of vortex rings. *Nature*, **354**: 50–53.
- Ashurst, W. T. y Meiron, D. (1987). Numerical study of vortex reconnection. *Phys. Rev. Lett.*, **58**: 1632–1635.
- Batchelor, G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- Birdsall, C. K. y Langdon, A. B. (1985). *Plasma Physics via Computer Simulation*. McGraw-Hill.
- Boratav, O. N., Peltz, R. B., y Zabusky, N. J. (1992). Reconnection in orthogonally interacting vortex tubes: direct numerical simulations and quantifications. *Phys. Fluids A*, **4**: 581–605.
- Christiansen, J. P. (1973). Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. *J. Comput. Phys.*, **13**(3): 363–379.
- Cottet, G. y Koumoutsakos, P. (2000). *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge University Press.
- Couët, B., Buneman, O., y Leonard, A. (1981). Simulation of three-dimensional incompressible flows with a vortex-in-cell method. *J. Comput. Phys.*, **39**: 305–328.
- Crow, S. (1970). Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA J*, **8**: 2172–2179.
- Fohl, T. y Turner, J. S. (1975). Colliding vortex rings. *Phys. Fluids*, **18**: 433–436.
- Freytmuth, P. (1989). Visualizing the connectivity of vortex systems for pitching wings. *J. Fluid Eng.*, **111**: 217–220.
- Hockney, R. y Eastwood, J. (1988). *Computer simulation using particles*. Adam Hilger, New York.
- Hussain, F. y Duraisamy, K. (2011). Mechanics of viscous vortex reconnection. *Phys. Fluids*, **23**: 021701(1–4).
- Kida, S. y Takaoka, M. (1994). Vortex reconnection. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **26**: 169–189.
- Koumoutsakos, P. (1997). Inviscid axisymmetrization of an elliptical vortex. *J. Comput. Phys.*, **138**: 821–857.

- Melander, M. V. (1988). Close interactions of 3d vortex tubes. *Center for Turbulence Res., Annu. Res. Briefs*, páginas 39–50.
- Melander, M. V. y Hussain, F. (1988). Cut-and-connect of two antiparallel vortex tubes. *Center for Turbulence Res., Proc. of the summer program*, páginas 257–286.
- Melander, M. V. y Hussain, F. (1989). Cross-linking of two antiparallel vortex tubes. *Phys. Fluids A*, **1**: 633–636.
- Melander, M. V. y Zabusky, N. (1988). Interaction and “apparent” reconnection of 3d vortex tubes via direct numerical simulations. *Fluid Dyn. Res.*, **3**: 247–250.
- Moffatt, H. K. y Tsinober, A. (1992). Helicity in laminar and turbulent flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24**: 281–312.
- Oshima, Y. y Asaka, S. (1977). Interaction of two vortex rings along parallel axes in air. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **42**: 708–713.
- Oshima, Y. y Izutsu, N. (1988). Cross-linking of two vortex rings. *Phys. Fluids*, **31**: 2401–2403.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., y Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- Ricca, R. L. y Berger, M. A. (1996). Topological ideas and fluid mechanics. *Phys. Today*, **49**: 28–34.
- Saffman, P. (1992). *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Shariff, K. y Leonard, A. (1992). Vortex rings. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **24**: 235–279.
- Stock, M. (2007). Summary of vortex methods literature. <http://markjstock.org/research/>.
- Velasco Fuentes, O. (2001). Chaotic advection by two interacting finite are vortices. *Phys. Fluids*, **13**: 901–912.
- Velasco Fuentes, O. (2005). Vortex filamentation: its onset and its role on axisymmetrization and merger. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **40**: 23–42.
- Wu, J. Z., Ma, H. Y., y Zhou, M. D. (2006). *Vorticity and Vortex Dynamics*. Springer, Germany.
- Zabusky, N. y Melander, M. V. (1989). Three-dimensional vortex tube reconnection: morphology for orthogonally-offset tubes. *Physica D*, **37**: 555–562.
- Zawadski, I. (1989). *Numerical Experiments on Vortex Dynamics*. Tesis de Maestría, California Institute of Technology.

Zawadski, I. y Aref, H. (1991). Mixing during vortex ring collision. *Phys. Fluids*, **3**: 1405–1410.

Zuccher, S., Baggaley, A. W., y Barenghi, C. F. (2012). Quantum vortex reconnections. *Phys. Fluids*, **24**: 125108(1–21).