

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones
con orientación en Instrumentación y Control**

**Control de robots manipuladores sujetos a saturaciones en
accionamiento de par**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Adriana Salinas Avila

Ensenada, Baja California, México

2016

Tesis defendida por

Adriana Salinas Avila

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Codirector del Comité

Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela

Codirector del Comité

Dra. María del Carmen Monroy Lara

Dr. César Cruz Hernández

Dr. Gustavo Olague Caballero

Dr. Eduardo Aranda Bricaire



Dr. Miguel Ángel Alonso Arévalo

Coordinador del Programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Adriana Salinas Avila © 2016

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor

Resumen de la tesis que presenta Adriana Salinas Avila como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Control de robots manipuladores sujetos a saturaciones en accionamiento de par

Resumen aprobado por:

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Codirector de Tesis

Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela

Codirector de Tesis

En esta tesis se aborda el tema de control de posición de robots manipuladores con limitaciones físicas de par y velocidad en los accionamientos de par. Se toman en cuenta curvas características típicas de actuadores de par. Se propone un controlador no lineal tipo PID para la regulación de posición de robots manipuladores de n grados de libertad con fricción pero sin vector de gravedad y con accionamiento de par, donde el accionamiento de par está modelado por una función de saturación dura (continua pero no derivable). Además, se estudian tres nuevos objetivos de control: control de posición con límite de velocidad dependiente de la posición; control de posición con límite simultáneo de par y velocidad; y control de posición con límite de par dependiente de la velocidad. Estos planteamientos son de interés teórico/académico. Con respecto a los nuevos objetivos de control, dos de ellos son resueltos para un péndulo usando controladores dinámicos no lineales; mientras que el tercer objetivo es resuelto para un mecanismo no lineal de un grado de libertad con la estructura de un modelo no lineal de robots manipuladores de n grados de libertad. En todos los planteamientos se usan modelos estáticos de los actuadores de par.

Palabras Clave: **Robots manipuladores, actuador, accionamiento, regulación, saturación, limitación, par, velocidad, controlador, PID, dominio de inicio.**

Abstract of the thesis presented by Adriana Salinas Avila as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Control of robot manipulators subject to saturations in torque actuator

Abstract approved by:

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Thesis Co-Director

Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela

Thesis Co-Director

In this thesis the topic of position regulation of torque-driven robot manipulators equipped with torque (or velocity or torque and velocity) constrained actuators is addressed. Control problems are addressed taking into account typical torque actuators curves. A nonlinear PID-like controller is proposed to study the position regulation of torque-driven robot manipulators with friction but without gravity vector, where the torque actuator is modeled by a hard saturation function (continuous but nondifferentiable). In addition, three new control objectives are studied: position regulation under position dependent velocity limit; position regulation under simultaneous limited torque and velocity; and position regulation under velocity dependent torque limit. These statements are of theoretical/academic interest. With regard to the new control objectives, two of them are solved using a dynamical model of a torque-driven nonlinear rotational mechanism and nonlinear dynamical controllers; whereas the third control objective is addressed using a dynamical model of a torque-driven nonlinear mechanism having the structure of a nonlinear dynamical model of n degrees of freedom robot manipulators. In all instances static models of the torque actuators are used.

Keywords: Robot manipulators, actuator, regulation, saturation, limitation, torque, velocity, controller, PID, starting domain.

Dedicatoria

A Gabriel Alejandro, mamá, papá, hermanos y Marcel.

Agradecimientos

Gracias a Dios, por este tiempo.

A mis directores de tesis, los Doctores Rafael Kelly y Javier Moreno. A ambos, gracias por aceptarme como su estudiante, por el tiempo que han invertido en mí para compartir parte de su experiencia y conocimientos. Por guiarme durante el desarrollo de esta tesis.

A los miembros de mi comité de tesis, la Doctora Carmen Monroy y los Doctores César Cruz, Gustavo Olague y Eduardo Aranda. Gracias por sus consejos, comentarios y críticas constructivas a este trabajo de tesis.

Al Dr. Rubén Garrido y al Ing. Jorge Rivera por las pláticas sobre saturaciones en motores eléctricos.

A la Dra. Carmen Monroy y al Dr. Roberto Conte por su amabilidad, apoyo y consejos.

A Dann, Diana, Lilia y Topacio, por su apoyo y amistad. A mis familiares y amigos que han cuidado de Alex durante estos años.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, por permitirme realizar mis estudios de doctorado. Por brindarme apoyo económico para continuar con los estudios de doctorado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado.

Gracias al CONACyT por el apoyo recibido a través del Proyecto de Investigación Ref. 166654.

Al Instituto Politécnico Nacional–CITEDI por la oportunidad de realizar una estancia de investigación durante mis estudios de doctorado.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xiii
1. Introducción	2
1.1. Sobre limitaciones en los accionamientos de par	3
1.1.1. Curvas de par-velocidad	4
1.2. Objetivo del trabajo de tesis	8
1.3. Problemas de control	8
1.4. Antecedentes	8
1.5. Contribución del trabajo de tesis	10
1.6. Organización del documento	12
2. Preliminares	14
2.1. Notación	14
2.2. Convención 2	14
2.3. Listado de definiciones y lemas	14
2.3.1. Lema de Barbalat	15
2.4. Modelo de robots manipuladores usado para propósitos de control . .	16
2.4.1. Propiedades del modelo	19
3. Una familia de controladores para regulación de posición de una clase de robots manipuladores equipados con accionamiento de par sujeto a límite de par constante	21
3.1. Planteamiento del problema de control	21
3.1.1. Modelo de la planta: robot manipulador de n grados de libertad con fricción y sin vector de gravedad	21
3.1.2. Modelo del actuador	22
3.1.3. Objetivo de control	25
3.2. Esquema de control propuesto	25
3.3. Análisis	28
3.4. Protección de los actuadores	36
3.5. Estudio experimental	39
4. Regulación de posición con límite de velocidad para un mecanismo pendular con accionamiento de par	49
4.1. Planteamiento del problema de control	49
4.1.1. Modelo de la planta: péndulo	49
4.1.2. Modelo del actuador	51
4.1.3. Objetivo de control	52

4.2.	Esquema de control propuesto	52
4.3.	Análisis	54
4.3.1.	Acotamiento de velocidad dependiente de la posición	54
4.3.2.	Regulación de posición	56
4.4.	Resultados de simulación	58
5.	Regulación de posición con limitación simultánea de par y velocidad para mecanismo pendular con accionamiento de par	65
5.1.	Planteamiento del problema de control	65
5.1.1.	Modelo de la planta: péndulo	65
5.1.2.	Modelo del actuador	66
5.1.3.	Objetivo de control	67
5.2.	Esquema de control propuesto	67
5.3.	Análisis	69
5.3.1.	Acotamiento de par	69
5.3.2.	Acotamiento de velocidad	70
5.3.3.	Regulación de posición	72
6.	Regulación de posición para mecanismo LOCOMOBOT con accionamiento de par evitando saturación de par dependiente de la velocidad	75
6.1.	Formulación del problema de control	75
6.1.1.	Modelo de la planta: mecanismo “Locomobot”	75
6.1.2.	Modelo del actuador	76
6.1.3.	Objetivo de control (Regulación de posición evitando saturación de par)	80
6.2.	Propuesta de controlador	80
6.3.	Análisis	81
6.3.1.	Acotamiento de par	81
6.3.2.	Regulación de posición	82
6.4.	Propuesta de función de saturación $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$	86
6.5.	Resultados de simulación	89
7.	Conclusiones	93
7.1.	Trabajo futuro	94
	Lista de referencias bibliográficas	95
A.	Demostraciones relacionadas con el problema de control de posición de robots manipuladores	99
A.1.	Propiedades de la función $\text{sat}(x; a; b)$	99
A.1.1.	Composición de funciones	99
A.1.2.	Resta entre funciones saturación $\text{sat}(z_1; a; b)$ y $\text{sat}(z_2; a; b)$	100
A.2.	Análisis del i -ésimo elemento de $W_2(\tilde{q}, \dot{q}, \xi)$	103
A.3.	Obtención del conjunto E_2	105
A.4.	Derivada de la función $\text{dzn}(x; a; b)^2$	110
B.	Modelo de mecanismo “Locomobot”	112
B.1.	Propiedades del modelo	114
B.1.1.	Término de ‘inercia’	114

B.1.2. Término 'centrífugo y de Coriolis'	114
B.1.3. Término 'gravitacional'	115

Lista de figuras

Figura		Página
1.	Curva característica típica de par–velocidad. El par y la velocidad limitados a rangos ‘bajos’ para conservar la integridad física del actuador.	5
2.	Curva característica de par–velocidad: la zona segura de operación de par τ está limitada por valores constantes, mientras que no existe limitación alguna sobre la velocidad $\dot{q} \in \mathbb{R}$	6
3.	Gráfica con zona de operación permitida de ‘par-velocidad’: zona segura y zona prohibida de par y velocidad. El par máximo permitido está en función de la velocidad.	6
4.	Gráfica típica con zona de operación permitida de velocidad \dot{q} como función de la posición q	7
5.	Curva característica conservativa de ‘par-velocidad’: zona segura y zona prohibida de par y velocidad. Con límites de par y velocidad constantes.	7
6.	Gráfica de la función $\text{sat}(x; x_{\min}; x_{\max})$ en (1).	10
7.	Convención 2. Actuador–estructura mecánica.	14
8.	Diagrama abstracto de un robot manipulador de n g.d.l. (Kelly <i>et al.</i> , 2005).	17
9.	Curva característica de par–velocidad: la zona segura de par τ_i está limitado por valores constantes u_{\min_i}, u_{\max_i} ; mientras que no existe limitación alguna sobre la velocidad $\dot{q}_i \in \mathbb{R}$	22
10.	La salida u del controlador es el valor de par solicitado al actuador y la salida del actuador es τ (entrada a la planta).	23
11.	Gráficas de funciones. Izquierda: función saturación $\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$. Derecha: función zona muerta $\text{dzn}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$	25
12.	Familia de controladores dinámicos no lineales propuesta (tipo PID).	27
13.	Ejemplos de funciones $\psi_i(x_i)$	27
14.	Incorporación de una saturación dura “artificial” para proteger a los actuadores.	36
15.	Sistema en malla cerrada con saturación dura “artificial” y actuador. El bloque “saturación artificial” es representado por las ecuaciones (68)-(69).	37
16.	Sistema en malla cerrada con saturación dura “artificial” + actuador.	38
17.	Foto de brazo robótico de dos g.d.l. CITED I.	39
18.	Diagrama de brazo robótico de dos g.d.l. CITED I.	40

Figura	Página
19. Posición $q_1(t)$ del brazo robótico de dos grado de libertad. La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).	45
20. Posición $q_2(t)$ del brazo robótico de dos grados de libertad. La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).	45
21. Salida u_{new_1} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).	46
22. Salida u_{new_2} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).	46
23. Salida u_1 del controlador (27)-(28) y salida u_{new_1} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde a u_1 y la línea gruesa azul continua corresponde a u_{new_1}	47
24. Salida u_2 del controlador (27)-(28) y salida u_{new_2} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde a u_2 y la línea gruesa azul continua corresponde a u_{new_2}	48
25. Diagrama del péndulo.	50
26. Copia de la figura 4. Gráfica con zona de operación permitida (en color verde) de velocidad \dot{q} como función de la posición q	51
27. Gráfica de $\xi(0)$ en (102) con $q_d = 5$, $k_p = 5$, $\gamma_1 = 0.8$ y $\gamma_2 = 0.2$	54
28. Gráfica de la función $V(\tilde{q}, \xi)$ en (113) con $k_s = 1$ y $\gamma_1 = 0.8$	57
29. $q(t)$ (en línea azul continua). Posición deseada q_d en línea entrecortada de color café.	61
30. $\dot{q}(t)$ (en línea azul continua). Límites de velocidad $vel_{Max}(q)$ y $-vel_{Max}(q)$ en líneas rojas entrecortadas.	62

Figura	Página
31. $\dot{q}(t)$ vs. $q(t)$ (en línea azul continua). Los límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ se muestran en líneas rojas entrecortadas; los límites de la estima \mathcal{S} del dominio de inicio en líneas horizontales entrecortadas de color verde; mientras que la estima \mathcal{S} del dominio de inicio se presenta en color verde semi transparente.	62
32. $\dot{q}(t)$ vs $\tilde{q}(t)$ (en línea azul continua). Límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ en líneas rojas entrecortadas.	63
33. Trayectoria $\xi(t)$, $\tilde{q}(t)$ y $\dot{q}(t)$	63
34. $\dot{q}(t)$ vs. $\tilde{q}(t)$ (en línea azul continua para $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0.1, \xi(0) = -0.3942$ y en línea púrpura entrecortada para $q(0) = 2, \dot{q}(0) = -0.15, \xi(0) = -1.5563$). Los límites $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ se muestran en líneas rojas entrecortadas.	64
35. Copia de la figura 5. Zona segura de operación (en color verde) del actuador de par con límites de par y velocidad constantes.	66
36. Función $V(\tilde{q}, \xi)$ en (154). $k_s = 2.4, \gamma_1 = 4$	73
37. Dibujo de mecanismo físico <i>idealizado</i> LOCOMOBOT. Esta figura fue presentada en Kelly <i>et al.</i> (2015).	76
38. Función de saturación dura con límites en $-\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ y $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$	77
39. Copia de la figura 3. Gráfica típica con zona de operación permitida de 'par-velocidad': Zona segura y zona prohibida de par y velocidad.	78
40. Gráfica de τ en función de u y \dot{q}	78
41. Gráfica ejemplo de la función $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$	79
42. a) El modelo del actuador tiene como entradas la salida u del controlador y la velocidad \dot{q} . La salida τ del actuador es la entrada al modelo de la planta. b) Diagrama de bloques con entradas y salida del actuador con gráfica de τ en función de u y \dot{q} e imagen de mecanismo didáctico Locomobot.	79
43. Arriba se muestra la posición $q(t)$. El valor deseado q_d se muestra en línea café entrecortada. En el centro se muestra la velocidad $\dot{q}(t)$. Abajo se muestra la acción de control $\tau(t)$ en línea continua de color azul. Las funciones $\tau_{\text{max}}(\dot{q})$ y $-\tau_{\text{max}}(\dot{q})$ se muestran en líneas rojas entrecortadas.	91
44. Gráfica de $\dot{q}(t)$ vs. $\tilde{q}(t)$	92
45. Gráfica de $\dot{q}(t)$ vs. $\tau(t)$ en línea continua de color azul. Las funciones $\tau_{\text{max}}(\dot{q})$ y $-\tau_{\text{max}}(\dot{q})$ se muestran en líneas rojas entrecortadas.	92
46. Composición de funciones saturación $\text{sat}(x; a; b) : \mathbb{R} \rightarrow D_1$ y $\text{sat}(x; c; d) : \mathbb{R} \rightarrow D_2$	100

Figura	Página
47. Diagrama esqueleto del mecanismo “Locomobot” con ‘entrada’ el par τ y como ‘salida’ la posición angular q . El tercer eslabón está confinado a moverse horizontalmente. Se supone como nula la masa del segundo eslabón. Esta figura fue presentada en Kelly <i>et al.</i> (2015).	113
48. Mecanismo didáctico LOCOMOBOT. Esta figura fue presentada en Kelly <i>et al.</i> (2015).	113

Lista de tablas

Tabla

Página

1. Valores numéricos de los parámetros del estudio experimental. . . . 41

Capítulo 1. Introducción

La norma ISO 8373:2012 define los vocablos robot y manipulador de la siguiente forma: un *robot* es un “mecanismo actuado programable en dos o más ejes, con un grado de autonomía, moviéndose dentro de su medio ambiente para realizar tareas previstas” (ISO8373:2012, 2012). Mientras que un *manipulador* es una “máquina en la que por lo general, el mecanismo consiste en una serie de eslabones, articulados o deslizándose uno con respecto al otro, con el fin de asir y/o mover objetos (piezas o herramientas) generalmente en varios grados de libertad” (ISO8373:2012, 2012).

El tipo de robots de interés en este trabajo, son los robots manipuladores, los cuales, tienen aplicaciones en diversas industrias: automotriz, eléctrica/electrónica, metal, caucho y plásticos, alimentaria, entre otras (Baroncelli y Gemma, 2015). Se tomará la siguiente definición de *robot manipulador industrial* (norma ISO/TR 8373:1994 (Kelly, Santibáñez y Loría, 2005)): “máquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil, para su empleo en aplicaciones industriales”. Algunas usos de robots manipuladores son: tomar, colocar, ensamblaje, corte por láser, soldadura, pegado y sellado.

En este trabajo se consideran robots manipuladores cuyos eslabones están unidos a través de articulaciones con movimiento de tipo rotacional. “El número de *grados de libertad* (g.d.l.) que posee un robot manipulador es el número de variables de posición independientes que tendrían que ser especificadas con el fin de ubicar todas las partes del mecanismo” (Craig, 2005).

La regulación puede definirse como: “comandar al robot para que pase de una configuración inicial a una configuración final deseada sin considerar la ruta intermedia a seguir por el efector final” (Kelly, Santibáñez y Berghuis, 1997). Aquí se utiliza la regulación de posición (también llamada control de posición) como objetivo de control o como parte del objetivo de control.

De acuerdo con Kelly y Monroy (2014), *actuador* y *accionamiento* serán considerados como sinónimos, por lo que serán utilizados indistintamente. Se adoptará también la siguiente definición de accionamiento (Kelly y Monroy, 2014): “Un actuador es un trans-

ductor que provee la potencia motriz al sistema. En general los actuadores convierten señales de baja potencia en señales de alta potencia”.

En la presente tesis se consideran actuadores de par, con modelo matemático estático; y de forma específica, se utilizan para propósitos de estudios experimentales motores eléctricos de corriente directa con sus manejadores electrónicos como ‘actuadores de par’. En los objetivos de control que se abordan en este trabajo están consideradas algunas limitaciones físicas de los actuadores.

1.1. Sobre limitaciones en los accionamientos de par

Considérense las siguientes definiciones sobre los vocablos *acotar*, *saturar* y *limite*, obtenidas del diccionario de la Real Academia Española en su versión electrónica:

- *acotar*: “Condicionar la extensión de un conjunto” (RAE, 2014a).
- *límite*: “En una secuencia infinita de magnitudes, magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de la secuencia...” (RAE, 2014b).
- *saturar*: “aumentar la señal de entrada en un sistema hasta que no se produzca el incremento en su efecto” (RAE, 2014c).

En el contexto de este trabajo, las definiciones *acotar*, *saturar* y *limite*, implican que los elementos de un conjunto numérico pertenecen a un rango de valores que tiene un máximo y un mínimo y se hace uso de la siguiente convención:

Convención 1— acotamiento/limitación/saturación. Los términos *acotamiento*, *saturación* y *limitación* son sinónimos y serán usados indistintamente.

Según Galeani, Tarbouriech, Turner y Zaccarian (2009): “la saturación en el actuador ocurre cuando un controlador demanda una señal mayor que la que el actuador es capaz de proporcionar”. En el área de control automático, es reconocido que la mayoría de los actuadores físicos tienen capacidades limitadas (Tarbouriech, Garcia, Gomes da Silva Jr. y Queinnec, 2011; Åström y Murray, 2008; Dorf y Bishop, 2008), entre estas limitaciones se incluyen, la cantidad de fuerza o par que un actuador puede proporcionar o la velocidad

a la que puede girar el rotor. Por lo tanto, para ayudar a proteger al actuador de daño (por ejemplo, del daño que pudiera producirse como consecuencia del sobrecalentamiento en un motor al hacerlo funcionar fuera de los límites de operación segura (Voss, 2007)), un controlador debiese cuidar que el actuador opere dentro de sus límites permitidos de par y velocidad.

En un enfoque de control, dentro de los efectos producidos por la saturación se encuentran: sobreimpulso excesivo, tiempo largo de asentamiento, inestabilidad (Moreno-Valenzuela y Campa, 2009).

1.1.1. Curvas de par-velocidad

En la figura 1 se muestra una curva par-velocidad de un supuesto accionamiento comercial en “modo par”. Una interpretación para esta gráfica, es que el accionamiento está limitado por el par τ que puede producir (en este caso, el par máximo es $\tau^+ = 4\text{Nm}$) y por la velocidad \dot{q} a la que puede operar (en este caso, la velocidad máxima es $\text{vel}^+ = 2.5\text{RPS}$).

De la figura 1 se aprecia que el par es pequeño o nulo para velocidades grandes. Esta característica puede interpretarse como una limitación o restricción de mantener el accionamiento operando a bajas velocidades.

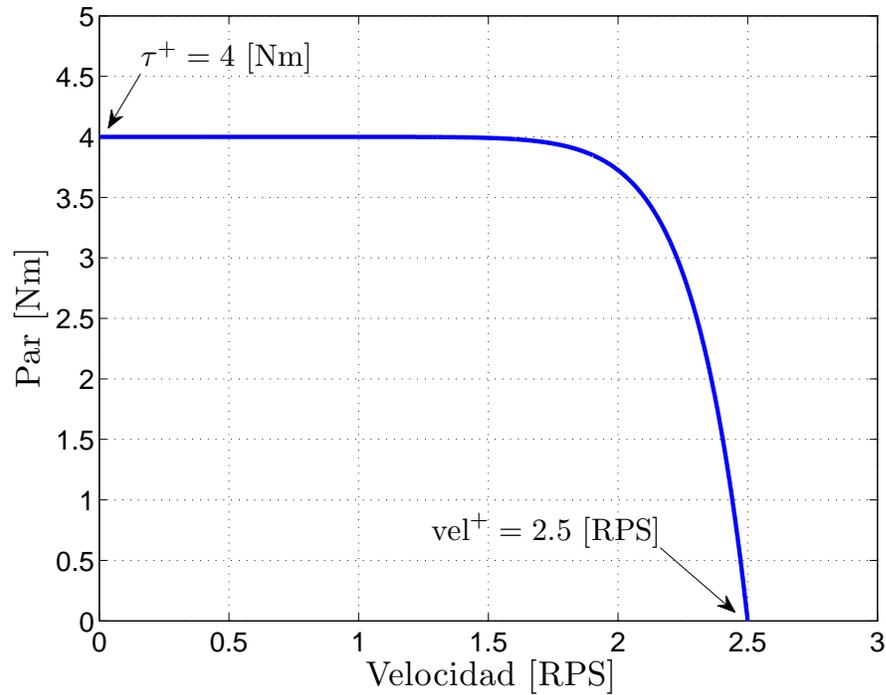


Figura 1: Curva característica típica de par-velocidad. El par y la velocidad limitados a rangos ‘bajos’ para conservar la integridad física del actuador.

Con el fin de mantener el correcto funcionamiento de los accionamientos tales como motores, estos deben permanecer dentro de ‘zonas seguras de operación’ prescritas—delimitadas por sus curvas par-velocidad— donde los motores podrían estar restringidos a pares ‘medio/alto’ pero a velocidad ‘baja’ (Hughes y Drury, 2013) para preservar su integridad mecánica, eléctrica y electrónica.

Se abordan los siguientes temas sobre actuadores de par con capacidades físicas limitadas:

- Límite de par: El límite de par en el actuador puede ser constante o puede ser una función de la velocidad.
 - Límite de par constante

Una forma de abordar el tema de límite de operación segura de par mostrado en la figura 1 se presenta en la figura 2, donde el par τ está limitado por valores constantes (las magnitudes de los límites inferior y superior pueden ser diferentes). Este es el escenario que consideran muchas de las investigaciones sobre:

control de robots con “pares acotados” (Kelly *et al.* (1997); Morabito, Teel y Zaccarian (2004); Kanamori (2009); Santibáñez, Camarillo, Moreno-Valenzuela y Campa (2010); Su y Swevers (2014), por mencionar algunos).

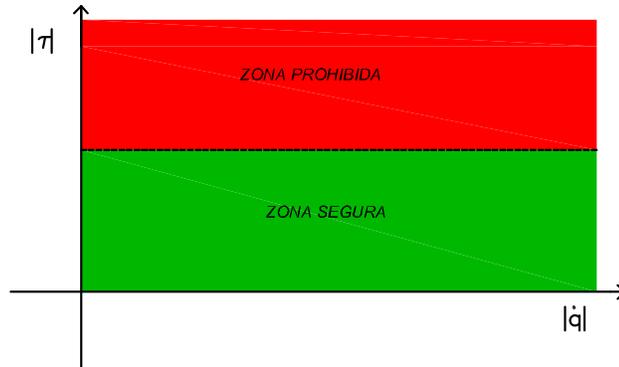


Figura 2: Curva característica de par-velocidad: la zona segura de operación de par τ está limitada por valores constantes, mientras que no existe limitación alguna sobre la velocidad $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

- Límite de par dependiente de velocidad

Una aproximación de la curva par-velocidad de la figura 1 se presenta en la figura 3 donde el par τ está limitado en función de la velocidad $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

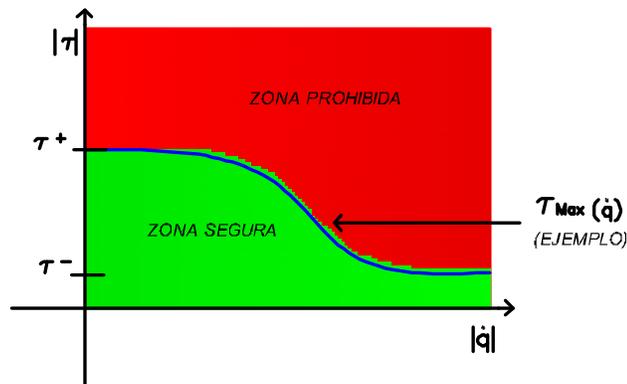


Figura 3: Gráfica con zona de operación permitida de ‘par-velocidad’: zona segura y zona prohibida de par y velocidad. El par máximo permitido está en función de la velocidad.

- Límite de velocidad

Se considera el caso general donde los límites de velocidad están acotados en función de la posición, pero como caso especial y motivación práctica, los límites de velocidad pueden ser constantes.

Una gráfica típica con zona de operación permitida de velocidad en función de la posición se muestra en la figura 4.

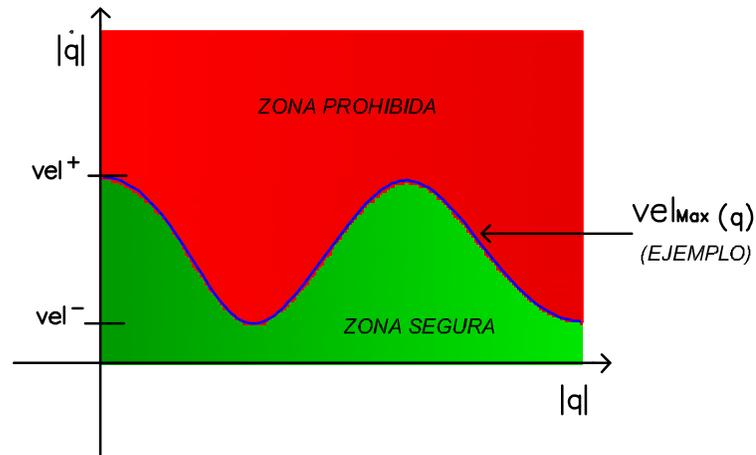


Figura 4: Gráfica típica con zona de operación permitida de velocidad \dot{q} como función de la posición q .

- Limitación simultánea de par y velocidad

En la figura 5, se muestra una curva conservativa donde se tienen límites constantes de par y velocidad.

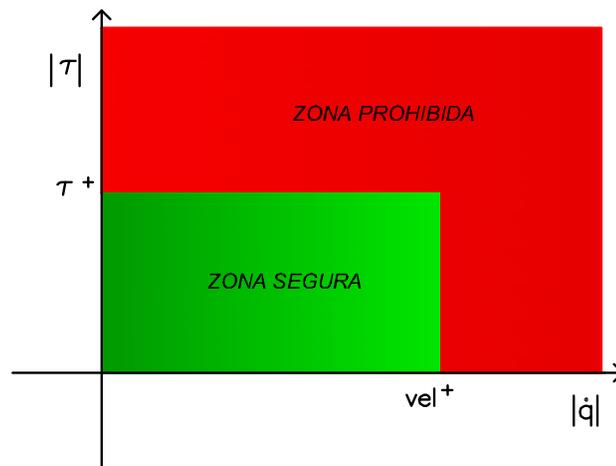


Figura 5: Curva característica conservativa de 'par-velocidad': zona segura y zona prohibida de par y velocidad. Con límites de par y velocidad constantes.

En (Lee, Lee, Hwang, Choi y Bang, 2016), se toman en cuenta restricciones de par y velocidad de un 'actuador de par', pero sin la definición formal de un objetivo de control.

