

RESUMEN de la tesis de Francisco Javier Esparza Hernández,  
presentada como requisito parcial para la obtención del grado  
de MAESTRO EN CIENCIAS con opción en GEOFISICA DE  
EXPLORACION. Ensenada, Baja California, México. Julio de  
1985.

Condiciones de continuidad en la estimación  
local de velocidades de onda superficiales.

Resumen aprobado por:           José Frez C.          

Dr. José Frez Cárdenas

Director de Tesis.

Se desarrolla un método regularizado para estimar las  
velocidades de las ondas superficiales a partir de datos  
globales, considerando un modelo de regiones "puras". El  
operador regularizante utilizado es la derivada de orden  $p$ ,  
de tal manera que el método regularizado considera la  
continuidad de la solución en función del período. En la  
solución hemos tomado en cuenta la contribución del espacio  
nulo del operador regularizante y se ha hecho uso de las  
funciones de Green en lugar del operador derivada. La  
implementación del método regularizado conduce a una ecuación  
matricial cuya solución no es trivial, se da una manera de

resolverla. Se presentan experimentos numéricos que prueban la validez del método regularizado y se comparan las soluciones provenientes de dicho método con las mínimo-cuadráticas. En el método regularizado no pueden incluirse las curvas que tengan huecos. No obstante, se propone un método iterativo para solucionar esta deficiencia. En el método regularizado no hemos podido tomar en cuenta los errores observacionales. Finalmente, presentamos una aplicación a datos en la cuenca del Pacífico. El método regularizado realmente suaviza la solución mínimo-cuadrática. Sin embargo no aparece resolviendo la falta de sensibilidad para alguna región y tal vez tampoco la correlación entre las estimaciones para diferentes regiones.

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE  
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DIVISION CIENCIAS DE LA TIERRA

DEPARTAMENTO DE GEOFISICA DE EXPLORACION

Condiciones de continuidad en la estimación  
local de velocidades de onda superficiales.

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para  
obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta

FRANCISCO JAVIER ESPARZA HERNANDEZ

Ensenada, B.C. Julio de 1985

---

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:

*Jose Frez*

Dr. José Frez Cárdenas, Director del Comité

*Enrique Gómez Treviño*

Dr. Enrique Gómez Treviño, Miembro del Comité

*Ricardo Fernández Tomé*

Dr. Ricardo Fernández Tomé, Miembro del Comité

*José Guadalupe Acosta Chang*

M.C. José Guadalupe Acosta Chang, Miembro del Comité

*C. Nava B.*

M.C. Quauhtémoc Nava Button, Miembro del Comité

Dr. Mario Martínez García, Jefe del Departamento de Geofísica de Exploración

*Francisco Suárez Vidal*

M.C. Francisco Suárez Vidal, Director de la División de Ciencias de la Tierra

*Gilberto Gaxiola Castro*

M.C. Gilberto Gaxiola Castro, Director Académico Interino

Tesis presentada en Julio 6, 1985

DEDICATORIA

A mis padres

Rafael

y

Ma. de la Luz

---

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. José Frez C. por su acertada dirección en este trabajo.

A Laura Martínez y Josefina Rodríguez por su valiosa ayuda en la escritura.

A los miembros de mi comité de tesis por la lectura y correcciones hechas a este manuscrito.

Al M.C. Francisco Suárez V. por sus consejos.

A todas las personas que de alguna manera me ayudaron.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

## CONTENIDO

	<u>Página</u>
I. INTRODUCCION	1
II. PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DEL PROBLEMA	6
II.1 Introducci6n	6
II.2 Planteamiento	10
II.3 Soluci6n regularizada y m6nimo-cuadr6tica	14
II.3.1 Formulaci6n	14
II.3.2 Soluci6n de $AXW + XB=C$	17
III. EXPERIMENTOS NUMERICOS	20
III.1 Detalles computacionales	20
III.2 Experimentos num6ricos para probar el algoritmo	21
IV. PROCESADO DE DATOS REALES	33
IV.1 Caracter6sticas adicionales del m6todo regularizado	33
IV.2 Aplicaci6n	40
V. CONCLUSIONES	71
LITERATURA CITADA	74
APENDICE 1	77

---

## LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
1 Modelo que simula un fondo oceánico con $k$ regiones y cruzado por $m$ recorridos.	11
2 Velocidades verdaderas usadas en los experimentos numéricos.	22
3 Regiones y recorridos usados en los experimentos numéricos.	23
4 Error vs. período. Matriz $L_1$ , ruido $\sigma_1$ .	26
5 Error vs. período. Matriz $L_1$ , ruido $\sigma_2$ .	27
6 Error vs. período. Matriz $L_2$ , ruido $\sigma_1$ .	28
7 Error vs. período. Matriz $L_2$ , ruido $\sigma_2$ .	29
8 Regionalización y recorridos usados en el experimento que usa datos predichos.	35
9 Error vs. período. Se usan todos los recorridos sin emplear datos predichos.	36
10 Error vs. período. Se elimina un recorrido.	37
11 Error vs. período. Se usan todos los recorridos empleando datos predichos.	38
12 Recorridos usados por Leeds (1973).	41
13 Regionalización usada por Leeds (1973).	42
14 Espesor de la Litósfera vs. edad. Tomada de Leeds (1973).	44
15 Regiones empleadas cuando se usan ocho recorridos.	46



LISTA DE FIGURAS (Cont.)

<u>Figura</u>	<u>Página</u>
16 Velocidades regionales vs. período cuando se usan ocho recorridos. Gráficas para $RP_1$ , $RP_2$ y $RP_3$ .	48
17 Velocidades regionales vs. período cuando se usan ocho recorridos. Gráficas para $RP_4$ y $RP_5$ .	49
18 Histograma de los residuos normalizados obtenidos de la aplicación del método regularizado cuando se usan ocho recorridos.	52
19 Velocidades regionales vs. período. Se usan 31 recorridos. Gráficas para $R_1$ , $R_2$ y $R_3$ .	54
20 Velocidades regionales vs. período. Gráficas para $R_4$ , $R_5$ y $R_6$ .	55
21 Velocidades regionales vs. período. Gráficas para $R_7$ y $R_8$ .	56
22 Histograma de los residuos normalizados obtenidos de la aplicación del método regularizado cuando se usan 31 recorridos.	59
23 Residuos obtenidos de la aplicación del método regularizado en función del período.	60

LISTA DE FIGURAS (Cont.)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
24	Comparación con los resultados de Mitchell y Yu (1980).	63
25	Comparación con los resultados de Leeds (1973). Gráficas para $R_1$ , $R_2$ y $R_3$ .	65
26	Comparación con los resultados de Leeds (1973). Gráficas para $R_4$ , $R_5$ y $R_6$ .	66
27	Comparación con los resultados de Leeds (1973). Gráficas para $R_7$ y $R_8$ .	67
28	Velocidades regularizadas para todas las regiones en función del período.	69

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla</u>		<u>Página</u>
I	Descripción de las regiones (tomada de Leeds, 1973).	43
II	Medidas del ajuste. Se usan ocho recorridos.	51
III	Velocidades regionales.	57
IV	Medidas del ajuste. Se usan 31 recorridos.	58
V	Matriz de correlación y norma de las columnas de $\underline{L}$ .	62
VI	Modelos regionales (tomados de Leeds, 1973).	68

## I. INTRODUCCION

Una gran cantidad de problemas geofísicos se pueden expresar matemáticamente mediante una ecuación de Fredholm de primera clase, la cual tiene la forma:

$$y(z) = \int_a^b K(z, w)x(w)dw \quad ; \quad c < z < d \quad (1.1)$$

en la que  $y(z)$  representaría las observaciones y  $x(w)$  la función incógnita. El kernel  $K(z, w)$ , se obtiene a partir de un modelo propuesto y las leyes físicas que rigen al fenómeno en estudio.

La ecuación (1.1) tendrá solución sólo si  $y(z)$  pertenece al rango del operador integral. Además, el operador integral es un suavizador de  $x(w)$  para convertirlo en  $y(z)$ ; de manera que la suavidad de  $y(z)$  debe estar relacionada con la de  $K(z, w)$ . Otra consecuencia del carácter suavizador del operador es la inestabilidad. Suponiendo que para una  $y(z)$  dada existe una y solo una  $x(w)$ , al añadir una pequeña perturbación a  $y(z)$ , la que puede ser producida por errores de medición, generalmente se origina una gran perturbación en  $x(w)$  (Delves y Walsh, 1974).

No hay métodos analíticos estándares que den solución a

una ecuación de Fredholm de primera clase. De ahí que, generalmente, se utilicen métodos de estimación numérica, particularmente mínimo-cuadráticos. Para obtener una solución de (1.1) podríamos aplicar algún esquema de integración numérica a (1.1), obteniéndose una ecuación matricial del tipo:

$$y = Ax \quad (1.2)$$

en que la matriz  $A$  resulta, generalmente, estar mal condicionada, lo que trae como consecuencia que cualquier intento de resolver (1.2) numéricamente, producirá soluciones oscilantes que comúnmente no tendrán sentido físico. Mas aún, (1.1) representa un operador en espacios de dimensiones infinitas, lo cual no puede estar representado en (1.2). Entonces, para encontrar  $\underline{x}(w)$ , debemos agregar información adicional acerca de la solución, como por ejemplo, su grado de suavidad.

Existen varias maneras numéricas-estabilizadas de resolver (1.1), entre las que cabe mencionar a:

a) Desarrollo en funciones singulares. En este método,  $\underline{K}(z, w)$  se expresa en la forma:

$$K(z, w) = \sum_i \lambda_i u_i(z) v_i(w) \quad (1.3)$$

siendo  $\lambda_i$  el valor singular correspondiente a las funciones singulares  $u_i$  y  $v_i$ .

Si  $y_i$  es el producto punto entre  $\underline{y}(z)$  y  $u_i(z)$  entonces

$$x(w) = \sum_i y_i v_i(w) / \lambda_i \quad (1.4)$$

Los valores singulares  $\lambda_i$  se ordenan de mayor a menor. En este método, se calcula  $\underline{x}(w)$  término a término según (1.4) y se detiene la sumatoria cuando los residuos son aceptables y  $\underline{x}(w)$  no tiene oscilaciones espurias.

b) Uso de otros desarrollos. Para ello, se escoge un conjunto de funciones base que representen a  $\underline{x}(w)$ .

$$x(w) = \sum_i c_i p_i(w) \quad (1.5)$$

y empleando (1.1) obtenemos:

$$\sum_i c_i \left[ \int_a^b K(z, w) p_i(w) dw \right] = y(z)$$

esta ecuación se resuelve para  $\underline{c}$  y de esa forma se encuentra  $\underline{x}(w)$  según (1.5). La metodología es útil cuando se escoge el conjunto de funciones base apropiado para el problema, produciendo un desarrollo fuertemente convergente. De esta

manera, se necesitan solamente unos pocos términos en la sumatoria de (1.5) para representar a  $x(w)$ .

c) Método de regularización. Fue propuesto independientemente por Phillips (1962) en E.U.A. y por Tihonov (1963) en la U.R.S.S. Posteriormente ha sido extendido y generalizado por Twomey (1964), Frez Cárdenas (1985) y otros, especialmente en U.R.S.S.

Este método consiste en encontrar una  $x_{\alpha}(w)$  tal que minimize a:

$$\left\| \int_a^b K(z,w)x_{\alpha}(w)dw - y(z) \right\|^2 + \alpha \left\| \Omega[x_{\alpha}(w)] \right\|^2$$

donde  $\Omega$  es un operador lineal que puede ser el operador identidad o bien la derivada de orden  $k$ , etc. y se le denomina operador regularizante. Este operador tiende a suavizar la solución.

Valores pequeños del parámetro de estabilización  $\alpha$ , dan más importancia a los residuos que a la suavidad de la solución. Recíprocamente, valores grandes de  $\alpha$  dan más importancia a la suavidad de la solución que a los residuos. Por lo tanto, debe escogerse un valor de  $\alpha$  que balancee la importancia de ambos términos en la minimización.

Recientemente, Frez Cárdenas (1985), además de usar el operador  $p$ -ésima derivada como operador regularizante, ha tomado en cuenta la contribución del espacio nulo de dicho operador, que en este caso es un polinomio de grado  $p-1$ . Por otro lado, en lugar de efectuar la inversión numérica del operador derivada, ha hecho uso del operador de Green correspondiente. Con esto se logran expresiones algebraicas más compactas para calcular  $x_{\alpha}(w)$  y se optimiza el algoritmo cuando interviene el operador derivada inverso.



## II. PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DEL PROBLEMA

### II.1 Introducci6n

Existen zonas en los oceános en las que se está generando lit6sfera, el material generado proviene del manto y es probable que suba mediante corrientes de convecci6n. Dichas zonas son las cordilleras oceánicas y su funci6n en la formaci6n de suelo oceánico fué propuesta por Hees (1962).

Lo anterior está basado, entre otras evidencias, en que se han encontrado anomalías magnéticas en perfiles perpendiculares a las cordilleras. Tales anomalías se han modelado mediante regiones situadas simétricamente respecto de las cordilleras.

Se ha podido establecer empíricamente que las regiones se apartan de la cordillera a velocidades medias del orden de 2 cm. por año. Por lo tanto, existe una fuerte correlaci6n de la edad y algunas propiedades físicas de la estructura oceánica con la distancia a la cordillera.

El modelo de regiones no se aplica únicamente en ambientes oceánicos, también se puede usar en continentes. Sin embargo, los primeros son estructuralmente más sencillos

y debido a esto enfocaremos el presente trabajo a tales ambientes. La aplicación en continentes de la metodología que de aquí resultara sería inmediata.

El estudio de las ondas sísmicas superficiales a través de ambientes oceánicos se ha empleado por más de tres décadas para entender tanto los procesos que se están llevando a cabo en tales ambientes como la estructura de las regiones. Las ondas superficiales, para un período dado viajan por la superficie terrestre con una amplitud que decae finalmente con la profundidad. Generalmente, dichas ondas resultan ser dispersivas, lo cual significa que su velocidad (de fase o de grupo) depende del período.

Los tipos de ondas sísmicas superficiales más conocidos son:

a) Las ondas Rayleigh, que involucran una combinación de movimiento longitudinal y transversal. El movimiento de una partícula en la presencia de esta onda, está confinado a un plano vertical, el que contiene la dirección de propagación. En la presencia de alguna heterogeneidad vertical, estas ondas resultan ser dispersivas.

b) Las ondas Love, cuyo movimiento es transversal a la dirección de propagación y paralelo a la superficie de la

Tierra. Estas ondas siempre exhiben dispersión.

El resultado de medir la dispersión de éstas ondas superficiales (velocidades de fase y de grupo) ha contribuido a la solución de diferentes problemas, entre los que mencionaremos los siguientes:

a) Estimación de velocidades locales a partir de datos globales. Existen dos métodos diferentes de atacar este problema. En el primero no se usa un modelo de bloques oceánicos. En la parte de la Tierra a estudiar se construye una malla con nodos y en cada uno de éstos se estima la velocidad. Esta metodología ha sido empleada por Yanovskaya (1982). En el segundo se asume una regionalización, basada en edades del fondo oceánico, medidas de flujo térmico, anomalías magnéticas, etc. y, generalmente, las velocidades regionales se estiman con un método mínimo-cuadrático ponderado. El primero en usar esta metodología fue Toksoz y Anderson (1966), posteriormente ha sido aplicada, entre otros, por Kanamori (1970), Forsyth (1975) y Christensen et al, (1980). La regionalización del fondo oceánico influye en la estabilización del problema. Si se usa una gran cantidad de regiones se pueden encontrar detalles del fondo oceánico, pero el problema se vuelve inestable. Recíprocamente si se utilizan pocas regiones, el problema se estabiliza pero se pierden los detalles. Por lo tanto, debe buscarse una

discretización que balancee estabilidad y detalles.

b) Estimación de estructura. Existen dos maneras de atacar el problema. En la primera se estiman las velocidades locales y en seguida se invierten para encontrar la estructura, tal es, por ejemplo, la metodología que usó Forsyth (1975). En la segunda se estima la estructura directamente, entre los trabajos realizados en esta dirección están los de Knopoff (1972) y Leeds (1973).

c) Determinación de parámetros focales de los sismos, lo que es importante para entender la tectónica de las regiones.

Las velocidades regionales que se estiman en a) son función del período y representan al promedio de la estructura bajo la región en cuestión. Debido a esto, dichas velocidades deberían ser funciones suaves del período. Sin embargo, debido a que los datos tienen error y además, que puede haber regiones mal cubiertas, las velocidades estimadas con el método mínimo-cuadrático ponderado pueden ser oscilantes. Para encontrar otro estimador estabilizado, debemos agregar una condición adicional al problema.

El propósito del presente trabajo es desarrollar un método regularizado, que introduzca ciertas condiciones tales que se asegure de alguna manera la continuidad de la

estimación, en función del período.

## II.2 Planteamiento

Para llevar a cabo nuestro propósito es necesario encontrar una relación entre las observaciones y las incógnitas. Consideremos el modelo mostrado en la Figura 1, el que simula el fondo oceánico. Suponemos que cada región tiene una velocidad diferente, la cual es función suave del período.

