

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**DIVISION CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE GEOFISICA APLICADA**

**SUFICIENCIA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN RELACION CON LOS
PROBLEMAS ELECTROMAGNETICOS INVERSOS**

TESIS

**que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado
de DOCTOR EN CIENCIAS presenta:**

FRANCISCO JAVIER ESPARZA HERNANDEZ

Ensenada, Baja California, Abril de 1991

Resumen de la tesis que presenta Francisco Javier Esparza Hernández como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS en GEOFISICA, con opción en GEOFISICA APLICADA. Ensenada, Baja California, México. Abril de 1991.

**SUFICIENCIA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN RELACION CON
LOS PROBLEMAS ELECTROMAGNETICOS INVERSOS**

Resumen aprobado por:



Dr. Enrique Gómez-Treviño
Director de Tesis

En esta tesis se muestra que las ecuaciones de Maxwell son autosuficientes en lo referente a los problemas electromagnéticos inversos; específicamente, que para proceder a la solución de tales problemas, alineales por naturaleza, es completamente innecesario recurrir a los procedimientos clásicos de linealización. La versatilidad de los esquemas de linealización se debe sobre todo a que permiten que la función incógnita (la distribución de conductividad eléctrica de la tierra) se separe convenientemente de los datos (el campo electromagnético), reduciendo el problema a la solución de una ecuación integral que, aunque aproximada, es lineal y conceptualmente aplicable a problemas de una, dos y tres dimensiones. Es el propósito del presente trabajo demostrar que las mismas características de simplicidad y universalidad se pueden lograr sin recurrir a esquemas aproximados, aunque al final, debido a la naturaleza misma de los problemas, se deban utilizar aproximaciones.

Como punto de partida se toma una nueva forma integral de las ecuaciones de Maxwell, en que la función de conductividad eléctrica aparece como incógnita en ecuaciones integrales alineales muy parecidas a las aproximaciones lineales. Para resolver las ecuaciones se utilizan técnicas de programación lineal, aplicándose primero, por razones de control, a dos problemas lineales, dejando de lado momentáneamente la no linealidad. De esta manera se establece un criterio óptimo de mínima derivada para perfiles unidimensionales, los que deben reproducir satisfactoriamente los datos sin contener discontinuidades innecesarias. El mismo procedimiento se aplica iterativamente a dos problemas alineales clásicos: el de sondeos eléctricos verticales y el de sondeos magnetoteléuticos. En ambos casos se obtienen resultados satisfactorios en pocas iteraciones, por lo que se concluye que la nueva forma integral se puede utilizar directamente en la inversión de datos, sin aludir directa o indirectamente a los esquemas tradicionales.

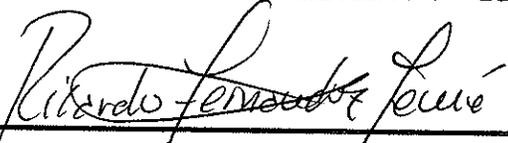
Los problemas analizados comprenden las dos formas fundamentales de conducción de corriente eléctrica en la tierra. En el caso de los sondeos magnetoteléuticos, el flujo es horizontal y enteramente debido a fenómenos de inducción electromagnética. En el caso de los sondeos eléctricos verticales, el flujo es tanto vertical como horizontal y se debe enteramente a la presencia de fuentes de corriente directa en contacto galvánico con la tierra. Las situaciones más complicadas, bien sea por el tipo de fuente o por la dimensionalidad del problema, no involucran nuevas formas de conducción, reduciéndose siempre a una de las anteriores o a combinaciones de las mismas. Con estas consideraciones, los casos ofrecidos en prueba de la tesis principal de este trabajo son suficientes para demostrarla, aunque obviamente disten de ser exhaustivos.

Se investigan también otras posibilidades de aplicación para las ecuaciones integrales. Se propone un método aproximado para interpretar datos magnetoteléuricos en dos dimensiones, en el que la solución se busca en una sola iteración mediante programación lineal. Los resultados son alentadores, aunque un tanto limitados debido a restricciones en el tamaño de las mallas que se pueden manejar. También se considera el poder resolutivo del método magnetoteléurico en ambientes bidimensionales, llegándose a la conclusión de que antes de interpretar los datos, se requiere invariablemente promediarlos entre sí. De otra manera su poder de resolución a profundidad se deteriora considerablemente.

TESIS DEFENDIDA POR: FRANCISCO JAVIER ESPARZA HERNANDEZ
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



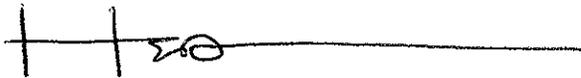
DR. ENRIQUE GOMEZ TREVINO. - Director del Comité



DR. RICARDO FERNANDEZ TOME. - Miembro del Comité



DR. CARLOS FCO. FLORES LUNA.- Miembro del Comité



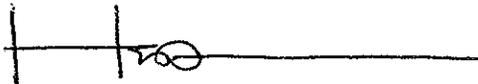
DR. HECTOR ECHAVARRIA HERAS.- Miembro del Comité



DR. GEORGE JIRACEK.- Miembro del Comité



DR. ENRIQUE GOMEZ TREVINO.- Jefe Depto. Geofisica Aplicada



DR. HECTOR ECHAVARRIA HERAS.- Director Académico

27 DE ABRIL DE 1991

DEDICATORIA

A mi padre Raúl por su ejemplo de responsabilidad

y a mi madre María de la Luz por su gran tenacidad.

AGRADECIMIENTOS

Al director de la tesis, el Dr. Enrique Gómez T. por su gran flujo de ideas creativas.
A los miembros del comité, el Dr. Ricardo Fernández T., Dr. Carlos Flores L., Dr. Héctor Echavarría H. y Dr. George Jiracek por las correcciones hechas al manuscrito. A Lupita González B., quien con su paciente y profesional labor se encargó de la edición de la tesis.
Al CICESE por darme la oportunidad de estudiar el Doctorado.

CONTENIDO

	Página
I. INTRODUCCION	1
II. DOS PROBLEMAS ELECTROMAGNETICOS LINEALES EN GEOFISICA	10
II.1 Introducción	10
II.2 Formulación	10
II.3 Aplicaciones	13
II.4 Conclusiones	17
III. INVERSION DE SONDEOS DE RESISTIVIDAD	18
III.1 Introducción	18
III.2 Formulación del Problema Inverso	19
III.3 Procedimiento Numérico y Aplicaciones	20
III.4 Conclusiones	24
IV. INVERSION DE SONDEOS MAGNETOTELURICOS	27
IV.1 Introducción	27
IV.2 Formulación del Problema Inverso	28
IV.3 Procedimiento Numérico y Aplicaciones	30
IV.4 Conclusiones	34
V. INVERSION APROXIMADA DE DATOS MAGNETOTELURICOS EN DOS DIMENSIONES	38
V.1 Introducción	38
V.2 Formulación del Problema	39
V.3 Solución del Problema	41
V.4 Experimentos Numéricos	46

CONTENIDO (continuación)

	Página
V.5 Interpretación Aproximada de los Datos Magnetotelúricos de la Línea Lincoln	49
V.6 Conclusiones	61
VI. RESOLUCION DE MEDICIONES MAGNETOTELURICAS EN AMBIENTES BIDIMENSIONALES	63
VI.1 Introducción	63
VI.2 Metodología	64
VI.3 Resultados	65
VI.4 Conclusiones	74
VII. CONCLUSIONES	75
BIBLIOGRAFIA	77
APENDICE A	82
APENDICE B	83
APENDICE C	85
APENDICE D	88
APENDICE E	89

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1	Inversión de datos de polarización inducida. En (a) se muestra con símbolos (+) los datos que se usaron y con línea continua la respuesta del modelo estimado, en (b) se muestra con líneas punteadas el modelo hipotético y con línea continua el modelo estimado. Las unidades de cargabilidad son arbitrarias.	14
2	Inversión de datos electromagnéticos. En (a) se muestra con símbolos (+) los datos que se usaron y con línea continua la respuesta del modelo estimado, en (b) se muestra con líneas punteadas el modelo hipotético y con línea continua el modelo estimado.	16
3	Inversión de datos sintéticos de resistividad. En (a) se muestra con símbolos (+) los datos que se usaron y con línea continua la respuesta del modelo estimado, en (b) se muestra el modelo hipotético.	22
4	Modelos construidos en cada iteración para el caso de datos sintéticos. El modelo que se muestra en (d) con líneas punteadas es el modelo hipotético.	23
5	Inversión de los datos de Constable <i>et al.</i> (1984). En (a) se muestran los datos y la respuesta del modelo estimado después de 5 iteraciones, en (b) se muestra el modelo estimado.	25
6	Modelo encontrado por Constable <i>et al.</i> (1984), quien usó un método de regularización. El modelo se señala en la figura como "Schlumberger model".	26
7	Inversión de sondeos magnetoteléuricos. Con símbolos (+) se presentan los datos que se usaron para la inversión, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado. El valor rms, en este caso, es de 4%.	32

