

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias  
en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada**

---

**Simulación numérica de los efectos de las fracturas en los  
datos sísmicos**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Rubén Rioyos Romero**

Ensenada, Baja California, México

2017

Tesis defendida por

**Rubén Rioyos Romero**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado  
Director del Comité

Dra. Selene Solorza Calderón

Dr. Mario González Escobar

Dr. Markus Sebastian Gross



---

Dr. Juan García Abdeslem  
Coordinador del Programa de Posgrado en Ciencias de la Tierra

---

Dra. Rufina Hernández Martínez  
Director de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Rubén Rioyos Romero como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

### **Simulación numérica de los efectos de las fracturas en los datos sísmicos**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado  
Director de tesis

Existen dos formas de simular los efectos de las fracturas en la propagación de ondas sísmicas: 1) Teorías de Medios Equivalentes (TME) y 2) fracturas discretas. Las TME cuentan con ecuaciones que permiten estimar las propiedades elásticas del medio fracturado a partir de la adquisición de datos sísmicos 3D, sin embargo, estas ecuaciones son desarrolladas usando suposiciones tales como frecuencia cero y no interacción entre fracturas, que no concuerdan con la física de los yacimientos petroleros fracturados, comprometiendo su aplicabilidad, en particular cuando las fracturas están interconectadas. Por otra parte, las simulaciones por medio de fracturas discretas no cuentan con ecuaciones que relacionan directamente las propiedades mecánicas del medio fracturado, sin embargo, permiten simular los efectos de las fracturas en la propagación de ondas con un número menor de suposiciones, además ayudan a validar los resultados obtenidos a partir de las TME. El Método de Galerkin Discontinuo de Penalización Interior (por sus siglas en inglés, IP-DGM) es un esquema numérico que permite simular la ecuación de ondas elásticas (frecuencia variable) en 2D y 3D, y construir fácilmente modelos con fracturas simples, conjuntos de ellas o múltiples fracturas interconectadas. El primer objetivo de este trabajo de tesis es usar el IP-DGM para simular y analizar el efecto de las fracturas en la propagación de ondas en medios elásticos fracturados 2D, debido a la conectividad, densidad, orientación, longitud de las fracturas y el ángulo entre las fracturas conectadas, en busca de firmas sísmicas que revelen información de las características del medio fracturado, en particular la conectividad. El segundo objetivo es comparar los resultados obtenidos a partir de fracturas discretas (IP-DGM) con los de la teoría de Hudson (que es un caso de la TME). Los resultados muestran que los modelos con fracturas discretas reproducen las soluciones analíticas importantes de la TME de Hudson, además que mantienen una respuesta física plausible ante cambios en la microestructura del medio fracturado, por tal motivo se convierten en la mejor opción para analizar los efectos anisotrópicos que se generan en la propagación de las ondas elásticas.

Palabras Clave: **Simulación numérica, Método Galerkin discontinuo, Teoría de medio equivalente, Medio fracturado y Conectividad.**

Abstract of the thesis presented by Rubén Rioyos Romero as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Earth Science with orientation in Applied Geophysics.

### **Numerical simulation of fractures effects in seismic data**

Abstract approved by:

---

Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado  
Thesis Director

The development of fractured oil reservoirs mainly depends on knowledge of two parameters: 1) porosity and 2) permeability. In fact, there is no direct relation between both properties as rocks with high porosity not always have high permeability and vice versa. Thus, an important property of reservoirs is permeability which is directly related with connectivity of fractures of reservoirs. Thereby, estimating mechanical properties of fractured media from seismic data is a challenge in geophysics. There are two ways to simulate fracture effects in wave propagation: 1) Effective Media Theories (EMT) and 2) discrete fractures. EMT have equations for estimating mechanical characteristics of fractured media from 3D seismic data acquisition, however, those equations are derived using assumptions such as zero frequency and non-interacting fractures in its theoretical development, and these disagree with realistic situations, compromising the applicability, especially when fractures are interconnected. The simulations of discrete fractures do not have equations that directly link mechanical properties of fractured media, nevertheless, they can simulate fractures effects in wave propagation with less assumptions and they can help to validate results from EMT. The Interior Penalty Discontinuous Galerkin Method (IP-DGM) is a numerical scheme to simulate the elastic wave equation (non zero frequency) in 2D and 3D, and is able to easily build models with simple fracture, fracture sets or many interconnected fractures. The first goal in this work is to use IP-DGM to simulate and analyze the effects of the fractures on in wave propagation in elastic fractured media 2D, due to connectivity, density, orientation, size of fractures and angle between fractures. The primary objective is to obtain seismic signatures which reveal information about fractured media characteristics, mainly connectivity. The second goal is to contrast results of discrete fractures (IP-DGM) with Hudson's theory (specific case of EMT). The results show that models with discrete fractures reproduce the important analytical solutions of Hudson's theory, and maintain a plausible physical response to changes in the microstructure of the fractured medium, for this reason these are the best option for analyzing the anisotropic effects generated in the propagation of elastic waves.

**Keywords: Numerical simulation, Galerkin discontinuous method, Equivalent media theory, Fractured media and Connectivity.**

## **Dedicatoria**

***A Dios, mis padres y familia.***

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Al Centro Mexicano de Innovación en Energía Geotérmica (CeMIEGeo) por el apoyo económico para concluir mi trabajo de tesis.

Al Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado por el apoyo proporcionado durante mi estancia en el CICESE.

A la Dra. Selene Solorza Calderón, los doctores Mario González Escobar y Markus Sebastian Gross por sus valiosas aportaciones en este trabajo de tesis.

A mis padres Irma Azucena y Abel Martín, abuelos Irma y Santiago, hermanos Azucena, Abel Ivan y Marisol, sobrinos Alan y Santiago, primas Carmen y Karla y mi tía María del Carmen por su apoyo incondicional.

A mi querida familia de Ensenada, B.C: Dany, Lucy, Ale, Paty, Cesar, Laurita, Jon Hess, David, Karen, Jessi, Geneva, José, Fer, Angy, Sara, Lalo, Eliana y Jetro por todos los buenos momentos que han compartido conmigo.

A mis amigos que considero como parte de mi familia: Paco, Gabriel, Gerardo, Diego, Sagrario, Zail, Pamela, Marco, Jesús y Jannette por todos sus buenos deseos y ayuda en los momentos difíciles.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	viii
Lista de tablas .....	ix
<b>Capítulo 1 Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1 Relevancia de la investigación .....	1
1.2 Caracterización de yacimientos fracturados .....	2
1.3 Fundamento teórico de la caracterización de fracturas .....	4
1.4 Simulación de medios fracturados .....	6
1.5 Antecedentes de la investigación de conectividad entre fracturas .....	7
1.6 Planteamiento del problema .....	9
1.7 Hipótesis .....	10
1.8 Objetivos .....	10
<b>Capítulo 2 Teorías de medios equivalentes (TME)</b> .....	<b>12</b>
2.1 Conceptos básicos .....	12
2.2 Teoría de Hudson .....	19
2.3 Teoría de Schoenberg .....	23
2.4 Teoría de Kachanov .....	26
2.5 Teoría de Bakulin .....	29
2.6 Ventajas y desventajas de las TME .....	31
<b>Capítulo 3 Método numérico para la propagación de ondas en medios con fracturas</b> ..	<b>34</b>
3.1 Método Galerkin Discontinuo (DGM) .....	34
3.1.1 Formulación débil de la ecuación de onda elástica incluyendo fracturas .....	35
3.1.2 El software Seismic Wave Propagation (SWP) .....	37

## Tabla de contenido (continuación)

<b>Capítulo 4 Simulaciones numéricas</b> .....	40
4.1 Diagrama de flujo de trabajo .....	40
4.2 Longitud de las fracturas .....	40
4.3 Densidad de las fracturas .....	53
4.4 Orientación de las fracturas .....	60
4.5 Conectividad entre fracturas .....	66
4.6 Ángulo entre fracturas conectadas .....	72
<b>Capítulo 5 Análisis de los resultados y discusión</b> .....	79
<b>Capítulo 6 Conclusiones</b> .....	84
<b>Capítulo 7 Trabajo futuro y recomendaciones</b> .....	86
Literatura citada .....	91

# Lista de figuras

Figura	Página
1 Tipos de anisotropía . . . . .	16
2 Precisión de las TME respecto a la densidad de las fracturas . . . . .	32
3 Diagrama de flujo de trabajo . . . . .	41
4 Rocas digitales con longitud de la fractura variable . . . . .	43
5 Gráficas de los datos para la longitud de fractura, experimento A5 RDF vs TME . . . . .	46
6 Cálculo de chi cuadrada del experimento A5 de longitud de la fractura RDF vs TME . . . . .	48
7 Experimento A1 de longitud de la fractura RDF vs TME . . . . .	50
8 Experimento A1 vs A6 de longitud de la fractura TME vs TME . . . . .	51
9 Rocas digitales con densidad de las fractura variable . . . . .	56
10 Experimento B3 de la densidad de las fracturas RDF vs TME . . . . .	57
11 Experimento B2 de la densidad de las fracturas RDF vs TME . . . . .	58
12 Experimento B4 de la densidad de las fracturas RDF vs TME . . . . .	59
13 Rocas digitales con orientación de las fractura variable . . . . .	61
14 Comparación entre la propagación de ondas sísmicas de medios $HTI_x$ y $VTI$ . . . . .	62
15 Experimento de orientación de las fracturas a $0^\circ$ RDF vs TME . . . . .	63
16 Experimento de orientación de las fracturas a $15^\circ$ RDF vs TME . . . . .	65
17 Experimento de orientación de las fracturas a $30^\circ$ RDF vs TME . . . . .	66
18 Roca digital con fracturas ortogonales conectadas . . . . .	69
19 Experimento de conectividad con fracturas ortogonales RDF vs TME (Bakulin) . . . . .	70
20 Experimento de conectividad con fracturas ortogonales RDF vs TME (Hudson) . . . . .	71
21 Rocas digitales con diferente ángulo entre fracturas conectadas . . . . .	73
22 Experimento de ángulo entre fracturas conectadas RDF vs TME . . . . .	76
23 Experimento de ángulo entre fracturas conectadas RDF Orto vs RDF Oblic . . . . .	77
24 Experimento de ángulo entre fracturas conectadas RDF Oblic vs RDF $45^\circ$ . . . . .	78

# Lista de tablas

Tabla		Página
1	Métodos incluidos en SWP . . . . .	38
2	Características de la matriz de las rocas digitales . . . . .	42
3	Experimentos con diferente longitudes de las fracturas (RDF) . . . . .	42
4	Experimentos con diferentes longitudes de las fracturas (TME) . . . . .	44
5	Parámetros de simulación numérica . . . . .	45
6	Resultados del efecto de la longitud de las fracturas . . . . .	52
7	Experimentos con diferente densidad de las fracturas . . . . .	54
8	Resultados del parámetro densidad de las fracturas . . . . .	54
9	Experimentos para las RDF de orientación de las fracturas . . . . .	60
10	Resultados de los experimentos para la orientación de las fracturas . . . . .	64
11	Experimentos para las RDF de conectividad de las fracturas . . . . .	68
12	Resultados de los experimentos para la conectividad entre dos conjuntos de fracturas ortogonales . . . . .	68
13	Experimentos para la conectividad entre dos conjuntos de fracturas ortogonales	73
14	Resultados de los experimentos para el ángulo entre fracturas conectadas . .	74

# Capítulo 1 Introducción

---

En este capítulo se presenta un panorama general de la importancia de las fracturas y su relación con la permeabilidad en la producción de recursos energéticos como lo son la energía geotérmica y los combustibles fósiles. La caracterización de las fracturas a partir de los datos sísmicos 3D es una forma de inferir las propiedades de las fracturas que se encuentran bajo la superficie, esta técnica descansa en el fundamento matemático de las teorías de medios equivalentes, sin embargo la aplicabilidad de éstas es limitada por las suposiciones que son requeridas para su solución, por esta razón la simulación numérica de modelos con fracturas discretas es una útil alternativa para investigar la microestructura de las fracturas. Las fracturas conectadas en un yacimiento petrolero, geotérmico o un acuífero aumentan la permeabilidad, por esta razón es importante encontrar la forma de inferir las zonas de alta permeabilidad en los yacimientos.

## 1.1 Relevancia de la investigación

Determinar las características microestructurales de las fracturas en los yacimientos petroleros es un importante tema de investigación en exploración sísmica. Esto es debido a que las fracturas de longitud menor a la longitud de onda sísmica, en el rango de las frecuencias sísmicas de la exploración superficial, son difícilmente registradas en bajas frecuencias, sin embargo son realmente importantes en la producción de hidrocarburos. La presencia de las microfracturas genera un efecto anisotrópico cuantificable a través de la adquisición de datos con sísmica 3D multicomponente de alta resolución (Grechka y Kachanov, 2006a), dicho efecto es resultado de la contribución individual de cada una de las microfracturas o conjuntos de microfracturas (Grechka y Kachanov, 2006b). Al día de hoy mejorar los procedimientos y metodologías para inferir las características microestructurales de fracturas a través de medir el efecto anisotrópico en los datos sísmicos es un reto en la industria, que toca las fronteras del conocimiento. Las fracturas se encuentran presentes en diferentes escalas (nano, micro, macro y mega escala) a lo largo de toda la litósfera (Liu *et al.*, 1995), éstas controlan en cada escala las propiedades mecánicas (esfuerzos y deformaciones) de la parte sólida de las rocas, así como el desplazamiento de los fluidos contenidos en ellas. Dichos fluidos se desplazan a través de la porción de fracturas interconectadas, definiendo así patrones de desplazamiento preferenciales en función de la orientación de las fracturas comunicadas. De aquí la importancia de conocer información del medio fracturado intercomunicado a partir de datos sísmicos, pues esta información permite determinar las zonas por donde es más probable que los fluidos de un yacimiento se desplacen, migren y acumulen.

Tsvankin *et al.* (2010) menciona que un tercio de las reservas petroleras del mundo se encuentra en yacimientos fracturados (también llamados no convencionales), de tal manera que invertir datos sísmicos con el objetivo de estimar las características microestructurales del medio fracturado y el fluido contenido en el cobra interés económico a nivel mundial. Determinar la orientación preferencial (dirección del desplazamiento de fluidos), densidad (número de fracturas por unidad de volumen), conectividad, longitud, apertura y relleno de uno o múltiples conjuntos de fracturas resulta ser de vital importancia para optimizar el desarrollo y producción de yacimientos fracturados.

Otras aplicaciones directamente relacionadas con la caracterización de fracturas son la exploración de yacimientos geotérmicos, almacenamiento de  $CO_2$ , control y manipulación de acuíferos, monitoreo de migración de contaminantes, almacenamiento de residuos nucleares, ingeniería de túneles e ingeniería de minas (Liu *et al.*, 1995; Guo *et al.*, 2016). El presente trabajo de investigación aporta valiosa información para mejorar el entendimiento del efecto anisotrópico causados por fracturas conectadas y no conectadas en la propagación de ondas elásticas.

## 1.2 Caracterización de yacimientos fracturados

Es necesario mencionar que la investigación aquí presentada corresponde sólo a una parte del complejo procedimiento de caracterización de fracturas. A continuación se presenta un panorama general de la caracterización de fracturas, para así delimitar los alcances y contribuciones que aporta el presente trabajo.

En general existen dos enfoques de investigación para caracterizar al medio fracturado. Por un lado tenemos el análisis del medio fracturado embebido en una matriz isotrópica (Grechka y Kachanov, 2006a; Hudson, 1980, 1981; Schoenberg, 1980; Schoenberg y Douma, 1988; Bakulin *et al.*, 2000b; Kachanov, 1980), mientras que por el otro está el análisis del medio fracturado embebido en una matriz anisotrópica (Guo *et al.*, 2016; Schoenberg y Douma, 1988; Rubino *et al.*, 2013, 2014a,b, 2015, 2016). En cuanto al primer caso es posible invertir parámetros anisotrópicos microestructurales a partir de datos sísmicos 3D (multicomponente de alta resolución) de superficie exclusivamente, con base en diferentes simplificaciones teóricas (Tsvankin y Grechka, 2011). Al respecto del segundo caso, se requiere adicionalmente información de pozos (Grechka, 2007; Tsvankin y Grechka, 2011), por ejemplo el registro sónico del pozo. Además, cuando las fracturas están conectadas con la matriz porosa y tanto matriz como fracturas están saturadas con fluido, son necesarias correcciones de presión de poro que dependen de la frecuencia sísmica (Guo

*et al.*, 2016; Mavko *et al.*, 2009). Otra forma de entender ambos enfoques es: 1) el estudio del medio fracturado bajo el régimen de deformación estática (problema estático), o sea, de teorías de medios equivalentes (TME) con matriz isotrópica y fracturas aisladas (Tsvankin y Grechka, 2011; Grechka y Kachanov, 2006a) y 2) el estudio del medio fracturado bajo el régimen de deformación dinámica (problema dinámico, efectos dependientes de la frecuencia), es decir, de la TME con matriz isotrópica o anisotrópica con fracturas interconectadas saturadas con fluido donde la frecuencia toma un rol importante (revisar Guo *et al.* 2016; Mavko y Jizba 1991 y Mukerji y Mavko 1994). El presente trabajo de investigación está orientado en principio al primer enfoque, es decir, se investigan los efectos debidos a la propagación de ondas sísmicas en medios fracturados con matriz isotrópica y un conjunto de fracturas aisladas. Sin embargo, se experimenta también con los efectos de las fracturas en la propagación de ondas elásticas en una matriz isotrópica con dos conjuntos de fracturas intercomunicados con orientaciones diferentes, violando explícitamente los supuestos de la TME. Los resultados se comparan con la teoría de Hudson (1980).

El trabajo más sobresaliente en simulación y caracterización de fracturas bajo el régimen de deformación estática es la serie de artículos presentada por Grechka y Kachanov (2006a,b,c) y Grechka *et al.* (2006), donde el objetivo primordial es establecer la base teórica de inversión de parámetros de fracturas, adicionalmente ellos están interesados en definir una metodología que permita conocer las propiedades de las fracturas donde sea exclusivo el uso de datos sísmicos adquiridos en superficie. Disponer de una metodología de inversión de parámetros de fracturas a partir de datos sísmicos de superficie la convierte en una herramienta muy útil en exploración sísmica. Sin embargo, no siempre será posible su aplicación, pues se requiere la adquisición de datos con sísmica 3D multicomponente de alta resolución para recuperar un máximo de 6 parámetros anisotrópicos (las constantes elásticas de Lamé de la matriz,  $\lambda_b$  y  $\mu_b$ , dos principales densidades de fractura,  $e_1$  y  $e_2$ , la orientación principal de un conjunto de fracturas,  $\alpha_1$ , y el factor del fluido,  $\zeta_1$ ).

Recapitulando, el primer paso en la caracterización de fracturas es determinar la información sísmica y de pozo con la que se cuenta, para elegir el modelo anisotrópico apropiado para la inversión de datos sísmicos. El segundo paso es la inversión de parámetros anisotrópicos con base en el modelo previamente elegido. En este punto es necesario mencionar que el modelo (teórico) anisotrópico equivalente es la información de entrada en la función objetivo de inversión, lo cual revela la importancia que guarda el modelo teórico de entrada, puesto que de él depende el número posible de parámetros anisotrópicos a invertir a partir de los datos sísmicos (Tsvankin

y Grechka, 2011; Grechka, 2007). Es aquí donde recae la relevancia de esta investigación, pues validar las principales TME y sus límites de aplicabilidad nos da una buena idea de cuanto es posible confiar en los parámetros obtenidos por medio de la inversión de datos sísmicos. Dicho de otro modo, en la medida que las diferentes TME (también llamadas teorías de medios efectivos) representen mejor las características reales del medio fracturado en los yacimientos petroleros, el resultado de la inversión de los parámetros anisotrópicos de los datos sísmicos será de mayor utilidad para el desarrollo de los yacimientos petroleros y su producción. En este sentido, el modelado directo (simulación numérica) de medios anisotrópicos (medios equivalentes) juega un papel muy importante, pues permite:

1. Controlar todas las características del modelo.
2. Aislar los efectos de interés para su análisis independiente. En el caso particular de propagación de ondas, el modelado directo permite separar el efecto de atenuación sísmica del de propagación de ondas. También permite el análisis de los efectos de las fracturas debido a cada uno de los parámetros de las fracturas o combinaciones de ellos en la propagación de ondas elásticas en medios fracturados.
3. Construir modelos digitales (rocas digitales) de medios fracturados embebidos en una matriz, ya sea isotrópica o anisotrópica.
4. Comparar las TME con simulaciones numéricas de rocas digitales que explícitamente pueden o no satisfacer los supuestos de las TME y evaluar diferencias para validar las simulaciones de rocas digitales fracturadas (RDF) o viceversa.

### **1.3 Fundamento teórico de la caracterización de fracturas**

Con base en lo antes expuesto, se puede decir que la caracterización de fracturas a partir de datos sísmicos yace en el formalismo de las diferentes TME. En geofísica las teorías más populares y utilizadas son principalmente tres: 1) Hudson (1980), 2) Schoenberg (1980) y 3) Kachanov (1980); es importante mencionar que las teorías antes referidas fueron presentadas en 1980, sin embargo, años más tarde fueron generalizadas. Ejemplos de esto son: Hudson (1981); Schoenberg y Douma (1988); Schoenberg y Sayers (1995); Kachanov (1992); Kachanov *et al.* (1994), las cuales a su vez son desarrolladas bajo el supuesto llamado aproximación de no interacción (NIA por sus siglas en inglés), el cual asume que las fracturas cercanas entre sí no interactúan unas

con otras (Grechka y Kachanov, 2006a). Por lo tanto, el efecto de conectividad entre fracturas no es considerado. Existen TME que consideran la conectividad entre fracturas y poros de la matriz (Hudson *et al.*, 1996; Kachanov, 1992; Thomsen, 1995), sin embargo, éstas ya forman parte del enfoque del análisis de medios fracturados con matriz anisotrópica, requiriendo información adicional de pozos y dificultando su aplicabilidad en exploración sísmica de yacimientos fracturados.

La principal diferencia entre la teoría de Hudson (1980) y Schoenberg (1980) es que Hudson (1980) desarrolló su teoría con base en el cálculo del tensor de rigidez,  $C_e$ , el cual está directamente relacionado con parámetros microestructurales de las fracturas (forma, densidad, orientación, apertura, relleno y radio de las fracturas), mientras que la teoría de Schoenberg (1980) está desarrollada con base en el tensor de conformidad,  $S_e$ , y no guarda relación directa con la geometría de las fracturas (Tsvankin y Grechka, 2011). Sin embargo, la teoría de Schoenberg (1980) obtiene resultados más precisos en un amplio rango de densidad de las fracturas, aproximadamente  $0 < e < 0.2$  ( $e$  es la densidad de las fracturas, ecuación 22), mientras que la teoría de Hudson (1980) ofrece resultados aceptables en un rango de densidad de fracturas de  $0 < e < 0.05$  (Grechka y Kachanov, 2006a). Por otra parte, la teoría de Kachanov (1980) al igual que Schoenberg (1980) también es desarrollada con base en  $S_e$  pero además está relacionada con los parámetros microestructurales de las fracturas (Tsvankin y Grechka, 2011). Siendo éstas las principales ventajas y desventajas de las TME más populares en geofísica.

Grechka y Kachanov presentaron una serie de artículos donde analizaron con detalle los efectos de los parámetros de las fracturas (conectividad, apertura, relleno, forma, orientación y densidad de fracturas) en el campo de esfuerzos debido a uno y múltiples conjuntos de fracturas verticales embebidas en una matriz isotrópica (Grechka y Kachanov, 2006a,b,c; Grechka *et al.*, 2006). A través de construir y simular rocas digitales que explícitamente violan los supuestos de las TME, ellos comparan los resultados de Hudson (1980), Schoenberg (1980) y Kachanov (1980) con los resultados de sus simulaciones numéricas obtenidas con el Método de Elemento Finito (FEM por sus siglas en inglés). Grechka y Kachanov concluyeron que los efectos de conectividad, forma de la fractura y rugosidad de las caras de las fracturas planas son despreciables (Grechka y Kachanov, 2006a,b,c; Grechka *et al.*, 2006).

Otras conclusiones contraintuitivas del trabajo de Grechka y Kachanov (2006b) son: 1) sin importar el número de conjuntos de fracturas embebidos en una matriz isotrópica así como sus orientaciones y tipos de fluidos contenidos, la simetría del medio equivalente es ortorrómbica, y 2) la inversión no lineal de elipses NMO de ondas S y P para parámetros de fractura demuestran

que la caracterización de múltiples conjuntos de fracturas verticales secas es factible y única.

Las conclusiones que reporta Grechka y Kachanov (2006a,b) sugieren ser el respaldo teórico-numérico de una condición necesaria para su objetivo principal que es demostrar que es posible invertir parámetros de fracturas exclusivamente de datos sísmicos de superficie 3D multicomponente de alta resolución. Si alguno de los efectos antes mencionados causados por características del medio fracturado no fuera despreciable, o sea, que su influencia jugará un rol determinante, la metodología de caracterización de fracturas de Grechka y Kachanov (2006a) tendría que ser revisada.

Caracterizar fracturas resulta ser una tarea multidisciplinaria que converge en aplicación de técnicas y metodologías de áreas del conocimiento como geología, geofísica, física de rocas, matemáticas aplicadas (métodos de simulación numérica), mecánica de fluidos y del medio continuo, entre otras.

## 1.4 Simulación de medios fracturados

En general existen dos formas de simular los efectos del medio fracturado: 1) Teorías de medios equivalentes, y 2) Construcción de RDF (fracturas discretas). En ambos casos es necesario implementar algún método de simulación numérica para el cálculo de los tensores de rigidez o conformidad asociados con el medio fracturado, según sea el caso de la TME elegida para el modelo, todo depende de las características de la implementación y sus aplicaciones. Lo cierto es que toda implementación numérica en rocas digitales requerirá ser validada a través de comparaciones con la TME.

Los métodos de simulación numérica comúnmente utilizados para propagar ondas son (las siglas de los métodos se refieren al idioma inglés): 1) Diferencias Finitas (FDM), 2) Elementos Finitos, 3) Pseudoespectrales, y algunas variantes de estos métodos, por ejemplo: mallado intercalado (SGFDM) y el Método de Galerkin Discontinuo (DGM). Cada uno de los métodos antes mencionados presenta ventajas y desventajas en cuanto a costo computacional, dispersión numérica y estabilidad (De Basabe y Sen, 2007, 2010). Sin embargo, para el caso concreto de construcción de RDF el DGM destaca sobre los demás.

De Basabe *et al.* (2016) presentaron una implementación de la ecuación de onda elástica para 2D y 3D con base en el Método de Galerkin Discontinuo Simétrico de Penalización Interior (SIPG por sus siglas en inglés) que permite construir rocas digitales en una malla de cuadriláteros, los

cuales pueden ser rectos u oblicuos, donde cada una de las caras de los cuadriláteros que forman la malla (caso 2D) pueden ser definidas como fracturas. Debido a que el SIPG está originalmente desarrollado para aproximar funciones discontinuas en las fronteras de los elementos, la generosidad del método se completa ya que el término adicional al de penalización (incluido por De Basabe *et al.* 2016) en la formulación matemática es empleado para incluir las condiciones de frontera del tipo de desplazamiento discontinuo (LSM por sus siglas en inglés) sin perder precisión y estabilidad numérica. Esta implementación permite evaluar el efecto que producen fracturas interconectadas o no interconectadas en la propagación de ondas elásticas en rocas digitales, además que puede ser comparada con los resultados de la propagación de ondas elásticas de las TME. También es posible comparar los resultados de las simulaciones numéricas de otras características del medio fracturado como lo son: orientación de uno o dos conjuntos (caso 2D) de fracturas (ortogonales o no ortogonales entre sí), densidad de fracturas, longitud de la fractura, relleno y apertura de la fractura. Dado que la implementación del SIPG de De Basabe *et al.* (2016) permite simular los mismos parámetros analizados por Grechka y Kachanov (2006a) en rocas digitales y ambos utilizan condiciones de frontera para las fracturas del tipo LSM, condiciones propuestas por Schoenberg (1980), los resultados numéricos son comparables, además los datos de entrada para el SIPG de De Basabe *et al.* (2016) son los elementos del tensor de conformidad de las fracturas  $Z_N$  y  $Z_T$ , mismos que son determinados por Kachanov (1992).

## 1.5 Antecedentes de la investigación de conectividad entre fracturas

El análisis del medio fracturado se puede dividir en dos partes principalmente: 1) Fracturas aisladas, y 2) Fracturas conectadas; a su vez cada uno de estos 2 grupos está subdividido en: a) fracturas secas (Hudson *et al.* 1996 aclaran que estas fracturas son saturadas con un gas sin viscosidad o despreciable viscosidad), y b) fracturas saturadas con un fluido viscoso o un sólido débil. De esta manera se puede decir que el problema estático está comprendido por fracturas aisladas, tanto secas como saturadas, y son diversas las TME que atienden el análisis de éste tipo de medio fracturado con base en supuestos tales como que la apertura, longitud y separación de las fracturas son pequeñas en comparación a la longitud de onda (aproximación de gran longitud de onda, Hudson 1980, 1981, 1986, 1988; Kachanov 1980, 1992; Kachanov *et al.* 1994; Schoenberg 1980; Schoenberg y Douma 1988; Schoenberg y Sayers 1995; Bakulin *et al.* 2000b; Grechka y Kachanov 2006a), baja concentración de fracturas, no interacción entre fracturas, etc. Es necesario aclarar que el trabajo de Hudson (1980) incluyó aproximaciones de primer orden y segundo orden, las cuales consideran la interacción entre fracturas, sin embargo para el caso de

la aproximación de primer orden la interacción es pequeña y se desprecia, mientras que para la aproximación de segundo orden la interacción es mayor; en el presente trabajo no se investiga a detalle este efecto de interacción entre las fracturas abordado por Hudson (1980). Las TME antes mencionadas ofrecen formulaciones rigurosas para el caso de las fracturas secas y saturadas. En general, las fracturas aisladas han sido ampliamente investigadas hasta el día de hoy, esto es porque en esta clasificación se encuentran los modelos más simples (uno o múltiples conjuntos de fracturas secas alineadas embebidos en una matriz isotrópica), de tal manera que en el proceso de inversión de los parámetros de las fracturas a partir de los datos sísmicos de superficie son en estas formulaciones las que menos datos de entrada requieren. Sin embargo, los modelos de fracturas más simples no suelen reproducir la realidad de las rocas fracturadas típicas en un yacimiento fracturado. Es aquí donde radica la necesidad de analizar el medio fracturado interconectado, debido a que existe intercomunicación entre las fracturas y posibles poros en la matriz (matriz anisotrópica) que generan caminos de desplazamiento de fluidos, los cuales en el caso que las fracturas se encuentren saturadas por un fluido viscoso, éstos jugarán un papel importante en el desplazamiento de los fluidos y a su vez en las condiciones internas del espacio poroso, un ejemplo es la presión del poro, la cual depende directamente de la frecuencia del impulso sísmico que se propaga (Hudson, 1988; Hudson *et al.*, 1996; Thomsen, 1995; Guo *et al.*, 2016; Rubino *et al.*, 2013, 2014a, 2015, 2016), entre otros.

Analizar el medio fracturado intercomunicado seco implica directamente una simplificación y ésta es que debido al fluido contenido, que es gas (viscosidad nula o despreciable), los efectos de la frecuencia en el interior del espacio poroso conectado no están presentes. Por consecuencia, esto nos permite analizar el medio fracturado conectado como si el medio fracturado no estuviera conectado. Esta situación llevó a diferentes autores (Kachanov 1992; Kachanov *et al.* 1994; Grechka y Kachanov 2006c; Hudson *et al.* 1996; Thomsen 1995, entre otros) a violar explícitamente los supuestos de las TME y explorar sus límites de aplicabilidad en arreglos de fracturas interconectadas. Como se menciona en la sección 1.3, el trabajo más sobresaliente al respecto es el de Grechka y Kachanov (2006c), en el cual por medio de la TME de Kachanov (1980) y simulaciones numéricas en el régimen de deformación estática, analizan el efecto de conectividad; sus conclusiones (ver sección 1.3) han sido aceptadas por una década, sin embargo, estudios recientes (Shao y Pyrak-Nolte, 2016) de experimentos en laboratorio de propagación de onda acústica en medios isotrópicos con dos conjuntos de fracturas interconectadas ortogonales entre sí revelan que el efecto de conectividad entre fracturas es relevante y por ende debe ser considerado en la caracterización de fracturas a partir de datos sísmicos; otro estudio enfocado a las fractu-

ras conectadas saturadas, también revela efectos debidos a la conectividad entre fracturas (Guo *et al.*, 2016). Lo anterior deja al descubierto la importancia de investigar el efecto de las fracturas interconectadas secas bajo el régimen de deformación dinámica. Considerando que el problema físico es dinámico y las TME atienden el problema estático, en el presente trabajo de investigación nos enfrentamos a un análisis semejante al de Grechka y Kachanov (2006c) pues la TME de Hudson (1980) y la de Kachanov (1980) son exploradas en la propagación de ondas elásticas violando explícitamente el supuesto de no interacción entre fracturas y validando su aplicabilidad y precisión en el rango de frecuencias sísmicas de exploración superficial.

El presente trabajo de investigación pretende analizar, en general, los efectos de las fracturas en la propagación de ondas elásticas con especial interés en el efecto que causa la conectividad entre fracturas (se asume que las fracturas no funcionan como fuente sísmica en las rocas digitales construidas con base en el SIPG) por su importancia e implicaciones en la exploración y producción petrolera.

## 1.6 Planteamiento del problema

En exploración y producción petrolera uno de los grandes retos se encuentra en la identificación de las áreas de alta permeabilidad de fractura (Guo *et al.*, 2016), estas zonas de alta permeabilidad están directamente asociadas a la pequeña porción de fracturas interconectadas (Liu *et al.*, 2000).

