

Tesis defendida por
Marlon Alejandro Pinilla
y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Zavala Sansón
Director del Comité

Dr. José Luis Ochoa de la Torre
Miembro del Comité

Dr. Oscar Uriel Velasco Fuentes
Miembro del Comité

Dr. Carlos Francisco Flores Luna
Miembro del Comité

Dr. Francisco Javier Ocampo
Torres
Coordinador
Programa de Posgrado en Oceanografía
Física

Dr. Jesús Favela Vara
Encargado de la
Dirección de Estudios de Posgrado

13 de Agosto de 2013

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**Programa de Posgrado en Ciencias
En Oceanografía Física**

Generación de vórtices aislados y formación de estructuras multipolares en dos dimensiones

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de Maestro en Ciencias

Presenta:

Marlon Alejandro Pinilla

Ensenada, Baja California, México
2013

Resumen de la tesis de **Marlon Alejandro Pinilla**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **Maestro en Ciencias en Oceanografía Física**

Generación de vórtices aislados y formación de estructuras multipolares en dos dimensiones

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón

Mediante experimentos de laboratorio en sistemas con y sin rotación se estudia el problema de la generación de vórtices monopolares que se degeneran en estructuras multipolares en dos dimensiones. La bidimensionalidad del fluido está asociada a dos factores: en el caso sin rotación el efecto es logrado al utilizar una capa delgada de fluido, mientras en el otro caso es precisamente la rotación del sistema la que provoca el movimiento bidimensional—teorema de Taylor-Proudman—. Para producir movimiento en el fluido se utiliza un forzamiento electromagnético — fuerza de Lorentz— el cual permite generar vórtices monopolares axisimétricos de manera controlada. Los remolinos generados son inestables, por lo que durante su evolución se transforman en estructuras multipolares, es decir, con satélites de vorticidad opuesta a la del núcleo, dispuestos a su alrededor. Se observan distintos tipos de multipolos dependiendo del perfil radial de vorticidad del remolino inicial: trípolos (dos satélites), vórtices triangulares (tres satélites), cuadrangulares (cuatro satélites) e incluso pentagonales (cinco satélites). Mediante simulaciones numéricas y un análisis teórico de estabilidad se da una explicación a las observaciones de laboratorio y se profundiza el estudio de la evolución de dichas estructuras en situaciones más generales.

Palabras clave: Vórtices multipolares bidimensionales, experimentos de laboratorio, forzamiento electromagnético, estabilidad.

Abstract of the thesis presented by **Marlon Alejandro Pinilla** as a partial requirement to obtain the **Master in Science degree in Physical Oceanography**

Generation of isolated vortices and the formation of two-dimensional multipolar structures

Abstract approved by:

Dr. Luis Zavala Sansón

By means of laboratory experiments with and without rotation effects we study the breakup of monopolar vortices into two-dimensional multipolar vortices. The two-dimensional character of the flow is associated with two factors: in systems without rotation this effect is achieved by using a thin layer of fluid, while in the other case it is precisely the rotation of the system which causes the motion in two dimensions — Taylor- Proudman theorem—. In order to produce the fluid motion, we use an electromagnetic forcing —Lorentz force— which allows the generation of axisymmetric vortices in a controlled way. The generated monopolar eddies are unstable, so that during their evolution they become multipolar structures, i.e. a vorticity core surrounded by satellites with opposite-sign vorticity. Different types of multipoles are observed depending on the initial radial vorticity profile of the vortices: tripoles (two satellites), triangular vortices (three satellites), quadrupolar vortices (four satellites) or even pentagonal structures (five satellites). Using numerical simulations and a theoretical stability analysis we discuss the laboratory observations and the evolution of these structures in more general situations.

Keywords: Two-dimensional multipolar vortices, laboratory experiments, electromagnetic forcing, stability.

Contenido

	Página
Resumen español.....	i
Resumen inglés.....	ii
Dedicatorias.....	iii
Agradecimientos.....	iv
Lista de Figuras.....	vii
Lista de Tablas.....	xiii
1. Introducción	1
1.1. Motivación y antecedentes.....	1
1.2. Resumen de la tesis.....	3
1.3. Objetivo general.....	4
1.4. Objetivos específicos.....	5
2. Teoría y aspectos básicos	6
2.1. Ecuaciones de gobierno.....	6
2.2. Dinámica en 2D.....	7
2.3. Modelos de vórtices monopolares.....	9
2.4. Técnicas experimentales en la generación de vórtices.....	10
2.5. Aspectos básicos de inestabilidad.....	11
2.5.1. Teorema de Rayleigh.....	12
2.5.2. Análisis de modos normales.....	13
2.5.3. Inestabilidad centrífuga y barotrópica.....	15
3. Generación de multipolos en sistemas sin rotación	18
3.1. Introducción.....	18
3.2. Montaje Experimental.....	18
3.3. Forzamiento electromagnético.....	21
3.3.1 Modelo analítico para el campo magnético.....	23
3.3.2. Densidad de corriente.....	24
3.3.3. Campo de fuerza —fuerza de Lorentz—.....	25
3.4. Resultados experimentales.....	26
3.4.1. Formación de vórtices multipolares.....	27
3.4.1.1. Vórtices tripolares.....	28
3.4.1.2. Vórtices triangulares.....	31
3.4.1.3. Vórtice cuadrangular.....	34
3.4.1.4. Par de dipolos.....	37
3.4.2. Perfiles de vorticidad y velocidad azimutal.....	40
3.4.3 Evolución de los parámetros ω_o , R y α	44
3.4.4. Decaimiento por fricción de fondo.....	45

Contenido

3.5. Discusiones.....	49
4. Vórtices Multipolares en sistemas con rotación	52
4.1. Introducción.....	52
4.2. Montaje Experimental.....	53
4.3. Resultados experimentales.....	55
4.3.1. Pequeños y grandes impulsos.....	56
4.3.2. Vórtice triangular.....	57
4.3.3. Vórtices cuadrangulares y pentagonales.....	58
4.4. Discusiones.....	60
5. Simulaciones Numéricas	62
5.1. Introducción.....	62
5.2. Simulaciones de remolinos en función de Re	63
5.2.1. Perturbaciones axisimétricas.....	63
5.2.2. Resultados.....	64
5.3. Simulaciones de remolinos experimentales.....	66
5.3.1. Perturbaciones aleatorias altas.....	67
5.3.2. Perturbaciones de modos azimutales.....	71
5.4. Discusiones.....	72
6. Conclusiones	74
Referencias bibliográficas	77

Lista de figuras

Figura		Página
1	Perfil radial de vorticidad (<i>línea continua</i>) y de velocidad azimutal (<i>línea discontinua</i>) asociado a un monopolo a) aislado y b) no aislado. Los parámetros adimensionales utilizados son $\omega_0=1$; $R=1$ y $\alpha=2$	10
2	Perfiles radiales de L^2 para un sistema (a) en rotación y (b) no rotación. La línea continua es para $\alpha=2$, la discontinua para $\alpha=3$ y la punteada para $\alpha=4$	13
3	Perfiles radiales de $d\omega/dr$. La línea continua es para $\alpha=2$, la discontinua para $\alpha=3$ y la punteada para $\alpha=4$	15
4	Esquema del montaje experimental a) Vista lateral y b) Vista superior. En la vista lateral se observa que el imán es puesto en el centro y debajo del tanque, mientras en la superior se aprecia la disposición de los electrodos.....	19
5	Campo magnético generado por el imán utilizado en los experimentos. En (a) se muestra la distribución horizontal de la componente vertical del campo. Dicha componente se presenta en función de (b) la distancia radial y (c) la altura. Los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque en (a), mientras en (b) y (c) la abscisa es la distancia radial y la altura en <i>cm</i> respectivamente, y la ordenada es la intensidad del campo en <i>Teslas</i>	22
6	Perfil (a) radial y (b) vertical de campo magnético. Los puntos representan el campo medido, mientras la línea continua es el ajuste por cuadrados mínimos de la ec. (3.2) para $z=1.2$ <i>cm</i> y $r=0$ <i>cm</i> respectivamente. La ordenada representa la magnitud del campo magnético medido en <i>Teslas</i> , mientras la abscisa la distancia radial y la altura en <i>cm</i>	23
7	Superficies del campo magnético (a) experimental y (b) analítico. Los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque.....	24
8	Gráfica de a) campo eléctrico, b) líneas de campo eléctrico y c) magnitud del campo eléctrico. Los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque. Los puntos sólidos en las esquinas equivalen a los electrodos. La magnitud de campo eléctrico está expresada en <i>N/C</i>	25

Lista de figuras

9	(a) Campo de fuerza y (b) perfil radial del campo de fuerza. En (a) Los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque, mientras en (b) la abscisa es la distancia radial en cm y la ordenada la intensidad del campo en N/m^3	26
10	Imágenes de la evolución de un vórtice monopolar visualizado con tinta y generado con $I = 0.15 A$, $V = (15-17) v$ y $t_f = 4-5 s$	28
11	Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V=15-17v$ y con un tiempo de forzamiento de $t= 4-5 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	30
12	Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$ y $V=15-17v$ y con un tiempo de forzamiento de $t= 4-5 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas).....	31
13	Imágenes de un vórtice triangular generado con $I = 0.15 A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento comprendido entre 7 y 8 s. Los vórtices fueron visualizados con tinta.....	31
14	Imágenes de la evolución de un vórtice generado con $I=0.15A$, $V=15-17v$ y con un tiempo de forzamiento $t_f = 7-8 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	32
15	Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t_f= 7-8 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	33
16	Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t_f= 7-8 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas). Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	34
17	Imágenes de la evolución de un vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con tiempo de forzamiento de $t_f \approx 6 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	35

Lista de figuras

18	Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t\approx 6 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	36
19	Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t\approx 6 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas). Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	37
20	Imágenes de la evolución de un vórtice generado $I = 0.15 A$, $V = 15-17v$ y con un tiempo de forzamiento $t_f = 4-5 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada figura.....	38
21	Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t= 10-11 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	39
22	Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t= 7-8 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas). Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.....	40
23	Evolución del perfil radial de vorticidad para un monopolo que posteriormente evolucionó a un vórtice triangular. Los puntos en azul representan los datos medidos del experimento, mientras la gráfica en rojo es el perfil de un remolino aislado ajustado a través de cuadrados mínimos. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte superior de cada imagen.....	41
24	Evolución del perfil de velocidad azimutal para un monopolo que posteriormente evolucionó a un vórtice triangular. Los tiempos tomados son los mismos que en la <i>figura 23</i>	42
25	Mediciones de la distribución de vorticidad radial para el monopolo inicial ($t=2.75s$) en los experimentos que condujeron a la formación de un tripolo. La línea continua representa el ajuste por cuadrados mínimos al perfil (2.15).....	43

Lista de figuras

26	Perfiles de vorticidad promedio del monopolo inicial cuya evolución inestable condujo a la formación de (a) Tripolo, (b) vórtice triangular y (c) par de dipolos.....	44
27	Evolución de los parámetros ω_0 , R y a en los experimentos donde se observó la formación de (a) tripolos y (b) vórtices triangulares. El tiempo de evolución de estos parámetros es medido el instante en que se detiene el forzamiento hasta el tiempo en que el remolino pierde su axisimetría. La línea vertical punteada señala al tiempo $t=2.75s$	45
28	Gráfica de la evolución temporal de $Ln(E)$ y $Ln(S)$ en experimentos donde el monopolo inicial evolucionó en (a) tripolo, (b) vórtice triangular y (c) par de dipolos. Los puntos corresponden a los datos medidos y la línea continua es un ajuste lineal.....	47
29	Evolución del parámetro (a) R y (b) ω_0 para un monopolo que evoluciona a un vórtice triangular. Las líneas continuas corresponden a las ecs. (3.15) y (3.16).	50
30	Imágenes de (a) la mesa en rotación utilizada para generar el ambiente rotante y (b) montaje experimental.....	54
31	(a) Superficies del campo magnético generado por el imán cuadrado y (b) perfil radial de campo magnético. La magnitud del campo está medida en Teslas. En la primera gráfica, los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque.....	54
32	Evolución de un vórtice monopolar anticiclónico generado a partir de impulsos pequeños. Dos posibles comportamientos fueron observados: (a) una ligera deformación del remolino o (b) la evolución en un tripolo. El tiempo de evolución está indicado en la parte inferior de cada imagen.....	57
33	Evolución de un vórtice monopolar anticiclónico generado a partir de impulsos grandes. Los comportamientos observados son: (a) el remolino evoluciona en un tripolo o (b) se rompe en dos dipolos. El tiempo de evolución está indicado en la parte inferior de cada imagen.....	57

Lista de figuras

34	Evolución de un vórtice monopolar anticiclónico generado con una intensidad de corriente $I = 1.7 A$, un voltaje $V = 11 v$. El tiempo de forzamiento fue $t = 3.5 s$. Los tiempos de evolución son mostrados en la parte inferior de cada imagen.....	58
35	Evolución de un vórtice monopolar generado con (a) $I = 1.3 A$ y $V = 9.4 v$ y (b) $I = 0.8 A$ y $V = 6.7 v$. El tiempo de evolución está indicado en la parte inferior de cada imagen.....	59
36	Superficies de vorticidad y perfiles radiales de (a) vórtice aislado (estado base), (b) monopolo perturbado y (c) la perturbación aleatoria. Se puede observar que la perturbación se encuentra focalizada en un radio donde el valor de la vorticidad es nulo, en $r=1$	64
37	Diagrama Re vs. α del estado final ($t=180$) observado en las simulaciones. Los cuadrados representan simulaciones cuyo estado inestable generó un par de dipolos, los triángulos tripolos y los rombos monopolos estables. Los círculos son los valores encontrados en los experimentos de laboratorio (ver sección 5.3).....	65
38	Superficies de vorticidad al tiempo $t=95$ de los estados finales de un monopolo aislado definido por $\omega_o=1$ y $R=1$ y $Re=10k$ para (a) $\alpha=2$, (b) $\alpha=3$ y (c) $\alpha=4$. El monopolo fue alterado con una perturbación aleatoria de amplitud $\eta_0=0.2$	65
39	Evolución de un monopolo axisimétrico perturbado de forma aleatoria con tres amplitudes η_0 diferentes, (a) $\eta_0=1.5$, (b) $\eta_0=2$ y (c) $\eta_0=2.5$. La perturbación fue situada en $r^*=2.6cm$	68
40	Evolución de un monopolo axisimétrico perturbado de forma aleatoria. La amplitud de la perturbación es $\eta_0=2$. En este experimento el valor del número de Reynolds fue $Re=120$. El tiempo de evolución se muestra en la parte superior de cada gráfica.....	69
41	Evolución temporal de los parámetros (a) ω_o , (b) R y (c) α obtenidos a partir del ajuste por cuadrados mínimos de la ec. (2.15). La línea continua representa el estado base perturbado con una amplitud $\eta_0=1.5$, la discontinua $\eta_0=2$ y la punteada $\eta_0=2.5$	70
42	Evolución temporal del parámetro R con una simulación con perturbación $\eta_0=1.5$. La línea continua representa los datos obtenidos por el ajuste de cuadrados mínimos mientras que los círculos corresponden a la ec. (3.19).....	70

Lista de figuras

43	Evolución de un monopolo aislado perturbado con modos azimutales dados por la <i>ec.</i> (5.2). La amplitud de la perturbación fue el doble que el máximo de vorticidad $A=2\omega_0$. Las gráficas muestran el monopolo perturbado para valores del modo azimutal (a) $m=2$, (b) $m=3$ y (c) $m=4$ y (d) $m=5$	71
----	---	----

Lista de tablas

Tabla		Página
I	Parámetros experimentales.....	19
II	Tiempos de forzamiento y estructuras encontradas. Los valores de intensidad de corriente y voltaje son $I=0.15 A$ y $V= 15-17 v$, los cuales se mantienen constantes en todos los experimentos.....	28
III	Parámetros del perfil radial de vorticidad para los diferentes experimentos. En cada uno de los casos se calculan con el promedio de los cuatro experimentos realizados para cada estructura.....	43
IV	Comparación entre el valor del coeficiente de fricción λ teórico, ec. (2.3), y el obtenido por medio del ajuste a las gráficas de energía cinética y enstrofia para los diferentes experimentos.....	48
V	Intensidades de corriente y estructuras encontradas. Los valores de intensidad de corriente y voltaje varían, mientras el tiempo de forzamiento $t_f =3.5s$ se mantiene constante en todos los experimentos.....	56

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación y antecedentes

La motivación de esta investigación surge al intentar explicar el comportamiento de flujos bidimensionales, con particular énfasis en movimientos vorticales o remolinos. Este tipo de estructuras están presentes en diversos sistemas naturales como son los océanos y la atmósfera. Por ejemplo, los vórtices oceánicos son flujos que abundan en diversas escalas, como los giros anticiclónicos en la corriente de Lazo en el Golfo de México (*Dubranna et al. 2011*) o los vórtices en el océano Atlántico cerca del cabo de Agulhas (*de Ruijter et al. 2004*). La dinámica de estos se ve afectada por varias causas, entre las que se encuentra la rotación de la tierra, la estratificación y la diferencia de longitud entre las escalas de movimiento vertical y horizontal, las cuales son del orden de $50\text{-}500\text{ km}$ y $200\text{-}500\text{ m}$, respectivamente. Estos movimientos obedecen la ecuación de Navier-Stokes. Para casos en los que las fuerzas más sobresalientes en el fluido son la fuerza del gradiente de presión y la de Coriolis se presenta un balance entre ellas, conocido como *balance geostrófico* (*Kundu, 1990*). A partir de este balance se puede demostrar que flujos homogéneos presentan un carácter bidimensional, es decir, el fluido tiende a moverse en columnas alineadas al eje de rotación del sistema, lo que se conoce como el *teorema de Taylor-Proudman* (*Kundu, 1990*). Esta es una de las principales razones por la cual se le presta tanta atención a los flujos bidimensionales dentro de la dinámica de fluidos geofísicos.

Diversos aspectos en la dinámica de vórtices cuasi-bidimensionales pueden ser estudiados en el laboratorio a partir de experimentos en sistemas con y sin rotación. Este tipo de estudios ha permitido conocer con detalle el comportamiento de estructuras coherentes particulares, como el dipolo, que consiste en dos remolinos de vorticidad opuesta lo cual genera su mecanismo de auto-propagación (*Meleshko y van Heijst, 1994*). Otro caso bien

conocido es el tripolo, el cual es una estructura de tres regiones de vorticidad de signo alternado, es decir, un núcleo central rodeado por dos satélites de vorticidad contraria. Toda la estructura rota alrededor de un eje central situado en el núcleo (*van Heijst, Kloosterziel y Williams, 1991*).

En esta tesis nos enfocamos al estudio de monopolos inicialmente axisimétricos, es decir, un flujo en el cual el movimiento es en dirección azimutal solamente y cuyo comportamiento depende del perfil radial de vorticidad. A partir de dicho perfil se puede clasificar a los monopolos como aislados y no aislados. Un *monopolo aislado* es aquel en el cual la circulación total es cero, lo cual significa que el remolino tiene un núcleo de vorticidad rodeado por una zona exterior de vorticidad de signo contrario. En un *monopolo no aislado* la circulación neta es diferente de cero. Otra característica importante es que los vórtices no aislados son estables, es decir, permanecen circularmente simétricos hasta que decaen completamente debido a efectos viscosos (*Kloosterziel y van Heijst, 1992*). En contraste, los vórtices aislados son inestables (si la vorticidad máxima no es infinitesimal) perdiendo la axisimetría de su estado inicial dando como resultado estructuras completamente diferentes como el tripolo (*Kloosterziel y van Heijst, 1991*).

Por otro lado, se ha evidenciado un tipo de estructura diferente a las mencionadas anteriormente, denominada vórtice triangular de acuerdo a su geometría (*Carnevale y Kloosterziel, 1994*). Este consiste de un núcleo de vorticidad rodeado de tres satélites semicirculares de vorticidad de signo opuesto, y surge a partir de la evolución de un monopolo aislado inestable. Se observa como un estado transitorio entre un tripolo y su rompimiento en dos dipolos. El núcleo adquiere una forma triangular por la interacción con los satélites, y ha sido observado experimentalmente en un fluido en rotación con densidad constante (*Kloosterziel y van Heijst, 1991, Beckers y van Heijst, 1997*), en un fluido estratificado (*Flór y van Heijst, 1996*) y numéricamente (*Verzicco et. al., 1997*).

Para estudiar la formación de nuevas estructuras a partir de un estado inicial —de aquí en adelante llamado estado base—la atención en esta tesis se focaliza en las propiedades de estabilidad de los vórtices aislados. Trabajos previos con simulaciones numéricas basadas

en análisis de estabilidad lineal muestran que el tripolo se forma a partir del crecimiento de una perturbación azimutal con número de onda $m = 2$, lo que da paso a que el anillo de vorticidad con signo opuesto al del núcleo se transforme en dos satélites acomodados en la periferia del mismo (*Gent y McWilliams, 1986*). El número de onda m es definido aquí como la cantidad de perturbaciones alrededor del remolino. El trabajo de Carnevale y Kloosterziel (*1994*) muestra que el vórtice triangular surge igualmente de una perturbación azimutal con número de onda $m = 3$.

Todo lo anterior comprende estructuras con un máximo de tres satélites. Esto se ha convertido en una motivación para estudiar numéricamente (*Crowdy, 2001*) y experimentalmente (*Trieling et al., 2010*) vórtices en los que su núcleo tiene una vorticidad de un determinado signo, limitado por una frontera que tiene la forma de un polígono regular de n lados, denominados vórtices multipolares. Desde esta visión, por ejemplo, un vórtice cuyo núcleo se asemeje a un cuadrado y tenga cuatro satélites de vorticidad opuesta rodeándolo se le llama vórtice cuadrangular.

Experimentalmente, este tipo de estructuras han sido generadas por Trieling et al. (*2010*) en un sistema en rotación, con una técnica inspirada en los trabajos numéricos de Gent y McWilliams (*1986*) y el análisis de modos normales de Flierl (*1988*). En ellos se estudian estructuras vorticales de vorticidad uniforme en el núcleo, rodeados por un anillo de vorticidad uniforme de signo opuesto. A partir de remolinos ciclónicos, Trieling et al. (*2010*) han logrado la formación de multipolos en el laboratorio que van desde un tripolo hasta multipolos con cinco y hasta seis satélites.

1.2. Resumen de la tesis

En el *capítulo 2* se presenta un resumen de la teoría básica sobre la dinámica de vórtices en dos dimensiones. Se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes en función de la vorticidad y la función de corriente y las aproximaciones necesarias en sistemas con y sin rotación para que los flujos sean considerados bidimensionales. Se presentan las principales características de los remolinos aislados, así como algunos de los experimentos en los que se ha generado este tipo de estructura. Además se explican algunas técnicas

electromagnéticas basadas en el uso de imanes y corrientes eléctricas en fluidos conductores, ya que en este trabajo se utiliza una de ellas para generar remolinos. También se presentan algunos aspectos básicos de la teoría de estabilidad y su relación con el comportamiento de los vórtices aislados.

En el *capítulo 3* se muestran resultados de experimentos realizados en sistemas sin rotación. Estos experimentos están basados en una técnica electromagnética que utiliza la fuerza de Lorentz para generar flujos en dirección azimutal. El método fue originalmente diseñado para experimentos con rotación (*Cruz Gómez et al., 2013*), mientras que en el presente trabajo se aplica en capas delgadas sin rotación. Se explica el montaje experimental y los resultados obtenidos en la formación de diferentes estructuras multipolares. Un análisis cuantitativo es realizado por medio de velocimetría por imágenes de partículas (*PIV por sus siglas en inglés*). Uno de los principales propósitos aquí es destacar que la técnica utilizada genera remolinos axisimétricos de manera controlada, de tal suerte que es posible reproducir las estructuras multipolares que se forman. Es decir, para ciertas condiciones se predice que la evolución conducirá a un núcleo rodeado por un número de satélites específico.

El *capítulo 4* muestra los resultados cualitativos de experimentos realizados en sistemas en rotación. La técnica de generación de remolinos es la misma presentada en el capítulo anterior. Esta parte experimental fue llevada a cabo en el *Instituto de Astronomía y Meteorología* adscrito a la *Universidad de Guadalajara*, bajo la supervisión del *Dr. Raúl Gómez Cruz*.

Experimentos numéricos son presentados en el *capítulo 5*. En este capítulo el objetivo es tratar de estudiar los mecanismos que conducen a las inestabilidades observadas en los experimentos de laboratorio, las cuales provocan que los vórtices aislados se transformen en estructuras multipolares. Diferentes tipos de perturbaciones son estudiadas, así como un análisis de vórtices aislados expuestos a condiciones ideales.

1.3 Objetivo general

El objetivo general de este proyecto es generar vórtices multipolares mediante experimentos de laboratorio con técnicas de forzamiento electromagnético y estudiar su estabilidad a través de simulaciones numéricas y teoría.

1.4 Objetivos específicos

- ***Generación de vórtices:*** Generar vórtices con perfiles de vorticidad reproducibles de manera controlada por un forzamiento electromagnético.
- ***Estabilidad:*** Estudiar la formación de vórtices multipolares en sistemas con y sin rotación.
- ***Análisis con simulaciones numéricas:*** Comprobar si las variables físicas resueltas numéricamente son capaces de describir la dinámica observada en los experimentos o no.
- ***Simulaciones ideales:*** Explorar experimentos numéricos para diferentes tipos de fricción, y para un rango amplio del Número de Reynolds.

CAPITULO 2

TEORÍA Y ASPECTOS BÁSICOS

2.1 Ecuaciones de gobierno

Un fluido homogéneo e incompresible es gobernado por la ecuación de Navier-Stokes, la cual describe el balance entre las fuerzas (por unidad de masa) y el movimiento de las partículas de fluido, y por la ecuación de continuidad, la cual representa el principio de conservación de masa. Estas ecuaciones pueden estar descritas para un marco de referencia que se encuentre rotando o no, y están dadas por:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi - \lambda \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad, p es la presión, $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema, ρ es la densidad, ν es la viscosidad cinemática, ∇ y ∇^2 son los operadores gradiente y Laplaciano respectivamente. El término de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ describe una aceleración perpendicular al vector velocidad \mathbf{u} . Las fuerzas no conservativas asociadas a efectos disipativos están representadas por los dos últimos términos del lado derecho de la ec. (2.1). El término lineal es una forma de representar la fricción asociada a los efectos del fondo. En un sistema en rotación este término representa la parte lineal de la fricción de Ekman y λ es el coeficiente de fricción, el cual depende de la profundidad, la viscosidad y la rapidez angular del sistema (Zavala Sansón y van Heijst, 2000). En un sistema sin rotación, λ es proporcional a la viscosidad y al espesor de la capa de fluido (por ejemplo, Durán Matute, 2010):

$$\lambda = \frac{\pi^2 \nu}{4H^2}. \quad (2.3)$$

El último término en la ec. (2.1) representa la fricción lateral. Las fuerzas conservativas son la gravedad y la fuerza centrífuga en el caso de un sistema en rotación constante, las cuales están representadas por el gradiente del potencial escalar Φ . En caso que el sistema no esté

en rotación, el segundo término del lado derecho de la ec. (2.1) es nulo y Φ resulta ser el potencial gravitacional.

La vorticidad es definida como $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, por lo que tomando el rotor de la ec. (2.1) y usando algunas identidades vectoriales llegamos a:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \lambda \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.4)$$

Esta ecuación es válida en un fluido homogéneo, incompresible y barotrópico. La suma de $\boldsymbol{\Omega}$ (vorticidad planetaria) y $\boldsymbol{\omega}$ (vorticidad relativa) se conoce como *vorticidad absoluta* (Pedlosky, 1987).

2.2 Dinámica en 2D

El movimiento del fluido observado en experimentos de laboratorio en sistemas en rotación es prácticamente bidimensional. La ecuación de momentum y de vorticidad pueden ser expresadas en forma adimensional como:

$$R_o \frac{D\mathbf{u}'}{Dt'} + 2\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{u}' = -\nabla' p' - R_o \mathbf{u}' + E_k \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (2.5)$$

$$R_o \frac{D\boldsymbol{\omega}'}{Dt'} = R_o \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' + 2\boldsymbol{\Omega}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' - R_o \boldsymbol{\omega}' + E_k \nabla'^2 \boldsymbol{\omega}', \quad (2.6)$$

donde las variables primadas \mathbf{u}' , t' , $\boldsymbol{\Omega}'$, p' y $\boldsymbol{\omega}'$ denotan cantidades adimensionales, mientras ∇' y ∇'^2 son operadores adimensionales. Los números adimensionales que aquí aparecen son el número de Ekman y el número de Rossby:

$$E_k = \frac{\nu}{2\Omega L^2}; \quad R_o = \frac{U}{2\Omega L}, \quad (2.7)$$

donde Ω es la rapidez angular del sistema, L y U son las escalas características de longitud y velocidad respectivamente. El número de Rossby nos da una medida de la importancia de la aceleración del fluido comparada con la aceleración de Coriolis. El número de Ekman estima la importancia de los efectos viscosos con respecto a la aceleración de Coriolis.

Cuando los efectos de rotación son importantes, estos números resultan pequeños, es decir, $E_k \ll 1$ y $R_o \ll 1$. Como consecuencia se obtiene que:

$$2\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{u}' = -\nabla' p' \quad , \quad (2.8)$$

$$2\boldsymbol{\Omega}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' = 0. \quad (2.9)$$

Ahora consideramos un sistema cartesiano (x, y, z) y el vector velocidad con componentes (u, v, w) , tales que (x, y) son las coordenadas horizontales y z la vertical, paralela al eje de rotación. La velocidad angular es $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. De la ec. (2.8) se puede ver que la velocidad horizontal (u, v) se encuentra en balance con el gradiente de presión— *balance geostrófico*— y que el flujo en la vertical se puede considerar en balance hidrostático. La ec. (2.9) implica que $\partial \mathbf{u}' / \partial z' = 0$, es decir que cada componente del vector velocidad es independiente de la coordenada z . Este resultado se conoce como el teorema de *Taylor-Proudman*. Por consiguiente, el fluido tiende a moverse en columnas alineadas al eje de rotación del sistema.