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
8	Modelos construidos durante el proceso iterativo. Con línea punteada se muestra el modelo hipotético y con línea continua el modelo estimado.	33
9	Inversión de los datos magnetoteléuticos de Constable <i>et al.</i> (1987). El valor de χ^2 para este caso es de 1.0. Con línea continua se muestra la respuesta del modelo encontrado en 2 iteraciones.	35
10	Modelos construidos cuando se invierten los datos de Constable <i>et al.</i> (1987).	36
11	Modelo encontrado por Constable <i>et al.</i> (1987), quien usó un método de regularización. El modelo se muestra con línea continua.	37
12	Función de peso para el modo TE en $x = 0$. La función tiene un valor infinito en $x' = 0, z' = 0$.	42
13	Función de peso para el modo TM en $x = 0$. La función tiene un valor infinito en $x' = 0, z' = 0$.	43
14	Geometría que se usa para resolver el problema en dos dimensiones. Las capas horizontales de la izquierda y de la derecha se extienden al infinito, así como la parte inferior de la malla.	44
15	Prueba del método para un caso unidimensional. En (a) se muestra el modelo hipotético, con flechas se señalan los sitios en los que se ubican los sondeos, en (b) se señala con símbolos (Δ) los datos de la curva que se usaron para la inversión.	47
16	Resultados para el caso unidimensional. En (a) se encuentra la discretización que se usó, en (b) se encuentra el modelo estimado. El resultado es el mismo para ambos modos.	48
17	Datos usados (Δ) para el caso de un contacto vertical bajo una capa homogénea. La ubicación de los sondeos se encuentra en la figura 18b.	50

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
18	Resultados para un contacto vertical bajo una capa homogénea, modo TE. En (a) se encuentra el modelo hipotético, en (b) se encuentra el modelo estimado. La ubicación de los sondeos está dada por los símbolos S_1 y S_2 .	51
19	Resultados para un contacto vertical bajo una capa homogénea, modo TM. En (a) se encuentra el modelo hipotético, en (b) se encuentra el modelo estimado. La ubicación de los sondeos está dada por los símbolos S_1 y S_2 .	52
20	Modelo encontrado por Ramírez-Hernández (1988) al usar 8 grupos de sondeos. La placa Juan de Fuca se señala como un conductor de $40 \Omega\cdot m$, con un ángulo de 14° de buzamiento, las abreviaciones CR, WV, WC, HC y BR se refieren a Coast Range, Willamette Valley, Western Cascades, High Cascades y Blue Mountains, respectivamente.	54
21	Inversión bidimensional aproximada para los datos magnetotelúricos de la línea Lincoln. Las resistividades de las celdas están en $\Omega\cdot m$, el significado de los símbolos CR, WV, WC, HC y BR se encuentra en la figura 20.	55
22	Respuestas lineales obtenidas al invertir los datos magnetotelúricos de la línea Lincoln. Con símbolos (+) se muestra los datos que se usaron, la respuesta lineal es la línea continua en cada gráfica.	56
23	Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek <i>et al.</i> (1989). Perfil de resistividad bajo los sondeos I y II.	57
24	Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek <i>et al.</i> (1989). Perfil de resistividad bajo los sondeos III y IV.	58

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
25	Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek <i>et al.</i> (1989). Perfil de resistividad bajo los sondeos V y VII.	59
26	Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek <i>et al.</i> (1989). Perfil de resistividad bajo el sondeo VIII.	60
27	Configuración del experimento numérico para comparar las funciones promediantes de datos filtrados y sin filtrar. Para el método magnetotelúrico se supuso que las mediciones de campo eléctrico se realizaron con dipolos contiguos, el punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.	66
28	Funciones de peso para las mediciones magnetotelúricas, gráfica para los períodos 3.3 y 5.6 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.	68
29	Funciones de peso para las mediciones magnetotelúricas, gráfica para los períodos 10 y 33 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.	69
30	Funciones de peso para mediciones filtradas (EMAP), gráfica para los períodos 3.3 y 5.6 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.	70
31	Funciones de peso para mediciones filtradas (EMAP), gráfica para los períodos 10 y 33 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.	71
32	Funciones promediantes para MT y EMAP. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.	72

I. INTRODUCCION

El objetivo principal de los métodos geofísicos es resolver problemas geológicos, particularmente aquellos en que se requiere conocer la naturaleza de las rocas a profundidad, ya sea a pocos metros o a cientos de kilómetros de la superficie de la Tierra. El desarrollo de estos métodos está condicionado por avances en: (a) la instrumentación; (b) los aspectos fisico-matemáticos del problema; y (c) el conocimiento de las propiedades físicas de las rocas.

En el primer caso, avances en la instrumentación garantizan más y mejores mediciones de los campos físicos en la superficie de la Tierra. Estas mediciones son la materia prima para estimar las propiedades físicas de las rocas a profundidad, por lo que su mejor calidad conduce necesariamente a la segunda condición. Se requieren avances en los aspectos fisico-matemáticos, simplemente porque no se sabe lo suficiente sobre cómo pasar de los campos a las propiedades, ya que tradicionalmente las leyes de la física se expresan matemáticamente pensando en la situación opuesta. Además, invariablemente se tiene que las relaciones matemáticas tradicionales, en los casos que se logra resolverlas para las propiedades, resultan altamente inestables y por lo general no tienen solución única. Por su relación con la forma tradicional de representar las leyes físicas, el problema de estimar las propiedades a partir de los campos se le conoce con el nombre de problema inverso. Finalmente, la tercera condición para el desarrollo de los métodos geofísicos le da significación geológica a las primeras dos, ya que solamente a través de las propiedades físicas de las rocas se puede alcanzar el objetivo último de resolver problemas geológicos.

El presente trabajo se centra en el problema inverso. Específicamente, se considera el problema electromagnético inverso en el que la propiedad de interés es la conductividad eléctrica y las mediciones corresponden a campos eléctricos y magnéticos. Para ser más precisos, el problema consiste en estimar la distribución de conductividad eléctrica de la tierra en función de la posición, partiendo de mediciones de campos eléctricos y magnéticos realizadas en la superficie de la Tierra. Las mediciones son los datos y la distribución de conductividad es la función incógnita.

En la tierra, como en cualquier conductor eléctrico, el campo electromagnético se comporta de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell. El caso que nos ocupa se puede tratar enteramente en términos de campos cuasi-estáticos, considerando que solamente se pueden realizar mediciones útiles a frecuencias relativamente bajas, debido a la poca penetración de las ondas electromagnéticas a frecuencias muy altas. En general, las mediciones se realizan a frecuencias en las que las corrientes de desplazamiento son despreciables comparadas con las de conducción (Grant and West, 1965), por lo que la permitividad eléctrica de las rocas no produce ningún efecto en las mediciones. Por otro lado, la permeabilidad magnética de las rocas es bastante uniforme en la mayor parte de los casos, considerándose igual a la del espacio libre (μ_0). Sobre estas bases, las ecuaciones de Maxwell vienen dadas como

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\sigma(r)\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{J}_s(\mathbf{r}), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{y} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \sigma(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})}. \quad (4)$$

\mathbf{E} representa el campo eléctrico, \mathbf{B} el campo magnético, σ la conductividad eléctrica, ω la frecuencia angular, \mathbf{r} el vector de posición y \mathbf{J}_s la densidad de corriente de una fuente externa cualquiera.

Las ecuaciones anteriores representan ecuaciones diferenciales para los campos, y tienen la característica de ser lineales con respecto a la función de la fuente. Desde este punto de vista, se trata de ecuaciones diferenciales lineales. En principio, no existe ninguna dificultad fundamental para resolverlas, considerando que se cuenta para tal propósito con una variedad de métodos tanto analíticos como numéricos. En los libros de texto sobre teoría electromagnética se pueden encontrar ejemplos de soluciones para geometrías particulares. A los problemas de este tipo, en que se trata de resolver para los campos dadas las propiedades, se les conoce como problemas directos.

Considérese ahora el problema inverso, de mucho mayor trascendencia en la geofísica. Se trata de estimar la función de conductividad $\sigma(\mathbf{r})$ partiendo de que se conocen los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} sobre determinada frontera, en nuestro caso la superficie de la Tierra. De entrada se ve que el problema difícilmente se puede resolver con los métodos matemáticos convencionales. Sin embargo, la dificultad extrema reside en que la relación entre los campos y la función de conductividad no es del tipo lineal. Esto se puede demostrar fácilmente considerando dos medios de conductividades diferentes y buscando el tipo de relación entre los campos.

La preocupación por resolver problemas electromagnéticos inversos en relación con la geofísica se remonta a mediados del presente siglo. Los primeros problemas atacados fueron los unidimensionales, y hasta la fecha son los únicos que han sido tratados de diversas maneras. Las mediciones magnetotelúricas son a las que más se recurre para probar diferentes tipos de soluciones, ya que el problema inverso correspondiente es uno de los más sencillos, aunque tal sencillez sólo sea relativa. Así, Bailey (1970) demostró que el problema inverso magnetotelúrico tiene solución única en el caso ideal de datos sin ruido. Para llegar a tal conclusión combinó las ecuaciones de Maxwell con el principio de causalidad. Mediante una técnica diferente, Weidelt (1972) resolvió el mismo problema, llegando a establecer condiciones necesarias para que las mediciones puedan interpretarse en términos unidimensionales. En los dos trabajos anteriores, el problema se plantea sin recurrir a aproximaciones, aunque al final se tengan que utilizar para encontrar la solución. Si bien en ambos casos los métodos desarrollados son bastante elegantes y poderosos, tienen la desventaja de que difícilmente se pueden generalizar a dos o tres dimensiones.

Más flexibles que los anteriores son los métodos basados en la continuación analítica de campos (Roy, 1963, 1966, 1968, 1969; Berdichevsky y Zhdanov, 1984). En este caso no se busca la función de conductividad de la tierra, sino que se resuelve para el campo electromagnético dentro de la tierra partiendo de sus valores en la superficie. La idea es detectar cambios en la función de conductividad a través de las deflexiones de los campos. Estos métodos han probado ser efectivos para geometrías relativamente simples, requiriéndose, aún en estas condiciones, de una gran cantidad de datos para realizar las continuaciones. Otro de sus inconvenientes es que la continuación analítica es un proceso altamente inestable, además de que en geometrías complicadas deja de ser obvia la relación

entre campos y funciones de conductividad. Estrechamente ligados con la continuación analítica, están los métodos de migración desarrollados por Zhdanov y Frenkel (1983) y Lee *et al.* (1987). En estos como en los trabajos de continuación, el problema se plantea directamente en términos de las ecuaciones de Maxwell, sin recurrir a aproximaciones, aunque al final se tengan que utilizar para encontrar la solución. En este sentido los métodos de continuación pertenecen a la misma categoría de los que se discutieron en el párrafo anterior.