Para calcular  $t_{ij}$ , el tiempo del  $i$ -ésimo recorrido al período  $w_j$ , suponemos que la propagación del frente de ondas se puede describir apropiadamente por la teoría geométrica de rayos. Así:

$$t_{ij} = \int_R dl / v_j(l) = \int_R s_j(l) dl \quad (2.1)$$

en la que  $R$  es el espacio recorrido por el  $i$ -ésimo rayo y  $v_j(l)$  es la velocidad en el espacio  $R$  al período  $w_j$ . Llamamos a  $s_j(l)$  la lentitud al período  $w_j$ . Este es un caso simple de una ecuación integral de Fredholm de primera clase y su solución exhibe las dificultades mencionadas en el Capítulo I.

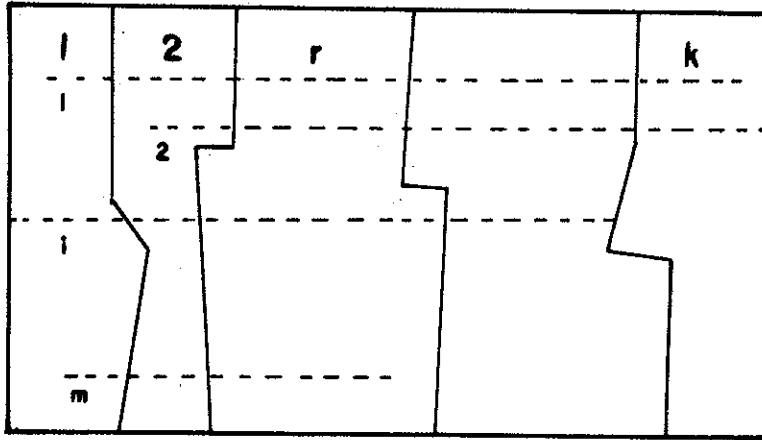


Figura 1.- Modelo que simula un fondo oceánico con  $k$  regiones y cruzado por  $m$  recorridos.

Aplicando (2.1) al modelo de la Figura 1, tendremos que:

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^k l_{ir} s_{rj} \quad (2.2)$$

donde  $l_{ir}$  es la longitud del  $i$ -ésimo recorrido en la región  $r$ ,  $s_{rj}$  es la lentitud en la  $r$ -ésima región al período  $w_j$ , y  $k$  es el número de regiones espaciales que atraviesa el rayo. Consideraremos que la trayectoria del  $i$ -ésimo rayo en la  $r$ -ésima región es tal que  $l_{ir}$  es mínima. Con ésto estamos considerando trayectorias de mínima longitud y no de mínimo tiempo, como debería de ser de acuerdo a la ley de Snell. A pesar de ello, ésto no introduce mucho error, como lo ha expuesto Forsyth (1975).

Para trabajar con cantidades no-dimensionales, en lugar de longitudes, dividimos ambos miembros de (2.2) por la longitud total del recorrido, o sea

$$t_{ij} / \sum_j l_{ij} = \sum_{r=1}^k (l_{ir} / \sum_j l_{ij}) s_{rj} \quad (2.3)$$

que en notación matricial es:

$$T = LS \quad (2.4)$$

si solamente se tienen datos correspondientes a un período, (2.3) se puede poner como:

$$t = Ls \quad (2.5)$$

que también corresponde al caso en que la estimación de  $s$  para los diferentes períodos esta desacoplada una de otra.

En la ecuación (2.4) las observaciones son lentitudes promedios y las incógnitas son lentitudes de cada región en función del período. La matriz  $L$  se construye de acuerdo a la regionalización y a los recorridos disponibles. Así, el problema se reduce a estimar  $S$ .

Si  $m$  es el número de recorridos y  $n$  el número de períodos, (2.4) representa un sistema de  $k$  por  $n$  incógnitas y  $m$  por  $n$  datos. Generalmente  $k < m$ , de tal manera que tendremos un sistema sobredeterminado.

En los trabajos mencionados en la Sección II.1-(a), en los que se utilizó el método mínimo-cuadrático ponderado, no se garantiza la suavidad de las estimaciones en función del período, ya que esta condición no se ha incluido explícitamente en las características del estimador.



### II.3 Solución regularizada y mínimo-cuadrática

#### II.3.1 Formulación

Para encontrar el estimador regularizado de (2.4) proponemos como operador regularizante a la derivada de orden  $p$ . Así, se busca una solución  $\underline{S}$  tal que minimice:

$$F = ||T - LS||^2 + \alpha ||D_p S^t||^2 \quad (2.6)$$

donde

$$||S||^2 = \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^n s_{ri}^2$$

$D_p$  es una matriz que representa la versión discreta de la derivada de orden  $p$  y  $S^t$  denota la traspuesta de la matriz  $\underline{S}$ . La minimización de la norma cuadrática de  $D_p S^t$  significa que estamos eliminando cambios abruptos de la solución en función del período.

Consideraremos que las letras minúsculas con subíndices son elementos de las matrices denotadas con las correspondientes letras mayúsculas.

Siguiendo la metodología de Frez Cárdenas (1985), para tomar en cuenta la contribución del espacio nulo del operador  $D_p$ , descomponemos a  $\underline{S}$

$$S = S_* + S_p \quad (2.7)$$

donde  $S_p$  se encuentra en el espacio nulo de  $D_p$ , es decir:

$$D_p S_p^t = 0$$

Por lo tanto, las filas de  $S_p$  deben ser polinomios en función del período, de grado  $p-1$ .

Si definimos a  $X_p$  como:

$$X_p = \begin{vmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 & \dots & w_1^{p-1} \\ 1 & w_2 & w_2^2 & \dots & w_2^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_n & w_n^2 & \dots & w_n^{p-1} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

y  $\underline{C}$  es una matriz de coeficientes a encontrar, entonces

$$S_p^t = X_p C \quad (2.9)$$

El problema inverso consiste en encontrar  $S_*$  y  $\underline{C}$  tal que se minimice (2.6). La primera ecuación normal resulta de hacer igual a cero la derivada parcial de  $\underline{F}$  con respecto a  $S_*$  o sea:

$$\partial F / \partial S_* = 0$$

de donde se obtiene que:

$$L^t L S_* + L^t L S_p + \alpha S_* D_p^t D_p = L^t T \quad (2.10)$$

podemos tomar el caso particular  $\alpha=0$  encontrando el estimador mínimo-cuadrático estándar:

$$S = (L^t L)^{-1} L^t T \quad (2.11)$$

La segunda ecuación normal resulta de:

$$\partial F / \partial C = 0$$

o sea

$$X_p^t T^t L - X_p^t S_*^t L^t L - X_p^t X_p C L^t L = 0$$

despejando  $C$  y usando (2.9), encontramos que:

$$S_p = (L^t L)^{-1} L^t (T - L S_*) X_p (X_p^t X_p)^{-1} X_p^t \quad (2.12)$$

Al introducir (2.12) en (2.10), tenemos que:

$$L^t L S_* [I - X_p (X_p^t X_p)^{-1} X_p^t] + \alpha S_* D_p^t D_p =$$

$$L^t T [I - X_p (X_p^t X_p)^{-1} X_p^t] \quad (2.13)$$

Usando:

$$D_p^{-1} = G_p S_w \quad (2.14)$$

en que  $G_p$  es la matriz que corresponde al operador de Green asociado a  $D_p$  y  $S_w$  una matriz diagonal formada por los factores de integración numérica en período, llegamos finalmente a que:

$$\begin{aligned} L^t L S_* [I - X_p (X_p^t X_p)^{-1} X_p^t] G_p S_w^2 G_p + \alpha S_* = \\ L^t T [I - X_p (X_p^t X_p)^{-1} X_p^t] G_p S_w^2 G_p \end{aligned} \quad (2.15)$$

### II.3.2. Solución de $AXW + XB = C$

La ecuación (2.15) es del tipo:

$$AXW + XB = C \quad (2.16)$$

en la que todos los factores y términos que aparecen en ella son matrices. Su solución es  $\underline{X}$  y no es trivial encontrarla. La idea es pasar de (2.16) a un sistema del tipo:

$$d = Ry \quad (2.17)$$

donde  $\underline{R}$  sea una matriz cuadrada,  $\underline{y}$  un vector que contenga todos los elementos de  $\underline{X}$ , y  $\underline{d}$ , un vector que contenga los elementos de  $\underline{C}$ .

De la comparación de (2.15) con (2.16), resulta que:

$\underline{A}$  es de orden  $\underline{k}$  por  $\underline{k}$

$\underline{X}$  es  $\underline{k}$  por  $\underline{n}$

$\underline{W}$  es  $\underline{n}$  por  $\underline{n}$

$\underline{C}$  es  $\underline{k}$  por  $\underline{n}$

$\underline{B}$  es  $\underline{n}$  por  $\underline{n}$

y, con un poco de álgebra, resulta que

$$R = \begin{vmatrix} a_{11}W^{t+B^t} & a_{12}W^t & \dots & a_{1k}W^t \\ a_{21}W^t & a_{22}W^{t+B^t} & \dots & a_{2k}W^t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}W^t & a_{k2}W^t & \dots & a_{kk}W^{t+B^t} \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

$$y^t = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$$

$$d^t = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kn})$$

Se puede encontrar en la literatura la solución de la ecuación  $AX + XB = C$ , en la cual intervienen los productos de Kronecker (Bellman, 1970). La estructura de  $\underline{R}$ , según (2.18), contiene implícitamente tales productos.

Si  $\underline{R}$  es no-singular, la solución de (2.17), y por lo tanto de (2.16), es

$$y = R^{-1}d$$

Así, dados  $\underline{L}$ ,  $\underline{p}$ ,  $\underline{T}$  y  $\alpha$  podemos encontrar  $S_*$  mediante el algoritmo ya delineado. Es inmediato encontrar  $S_p$  a partir de (2.12). Para finalizar se forma  $\underline{S}$  mediante (2.7).

### III. EXPERIMENTOS NUMERICOS

#### III.1 Detalles computacionales

Se diseñaron dos programas en FORTRAN IV para implementar ambos algoritmos, el mínimo-cuadrático estándar y el regularizado. En ambos programas, se usa variables de doble precisión lo que en la computadora PRIME 750 equivale a trabajar con alrededor de catorce cifras significativas. Todas las matrices son tratadas como arreglos unidimensionales para optimizar la implementación de tales algoritmos.

El método regularizado se implementó para  $p=2$  y  $p=4$  utilizando algunas rutinas escritas y probadas por J. Frez. La matriz correspondiente al operador de Green se construyó para su argumento normalizado entre cero y uno, mediante:

$$w_j' = \frac{w_j - w_1}{w_n - w_1} ; \quad j=1, \dots, n$$

Así, con esta misma normalización, se construyó la matriz  $X_p$  de acuerdo a (2.8).

Para la inversión de las matrices, se utilizó una subrutina (DMINV) que invierte matrices cuadradas y que

proviene del paquete de subrutinas científicas de la IBM. La inversión que involucra más operaciones es la de la matriz  $\underline{R}$ , ya que, en comparación con las demás, es la más grande y al parecer no tiene alguna característica obvia que simplifique la inversión.

En el Apéndice 1 se adjunta el listado de ambos programas.

### III.2 Experimentos numéricos para probar el algoritmo

Se hicieron pruebas numéricas en las que se comparó resultados de la aplicación del método mínimo-cuadrático y del regularizado. En estos experimentos definimos tres regiones, denominadas  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , a las que les asignamos una curva de velocidad diferente, llamada velocidad verdadera. Las velocidades se definen como funciones suaves del período. La Figura 2 muestra la gráfica de tales velocidades para cada región. Hicimos dos experimentos en los cuales; se tomaron cuatro recorridos y 10 períodos comprendidos entre 30 y 200 segundos.

El primer experimento simula un "buen" cubrimiento de regiones; en la Figura 3a, mostramos las regiones así como los recorridos. En el segundo experimento, la región  $R_3$ ,



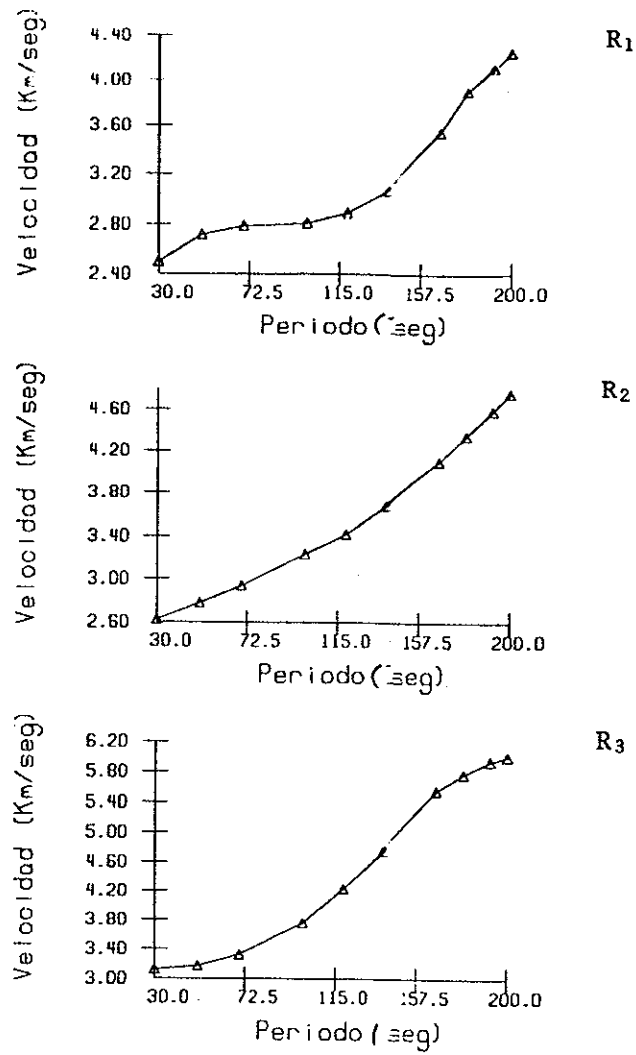


Figura 2.- Velocidades verdaderas usadas en los experimentos numéricos.

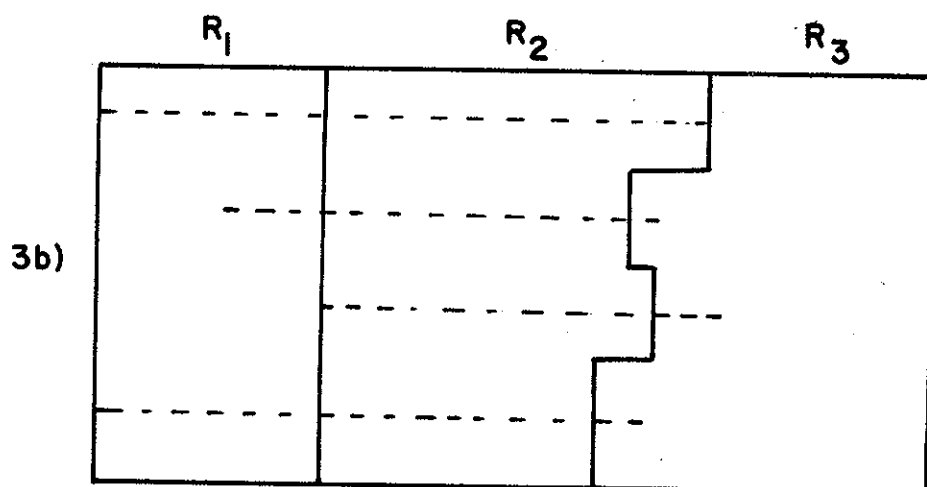
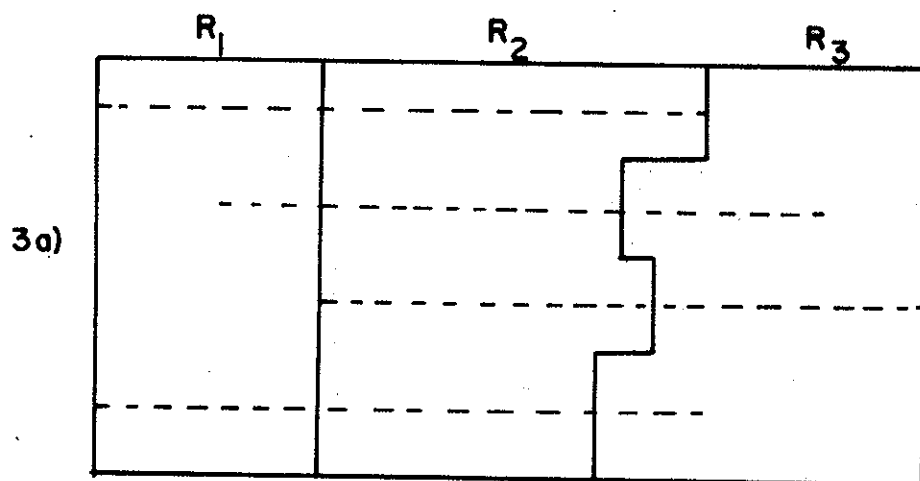


Figura 3.- Regiones y recorridos usados en los experimentos numéricos.

aparece mal cubierta; en la Figura 3b, mostramos los recorridos así como las regiones. Nótese que se utilizó la misma regionalización para ambos experimentos.