1.2. Objetivo del trabajo de tesis

Desarrollar nuevas técnicas de control para robots manipuladores sujetos a saturaciones en el accionamiento de par.

1.3. Problemas de control

Considerando las limitaciones en par y velocidad de actuadores físicos como los motores eléctricos, en este trabajo se abordan los siguientes cuatro planteamientos de control:

- Control de posición con límite de par constante.
- Control de posición con límite de velocidad dependiente de la posición.
- Control de posición con límite simultáneo de par y velocidad.
- Control de posición con límite de par dependiente de la velocidad.

1.4. Antecedentes

En la literatura se han reportado diversos estudios sobre el control de mecanismos donde se considera algún tipo de restricción en los actuadores.

La estabilidad para sistemas lineales con entradas acotadas ha sido analizada por ejemplo en Suárez, Alvarez y Alvarez (1991), Kothare, Campo, Morari y Nett (1994), Kothare y Morari (1999) y en Tarbouriech *et al.* (2011). La estabilidad de sistemas no lineales sujetos a saturación en los actuadores se ha analizado por ejemplo en Robinett, Parker, Schaub y Junkins (1997) y Gomes da Silva Jr *et al.* (2012).

En la literatura se han reportado controladores que generan una acción de control limitada en amplitud para lograr la regulación de posición articular para robots manipuladores con accionamiento de par. Tal como Kelly *et al.* (1997), donde se presentan un controlador suave y un análisis de estabilidad asintótica global. En los trabajos de Zergeroglu, Dixon, Behal y Dawson (2000) y Dixon (2007), se proponen controladores adaptables con funciones de saturación acotadas y diferenciables. En dichas referencias, se estudia

el respectivo sistema en malla cerrada, proporcionando condiciones de estabilidad del equilibrio. En Santibáñez *et al.* (2010), se usa una función de saturación continuamente diferenciable y se presenta un análisis global. Recientemente, en Yokoyama, Kim y Tsuchiya (2010) se propone un controlador con estructura variable, el cual usa una función de conmutación para reducir la acción de control durante la saturación.

Otros enfoques recientes sobre el control de robots y sistemas mecánicos sujetos a restricciones de entrada han sido presentados, por ejemplo en Su, Müller y Zheng (2010), donde se propone un controlador parecido a la estructura de un controlador PID usando una función de saturación suave para cada componente del controlador; además, se presenta un análisis de estabilidad asintótica global. El trabajo de Izadbakhsh y Fateh (2014) aborda el control de robots con accionamiento eléctrico con saturación de voltaje. La solución se basa en control adaptable. Su y Swevers (2014) proponen un controlador de seguimiento de trayectorias en tiempo finito para robots manipuladores con saturación en actuador. El acotamiento de la acción de control generada es garantizada a través de las saturaciones individuales de la parte proporcional y la parte derivativa del controlador y suponiendo que la trayectoria deseada está acotada.

El control de posición para otras clases de robots tales como robots móviles sujetos a saturación de entrada se ha abordado, por ejemplo, en Chen (2014). Otros estudios en los que el sistema a ser controlado presenta restricciones de entrada han sido reportados en la literatura, tales como Su, Chen, Wang y Lam (2014), donde se abordó el problema de consenso para un sistema multiagente sujeto a saturaciones de entrada.

En la mayoría de la literatura citada en los párrafos anteriores, se consideran actuadores con límites de par constantes y sin restricciones de velocidad y los controladores propuestos utilizan funciones de saturación diferenciables. Otro enfoque para abordar problemas de control donde los límites de par son constantes es considerar que el par que el actuador puede proporcionar está restringido por la función de saturación dura (continua,

no lineal y no diferenciable), la cual se define como:

$$\text{sat}(x; x_{\min}; x_{\max}) = \begin{cases} x_{\max}, & \text{si } x > x_{\max}, \\ x, & \text{si } x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \\ x_{\min}, & \text{si } x < x_{\min}. \end{cases} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable independiente (par solicitado) y $x_{\min} < 0, x_{\max} > 0 \in \mathbb{R}$ son los parámetros constantes de niveles o límites de saturación. Por lo tanto, el primer argumento x es la única variable independiente (separada de los parámetros de la función por símbolos de ‘punto y coma’). Una gráfica de la función (1) se muestra en la figura 6.

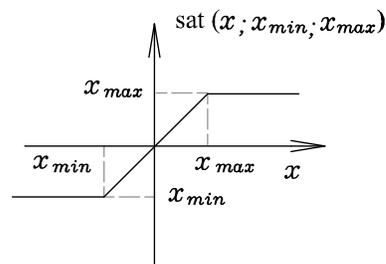


Figura 6: Gráfica de la función $\text{sat}(x; x_{\min}; x_{\max})$ en (1).

Estudios que consideran la función de saturación dura han sido reportados como Go-rez (1999), donde se demuestra estabilidad asintótica global; Álvarez–Ramírez, Kelly y Cervantes (2003) obteniendo condiciones de estabilidad local; Morabito *et al.* (2004), donde se usa un controlador con aumentación *anti-windup*, presentando análisis global. El trabajo de Kanamori (2009) presenta un análisis de estabilidad local.

Con respecto al control de robots con restricciones de velocidad (lo que corresponde a la restricción mostrada en la figura 4), en Ngo y Mahony (2006) se presenta un estudio en el cuál, en el objetivo de control se incluye el caso particular donde límites de velocidad constantes. Se demuestra que el par tiene norma acotada, pero en el objetivo de control no se establecen valores específicos de límites de par.

1.5. Contribución del trabajo de tesis

La contribución de la presente tesis está en abordar el tema de control mecanismos con accionamiento de par tomando en cuenta restricciones de par y/o velocidad en el

accionamiento. Para hacer el estudio, se usan “aproximaciones” de las curvas típicas de par-velocidad del accionamiento de par. Se proponen controladores para resolver cuatro objetivos de control:

1. Se propone una familia de controladores para regulación de posición de robots manipuladores con fricción y sin vector de gravedad. Esta familia de controladores está inspirada en un controlador propuesto por Kanamori (2009). En lugar de la función zona muerta no diferenciable usada por la ley de Kanamori, el controlador propuesto utiliza una función globalmente Lipschitz en la acción integral; además, el estudio provee una guía de sintonización fácil basada en cotas explícitas de los parámetros del controlador. Este resultado fue publicado en Salinas, Moreno-Valenzuela y Kelly (2016).

La familia de controladores propuesta se apoya en un análisis riguroso de estabilidad. Las condiciones de estabilidad no dependen de los niveles de saturación de los actuadores, dependen de un solo parámetro relacionado con los parámetros del modelo del robot manipulador. Este nuevo diseño de control también permite mediante programación, agregar una saturación dura “artificial”, logrando la protección de los actuadores al mantenerlos dentro de una ‘zona segura de operación’. La teoría propuesta se ilustra mediante un estudio experimental en un manipulador de 2 g.d.l.

2. Se presenta un estudio sobre control de un mecanismo con accionamiento de par, considerando que los límites de velocidad del actuador están en función de la posición angular. Se propone un controlador para resolver el objetivo de control para un modelo de un péndulo. Se presentan resultados de simulación para ilustrar los resultados teóricos.
3. Se aborda el problema de control de posición de un mecanismo impulsado por par respetando límites constantes de par y velocidad del actuador. Se propone un controlador dinámico no lineal para resolver la formulación del problema de control de posición de un péndulo.
4. Se estudia el objetivo de control de posición de un mecanismo con accionamiento

de par con límite de par dependiente de la velocidad. Usando un modelo dinámico de un mecanismo de un grado de libertad se propone un controlador estático para garantizar el logro del objetivo de control. Se presentan resultados de simulación para ulistrar los resultados teóricos.

1.6. Organización del documento

El resto del presente documento está organizado como se indica a continuación:

En el capítulo 2 se presenta la convención actuador–estructura mecánica–sensor, el modelo dinámico de robots manipuladores utilizado para fines de control automático y una lista de definiciones, lemas y teoremas referidos a lo largo del documento.

Considerando accionamientos sujetos a límites de par constantes, en el capítulo 3 se expone la propuesta de una familia de controladores tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) para la regulación de posición de robots manipuladores de n grados de libertad con fricción pero sin vector de gravedad.

En el capítulo 4 se aborda la regulación de posición donde un mecanismo pendular equipado con accionamiento de par debe de respetar un límite de velocidad.

En el capítulo 5 se trata la regulación de posición con límite simultáneo de par y velocidad y se expone una solución de este planteamiento para un modelo de un mecanismo pendular con accionamiento de par.

En el capítulo 6 se trata el objetivo de control de posición de mecanismos con accionamiento de par con límite de par dependiente de la velocidad. Usando un modelo dinámico de un mecanismo de un grado de libertad, se propone un controlador estático para garantizar el logro del objetivo de control.

En el apéndice A se incluyen algunas propiedades de la función saturación dura (no lineal y no diferenciable), así como algunas demostraciones útiles sobre la solución al problema de regulación de robots manipuladores con fricción pero sin vector de gravedad (problema expuesto en el capítulo 3).

El apéndice B presenta el modelo del mecanismo no lineal de un grado de libertad 'Locomobot' descrito por Kelly, Salinas y De La Torre (2015).

Capítulo 2. Preliminares

2.1. Notación

En este trabajo se utiliza la siguiente notación.

Los vectores se denotan por letras latinas o griegas minúsculas en negrita, \mathbb{R}^n es el espacio euclidiano de dimensión n , $\|x\|$ representa la norma euclidiana del vector $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|B\|$ representa la norma espectral de una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Los valores $\lambda_{\min}\{B\}$ y $\lambda_{\max}\{B\}$ denotan respectivamente el valor propio mínimo y máximo de una matriz simétrica $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

2.2. Convención 2

Sobre los modelos de la planta a controlar, de los actuadores y de los sensores:

Convención 2 (Convención 3.1 en Kelly y Monroy (2014))— actuador–estructura mecánica. El modelo de la planta a controlar está asociado exclusivamente a la estructura mecánica, excluyendo actuadores y sensores (ver figura 7).

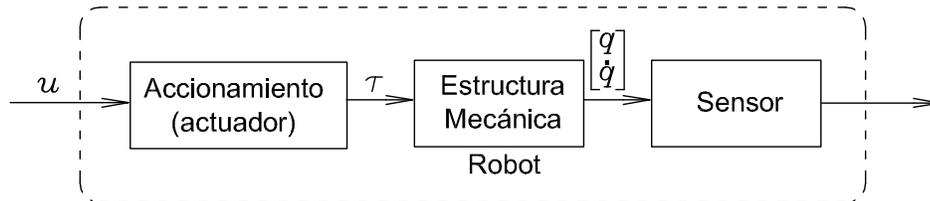


Figura 7: Convención 2. Actuador–estructura mecánica.

En este trabajo se considera que se dispone de sensores identidad.

2.3. Listado de definiciones y lemas

Definición 2.1— Dominio de inicio. Dada una ecuación diferencial ordinaria vectorial de primer orden $\dot{x} = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ para una planta y dado un objetivo de control, se define el dominio de inicio como un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ del espacio de estado de la planta para el cual, si el estado inicial $x(0)$ de la planta se encuentra en el dominio de inicio \mathcal{D} , entonces el objetivo de control se cumple.

Aunque los conceptos de dominio de inicio para un sistema de control y región de atracción para un equilibrio asintóticamente estable están relacionados, estos no son equivalentes.

Definición 2.2— Funciones diferenciables (Khalil (2002); página 650). Se dice que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *diferenciable* en x si el límite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

existe. El límite $f'(x)$ es llamada la derivada de f en x . Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *continuamente diferenciable* en un punto x_0 si las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ existen y son continuas en x_0 para $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Una función f es continuamente diferenciable en un conjunto S si es continuamente diferenciable en cada punto de S .

Definición 2.3— Función Lipschitz (Sastry (1999); página 89). Se dice que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **Lipschitz-continua localmente** en x si para algún $d > 0$ existe $l \geq 0$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq l|x_1 - x_2|, \quad (3)$$

para todo $x_1, x_2 \in B_d$. Se supone que $f(x)$ es continua.

2.3.1. Lema de Barbalat

En esta sección se presenta parte de la exposición dada en Slotine y Li (1991) (páginas 122–126) sobre el lema de Barbalat.

El lema de Barbalat es un resultado puramente matemático sobre propiedades asintóticas de funciones y sus derivadas Slotine y Li (1991).

- Si f está acotada inferiormente y es decreciente ($\dot{f} \leq 0$), entonces converge a un límite (Slotine y Li, 1991).

Lemma 2.1— Lema de Barbalat. Si la función diferenciable $f(t)$ tiene un límite finito

conforme $t \rightarrow \infty$, y \dot{f} es uniformemente continua, entonces $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ (Slotine y Li, 1991).

Una condición *suficiente* para que una función diferenciable sea uniformemente continua es que *su derivada sea continua* (Slotine y Li, 1991).

A continuación se presenta un corolario práctico del lema de Barbalat.

Lema 2.2— Corolario práctico del lema de Barbalat. Si la función diferenciable $f(t)$ tiene un límite finito conforme $t \rightarrow \infty$, y es tal que \ddot{f} existe y está acotada, entonces $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ (Slotine y Li, 1991).

Lema 2.3— Lema de Barbalat “tipo Lyapunov”. Si una función escalar $V(t, \mathbf{x})$ satisface las siguientes condiciones (Slotine y Li, 1991):

- $V(t, \mathbf{x})$ tiene una cota inferior
- $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ es semidefinida negativa
- $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ es uniformemente continua con respecto al tiempo,

entonces $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

2.4. Modelo de robots manipuladores usado para propósitos de control

Como en Kelly *et al.* (2005), en este trabajo se consideran robots manipuladores formados por una cadena cinemática abierta. Se coloca un marco de referencia cartesiano de tres dimensiones en la base del robot. Los eslabones se numeran consecutivamente desde la base (eslabón 0) hasta el final (eslabón n). Las uniones son los puntos de contacto entre los eslabones y se numeran de tal forma que la unión i conecta los eslabones i e $i - 1$. El desplazamiento angular alrededor del eje de movimiento de la unión i se representa por q_i , que recibe el nombre de *posición articular* (ver figura 8 con diagrama que representa a un robot manipulador de n g.d.l.).

En la figura 8 se muestra una representación de de un robot manipulador de n g.d.l.

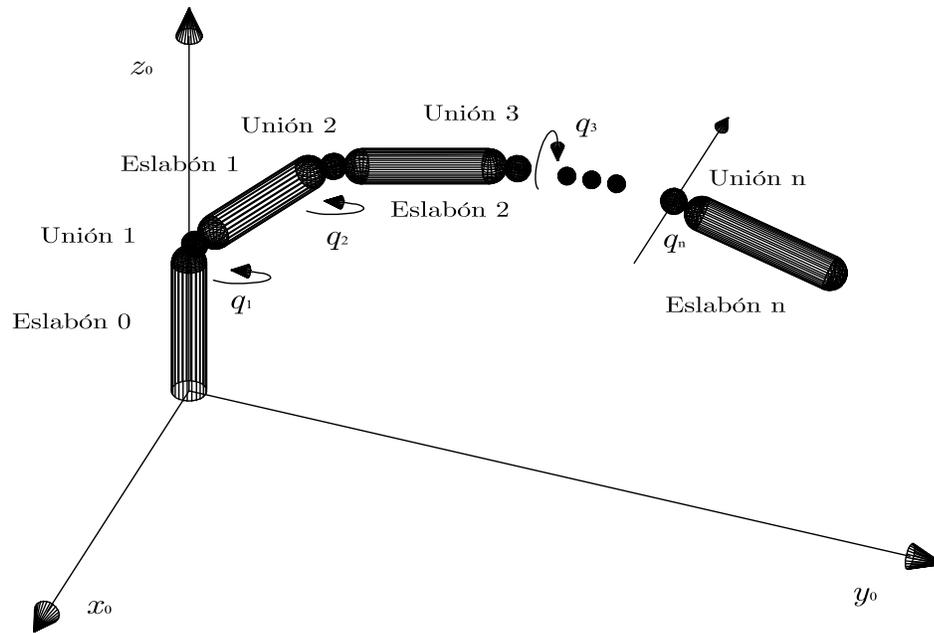


Figura 8: Diagrama abstracto de un robot manipulador de n g.d.l. (Kelly *et al.*, 2005).

El 'modelo dinámico' de un robot manipulador de n grados de libertad puede obtenerse usando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (Sciavicco y Siciliano, 2000; Kelly *et al.*, 2005):

El lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un robot manipulador de n grados de libertad se define por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (4)$$

donde $\mathbf{q} \in n \times 1$ es el desplazamiento articular, $\dot{\mathbf{q}} \in n \times 1$ es la velocidad articular, $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ representan respectivamente la energía cinética y potencial del sistema.

Usando (4) se obtiene la ecuación de movimiento de Lagrange para un manipulador de n grados de libertad como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (5)$$

donde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}$ es el vector de pares y fuerzas ejercidos externamente en cada articulación.

La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un robot manipulador de n g.d.l. formado por eslabones

rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad, puede expresarse como:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (6)$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función matricial llamada matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva.

Sustituyendo (6) en (4) se obtiene

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (7)$$

Utilizando la ecuación (7), la ecuación de movimiento de Lagrange (5) puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (8)$$

Obteniéndolo las derivadas correspondientes en (8) se obtiene

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (9)$$

La ecuación (9) puede escribirse de modo compacto como:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} &= \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right], \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \end{aligned}$$

La ecuación (10) es la ecuación dinámica para robots manipuladores de n grados de libertad. La función matricial $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis. El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de *fuerzas o pares gravitacionales* y el vector

$\tau \in \mathbb{R}^n$ es llamado *vector de fuerzas externas*.

Se supone que la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es obtenida usando los símbolos de Christoffel de primer tipo $c_{ijk}(\mathbf{q})$, definidos como (Spong, Hutchinson y Vidyasagar, 2005):

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right], \quad (11)$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$. El kj -ésimo elemento $C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede obtenerse de la siguiente manera:

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{1jk}(\mathbf{q}) \\ c_{2jk}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ c_{njk}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (12)$$

2.4.1. Propiedades del modelo

En este trabajo se usan las siguientes propiedades para el estudio de control de robots (Kelly *et al.*, 2005):

Propiedad 1: La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es simétrica y definida positiva, i.e.,

$$M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0. \quad (13)$$

Propiedad 2: La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ definida como en (12) satisface

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T = \dot{M}(\mathbf{q}), \quad (14)$$

para todo $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Independientemente de la manera en la que se obtenga $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, esta siempre satisface

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (15)$$

para todo $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 3: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante positiva k_{C_1} tal que

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \quad (16)$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 4: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz, es decir, existe una constante $k_g > 0$ tal que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad (17)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 5: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k' > 0$ tal que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k', \quad (18)$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Capítulo 3. Una familia de controladores para regulación de posición de una clase de robots manipuladores equipados con accionamiento de par sujeto a límite de par constante

Parte del contenido de este capítulo fue publicado recientemente en Salinas, Moreno-Valenzuela y Kelly (2016).

Se presenta el control de posición de robots manipuladores con accionamiento de par limitado por el par que puede producir. Los límites de la ‘zona segura de operación’ de los accionamientos son valores constantes. Se consideran robots manipuladores con fricción viscosa pero sin vector de gravedad. Suponiendo un modelo estático (función de saturación dura no lineal y no diferenciable) para el actuador, se propone una familia de controladores tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID). Se utiliza teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov para establecer condiciones de estabilidad asintótica local del origen del espacio de estado del sistema en malla cerrada. Una característica sobresaliente del esquema de control propuesto es que las condiciones de estabilidad no dependen de los niveles de saturación de los actuadores.

La mayoría de los controladores en la literatura sobre control de robots manipuladores aquí citada se basan en la selección de ganancias que dependen de los niveles de saturación de los actuadores. Para la sintonía del controlador propuesto se requiere el conocimiento de cotas de parámetros del robot, pero no se necesitan los parámetros del actuador.

3.1. Planteamiento del problema de control

3.1.1. Modelo de la planta: robot manipulador de n grados de libertad con fricción y sin vector de gravedad

La dinámica de un robot manipulador de n grados de libertad con eslabones rígidos y articulaciones rotacionales, con fricción viscosa y sin vector de gravedad y actuado por

par, puede ser derivado de modelos estudiados en Sciavicco y Siciliano (2000) y en Kelly *et al.*, (2005):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + F_v\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (19)$$

donde $F_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal constante y definida positiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa; mientras que $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se definen como en la sección 2.4.

El modelo (19) posee las propiedades 1, 2 y 3, en las ecuaciones (13), (14)–(15) y (16), respectivamente.

Con respecto al modelo del robot (19), en este trabajo se utiliza la siguiente suposición:

Suposición 1: Se dispone de mediciones de la posición \mathbf{q} y de la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$.

3.1.2. Modelo del actuador

Se supone que la entrada $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ al modelo del robot (19) es una función vectorial generada por actuadores de par (dispositivos de suministro de par) con capacidades de par limitadas. Se estudia el caso de zona segura de operación con límites constantes de par (ver figura 9).

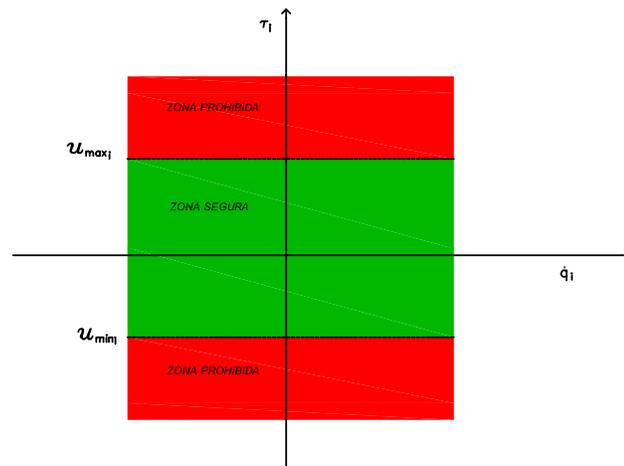


Figura 9: Curva característica de par–velocidad: la zona segura de par τ_i está limitado por valores constantes u_{\min_i}, u_{\max_i} ; mientras que no existe limitación alguna sobre la velocidad $\dot{q}_i \in \mathbb{R}$.

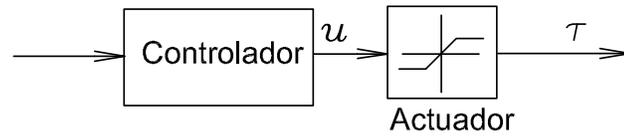


Figura 10: La salida u del controlador es el valor de par solicitado al actuador y la salida del actuador es τ (entrada a la planta).

La entrada τ al modelo del robot (19) es representada por:

$$\tau(\mathbf{u}) = \text{sat}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}), \quad (20)$$

donde τ es la salida del actuador y

$$\text{sat}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}) = \begin{bmatrix} \text{sat}(u_1; u_{\min_1}; u_{\max_1}) \\ \text{sat}(u_2; u_{\min_2}; u_{\max_2}) \\ \vdots \\ \text{sat}(u_n; u_{\min_n}; u_{\max_n}) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\min} = \begin{bmatrix} u_{\min_1} \\ u_{\min_2} \\ \vdots \\ u_{\min_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} u_{\max_1} \\ u_{\max_2} \\ \vdots \\ u_{\max_n} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

donde u_i son las acciones de control calculadas por el controlador y solicitadas a los actuadores correspondientes (ver figura 10). Las constantes $u_{\min_i} < 0$, $u_{\max_i} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) representan respectivamente los límites inferior y superior de par que el i -ésimo actuador puede proveer de forma segura (ver gráfica izquierda de la figura 11).

Suposición 2: Los límites de par u_{\min_i} y u_{\max_i} que los actuadores son capaces de proveer son constantes.

Se utiliza la definición de función de saturación dura presentada en la ecuación (1).

Como un elemento del vector en (21), la función de saturación dura $\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$ es:

$$\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) = \begin{cases} u_{\max_i}, & \text{si } u_i > u_{\max_i}, \\ u_i, & \text{si } u_{\min_i} \leq u_i \leq u_{\max_i}, \\ u_{\min_i}, & \text{si } u_i < u_{\min_i}. \end{cases} \quad (23)$$

donde $u_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es la variable independiente (par solicitado) y $u_{\min_i} < 0, u_{\max_i} > 0 \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) son los parámetros constantes de niveles o límites de saturación. La función $\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$ tiene características importantes presentadas en el apéndice A.1.

La resta entre u_i y $\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$ define la función zona muerta:

$$\begin{aligned} \text{dzn}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) &= u_i - \text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) \\ &= \begin{cases} u_i - u_{\max_i}, & \text{si } u_i > u_{\max_i}, \\ 0, & \text{si } u_{\min_i} \leq u_i \leq u_{\max_i}, \\ u_i - u_{\min_i}, & \text{si } u_i < u_{\min_i}. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

El vector $\text{dzn}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max})$ es definido como

$$\begin{aligned} \text{dzn}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}) &= \mathbf{u} - \text{sat}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}) \\ &= \begin{bmatrix} \text{dzn}(u_1; u_{\min_1}; u_{\max_1}) \\ \text{dzn}(u_2; u_{\min_2}; u_{\max_2}) \\ \vdots \\ \text{dzn}(u_n; u_{\min_n}; u_{\max_n}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

El lado izquierdo de la figura 11 muestra una gráfica de la función $\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$, mientras el lado derecho de la figura 11 presenta la función zona muerta $\text{dzn}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$.

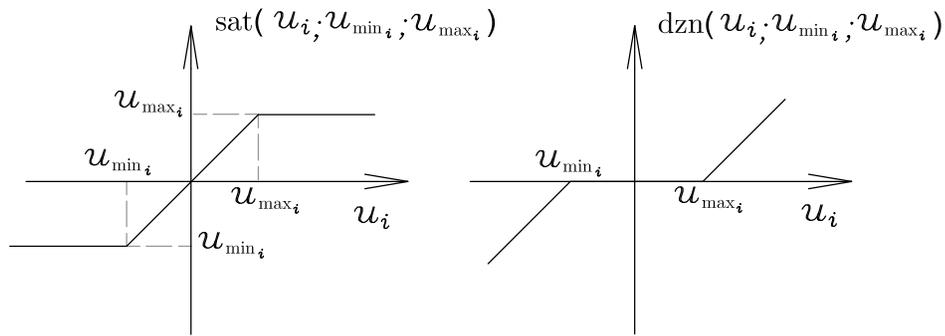


Figura 11: Gráficas de funciones. Izquierda: función saturación $\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$. Derecha: función zona muerta $\text{dzn}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$.

3.1.3. Objetivo de control

El objetivo de control es la regulación de posición articular:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d, \quad (26)$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante.

3.2. Esquema de control propuesto

Para resolver el objetivo de control (26), se propone la siguiente familia de controladores dinámicos no lineales (controladores tipo PID):

$$\mathbf{u} = [A + \alpha K_d] \tilde{\mathbf{q}} - K_d \dot{\mathbf{q}} + \alpha A \boldsymbol{\xi}, \quad (27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\mathbf{q}} - K_{aw} \psi(A \tilde{\mathbf{q}} + \alpha A \boldsymbol{\xi}), \quad (28)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ es el error de posición articular, A, K_d, K_{aw} son matrices constantes, diagonales y definidas positivas de dimensiones $n \times n$. La estructura de control (27)-(28) ha sido motivada de un controlador propuesto por Kanamori (2009). La ley de control (27)-(28) puede verse como un PD más un filtro no lineal de error de posición.

El parámetro α del controlador (27)-(28) se elige de acuerdo con

$$0 < \alpha < \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}\{F_v\} \lambda_{\min}\{M\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}}, \frac{\lambda_{\min}\{F_v\}}{\lambda_{\max}\{M\}} \right\}. \quad (29)$$

donde la constante $\lambda_{\min}\{F_v\}$ es el valor propio mínimo de la matriz F y las constantes

$\lambda_{\min}\{M\}$ y $\lambda_{\max}\{M\}$ son respectivamente, el valor propio mínimo y el valor propio máximo de la matriz $M(\mathbf{q})$.

El razonamiento detrás de la regla de sintonía (29) se presenta en la sección 3.3, donde se analiza el sistema en malla cerrada derivado del modelo del robot (19), modelo del actuador (20) y controlador (27)-(28).