En una categoría aparte, se colocan los métodos basados en la linealización de las ecuaciones de Maxwell. En este caso, el problema de resolver para la función de conductividad se reemplaza por otro: se propone una función de conductividad y se busca cómo modificarla para que su efecto en la superficie de la Tierra coincida lo mejor posible con los datos. Matemáticamente, la ecuación que se debe resolver para un problema tridimensional hipotético es

$$m_i - t_i = \int_v G_i(r, \sigma_i) [\sigma_m(r) - \sigma_i(r)] d^3r + O(\|\sigma_m - \sigma_i\|^2), \quad (5)$$

donde m_i representa la i -ésima observación o medición, t_i el valor calculado correspondiente, el cual se obtiene resolviendo el problema directo para la función de conductividad propuesta (σ_i). Se busca la función σ_m con el criterio de que la diferencia $m_i - t_i$ debe reducirse tanto como sea posible para todas las mediciones. La función G_i representa la derivada de Fréchet de t_i con respecto a la conductividad y se evalúa en σ_i .

El residuo $O(\|\sigma_m - \sigma_i\|^2)$ contiene términos de segundo y mayor orden en la diferencia $\sigma_m - \sigma_i$, e invariablemente se despreja, suponiendo que σ_i está cerca de σ_m . La integral se toma sobre todo el dominio de σ_i .

De entre todos los métodos de inversión, los que se basan en la linealización de las ecuaciones de Maxwell son las más versátiles. Esto se debe a que a diferencia de lo que ocurre en las ecuaciones (1) a la (4), en la (5) las mediciones (los campos) se separan de la función incógnita, reduciéndose el problema a una ecuación integral lineal que puede resolverse por técnicas estándar. Además, conceptualmente se pueden linealizar problemas independientemente de su dimensión, aunque a la fecha sólo se han atacado problemas uni y bidimensionales. El problema magnetoteléurico en una dimensión ha sido tratado por Parker (1970), Oldenburg (1979), Smith y Booker (1988) y Constable et al. (1987). En dos dimensiones se encuentran los trabajos de Jiracek et al. (1987) y de Groot-Hedlin y Constable (1990). También se ha aplicado linealización para resolver el problema unidimensional de resistividad por corriente directa (Oldenburg, 1978).

En general, se puede afirmar que los métodos basados en linealización son bastante flexibles, y que prácticamente garantizan que se encontrará un modelo que finalmente se ajuste razonablemente a los datos. Pocas veces se obtiene el mejor ajuste resolviendo la ecuación (5) una sola vez, debido a que la diferencia $m_i - t_i$ puede no ser pequeña para que se cumpla la aproximación lineal. Sin embargo, repitiendo el procedimiento con la nueva función de conductividad como referencia, en la mayor parte de los casos se observa que el proceso converge en pocas iteraciones. Por el lado negativo, la mayor crítica que se le puede hacer a la linealización de las ecuaciones de Maxwell es que las reemplaza por relaciones

aproximadas, con lo que se pierde gran parte de la perspectiva concreta que pueda tener un problema electromagnético. Por esta razón, no se le utiliza para establecer criterios de validez general, como los mencionados con relación a los métodos que atacan directamente el problema.

Del análisis anterior se desprende que falta todavía mucho por hacer para sentirnos satisfechos en el área de la inversión de datos electromagnéticos. Es de esperarse que las tendencias actuales en la investigación, según se clasificaron en los párrafos anteriores, sigan su curso normal aplicándose a problemas nuevos o simplemente adaptándose a las nuevas facilidades de cómputo. También es factible que aparezcan otras tendencias que complementen o incluyan a las existentes, pues el problema inverso electromagnético es lo suficientemente complejo para que pueda ser resuelto de una vez y para siempre.

En el presente trabajo se considera una nueva forma de atacar el problema. Como base se toman las ecuaciones integrales alineales encontradas por Gómez-Treviño (1987a), las cuales son tan generales como las basadas en la linealización de las ecuaciones de Maxwell, sin tener el carácter aproximado de estas últimas. Para mediciones de campo eléctrico o equivalentes, la ecuación correspondiente es

$$E_i + t \frac{\partial E_i}{\partial t} = - \int_v G_i(\mathbf{r}, \sigma) \sigma(r) dv, \quad (6)$$

donde E_i representa la i -ésima medición. En el dominio del tiempo t representa el tiempo, y en el dominio de las frecuencias el período (T). Como antes, G_i es la derivada de Fréchet de E_i con respecto a la función de conductividad $\sigma(r)$. La diferencia principal con respecto

a la ecuación (5), es que no existe la función de conductividad de referencia, y que tampoco aparecen términos de segundo y mayor orden. Esto no significa, sin embargo, que la ecuación (6) sea lineal con respecto a la función incógnita, ya que G_i depende de $\sigma(r)$. Para mediciones de campo magnético o equivalentes la ecuación correspondiente es muy similar a la anterior.

La ecuación (6) y su similar para campos magnéticos, han sido utilizadas en la literatura con diferentes propósitos (Gómez-Treviño, 1987b; Esparza y Gómez-Treviño, 1987; Sasaki, 1989; Spies, 1989; y Boerner y Holladay, 1990). En todos los casos se trata de aplicaciones en que se aprovecha el carácter exacto de las ecuaciones, ya sea para tratar casos especiales susceptibles de solución analítica, o bien para reforzar argumentos en relación con las características particulares de métodos electromagnéticos específicos. Ningún intento se ha reportado de resolver las ecuaciones mediante métodos generales, demostrando la utilidad de las mismas en la interpretación de datos de campo. Una solución en éstos términos no sólo sería una solución más del problema inverso, sino que además significaría que las ecuaciones de Maxwell son autosuficientes en relación con los problemas electromagnéticos inversos, resultando innecesario recurrir a los esquemas clásicos de linealización.

El objetivo central de la tesis es la construcción de modelos a partir de la ecuación (6), para los dos modos fundamentales de conducción de corriente eléctrica en la tierra. Con este fin, en el Capítulo II presento un método con base en la programación lineal para resolver ecuaciones del tipo de la (6). El método es estrictamente válido sólo para problemas lineales, pero puede aplicarse por etapas a problemas alineales. Su principal característica es que tiende a minimizar el número de discontinuidades de la función incógnita, lo que desde un

punto de vista geofísico resulta bastante conveniente (Esparza y Gómez-Treviño, 1989). En el Capítulo III aplico iterativamente el método mencionado a la inversión unidimensional de datos de resistividad por corriente directa. Le sigue, en el Capítulo IV, la inversión de sondeos magnetoteléuricos utilizando el mismo procedimiento. En ambos casos se obtienen resultados satisfactorios comparables a los que se obtienen mediante linealización, por lo que se considera probada la tesis en sus aspectos fundamentales. Los siguientes dos capítulos contienen intentos independientes de encontrar otras aplicaciones a la ecuación (6), particularmente en relación al problema magnetoteléurico en dos dimensiones. El Capítulo VII resume las conclusiones.

II. DOS PROBLEMAS ELECTROMAGNETICOS LINEALES EN GEOFISICA

II.1 INTRODUCCION

En general, los problemas electromagnéticos inversos son alineales. Existen casos, sin embargo, en que mediante desarrollos asintóticos los problemas se pueden expresar como ecuaciones integrales lineales, para las que existen en la literatura una variedad de métodos de solución. En este capítulo se presentan dos casos de este tipo en relación con dos problemas geofísicos. El primero corresponde a mediciones de polarización inducida en terrenos con poco contraste en resistividad, y el segundo a mediciones electromagnéticas de baja frecuencia en terrenos cuya resistividad puede variar arbitrariamente con la profundidad. En ambos casos, se consideran solamente los aspectos relacionados con la solución numérica de las ecuaciones; una discusión más amplia de los problemas se puede encontrar en Esparza y Gómez-Treviño (1987, 1989).

II.2 FORMULACION

De las diversas técnicas que existen para resolver ecuaciones integrales lineales se seleccionaron las de programación lineal (Gass, 1969), por ser las que permiten imponer condiciones de positividad a las propiedades físicas. La idea de plantear el problema en términos de la derivada vertical de la función incógnita se basa en un trabajo de Oldenburg y Samson (1979), quienes aplican una técnica similar a la solución de un problema de interferometría óptica.

Consideremos una ecuación integral de Fredholm de la primera clase:

$$d_i = \int_0^{\infty} g_i(z)p(z)dz \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

d_i es el i -ésimo dato $g_i(z)$ es el núcleo de la ecuación y $p(z)$ es la función incógnita. Para encontrar una expresión que contenga a $p'(z)$, la derivada de p con respecto a z , integramos por partes la ecuación (7) y obtenemos:

$$\int_0^{\infty} G_i(z)p'(z)dz = d_i - p(0)G_i(0), \quad (8)$$

donde

$$G_i(z) = \int_z^{\infty} g_i(u)du.$$

Considerando que cada dato tiene asociado una incertidumbre (e_i), la ecuación (8) se reemplaza por

$$d_i - p(0)G_i(0) - e_i \leq \int_0^{\infty} G_i(z)p'(z)dz \leq d_i - p(0)G_i(0) + e_i \quad (9)$$

Planteado en estos términos, el problema inverso consiste en resolver para $p'(z)$ dado un conjunto finito de datos. Debido a que se desea encontrar una función de variación arbitraria a partir de un número finito de datos, se trata de un problema indeterminado que tiene muchas soluciones. De todas ellas, elegimos la que minimiza

$$\mathcal{O} = \int_0^{\infty} |p'(z)| dz. \quad (10)$$

Con la finalidad de resolver este problema hacemos una partición $z_1 < z_2 < \dots < z_m$ y suponemos que $p'(z)$ es constante para $z \in [z_j, z_{j+1}]$. Así, el problema de encontrar $p'(z)$ que cumpla con (9) y que minimize (10) se puede resolver con técnicas de programación lineal. Llamaremos a este procedimiento P_1 .