Grechka y Kachanov (2006c) investigaron el efecto en la elasticidad efectiva causada por fracturas interconectadas, comparando simulaciones numéricas de la teoría semianalítica de Kachanov (1992) con simulaciones numéricas de rocas digitales que contienen tres diferentes conjuntos de fracturas planas verticales con diferente orientación cada uno permitiendo la conectividad entre las fracturas; ellos concluyeron que dicho efecto es despreciable. Sin embargo, es necesario destacar que Grechka y Kachanov (2006c) analizaron el efecto de conectividad por medio de simular el campo de esfuerzos en un volumen con sólo 10 fracturas. Además, intencionalmente definieron el valor de la constante de Lamé  $\lambda$  de la matriz isotrópica igual a cero ( $\lambda_b = 0$ ); ellos esperan que sus resultados sean aplicables a rocas reales donde  $\lambda_b$  es diferente de cero.

Siendo la investigación de Grechka y Kachanov (2006c) la más detallada, que evalúa el efecto de conectividad entre fracturas, y pese a las simplificaciones realizadas por los autores para aislar el efecto de conectividad, se identifica la necesidad de investigar el efecto de conectividad entre

fracturas en la elasticidad efectiva de rocas digitales con propiedades físicas típicas de rocas presentes en yacimientos petroleros y dimensiones del modelo apropiadas para la escala sísmica.

Dado que la forma más sencilla de adquirir información de los medios fracturados que se encuentran bajo la superficie es invertir los datos sísmicos 3D a partir de las TME, un análisis comparativo del efecto producido por la conectividad entre fracturas en los datos sísmicos con base en las TME y simulación numérica de rocas digitales con características típicas de yacimientos petroleros, es indispensable. Adicionalmente, validar la precisión y rango de aplicabilidad de las TME, es importante (Grechka y Kachanov, 2006b). La implementación de De Basabe *et al.* (2016) con base en SIPG permite analizar el campo de desplazamientos en RDF con una o millones de fracturas de diferentes longitudes y orientaciones, aisladas o conectadas entre sí, en modelos de dimensiones de metros o kilómetros.

## 1.7 Hipótesis

Los efectos de:

- 1) longitud de las fracturas,
- 2) densidad de las fracturas,
- 3) orientación de las fracturas,
- 4) conectividad entre fracturas,
- 5) ángulo entre fracturas conectadas,

influyen en la propagación de ondas elásticas en la escala de exploración sísmica de yacimientos petroleros.

## 1.8 Objetivos

Objetivo GENERAL

- Investigar los efectos de las fracturas en los datos sísmicos utilizando modelado directo de propagación de ondas elásticas.

Objetivos PARTICULARES

- Investigar numéricamente el efecto de los siguientes parámetros de las fracturas en los datos sísmicos:
  1. longitud de las fracturas,
  2. densidad de las fracturas,
  3. orientación de las fracturas,
  4. conectividad entre fracturas,
  5. ángulo entre fracturas conectadas,
- Validar los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF con la TME de Hudson (1980).

## Capítulo 2 Teorías de medios equivalentes (TME)

---

Este capítulo contiene los conceptos básicos de las TME, detalles de las teorías empleadas en este trabajo de tesis y las ecuaciones que describen el tensor de conformidad para el caso de las teorías de Schoenberg (1980) y Kachanov (1980); en el caso del tensor de rigidez se presentan las ecuaciones de Hudson (1980), Bakulin *et al.* (2000b) y Grechka y Kachanov (2006a). También se describen las TME que explícitamente cuentan con formulaciones matemáticas para fracturas ortogonales (Hudson, 1981; Bakulin *et al.*, 2000b; Mavko *et al.*, 2009). La descripción de las teorías para las fracturas ortogonales entre sí, es un punto importante ya que existen marcadas diferencias entre lo predicho por las TME y lo que se mencionará en este capítulo.

### 2.1 Conceptos básicos

Grechka y Kachanov (2006a) mencionan que el punto de partida en el análisis de las propiedades efectivas de los medios elásticos es el artículo publicado por Eshelby (1957) quien estudia el efecto de una inclusión elipsoidal en un medio continuo (isotrópico), años más tarde Bristow (1960) dedica un artículo a las fracturas delgadas. Una amplia descripción de los trabajos posteriores relacionados con el análisis del medio fracturado asociado con los arreglos de fracturas circulares (un caso particular de las fracturas elipsoidales) secas y rellenas con fluidos o con materiales débiles (sólidos con módulo de rigidez menor a la rigidez de la matriz) se encuentra en Hudson (1980). Por otro lado, una discusión detallada sobre los diferentes métodos y esquemas de análisis del medio fracturado puede ser revisada en Kachanov (1992).

A continuación se proporciona una descripción de las definiciones y los conceptos básicos necesarios para el mejor entendimiento de las TME populares en geofísica (Hudson, 1980; Kachanov, 1980; Schoenberg y Sayers, 1995; Grechka y Kachanov, 2006a).

Antes de definir qué es una TME es importante aclarar el concepto de fractura. Dado que esta investigación está orientada a la geofísica aplicada en exploración sísmica y la simulación numérica, el concepto de fractura o microfracturas tiene dos contextos principales: 1) el matemático, el cual es útil para determinar mediante un modelo las características que definen a la fractura en términos matemáticos apropiados para las aplicaciones en la geofísica y la simulación numérica. En el artículo presentado por Liu *et al.* (1995) se encuentran diferentes modelos que pueden representar una fractura; 2) el geológico, el cual atiende las características tangibles del medio fracturado de las formaciones rocosas en toda la extensión de litosfera terrestre (para más detalle

ver Bakulin *et al.* 2000a; Aguilera 1998). En este sentido, existen diferencias entre los términos fractura y falla. La principal diferencia radica en que para definir geológicamente una falla, ésta debe presentar un desplazamiento sobre el plano de la falla, mientras que la fractura es simplemente un plano que no presenta desplazamiento entre los bloques que separa (Tarbuck *et al.*, 2005). Un tercer contexto puede ser considerado, éste es el de la simulación numérica bajo la idea de la construcción de rocas digitales. En este caso una buena definición de fractura se describe en Schoenberg (1980), donde se define a la fractura como una superficie imperfecta que separa dos medios elásticos.

Una definición de TME se encuentra en Tsvankin y Grechka (2011), la cual dice que una TME es un procedimiento matemático diseñado para reemplazar un volumen de roca que contiene microfracturas con uno homogéneo que tiene exactamente las mismas propiedades elásticas efectivas (equivalentes) en el régimen de la deformación estática. En general, las TME son válidas cuando se cumplen las siguientes suposiciones básicas:

- 1) la escala en la que se examina el volumen de la roca con microheterogeneidades permite reemplazar el tensor de rigidez  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  asociado al volumen de la roca original por un tensor de rigidez equivalente  $\mathbf{C}_e(\mathbf{x})$  asociado al volumen de la roca homogénea, donde  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas cartesianas y  $\mathbf{C}_e$  es determinado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{C}_b + \mathbf{C}_f, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{C}_b$  es el tensor de rigidez de la matriz de la roca y  $\mathbf{C}_f$  es el tensor de rigidez asociado a las microfracturas,

- 2) la longitud de onda sísmica  $\lambda_s$  es mucho más grande que la longitud de la fractura  $l$ , la separación entre las fracturas  $h$  y la apertura de la fractura  $\theta$ ,
- 3) la interacción entre las fracturas no existe o se asume suficientemente pequeña que se puede despreciar (Hudson, 1980; Kachanov, 1980; Schoenberg y Sayers, 1995; Grechka y Kachanov, 2006a; Bakulin *et al.*, 2000a).

La simetría del tensor de rigidez  $\mathbf{C}_f$ , o su inverso el tensor de conformidad  $\mathbf{S}_f$ , depende directamente de las características de la distribución de la posición y la orientación de las microheterogeneidades en el volumen de la roca; la cual está asociada a la anisotropía causada por las

microfracturas (los diferentes tensores de rigidez y conformidad de cuarto orden en este trabajo de tesis son representados por matrices de  $6 \times 6$  en notación de Voigt).

Para explicar con más detalle los diferentes tipos de simetrías anisotrópicas que puede alcanzar el  $C_f$ , se define primero un Elemento de Volumen Representativo (EVR) del medio fracturado. El EVR es un cubo de material isotrópico de longitud  $L$  y volumen  $V$ , el cual contiene un número grande de microfracturas en el plano  $xy$ , éstas son de forma circular o elipsoidal, delgadas, planas y pueden estar saturadas por un gas, un líquido o un sólido débil; cuando las fracturas son circulares el radio de la fractura se denota con la letra,  $a$  pero si las fracturas son de forma elipsoidal, la relación de radios es definida como  $\theta = a/c$ , donde  $\theta$  es la relación de aspecto de la fractura, el semieje menor de la elipse es  $a$  y el semieje mayor de la elipse es  $c$ ; de aquí tenemos que si  $\theta$  es pequeño, la fractura es plana, por lo tanto la apertura de la fractura es pequeña; si  $\theta$  crece, la apertura de la fractura crece también. El EVR puede contener uno o múltiples conjuntos de fracturas alineadas o no a los ejes de coordenadas cartesianos.

Cuando el EVR contiene sólo un conjunto de fracturas, los centros de las fracturas están aleatoriamente distribuidos y la orientación de las fracturas también es aleatoria, además la simetría de  $C_f$  es isotrópica (Hudson, 1980), esto significa que sólo 2 diferentes elementos del tensor (constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ ) son necesarios para escribir a  $C_{iso}$  como se muestra en la ecuación 2:

$$C_{iso} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde  $C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$ ,  $C_{12} = \lambda$  y  $C_{44} = \mu$ .

Se consideran ahora conjuntos de fracturas en el EVR ortogonales entre sí, en un marco de referencia convencional  $(x, y, z)$ , de esta manera el EVR puede contener un máximo de 3 conjuntos de fracturas: 1) un conjunto de fracturas verticales alineadas (paralelas) al plano  $yz$ , formando un tipo de simetría llamado Isotropía Transversa Horizontal (*HTI* por sus siglas en inglés) dado que se considera al eje  $x$  como eje de simetría y éste es horizontal, en este trabajo de tesis se nombra a este conjunto de fracturas  $HTI_x$ . 2) un conjunto de fracturas verticales

paralelas al plano  $xz$ , formando simetría  $HTI$  también, pero ahora el eje de simetría es el eje  $y$ , dicho conjunto se denota por  $HTI_y$ . Finalmente, 3) un conjunto de fracturas horizontales paralelas al plano  $xy$ , formando un tipo de simetría llamado Isotropía Transversa Vertical ( $VTI$  por sus siglas en inglés) dado que se considera al eje  $z$  como eje de simetría y éste es vertical.

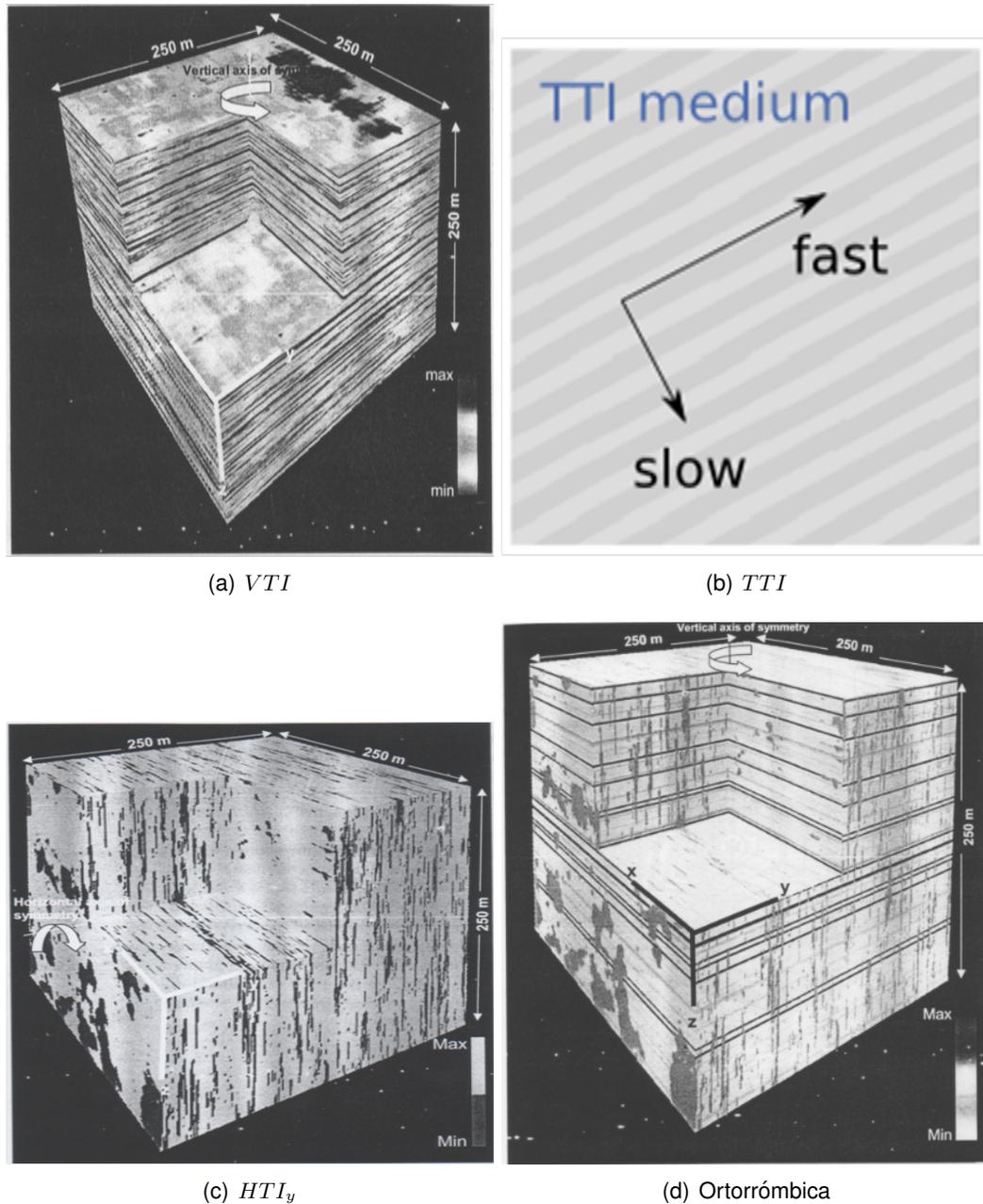
Ahora bien, se considera primero el caso del EVR con un sólo conjunto de fracturas del tipo  $VTI$  con centros aleatoriamente distribuidos y donde la dirección positiva de  $z$  se incrementa con la profundidad como lo muestra la figura 1(a), entonces se tiene que 5 diferentes elementos del tensor serán necesarios para escribir al tensor  $C_{VTI}$ , los cuales se pueden determinar a partir de la ecuación 23, en este caso debido a que las fracturas se asumen planas, con superficies no rugosas y paralelas entre sí, cualquier rotación sobre el eje  $z$  mantendrá invariante la simetría del tensor  $C_{VTI}$  (Schoenberg 1980; Schoenberg y Douma 1988; Kachanov 1980, 1992; Grechka y Kachanov 2006a y Ikelle y Amundsen 2005), es decir

$$\mathbf{C}_{VTI} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde  $C_{12} = C_{11} - 2C_{66}$ .

De la misma manera se considera ahora el caso del EVR con un sólo conjunto de fracturas del tipo  $HTI_x$  con centros aleatoriamente distribuidos. Cabe destacar que el modelo es idéntico al  $VTI$  pero rotado  $90^\circ$  con respecto al eje  $y$ , por lo tanto, ahora este modelo es invariante ante cualquier rotación sobre el eje  $x$ . El tensor  $C_{HTI_x}$  para esta simetría es el mismo que el de la simetría  $VTI$  pero con algunos renglones y columnas intercambiadas apropiadamente (Hudson, 1980), como se muestra en la siguiente ecuación

$$\mathbf{C}_{HTI_x} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{33} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (4)$$



**Figura 1:** Diferentes tipos de simetría anisotrópica en función de la orientación de las fracturas y del número de conjuntos de fracturas. Figuras 1(a), 1(c) y 1(d) tomadas de Ikelle y Amundsen (2005); figura 1(b) tomada de <http://www.agilegeoscience.com>.

donde  $C_{23} = C_{33} - 2C_{44}$ , las definiciones de los 5 elementos independientes del tensor se encuentran en la ecuación 23.

Ahora, si la rotación del modelo *VTI* sobre el eje *y* toma un valor entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , el modelo define una simetría del tipo Isotropía Transversa Inclinada (*TTI* por sus siglas en inglés). Un esquema 2D de dicha rotación se muestra en la figura 1(b). Esta vez el tensor  $C_{TTI}$ , requiere de

13 diferentes elementos, como se muestra en la siguiente ecuación

$$\mathbf{C}_{TTI} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & C'_{15} & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & C'_{25} & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & C'_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & C'_{46} \\ C'_{15} & C'_{25} & C'_{35} & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{46} & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Sin embargo, estos 13 elementos se determinan a partir de los 5 elementos independientes de  $\mathbf{C}_{VTI}$  o  $\mathbf{C}_{HTI_x}$  por medio de transformaciones de los ejes de coordenadas proporcionadas por Ikelle y Amundsen (2005), como se muestra a continuación

$$C'_{11} = C_{11} \cos^4 \varrho + 2C_{13} \cos^2 \varrho \sin^2 \varrho + C_{33} \sin^4 \varrho + 4C_{44} \sin^2 \varrho \cos^2 \varrho, \quad (6)$$

$$C'_{12} = C_{12} \cos^2 \varrho + C_{23} \sin^2 \varrho, \quad (7)$$

$$C'_{13} = (C_{11} + C_{33} - 4C_{44}) \sin^2 \varrho \cos^2 \varrho + C_{13}(\cos^4 \varrho + \sin^4 \varrho), \quad (8)$$

$$C'_{15} = (C_{13} - C_{33} + 2C_{44}) \cos^3 \varrho \sin \varrho + (C_{33} - C_{13} - 2C_{44}) \cos \varrho \sin^3 \varrho, \quad (9)$$

$$C'_{22} = C_{22}, \quad (10)$$

$$C'_{23} = C_{12} \sin^2 \varrho + C_{23} \cos^2 \varrho, \quad (11)$$

$$C'_{25} = (C_{23} - C_{12}) \sin \varrho \cos \varrho, \quad (12)$$

$$C'_{33} = C_{11} \sin^4 \varrho + C_{33} \cos^4 \varrho + 2(C_{13} + 2C_{44}) \cos^2 \varrho \sin^2 \varrho, \quad (13)$$

$$C'_{35} = (C_{13} + 2C_{44} - C_{11}) \cos \varrho \sin^3 \varrho + (C_{33} - C_{13} - 2C_{44}) \cos^3 \varrho \sin \varrho, \quad (14)$$

$$C'_{44} = C_{44} \cos^2 \varrho + C_{66} \sin^2 \varrho, \quad (15)$$

$$C'_{46} = (C_{44} - C_{66}) \cos \varrho \sin \varrho, \quad (16)$$

$$C'_{55} = (C_{11} + C_{33} - 2C_{13} - 2C_{44}) \cos^2 \varrho \sin^2 \varrho + C_{55}(\cos^4 \varrho + \sin^4 \varrho), \quad (17)$$

$$C'_{66} = C_{66} \cos^2 \varrho + C_{44} \sin^2 \varrho. \quad (18)$$

Cabe mencionar que una pequeña corrección tipográfica fue hecha en el segundo término de la ecuación 17 dado que originalmente el elemento del tensor correspondía a  $C_{44}$ .

Cuando las ecuaciones 6 a 18 se desarrollan con base en el tensor  $\mathbf{C}_{HTI_x}$  significa que si  $\varrho = 0^\circ$ , se obtiene el mismo tensor  $\mathbf{C}_{HTI_x}$ , mientras que cuando  $\varrho = 90^\circ$ , el resultado de la transformación es  $\mathbf{C}_{VTI}$  y viceversa.

Por otra parte, se considera ahora el caso del EVR con un sólo conjunto de fracturas verticales paralelas con normales en la dirección de  $y$  con centros aleatoriamente distribuidos, este modelo puede ser conseguido de igual modo por rotación a  $90^\circ$  ya sea de un modelo  $C_{HTI_x}$  sobre el eje  $z$  o por un modelo  $C_{VTI}$  con rotación sobre el eje  $x$ , donde al final cualquier rotación sobre el eje  $y$  resulte invariante para el tensor  $C_{HTI_y}$  (ver figura 1(c)). Al igual que el tensor  $C_{HTI_x}$  el tensor  $C_{HTI_y}$  requiere de 5 diferentes elementos para su descripción y se puede obtener intercambiando algunos renglones y columnas apropiadamente, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{C}_{HTI_y} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{33} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

donde  $C_{13} = C_{11} - 2C_{55}$ .

Los modelos  $HTI_x$ ,  $HTI_y$  y  $VTI$  pueden ser causados por microheterogeneidades horizontales/verticales, respectivamente, o simplemente por una delgada estratificación horizontal/vertical (Ikelle y Amundsen, 2005).

Finalmente, la simetría anisotrópica ortorrómbica es cuando el EVR contiene dos conjuntos de fracturas alineadas mutuamente ortogonales, de igual manera si las fracturas se asumen planas circulares y la superficie no es rugosa, se requieren 9 diferentes elementos del tensor  $\mathbf{C}_{Orto}$  para describirlo, como se muestra en la ecuación:

$$\mathbf{C}_{Orto} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Cabe mencionar que la simetría anisotrópica ortorrómbica se puede conseguir por diferentes modelos del EVR, para más detalles revisar Ikelle y Amundsen (2005); Schoenberg y Douma

(1988); Bakulin *et al.* (2000b); Mavko *et al.* (2009); Grechka y Kachanov (2006c) y Hudson (1980). Uno de los posibles modelos que resulta en anisotropía ortorrómbica se muestra en la figura 1(d).

Existen 2 simetrías de anisotropía aparte de las mencionadas anteriormente, éstas son: monoclinica y triclinica. Sin embargo, no son descritas en el presente trabajo de tesis ya que ninguno de los experimentos realizados tienen estos tipos de anisotropía. Para más detalles revisar Ikelle y Amundsen (2005); Mavko *et al.* (2009); Bakulin *et al.* (2000c); Schoenberg y Douma (1988).

## 2.2 Teoría de Hudson

Previo al trabajo de Hudson (1980), una serie de trabajos con base en el método de autoconsistencia fueron realizados para determinar las propiedades elásticas equivalentes de los sólidos fracturados relacionados en el problema estático (Budiansky y O'connell, 1976; Hoenig, 1979), sin embargo dicho método no proporciona resultados satisfactorios cuando se considera el efecto de atenuación. Por tal motivo, Hudson (1980) realiza un análisis de la propagación de las ondas en un material elástico que contiene cavidades o inclusiones usando la ecuación integral-diferencial de movimiento de Keller *et al.* (1964), con lo cual se considera el problema dinámico de una onda plana que se propaga a través del medio con frecuencia cero, dicho de otro modo, esta formulación es equivalente al problema estático con la ventaja de que se considera el efecto de la atenuación sísmica satisfactoriamente (Hudson, 1981).

Una característica de la teoría de Hudson (1980) es que la formulación de sus ecuaciones desde el planteamiento del modelo están directamente relacionadas con la microestructura de las fracturas, por ende el tensor de rigidez,  $C_f$ , está en función de las propiedades físicas y microestructurales de las fracturas. Otra característica importante de la teoría de Hudson (1980) es que utiliza la expansión en serie de potencias en función de la densidad de fractura ( $e$ ), trunca al término de segundo orden, por lo cual se contempla el efecto de las interacciones entre las fracturas con aceptable grado de precisión, en contraposición a la mayoría de las TME que no consideran la interacción entre las fracturas (aproximación de no interacción). Sin embargo, cuando las formulaciones de Hudson (1980) se utilizan considerando sólo el término de primer orden de la serie de potencias, el efecto de interacción entre fracturas es pequeño, por lo tanto poco significativo para el fenómeno, y cae en la clasificación de teorías con aproximación de no interacción entre las fracturas.

El EVR descrito en la sección 2.1 es representativo del modelo utilizado por Hudson (1980)

para el desarrollo de la formulación principal con fracturas ortogonales al eje  $x$  (simetría  $HTI_x$ ), dicha formulación está dada por (tomada de Tsvankin y Grechka 2011):

$$\mathbf{C}_{Hudson} = \mathbf{C}_b + \mathbf{C}_f e + \mathbf{C}_f^2 e^2, \quad (21)$$

donde  $\mathbf{C}_b$  es el tensor de rigidez de la matriz isotrópica;  $e$  es la densidad de fracturas y está definida de la siguiente manera:

$$e = \frac{1}{V} \sum_n a^3 = \frac{na^3}{V}, \quad (22)$$

donde  $V$  es el volumen del EVR,  $n$  es el número de fracturas y  $a$  es el radio de la fractura. En la ecuación 22 se asume que todas las fracturas tienen las mismas características;  $\mathbf{C}_f$  es el término de primer orden del tensor de rigidez asociado a las fracturas, y está determinado por (ecuación 9.21 en Tsvankin y Grechka 2011):

$$\mathbf{C}_f = -\frac{1}{\mu_b} \begin{bmatrix} (\lambda_b + 2\mu_b)^2 u_{33} & \lambda_b (\lambda_b + 2\mu_b) u_{33} & \lambda_b (\lambda_b + 2\mu_b) u_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b (\lambda_b + 2\mu_b) u_{33} & \lambda_b^2 u_{33} & \lambda_b^2 u_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b (\lambda_b + 2\mu_b) u_{33} & \lambda_b^2 u_{33} & \lambda_b^2 u_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b^2 u_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b^2 u_{11} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

con  $\lambda_b$  y  $\mu_b$  representando a las constantes de Lamé de la matriz de la roca. Los factores  $u_{11}$  y  $u_{33}$  contienen toda la información de las características físicas y microestructurales del medio fracturado y se calculan por las siguientes relaciones:

$$u_{11} = \frac{16}{3(3 - 2g_b)(1 + M)}, \quad u_{33} = \frac{4}{3(1 - g_b)(1 + K)}, \quad (24)$$

$$M = \frac{4\mu_i}{\pi\theta(3 - 2g_b)\mu_b}, \quad K = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\pi\theta(1 - g_b)\mu_b}, \quad (25)$$

$$g_b = \frac{V_{S,b}^2}{V_{P,b}^2} = \frac{\mu_b}{\lambda_b + 2\mu_b}, \quad (26)$$

donde  $M$ ,  $K$  y  $g_b$  son parámetros adimensionales,  $\theta$  es la relación de aspecto,  $\lambda_i$  y  $\mu_i$  son los parámetros de Lamé del fluido o material de baja rigidez (débil) contenido en las fracturas,  $V_{P,b}$  y  $V_{S,b}$  son las velocidades de la onda P y S respectivamente de la matriz de la roca; finalmente  $\mathbf{C}_f^2$  es el término de segundo orden de la serie de expansión de potencias, el cual está determinado

por la siguiente ecuación (ecuación 9.27 en Tsvankin y Grechka 2011)

$$\mathbf{C}_f^2 = C_{ijkl}^2 = \frac{1}{\mu_b} C_{ijmnpq} \chi_{mnpq} C_{qrkl}, \quad (27)$$

para  $C_{ijmnpq}$  representando a un tensor de cuarto orden equivalente al tensor  $\mathbf{C}_f$  del segundo término de la ecuación 21 y  $\chi$  está dada por la siguiente ecuación tensorial:

$$\chi_{ijkl} = \frac{1}{15} [\delta_{ik} \delta_{jl} (4 + g_b) - (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl}) (1 - g_b)], \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Cuando el EVR contiene más de un conjunto de fracturas con diferentes orientaciones Hudson (1981) propone calcular el efecto de cada conjunto por separado, alineando el eje de simetría de cada conjunto de fracturas al eje  $z$  y rotando apropiadamente a la orientación correspondiente de cada conjunto de fracturas. Dadas las características de la teoría es posible modelar cada conjunto de fracturas con características diferentes del fluido o material débil contenido en las fracturas (factores  $u_{11}$  y  $u_{33}$ ) o relación de aspecto  $\theta$ , si fuese necesario. Para conseguir el efecto total de las fracturas se suman los diferentes conjuntos de fracturas, como lo indica la siguiente ecuación:

$$\mathbf{C}_f = \sum_l \mathbf{C}_{fl}, \quad \mathbf{S}_f = \sum_l \mathbf{S}_{fl}, \quad (29)$$

donde  $l$  es el número de conjuntos de fracturas embebidos en la matriz de la roca.

Ejemplos del  $\mathbf{C}_f$  de modelos conformados por dos o más conjuntos de fracturas son presentados por Hudson (1981) y Mavko *et al.* (2009). En el caso de Hudson (1981) se consideran dos conjuntos de fracturas con simetría  $VTI$  y  $HTI_y$  respectivamente. Aplicando la ecuación 29 y dividiendo entre dos, el tensor de rigidez de las fracturas que caracteriza este modelo es definido por

$$\mathbf{C}_{fHud}^{(2conj)} = -\frac{1}{\mu_b} \begin{bmatrix} \lambda_b^2 u_{33} & \lambda_b (\lambda_b + \mu_b) u_{33} & \lambda_b (\lambda_b + \mu_b) u_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b (\lambda_b + \mu_b) u_{33} & (\lambda_b^2 + 2\lambda_b \mu_b + 2\mu_b^2) u_{33} & \lambda_b (\lambda_b + 2\mu_b) u_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b (\lambda_b + \mu_b) u_{33} & \lambda_b (\lambda_b + 2\mu_b) u_{33} & (\lambda_b^2 + 2\lambda_b \mu_b + 2\mu_b^2) u_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_b^2 u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b^2 u_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b^2 u_{11} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

De esta manera el tensor  $C_{Hudson}^{2conj}$  con base en la ecuación 21 (hasta el término de primer orden) es de simetría ortorrómbica y los elementos de la matriz están dados en las ecuaciones 24 a la 26. Cuando la densidad de las fracturas en ambos conjuntos es igual solamente 5 elementos del tensor son diferentes, mientras que si la densidad de las fracturas para cada conjunto de fracturas es diferente los 9 elementos del tensor  $C_{Hudson}^{2conj}$  son diferentes .

En el otro caso, Mavko *et al.* (2009) presenta la extensión del modelo de Hudson (1981) para 3 conjuntos de fracturas planas ortogonales entre sí ( $C_{VTI}$ ,  $C_{HTI_x}$  y  $C_{HTI_y}$ ; ecuaciones 3, 4 y 19, respectivamente) embebidos en un material isotrópico, cada conjunto de fracturas puede tener diferente densidad de fractura  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ . Si se parte de la idea de que el eje de rotación de cada conjunto de fracturas se alinea con cada uno de los ejes coordenados, por tanto la suma de los tensores se puede realizar elemento a elemento. Los componentes del tensor asociado a este modelo se determinan por las siguientes relaciones:

$$C_{ij}^{3conj} = C_{ijHTI_x} e_1 + C_{ijHTI_y} e_2 + C_{ijVTI} e_3, \quad (31)$$

para  $ij = 11, 22, 33, 44, 55, 66, 12, 13$  y  $23$ . Cabe hacer notar que en la ecuación 31 no se retoma la idea original de Hudson (1981) de dividir la suma de los elementos de los tensores entre el número de conjuntos de fracturas.

Como se mencionó anteriormente, en un conjunto de fracturas cada conjunto de fracturas (ya sea con una o más) se puede modelar con diferente contenido de las fracturas para cada conjunto. Para conseguir esto es necesario adecuar los factores  $u_{11}$  y  $u_{33}$  (ecuación 24) con valores apropiados de acuerdo a lo siguiente:

a) Fracturas saturadas con un gas (fracturas secas).

En este caso se tiene que tanto  $\lambda_i$  como  $\mu_i$  son iguales a cero (Bakulin *et al.*, 2000a), entonces a partir de las ecuaciones 24 y 25 tenemos:

$$u_{11}(0) = \frac{16}{3(3 - 2g_b)}, \quad u_{33}(0) = \frac{4}{3(1 - g_b)}, \quad (32)$$

b) Fracturas saturadas con un líquido.

En este caso  $\mu_i = 0$  pero  $\lambda_i$  en el caso de agua o aceite es comparable con  $\mu_b$ , sin embargo el parámetro realmente predominante es la relación de aspecto  $\theta$  de las fracturas, pues cuando

las fracturas se asumen delgadas ( $\theta \ll 1$ ) tenemos:

$$u_{11}(0) = \frac{16}{3(3 - 2g_b)}, \quad u_{33}(0) = 0. \quad (33)$$

## 2.3 Teoría de Schoenberg

La teoría de Schoenberg ha sufrido una serie de modificaciones y generalizaciones desde que Schoenberg (1980) propuso un modelo para analizar el comportamiento de la propagación de ondas a través de las interfaces discontinuas (imperfectas), el modelo consiste en una superficie imperfecta que separa dos medios elásticos donde los desplazamientos a través de esta superficie son considerados discontinuos, mientras que el esfuerzo de tracción es continuo a través de la interface; la relación que guardan los desplazamientos respecto a los esfuerzos es lineal (LSM) y se representa por

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{Z}\boldsymbol{\tau}_\gamma, \quad (34)$$

donde  $\gamma$  denota la discontinuidad de la fractura,  $[\mathbf{u}]$  representa la magnitud del desplazamiento en la fractura,  $\mathbf{Z}$  es la matriz de conformidad de la fractura simétrica definida positiva, y  $\boldsymbol{\tau}_\gamma$  es el vector de tracción en la superficie de la fractura.