Debido a que $\lambda_{\min}\{M\} \leq \lambda_{\max}\{M\}$, nótese que la desigualdad (29) puede escribirse como:

$$0 < \alpha < \frac{\lambda_{\min}\{F_v\}\lambda_{\min}\{M\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}}. \quad (30)$$

Para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la función $\psi(\mathbf{x})$ en (28) es una función vectorial con la siguiente estructura y propiedades:

$$\psi(\mathbf{x}) = [\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \dots, \psi_n(x_n)]^T, \quad (31)$$

$$\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (32)$$

donde $\psi_i(x_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función globalmente Lipschitz que satisface la desigualdad:

$$x_i\psi_i(x_i) > 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (33)$$

La figura 12 muestra un diagrama de la familia de controladores dinámicos propuesta (27)-(28). Por otra parte, la figura 13 muestra ejemplos de funciones Lipschitz $\psi_i(x_i)$, las cuales son definidas por el usuario. En la figura 13, $x_{\min_i} < 0, x_{\max_i} > 0$ (niveles de saturación), y $k > 0 \in \mathbb{R}$ es una constante.

Esta familia de controladores está inspirada en un controlador propuesto por Kanamori (2009). Al igual que la ley de Kanamori, la familia de controladores propuesta, logra el objetivo de regulación de posición de robots manipuladores de n g.d.l. con fricción viscosa y sin vector de gravedad; además, para la sintonía del controlador solo se elige cuidadosamente un parámetro, el cual no depende de los niveles de saturación.

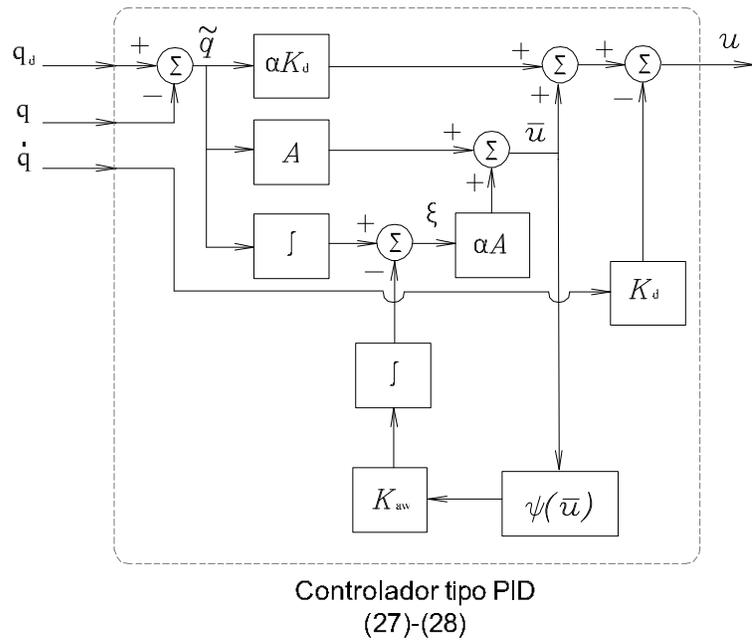


Figura 12: Familia de controladores dinámicos no lineales propuesta (tipo PID).

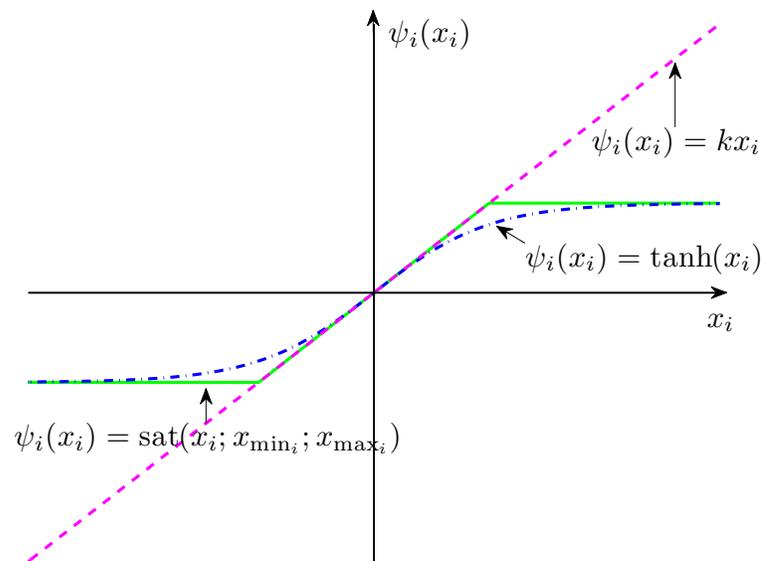


Figura 13: Ejemplos de funciones $\psi_i(x_i)$.

La diferencia entre el esquema de control propuesto y la ley de Kanamori, es que en lugar de la función zona muerta no diferenciable usada por la ley de Kanamori, el controlador aquí propuesto utiliza una función globalmente Lipschitz (elegida por el usuario) en la acción integral, lo que da lugar a una familia de controladores; además, el estudio aquí presentado provee una guía de fácil sintonización basada en cotas explícitas de los parámetros del controlador. La familia de controladores propuesta se apoya en un análisis riguroso de estabilidad. Dado que las condiciones de estabilidad no dependen de los niveles de saturación de los actuadores, en este diseño de control también se ha agregado una saturación dura “artificial”, logrando la protección de los actuadores (ver sección 3.4).

No se está afirmando que el controlador o la acción de control u están acotados. Sin embargo, la salida $\tau(u)$ del modelo de actuador (20) está acotada.

3.3. Análisis

El sistema en malla cerrada con el modelo de robot (19), modelo de actuador (20) y esquema de control propuesto (27)-(28) es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1}[\text{sat}((A + \alpha K_d)\tilde{\mathbf{q}} - K_d\dot{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - F_v\dot{\mathbf{q}}] \\ \tilde{\mathbf{q}} - K_{\text{aw}}\psi(A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

El origen del espacio de estado es el único punto de equilibrio de (34). Para asegurar el logro del objetivo de control (26), en lo siguiente, se usa el método directo de Lyapunov presentado en Vidyasagar (1993).

Aquí se usa la función candidata de Lyapunov propuesta por Kanamori (2009):

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha F_v & -\alpha M(\mathbf{q}) \\ -\alpha M(\mathbf{q}) & M(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T A^{-1} \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \mathbf{dzn}(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max})^T A^{-1} \mathbf{dzn}(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}). \quad (35)$$

donde $\bar{\mathbf{u}} = A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}$.

La función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (35) es continuamente diferenciable (la derivada de la función $\text{dzn}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})^2$ se obtiene en el apéndice A.4). Una prueba de que la función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (35) es definida positiva es como sigue.

Primero, se escribe $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ como:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = G_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + G_2(\tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}), \quad (36)$$

donde

$$G_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha F_v & -\alpha M(\mathbf{q}) \\ -\alpha M(\mathbf{q}) & M(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$G_2(\tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T A^{-1} \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \text{dzn}(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max})^T A^{-1} \text{dzn}(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}). \quad (38)$$

La función $G_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ en (37) es definida positiva porque el parámetro α satisface la condición (30), la cual es parte de la regla de sintonía (29). Además, nótese que

$$G_2(\tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) > 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}} = A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}. \quad (39)$$

Cuando $G_2(\tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$, se tiene:

$$A\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{\alpha} A\tilde{\mathbf{q}}. \quad (40)$$

Multiplicando ambos lados de (40) por la matriz A^{-1} , queda:

$$\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{\alpha} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (41)$$

Esto significa que si $G_2(\tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$, entonces la función $G_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es estrictamente positiva.

Debido a las condiciones (30) y (39) y a la ecuación (41) se tiene que $G_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$

y $G_2(\tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ se satisfacen de forma simultánea solo cuando $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. De otra forma $G_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ o $G_2(\tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ o ambas serán positivas. Por lo tanto, $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ es definida positiva.

La derivada temporal de (35) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) &= -\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T F_v \dot{\mathbf{q}} + \alpha \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \text{sat}(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max})^T A^{-1} \dot{\bar{\mathbf{u}}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Sustituyendo la ecuación de malla cerrada en (34) en la expresión de $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (42) y usando la propiedad 2, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T [F_v - \alpha M(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} - \alpha \text{sat}(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max})^T K_{\text{aw}} \boldsymbol{\psi}(\bar{\mathbf{u}}) \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}]^T [\text{sat}(\bar{\mathbf{u}} - K_d(\dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}); \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}) - \text{sat}(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max})] \\ &= -\dot{\mathbf{q}}^T [F_v - \alpha M(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + [\dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}]^T \left[\text{sat}(A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi} - K_d(\dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}); \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}) \right. \\ &\quad \left. - \text{sat}(A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max}) \right] \\ &\quad - \alpha \text{sat}(A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}; \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max})^T K_{\text{aw}} \boldsymbol{\psi}(A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (43)$$

Usando (21), (22) y (31), $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (43) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T F_v \dot{\mathbf{q}} + \alpha \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n [\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i] [\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) \\
&\quad - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})] \\
&\quad - \alpha \sum_{i=1}^n k_{aw_i} \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) \psi_i(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i)
\end{aligned} \tag{44}$$

$$= W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) + W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) + W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}),$$

donde

$$W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = -\dot{\mathbf{q}}^T F_v \dot{\mathbf{q}} + \alpha \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}, \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^n [\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i] [\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) \\
&\quad - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})],
\end{aligned} \tag{46}$$

$$W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = -\alpha \sum_{i=1}^n k_{aw_i} \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) \psi_i(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i). \tag{47}$$

En lo siguiente se demuestra que la función $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (44) es definida negativa localmente. Además, se presentan argumentos sobre los conjuntos donde $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$, $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ y $W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ son nulas.

- Usando la propiedad 3, el término $-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}$ en $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en la ecuación (45) está acotado como sigue:

$$\begin{aligned}
-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} &\leq |-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}| \\
&= |\alpha \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}| \\
&\leq \alpha \|\dot{\mathbf{q}}\| \|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}\| \\
&\leq \alpha k_{C_1} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|^2.
\end{aligned} \tag{48}$$

- El término $-\dot{\mathbf{q}}^T F_v \dot{\mathbf{q}}$ en $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ in (45) está acotado por:

$$-\dot{\mathbf{q}}^T F_v \dot{\mathbf{q}} \leq -\lambda_{\min}\{F_v\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (49)$$

- El término $\alpha \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ en $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (45) satisface:

$$\alpha \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \leq \alpha \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (50)$$

- De (48), (49) y (50), la función $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (45) puede ser acotada superiormente por:

$$W_1 \leq -[\lambda_{\min}\{F_v\} - \alpha k_{C_1} \|\tilde{\mathbf{q}}\| - \alpha \lambda_{\max}\{M\}] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (51)$$

Se elige una constante γ tal que:

$$0 < \gamma < \frac{1}{k_{C_1}} \left[\frac{\lambda_{\min}\{F_v\}}{\alpha} - \lambda_{\max}\{M\} \right], \quad (52)$$

donde la constante $k_{C_1} > 0$ es indicada en la propiedad 3 y

$$0 < \alpha < \frac{\lambda_{\min}\{F_v\}}{\lambda_{\max}\{M\}}, \quad (53)$$

lo cual asegura que el lado derecho de la desigualdad (52) sea positivo. Por lo tanto, la función $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (45) satisface

$$W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \quad \forall \|\tilde{\mathbf{q}}\| < \gamma, \quad (54)$$

con γ en (52), es decir, $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ es una función semidefinida negativa localmente.

Nótese que la condición (53) es parte de la regla de sintonía (29).

El conjunto de valores de $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen (54) y hacen $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ es:

$$E_1 = \{\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{\mathbf{q}}\| < \gamma, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n\}. \quad (55)$$

- La función $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (46) es semidefinida negativa globalmente:

El i -ésimo elemento de la suma en $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (46) es

$$[\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i][\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})] \quad (56)$$

y puede ser expresado como

$$y_i [\text{sat}(x_i - k_{d_i} y_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) - \text{sat}(x_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})], \quad (57)$$

donde

$$x_i = a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i, \quad (58)$$

$$y_i = \dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i, \quad (59)$$

$$k_{d_i} > 0.$$

Para todo $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, el término (57) satisface:

$$y_i [\text{sat}(x_i - k_{d_i} y_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) - \text{sat}(x_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})] \leq 0 \quad (60)$$

cuya prueba se presenta en el apéndice A.2.

Sustituyendo (58)-(59) en la desigualdad (60) se tiene que:

$$\begin{aligned} & [\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i][\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) \\ & \quad - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})] \leq 0 \\ & \forall \tilde{q}_i, \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (61)$$

Esto demuestra que $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (46) es una función semidefinida negativa globalmente.

El conjunto de valores de $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ es:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : [\dot{q}_i = \alpha \tilde{q}_i] \right. \\
&\quad \bigcup \left[\left[(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \leq u_{\min_i}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \bigcap (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \leq u_{\min_i}) \right] \right. \\
&\quad \bigcup \left[\left[(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \geq u_{\max_i}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \bigcap (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \geq u_{\max_i}) \right] \right. \\
&\quad \left. \bigcup [k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) = 0] \right] \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \left. \right\}. \tag{62}
\end{aligned}$$

- Dado que $\alpha, k_{aw_i} > 0$ y $\text{sat}(u_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})$ en (23) satisface (33), de $W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (47) se tiene:

$$\begin{aligned}
& - \alpha k_{aw_i} \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) \psi_i(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i) \\
& \leq 0 \text{ for } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{63}
\end{aligned}$$

La función $W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (47) es una función semidefinida negativa globalmente.

El conjunto de valores de $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen $W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ es:

$$\begin{aligned}
E_3 &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \right. \\
&\quad \left. \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) \psi_i(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i) = 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} \\
&= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i = 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}. \tag{64}
\end{aligned}$$

Con el conocimiento de que $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$, $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ y $W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (45)-(47) son semidefinidas negativas, el conjunto de valores de $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}$ y $\boldsymbol{\xi}$ que hacen $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ está dado por:

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) + W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) + W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : (W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0) \cap (W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0) \cap (W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0) \right\}, \quad (65)
\end{aligned}$$

El conjunto de valores de $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}$ y $\boldsymbol{\xi}$ que hacen $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ en (44) es la intersección de los conjuntos de valores de $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}$ y $\boldsymbol{\xi}$ que hacen $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$, $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ y $W_3(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$.

Nótese de (54) que $W_1(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ es negativa semidefinida localmente. Es conveniente definir el conjunto

$$S = \{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{\mathbf{q}}\| < \gamma \}. \quad (66)$$

Usando los conjuntos E_1, E_2, E_3 (respectivamente en (55), (62), (64)) y S en (66), el conjunto E en (65) puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in S : E_1 \cap E_2 \cap E_3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}
\end{aligned} \quad (67)$$

El origen 0 es el único punto que satisface el conjunto (67).

Lo anterior, asegura que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ es negativa definida localmente en S en (66). De acuerdo con el método directo de Lyapunov presentado en Vidyasagar (1993), el origen del espacio de estado de (34) es asintóticamente estable localmente (porque $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (35) es una función definida positiva por la condición (30) y $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi})$ en (44) es una función definida negativa localmente por la condición (53)). por lo tanto, el objetivo de control (26) se satisface localmente.

Las condiciones (30) y (53) son combinadas para obtener la regla de sintonía (29) tal que con el controlador (27)-(28) se satisface el objetivo de control de regulación (26).

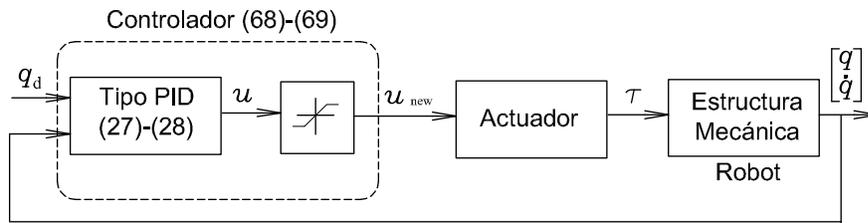


Figura 14: Incorporación de una saturación dura “artificial” para proteger a los actuadores.

3.4. Protección de los actuadores

Entre los parámetros del controlador, solo el parámetro escalar α debe ser elegido cuidadosamente, sintonizado según la regla (29), la cual es independiente de los niveles de saturación u_{\min_i} y u_{\max_i} . Esto significa que la estabilidad del origen del espacio de estado del sistema de malla cerrada no depende de los niveles de saturación de los actuadores.

Según los fabricantes de actuadores, tales como motores eléctricos, los actuadores físicos reales pueden funcionar de forma segura dentro de los niveles de saturación de par prescritos. Con el fin de proteger de daño a los actuadores, sus entradas u_i deberían estar dentro de los valores prescritos de capacidad de par. Esto conduce al siguiente enfoque para controlar de forma segura el sistema actuador–robot.

Una característica notable del controlador propuesto en (27)-(28) es que los niveles de saturación u_{\min_i} y u_{\max_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) de los actuadores no son requeridos para sintonizar el controlador (27)-(28). Debido a que solo se requiere que $u_{\min_i} < 0$ y $u_{\max_i} > 0$, se puede agregar por programación una función de saturación dura “artificial” para proteger a los actuadores (ver figura 14), mientras se mantiene la estabilidad asintótica del origen del espacio de estado del sistema en malla cerrada.

La saturación dura “artificial” se define como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{new}} &= \text{sat}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_{\text{new}_{\min}}; \mathbf{u}_{\text{new}_{\max}}) \\ &= \text{sat}\left([A + \alpha K_d]\tilde{\mathbf{q}} - K_d\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}; \mathbf{u}_{\text{new}_{\min}}; \mathbf{u}_{\text{new}_{\max}}\right), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\mathbf{q}} - K_{\text{aw}}\boldsymbol{\psi}(A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\boldsymbol{\xi}), \quad (69)$$

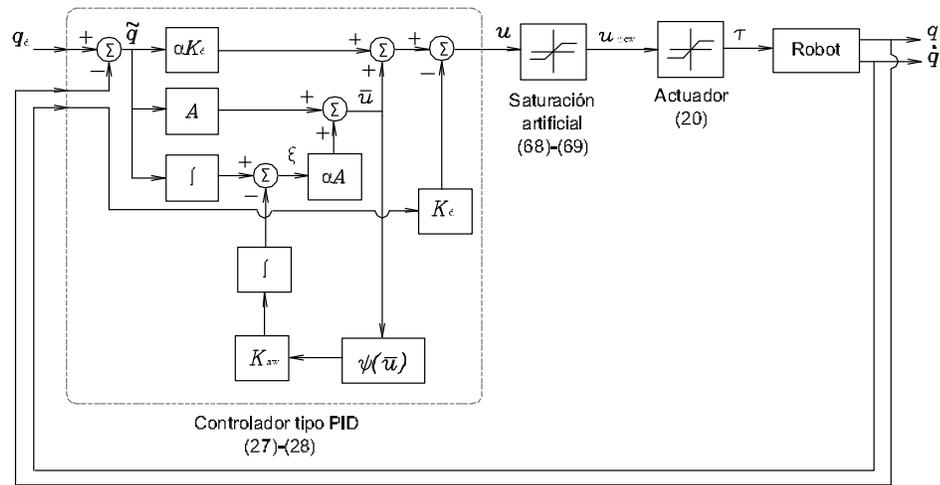


Figura 15: Sistema en malla cerrada con saturación dura “artificial” y actuador. El bloque “saturación artificial” es representado por las ecuaciones (68)-(69).

con α , A , K_d , K_{aw} y $\psi(x)$ definidas como en la sección 3.2 y

$$\mathbf{u}_{\text{new min}} = \begin{bmatrix} u_{\text{new min } 1} \\ u_{\text{new min } 2} \\ \vdots \\ u_{\text{new min } n} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{\text{new max}} = \begin{bmatrix} u_{\text{new max } 1} \\ u_{\text{new max } 2} \\ \vdots \\ u_{\text{new max } n} \end{bmatrix},$$

donde $u_{\text{new min } i} < 0$ y $u_{\text{new max } i} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) son los niveles de saturación de la saturación dura “artificial” y son definidos por el usuario.

Para proteger a los actuadores, los niveles de saturación artificiales deben elegirse de acuerdo con:

$$0 > u_{\text{new min } i} > u_{\text{min } i} \quad (70)$$

y

$$0 < u_{\text{new max } i} < u_{\text{max } i}, \quad (71)$$

lo cual evitará que el actuador i trabaje más allá de los límites de su capacidad.

En la figura 15 se muestra un diagrama del sistema en malla cerrada con la saturación dura “artificial” propuesta en (68)-(69). La entrada u a la saturación dura “artificial” es la salida u del controlador propuesto en (27)-(28) y la salida u_{new} de la saturación dura “artificial” es la entrada al modelo del actuador (20).

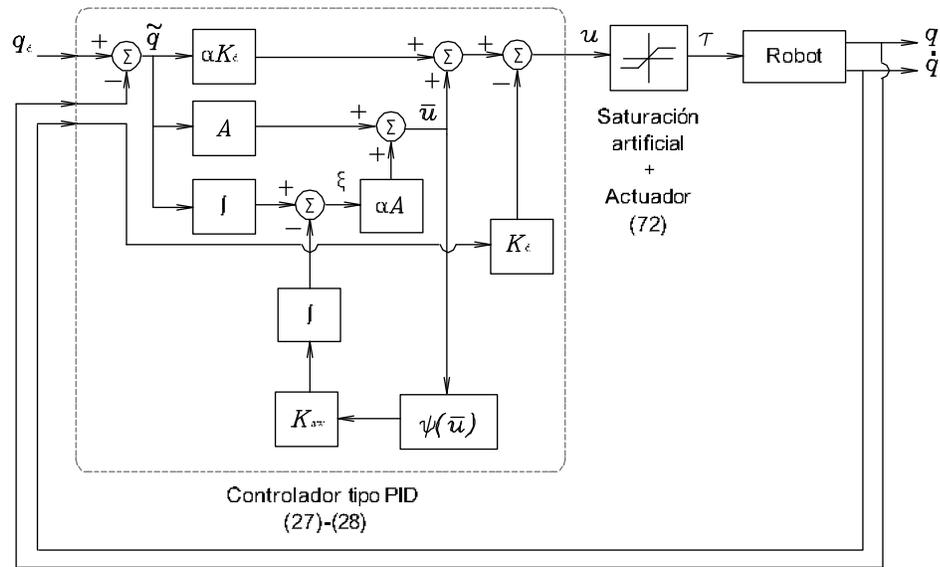


Figura 16: Sistema en malla cerrada con saturación dura “artificial” + actuador.

La combinación del modelo de actuador (20) y la saturación “artificial” en (68) lleva a:

$$\begin{aligned}
 \tau(\mathbf{u}_{\text{new}}) &= \text{sat} \left[\text{sat} \left(\mathbf{u}; \mathbf{u}_{\text{new}_{\min}}, \mathbf{u}_{\text{new}_{\max}} \right); \mathbf{u}_{\min}; \mathbf{u}_{\max} \right] \\
 &= \begin{bmatrix} \text{sat} \left[\text{sat} \left(u_1; u_{\text{new}_{\min 1}}, u_{\text{new}_{\max 1}} \right); u_{\min 1}; u_{\max 1} \right] \\ \text{sat} \left[\text{sat} \left(u_2; u_{\text{new}_{\min 2}}, u_{\text{new}_{\max 2}} \right); u_{\min 2}; u_{\max 2} \right] \\ \vdots \\ \text{sat} \left[\text{sat} \left(u_n; u_{\text{new}_{\min n}}, u_{\text{new}_{\max n}} \right); u_{\min n}; u_{\max n} \right] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \text{sat} \left[u_1; \text{máx} \left(u_{\text{new}_{\min 1}}, u_{\min 1} \right); \text{mín} \left(u_{\text{new}_{\max 1}}, u_{\max 1} \right) \right] \\ \text{sat} \left[u_2; \text{máx} \left(u_{\text{new}_{\min 2}}, u_{\min 2} \right); \text{mín} \left(u_{\text{new}_{\max 2}}, u_{\max 2} \right) \right] \\ \vdots \\ \text{sat} \left[u_n; \text{máx} \left(u_{\text{new}_{\min n}}, u_{\min n} \right); \text{mín} \left(u_{\text{new}_{\max n}}, u_{\max n} \right) \right] \end{bmatrix}. \quad (72)
 \end{aligned}$$

La figura 16 muestra un diagrama del sistema en malla cerrada con la saturación dura “artificial” + actuador, resultando en la ecuación (72).

El diagrama de bloques del sistema en malla cerrada presentado en la figura 16 es útil para propósitos de análisis; tiene la misma estructura que el sistema (34), por lo tanto, el mismo análisis y conclusiones de la sección 3.3, aplican *Mutatis Mutandis*.

Por lo tanto, si los límites de saturación de \mathbf{u}_{new} están dentro de los límites de satu-

ración de los actuadores, entonces los actuadores trabajarán de forma segura evitando los niveles de saturación de los actuadores e independientemente de los límites de saturación en u_{new} y los límites de saturación de los actuadores, se logrará el objetivo de control (26), al menos de forma local.

3.5. Estudio experimental

Para ilustrar los resultados teóricos a través de experimentos, se usó un brazo robótico de dos grados de libertad localizado en Instituto Politécnico Nacional-CITEDI. En las figuras 17 y 18 se presentan respectivamente, una fotografía y una gráfica del sistema actuador–robot CITEDI I.

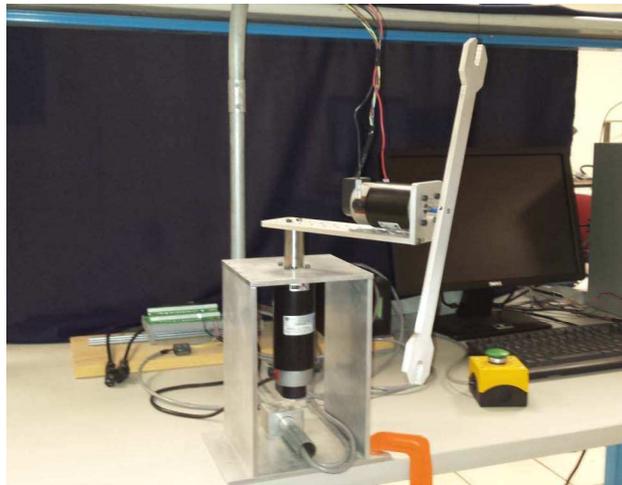


Figura 17: Foto de brazo robótico de dos g.d.l. CITEDI I.

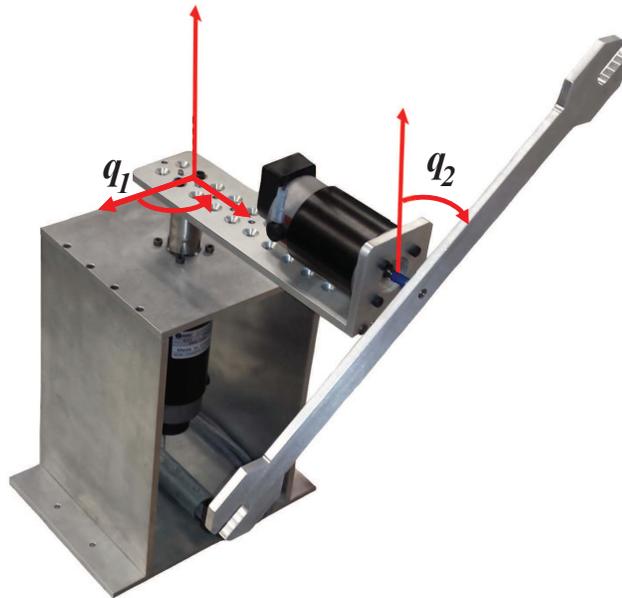


Figura 18: Diagrama de brazo robótico de dos g.d.l. CITED I.

La interfaz de datos se lleva a cabo con una tarjeta de adquisición de datos *Sensoray 626*, la cual tiene puertos de entrada para codificadores ópticos, puertos de entrada/salida bidireccionales digitales y analógicos (Moreno-Valenzuela, 2015).

Esta tarjeta de adquisición de datos permite interactuar con *Matlab[®]/Simulink[®]* y realizar experimentos en tiempo real a través de las librerías *Real-Time Windows Target*. Se usaron motores de DC del fabricante *Leadshine Technology*. Para la primera articulación se usa el motor modelo DCM50207D-1000 y para la segunda articulación se usa el modelo DCM50202D-1000. Cada motor es alimentado con un servo-amplificador *Advanced Motion Controls*, el modelo 30A20AC para el primer motor y el modelo 16A20AC para el segundo motor. Los actuadores tienen codificadores ópticos con una resolución de 4000 pulsos por revolución (Moreno-Valenzuela, 2015).

Para la implementación del controlador se utilizó el *software Matlab[®]/Simulink[®]* con las siguientes configuraciones:

- Método numérico de integración: ode3 (Bogacki–Shampine)
- Periodo de muestreo: 0.001
- Duración del experimento: 10 [s].