Las matrices  $L_1$  y  $L_2$  están asociadas al primer y segundo experimento, respectivamente, y son:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.63 & 0.0 \\ 0.167 & 0.5 & 0.333 \\ 0.0 & 0.545 & 0.455 \\ 0.364 & 0.454 & 0.182 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.63 & 0.0 \\ 0.167 & 0.5 & 0.05 \\ 0.0 & 0.545 & 0.1 \\ 0.364 & 0.454 & 0.08 \end{bmatrix}$$

Las lentitudes promedios se calcularon usando (2.4). Para simular los datos reales, contaminamos a la matriz  $\underline{T}$  con ruido gaussiano con promedio cero y con las siguientes desviaciones estándares:

$$\sigma_1 = 0.01 / mn \left( \sum_i \sum_j t_{ij} \right) ; \quad \sigma_2 = \sigma_1 / 2$$

La longitud de cada recorrido para el primer experimento, es 1.0 Km. Para el segundo experimento esto se cumple de manera aproximada. Si los errores de las observaciones, expresados en segundos, los denotamos por  $\sigma_t$ , entonces

$$\sigma_t = t^2 \sigma / d$$

la distancia total del recorrido  $d$ , se mide en Km,  $t$  es el tiempo empleado por el rayo y  $\sigma$  es el error en velocidad expresado en Km/seg. Poniendo  $d=1.0$  Km en la expresión anterior se tiene que

$$\sigma_t = t^2 \sigma$$

en particular, para los dos experimentos numéricos se comprobó que

$$t_{ij} < 1.0 \text{ seg}$$

de tal manera que

$$\sigma_t < t_{ij} \sigma \approx \bar{t} \sigma$$

escogiendo  $\sigma \approx 0.01$  Km/seg, lo cual es un error promedio para los datos (Christensen et al, 1980) tenemos

$$\sigma_t \approx 0.01 \bar{t}$$

de tal modo que hemos dado una explicación para la definición de  $\sigma_1$ . La otra desviación estándar  $\sigma_2$ , es para reducir el nivel de "error" en las observaciones a la mitad. Las Figuras 4, 5, 6, y 7 muestran las velocidades verdaderas

$\Delta$  mínimo-cuadrático.  
 $\circ$  regularizado.

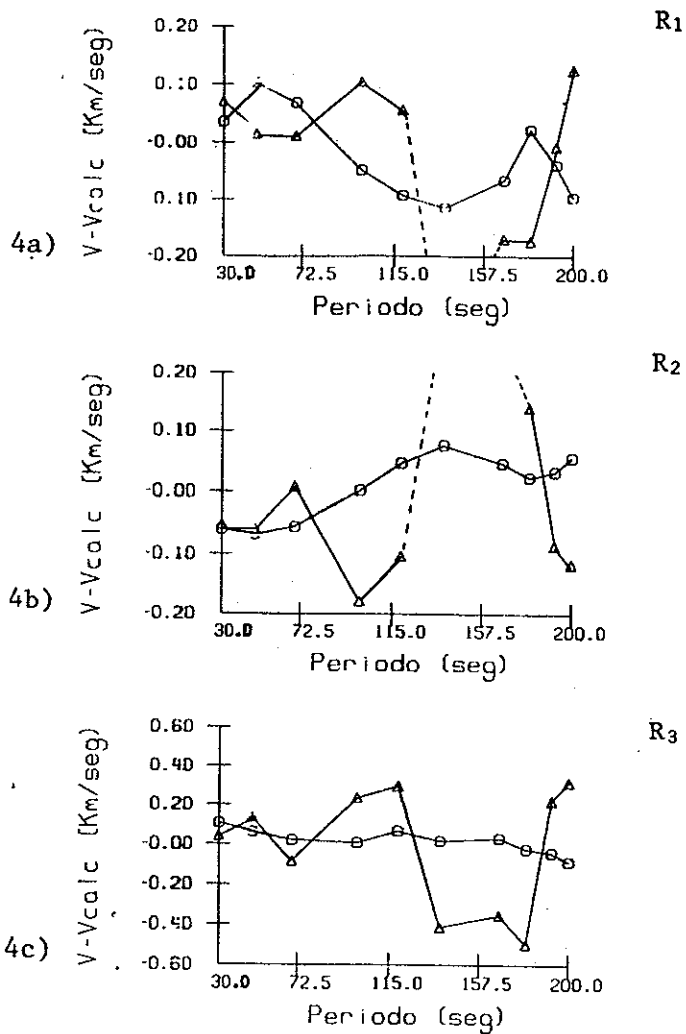
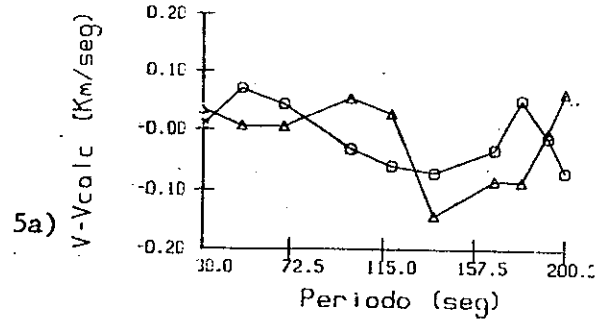
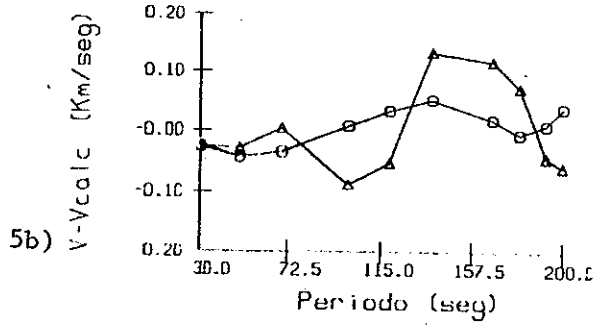


Figura 4.- Error vs. período. Matriz  $L_1$ , ruido  $\sigma_1$ .

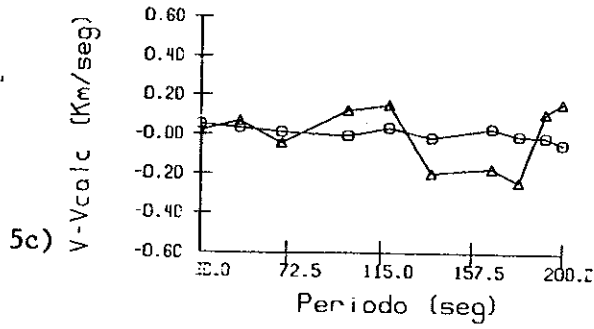
Δ mínimo-cuadrático.  
 o regularizado.



R<sub>1</sub>



R<sub>2</sub>



R<sub>3</sub>

Figura 5.- Error vs. período. Matriz L<sub>1</sub>, ruido  $\sigma_2$ .

$\Delta$  mínimo-cuadrático.

$\circ$  regularizado.

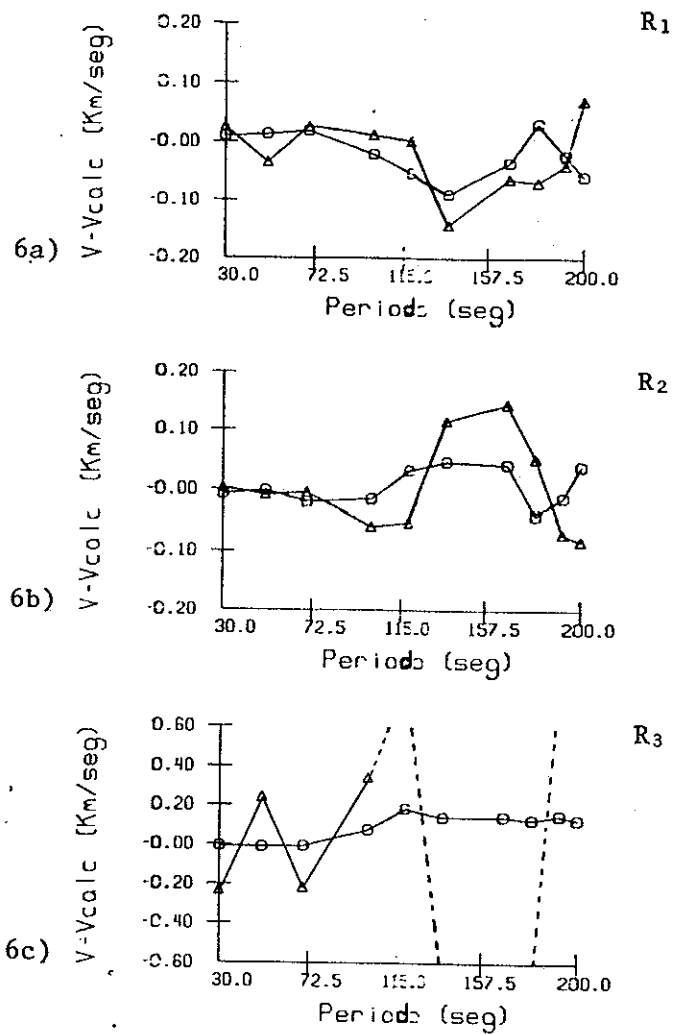


Figura 6.- Error vs. período. Matriz  $L_2$ , ruido  $\sigma_1$ .

$\Delta$  mínimo-cuadrático.  
 o regularizado.

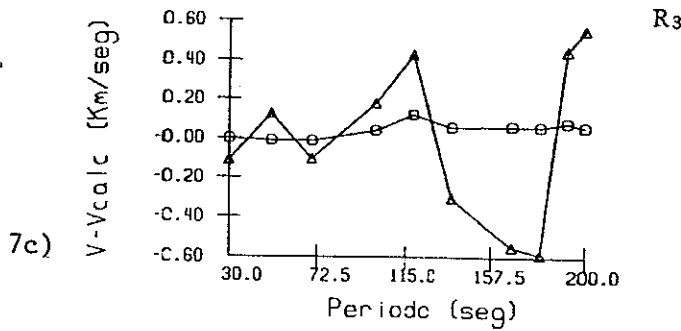
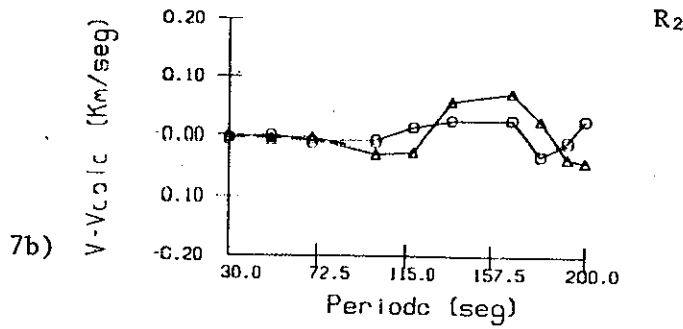
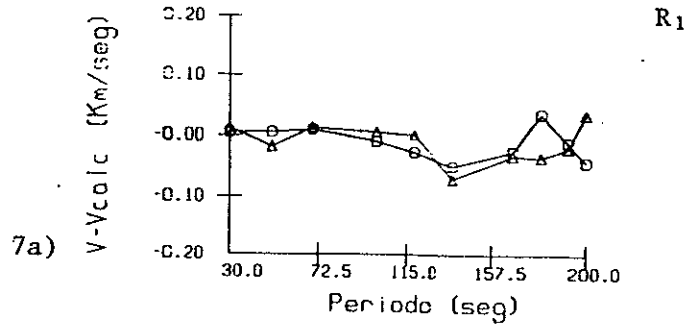


Figura 7.- Error vs. período. Matriz  $L_2$ , ruido  $\sigma_2$ .



menos las calculadas (error) en función del período y para cada región. Se incluyen los resultados de aplicar tanto el método mínimo-cuadrático, como el regularizado. La Figura 4 es para la matriz  $L_1$  y ruido  $\sigma_1$ . La Figura 5 es para  $L_1$  y ruido  $\sigma_2$ . Las Figuras 6 y 7 son para la matriz  $L_2$ , ruido  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respectivamente.

En las Figuras 4a, 4b y 6c algunos valores del error no cabe en la gráfica, lo cual se ha indicado por líneas punteadas.

Observamos que aún en el caso de regiones bien cubiertas, el error entregado por el método regularizado es menor que el correspondiente al mínimo-cuadrático (Figs. 4 y 5). Para el caso de una región mal cubierta, las diferencias entre los dos métodos son significativas, como puede verse en las Figuras 6c y 7c.

Además, el método regularizado da errores menores que el mínimo-cuadrático aún en la presencia de niveles bajos de ruido ( $\sigma_2$ ), como puede observarse en las Figuras 5 y 7.

En algunos períodos, las estimaciones mínimo-cuadráticas, para diferentes regiones, muestran correlación (Figs. 4a y 4b). Dicha correlación se sigue notando en las estimaciones regularizadas correspondientes y

resulta de la estructura de la matriz  $\underline{L}$ .

Las estimaciones regularizadas para algunas regiones, muestran sesgo (Figs. 4b y 6c). Esto no es deseable y ha sido introducido por las características del método regularizado.

Para los experimentos numéricos hechos, el método regularizado entrega soluciones mas aproximadas a las verdaderas, en comparación al mínimo-cuadrático. Sin embargo, las correlaciones presentes en las estimaciones mínimo-cuadráticas siguen apareciendo en las regularizadas y algunas de éstas últimas muestran sesgo.

Por otro lado, se experimentó cual era el valor óptimo de  $p$ , resultando ser dos. Para encontrar el valor apropiado del parámetro de estabilización se realiza una corrida del programa usando valores de  $\alpha$  equiespaciados en escala logarítmica. Generalmente se empieza con  $10^{-6}$  y se finaliza con 10. Se grafican las soluciones para cada región y en función del período, con el objeto de observar el grado de suavidad de las estimaciones, y escoger un valor a priori de  $\alpha$ . Si no se encontró el grado de suavidad asumido pero, a partir de la primera corrida, se sabe que  $\alpha$  cae dentro de un subintervalo de  $10^{-6}$  - 10, se elige una subzona de muestreo. En seguida se observan los residuos para ver si tienen

conducta aleatoria y caen dentro de los errores observacionales. Si no es así se debe modificar el valor de  $\alpha$  para tratar de balancear; el grado de suavidad asumido con la aleatoriedad de los residuos de tal manera que, estos últimos caigan dentro de los errores observacionales.

#### IV. PROCESADO DE DATOS REALES

##### IV.1 Características adicionales del método regularizado

Normalmente, los datos son curvas de velocidades promedios en función del período para cada recorrido. Es común que los períodos cubiertos por cada curva no estén completos y, así decimos que algunas curvas tienen huecos, siendo usual que dichos huecos estén en los extremos de la curvas. La estimación mínimo-cuadrática se hace usualmente para cada período en forma desacoplada; por consiguiente, se puede usar los datos de una curva que tenga huecos. Sin embargo, en nuestra formulación regularizada, la matriz  $\underline{T}$  debe estar completamente definida, de tal modo que en principio deben excluirse aquellos recorridos cuyas curvas tengan huecos. No obstante, es indudable que estos recorridos contienen información, la que debiera aprovecharse. A continuación, se describe una manera iterativa de cómo hacerlo.

Primero estimamos las lentitudes regionales con el método regularizado, usando solamente los recorridos completos. Con esta estimación, se puede calcular las lentitudes promedios para todos los recorridos y períodos, incluyendo aquellos que estén incompletos. En seguida, se

hace la estimación como si todos los recorridos estuvieran completos, utilizando los valores predichos por la primera estimación para llenar los huecos.

Para comprobar la metodología propuesta, se hizo un experimento numérico consistente de 5 recorridos, 3 regiones y 10 períodos. La Figura 8 muestra un esquema de las regiones y los recorridos. Para dicho experimento usamos el modelo de velocidades verdaderas empleadas en el Capítulo III. Las lentitudes promedios se calcularon mediante (2.4), agregándoseles ruido gaussiano con promedio cero y 0.5% de desviación estándar relativa.

La Figura 9 muestra las gráficas del error para cada región en función del período y al usar los 5 recorridos. En seguida, se supuso que al recorrido  $E_3$  le faltaban las lentitudes promedios correspondientes al primero, segundo, y último períodos. En la Figura 10, se dan las gráficas del error cuando se elimina  $E_3$ . En la Figura 11 se presentan las gráficas cuando se usan los 5 recorridos, llenando los datos faltantes de  $E_3$  con el procedimiento anteriormente bosquejado.

Observamos que las estimaciones regularizadas resultantes de usar datos predichos son aproximadamente iguales a las resultantes de usar datos "verdaderos" (Figs.