Con base en LSM, Schoenberg (1983) propone una TME donde se considera un medio elástico periódicamente estratificado, cada estrato se separa por una superficie imperfecta con condiciones de frontera del tipo LSM; una característica más de este modelo es que se analiza el medio equivalente sin incluir explícitamente en las ecuaciones la forma y microestructura de las fracturas. Dadas las características de este modelo se pueden derivar los parámetros del medio efectivo por medio del procedimiento de promediado de Backus (1962) para capas delgadas embebidas en una matriz isotrópica, dando como resultado la matriz de conformidad equivalente  $\mathbf{S}_e$  (inverso de la matriz de rigidez equivalente  $\mathbf{C}_e$ ):

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_f, \quad (35)$$

donde  $\mathbf{S}_b$  es la matriz de conformidad del medio isotrópico y  $\mathbf{S}_f$  es la matriz de conformidad de las fracturas.

Cabe mencionar que el procedimiento de promediado de Backus (1962) se desarrolla bajo el supuesto de que la matriz de la roca es isotrópica y contiene baja densidad de fracturas, es decir la interacción entre fracturas es desestimable para el fenómeno. Cuando la matriz de la roca

no es isotrópica y la densidad de las fracturas es considerable, Grechka (2007) advierte que las ecuaciones 1 y 35 ya no dependen linealmente de la anisotropía y se debe llevar a cabo una corrección.

Schoenberg y Douma (1988) generalizan el modelo de fracturas estratificadas de longitud infinita permitiendo asimetría en la forma de las fracturas, rugosidad en la superficie de las fracturas, además que las fracturas pueden estar contenidas en un medio elástico isotrópico o anisotrópico. Cuando las fracturas se alinean al eje  $z$  ortogonales al eje  $x$ , se consideran superficies no rugosas, fracturas planas y rotación invariante sobre el eje  $x$ , el tensor de conformidad de las fracturas  $S_f$  es determinado por:

$$\mathbf{S}_f^{Sch} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_T \end{bmatrix}, \quad (36)$$

mientras que la ecuación tensorial de conformidad de las fracturas para el mismo modelo es:

$$S_{ijkl}^{Sch} = \frac{Z_T}{4}(\delta_{ik}n_l n_j + \delta_{jk}n_l n_i + \delta_{il}n_k n_j + \delta_{jl}n_k n_i) + (Z_N - Z_T)n_i n_j n_k n_l, \quad (37)$$

donde  $S_f^{Sch}$  es el tensor de conformidad de las fracturas de Schoenberg,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $n_i$  es el vector normal unitario (paralelo al eje de simetría de las fracturas),  $Z_N$  y  $Z_T$  son positivos y su significado físico es el componente normal y tangencial, respectivamente, de la conformidad de la fractura. Para este caso  $S_f = \mathbf{Z}$  donde sólo dos diferentes parámetros se requieren para describir la simetría  $HTI_x$ , esto es porque la forma y microestructura de las fracturas se encuentran implícitas en los elementos de  $\mathbf{Z}$ . Con base en esta limitación de la teoría, Schoenberg y Sayers (1995) tomaron los resultados de Hudson (1981) e invirtieron el tensor de rigidez transformando el modelo a uno donde se considera la forma, longitud, apertura y contenido de las fracturas (Bakulin *et al.*, 2000a), el tensor resultante se define a continuación:

$$\mathbf{C}_{Sch} = \mathbf{S}_{Sch}^{-1} = \mathbf{C}_b - \begin{bmatrix} (\lambda_b + 2\mu_b)\Delta_N & \lambda_b\Delta_N & \lambda_b\Delta_N & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b\Delta_N & \frac{\lambda_b^2}{\lambda_b + 2\mu_b}\Delta_N & \frac{\lambda_b^2}{\lambda_b + 2\mu_b}\Delta_N & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b\Delta_N & \frac{\lambda_b^2}{\lambda_b + 2\mu_b}\Delta_N & \frac{\lambda_b^2}{\lambda_b + 2\mu_b}\Delta_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b\Delta_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_b\Delta_T \end{bmatrix}, \quad (38)$$

donde

$$\Delta_N = \frac{(\lambda_b + 2\mu_b)Z_N}{1 + (\lambda_b + 2\mu_b)Z_N}; \quad \Delta_T = \frac{\mu_b Z_T}{1 + \mu_b Z_T}, \quad (39)$$

se conocen como parámetros de debilidad normal y tangencial, respectivamente. La interpretación física de estos dos parámetros es que relacionan la conformidad sobre el plano de las fracturas (tangencial) o el plano perpendicular (normal) respecto a la conformidad total en los mismos planos y varían de 0 a 1, es decir si  $\Delta_N$  y  $\Delta_T$  son iguales a cero el medio no contiene fracturas, mientras que si son iguales a uno el medio presenta el más alto grado de fracturamiento (Schoenberg y Sayers, 1995; Bakulin *et al.*, 2000a).

Schoenberg y Sayers (1995) generalizaron las ecuaciones anteriores para un modelo con matriz isotrópica que contiene  $n$  conjuntos de fracturas invariantes ante rotación sobre un eje de simetría determinado, adicionalmente las fracturas deben cumplir la condición de que  $Z_N^{(n)} = Z_T^{(n)} \equiv Z^{(n)}$ , a este tipo de fracturas se les conoce como **fracturas escalares**. Cuando los conjuntos de fracturas tienen diferentes orientaciones éstos deben ser rotados apropiadamente respecto al marco de referencia general. Por otra parte, la más baja simetría que puede alcanzar este modelo es la ortorrómbica. La ecuación tensorial que describe éste modelo es la siguiente:

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^{Sch} &= S_{ijkl_b} + \sum_n S_{ijkl_f}^{(n)} \\ &= S_{ijkl_b} + \frac{1}{4} \sum_n (Z^n \delta_{ik} n_l^{(n)} n_j^{(n)} + Z^n \delta_{jk} n_l^{(n)} n_i^{(n)} + Z^n \delta_{il} n_k^{(n)} n_j^{(n)} + Z^n \delta_{jl} n_k^{(n)} n_i^{(n)}) \\ &= S_{ijkl_b} + \frac{1}{4} (\delta_{ik} \alpha_{lj} + \delta_{jk} \alpha_{li} + \delta_{il} \alpha_{kj} + \delta_{jl} \alpha_{ki}), \end{aligned} \quad (40)$$

donde

$$\alpha_{ij} = \sum_n Z^{(n)} n_i^{(n)} n_j^{(n)}, \quad (41)$$

es un tensor de segundo orden definido positivo que contiene los valores de  $Z^{(n)}$  de cada conjunto

de fracturas ( $Z^{(n)} > 0$ ).

## 2.4 Teoría de Kachanov

La teoría de Kachanov (1980) parte del mismo fundamento teórico que la teoría de Schoenberg (1980), por tanto comparten formulaciones similares. La principal diferencia entre ambas teorías radica en que Schoenberg (1980, 1983) propone analizar el medio fracturado sin considerar la forma y la microestructura de las fracturas, mientras que por el otro lado Kachanov (1980) sí considera la forma y microestructura de las fracturas en el desarrollo de la teoría. A continuación se presenta la ecuación equivalente a la ecuación 37 para el caso de la teoría de Kachanov (1980):

$$S_{ijkl_f}^{Kch} = \frac{1}{V} \left[ \frac{Z_T}{4} (\delta_{ik} n_l n_j + \delta_{jk} n_l n_i + \delta_{il} n_k n_j + \delta_{jl} n_k n_i) + (Z_N - Z_T) n_i n_j n_k n_l \right], \quad (42)$$

donde  $V$  es el volumen del EVR, el cual contiene un conjunto de fracturas rotacionalmente invariante.

De la ecuación 42 se definen los tensores  $\alpha$  y  $\beta$  de la siguiente manera:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{V} Z_T n_i n_j, \quad \beta_{ijkl} = \frac{1}{V} (Z_N - Z_T) n_i n_j n_k n_l, \quad (43)$$

donde  $\alpha$  es un tensor de segundo orden, mientras que  $\beta$  es de cuarto orden.

Ahora bien, sustituyendo la ecuación 43 en 42 obtenemos:

$$S_{ijkl_f}^{Kch} = \frac{1}{4} (\delta_{ik} \alpha_{lj} + \delta_{jk} \alpha_{li} + \delta_{il} \alpha_{kj} + \delta_{jl} \alpha_{ki}) + \beta_{ijkl}. \quad (44)$$

Cuando las fracturas se asumen escalares ( $Z_N = Z_T \equiv Z$ ), el tensor  $\beta$  es el tensor cero y obtenemos el segundo término de la ecuación 40. La ecuación 44 es un importante resultado porque permite determinar propiedades relevantes de  $\alpha$ . Por ejemplo, bajo la condición de fracturas escalares  $\alpha$  es diagonal con componentes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , siendo ésta la condición de simetría ortorrómbica, de tal modo que si se elige un sistema de referencia ortogonal, éste coincide con las direcciones principales de los eigenvectores de  $\alpha$  (Kachanov, 1980, 1992; Schoenberg y Sayers, 1995; Tsvankin y Grechka, 2011).

Por otro lado, cuando se consideran fracturas secas, esto es  $Z_N \neq Z_T$ , el tensor  $\beta$  cobra relevancia en la ecuación 44. Además, se requiere que se consideren las características microes-

estructurales y la forma de las fracturas. De esta manera, se asumen fracturas alineadas de forma circular y planas, contenidas en un EVR de volumen  $V$ . Con base en estas características de las fracturas, Kachanov (1992) aproximó los eigenvalores de la matriz de conformidad de la fractura dependiente de la relación de Poisson de la matriz isotrópica de la roca  $\nu_b$  (Tsvankin y Grechka, 2011), consiguiendo las relaciones:

$$Z_N = \frac{16a(1 - \nu_b^2)}{3\pi E_b}, \quad Z_T = \frac{Z_N}{1 - \nu_b/2}, \quad (45)$$

donde  $E_b$  es el módulo de Young.

Usando los eigenvalores del tensor  $\mathbf{Z}$  la ecuación tensorial para  $\mathbf{S}_{fs}^{Kch}$  con fracturas secas es la siguiente:

$$S_{ijkl_{fs}}^{Kch} = \frac{8(1 - \nu_b^2)}{3E_b(2 - \nu_b)} (\alpha_{il}\delta_{jm} + \alpha_{im}\delta_{jl} + \alpha_{jl}\delta_{im} + \alpha_{jm}\delta_{il} + 4\beta_{ijlm}), \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3), \quad (46)$$

donde el tensor  $\beta$  se puede aproximar como

$$\beta_{ijlm} \approx -\nu_b(\alpha_{il}\delta_{jm} + \alpha_{im}\delta_{jl} + \alpha_{jl}\delta_{im} + \alpha_{jm}\delta_{il})/8, \quad (47)$$

Dado que de la ecuación 47 se observa que el tensor  $\beta$  es pequeño comparado con el tensor  $\alpha$  para fracturas secas su contribución es poco significativa por lo que se puede eliminar, así la simetría ortorrómbica equivalente del tensor  $\mathbf{S}_{fs}^{Kch}$  es del tipo  $HTI_x$  (Tsvankin y Grechka, 2011). Bajo estas condiciones se definen los tensores  $\alpha$  y  $\beta$  para fracturas secas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{V} \sum_k a^3 n_i n_j, \quad (i, j = 1, 2, 3); \\ \beta_{ijlm} &= -\frac{\nu_b}{2} \frac{1}{V} \sum_k a^3 n_i n_j n_l n_m, \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (48)$$

donde la sumatoria en  $k$  se refiere a la contribución de cada una de las fracturas del conjunto.

Ya que los tensores  $\alpha$  y  $\beta$  contienen toda la información acerca de la distribución, la orientación y el tamaño de las fracturas, estos están directamente relacionados con la densidad de fracturas. De aquí que  $\alpha$  se conozca como el tensor de densidad de fractura. Cuando los ejes de coordenadas coinciden con los eigenvectores del tensor  $\alpha$ , se obtienen las densidades de fractura

escalares como:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{V} \sum_k a^3 = \frac{k}{V} a^3 = e, \quad (49)$$

donde  $k$  es el número de fracturas del conjunto.

Por otro lado, Shafiro y Kachanov (1997) mostraron que cuando los conjuntos de las fracturas tienen diferente relación de aspecto  $\theta^{(k)}$  y el fluido contenido en las fracturas es diferente a un gas, la ecuación 46 toma la siguiente forma:

$$S_{ijkl_{ff}}^{Kch} = \frac{8(1-\nu_b^2)}{3E_b(2-\nu_b)} (\alpha_{il}\delta_{jm} + \alpha_{im}\delta_{jl} + \alpha_{jl}\delta_{im} + \alpha_{jm}\delta_{il} + 4\beta'_{ijlm}), \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3); \quad (50)$$

donde

$$\beta'_{ijlm} = \beta_{ijlm} - \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\nu_b}{2}\right) \sum_k (\varsigma a^3 n_i n_j n_l n_m)^{(k)}, \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3), \quad (51)$$

donde  $i, j, l, m = 1, 2, 3$ ,  $\varsigma$  es llamado **factor del fluido** y es determinado por la siguiente relación:

$$\varsigma^{(k)} = \frac{1}{1 + \theta^{(k)} [E_b/K_f - 3(1 - \nu_b)]}, \quad (52)$$

donde  $K_f$  es el módulo volumétrico del fluido y  $(k)$  la fractura  $k$  ésima del conjunto. La ecuación 52 permite asignar diferente fluido para cada fractura, sin embargo se asumen las mismas propiedades para cada conjunto de fracturas.

Ahora bien, cuando las fracturas pierden la condición de ser planas y tienden a la forma de poros, es decir la relación de aspecto  $\theta$  ya no es pequeña, Kachanov *et al.* (2003) mostraron que el tensor de conformidad de las fracturas  $\mathbf{S}_{fporo}^{Kch}$  es determinado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{S}_{fporo}^{Kch} = \phi [(\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_b)^{-1} + \mathbf{S}_b^{-1} : (\mathcal{J} - \mathcal{S})]^{-1}, \quad (53)$$

donde  $\phi$  es la porosidad (fracción del volumen total ocupado por las fracturas o poros),  $\mathbf{S}_i$  es el tensor de conformidad de fluido contenido en las fracturas,  $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_{ijlm} = (\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl})/2$  es el tensor identidad de cuarto orden,  $\mathcal{S}$  es el tensor de Eshelby (1957) y  $\mathbf{S}_b^{-1} : (\mathcal{J} - \mathcal{S}) \equiv \mathbf{S}_{b,jkrq}^{-1} (\mathcal{J}_{rqlm} - \mathcal{S}_{rqlm})$ , en esta expresión los dos puntos denotan la contracción sobre dos índices por medio de un doble producto punto.

## 2.5 Teoría de Bakulin

Bakulin *et al.* (2000b) consideró necesario desarrollar procedimientos que permitan determinar los parámetros elásticos efectivos de modelos teóricos que representen mejor las características reales de los yacimientos. Con el objetivo de caracterizar yacimientos naturalmente fracturados a partir de los datos sísmicos adquiridos en la superficie Bakulin *et al.* (2000b) propuso analizar dos diferentes modelos con simetría ortorrómbica. El primero consta de una matriz anisotrópica con simetría  $VTI$  que contiene un conjunto de fracturas verticales; el segundo se trata de una matriz isotrópica que contiene dos conjuntos de fracturas verticales ortogonales entre sí ( $HTI_x$  y  $HTI_y$ ). En este trabajo de tesis sólo se trata el segundo modelo por su similitud con las características de los modelos utilizados aquí.

Con base en la NIA, es decir ante el supuesto de baja densidad de fractura y anisotropía débil, conjuntos de fracturas rotacionalmente invariantes y LSM, Bakulin *et al.* (2000b) suma el tensor de conformidad de las fracturas de un conjunto de fracturas con simetría  $HTI_x$  (ecuación 36) con otro de simetría  $HTI_y$ , el cual se obtiene aplicando la rotación de Bone (Winterstein, 1990), la forma del tensor de conformidad de las fracturas con simetría  $HTI_y$  es la siguiente:

$$\mathbf{S}_f^{Sch} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_T \end{bmatrix}, \quad (54)$$

donde  $S_f^{Sch}$  se refiere al tensor de conformidad de las fracturas de Schoenberg y la suma de los tensores se realiza por medio de la relación:

$$\mathbf{S}_f = \sum_l \mathbf{S}_{fl}, \quad (55)$$

después se suma también el tensor de la matriz isotrópica con base en la ecuación 35 y finalmente se calcula el inverso del tensor resultante. Por tanto, los resultados son presentados en términos

del tensor de rigidez  $\mathbf{C}_{Orto}^{Bak}$ , determinado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{C}_{Orto}^{Bak} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

donde  $\mathbf{0}$  es la matriz cero de  $3 \times 3$  y las matrices  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda_b + 2\mu_b)l_1m_3d^{-1} & \lambda_b l_1m_1d^{-1} & \lambda_b l_1m_2d^{-1} \\ \lambda_b l_1m_1d^{-1} & (\lambda_b + 2\mu_b)l_3m_1d^{-1} & \lambda_b l_2m_1d^{-1} \\ \lambda_b l_1m_2d^{-1} & \lambda_b l_2m_1d^{-1} & (\lambda_b + 2\mu_b)(l_3m_3 - l_4)d^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_b(1 - \Delta_{T2}) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_b(1 - \Delta_{T1}) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_b \frac{(1 - \Delta_{T1})(1 - \Delta_{T2})}{(1 - \Delta_{T1}\Delta_{T2})} \end{bmatrix}, \quad (58)$$

donde

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 - \Delta_{N1}, & l_2 &= 1 - r\Delta_{N1}, & l_3 &= 1 - r^2\Delta_{N1}, & l_4 &= 4r^2g_b^2\Delta_{N1}\Delta_{N2}, \\ m_1 &= 1 - \Delta_{N2}, & m_2 &= 1 - r\Delta_{N2}, & m_3 &= 1 - r^2\Delta_{N2}, \\ r &= 1 - 2g_b, & d &= 1 - r^2\Delta_{N1}\Delta_{N2}, \\ \Delta_{Ni} &= \frac{(\lambda_b + 2\mu_b)u_{33}^{(i)}}{\mu_b}e_i, & \Delta_{Ti} &= u_{11}^{(i)}e_i, & (i &= 1, 2), \end{aligned} \quad (59)$$

donde  $\Delta_{Ni}$ ,  $\Delta_{Ti}$ ,  $u_{33}^{(i)}$ ,  $u_{11}^{(i)}$  y  $e_i$  determinan las características microestructurales de cada uno de los conjuntos de las fracturas. Los factores  $u_{33}$  y  $u_{11}$  y  $g_b$  corresponden a los de la ecuación 24 y 26, respectivamente.

## 2.6 Ventajas y desventajas de las TME

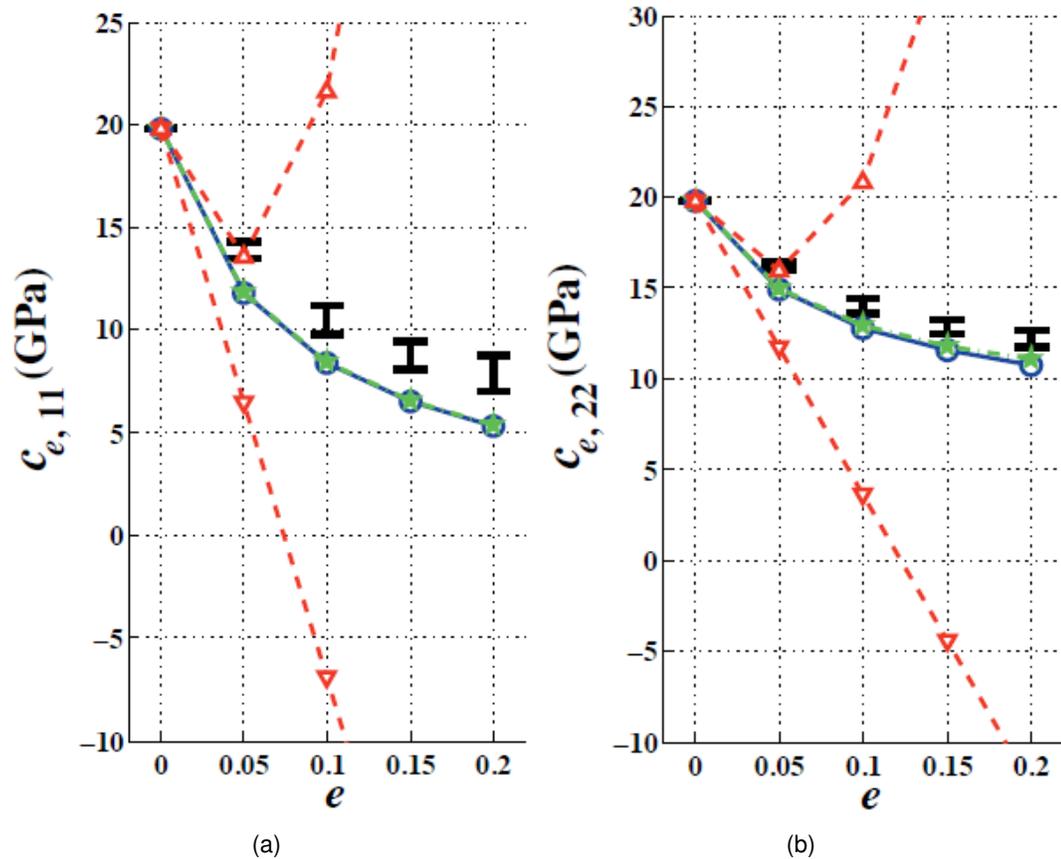
Cada una de las TME que se mencionan en este capítulo tiene ventajas y desventajas respecto a las demás, sin embargo se destacan 3 características principales:

### 1) Precisión de las TME en función de la densidad de las fracturas.

Como se mencionó anteriormente las teorías de Hudson (1980), Schoenberg (1980) y Kachanov (1980) se desarrollan con base en la NIA, de tal modo que se asume baja concentración de fracturas. Sin embargo, en la práctica las TME se simulan con alta concentración de fracturas y es aquí donde se reflejan marcadas diferencias. La figura 2 muestra la comparación de las TME de Hudson (1980) de primer orden, de Hudson (1980) de segundo orden, de Schoenberg y Sayers (1995) y de Kachanov *et al.* (2003) (con  $\theta = 0.05$  para todas las fracturas), respecto a la densidad de las fracturas  $e$  versus el valor calculado del elemento  $C_{11}$  (figura 2(a)) y  $C_{22}$  (figura 2(b)) del tensor de rigidez equivalente  $C_e$  para un conjunto de fracturas secas con simetría  $HTI_x$ . Las barras de error que se observan son los resultados de las simulaciones numéricas realizadas por Grechka y Kachanov (2006a) para diferentes modelos de rocas digitales con distribución aleatoria de los centros de las fracturas. Grechka y Kachanov (2006a) mostraron a partir de la figura 2 que la teoría de Hudson (1980) tanto la de primer orden como la de segundo orden pierden precisión para valores de  $e \geq 0.05$ , además de que los resultados no guardan relación con la física del problema, pues en el caso de la teoría de Hudson (1980) de primer orden  $C_{e,11}$  toma valores negativos situación que viola la condición de que  $C_e$  sea definido positivo; mientras que la teoría de Hudson (1980) de segundo orden muestra un incremento en el valor de  $C_{e,22}$  donde físicamente significa que al aumentar el número de fracturas en la roca, ésta aumenta su rigidez, situación que es falsa. Por otro lado, la teoría de Schoenberg y Sayers (1995) y Kachanov *et al.* (2003) se comportan de acuerdo a la física del problema, pues el valor de  $C_{e,11}$  como el de  $C_{e,22}$  decaen asintóticamente a un valor límite, el valor límite representa el grado máximo de fracturamiento que puede alcanzar una roca antes de disgregarse.

### 2) Relación de las TME con la microestructura de las fracturas.

La teoría de Hudson (1980) guarda una relación directa con la microestructura de las fracturas desde el planteamiento del modelo, de tal manera que el tensor de rigidez asociado a las fracturas (ecuación 23) depende directamente de las propiedades del contenido y la relación de aspecto de las fracturas. Por otro lado, Schoenberg (1980) propone analizar el medio fracturado



**Figura 2:** Precisión de las TME respecto a la densidad de las fracturas comparando el valor de  $C_{e,11}$  y  $C_{e,22}$  calculado para las TME de Hudson 1980 de primer orden ( $\nabla$ ), de Hudson 1980 de segundo orden ( $\triangle$ ), de Schoenberg y Sayers 1995 ( $\star$ ) y de Kachanov *et al.* 2003 con  $\theta = 0.05$  para todas las fracturas ( $\circ$ ), para un conjunto de fracturas secas con simetría  $HTI_x$ . Las barras de error que se observan son los resultados de las simulaciones numéricas realizadas por Grechka y Kachanov (2006a) para diferentes modelos de rocas digitales con distribución aleatoria de los centros de las fracturas. Figura tomada de Grechka y Kachanov (2006a)

con base en  $Z$  donde la forma y la microestructura de las fracturas se encuentran implícitos, de tal forma que carece de una relación directa con la geometría de las fracturas, sin embargo Schoenberg y Douma (1988) y Schoenberg y Sayers (1995) refieren a la relación de  $Z_N/Z_T$  como un indicador que permite estimar el contenido de las fracturas. En comparación a las dos teorías anteriores, las cuales son completamente analíticas, la teoría de Kachanov (1980) es una teoría semianalítica que combina la precisión de la teoría de Schoenberg (1980) con una relación directa con la microestructura de las fracturas, dicha relación está dada por  $Z_N$  y  $Z_T$  (ecuación 45).

### 3) Número de parámetros requeridos para invertir características del medio fracturado.

Si se considera el caso específico de la simetría ortorrómbica generada por dos conjuntos de fracturas ortogonales entre sí contenidos en una matriz de roca isotrópica. La teoría de

Kachanov (1980) para describir completamente la simetría ortorrómbica de fracturas secas requiere de 4 parámetros ( $\lambda_b$ ,  $\mu_b$ ,  $e_1$  y  $e_2$ ), si se consideran fracturas saturadas con líquido es requerido un parámetro más ( $\zeta$ ). Por otra parte, la teoría de Schoenberg (1980) sin importar si las fracturas son secas o saturadas con un fluido son requeridos sólo 4 parámetros ( $\lambda_b$ ,  $\mu_b$ ,  $Z_N$  y  $Z_T$ ) para describir la simetría ortorrómbica. Mientras que la teoría de Hudson (1980) requiere determinar 9 diferentes elementos del tensor de rigidez (ecuación 20) para describir la simetría ortorrómbica, sin embargo cuando se asume la misma densidad de fracturas para ambos conjuntos de fracturas son requeridos solamente 5 diferentes elementos del tensor de rigidez (ecuación 30), situación semejante al número de parámetros requeridos para describir el tensor de rigidez con simetría  $TI$  (ecuaciones 3,4 y 19). Cabe destacar que al utilizar la notación de Thomsen (1986) es posible reducir el número de parámetros de 5 a solamente 4 en el caso de la simetría  $TI$ .

## Capítulo 3 Método numérico para la propagación de ondas en medios con fracturas

---

La simulación numérica de la propagación de ondas elásticas en medios fracturados se puede realizar mediante diferentes metodologías, por ejemplo, diferencias finitas, elementos espectrales, elementos finitos, etc. Dado que el objetivo es simular el efecto de las fracturas en la propagación de las ondas, cada uno de los métodos antes mencionados ofrece una forma diferente para incluir las fracturas en los modelos, por ende cada uno de los métodos presenta ventajas y desventajas. Recientes investigaciones y análisis comparativos del método de Galerkin discontinuo (DGM) muestran que éste es una opción útil para el estudio de los efectos de las fracturas en la propagación de las ondas elásticas en medios fracturados debido a la facilidad para incluir fracturas discretas en los modelos (De Basabe *et al.*, 2016).

### 3.1 Método Galerkin Discontinuo (DGM)

El DGM es una generalización del método de elementos finitos que utiliza funciones discontinuas en la frontera de los elementos (De Basabe *et al.*, 2016). Es por esta razón que el DGM ha cobrado relevancia en el modelado sísmico de fallas y fracturas, pues es posible analizar el campo de desplazamiento ante la presencia de este tipo de discontinuidades. Incluir fracturas en el modelo utilizando el DGM es fácil debido a que los grados de libertad de cada elemento en el modelo son independientes.

Existen diferentes formas de establecer la continuidad del campo de desplazamientos cuando la interface no representa una fractura en el MGD (De Basabe *et al.*, 2016), lo cual genera variantes en la implementación de este método en el modelado sísmico, a continuación se mencionan las formulaciones relevantes:

#### 1. Formulaciones tipo Flux

- a) **RKDG**: Marco de referencia general para resolver ecuaciones diferenciales hiperbólicas, usando el método de Runge-Kutta para los incrementos en tiempo (Cockburn y Shu, 1998).
- b) **ADER-DG**: Utiliza incrementos en tiempo de alto orden arbitrario, usando el procedimiento de Cauchy-Kowalevski (Käser y Dumbser, 2006).

2. Formulación tipo **Optimal-DG** (Chung y Engquist, 2006).
3. Formulación tipo hp adaptativo **DG-FEM** (Etienne *et al.*, 2010).
4. Formulaciones con penalización interior (**IP-DGM**) (Rivière, 2008).
  - a) **SIPG**: Galerkin de Interior Simétrico,
  - b) **NIPG**: Galerkin de Interior No simétrico y
  - c) **IIPG**: Galerkin de Interior Incompleto.

La formulación empleada en las simulaciones numéricas de esta investigación es SIPG. Para más detalles del análisis de estabilidad y dispersión numérica de SIPG revisar De Basabe y Sen (2010) y De Basabe *et al.* (2008).

### 3.1.1 Formulación débil de la ecuación de onda elástica incluyendo fracturas

Las formulaciones aquí presentadas se tomaron de De Basabe *et al.* (2016), las cuales coinciden con la notación estándar en la literatura de MGD-IP (Wheeler, 1978),  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es el dominio físico,  $d$  es el número de dimensiones físicas (2 ó 3),  $\Omega_h$  denota una partición de elemento finito de  $\Omega$ , y  $\Gamma_h$  el conjunto de todas las caras entre elementos en  $\Omega_h$ . Además,  $\Gamma_c \subset \Gamma_h$  es el subconjunto de todas las caras donde el campo de desplazamiento es continuo, y  $\Gamma_f \subset \Gamma_h$  es el subconjunto de las caras que representan las fracturas, donde  $\Gamma_c \cup \Gamma_f = \Gamma_h$  y  $\Gamma_c \cap \Gamma_f = \emptyset$ . También,  $\{\cdot\}$  denota el promedio de la función en  $\gamma \in \Gamma_h$  y  $[\cdot]$  el salto de la función. Ahora se define a  $\gamma$  como la interfaz entre  $E_1$  y  $E_2$ , entonces el promedio y el salto de una función escalar  $u$  en  $\gamma$  son dados por:

$$\{u\} = \frac{1}{2}(u|_{E_1} + u|_{E_2}), \quad (60)$$

y

$$[u] = u|_{E_1} - u|_{E_2}. \quad (61)$$

La ecuación de onda elástica en un medio heterogéneo isotrópico, usando la convención de sumatoria de Einstein, está dada por:

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} u_i - \partial_i \lambda \partial_j u_j - \partial_j \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j) &= f_i, & \text{en} & \quad \Omega \times (0, T], & i, j &= 1, \dots, d, \\ \tau_i(\mathbf{u}) &= 0, & \text{sobre} & \quad \partial\Omega, \\ u_i = \partial_t u_i &= 0, & \text{para} & \quad t = 0, \end{aligned} \quad (62)$$

donde  $\partial\Omega$  es la frontera de  $\Omega$ ,  $(0, T]$  es el dominio del tiempo,  $u_i$  es el campo de desplazamiento,  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  es la densidad,  $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$  y  $\mu = \mu(\mathbf{x})$  son los parámetros de Lamé,  $\tau_i$  es el vector de tracción, dado por:

$$\tau_i(\mathbf{u}) = \lambda \partial_k u_k n_i + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_j, \quad (63)$$

y  $n_i$  es el vector normal a la frontera  $\partial\Omega$ .

Para obtener la formulación débil de la ecuación 62 útil para MGD se introduce el espacio vectorial  $\mathbf{X} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \mid w_i \in X, i = 1, \dots, d\}$ , donde  $X = \text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^N$ , donde  $\phi_i$  son las funciones base discontinuas y  $N$  es el número total de funciones base. Multiplicando la ecuación de onda 62 por una función vectorial de prueba  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ , integrando por elemento y sumando todas las contribuciones de los elementos se consigue:

$$\sum_{E \in \Omega_h} \left( (\rho \partial_{tt} \mathbf{u}, \mathbf{v})_E + \mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) + \sum_{\gamma \in \Gamma_c} \mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sum_{\gamma \in \Gamma_f} \mathbf{J}_\gamma^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{E \in \Omega_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v})_E, \quad (64)$$

donde

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_E = \int_E u_i v_i d\mathbf{x}, \quad (65)$$

$$\mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_E \left( \lambda u_{i,i} v_{j,j} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) v_{i,j} \right) d\mathbf{x}, \quad (66)$$

$$\mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_\gamma \{\tau_i(\mathbf{u})\} [v_i] d\gamma + S \int_\gamma \{\tau_i(\mathbf{v})\} [u_i] d\gamma + \frac{R}{|\gamma|} \int_\gamma \{\lambda + 2\mu\} [u_i] [v_i] d\gamma, \quad (67)$$

$$\mathbf{J}_\gamma^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\gamma Z_{ij}^{-1} [u_j] [v_i] d\gamma. \quad (68)$$

donde el parámetro  $S$  toma diferentes valores dependiendo de la formulación de IP-DGM:  $S = -1$  para SIPG,  $S = 0$  para IIPG y  $S = 1$  para NIPG; y el parámetro  $R$  es la penalización.