Para sintonía del controlador (parámetro α en (29)) y propósitos experimentales, los parámetros físicos del correspondiente modelo del robot (19) son descritos por (Moreno-Valenzuela, 2015):

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0.0034 & 0 \\ 0 & 0.0006 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

donde

$$M_{11} = 0.0220 + 0.0098 \cos^2(q_2) + 0.0122 \sin^2(q_2),$$

$$M_{22} = 0.0031,$$

$$C_{11} = \frac{1}{2} 0.0024 \dot{q}_2 \sin(2q_2),$$

$$C_{12} = \frac{1}{2} 0.0024 \dot{q}_1 \sin(2q_2),$$

$$C_{21} = -\frac{1}{2} 0.0024 \dot{q}_1 \sin(2q_2),$$

Los valores numéricos para $\lambda_{\min}\{M\}$, $\lambda_{\max}\{M\}$, y k_{C_1} ; así como los límites de par usados en este estudio para los actuadores 1 y 2, se listan en la tabla 1.

Tabla 1: Valores numéricos de los parámetros del estudio experimental.

Parámetro	Valor
u_{\min_1}	-1.3455 Nm
u_{\min_2}	-0.551 Nm
u_{\max_1}	1.3455 Nm
u_{\max_2}	0.551 Nm
$\lambda_{\min}\{F_v\}$	0.0006
$\lambda_{\min}\{M\}$	0.0031
$\lambda_{\max}\{M\}$	0.0342
k_{C_1}	0.0096

El controlador propuesto en (27)–(28) se sintoniza fácilmente dado que solo un parámetro (α en (29)) debe ser seleccionado usando las cotas $\lambda_{\min}\{M\}$, $\lambda_{\max}\{M\}$, y k_{C_1} . Utilizando los valores de la Tabla 1, la desigualdad (29) se convierte en:

$$0 < \alpha < 0.0016.$$

Para los experimentos se elige α como:

$$\alpha = 0.0015. \quad (76)$$

La desigualdad (52) se convierte en:

$$0 < \gamma < 38.104. \quad (77)$$

Las funciones $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2$) definidas por el usuario usadas en el controlador (27)–(28) fueron:

$$\psi_i(x) = \tanh(x_i), \quad i = 1, 2.$$

Los niveles de saturación definidos por el usuario u_{newmin_i} en (70) y u_{newmax_i} en (71) fueron:

$$u_{\text{newmax}_1} = 0.5u_{\text{max}_1},$$

$$u_{\text{newmin}_1} = 0.5u_{\text{min}_1},$$

$$u_{\text{newmax}_2} = 0.5u_{\text{max}_2},$$

$$u_{\text{newmin}_2} = 0.5u_{\text{min}_2}.$$

Usando condiciones similares, se realizó un estudio comparativo de las respuestas usando el controlador propuesto (27)–(28), el controlador PID lineal clásico (estudiado en

los libros de texto (Ogata, 2010)) :

$$\mathbf{u} = [A + \alpha K_d]\tilde{\mathbf{q}} - K_d\dot{\mathbf{q}} + \alpha A\xi, \quad (78)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\mathbf{q}} \quad (79)$$

y la ley de Kanamori (2009):

$$\mathbf{u} = [A + \alpha K_d]\tilde{\mathbf{q}} - K_d\dot{\mathbf{q}} + \alpha A\xi, \quad (80)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{\mathbf{q}} - K_{aw} \mathbf{dzn}(A\tilde{\mathbf{q}} + \alpha A\xi). \quad (81)$$

Para sintonizar el controlador (80)-(81), el parámetro α debería ser elegido cuidadosamente de tal forma que se satisfagan las siguientes condiciones (Kanamori, 2009):

$$F_v - 2\alpha M(\mathbf{q}) > 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad (82)$$

$$F_v - (\alpha + \sqrt{\alpha})M(\mathbf{q}) > 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (83)$$

Nótese que el valor de α en (76) satisface las condiciones (82)-(83).

Los parámetros restantes del controlador se establecieron en:

$$A = \text{diag}\{10, 10\},$$

$$K_d = \text{diag}\{0.1, 0.1\}, \quad (84)$$

$$K_{aw} = \text{diag}\{100, 100\}.$$

Los tres controladores puestos a prueba, esquema de control propuesto en (27)-(28), controlador PID (78)-(79) y la ley de Kanamori (80)-(81) se implementaron usando las mismas ganancias de control (76) y (84). La diferencia de un controlador con respecto a los otros dos es la forma en la cual se calcula la acción integral $\xi(t)$.

Se consideraron condiciones iniciales nulas en el robot (posiciones y velocidades articulares) y la constante de posición articular deseada fue $\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ [rad]. Por lo tanto, la

condiciones iniciales satisfacen:

$$\left\| \begin{array}{c} q_{d1} - q_1(0) \\ q_{d2} - q_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right\| = 2.8284. \quad (85)$$

Dada la restricción de γ en (77), las condiciones iniciales están en el conjunto S en (66).

En las figuras 19-24 se presentan los resultados experimentales. En las figuras 19-22 las líneas grises delgadas continuas corresponden al resultado experimental usando el controlador PID clásico (78)-(79), las líneas café gruesas entrecortadas corresponden al resultado experimental usando la ley de Kanamori en (80)-(81) y las líneas azules gruesas continuas corresponden al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).

Las figuras 19 y 20 muestran las posiciones articulares $q_1(t)$ y $q_2(t)$. Nótese que para el esquema de control propuesto (27)-(28) y el controlador PID clásico (78)-(79), las posiciones articulares $q_1(t)$ y $q_2(t)$ se aproximan a q_{d1} y q_{d2} (líneas rojas entrecortadas), respectivamente. Sin embargo, las posiciones articulares $q_1(t)$ y $q_2(t)$ obtenidas implementando la ley de Kanamori (80)-(81) convergen lentamente. La razón para este comportamiento es la función zona–muerta usada en (81). Simulaciones numéricas para la ley de Kanamori en (80)-(81) mostraron que después de un largo tiempo, las posiciones articulares $q_1(t)$ y $q_2(t)$ tienden a q_{d1} y q_{d2} , respectivamente. Se podría obtener una convergencia más rápida para la ley de Kanamori seleccionando una ganancia K_{aw} más pequeña, lo cual fue verificado con simulaciones numéricas.

Nótese de las figuras 19 y 20 que las respuestas de posición de los esquemas examinados (controlador PID clásico, ley de Kanamori y el esquema propuesto) están subamortiguadas. Lo que se pretende con estos resultados, es permitir observar el efecto de la saturación de los tres actuadores.

Las figuras 21 y 22 muestran las salidas u_{new1} y u_{new2} de la saturación dura “artificial” (68)-(69) (entrada al modelo de actuador (20)). Las salidas u_{new1} y u_{new2} se mantienen dentro de los límites de saturación (líneas rojas entrecortadas horizontales).

La figura 23 presenta en línea gris delgada continua la salida u_1 del controlador (27)-

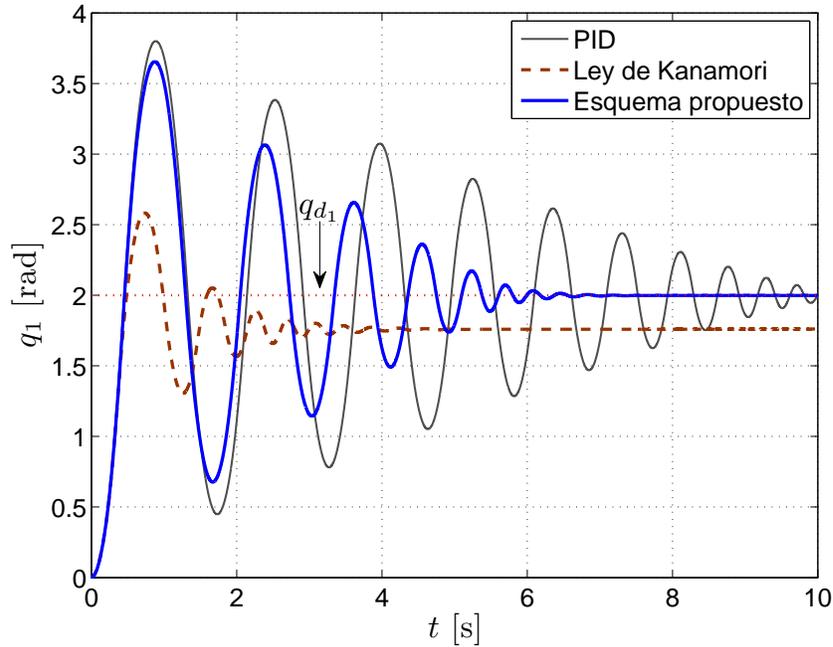


Figura 19: Posición $q_1(t)$ del brazo robótico de dos grado de libertad. La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).

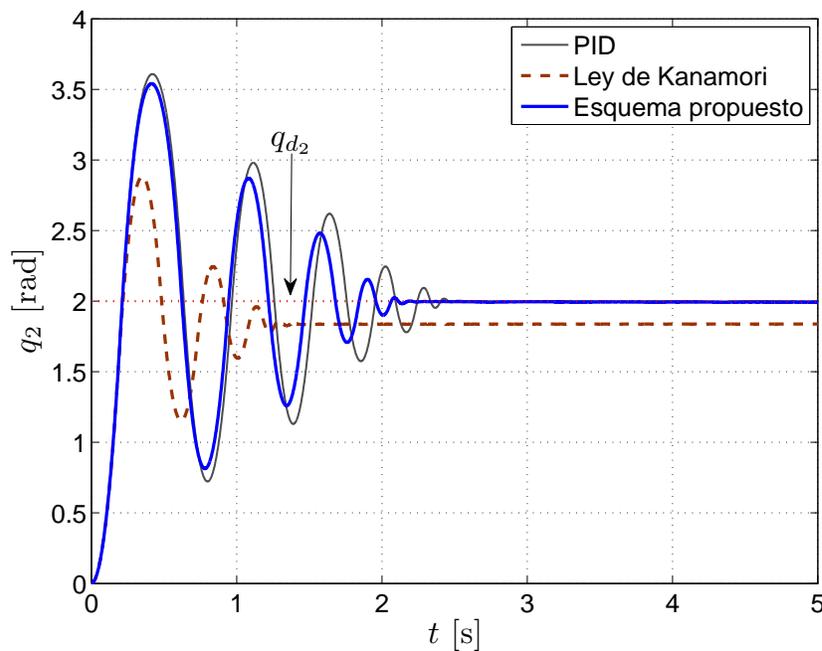


Figura 20: Posición $q_2(t)$ del brazo robótico de dos grados de libertad. La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).

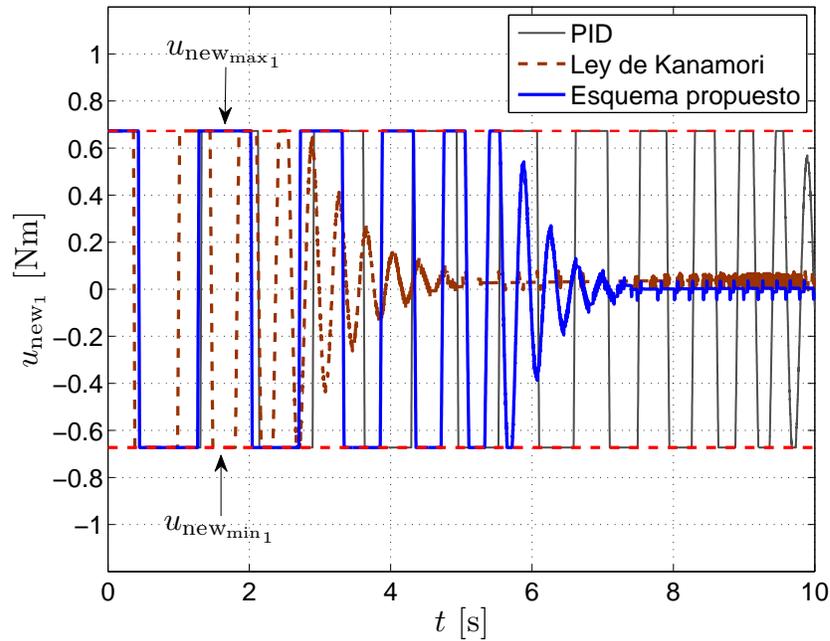


Figura 21: Salida u_{new_1} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).

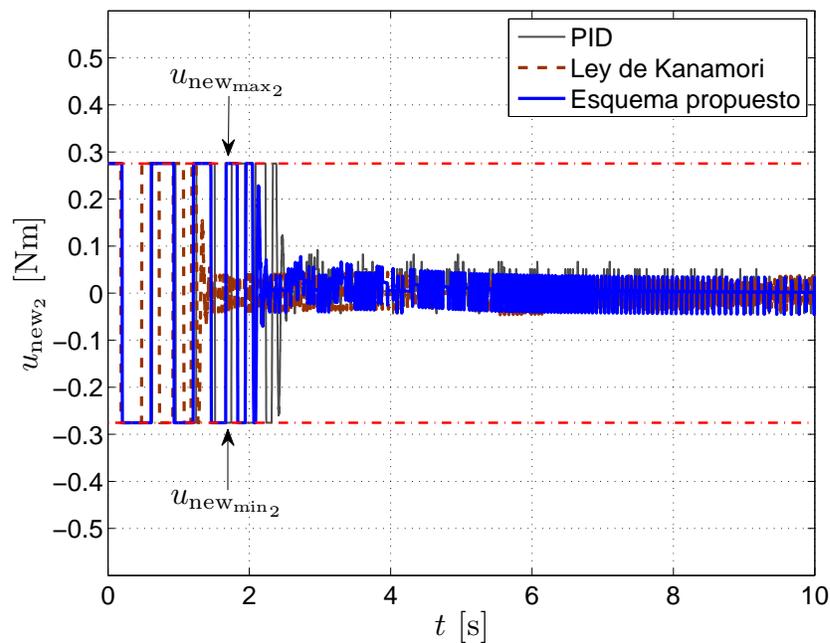


Figura 22: Salida u_{new_2} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde al resultado experimental usando el controlador PID lineal clásico (78)-(79), la línea gruesa café entrecortada corresponde al resultado experimental usando la ley de Kanamori (80)-(81) y la línea gruesa azul continua corresponde al resultado experimental usando el controlador propuesto (27)-(28).

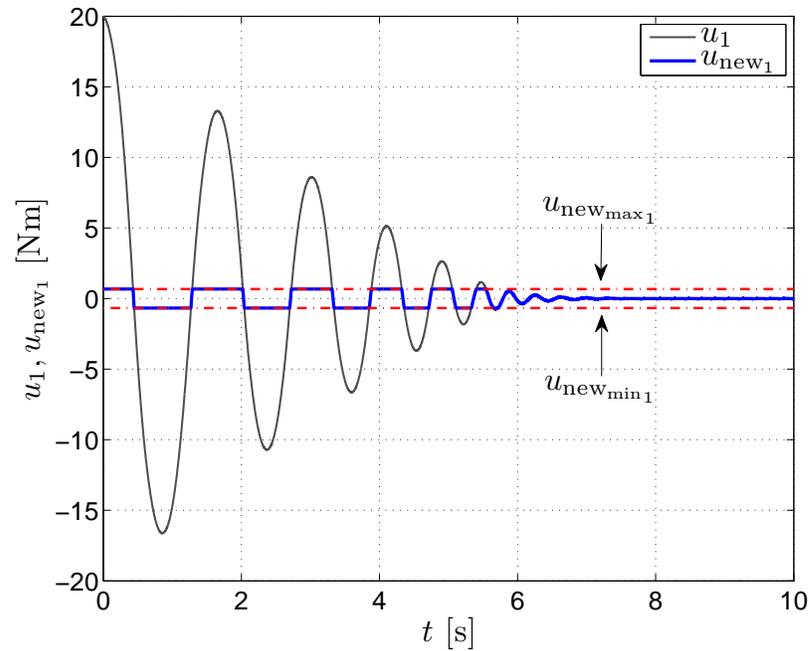


Figura 23: Salida u_1 del controlador (27)-(28) y salida u_{new_1} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde a u_1 y la línea gruesa azul continua corresponde a u_{new_1} .

(28) y en línea azul gruesa continua la salida u_{new_1} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La figura 24 presenta en línea gris delgada continua la salida u_2 del controlador (27)-(28) y en línea azul gruesa continua la salida u_{new_2} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). Las salidas u_{new_1} y u_{new_2} permanecen dentro de los límites de saturación $u_{new_{min_i}}, u_{new_{max_i}}$ ($i = 1, 2$) a pesar de los altos valores ($i = 1, 2$) en las salidas u_1 y u_2 del controlador.

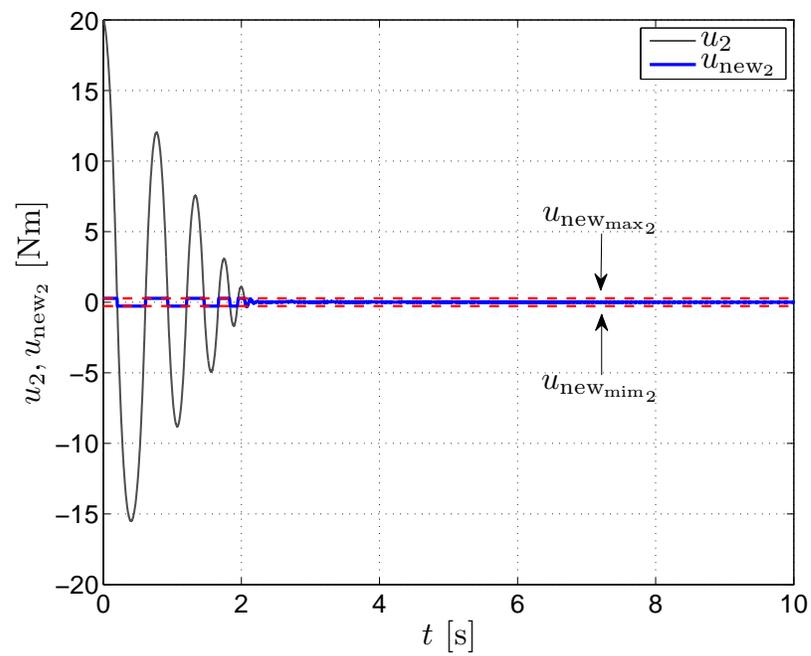


Figura 24: Salida u_2 del controlador (27)-(28) y salida u_{new_2} de la saturación dura “artificial” (68)-(69). La línea delgada gris continua corresponde a u_2 y la línea gruesa azul continua corresponde a u_{new_2} .

Capítulo 4. Regulación de posición con límite de velocidad para un mecanismo pendular con accionamiento de par

En este capítulo se aborda la regulación de posición de un mecanismo no lineal (mecanismo pendular) con accionamiento de par para el caso general donde los límites de velocidad están acotados en función de la posición, pero como caso especial, los límites de velocidad pueden ser constantes (lo cual, es la situación práctica que motiva esta parte de la investigación). Se propone un controlador dinámico que cuida del actuador manteniendo la operación de este dentro de los límites seguros de velocidad. Se presenta un subconjunto del dominio de inicio.

4.1. Planteamiento del problema de control

4.1.1. Modelo de la planta: péndulo

El péndulo es un sistema rotacional no lineal de un grado de libertad que cuenta con ‘par gravitacional’ (Kelly *et al.*, 2005).

El péndulo con fricción puede ser modelado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal normalizada:

$$J\ddot{q} + f_v\dot{q} + mgl \sin(q) = \tau, \quad (86)$$

donde $J > 0$ es el momento de inercia, $m > 0$ es la masa que se supone concentrada a una distancia $l \geq 0$ del eje de rotación, $f_v \geq 0$ es el coeficiente de fricción viscosa, y $g > 0$ es la aceleración de la gravedad; las variables q , \dot{q} y \ddot{q} son, respectivamente, la posición, la velocidad y la aceleración angular, y τ es el par de ‘entrada’. En la figura 25 se muestra un diagrama esqueleto del péndulo.

El modelo de la planta (86) puede verse como un caso particular simple de sistemas de mayor complejidad y reto como son los robots manipuladores de n grados de libertad con accionamiento de par (Kelly *et al.*, 2005).

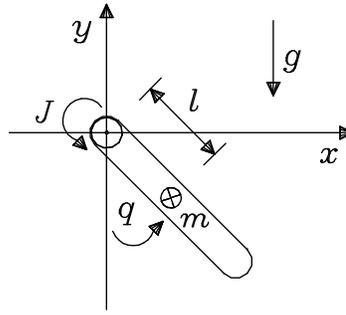


Figura 25: Diagrama del péndulo.

El modelo en (86) satisface las propiedades 1, 4 y 5, en las ecuaciones (13), (17) y (18) del capítulo 2 ya que el término de inercia es una constante positiva:

$$M(q) = J$$

y en consecuencia $C(q, \dot{q}) = 0$. Además,

$$\begin{aligned} |g(q)| &= mgl \sin(q) \\ &\leq k' \\ &= mgl \\ &= k_g. \end{aligned} \tag{87}$$

Con respecto al sistema a controlar (86), en este capítulo se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 3: Se conocen los valores de $J > 0$ y $f_v \geq 0$.

Suposición 4: Se conoce el producto $mgl \geq 0$.

Suposición 5: Se dispone de mediciones de la posición q y de la velocidad \dot{q} .

Suposición 6: La 'zona segura de operación' del actuador de par está definida por la región que corresponde a valor absoluto de velocidad $|\dot{q}|$ acotado por $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$, donde

$$\text{vel}^- \leq \text{vel}_{\text{Max}}(q) \leq \text{vel}^+, \quad \forall q \in \mathbb{R} \tag{88}$$

con $0 < \text{vel}^- \leq \text{vel}^+ < \infty$. La función $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ es continua y diferenciable y su derivada está acotada, es decir, existe una constante $k_{\text{vel}} < \infty$ tal que:

$$\left| \frac{d(\text{vel}_{\text{Max}}(q))}{dq} \right| < k_{\text{vel}} \quad \forall q \in \mathbb{R}. \quad (89)$$

Como un caso particular, es válido tomar a la función de velocidad límite $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ como independiente de la posición q , es decir, podría ser una constante positiva vel^+ :

$$\text{vel}_{\text{Max}}(q) = \text{vel}^- = \text{vel}^+ > 0. \quad (90)$$

Una gráfica con zona de operación permitida de velocidad en función de la posición se muestra en la figura 26.

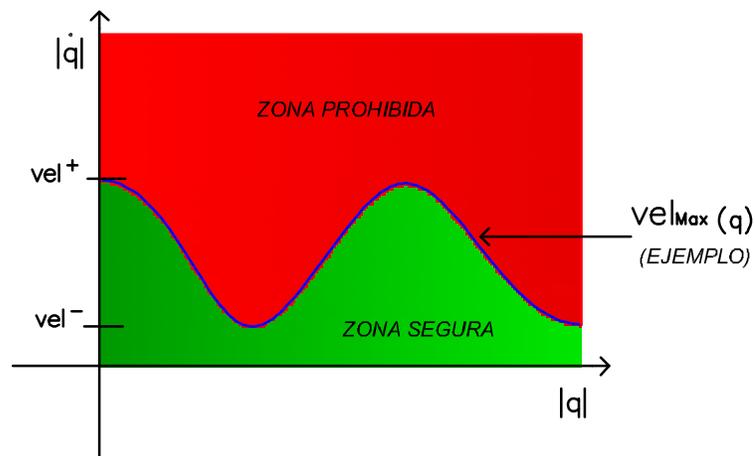


Figura 26: Copia de la figura 4. Gráfica con zona de operación permitida (en color verde) de velocidad \dot{q} como función de la posición q .

4.1.2. Modelo del actuador

En este capítulo se considera el siguiente modelo identidad del actuador de par:

$$\tau = u, \quad (91)$$

donde u es la acción de control que será calculada por el controlador.

4.1.3. Objetivo de control

Como objetivo de control, se establece la regulación de posición con restricción de velocidad de acuerdo con:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d \quad (92)$$

y

$$|\dot{q}(t)| \leq \text{vel}_{\text{Max}}(q(t)) \quad \forall t \geq 0, \quad (93)$$

donde $q(t)$ es la posición en el tiempo t , q_d es la posición deseada (constante conocida) y $\text{vel}_{\text{Max}}(q(t))$ con las propiedades (88)-(89). Considerando (90), como situación particular de (93) se tiene el caso de interés práctico:

$$|\dot{q}(t)| \leq \text{vel}^+ \quad \forall t \geq 0.$$

La regulación de posición con límite de velocidad constante es el caso de estudio presentado en Ngo y Mahony (2006).

4.2. Esquema de control propuesto

Para resolver el objetivo de control (92)-(93) se propone el siguiente controlador dinámico no lineal:

$$u = J\gamma_1 \text{sech}^2(k_s \xi) k_s \tilde{q} - J\gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \text{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p \dot{q} + J\gamma_2 \frac{d(\text{vel}_{\text{Max}}(q))}{dq} \tanh(k_p \tilde{q}) \dot{q} + f_v \dot{q} + mgl \sin(q), \quad (94)$$

$$\dot{\xi} = \tilde{q}, \quad (95)$$

donde $k_s, k_p > 0$. La variable de error de posición \tilde{q} se define como:

$$\tilde{q} \triangleq q_d - q. \quad (96)$$

Los parámetros γ_1 y γ_2 se eligen de acuerdo con las siguientes reglas de sintonía:

$$0 < \gamma_1 \leq \alpha \text{vel}^-, \quad (97)$$

donde

$$0 < \alpha < 1. \quad (98)$$

$$0 < \gamma_2 \leq 1 - \alpha, \quad (99)$$

$$\gamma_2 < \frac{\gamma_1}{\text{vel}^+} \leq \alpha \frac{\text{vel}^-}{\text{vel}^+}. \quad (100)$$

Se supone que la velocidad inicial $\dot{q}(0)$ es “pequeña” en el sentido:

$$|\dot{q}(0)| < \gamma_1 - \gamma_2 \text{vel}^+. \quad (101)$$

El lado derecho de la desigualdad (101) es positivo por que se satisface (100).

La condición inicial $\xi(0)$ es considerada como un parámetro del controlador (94)-(95) y se obtiene usando la siguiente “regla de sintonía”:

$$\xi(0) = \frac{1}{k_s} \text{arctanh} \left(\frac{\dot{q}(0) - \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q(0)) \tanh(k_p[q_d - q(0)])}{\gamma_1} \right). \quad (102)$$

La ecuación (102) está bien definida debido a que se satisfacen las condiciones (100) y (101). La figura 27 muestra una gráfica de $\xi(0)$ definida en (102).

Dada la planta (86), el actuador (91), el objetivo de control en (92) y (93) y el controlador en (94)-(95), un subconjunto del dominio de inicio es:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : q(0) \in \mathbb{R}, |\dot{q}(0)| < \gamma_1 - \gamma_2 \text{vel}^+ \right\}. \quad (103)$$

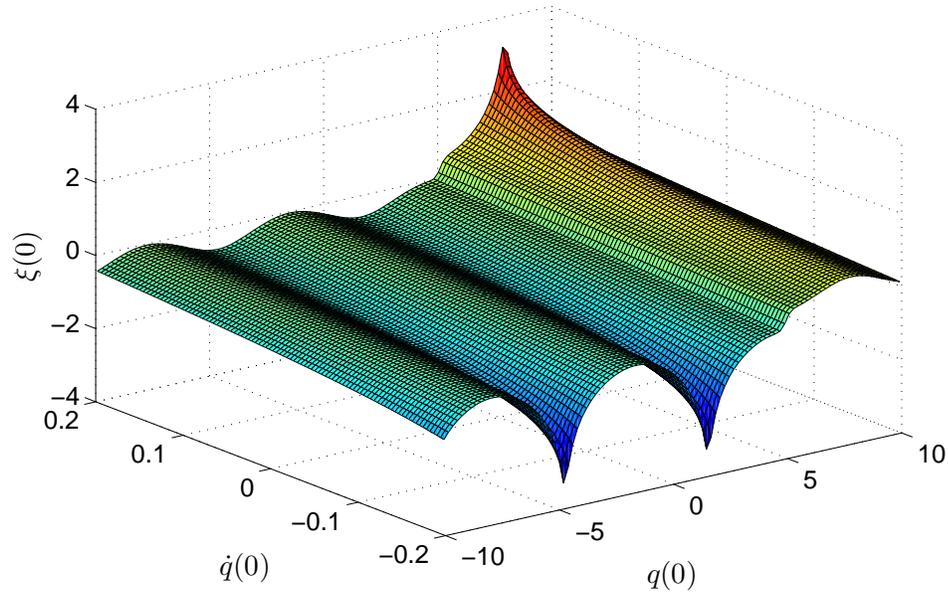


Figura 27: Gráfica de $\xi(0)$ en (102) con $q_d = 5$, $k_p = 5$, $\gamma_1 = 0.8$ y $\gamma_2 = 0.2$.