Como una alternativa a la metodología anterior, exponemos a continuación el procedimiento P_2 . Consideremos a $p(z)$ constante en $[z_j, z_{j+1}]$, se sigue que $p'(z)$ se puede expresar en términos de la delta de Dirac $\delta(z - z_j)$, mediante:

$$p'(z) = \sum_{j=1}^{m-1} (p_{j+1} - p_j) \delta(z - z_j) \quad (11)$$

Al introducir (11) en (9) encontramos que

$$d_i - p(0)G_i(0) - e_i \leq \sum_{j=1}^{m-1} G_i(z_j) (p_{j+1} - p_j) \leq d_i - p(0)G_i(0) + e_i. \quad (12)$$

Del número infinito de soluciones de (12), buscamos aquella que minimize

$$\mathcal{O} = \sum_{j=1}^{m-1} |p_{j+1} - p_j|. \quad (13)$$

en este procedimiento, al igual que en el anterior, se aplican técnicas de programación lineal para encontrar la solución. Los detalles sobre la minimización de (13) ó (10) en términos de variables no negativas se dá en el Apéndice A.

A continuación presentamos una aplicación de cada procedimiento a dos problemas geofísicos lineales.

II.3 APLICACIONES

Para aplicar el procedimiento P_1 elegimos el problema de polarización inducida para bajos contrastes en resistividad. En este caso (Esparza y Gómez-Treviño, 1989) la cargabilidad aparente (p_a) en función de la cargabilidad del terreno $p(z)$ para el arreglo Schlumberger es

$$p_a(r) = \int_0^{\infty} \frac{12r^3 z}{(r^2 + 4z^2)^{5/2}} p(z) dz, \quad (14)$$

donde $r = AB/2$, siendo AB la separación entre los electrodos de corriente y

$$G_i(z) = r^3 (r^2 + 4z^2)^{-3/2},$$

Para generar las cargabilidades aparentes se eligió el modelo de cuatro capas que se muestra en la Figura 1b con líneas punteadas y se utilizaron 25 capas para realizar lá inversión. A cada observación se le sumó 10% de ruido gaussiano. El modelo encontrado con el procedimiento P_1 se muestra en la Figura 1b y su respuesta en la Figura 1a. Se calculó el valor de

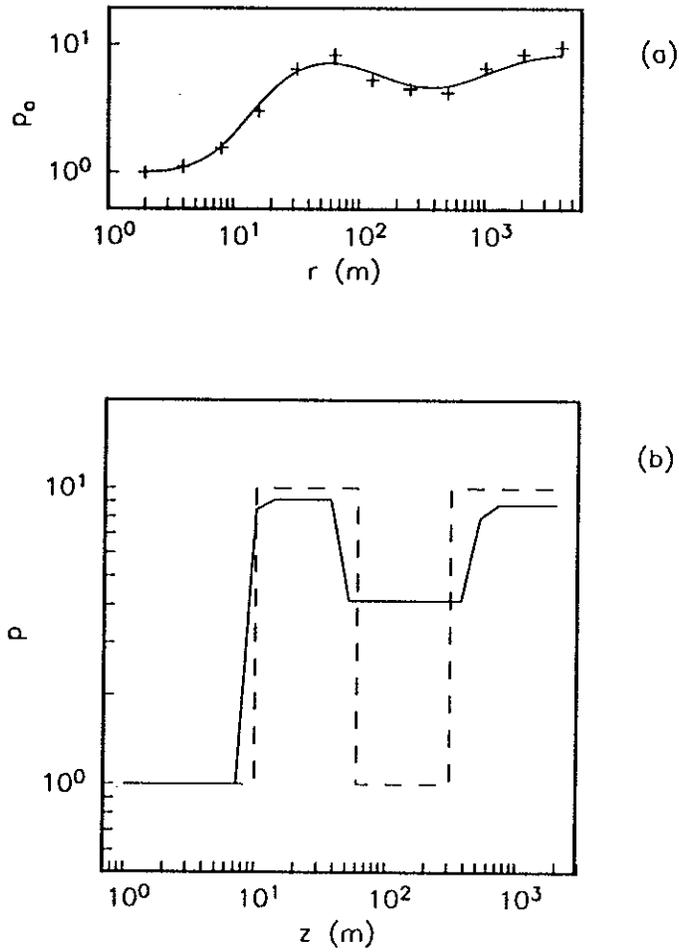


Figura 1. Inversión de datos de polarización inducida. En (a) se muestra con símbolos (+) los datos que se usaron y con línea continua la respuesta del modelo estimado, en (b) se muestra con líneas punteadas el modelo hipotético y con línea continua el modelo estimado. Las unidades de cargabilidad son arbitrarias.

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_a(r_i) - \hat{p}_a(r_i)}{e_i} \right)^2, \quad (15)$$

el cual fue de 1.0, lo que significa un buen ajuste bajo la hipótesis de que los errores tienen una fdp gaussiana. $\hat{p}_a(r_i)$ representa la respuesta del modelo estimado, a la separación r_i .

Para la aplicación del procedimiento P_2 elegimos el problema de sondeos electromagnéticos en el límite resistivo con dipolo magnético vertical. En este caso (Esparza y Gómez-Treviño, 1987) la conductividad aparente (σ_a) en términos de la conductividad eléctrica del subsuelo ($\sigma(z)$) viene dada como

$$\sigma_a(r) = \int_0^{\infty} \frac{4zr}{(r^2 + 4z^2)^{3/2}} \sigma(z) dz. \quad (16)$$

En este caso r es la distancia entre la bobina emisora y la receptora y $G_i(z) = r(r^2 + 4z^2)^{-1/2}$. Los datos que se usaron se muestran en la Figura 2a; son la respuesta del modelo que se muestra en la Figura 2b con líneas punteadas, más 10% de ruido gaussiano. El modelo estimado se muestra en la Figura 2b, el valor de χ^2 para este ejemplo fué de 1.0, lo que significa un buen ajuste.

La discrepancia entre los modelos estimados y los hipotéticos, se debe a que los datos fueron contaminados con ruido. Conforme el nivel de ruido tienda a cero la discrepancia tenderá a desaparecer, según se muestra para el caso de polarización inducida en Esparza y Gómez-Treviño (1989).

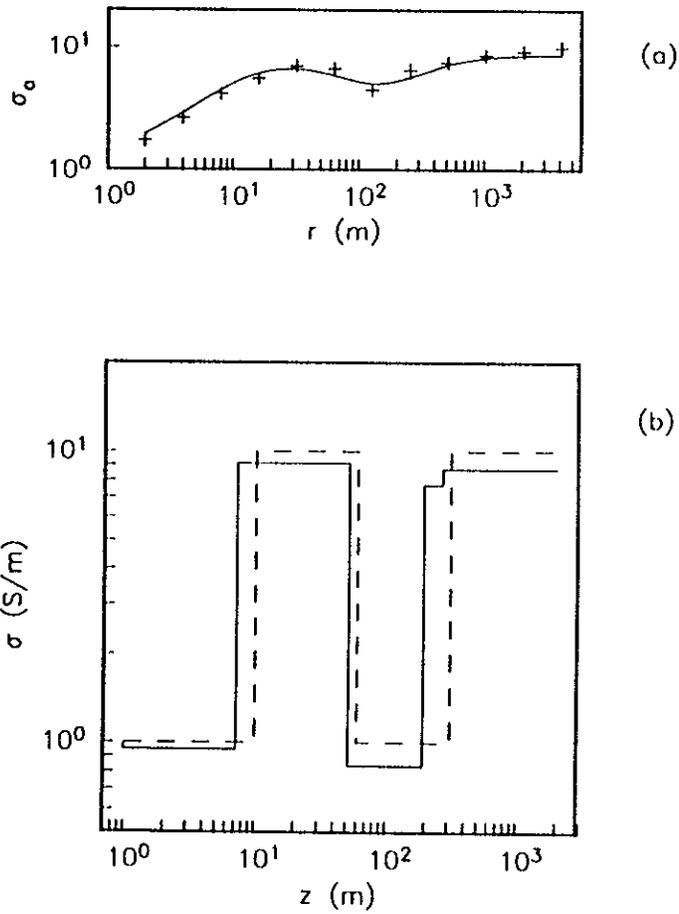


Figura 2. Inversión de datos electromagnéticos. En (a) se muestra con símbolos (+) los datos que se usaron y con línea continua la respuesta del modelo estimado, en (b) se muestra con líneas punteadas el modelo hipotético y con línea continua el modelo estimado.

Como se observa de las Figuras (1b) y (2b) los modelos resultantes se aproximan a modelos con pocas capas, esto se puede explicar con un teorema de programación lineal, el cual establece que en un sistema de n ecuaciones con m incógnitas la solución óptima contiene al menos $m-n$ ceros. Esta característica de los modelos no se observó con el método de expansión espectral expuesto por Parker (1977).

II.4 CONCLUSIONES

Los ejemplos anteriores demuestran que las técnicas de programación lineal, al aplicarlas con el criterio de mínima norma de la derivada, producen modelos con características de interés en geofísica. Esto es, que la función de conductividad de los modelos estimados, a pesar de que se les permite que puedan variar sobre pequeños intervalos, tienden a semejar una tierra estratificada con pocas capas homogéneas. Este comportamiento no se pudo lograr mediante otras técnicas con las que se experimentó, en las etapas iniciales del proyecto.