El término  $\mathbf{J}_\gamma^f$  permite imponer débilmente la condición de LSM y es similar al término que contiene la penalización (ecuación 68) si se sustituye el inverso de la matriz de conformidad de las fracturas en lugar del parámetro de penalización, los parámetros de Lamé y el tamaño de la cara del subdominio. En consecuencia, si la conformidad tiende a cero sería equivalente a asignar una penalización tendiendo a infinito y actuaría como una fractura sellada. En el caso contrario, si la conformidad es muy grande este término desaparecería y sería equivalente a las condiciones de frontera de superficie libre en la fractura.

Se asume en la ecuación 64 que las fracturas están entre las interfaces de los elementos de

la malla de elementos finitos con el fin de poder simular apropiadamente la discontinuidad.

El método de SIPG adicionalmente permite: Usar polinomios de alto orden para aproximar la solución, incorporar condiciones de frontera de tipo Neumann, Dirichlet o Robin, acomodar topografía o fracturas en mallas irregulares, paralelizar fácilmente el código para supercómputo y prescindir de mallas refinadas cerca de las fracturas.

### **3.1.2 El software Seismic Wave Propagation (SWP)**

SWP es un software escrito en C++ diseñado para simular la propagación de ondas acústicas o elásticas en 2D y 3D. La principal característica del software es que integra muchos métodos de simulación numérica para la discretización en el espacio y el tiempo de la ecuación de onda elástica o acústica, por lo tanto es útil para comparar la precisión y ejecución de los métodos.

Algunos de los métodos integrados en SWP son:

#### **1. Método de Elementos Espectrales (SEM)**

El SEM (por sus siglas en inglés) es un caso especial del Método de Elementos Finitos (FEM por sus siglas en inglés), fue originalmente desarrollado para dinámica de fluidos e incrementó su popularidad en modelado sísmico a mediados de los 90's (ver Cohen 2003).

#### **2. Método de Galerkin Discontinuo**

El GDM (por sus siglas en inglés) es una generalización del FEM que permite aproximar funciones discontinuas en las interfases de los elementos. Permite incluir fracturas discretas en los modelos (ver Rivière 2008).

#### **3. Método Diferencias Finitas con mallado intercalado(SGFDM)**

El término en inglés para este método es staggered grid y es ampliamente utilizado en modelado sísmico. La característica principal de este método es que reduce significativamente la dispersión numérica en comparación a la malla estándar del Método de Diferencias Finitas (FDM) (ver Moczo *et al.* 2014).

#### **4. Método de Lax-Wendroff (LWM)**

El LWM ayuda a obtener una precisión de alto orden en tiempo sin demandar guardar muchos pasos en tiempo. Está basado en una expansión de Taylor en tiempo del campo de onda y una sustitución de las derivadas en tiempo de alto orden por medio de operaciones matriciales. Es

aplicable a SEM o DGM y a las formulaciones acústica y elástica. Incluye el método leap-frog para FDM como un caso especial (Cohen, 2003).

En la tabla 1 se resumen los métodos y versiones integrados en SWP.

**Tabla 1:** Métodos y versiones incluidas en SWP. RKM-4 representa el RKM de cuarto orden y LWM-4 representa el LWM de cuarto orden. El grado polinomial de SEM y IP-DGM está entre 1 y 10.

<b>Método</b>	<b>Versión</b>	<b>Métodos de incrementos en tiempo</b>
2D SEM	Acústica	FDM, RKM-4, LWM-4
	Elástica	FDM, RKM-4, LWM-4
	Acústica-Elástica	FDM, RKM-4
2D IP-DGM	Acústica	FDM, RKM-4, LWM-4
	Elástica	FDM, RKM-4, LWM-4
	Acústica-Elástica	FDM, RKM-4
	Fracturas	FDM, LWM-4
2D SGFDM	Elástico	FDM
3D FEM	Acústico	FDM
	Elástico	FDM
3D IP-DGM	Acústico	FDM
	Elástico	FDM
	Fracturas	FDM

El software SWP proporciona 3 tipos salidas:

### 1. Gráficas instantáneas

Éstas pueden ser representaciones en 2D o 3D del campo de ondas en un tiempo dado, las cuales se guardan en archivos binarios o formatos estándar, por ejemplo NetCDF o Exodus II. La resolución de las gráficas es configurable por medio de un archivo de entrada y es posible también visualizar las gráficas en forma de video, utilizando paquetería geofísica estándar como Seismic Unix.

### 2. Sismogramas

Son funciones del tiempo que guardan el campo de ondas en un punto. El número y locación de puntos es fácilmente configurable en el archivo de entrada.

### 3. Trazas sísmicas

Se trata de sismogramas grabados en un conjunto de puntos alineados usualmente desplegados en gráficas 2D, las características de las trazas sísmicas son configurables en el archivo de entrada.

SWP es un software en constante actualización, actualmente incluye características configurables como topografía de los modelos y fronteras absorbentes, también cuenta con la posibilidad de construir mallas de elemento finito no ortogonales.

## Capítulo 4 Simulaciones numéricas

---

En este capítulo se describe el diagrama de flujo del procedimiento empleado para investigar los efectos anisotrópicos en la propagación de ondas sísmicas debido a cambios en las propiedades del medio fracturado. El procedimiento está compuesto por el diseño y la construcción de los experimentos, la ejecución de las simulaciones numéricas, la validación de las simulaciones, la construcción de gráficas y la comparación entre las RDF y los modelos teóricos. Los 5 parámetros de las fracturas aquí investigados son la longitud, la densidad, la orientación, la conectividad y el ángulo entre fracturas conectadas, cada una de las propiedades se describe por separado.

### 4.1 Diagrama de flujo de trabajo

Para el presente trabajo se diseñaron experimentos apropiados para investigar el efecto que causa la:

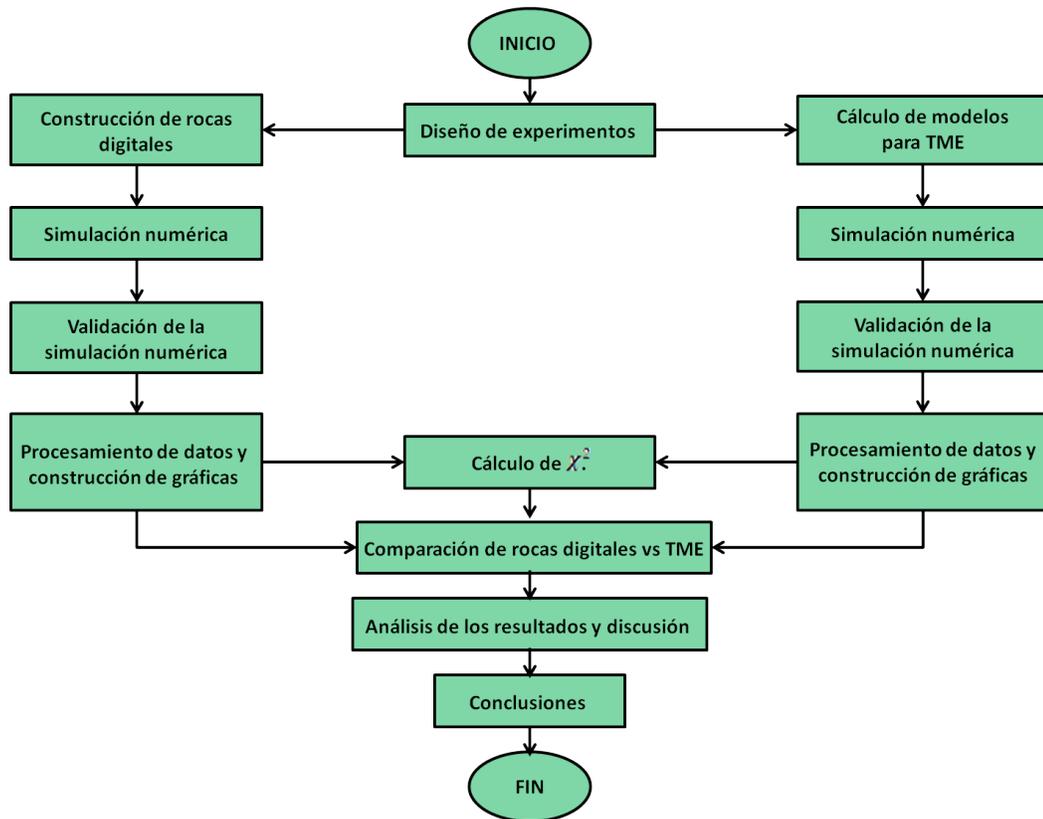
- 1) longitud de las fracturas,
- 2) densidad de las fracturas,
- 3) orientación de las fracturas,
- 4) conectividad entre fracturas y
- 5) ángulo entre fracturas conectadas,

en la propagación de las ondas elásticas. Es decir, para cada uno de estos parámetros de las fracturas se llevó a cabo el flujo de trabajo de la figura 3.

La matriz de la roca en el total de los modelos teóricos y las rocas digitales, es un medio elástico isotrópico con propiedades físicas descritas en la tabla 2, las cuales son valores típicos de rocas sedimentarias clásticas, presentes comúnmente en yacimientos fracturados.

### 4.2 Longitud de las fracturas

Para investigar el efecto debido a la longitud de las fracturas se diseñaron 6 diferentes experimentos. Cada experimento consiste en la construcción de una roca digital con densidad de las fracturas constante, se eligió  $e = 0.058$  dado que con este valor el efecto anisotrópico es significativo y no está en el rango de valores donde la teoría de Hudson (1980) pierde precisión; y con



**Figura 3:** Esquema del flujo de trabajo realizado para el análisis de cada una de las características de las fracturas consideradas en la investigación.

características idénticas a las de la tabla 2, excepto la longitud de las fracturas  $l$ . La densidad de las fracturas en las rocas digitales fracturadas (RDF) es controlada por el número de fracturas que se asignan en el modelo, por tanto se debe calcular el número de fracturas ( $n_{f_i}$ ) que corresponde a cada RDF cuando la longitud de las fracturas cambia de magnitud ( $l_i$ ), el número de fracturas para cada RDF se determina a través de la siguiente relación:

$$n_{f_i} = \sqrt[3]{\left(\frac{eV}{\left(\frac{l_i}{2}\right)^3}\right)^2}, \quad (69)$$

$n_{f_i}$  se obtiene de forma sencilla al reescribir la ecuación 22, sin embargo dicha ecuación es para modelos 3D y los modelos aquí son 2D, por tal motivo es necesario adecuar la ecuación 22 para ese caso. Esto se consigue definiendo a  $n$  en la ecuación 22 como  $n = \sqrt{n_{f_i}^3}$ . Por otra parte, dado que ha sido demostrado que la forma de las fracturas es un parámetro de las fracturas cuya aportación no es significativa en el fenómeno (Grechka *et al.*, 2006; Bakulin *et al.*, 2000a), entonces es posible intercambiar en la ecuación 22 el radio de la fractura  $a$  por  $\frac{l_i}{2}$ .

**Tabla 2:** Características del medio elástico isotrópico que simula la matriz de las rocas digitales.

<b>Características de la matriz de las rocas digitales</b>	
Dimensiones	1300 [m] × 1300 [m]
Densidad del medio elástico	2500 [Kg/m <sup>3</sup> ]
Velocidad de onda P	3310 [m/s]
Velocidad de la onda S	1620 [m/s]

Por otro lado, el número total de fracturas  $nt$  en las RDF (máxima densidad de las fracturas) está directamente relacionado con el número de elementos de la malla construida por SWP, y la longitud de las fracturas es idéntica a la longitud de los elementos.

Las RDF para estos experimentos contienen un conjunto de fracturas secas con simetría  $HTI_x$ , las longitudes de las fracturas  $l_i$  correspondientes a los 6 diferentes experimentos que se encuentran en la tabla 3. Dado que el modelo sólo contiene fracturas verticales, el  $nt_i$  es:

$$nt_i = N_i(N_i - 1), \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (70)$$

donde  $N_i$  es el número de elementos en cada lado de la malla y se calcula mediante la relación  $N_i = L/l_i$ , aquí  $L$  es la longitud de la malla cuadrada y  $l_i$  es la longitud de los elementos, la cual coincide con la longitud de las fracturas e  $i$  es el número del experimento en cuestión.

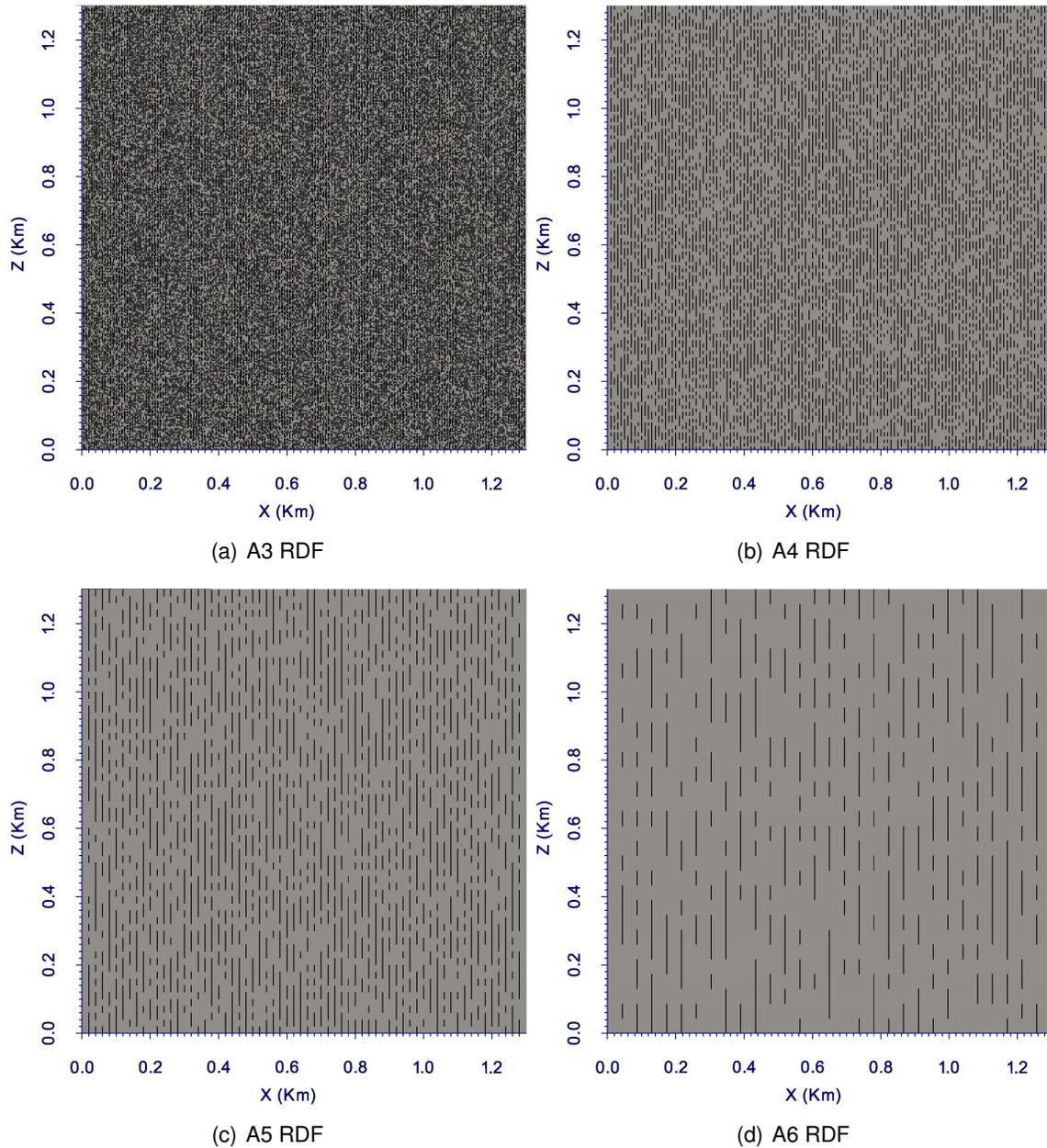
La tabla 3 muestra la longitud de las fracturas  $l_i$ , el número máximo de fracturas en el modelo  $nt_i$  que puede contener la roca digital con un conjunto de fracturas verticales, el número de fracturas requeridas para una densidad de las fracturas de  $e = 0.058$ ,  $nf_i$  y el número de elementos  $N_i$  por lado de la malla para los 6 experimentos.

**Tabla 3:** Longitud de las fracturas  $l_i$ , número de elementos por lado de la malla  $N_i$ , número máximo de fracturas para un conjunto de fracturas verticales  $nt_i$ , número de fracturas en las RDF  $nf_i$  y los valores de  $Z_{Ni}$  y  $Z_{Ti}$  para los experimentos A1 al A6 con densidad de las fracturas constante.

Exp. RDF	$l_i$ [m]	$N_i$	$nt_i$	$nf_i$	$e$	$Z_{Ni}$	$Z_{Ti}$
A1	1	1300	1688700	1012897	0.058	$4.25e^{-11}$	$5.13e^{-11}$
A2	2	650	421850	253224	0.058	$8.51e^{-11}$	$1.07e^{-10}$
A3	4	325	105300	63306	0.058	$1.7e^{-10}$	$2.05e^{-10}$
A4	10	130	16775	10129	0.058	$4.25e^{-10}$	$5.13e^{-10}$
A5	20	65	4160	2532	0.058	$8.51e^{-10}$	$1e^{-9}$
A6	43.3	30	870	540	0.058	$1.82e^{-9}$	$2.2e^{-9}$

La figura 4 muestra las representaciones de las RDF en 2D construidas para los experimentos A3 al A6 para la simulación del efecto de la longitud de las fracturas en la propagación de on-

das elásticas. Las rocas digitales para los experimentos A1 y A2 se omiten por la escala de las fracturas versus el modelo.



**Figura 4:** Rocas digitales con longitudes de fractura de 4 m, 10 m, 20 m y 43.3 m, respectivamente para los experimentos A3 al A6.

El diseño y construcción de los modelos teóricos equivalentes a las rocas digitales de la tabla 3 se realizó mediante el cálculo de los tensores de rigidez equivalentes  $C_{ei}$ , con base en la ecuación 1. Dado que se considera un conjunto de fracturas secas con simetría  $HTI_x$ , los tensores  $C_{ei}$  se determinan a su vez por medio de las ecuaciones 23 y 32. Las constantes de Lamé  $\lambda_b$  y  $\mu_b$  requeridas para el tensor de rigidez de la matriz isotrópica  $C_b$  se calculan en función de las

velocidades de las ondas P y S y las densidades reportadas en la tabla 2. El cálculo de la densidad de fractura  $e$  se realizó por medio de la ecuación 22,  $a_i$  se considera como  $l_i/2$  y el número de fracturas por lado está dado por  $\sqrt{n_i}$  debido a que la ecuación 22 corresponde a un modelo en 3D, entonces un modelo 2D cuenta con un número total de fracturas  $n_i$  comparables con las de las rocas digitales. La tabla 4 muestra los parámetros de entrada para los experimentos A1 al A6 para los modelos teóricos del parámetro de longitud de fractura.

**Tabla 4:** Radio de las fracturas  $a_i$ , número de elementos por lado de la malla  $N_i$ , número de fracturas del EVR  $\sqrt{nf_i^3}$  para densidad de las fracturas constante en los diferentes experimentos, densidad de las fracturas  $e$ ,  $\lambda_b$  y  $\mu_b$  de los experimentos de TME.

Exp. TME	$a_i$ [m]	$N_i$	$\sqrt{nf_i^3}$	$e$	$\lambda_b$ [GPa]	$\mu_b$ [GPa]
A1	0.5	1300	1019407741	0.058	14.2	6.56
A2	1	650	127425779	0.058	14.2	6.56
A3	2	325	15928222	0.058	14.2	6.56
A4	5	130	1019412	0.058	14.2	6.56
A5	10	65	127408	0.058	14.2	6.56
A6	21.65	30	12548	0.058	14.2	6.56

Con base en la información de la tabla 4, el tensor de rigidez (en unidades Gpa) equivalente  $C_{eA5}$  queda determinado por:

$$C_{eA5} = \begin{bmatrix} 15.75 & 8.20 & 8.20 & 0 & 0 & 0 \\ 8.20 & 24.23 & 11.11 & 0 & 0 & 0 \\ 8.20 & 11.11 & 24.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.95 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Posterior al diseño y la construcción de las rocas digitales se procede a simular tanto las rocas digitales (tabla 3) como los modelos de la teoría de Hudson (1980) (tabla 4), por medio del software SWP. Los modelos teóricos se simulan a través de la implementación de SEM mientras que las rocas digitales por medio de SIPG, ambas implementaciones requieren de una malla de elementos finitos que en este caso tienen las mismas dimensiones, por lo tanto el mismo número de elementos. De igual forma, los parámetros mostrados en la tabla 5 se mantienen constantes tanto para los modelos de TME como para las RDF siempre que el dominio sea cuadrado, en caso contrario la localización de la fuente cambia.

**Tabla 5:** Parámetros para los modelos de TME y las RDF con mallas cuadradas.

Parámetro	Descripción
Dimensión del modelo	2D
Fuente sísmica	Vertical
Función fuente	Ricker
Frecuencia	45 [Hz]
Localización de la fuente	650,660 [m]
Tiempo total de simulación	0.16 [s]
Gráficas instantáneas	t=0.16 [s]

El tipo de fuente para las simulaciones en SWP es vertical a 45 Hz, se elige este tipo de fuente para que existan ondas P y S propagándose simultáneamente; el valor de la frecuencia de la fuente se elige dentro del rango de frecuencias sísmicas de exploración de yacimientos petroleros. La función fuente es de tipo Ricker. La localización de la fuente es (650,660) respecto a los ejes de coordenadas en la figura 4.

SWP permite generar sismogramas sintéticos para una serie de receptores, los cuales se pueden colocar arbitrariamente en el modelo. En las simulaciones ejecutadas para esta investigación se generaron sismogramas sintéticos, sin embargo para los objetivos planteados aquí mostrar los campos de onda resulta más conveniente.

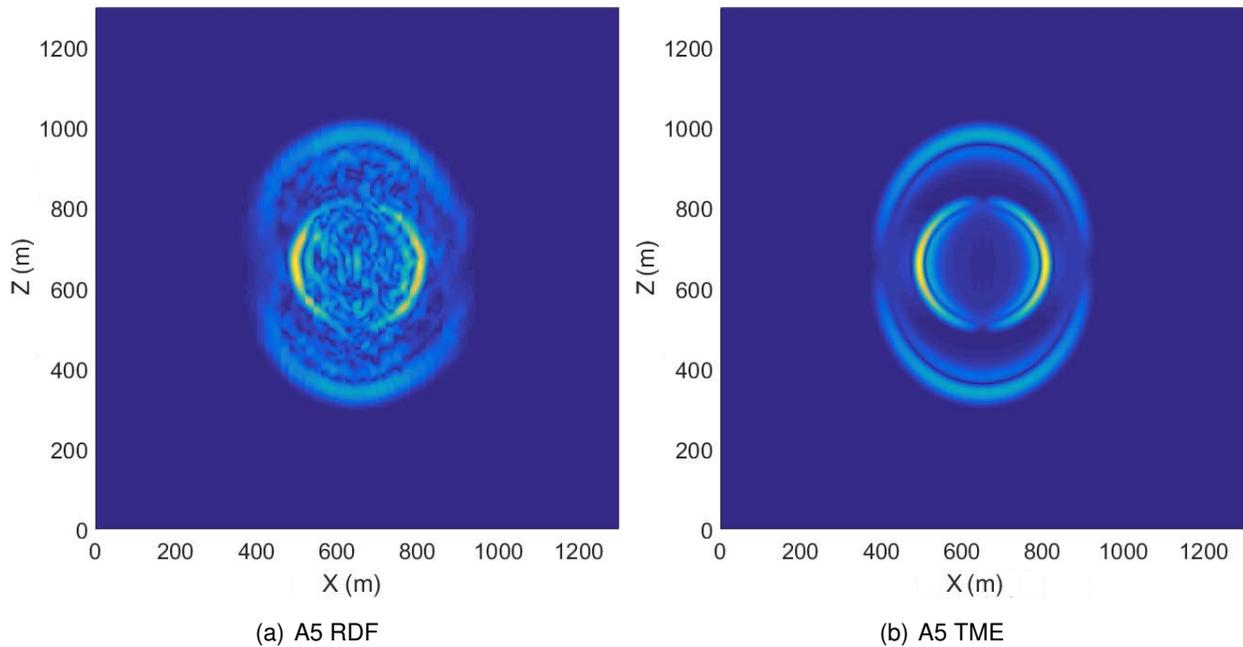
La validación de las simulaciones numéricas tanto para los modelos teóricos como para las rocas digitales se realiza mediante la inspección de los parámetros  $L^2$  y  $H^1$ . Finalmente, los archivos de datos de las gráficas son desplegados en el software ParaView para inspeccionar la calidad de los resultados. Sin embargo, el procesamiento de los archivos de datos se realizó en Matlab R2015b.

Para procesar los datos se desarrolló un programa que en general trabaja en tres etapas:

### 1. Rocas digitales.

Se calcula la norma del desplazamiento de las ondas elásticas  $u$ . Después se grafican las formas de onda de las ondas P y S que se propagan en el medio fracturado. La figura 5(a) muestra el resultado del experimento A5 (tabla 3) donde se observa el efecto causado por fracturas de 20 m en la propagación de ondas, el efecto anisotrópico debido a las fracturas es predominante en el frente de onda P.

### 2. Modelos teóricos.



**Figura 5:** Simulación numérica del efecto de la longitud de fractura para el experimento A5 de rocas digitales (figura 5(a)) y el modelo teórico (figura 5(b)). Simulación numérica de la propagación de ondas elásticas en medios fracturados a 0.16 segundos.

El procedimiento de la etapa 1 se repite para los archivos de los modelos teóricos. El resultado se muestra en la figura 5(b).

### 3. Cálculo de $\chi^2$ .

Dado que uno de los objetivos del presente trabajo es comparar las simulaciones numéricas de la propagación de las ondas elásticas en las rocas digitales con las simulaciones numéricas utilizando la teoría de Hudson (1980), es importante definir un criterio cuantitativo de comparación que determine el grado de similitud entre ambos resultados y por otra parte si el efecto debido a la longitud de las fracturas impacta considerablemente en la propagación de las ondas elásticas o no es significativo para el fenómeno de estudio. Por esta razón, se propone usar el modelo representado por la ecuación 72 para cuantificar las diferencias entre las simulaciones de las rocas digitales y las simulaciones de los modelos teóricos. El frente de onda P se eligió como parámetro de comparación, debido a que refleja con mayor sensibilidad los efectos anisotrópicos causados por cambios en los parámetros microestructurales del medio fracturado.

Con base en lo anterior, se procede a desarrollar un programa que procesa los datos y determina las distancias de las máximas amplitudes de la onda P, respecto a la posición de la fuente sísmica del modelo, para ésto se ejecuta un barrido de  $0^\circ$  a  $359^\circ$ , es decir

se obtienen vectores con 360 elementos cada uno, los vectores contienen la posición de las amplitudes máximas de la onda P (el procedimiento se realiza simultáneamente para las rocas digitales y los modelos teóricos), a partir de las posiciones se calcula la distancia entre la fuente y el frente de la onda P para los 360 datos de cada vector. Ya conocidas las distancias para las rocas digitales y los modelos teóricos se procede a calcular la diferencia por medio de la siguiente ecuación:

$$\chi_{obs}^2 = \sum_i \frac{(F_{RDFi} - F_{TMEi})^2}{(0.05F_{TMEi})^2}, \quad i = 1, 2, \dots, 360, \quad (72)$$

donde  $\chi_{obs}^2$  es el valor de las diferencias que existe entre el conjunto de los datos observados  $F_{RDFi}$  y el conjunto de los datos teóricos  $F_{TMEi}$  e  $i$  es el número de datos en ambos conjuntos. El factor 0.05 en el denominador se refiere al máximo rango de error permitido en el modelo ( $\pm 5\%$ ).

El modelo de distribución  $\chi^2$  es útil para comparar diferencias entre conjuntos de datos en función del número de datos (grados de libertad), es decir  $\chi_k^2$  depende del número de grados de libertad  $k$ , donde  $k = i - 1$  e  $i$  es la dimensión de los vectores de los datos. Adicionalmente se requiere de un valor crítico de  $\chi^2$  que determine las características particulares de la comparación entre los conjuntos de datos, en el caso particular de esta investigación se determina que las diferencias máximas permitidas para que sean consideradas poco significativas, deben cumplir la condición de no exceder el  $\pm 5\%$  de error. En términos de la distribución  $\chi^2$  la condición anterior se consigue determinando el valor de  $\chi_{critico}^2$  asociado con el  $\pm 5\%$ , el cual está dado por:

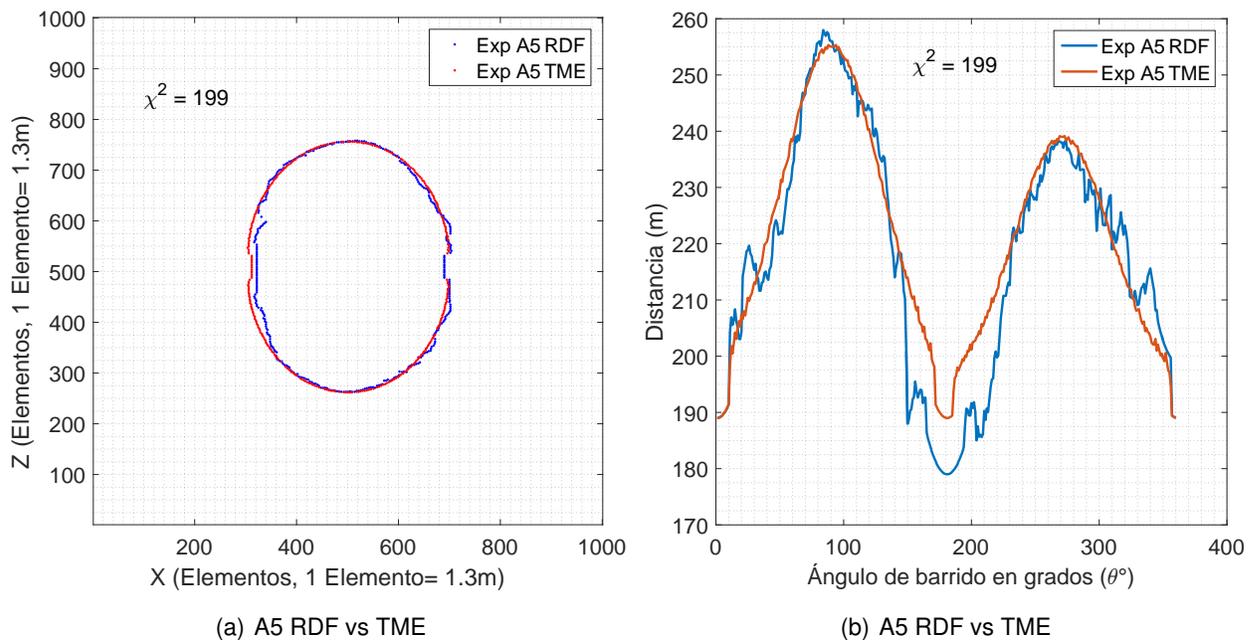
$$\begin{aligned} P(\chi_{359}^2 < \chi_{critico}^2) &= 0.05, \\ \chi_{critico}^2 &= 316; \end{aligned} \quad (73)$$

el valor de  $\chi_{critico}^2$  se calcula por medio de la función *chi2inv* de Matlab, también puede ser determinado por medio de tablas de la distribución de  $\chi^2$ .

El valor de  $\chi_{critico}^2$  determina el punto de comparación entre los diferentes experimentos para las rocas digitales y los modelos teóricos, es decir, todo valor de  $\chi_{obs}^2$  menor a  $\chi_{critico}^2$  corresponde a diferencias con magnitud menor al  $\pm 5\%$ , mientras que todo valor de  $\chi_{obs}^2$  mayor a  $\chi_{critico}^2$  excede la condición del  $\pm 5\%$  de error. Dicho de otro modo, cualquier valor de  $\chi_{obs}^2$  mayor a  $\chi_{critico}^2$  puede estar relacionado a diferencias considerables al comparar

las simulaciones numéricas de las RDF y las de TME, mientras que por otro lado puede estar relacionado al cambio en el efecto anisotrópico del frente de las ondas P debido a variaciones de las magnitudes de los parámetros microestructurales del medio fracturado. Con base en dicho análisis se puede inferir si un efecto anisotrópico es considerable o no en la propagación de las ondas P.

En la figura 6(a) se muestra un ejemplo de la comparación de los frentes de las ondas P de las simulaciones numéricas para el experimento A5 (tablas 3 y 4) de longitud de fractura tanto de la roca digital como del modelo teórico, en la misma figura se muestra el valor de  $\chi^2_{obs}$ . En la figura 6(b) se grafican las distancias fuente-frente de onda P tanto para la roca digital (RDF) como para el modelo teórico (TME) para cada ángulo de barrido.