4.3. Análisis

4.3.1. Acotamiento de velocidad dependiente de la posición

Usando el modelo del actuador en (91), la acción de control u en (94), y reemplazando en el modelo de la planta (86) se obtiene:

$$\ddot{q} = \gamma_1 \text{sech}^2(k_s \xi) k_s \tilde{q} - \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \text{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p \dot{q} + \gamma_2 \frac{d(\text{vel}_{\text{Max}}(q))}{dq} \tanh(k_p \tilde{q}) \dot{q}, \quad (104)$$

Usando la ecuación (95) y definición de \tilde{q} en (96), la ecuación (104) puede escribirse como:

$$\ddot{q} = \gamma_1 \text{sech}^2(k_s \xi) k_s \dot{\xi} + \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \text{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p \dot{\tilde{q}} + \gamma_2 \frac{d(\text{vel}_{\text{Max}}(q))}{dq} \tanh(k_p \tilde{q}) \dot{q}, \quad (105)$$

Nótese que la ecuación (105) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d(\gamma_1 \tanh(k_s \xi))}{dt} + \frac{d(\gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tanh(k_p \tilde{q}))}{dt}, \quad (106)$$

cuya integral produce:

$$\dot{q} = \gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tanh(k_p \tilde{q}) + C_0, \quad (107)$$

donde C_0 es una constante asociada a las condiciones iniciales.

Usando las condiciones iniciales $\tilde{q}(0)$, $\dot{q}(0)$ y $\xi(0)$, se obtiene

$$C_0 = \dot{q}(0) - \gamma_1 \tanh(k_s \xi(0)) - \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q(0)) \tanh(k_p \tilde{q}(0)). \quad (108)$$

Sustituyendo $\xi(0)$ de (102) en (108) se obtiene

$$C_0 = 0. \quad (109)$$

Por lo tanto, la velocidad \dot{q} en (107) se puede escribir como:

$$\dot{q} = \gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tanh(k_p \tilde{q}). \quad (110)$$

De (110), la rapidez $|\dot{q}|$ puede ser acotada como sigue:

$$\begin{aligned}
|\dot{q}| &= |\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tanh(k_p \tilde{q})| \\
&\leq |\gamma_1 \tanh(k_s \xi)| + |\gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tanh(k_p \tilde{q})| \\
&\leq |\gamma_1| + |\gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q)| \\
&= \gamma_1 + \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \\
&\leq \alpha \text{vel}^- + (1 - \alpha) \text{vel}_{\text{Max}}(q) \\
&\leq \alpha \text{vel}_{\text{Max}}(q) + (1 - \alpha) \text{vel}_{\text{Max}}(q) \\
&= \text{vel}_{\text{Max}}(q),
\end{aligned} \tag{111}$$

donde se han usado las condiciones (88) y (97)-(99).

La desigualdad (111) significa que usando el controlador (94)–(95), con la sintonía de sus parámetros indicada en (97) y (99) la velocidad \dot{q} se mantiene acotada en el sentido de la desigualdad (93), siempre que las condiciones iniciales del péndulo arranquen en la estima \mathcal{S} del dominio de inicio definida en (103).

4.3.2. Regulación de posición

Usando (95) y (110) una representación del sistema en malla cerrada en términos de \tilde{q} y de ξ puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \tanh(k_s \xi) - \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q_d - \tilde{q}) \tanh(k_p \tilde{q}) \\ \tilde{q} \end{bmatrix}, \tag{112}$$

el cual, es un sistema no lineal autónomo que tiene un equilibrio único en $[\tilde{q} \ \xi]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Para propósitos de análisis, se propone la siguiente función continuamente diferenciable:

$$V(\tilde{q}, \xi) = \frac{1}{2} \frac{k_s}{\gamma_1} \tilde{q}^2 + \ln(\cosh(k_s \xi)). \tag{113}$$

La función $V(\tilde{q}, \xi)$ en (113) es definida positiva globalmente y radialmente desacotada. Por lo tanto, $V(\tilde{q}, \xi)$ califica como una función candidata de Lyapunov. La figura 28 muestra

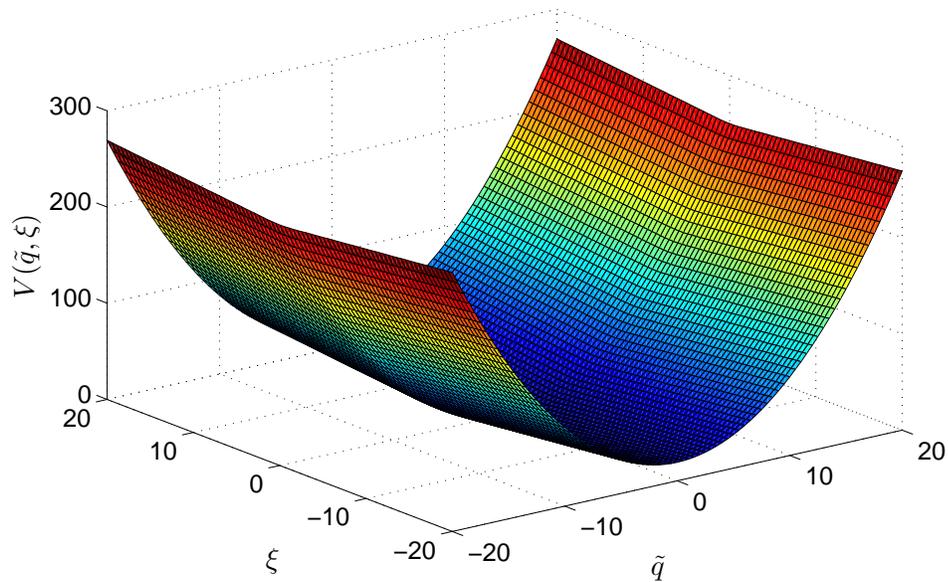


Figura 28: Gráfica de la función $V(\tilde{q}, \xi)$ en (113) con $k_s = 1$ y $\gamma_1 = 0.8$.

una gráfica de $V(\tilde{q}, \xi)$.

La derivada temporal de $V(\tilde{q}, \xi)$ en (113) es:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{q}, \xi) &= \frac{k_s}{\gamma_1} \tilde{q} \dot{\tilde{q}} + \tanh(k_s \xi) k_s \dot{\xi} \\
 &= -\frac{k_s}{\gamma_1} \tilde{q} [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tanh(k_p \tilde{q})] + \tanh(k_s \xi) k_s \tilde{q} \\
 &= -\frac{k_s \gamma_2}{\gamma_1} \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tilde{q} \tanh(k_p \tilde{q}).
 \end{aligned} \tag{114}$$

Debido a que los parámetros k_s , γ_1 , y γ_2 son todos constantes positivas y la función $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ satisface (88) (es estrictamente positiva), entonces $\dot{V}(\tilde{q}, \xi)$ en (114) es una función semidefinida negativa globalmente y por lo tanto:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \xi) \leq 0 \quad \forall \tilde{q}, \xi \in \mathbb{R}. \tag{115}$$

De acuerdo con el método directo de Lyapunov (Vidyasagar, 1993; Kelly *et al.*, 2005), esto implica que el equilibrio $[\tilde{q} \ \xi]^T = 0 \in \mathbb{R}^2$ del sistema en malla cerrada (112) es estable en el sentido de Lyapunov y puede demostrarse que ambas variables de estado \tilde{q} y ξ están acotadas.

Se hace uso del lema 2.3 (lema de Barbalat “tipo Lyapunov” (Slotine y Li, 1991)) con el fin de demostrar el logro del objetivo de regulación de posición (92).

Tomando la derivada temporal de $\dot{V}(\tilde{q}, \xi)$ en (114), se desprende que:

$$\begin{aligned}\ddot{V}(\tilde{q}, \xi) &= \frac{k_s \gamma_2}{\gamma_1} \left[\frac{d(\text{vel}_{\text{Max}}(q))}{dq} \tilde{q} \tanh(k_p \tilde{q}) \right. \\ &\quad \left. - \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tanh(k_p \tilde{q}) - \text{vel}_{\text{Max}}(q) \tilde{q} \text{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p \right] \dot{q} \\ &\leq \frac{k_s \gamma_2}{\gamma_1} \left[k_{\text{vel}} |\tilde{q}| + \text{vel}^+ + \text{vel}^+ k_p |\tilde{q}| \right] \text{vel}^+ \\ &< \infty,\end{aligned}\tag{116}$$

donde se han usado acotamientos sobre las funciones $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $\frac{d(\text{vel}_{\text{Max}}(q))}{dq}$ (respectivamente en (88) y (89)) y el hecho de que γ_1 y γ_2 son constantes positivas y \tilde{q} está acotada. Obteniendo de (116) que \ddot{V} es una función acotada. Invocando el lema 2.3 se puede concluir que $\dot{V} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, de (114) se desprende que el error de posición $\tilde{q}(t)$ tiende a cero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0,\tag{117}$$

lo cual es equivalente al objetivo de regulación de posición (92).

4.4. Resultados de simulación

Se utilizó el *software* Simnon con las siguientes configuraciones:

- Método numérico de integración: Runge-Kutta-Fehlberg 4/5
- Paso de integración: 0.001
- Umbral de error: 1×10^{-6}
- Pasos de simulación: 30×10^3 .

Para simulación, se utilizaron el modelo de la planta (86) y el controlador propuesto (94)-(95).

Parámetros de la planta:

$$\begin{aligned} J &= 1, \\ f_v &= 0.01, \\ mgl &= 0. \end{aligned}$$

Límite de velocidad del actuador:

$$\text{vel}_{\text{Max}}(q) = 2 + \sin(q). \quad (118)$$

De (118) se obtiene:

$$\text{vel}^- = 1, \quad (119)$$

$$\text{vel}^+ = 3. \quad (120)$$

Posición deseada:

$$q_d = 5.$$

Parametros para sintonía del controlador:

$$\alpha = 0.8, \quad (121)$$

$$\gamma_1 = 0.8, \quad (122)$$

$$\gamma_2 = 0.2, \quad (123)$$

$$k_p = 5,$$

$$k_s = 1.$$

Con α en (121), γ_1 en (122) y γ_2 en (123), se satisfacen las condiciones (97)-(100).

Con vel^+ en (120), γ_1 en (122) y γ_2 en (123), de la condición sobre $|\dot{q}(0)|$ en (101) se

obtiene que esta debe ser menor que 0.2, o sea que:

$$|q(0)| < 0.2 \quad (124)$$

Usando (124), una estima \mathcal{S} del dominio de inicio definida en (103) queda explicitada de la siguiente forma:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : q(0) \in \mathbb{R}, |\dot{q}(0)| < 0.2 \right\}. \quad (125)$$

Condiciones iniciales $q(0)$ y $\dot{q}(0)$:

$$q(0) = 0, \quad (126)$$

$$\dot{q}(0) = 0.1 \quad (127)$$

Las condiciones iniciales (126) y (127) pertenecen a la estima \mathcal{S} del dominio de inicio en (125).

Sustituyendo los valores correspondientes en (102), se obtiene el siguiente valor del parámetro del controlador $\xi(0)$:

$$\xi(0) = -0.3942.$$

La figura 29 muestra $q(t)$ en línea azul continua y la posición deseada q_d en línea horizontal entrecortada de color café. Una inspección visual indica que la posición tiende a la posición deseada: $q \rightarrow q_d$, de acuerdo con el objetivo de control de regulación de posición (92). En la figura 30, la velocidad $\dot{q}(t)$ es presentada en línea azul continua y los límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ en líneas rojas entrecortadas. La velocidad $\dot{q}(t)$ tiende a cero asintóticamente y también, permanece dentro de los límites $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$, como se especificó en el objetivo de acotamiento de velocidad (93). Este comportamiento también se observa en la figura 31, en la cual se presenta la velocidad $\dot{q}(t)$ vs. la posición $q(t)$ en color azul, los límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ en

líneas rojas entrecortadas, los límites de la estima S del dominio de inicio se indican en líneas horizontales entrecortadas de color verde; mientras que la estima S del dominio de inicio se presenta en color verde semitransparente. Se puede observar en la figura 31 que mientras $\dot{q}(t)$ permanece dentro de los límites de saturación, la posición $q(t)$ en línea azul tiende a la posición deseada q_d (en línea entrecortada de color café). La figura 32 muestra $\tilde{q}(t)$ tendiendo a cero, mientras $\dot{q}(t)$ permanece dentro de la zona permitida dependiente de $q(t)$. En la figura 33 se expone la trayectoria en el espacio cartesiano 3D de las variables $\xi(t)$, $\tilde{q}(t)$ y $\dot{q}(t)$.

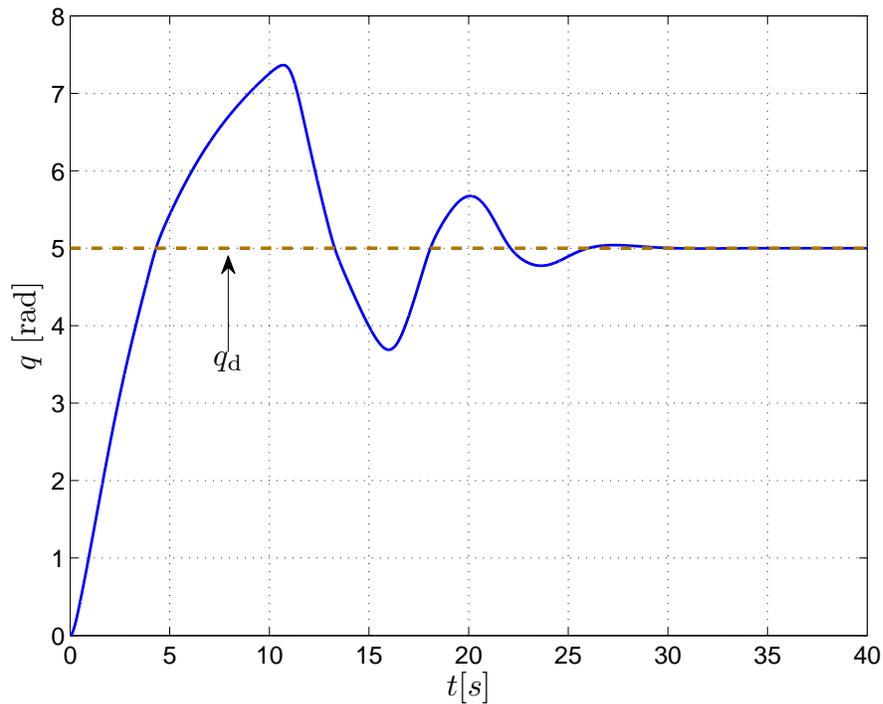


Figura 29: $q(t)$ (en línea azul continua). Posición deseada q_d en línea entrecortada de color café.

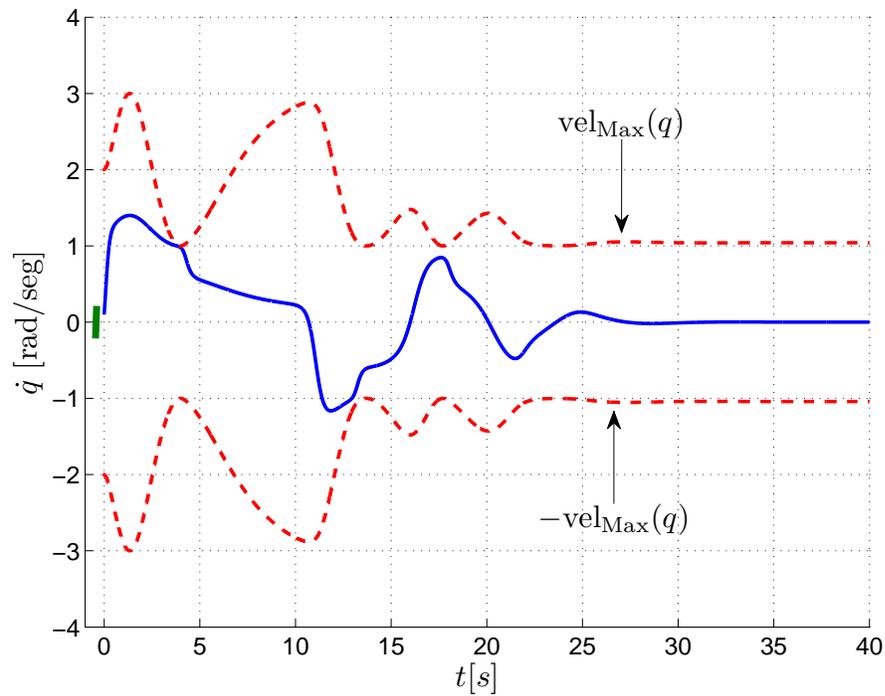


Figura 30: $\dot{q}(t)$ (en línea azul continua). Límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ en líneas rojas entrecortadas.

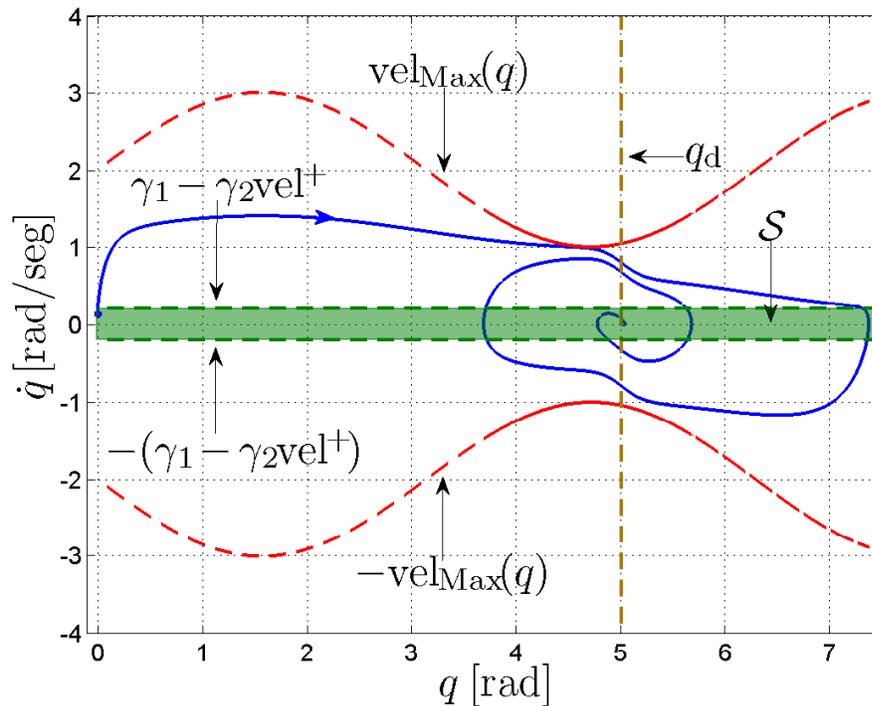


Figura 31: $\dot{q}(t)$ vs. $q(t)$ (en línea azul continua). Los límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ se muestran en líneas rojas entrecortadas; los límites de la estima \mathcal{S} del dominio de inicio en líneas horizontales entrecortadas de color verde; mientras que la estima \mathcal{S} del dominio de inicio se presenta en color verde semi transparente.

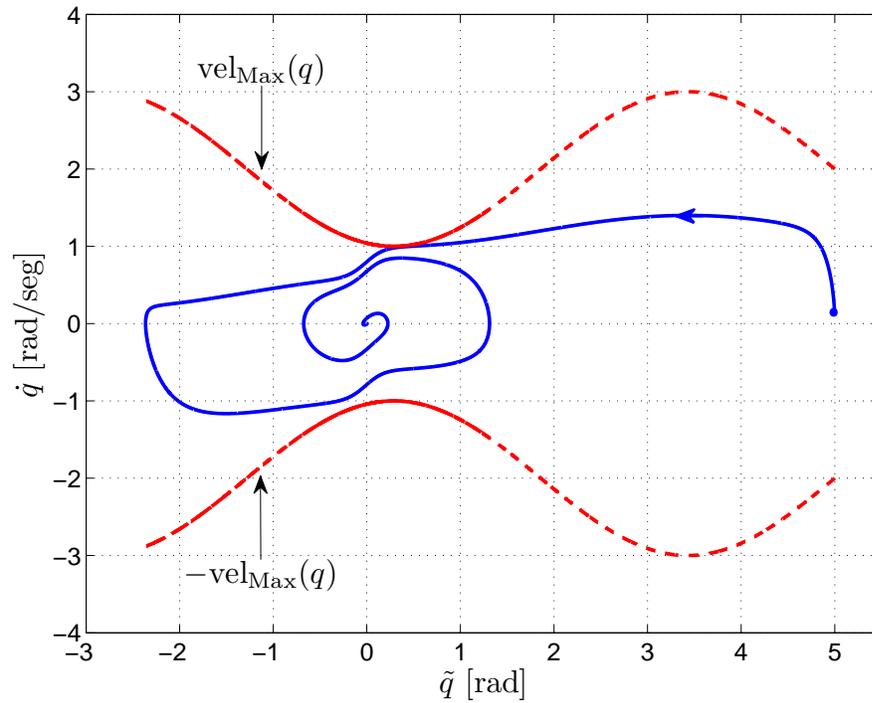


Figura 32: $\dot{q}(t)$ vs $\tilde{q}(t)$ (en línea azul continua). Límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ en líneas rojas entrecortadas.

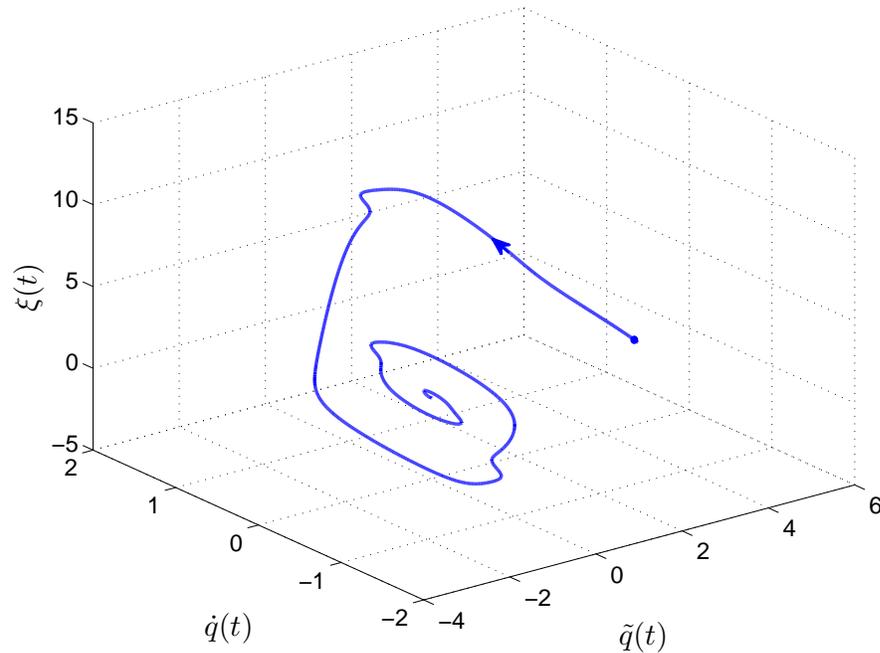


Figura 33: Trayectoria $\xi(t)$, $\tilde{q}(t)$ y $\dot{q}(t)$.

Finalmente, en la figura 34 se presenta $\dot{q}(t)$ vs. $\tilde{q}(t)$ para dos ejemplos de condiciones iniciales $q(0), \dot{q}(0)$ (en línea azul continua para $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0.1, \xi(0) = -0.3942$ y en línea púrpura entrecortada para $q(0) = 2, \dot{q}(0) = -0.15, \xi(0) = -1.5563$), con $\tilde{q}(t)$

tendiendo a cero. Los límites de velocidad $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ se muestran en líneas rojas entrecortadas.

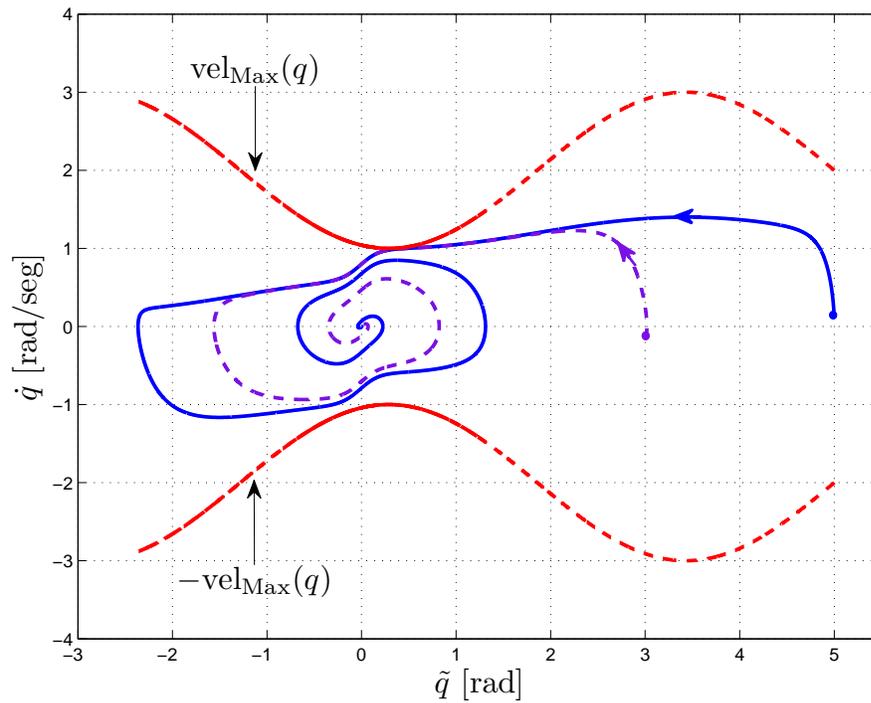


Figura 34: $\dot{q}(t)$ vs. $\tilde{q}(t)$ (en línea azul continua para $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0.1, \xi(0) = -0.3942$ y en línea púrpura entrecortada para $q(0) = 2, \dot{q}(0) = -0.15, \xi(0) = -1.5563$). Los límites $\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ y $-\text{vel}_{\text{Max}}(q)$ se muestran en líneas rojas entrecortadas.

Capítulo 5. Regulación de posición con limitación simultánea de par y velocidad para mecanismo pendular con accionamiento de par

Se estudia el control de posición de un mecanismo rotacional no lineal (mecanismo pendular) accionado por un actuador de par, donde el actuador de par está limitado debido a las capacidades físicas según su curva característica de par-velocidad. El caso de estudio es limitación simultánea de par y velocidad, donde los límites son constantes. Se propone un controlador dinámico no lineal para resolver la formulación del problema de control. El controlador propuesto cuida del actuador manteniéndolo dentro de la zona de operación segura. Se presenta un subconjunto del dominio de inicio.

5.1. Planteamiento del problema de control

5.1.1. Modelo de la planta: péndulo

Se considera un mecanismo pendular con accionamiento de par modelado por la ecuación diferencial ordinaria no lineal normalizada:

$$J\ddot{q} + f_v\dot{q} + mgl \sin(q) = \tau, \quad (128)$$

donde $J > 0$ es el momento de inercia, $m > 0$ es la masa que se supone concentrada a una distancia $l \geq 0$ del eje de rotación, $f_v \geq 0$ es el coeficiente de fricción viscosa y g es la aceleración de la gravedad; las variables q , \dot{q} y \ddot{q} son, respectivamente, la posición, la velocidad y la aceleración angular, y τ es el par de 'entrada'.

El modelo en (128) satisface las propiedades 1, 4 y 5 descritas en el capítulo 2.

Con respecto al sistema a controlar (128), en este capítulo se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 6: Se conocen los valores de $J > 0$ y $f_v \geq 0$.

Suposición 7: Se conoce el producto $mgl \geq 0$.

Suposición 8: Se dispone de medición de la posición q (no se requiere medir la velocidad \dot{q}).

Suposición 9: La ‘zona segura de operación’ del actuador de par indicada en la figura 35 está definida por la región delimitada por la curva característica de par-velocidad que corresponde a un valor absoluto de par $|\tau|$ acotado por $\tau^+ > 0$, y a una rapidez $|\dot{q}|$ acotada por $vel^+ > 0$ como se muestra en la figura.

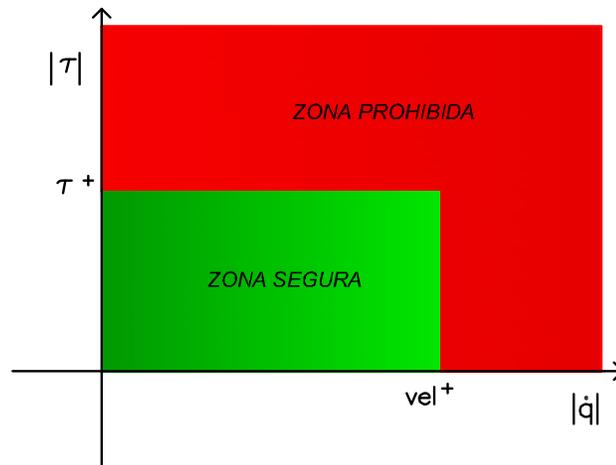


Figura 35: Copia de la figura 5. Zona segura de operación (en color verde) del actuador de par con límites de par y velocidad constantes.