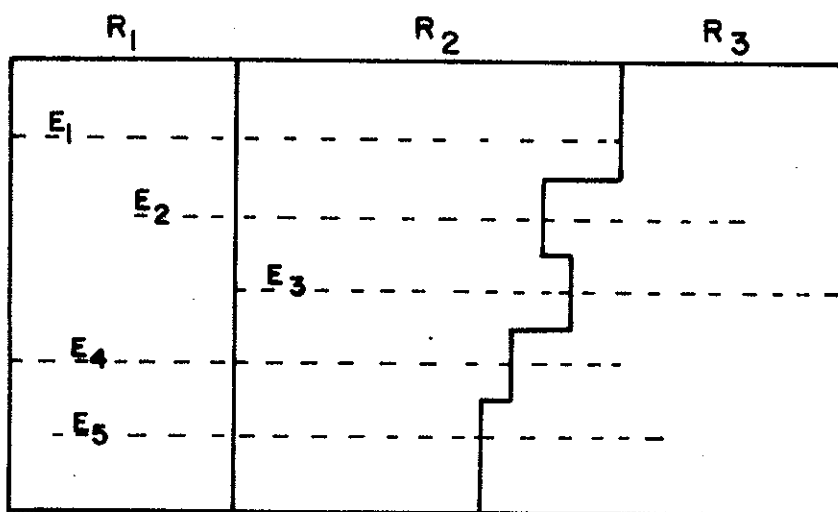


Figura 8.- Regionalización y recorridos usados en el experimento que usa datos predichos.

Δ mínimo-cuadrático.  
 o regularizado.

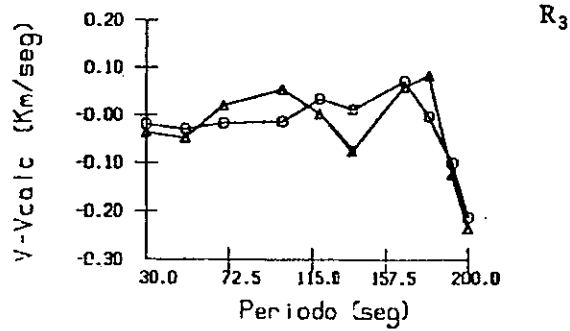
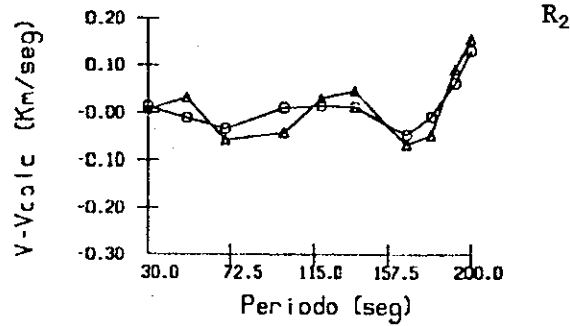
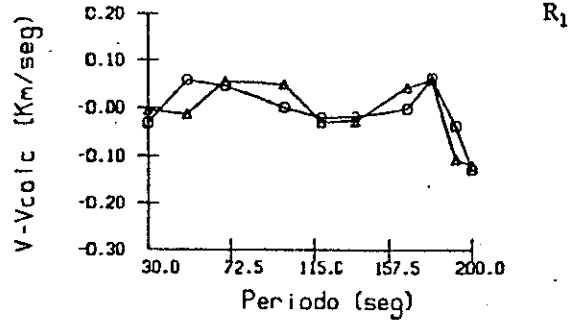


Figura 9.- Error vs. período. Se usan todos los recorridos sin emplear datos predichos.

Δ mínimo-cuadrático.  
 o regularizado.

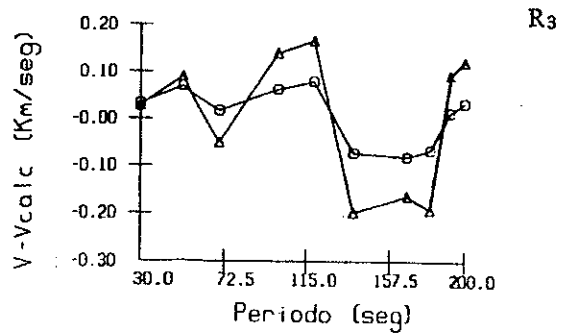
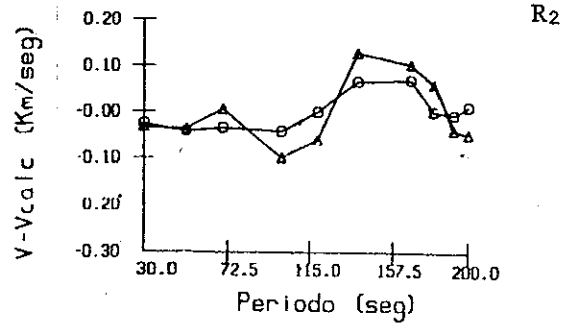
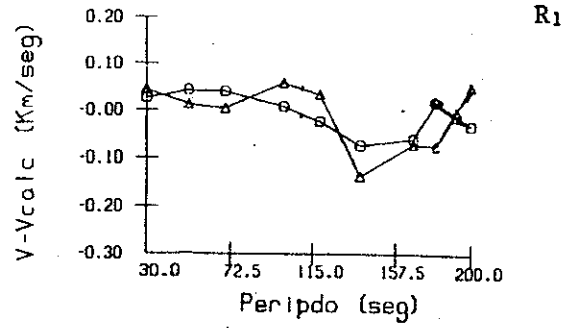


Figura 10.- Error vs. período. Se elimina un recorrido.



$\Delta$  mínimo-cuadrático.

$\circ$  regularizado.

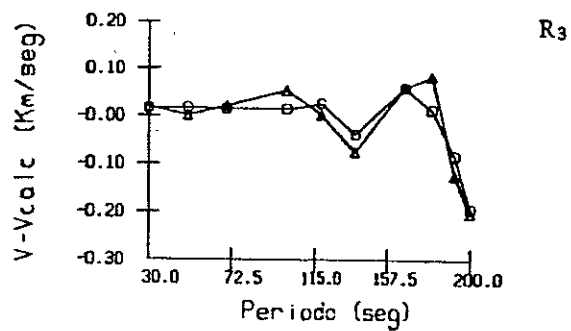
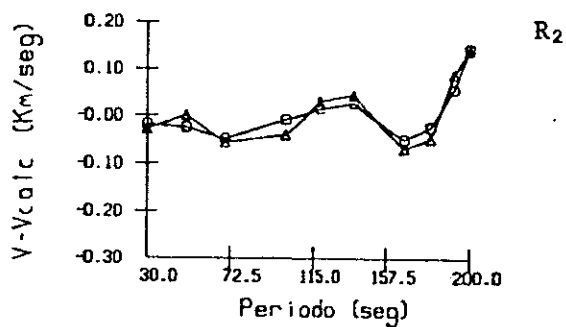
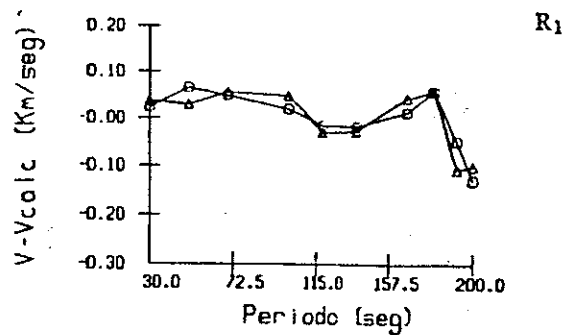


Figura 11.- Error vs. periodo. Se usan todos los recorridos empleando datos predichos.

9 y 11). La consideración de un nuevo recorrido hace que el error para  $R_s$  disminuya (Figs. 9 y 10). Sin embargo, la consideración del nuevo recorrido hace que aparezcan correlaciones entre las estimaciones de las tres regiones para los últimos períodos. Dicha característica se encuentra presente tanto en las estimaciones mínimo-cuadráticas como en las regularizadas y no se ha podido erradicar de esta última, aunque se experimentó con fuertes variaciones en el parámetro de estabilización.

De las Figuras 9, 10 y 11 concluimos que, para este experimento, es posible y conveniente tomar en cuenta los recorridos incompletos con la metodología antes mencionada. El procedimiento puede tomarse como un método iterativo en el que los datos faltantes entran virtualmente como incógnitas.

Por otro lado, consideremos que no todos los datos tienen el mismo error. En este caso es natural buscar una solución que de más peso a aquellos datos que tengan menos error. En lugar de minimizar (2.6), debemos buscar una solución  $\underline{S}$  tal que minimize

$$\sum_i \sum_j \left[ \frac{t_{ij} - (LS)_{ij}}{\sigma_{ij}} \right]^2 \quad (4.1)$$

donde  $\sigma_{ij}$  es el error de  $t_{ij}$ . Al tratar de minimizar (4.1) respecto a  $\underline{S}$  resultan ecuaciones que no se han podido

despejar para  $\underline{S}$ .

A continuación, damos una aplicación del método regularizado a mediciones reales.

#### IV.2 Aplicación

Leeds (1973) usó medidas de velocidad de fase de ondas Rayleigh correspondientes a recorridos en el océano Pacífico con el objeto de estimar directamente las estructuras regionales subyacentes a dicho océano. Intentó estimar las velocidades regionales usando un método mínimo-cuadrático ponderado, sin embargo, las soluciones que encontró fueron oscilantes. Además, Leeds (1973) argumenta, con razón, que es preferible invertir directamente las observaciones para obtener las estructuras porque se usa un paso en vez de dos. Y en particular es más fácil tomar en cuenta las correlaciones en un paso que en dos. En la estimación de la estructura, usó 35 recorridos, 8 regiones y períodos de 30 a 192 segundos. Las figuras 12 y 13 muestran los recorridos y la regionalización respectivamente. La Tabla I muestra la relación entre las regiones usadas y sus respectivas edades.

En el modelo final de Leeds (1973), la litósfera aumenta de espesor a partir de las regiones más jóvenes (Figura 14).

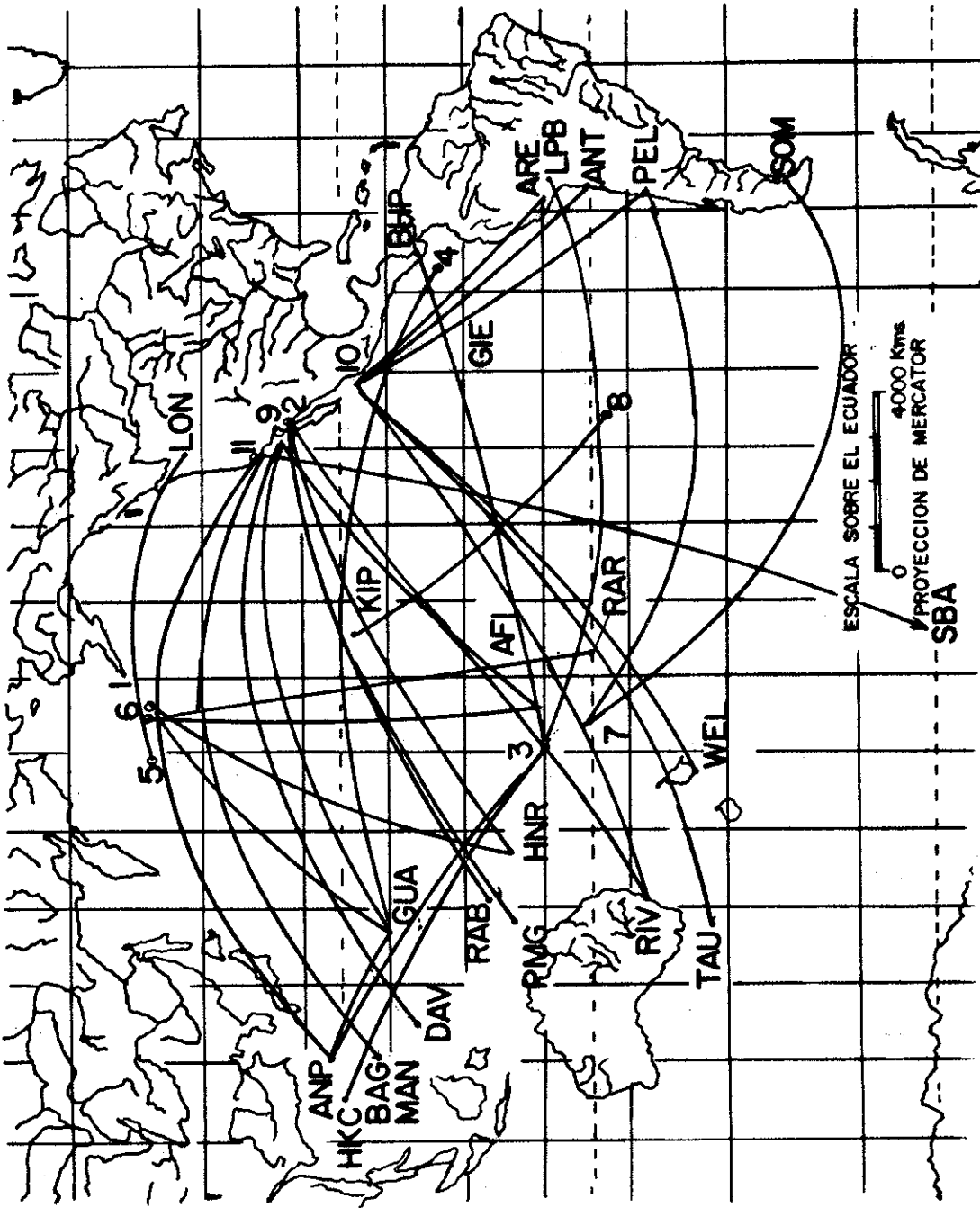


Figura 12.- Recorridos usados por Leeds (1973).

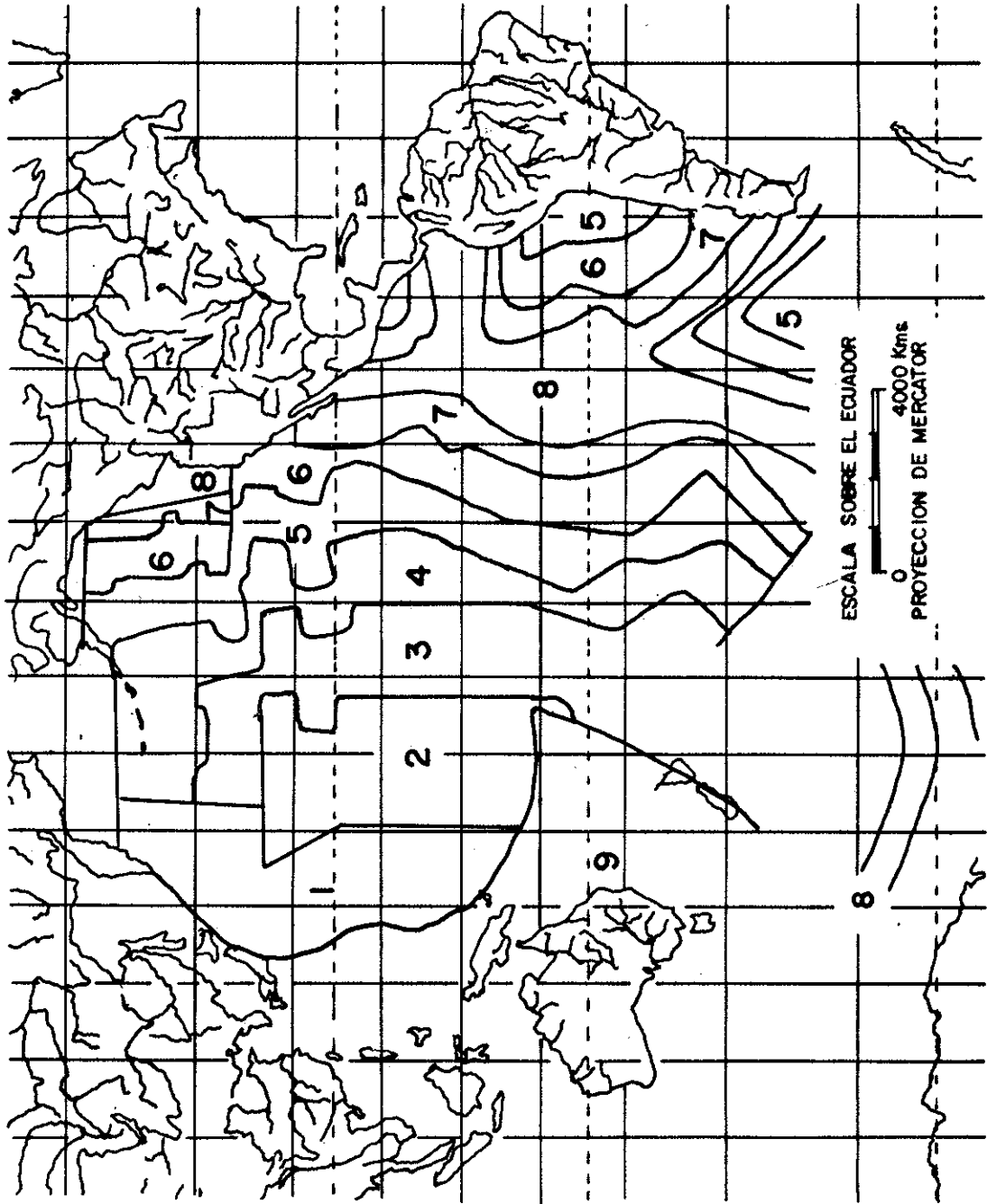


Figura 13.- Regionalización usada por Leeds (1973).

Tabla I.- Descripción de las regiones (tomada de Leeds, 1973).