La ecuación de continuidad conserva su misma forma independientemente de si es escalada o no, y de acuerdo al teorema de *Taylor-Proudman* se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.10)$$

ya que $\partial w / \partial z = 0$. Esta ecuación establece que la divergencia horizontal de flujo es nula en cualquier plano perpendicular a la coordenada z . Con esta forma de la ecuación de continuidad podemos proponer una formulación para las componentes horizontales u y v en términos de una nueva variable ψ denominada función de corriente tal que (*Kundu, 1990*):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} . \quad (2.11)$$

Nótese que este tratamiento sólo puede ser considerado si el flujo es bidimensional. Al considerar un campo de velocidad puramente horizontal, el vector vorticidad se reduce a su componente vertical $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

El análisis anterior corresponde a flujos que se encuentran en balance geostrófico de manera exacta. Cuando dicho balance es dominante pero no exacto se pueden tomar en cuenta efectos no lineales y viscosos, manteniendo la bidimensionalidad del flujo. De forma

general, para un fluido bidimensional (sin incluir efectos de rotación o con rotación constante) podemos establecer una formulación de las ecuaciones de gobierno en términos de la vorticidad y la función de corriente de la forma:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = -\lambda \omega + \nu \nabla_H^2 \omega, \quad (2.12)$$

$$\omega = -\nabla_H^2 \psi, \quad (2.13)$$

donde J es el operador Jacobiano y ∇_H^2 es el operador Laplaciano horizontal (Zavala Sansón, 2000).

2.3 Modelos de vórtices monopolares

En la dinámica de vórtices bidimensionales dos tipos de monopolos o remolinos han sido bien caracterizados de manera experimental: *los monopolos aislados* y *los no aislados*. Un *monopolo aislado* es definido como aquel en el cual la circulación total es cero: esto significa que si el remolino tiene un núcleo de vorticidad de un signo determinado, estará rodeado por una región de vorticidad de signo contrario, de tal manera que $\int \omega dA = 0$. Estos remolinos pueden ser inestables en cuyo caso se pierde la axisimetría de su estado inicial dando como resultado nuevas estructuras como el tripolo (Kloosterziel y van Heijst, 1991). Este tipo de remolinos son objeto de estudio en esta tesis. En contraste, en el *monopolo no aislado* la circulación total es diferente de cero. Además, los vórtices no aislados son estables, es decir, permanecen circularmente simétricos hasta que decaen completamente debido a los efectos viscosos (Kloosterziel y van Heijst, 1992).

En forma general, los siguientes perfiles radiales de velocidad azimutal y de vorticidad, se pueden ajustar a los vórtices aislados (Carton et al., 1989):

$$v(r) = \frac{\omega_0 r}{2} \exp\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^\alpha\right), \quad (2.14)$$

$$\omega(r) = \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha\right) \exp\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^\alpha\right), \quad (2.15)$$

donde α es un parámetro que controla la forma de estos dos perfiles, R es la escala de longitud horizontal, ω_0 es el máximo de vorticidad y r es la distancia radial. Ejemplos de vórtices no aislados son los siguientes perfiles:

$$v(r) = \frac{R^2 \omega_0}{2r} \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \right) \right], \quad (2.16)$$

$$\omega(r) = \omega_0 \exp \left(- \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \right). \quad (2.17)$$

La *figura 1* muestra los dos tipos de perfiles radiales de vorticidad y de la velocidad azimutal como ejemplo de dichos monopolos.

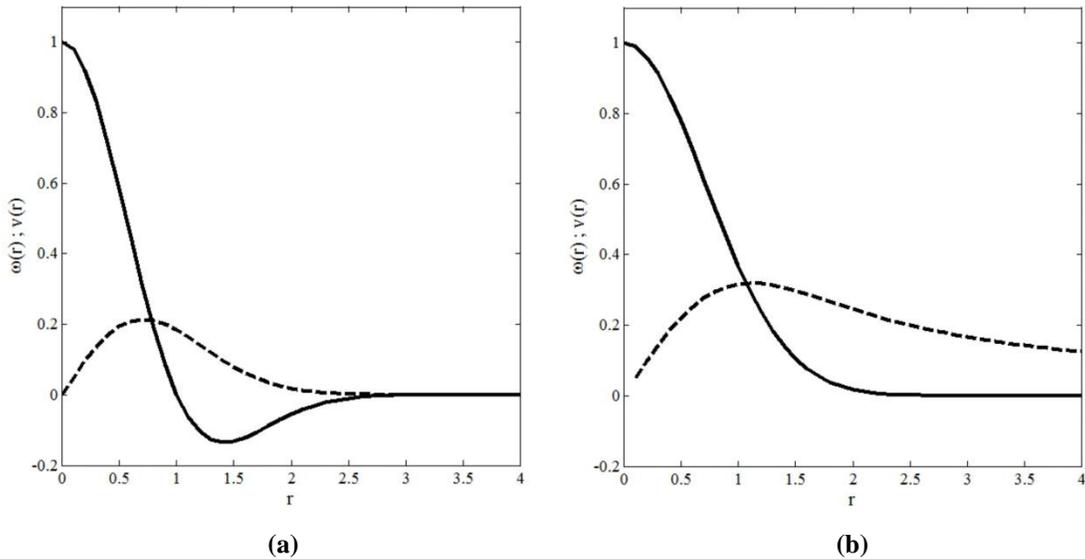


Fig. 1. Perfil radial de vorticidad (*línea continua*) y de velocidad azimutal (*línea discontinua*) asociado a un monopolo a) aislado y b) no aislado. Los parámetros adimensionales utilizados son $\omega_0=1$; $R=1$ y $\alpha=2$.

2.4 Técnicas experimentales de generación de vórtices

Para modelar el comportamiento de estructuras vorticales en el océano diversos autores han implementado como herramienta los experimentos de laboratorio, donde los efectos de la rotación terrestre son simulados mediante una mesa rotatoria. Las técnicas más usuales para la generación de remolinos en sistemas en rotación son por *agitación*, *succión* y *colapso gravitacional*. Cada uno de estos métodos genera remolinos monopulares con diferentes características (*van Heijst y Clercx, 2009*).

Por ejemplo, la técnica de agitación genera remolinos aislados. Este método consiste en agitar el interior de un cilindro hueco y retirarlo para dar paso a la formación del remolino. El fluido confinado en el cilindro actúa con las paredes del mismo por lo que la condición de no deslizamiento se encarga de generar vorticidad de signo contrario, obteniéndose como resultado un vórtice aislado. Esta técnica ha sido usada para explicar inestabilidades de ciclones y anticiclones (*Kloosterziel y van Heijst, 1991*) y en experimentos donde se consideran los efectos del fondo en la disipación de los mismos (*Zavala Sansón, 2000*). Cabe señalar que con la técnica de agitación Kloosterziel (*1990*) ha obtenido perfiles de vorticidad y velocidad azimutal que se aproximan bastante a las ecs. (2.14)-(2.15), con $\alpha=2$ como es mostrado en la *figura 1.a*.

La técnica de succión produce vórtices ciclónicos al drenar fluido hacia afuera del tanque a través de un tubo perforado posicionado verticalmente. Al hacer esto, el fluido interior se mueve hacia el tubo deflectando su movimiento por efectos de Coriolis y generando el remolino ciclónico. Al aplicar esta técnica Kloosterziel y van Heijst (*1992*) han encontrado perfiles acordes a las ecs. (2.16)-(2.17) con $\alpha=2$ como el mostrado en la *figura 1.b*.

La turbulencia en dos dimensiones se ha investigado experimentalmente en diversos estudios, por ejemplo, Tabeling et al. (*1991*). En esta clase de experimentos se utiliza como forzamiento una técnica electromagnética en la cual se induce una cadena de vórtices de signos alternados a lo largo y ancho de un tanque cuadrado. Para ello se coloca un arreglo de imanes de polaridad alterna en el fondo del tanque, y dos electrodos en dos paredes opuestas. El tanque se llena con una capa de solución conductora y al inyectarle una corriente eléctrica se genera una fuerza electromagnética o de Lorentz encargada de provocar el movimiento del fluido. En este trabajo se utilizará un método basado en este principio para forzar remolinos monopulares de forma controlada. Más detalles sobre esta técnica serán explicados más adelante en el *capítulo 3*.

2.5 Aspectos básicos de estabilidad

Investigaciones anteriores han estudiado aspectos relacionados con la estabilidad de monopolos aislados, con el fin de entender cómo las diversas perturbaciones existentes en

el ambiente pueden transformar una estructura inicialmente axisimétrica en otra como un tripolo, dos dipolos o algún tipo de estructura multipolar. Uno de los primeros estudios de estabilidad de monopolos aislados explica la dinámica de remolinos generados con la técnica de agitación (*Kloosterziel, 1990*). La evolución de ciclones y anticiclones con esta técnica es diferente: mientras que los ciclones tienden a formar estructuras tripolares, rara vez se observa la formación de un tripolo cuando el remolino inicial es anticiclónico (*van Sommeren et al., 2010*).

A continuación se explicarán dos teoremas de inestabilidad para este tipo de flujos y las implicaciones que conllevan en la evolución de remolinos aislados.

2.5.1 Teorema de Rayleigh

El primero es conocido como el teorema de Rayleigh (*Chandrasekhar, 1961; Drazin, 2002*). Para flujos estacionarios e invíscidos con velocidad azimutal $v(r)$, el teorema establece como condición *suficiente y necesaria* que el fluido será inestable bajo perturbaciones axisimétricas (*Drazin, 2002*) si el gradiente radial del cuadrado del momento angular $L = rv$ es negativo en algún punto

$$\frac{d}{dr}(rv)^2 \leq 0, \quad (2.18)$$

de lo contrario el flujo será estable ante este tipo de perturbaciones. La forma de este criterio está establecida para un fluido en un sistema sin rotación. En sistemas en rotación, el teorema se transforma adicionando un término que represente la rapidez angular del mismo (*Kloosterziel, 1990*). Para un sistema con rapidez angular Ω constante la versión de este criterio queda expresada como:

$$\frac{d}{dr}(r(v + \Omega r))^2 \leq 0. \quad (2.19)$$

Al escribir este teorema en función del número de Rossby se establece un valor crítico como condición para que el remolino sea inestable (*Kloosterziel y van Heijst, 1991*). La *figura 2* muestra algunos perfiles radiales de L^2 para sistemas con y sin rotación. Para

ilustrarlos se eligen tres remolinos aislados con las siguientes características $\omega_0=1$, $R=1$ y $\alpha=2, 3, 4$.

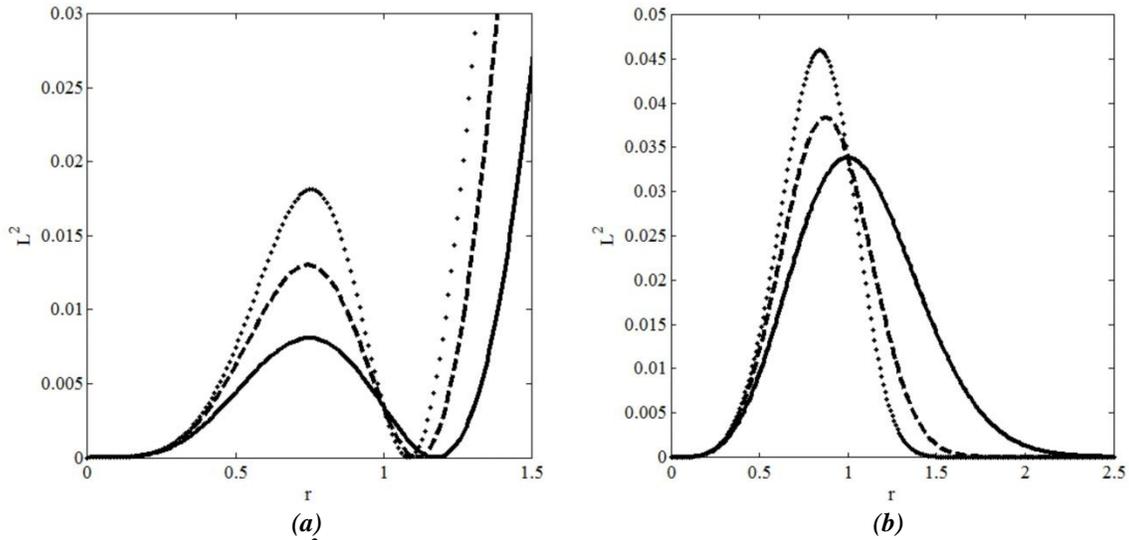


Fig. 2. Perfiles radiales de L^2 para un sistema (a) en rotación y (b) no rotación. La línea continua es para $\alpha=2$, la discontinua para $\alpha=3$ y la punteada para $\alpha=4$.

En ambas gráficas la derivada del momento angular al cuadrado cambia de signo, por lo que el teorema de Rayleigh es satisfecho. En el ejemplo del sistema en rotación (*figura 2.a*) esta cantidad cambia primero de positiva a negativa en el mismo punto ($r \approx 0.75$) independientemente del valor de α . Para distancias radiales mayores se presenta un nuevo cambio de negativa a positiva para $r > 1$. Por lo tanto, de acuerdo a la ec. (2.19) se tiene una zona definida entre estos dos puntos donde se cumple la condición de inestabilidad del flujo. En un sistema sin rotación (*figura 2.b*) a medida que se incrementa α la distancia radial a la que se observa el cambio de signo de dL^2/dr disminuye. La relación entre esta región y la inestabilidad centrífuga será discutida con mayor detalle más adelante.

2.5.2 Análisis de modos normales

Un segundo criterio de *necesidad* puede ser obtenido a partir de un análisis de modos normales. Para ello consideramos que en la dinámica de un fluido bidimensional las variables de flujo $f(x, y, t)$ se pueden expresar como la suma de un flujo base $f_0(x, y)$ y perturbaciones $f'(x, y, t)$ sobre el mismo, tal que $f'(x, y, t) \ll f_0(x, y)$. El flujo base satisface el sistema de ecuaciones (2.12)-(2.13) y su estabilidad es la que es investigada, es

decir, el comportamiento de las perturbaciones. Esto puede ser fácil o no de encontrar, ya sea explícitamente en forma analítica o de manera numérica.

El análisis de modos normales fue hecho por Kloosterziel (1990) para vórtices cuya distribución radial de vorticidad es de forma aislada de acuerdo a la ec. (2.15) para $\alpha = 2$. Este mismo análisis puede ser hecho para una distribución de vorticidad con un parámetro α arbitrario. En el caso invíscido, el estado base es definido por una vorticidad ω y su función de corriente ψ , las cuales cumplen las ecs. (2.12)-(2.13) para el caso estacionario. Las perturbaciones asociadas a este campo son denotadas como ω' y ψ' , y al analizar la evolución del campo total $\psi + \psi'$ se puede despreciar el producto de cantidades perturbadas—incluidas en los términos advectivos—, dando paso al problema linealizado en coordenadas polares expresado por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_v \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla^2 \psi' - \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} = 0 , \quad (2.20)$$

donde Ω_v es la rapidez angular del vórtice. Las perturbaciones pueden crecer en forma exponencial (*caso inestable*) o no (*caso estable*). Para ello se propone la forma de la perturbación como:

$$\psi'(r, \theta, t) = \phi(r) \exp [i(st + m\theta)] . \quad (2.21)$$

Nótese que $\phi(r)$ es la amplitud de la perturbación, la parte imaginaria de s la razón de crecimiento y m es un número entero que corresponde al número de perturbaciones alrededor del remolino. Reemplazando la ec. (2.21) en la ec. (2.20) e integrando en el dominio, se llega a la siguiente expresión

$$m s_i \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{dr} \frac{|\phi|^2}{|s + i m \Omega_v|^2} dr = 0 , \quad (2.22)$$

donde s_i es la parte imaginaria de la perturbación la cual es diferente de cero. Independientemente del tipo de perturbaciones con $m \neq 0$, el término cuadrático dentro de la integral siempre es positivo, por lo que una condición *necesaria* para la inestabilidad es

que la derivada de la distribución radial de vorticidad cambie de signo en algún punto. Lo anterior es conocido como el teorema del *punto de inflexión de Rayleigh*:

$$\frac{d \omega}{d r} = 0 \quad (2.23)$$

La *figura 3* muestra tres ejemplos de $d\omega/dr$ para remolinos aislados con los parámetros adimensionales descritos en la sección anterior y diferente valor de α .

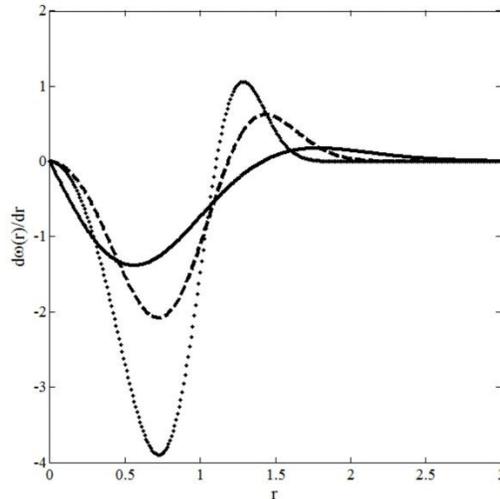


Fig. 3. Perfiles radiales de $d\omega/dr$. La línea continua es para $\alpha=2$, la discontinua para $\alpha=3$ y la punteada para $\alpha=4$.

Se puede observar que el teorema se cumple ya que siempre existe un cruce del gradiente de vorticidad por cero. A medida que el parámetro α aumenta, la distancia a la cual ocurre el cruce disminuye. Nótese que, aunque se cumpla este criterio no se garantiza por completo la inestabilidad del flujo, dado que es un criterio sólo de necesidad pero no de suficiencia.

2.5.3 Inestabilidades centrífuga y barotrópica

Estos dos tipos de perturbaciones fueron inicialmente estudiadas en trabajos previos con fluidos en rotación. En particular, la manera en que actúan estas perturbaciones en remolinos anticiclónicos creados con la *técnica de agitación* ha sido estudiada por Kloosterziel y van Heijst (1991) para explicar el rompimiento del estado inicial en dos dipolos que se autopropagan alejándose del centro. Ellos proponen que ambos tipos de inestabilidad se presentan de manera combinada y son las encargadas del estado final de los

remolinos aislados. Simulaciones numéricas realizadas por Orlandi y Carnevale (1999) comprobaron dicha hipótesis. En estos experimentos ha quedado demostrado el papel y el orden en que actúan las dos perturbaciones: primero actúa la inestabilidad centrífuga y posteriormente la barotrópica.

La inestabilidad centrífuga se asocia a movimientos tridimensionales existentes en el fluido. Este efecto se refleja como anillos de vorticidad en la vertical, los cuales rodean al núcleo del vórtice. El papel de esta inestabilidad ha sido demostrado únicamente a través de modelos numéricos (Kloosterziel et al, 1999). Se relaciona con el criterio de Rayleigh, el cual establece que dL^2/dr en el remolino debe cambiar de signo. Este criterio es útil para encontrar la región radial donde los efectos verticales se desarrollan.

En sistemas en rotación Carnevale et al. (2011) encontraron que tal región es una zona anular para vórtices aislados, cuyo límite superior (donde $L^2=0$) fue establecido en función del número de Rossby y el inferior (valor máximo de L^2) fue encontrado a partir de simulaciones numéricas (ver figura 2). La formación de anillos de vorticidad tendrá lugar si Ro_c supera un valor crítico, definido como:

$$Ro_c = \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{\alpha + 2}{\alpha}\right). \quad (2.24)$$

De esta cantidad se puede observar que efectivamente a medida que aumenta α , la región de inestabilidad disminuye, puesto que el límite inferior siempre está ubicado a la misma distancia radial (ver figura 2). Para un sistema sin rotación la región donde se cumple la condición de inestabilidad se define como aquella comprendida a partir de un radio r^* para el que L^2 es máximo, el cual coincide con el radio donde el perfil de vorticidad cambia de signo. Se puede demostrar fácilmente que este radio está dado por:

$$r^* = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha} R. \quad (2.25)$$

El límite exterior es formalmente ∞ puesto que el perfil radial de L^2 tiende asintóticamente a cero. De la figura 2 se puede observar que esta región disminuye a medida que el

parámetro α aumenta y allí es donde deben actuar las perturbaciones para que el criterio de Rayleigh sea satisfecho.

La inestabilidad puramente barotrópica se relaciona con el criterio del punto de inflexión de Rayleigh, el cual establece que para vórtices simétricos el gradiente de vorticidad es cero en algún punto en la dirección radial. Este teorema es satisfecho por los vórtices aislados estudiados aquí, ya que presentan vorticidad positiva y negativa (condición para que la circulación sea cero). Flierl (1988) exploró un modelo de circulación nula, el cual consistió en una región de vorticidad constante positiva rodeado por un anillo de vorticidad negativa y estudió su estabilidad lineal por medio de análisis en modos normales. Demostró que si el anillo que rodea al núcleo es muy ancho el flujo es completamente estable.

CAPÍTULO 3

GENERACIÓN DE MULTIPOLOS EN SISTEMAS SIN ROTACIÓN

3.1 Introducción

En este capítulo se exponen los experimentos realizados en sistemas sin rotación para generar vórtices multipolares. Estas estructuras son fruto del rompimiento del remolino aislado por ser inestable. El vórtice es inducido con una técnica electromagnética basada en el uso de imanes y corrientes eléctricas—aplicación de una fuerza de Lorentz— la cual será explicada con todo detalle en la siguiente sección. El carácter bidimensional del fluido está asociado con el uso de una capa delgada de fluido. Se muestran gráficas de los campos asociados a esta técnica de generación, tales como la distribución de la magnitud del campo magnético y el campo de fuerzas encargado de mover las partículas de fluido. Finalmente, se presentan algunos resultados cuantitativos y condiciones iniciales para generar algunas estructuras multipolares reproducibles.

3.2 Montaje experimental

Las estructuras multipolares se generan experimentalmente en un tanque cuyas dimensiones son $(0.3 \times 0.3 \times 0.3) m$. Este recipiente es llenado con un fluido conductor: una solución de agua mezclada con bicarbonato de sodio, a una concentración de $50 gr/l$. La capa de fluido debe ser delgada para generar estructuras bidimensionales. Las dimensiones horizontales y de profundidad de esta capa son $0.3 m$, $0.3 m$ y $0.012 m$ respectivamente, con un volumen total de $1.08 \times 10^{-3} m^3$. Los parámetros experimentales se presentan en la *tabla I*.

Para forzar el fluido y así inducir el movimiento de un vórtice se coloca un imán de $4 cm$ de diámetro y $0.5 cm$ de espesor por debajo del tanque y situado en el centro. La componente

principal del campo magnético del imán está dirigida en la dirección vertical, con una intensidad máxima de $0.07 \text{ Teslas} = 7 \times 10^2 \text{ G}$ en su centro. Este valor fue medido a 1.2 cm de altura a partir de la superficie del imán.

Tabla I. Parámetros experimentales

<i>Variable</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
<i>Densidad</i>	1×10^{-3}	Kg m^{-3}
<i>Viscosidad</i>	1×10^{-6}	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
<i>Conductividad</i>	4.5×10^{-1}	S m^{-1}
<i>Salinidad</i>	35	‰

Por otro lado, se induce una corriente eléctrica horizontal en el fluido a partir de una fuente de corriente continua a través de electrodos cilíndricos de carbón colocados de manera vertical. Las dimensiones de los electrodos son 12.7 cm de largo y 0.1 cm de diámetro. Un electrodo es situado en el centro del tanque y electrodos de signo opuesto en las esquinas del recipiente. Los electrodos de las esquinas están conectados al polo negativo de la fuente y el central al positivo—esto con el fin de evitar la formación de burbujas en el electrodo central asociadas al proceso de electrólisis— Con esta disposición tenemos una corriente que fluye del electrodo positivo a los de las esquinas en forma radial, de manera tal que los remolinos generados giran en sentido horario. El montaje experimental es mostrado en la *figura 4*.

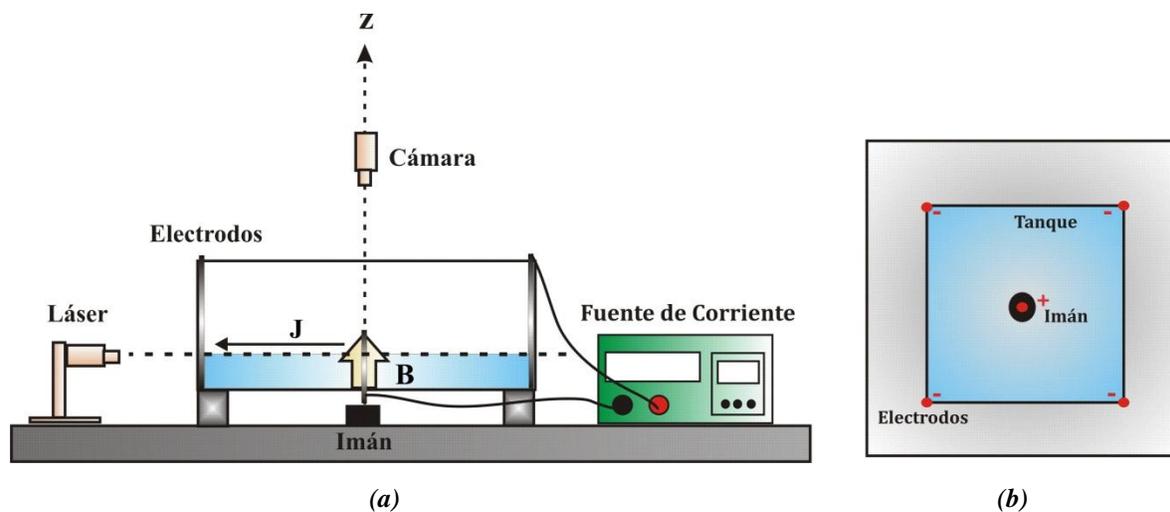


Fig. 4. Esquema del montaje experimental a) Vista lateral y b) Vista superior. En la vista lateral se observa que el imán es puesto en el centro y debajo del tanque, mientras en la superior se aprecia la disposición de los electrodos.

Dado que el campo magnético y la corriente eléctrica son perpendiculares, su interacción genera una fuerza de Lorentz que induce el movimiento de vórtices dentro del recipiente, la cual está dada por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Esta fuerza puede variar en magnitud al modificar la intensidad de la corriente o el voltaje suministrado por la fuente, es decir, se pueden inducir movimientos más o menos intensos del fluido y así generar remolinos que giren muy lento o muy rápido. El campo magnético asociado al imán permanece invariante, y por lo tanto la única variable que puede modificar la fuerza de Lorentz es la densidad de corriente. Estas son las características más destacadas de esta técnica. Lo siguiente es observar las estructuras que se forman con diferentes forzamientos, es decir, distintas intensidades de corriente o diferentes tiempos en que se mantiene tal corriente.

Medidas cuantitativas del campo de velocidad fueron obtenidas agregando trazadores pasivos sobre la superficie del fluido con un diámetro de $50 \mu m$ y con una densidad promedio igual a la del electrolito. Los trazadores fueron iluminados desde los lados del tanque con láseres de $532 nm$ y grabados por una cámara *CANON-XA10* con una resolución de 1920×1080 *pixeles* puesta en la parte superior, tal y como se muestra en la *figura 4*. Las grabaciones de los diferentes experimentos fueron descompuestas en imágenes con ayuda del software *IrfanView-Thumbnails*. El tiempo entre imágenes es de 0.25 segundos. Pares consecutivos de imágenes fueron correlacionadas con la técnica de PIV (*Particle Image Velocimetry*) por medio del sistema *Dantec flow Manager PIV1100*. Las ventanas de interrogación fueron de 32×32 *pixeles*. La vorticidad fue obtenida al derivar los campos de velocidad horizontal, mientras que la función de corriente se obtuvo al resolver la ecuación de Poisson, ec. (2.24). Estos resultados serán expuestos con detalle en la sección de resultados experimentales.

3.3 Forzamiento electromagnético

Al intentar dar una explicación detallada del movimiento del fluido con esta técnica experimental surgen interrogantes como ¿Por qué los remolinos resultantes son aislados?, ¿Los remolinos son aislados independientemente del forzamiento aplicado?, ¿Cómo actúa

el forzamiento en las diferentes regiones del fluido? Por esta razón es importante tratar de cuantificar la fuerza de Lorentz aplicada y para ello en esta sección se analizan en detalle los diferentes campos asociados.

En primer lugar, un ingrediente importante para el forzamiento es el campo magnético generado por el imán. De manera más precisa, se requiere conocer la componente vertical, la cual es medida con la ayuda de un gaussímetro. La intensidad radial del campo se mide a una altura constante de $z=1.2\text{ cm}$, y para ello se coloca una malla de 30×30 puntos que abarca las dimensiones del tanque, y en cada punto se mide esta intensidad. Del mismo modo, se mide la variación vertical del campo tomando como referencia un punto fijo—en este caso el origen $r=0$ —y midiendo la intensidad del campo magnético a diferentes alturas. En la *figura 5* se muestran los resultados medidos en Teslas.

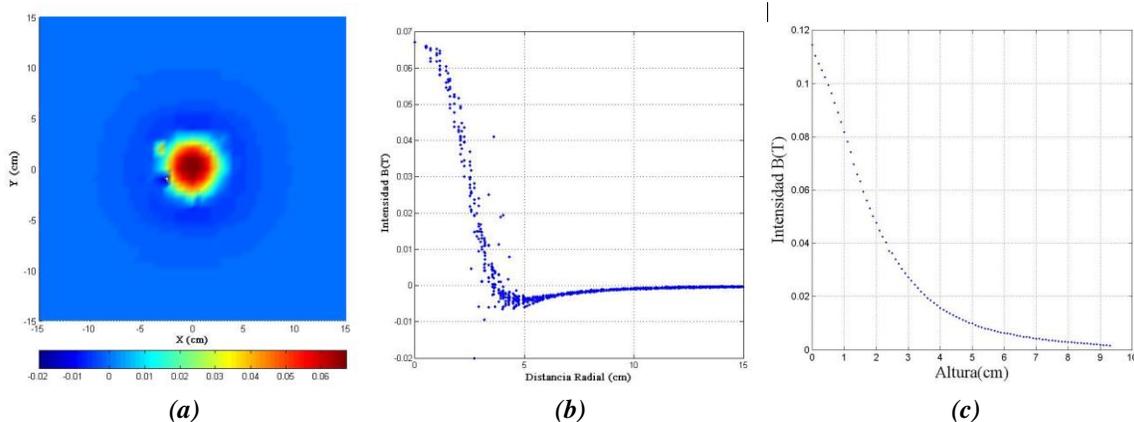


Fig. 5. Campo magnético generado por el imán utilizado en los experimentos. En (a) se muestra la distribución horizontal de la componente vertical del campo. Dicha componente se presenta en función de (b) la distancia radial y (c) la altura. Los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque en (a), mientras en (b) y (c) la abscisa es la distancia radial y la altura en cm respectivamente, y la ordenada es la intensidad del campo en *Teslas*.