Suposición 10: Los límites τ^+ y vel^+ del actuador de par satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\tau^+ > f_v vel^+ + mgl. \quad (129)$$

5.1.2. Modelo del actuador

En este capítulo se considera el siguiente modelo del actuador de par:

$$\tau = \begin{cases} \tau^+, & \text{si } u > \tau^+, \\ u, & \text{si } -\tau^+ \leq u \leq \tau^+, \\ -\tau^+, & \text{si } u < -\tau^+, \end{cases} \quad (130)$$

done u es la entrada del actuador y el límite de saturación τ^+ satisface las suposiciones 9 y 10.

5.1.3. Objetivo de control

El objetivo de control es la regulación de posición, respetando de forma simultánea los valores límites prescritos de par y velocidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d, \quad (131)$$

y

$$|\dot{q}(t)| \leq \text{vel}^+ \quad \forall t \geq 0, \quad (132)$$

y

$$|\tau(t)| \leq \tau^+ \quad \forall t \geq 0, \quad (133)$$

donde q_d es la posición deseada (constante conocida), $\text{vel}^+ > 0$ es una constante conocida que representa el límite de velocidad de operación segura del actuador, y $\tau^+ > 0$ es una constante conocida que representa el par máximo seguro del actuador.

Resultados sobre la regulación de posición con limitación simultánea de par y velocidad han sido publicados en Kelly y Salinas (2015).

Si los parámetros J , f_v o mgl del modelo de la planta (128) fuesen desconocidos, podría requerirse explorar métodos alternativos de control, tal como control adaptable, como en Kelly (1987); Slotine y Li (1988); Loría, Kelly y Teel (2005).

5.2. Esquema de control propuesto

Se propone la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} u = & J\gamma_1 \text{sech}^2(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q}) \\ & - J\gamma_2 \text{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})] \\ & + f_v [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})] + mgl \sin(q), \end{aligned} \quad (134)$$

$$\dot{\xi} = \tanh(\tilde{q}), \quad (135)$$

donde el error de posición \tilde{q} se define como

$$\tilde{q} \triangleq q_d - q. \quad (136)$$

Los parámetros del controlador γ_1 y γ_2 se eligen para satisfacer las siguientes condiciones:

$$\gamma_1 > \gamma_2 > 0, \quad (137)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq \text{vel}^+. \quad (138)$$

Se supone que la velocidad inicial $\dot{q}(0)$ es “pequeña” en el sentido:

$$|\dot{q}(0)| < \gamma_1 - \gamma_2. \quad (139)$$

En virtud de (137) y (138), \dot{q} satisface trivialmente el objetivo (132) en $t = 0$.

Los parámetros restantes k_s y k_p del controlador son positivos y se eligen de manera a satisfacer las reglas de sintonía:

$$k_p < \frac{\tau^+ - (f_v \text{vel}^+ + mgl)}{J\gamma_2 \text{vel}^+}, \quad (140)$$

$$k_s \leq \frac{\tau^+ - (f_v \text{vel}^+ + mgl) - J\gamma_2 k_p \text{vel}^+}{J\gamma_1}. \quad (141)$$

Nótese que el lado derecho de la desigualdad (140) es positivo debido a que τ^+ satisface la condición (129) y el lado derecho de la desigualdad (141) es positivo debido a que k_p satisface la condición (140).

Finalmente, la condición inicial $\xi(0)$ aquí considerada como un parámetro del controlador, es obtenida a través de la fórmula:

$$\xi(0) = \frac{1}{k_s} \text{arctanh} \left(\frac{\dot{q}(0) - \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q}(0))}{\gamma_1} \right), \quad (142)$$

la cual, está bien definida porque $\dot{q}(0)$ satisface (139).

La desigualdad (139) garantiza que la condición de velocidad inicial $\dot{q}(0)$ satisfaga el objetivo de control (132) en $t = 0$. Sin embargo, dadas las condiciones (137) y (138), el valor $|\dot{q}(0)|$ está restringido a $|\dot{q}(0)| < \text{vel}^+$, es decir, las velocidades iniciales $\dot{q}(0) = -\text{vel}^+$ y $\dot{q}(0) = \text{vel}^+$ no son condiciones iniciales permitidas para la velocidad. En otras palabras, el sistema (128) no debería iniciar en los límites de velocidad prescritos, sino que la rapidez inicial debe ser estrictamente más pequeña ($|\dot{q}(0)| < \text{vel}^+$). Entre mayor sea $\gamma_1 - \gamma_2$, mayores serán los valores permitidos de $|\dot{q}(0)|$, pero siempre bajo la restricción $|\dot{q}(0)| < \text{vel}^+$.

Para elegir los parámetros del controlador en (134) y (135), se requiere satisfacer las condiciones (137), (138), (140), (141) y (142). Como se demostrará más adelante, el cumplimiento de estas condiciones garantiza el logro del objetivo de control en (131), (132) y (133).

Dada la planta (128), el actuador (130), el objetivo de control en (131), (132) y (133) y el controlador en (134) y (135), un subconjunto del dominio de inicio es:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : q(0) \in \mathbb{R}, |\dot{q}(0)| < \gamma_1 - \gamma_2 \right\}. \quad (143)$$

5.3. Análisis

Esta sección está dedicada a demostrar que el controlador propuesto en (134) y (135) con las “reglas de sintonía” indicadas, logra el objetivo de control en (131), (132) y (133).

5.3.1. Acotamiento de par

En esta parte se demuestra que el par u solicitado por el controlador en (134) y (135) al actuador está dentro de los límites prescritos (133).

El par u solicitado al actuador por parte del controlador en (134) y (135) está acotado por:

$$\begin{aligned}
|u| &= |J\gamma_1 \operatorname{sech}^2(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q}) - J\gamma_2 \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})] \\
&\quad + f_v [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})] + mgl \sin(q)|, \\
&\leq |J\gamma_1 \operatorname{sech}^2(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q})| + |J\gamma_2 \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})]| \\
&\quad + |f_v [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})]| + |mgl \sin(q)|, \\
&\leq |J\gamma_1 k_s| |\operatorname{sech}^2(k_s \xi) \tanh(\tilde{q})| + |J\gamma_2 k_p| |\operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q})| [|\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})|] \\
&\quad + |f_v| [|\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})|] + |mgl| |\sin(q)|, \\
&\leq J\gamma_1 k_s |\operatorname{sech}^2(k_s \xi) \tanh(\tilde{q})| + J\gamma_2 k_p |\operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q})| [|\gamma_1 \tanh(k_s \xi)| + |\gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})|] \\
&\quad + f_v [|\gamma_1 \tanh(k_s \xi)| + |\gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})|] + |mgl| |\sin(q)|, \\
&\leq J\gamma_1 k_s |\operatorname{sech}^2(k_s \xi) \tanh(\tilde{q})| + J\gamma_2 k_p |\operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q})| [|\gamma_1| |\tanh(k_s \xi)| + |\gamma_2| |\tanh(k_p \tilde{q})|] \\
&\quad + f_v [|\gamma_1| |\tanh(k_s \xi)| + |\gamma_2| |\tanh(k_p \tilde{q})|] + |mgl| |\sin(q)|, \\
&\leq J\gamma_1 k_s + J\gamma_2 k_p (\gamma_1 + \gamma_2) + f_v (\gamma_1 + \gamma_2) + |mgl|, \\
&\leq J\gamma_1 k_s + J\gamma_2 k_p \operatorname{vel}^+ + f_v \operatorname{vel}^+ + |mgl|, \\
&\leq \tau^+,
\end{aligned} \tag{144}$$

donde se han usado las desigualdades (137), (138) y (141).

El par u solicitado al actuador está dentro de los límites prescritos. Tomando en cuenta el modelo del actuador en (130), la desigualdad (144) significa que se garantiza el acotamiento de par del objetivo de control (133).

Como se demuestra en la desigualdad (144), el controlador en la ecuación (134) posee la siguiente propiedad fundamental: el valor de la acción de control u siempre está dentro de la zona 'segura' del actuador. Por lo tanto, $\tau = u$ para todo tiempo $t \geq 0$.

5.3.2. Acotamiento de velocidad

Habiendo demostrado que $\tau = u$ para todo tiempo $t \geq 0$, se procede a reemplazar la acción de control (134) en el modelo de la planta (128), obteniéndose la siguiente representación del sistema en malla cerrada:

$$\ddot{q} = \gamma_1 \operatorname{sech}^2(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q}) - \gamma_2 \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})] + \frac{f_v}{J} [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})] - \frac{f_v}{J} \dot{q}, \quad (145)$$

cuya integral produce:

$$\dot{q} = \gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q}) + [\dot{q}(0) - \gamma_1 \tanh(k_s \xi(0)) - \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q}(0))]. \quad (146)$$

Reemplazando $\xi(0)$ de (142) en (146) resulta:

$$\dot{q} = \gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q}). \quad (147)$$

Para demostrar que (147) es solución de (145), primero se obtiene la derivada de \dot{q} en (147), resultando:

$$\ddot{q} = \gamma_1 \operatorname{sech}^2(k_s \xi) k_s \dot{\xi} + \gamma_2 \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p \dot{\tilde{q}}. \quad (148)$$

Después, se utiliza la definición de $\dot{\xi}$ en (135). Reemplazando en (148) queda

$$\ddot{q} = \gamma_1 \operatorname{sech}^2(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q}) + \gamma_2 \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p \dot{\tilde{q}}. \quad (149)$$

A continuación, usando la derivada de \tilde{q} (la definición de \tilde{q} se presenta en (136)), la ecuación (149) se escribe como:

$$\ddot{q} = \gamma_1 \operatorname{sech}^2(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q}) - \gamma_2 \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p \dot{q}. \quad (150)$$

Finalmente, usando \dot{q} en (147), ambas ecuaciones (145) y (150) pueden describirse

por:

$$\ddot{q} = \gamma_1 \operatorname{sech}^2(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q}) - \gamma_2 \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q}) k_p [\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})]. \quad (151)$$

Habiendo demostrado que (147) es solución de (145), se procede a obtener una cota para \dot{q} . De (147), la rapidez $|\dot{q}|$ puede ser acotada como sigue:

$$\begin{aligned} |\dot{q}| &= |\gamma_1 \tanh(k_s \xi) + \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})|, \\ &\leq |\gamma_1 \tanh(k_s \xi)| + |\gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})|, \\ &= \gamma_1 |\tanh(k_s \xi)| + \gamma_2 |\tanh(k_p \tilde{q})|, \\ &\leq \gamma_1 + \gamma_2, \\ &\leq \operatorname{vel}^+, \end{aligned} \quad (152)$$

donde se han usado las condiciones (137) y (138) de los parámetros γ_1 y γ_2 . La desigualdad (152) significa que se logra el acotamiento de velocidad deseado (132).

5.3.3. Regulación de posición

Tomando en cuenta (135), (136) y (147), una representación del sistema en malla cerrada en términos de \tilde{q} y ξ puede ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \tanh(k_s \xi) - \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q}) \\ \tanh(\tilde{q}) \end{bmatrix}, \quad (153)$$

que es un sistema dinámico no lineal autónomo que tiene un único equilibrio en $[\tilde{q} \ \xi]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Considérese la siguiente función continuamente diferenciable:

$$V(\tilde{q}, \xi) = \frac{k_s}{\gamma_1} \ln[\cosh(\tilde{q})] + \ln[\cosh(k_s \xi)]. \quad (154)$$

Además, la función $V(\tilde{q}, \xi)$ anterior es también una función definida positiva globalmente

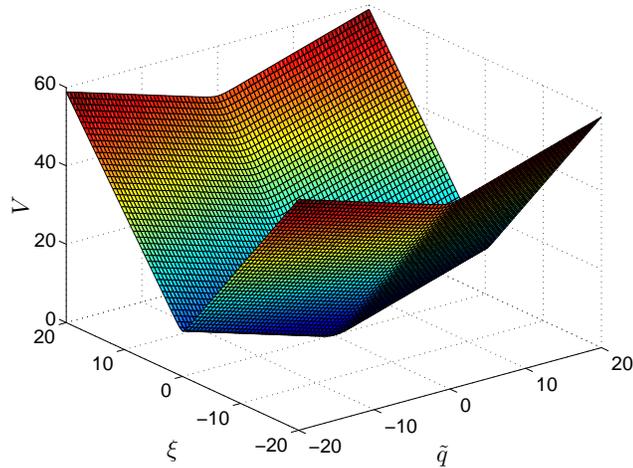


Figura 36: Función $V(\tilde{q}, \xi)$ en (154). $k_s = 2.4$, $\gamma_1 = 4$.

y radialmente desacotada. Por lo tanto, $V(\tilde{q}, \xi)$ califica como una función candidata de Lyapunov. La figura 36 representa una forma típica de $V(\tilde{q}, \xi)$.

La derivada temporal de $V(\tilde{q}, \xi)$ en (154) es:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{q}, \xi) &= \frac{k_s}{\gamma_1} \tanh(\tilde{q}) \dot{\tilde{q}} + \tanh(k_s \xi) k_s \dot{\xi}, \\
 &= \frac{k_s}{\gamma_1} \tanh(\tilde{q}) [-\gamma_1 \tanh(k_s \xi) - \gamma_2 \tanh(k_p \tilde{q})] + \tanh(k_s \xi) k_s \tanh(\tilde{q}), \\
 &= -\frac{k_s}{\gamma_1} \gamma_2 \tanh(\tilde{q}) \tanh(k_p \tilde{q}).
 \end{aligned} \tag{155}$$

Dado que k_s , γ_1 , y γ_2 son todas constantes positivas, entonces $\dot{V}(\tilde{q}, \xi)$ es una función semidefinida negativa globalmente y por lo tanto:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \xi) \leq 0 \quad \forall \tilde{q}, \xi \in \mathbb{R}. \tag{156}$$

En virtud del método directo de Lyapunov, ver por ejemplo Kelly *et al.* (2005), esto implica que el equilibrio $[\tilde{q} \ \xi]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ del sistema en malla cerrada (153) es estable en el sentido de Lyapunov y puede demostrarse que ambas variables de estado $\tilde{q}(t)$ y $\xi(t)$ están acotadas.

Se invoca el lema 2.3 (lema de Barbalat “tipo Lyapunov” (Slotine y Li, 1991)) para demostrar el logro del objetivo de control de posición (131).

Tomando la derivada temporal de \dot{V} en (155), resulta que

$$\begin{aligned}\ddot{V}(\tilde{q}, \xi) &= \frac{k_s \gamma_2}{\gamma_1} [\operatorname{sech}^2(\tilde{q}) \tanh(k_p \tilde{q}) + k_p \tanh(\tilde{q}) \operatorname{sech}^2(k_p \tilde{q})] \dot{q}, \\ &\leq \frac{k_s \gamma_2}{\gamma_1} [1 + k_p] \operatorname{vel}^+, \end{aligned} \quad (157)$$

lo cual, permite concluir que \ddot{V} es una función acotada. Invocando el lema 2.3 se concluye que $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, de (155) resulta que el error de posición $\tilde{q}(t)$ tiende a cero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0, \quad (158)$$

que es equivalente al objetivo de control de posición (131).

Capítulo 6. Regulación de posición para mecanismo LO-COMOBOT con accionamiento de par evitando saturación de par dependiente de la velocidad

En este capítulo se trata el problema de regulación de posición de un mecanismo de un grado de libertad —Locomobot— con accionamiento de par. El modelo del mecanismo considerado posee la estructura de un modelo dinámico no lineal de robots de n grados de libertad (Kelly *et al.*, 2015); mientras que en este capítulo se supone que el accionamiento de par está sujeto a limitaciones de par. Se propone un controlador estático no lineal para resolver el problema de regulación de posición con límite de par dependiente de la velocidad (se logra el objetivo de regulación de posición manteniendo al actuador dentro de su ‘zona segura de operación’).

6.1. Formulación del problema de control

6.1.1. Modelo de la planta: mecanismo “Locomobot”

La planta que se desea controlar es el mecanismo “Locomobot” con el modelo dinámico (249) y las propiedades presentados en el apéndice B.

Una representación en variables de estado del sistema (249) es dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{M(q)} [\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - f_v\dot{q} - g(q)] \end{bmatrix}. \quad (159)$$

donde $q, \dot{q}, M(q), C(q, \dot{q})\dot{q}, f_v, g(q)$ son definidas en el apéndice B.

Un dibujo del mecanismo físico *idealizado* ‘Locomobot’ se muestra en la figura 37.

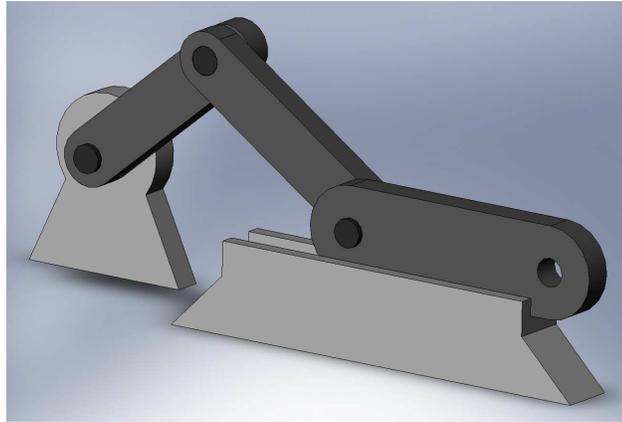


Figura 37: Dibujo de mecanismo físico *idealizado* LOCOMOBOT. Esta figura fue presentada en Kelly *et al.* (2015).

Con respecto al sistema a controlar (159), en este capítulo se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 11: Se dispone de mediciones de la posición q y de la velocidad \dot{q} .

Suposición 12: Se conocen cotas sobre los valores máximos y mínimos de las funciones $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y la constante f_v .

Suposición 13: Se conoce exactamente la función $g(q)$.

6.1.2. Modelo del actuador

En este capítulo se considera el siguiente modelo de actuador:

$$\text{sat}(u; -\tau_{\text{Max}}(\dot{q}); \tau_{\text{Max}}(\dot{q})) = \begin{cases} \tau_{\text{Max}}(\dot{q}), & \text{si } u > \tau_{\text{Max}}(\dot{q}), \\ u, & \text{si } -\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) \leq u \leq \tau_{\text{Max}}(\dot{q}), \\ -\tau_{\text{Max}}(\dot{q}), & \text{si } u < -\tau_{\text{Max}}(\dot{q}). \end{cases} \quad (160)$$

donde $\tau_{\text{Max}}(\dot{q}(t))$ es una función conocida, continua y diferenciable y satisfaciendo:

$$\tau^- \leq \tau_{\text{Max}}(\dot{q}) \leq \tau^+ < \infty \quad \forall \dot{q} \in \mathbb{R}, \quad (161)$$

y

$$\left| \frac{d\tau_{\text{Max}}(\dot{q})}{d\dot{q}} \right| < \infty \quad \forall \dot{q} < \infty, \quad (162)$$

donde $\tau^- \leq \tau^+$. Las constantes positivas τ^- y τ^+ son conocidas.

Se supone que τ^- satisface la siguiente condición:

$$\tau^- > k_g, \quad (163)$$

donde k_g se define en el apéndice B. Como situación particular es válido que $\tau^- = \tau^+$, es decir que la función de saturación $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ sea constante.

En la ecuación (160) para cada valor \dot{q} se tiene una función de saturación dura (continua pero no lineal y no diferenciable) con límites en $-\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ y $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ como se muestra en la figura 38.

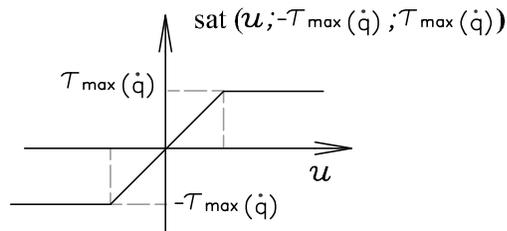


Figura 38: Función de saturación dura con límites en $-\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ y $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$.

Una gráfica típica con zona de operación permitida de par-velocidad se muestra en la figura 39.

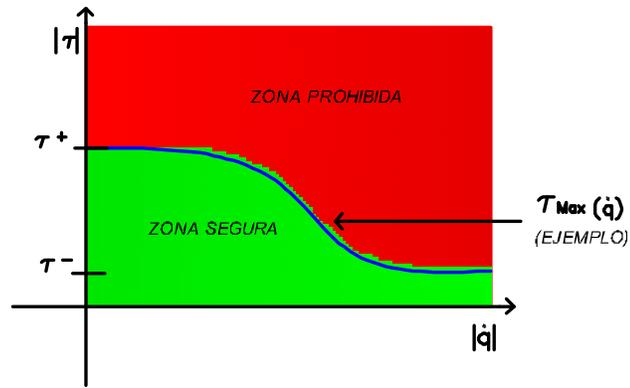


Figura 39: Copia de la figura 3. Gráfica típica con zona de operación permitida de 'par-velocidad': Zona segura y zona prohibida de par y velocidad.

En la figura 40 se muestra τ como una función de la salida u del controlador y de la velocidad \dot{q} usando el modelo del actuador (160) con la siguiente función $\tau_{Max}(\dot{q})$:

$$\tau_{Max}(\dot{q}) = \frac{2}{1 + (0.55\dot{q})^{24}} + 2,$$

Cuya gráfica se presenta en la figura 41.

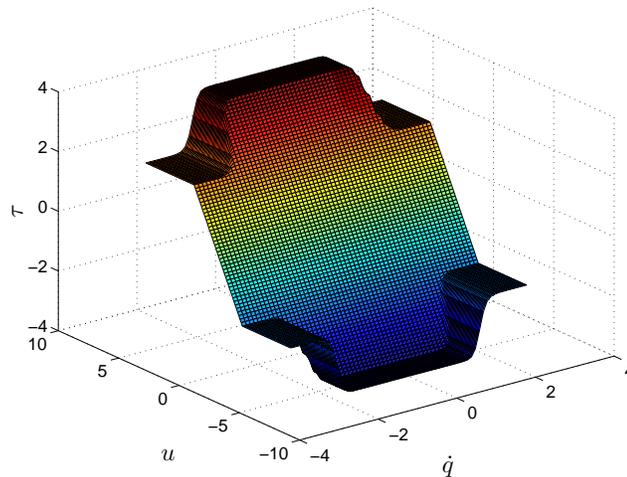


Figura 40: Gráfica de τ en función de u y \dot{q} .

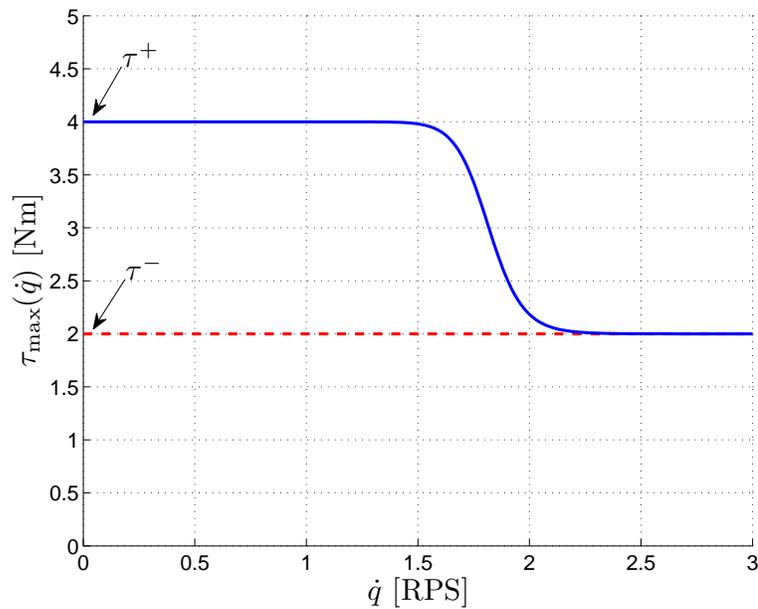


Figura 41: Gráfica ejemplo de la función $\tau_{\max}(\dot{q})$.

El modelo del actuador posee dos entradas: la salida u del controlador y opcionalmente la velocidad \dot{q} del modelo del “Locomobot”. La salida τ del modelo del actuador en (160) es la entrada al modelo de la planta en (159) (ver figura 42).

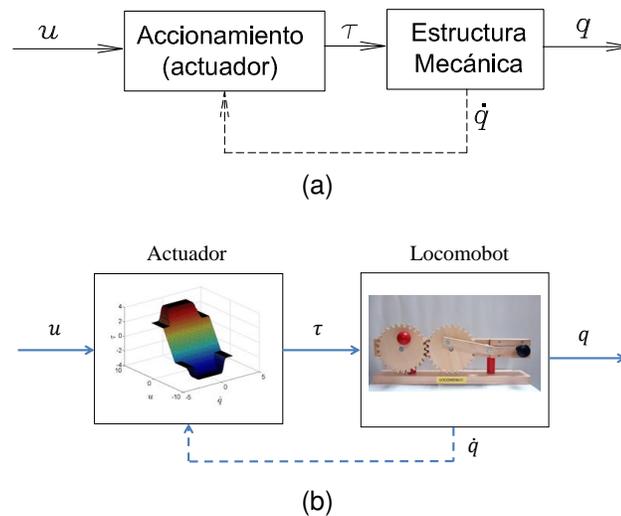


Figura 42: a) El modelo del actuador tiene como entradas la salida u del controlador y la velocidad \dot{q} . La salida τ del actuador es la entrada al modelo de la planta. b) Diagrama de bloques con entradas y salida del actuador con gráfica de τ en función de u y \dot{q} e imagen de mecanismo didáctico Locomobot.

6.1.3. Objetivo de control (Regulación de posición evitando saturación de par)

El objetivo de control consiste en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d, \quad (164)$$

y

$$|\tau(t)| \leq \tau_{\text{Max}}(\dot{q}(t)) \quad \forall t \geq 0, \quad (165)$$

donde $q(t)$ es la posición, $\dot{q}(t)$ es la velocidad, q_d es la posición deseada (constante y finita) y $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ se selecciona satisfaciendo (161) y (162).

El caso particular donde $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ es una constante, es estudiado en Kelly *et al.* (1997) para el caso de robots manipuladores de n g.d.l.

6.2. Propuesta de controlador

Se propone utilizar el siguiente controlador inspirado en Kelly *et al.* (1997):

$$u = a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) - (1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) + g(q), \quad (166)$$

donde β_1 y β_2 son constantes positivas y a es un parámetro que satisface la siguiente desigualdad:

$$0 < a < 1. \quad (167)$$

Con las condiciones (161), (163) y (167) se garantiza que $a(\tau^- - k_g) > 0$ y $(1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) > 0 \quad \forall \dot{q}$.

El error de posición \tilde{q} es definido como:

$$\tilde{q} \triangleq q_d - q. \quad (168)$$

Dada la planta (159) y el objetivo de control en (164) y (165), el dominio de inicio \mathcal{D} es:

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (169)$$

Esto significa que para toda condición inicial $q(0)$ y $\dot{q}(0) \in \mathbb{R}$ de la planta (159), el objetivo de control de regulación de posición con acotamiento de par en (164) y (165) se cumple.

6.3. Análisis

6.3.1. Acotamiento de par

La salidad del controlador u en (166) está acotada por:

$$\begin{aligned} |u| &= |a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) - (1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) + g(q)| \\ &\leq |a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q})| + |(1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q})| + |g(q)| \\ &\leq a(\tau^- - k_g) |\tanh(\beta_1 \tilde{q})| + (1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) |\tanh(\beta_2 \dot{q})| + k_g \\ &\leq a(\tau^- - k_g) + (1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) + k_g \\ &= a\tau^- + (1 - a)\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) \\ &\leq a\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) + (1 - a)\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) \\ &= \tau_{\text{Max}}(\dot{q}), \end{aligned} \quad (170)$$

donde k_g se define en el apéndice B. En la desigualdad (170) se han utilizado la propiedad (264) del apéndice B y las condiciones (161), (163) y (167). La desigualdad (170) garantiza el cumplimiento del objetivo (165). Es decir, el par u solicitado por el controlador en (166) al actuador en (160) está dentro de los límites de operación.

Como se demuestra en la desigualdad (170), el controlador en la ecuación (166) posee la siguiente propiedad fundamental: el valor de la acción de control u siempre está dentro de la zona 'segura'. Por lo tanto, $\tau = u$ para todo tiempo $t \geq 0$.