Región No.	Edad Mínima (10 <sup>6</sup> años)	Edad Máxima (10 <sup>6</sup> años)	Edad Promedio (10 <sup>6</sup> años)
1	---	---	150
2	---	---	120
3	---	---	100
4	---	---	70
5	40	60	50
6	20	40	30
7	10	20	15
8	0	10	5
9	Mares	Marginales	

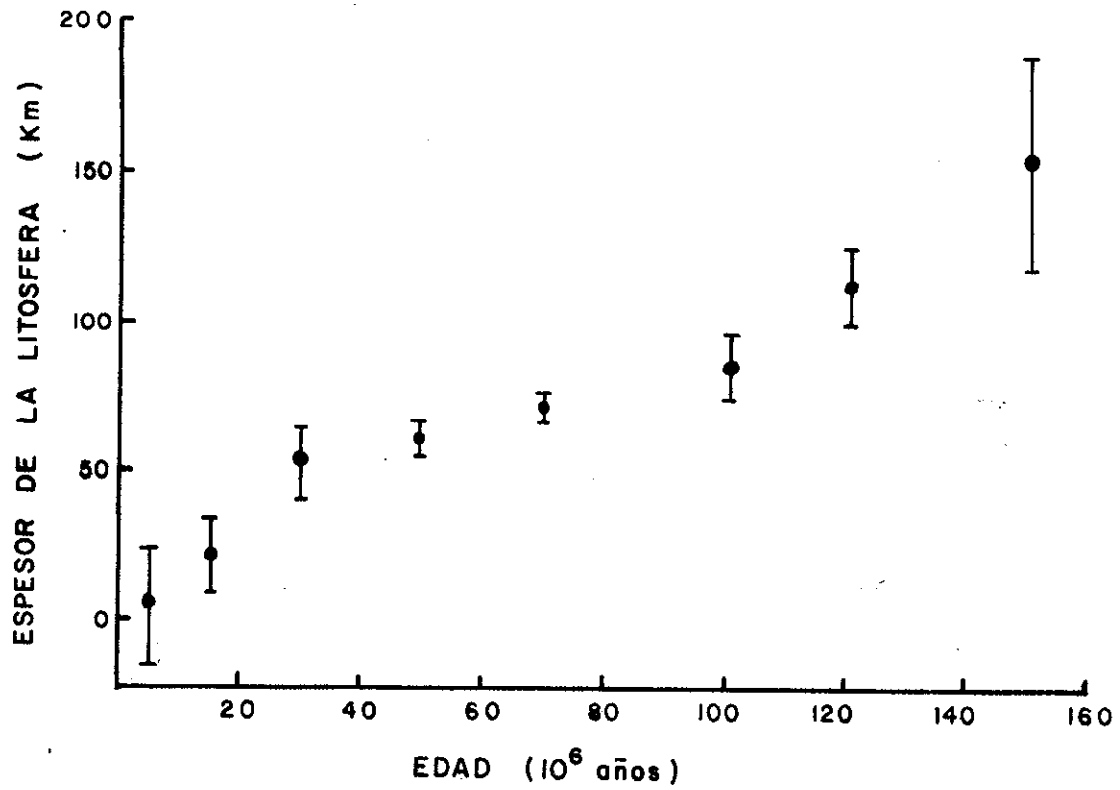


Figura 14.- Espesor de la Litósfera vs. edad. Tomada de Leeds(1973).

De sus 35 recorridos, 4 de ellos están totalmente dentro de los mares marginales, de tal manera que fueron eliminados. De los 31 recorridos que se van a usar, 8 están completos, siendo 63 los datos faltantes, de un total de 248.

Para hacer la estimación con los 8 recorridos completos se usó una regionalización más simple y que es mostrada en la Figura 15, la cual:

a) Toma en cuenta la regionalización hecha por Leeds (1973).

b) Define menos incógnitas que datos, lo que es necesario porque en ambas formulaciones, la mínimo-cuadrática y la regularizada, se ha supuesto que el sistema (2.4) está sobredeterminado.

c) Evita el cuasiparalelismo entre las columnas de la matriz  $\underline{L}$ , que a su vez produce mal condicionamiento de la matriz  $L^t L$ . Esta situación resulta ser real según nuestros cálculos.

Las regiones provenientes de dicha discretización las llamaremos  $RP_1$ ,  $RP_2$ ,  $RP_3$ ,  $RP_4$  y  $RP_5$ . Las regiones 1 y 2 de Leeds (1973) forman a  $RP_1$ , la región 3 de Leeds es  $RP_2$ , la región 4 de Leeds es  $RP_3$ , las regiones 5 y 6 forman a  $RP_4$  y



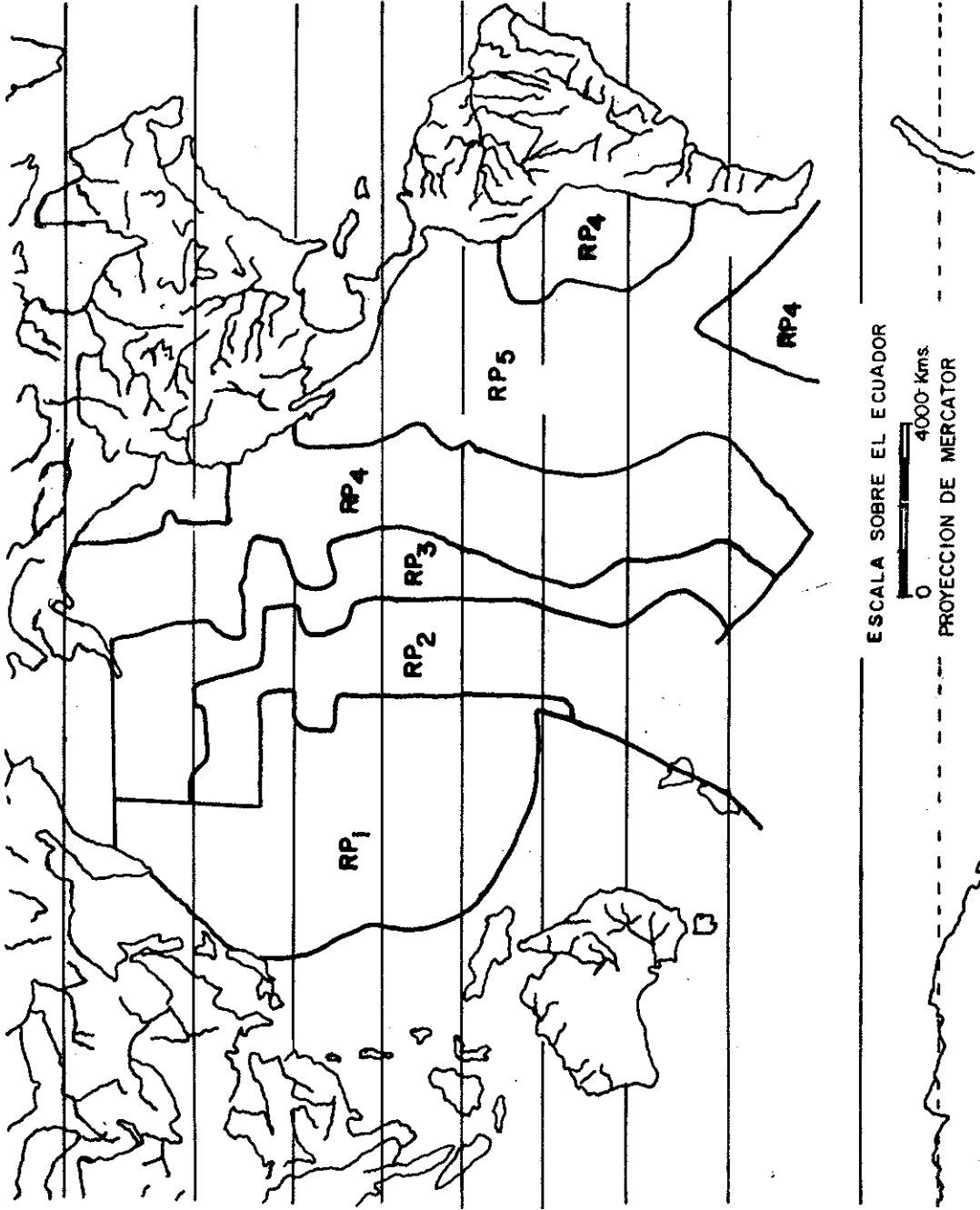


Figura 15.- Regiones empleadas cuando se usan ocho recorridos.

las regiones 7 y 8 forman a  $RP_5$ .

Los errores, expresados en Km/seg, se calcularon mediante la relación

$$\sigma = v^2 \sigma_t / d$$

con

$$\sigma_t = \max(7 \text{seg}, 0.1T)$$

siendo este último criterio proporcionado por Leeds (1973). La velocidad  $v$  es medida en Km/seg,  $d$  es la distancia total del recorrido en Km, y  $\sigma_t$  es el error probable en tiempo expresado en segundos.

En las Figuras 16 y 17, se presentan gráficas de las velocidades estimadas al emplear los recorridos completos. Como se observa, el algoritmo regularizado ha cumplido su cometido, es decir, las velocidades estimadas son función suave del período. Además, se calculó una medida del ajuste  $F$  para cada recorrido, mediante:

$$F^2 = 1/n \sum_{i=1}^n (v_i - \hat{v}_i)^2 / \sigma_i^2 \quad (4.2)$$

donde  $n$  es el número de datos,  $v_i$  y  $\hat{v}_i$  son las velocidades observadas y predichas respectivamente y correspondientes al  $i$ -ésimo período,  $\sigma_i$  es el error de  $v_i$ . Si los errores están bien estimados,  $F$  está relacionado con que tanto se parecen

$\Delta$  solución mínimo-cuadrática.

$\circ$  solución regularizada.

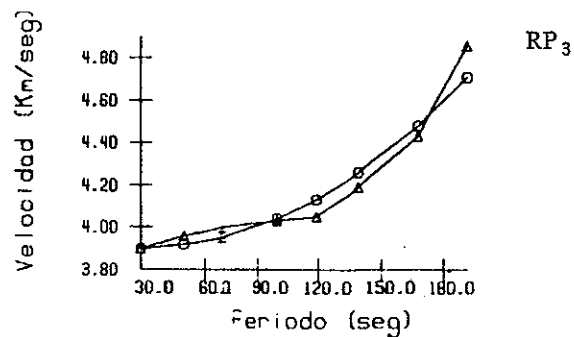
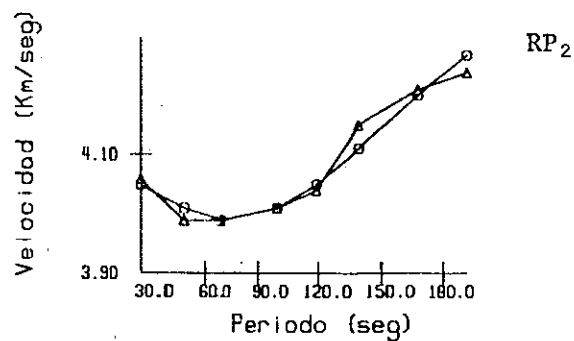
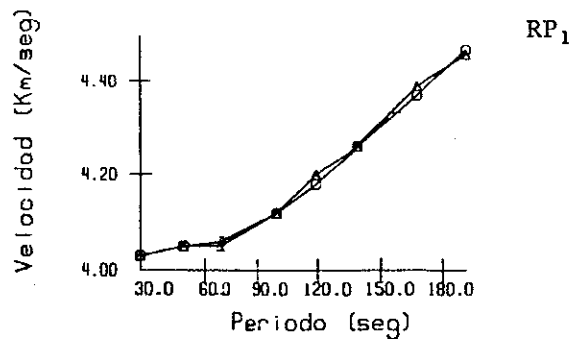


Figura 16.- Velocidades regionales vs. período cuando se usan ocho recorridos. Gráficas para RP<sub>1</sub>, RP<sub>2</sub> y RP<sub>3</sub>.

$\Delta$  solución mínimo-cuadrática.

$\circ$  solución regularizada.

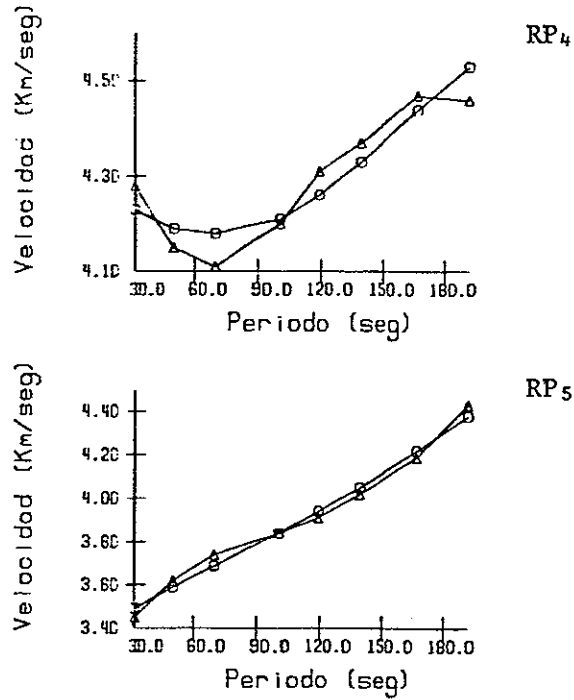


Figura 17.- Velocidades regionales vs. período cuando se usan ocho recorridos. Gráficas para RP<sub>4</sub> y RP<sub>5</sub>.

las observaciones  $(v_i)$  a las predicciones  $(\hat{v}_i)$ , tomando en cuenta los errores observacionales. Valores de  $F$  menores que 1.0 indican un sobreajuste que puede ser innecesario, por el contrario, valores mayores de 1.0 indican un ajuste no muy bueno.

Como lo muestra la Tabla II, los ajustes calculados son aceptables. Si suponemos que los errores de los datos tienen una función densidad de probabilidad (fdp) gaussiana, es de esperarse que los residuos normalizados (por los errores de observación) también tengan una fdp gaussiana. La Figura 18 muestra un histograma de los 64 residuos normalizados, correspondientes al método regularizado. Su promedio es de 0.024 y su desviación estándar es 0.857. Con la finalidad de hacer la prueba de hipótesis de que la fdp de los residuos normalizados es gaussiana, se calculó la estadística  $\chi^2$ -cuadrada mediante:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k (o_i - e_i)^2 / e_i$$

donde  $k$  es el número de intervalos,  $o_i$  es la frecuencia observada,  $e_i$  es la frecuencia esperada para una fdp gaussiana cuyos parámetros, media y desviación estándar son los de los residuos normalizados. Para calcular  $\chi^2$ , se consideraron sólo frecuencias esperadas mayores o iguales a 5. Para hacer la prueba se usaron 6 intervalos y el valor

Tabla II.- Medidas del ajuste. Se usan ocho recorridos.

Recorrido	Ajuste	Recorrido	Ajuste
AFI2	0.59	ANT10	0.45
BAG2	0.66	ARE10	0.77
AFI6	0.34	TAU10	1.06
KIP8	0.73	WEL10	1.59

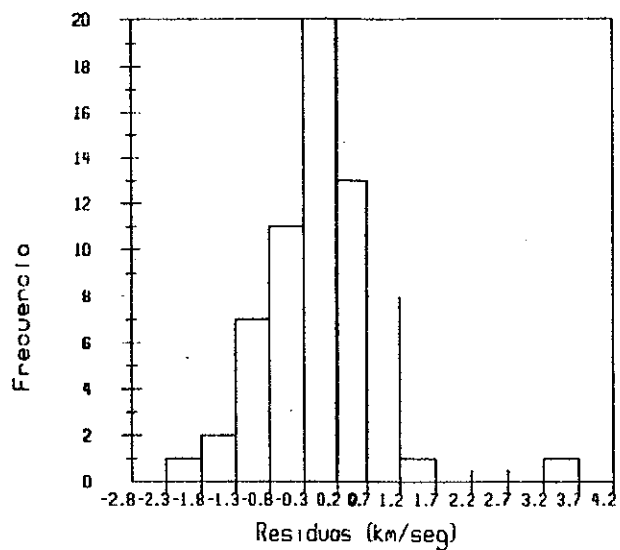


Figura 18.- Histograma de los residuos normalizados obtenidos de la aplicación del método regularizado cuando se usan ocho recorridos.

obtenido de  $\chi^2$  fué de 4.55 de tal modo que, al 1% de nivel de significación, no se rechaza la hipótesis de que la fdp de los residuos normalizados sea gaussiana. Esto indica que se ha escogido un valor adecuado para el parámetro de estabilización y que los errores de observación se han estimado adecuadamente.

En las Figuras 19, 20 y 21 se presentan los resultados correspondientes a la regionalización de Leeds (1973) usando todos los recorridos. Se utilizó el método desarrollado en la Sección IV-1. En la Tabla III, se dan las velocidades para las ocho regiones y en función del período. Se incluyen las estimaciones mínimo-cuadráticas y las regularizadas.