Una vez establecida la técnica más adecuada para resolver las ecuaciones integrales, en relación con criterios geofísicos, se procedió a aplicarla a problemas alineales según se describe en los siguientes dos capítulos.

III. INVERSION DE SONDEOS DE RESISTIVIDAD

III.1 INTRODUCCION

El campo eléctrico asociado con el flujo de corriente continua obedece la cuarta ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \rho \cdot \mathbf{E}}{\rho} - \rho \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (17)$$

donde $\rho = 1/\sigma$ representa la función de resistividad eléctrica. En relación con el problema inverso unidimensional, en el que ρ sólo depende de la profundidad z , la linealización de la ecuación anterior conduce a

$$\delta E_i = \int_0^{\infty} G_i(\rho, z) \delta \rho(z) dz, \quad (18)$$

donde G_i generalmente se expresa analíticamente en términos de transformadas de Hankel para el caso de fuentes puntuales de corriente. La ecuación (18) ha sido utilizada por Oldenburg (1978) y Constable *et al.* (1987) en relación con la inversión de sondeos de resistividad. En el presente capítulo, utilizaremos para el mismo propósito la ecuación (6) para el caso de campos que no varían con el tiempo. Esta ecuación es

$$E_i = \int_0^{\infty} G_i(\rho, z) \rho(z) dz, \quad (19)$$

donde G_i , al igual que en la ecuación (18), representa la derivada de E_i con respecto a $\rho(z)$.

La ecuación (18) es una relación aproximada y válida sólo para pequeñas variaciones δE_i y $\delta \rho(z)$, por lo que no puede considerarse equivalente a la (17). Por otro lado, la ecuación (19) es una relación exacta y enteramente equivalente a la (17). De lo anterior se sigue que si se logra invertir datos mediante la relación exacta (19), sin recurrir expresamente a la aproximación (18), se tendrá que resulta redundante linealizar la original de Maxwell (17). En lo que sigue se prueba esta tesis.

III.2 FORMULACION DEL PROBLEMA INVERSO

Se consideran mediciones para el dispositivo Schlumberger, el cual consiste de dos electrodos de corriente situados simétricamente a una distancia r_i del punto donde se mide el campo eléctrico E_i . Siguiendo la tradición, las mediciones se expresan en términos de la resistividad aparente $\rho_a(r_i)$ como

$$\rho_a(r_i) = \pi r_i^2 \frac{E_i}{I}, \quad (20)$$

donde I es la corriente que se hace circular por la tierra.

En términos de la resistividad aparente la ecuación (19) se convierte en

$$\rho_a(r_i) = \int_0^{\infty} G_{ai}(\rho, z) \rho(z) dz, \quad (21)$$

donde ahora G_{ai} representa la derivada de $\rho_a(r_i)$ con respecto a $\rho(z)$.

Para utilizar el procedimiento P_2 desarrollado en el capítulo anterior, se considera un medio en el que $\rho(z) = \rho_j$ para $z \in (z_j, z_{j+1}), j = 1, m$, de tal manera que la secuencia de capas pueda acomodar una distribución arbitraria sin modificar sus espesores. De esta manera podemos utilizar el hecho de que

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} G_{ai}(\rho, z) dz = \frac{\partial \rho_a(r_i)}{\partial \rho_{j+1}} \quad (22)$$

El problema puede entonces formularse en términos del procedimiento P_2 como

$$d_i - e_i \leq \sum_{j=1}^{m-1} \left[\sum_{l=j+1}^m \frac{\partial \rho_a(r_i)}{\partial \rho_l} \right] (\rho_{j+1} - \rho_j) \leq d_i + e_i, \quad (23)$$

donde

$$d_i = \rho_a(r_i) - \rho(0) \sum_{j=1}^m \frac{\partial \rho_a(r_i)}{\partial \rho_j}, \quad i = 1, n. \quad (24)$$

El problema consiste en encontrar $\rho_j, j = 1, m$, de tal manera que cumpla con el sistema de desigualdades y se minimize el criterio del procedimiento P_2 .

III.3 PROCEDIMIENTO NUMERICO Y APLICACIONES

Para iniciar el proceso calculamos las derivadas parciales para un semiespacio homogéneo. En seguida aplicamos el procedimiento P_2 , vía las ecuaciones (23) y (24), para

encontrar la distribución de resistividad. Este proceso se repite calculando las derivadas según la distribución encontrada, hasta que la respuesta de la nueva distribución reproduzca los datos, considerando su incertidumbre. Ya que la derivada de Fréchet para un semiespacio homogéneo no depende de la resistividad (Oldenburg, 1978), se sigue que el modelo final no depende del valor inicial que se le asigne. Para calcular las derivadas parciales se usaron las expresiones analíticas dadas por Constable *et al.* (1987) y para su evaluación numérica se usaron los filtros de Anderson (1975). Estos filtros también se usaron para calcular el problema directo.

Para ilustrar el procedimiento se usaron los datos que aparecen en la figura 3a, los cuales son la respuesta del modelo que aparece en la figura 3b más 5% de ruido gaussiano. En la figura 4 se muestran los modelos construidos en cada iteración. El valor de χ^2 (eq. 15) para cada iteración se presenta en la tabla 1

TABLA 1

iteración	1	2	3	4
χ^2	6.4	3.2	1.8	1.0

Se observa que el proceso es convergente, no obstante que se usaron datos con ruido. Los modelos construidos con programación lineal tienden, como en el caso de problemas lineales, a simular modelos con pocas capas, según se observa en la figura 4. Para el presente caso, el modelo hipotético es diferente al estimado debido a que se usaron datos con ruido y también a la característica de programación lineal de minimizar la diferencia de la

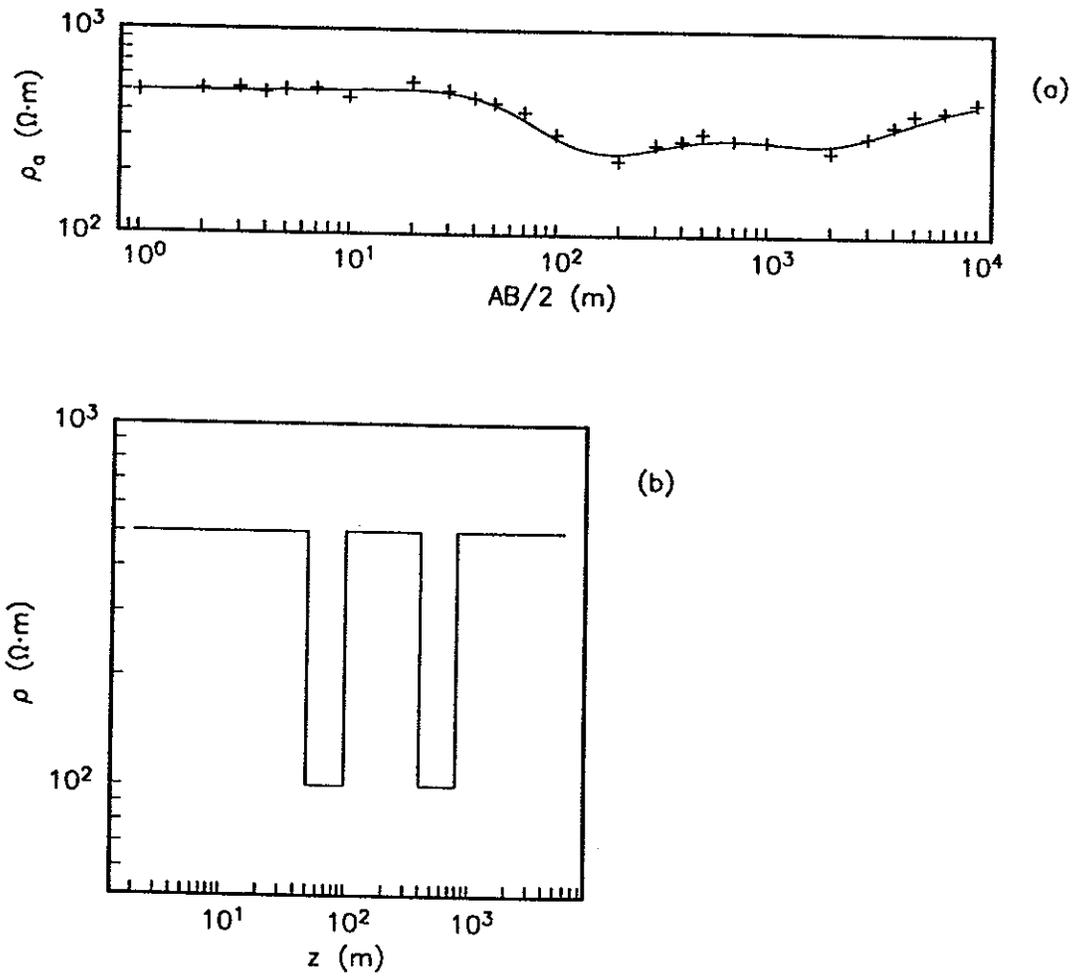


Figura 3. Inversión de datos sintéticos de resistividad. En (a) se muestra con símbolos (+) los datos que se usaron y con línea continua la respuesta del modelo estimado, en (b) se muestra el modelo hipotético.