6.3.2. Regulación de posición

Habiendo demostrado que $\tau = u$ para todo tiempo $t \geq 0$, se procede a reemplazar la acción de control (166) en el modelo de la planta (159), obteniéndose la siguiente representación del sistema en malla cerrada:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{M(q)} [a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) - (1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - f_v \dot{q}] \end{bmatrix}. \quad (171)$$

El origen del espacio de estado de (171) es el único punto de equilibrio.

Para probar el cumplimiento del objetivo de regulación de posición (164) se utiliza una función candidata de Lyapunov propuesta en Kelly *et al.* (1997) y un análisis basado en Zergeroglu *et al.* (2000). En este último, se hace referencia al lema de Barbalat (Slotine y Li, 1991) para argumentar que tanto $\dot{q}(t)$ como $\ddot{q}(t)$ tienden a cero asintóticamente y luego concluir que el error de posición \tilde{q} también tiende a cero asintóticamente.

En este capítulo, se utilizan los lemas 2.2 y 2.3 (respectivamente, corolario práctico del lema de Barbalat y lema de Barbalat “tipo Lyapunov” (Slotine y Li, 1991)).

Se propone utilizar la siguiente función candidata de Lyapunov (adecuación de la función de Lyapunov propuesta en Kelly *et al.* (1997) para el caso de robots manipuladores):

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} M(q) \dot{q}^2 + \frac{a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1 \tilde{q})]. \quad (172)$$

La función V en (172) es definida positiva, continuamente diferenciable y radialmente desacotada. La derivada temporal de V en (172) es

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = M(q) \dot{q} \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{M}(q) \dot{q}^2 - a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) \dot{q}. \quad (173)$$

Sustituyendo \tilde{q} de la ecuación de malla cerrada (171) en (173), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q} [a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) - (1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - f_v \dot{q}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \dot{M}(q) \dot{q}^2 - a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) \dot{q} \\
&= -(1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) \dot{q} - f_v \dot{q}^2 + \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}^2 \\
&= -(1 - a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) \dot{q} - f_v \dot{q}^2, \tag{174}
\end{aligned}$$

donde de la penúltima a la última línea se ha usado la propiedad 2 definida en el capítulo 2 para robots de n g.d.l. El modelo del mecanismo “Locomobot” posee esta propiedad como se muestra en el apéndice B.

Debido a las condiciones (161), (163) y (167), de (174) se desprende que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq 0$. Por lo tanto

$$0 \leq V(\tilde{q}(t), \dot{q}(t)) \leq V(\tilde{q}(0), \dot{q}(0)) \quad \forall t \geq 0. \tag{175}$$

Recurriendo a (172):

$$\frac{1}{2} \dot{M}(q) \dot{q}^2 + \frac{a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1 \tilde{q})] \leq V(\tilde{q}(0), \dot{q}(0)) < \infty \tag{176}$$

para todo $t \geq 0$.

Debido a que $V(\tilde{q}(t), \dot{q}(t))$ en (172) es radialmente desacotada y a que se satisface (176), se tiene $\tilde{q} \in \mathcal{L}_\infty$ y $\dot{q} \in \mathcal{L}_\infty$.

Tomando la derivada de $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ en (174), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= - \left[(1 - a) \left(\frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}} \tanh(\beta_2 \dot{q}) \dot{q} + (\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \text{sech}^2(\beta_2 \dot{q}) \beta_2 \dot{q} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) \right) + 2f_v \dot{q} \right] \ddot{q}. \tag{177}
\end{aligned}$$

Habiendo demostrado que $\dot{q} \in \mathcal{L}_\infty$, y considerando las propiedades 1 y 3 (definidas en el capítulo 2 y mostradas para el modelo del “Locomobot” en el apéndice B) y las condicio-

nes (161), (163) y (167), de la ecuación de malla cerrada (171) se tiene $\ddot{q} \in \mathcal{L}_\infty$. Luego, considerando que $\dot{q} \in \mathcal{L}_\infty$ y que $\ddot{q} \in \mathcal{L}_\infty$ y las condiciones (161), (162) (163) y (167), entonces se concluye que la función $\ddot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ en (177) es una función acotada.

Invocando el lema 2.3 (lema de Barbalat “tipo Lyapunov” (Slotine y Li, 1991)) se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\tilde{q}(t), \dot{q}(t)) = 0$. Por lo tanto, de (174) se obtiene $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0$.

A continuación, se aplica el corolario práctico del lema de Barbalat presentado en Slotine y Li (1991) para demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{q}(t) = 0$.

En la presente sección ya se demostró que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0$. Por lo tanto, para demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{q}(t) = 0$, es suficiente que $\ddot{\ddot{q}}(t)$ exista y esté acotada.

De la derivada temporal de la ecuación de malla cerrada (171), se obtiene $\ddot{\ddot{q}}$ como:

$$\begin{aligned}
\ddot{\ddot{q}} &= \frac{d \left[\frac{1}{M(q)} \right]}{dq} \dot{q} \left[a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) - (1-a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - f_v \dot{q} \right] \\
&+ \frac{1}{M(q)} \left[-a(\tau^- - k_g) \text{sech}^2(\beta_1 \tilde{q}) \beta_1 \dot{q} - (1-a) \frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}} \ddot{q} \tanh(\beta_2 \dot{q}) \right. \\
&\left. - (1-a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \text{sech}^2(\beta_2 \dot{q}) \beta_2 \ddot{q} - \left(\frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \dot{q} + C(q, \dot{q}) \ddot{q} \right) - f_v \ddot{q} \right] \\
&= -\frac{\frac{dM(q)}{dq}}{M(q)^2} \dot{q} \left[a(\tau^- - k_g) \tanh(\beta_1 \tilde{q}) - (1-a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \tanh(\beta_2 \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - f_v \dot{q} \right] \\
&+ \frac{1}{M(q)} \left[-a(\tau^- - k_g) \text{sech}^2(\beta_1 \tilde{q}) \beta_1 \dot{q} - (1-a) \frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}} \ddot{q} \tanh(\beta_2 \dot{q}) \right. \\
&\left. - (1-a)(\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) - k_g) \text{sech}^2(\beta_2 \dot{q}) \beta_2 \ddot{q} - \left(\frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \dot{q} + C(q, \dot{q}) \ddot{q} \right) - f_v \ddot{q} \right]
\end{aligned} \tag{178}$$

Derivando $M(q)$ y $C(q, \dot{q})$, respectivamente en (250) y (251) del apéndice B, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dM(q)}{dq} &= \frac{d(m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_3 l_1^2 \phi(q))}{dq} \\
&= m_3 l_1^2 \frac{d\phi(q)}{dq},
\end{aligned} \tag{179}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial q} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_3 l_1^2 \frac{d\phi(q)}{dq} \dot{q} \right)}{\partial q} \\ &= \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \frac{d^2\phi(q)}{dq^2} \dot{q}\end{aligned}\quad (180)$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_3 l_1^2 \frac{d\phi(q)}{dq} \dot{q} \right)}{\partial \dot{q}} \\ &= \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \frac{d\phi(q)}{dq}.\end{aligned}\quad (181)$$

La derivada de la función $\phi(q)$ se presenta en la ecuación (256) en el apéndice B; mientras que la segunda derivada de $\phi(q)$ es:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi(q)}{dq^2} &= 2 \cos^2(q) (f_1(q))^2 + 2 \sin(q) \left(-\sin(q) (f_1(q))^2 + 2 \cos(q) f_1(q) \frac{df_1(q)}{dq} \right) \\ &\quad + 6 \sin^2(q) \cos(q) f_1(q) f_2(q) + 2 \sin^3(q) \left(\frac{df_1(q)}{dq} f_2(q) + f_1(q) \frac{df_2(q)}{dq} \right),\end{aligned}\quad (182)$$

con f_1 y f_2 definidos respectivamente en (255) y (257) en el apéndice B. Es posible demostrar que para todo $q \in \mathbb{R}$ la función $\frac{d^2\phi(q)}{dq^2}$ en (182) está acotada por:

$$\begin{aligned}\left| \frac{d^2\phi(q)}{dq^2} \right| &< 4 \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right]^2 + 10 \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right] \left[\frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} + \frac{l_1^3}{(l_2^2 - l_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &\quad + 2 \left[\frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} + \frac{l_1^3}{(l_2^2 - l_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \\ &\quad + 2 \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right] \left[\frac{3l_1^3}{(l_2^2 - l_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3l_1^5}{(l_2^2 - l_1^2)^{\frac{5}{2}}} \right].\end{aligned}\quad (183)$$

Se utilizan (178), (179), (180) y (181) y se consideran: las propiedades 1 y 3; las desigualdades 183), (258) y (262) (apéndice B); las condiciones (161), (162), (163) y (167); y el hecho de que $\dot{q} \in \mathcal{L}_\infty$ y $\ddot{q} \in \mathcal{L}_\infty$. Se concluye que $\ddot{q} \in \mathcal{L}_\infty$. Por lo tanto, por el lema 2.2 (corolario práctico del lema de Barbalat (Slotine y Li, 1991)) se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{q}(t) = 0$.

Ahora, considerando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{q}(t) = 0$, de la ecuación de malla cerrada (171) se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0, \quad (184)$$

que es equivalente al objetivo de regulación de posición (164); por lo tanto habiéndose demostrado lo que se deseaba.

6.4. Propuesta de función de saturación $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$

En este capítulo, para modelar el comportamiento cualitativo de la curva par-velocidad de la figura 39, se propone utilizar la siguiente función $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$:

$$\tau_{\text{Max}}(\dot{q}) = (\tau^+ - \tau^-) \frac{1}{1 + (\eta \dot{q})^\rho} + \tau^-, \quad (185)$$

donde $\eta > 0$, ρ es un número par positivo, τ^- y τ^+ están definidas en (161).

En la figura 41 se muestra una gráfica de la función (185) para $\tau^+ = 4$, $\tau^- = 2$, $\eta = 0.55$ y $\rho = 24$.

La función (185) satisface las condiciones (161) y (162):

Primero, note que la función (185) satisface

$$\begin{aligned} \tau_{\text{Max}}(0) &= \tau^+, \\ \lim_{\dot{q} \rightarrow -\infty} \tau_{\text{Max}}(\dot{q}) &= \tau^-, \\ \lim_{\dot{q} \rightarrow \infty} \tau_{\text{Max}}(\dot{q}) &= \tau^-, \end{aligned}$$

$$\tau^- < \tau_{\text{Max}}(\dot{q}) \leq \tau^+ \quad \forall \dot{q} \in \mathbb{R}. \quad (186)$$

Por lo tanto, la función $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ en la ecuación (185) satisface la condición (161).

Segundo, la derivada de la función $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ en (185) es:

$$\begin{aligned} \frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}} &= \frac{d\left[(\tau^+ - \tau^-)\frac{1}{1+(\eta\dot{q})^\rho} + \tau^-\right]}{d\dot{q}}, \\ &= \frac{d\left[(\tau^+ - \tau^-)\frac{1}{1+(\eta\dot{q})^\rho}\right]}{d\dot{q}}, \end{aligned} \tag{187}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-(\tau^+ - \tau^-)\frac{d[1+(\eta\dot{q})^\rho]}{d\dot{q}}}{[1+(\eta\dot{q})^\rho]^2}, \\ &= \frac{-(\tau^+ - \tau^-)\rho(\eta\dot{q})^{\rho-1}\eta}{[1+(\eta\dot{q})^\rho]^2}. \end{aligned} \tag{188}$$

La función $\frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}}$ en (188) satisface:

$$\begin{aligned} \left|\frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}}\right| &= \left|\frac{-(\tau^+ - \tau^-)\rho(\eta\dot{q})^{\rho-1}\eta}{[1+(\eta\dot{q})^\rho]^2}\right|, \\ &\leq \rho\eta[\tau^+ - \tau^-] \left|\frac{1}{[1+(\eta\dot{q})^\rho]^2}\right| |(\eta\dot{q})^{\rho-1}|, \\ &\leq \rho\eta[\tau^+ - \tau^-] |(\eta\dot{q})^{\rho-1}|, \\ &\leq \rho\eta[\tau^+ - \tau^-] |\eta^{\rho-1}| |\dot{q}^{\rho-1}|, \\ &= \rho\eta[\tau^+ - \tau^-] \eta^{\rho-1} |\dot{q}^{\rho-1}|, \\ &= \rho\eta^\rho [\tau^+ - \tau^-] |\dot{q}^{\rho-1}|, \end{aligned} \tag{189}$$

donde del penúltimo al último paso, se ha considerado que

$$|\dot{q}^{\rho-1}| = |\dot{q}|^{\rho-1}.$$

De la desigualdad (189) se tiene que

$$\left|\frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}}\right| < \infty \quad \forall \dot{q} < \infty.$$

Por lo tanto, $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ de la ecuación (185) satisface la condición (162).

Usando la desigualdad (176), se puede obtener una cota para \dot{q} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2 + \frac{a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q})] &\leq V(\tilde{q}(0), \dot{q}(0)) \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2 + \frac{a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q})] &\leq \frac{1}{2}M(q(0))\dot{q}(0)^2 + \frac{a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q}(0))] \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2 &\leq \frac{1}{2}M(q(0))\dot{q}(0)^2 + \frac{a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q}(0))] \\
&\Downarrow \\
\dot{q}^2 &\leq \frac{1}{M(q)} \left[M(q(0))\dot{q}(0)^2 + \frac{2a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q}(0))] \right] \\
&\Downarrow \\
|\dot{q}|^2 &\leq \frac{1}{M(q)} \left[M(q(0))\dot{q}(0)^2 + \frac{2a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q}(0))] \right] \\
&\Downarrow \\
|\dot{q}| &\leq \sqrt{\frac{1}{M(q)} \left[M(q(0))\dot{q}(0)^2 + \frac{2a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q}(0))] \right]}.
\end{aligned} \tag{190}$$

Usando la propiedad 1 (definida en el capítulo 2 y mostrada para el mecanismo “Locomobot” en el apéndice B), a partir de la desigualdad (190) se obtiene

$$|\dot{q}| < \sqrt{\frac{1}{m_1 l_{c1}^2 + I_1} \left[\left(m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_3 l_1^2 \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right]^2 \right) \dot{q}(0)^2 + \frac{2a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q}(0))] \right]}. \tag{191}$$

Usando (189) y (191) la función $\frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}}$ en (188) está acotada por:

$$\left| \frac{d[\tau_{\text{Max}}(\dot{q})]}{d\dot{q}} \right| < \rho \eta^\rho [\tau^+ - \tau^-] \left[\sqrt{\frac{1}{m_1 l_{c1}^2 + I_1} \left[\left(m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_3 l_1^2 \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right]^2 \right) \dot{q}(0)^2 + \frac{2a(\tau^- - k_g)}{\beta_1} \ln[\cosh(\beta_1\tilde{q}(0))] \right]} \right]^{\rho-1}.$$

La función $\tau_{\text{Max}}(\dot{q})$ en (185) satisface las condiciones (161) y (162) y por lo tanto, puede

ser usada como parte del controlador en la ecuación (166).

6.5. Resultados de simulación

Simulaciones numéricas fueron realizadas mediante el *software* Simnon con la siguiente configuración:

- método numérico de integración: Runge-Kutta-Fehlberg 4/5,
- nivel de gestión de errores: High for test purpose,
- paso de integración: 0.001,
- umbral de error: 1×10^{-6} ,
- Pasos de simulación: 20×10^3 .

La simulación numérica del modelo de la planta (159), junto con las ecuaciones del actuador en (160) y de controlador (166), se llevó a cabo con los siguientes valores numéricos de los parámetros del sistema:

$$\tau^+ = 4,$$

$$\tau^- = 2.$$

Aceleración de la gravedad:

$$g = 9.81.$$

Parámetros del controlador:

$$\beta_1 = 10,$$

$$\beta_2 = 1,$$

$$a = 0.7,$$

$$\eta = 0.55,$$

$$\rho = 24.$$

La función de saturación (185), toma la forma:

$$\tau_{max}(\dot{q}) = \frac{2}{1 + (0.55\dot{q})^{24}} + 2. \quad (192)$$

Parámetros de la planta:

$$f_v = 0.01,$$

$$l_1 = 1,$$

$$l_2 = 1.5,$$

$$l_{c1} = 0.2,$$

$$I_1 = 0.1,$$

$$m_1 = 0.5,$$

$$m_3 = 1.$$

Usando los valores de g, l_{c1} y m_1 el valor de k_g en queda como

$$k_g = 0.981.$$

Con los valores elegidos de $\tau^+ = 4$ y $\tau^- = 2$ se satisfacen las condiciones (161) y (163). Con la elección de $a = 0.9$ se satisface la condición (167).

Posición deseada:

$$q_d = 10.$$

Condiciones iniciales:

$$q(0) = 0,$$

$$\dot{q}(0) = 0.$$

Los resultados de simulación se muestran en las figuras 43-45.

La figura 43 muestra las trayectorias de la posición $q(t)$, la velocidad $\dot{q}(t)$ y la salida $\tau(t)$ del accionamiento de par. En la gráfica superior se observa que la posición $q(t)$ tiende asintóticamente a la posición deseada $q_d = 10$, en la gráfica central se muestra que la velocidad $\dot{q}(t)$ tiende asintóticamente a cero; mientras que en la gráfica inferior se observa que la trayectoria de $\tau(t)$ se mantiene siempre en la zona permitida de par entre $\tau_{max}(\dot{q}(t))$ y $-\tau_{max}(\dot{q}(t))$. En la figura 44 se muestra que tanto el error de posición $\tilde{q}(t)$ como la velocidad $\dot{q}(t)$ tienden a cero de forma asintótica. Finalmente, la figura 45 presenta la gráfica $\tau(t)$ vs. $\dot{q}(t)$, mostrando que $\tau(t)$ se mantiene entre $\tau_{max}(\dot{q}(t))$ y $-\tau_{max}(\dot{q}(t))$.

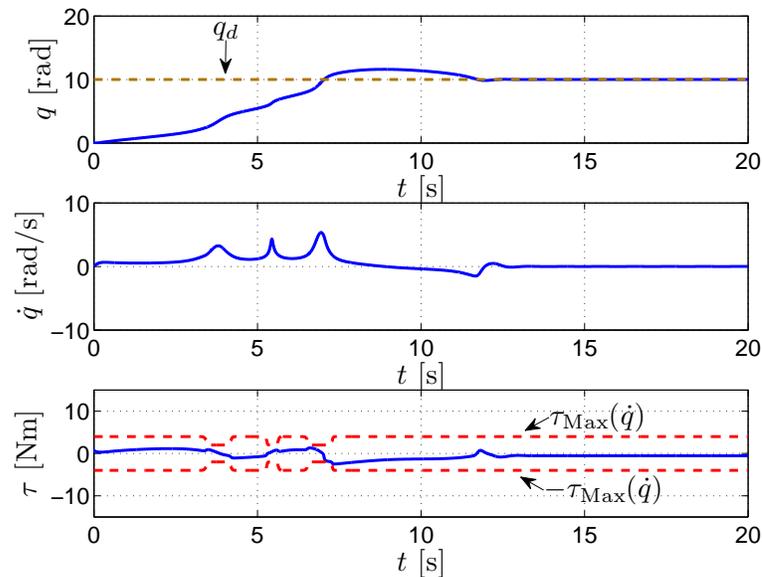


Figura 43: Arriba se muestra la posición $q(t)$. El valor deseado q_d se muestra en línea café entrecortada. En el centro se muestra la velocidad $\dot{q}(t)$. Abajo se muestra la acción de control $\tau(t)$ en línea continua de color azul. Las funciones $\tau_{max}(\dot{q})$ y $-\tau_{max}(\dot{q})$ se muestran en líneas rojas entrecortadas.

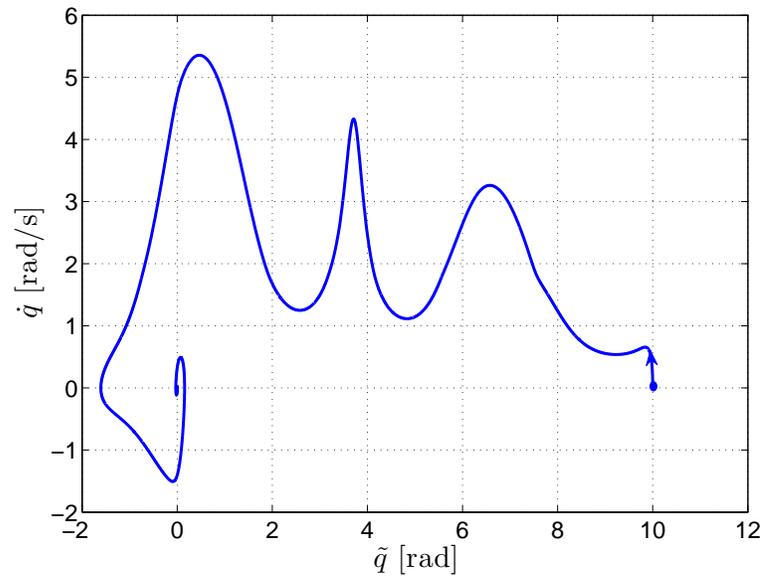


Figura 44: Gráfica de $\dot{q}(t)$ vs. $\tilde{q}(t)$.

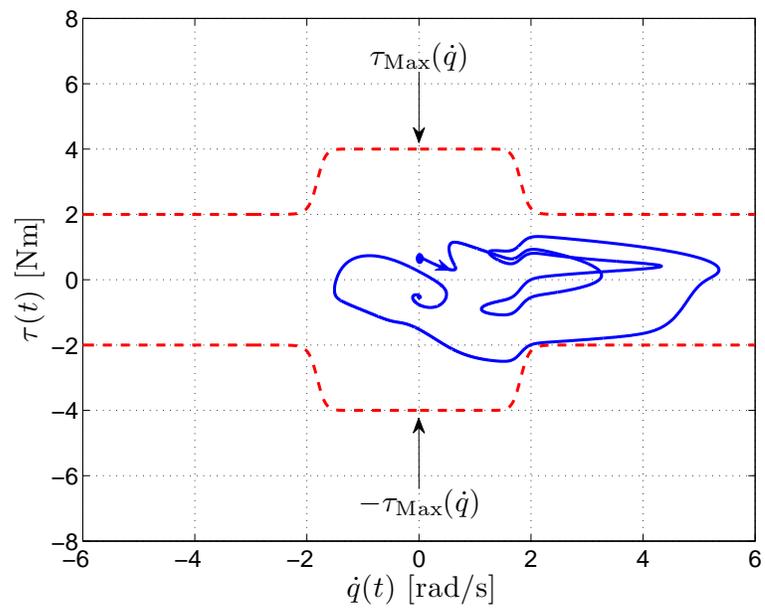


Figura 45: Gráfica de $\dot{q}(t)$ vs. $\tau(t)$ en línea continua de color azul. Las funciones $\tau_{max}(\dot{q})$ y $-\tau_{max}(\dot{q})$ se muestran en líneas rojas entrecortadas.

Capítulo 7. Conclusiones

En este trabajo de tesis se abordó el tema de control de mecanismos con accionamiento de par, donde el accionamiento presenta limitaciones en sus capacidades físicas de par y de velocidad. Con el fin de mantener el funcionamiento del actuador dentro de su zona segura de par y/o velocidad y permitir un control seguro del sistema actuador–robot, se estudiaron cuatro objetivos de control, obteniéndose los siguientes resultados:

- Propuesta de un esquema de control de posición (familia de controladores no lineales tipo PID) para robots manipuladores de n grados de libertad con fricción y sin vector de gravedad. Se consideró que los actuadores de par están restringidos en par y están modelados por la función de saturación dura (continua pero no diferenciable). Los controladores del nuevo esquema de control son de fácil sintonización ya que sólo uno de los parámetros requiere ser elegido cuidadosamente. La propuesta de una función de saturación dura “artificial” permite mantener a los actuadores en su ‘zona segura de operación’, excluyendo los límites de saturación. Resultados de esta parte de la investigación fueron reportados en Salinas, Moreno-Valenzuela y Kelly (2016).
- Propuesta de un controlador para el logro del objetivo de control de posición con límite de velocidad dependiente de la posición para un modelo de un péndulo con accionamiento de par. Se presenta una estima del dominio de inicio.
- Propuesta de un controlador para el logro del objetivo de control de posición con límite simultáneo de par y velocidad para un modelo de un péndulo con accionamiento de par. Se presenta una estima del dominio de inicio. Resultados sobre el control de posición con límite simultáneo de par y velocidad fueron presentados en Kelly y Salinas (2015).
- Propuesta de un controlador para el logro del objetivo de control de posición con límite de par dependiente de velocidad para un mecanismo no lineal de un grado de libertad (mecanismo “Locomobot”). El dominio de inicio es el espacio \mathbb{R}^2 . Se propuso una función típica de saturación para modelar el comportamiento cualitativo de la curva par-velocidad con límite de par dependiente de la velocidad.

Los controladores propuestos permiten mantener al actuador dentro de la ‘zona segura de operación’ mientras se cumple el objetivo de regulación de posición.

7.1. Trabajo futuro

- Obtener una estima del dominio de inicio para el problema de control de posición de robots manipuladores de n grados de libertad con fricción y sin vector de gravedad, usando el esquema de control propuesto en el capítulo 3.
- Proponer nuevos controladores para regulación de posición de robots manipuladores de n grados de libertad con vector de gravedad donde los accionamientos de par son modelados por la función de saturación dura.
- Proponer controladores para resolver los problemas de *regulación de posición con límite de velocidad dependiente de la posición* y *regulación de posición con límite simultáneo de par y velocidad* para robots manipuladores de n grados de libertad.
- En los casos de *regulación de posición con límite de velocidad dependiente de la posición* y *regulación de posición con límite simultáneo de par y velocidad* (usando un modelo del péndulo), explorar el diseño de controladores cuya sintonía no dependa de las condiciones iniciales de la planta y considerar que no se conocen los parámetros de la planta.
- Obtener condiciones para extender los resultados sobre regulación de posición con límite de par dependiente de la velocidad del mecanismo ‘Locomobot’, a robots manipuladores de n grados de libertad.
- Estudio de seguimiento de trayectoria para mecanismos con accionamiento de par, donde las limitaciones del accionamiento son dadas, por alguna de las curvas par-velocidad propuestas.

Lista de referencias bibliográficas

- Álvarez–Ramírez, J., Kelly, R., y Cervantes, I. (2003). Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators. *Automatica*, **39**, 989–995.
- Åström, K. J. y Murray, R. M. (2008). *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. New Jersey, USA. Princeton University Press.
- Baroncelli, A. y Gemma, J. (2015). Industrial robots are conquering the world. Recuperado el 23 de mayo de 2016, de <http://www.ifr.org/news/ifr-press-release/world-robotics-survey-industrial-robots-are-conquering-the-world-773/>.
- Chen, H. (2014). Robust stabilization for a class of dynamic feedback uncertain nonholonomic mobile robots with input saturation. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **12**(6), 1216–1224.
- Craig, J. J. (2005). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. (3rd ed.), Upper Saddle River, NJ. Pearson Education.
- Dixon, W. (2007). Adaptive regulation of amplitude limited robot manipulators with uncertain kinematics and dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**(3), 488–493.
- Dorf, R. C. y Bishop, R. H. (2008). *Modern Control Systems*. (11th ed.), New Jersey, USA. Pearson Education.
- Galeani, S., Tarbouriech, S., Turner, M., y Zaccarian, L. (2009). A tutorial on modern anti-windup design. *European Journal of control*, **15**(3–4), 418–440.
- Gomes da Silva Jr, J. M., Oliveira, M. Z., Coutinho, D., y Tarbouriech, S. (2012). Static anti-windup design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **24**(5), 793—810.
- Gorez, R. (1999). Globally stable pid-like control of mechanical systems. *Systems & Control Letters*, **38**, 61–72.
- Hughes, A. y Drury, B. (2013). *Electric Motors and drives*. (4th ed.), Oxford, U.K. Elsevier Ltd.
- ISO8373:2012 (2012). ISO 8373:2012(en) robots and robotic devices — vocabulary. Recuperado el 24 de marzo de 2016, de <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:8373:ed-2:v1:en>.
- Izadbakhsh, A. y Fateh, M. M. (2014). Real-time robust adaptive control of robots subjected to actuator voltage constraint. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 1999–2014.
- Kanamori, M. (2009). Static anti-windup controller design for planar 2DOF robot manipulators with actuator saturation. En: *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, may, Kobe, Japan. pp. 3314–3319.
- Kelly, R. (1987). A linear-state feedback plus adaptive feed-forward control for dc servomotors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **IE-34**(2), 153–157.