La gráfica 5a permite observar que el campo es muy intenso en regiones cercanas al centro del imán. La magnitud máxima se encuentra focalizada en el centro con un valor de 7×10^{-2} *Teslas*. Aproximadamente a partir de $r=3.5\text{ cm}$ se presenta un cambio de signo en la magnitud del campo magnético (bordes del imán) con una intensidad de -5×10^{-3} *Teslas*. Esto es debido a la inversión de las líneas de campo cerca de los bordes, en donde están dirigidas hacia el polo sur del imán. El campo medido tiene una clara simetría radial salvo por una pequeña anomalía presente en la parte central izquierda, la cual posiblemente es debida a un defecto de fabricación del imán.

En la *figura 5b* se grafica el perfil radial del campo magnético. En ella podemos observar el comportamiento descrito, con algunos puntos fuera del perfil, los cuales están relacionados con las anomalías explicadas anteriormente. De las gráficas anteriores podemos concluir que existen dos regiones claramente discernibles: una donde la intensidad de campo magnético es positiva, la cual empieza en el centro del imán y termina en alguna región muy cerca de su periferia—de $r=0\text{cm}$ a $r=3.5\text{ cm}$ — y otra en la cual la intensidad es negativa, mucho más débil, y se desvanece rápidamente —de $r=3.5\text{ cm}$ a $r=20\text{cm}$ —. Finalmente, de la *figura 5c* podemos observar que el campo magnético decae con la altura aparentemente de una manera exponencial. La intensidad del campo es máxima en $z=0$ con un valor de 11×10^{-2} Teslas.

3.3.1 Modelo analítico para el campo magnético

Con el propósito de calcular el campo de fuerzas, es necesario encontrar una relación teórica que se adapte a los datos del campo magnético medido, ya que conociendo la densidad de corriente se puede reemplazar en la ec. (3.1). Para ello, vamos a considerar que el campo magnético generado por el imán es estacionario, posee simetría axial y no es producido por alguna densidad de corriente externa. Por supuesto, este campo magnético obedece las leyes de Gauss y de Ampere. Otros trabajos basados en técnicas electromagnéticas (*Figueroa et al, 2009*) utilizan la expresión de *McCaig (1977)* para ajustar el campo magnético a los datos experimentales. En este trabajo se optó por un ajuste diferente, el cual viene expresado de la siguiente forma:

$$B(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n z}, \quad (3.2)$$

donde $J_0(\lambda_n r)$ son las funciones de Bessel de primera especie, C_n y λ_n son las constantes y los autovalores asociados a estas funciones. Este campo magnético es función de r y z . De esta expresión, se puede observar que efectivamente el campo magnético decae con respecto a la altura. La *figura 6* muestra las gráficas del campo magnético obtenido experimentalmente y un ajuste de la ec. (3.2) a estos datos por cuadrados mínimos. La *figura 6a* muestra el perfil radial a $z=1.2\text{ cm}$, mientras la *figura 6b* presenta el decaimiento del campo en la vertical para $r=0\text{cm}$.

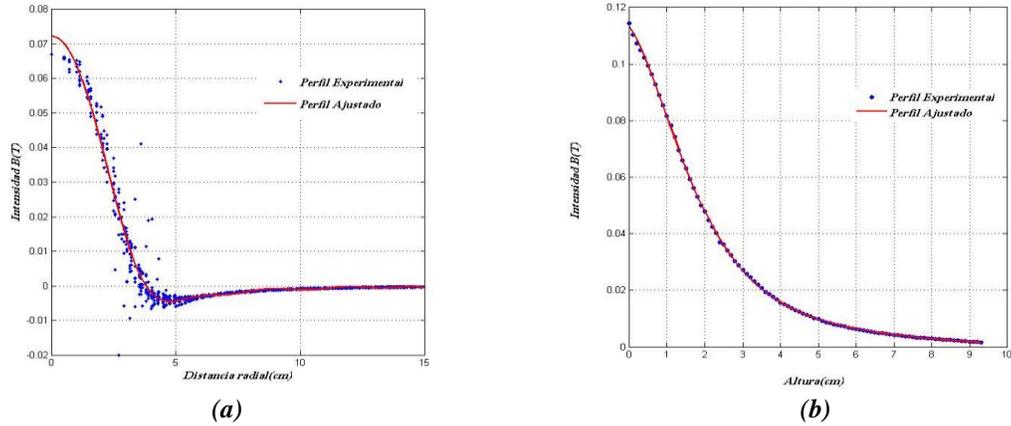


Fig. 6. Perfil (a) radial y (b) vertical de campo magnético. Los puntos representan el campo medido, mientras la línea continua es el ajuste por cuadrados mínimos de la ec. (3.2) para $z=1.2$ cm y $r=0$ cm respectivamente. La ordenada representa la magnitud del campo magnético medido en *Teslas*, mientras la abscisa la distancia radial y la altura en *cm*.

En la *figura 7* se muestra la distribución horizontal de los campos magnéticos experimental y analítico. El campo magnético calculado mantiene su máximo de intensidad en el centro, anula la anomalía existente en las mediciones y nos muestra con un poco más de detalle el anillo de intensidad negativa que rodea a la región del centro.

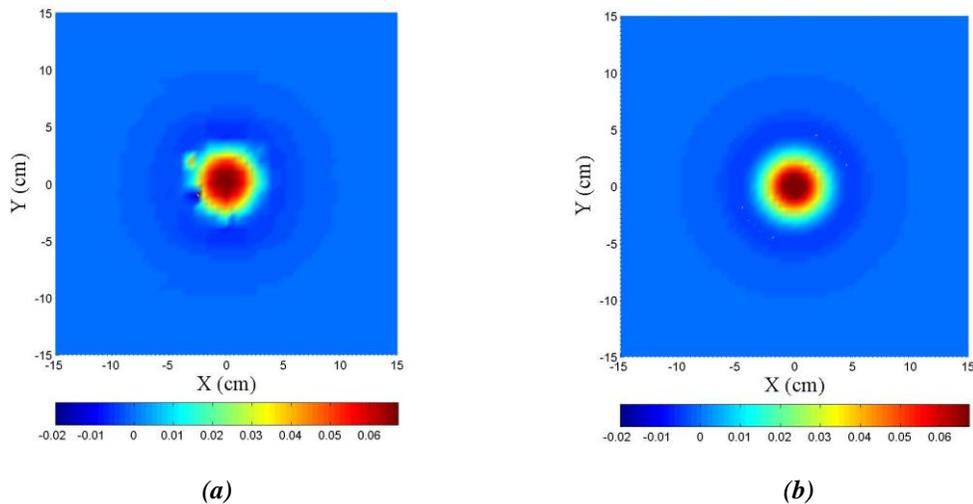


Fig. 7. Superficies del campo magnético (a) experimental y (b) analítico. Los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque.

3.3.2 Densidad de corriente

El otro campo importante para la fuerza de Lorentz es el campo eléctrico, el cual se considera estacionario y radial en la región sobre el imán. Este campo es obtenido a partir de la densidad de corriente definida de acuerdo a la siguiente relación:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{I}}{A} \rightarrow \mathbf{J} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi r H}, \quad (3.3)$$

donde \mathbf{I} es la corriente suministrada a través del fluido y A es el área transversal a la corriente. Al considerar que la corriente es suministrada en forma radial el área transversal se toma de un cilindro de área $2\pi r H$, siendo H la altura del cilindro, en este caso igual a la profundidad de la capa de fluido, y r es la distancia radial. A partir de esta relación es posible obtener el campo eléctrico. Para ello, partimos del hecho que el fluido conductor se comporta como un material óhmico, es decir, satisface la ley de Ohm, expresada como:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.4)$$

donde \mathbf{E} es el campo electrostático y σ es la conductividad del fluido. Por consiguiente el campo eléctrico queda bien aproximado en la región central sobre el imán por la expresión:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi\sigma H r}. \quad (3.5)$$

En la *figura 8* se muestran las gráficas del campo eléctrico obtenidas a partir de cinco cargas puntuales: cuatro positivas en las esquinas del tanque y una negativa en el centro.

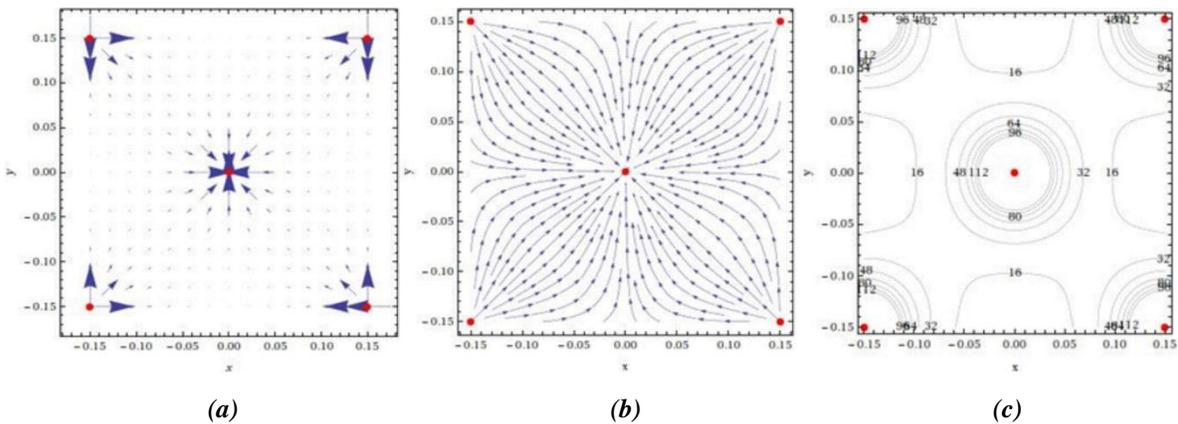


Fig. 8. Gráfica de *a*) campo eléctrico, *b*) líneas de campo eléctrico y *c*) magnitud del campo eléctrico. Los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque. Los puntos sólidos en las esquinas equivalen a los electrodos. La magnitud de campo eléctrico está expresada en N/C.

Como es de esperarse el campo eléctrico es radial en la región central. Las *figuras 8a* y *b* muestran que está dirigido de las esquinas (*electrodos positivos*) hacia el centro (*electrodo negativo*), y la *figura 8c* nos dice que es infinito en las esquinas y en el centro y decae rápidamente alejándose de los mismos como $1/r$, con r la distancia radial.

3.3.3 Campo de fuerzas —fuerza de Lorentz—

Con la obtención del campo magnético y eléctrico teórico es posible calcular el campo de fuerza a partir de la ec. (3.1). El campo magnético y la densidad de corriente son perpendiculares, de tal suerte que la fuerza está dirigida en dirección tangencial y viene dada por la expresión:

$$F(r) = \frac{I_0 B(r, z_0)}{2 \pi r H} , \quad (3.6)$$

donde I_0 es la magnitud de la corriente eléctrica. En términos del campo magnético expresado por la ec. (3.5), esta ecuación queda escrita como:

$$F(r) = \frac{I_0}{2 \pi r H} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_0(\lambda_n r) , \quad r > 0 \quad (3.7)$$

donde $\varepsilon_n = C_n e^{-\lambda_n z_0}$ son coeficientes que acompañan a cada función de Bessel. Nótese que la forma del campo de forzamiento es válida para $r > 0$ puesto que en $r = 0$ es donde se encuentra situado el electrodo central. La figura 9 muestra la gráfica del campo fuerzas.

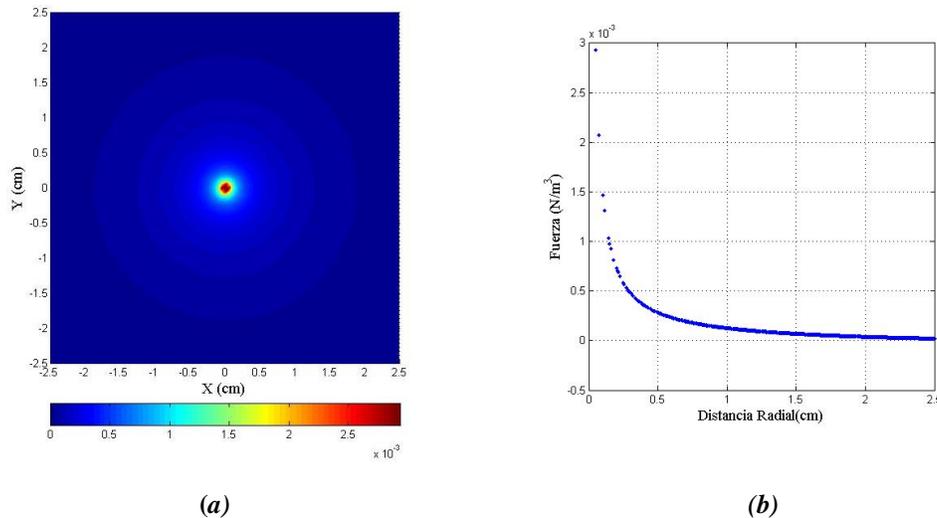


Fig. 9. (a) Campo de fuerza y (b) perfil radial del campo de fuerza. En (a) los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque, mientras en (b) la abscisa es la distancia radial en cm y la ordenada la intensidad del campo en N/m^3 .

Se puede observar que el campo de fuerzas es muy intenso sólo en una región cercana al centro— de $r=0\text{ cm}$ a $r=2\text{ cm}$ — y a partir de ahí decae a cero rápidamente (debido a que la densidad de corriente decae como $1/r$).

3.4 Resultados experimentales

La estrategia experimental consistió en fijar los valores de intensidad de corriente y del voltaje suministrados por la fuente. Establecidos estos dos parámetros se varía el tiempo de forzamiento del remolino, es decir, el tiempo t_f durante el cual la fuente permanece encendida. Mediante este procedimiento se logró identificar cómo se comporta el fluido ante los diferentes impulsos aplicados. Se entenderá por impulso a la fuerza aplicada sobre el fluido durante cierto intervalo de tiempo.

La primera fase experimental fue cualitativa y consistió en identificar los estados inicial y final del remolino generado. El estado inicial siempre fue un monopolo axisimétrico y es definido al tiempo en el que se detiene el impulso suministrado. El estado final dependió de dicho impulso. Una vez que se identificó la formación de determinadas estructuras multipolares para distintos tiempos de forzamiento, se procedió a investigar su reproducibilidad. Para ello, cada caso se repitió al menos cuatro ocasiones, ya sea con experimentos cualitativos o cuantitativos. El campo de velocidad horizontal fue obtenido a partir de la correlación de pares de imágenes con la técnica *PIV* (ver sección 3.4.1) y a partir de este se determinó el campo de vorticidad y de función de corriente.

Posteriormente se hizo un análisis de los perfiles radiales de los remolinos iniciales (ver sección 3.4.2) para identificar sus parámetros ω_0 , R y α característicos. Esto nos permite identificar el tipo de remolino inicial que evolucionará en una cierta estructura multipolar. También se calcularon los decaimientos de la energía cinética y la enstrofía, en parte para analizar el papel de la fricción del fondo sobre la evolución de estas estructuras.

3.4.1 Formación de estructuras multipolares

Los valores de intensidad de corriente y el voltaje fueron $I=0.15A$ y $V=15-17v$, respectivamente. Una vez que cesa el tiempo de forzamiento t_f se observa un remolino axisimétrico, el cual evoluciona de manera inestable dando paso a las diferentes estructuras multipolares explicadas en las siguientes subsecciones. El comienzo de la inestabilidad

tiene lugar en cuanto el remolino comienza a sufrir deformaciones debido a las diversas perturbaciones existentes en el experimento.

Para tiempos de forzamiento cortos ($t_f=1-3 s$), ocurre una ligera deformación del vórtice, es decir, la perturbación no es lo suficientemente grande como para modificar el estado inicial expuesto anteriormente. Para tiempos de forzamiento mayor a $t_f=3s$, el fluido respondió de manera diferente dependiendo del impulso suministrado. Fruto de ello, surgieron diferentes estructuras multipolares. La *tabla II* muestra los tiempos de forzamiento y las estructuras que resultaron asociadas a ese forzamiento.

Tabla II. Tiempos de forzamiento y estructuras encontradas. Los valores de intensidad de corriente y voltaje son $I=0.15 A$ y $V= 15-17 v$, los cuales se mantienen constantes en todos los experimentos.

$t_f (s)$	Estructura
1-3	Vórtice axisimétrico ligeramente deformado
4-5	Tripolo
6	Vórtice cuadrangular
7-8	Vórtice triangular
10-11	Par de dipolos

A continuación se abordarán con mayor detalle cada uno de los resultados obtenidos para los diferentes forzamientos establecidos, mostrando imágenes del remolino inicial y su evolución hasta el surgimiento de la estructura multipolar. Además, esta información es complementada con los campos de velocidad horizontal, contornos de función de corriente y superficies de vorticidad obtenidos de experimentos con partículas —realizados bajo las mismas condiciones— a partir de la técnica de *PIV*.

3.4.1.1 Vórtices tripolares

Para un tiempo de forzamiento $t_f = (4-5) s$ la inestabilidad provocada sobre el monopolo fue tal que éste evolucionó a un tripolo. En la *figura 10* se muestran algunas imágenes de un experimento típico con tinta a diferentes tiempos.

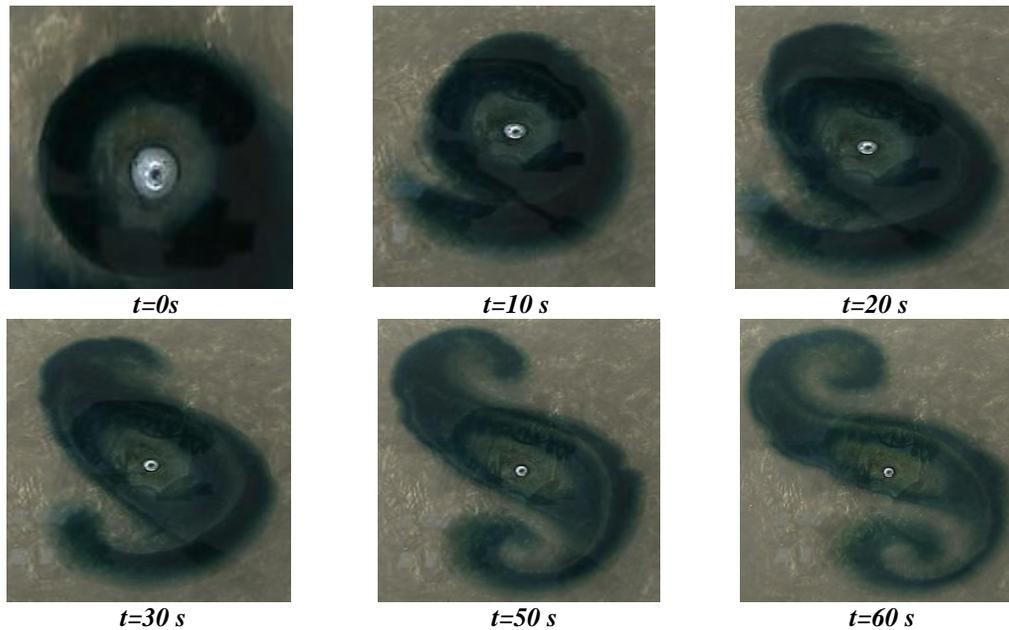


Fig. 10. Imágenes de la evolución de un vórtice monopolar visualizado con tinta y generado con $I = 0.15$ A, $V = (15-17)$ v y $t_f = 4-5$ s

El movimiento del núcleo del remolino es en sentido antihorario—esto por la disposición del campo eléctrico y magnético—, mientras que los satélites giran en sentido opuesto. El monopolo inicial se referencia al tiempo $t=0s$, justo después de que se apaga el forzamiento. En general, el monopolo inicial es completamente axisimétrico. Esta simetría empieza a perderse a los $10s$ reflejándose en protuberancias que empiezan a surgir a cada lado del núcleo. A los $20s$ la forma que adquiere el vórtice es aparentemente triangular. Esta forma perdura durante 10 segundos más, y finalmente, a los $50s$ se observa claramente la formación del tripolo, la cual prevalece hasta el final de experimento $t \approx 120s$.

La *figura 11* muestra las superficies de vorticidad de un segundo experimento realizado bajo condiciones idénticas al anterior, pero ahora utilizando partículas en la superficie para medir el campo de velocidad horizontal. En la primera imagen se muestra el monopolo inicial. El núcleo gira en sentido antihorario, mientras que los satélites que surgen fruto de la inestabilidad lo hacen en sentido contrario. Cada imagen tiene su propia escala de colores, puesto que la vorticidad decae muy rápido con respecto a la vorticidad del remolino inicial debido a la fricción del fondo.

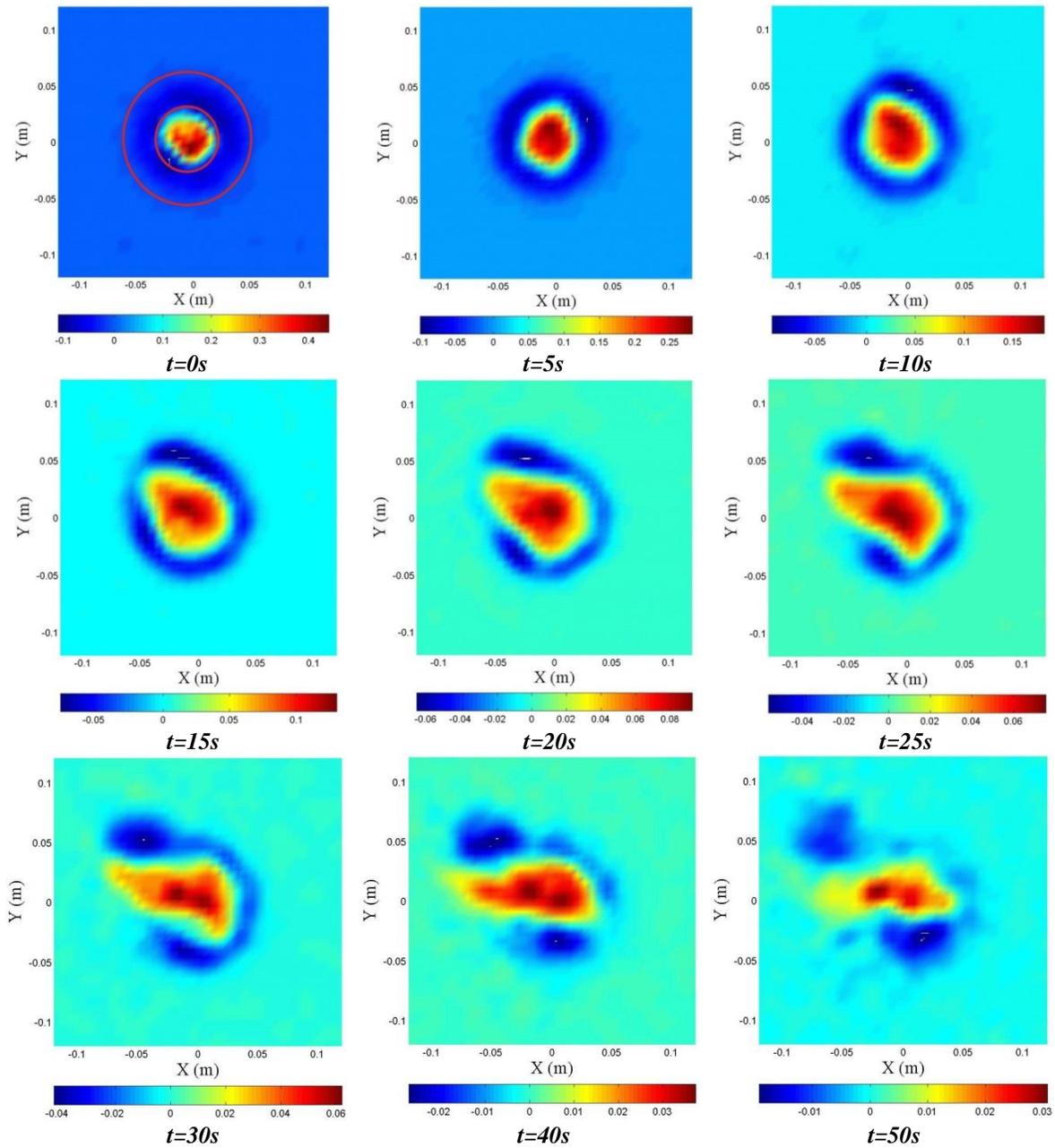


Fig. 11. Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V=15-17v$ y con un tiempo de forzamiento de $t= 4-5 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.

Del mismo modo la *figura 12* muestra los campos de velocidad horizontal y los contornos de función de corriente para los mismos tiempos de las superficies de vorticidad.

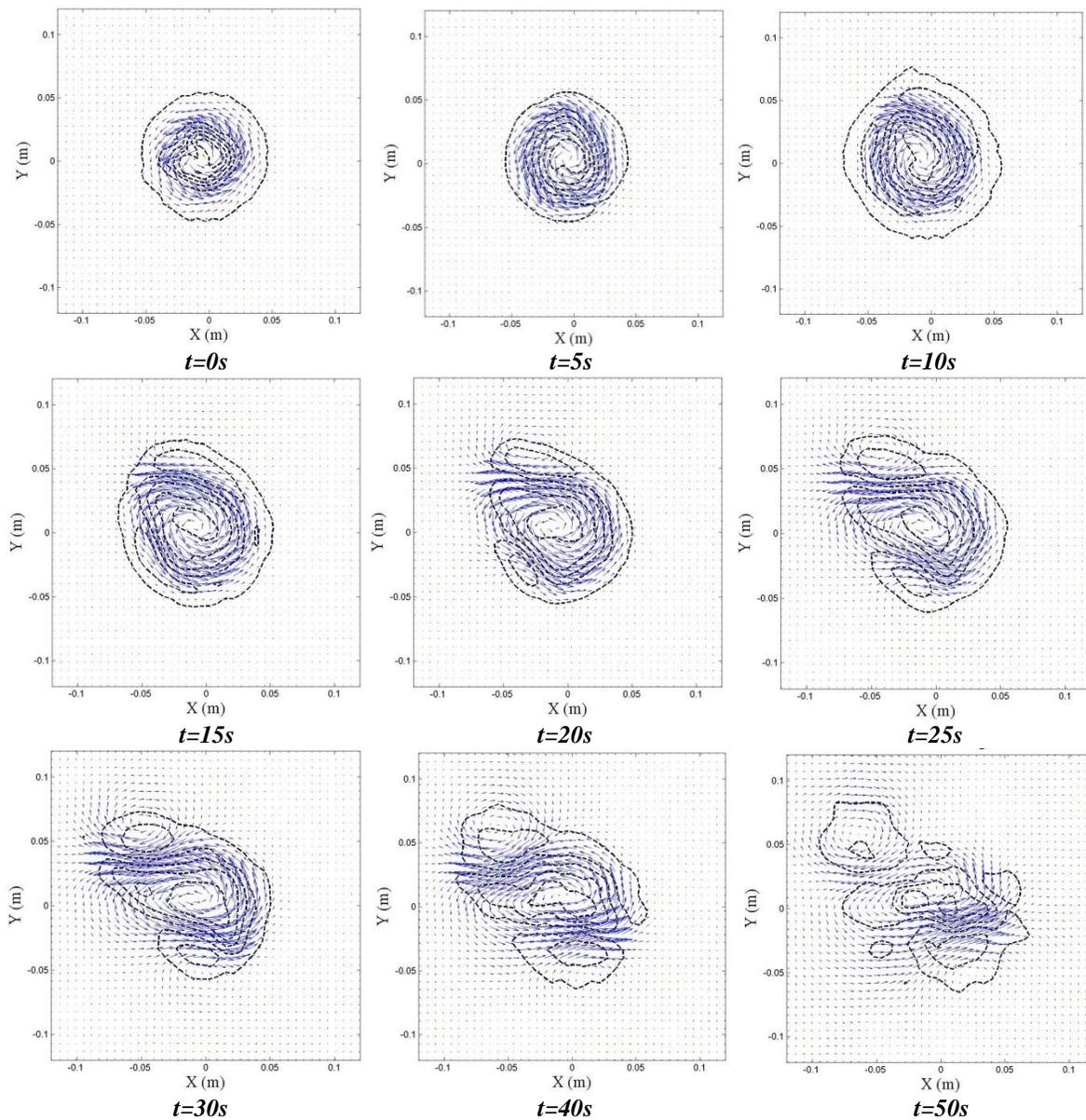


Fig. 12. Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$ y $V=15-17v$ y con un tiempo de forzamiento de $t= 4-5 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas).

Se puede apreciar en estas dos figuras la formación del tripolo al tiempo $t= 40s$ con la particularidad de que al inicio de la perturbación el núcleo adquiere una forma cuasi-triangular. Las superficies de vorticidad y contornos de función corriente en las últimas imágenes muestran que el estado final del monopolio es el tripolo.

3.4.1.2 Vórtices triangulares

Vórtices triangulares son generados con un tiempo de forzamiento $t_f = 7-8$ s. La *figura 13* muestra algunas imágenes de vórtices triangulares obtenidos para diferentes tiempos de forzamiento comprendidos entre este intervalo. El tiempo al cual se visualiza el vórtice triangular en cada caso es $t=40$ s.