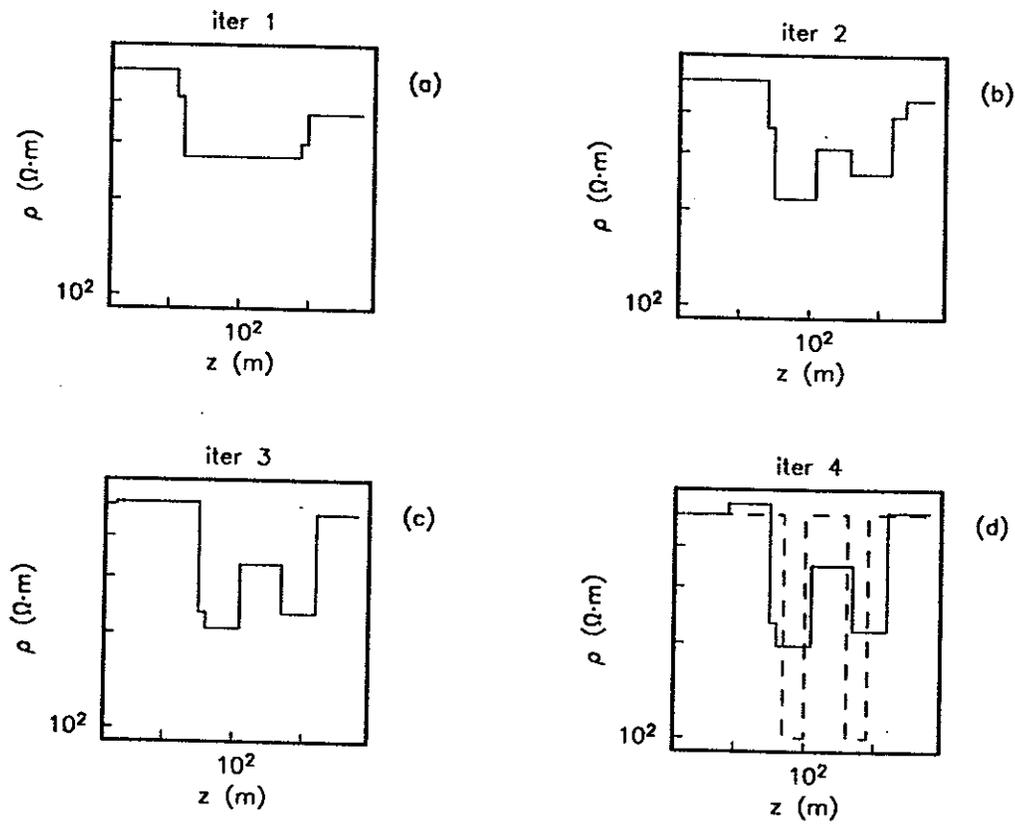


Figura 4. Modelos construidos en cada iteración para el caso de datos sintéticos. El modelo que se muestra en (d) con líneas punteadas es el modelo hipotético.

resistividad de una capa a la siguiente. Con esto aparecen capas más gruesas y la respuesta del modelo estimado coincide bien con los datos debido a efectos de equivalencia y por consiguiente el modelo estimado es un modelo aceptable.

A continuación se interpretan datos de campo de un sondeo realizado en Australia (Constable *et al.*, 1984). El modelo que se encontró después de 5 iteraciones se muestra en la figura 5b. El modelo que encontró Constable con un método de regularización basado en linealización se presenta en la figura 6. El valor de χ^2 para ambos modelos es 1. Los modelos encontrados son bastante similares así como su respectivo grado de ajuste a los datos.

III.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se presentó un método para interpretar sondeos de resistividad, basado en la ecuación (19) y utilizando programación lineal. Los resultados demuestran que la técnica de usar las derivadas del modelo anterior en la siguiente iteración es un proceso convergente. En el presente caso, el procedimiento es básicamente equivalente al de linealización, por lo que queda probada la tesis de que en el caso de campos de corriente continua resulta redundante linealizar la ecuación de Maxwell correspondiente. En el capítulo siguiente se considera el caso de campos que varían con el tiempo.

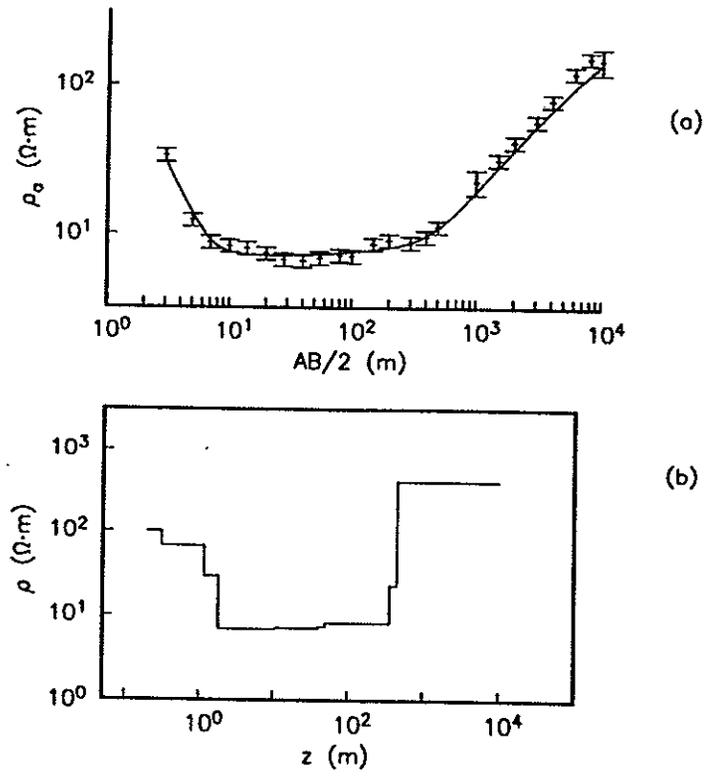


Figura 5. Inversión de los datos de Constable *et al.* (1984). En (a) se muestran los datos y la respuesta del modelo estimado después de 5 iteraciones, en (b) se muestra el modelo estimado.

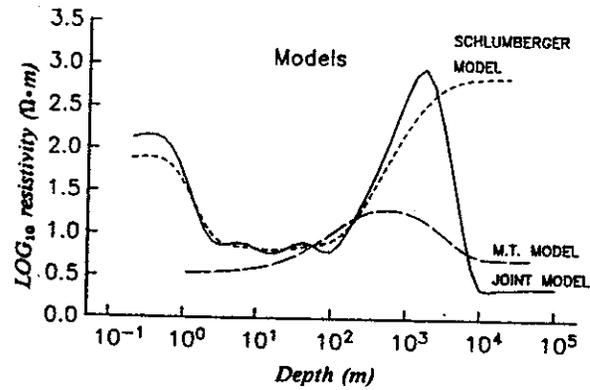


Figura 6. Modelo encontrado por Constable *et al.* (1984), quien usó un método de regularización. El modelo se señala en la figura como "Schlumberger model".

IV. INVERSION DE SONDEOS MAGNETOTELURICOS

IV.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior se demostró, que resulta redundante linealizar la cuarta ecuación de Maxwell en lo relativo al problema inverso. En el presente capítulo se trata el caso de las primeras dos ecuaciones, para lo cual se suponen mediciones magnetotelúricas. Las primeras dos ecuaciones de Maxwell en el dominio de las frecuencias son

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad (25)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{J}_s, \quad (26)$$

donde ω representa la frecuencia angular $2\pi/T$.

En el método magnetotelúrico (Cagniard, 1953), se consideran ondas electromagnéticas planas, incidiendo verticalmente en la tierra. La fuente de estas ondas se encuentra a gran altura, por lo que en la ecuación (26) se puede poner $\mathbf{J}_s = 0$ para puntos en el interior de la tierra. Considerando que el campo eléctrico es horizontal y suponiendo que σ sólo depende de z , la sustitución de la ecuación (25) en la (26) conduce a

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dz^2} - i\omega \mu \sigma(z) \mathbf{E} = 0. \quad (27)$$

Esta es la ecuación básica de los sondeos magnetotelúricos. Su simplicidad es sólo aparente, sobre todo en lo relativo al problema inverso.

Simbólicamente la linealización de la ecuación (27) se puede escribir como

$$\delta E_i = \int_0^{\infty} G_i(\sigma, z) \delta \sigma(z) dz, \quad (28)$$

donde G_i en el presente caso representa la derivada de E_i con respecto a $\sigma(z)$. La ecuación (28) ha sido utilizada por Oldenburg (1979) y Constable *et al.* (1987) en relación con la inversión de sondeos magnetotelúricos. En el presente capítulo utilizaremos, para el mismo propósito, la ecuación (6) para el caso general de campos que varían con el tiempo. La ecuación es

$$E_i + T \frac{dE_i}{dT} = - \int_0^{\infty} G_i(\sigma, z) \sigma(z) dz. \quad (29)$$

La relación que existe entre las ecuaciones (27), (28) y (29), es la misma que la discutida en el capítulo anterior para campos estáticos. En lo que sigue se demuestra que la ecuación (29), se puede utilizar directamente en la inversión de datos, por lo que resulta redundante recurrir a los procedimientos clásicos de linealización.

IV.2 FORMULACION DEL PROBLEMA INVERSO

Se consideran mediciones de conductividad aparente (σ_a), las cuales se forman mediante la razón de un campo magnético a uno eléctrico para un determinado período. La fórmula de normalización viene dada simplemente como

$$\sigma_a(T_i) = \frac{2\pi |B(0, T_i)|^2}{\mu_0 T_i |E(0, T_i)|^2}, \quad (30)$$

donde $E(0, T_i)$ y $B(0, T_i)$ representan mediciones en la superficie de la tierra ($z = 0$) de los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente.

En términos de σ_a , la ecuación (29) puede escribirse como

$$\sigma_a(T_i) = \frac{1}{1 - m_i} \int_0^\infty G_{a_i}(\sigma, z) \sigma(z) dz, \quad (31)$$

donde

$$m_i = \frac{\partial \log \sigma_a(T_i)}{\partial \log T_i} .$$

En el presente caso, G_{a_i} representa la derivada de $\sigma_a(T_i)$ con respecto a $\sigma(z)$.