Las medidas de ajuste para cada recorrido calculadas mediante (4.2), se pueden ver en la Tabla IV. En la Figura 22, se presenta un histograma de los residuos normalizados. Se hizo la prueba de hipótesis de que los residuos normalizados tienen una fdp gaussiana, resultando que, al 1% de nivel de significación, no se puede rechazar dicha hipótesis. Nuevamente, esto indica, que se ha escogido un valor apropiado para el parámetro de estabilización y que las estimaciones de los errores observacionales ha sido adecuada.

En la Figura 23, se presentan gráficas de los residuos obtenidos al aplicar el método regularizado para los



$\Delta$  solución mínimo-cuadrática.

o solución regularizada.

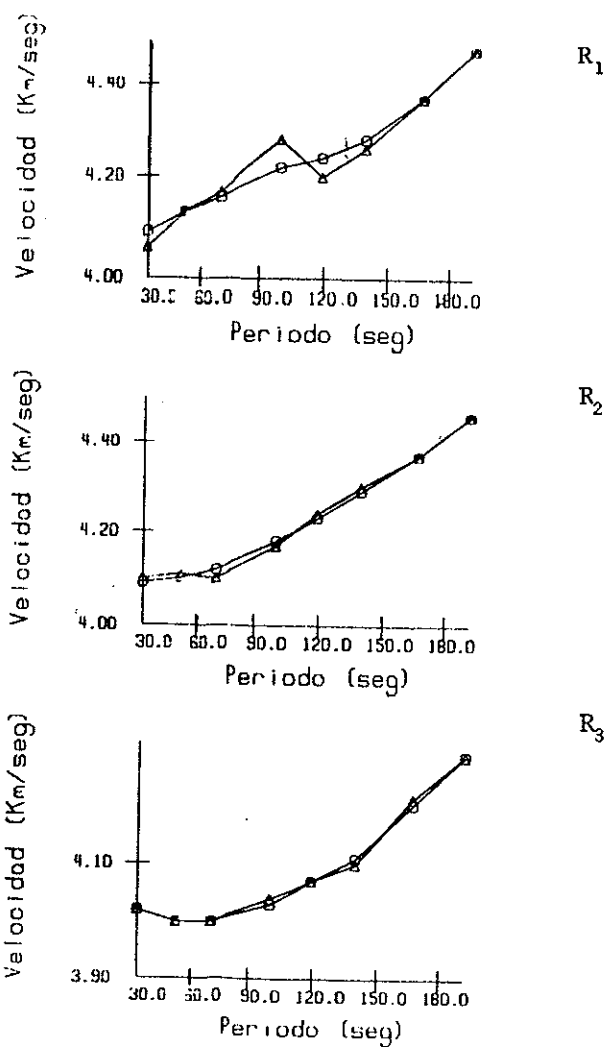


Figura 19.- Velocidades regionales vs. período. Se usan 31 recorridos. Gráficas para R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> y R<sub>3</sub>.

Δ solución mínimo-cuadrática.

○ solución regularizada.

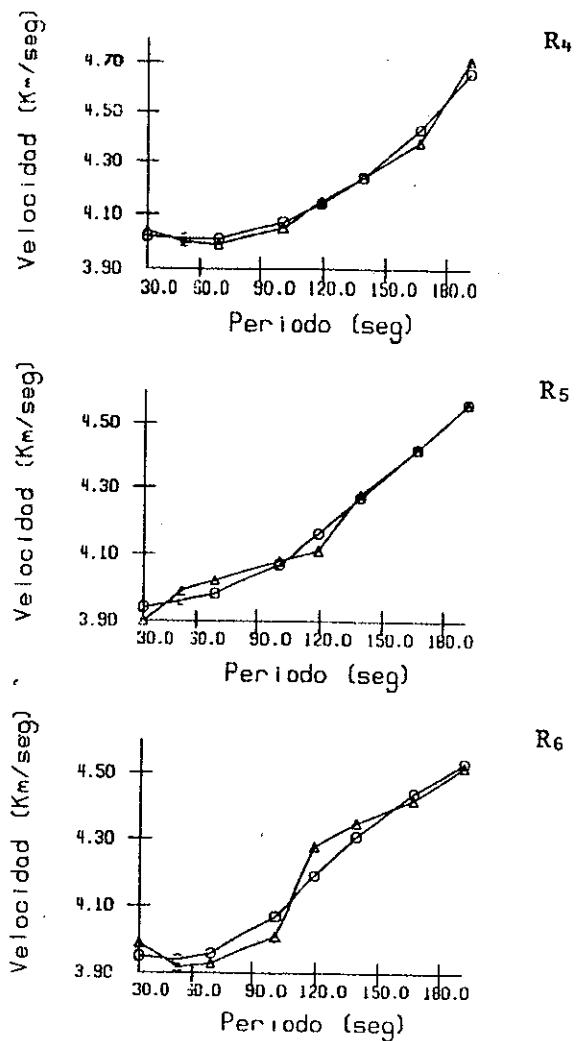


Figura 20.- Velocidades regionales vs. período, Gráficas para R4, R5 y R6.

$\Delta$  solución mínimo-cuadrática.  
o solución regularizada.

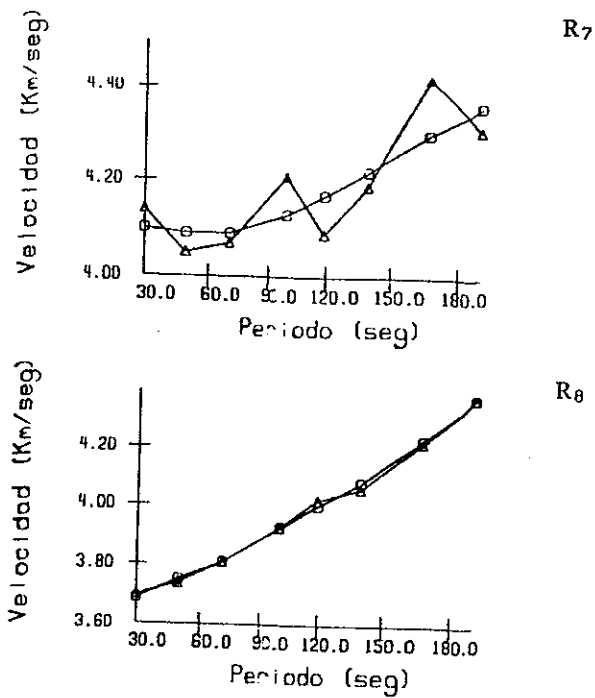


Figura 21.- Velocidades regionales vs. período. Gráficas para R7 y R8.

Tabla III.- Velocidades regionales.

Período (seg)	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>6</sub>	R <sub>7</sub>	R <sub>8</sub>
	Velocidad regularizada (km/seg)							
30	4.09	4.09	4.02	4.02	3.94	3.95	4.10	3.69
50	4.13	4.10	4.00	4.01	3.96	3.94	4.09	3.75
70	4.16	4.12	4.00	4.01	3.98	3.96	4.09	3.81
100	4.22	4.18	4.03	4.07	4.07	4.07	4.13	3.93
119	4.24	4.23	4.07	4.14	4.16	4.19	4.17	4.00
139	4.28	4.29	4.11	4.24	4.27	4.31	4.22	4.08
167	4.37	4.37	4.20	4.43	4.42	4.44	4.30	4.23
192	4.48	4.46	4.28	4.66	4.56	4.53	4.36	4.38

Período (seg)	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>6</sub>	R <sub>7</sub>	R <sub>8</sub>
	Velocidad mínimo-cuadrática (km/seg)							
30	4.06	4.10	4.02	4.04	3.90	3.99	4.14	3.70
50	4.13	4.11	4.00	4.00	3.99	3.92	4.05	3.74
70	4.17	4.10	4.00	3.99	4.02	3.93	4.07	3.81
100	4.28	4.17	4.04	4.05	4.08	4.01	4.21	3.93
119	4.20	4.24	4.07	4.15	4.11	4.28	4.09	4.02
139	4.26	4.30	4.10	4.24	4.28	4.35	4.19	4.06
167	4.37	4.37	4.21	4.38	4.42	4.42	4.42	4.22
192	4.48	4.46	4.28	4.71	4.56	4.52	4.31	4.38

Tabla IV.- Medidas del ajuste. Se usan 31 recorridos.

Recorrido	Ajuste	Recorrido	Ajuste
GUA1	0.67	PEL7	1.81
HNR1	1.71	SOM7	0.93
AFI2	0.64	KIP8	1.08
BAG2	0.81	AFI9	0.41
DAV2	0.93	ANP9	0.66
GUA2	1.04	BAG9	0.98
HNR2	0.69	DAV9	0.78
PMG2	0.39	ANT10	0.68
RAB2	0.77	ARE10	1.56
RIV2	1.61	GIE10	0.39
BHP3	0.69	PEL10	0.51
LPB3	2.23	RIV10	0.87
GUA4	1.77	TAU10	0.66
LON5	0.48	WEL10	0.96
AFI6	2.01	SBA11	1.95
RAR6	1.02		

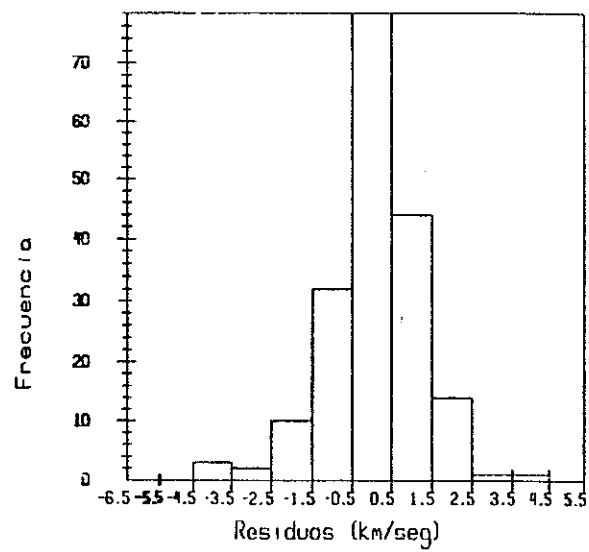
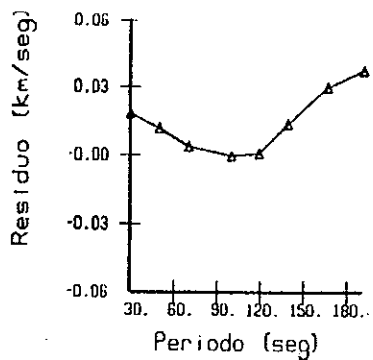
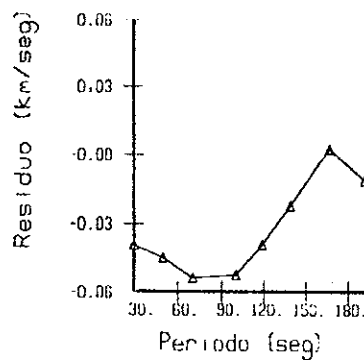


Figura 22.- Histograma de los residuos normalizados obtenidos de la aplicación del método regularizado cuando se usan 31 recorridos.

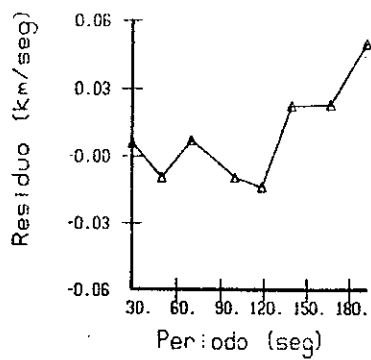
BAG2



AFI6



AFI2



KIP8

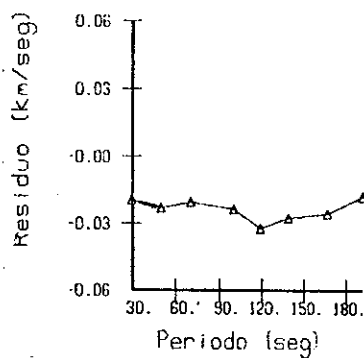


Figura 23.- Residuos obtenidos de la aplicación del método regularizado en función del período.

recorridos BAG2, AFI6, AFI2 y KIP8.

La estimación mínimo-cuadrática para  $R_7$  es la más inestable (Fig. 21). En la Tabla V se presenta la matriz de correlación de las estimaciones ( $C_{ss}$ ), que se obtiene al resolver el sistema (2.5) con el método mínimo-cuadrático. Dicha matriz se calculó mediante:

$$C_{ss} = (L^t L)^{-1} L^t C_{tt} L (L^t L) \quad (4.3)$$

siendo  $C_{tt}$  la matriz de covarianza de las observaciones. La matriz  $L$  que se usó en (4.3) es la correspondiente a la regionalización hecha por Leeds (1973). La correlación lineal entre las velocidades estimadas, para las diferentes regiones es menor en valor absoluto que 0.57. Debido a lo cual creemos que no existe una correlación apreciable entre las diferentes estimaciones. También, se incluye en la Tabla V la norma de las columnas de  $L$ , dicha cantidad nos da una cuantificación del cubrimiento de las regiones por los recorridos. Observamos que la columna correspondiente a  $R_7$  es la que tiene la norma más pequeña, del orden de la mitad de las demás. Creemos que la inestabilidad de  $R_7$  se debe al mal cubrimiento de  $R_7$ .

Por otro lado, en la Figura 24 mostramos las velocidades estimadas por Mitchell y Yu (1980), para regiones en el



Tabla V,- Matriz de correlación y norma de las columnas de L.

## Matriz de correlación.

	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>6</sub>	R <sub>7</sub>	R <sub>8</sub>
R <sub>1</sub>	1.0	-0.09	.23	-0.56	0.16	-0.12	0.08	-0.03
R <sub>2</sub>	-0.09	1.0	-0.21	-0.13	-0.16	0.11	0.18	0.09
R <sub>3</sub>	.23	-0.21	1.0	-0.34	-0.05	0.08	-0.22	0.04
R <sub>4</sub>	-0.56	-0.13	-0.34	1.0	-0.27	0.02	-0.31	0.16
R <sub>5</sub>	0.16	-0.16	-0.05	-0.27	1.0	-0.53	-0.30	-0.49
R <sub>6</sub>	-0.12	0.11	0.08	0.02	-0.53	1.0	-0.17	0.05
R <sub>7</sub>	0.08	0.18	-0.22	-0.31	-0.30	-0.17	1.0	0.13
R <sub>8</sub>	-0.03	0.09	0.04	0.16	-0.49	0.05	0.13	1.0

## Norma de las columnas de L.

Región No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Norma	0.83	1.20	1.48	0.91	1.06	0.99	0.50	1.40

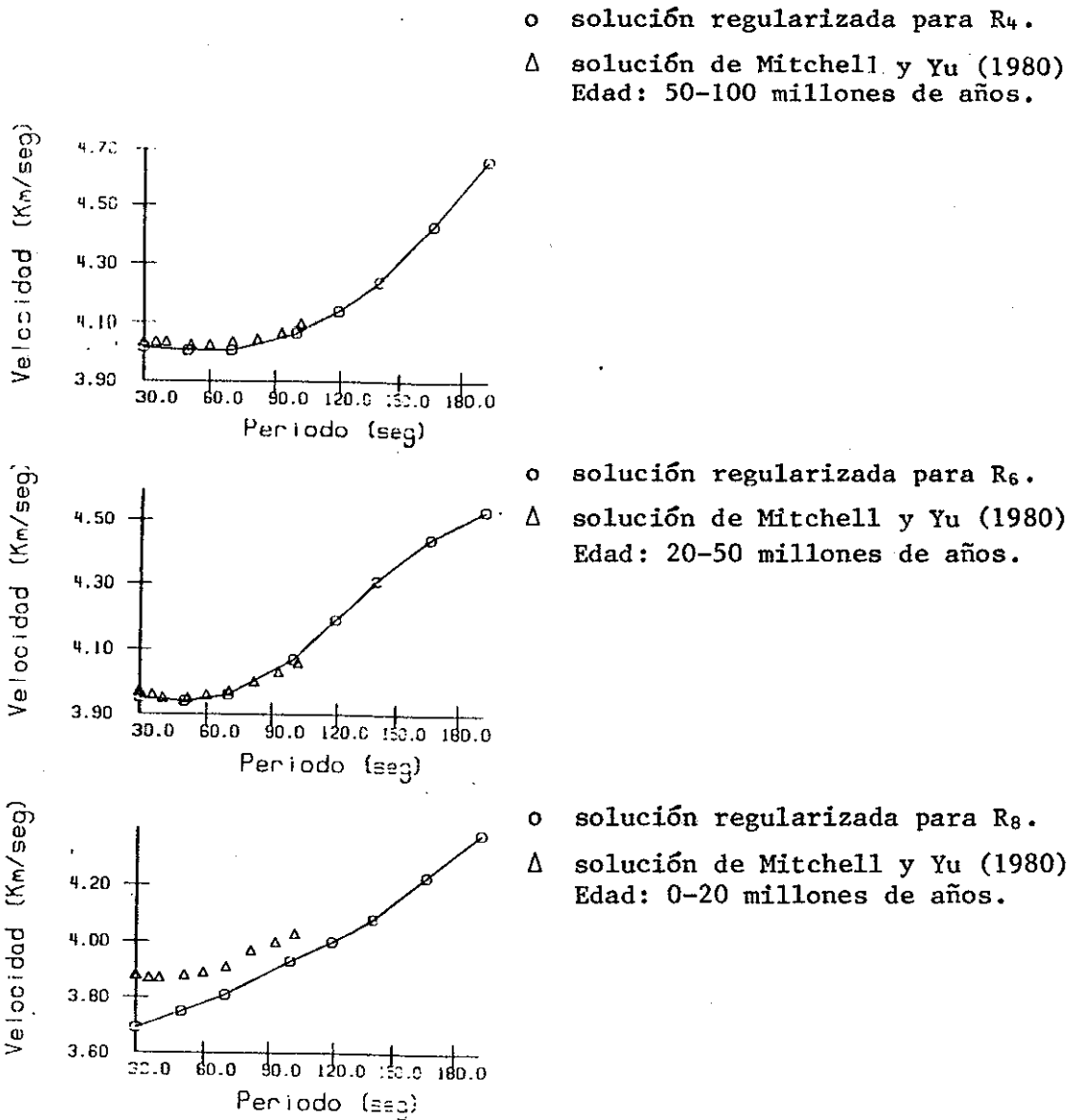


Figura 24.- Comparación con los resultados de Mitchell y Yu (1980).

océano Pacífico con edades de 0-20, 20-50 y 50-100 millones de años. También se incluyen las velocidades regularizadas para  $R_4$ ,  $R_6$  y  $R_8$ . Las velocidades estimadas por Mitchell y Yu (1980) cubren períodos de 20 a 102 segundos. Las velocidades de  $R_6$  y las de la región con edad 20-50 millones de años son semejantes. Lo mismo sucede para  $R_4$  y la región con edad de 50-100 millones de años. No obstante, las velocidades para  $R_8$  y las de la región con edad 0-20 millones de años están desplazadas, siendo menores las velocidades de  $R_8$ . Creemos que este desplazamiento se debe a la diferencia en edad de ambas regiones, ya que es en  $R_8$  donde ocurren más cambios de estructura en función de la edad (Leeds, 1973).