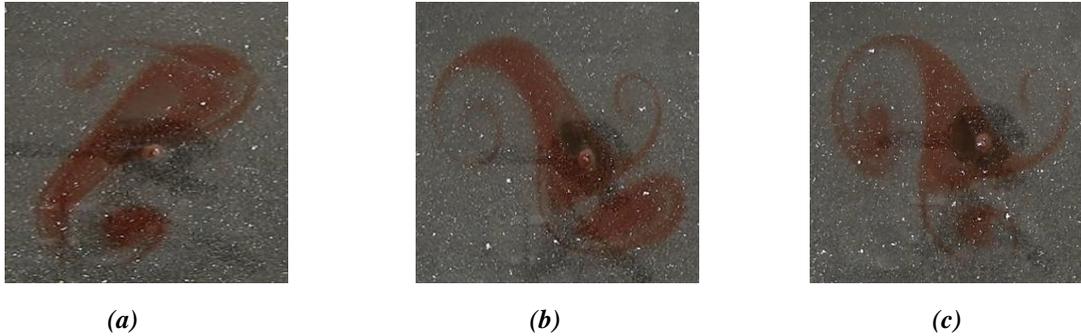
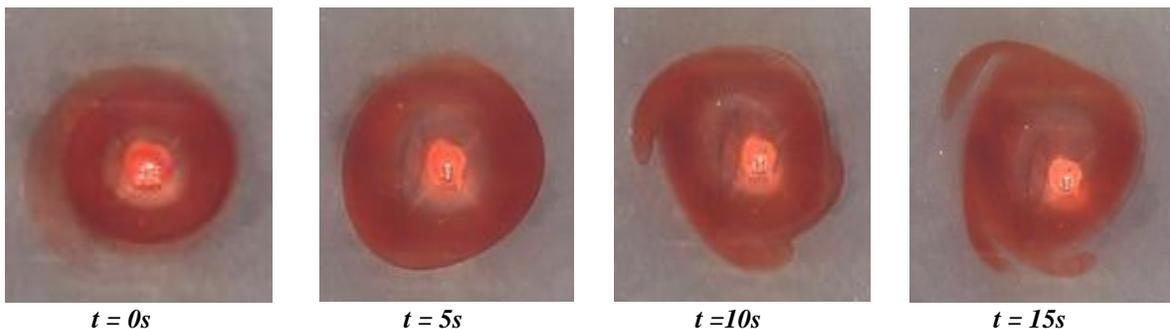


Fig. 13. Imágenes de un vórtice triangular generado con $I = 0.15$ A, $V = 15-17$ v y con un tiempo de forzamiento comprendido entre 7 y 8 s. Los vórtices fueron visualizados con tinta.

Los tres vórtices presentan similitudes en la forma triangular del núcleo y el surgimiento de tres satélites. Sin embargo, en la *figura 13a* se puede observar que uno de los tres satélites no se desarrolla completamente, y después de la formación uno de los satélites sigue ligado al núcleo. En la *figura 13b* dos de los satélites son más intensos, de tal suerte que el tercero se desarrolla pero durante toda la evolución se queda ligado a uno de los satélites. La *figura 13c* corresponde a la imagen de un vórtice triangular con su núcleo y sus tres satélites bien definidos. La *figura 14* muestra la evolución completa de un monopolo cuya evolución inestable lo lleva a un vórtice triangular en un experimento cualitativo con tinta.



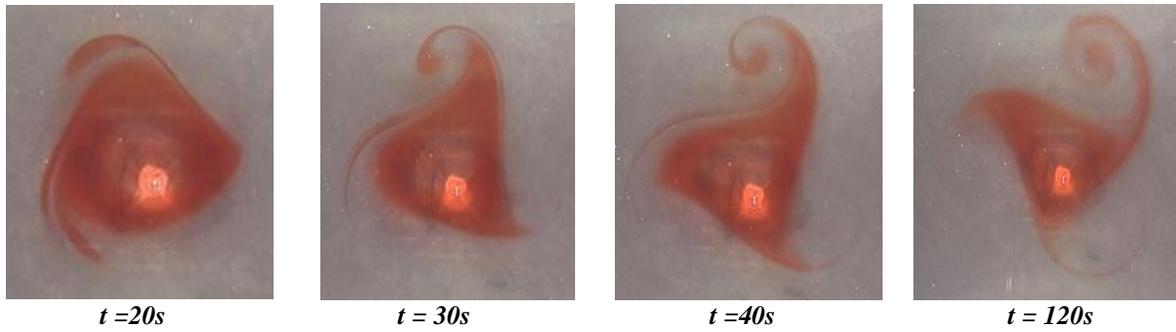
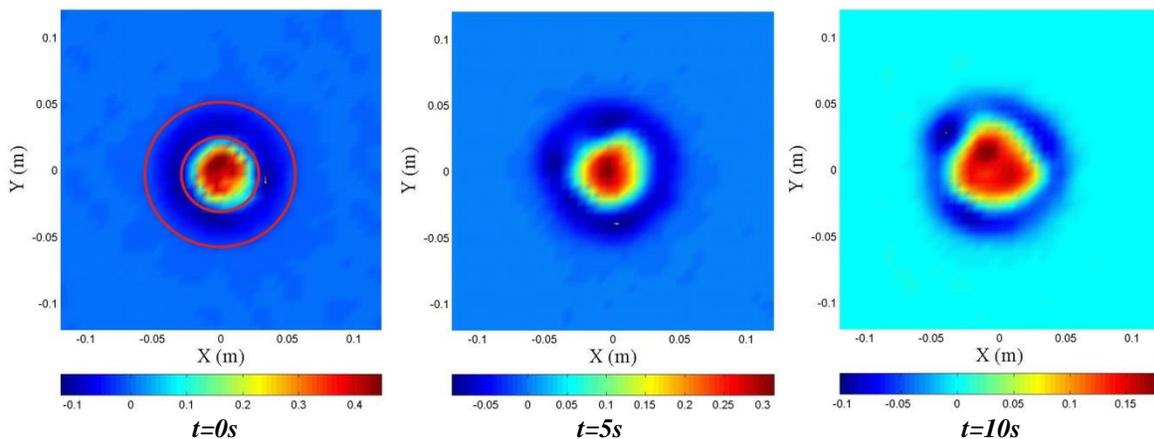


Fig. 14. Imágenes de la evolución de un vórtice generado con $I=0.15A$, $V=15-17v$ y con un tiempo de forzamiento $t_f = 7-8 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.

Durante el estado inicial del vórtice $t=0s$ — cuando se detiene el forzamiento— se observa una clara axisimetría, la cual se empieza a perder al tiempo $t=5s$ deformándose ligeramente. Al tiempo $t=10s$ el núcleo adquiere una forma elíptica y la aparición de dos protuberancias en la parte superior e inferior del núcleo se da al tiempo $t=20s$. El núcleo comienza adquirir la forma triangular, las dos protuberancias surgidas anteriormente se desarrollan mejor y una tercera empieza a surgir. Finalmente, al tiempo $t=40s$, el núcleo adquiere completamente una forma triangular con los tres satélites distinguibles completamente. En esta fase podemos afirmar que se ha generado un vórtice triangular en el que el movimiento del núcleo es en sentido horario, mientras los satélites se mueven en sentido contrario. Este comportamiento perdura durante más de *80 segundos* hasta que eventualmente los efectos viscosos terminan por disipar el movimiento.

En la *figura 15* se muestran las superficies de vorticidad de un segundo experimento similar cuya evolución condujo a la formación de un vórtice triangular. Los campos de velocidad horizontal para los mismos tiempos de las superficies de vorticidad se muestran en la *figura 16*.



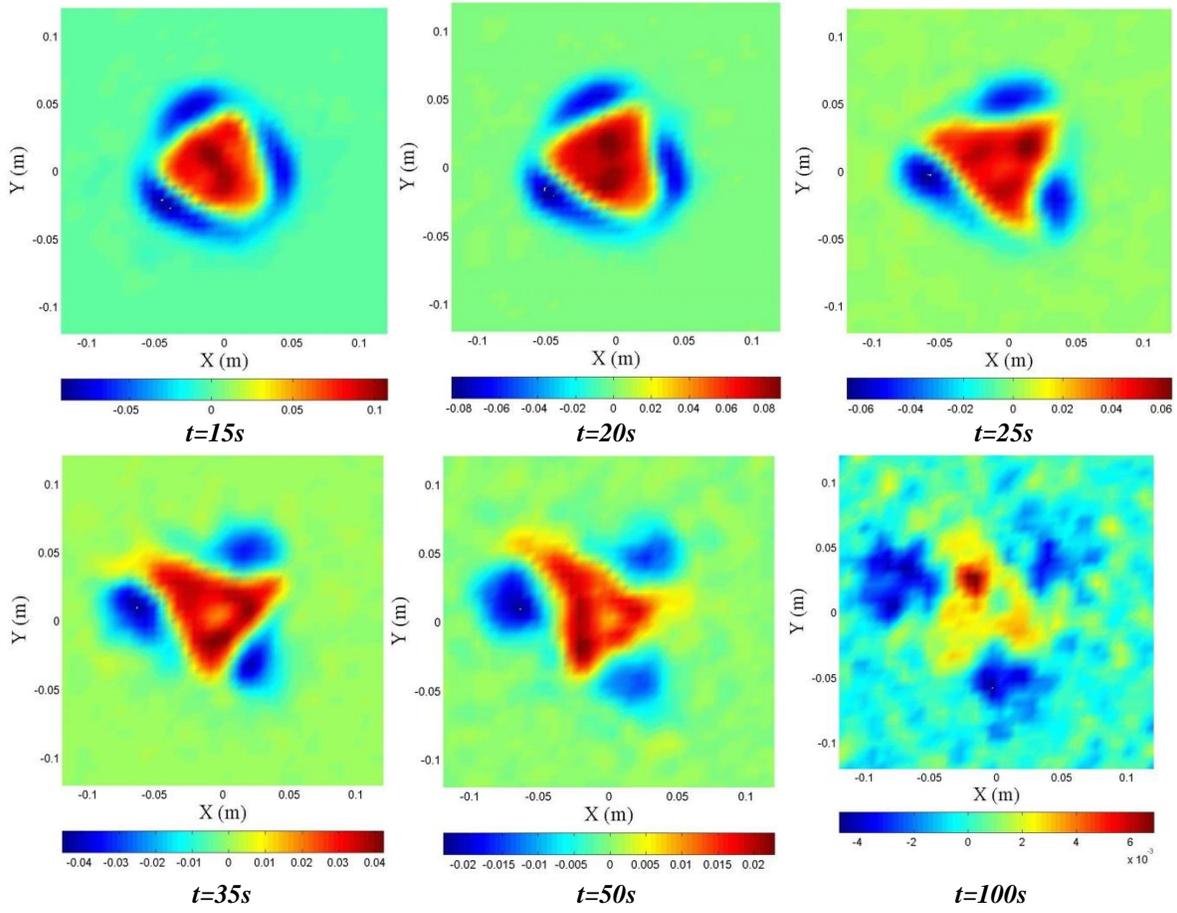
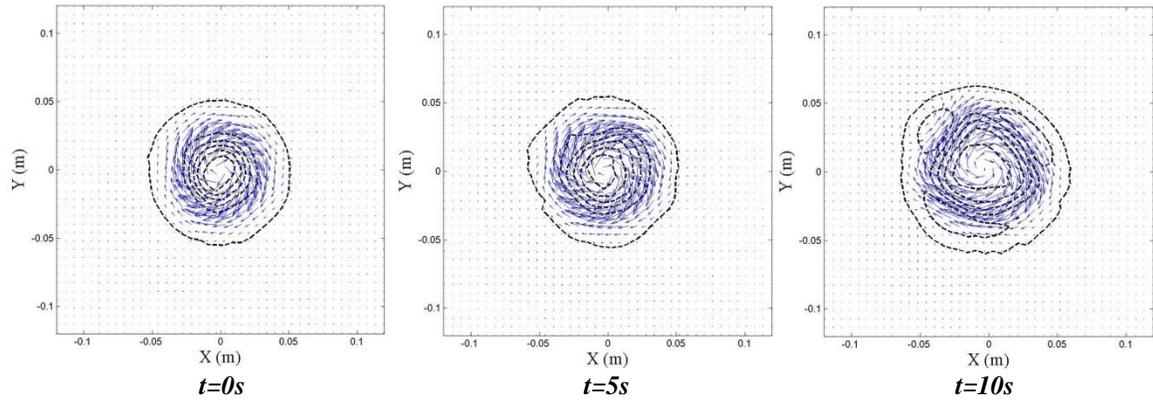


Fig. 15. Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17$ y con un tiempo de forzamiento de $t_f= 7-8$ s. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.



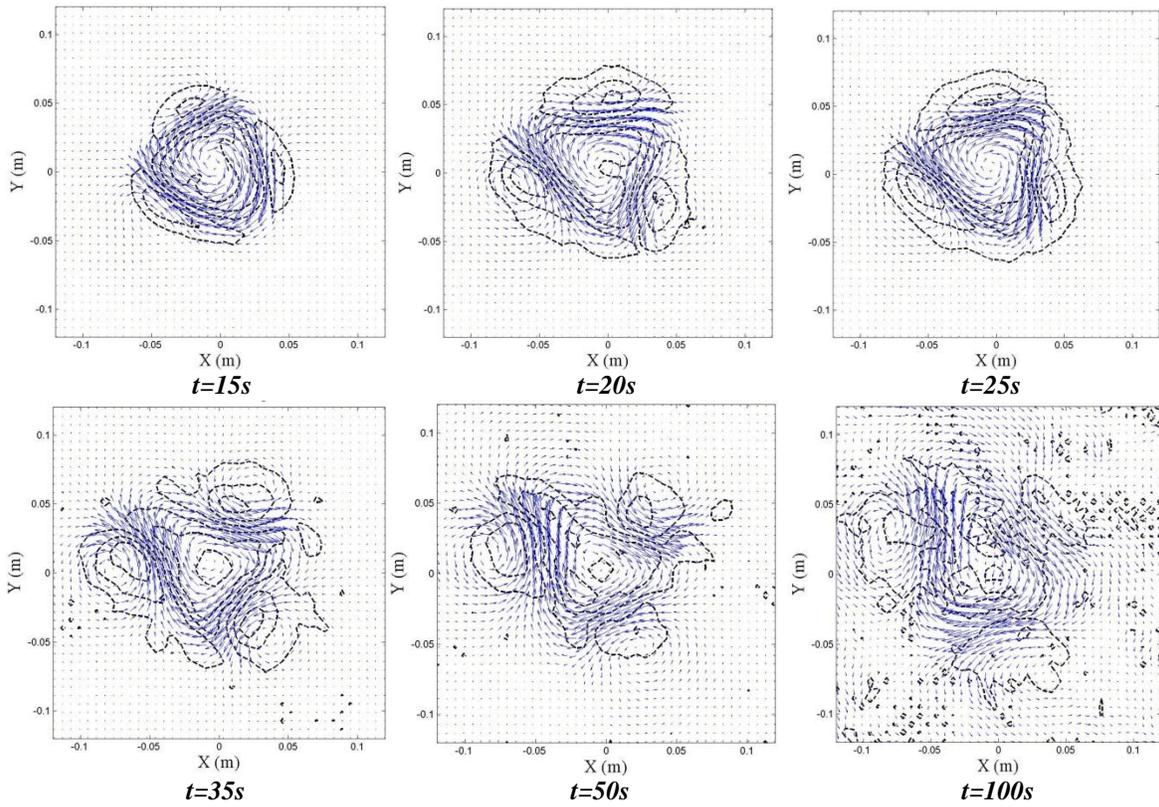
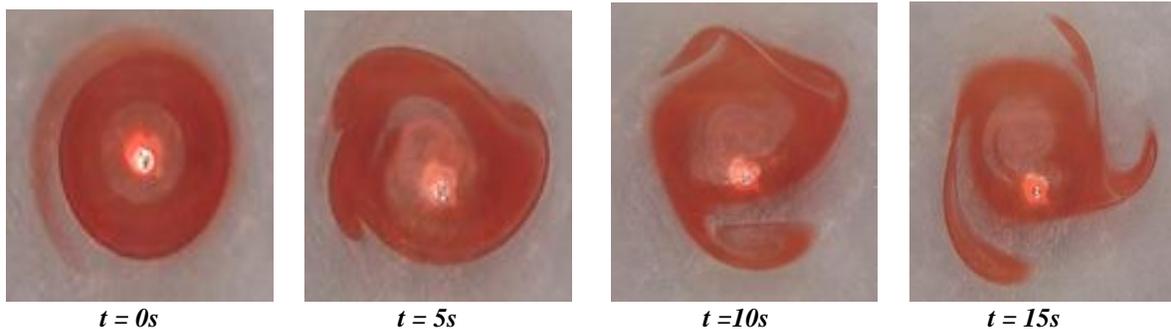


Fig. 16. Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t_f= 7-8 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas). Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.

3.4.1.3 Vórtice cuadrangular

En uno de los experimentos con tinta se observó la formación de un vórtice cuadrangular para un tiempo de forzamiento $t \approx 6s$. Las imágenes de dicho experimento son mostradas en la *figura 17*.



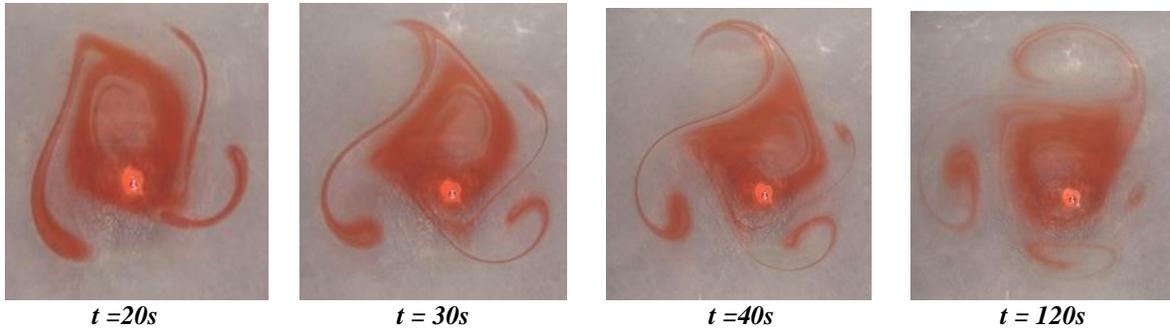
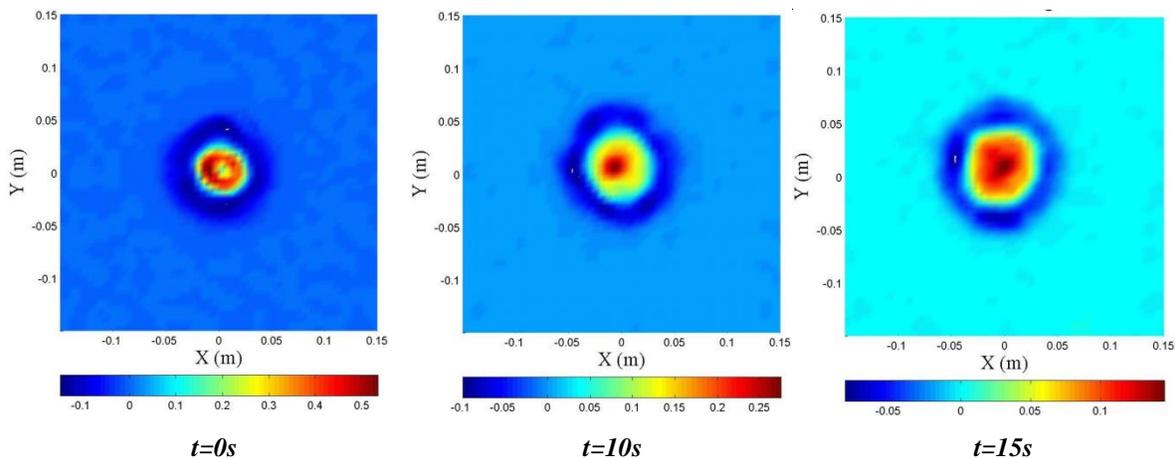


Fig. 17. Imágenes de la evolución de un vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con tiempo de forzamiento de $t_f \approx 6 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.

De manera similar al vórtice triangular, los primeros segundos de la evolución desaparece la axisimetría, el núcleo trata de adquirir una forma triangular y se notan ciertas protuberancias a su alrededor. Al tiempo $t=15s$ la forma del núcleo es completamente cuadrada y a su alrededor se puede observar claramente que las protuberancias anteriores se convirtieron en tres satélites bien definidos. Cuatro satélites se empiezan a formar durante los siguientes $10 s$, y al tiempo $t=30 s$ se observa el vórtice cuadrangular bien desarrollado. Este comportamiento se sigue observando al tiempo $t=40 s$, con la particularidad de que uno de los cuatro satélites del cuadrupolo es más pequeño que los otros tres. La estructura multipolar se mantiene aproximadamente por $100 s$ hasta que todo movimiento cesa y la tinta se desvanece. Un segundo experimento con partículas bajo las mismas condiciones anteriores fue realizado para tratar de reproducir el vórtice cuadrangular. En la *figura 18 y 19*, se muestran las superficies de vorticidad y los campos de velocidad horizontal, en donde se puede apreciar claramente la formación de los cuatro satélites. Sin embargo, esta estructura no pudo ser reproducida de manera tan controlada como lo fueron todos los demás casos de la *tabla II*.



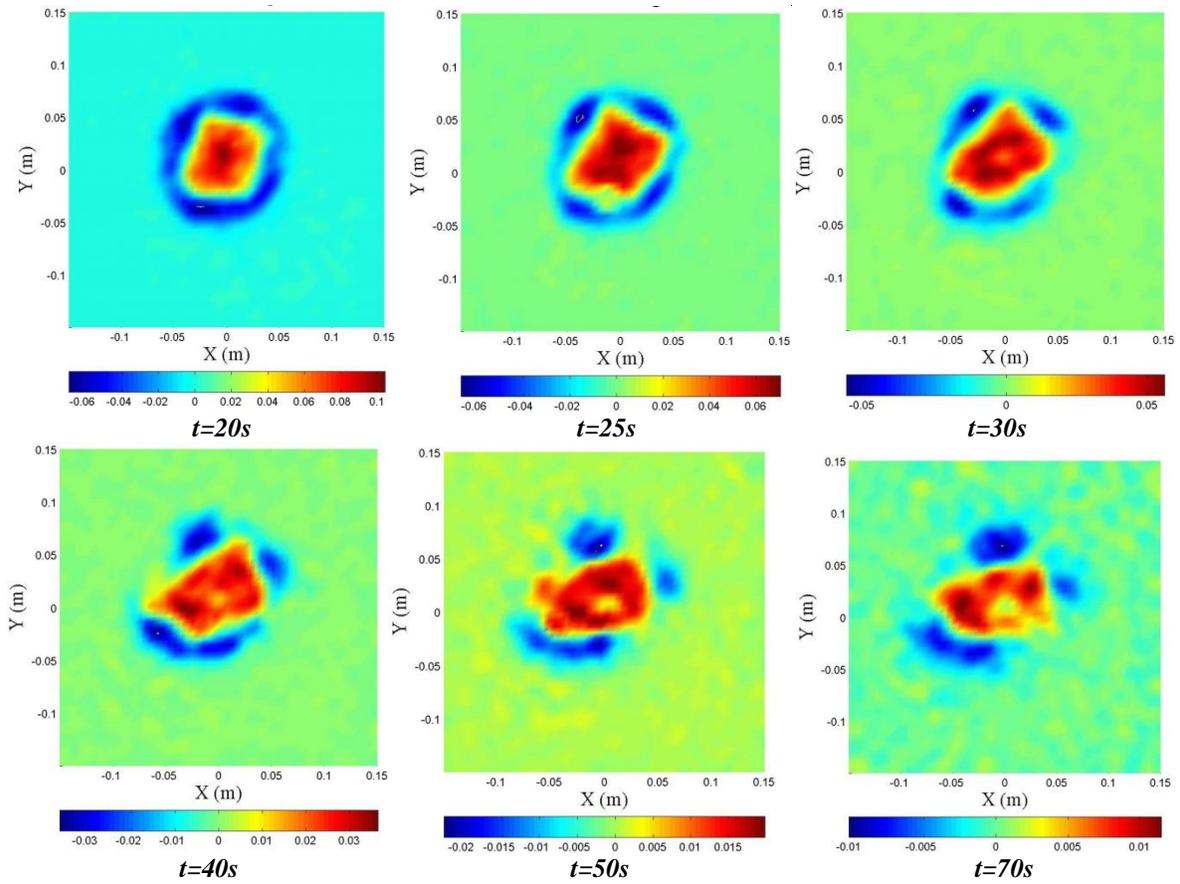
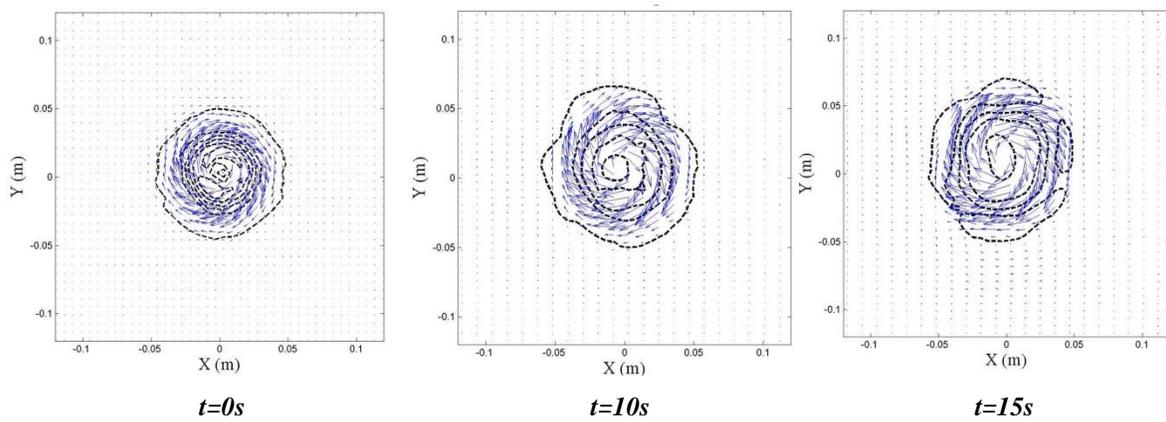


Fig. 18. Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17$ v y con un tiempo de forzamiento de $t \approx 6$ s. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.



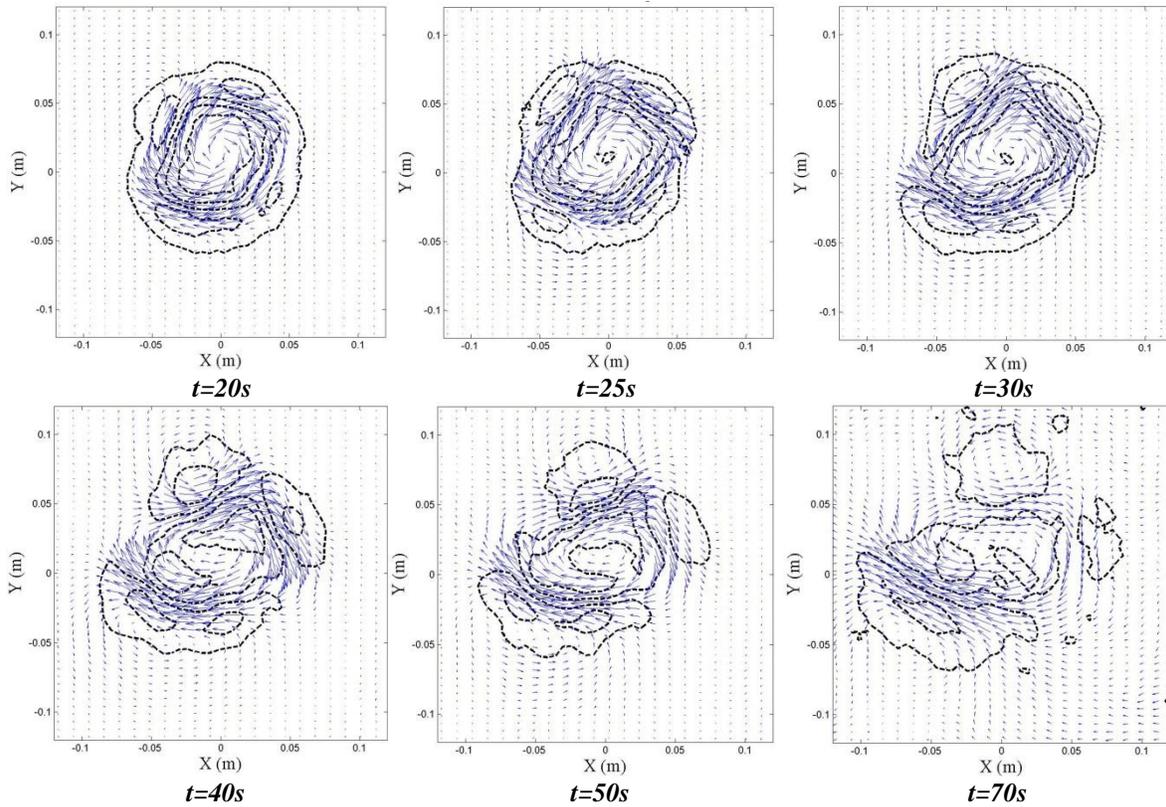
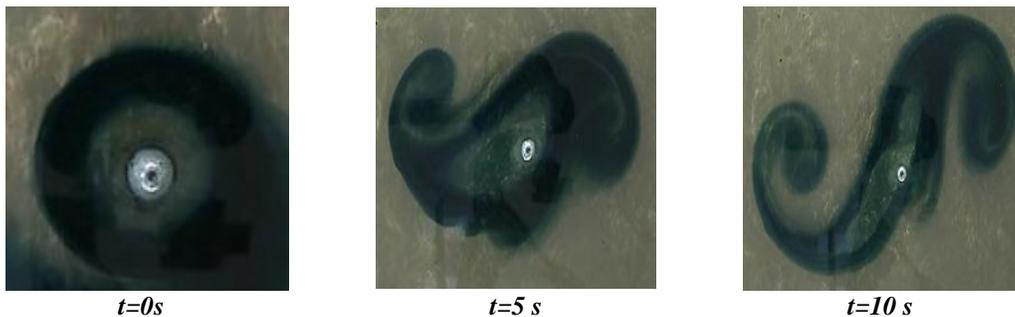


Fig. 19. Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V=15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t \approx 6 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas). Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.