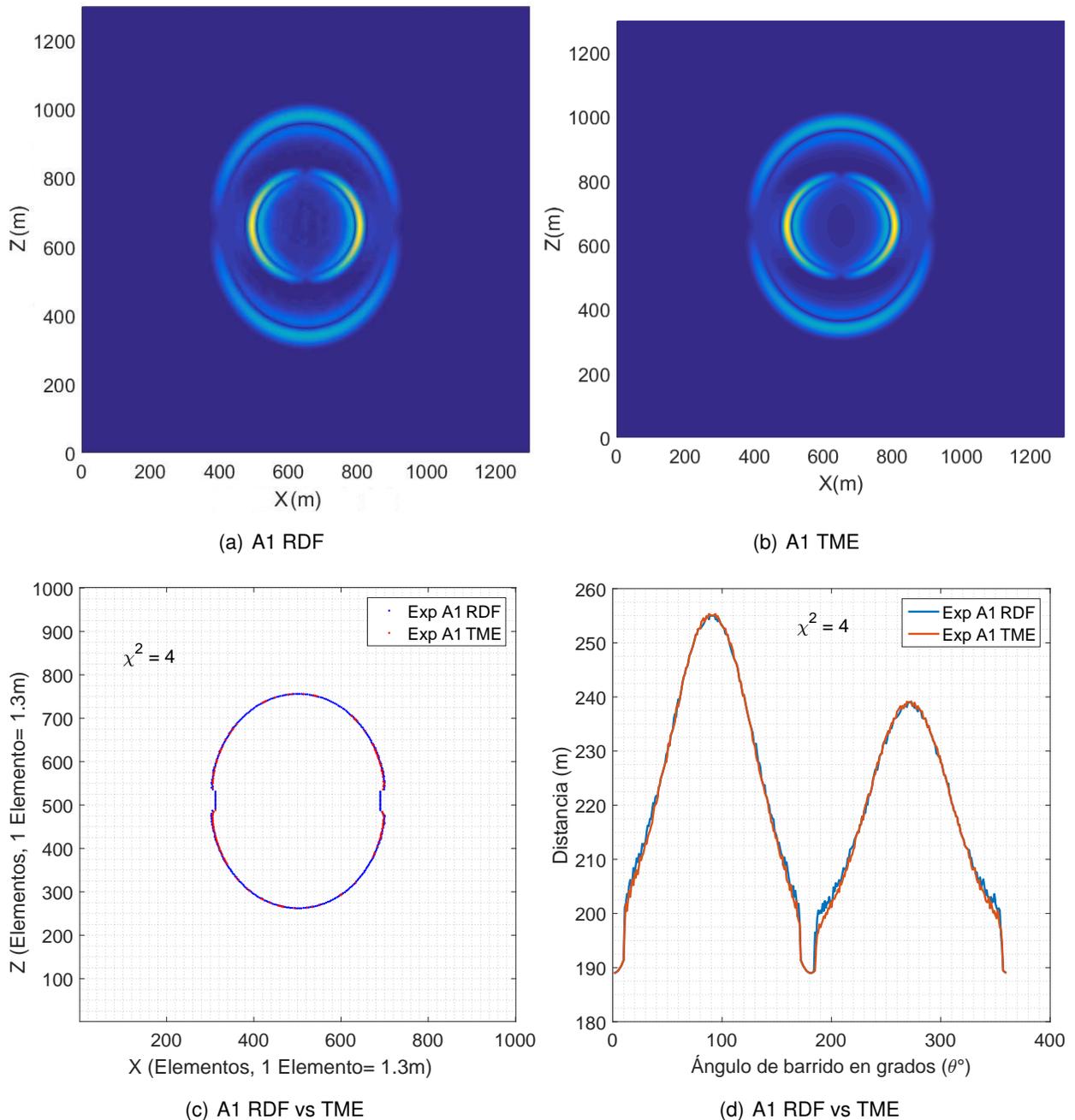


**Figura 6:** Comparación de las distribuciones de los datos de los frentes de las ondas P de la roca digital y el modelo teórico del experimento A5 de longitud de la fractura (figura 6(a)), el valor de  $\chi^2_{obs}$  para esta comparación es 199. La figura 6(b) muestra las distancias fuente-frente de onda para las simulaciones RDF y TME.

Las tres etapas de procesado de los datos antes descritas se repiten para todos los experimentos de las tablas 3 y 4. Un ejemplo más de comparación de los resultados del procesamiento de los datos del experimento A1 se presenta en la figura 7.

La comparación de los resultados de los experimentos A1 y A5 con base en las figuras 5, 6 y 7 permite establecer las siguientes observaciones:

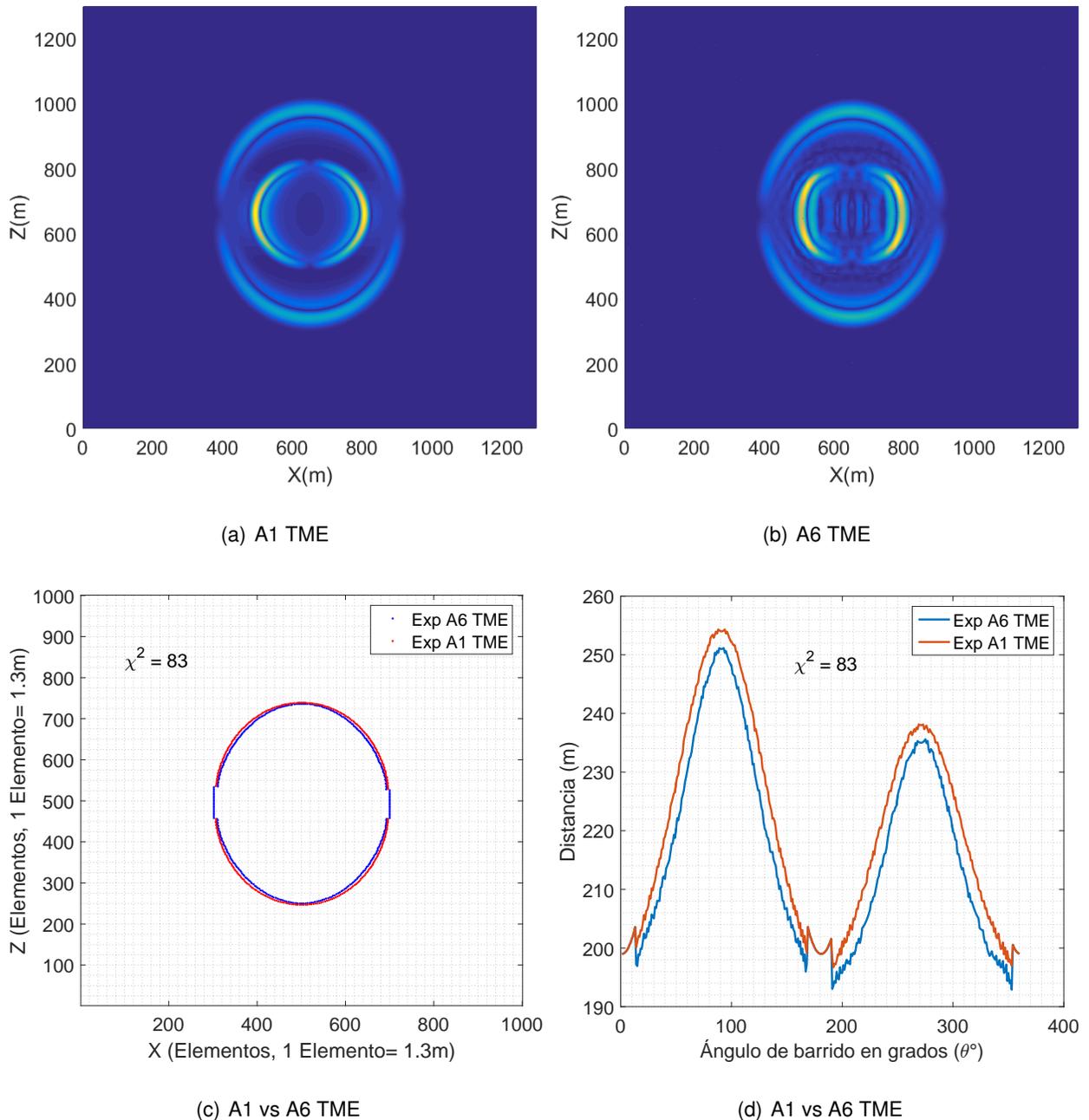
1. Con relación a la comparación de los resultados de las simulaciones numéricas del experimento A5 que se muestra en la figura 5, se observa que la principal diferencia entre la RDF y la TME es la presencia de reflexiones en el interior de la roca digital (figura 5(a)) las cuales deforman el frente de la onda P, de esta manera el frente de la onda P pierde simetría en comparación con el frente de onda P del modelo teórico (figura 5(b)). Éste es un resultado esperado debido a que SWP en la construcción de las rocas digitales asigna la posición de las fracturas aleatoriamente dando como resultado zonas dentro del modelo con mayor o menor concentración de fracturas como se presenta en la figura 4(c). Las reflexiones observadas se deben a la presencia de múltiples fracturas discretas. Por otro lado, la simulación numérica de la TME es simétrica porque se simula un medio homogéneo equivalente al medio fracturado, es decir las propiedades elásticas efectivas son homogéneas (Grechka y Kachanov, 2006a), por tanto los efectos de las reflexiones de las ondas elásticas entre las fracturas no son significativas. Sin embargo, pese a estas principales diferencias se percibe que los frentes de las ondas P guardan similitud (ver figura 6(a)), es aquí donde el valor de  $\chi_{obs}^2 = 199$  toma significado, pues al compararlo con el valor de  $\chi_{critico}^2 = 316$  indica que las diferencias entre los frentes de las ondas P pueden ser desestimables pues las diferencias no exceden el  $\pm 5\%$  de error. Con base en esta comparación se puede inferir que las simulaciones numéricas de RDF con  $l_5 = 20\text{ m}$  concuerdan con los resultados de la TME de Hudson (1980).
2. Ahora bien, cuando se comparan los resultados de las simulaciones numéricas de la RDF con los de la TME del experimento A1 (figuras 7(a)-7(b)) se observa que las reflexiones de las ondas elásticas al interior de la roca digital ya no se perciben, sin embargo el efecto anisotrópico debido a las fracturas con longitud de  $1\text{ m}$  persiste y es casi idéntico al efecto debido a las fracturas del modelo teórico, ésto se sustenta comparando nuevamente los valores de  $\chi_{obs}^2 = 4$  del experimento A1 con  $\chi_{critico}^2 = 316$ , en otras palabras  $\chi_{obs}^2$  es tan pequeña comparada con  $\chi_{critico}^2$  que el efecto anisotrópico de la roca digital es prácticamente el mismo que el del modelo teórico (ver figura 7(c)), esto dirige a la siguiente observación.
3. Con base en la observación del numeral anterior se puede comprobar explícitamente la inferencia de las TME, el cual establece que la presencia de un conjunto de fracturas donde la longitud de las fracturas es mucho menor que la longitud de la onda sísmica que se propaga por el EVR, genera anisotropía sísmica. Sin embargo, la inferencia anterior no sólo se cumple bajo la condición mencionada, ejemplo de esto es el experimento A5 pues si comparamos la longitud de la onda P ( $\approx 74\text{ m}$ ) con la longitud de las fracturas ( $20\text{ m}$ ), la



**Figura 7:** Resultado del experimento A1 de simulación numérica de longitud de las fracturas para el RDF (figura 7(a)) y el TME (figura 7(b)). La comparación de los frentes de las ondas P del RDF y el TME se muestra en la figura 7(c), el valor de  $\chi^2_{obs}$  para el experimento A1 es 4. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas del RDF y el TME se muestran en la figura 7(d).

inferencia de las TME no se cumple. Éste análisis conduce a pensar que las TME en algún sentido requieren de menos inferencias de las que las definen matemáticamente.

Antes de continuar con las observaciones al respecto del análisis de los resultados del parámetro de longitud de las fracturas, se comparan los experimentos A1 y A6 (tabla 4). Dado que se ha



**Figura 8:** Resultado del experimento A1 vs A6 de la simulación numérica de longitud de las fracturas para el TME (figuras 8(a) y (figura 8(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 8(c), el valor de  $\chi_{obs}^2$  para esta comparación es 83. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas del TME se muestran en la figura 8(d).

observado que el efecto anisotrópico debido a longitud de las fracturas es prácticamente el mismo para rocas digitales que para los modelos teóricos con la misma longitud de las fracturas, ahora se procede a comparar el efecto en la anisotropía sísmica debido a cambios en la longitud de las fracturas, es decir se compara cuánto cambian las formas del frente de las ondas P para los experimentos A2 al A6 respecto de A1. Con base en las observaciones 1 y 2 (página 49)

resulta indistinto comparar los resultados de las simulaciones numéricas de las rocas digitales o las de los modelos teóricos, por facilidad del procesamiento de los datos se eligen los modelos teóricos. El ejemplo más representativo de variaciones en el frente de onda P es la comparación del experimento A1 TME con A6 TME, el cual se muestra en la figura 8 y se comenta en las observaciones 4 y 5; el resto de las comparaciones se reportan en la tabla 6.

4. Con base en la tabla 6 de resultados, se muestra que sí existe un efecto anisotrópico en la propagación de las ondas elásticas debido a cambios en la longitud de las fracturas, cuando la longitud de las fracturas toma el valor de  $43.3\text{ m}$ , sin embargo el efecto no es suficientemente grande para que sea considerado preponderante; cuando la longitud de las fracturas es menor a  $43.3\text{ m}$  ( $l_6$ ) el efecto es completamente desestimable.

**Tabla 6:** Resultados de la comparación del efecto anisotrópico para el parámetro longitud de la fractura del experimento A1 con A2 al A6.

<b>Experimento</b>	$\chi_{obs}^2$	$\chi_{critico}^2$
A1-A2	0	316
A1-A3	0	
A1-A4	1	
A1-A5	7	
A1-A6	83	

Estos resultados concuerdan por lo propuesto por Grechka y Kachanov (2006c), donde hacen referencia al número mínimo de fracturas necesarias en el EVR para conseguir los parámetros elásticos efectivos; Grechka y Kachanov (2006c) proponen que 10 fracturas son suficientes, en contraposición a la idea de que un número grande de fracturas son requeridas para conseguir el efecto anisotrópico debido a la presencia de microfracturas.

5. Con relación al efecto anómalo que se observa en la figura 8(b), éste no está relacionado con la longitud de las fracturas sino con dispersión numérica debida al número reducido de los elementos de la malla de elementos finitos.
6. Finalmente, en la tabla 6 se puede observar que las diferencias entre los frentes de las ondas P para los experimentos A1 al A6 no son significativos. Por lo tanto, las simulaciones numéricas de los experimentos A1 y A5 son prácticamente indistinguibles, sin embargo si se compara el tiempo del cálculo numérico requerido para ejecutar las simulaciones numéricas entre el experimento A1 y A5, la diferencia es grande pues el experimento A5 requiere de aproximadamente

1 hora mientras que el experimento A1 requiere de aproximadamente 1 semana de cálculos numéricos en un nodo del cluster de CICESE que utiliza 40 núcleos y 128 GB de RAM. Esta observación permite definir al experimento A5 como el óptimo para ejecutar las simulaciones numéricas de los experimentos de los parámetros de las fracturas que requieren mayor tiempo de cálculos numéricos, sin embargo se debe tener en cuenta que en el caso de la simulación numérica de las RDF la resolución de las gráficas es baja para esta longitud de las fracturas (20m).

### 4.3 Densidad de las fracturas

El efecto en la propagación de ondas elásticas debido a la densidad de las fracturas es un parámetro del medio fracturado determinante en la anisotropía sísmica (Grechka y Kachanov, 2006a; Hudson, 1980). En este trabajo de investigación se simula esta propiedad del medio fracturado con el objetivo de validar las simulaciones numéricas de las RDF comparándolas con las simulaciones numéricas de la TME de Hudson (1980). Por esta razón se diseñaron 5 diferentes experimentos donde se incrementa gradualmente la densidad de las fracturas en las rocas digitales y posteriormente se calcula la densidad de las fracturas para los modelos teóricos en función del número de fracturas de cada roca digital correspondiente.

Uno de los resultados de la sección anterior es que el efecto en la propagación sísmica debido a la longitud de las fracturas es desestimable, por tanto es indistinto realizar las simulaciones para el parámetro de la densidad de las fracturas para una longitud de la fractura de 1 metro o una longitud de 43 metros, sin embargo el tiempo de simulación y resolución de las gráficas sí son factores a considerar, por tal motivo en esta ocasión se eligió la longitud de las fracturas de 1 metro debido a que son las que mejor resolución muestran en el frente de las ondas P y S que se propagan en las RDF.

Las características de la matriz de la roca de los modelos teóricos y las rocas digitales se encuentran en la tabla 2. Los experimentos se diseñan con base en un conjunto de fracturas del tipo  $HTI_x$ , ahora bien si se considera para el caso de las RDF una malla de  $1300 \times 1300$  elementos (fracturas de 1 metro), el número máximo de fracturas verticales en el modelo es de 1,688,700 el cual corresponde a un modelo de la RDF completamente fracturada; para determinar los diferentes grados de fracturamiento o las densidades de las fracturas se divide arbitrariamente 1688700 en 25 partes y se asignan a los diferentes experimentos las proporciones de  $1/25$ ,  $8/25$ ,  $15/25$ ,

22/25 y 25/25, las proporciones anteriores corresponden a las densidades de las fracturas baja, intermedia baja, intermedia alta, alta y la roca digital completamente fracturada, respectivamente como se muestra en la siguiente tabla:

**Tabla 7:** Características de los diferentes experimentos de densidad de fracturas para las RDF y TME con longitud de las fracturas de 1m. El experimento B3 es equivalente al experimento A1 en la tabla 3.

Exp. RDF	No. de fracs.	$e_i$	Clasificación
B1	67548	0.001	baja densidad de fracturas
B2	540384	0.023	intermedia baja densidad de fracturas
B3	1013220	0.058	intermedia alta densidad de fracturas
B4	1486056	0.103	alta densidad de fracturas
B5	1688700	0.124	medio completamente fracturado

En la figura 9 se muestran las 5 RDF asociadas a cada una de las densidades de las fracturas de la tabla 7 pero para una longitud de las fracturas de 20 metros (experimento B5), ésto es sólo por cuestión de escala de las fracturas.

El cálculo de los modelos teóricos equivalentes a las RDF se realiza de la misma manera que en la sección 4.2. Los parámetros de la fuente sísmica y otras características de las simulaciones numéricas se encuentran en la tabla 5. La validación de las simulaciones numéricas y el procedimiento de graficación y comparación de los resultados se encuentran en la sección 4.2. De esta manera el valor de  $\chi_{critico}^2 = 316$  continua siendo la referencia respecto al valor de  $\chi_{obs}^2$  para cada experimento de la tabla 7.

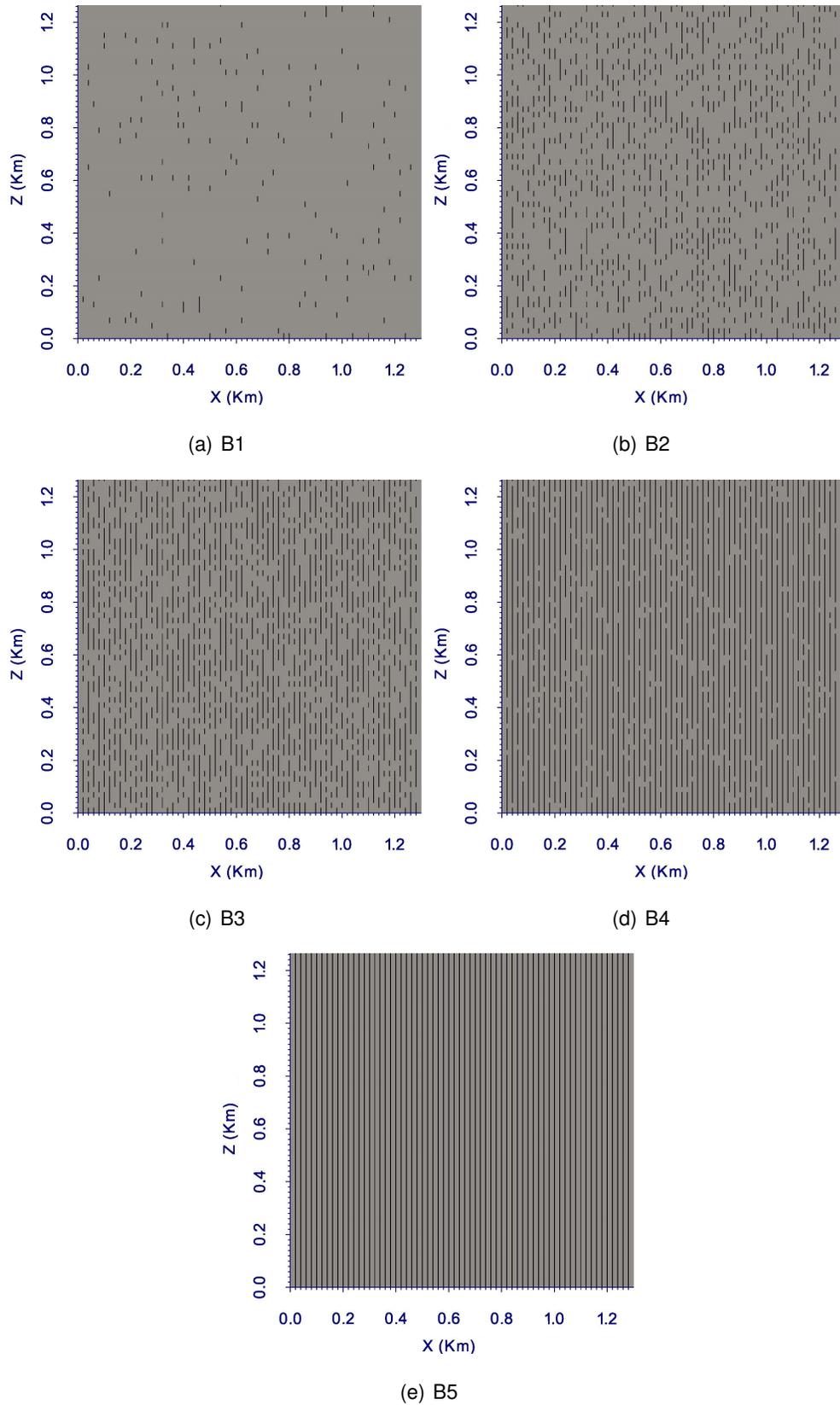
En la tabla 8 se muestran los resultados de la comparación de las simulaciones numéricas entre las diferentes RDF y las TME.

**Tabla 8:** Tabla de resultados del parámetro densidad de las fracturas.

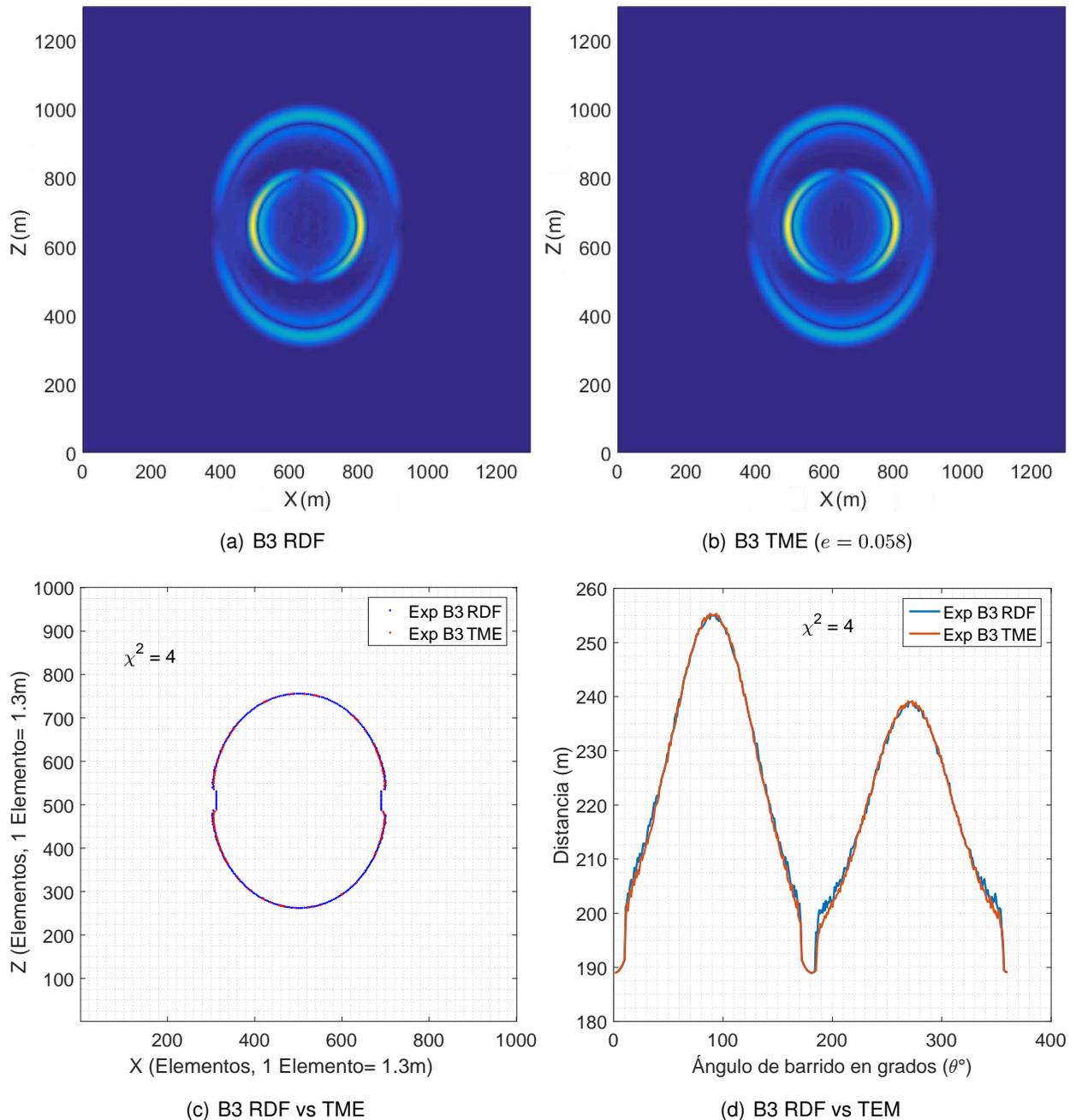
Experimento	$\chi_{obs}^2$	$\chi_{critico}^2$
B1	16	316
B2	150	
B3	4	
B4	>>	
B5	>>	

Como se puede observar en la tabla 8 los valores de  $\chi_{obs}^2$  para los experimentos B1, B2 y B3 son menores que  $\chi_{critico}^2$ , por tanto se muestra que las simulaciones de las RDF para estos experimentos concuerdan con los resultados de la teoría de Hudson (1980). La figura 10 muestra la comparación de los resultados de las simulaciones numéricas del experimento B3 asociado a

una densidad de fractura intermedia alta (ver tabla 7). Por otro lado, los experimentos B4 y B5 para el caso de los modelos teóricos pierden precisión y los resultados carecen de sentido físico; en la figura 12(b) se puede observar cómo los frentes de las ondas P y S en los extremos de la izquierda y la derecha adquieren casi la misma velocidad, deformándose el frente de la onda P y el de S también. Por tal motivo se omite la comparación cuantitativa, sin embargo se entiende que debido a que las diferencias entre las RDF y los modelos teóricos son grandes, esto es el valor de  $\chi_{obs}^2$  es grande en comparación de  $\chi_{critico}^2$  como se puede observar en la figura 12.



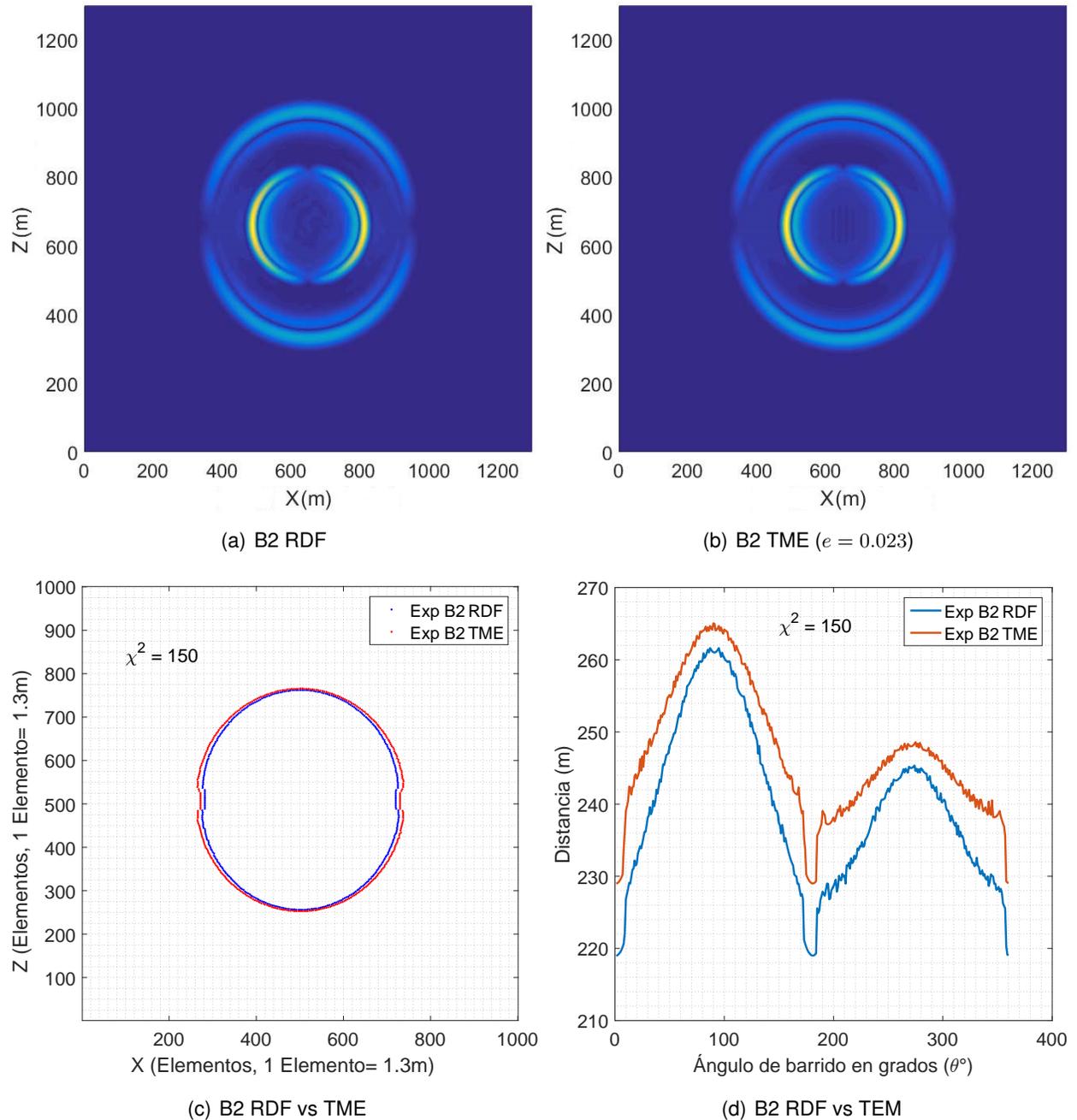
**Figura 9:** Rocas digitales con densidades de las fractura de 0.001, 0.023, 0.058, 0.103 y 0.124, respectivamente para los experimentos B1, B2, B3, B4 y B5 para la simulación numérica de la propogación de las ondas elásticas.



**Figura 10:** Resultado del experimento B3 de la simulación numérica de la densidad de las fracturas para la RDF (figura 10(a)) y la TME (figura 10(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 10(c), el valor de  $\chi_{obs}^2$  para el experimento B3 es 4. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas de la RDF y la TME se muestran en la figura 10(d).

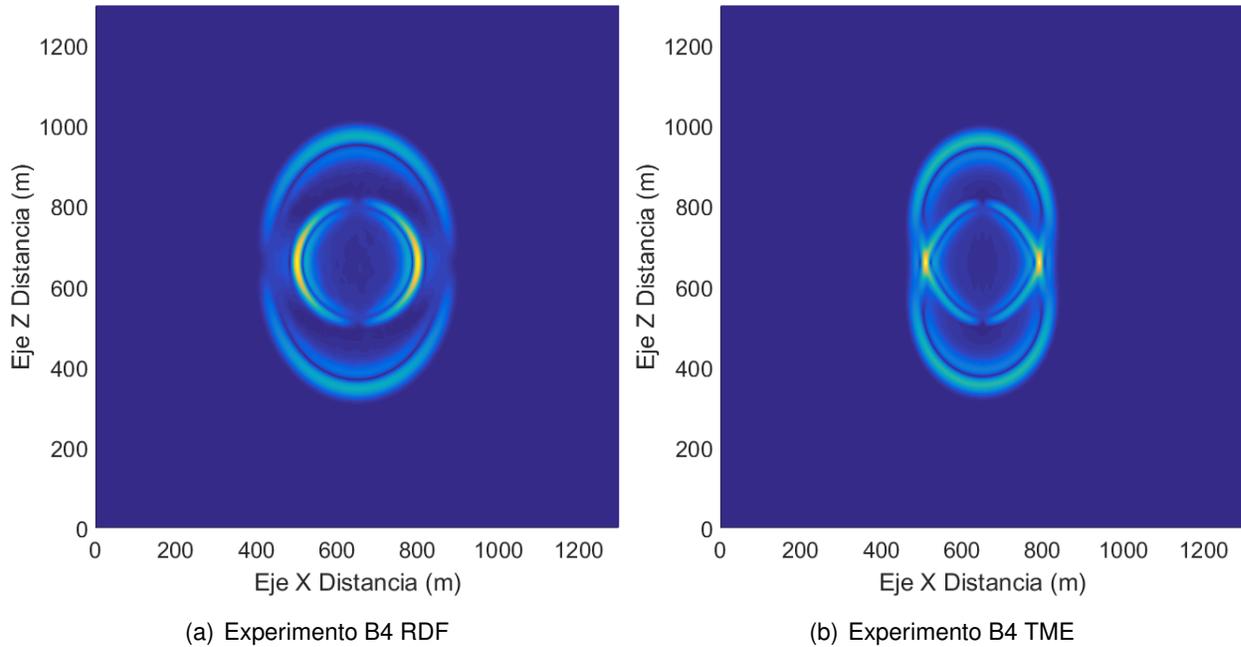
Por otra parte, se observa en la tabla 8 que el experimento B2 presenta un valor de  $\chi_{obs}^2 = 150$  el cual resalta por la diferencia en magnitud con los otros dos valores de  $\chi_{obs}^2$ . Con base en esta observación se comparan y analizan los resultados de las simulaciones de la RDF y la TME (ver figura 11) y se llega a la conclusión de que la TME de Hudson (1980) de primer orden no es tan sensible a los efectos anisotrópicos debido a densidades de las fracturas para valores alrededor

de  $e = 0.023$ , mientras que la simulación de la RDF sí presenta sensibilidad para este rango de valores de densidad de las fracturas, sin embargo cuando la densidad de las fracturas es  $e = 0.058$ , la afinidad entre ambos modelos es bueno.