- Kelly, R. y Monroy, C. (2014). Desatando el nudo gordiano del modelado de robots para fines de control: Inspiración en el cordel de ariadna; parte i: Rudimentos. *AMRob Journal, Robotics: Theory and applications*, **2**(4), 99–106.
- Kelly, R. y Salinas, A. (2015). Regulación de posición con limitación simultánea de par y velocidad para mecanismo pendular con accionamiento de par. En: *Memorias del XVII Congreso Mexicano de Robótica 2015*, nov, Los Cabos, México. pp. 275–279.
- Kelly, R., Santibáñez, V., y Berghuis, H. (1997). Point-to-point robot control under actuator constraints. *Control Eng. Practice*, **5**(11), 1555–1562.
- Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. London, UK. Springer-Verlag London.
- Kelly, R., Salinas, A., y De La Torre, D. (2015). Un modelo dinámico del mecanismo inverso simplificado de ‘locomotora’ con accionamiento de par: “locomobot”, arquetipo sencillo de 1 grado de libertad con estructura completa representativa de robot manipulador. En: *Memorias del XVII Congreso Mexicano de Robótica 2015*, nov, Los Cabos, México. pp. 281–287.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. (3rd ed.), Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall.
- Kothare, M. V. y Morari, M. (1999). Multiplier theory for stability analysis of anti-windup control systems. *Automatica*, **35**, 917–928.
- Kothare, M. V., Campo, P. J., Morari, M., y Nett, C. N. (1994). A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, **30**(12), 1869–1883.
- Lee, K., Lee, C.-H., Hwang, S., Choi, J., y Bang, Y. (2016). Power-assisted wheelchair with gravity and friction compensation. *IEEE Transactions on industrial electronics*, **63**(4), 2203–2211.
- Loría, A., Kelly, R., y Teel, A. R. (2005). Uniform parametric convergence in the adaptive control of mechanical systems. *European Journal of Control*, **11**, 87–100.
- Morabito, F., Teel, A. R., y Zaccarian, L. (2004). Nonlinear antiwindup applied to euler–lagrange systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **20**(3), 526–537.
- Moreno-Valenzuela, J. (2015). Modelling and parameter identification of a two degrees-of-freedom robot without gravitational term. Reporte técnico.
- Moreno-Valenzuela, J. y Campa, R. (2009). Two classes of velocity regulators for input-saturated motor drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **56**(6), 2190–2202.
- Ngo, K. B. y Mahony, R. (2006). Bounded torque control for robot manipulators subject to joint velocity constraints. En: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, may, Orlando, Florida. pp. 7–12.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. (5th ed.), New Jersey. Prentice-Hall.

- RAE (2014a). Diccionario de la lengua española, real academia española. Recuperado el 22 de mayo de 2016, de <http://dle.rae.es/?id=0aIDyzR|0aKxDSG|0aNq5wH>.
- RAE (2014b). Diccionario de la lengua española, real academia española. Recuperado el 22 de mayo de 2016, de <http://dle.rae.es/?id=NKZgeLY>.
- RAE (2014c). Diccionario de la lengua española, real academia española. Recuperado el 22 de mayo de 2016, de <http://dle.rae.es/?id=XLY3h2f>.
- Robinett, R. D., Parker, G. G., Schaub, H., y Junkins, J. L. (1997). Lyapunov optimal saturated control for nonlinear systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **20**(6), 1083–1088.
- Salinas, A., Moreno-Valenzuela, J., y Kelly, R. (2016). A family of nonlinear pid-like regulators for a class of torque-driven robot manipulators equipped with torque-constrained actuators. *Advances in mechanical engineering*, **8**(2), 1–14.
- Santibáñez, V., Camarillo, K., Moreno-Valenzuela, J., y Campa, R. (2010). A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **8**(3), 544–555.
- Sastry, S. (1999). *Nonlinear systems: analysis, stability, and control*. New York. Springer-Verlag.
- Sciavicco, L. y Siciliano, B. (2000). *Modelling and Control of Robot Manipulators*. (2nd ed.), London. Springer-Verlag London.
- Slotine, J.-J. E. y Li, W. (1988). Adaptive manipulator control: a case study. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(11), 995–1003.
- Slotine, J.-J. E. y Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. New Jersey, USA. Prentice Hall.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., y Vidyasagar, M. (2005). *Robot modeling and control*. USA. John Wiley & Sons.
- Su, H., Chen, M. Z. Q., Wang, X., y Lam, J. (2014). Semiglobal observer-based leader-following consensus with input saturation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **61**(6), 2842–2850.
- Su, Y. y Swevers, J. (2014). Finite-time tracking control for robot manipulators with actuator saturation. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **30**(2), 91–98.
- Su, Y., Müller, P. C., y Zheng, C. (2010). Global asymptotic saturated pid control for robot manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **18**(6), 1280–1288.
- Suárez, R., Alvarez, J., y Alvarez, J. (1991). Linear systems with single saturated input: stability analysis. En: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, dec, Brighton, England. pp. 223–228.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M., y Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. London. Springer.

- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis*. (2nd ed.), Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall.
- Voss, W. (2007). *A comprehensible guide to servo motor sizing*. Greenfield, MA. Copperhill technologies corporation.
- Yokoyama, M., Kim, G.-N., y Tsuchiya, M. (2010). Integral sliding mode control with anti-windup compensation and its application to a power assist system. *Journal of Vibration and Control*, **16**(4), 503–512.
- Zergeroglu, E., Dixon, W., Behal, A., y Dawson, D. (2000). Adaptive set-point control of robotic manipulators with amplitude-limited control inputs. *Robotica*, **18**(2), 171–181.

Apéndice A. Demostraciones relacionadas con el problema de control de posición de robots manipuladores

A.1. Propiedades de la función $\text{sat}(x; a; b)$

A.1.1. Composición de funciones

Se obtiene la composición $\text{sat}(\text{sat}(x; a; b); c; d)$ de las funciones $\text{sat}(x; a; b) : \mathbb{R} \rightarrow D_1$ y $\text{sat}(x; c; d) : \mathbb{R} \rightarrow D_2$ donde

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad (193)$$

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R} : c \leq x \leq d\}, \quad (194)$$

con $a, c < 0$ y $b, d > 0 \in \mathbb{R}$. En la composición $\text{sat}(\text{sat}(x; a; b); c; d)$, la función $\text{sat}(x; a; b)$ mapea de \mathbb{R} a D_1 en (193) y la función $\text{sat}(x; c; d)$ mapea de D_1 en (193) a D_2 in (194).

De la definición de la función $\text{sat}(\cdot; \cdot; \cdot)$ en (23), la imagen de $\text{sat}(\text{sat}(x; a; b); c; d)$ es el conjunto intersección descrito como:

$$\begin{aligned} D_3 &= D_1 \cap D_2 \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (a \leq x \leq b) \cap (c \leq x \leq d)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \text{máx}\{a, c\} \leq x \leq \text{mín}\{b, d\}\}. \end{aligned}$$

La composición $\text{sat}(\text{sat}(x; a; b); c; d)$ es:

$$\begin{aligned} \text{sat}(\text{sat}(x; a; b); c; d) &= \\ &= \begin{cases} d & \text{si } \text{sat}(x; a; b) > d, \\ \text{sat}(x; a; b), & \text{si } c \leq \text{sat}(x; a; b) \leq d, \\ c, & \text{si } \text{sat}(x; a; b) < c, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{mín}\{b, d\} & \text{si } x > \text{mín}\{b, d\}, \\ x, & \text{si } \text{máx}\{a, c\} \leq x \leq \text{mín}\{b, d\}, \\ \text{máx}\{a, c\}, & \text{si } x < \text{máx}\{a, c\}, \end{cases} \end{aligned} \tag{195}$$

La figura 46 muestra un diagrama de la composición de las funciones $\text{sat}(x; a; b) : \mathbb{R} \rightarrow D_1$ y $\text{sat}(x; c; d) : \mathbb{R} \rightarrow D_2$.

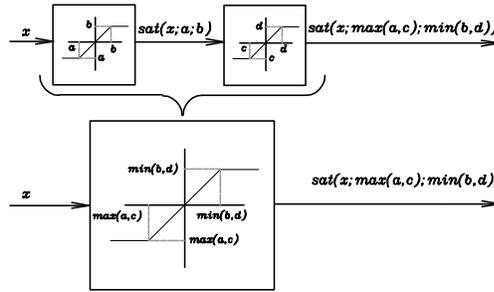


Figura 46: Composición de funciones saturación $\text{sat}(x; a; b) : \mathbb{R} \rightarrow D_1$ y $\text{sat}(x; c; d) : \mathbb{R} \rightarrow D_2$.

A.1.2. Resta entre funciones saturación $\text{sat}(z_1; a; b)$ y $\text{sat}(z_2; a; b)$

A continuación, se describen dos propiedades útiles relacionadas con la resta entre funciones saturación.

Propiedad 6: La función saturación (23) satisface

$$\text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) \geq 0, \quad \forall z_1 \geq z_2 \tag{196}$$

donde $a < 0$ y $b > 0$.

La prueba se divide en tres partes considerando que z_1 y z_2 satisfacen la siguiente

desigualdad:

$$z_1 \geq z_2; \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}. \quad (197)$$

Primero, considérese $z_2 < a$, entonces

$$\text{sat}(z_2; a; b) = a$$

y

$$\begin{aligned} \text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) &= \\ &= \text{sat}(z_1; a; b) - a \quad \forall z_1 \geq z_2; z_2 < a \\ &\geq \min(\text{sat}(z_1; a; b)) - a \quad \forall z_1 \geq z_2; z_2 < a \\ &= 0. \end{aligned} \quad (198)$$

Luego, considérese $a \leq z_2 \leq b$, entonces

$$\text{sat}(z_2; a; b) = z_2$$

y

$$\begin{aligned} \text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) &= \\ &= \begin{cases} b - z_2 & \text{si } a \leq z_2 \leq b < z_1 \\ z_1 - z_2, & \text{si } a \leq z_2 \leq z_1 \leq b, \end{cases} \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (199)$$

Finalmente, considérese $z_2 > b$, entonces

$$\text{sat}(z_2; a; b) = b$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) &= \\
 &= \text{sat}(z_1; a; b) - b, \text{ si } z_1 \geq z_2 > b \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{200}$$

Las desigualdades (198)-(200) demuestran la propiedad 6 en (196).

Propiedad 7: La función saturación (23) satisface

$$\text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) \leq 0, \forall z_1 \leq z_2 \tag{201}$$

donde $a < 0$ y $b > 0$.

La prueba se divide en tres partes considerando que z_1 y z_2 satisfacen la siguiente desigualdad:

$$z_1 \leq z_2; z_1, z_2 \in \mathbb{R}. \tag{202}$$

Primero, considérese $z_2 < a$, entonces

$$\text{sat}(z_2; a; b) = a$$

y

$$\begin{aligned}
 \text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) &= \\
 &= \text{sat}(z_1; a; b) - a, \text{ si } z_1 \leq z_2 < a \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{203}$$

Luego, considere $a \leq z_2 \leq b$, entonces

$$\text{sat}(z_2; a; b) = z_2$$

y

$$\begin{aligned} \text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) &= \\ &= \begin{cases} z_1 - z_2, & \text{si } a \leq z_1 \leq z_2 \leq b, \\ a - z_2, & \text{si } z_1 < a \leq z_2 \leq b, \end{cases} \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{204}$$

Finalmente, considérese $z_2 > b$, entonces

$$\text{sat}(z_2; a; b) = b$$

y

$$\begin{aligned} \text{sat}(z_1; a; b) - \text{sat}(z_2; a; b) &= \\ &= \text{sat}(z_1; a; b) - b, \text{ si } z_1 \leq z_2; z_2 > b \\ &\leq \text{máx}(\text{sat}(z_1; a; b)) - b \text{ si } z_1 \leq z_2; z_2 > b \\ &= 0. \end{aligned} \tag{205}$$

Las desigualdades (203)-(205) demuestran la propiedad 7 en (201).

A.2. Análisis del i -ésimo elemento de $W_2(\tilde{q}, \dot{q}, \xi)$

En este apéndice se demuestra que

$$y_i [\text{sat}(x_i - k_{di}y_i; a; b) - \text{sat}(x_i; a; b)] \leq 0 \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \tag{206}$$

donde $a < 0$, $b > 0$, $k_{di} > 0$.

La prueba de (206) ha sido dividida en dos casos: para $y_i \leq 0$ y para $y_i > 0$.

1. Nótese que $\forall x_i \in \mathbb{R}, y_i \leq 0$ implica

$$x_i - k_{di}y_i \geq x_i. \quad (207)$$

De la propiedad 6 en (196) se tiene que para todo $x_i \in \mathbb{R}, y_i \leq 0$:

$$\begin{aligned} \underbrace{x_i - k_{di}y_i}_{z_1} &\geq \underbrace{x_i}_{z_2} \\ \Downarrow \\ \text{sat}(\underbrace{x_i - k_{di}y_i}_{z_1}; a; b) &- \text{sat}(\underbrace{x_i}_{z_2}; a; b) \geq 0. \end{aligned} \quad (208)$$

Ahora, multiplicando y_i por $\text{sat}(x_i - k_{di}y_i; a; b) - \text{sat}(x_i; a; b)$, para todo $x_i \in \mathbb{R}, y_i \leq 0$ se tiene que:

$$y_i[\text{sat}(x_i - k_{di}y_i; a; b) - \text{sat}(x_i; a; b)] \leq 0. \quad (209)$$

2. Nótese que $\forall x_i \in \mathbb{R}, y_i > 0$ implica

$$x_i - k_{di}y_i < x_i. \quad (210)$$

De la propiedad 7 en (201), se tiene que para todo $x_i \in \mathbb{R}, y_i > 0$:

$$\begin{aligned} \underbrace{x_i - k_{di}y_i}_{z_1} &< \underbrace{x_i}_{z_2} \\ \Downarrow \\ \text{sat}(\underbrace{x_i - k_{di}y_i}_{z_1}; a; b) &- \text{sat}(\underbrace{x_i}_{z_2}; a; b) \leq 0, \end{aligned} \quad (211)$$

Ahora, multiplicando y_i por

$\text{sat}(x_i - k_{di}y_i; a; b) - \text{sat}(x_i; a; b)$, se tiene que para todo $x_i \in \mathbb{R}, y_i > 0$:

$$y_i[\text{sat}(x_i - k_{di}y_i; a; b) - \text{sat}(x_i; a; b)] \leq 0. \quad (212)$$

La desigualdad

$$y_i[\text{sat}(x_i - k_{d_i}y_i; a; b) - \text{sat}(x_i; a; b)] \leq 0 \quad (213)$$

se satisface para todo $x_i \in \mathbb{R}, y_i \leq 0$ en (209) y para todo $x_i \in \mathbb{R}, y_i > 0$ en (212). Por lo tanto, (213) se satisface para todo $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ demostrando la propiedad en (206).

A.3. Obtención del conjunto E_2

Usando la ecuación (46), el conjunto de valores $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen $W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ es:

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n [\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i] [\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) \right. \\ &\quad \left. - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i})] = 0 \right\} \\ &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : [\dot{q}_i = \alpha \tilde{q}_i] \bigcup [\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) \right. \\ &\quad \left. - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) = 0] \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} \\ &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : [\dot{q}_i = \alpha \tilde{q}_i] \bigcup \Gamma_1 \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}, \end{aligned} \quad (214)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : [\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) \right. \\ &\quad \left. - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) = 0] \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}. \end{aligned} \quad (215)$$

En lo siguiente, se presenta el cálculo de los valores de \tilde{q}_i, \dot{q}_i y ξ_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) que definen el conjunto Γ_1 en (215). Dichos valores satisfacen la ecuación

$$\text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i}(\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i); u_{\min_i}; u_{\max_i}) - \text{sat}(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i; u_{\min_i}; u_{\max_i}) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (216)$$

En otras palabras, se encontrarán las soluciones de la ecuación (216).

Se tienen nueve combinaciones posibles. A continuación, se enumeran estas combinaciones, y la solución (si existe) para cada caso.

1. La combinación 1 está dada por las siguientes desigualdades

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) < u_{\min_i}, \quad (217)$$

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i < u_{\min_i}. \quad (218)$$

En la región determinada por (217)-(218), la evaluación de la ecuación (216) es

$$u_{\min_i} - u_{\min_i} = 0.$$

Por lo tanto, los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen la región (217)-(218), son soluciones de (216).

2. La combinación 2 está dada por las siguientes desigualdades

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) < u_{\min_i}, \quad (219)$$

$$u_{\min_i} \leq a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \leq u_{\max_i}. \quad (220)$$

En la región determinada por (219)-(220), la evaluación de la ecuación (216) es

$$u_{\min_i} - (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i) = 0. \quad (221)$$

Por lo tanto, los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen esta región, son soluciones de (216).

3. En esta combinación se tienen

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) < u_{\min_i}, \quad (222)$$

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i > u_{\max_i}. \quad (223)$$

En la región determinada por (222)-(223), la evaluación de la ecuación (216) es

$$u_{\min_i} - u_{\max_i} \neq 0.$$

En este caso, para los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen las desigualdades (222) y (223), la ecuación (216) no tiene solución.

4. En la combinación 4 se tienen

$$u_{\min_i} \leq a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \leq u_{\min_i}, \quad (224)$$

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i < u_{\min_i}. \quad (225)$$

En la región determinada por (224)-(225), la evaluación de la ecuación (216) es

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) - u_{\min_i} = 0. \quad (226)$$

Por lo tanto, los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen esta región, son soluciones de (216).

5. En la combinación 5 se tienen

$$u_{\min_i} \leq a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \leq u_{\min_i}, \quad (227)$$

$$u_{\min_i} \leq a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \leq u_{\max_i}. \quad (228)$$

En la región determinada por (227)-(228), la evaluación de la ecuación (216) es

$$\begin{aligned} a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) - (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i) &= k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (229)$$

Para que se satisfagan (227) y (228), se tiene que

$$u_{\min_i} \leq a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \leq u_{\max_i}. \quad (230)$$

6. La combinación 6 está dada por las siguientes desigualdades

$$u_{\min_i} \leq a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \leq u_{\max_i}, \quad (231)$$

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i > u_{\max_i}. \quad (232)$$

En la región determinada por (231)-(232), la evaluación de la ecuación (216) es

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) - u_{\max_i} = 0. \quad (233)$$

Por lo tanto, los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen esta región, son soluciones de (216).

7. En la combinación 7 se tienen

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) > u_{\max_i}, \quad (234)$$

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i < u_{\min_i}. \quad (235)$$

En la región determinada por (234)-(235), la evaluación de la ecuación (216) es

$$u_{\max_i} - u_{\min_i} \neq 0.$$

En este caso, para los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen las desigualdades (234) y (235), la ecuación (216) no tiene solución.

8. En la combinación 8 se tienen

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) > u_{\max_i}, \quad (236)$$

$$u_{\min_i} \leq a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \leq u_{\max_i}. \quad (237)$$

En la región determinada por (236)-(237), la evaluación de la ecuación (216) es

$$u_{\max_i} - (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i) = 0. \quad (238)$$

Por lo tanto, los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen esta región, son soluciones de (216).

9. La combinación 9 está dada por las siguientes desigualdades

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) > u_{\max_i}, \quad (239)$$

$$a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i > u_{\max_i}. \quad (240)$$

En la región determinada por (239)-(240), la evaluación de la ecuación (216) es

$$u_{\max_i} - u_{\max_i} = 0.$$

Por lo tanto, los valores de \tilde{q}_i , \dot{q}_i y ξ_i que satisfacen esta región, son soluciones de (216).

Con la unión de las diferentes soluciones encontradas en las nueve combinaciones anteriores, se puede escribir el conjunto Γ_1 en (215) como

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \left[(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \leq u_{\min_i}) \cap (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \leq u_{\min_i}) \right] \right. \\ & \cup \left[(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \geq u_{\max_i}) \cap (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \geq u_{\max_i}) \right] \\ & \left. \cup [k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) = 0] \right\}. \end{aligned} \quad (241)$$

Por lo tanto, el conjunto E_2 en (214) también puede escribirse como (62), que para propósito de claridad es escrito aquí también

$$\begin{aligned} E_2 = & \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : W_2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \right\} \\ = & \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : [\dot{q}_i = \alpha \tilde{q}_i] \cup \left[\left[(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \leq u_{\min_i}) \cap (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \leq u_{\min_i}) \right] \right. \right. \\ & \cup \left[(a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i - k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) \geq u_{\max_i}) \cap (a_i \tilde{q}_i + \alpha a_i \xi_i \geq u_{\max_i}) \right] \\ & \left. \left. \cup [k_{d_i} (\dot{q}_i - \alpha \tilde{q}_i) = 0] \right] \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}. \end{aligned}$$

A.4. Derivada de la función $\text{dzn}(x; a; b)^2$

En este apéndice se obtiene la derivada de función

$$\begin{aligned}
 \text{dzn}(x; a; b)^2 &= (x - \text{sat}(x; a; b))^2 \\
 &= \begin{cases} (x - b)^2, & \text{si } x > b, \\ 0, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ (x - a)^2, & \text{si } x < a \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x^2 - 2bx + b^2, & \text{si } x > b, \\ 0, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ x^2 - 2ax + a^2, & \text{si } x < a. \end{cases} \tag{242}
 \end{aligned}$$

A continuación, se denota como $f(x)$ a la función en (242).

1. Para todo $x < a$, se tiene

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 2a(x+h) + a^2 - (x^2 - 2ax + a^2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 2ah}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 2a) \\
 &= 2x - 2a \\
 &= 2(x - a). \tag{243}
 \end{aligned}$$

2. Para $x = a$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(x+h-a)^2 - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} h \\
 &= 0. \tag{244}
 \end{aligned}$$

3. Para $a < x < b$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 - 0)}{h} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{245}$$

4. Para $x = b$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(x + h - b)^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} h \\ &= 0. \end{aligned} \tag{246}$$

5. Para todo $x > b$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - 2b(x + h) + b^2 - (x^2 - 2bx + b^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 2bh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 2b) \\ &= 2x - 2b \\ &= 2(x - b). \end{aligned} \tag{247}$$

A continuación, usando (243)-(247), le derivada de (242) se puede escribir como:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x - a), & \text{si } x > b, \\ 0, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 2(x - b), & \text{si } x < a. \end{cases} \tag{248}$$

La derivada de $dzn(x; a; b)^2$ presentada en (248) es continua.

Apéndice B. Modelo de mecanismo “Locomobot”

El mecanismo “Locomobot” es un mecanismo de un grado de libertad cuyo modelo dinámico posee las características no lineales del ‘modelo dinámico’ de robots de n grados de libertad. Estas características incluyen contar con: ‘pares gravitacionales’ en función de posición, componente ‘centrífugo y de Coriolis’ dependiente de posición y velocidad y componente de ‘inercia’ en función de posición. Un diagrama esqueleto del mecanismo ‘Locomobot’ se muestra en la figura 47. Un mecanismo didáctico del ‘Locomobot’ se presenta la figura 48 (Kelly *et al.*, 2015).

Un modelo dinámico del mecanismo ‘Locomobot’ con fricción puede ser descrito por la siguiente ecuación (los detalles sobre la obtención del modelo y sus propiedades, son presentados en Kelly *et al.* (2015)):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + f_v\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (249)$$

donde respectivamente q, \dot{q} y $\ddot{q} \in \mathbb{R}$ son la posición, velocidad y aceleración; $f_v \geq 0$ es el coeficiente de fricción viscosa y las funciones $M(q), C(q, \dot{q})$ y $g(q) \in \mathbb{R}$ se definen como:

$$M(q) = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_3 l_1^2 \phi(q), \quad (250)$$

$$\begin{aligned} C(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \frac{dM(q)}{dq} \dot{q}, \\ &= \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \frac{d\phi(q)}{dq} \dot{q}, \end{aligned} \quad (251)$$

$$g(q) = m_1 g l_{c1} \cos(q), \quad (252)$$

donde

$$l_1, l_{c1}, m_1, m_3 > 0. \quad (253)$$

$$\begin{aligned} \phi(q) &\triangleq \sin^2(q) \left[1 + \frac{l_1 \cos(q)}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2(q)}} \right]^2 \\ &= \sin^2(q) (f_1(q))^2, \end{aligned} \quad (254)$$

con

$$f_1(q) = \left[1 + \frac{l_1 \cos(q)}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2(q)}} \right], \quad (255)$$

$$\frac{d\phi(q)}{dq} = 2 \sin(q) \cos(q) (f_1(q))^2 + 2 \sin^3(q) f_1(q) f_2(q), \quad (256)$$

donde

$$f_2(q) = \left[\frac{-l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2(q)}} + \frac{l_1^3 \cos^2(q)}{(l_2^2 - l_1^2 \sin^2(q))^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (257)$$

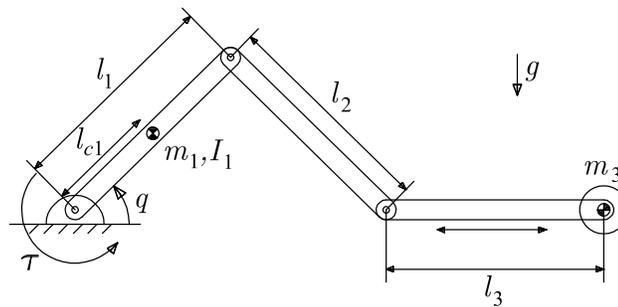


Figura 47: Diagrama esqueleto del mecanismo “Locomobot” con ‘entrada’ el par τ y como ‘salida’ la posición angular q . El tercer eslabón está confinado a moverse horizontalmente. Se supone como nula la masa del segundo eslabón. Esta figura fue presentada en Kelly *et al.* (2015).

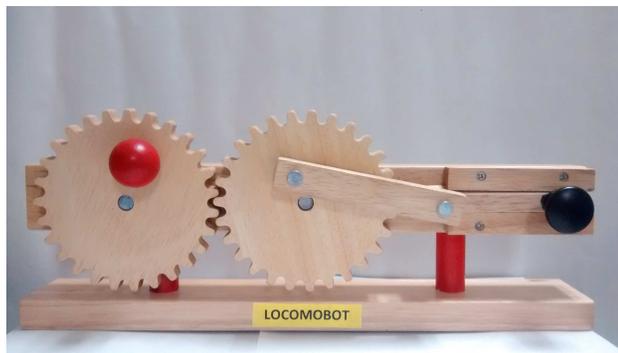


Figura 48: Mecanismo didáctico Locomobot. Esta figura fue presentada en Kelly *et al.* (2015).

Suposición 1: $l_2 > l_1$ y la masa del segundo eslabón es despreciable (nula).

B.1. Propiedades del modelo

Los componentes de inercia, gravitacional y ‘centrífugo y de Coriolis’ poseen las siguientes propiedades.

B.1.1. Término de ‘inercia’

El componente de inercia $M(q)$ en (250) satisface la propiedad 1: nunca es cero por lo que $M(q)^{-1} = 1/M(q)$ está definido, y además $M(q)$ tiene las siguientes cotas:

Considerando que la función $\phi(q)$ en (254) satisface

$$0 \leq \phi(q) < \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right]^2, \quad (258)$$

se tiene

$$M(q) \geq m_1 l_{c1}^2 + I_1, \quad \forall q \in \mathbb{R}, \quad (259)$$

y

$$m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_3 l_1^2 \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right]^2 > M(q), \quad \forall q \in \mathbb{R}. \quad (260)$$

B.1.2. Término ‘centrífugo y de Coriolis’

El componente ‘centrífugo y de Coriolis’ $C(q, \dot{q})$ en (251) satisface las propiedades 2 y 3:

$$\left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}^2 = 0$$

y

$$2C(q, \dot{q}) = \dot{M}(q)$$

para todo $q, \dot{q} \in \mathbb{R}$.

Además, existe una constante $k_{C1} > 0$ tal que

$$|C(q, x)y| \leq k_{C1} |x||y|, \quad \forall q, x, y \in \mathbb{R}.$$

donde para el Locomobot se tiene:

$$k_{C1} = \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \max_q \left| \frac{d\phi(q)}{dq} \right|, \quad (261)$$

y con la ayuda de (256) se sabe que:

$$\max_q \left| \frac{\partial\phi(q)}{\partial q} \right| < 2 \left[\left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right]^2 + \left[1 + \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} \right] \left[\frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} + \frac{l_1^3}{(l_2^2 - l_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right]. \quad (262)$$

B.1.3. Término ‘gravitacional’

El componente gravitacional $g(q)$ en (252) satisface las propiedades 4 y 5.

El término $g(q)$ en (252) es globalmente Lipschitz y satisface:

$$|g(x) - g(y)| \leq k_g |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

donde para el Locomobot resulta como ‘constante de Lipschitz’:

$$k_g = m_1 g l_{c1}. \quad (263)$$

El valor absoluto del componente gravitacional $g(q)$ en (252) está acotado por la constante de Lipschitz:

$$\begin{aligned} |g(q)| &\leq k' \\ &= m_1 g l_{c1} \\ &= k_g. \end{aligned} \quad (264)$$