3.4.1.4 Par de dipolos

Para un tiempo $t = (10-11) s$ la inestabilidad provocada sobre el monopolo se manifiesta en la formación de un par de dipolos alejándose del centro. La *figura 20* muestra imágenes de dicha evolución a diferentes tiempos en un experimento con tinta.



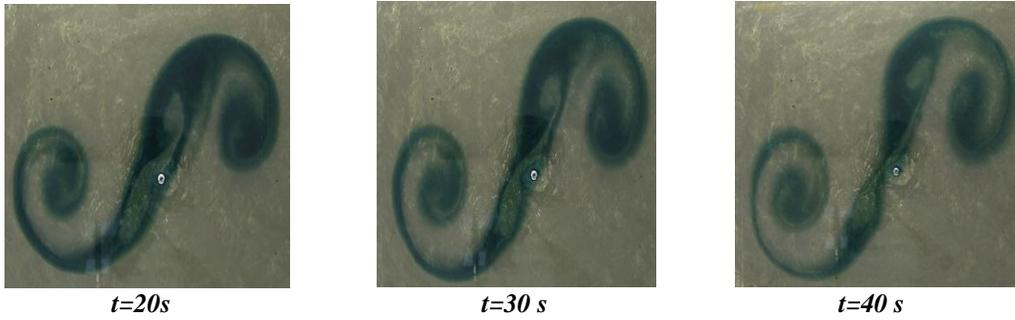
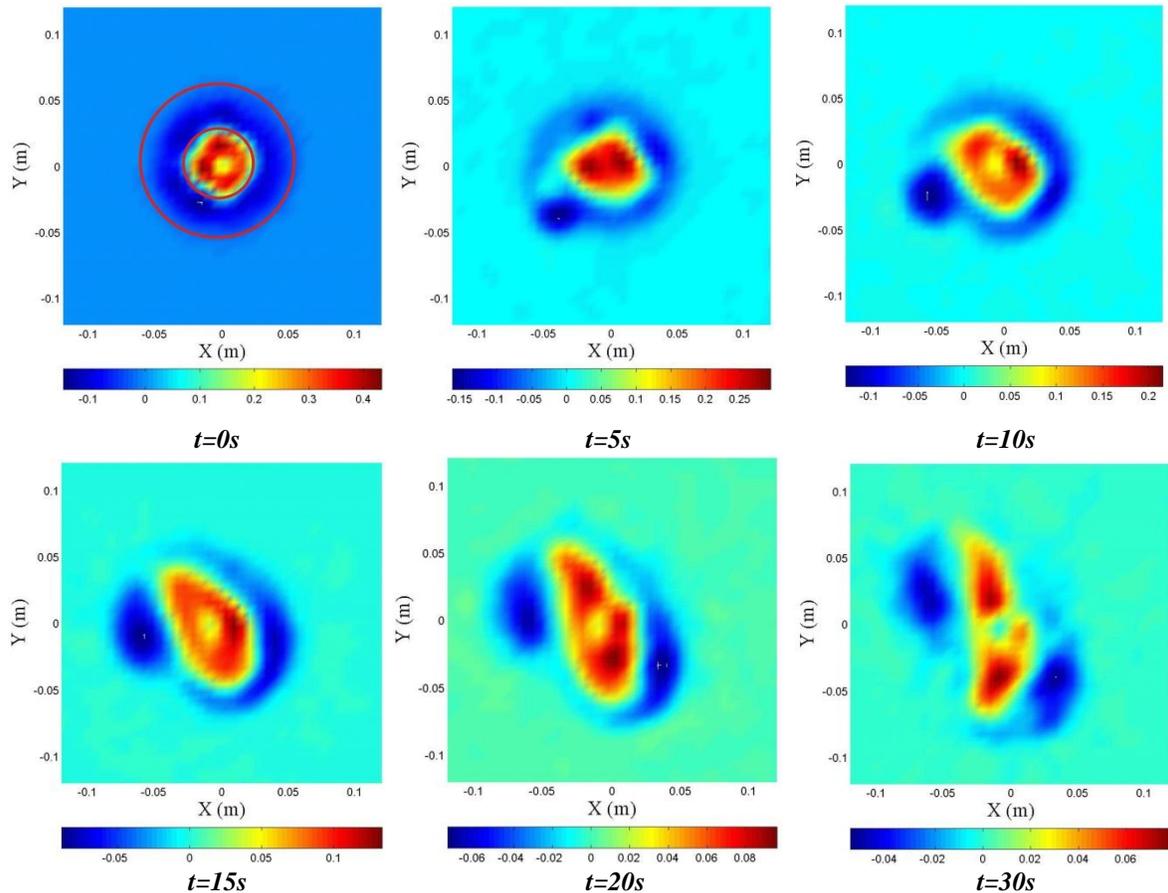


Fig. 20. Imágenes de la evolución de un vórtice generado $I = 0.15 A$, $V = 15-17v$ y con un tiempo de forzamiento $t_f = 4-5 s$. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada figura.

En la evolución de este monopolo hacia el par de dipolos no se observa que el núcleo adquiera forma triangular. Al tiempo $t = 10s$ surge una especie de tripolo, y se puede observar que a medida que evoluciona su núcleo se va alargando y los satélites a su alrededor se van haciendo más intensos. Este comportamiento se mantiene aproximadamente durante $20s$ hasta que al tiempo $t=40s$ el núcleo se rompe en dos, dando paso a la formación del par de dipolos, tal y como se muestra en la última imagen.



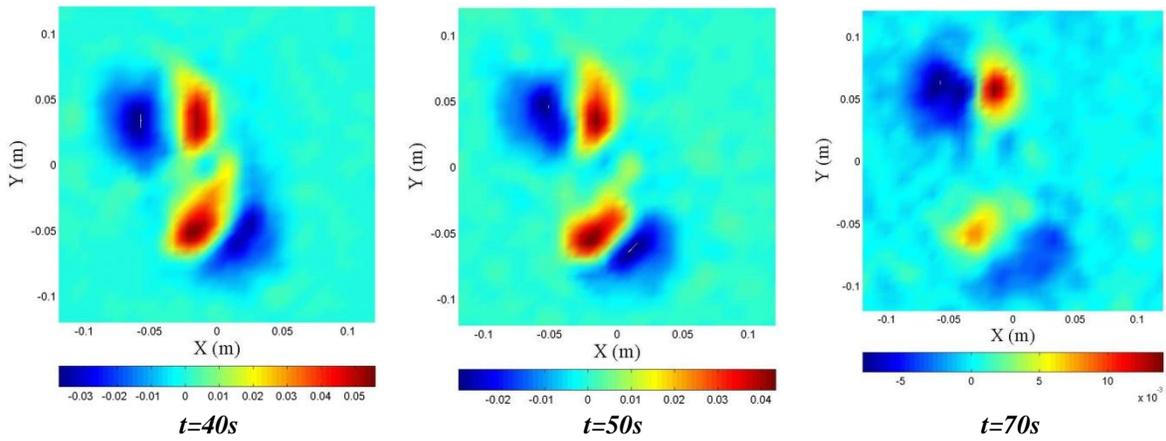
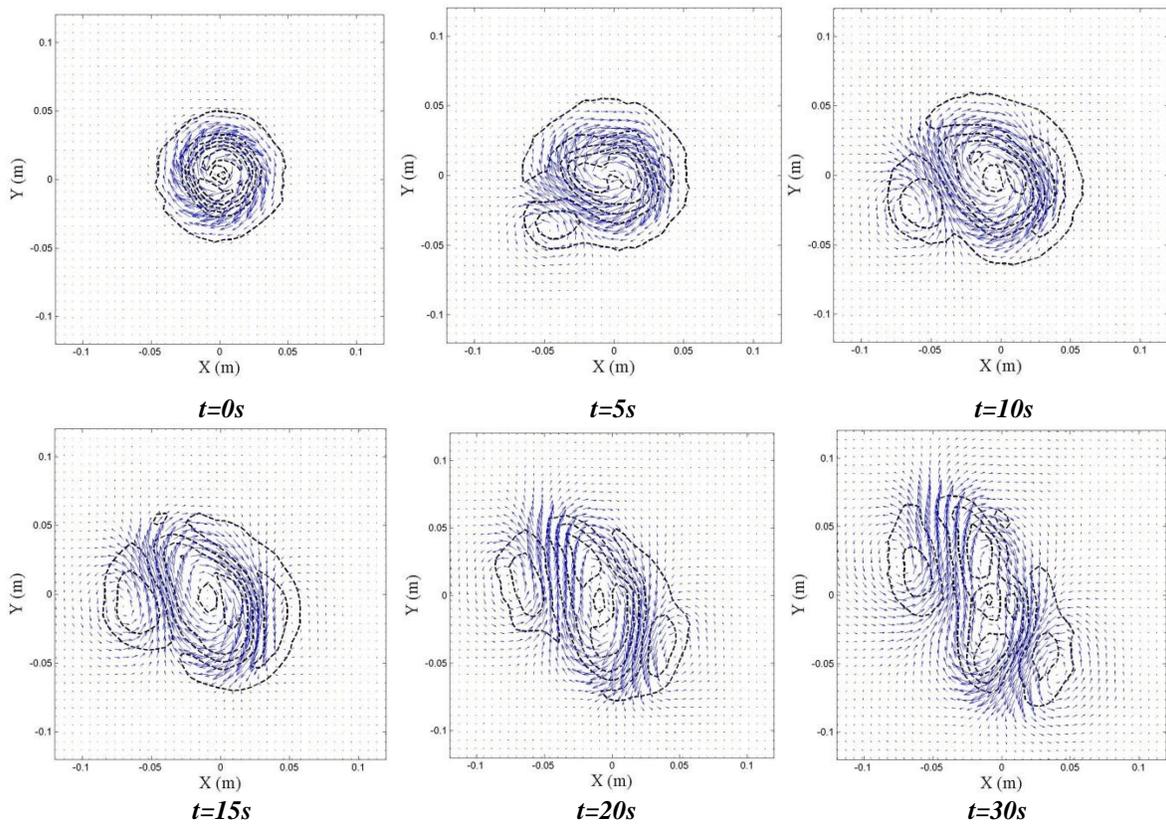


Fig. 21. Evolución de las superficies de vorticidad para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17$ v y con un tiempo de forzamiento de $t= 10-11$ s. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.

Las *figuras 21-22* al igual que en todos los casos anteriores muestran la evolución de las superficies de vorticidad y los campos de velocidad horizontal.



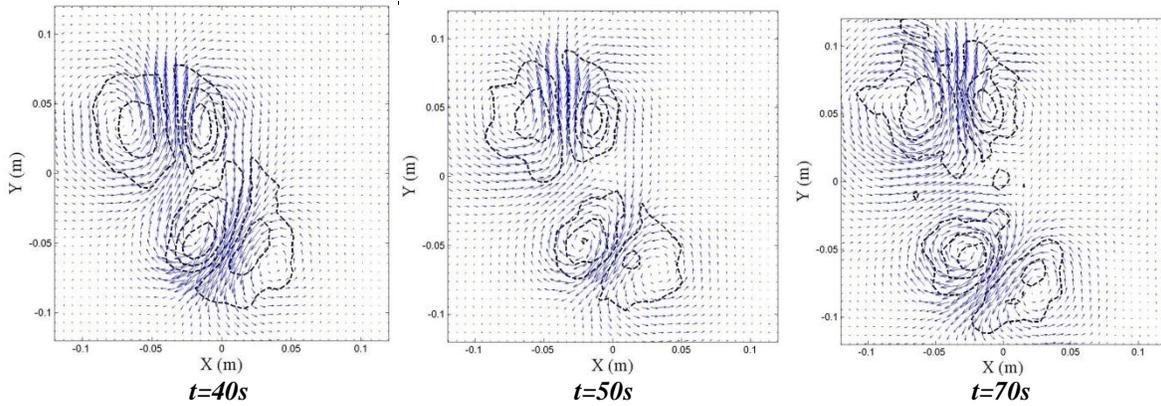


Fig. 22. Evolución de los campos de velocidad horizontal para el vórtice generado con $I=0.15A$, $V= 15-17 v$ y con un tiempo de forzamiento de $t= 10-11 s$. Sobrepuestos a estos se encuentran los contornos de función de corriente (líneas punteadas). Los tiempos de la evolución están indicados en la parte inferior de cada imagen.

3.4.2 Perfiles radiales de vorticidad y velocidad azimutal

Como se mencionó en la Introducción, se realizaron cuatro experimentos con las condiciones iniciales asociadas para la reproducción del tripolo, los vórtices triangulares, y los dos dipolos. Un resultado fundamental es la reproducibilidad de los multipolos, ya que en cada sesión de experimentos se obtuvieron las estructuras mencionadas. En esta sección se analiza el comportamiento del remolino en su fase inicial axisimétrica. El paso a seguir es verificar si efectivamente este tipo de remolinos son aislados, y por consiguiente encontrar los parámetros ω_0 , R y α asociados a cada uno de ellos.

Las figuras 23 y 24 muestran los perfiles radiales de vorticidad y velocidad azimutal medidos a diferentes tiempos de un remolino cuya evolución inestable lo condujo a la formación de un vórtice triangular. La primera imagen corresponde a las distribuciones radiales del monopolo justo al tiempo en que fue apagado el forzamiento, $t=0s$. Las imágenes posteriores muestran su evolución hasta el momento en que el remolino comienza a perder su simetría axial, $t \approx 10 s$. En todas las imágenes los puntos en azul son las mediciones del experimento y la línea en rojo es un ajuste por cuadrados mínimos del perfil de vorticidad para un vórtice aislado, ec. (2.15).

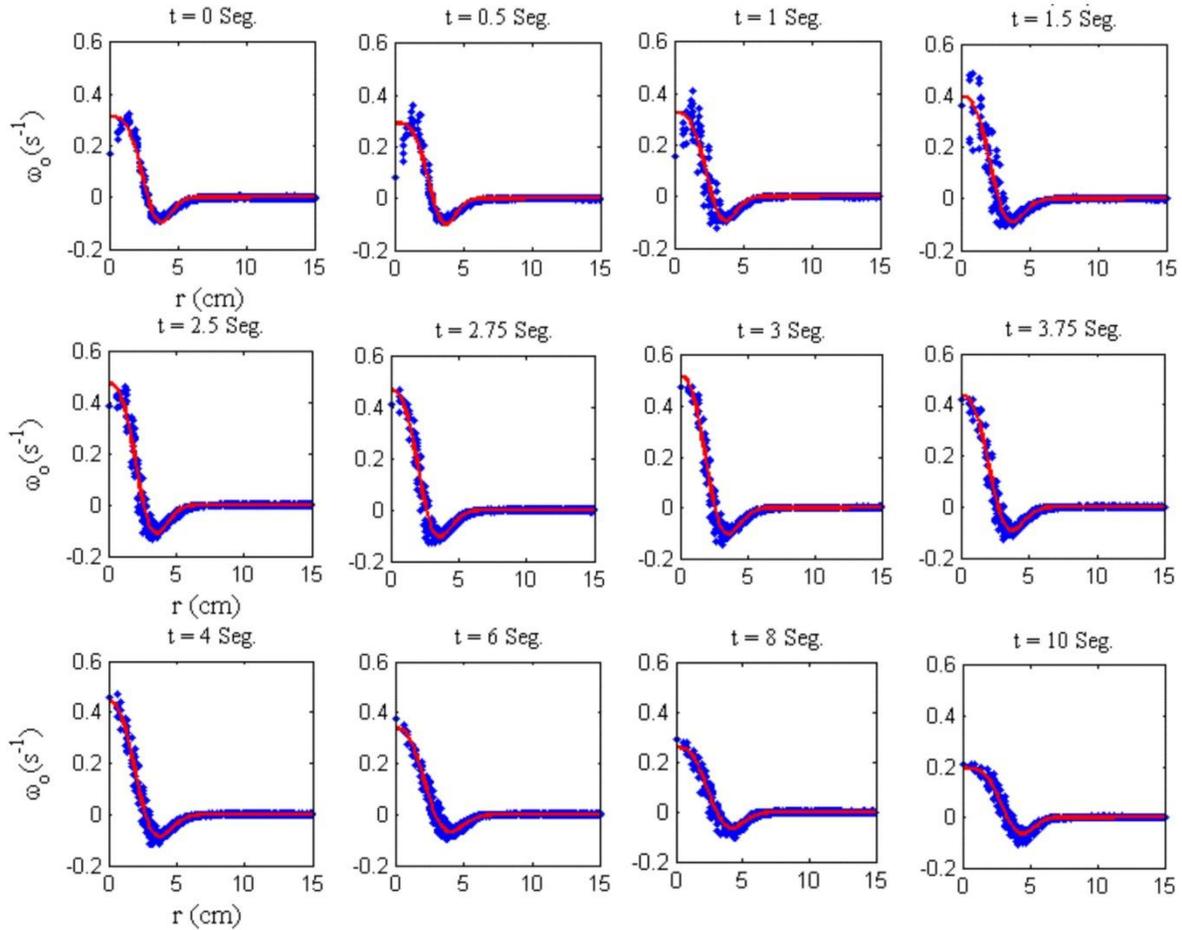


Fig. 23. Evolución del perfil radial de vorticidad para un monopolo que posteriormente evolucionó a un vórtice triangular. Los puntos en azul representan los datos medidos del experimento, mientras la gráfica en rojo es el perfil de un remolino aislado ajustado a través de cuadrados mínimos. Los tiempos de la evolución están indicados en la parte superior de cada imagen.

En todos los experimentos realizados se pudo observar un comportamiento similar, el cual consiste en que la distribución radial de vorticidad medida en el instante después de apagar el forzamiento no se ajusta de manera adecuada al perfil dado por la ec. (2.15). Este comportamiento es debido tal vez a procesos asociados a la electrólisis y al ruido que introduce el electrodo central en estos primeros instantes. Toma aproximadamente 2.75s para que las mediciones se ajusten de la mejor manera al perfil teórico del remolino descrito por ec. (2.15). En todos los experimentos esto fue aproximadamente a los $t = 2.75s$. Por lo tanto, los parámetros ω_0 , R y α se toman todos a partir de este tiempo. Lo que se observa posteriormente es un decaimiento en la amplitud de los perfiles de vorticidad, efecto debido a la fricción del fondo (ver sección 3.4.3). La última imagen en la figura 23

es tomada a $t=10s$, tiempo en el cual el remolino empieza a perder su simetría axial y la evolución inestable toma lugar.

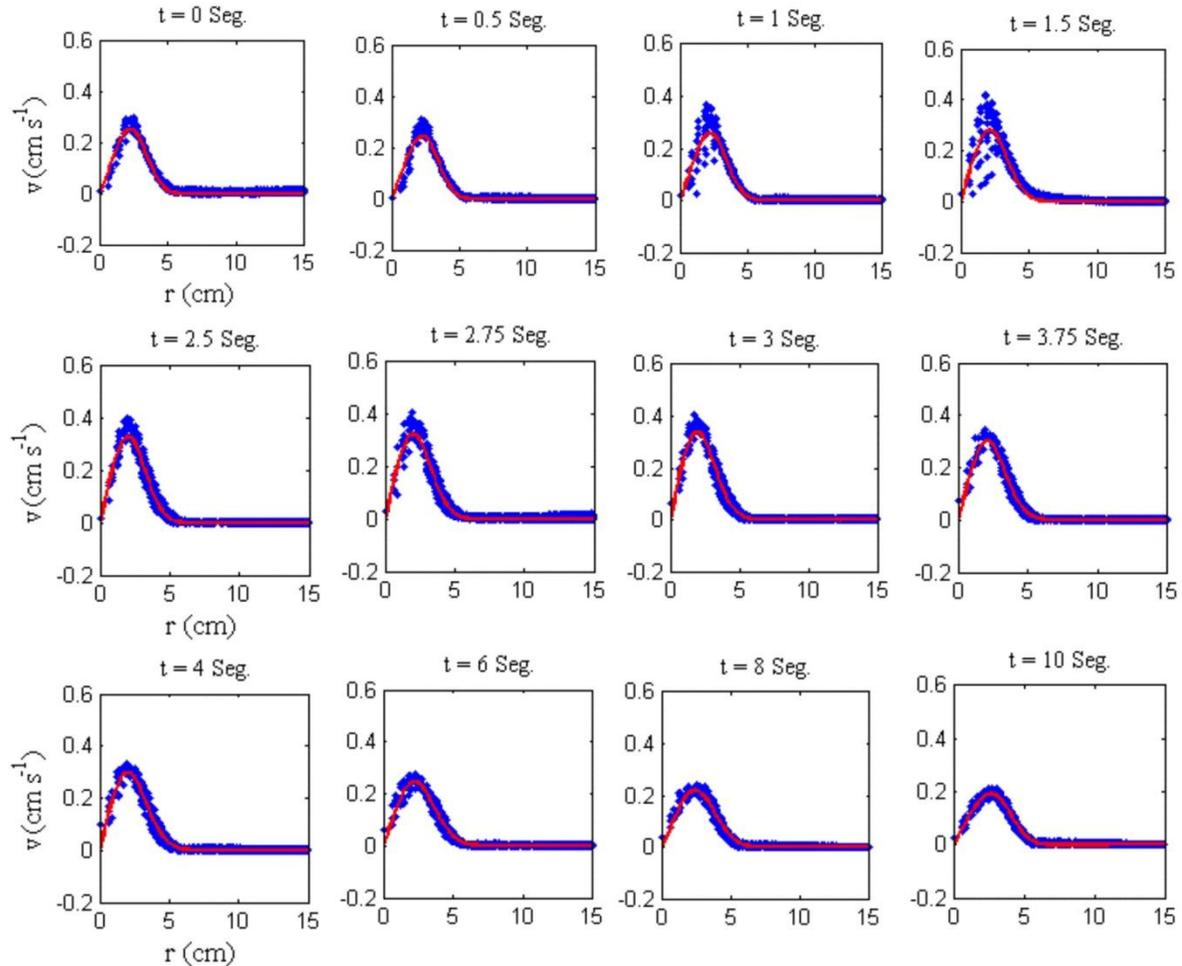


Fig. 24. Evolución del perfil de velocidad azimutal para un monopolo que posteriormente evolucionó a un vórtice triangular. Los tiempos tomados son los mismos que en la *figura 23*.

La velocidad azimutal presenta un comportamiento similar: se puede observar un ajuste de los datos al perfil (2.16) desde el tiempo $t=2.75s$. Para los cuatro experimentos se ajustaron valores muy similares y los perfiles iniciales se reprodujeron casi de forma exacta en todas las repeticiones para todas las estructuras estudiadas.

La *figura 25* muestra la distribución radial de vorticidad del monopolo inicial —al tiempo $t=2.75s$ — de los cuatro experimentos en los que el estado final fue la formación de un tripolo y sus correspondientes ajustes. Nuevamente los puntos son los valores de vorticidad medidos y los valores que aparecen en cada gráfica son los parámetros ajustados a la

ecuación del vórtice aislado dado por la ec. (2.15). En la *figura 26a* se presenta el perfil de un remolino aislado calculado a partir de los valores promedio de ω_o , R y α en los cuatro experimentos de la *figura 25*. Estos promedios aparecen junto con su desviación estándar en la *tabla III*.

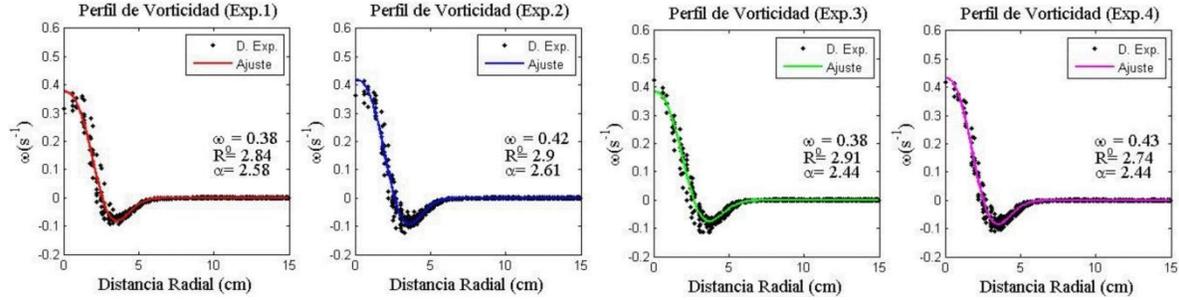


Fig. 25. Mediciones de la distribución de vorticidad radial para el monopolo inicial ($t=2.75s$) en los experimentos que condujeron a la formación de un tripolo. La línea continua representa el ajuste por cuadrados mínimos al perfil (2.15).

Este mismo proceso se realizó con los vórtices que evolucionan hasta triangulares y los dos dipolos (*figura 26 b y c*). Se puede apreciar que los cuatro perfiles de cada caso son muy similares por lo que podemos afirmar que estas estructuras son bastante reproducibles. El cambio de signo del perfil en todas las gráficas tiene lugar aproximadamente en $r= 3.2 \text{ cm}$. Esto se debe a que esta es la distancia que abarca por el imán, más exactamente, la región donde se percibe el campo magnético y, por lo tanto, el forzamiento.

Tabla III. Parámetros del perfil radial de vorticidad para los diferentes experimentos. En cada uno de los casos se calculan con el promedio de los cuatro experimentos realizados para cada estructura.

$t(s)$	Estructura	$\omega_o(s^{-1})$	$R(cm)$	α
4-5	Tripolo	0.4 ± 0.03	2.85 ± 0.08	2.52 ± 0.09
7-8	Vórtice triangular	0.5 ± 0.02	3.03 ± 0.13	2.65 ± 0.1
10-11	Par de dipolos	0.45 ± 0.03	3.12 ± 0.12	2.8 ± 0.18

De la *tabla III* se puede apreciar que tanto la vorticidad del núcleo ω_o como la escala radial R son relativamente similares en los tres casos. Tal parece que las inestabilidades y los diferentes estados a los que llega el monopolo inicial son independientes de estas dos cantidades. La escala R es un poco menor en el perfil del tripolo que en los otros dos, lo cual es debido al menor tiempo de forzamiento. El parámetro α crece ligeramente para tiempos de forzamientos más largos, siendo este el factor más significativo en la diferencia

entre estos tres casos. Esto corresponde a los valores que caracterizan al monopolo inicial, y surge por ello la siguiente pregunta, ¿cómo es la evolución temporal de estos parámetros? La siguiente sección discute este cuestionamiento.

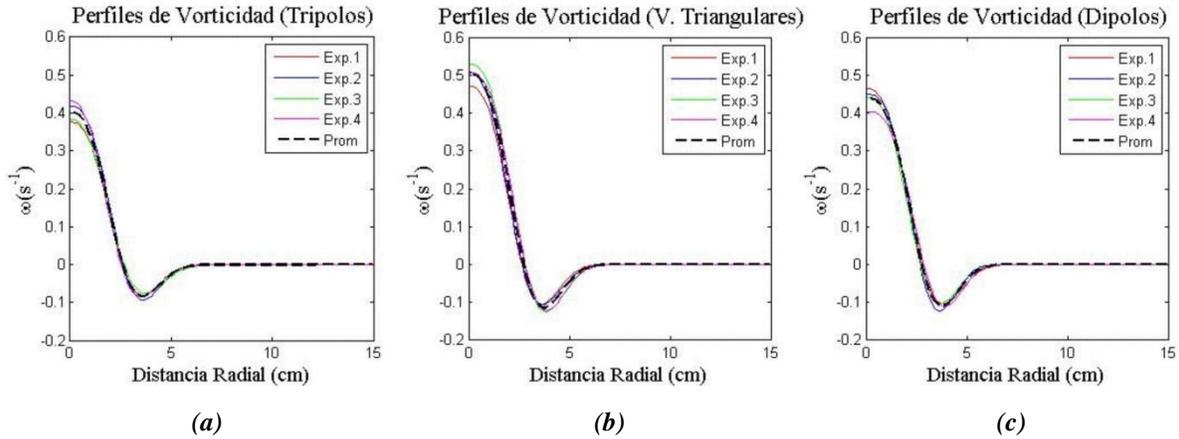
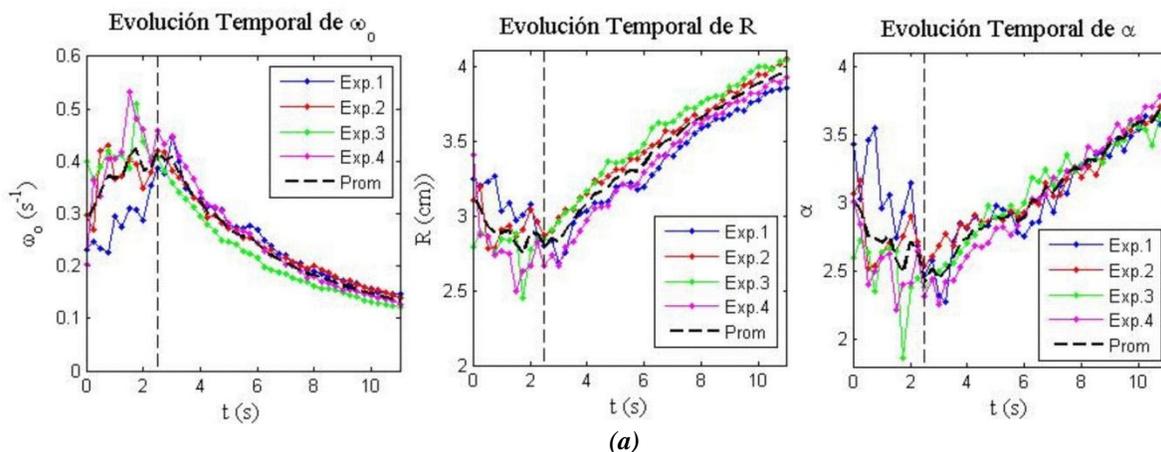


Fig. 26. Perfiles de vorticidad promedio del monopolo inicial cuya evolución inestable condujo a la formación de (a) tripolo, (b) vórtice triangular y (c) par de dipolos.