**Figura 11:** Resultado del experimento B2 de la simulación numérica de la densidad de las fracturas para la RDF (figura 11(a)) y la TME (figura 11(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 11(c), el valor de  $\chi^2_{obs}$  para el experimento B2 es 150. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas de la RDF y la TME se muestran en la figura 11(d). En esta figura se muestra que la teoría de Hudson (1980) de primer orden presenta menor sensibilidad para la densidad de fracturas intermedia baja en comparación con la simulación de la RDF equivalente.

Con base en la tabla 8 de resultados y las figuras 10 y 12 se puede mostrar que la implementación de De Basabe *et al.* (2016) ofrece simulaciones numéricas con buena precisión para la propagación de ondas sísmicas en medios fracturados, de hecho las simulaciones numéricas de las RDF guardan congruencia con la física del problema para densidades de las fracturas donde la teoría de Hudson (1980) pierde precisión.



**Figura 12:** Resultado del experimento B4 de la simulación numérica de la densidad de las fracturas para la RDF (figura 12(a)) y la TME (figura 12(b)).

Los resultados de la figura 10 muestran que la precisión en función de la densidad de las fracturas de la teoría de primer orden de Hudson (1980) disminuye entre  $0.058 < e < 0.1$ , situación que difiere con los resultados de Grechka y Kachanov (2006a) quienes advierten que la teoría de Hudson (1980) pierde precisión para valores de la densidad de las fracturas mayores o iguales a 0.05, como se muestra en la figura 2. Se debe tomar en cuenta que la comparación de los resultados de Grechka y Kachanov (2006a) con los aquí mostrados no es directa debido a que Grechka y Kachanov (2006a) analizan sólo los elementos  $C_{e11}$  y  $C_{e22}$  del tensor de rigidez equivalente de diferentes TME, estos elementos del tensor de rigidez están directamente asociados con la onda P. Las simulaciones de la figura 10(b) muestran el campo de desplazamientos de las ondas P y S que genera el tensor de rigidez equivalente completo, es decir se consideran los 9 elementos distintos de cero, los cuales contemplan en conjunto el comportamiento de las ondas P, S y las de modo convertido, por lo cual éste último caso es una manera más apropiada de comprobar la precisión de la teoría de Hudson (1980).

Con base en los experimentos de esta sección se determina que la forma más adecuada para explorar las características de las secciones posteriores es usando una densidad de las fracturas  $e = 0.058$ .

#### 4.4 Orientación de las fracturas

Para investigar el efecto en la propagación de ondas elásticas debido a la orientación de las fracturas se diseñaron 4 experimentos, los cuales se muestran en la tabla 9.

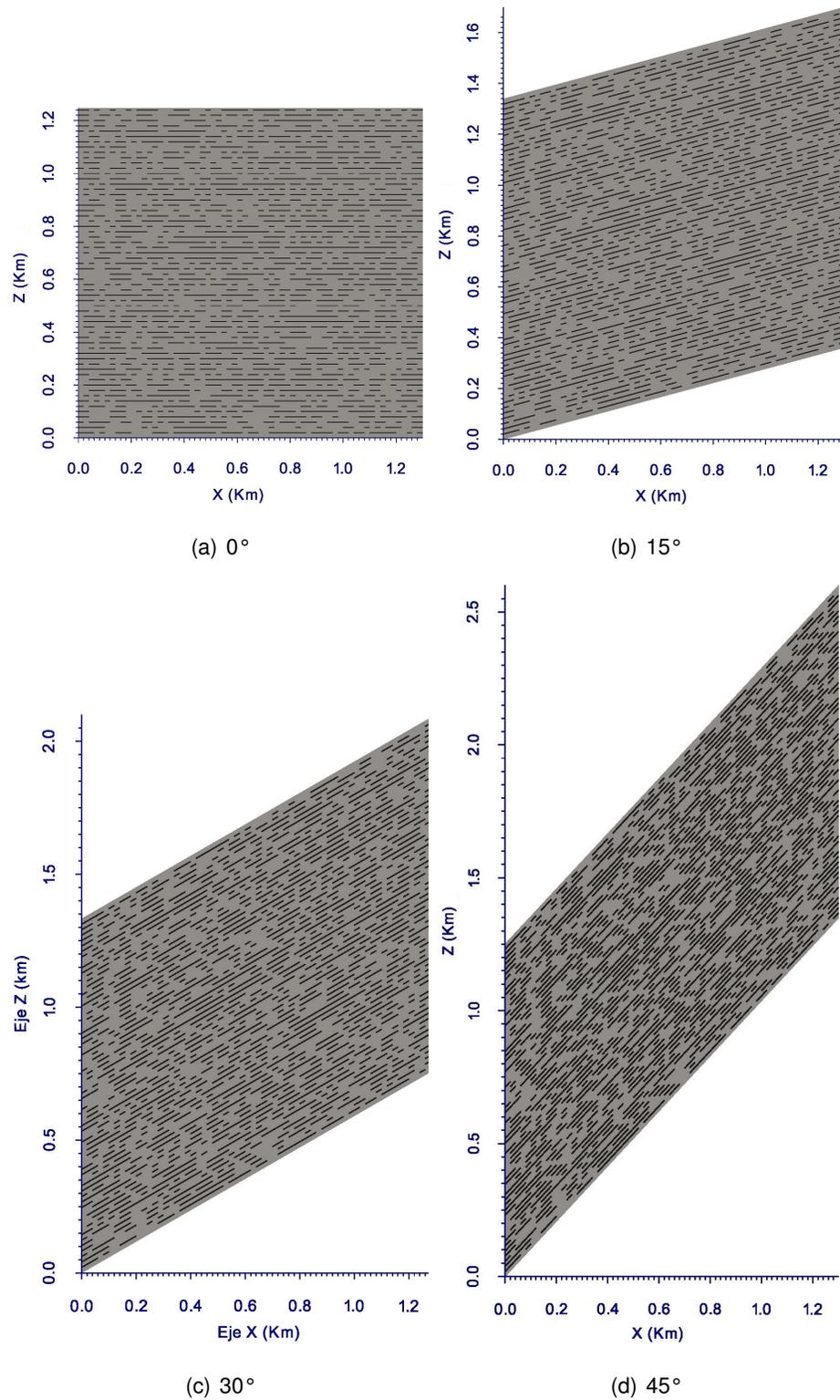
La construcción de las RDF del experimento C2 al C4 se realizaron con mallas donde los elementos no forman ángulos rectos entre sí, esto se obtiene desplazando uno de los lados de la malla cierta distancia en función del ángulo en cuestión, como se muestra en la figura 21. En el caso del experimento C1 se trata de una malla cuadrada donde se incluye un conjunto de fracturas secas horizontales paralelas al eje  $x$ , el cual representa  $0^\circ$  en el marco de referencia, de tal modo que las orientaciones de las fracturas de los experimentos C2 al C4 se miden respecto al eje  $x$  y los ángulos crecen en sentido opuesto a la dirección de las manecillas del reloj. Debido a que trabajar con mallas oblicuas multiplica el tiempo de cómputo de las simulaciones numéricas se eligió la longitud de las fracturas de 20 metros y la densidad de las fracturas intermedia alta ( $e = 0.058$ ) para el caso de las TME (ver tabla 9).

**Tabla 9:** Experimentos de simulación numérica de la propagación de ondas elásticas para fracturas con diferente orientación.

Experimento	Orientación	Long. fracs	No. fracs	e	malla
C1	$0^\circ$	20 metros	2496	$\approx 0.06$	65 × 65 elementos
C2	$15^\circ$				
C3	$30^\circ$				
C4	$45^\circ$				

Los modelos teóricos correspondientes a las RDF de la tabla 9 se calculan por medio de las ecuaciones 23 y 6 a 18, las propiedades de la matriz de la roca para los modelos teóricos y las RDF se encuentran en la tabla 2.

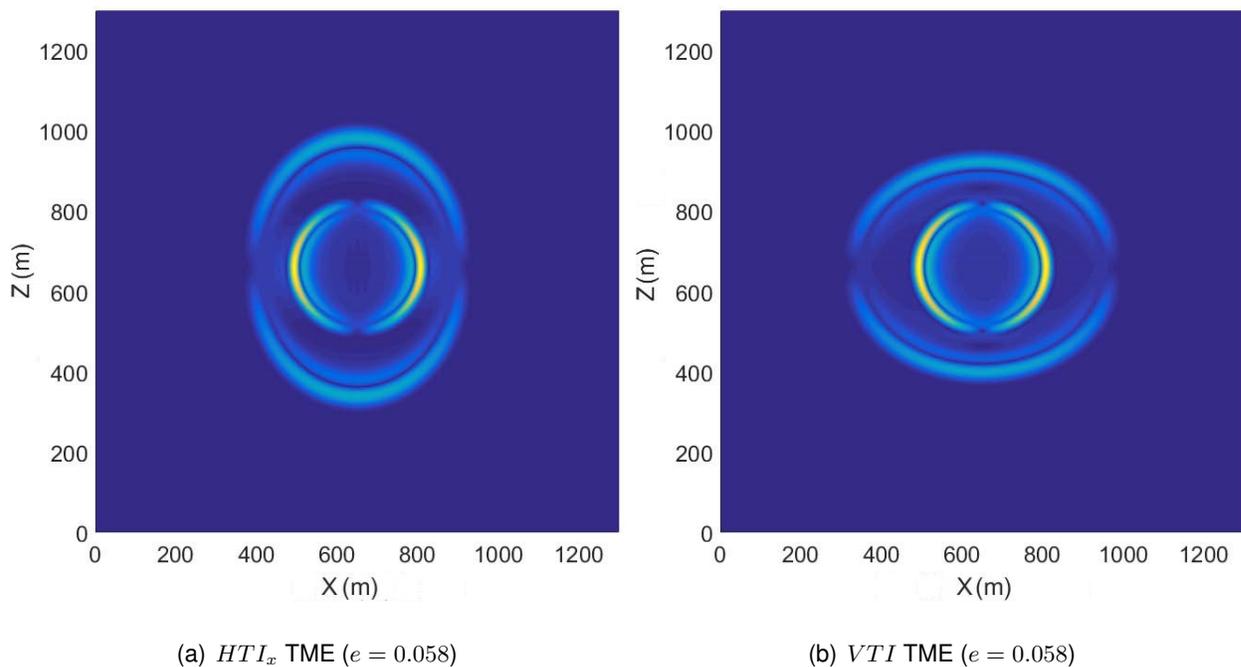
Las simulaciones numéricas tanto de las RDF como de los modelos teóricos se ejecutaron con base en los parámetros de la tabla 5 excepto la posición de la fuente sísmica para los experimentos C2 al C4, la cual se ubica en el centro del dominio en todos los casos. Las simulaciones numéricas son validadas y procesadas del mismo modo que en la sección 4.2.



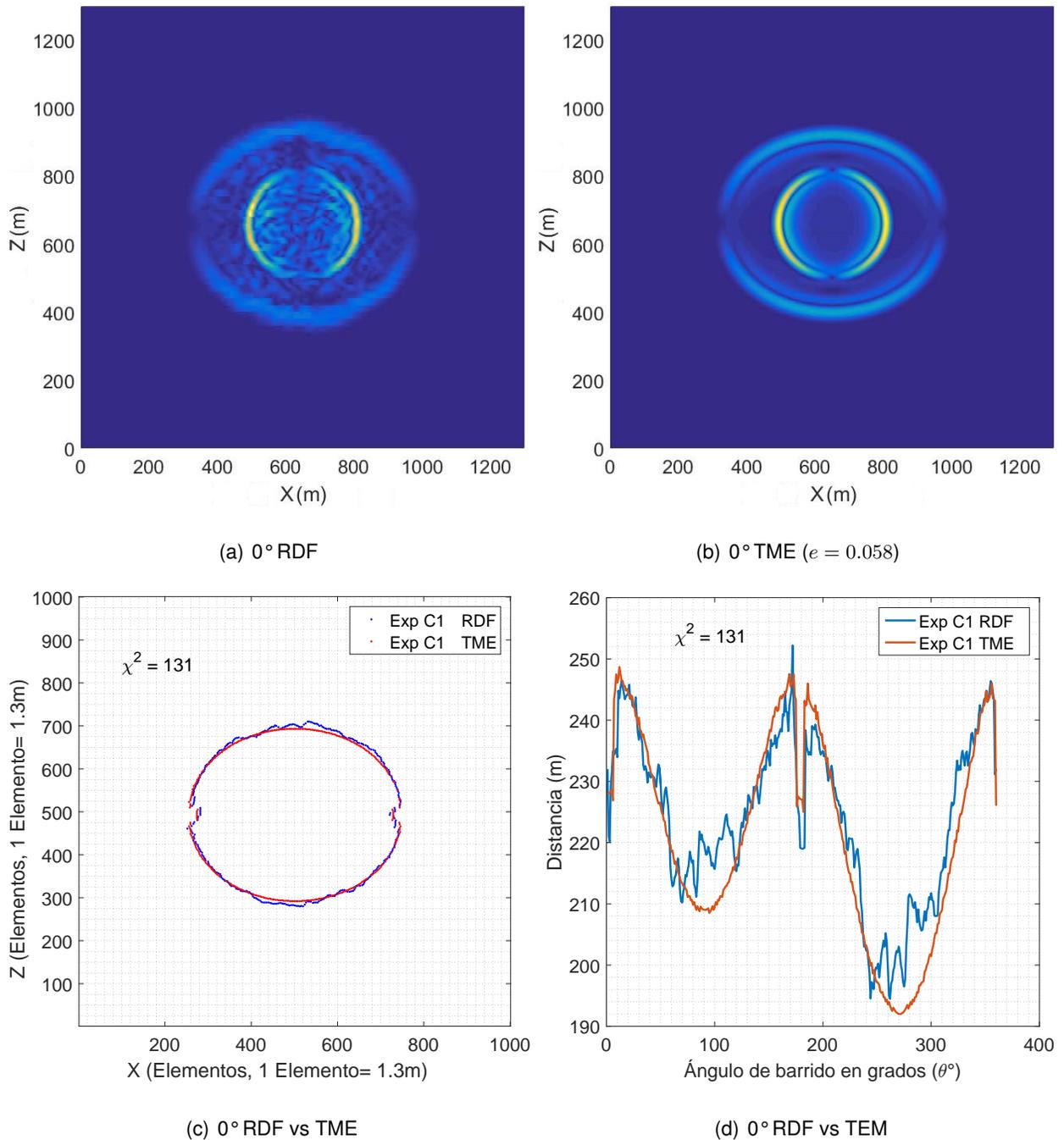
**Figura 13:** Rocas digitales con orientación de las fracturas de  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $45^\circ$  respectivamente para los experimentos C1, C2, C3 y C4.

En primer lugar, se muestra en la figura 15 el resultado del experimento con orientación a

$0^\circ$  que a su vez determina el marco de referencia para los experimentos de la orientación de las fracturas. Con base en este resultado también se comparan las diferencias en los frentes de ondas de las ondas P y S de un medio fracturado del tipo *VTI* con uno *HTI<sub>x</sub>* (ver figura 5). La comparación (figura 14) permite comprobar que en ambos casos que el efecto anisotrópico en el frente de onda P se encuentra directamente relacionado con la orientación de las fracturas, puesto que la velocidad de propagación del frente de la onda P es mayor en la dirección paralela a las fracturas, este es el motivo por el cual el frente de la onda P resulta en una simetría elíptica para el caso de medios equivalentes del tipo *VTI* y *HTI<sub>x</sub>*. Cabe destacar que la fuente sísmica para el total de las simulaciones numéricas mantiene la misma orientación.



**Figura 14:** Comparación entre la propagación de ondas sísmicas de medios *HTI<sub>x</sub>* y *VTI*. La figura 14(a) corresponde a al medio *HTI<sub>x</sub>* y la figura 14(b) al modelo *VTI*.



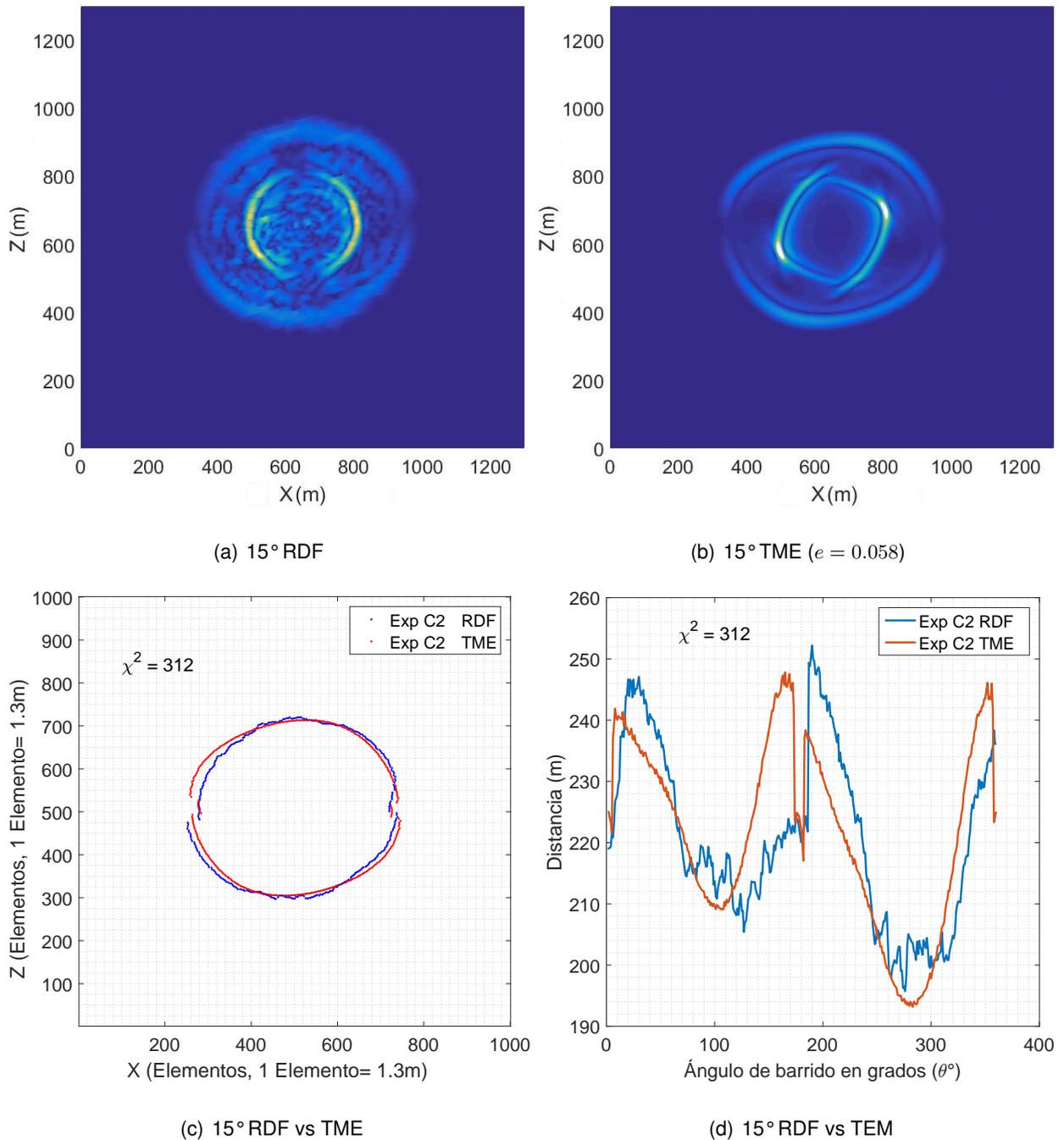
**Figura 15:** Resultado del experimento de la simulación numérica de la orientación de las fracturas a 0° para la RDF (figura 15(a)) y la TME (figura 15(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 15(c), el valor de  $\chi_{obs}^2$  para el experimento 5.3.1 es 131. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas se muestran en la figura 15(d).

Los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF y los modelos teóricos para los experimentos C2 y C3 se muestran en las figuras 16 y 17, mientras que los resultados de las comparaciones entre las RDF y las  $\chi_{obs}^2$  de los 4 experimentos se muestran en la tabla 10.

**Tabla 10:** Tabla de resultados del experimento de orientación de las fracturas.

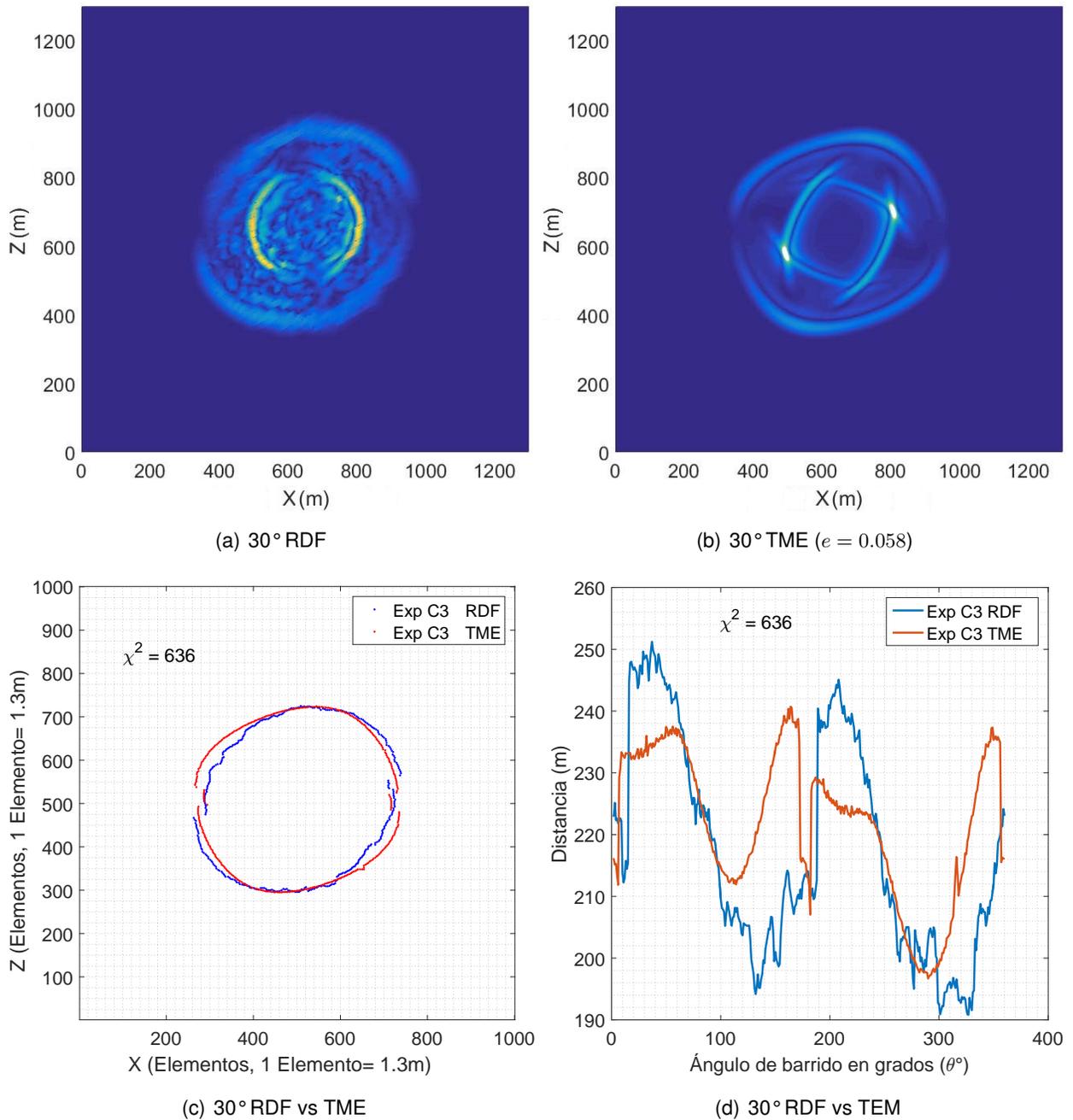
<b>Exp.</b>	<b>Orientación</b>	$\chi_{obs}^2$	$\chi_{critico}^2$
C1	0°	131	316
C2	15°	312	
C3	30°	636	
C4	45°	1480	

El análisis de los resultados de las simulaciones numéricas de la propagación de las ondas elásticas en función de la orientación de las fracturas tiene diferentes aspectos a considerar. El primero son las diferencias que se observan al comparar los frentes de ondas P y S de las simulaciones de las RDF y los modelos teóricos, por ejemplo ver las figuras 16(a) y 16(b) o las figuras 17(a) y 17(b). Con base en estos ejemplos se muestra que existen notables diferencias entre la respuesta en la propagación sísmica de la teoría de Hudson (1980) y la respuesta de la RDF; respecto a la onda P se observa que el frente de onda para el caso de las RDF guarda una simetría aproximadamente elíptica mientras que para el caso de los modelos teóricos pierden la simetría elíptica y tiende más a una simetría donde se combina una elipse con un cuadrilátero, sin embargo se mantienen los ejes de simetría con la orientación de las fracturas. Por otro lado, cuando se analizan los frentes de ondas S las diferencias son mayores. En este trabajo nos concentraremos en el análisis de los frentes de ondas P debido a que muestran mayor sensibilidad a cambios en la microestructura del medio fracturado. El segundo aspecto se enfoca a la relevancia que guarda la orientación de las fracturas en la propagación de ondas sísmicas, puesto que siempre que sea posible definir un marco de referencia base, respecto a la fuente sísmica, la orientación del eje de simetría del frente de onda P comparado a los ejes de referencia de la medición será posible inferir información de la orientación de las fracturas. El último aspecto se refiere a la comparación de la precisión de la teoría de Hudson (1980) para modelos del tipo *TTI* contra modelos del mismo tipo para las RDF, es decir por medio de la teoría de Kachanov (1980), en este sentido las figuras 16(a)-16(b) y 17(a)-17(b) permiten hacer dos observaciones: 1) Las simulaciones numéricas de las RDF concuerdan con la física del problema mientras que los modelos teóricos difieren con la física del problema. Por tal motivo, se considera como una mejor alternativa la simulación de RDF para investigar el efecto de las propiedades microestructurales del medio fracturado. 2) Es posible que la pérdida de precisión de la teoría de Hudson (1980) sea debida a errores numéricos, por tal motivo se deben investigar las causas de la falta de precisión para confirmar si dicha teoría es confiable en la predicción de los efectos anisotrópicos debidos a modelos del tipo *TTI*.



**Figura 16:** Resultado del experimento de la simulación numérica de la orientación de las fracturas a 15° para la RDF (figura 16(a)) y la TME (figura 16(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 16(c), el valor de  $\chi^2_{obs}$  para el experimento C2 es 312. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas se muestran en la figura 16(d).

Con base en la tabla 10, los resultados muestran que la teoría de Hudson (1980) difiere con las respuesta de las simulaciones numéricas de la propagación de las ondas P de las RDF para orientaciones de las fracturas en el rango comprendido entre 15° y 30°.



**Figura 17:** Resultado del experimento de la simulación numérica de la orientación de las fracturas a  $30^\circ$  para la RDF (figura 17(a)) y la TME (figura 17(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 17(c), el valor de  $\chi^2_{obs}$  para el experimento C3 es 636. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas se muestran en la figura 17(d).

## 4.5 Conectividad entre fracturas

En esta sección se investiga el efecto de la conectividad entre fracturas en la propagación de ondas elásticas. Es importante recordar que las TME utilizadas en el análisis del medio fracturado suponen que no existe interacción entre las fracturas, por tal motivo investigar el efecto de conec-

tividad entre fracturas significa explorar el resultado de dicho efecto violando explícitamente las hipótesis básicas de las TME. En la literatura se encuentran reportadas 4 formulaciones (Hudson, 1981; Bakulin *et al.*, 2000b; Grechka y Kachanov, 2006c; Mavko *et al.*, 2009) que específicamente atienden el análisis del medio fracturado con dos conjuntos de fracturas ortogonales entre sí, sin embargo como se trata de diferentes versiones de TME's se asume que no se considera el efecto de conectividad debido a la aproximación de no interacción (ANI), aunque por otro lado la teoría considera que la distribución de las fracturas es aleatoria y ésto podría sugerir que en algún punto las fracturas sí se encuentran interconectadas, sin embargo no se considera explícitamente la conectividad en ninguno de estos artículos. Cabe destacar que las formulaciones de Hudson (1981) (ecuación 30) y Mavko *et al.* (2009) (ecuación 31) fueron desarrolladas con base en la formulación original de Hudson (1980), sin embargo la primera es específicamente para 2 conjuntos de fracturas mientras que la segunda es para 3 conjuntos de fracturas ortogonales entre sí pero es posible adecuar las fórmulas a sólo dos conjuntos. Lo importante en esta acotación es que Hudson (1981) consideró un promediado en el procedimiento del cálculo del tensor de rigidez asociado a las fracturas, mismo que no es incluido en las ecuaciones de Mavko *et al.* (2009), sin embargo los resultados de Mavko *et al.* (2009) concuerdan mejor acuerdo con los resultados de las simulaciones numéricas ejecutadas en las RDF, por esta razón el cálculo de los modelos teóricos utilizados en la comparación de las simulaciones numéricas están desarrollados con base en Mavko *et al.* (2009). Por otra parte, también se experimenta con las ecuaciones proporcionadas por Bakulin *et al.* (2000b) (ecuaciones 56-59), los resultados de la comparación se muestran en la figura 19. En el caso de las ecuaciones de Grechka y Kachanov (2006c), éstas se encuentran en términos del tensor de conformidad de las fracturas, de modo que no es posible en este momento simular este tipo de ecuaciones en el software SWP, por tanto no se muestran resultados de esta comparación de la TME con la RDF.

Las características de la matriz de la roca de las RDF se encuentran en la tabla 2, la roca contiene dos conjuntos de fracturas ortogonales entre sí, es decir un conjunto del tipo  $VTI$  y el otro del tipo  $HTI_x$ , cada conjunto de fracturas contiene el mismo número de fracturas, el cual corresponde a una densidad de fracturas intermedia alta. En esta ocasión se ejecutan 2 diferentes simulaciones de las RDF, una con la longitud de las fracturas igual a 20 metros y la otra con la longitud de las fracturas igual a 1 metro, para ambos casos las mallas son cuadradas y las fracturas se distribuyen aleatoriamente en la RDF. La figura 18 muestra la RDF en 2D para el caso de la longitud de las fracturas igual a 20 metros. La tabla 11 presenta las características principales de las RDF para el parámetro de conectividad de las fracturas.

**Tabla 11:** Experimentos de simulación numérica de la propagación de ondas elásticas en medios fracturados con dos conjuntos de fracturas conectados y ortogonales entre sí. En la tabla  $l_i$  es la longitud de las fracturas.

Exp	$l_i$ [m]	$e \times$ conjunto	$n f_i$	Dim. de la malla
D1	1	0.058	2025794	1300×1300 elementos
D2	20	0.058	5064	65×65 elementos

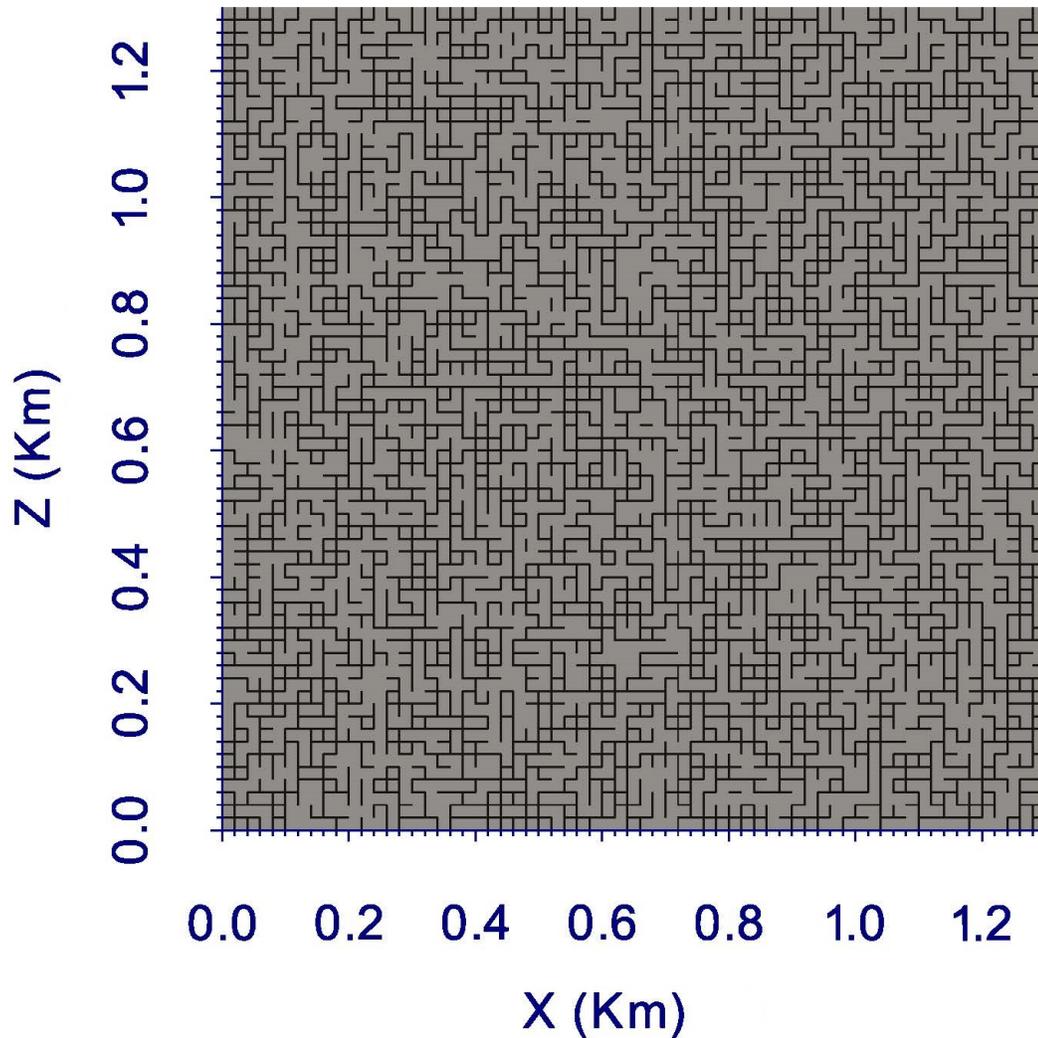
Como se mencionó anteriormente, se utilizaron 2 diferentes TME. En primer lugar se calculó el modelo teórico con base en la teoría de Bakulin *et al.* (2000b) mediante el uso de las ecuaciones 56-59. En segundo lugar, se calculó el modelo teórico con base en la TME de Hudson (1980) reportada por Mavko *et al.* (2009) para el caso de 3 conjuntos de fracturas ortogonales. Ambos modelos se compararon con el resultado de la simulación numérica de la RDF equivalente, las comparaciones se muestran en las figuras 19 y 20.