En las Figuras 25, 26, y 27 presentamos gráficas de las velocidades regularizadas para las ocho regiones, y las calculadas para el modelo final (Tabla VI) de Leeds (1973). Notamos que ambas velocidades son similares para  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  y  $R_8$ . La diferencia más notoria entre las velocidades es para  $R_7$ , que como ya mencionamos anteriormente, es la más inestable.

En la Figura 28 se presentan las estimaciones regularizadas para todas las regiones en función del período. Notamos claramente que las estimaciones para  $R_7$  no son realistas, porque, como ya lo hicimos notar los datos tienen poca sensibilidad para ésta región. Y en éste caso el método

Δ solución de Leeds (1973).  
 o solución regularizada.

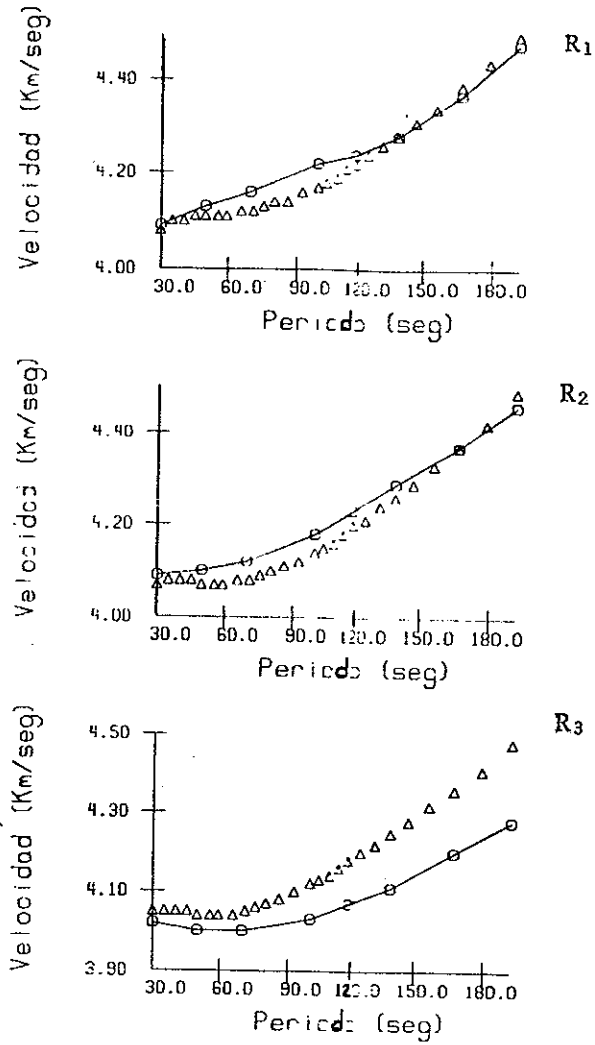


Figura 25.- Comparación con los resultados de Leeds (1973).  
 Gráficas para R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> y R<sub>3</sub>.

△ solución de Leeds (1973).

○ solución regularizada.

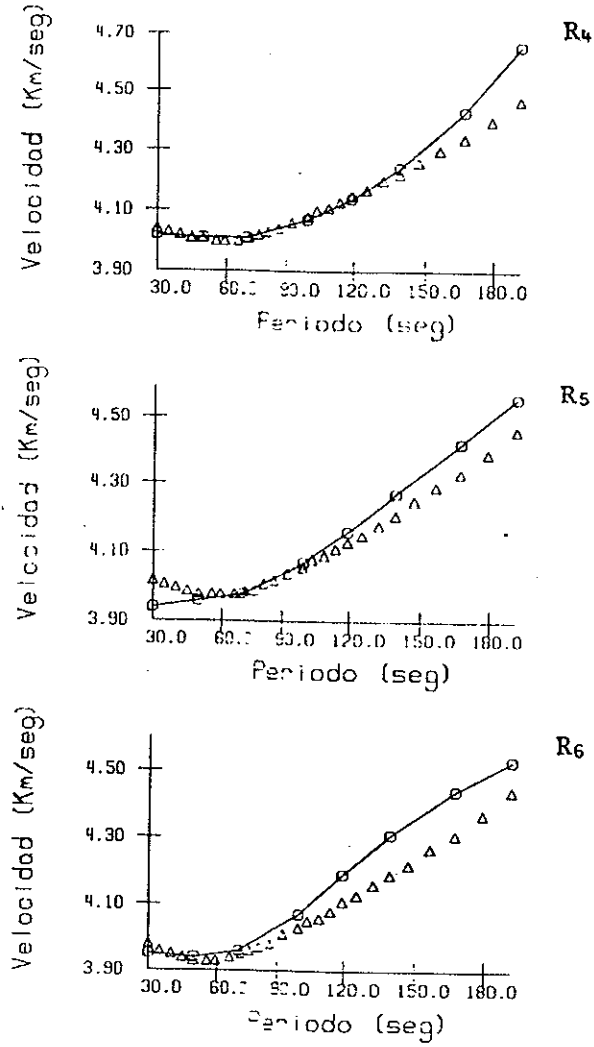


Figura 26.- Comparación con los resultados de Leeds (1973).  
Gráficas para R<sub>4</sub>, R<sub>5</sub> y R<sub>6</sub>.

Δ solución mínimo-cuadrática.  
o solución regularizada.

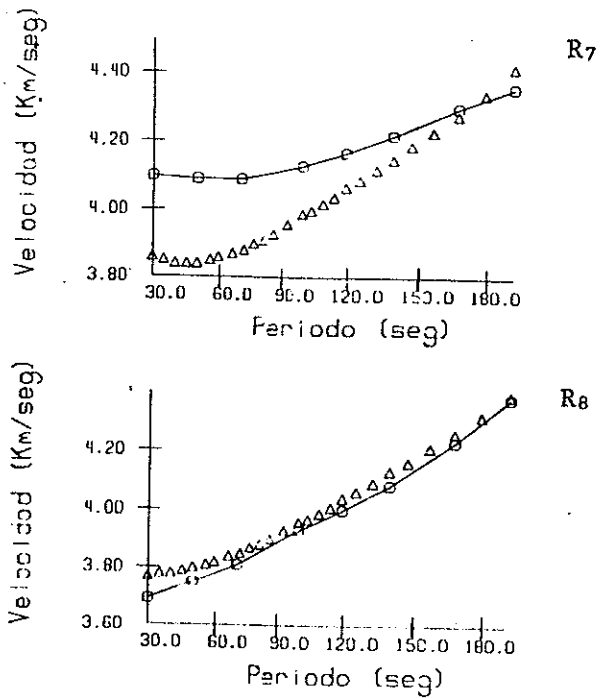


Figura 27.- Comparación con los resultados de Leeds (1973).  
Gráficas para R7 y R8.

Tabla VI.- Modelos regionales (tomados de Leeds, 1973).

R <sub>1</sub>	Espesor (km)								Densidad (gr/cm <sup>3</sup> )	Velocidad P (km/seg)	Velocidad S (km/seg)
	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>6</sub>	R <sub>7</sub>	R <sub>8</sub>				
5.5	5	5	5	4.5	4.5	4	4	1.03	1.52	0.00	
1.5	1	1	1	1	0.5	0	0	2.10	2.10	1.00	
5	5	5	5	5	5	5	5	3.07	6.41	3.70	
152	112	85	71	62	52	23	3	3.40	8.10	4.60	
16	57	84	99	108	118	147	167	3.40	7.60	4.10	
275	275	275	275	275	275	275	275	3.50	8.20	4.55	
250	250	250	250	250	250	250	250	3.96	9.80	5.40	
150	150	150	150	150	150	150	150	4.21	10.00	5.90	
-	-	-	-	-	-	-	-	4.95	11.48	6.38	

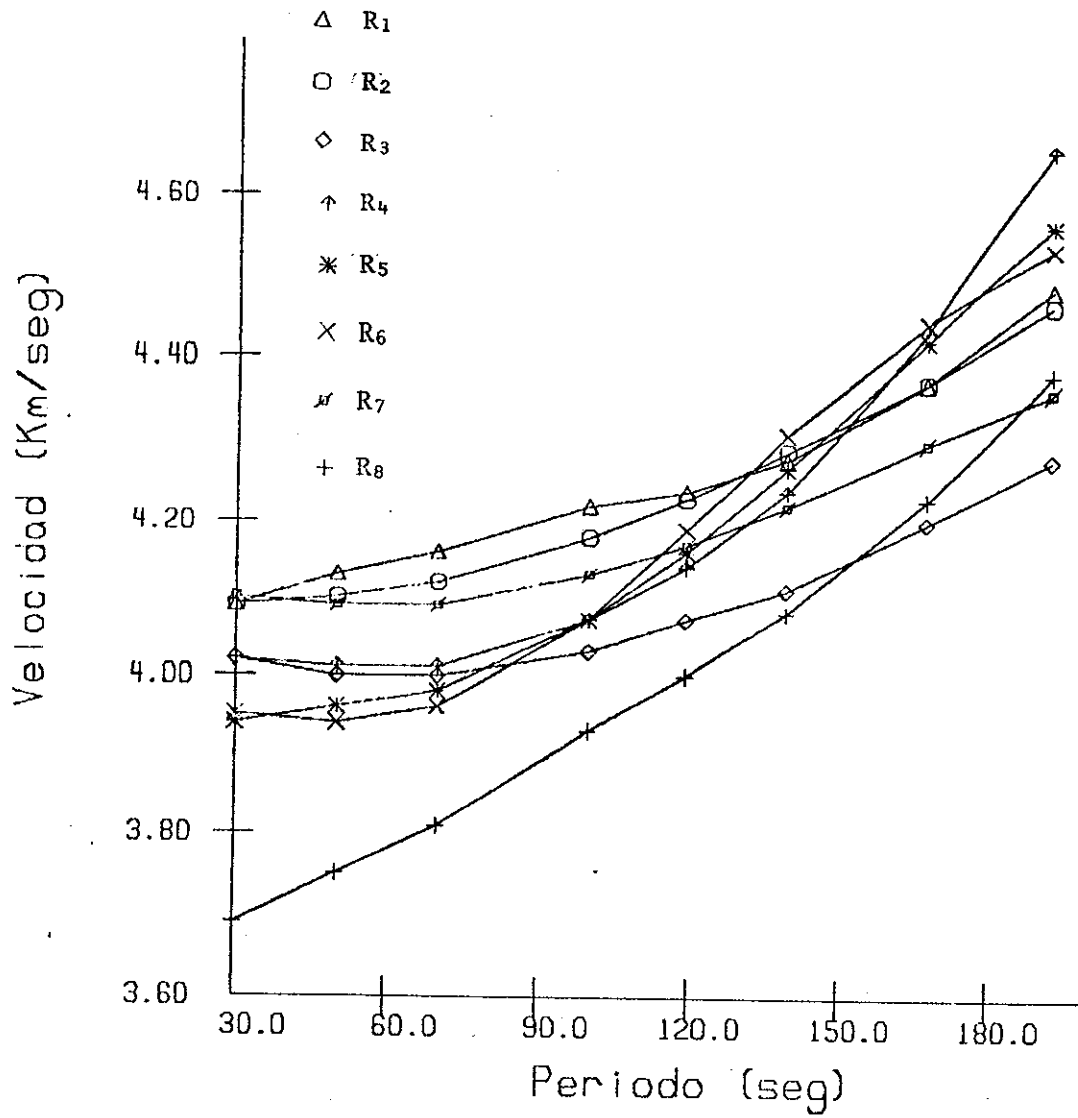


Figura 28.- Velocidades regularizadas para todas las regiones en función del período.



regularizado lo que ha hecho es suavizar la solución mínimo-cuadrática. También, algunas curvas se cruzan y pudiera deberse a cierta correlación múltiple entre las velocidades estimadas para diferentes regiones. Finalmente, se observa globalmente la tendencia natural; las regiones más viejas tienen velocidades mayores.

---

## V. CONCLUSIONES

Se ha implementado un método regularizado para estimar las velocidades de las ondas superficiales locales a partir de datos globales, en un modelo de regiones "puras". Dicho método minimiza la norma cuadrática de los residuos más la norma cuadrática de la derivada de orden  $p$  de la solución. El operador derivada actúa en período; con esto, estamos introduciendo condiciones de continuidad de la solución como función del período. Además, en la solución, se ha tomado en cuenta la contribución del espacio nulo del operador regularizante y se ha hecho uso de las funciones de Green en la inversión del operador diferencial. En estas dos últimas características, se ha seguido el procedimiento de Frez Cárdenas (1985).

La implementación del método regularizado ha conducido a una ecuación matricial, cuya solución no es trivial. Hemos dado una manera numérica de resolverla.

Se comprobó, mediante experimentos numéricos, que el algoritmo regularizado está funcionando satisfactoriamente. Además, de dichos experimentos numéricos y suponiendo que las observaciones resultan del modelo propuesto, se concluye que el estimador mínimo-cuadrático entrega soluciones oscilantes

---

si se tienen regiones mal cubiertas y datos con error. Es en estos casos donde la introducción de la información previa es importante, y por lo tanto, el estimador regularizado entrega soluciones más aceptables que el mínimo-cuadrático.

Para aplicar el método regularizado se tendría que eliminar aquellos recorridos que les falte información para algunos períodos. Se ha dado un procedimiento iterativo para solucionar este problema. La utilidad de dicho procedimiento se comprobado con un experimento numérico.

En el método regularizado no se pueden tomar en cuenta los errores observacionales ya que al tratar de resolver las ecuaciones normales resultan relaciones que no nos fué posible resolver.

Se ha dado una aplicación del método regularizado a datos en la cuenca del Pacífico. Cuando se utilizan sólo los recorridos completos, la solución mínimo-cuadrática resulta inestable. Las velocidades estimadas con el método regularizado son suaves en periodo; ésto se ha logrado a costa de aumentar los residuos. Además, se comprobó que los residuos regularizados aún caen dentro de los errores observacionales y tienen una conducta aleatoria. De esta manera, damos soluciones que pueden tener más significado geofísico.

Comparamos nuestros resultados con los de Leeds (1973) y con los de Mitchell y Yu (1980), existiendo concordancia (en términos generales) con ambos trabajos. El método regularizado realmente suaviza las soluciones mínimo-cuadráticas. Sin embargo, no aparece resolviendo el problema de falta de sensibilidad de las velocidades para alguna región en particular y quizá tampoco el de posible correlación múltiple entre las estimaciones de velocidades de varias regiones. Sin embargo, las gráficas de las velocidades para todas las regiones en conjunto pueden indicar la existencia de este tipo de problemas. La solución de estos es todavía un campo abierto y de desarrollo para futura investigación.