3.4.3 Evolución de los parámetros ω_0 , R y α

La figura 27 muestra la evolución de estos tres parámetros para todos los experimentos en los que se observó la formación de un tripolo y de un vórtice triangular. En todas las gráficas el intervalo de tiempo fue tomado desde el instante en que el forzamiento es apagado ($t=0$ s) y el tiempo en el cual el monopolo pierde su axisimetría ($t= 12$ s). Este análisis no puede ser obtenido en experimentos que llevaron al par de dipolos debido a que el remolino pierde su axisimetría bastante rápido, lo cual está directamente relacionado con el mayor tiempo de forzamiento.



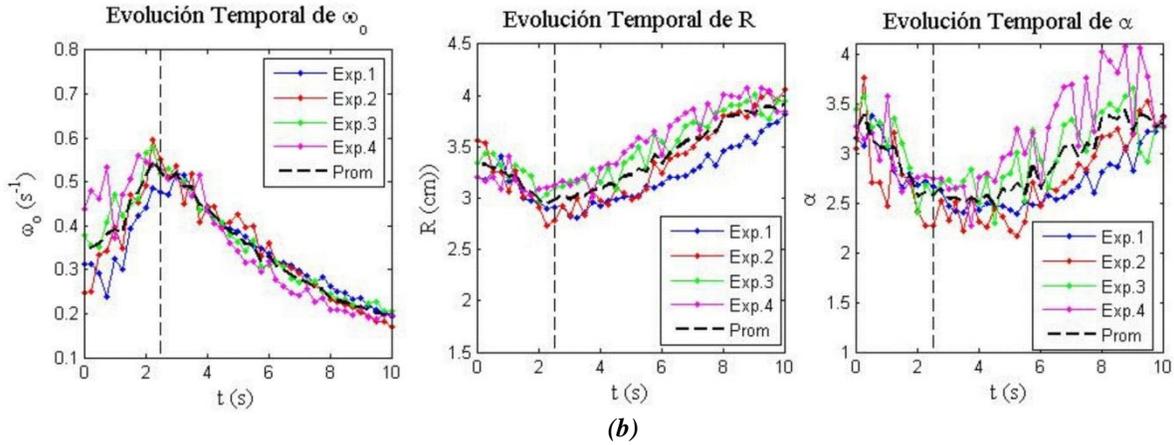


Fig. 27. Evolución de los parámetros ω_0 , R y α en los experimentos donde se observó la formación de (a) tripolos y (b) vórtices triangulares. El tiempo de evolución de estos parámetros es medido el instante en que se detiene el forzamiento hasta el tiempo en que el remolino pierde su axisimetría. La línea vertical punteada señala al tiempo $t=2.75s$.

Los valores de ω_0 , R y α obtenidos entre $0 s$ y $2.75s$ (línea vertical punteada) son espurios, pues son valores ajustados al perfil que no está completamente desarrollado. El crecimiento de R refleja que el remolino se está ensanchando. Al mismo tiempo su intensidad disminuye debido a la fricción de fondo, lo cual se ve reflejado en el decaimiento de ω_0 .

En ambas gráficas α presenta un crecimiento aparentemente lineal, lo cual puede explicar que se fortalezcan las perturbaciones que alteran el remolino inicial, dando paso a las diferentes estructuras multipolares finales. El análisis de estabilidad lineal hecho por Carton y McWilliams (1999) para evaluar la razón de crecimiento de las perturbaciones en función del parámetro α muestra que precisamente el crecimiento de α excita los diferentes modos azimutales m (ver sección 2.5.2) y una combinación de tales modos da paso a la formación de determinadas estructuras.

3.4.4 Decaimiento por fricción del fondo

En esta subsección se analiza el decaimiento del flujo en función del tiempo. Dado que se trabaja con capas muy delgadas ($H=1.2 cm$) se espera que dicho decaimiento se deba a la fricción del fondo. La energía cinética y la enstrofia—de aquí en adelante denominadas E y

E respectivamente— son cantidades globales, es decir, integradas sobre todo el dominio de interés, definidas para un fluido bidimensional como:

$$E = \frac{1}{2} \int_A (u^2 + v^2) dA, \quad (3.8)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_A \omega^2 dA, \quad (3.9)$$

Una ecuación que indique la evolución temporal de E y S puede ser obtenida multiplicando la componente horizontal de la ec. (2.1) por \mathbf{u}_H y a la componente vertical de la ec. (2.4) por ω —siendo $\mathbf{u}_H = (u, v)$ el campo horizontal y ω la componente vertical del vector vorticidad— e integrando en el dominio de superficie A . En forma adimensional las ecuaciones de evolución de E y S vienen dadas por:

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{2}{\text{Re}_\lambda} E - \frac{2}{\text{Re}} S, \quad (3.10)$$

$$\frac{DS}{Dt} = -\frac{2}{\text{Re}_\lambda} S - \frac{2}{\text{Re}} P. \quad (3.11)$$

donde $\text{Re}_\lambda = U/\lambda L$, es el número de Reynolds asociado a la fricción del fondo, $\text{Re} = UL/\nu$ es el número de Reynolds convencional y P denota la palinstrofia (Zavala Sansón, 2000), definida como:

$$P = \int_A (\nabla \omega)^2 dA. \quad (3.12)$$

Dependiendo de los valores de las variables experimentales, es posible determinar el orden de magnitud de los dos números de Reynolds adimensionales y con ello cuál de los términos en las ecs. (3.10)-(3.11) tiene mayor influencia en el decaimiento de E y S respectivamente. Considerando valores típicos de $U \approx 0.2 \text{ cm}$, $L \approx 3 \text{ cm}$, $\nu \approx 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, y $\lambda \approx 0.047 \text{ s}^{-1}$ se obtiene $\text{Re}^{-1} \approx 10^{-5}$ y $\text{Re}_\lambda^{-1} \approx 10^{-1}$, por lo que $\text{Re}_\lambda^{-1} \gg \text{Re}^{-1}$. Por lo tanto, se puede despreciar el último término en cada una de las ecuaciones anteriores obteniendo soluciones de la forma:

$$E = E_0 e^{-\frac{2}{\text{Re}_\lambda} t}. \quad (3.13)$$

$$S = S_0 e^{-\frac{2}{\text{Re}_\lambda} t}. \quad (3.14)$$

Esta aproximación muestra que el decaimiento de los vórtices en el laboratorio es debido principalmente a los efectos disipativos del fondo. La evolución de E y S para los experimentos en los que el monopolo evolucionó en cada una de las estructuras mencionadas en la *tabla III* es mostrada en la *figura 28*.

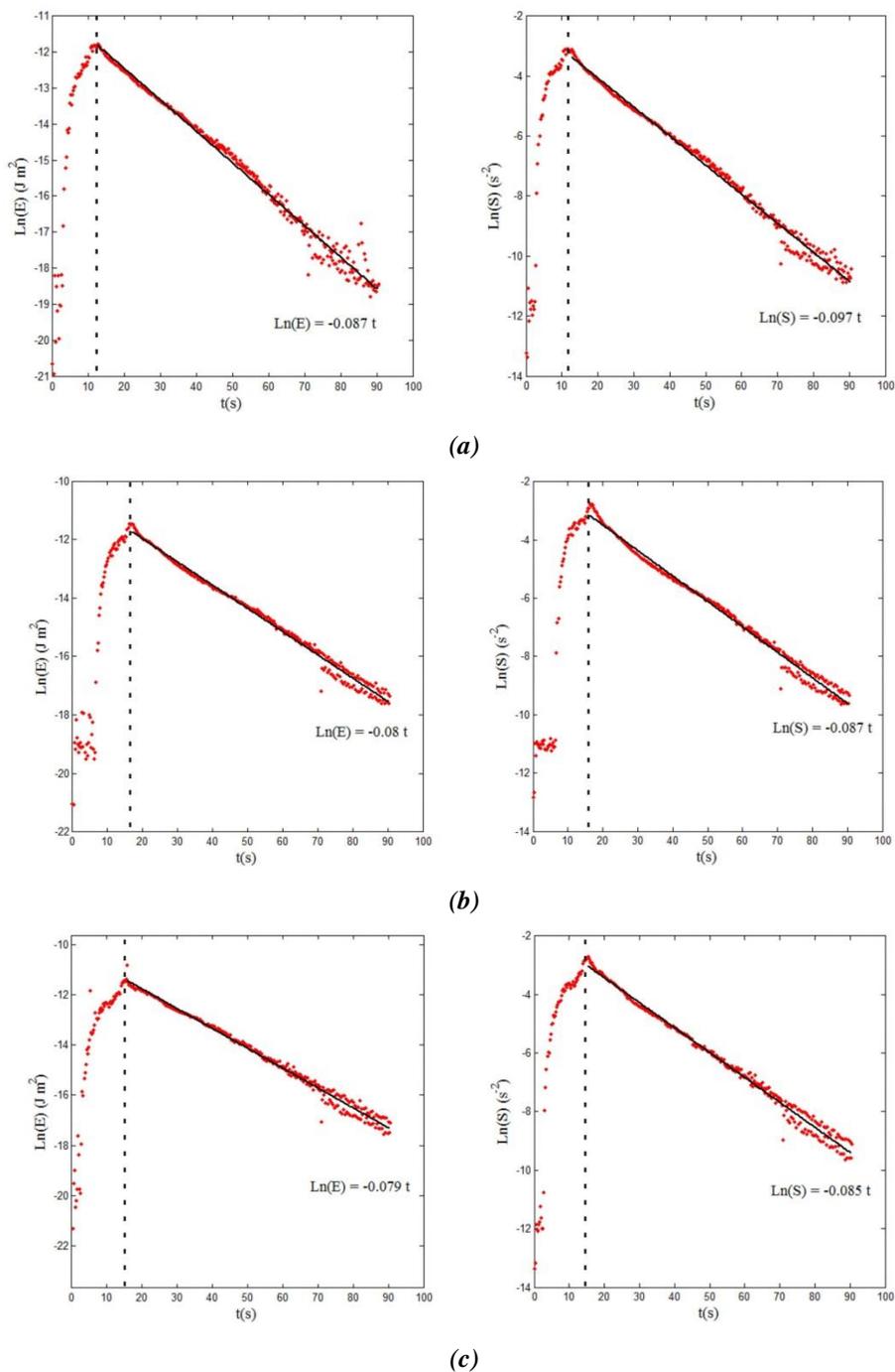


Fig. 28. Gráfica de la evolución temporal de $\text{Ln}(E)$ y $\text{Ln}(S)$ en experimentos donde el monopolo inicial evolucionó en (a) tripolo, (b) vórtice triangular y (c) par de dipolos. Los puntos corresponden a los datos medidos y la línea continua es un ajuste lineal.

Nótese que se grafican los logaritmos de E y S . Los valores de E y S anteriores a línea vertical punteada no tomados en cuenta para el análisis, puesto que son valores obtenidos aun cuando el forzamiento estaba actuando. La línea continua es un ajuste lineal hecho por cuadrados mínimos, de tal suerte que la pendiente, según las ecs. (3.13)-(3.14) escritas con dimensiones, corresponde a dos veces el coeficiente de fricción λ . En los tres casos la línea recta se ajusta bastante bien a los datos, por lo que se puede concluir que efectivamente el decaimiento de ambas cantidades es por acción de la fricción del fondo y es de carácter exponencial.

La *tabla IV* resume los resultados encontrados para el coeficiente de fricción a partir de las gráficas de E y S en todos los experimentos y su comparación con el coeficiente teórico λ , ec. (2.3), expuesto en el *capítulo 1*. Los coeficientes λ_E y λ_S son obtenidos del ajuste lineal en las gráficas de evolución de E y S respectivamente.

Tabla IV. Comparación entre el valor del coeficiente de fricción λ teórico, ec. (2.3), y el obtenido por medio del ajuste a las gráficas de energía cinética y enstrofia para los diferentes experimentos.

$t(s)$	Estructura	$\lambda(s^{-1})$	$\lambda_E(s^{-1})$	$\lambda_S(s^{-1})$
4-5	Tripolo	0.0436	0.0406 ± 0.08	0.0531 ± 0.09
7-8	Vórtice triangular	0.0436	0.0398 ± 0.13	0.0484 ± 0.1
10-11	Par de dipolos	0.0436	0.0412 ± 0.12	0.05 ± 0.18

3.5 Discusiones

Un método experimental basado en técnicas electromagnéticas es implementado para la generación de vórtices aislados. Este método utiliza la fuerza de Lorentz para inducir el movimiento del fluido en dirección azimutal, generando así un remolino axisimétrico aislado como estado inicial. A partir de mediciones experimentales del campo magnético se propone una expresión analítica para el mismo en términos de las funciones de Bessel de primera especie, ec. (3.2). La densidad de corriente propuesta según la ec. (3.3) permite obtener la distribución del campo eléctrico que actúa en el fluido conductor. Con estas dos se obtiene una expresión analítica para el campo de fuerzas dado por la ec. (3.7).

Este campo de fuerza (*ver figura 9*) es máximo en magnitud cerca del origen, y decae rápidamente con la distancia radial. Una región cercana al centro —de $r=0$ cm a $r=2$ cm— se ve afectada por el forzamiento electromagnético, y a partir de allí la magnitud del campo es prácticamente nula. Esto muestra una barrera virtual impuesta por el mismo campo de fuerza, es decir, se presenta una condición de forzamiento nulo a cierto radio, por lo que se crea vorticidad de signo contrario a la del centro. Por lo tanto, se genera un núcleo de vorticidad de un signo rodeado de una zona exterior de vorticidad de signo contrario, caracterizando así el estado inicial como un remolino aislado.

El forzamiento se aplica con un valor determinado de corriente y voltaje de $I=0.15$ A y $V= (15-17)$ v, respectivamente. Diferentes estructuras multipolares fueron observadas al variar el tiempo en el que se mantuvo encendido el forzamiento. Entre las diferentes estructuras multipolares observadas (*estados finales*) se obtuvieron de manera reproducible tripolos, vórtices triangulares y un par de dipolos. Una excepción es el caso del vórtice cuadrangular, el cual sólo se reprodujo en un par de ocasiones, por lo que no podemos garantizar su reproducibilidad.

El estado inicial que evolucionó a cada una de las estructuras mencionadas fue calculado a partir de los campos de vorticidad. Para ello se calcularon los parámetros ω_0 , R y α que lo definen de acuerdo a la ec. (2.15). Los parámetros ω_0 y R son muy similares en los tres resultados. La principal diferencia entre estas tres estructuras radica en el parámetro α , el cual aumenta ligeramente con el tiempo de forzamiento aplicado, siendo menor para el tripolo y con el valor más alto para el par de dipolos. El parámetro α en todas las situaciones tiende a crecer, y tal parece que este aumento es responsable de la inestabilidad que provoca la aparición de estructuras multipolares. La semejanza de R en los distintos experimentos es de esperarse, puesto que esta cantidad está directamente relacionada con el tamaño del imán. Toda esta información se resume en la *tabla II*.

La evolución temporal de R y ω_0 (*ver figura 27*) se puede comparar con expresiones analíticas que definen su evolución en términos de los efectos disipativos asociados a los

efectos viscosos. Una expresión general para el crecimiento del parámetro R en función de los efectos disipativos laterales es (Kloosterziel and van Heijst, 1992)

$$R(t) = \left(2\nu t + R_0^2\right)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Para el decaimiento de la vorticidad máxima por acción del fondo se propone:

$$\omega_0(t) = \omega_n e^{-2\lambda t}, \quad (3.16)$$

donde R_0 y ω_n son el radio del remolino y la vorticidad máxima al tiempo $t=0s$ respectivamente, ν es la viscosidad cinemática y λ el coeficiente de fricción explicado en la sección anterior. Estas expresiones son comparadas con los resultados obtenidos de un experimento para el cual un monopolo evolucionó en un vórtice triangular como se muestra en la *figura 26*.

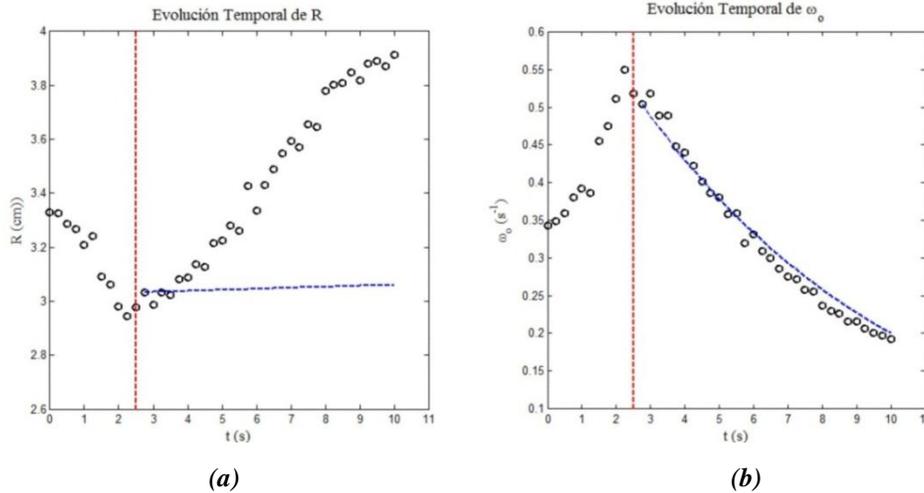


Fig. 29. Evolución del parámetro (a) R y (b) ω_0 para un monopolo que evoluciona a un vórtice triangular. Las líneas continuas corresponden a las ecs. (3.15) y (3.16).

La comparación de las ecs. (3.15)-(3.16) con los datos experimentales se hace a partir de la línea vertical punteada. La evolución temporal de R propuesta por la ec. (3.15) subestima los resultados experimentales ya que según estos el ensanchamiento del remolino es mucho mayor a medida que transcurre el tiempo. Por lo tanto, debe existir un efecto extra asociado quizá a la inestabilidad centrífuga que permita predecir este comportamiento. Por el contrario, el decaimiento exponencial de la vorticidad máxima expresado por la ec. (3.16) concuerda con los datos experimentales, utilizando el valor de λ obtenido

experimentalmente. Esto nos permite concluir una vez más que el decaimiento del flujo es principalmente debido a la fricción del fondo.

Finalmente, los efectos disipativos asociados a estos experimentos fueron estudiados a partir de la evolución temporal de E y S . De este análisis se puede concluir que el decaimiento de estas dos cantidades integrales es debido principalmente a los efectos de fricción del fondo. Este efecto fue parametrizado a través de una fricción de Rayleigh, proporcional al parámetro de fricción λ , el cual fue obtenido de un ajuste a las gráficas de evolución de E y S . El valor de λ obtenido de este ajuste se adapta de manera correcta al parámetro teórico dado por la ec. (2.3).

CAPÍTULO 4

VÓRTICES MULTIPOLARES EN SISTEMAS EN ROTACIÓN

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan experimentos realizados en sistemas en rotación para generar vórtices multipolares. La técnica utilizada es idéntica a la expuesta en el capítulo anterior, sólo que en esta ocasión el carácter bidimensional del fluido se asocia a la rotación del sistema de acuerdo al teorema de Taylor-Proudman (*ver sección 2.2*) Los monopolos inducidos por la fuerza de Lorentz de nuevo son aislados.

Algunas diferencias significativas entre estos experimentos y los explicados en el capítulo anterior radican en su dinámica y en la intensidad del campo magnético necesario para mover al fluido. Los efectos de rotación son simulados por medio de una mesa rotatoria (*ver montaje experimental en la figura 30*). La rotación del sistema es constante y no se consideran efectos relacionados con la topografía (*el fondo del tanque es plano*). Bajo estas consideraciones, las ecuaciones de gobierno en función de ω - ψ son dadas por las ecs. (2.12)-(2.13).

En relación a los efectos disipativos, nuevamente se cuenta con los efectos de fricción lateral y por fricción de fondo. Este último tiene lugar en la capa límite, conocida como capa Ekman (*Pedlosky, 1987*). Un modelo convencional usado en varios estudios previos incluye un término de fricción del fondo lineal, que depende del espesor de dicha capa (*Zavala Sansón, 2000*). El espesor de esta capa se expresa en términos de la viscosidad cinemática y el parámetro de Coriolis como:

$$\delta_E = \left(\frac{2\nu}{f} \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

donde $f=2\Omega$, siendo Ω la rapidez angular de la mesa rotatoria. La fricción del fondo lineal en la ecuación de vorticidad está dada por:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta_E}{H} f, \quad (4.2)$$

donde H es el espesor total de la capa de fluido. Por lo tanto, una clara ventaja de los experimentos con rotación es la posibilidad de reducir los efectos de fricción al aumentar H , manteniendo el carácter bidimensional del fluido.

En este tipo de experimentos se utiliza un imán diferente (cuadrado y de mayor intensidad), pues la cantidad de volumen de fluido que se mueve en estos experimentos es mucho mayor (la capa de fluido tiene una altura $H=10\text{cm}$). Por lo tanto, en la siguiente sección se muestra la gráfica de la distribución de campo magnético, y se discute sobre el campo de fuerzas generado. Posteriormente, se presentan algunos resultados cualitativos y condiciones iniciales para generar vórtices triangulares, cuadrangulares y pentapolares.

4.2 Montaje experimental

Los experimentos se realizan en un tanque de dimensiones $(0.65 \times 0.65 \times 0.5) \text{ m}$ montado encima de una mesa giratoria. El tanque es llenado con agua salada con una concentración de 33 g/l y puesto a rotar aproximadamente durante 30 min para que alcance un estado de rotación de cuerpo sólido. La columna de fluido forzada electromagnéticamente tiene una altura $H=10 \text{ cm}$. El valor de rapidez angular de la mesa es $\Omega=0.5 \text{ rad/s}$, lo cual corresponde a un parámetro de Coriolis $f = 1 \text{ s}^{-1}$. El periodo de rotación de la mesa es $4\pi \text{ s}$. El sentido del giro de la mesa rotatoria es en contra de las manecillas del reloj. En la parte superior del tanque se colocan dos lámparas que permiten visualizar la tinta fluorescente. El montaje experimental es mostrado en la *figura 30*.

Una diferencia con el montaje utilizado en los experimentos sin rotación es que el campo magnético es generado por un imán cuadrado de dimensiones $(5 \times 5 \times 3) \text{ cm}$. El campo magnético —con una intensidad máxima de $2.3 \text{ Teslas} = 2.3 \times 10^4 \text{ G}$ — apunta en la dirección vertical. La corriente eléctrica nuevamente se induce a través de electrodos

situados en las esquinas y en el centro. Las dimensiones de los electrodos son 12 cm de largo y 2 mm de diámetro.



Fig. 30. Imágenes de (a) la mesa en rotación utilizada para generar el ambiente rotante y (b) montaje experimental.

Nuevamente el campo eléctrico se considera estático, es decir, también toma la forma de la ec. (3.8). La corriente suministrada obviamente debe ser más intensa pues la cantidad de fluido que se mueve es mayor. El campo magnético generado por el imán cuadrado es medido de la misma forma expuesta en el capítulo anterior, usando una malla de 50×50 puntos. A partir de los datos medidos, se obtiene un perfil radial del campo magnético. Esta distribución es similar a la obtenida con el imán circular: se tiene una región central donde la intensidad es positiva y una región que rodea al centro en forma de anillo de intensidad negativa. En la *figura 31* se muestra la gráfica del campo magnético y su perfil radial.

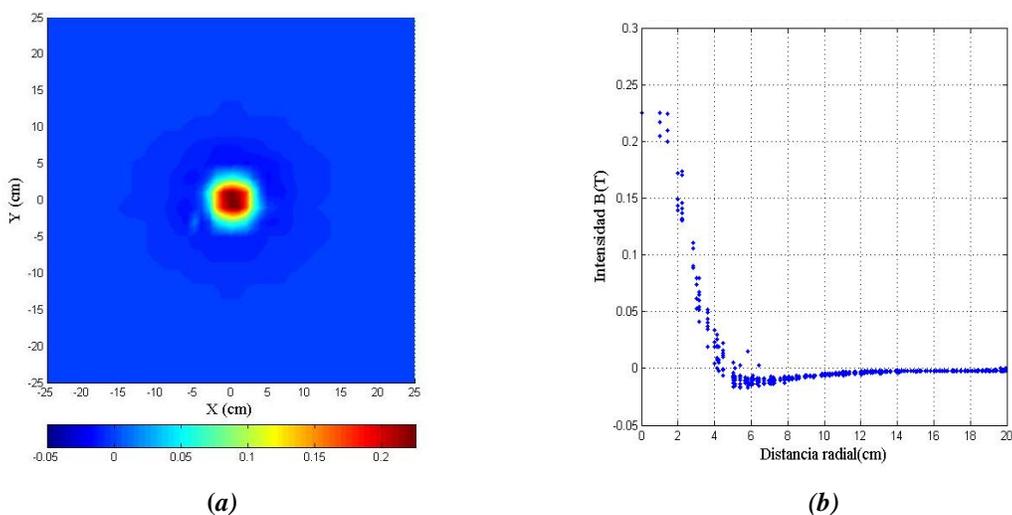


Fig. 31. (a) Superficies del campo magnético generado por el imán cuadrado y (b) perfil radial de campo magnético. La magnitud del campo está medida en Teslas. En la primera gráfica, los ejes x y y corresponden a las dimensiones horizontales del tanque.

El campo magnético fue medido a una altura fija $z = 2\text{cm}$ medidos a partir de la superficie del imán. De la forma de las superficies se puede afirmar que el campo es axisimétrico. Una pequeña anomalía cercana a la región del centro puede estar relacionada a los errores experimentales en la medida. Tomando como punto de comparación el valor máximo del campo magnético (en el centro), la magnitud del campo magnético generado por el imán cuadrado es aproximadamente 25 veces mayor que con el imán circular.

Los remolinos generados son anticiclónicos, es decir, giran en sentido contrario al sistema en rotación. Esta configuración puede ser lograda por el sentido de la densidad de corriente eléctrica o bien por la polaridad en la que se encuentre dirigido el campo magnético. Para este caso, la corriente eléctrica debe estar dirigida del electrodo central hacia las esquinas.

4.3 Resultados experimentales

En esta sesión de experimentos la estrategia consistió en fijar el tiempo del forzamiento y variar los valores de intensidad de corriente y del voltaje suministrados por la fuente, y así poder identificar cómo se comportaba el fluido ante los diferentes impulsos aplicados. Al igual que en los experimentos sin rotación, como primer paso se identificaron los estados iniciales y finales del remolino. El estado inicial fue un monopolo anticiclónico axisimétrico. El estado final nuevamente dependió del impulso aplicado.

De manera experimental se encontraron valores de intensidad de corriente y voltaje para los cuales se generó una estructura con más de dos satélites. Por ejemplo, vórtices triangulares se generaron con un intensidad de corriente $I = 1.7\text{ A}$, un voltaje $V = 11\text{ v}$ y un tiempo de forzamiento $t_f = 3.5\text{ s}$. Por tanto, se escoge este tiempo como el tiempo de forzamiento fijo en todos los experimentos. La *tabla V* reúne toda la información cualitativa de los parámetros y estructuras multipolares observadas.

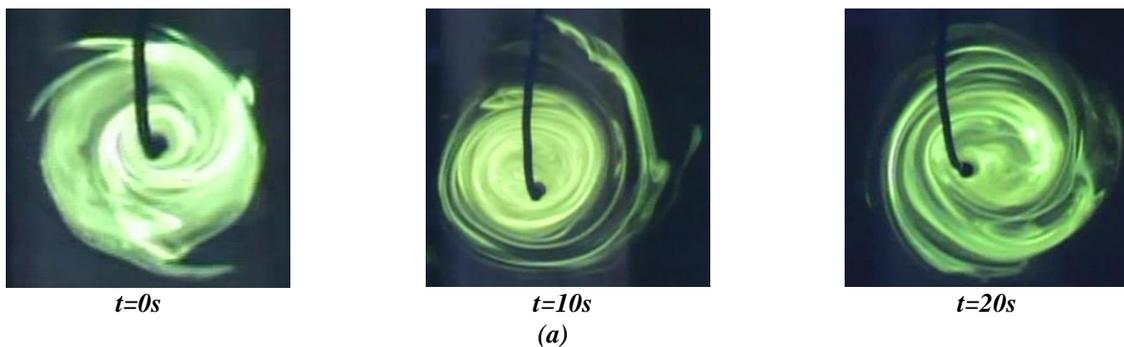
Tabla V. Intensidades de corriente y estructuras encontradas. Los valores de intensidad de corriente y voltaje varían, mientras el tiempo de forzamiento $t_f = 3.5$ s se mantiene constante en todos los experimentos.

I (A)	V (v)	Estructura
0.2	2.1	Vórtice axisimétrico ligeramente deformado
0.3	2.1	Tripolo compacto
1.3	9.5	Vórtice cuadrangular
1.7	11	Vórtice triangular
0.8	6.7	Vórtice pentapolar
2	15	Tripolo alargado
2.5	17	Par de dipolos

A continuación se describirán cada una de las estructuras descritas en la tabla anterior mostrando imágenes del remolino inicial y su evolución hasta el surgimiento de la estructura multipolar. A diferencia de los resultados obtenidos en sistemas sin rotación esta información es únicamente cualitativa, es decir, no se cuenta con análisis de *PIV* para cada uno de los casos presentados.

4.3.1 Pequeños y grandes impulsos

Al iniciar el experimento una región de fluido cercana al electrodo del centro es marcada con tinta. Ante pequeños impulsos ($I < 0.5$ A) el remolino se comporta de dos posibles maneras: pierde ligeramente su simetría axial y no llega a ser inestable, o evoluciona en un tripolo. La evolución del remolino en estos dos casos es mostrada en la *figura 32*.