Para utilizar el procedimiento P_2 desarrollado en el capítulo II, se considera un medio en el que $\sigma(z) = \sigma_j$ para $z \in (z_j, z_{j+1})$, $j = 1, m$, de tal manera que la secuencia de capas pueda acomodar una distribución arbitraria, sin modificar sus espesores. De esta manera podemos utilizar el hecho de que

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} G_{a_i}(\sigma, z) dz = \frac{\partial \sigma_a(T_i)}{\partial \sigma_{j+1}} . \quad (32)$$

Al igual que para los sondeos de resistividad, el problema puede entonces formularse en términos del procedimiento P_2 como

$$d_i - e_i \leq \frac{1}{1 - m_i} \sum_{j=1}^{m-1} \left[\sum_{l=j+1}^m \frac{\partial \sigma_a(T_i)}{\partial \sigma_l} \right] [\sigma_{j+1} - \sigma_j] \leq d_i + e_i, \quad (33)$$

donde

$$d_i = \sigma_a(T_i) - \frac{\sigma(0)}{1 - m_i} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \sigma_a(T_i)}{\partial \sigma_j}, \quad i = 1, n. \quad (34)$$

El problema consiste en encontrar $\sigma_j, j = 1, m$, de tal manera que se cumpla con el sistema de desigualdades (33) y se minimize el criterio del procedimiento P₂.

IV.3 PROCEDIMIENTO NUMERICO Y APLICACIONES

Para iniciar el proceso iterativo se utiliza la aproximación

$$\frac{1}{1 - m_i} G_{a_i}(\sigma, z) \approx \text{Re} \left[2\gamma_i e^{-2\gamma_i z} \right], \quad (35)$$

donde

$$\gamma_i^2 = i\omega\mu_0\sigma_a(T_i) \quad .$$

Esta aproximación corresponde a representar la función de peso en la ecuación (31), por la correspondiente a semiespacios homogéneos de conductividad $\sigma_a(T_i), i = 1, n$. Como en general σ_a varía con T_i , la aproximación anterior no significa que el proceso iterativo empiece con un semiespacio como modelo inicial. Se trata más bien de un conjunto de n semiespacios homogéneos con diferentes conductividades, todos supuestos simultáneamente como modelo inicial. Considerando que para los semiespacios $m_i = 0, i = 1, n$, la función

$G_i(z_j)$ que aparece en (12) se puede evaluar simplemente como

$$G_i(z_j) = Re[e^{-2\gamma_i z_j}] \quad (36)$$

Sustituyendo esta ecuación en la (12), se procede a aplicar el procedimiento P_2 para estimar $\sigma_j, j = 1, m$. En la segunda iteración se supone la distribución encontrada como el nuevo modelo inicial, calculándose para el mismo tanto las derivadas parciales como las pendientes m_i y se usan las ecuaciones (33) y (34) para encontrar el nuevo modelo. Para calcular las derivadas parciales se usaron las expresiones analíticas dadas por Constable *et al.* (1987). En cuanto a la pendiente logarítmica, m_i , se desarrolló una expresión analítica según se describe en el Apéndice B. La distribución de conductividades obtenida en la segunda iteración se utiliza como modelo inicial en la tercera, y así sucesivamente hasta que se obtiene un ajuste razonable a los datos. En cada iteración se calcula el valor

$$rms = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_a(T_i) - \hat{\sigma}_a(T_i)}{\sigma_a(T_i)} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (37)$$

donde $\hat{\sigma}_a(T_i)$ representa el valor calculado de la conductividad aparente para el nuevo modelo.

En las figuras 7 y 8 se presentan los resultados de un caso hipotético. Los datos que se invirtieron junto con la respuesta del modelo final encontrado, se muestran en la figura 7. Los modelos encontrados en la primera y última iteración se muestran en la figura 8 junto con el modelo hipotético. El modelo final, bastante semejante al hipotético, se obtuvo en sólo cuatro iteraciones. El ajuste obtenido fue $rms = 4\%$.

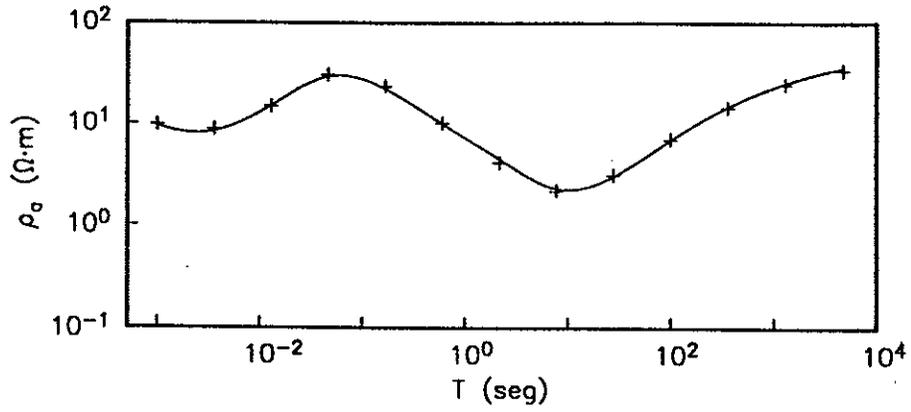


Figura 7. Inversión de sondeos magnetotelúricos. Con símbolos (+) se presentan los datos que se usaron para la inversión, con línea continua se muestra la respuesta del modelo estimado. El valor rms, en este caso, es de 4%.

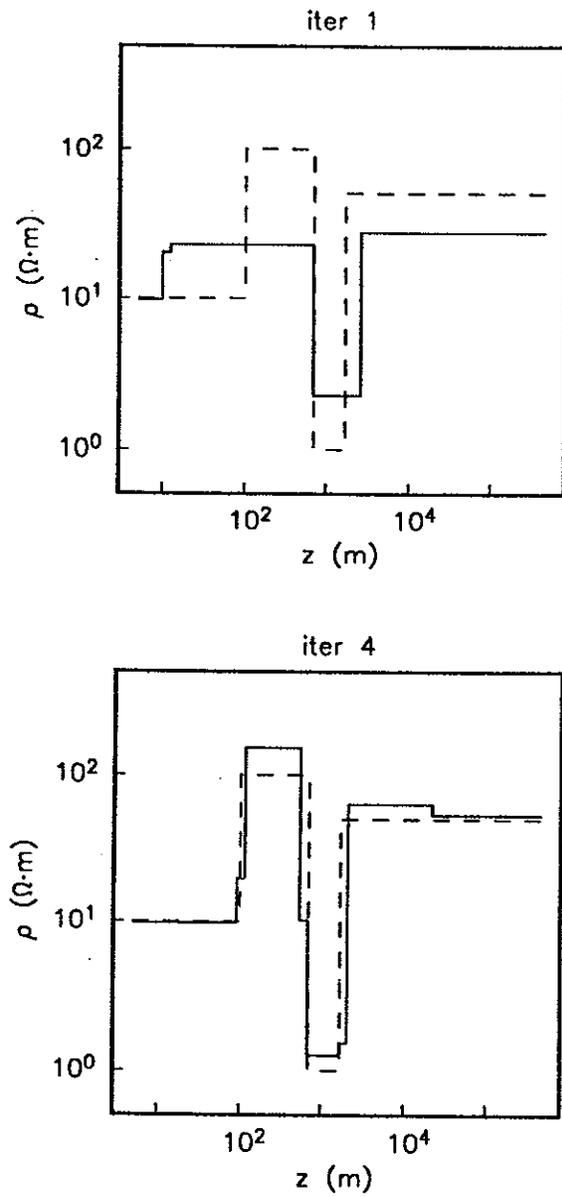


Figura 8. Modelos construidos durante el proceso iterativo. Con línea punteada se muestra el modelo hipotético y con línea continua el modelo estimado.

La aplicación del método a datos reales se muestra en las figuras 9 y 10. En la primera se presentan los datos junto con la respuesta del modelo obtenido al final de la segunda iteración. Los modelos correspondientes se muestran en la figura 10. A manera de comparación, en la figura 11 se presenta el resultado de invertir los mismos datos, mediante el método regularizado de Constable *et al.* (1987), el cual se basa en linealización. Como puede observarse, los modelos finales en ambos casos son bastante similares.

IV.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se presentó un método para interpretar sondeos magnetoteléuticos, basado en la ecuación (29) y utilizando programación lineal. Los resultados muestran que la ecuación (29) conduce a un proceso convergente, similar al que se obtiene aplicando los procedimientos clásicos de linealización. Con esto se completa la prueba de que las ecuaciones de Maxwell son autosuficientes en relación con los problemas electromagnéticos inversos. En el presente capítulo se consideraron las primeras dos ecuaciones, habiéndose tratado la cuarta en el capítulo III. La tercera ecuación de Maxwell no requiere de prueba alguna, pues sólo se refiere a la inexistencia de monopolos magnéticos.

Si bien, en el resto del trabajo se presentan extensiones de lo hasta aquí desarrollado, el material no es del todo esencial para la tesis mencionada sobre la suficiencia de las ecuaciones de Maxwell.