## LITERATURA CITADA

- Bellman, R. 1970. Methods of nonlinear analysis. Academic Press, New York. 340 pp.
- Christensen, D. H., J. K. Kimball y F. J. Mauk. 1980. Rayleigh wave group velocity dispersion in the north and south Atlantic oceans. Bull. Seism. Soc. Am. 70(5):1787-1809.
- Delves, L. M. y J. Walsh. 1974. Numerical solution of integral equations. Oxford University Press, Oxford. 339 pp.
- Forsyth, D. W. 1975. The early structural evolution and anisotropy of the oceanic upper mantle. Geophys. J.R. astr. Soc. 43:103-162.
- Frez Cárdenas, J., 1983. Teoría de inversión de datos geofísicos-notas de clase. (sin publicar).
- Frez Cárdenas, J. 1985. Numerical solutions of Fredholm integral equations of first kind. (en revisión final).
-

- Hees, H .H. 1962. History of ocean basins, En: Perologic studies: a volume in honor of A.F. Buddington (E.J. Eng ed.). Geological Society of America, Boulder Colorado.
- Kanamori, H. 1970. Velocity and Q of mantle waves. Phys. Earth Planet. Interiors. 2:259-275.
- Knopoff, L. 1972. Observation and inversion of surface-wave dispersion. Tectonophysics. 13:497-519.
- Leeds, A.R. 1973. Rayleigh wave dispersion in the Pacific basin. Ph. D. Thesis. University of California, Los Angeles, California. 100pp.
- Mitchell, B .J. y G. Yu. 1980. Surface wave dispersion, regionalized velocity models, and anisotropy of the Pacific crust and upper mantle. Geophys. J.R. Astron. Soc. 63:497-514.
- Phillips, D .L. 1962. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. J. Ass. Com. Mach. 9:84-97.
- Tihonov, A .N. 1963. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. Soviet Math.
-

Dolk. 4:1035-1038.

Toksoz, M .N. y D .L. Anderson. 1966. Phase velocities of long-period surface waves and structures of the upper mantle, I. Great-circle Love and Rayleigh wave data. J. Geophys. Res. 71:1649-1658.

Twomey, S. 1964. On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. J. Ass. Comp. Mach. 10:97-101.

Twomey, S. 1977. Introduction to the mathematics of inversion in remote sensing and indirect measurements. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam. 243pp.

Yanovskaya, T .B. 1982. Group velocity distribution of surface waves in the north Atlantic. Izvestiya. 18:83-89.

APENDICE 1. LISTADO DE PROGRAMAS

A1.1 Listado correspondiente al método regularizado. Sólo se incluye la parte principal.

```

C **** PROGRAMA PARA LA ESTIMACION LOCAL DE VELOCIDADES CON
C **** CONDICIONES DE CONTINUIDAD EN PERIODO. *****
C SE MINIMIZA LA NORMA CUADRATICA DE LOS RESIDUOS
C MAS LA NORMA CUADRATICA DE LA DERIVADA DE ORDEN NP DE
C LA SOLUCION.
C EN LA SOLUCION SE INCLUYE LA COMPONENTE DEL ESPACIO NULO
C DEL OPERADOR REGULARIZANTE, EL CUAL
C ES UN POLINOMIO DE GRADO NP-1.
C SE USA LA FUNCION DE GREEN EN LUGAR DEL OPERADOR DERIVADA.
C SOLO ESTA IMPLEMENTADO NP=2 Y NP=4.
C EL PROBLEMA SE FORMULA MEDIANTE: T=(RL)S
C S ES LA MATRIZ INCOGNITA Y REPRESENTA LENTITUDES REGIONALES
C EN FUNCION DEL PERIODO.
C RL ES LA MATRIZ QUE CONTIENE LA LONGITUD DE LOS RECORRIDOS
C EN CADA REGION.
C T ES LA MATRIZ DE LAS LENTITUDES GLOBALES EN FUNCION DEL
C PERIODO.
C N ES EL NUMERO DE PERIODOS, K ES EL NUMERO DE REGIONES
C M ES EL NUMERO DE RECORRIDOS, MP ES EL NUMERO
C TOTAL DE RECORRIDOS, PARA EL CASO DE HUECOS EN LOS DATOS.
C T ES DE ORDEN M*N
C RL ES DE M*K
C S ES DE K*N
C RLA ES DE ORDEN MP*K
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C NMAX=32  NMAX=9  KMAX=5  NALFAMAX=10
  DIMENSION T(248),RL(248),SE(64),RF1(64),S(64),RLTL(64),
  * DP(9),RLTT(64),L1(64),
  * L2(64),G(81),GTG(81),TE1(248),XIX(81),FNL(9),
  * TE2(248),RE1(248),FREC(9),R(4096),X1(36),RLTL1(64),
  * L5(4),L6(4),XIX(81),C(64),
  * L3(8),L4(8),ALFA(10),X(36),XTX(16),SV(64),ERR(248)
  * ,RLA(1)
C ENTRADAS
  READ(5,5)K,N,M,NALFA,NP,IT,IR
C  READ(5,5)MP
  READ(5,10)PERC
5  FORMAT(8I10)
  READ(5,10)(ALFA(I),I=1,NALFA)
  MN=M*N
  MK=M*K
  MPK=MP*K
  MPN=MP*N

```



```

      KN=K*N
      N1=N-2
      N2=N*N
      KK=K*K
C EN T SE LEEN VELOCIDADES GLOBALES EN FUNCION DEL PERIODO.
      READ(5,10)(T(I),I=1,MN)
C ERR ES LA MATRIZ DE LOS ERRORES DE OBSERVACION, EN KM/SEG.
      READ(5,10)(ERR(I),I=1,MN)
      READ(5,10)(RL(I),I=1,MK)
      READ(5,10)(RLA(I),I=1,MPK)
C EN FREC SE LEEN LOS PERIODOS.
      READ(5,10)(FREC(I),I=1,N)
10  FORMAT(7D10.0)
C SE ESCRIBEN LAS ENTRADAS.
      WRITE(6,15)K,N,M,NALFA,NP
15  FORMAT(/,'K=',I3,3X,'N=',I3,3X,'M=',I3,3X,'NALFA= '
      * ,I3,3X,'NP= ',I2)
      WRITE(6,20)
20  FORMAT(/3X,'VECTOR ALFA ',/)
      WRITE(6,30)(ALFA(I),I=1,NALFA)
30  FORMAT(10(2X,D10.3))
C SE NORMALIZA LA MATRIZ RL
C SE LEYERON VELOCIDADES. SE TRANSFORMAN A LENTITUDES.
      DO 40 I=1,MN
40  T(I)=1.0D0/T(I)
      DO 50 I=1,M
      I1=I
      SUM=0.0D0
      DO 55 J=1,K
      SUM=SUM+RL(I1)
55  I1=I1+M
      I1=I
      DO 50 J=1,K
      RL(I1)=RL(I1)/SUM
50  I1=I1+M
      WRITE(6,60)
60  FORMAT(/,4X,'MATRIZ L NORMALIZADA ',/)
      WRITE(6,30)(RL(I),I=1,MK)
C SE NORMALIZA EL INTERVALO ORIGINAL DE PERIODOS.
      FNORM=FREC(N)-FREC(1)
      DO 63 I=1,N
63  FNL(I)=(FREC(I)-FREC(1))/FNORM
C SE FORMA LA MATRIZ X, BASE PARA EL ESPACIO NULO.
      CALL FORMX(X,FNL,N,NP)
C SE FORMA LA FUNCION DE GREEN.
      CALL FRMG24(FNL,G,N,NP)
C .. SE CALCULA XTX Y (XTX)**(-1)
      CALL DGMATB(X,X,XTX,N,NP,NP)
      CALL DMINV(XTX,NP,DETX,L5,L6)
C... SE FORMAN LOS FACTORES DE INTEGRACION USANDO LA
C... REGLA TRAPECIAL

```

```

        DP(1)=(FREC(2)-FREC(1))/2.0D0
        DP(N)=(FREC(N)-FREC(N-1))/2.0D0
        DO 65 J=1,N1
65      DP(J+1)=(FREC(J+2)-FREC(J))/2.0D0
C .. SE REALIZA G*DP
        I1=0
        DO 70 I=1,N
        DO 70 J=1,N
        I1=I1+1
70      G(I1)=G(I1)*DP(I)
        CALL DGMABT(G,G,GTG,N,N,N)
        CALL DGMABT(X,XTX,X1,N,NP,NP)
C SE FORMA X(XTX)**(-1)XT
        CALL DGMABT(X1,X,X1X,N,NP,N)
C SE FORMA X(XTX)**(-1)XT - I QUEDANDO EL RESULTADO
C EN X1X
        I1=-N
        DO 75 I=1,N
        I1=I1+N+1
75      X1X(I1)=X1X(I1)-1.0D0
        CALL DGMATB(RL,T,RLTT,M,K,N)
        CALL DGMATB(RL,RL,RLTL1,M,K,K)
        CALL DGMABT(RLTT,X1X,R,K,N,N)
C SE REPRODUCE RLTL1 EN LA MATRIZ RLTL
        DO 70 J=1,KN
70      RLTL(J)=RLTL1(J)
        CALL DMINV(RLTL,K,DET2,L3,L4)
        DO 85 I=1,KN
85      S(I)=R(I)+RLTT(I)
        WRITE(6,90)DET2
90      FORMAT(/,10X,'DETERMINANTE DE LTL = ',D10.3)
        CALL DGMABT(RLTL,S,RF1,K,K,N)
        CALL DGMABT(X1X,GTG,X1X,N,N,N)
        CALL DGMABT(R,GTG,C,K,N,N)
C CICLO SOBRE ALFA ...
        DO 100 I=1,NALFA
        A=ALFA(I)
        ANEG=-A
C ... SE RESUELVE LA ECUACION AXAP + ALF*X = C
        CALL AXAPX(RLTL1,SE,X1X,C,ANEG,R,L1,L2,DET,K,N)
        CALL DGMABT(SE,X1X,S,K,N,N)
        CALL DGMABT(RL,SE,TE1,M,K,N)
C ... SE CALCULAN LA SOLUCION (S) Y LA COMPONENTE
C .. POLINOMIAL (SE)
        DO 120 J=1,KN
        S(J)=RF1(J)-S(J)
120      SE(J)=S(J)-SE(J)
C ... SE CALCULAN LOS RESIDUOS EN KM/SEG.
        CALL DGMABT(RL,S,TE2,M,K,N)
        DO 130 J=1,MN
        TE2(J)=1.0D0/TE2(J)

```

```

130 RE1(J)=1.0D0/T(J) - TE2(J)
C... SE TRANSFORMA DE LENTITUDES A VELOCIDADES.
DO 140 J=1,KN
SE(J)=1.0D0/SE(J)
140 R(J)=1.0D0/S(J)
C SE ESCRIBEN RESULTADOS
WRITE(6,160)A
WRITE(6,170)DET
170 FORMAT(/10X,'DETERMINANTE DE R = ',D10.3,/)
160 FORMAT(/10X,'RESULTADOS PARA ALFA = ',D10.3)
WRITE(6,175)
175 FORMAT(/,10X,'MATRIZ SOLUCION, POR FILAS ',/)
DO 180 IP=1,K
180 WRITE(6,30)(R((J-1)*K + IP),J=1,N)
WRITE(6,190)
190 FORMAT(/,10X,'MATRIZ SP, POR FILAS ',/)
DO 200 IP=1,K
200 WRITE(6,30)(SE((J-1)*K + IP),J=1,N)
WRITE(6,210)
210 FORMAT(/,10X,'TOBS',9X,'TESTR',8X,'TCALC',8X,'RESIDUOS'
* ,/)
DO 220 J=1,M
RMS1=0.0D0
DO 222 JK=1,N
IL=(JK-1)*M + J
RMS1=RMS1 + RE1(IL)*RE1(IL)/(ERR(IL)*ERR(IL))
222 WRITE(6,230)(JK,T(IL),TE1(IL),TE2(IL),RE1(IL))
RMS1=DSQRT(RMS1/FLOAT(N))
220 WRITE(6,232)RMS1
230 FORMAT(I3,2X,4(3X,D10.4))
232 FORMAT(/,3X,'AJUSTE = ',1PD10.3)
C... SE ESCRIBEN LOS RESIDUOS Y LA SOLUCION PARA
C.. GRAFICARSE.
DO 240 J=1,M
I1=J
DO 240 IP=1,N
RE1(I1)=RE1(I1)/ERR(I1)
WRITE(7,30)FREC(IP),RE1(I1)
240 I1=I1+M
DO 250 J=1,K
I1=J
DO 250 IP=1,N
WRITE(8,30)FREC(IP),R(I1)
250 I1=I1+K
100 CONTINUE
C .... SE LLAMA PARA EL CASO DE HUECOS EN LOS DATOS
DO 260 I=1,MP
I1=I
SUM=0.0D0
DO 270 J=1,K
SUM=SUM+RLA(I1)

```

```

270   I1=I1+MP
      I1=I
      DO 260 J=1,K
      RLA(I1)=RLA(I1)/SUM
260   I1=I1+MP
      CALL DGMPRD(RLA, S, TE1, MP, K, N)
      DO 280 I=1,MPN
280   TE1(I)=1.0D0/TE1(I)
      DO 290 I=1,MP
290   WRITE(6,30)(TE1((J-1)*MP + I),J=1,N)
      CALL EXIT
      END

```

A1.2 Listado correspondiente al método mínimo-cuadrático.  
Sólo se incluye la parte principal.

```

C PROGRAMA PARA LA ESTIMACION MINIMO CUADRATICA EN LA CUAL LA
C INCOGNITA ES UNA MATRIZ. EL PROBLEMA ES T=LS,
C LA SOLUCION MINIMO CUADRATICA ES S=(LTL)**(-1)LTT
C   T ES M*N
C   L ES M*K
C   S ES K*N
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C   MMAX=32 , NMAX=9 , KMAX=5
      DIMENSION T(248),RL(248),S(64),TE(248),RE(248),RTR(36),
*   RTRC(64),R1(248),FREC(10),V(248),ERR(248)
5     READ(5,5)K,N,M
      FORMAT(3I10)
      MN=M*N
      MK=M*K
      KN=K*N
      READ(5,10)(T(I),I=1,MN)
      READ(5,10)(ERR(I),I=1,MN)
      READ(5,10)(RL(I),I=1,MK)
      READ(5,10)(FREC(I),I=1,N)
10    FORMAT(7D10.0)
C SE ESCRIBEN LAS ENTRADAS
      WRITE(6,20)K,N,M
20    FORMAT(/,'K=',I3,3X,'N=',I3,3X,'M= ',I3)
C SE NORMALIZA LA MATRIZ RL
C SE LEYERON VELOCIDADES, SE TRANSFORMAN A LENTITUDES.
      DO 30 I=1,MN
30    T(I)=1.0D0/T(I)
      DO 40 I=1,M
      I1=I
      SUM=0.0D0
      DO 50 J=1,K
      SUM=SUM+RL(I1)

```

```

50     I1=I1+M
      I1=I
      DO 40 J=1,K
      RL(I1)=RL(I1)/SUM
40     I1=I1+M
      WRITE(6,60)
60     FORMAT(/,4X,'MATRIZ L NORMALIZADA ',/)
      WRITE(6,65)(RL(I),I=1,MK)
65     FORMAT(10(2X,D10.3))
C .. SE CALCULA EL ANGULO ENTRE LAS COLUMNAS
C .. DE L NORMALIZADA.
      WRITE(6,70)
70     FORMAT(3X,'COLUMNA NO.',2X,'COLUMNA NO.',2X,
* 'ANGULO (GRADOS)'/)
      K1=K-1
      DO 75 I=1,K1
      DO 75 J=I,K1
      J1=J+1
      CALL TETA(RL,M,I,J1,ANG)
75     WRITE(6,80)I,J1,ANG
80     FORMAT(7X,I2,12X,I2,11X,1PD10.3)
      CALL DGMATA(RL,RTR,M,K)
      CALL DSINV(RTR,K,1.0D-07,IER)
      CALL DTRS(RTRC,RTR,K)
      CALL DGMABT(RTRC,RL,R1,K,K,M)
      CALL DGMPRD(R1,T,S,K,M,N)
      CALL DGMPRD(RL,S,TE,M,K,N)
      DO 90 I=1,MN
90     RE(I)=1.0D0/T(I) - 1.0D0/TE(I)
      WRITE(6,100)IER
100    FORMAT(/,10X,' MATRIZ SOLUCION, POR FILAS',2X,
* 'IER=',I3)
      DO 110 IP=1,KN
110    S(IP)=1.0D0/S(IP)
      DO 120 IP=1,K
120    WRITE(6,65)(S((J-1)*K + IP),J=1,N)
      WRITE(6,130)
130    FORMAT(/,10X,' TOBS',9X,' TCALC',8X,' RESIDUOS',/)
      DO 140 J=1,M
      RMS1=0.0D0
      DO 150 JK=1,N
      IL=(JK-1)*M + J
      RMS1=RMS1+RE(IL)*RE(IL)/(ERR(IL)*ERR(IL))
150    WRITE(6,160)(JK,T(IL),TE(IL),RE(IL))
      RMS1=DSQRT(RMS1/FLOAT(N))
140    WRITE(6,170)RMS1
170    FORMAT(/,3X,' AJUSTE      = ',1PD10.3)
160    FORMAT(I3,2X,3(3X,D10.3))
C .. SE ESCRIBEN LOS RESIDUOS Y LA SOLUCION
C .. PARA GRAFICARSE.
      DO 180 J=1,M

```

```
      I1=J
      DO 180 IP=1,N
      WRITE(7,65)FREC(IP),RE(I1)
180    I1=I1+M
      DO 190 J=1,K
      I1=J
      DO 190 IP=1,N
      WRITE(8,65)FREC(IP),S(I1)
190    I1=I1+K
      CALL EXIT
      END
```