Los parámetros de la fuente sísmica y otras características de las simulaciones numéricas se encuentran en la tabla 5. La validación de las simulaciones numéricas y el procedimiento de graficación y comparación de los resultados se encuentra en la sección 4.2. De esta manera, el valor de  $\chi_{critico}^2 = 316$  continua siendo la referencia respecto al valor de  $\chi_{obs}^2$  para cada experimento, los valores de  $\chi_{obs}^2$  para los experimentos de conectividad simulados se reportan en la tabla 12.

**Tabla 12:** Resultados de los experimentos para la conectividad entre dos conjuntos de fracturas ortogonales.

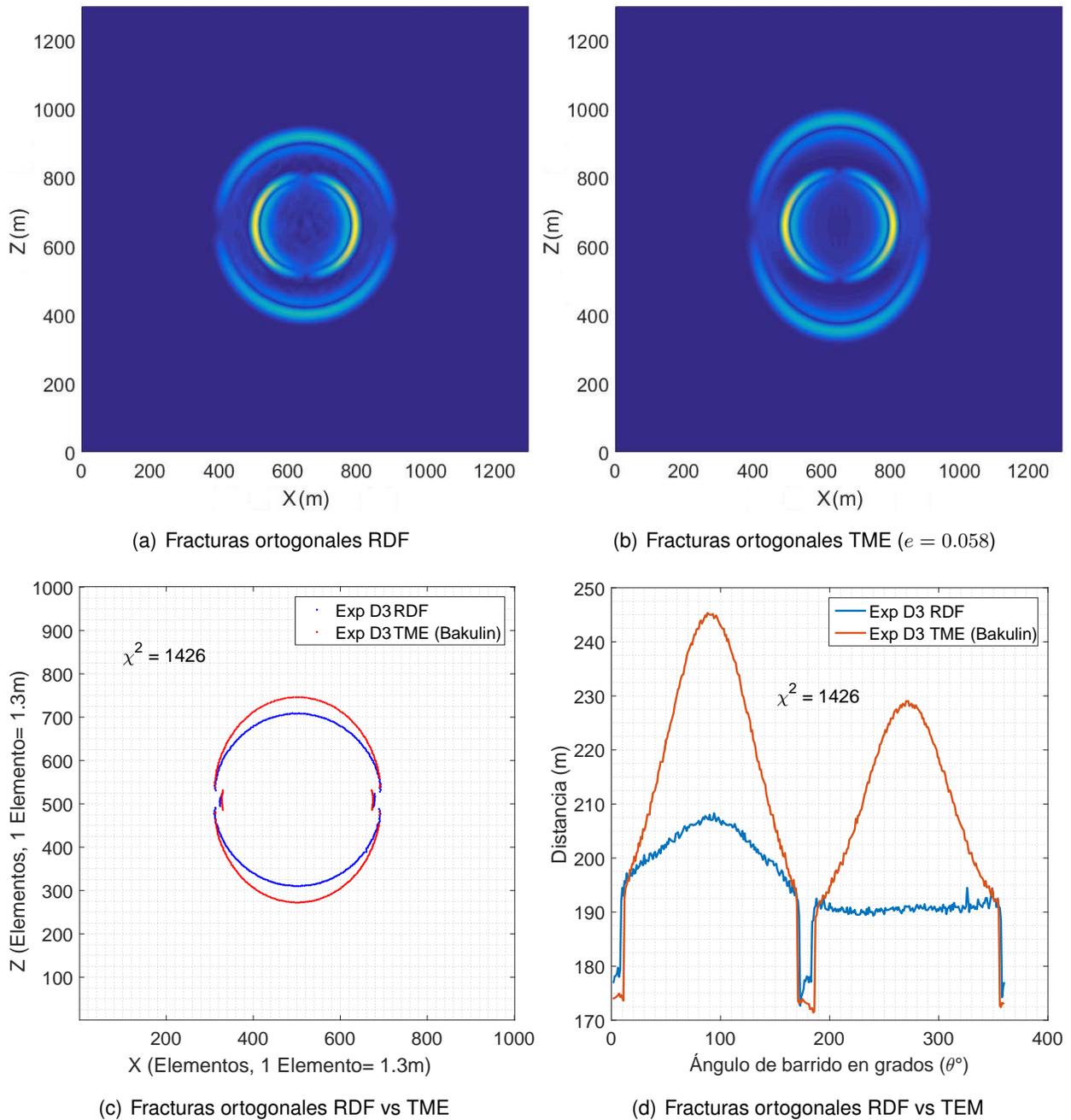
Exp	Comparación	$e \times$ conjunto	$\chi_{obs}^2$	$\chi_{critico}^2$
D3	RDF vs TME (Bakulin)	0.058	1426	316
D4	RDF vs TME (Hudson)		1268	
D5	RDF vs TME (Hudson)		1032	

El análisis de los resultados en esta sección no se concentra exclusivamente en la comparación de los valores de  $\chi_{obs}^2$  con  $\chi_{critico}^2$  debido a que las diferencias son grandes, pero sobre todo no existe una similitud evidente entre las diferentes simulaciones numéricas correspondientes al efecto de conectividad entre fracturas. En primer lugar se analizaron los resultados del experimento D3. La figura 19(a) muestra el resultado de la simulación de la RDF mientras que la figura 19(b) muestra el resultado de la simulación de la TME de Bakulin *et al.* (2000b). Las figuras 19(c) y 19(d) muestran las diferencias entre los frentes de las ondas P de la RDF y la TME. Se observa que el frente de la onda P descrito por la TME de Bakulin *et al.* (2000b) posee una simetría elíptica, la cual es completamente diferente a la que presenta la simulación numérica de la RDF misma que tiende a una simetría circular. Esta gran diferencia entre ambos frentes de las ondas P es



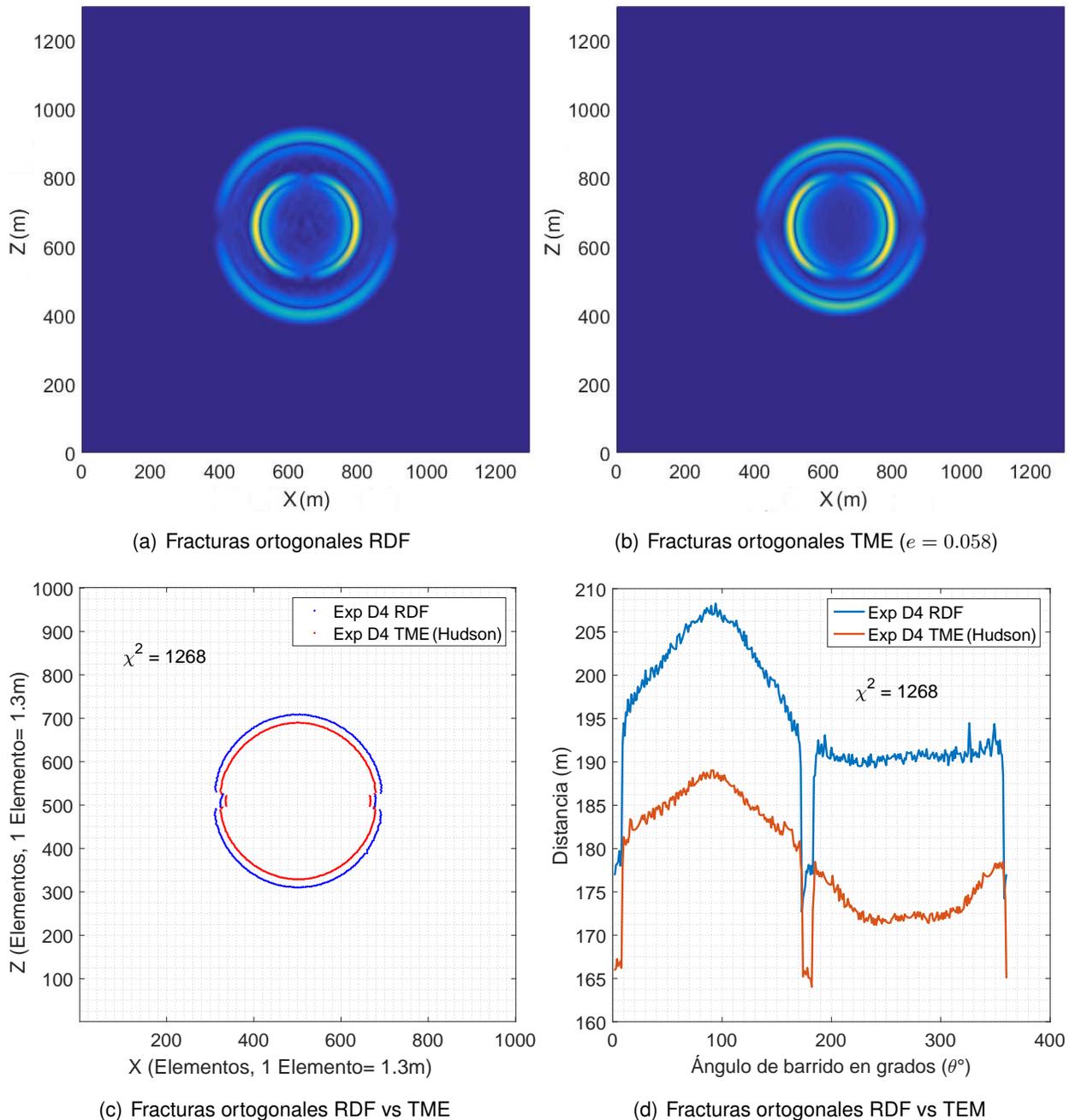
**Figura 18:** Roca digital con dos conjuntos de fracturas conectadas ortogonales entre sí correspondiente al experimento 5.3 de simulación numérica de proporción de las ondas elásticas en medios fracturados.

cuantificada con  $\chi_{obs}^2 = 1426$ . Por otra parte, la figura 20 es equivalente a la figura 19 pero ahora la comparación es con el resultado de la simulación numérica de la TME de Hudson (1980) y la simulación de la RDF; en este caso los dos frentes de las ondas P muestran simetrías similares, sin embargo la simulación de la TME tiene un retraso mayor respecto a la RDF, como se observa en la figura 20(c), cabe destacar que el efecto observado tanto en la RDF como en la TME debido a la presencia de dos conjuntos de fracturas mutuamente ortogonales, donde en la RDF es explícito el contacto (ver figura 18) mientras que en la TME no lo es, ocasiona un retraso en la propagación de las ondas P y S, sin embargo como ya se mencionó el retraso es mayor en la simulación del modelo teórico. Este efecto debido a la conectividad de las fracturas, también es reportado en experimentos de laboratorio realizados por Shao y Pyrak-Nolte (2016), en dicha



**Figura 19:** Resultado del experimento D3 RDF (figura 19(a)) y la TME (Bakulin *et al.* (2000b)) (figura 19(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 19(c), el valor de  $\chi_{obs}^2$  para el experimento D3 es 1426. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas se muestran en la figura 19(d).

investigación se concluye que el retraso en la propagación de las ondas de cuerpo debido a la intersección de fracturas es mayor que el esperado por la simple superposición de dos conjuntos de fracturas actuando solos. La conclusión del trabajo de Shao y Pyrak-Nolte (2016) ofrece una pista de la razón por la cual la simulación numérica de la TME de Hudson (1980) en esta investigación presenta un retraso mayor que la de la RDF, sin embargo no es posible asegurar que este sea el



**Figura 20:** Resultado del experimento D4 RDF (figura 20(a)) y la TME (Hudson (1980)) (figura 20(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 20(c), el valor de  $\chi^2_{obs}$  para el experimento D4 es 1268. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas se muestran en la figura 20(d).

motivo, además de que los resultados de las diferentes TME que analizan el mismo problema no concuerdan entre sí, el ejemplo más claro es el trabajo de Hudson (1981) y Mavko *et al.* (2009), los cuales parten del mismo modelo pero el procedimiento seguido en el cálculo del tensor de rigidez asociado a las fracturas en ambos casos difiere y por tanto los resultados difieren también. Cabe destacar que la diferencia entre ambos resultados es la ausencia del retraso en la propagación de

las ondas de cuerpo para el caso de la TME de Hudson (1981).

Con base en estos resultados se concluye que debido a las inconsistencias mostradas por las diferentes TME no se puede determinar si las simulaciones numéricas de las RDF corresponden a un efecto real de la conectividad de las fracturas, sin embargo es importante destacar que las simulaciones numéricas de las RDF han mostrado consistencia y concordancia con la física del problema en mayor grado que las TME, esto aumenta la confiabilidad de los resultados aunque sí es necesaria una comparación confiable. Se recomienda profundizar en la investigación de la conectividad del medio fracturado usando modelado directo, pues con base en los resultados de esta investigación y trabajos como los de Shao y Pyrak-Nolte (2016) y Guo *et al.* (2016) se presentan evidencias de que la conectividad entre las fracturas es un parámetro determinante en la caracterización de fracturas.

El siguiente apartado es una extensión del estudio de la conectividad entre fracturas, pero ahora se analiza el efecto que causa el ángulo entre fracturas en combinación con la conectividad.

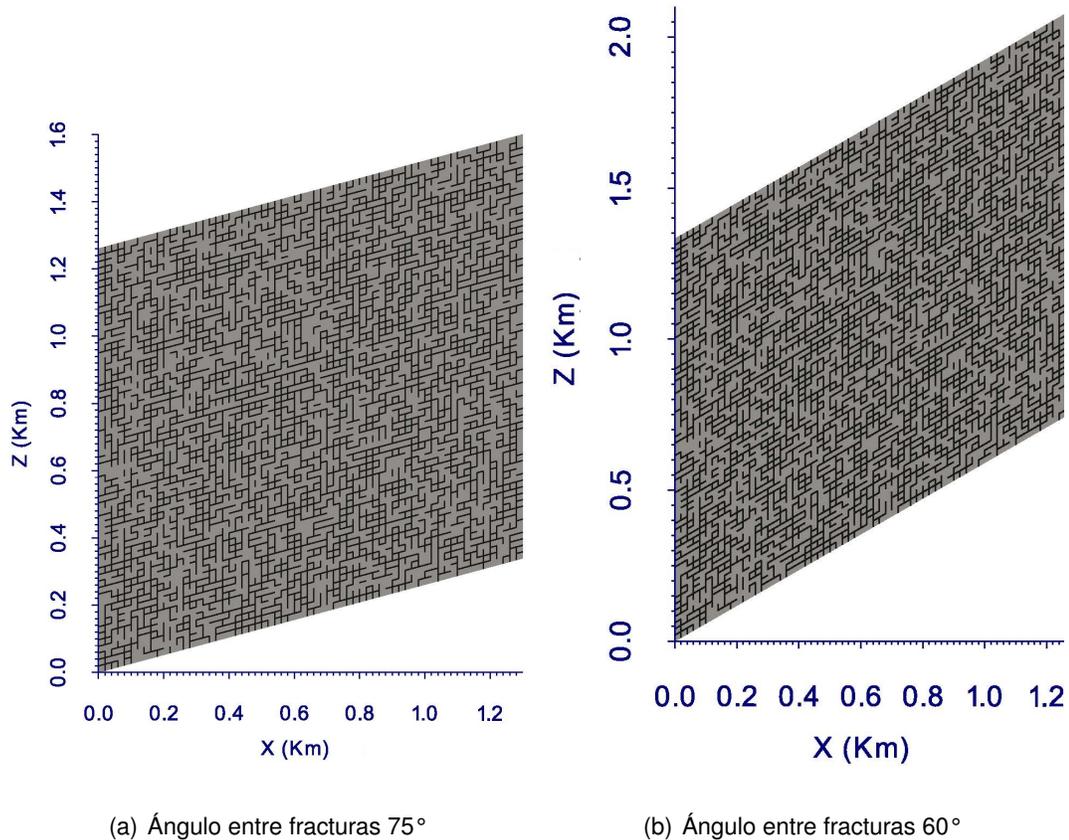
## 4.6 Ángulo entre fracturas conectadas

Para investigar el efecto anisotrópico que causa el ángulo entre fracturas conectadas en la propagación de las ondas P en las RDF se diseñaron 2 experimentos. El primero consiste en construir una RDF, la cual está compuesta por dos conjuntos de fracturas oblicuas entre sí; uno de estos conjuntos es del tipo  $HTI_x$  mientras que el otro conjunto está formado por fracturas con orientación a  $15^\circ$ . El segundo consiste en la construcción de una RDF co., uno del tipo  $HTI_x$  y el otro del tipo  $TTI$  a  $30^\circ$ . Cabe mencionar que también se experimentó con dos conjuntos de fracturas oblicuas conectadas con conjuntos de fracturas  $HTI_x$  y  $TTI$  a  $45^\circ$ . Para los tres casos se calculó el modelo teórico equivalente con base en la TME de Hudson (1980) y Mavko *et al.* (2009), como la TME de Hudson (1980) carece de sentido físico para modelos con estas características sólo se presenta la comparación del segundo modelo antes descrito.

De igual forma que los experimentos de fracturas ortogonales, se elige la densidad de fracturas intermedia alta ( $e = 0.058$ ) para cada uno de los conjuntos de fracturas que componen las RDF y modelos teóricos en esta sección. Las características físicas de la matriz de la roca de los modelos se encuentran en la tabla 2. En la tabla 13 se presentan las características principales de los experimentos del ángulo entre fracturas para las RDF. Las RDF de estos experimentos se muestran en la figura 21.

**Tabla 13:** Resultados de los experimentos para la conectividad entre dos conjuntos de fracturas ortogona-les.

Ángulo entre fracturas conectadas	Conjuntos de fracturas	$e \times$ conjunto	Longitud de la fractura	No. de fracturas totales
E1	$HTI_x$ & $TTI$ $15^\circ$	0.058	20 metros	4992
E2	$HTI_x$ & $TTI$ $30^\circ$			



**Figura 21:** Rocas digitales con diferente ángulo entre fracturas conectadas. La figura 21(a) corresponde a la RDF con un conjunto de fracturas del tipo  $HTI_x$  y otro  $TTI$  a  $15^\circ$  (experimento E1). La figura 21(b) corresponde a la RDF con un conjunto de fracturas del tipo  $HTI_x$  y otro  $TTI$  a  $30^\circ$  (experimento E2).

El modelo teórico equivalente a la RDF del experimento E3 se realizó con base en el procedimiento descrito por Hudson (1981), el cual establece que el tensor de rigidez asociado a las fracturas cuando el modelo contiene dos o más conjuntos de fracturas se obtiene mediante la suma directa de los tensores de rigidez de cada conjunto de fracturas (ecuación 29), sin embargo en este caso uno de los conjuntos de las fracturas es del tipo  $TTI$  a  $30^\circ$ , por tal motivo antes de realizar la suma se debe trasladar un conjunto de fracturas  $VTI$  a la orientación de  $30^\circ$  por medio de las ecuaciones 6 a 18, finalmente se suma el tensor asociado con los dos conjuntos de

fracturas con el tensor de rigidez de la matriz de la roca. El resultado de la simulación se observa en la figura 22(b). Como se mencionó anteriormente, este resultado carece de sentido físico y muestra de que la teoría de Hudson (1980) pierde precisión para modelos con dos conjuntos de fracturas, pues la forma del frente de la onda P muestra una simetría que no concuerda con el resultado de la simulación numérica de la RDF (ver figura 22(a)), aunque cabe destacar que ambos resultados son similares en la dirección principal (dirección del eje de simetría) de la propagación de las ondas P.

La comparación de los resultados del experimento E3 de la RDF con la TME se presenta en la figura 22. El valor de  $\chi^2_{critico} = 316$  continua siendo la referencia respecto al valor de  $\chi^2_{obs}$  para el experimento E3. El valor de  $\chi^2_{obs} = 2480$  indica la poca similitud que guardan los frentes de las ondas de la RDF y la TME.

Dado que la comparación de las simulaciones numéricas de las RDF con las TME no aportan información valiosa para el análisis detallado del efecto anisotrópico en los frentes de ondas P por la falta de precisión de la teoría de Hudson (1980), se compararon los resultados de las simulaciones del parámetro de ángulo entre fracturas conectadas de las RDF con los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF para fracturas mutuamente ortogonales conectadas, de esta manera se puede tener una medida del efecto del ángulo entre las fracturas. Los resultados de las comparaciones se presentan en la tabla 14 mientras que la comparación más representativa del ángulo entre fracturas se encuentra en la figura 23.

**Tabla 14:** Resultados de los experimentos el ángulo entre fracturas conectadas.

Ángulo entre fracturas	Comparación	Conjuntos de fracturas	$\chi^2_{obs}$	$\chi^2_{critico}$
E1	RDF Orto vs RDF Oblic	$HTI_x$ & $TTI$ 15°	234	316
E2	RDF Orto vs RDF Oblic	$HTI_x$ & $TTI$ 30°	863	
E3	RDF Oblic vs TME Oblic	$HTI_x$ & $TTI$ 30°	2480	

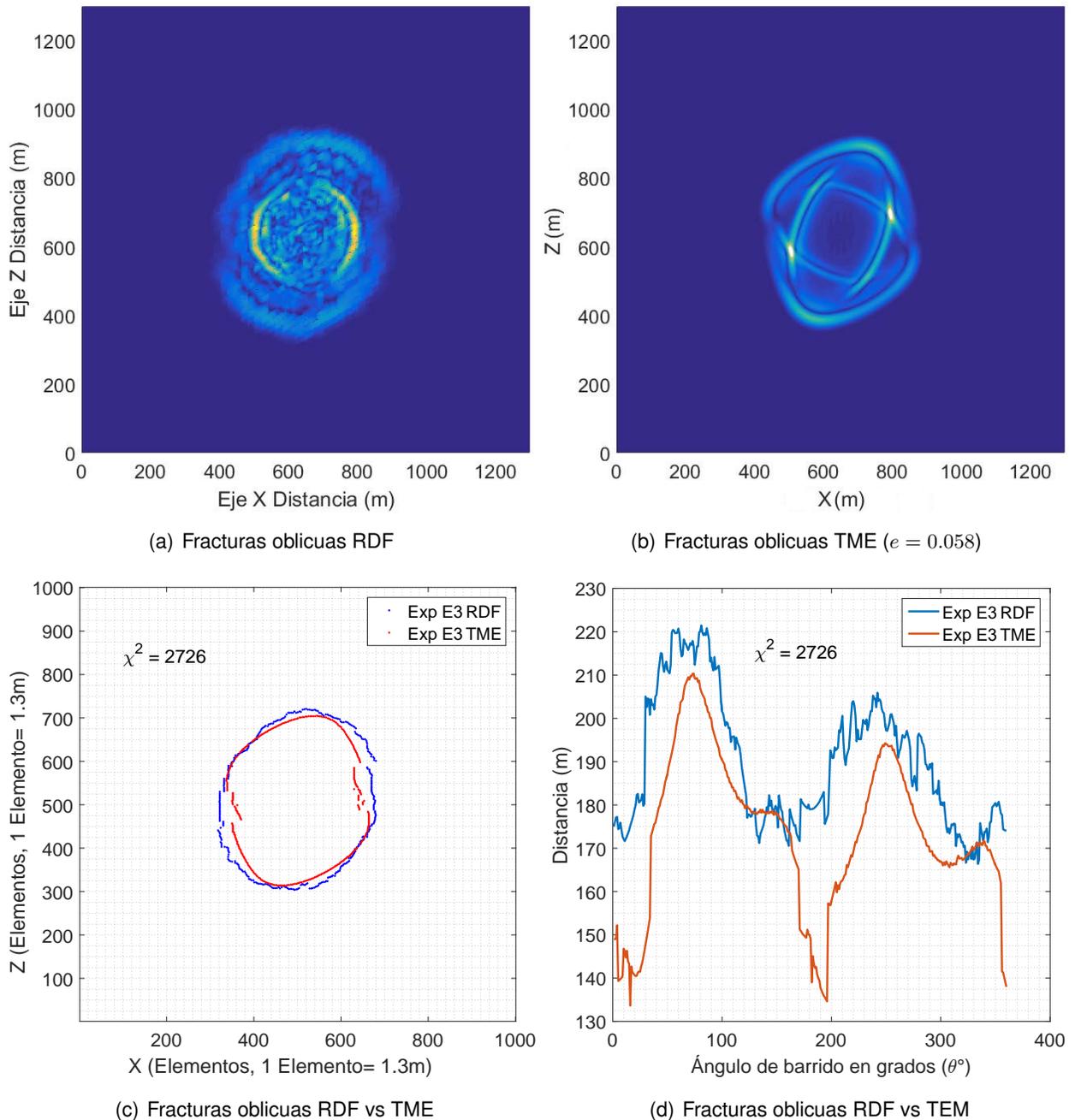
En la figura 22(a), la cual corresponde al resultado de la simulación numérica de la RDF del experimento E3, se observa que la propagación del frente de la onda P es la esperada, es decir si se considera que el ángulo entre las fracturas para este experimento es 60°, se espera que el eje de simetría de la propagación del frente de la onda P tenga una inclinación aproximada de 60° medidos desde el eje  $x$  hasta el eje de simetría de la elipse; situación que cualitativamente se observa. Adicional a esta observación se tiene que el efecto del retraso de la propagación de la onda P asociado a la conectividad de las fracturas también se encuentra presente, es decir,

cuando se combina el efecto de conectividad de las fracturas y el ángulo entre los conjuntos de las fracturas sucede que la propagación de las ondas P y S sufren un retraso y el frente de onda P se propaga en una dirección preferencial, que es aproximadamente la dirección determinada por la bisectriz resultante del ángulo formado por los dos conjuntos de fracturas. Cabe mencionar que la dirección de propagación preferencial para el frente de la onda P de la TME también cumple con esta observación (ver figura 22(c)). Por otra parte, el experimento E1 también cumple con la aproximación de la dirección preferencial de propagación de la onda P.

La figura 23 es otra manera de visualizar la dirección preferencial de la propagación de la onda P para un medio fracturado con dos conjuntos de fracturas no ortogonales conectados, en esta figura se compara la RDF con fracturas oblicuas con otra RDF pero con fracturas ortogonales. Con base en la figura 23(c) se puede apreciar una fuerte similitud en la orientación del eje de simetría del frente de la onda P del experimento E2 con el resultado de la simulación numérica de un conjunto de fracturas orientadas a 45°.

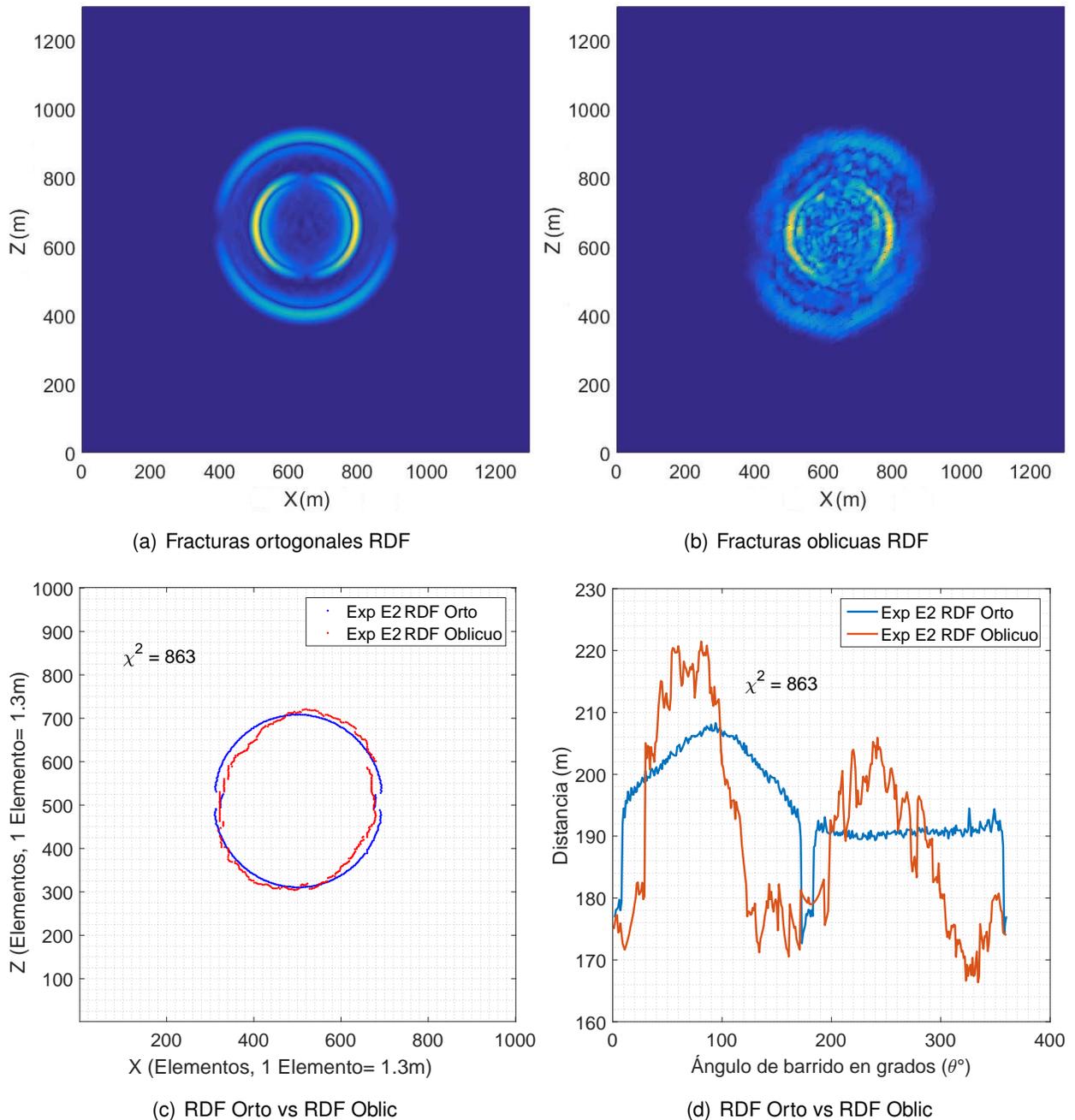
Un último análisis de los resultados de la tabla 14 se remite al significado de los valores de  $\chi_{obs}^2$  comparados con los valores de  $\chi_{critico}^2$  para los experimentos E1 y E2 donde se comparan las simulaciones numéricas de las RDF entre sí. El ejemplo que se muestra la figura 23, en la cual se determina un valor de  $\chi_{obs}^2 = 863$  que comparado con el valor crítico de 316 significa que entre los frentes de las ondas P existen grandes diferencias, lo cual es evidente en la figura 23(c) pues la RDF con fracturas oblicuas exhibe un frente de la onda P parecida a una elipse mientras que el otro frente de la onda P es parecida a un círculo. En particular, la intención de comparar los frentes de las ondas P de las RDF con fracturas oblicuas con la RDF de fracturas ortogonales es tener un parámetro de referencia sobre que es lo que le sucede al frente de las ondas P de las RDF cuando el ángulo entre fracturas crece. Para cumplir con este objetivo ahora se analiza el valor de  $\chi_{obs}^2$  para el caso de la simulación numérica de la RDF con dos conjuntos de fracturas oblicuas donde el ángulo que se forma entre las fracturas es 75°, para este caso el valor de  $\chi_{obs}^2$  es igual a 234, el cual al ser comparado con el valor de  $\chi_{critico}^2 = 316$  significa que la forma del frente de la onda P de la RDF con un ángulo entre fracturas igual a 75° tiende a la forma de un círculo. Por tanto se concluye que el grado de elipticidad de los frentes de las ondas P puede ofrecer información del ángulo que separa a los conjuntos de fracturas conectadas. Dicho de otro modo, si el ángulo entre las fracturas es cercano a 90° el frente de la onda P tiende a ser circular mientras que si el ángulo entre las fracturas se acerca a 45° el frente de las ondas P tiende a ser elíptico.

Por último se analiza la figura 24, aquí se pueden observar principalmente dos situaciones.



**Figura 22:** Resultado del experimento de la simulación numérica de ángulo entre fracturas conectadas para la RDF (figura 22(a)) y la TME (Hudson (1980)) (figura 22(b)). La comparación de los frentes de las ondas P se muestra en la figura 22(c), el valor de  $\chi_{obs}^2$  para el experimento E3 RDF vs TME es 2726. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas se muestran en la figura 22(d).