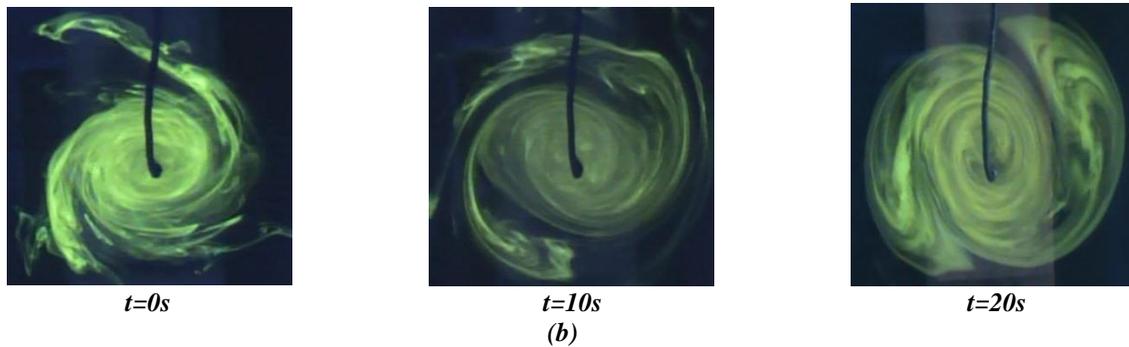


Fig. 32. Evolución de un vórtice monopolar anticiclónico generado a partir de impulsos pequeños. Dos posibles comportamientos fueron observados: (a) una ligera deformación del remolino o (b) la evolución en un tripolo. El tiempo de evolución está indicado en la parte inferior de cada imagen.

Las imágenes que describen la evolución del remolino ante grandes impulsos ($I > 2 A$) son mostradas en la *figura 33*. En estos casos el remolino evoluciona a un tripolo o dos dipolos.

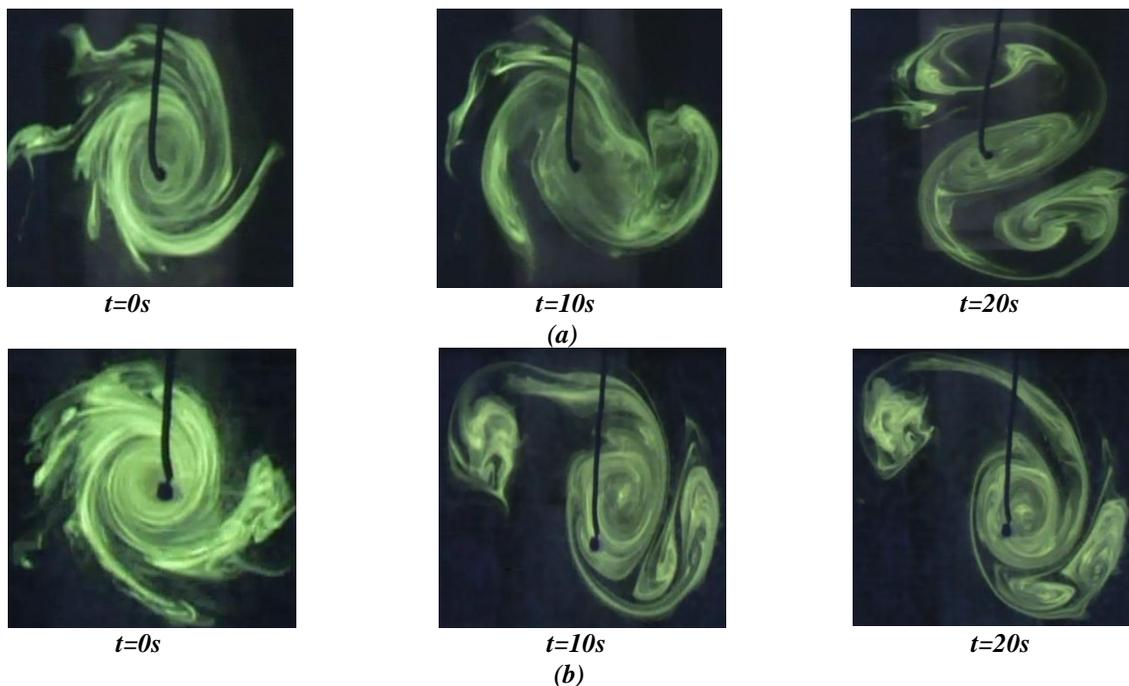


Fig. 33. Evolución de un vórtice monopolar anticiclónico generado a partir de impulsos grandes. Los comportamientos observados son: (a) el remolino evoluciona en un tripolo o (b) se rompe en dos dipolos. El tiempo de evolución está indicado en la parte inferior de cada imagen.

4.3.2 Vórtice triangular

La *figura 34* muestra la evolución de un vórtice monopolar anticiclónico aislado en un vórtice triangular, según las condiciones de forzamiento de la *tabla V*. El estado inicial es tomado al tiempo en el cual se suspende el forzamiento $t=0s$. Al tiempo $t = 14 s$ el núcleo

comienza adquirir una forma triangular y al anillo exterior le surgen tres protuberancias las cuales se desarrollan dos segundos después en $t = 16 \text{ s}$. A los 18 s se desarrolla completamente el vórtice triangular. Todo el tiempo el movimiento del núcleo es anticiclónico, mientras el movimiento de los satélites es ciclónico. La estructura persiste aproximadamente por 3 s rotando en forma de cuerpo sólido en dirección anticiclónica, hasta que al tiempo $t = 22 \text{ s}$ uno de los satélites es absorbido por otro y la forma triangular del núcleo empieza a modificarse y eventualmente tiende a degradarse a una forma tripolar en $t = 40 \text{ s}$.

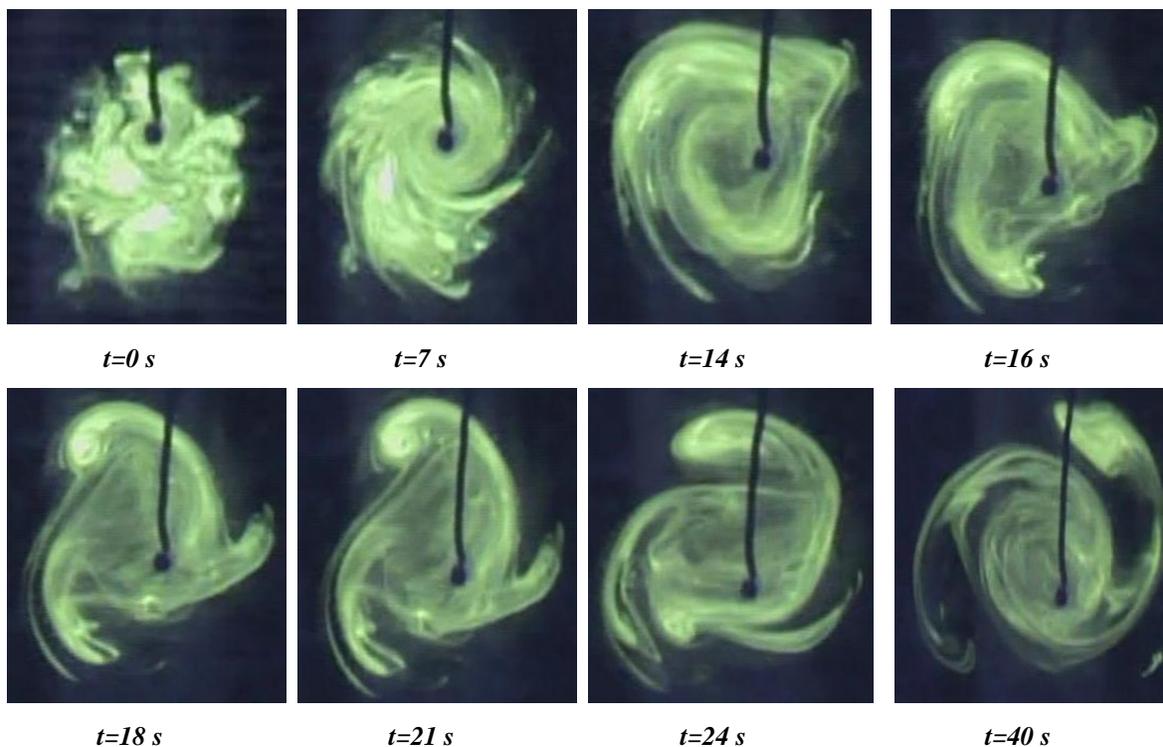


Fig. 34. Evolución de un vórtice monopolar anticiclónico generado con una intensidad de corriente $I = 1.7 \text{ A}$, un voltaje $V = 11 \text{ v}$. El tiempo de forzamiento fue $t = 3.5 \text{ s}$. Los tiempos de evolución son mostrados en la parte inferior de cada imagen.

4.3.3 Vórtices cuadrangulares y pentagonales

De igual manera se lograron encontrar forzamientos intermedios que permitieran la formación de estructuras más complejas como lo son vórtices cuadrangulares y pentagonales. En la *figura 35* se muestran resultados experimentales de la evolución de dos vórtices monopoles en estos tipos de estructuras.

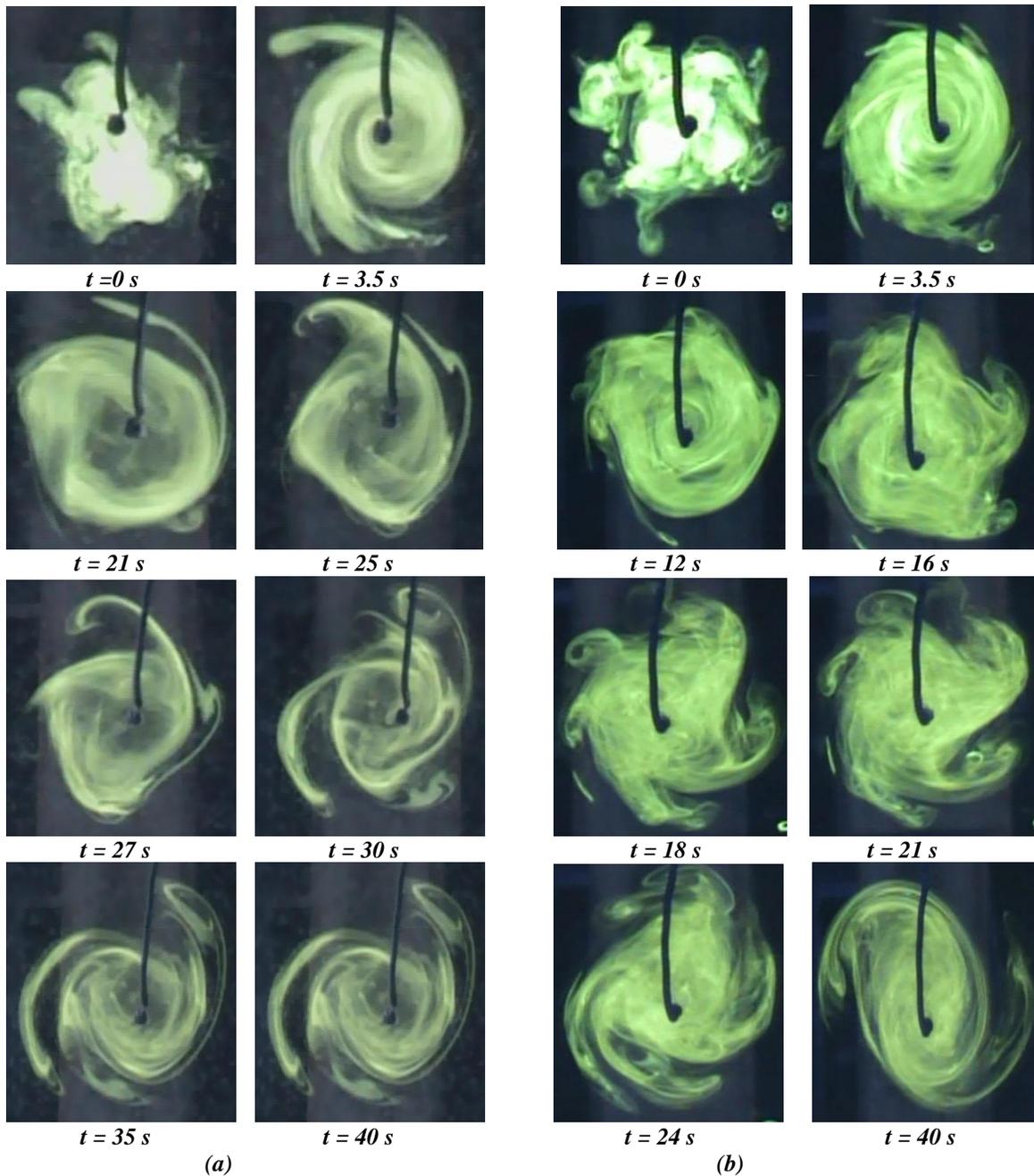


Fig. 35. Evolución de un vórtice monopolar generado con (a) $I = 1.3 \text{ A}$ y $V = 9.4 \text{ v}$ y (b) $I = 0.8 \text{ A}$ y $V = 6.7 \text{ v}$. El tiempo de evolución está indicado en la parte inferior de cada imagen.

Con una intensidad de corriente $I = 1.3 \text{ A}$ y un voltaje $V = 9.4 \text{ v}$, se forma una estructura con el núcleo en forma de cuadrado rodeado de cuatro satélites— vórtice cuadrangular— Este se observa en $t = 27 \text{ s}$ y perdura alrededor de 3 segundos (*figura 32.a*). Al tiempo $t = 30 \text{ s}$ dos satélites comienzan a fusionarse. Después de esto la estructura sigue en movimiento y

en $t=40s$ se transforma en un tripolo. El vórtice pentagonal se forma en $t = 18 s$ con valores de $I = 0.8 A$ y $V = 6.7 v$ (*figura 32.b*).

Un resultado interesante observado en casi todos los experimentos (con excepción de corrientes mayores a $2A$) es que el estado final al que evolucionan todas estas estructuras es siempre un tripolo anticiclónico. En la literatura citada no ha sido mencionado antes la generación de un tripolo anticiclónico con otras técnicas de generación de manera tan reproducible.

4.5 Discusiones

Esta sección describe un trabajo cualitativo desarrollado en una estancia en el *Instituto de Meteorología y Astronomía (IAM)* adscrito a la *Universidad de Guadalajara*, bajo la supervisión del *Dr. Raúl Gómez Cruz*. Se realizaron experimentos con la misma técnica electromagnética expuesta en el *capítulo 3* para generar remolinos aislados en sistemas en rotación. El montaje experimental es idéntico, pero ahora los experimentos son realizados en una mesa rotatoria (*figura 30*) y la capa de fluido tiene una altura de $H=10cm$. La dinámica de estos remolinos nuevamente se considera bidimensional, provocada por la rotación del sistema. Un estudio cuantitativo en el que se utiliza este método para generar vórtices aislados fue recientemente publicado (*Cruz Gómez et al., 2013*).

La estrategia adoptada en esta sesión fue fijar el tiempo de forzamiento ($t_f=3.5 s$) y modificar la intensidad de corriente. Dependiendo del forzamiento electromagnético se pueden obtener diferentes estructuras. Para impulsos pequeños el monopolo inicial apenas se deforma un poco o se convierte en un tripolo compactado. Para impulsos grandes se transforma en un tripolo o se rompe en dos dipolos que se alejan del centro. Para diferentes valores de intensidad de corriente se observaron algunas estructuras multipolares, entre las cuales se pueden definir un vórtice triangular, cuadrangular y hasta pentagonal. Toda esta información está resumida en la *tabla V*. Sin embargo, no se puede asegurar con certeza

que efectivamente se trata estructuras multipolares, pues para ello faltan análisis cuantitativos y medidas del campo de velocidad obtenidas a partir de *PIV*.

Las estructuras multipolares observadas no se mantuvieron estables sino que todas fueron un estado transitorio. En todos los experimentos el estado final fue siempre un tripolo anticiclónico (núcleo de vorticidad negativa). Este es un resultado novedoso, puesto que con diferentes técnicas de generación (*van Heijst y Clercx, 2009*) se había observado que un monopolo anticiclónico evoluciona y rompe en dos dipolos en lugar de evolucionar en esta estructura estable como lo es el tripolo.

CAPÍTULO 5

SIMULACIONES NUMÉRICAS

5.1 Introducción

El propósito principal de las simulaciones numéricas en esta sección es comprobar si las variables físicas resueltas numéricamente son capaces de describir la dinámica observada en los experimentos o no. Además, el análisis numérico permite explorar los resultados para diferentes tipos de fricción y para un amplio rango del número de Reynolds.

Las simulaciones numéricas están basadas en un esquema de diferencias finitas. El modelo resuelve las ecuaciones de gobierno para un fluido bidimensional escritas en términos de la vorticidad y de la función de corriente, ecs. (2.12)-(2.13). Este modelo resuelve la ecuación de Poisson a partir de una condición inicial para la vorticidad, y con ello resuelve la ecuación de evolución de vorticidad. El modelo fue inicialmente desarrollado por Orlandi y Verzicco (*Orlandi, 1990*) para fluidos en dos dimensiones. Extensiones de este modelo han sido hechas por van Geffen y van Heijst (*1998*) para incluir efectos de rotación y por Zavala Sansón (*2000*) para incluir efectos de fricción no lineal—asociados a la teoría de la *capa de Ekman* del fondo—y topografía del fondo variable. Mayores detalles del modelo numérico pueden ser encontrados en la tesis doctoral de *Zavala Sansón (2000)*.

En este capítulo se exponen algunos resultados de simulaciones idealizadas sin fricción del fondo para diferentes valores del número de Reynolds y se comparan con los resultados obtenidos por Carnevale et al. (*2011*) con otro modelo numérico (*ver sección 5.2*). Además, se realizaron las mismas simulaciones anteriores pero incluyendo efectos de disipación del fondo, por medio de la fricción de Rayleigh. En las simulaciones se escogió como estado base a monopolos aislados caracterizados por los parámetros ω_o , R y α expuestos en el *capítulo 3*.

Posteriormente se realizaron simulaciones numéricas de los experimentos, es decir, bajo las mismas condiciones de laboratorio, para investigar si la dinámica bidimensional resuelta por el modelo es suficiente para reproducir las estructuras multipolares encontradas (ver sección 5.3).

5.2 Simulaciones de remolinos en función de Re

En esta sección se expondrán los resultados de simulaciones numéricas en las cuales no se incluyeron efectos de fricción del fondo. Los efectos de disipación están asociados únicamente a la fricción lateral, los cuales se manipularon a través del número de Reynolds (Re) definido en la sección 3.4.3. Los valores de las escalas características U y L fueron iguales a la unidad y se mantuvieron constantes en todas las simulaciones, de tal suerte que Re aquí es únicamente función de la viscosidad. Los resultados se presentan en forma adimensional.

En todas las simulaciones se utilizó un dominio cuadrado de 10×10 discretizado con una malla de 257×257 puntos, así como condiciones de no deslizamiento sobre las fronteras laterales. El paso de tiempo con el que se integró la ec. (2.12) fue $dt=0.05$. Efectos de rotación no son considerados, así como tampoco topografía variable en el fondo. El tiempo de la simulación fue de $t=180$. Un punto importante de estas simulaciones es que el estado base tiene que ser alterado con perturbaciones axisimétricas definidas alrededor del remolino y explicadas con mayor detalle en la siguiente sección. De no ser así el monopolo simplemente decae por los efectos de fricción lateral.

5.2.1 Perturbaciones axisimétricas

Diferentes tipos de perturbaciones tienen que ser incluidas en el modelo numérico para poder observar estructuras inestables, de lo contrario el monopolo conservará su simetría axial. En esta serie de simulaciones se eligen perturbaciones axisimétricas, las cuales se suman al perfil de vorticidad inicial y están definidas como:

$$P_1(r) = \eta \text{Exp} \left(\frac{-\left(\alpha (r/R)^\alpha - \varepsilon\right)^2}{\beta} \right), \quad (5.1)$$

donde η es una amplitud aleatoria comprendida en el intervalo $(-\eta_0, \eta_0)$, ε permite focalizar la perturbación en un anillo de cierto radio y β permite ajustar el ancho de la perturbación (Carnevale et al., 1993).

Este tipo de perturbaciones deben ser situadas en una región fuera del núcleo del remolino, pues como se explicó en el capítulo 1, de acuerdo al teorema de Rayleigh la región donde se cumple la condición de inestabilidad está comprendida a partir del radio donde la vorticidad cambia de signo (ver sección 2.6). La figura 36 muestra un ejemplo de este tipo de perturbaciones sobre un vórtice aislado con $\omega_0=1$, $R=1$ y $\alpha=2$. La perturbación está caracterizada por un factor $\varepsilon=2$, $\beta=0.1$ y $\eta_0=1$.

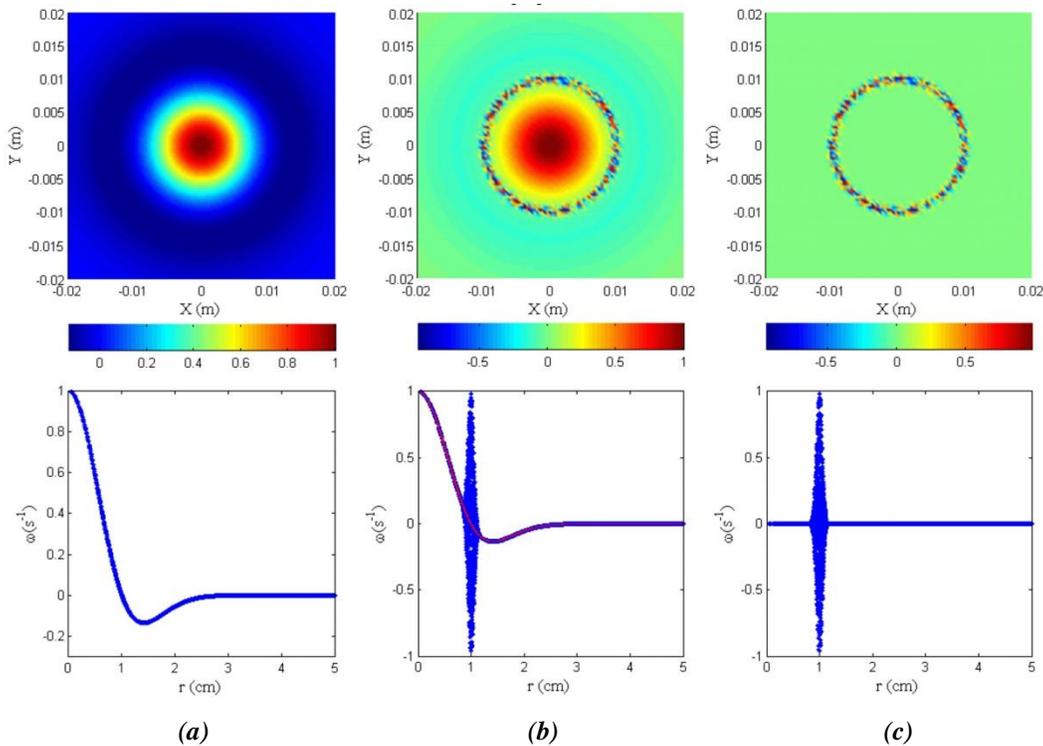


Fig. 36. Superficies de vorticidad y perfiles radiales de (a) vórtice aislado (estado base), (b) monopolo perturbado y (c) la perturbación aleatoria. Se puede observar que la perturbación se encuentra focalizada en un radio donde el valor de la vorticidad es nulo, en $r=1$.

5.2.2 Resultados

Como estado base fue tomado un monopolo aislado definido por los valores $\omega_0=1$, $R=1$ y el parámetro α estuvo comprendido entre 2 y 5. Las simulaciones se realizaron para cinco Re diferentes comprendidos entre 500 y 10k (k para denotar 1000), para un total de 25

simulaciones. Una vez que el remolino se inestabiliza, su evolución mostró una clara tendencia en función de Re y α . Los resultados se resumen en la *figura 37*.

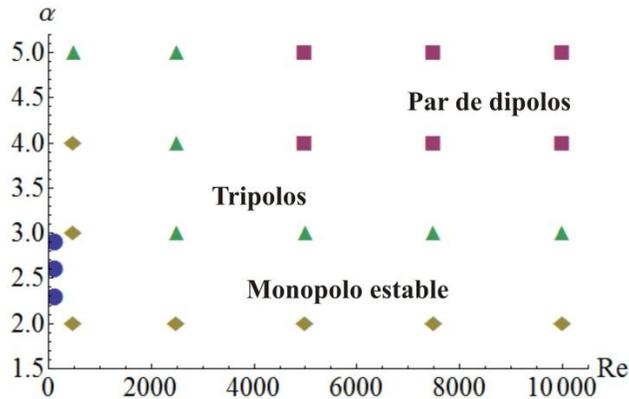


Fig. 37. Diagrama Re vs. α del estado final ($t=180$) observado en las simulaciones. Los cuadrados representan simulaciones cuyo estado inestable generó un par de dipolos, los triángulos tripolos y los rombos monopolos estables. Los círculos son los valores encontrados en los experimentos de laboratorio (ver sección 5.3).

Se distinguen tres regiones en la gráfica. Para valores altos de Re y $\alpha \geq 4$ se observó la formación de un par de dipolos moviéndose en dirección opuesta entre sí. Las simulaciones que corresponden a la zona central de la gráfica mostraron la formación de tripolos. En la tercera región el resultado fue el de un monopolo estable. Nótese que independientemente del valor de Re , para $\alpha=2$ el monopolo fue estable, es decir, sólo se observó un decaimiento en la magnitud de la vorticidad. El mismo resultado se observó para $\alpha < 5$ y $Re=500$. La *figura 38* muestra el estado final observado en los experimentos numéricos presentados para $Re = 10k$ y diferentes valores de α .

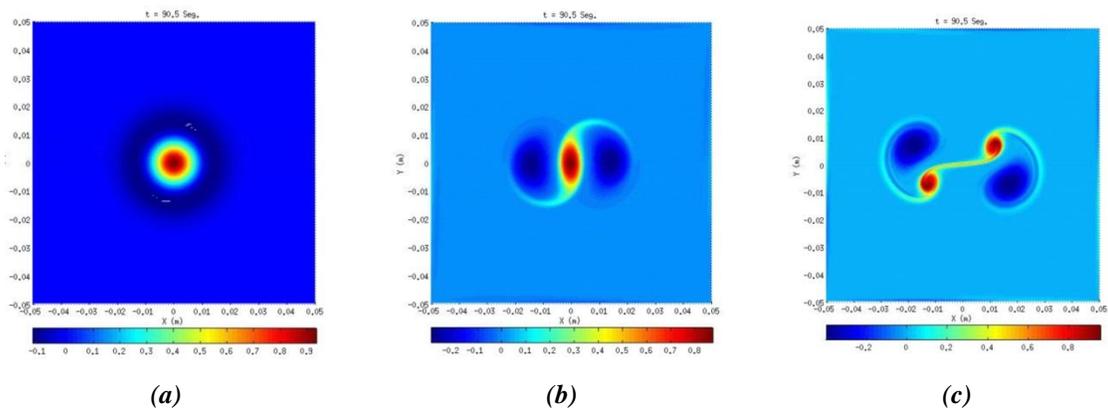


Fig. 38. Superficies de vorticidad al tiempo $t=95$ de los estados finales de un monopolo aislado definido por $\omega_0=1$ y $R=1$ y $Re=10k$ para (a) $\alpha=2$, (b) $\alpha=3$ y (c) $\alpha=4$. El monopolo fue alterado con una perturbación aleatoria de amplitud $\eta_0=0.2$.

Adicionalmente se realizaron las mismas simulaciones incluyendo fricción lineal de fondo. El parámetro importante es el número de Reynolds asociado a este tipo de fricción Re_λ (ver sección 3.4.3). Dado que las escalas U y L son iguales a la unidad, Re_λ es función únicamente del coeficiente de fricción λ . Al usar el valor de λ experimental se obtuvo que $Re_\lambda^{-1} \gg Re^{-1}$, por lo que en estas simulaciones el efecto disipativo del fondo es dominante.

Los resultados obtenidos en estas nuevas simulaciones son prácticamente similares a las simulaciones sin fricción explicadas anteriormente. La única diferencia notable es que la vorticidad decae más rápido. La gráfica $Re-\alpha$ (figura 37) presenta las mismas zonas características, es decir, se evidencia la formación de tripolos y el par de dipolos que se autopropagan fuera del centro. Además, para $\alpha=2$ se observa también que los monopolos permanecen estables. En otras palabras, la fricción del fondo lineal no tiene influencia en el comportamiento inestable de los remolinos.

5.3 Simulaciones de remolinos experimentales

En esta sección se presentan los resultados de simulaciones numéricas en términos dimensionales utilizando los parámetros experimentales. El objetivo es determinar si la dinámica bidimensional es suficiente para reproducir las estructuras multipolares observadas en el laboratorio. En esta sesión de experimentos los efectos disipativos están dados por la fricción lateral y la del fondo. Esta última es una fricción lineal tipo Rayleigh, caracterizada por el coeficiente de fricción dado en la ec. (2.3). Las perturbaciones de nuevo son aleatorias y concentradas en el radio donde la vorticidad es nula.

Se simularon tres experimentos reproducibles en el laboratorio, cuyos parámetros del remolino inicial fueron mostrados en la *tabla III*. El número de Reynolds es aproximadamente $Re \approx 120$. Tomando en cuenta valores medidos de α , estas simulaciones se pueden ubicar en la gráfica $Re-\alpha$ de la *figura 37* (representada por círculos). Evidentemente, en la región que comprende los valores de Re y α de estas simulaciones no se observa la formación de estructuras multipolares, a diferencia de los experimentos de laboratorio. Por consiguiente, los resultados de las simulaciones numéricas están en

desacuerdo con los obtenidos experimentalmente. Según los resultados numéricos todos los monopolos aislados generados en los experimentos deberían evolucionar de manera estable, conservando su simetría axial y sólo decayendo por la acción del fondo. Una conclusión importante, por lo tanto, es que el modelo bidimensional no reproduce las estructuras multipolares obtenidas experimentalmente.

Una posible causa de esta discrepancia es la forma de las perturbaciones utilizadas. Para analizar esta cuestión se plantearon dos estrategias para generar comportamientos diferentes a los ya descritos. La primera consiste en aumentar la amplitud de la perturbación aleatoria (*ver sección 5.3.1*). Esta amplitud tiene que ser mayor que el máximo de vorticidad del estado base. El otro método es perturbar directamente los diferentes modos azimutales asociados a las perturbaciones barotrópicas. Para esto, un nuevo tipo de perturbación es adicionada al flujo base (*ver sección 5.3.2*). Todo esto será tratado con mayor detalle en las siguientes secciones.

5.3.1 Perturbaciones aleatorias altas

Los experimentos numéricos llevados a cabo en esta sección tienen la particularidad que la amplitud de las perturbaciones aleatorias es mayor que el máximo de vorticidad del remolino inicial. Los parámetros ω_o , R y α incluidos en el modelo y que definieron el estado base nuevamente fueron los obtenidos experimentalmente y mostrados en la *tabla III*. Obviamente, los resultados obtenidos bajo este tipo de condiciones no se encuentran dentro del régimen de estabilidad lineal (*ver sección 2.5.2*).

La *figura 39* muestra el estado inicial de un monopolo aislado descrito por los parámetros $\omega_o=0.5 \text{ s}^{-1}$, $R=3 \text{ cm}$ y $\alpha=2.8$ y su evolución al tiempo $t=10 \text{ s}$. La amplitud de las perturbaciones aleatorias sumadas al estado base fueron 3, 4 y 5 veces más grandes que el máximo de vorticidad del remolino. La perturbación fue situada en el radio donde ocurre el cambio de signo de la vorticidad, el cual según la ec. (2.25) para este caso corresponde a $r^*=2.6 \text{ cm}$. Un resultado interesante en estas simulaciones es que independientemente de la amplitud de la perturbación, el remolino inicial siempre evoluciona a un vórtice triangular. La única diferencia notable radica en la disminución de la vorticidad, la cual decae más rápido en el caso de menor amplitud de la perturbación.

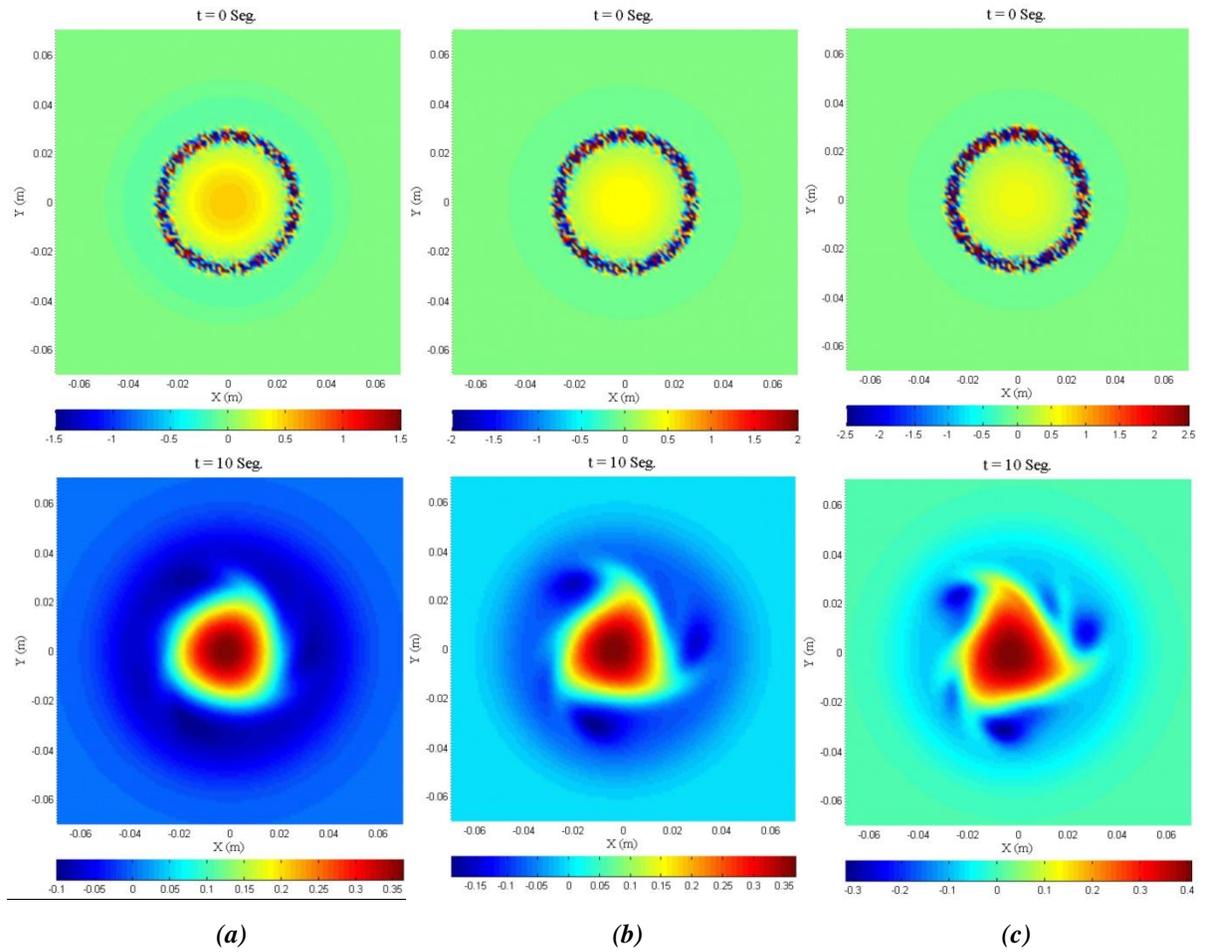
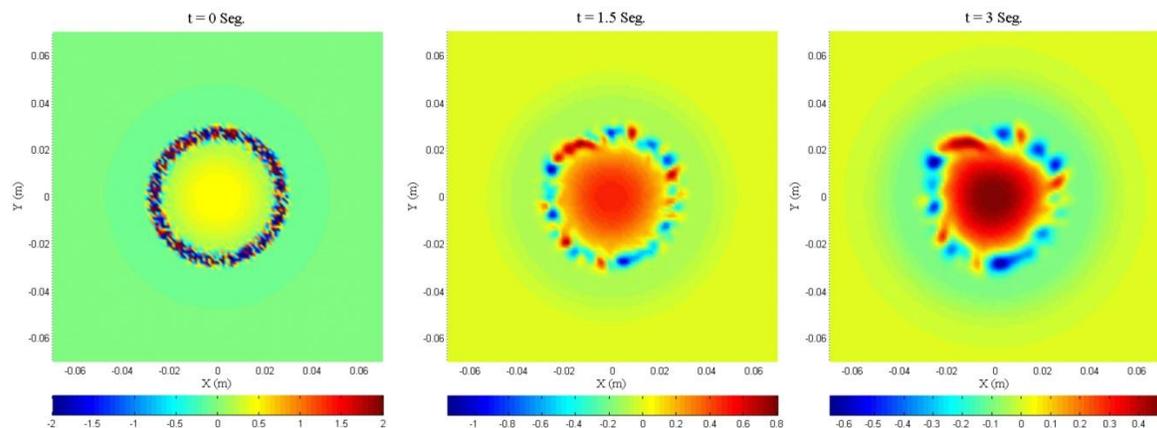


Fig. 39. Evolución de un monopolo axisimétrico perturbado de forma aleatoria con tres amplitudes η_0 diferentes, (a) $\eta_0=1.5$, (b) $\eta_0=2$ y (c) $\eta_0=2.5$. La perturbación fue situada en $r^*=2.6\text{cm}$.

A diferencia de los experimentos de laboratorio, el incluir la perturbación no sólo garantiza la evolución inestable del remolino, sino que pierda su simetría mucho más rápido (aproximadamente en $t=5s$, mientras que en el laboratorio fueron $t=12s$). La *figura 40* muestra la evolución completa del remolino con la perturbación de amplitud $\eta_0=2$.



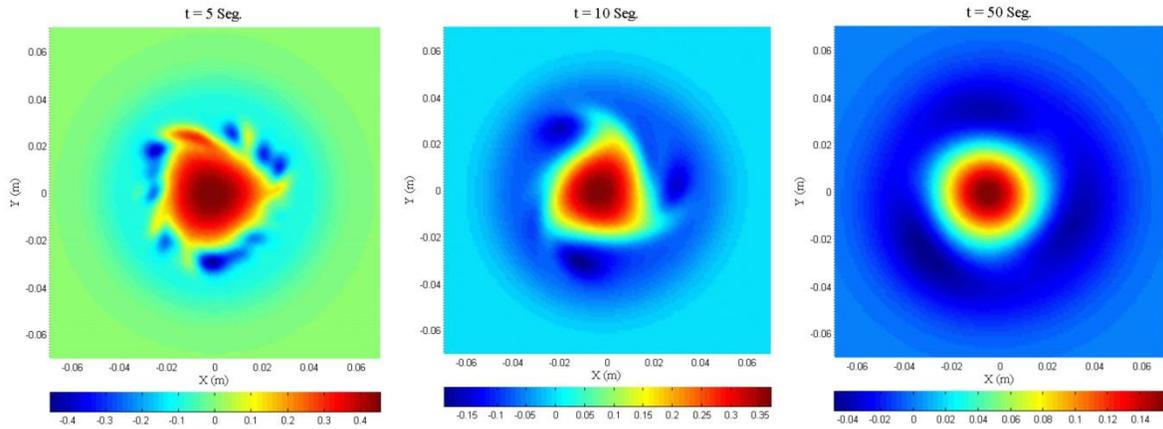


Fig. 40. Evolución de un monopolo axisimétrico perturbado de forma aleatoria. La amplitud de la perturbación es $\eta_0=2$. En este experimento el valor del número de Reynolds fue $Re=120$. El tiempo de evolución se muestra en la parte superior de cada gráfica.

El estado inicial del remolino perturbado tiene concentrado el máximo de vorticidad en $r^*=2.6cm$. Este máximo de vorticidad disminuye, y en $t=3s$ el decaimiento es superior a la mitad de su valor inicial. En $t=5s$ el remolino se hace inestable. Este efecto se refleja cuando el núcleo empieza a adquirir forma triangular, y algunas manchas de vorticidad negativa se concentran en tres regiones alrededor del núcleo. En $t=10s$ se desarrolla completamente el vórtice triangular. Esta configuración se mantiene durante el tiempo restante de la simulación.

El proceso de la inestabilidad observado en esta simulación es diferente al de los experimentos de laboratorio. La vorticidad positiva del anillo aleatorio perturbado se fusiona con el núcleo y fruto de esta interacción se produce la deformación del mismo. La vorticidad negativa se acumula en tres sectores diferentes alrededor del núcleo, formando así la estructura triangular mostrada en la *figura 40*. Para mostrarlo, se analiza la evolución temporal del perfil radial de vorticidad de manera idéntica a los experimentos de laboratorio. A este perfil se le ajusta la ec. (2.15) por cuadrados mínimos para encontrar la forma en que evolucionan los parámetros ω_o , R y α . Este ajuste es realizado hasta que el remolino pierde su simetría axial. La *figura 41* muestra la evolución temporal de estos parámetros.

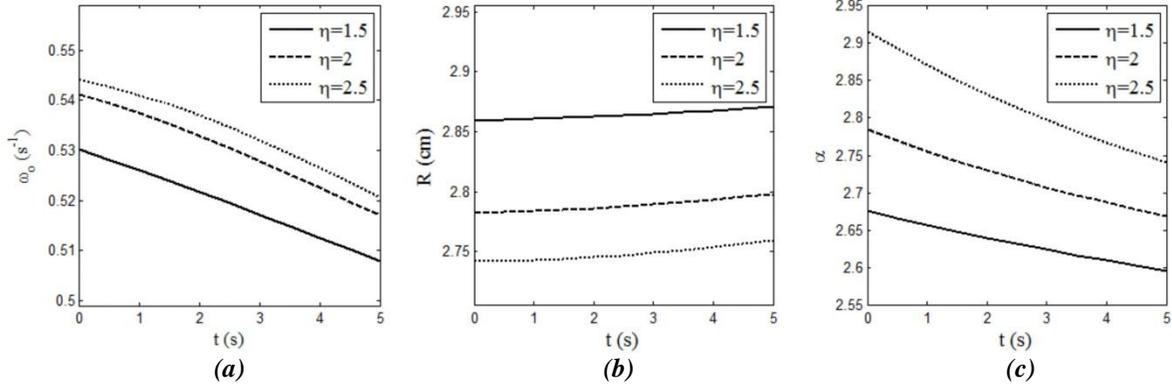


Fig. 41. Evolución temporal de los parámetros (a) ω_0 , (b) R y (c) α obtenidos a partir del ajuste por cuadrados mínimos de la ec. (2.15). La línea continua representa el estado base perturbado con una amplitud $\eta_0=1.5$, la discontinua $\eta_0=2$ y la punteada $\eta_0=2.5$.

Se observa para todos los casos un decaimiento de ω_0 y un ligero crecimiento de R , asociados con los efectos de disipación del fondo y fricción lateral, respectivamente. A primera vista, estos dos resultados coinciden con el comportamiento observado experimentalmente (ver sección 3.4.2). Sin embargo, el parámetro α presenta una tendencia decreciente para las tres amplitudes de la perturbación. Esta es una diferencia con respecto a los resultados experimentales pues allí se observa una tendencia de α a crecer en el tiempo. Esta diferencia debe ser provocada por efectos tridimensionales asociados a la inestabilidad centrífuga que este modelo, al ser bidimensional, no reproduce. Otra posible explicación serían los efectos producidos al introducir la magnitud de las perturbaciones mayor que el máximo de vorticidad del estado base. En la figura 42 se muestra la comparación del crecimiento de R para una perturbación $\eta_0=1.5$ y el crecimiento descrito por la ec. (3.19) —ver sección 2.4.2—

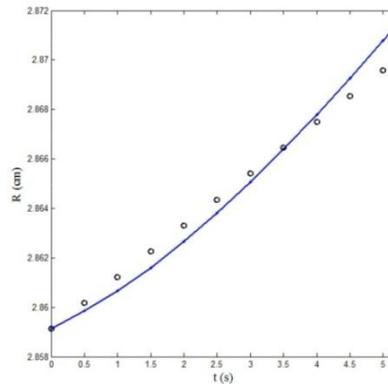


Fig. 42. Evolución temporal del parámetro R con una simulación con perturbación $\eta_0=1.5$. La línea continua representa los datos obtenidos por el ajuste de cuadrados mínimos mientras que los círculos corresponden a la ec. (3.19).

La ec. (3.19) reproduce bastante bien la evolución de R . A partir de esto se puede concluir que en las simulaciones el crecimiento de R obedece principalmente al efecto de la fricción lateral.

5.3.2 Perturbaciones de modos azimutales

Un segundo tipo de perturbación excita a los diversos modos azimutales y viene dada por (Kloosterziel et al., 1999)

$$P_2(r) = A \text{Sin}(m\theta) \text{Exp}\left(\frac{-\left(\alpha(r/R)^\alpha - \varepsilon\right)^2}{\beta}\right), \quad (5.2)$$

donde m es el número de perturbaciones alrededor del remolino. Nuevamente la amplitud máxima A es mayor que el máximo de vorticidad. Diferentes estructuras multipolares surgieron fruto de este tipo de perturbación, las cuales son mostradas en la figura 43. Es evidente que m define el tipo de multipolo resultante.

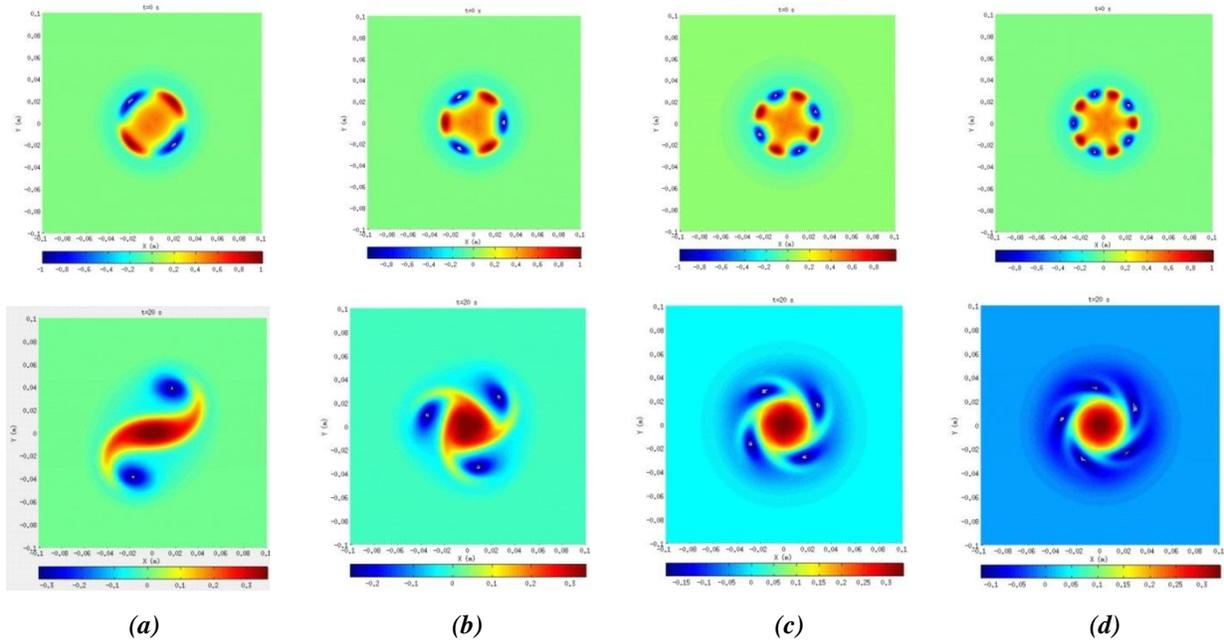


Fig. 43. Evolución de un monopolo aislado perturbado con modos azimutales dados por la ec. (5.2). La amplitud de la perturbación fue el doble que el máximo de vorticidad $A=2\omega_0$. Las gráficas muestran el monopolo perturbado para valores del modo azimutal (a) $m=2$, (b) $m=3$ y (c) $m=4$ y (d) $m=5$.

5.4 Discusiones

Simulaciones sin fricción del fondo para diferentes valores de Re ($500 < Re < 10k$) fueron realizadas para un remolino aislado caracterizado por $\omega_o=1$, $R=1$ y $2 < \alpha < 5$. En este conjunto de simulaciones se impusieron perturbaciones aleatorias de la forma de la ec. (5.1), la cual se concentra en un radio r^* donde la vorticidad cambia de signo (ver sección 2.5.3). Estas tienen que ser sumadas al campo de vorticidad inicial para hacerlo inestable. Se observaron tres comportamientos bastante claros: un remolino estable, la formación de un tripolo y la de dos dipolos (ver figura 37). Estas mismas simulaciones se repitieron teniendo ahora en cuenta fricción del fondo tipo Rayleigh. El valor del coeficiente λ fue aquel obtenido experimentalmente ($\lambda = 0.047s^{-1}$). Los resultados obtenidos fueron similares a las simulaciones sin fricción de fondo, es decir, se observaron las mismas estructuras descritas. Por lo tanto, se puede concluir que para este rango del número de Reynolds y bajo la dinámica estrictamente bidimensional la fricción del fondo no es responsable de la formación de las estructuras observadas.

Un punto importante es que la información obtenida de simulaciones numéricas realizadas con los mismos parámetros de laboratorio no concuerda con los resultados de los experimentos, por lo que podemos concluir que la dinámica bidimensional resuelta por el modelo es insuficiente para reproducir las estructuras multipolares encontradas. Podemos especular que inestabilidades centrífugas asociadas a efectos tridimensionales deben existir para generar las estructuras multipolares observadas en los diversos experimentos de laboratorio. Quizás esta inestabilidad se manifieste de manera similar que las reportadas para sistemas en rotación (Carnevale et al., 2011) donde el efecto tridimensional se refleja en una serie de anillos de vorticidad azimutal en la dirección vertical.

Estructuras diferentes a las ya mencionadas pueden ser observadas de dos maneras diferentes. La primera consiste en proponer la amplitud de las perturbaciones aleatorias mayor que el máximo de vorticidad del remolino inicial. En estos casos el remolino evoluciona en un vórtice triangular independientemente de los parámetros que lo definan. La segunda manera es inducir los modos azimutales con una perturbación de la forma (5.2).

Con esta perturbación se observa un tripolo, vórtices triangulares, cuadrangulares y hasta pentagonales. La amplitud de las perturbaciones también tiene que ser mayor que la vorticidad del remolino inicial.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha investigado la estabilidad de vórtices aislados y la generación de estructuras multipolares en dos dimensiones. Una estructura multipolar la podemos definir como un vórtice con un núcleo de vorticidad de un determinado signo cuya frontera tiene forma de un polígono regular de n lados y está rodeado de n satélites de vorticidad de signo contrario.

Los vórtices aislados son generados con una técnica electromagnética en la cual se utilizan imanes, corrientes eléctricas y un fluido conductor (agua mezclada con bicarbonato de sodio) en un tanque con superficie cuadrada. Para ello se colocan electrodos en las esquinas y centro del tanque. Al inyectar una corriente al fluido se genera una fuerza de Lorentz la cual es la encargada de generar el movimiento del fluido en dirección azimutal. Este tipo de experimentos pueden ser llevados a cabo en sistemas con y sin rotación. En sistemas sin rotación experimentos cualitativos y cuantitativos fueron realizados, y la presente investigación está centrada principalmente en estos resultados. Experimentos cualitativos en sistemas en rotación fueron llevados a cabo en el *IAM (Instituto de Astronomía y Meteorología)* de la *Universidad de Guadalajara*. Recientemente y de manera paralela a este trabajo, se realizó un estudio similar en el que se mostró la viabilidad del método experimental para generar vórtices ciclónicos y anticiclónicos en un sistema en rotación (*Cruz Gómez et al., 2013*).

En el caso sin rotación se encontraron condiciones experimentales que permiten generar tres tipos diferentes de estructuras multipolares de manera reproducible, tales como el tripolo, el vórtice triangular y el par de dipolos. Cada estructura se forma dependiendo del tiempo de forzamiento, es decir, el tiempo durante el cual es suministrada la corriente eléctrica.

A través de mediciones de los campos de velocidad y vorticidad se encontraron perfiles radiales de vorticidad y velocidad azimutal del remolino inicial. Un ajuste por cuadrados mínimos permite encontrar los parámetros ω_o , R y α que definen a cada remolino de acuerdo a la ec. (2.15). Se observó que los datos no se ajustan de manera correcta al perfil radial de vorticidad al tiempo en el que se apagó el forzamiento, sino aproximadamente 2.75 s después, es decir, aproximadamente un periodo de rotación del vórtice.

La evolución temporal de ω_o , R y α fue medida hasta que el remolino pierde su axisimetría. El parámetro ω_o decae de manera acorde con la forma exponencial asociada con la fricción del fondo, ec. (3.16). El parámetro R crece mucho más rápido que lo predicho por la ec. (3.25) la cual predice el ensanchamiento del vórtice por efectos de fricción lateral (*Kloosterziel y van Heijst, 1991*). Esto se debe tal vez a un efecto tridimensional que no se encuentra descrito dentro de la dinámica bidimensional del remolino, el cual permite que el remolino se ensanche de manera más rápida. El parámetro α crece en todos los experimentos de manera aparentemente lineal. Este es un resultado sobresaliente, ya que indica que el remolino tiende a ser mayormente inestable conforme α se incrementa, como lo muestra el análisis de Carnevale y Kloosterziel (1993). En efecto, dichos autores demuestran que la razón de crecimiento de las perturbaciones azimutales con número de onda m es mayor conforme α crece (*ver su figura 7*)

La evolución temporal de la energía E y la enstrofia S en los remolinos experimentales permite concluir que el principal efecto disipativo es el de la fricción del fondo, ya que estas cantidades decaen de manera exponencial con una razón de decaimiento proporcional al coeficiente de fricción del fondo. Este resultado era el esperado dado que se utilizan capas delgadas.

Un modelo numérico bidimensional fue implementado con los mismos parámetros de los experimentos. Según la dinámica en dos dimensiones, los remolinos obtenidos experimentalmente siempre deben ser estables a perturbaciones axisimétricas, lo cual no se observa en los resultados descritos en el laboratorio. Los efectos de la fricción del fondo se reflejan de igual manera en el decaimiento de la vorticidad y el ensanchamiento del vórtice,

pero jamás se observa una estructura multipolar de las que fueron reproducidas experimentalmente. Esto es debido a que la dinámica bidimensional del modelo no incluye efectos asociados a inestabilidades centrífugas (*Carnevale et. al., 2011*), los cuales deberán perturbar al remolino de tal suerte que se generen las estructuras estudiadas experimentalmente. Esta conclusión podría verificarse realizando simulaciones numéricas con un modelo tridimensional (*Orlandi y Carnevale, 1999*).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beckers, M., van Heijst, G.J.F., (1997). The observation of a triangular vortex in a rotating fluid. *Fluid Dyn. Res.*, **22**: 265-279.

Carnevale, G.F., Kloosterziel, R.C., (1993). Emergence and evolution of triangular vortex. *J. Fluid Mech.*, **259**: 305-331.

Carnevale, G.F., Kloosterziel, R.C., Orlandi, P., van Sommeren, D.J.A. (2011). Predicting the aftermath of vortex breakup in rotating flows. *J. Fluid Mech.*, **669**: 90-119.

Carton, X., McWilliams, J.C. (1989). Barotropic and baroclinic instabilities of axisymmetric vortices in a quasi-geostrophic model. In *Mesoscale/Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence* (ed. J. C. J. Nihoul & B. M. Jamart), 225–244. Elsevier.

Chandrasekhar, S. (1961). Hydrodynamic and hydromagnetic stability. The Clarendon Press, Oxford.

Crowdy, D., (1999). The construction of exact multipolar equilibria of the two-dimensional Euler equations. *Phys. Fluid*, **14**: 257-267.

Cruz Gómez, R.C., Zavala Sansón, L., Pinilla, M. A. (2013). Generation of isolated vortices in a rotating fluid by means of electromagnetic method. *Exp. Fluids*, **54**:1582.

de Ruijter, W., P., M., van Aken, H., M., Beier, E.J., Lutjeharms, J., R., E., Matano, R.,P., Schouten, M.,W., (2004). Eddies and dipoles around South Madagascar: formation, pathways and large-scale impact. *Deep-Sea Res. I* **51**, 383–400.

Drazin, P.G. (2002). Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge University Press.

Dubranna, J., Pérez Brunius, P., López, M., Candela, J. (2011). Circulation over the continental shelf of the western and southwestern Gulf of México. *J. Geophys. Res.*, **116**: 257-267.

Durán Matute, M., (2010). Dynamics of shallow flows with and without background rotation. Tesis de Doctorado, Technische Universiteit Eindhoven, Holanda.

Figueroa A., François, D., Cuevas, S., Ramos, E., (2009). Electrically driven vortices in a weak dipolar magnetic field in a shallow electrolytic layer. *J. Fluid Mech.*, **641**: 245-261.

Flór, J.B., van Heijst, G.J.F., (1996). Stable and unstable monopolar vortices in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, **311**: 257-287.

Gent, P.R., McWilliams, J.C., (1986). The instability of barotropic circular vortices. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **35**: 209-233.

Kloosterziel, R.C. (1990). Barotropic vortices in a rotating fluid. Tesis de Doctorado, Technische Universiteit Eindhoven, Holanda.

Kloosterziel, R.C., Carnevale, G.F., (1999). On the evolution and saturation of instabilities of 2D isolated circular vortices. *J. Fluid Mech.*, **388**: 217-257.

Kloosterziel, R.C., van Heijst, G.J.F., (1991). An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, **239**: 607-629.

Kloosterziel, R.C., van Heijst, G.J.F., (1992). The evolution of stable barotropic vortices in a rotating free-surface fluid. *J. Fluid Mech.*, **223**: 1-24.

Kundu, P. (1990). Fluid Mechanics. Academic Press. New York.

McCaig, M. (1977). Permanent Magnets in Theory and Practice. Wiley.

Meleshko, V.V., van Heijst, G.J.F., (1994). On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, **272**: 157-182.

Orlandi, P. (1990). Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids.*, **A 2**, 1429-1436.

Orlandi, P., Carnevale, G.F., (1999). Evolution of isolated vortices in a rotating fluid of finite depth. *J. Fluid Mech.*, **381**: 239-269.

Pedlosky, J., (1987). Geophysical Fluid Mechanics. Springer.

Tabeling, P., Burkhart, O., Cardozo, Willaime, (1991). Experimental study of freely decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.* , **67**: 3772-3775.

Trieling, R.R., van Heijst, G.J.F., Kizner, Z., (2010). Laboratory experiments on multipolar vortices in a rotating fluid. *Phys. Fluids.*, **22**, 094104.

van Geffen, J.H.G.M., van Heijst, G.J.F. (1998). Viscous evolution of 2D dipolar vortices. *Fluid Dyn. Res.*, **22**: 191-213.

van Heijst, G.J.F., Clercx, H.J.H., (2009). Laboratory modeling of geophysical vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**:143 –64.

van Heijst, G.J.F., Kloosterziel, R.C., Williams, W.M., (1991). Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, **225**: 301-331.

van Sommeren, D.J.A., Carnevale, G.F., Kloosterziel, R.C., Orlandi, P. (2010). Equilibration of inertial instability in rotating flow. Symposium on Turbulence in the

Atmosphere and Oceans. In *Mesoscale/Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence*, 115–135. Elsevier.

Verzicco, R., Lalli, F., Campana, E., (1997). Dynamics of baroclinic vortices in a rotating stratified fluid: A numerical study. *Phys. Fluids*, **9**: 419,432.

Zavala Sansón, L. (2000). The effects of topography on rotating barotropic flows. Tesis de Doctorado, Technische Universiteit Eindhoven, Holanda.

Zavala Sansón, L., van Heijst, G.J.F. (2000). Nonlinear Ekman effects in rotating barotropic flows. *J. Fluid Mech.*, **412**: 75-91.