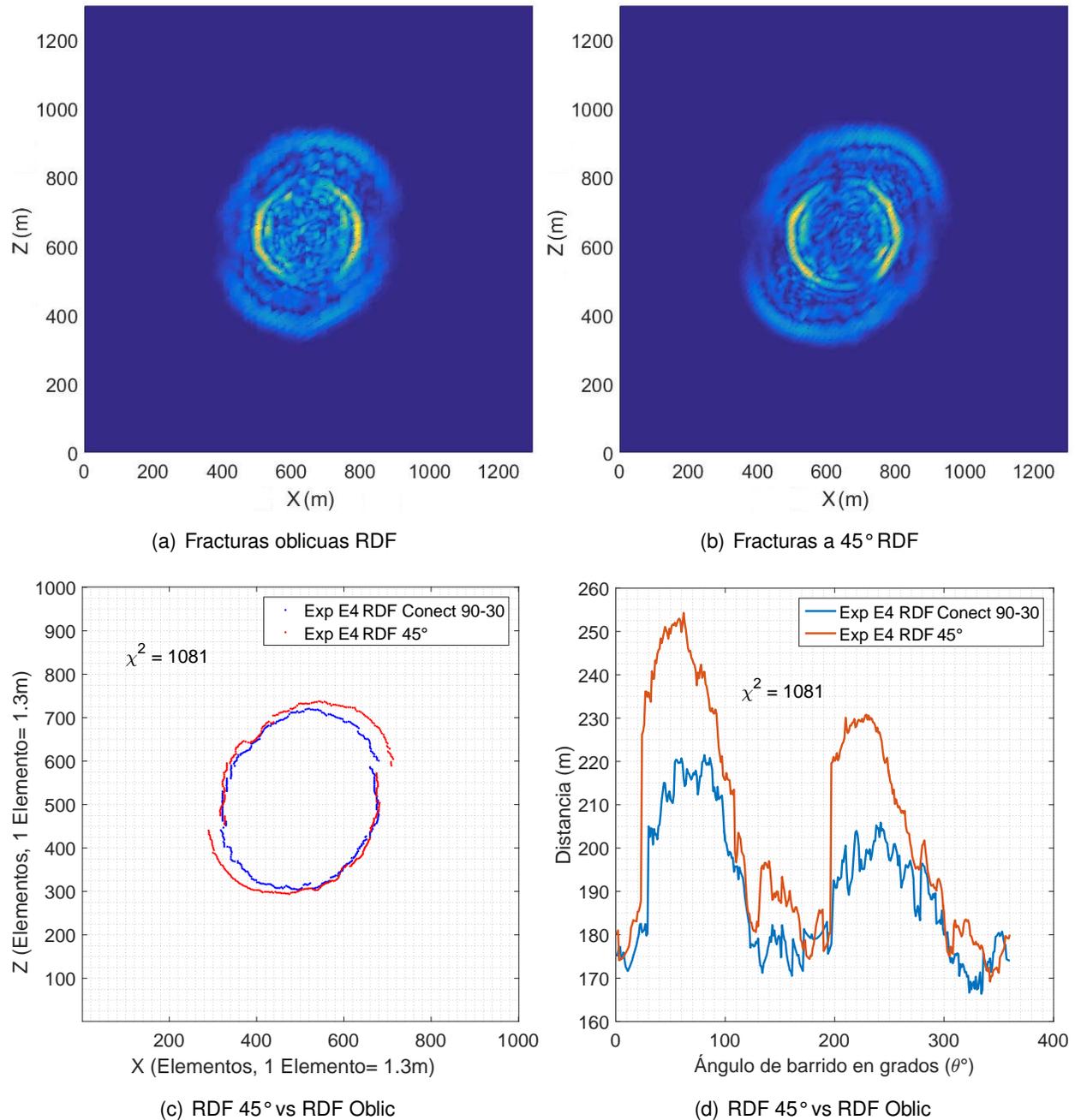
La primera es que la orientación preferencial de la propagación del frente de la onda P para el caso de la RDF con un conjunto de fracturas a  $45^\circ$  no es exactamente determinada por la orientación de las fracturas, esto es evidente en la figura 24(c). En esta figura se observa que las direcciones preferenciales de propagación de los frentes de las ondas P de las dos RDF son similares. La segunda se refiere a la posible ambigüedad que se genera puesto que en este



**Figura 23:** Resultado del experimento de la simulación numérica de ángulo entre fracturas conectadas para la RDF Orto (figura 23(a)) y la RDF Oblic (figura 23(b)). La comparación de los frentes de las ondas P de la RDF Orto y la RDF Oblic se muestra en la figura 23(c), el valor de  $\chi^2_{obs}$  para el experimento E2 RDF vs RDF es 863. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas de la RDF Orto y la RDF Oblic se muestran en la figura 23(d).

momento nos encontramos ante dos modelos de medios fracturados diferentes que generan la misma dirección preferencial de propagación del frente de la onda P. Sin embargo, existe una diferencia entre ambos modelos, la diferencia es el retraso que presenta el frente de la onda P del medio fracturado que contiene fracturas conectadas. Para este caso en particular, la conectividad

entre las fracturas resulta ser un parámetro determinante para diferenciar entre dos modelos de medio fracturado que exhiben la misma dirección de propagación del frente de la onda P.



**Figura 24:** Resultado del experimento de la simulación numérica de ángulo entre fracturas conectadas para la RDF Oblic (figura 24(a)) y la RDF 45° (figura 24(b)). La comparación de los frentes de las ondas P de la RDF Oblic y la RDF 45° se muestra en la figura 24(c), el valor de  $\chi_{obs}^2$  para el experimento RDF Oblic vs RDF 45° es 1081. Las distancias fuente-frente de las ondas P de las simulaciones numéricas de la RDF Oblic y la RDF 45° se muestran en la figura 24(d).

## Capítulo 5 Análisis de los resultados y discusión

---

A continuación se enfatizan los resultados más relevantes y en particular se discute el análisis de la conectividad entre fracturas. En el presente trabajo existen 2 diferentes enfoques de análisis de los resultados. En primer lugar se tiene el análisis de comparación de los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF contra las simulaciones numéricas de la TME de Hudson (1980), es decir las principales ventajas y desventajas de ambos casos. En segundo lugar se tiene el análisis de cómo afectan los cambios de magnitud de los parámetros de la microestructura del medio fracturado en la anisotropía sísmica presente en la propagación de las ondas de cuerpo, en particular el frente de las ondas P.

Respecto a la comparación entre los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF y las TME se destaca lo siguiente:

1. Las simulaciones numéricas de las RDF ofrecen resultados consistentes con la física del problema para todos los parámetros de las fracturas investigados en el capítulo 4. Mientras que las simulaciones numéricas de los modelos teóricos con base en las teorías de Hudson (1980, 1981) solamente mantuvieron la concordancia con la física del problema para el caso de los experimentos de la longitud de las fracturas, la orientación de las fracturas a  $0^\circ$  y la densidad de las fracturas. Para los experimentos de densidad de las fracturas, las TME antes mencionadas pierden precisión en un valor no explorado que se encuentra en el intervalo de  $0.058 < e < 0.103$ ; para el resto de los experimentos de las simulaciones numéricas, las TME muestran poca concordancia con las simulaciones numéricas de las RDF.
2. Las simulaciones numéricas de los modelos teóricos representan el efecto promedio de las fracturas contenidas en el modelo, es decir no se consideran los efectos de reflexión entre las fracturas, por tal motivo los frentes de las ondas no son distorsionados en función de la longitud de las fracturas, de esta manera, sin importar la longitud de las fracturas los frentes de las ondas de cuerpo no se ven afectadas por el tamaño de los elementos de las mallas (buena resolución y calidad de las gráficas), situación completamente opuesta a las simulaciones numéricas de las RDF, pues la calidad de las gráficas de los frentes de las ondas de cuerpo dependen completamente de la longitud de las fracturas, la cual está directamente relacionado con el tamaño de los elementos.

Dado que el análisis del efecto anisotrópico debido a los cambios en los parámetros del medio fracturado se ejecuta con base en la cuantificación de las diferencias de los frentes de las on-

das P de las RDF y las TME, se considera necesario contar con las gráficas de los frentes de las ondas P de las RDF con mayor resolución posible, sin embargo contemplar esta posibilidad hace resaltar la más grande desventaja del SIPG, pues el tiempo de ejecución de las simulaciones numéricas se multiplica en más de un orden de magnitud cuando las mallas cuadradas de elementos finitos se refinan, cuando las mallas de elementos finitos dejan de ser cuadradas el tiempo de ejecución de las simulaciones incrementa aún más.

3. La ventaja más grande de la simulación numérica de RDF con base en SIPG es la facilidad de incluir fracturas discretas en el modelo, esta característica permite tener control sobre las posición, la orientación, la longitud, la cantidad de las fracturas y determinar si el modelo contiene un conjunto de fracturas o dos conjuntos de fracturas conectadas entre sí. Mientras que en el caso de las TME no se puede tener control sobre la posición (distribución en el modelo) de las fracturas, por tanto es incierto cómo es que interactúan las fracturas cuando se consideran dos conjuntos de fracturas.
4. La comparación entre las simulaciones numéricas de las RDF y las TME para el caso de conectividad tiene que ser tomada con precaución debido a que las diferentes TME que usan los modelos con dos conjuntos de fracturas ortogonales entre sí no definen explícitamente dicha interacción, además que existen diferencias en los resultados de las simulaciones numéricas entre las mismas TME, por tal motivo no existe un parámetro confiable de referencia para determinar la precisión de los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF. Sin embargo, sí se puede destacar que las simulaciones de las RDF mantienen resultados consistentes con la física del problema cuando son modificados los parámetros de la microestructura del medio fracturado.

Respecto al análisis del efecto anisotrópico en la propagación sísmica debido a cambios en los parámetros de las fracturas se destaca lo siguiente:

1. Los parámetros de la orientación y la densidad de las fracturas en el presente trabajo de investigación fueron utilizados principalmente como marco de referencia en la comparación y evaluación de los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF, sin embargo en el caso particular del análisis de la densidad de las fracturas se observó que la teoría de Hudson (1980) tiene un rango de precisión mayor que el reportado por Grechka y Kachanov (2006a). Es necesario aclarar que esto no significa que el resultado reportado por Grechka y Kachanov (2006a) sea equivocado, simplemente el punto de comparación es diferente. Grechka y

Kachanov (2006a) comparan los elementos  $C_{e,11}$  y  $C_{e,22}$  del tensor de rigidez equivalente para un conjunto del tipo  $HTI_x$  con diferentes TME (ver figura 2), esta comparación está limitada a sólo dos elementos del tensor de rigidez, los cuales a su vez están relacionados con la onda P, sin embargo en el fenómeno de propagación de ondas sísmicas interactúan simultáneamente las ondas P, S y las de modos convertidos, por esta razón se considera apropiado analizar la precisión de la teoría de Hudson (1980) con base en el campo de desplazamiento completo, el cual se obtiene de las simulaciones numéricas de las RDF, pues toma en cuenta los 9 elementos diferentes de cero del tensor de rigidez equivalente y por tanto lo convierte en una mejor manera de cuantificar la precisión de las TME. Dicho análisis ofrece como resultado que la teoría de Hudson (1980) mantiene una buena precisión para valores aproximados de 0.06 y no de 0.05 como lo reporta Grechka y Kachanov (2006a). Respecto a las simulaciones numéricas de los modelos teóricos de los experimentos de la orientación de las fracturas para un conjunto de fracturas del tipo  $HTI_x$ , los resultados difieren de las simulaciones numéricas de las RDF debido a que los frentes de las ondas P no presentan una simetría elíptica sino más bien una simetría que combina un cuadrilátero con una elipse.

Una observación al respecto del experimento de la orientación de las fracturas a  $45^\circ$  de un conjunto de fracturas del tipo  $HTI_x$  es que la dirección del eje de simetría del frente de la onda P (ver figura 24(b)) que tiende a una elipse, no coincide con la orientación de las fracturas. Ésto podría deberse a que la fuente sísmica no está rotada en conjunto con las fracturas, es decir la dirección de propagación de las ondas P y S está determinada por el marco de coordenadas de referencia (plano  $xz$  y la dirección del eje de simetría del frente de la onda P es ligeramente afectado.

2. Los experimentos de la simulación numérica de la longitud de las fracturas muestran que sí existe un efecto anisotrópico en el frente de las ondas P, sin embargo es pequeño y poco significativo para el fenómeno de estudio (ver figura 8). Este experimento aporta una evidencia a la propuesta de Grechka y Kachanov (2006c) donde aseveran que sólo 10 fracturas son requeridas para simular las propiedades elásticas efectivas del medio fracturado, sin embargo es necesario mencionar que estas simulaciones numéricas son en 3 dimensiones y contienen entre 100,000 y 500,000 elementos tetraedrales (Grechka y Kachanov, 2006b), es decir las 10 fracturas están construidas por un número grande de elementos; a diferencia de las RDF en 2 dimensiones construidas aquí, pues cada elemento representa un máximo de 4 fracturas (cada lado del elemento puede representar una fractura). Ya habiendo considerado las diferencias de las RDF de cada investigación por separado y considerando que un mínimo de 126 fracturas

representaron aceptablemente el efecto anisotrópico debido a la presencia de un conjunto de fracturas del tipo  $HTI_x$ , la conclusión es que en efecto un número pequeño de fracturas son requeridas para investigar las propiedades elásticas efectivas del medio fracturado en la escala sísmica con base en modelado directo.

3. La conectividad entre las fracturas es relevante en la exploración y la explotación de yacimientos petroleros. Sin embargo, las técnicas y metodologías de caracterización de fracturas actuales la han desestimado por más de una década (Tsvankin y Grechka, 2011; Bakulin *et al.*, 2000b). Los estudios recientes de Guo *et al.* (2016) y Shao y Pyrak-Nolte (2016) sugieren que la conectividad entre las fracturas debe incluirse en los parámetros de inversión de los datos sísmicos para la caracterización de las fracturas.

La presente investigación de los efectos en la anisotropía sísmica debida a la conectividad entre las fracturas deja más preguntas sin respuesta que resultados concretos. Por ejemplo, en el caso de las TME que atienden el caso de medios fracturados con dos conjuntos de fracturas mutuamente ortogonales acontecen 3 situaciones que complican el análisis. La primera es que uno de las hipótesis fundamentales en el desarrollo de las TME es que no se considera la interacción entre fracturas, por tanto en teoría no son apropiadas para el estudio de fracturas interconectadas, sin embargo las TME sí consideran la presencia de más de dos conjuntos de fracturas y dado que se asume una distribución aleatoria de los centros de las fracturas en el modelo, esto da pauta al segundo punto, pues aunque no es explícito (ver capítulo 2), abre la posibilidad de que exista interacción entre fracturas cuando están presentes dos o más conjuntos de fracturas. Por último se tiene la falta de concordancia en los artículos de Hudson (1981) y Mavko *et al.* (2009) sobre los procedimientos para calcular el tensor de rigidez asociado a las fracturas cuando los conjuntos son ortogonales entre sí, esta situación impide determinar un marco de referencia para la comparación de las simulaciones numéricas de las RDF con fracturas ortogonales conectadas, por ejemplo en el caso del artículo de Hudson (1981) se propone considerar la misma densidad de las fracturas para cada uno de los conjuntos, sumar los efectos y hacer el promedio, mientras que el procedimiento descrito por Mavko *et al.* (2009), el cual parte de los trabajos de Hudson (1980) y Hudson (1981), propone considerar las densidades de las fracturas con diferente magnitud para cada uno de los conjuntos de las fracturas y posteriormente sumar los tensores, pero no hace referencia a hacer un promedio con el número de conjuntos de las fracturas en el modelo. Estas diferencias son determinantes en los resultados de las simulaciones numéricas de los modelos teóricos, de forma que al ser comparados con los resultados de las simulaciones numéricas de las RDF ninguno de los dos casos muestran

buena concordancia, sin embargo el resultado teórico de Mavko *et al.* (2009) es el que concuerda mejor con los resultados de las RDF y las observaciones de Shao y Pyrak-Nolte (2016). Una alternativa más que no se exploró en este trabajo de tesis es simular numéricamente la teoría de Kachanov (1992) la cual se especializa el problema de dos conjuntos de fracturas ortogonales entre sí embebidas en una roca isotrópica.

4. Explorar los efectos anisotrópicos causados por el cambio en el ángulo entre las fracturas conectadas en la propagación de las ondas sísmicas permitió obtener dos resultados importantes. El primero se refiere a la observación de que cuando el ángulo entre las fracturas es pequeño la forma del frente de la onda P tiende a una simetría aproximadamente circular, mientras que cuando el ángulo entre las fracturas tiende a  $45^\circ$  la forma del frente de la onda P tiende a una simetría elíptica y la dirección preferencial de propagación del frente de la onda P corresponde aproximadamente con la bisectriz del ángulo formado entre las fracturas. El segundo resultado se refiere a la evidencia de la posible ambigüedad entre dos modelos de medios fracturados diferentes, específicamente en este trabajo se trata de una RDF con un conjunto de fracturas a  $45^\circ$  y otra RDF con dos conjuntos de fracturas, uno de ellos contiene fracturas verticales y el otro contiene fracturas con orientación a  $30^\circ$ . Estas dos RDF presentan aproximadamente la misma dirección preferencial de propagación del frente de la onda P y la simetría de la propagación es parecida también, sin embargo la única diferencia notable es el retraso en la propagación del frente de la onda P asociado a la RDF que contiene fracturas conectadas.

## Capítulo 6 Conclusiones

---

Con base en el desarrollo del presente trabajo se puede concluir lo siguiente:

1. La densidad de las fracturas influye de forma determinante en la propagación de los frentes de las ondas P. Se mostró que las simulaciones numéricas tanto para la TME de Hudson (1980) como para las RDF son prácticamente los mismos para una densidad de las fracturas de 0.058, mientras que para un valor de 0.103 la teoría de Hudson (1980) pierde precisión y ofrece resultados no realistas.
2. La anisotropía de la onda P inducida por fracturas secas depende de la densidad de las fracturas, la orientación de las fracturas, conectividad y ángulo entre fracturas pero no de la longitud de las fracturas. Es decir, no se requiere de la hipótesis sobre la gran longitud de onda de las TME. En otras palabras, la anisotropía sísmica de medios fracturados secos no depende del número de fracturas.
3. Los experimentos de conectividad y ángulo entre fracturas aportan evidencia del retraso en la propagación de las ondas P y S y cambios en la dirección del eje de simetría del frente de la onda P, respectivamente, razón por la cual deben tomarse en cuenta estos parámetros en la caracterización de las fracturas e inversión de datos sísmicos. Shao y Pyrak-Nolte (2016) demostraron con base en experimentos de laboratorio de ondas acústicas el efecto de retraso en la propagación debido a la conectividad, dicho efecto también está presente en las simulaciones numéricas de las RDF. Un paso adelante en la investigación de los efectos de la conectividad entre fracturas es analizar el efecto debido al ángulo entre fracturas, el cual en el presente trabajo fue determinante para evitar la ambigüedad entre diferentes configuraciones de conjuntos de fracturas.
4. La implementación de SIPG de De Basabe *et al.* (2016) con base en la teoría de Schoenberg (1980) (LSM) en combinación con la teoría de Kachanov (1992) ( $Z_N$  y  $Z_T$ ) es una alternativa sencilla y eficiente para incluir fracturas discretas en modelos de rocas fracturadas en 2D y 3D. La principal desventaja de SIPG es el tiempo requerido para la simulación numérica de la propagación de ondas en mallas no ortogonales, pues se multiplica en más de un orden de magnitud.
5. Analizar la forma del frente de la onda P con base en la metodología aquí desarrollada permite investigar los efectos causados por cambios en los parámetros de las fracturas. Los resultados

obtenidos por dicha técnica han permitido delinear nuevas líneas de investigación relacionadas con la conectividad entre fracturas.

6. Es importante desarrollar métodos de caracterización de las fracturas a partir de los datos sísmicos 3D multicomponente de amplio azimut que reconozcan los efectos de la conectividad, pues es el parámetro del medio fracturado más importante en la explotación de hidrocarburos.

## Capítulo 7 Trabajo futuro y recomendaciones

---

El presente trabajo de investigación ha abierto distintas líneas de investigación para responder preguntas pendientes o para dar continuidad a los temas que están inconclusos, por ejemplo el tema de conectividad entre fracturas en general. A continuación se marcan líneas de trabajo inmediato, a mediano plazo y a largo plazo que pueden ayudar a aportar mayor evidencia de las implicaciones de la conectividad en la exploración y producción de recursos energéticos, a partir de los datos sísmicos.

1. Con relación a la TME de Hudson (1980) se propone determinar el límite máximo de la densidad de las fracturas donde se pierde la precisión, hasta el momento se ha podido determinar que el límite se encuentra entre 0.058 y 0.1 aproximadamente. Por otra parte, es importante profundizar en la búsqueda del motivo por el cual las simulaciones numéricas de modelos con fracturas orientadas entre  $15^\circ$  y  $45^\circ$  generan distorsiones del frente de la onda P que tienden a una simetría que combina una elipse con un cuadrilátero; la onda S de igual manera presenta estas distorsiones y adicionalmente se observan algunos tipos de reflexiones, la pregunta es ¿éstas distorsiones son debidas a efectos numéricos asociados con la simulación o tienen origen en las ecuaciones de la teoría de Hudson (1980)?
2. Respecto a las diferentes TME que se usan en a los modelos de dos conjuntos de fracturas ortogonales embebidas en una matriz de roca isotrópica, las cuales ofrecen resultados distintos (Bakulin *et al.*, 2000b; Hudson, 1980; Mavko *et al.*, 2009), se considera importante estudiar a fondo el origen de estas diferencias y determinar la base teórica más adecuada que funcione como referencia para validar los ejercicios de comparación de las simulaciones numéricas correspondientes, en este caso particular las RDF con dos conjuntos de fracturas ortogonales.
3. Se propone experimentar con las ecuaciones del tensor de conformidad de la TME de Kachanov (1992) presentadas en el artículo de Grechka y Kachanov (2006c) para simular numéricamente un nuevo modelo teórico con dos conjuntos de fracturas ortogonales, sin embargo para conseguir este resultado por medio de SWP, se requiere invertir el tensor de conformidad y determinar las expresiones de los elementos del tensor de rigidez o modificar el código de SWP para introducir los términos del tensor de conformidad. Dado que se ha mostrado que la teoría de Kachanov (1980, 1992) es confiable para simular diferentes modelos de medios fracturados, simular numéricamente este modelo teórico servirá como un buen marco de referencia para comparar otras TME y las simulaciones numéricas de las RDF.

4. En el caso de las simulaciones numéricas de las RDF con conjuntos de fracturas orientadas a  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $45^\circ$  se propone experimentar con nuevas simulaciones numéricas equivalentes pero rotando la fuente sísmica con la misma orientación de las fracturas para cada caso y evaluar las diferencias con los resultados ya existentes. Este nuevo experimento permitirá analizar cuanto se afecta la dirección de propagación preferencial del frente de las ondas P (dirección del eje de simetría) en función de la orientación de la fuente sísmica.
5. Se recomienda mejorar la resolución de las gráficas de las simulaciones numéricas de los experimentos con mallas no ortogonales (experimentos de la orientación de las fracturas y la conectividad) con la intención de cuantificar con mayor precisión los valores de  $\chi_{obs}^2$ .
6. Con base en la idea de que la anisotropía de la onda S debida la presencia de fracturas se hace evidente por medio del fenómeno de birrefringencia, se recomienda generar simulaciones 3D de los experimentos ejecutados en el presente trabajo y analizar específicamente los efectos anisotrópicos en la onda S debidos a cambios en la microestructura del medio fracturado, pues ahora se tendrían mediciones de la onda S lenta, la cual se propaga en el plano perpendicular al de la onda S rápida.
7. Sería ideal para corroborar el efecto aquí observado en las fracturas interconectadas contar con mediciones de velocidad de las ondas S y P de experimentos en laboratorio de medios elásticos con fracturas intercomunicadas en la escala de las frecuencias sísmicas, de tal forma que se puedan comparar con los resultados de las simulaciones numéricas de SWP.

## Literatura citada

- Aguilera, R. (1998). Geologic aspects of naturally fractured reservoirs. *The Leading Edge*, **17**(12): 1667–1670.
- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, **67**(11): 4427–4440.
- Bakulin, A., Grechka, V., y Tsvankin, I. (2000a). Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—part I: HTI model due to a single fracture set. *GEOPHYSICS*, **65**(6): 1788–1802.
- Bakulin, A., Grechka, V., y Tsvankin, I. (2000b). Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—part II: Fractured models with orthorhombic symmetry. *GEOPHYSICS*, **65**(6): 1803–1817.
- Bakulin, A., Grechka, V., y Tsvankin, I. (2000c). Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—part III: Fractured models with monoclinic symmetry. *GEOPHYSICS*, **65**(6): 1818–1830.
- Bakulin, A., Woodward, M., Nichols, D., Osypov, K., y Zdraveva, O. (2010). Building tilted transversely isotropic depth models using localized anisotropic tomography with well information. *GEOPHYSICS*, **75**(4): D27–D36.
- Bristow, J. R. (1960). Microcracks, and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals. *British Journal of Applied Physics*, **11**(2): 81.
- Budiansky, B. y O'connell, R. J. (1976). Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures*, **12**(2): 81–97.
- Chung, E. T. y Engquist, B. (2006). Optimal discontinuous Galerkin methods for wave propagation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **44**(5): 2131–2158.
- Cockburn, B. y Shu, C.-W. (1998). The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V. *Journal of Computational Physics*, **141**(2): 199–224.
- Cohen, G. (2003). Higher-order numerical methods for transient wave equations. *Physics Today*, **56**(3): 70–71.
- De Basabe, J. D. y Sen, M. K. (2007). Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations. *GEOPHYSICS*, **72**(6): T81–T95.
- De Basabe, J. D. y Sen, M. K. (2010). Stability of the high-order finite elements for acoustic or elastic wave propagation with high-order time stepping. *Geophysical Journal International*, **181**(1): 577–590.
- De Basabe, J. D., Sen, M. K., y Wheeler, M. F. (2008). The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation: Grid dispersion. *Geophysical Journal International*, **175**(1): 83–93.
- De Basabe, J. D., Sen, M. K., y Wheeler, M. F. (2016). Elastic wave propagation in fractured media using the discontinuous Galerkin method. *GEOPHYSICS*, **81**(4): T163–T174.
- Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **241**(1226): 376–396.

- Etienne, V., Chaljub, E., Virieux, J., y Glinsky, N. (2010). An HP-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling. *Geophysical Journal International*, **183**(2): 941–962.
- Grechka, V. (2007). Multiple cracks in VTI rocks: Effective properties and fracture characterization. *GEOPHYSICS*, **72**(5): D81–D91.
- Grechka, V. y Kachanov, M. (2006a). Effective elasticity of fractured rocks: A snapshot of the work in progress. *GEOPHYSICS*, **71**(6): W45–W58.
- Grechka, V. y Kachanov, M. (2006b). Seismic characterization of multiple fracture sets: Does orthotropy suffice? *GEOPHYSICS*, **71**(3): D93–D105.
- Grechka, V. y Kachanov, M. (2006c). Effective elasticity of rocks with closely spaced and intersecting cracks. *GEOPHYSICS*, **71**(3): D85–D91.
- Grechka, V., Vasconcelos, I., y Kachanov, M. (2006). The influence of crack shape on the effective elasticity of fractured rocks. *GEOPHYSICS*, **71**(5): D153–D160.
- Guo, J., Rubino, J. G., Glubokovskikh, S., y Gurevich, B. (2016). Effects of fracture intersections on seismic dispersion: Theoretical predictions versus numerical simulations. *Geophysical Prospecting*, pp. n/a–n/a.
- Hoenig, A. (1979). Elastic moduli of a non-randomly cracked body. *International Journal of Solids and Structures*, **15**(2): 137–154.
- Hudson, J. A. (1980). Overall properties of a cracked solid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **88**(2): 371–384.
- Hudson, J. A. (1981). Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **64**(1): 133–150.
- Hudson, J. A. (1986). A higher order approximation to the wave propagation constants for a cracked solid. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **87**(1): 265–274.
- Hudson, J. A. (1988). Seismic wave propagation through material containing partially saturated cracks. *Geophysical Journal*, **92**(1): 33–37.
- Hudson, J. A., Liu, E., y Crampin, S. (1996). The mechanical properties of materials with interconnected cracks and pores. *Geophysical Journal International*, **124**(1): 105–112.
- Ikelle, L. y Amundsen, L. (2005). *Introduction to Petroleum Seismology*. Society of Exploration Geophysicists.
- Kachanov, M. (1980). Continuum model of medium with cracks. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **106**: 1039–1051.
- Kachanov, M. (1992). Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts. *J. Appl. Mech. Div. ASME*, **45**(8): 304–335.
- Kachanov, M., Tsukrov, I., y Shafiro, B. (1994). Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *J. Appl. Mech. Div. ASME*, **47**(1S): S151–S174.
- Kachanov, M., Shafiro, B., y Tsukrov, I. (2003). *Handbook of elasticity solutions*. Kluwer Academic Publishers.

- Keller, J. B., Bellman, R., y Society, A. M. (1964). *Stochastic equations and wave propagation in random media*. Providence, R.I. American Mathematical Society.
- Käser, M. y Dumbser, M. (2006). An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – I. The two-dimensional isotropic case with external source terms. *Geophysical Journal International*, **166**(2): 855–877.
- Liu, E., Hudson, J. A., Crampin, S., Rizer, W. D., y Queen, J. H. (1995). Seismic properties of a general fracture. *Mechanics of Jointed and Faulted Rock*, pp. 673–678.
- Liu, E., Hudson, J. A., y Pointer, T. (2000). Equivalent medium representation of fractured rock. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **105**(B2): 2981–3000.
- Mavko, G. y Jizba, D. (1991). Estimating grain-scale fluid effects on velocity dispersion in rocks. *GEOPHYSICS*, **56**(12): 1940–1949.
- Mavko, G., Mukerji, T., y Dvorkin, J. (2009). *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media*. Cambridge University Press.
- Moczo, P., Kristek, J., y Gális, M. (2014). *The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions: Waves and Ruptures*. Cambridge University Press.
- Mukerji, T. y Mavko, G. (1994). Pore fluid effects on seismic velocity in anisotropic rocks. *GEOPHYSICS*, **59**(2): 233–244.
- Rivière, B. (2008). *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Rubino, J. G., Guarracino, L., Müller, T. M., y Holliger, K. (2013). Do seismic waves sense fracture connectivity? *Geophysical Research Letters*, **40**(4): 692–696.
- Rubino, J. G., Müller, T. M., Guarracino, L., Milani, M., y Holliger, K. (2014a). Seismoacoustic signatures of fracture connectivity. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **119**(3): 2252–2271.
- Rubino, J. G., Müller, T. M., Milani, M., y Holliger, K. (2014b). Seismic attenuation and velocity dispersion in fractured rocks: The role played by fracture contact areas. *Geophysical Prospecting*, **62**(6): 1278–1296.
- Rubino, J. G., Caspari, E., Milani, M., Holliger, K., Müller, T. M., y Holliger, K. (2015). *Seismic anisotropy in fractured low-permeability formations: The effects of hydraulic connectivity*, pp. 3219–3223. Society of Exploration Geophysicists.
- Rubino, J. G., Caspari, E., Müller, T. M., Milani, M., Barbosa, N. D., y Holliger, K. (2016). Numerical upscaling in 2-D heterogeneous poroelastic rocks: Anisotropic attenuation and dispersion of seismic waves. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **121**(9): 6698–6721.
- Schoenberg, M. (1980). Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **68**(5): 1516–1521.
- Schoenberg, M. (1983). Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfacial slip. *Geophysical Prospecting*, **31**(2): 265–292.
- Schoenberg, M. y Douma, J. (1988). Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. *Geophysical Prospecting*, **36**(6): 571–590.

- Schoenberg, M. y Sayers, C. M. (1995). Seismic anisotropy of fractured rock. *GEOPHYSICS*, **60**(1): 204–211.
- Shafiro, B. y Kachanov, M. (1997). Materials with fluid-filled pores of various shapes: Effective elastic properties and fluid pressure polarization. *International Journal of Solids and Structures*, **34**(27): 3517–3540.
- Shao, S. y Pyrak-Nolte, L. J. (2016). Wave propagation in isotropic media with two orthogonal fracture sets. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **49**(10): 4033–4048.
- Tarback, E., Lutgens, F., y Tasa, D. (2005). *Ciencias de la Tierra*. Prentice Hall, 8mo edición.
- Thomsen, L. (1986). Weak elastic anisotropy. *GEOPHYSICS*, **51**(10): 1954–1966.
- Thomsen, L. (1995). Elastic anisotropy due to aligned cracks in porous rock. *Geophysical Prospecting*, **43**(6): 805–829.
- Tsvankin, I. y Grechka, V. (2011). *Seismology of Azimuthally Anisotropic Media and Seismic Fracture Characterization*. Society of Exploration Geophysicists.
- Tsvankin, I., Gaiser, J., Grechka, V., van der Baan, M., y Thomsen, L. (2010). Seismic anisotropy in exploration and reservoir characterization: An overview. *GEOPHYSICS*, **75**(5): 75A15–75A29.
- Wheeler, M. F. (1978). An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **15**(1): 152–161.
- Winterstein, D. F. (1990). Velocity anisotropy terminology for geophysicists. *GEOPHYSICS*, **55**(8): 1070–1088.
- Yan, J. y Sava, P. (2011). Improving the efficiency of elastic wave-mode separation for heterogeneous tilted transverse isotropic media. *GEOPHYSICS*, **76**(4): T65–T78.