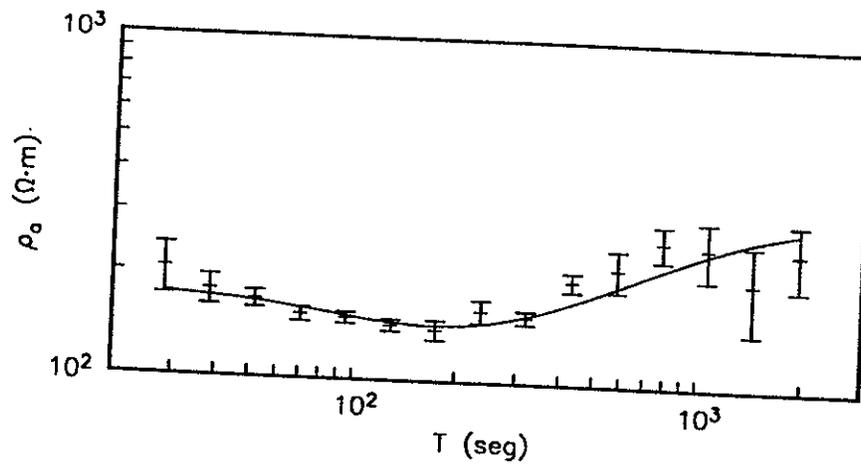


Figura 9. Inversión de los datos magnetotelúricos de Constable *et al.* (1987). El valor de χ^2 para este caso es de 1.0. Con línea continua se muestra la respuesta del modelo encontrado en 2 iteraciones.

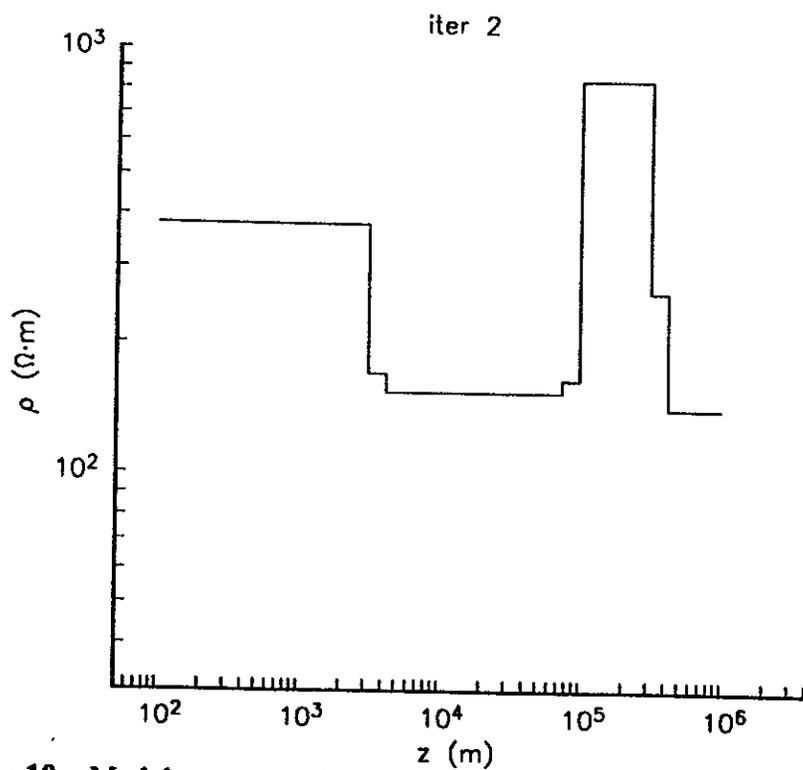
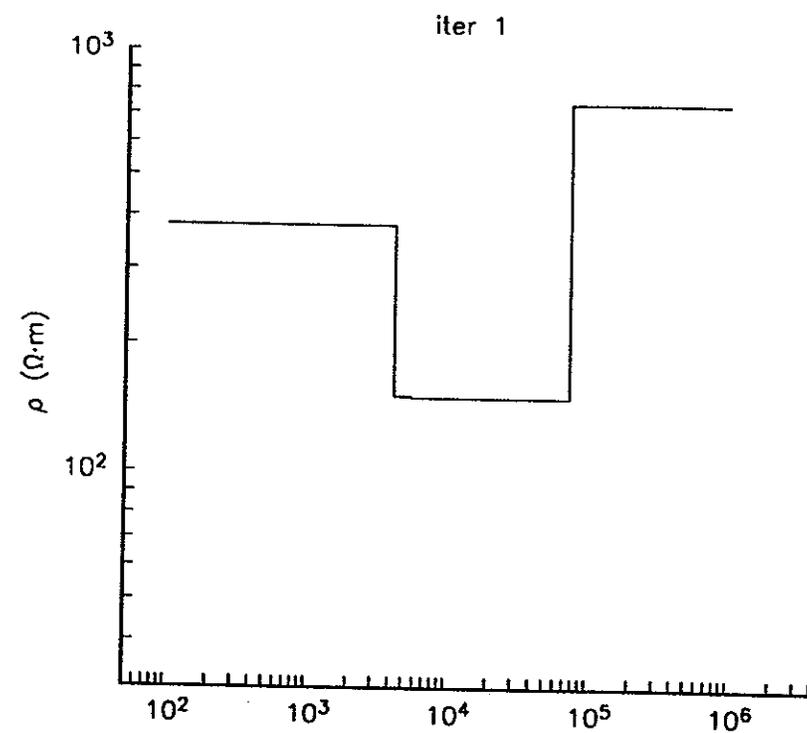


Figura 10. Modelos construidos cuando se invierten los datos de Constable *et al.* (1987).

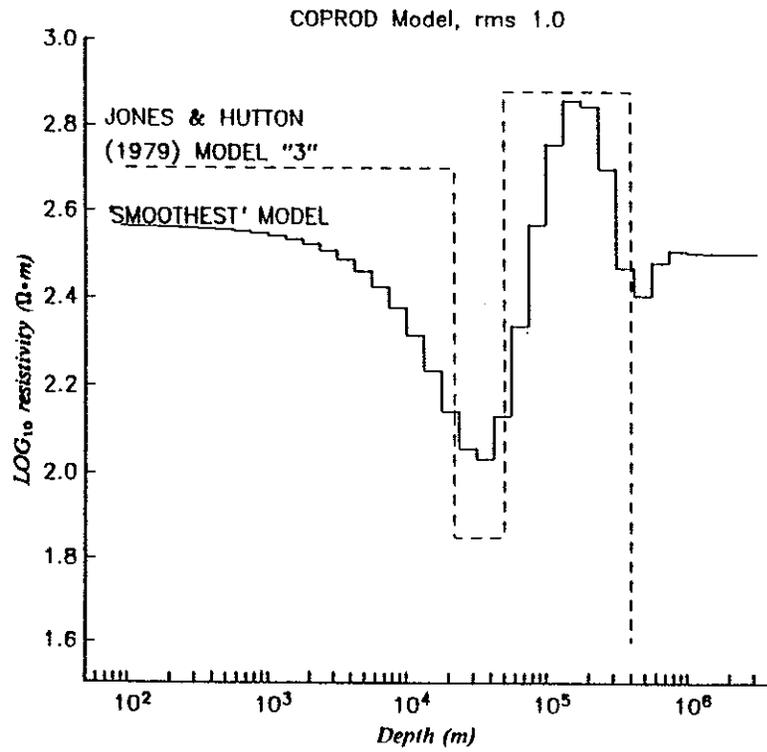


Figura 11. Modelo encontrado por Constable *et al.* (1987), quien usó un método de regularización. El modelo se muestra con línea continua.

V. INVERSION APROXIMADA DE DATOS MAGNETOTELURICOS EN DOS DIMENSIONES

V.1 INTRODUCCION

El proceso iterativo descrito en el capítulo anterior se inicia de una manera muy poco convencional. En lugar de suponer un modelo inicial, como comunmente se hace en los métodos basados en linealización, se suponen simultáneamente n modelos, donde n es el número de datos, lográndose en una sola iteración soluciones bastante aceptables. Esta característica es exclusiva de las ecuaciones integrales y merece ser explorada en problemas de más de una dimensión. En el presente capítulo, se aplica este procedimiento al problema de invertir datos magnetotelúricos en dos dimensiones.

Para estructuras bidimensionales, las ecuaciones de Maxwell se separan en dos modos: el TE, en el cual el campo eléctrico es paralelo al rumbo y el TM, en el que el campo eléctrico es perpendicular al rumbo. Suponiendo el eje "y" paralelo al rumbo, las relaciones entre los campos, en el dominio de la frecuencia, están dadas por

$$E_y(x, z = 0) = Z_{yx}H_x(x, z = 0) \quad (38)$$

y

$$E_x(x, z = 0) = Z_{xy}H_y(x, z = 0). \quad (39)$$

Las funciones complejas Z_{yx} y Z_{xy} contienen información de la conductividad eléctrica del subsuelo y se relacionan con las conductividades aparentes mediante

$$\sigma_a^{yx}(x, T) = \omega\mu |Z_{yx}|^{-2} \quad (40)$$

y

$$\sigma_a^{xy}(x, T) = \omega\mu |Z_{xy}|^{-2}. \quad (41)$$

El problema inverso en dos dimensiones consiste en encontrar $\sigma(x, z)$ dadas $\sigma_a^{yx}(x, T)$ y $\sigma_a^{xy}(x, T)$. Evidentemente, las funciones de conductividad aparente están muestreadas en un número finito de puntos, tanto en el dominio de la frecuencia como en el del espacio.

Entre los trabajos realizados para resolver el problema inverso están los de Jupp & Vozoff (1977), Rodi *et al.*, (1984), y Weidelt (1975). En todos se resuelve el problema no lineal iterativamente, vía linealización y por ende requieren una gran cantidad de tiempo de cómputo. Por esta razón, es de interés explorar nuevas formas de atacar el problema.

V.2 FORMULACION DEL PROBLEMA

La ecuación integral encontrada por Gómez-Treviño (1987a) se aplica a cada modo de propagación

$$\sigma_a^{yx}(x, T_i) = \frac{1}{1 - m_i} \int_R G^{TE}(\sigma, x, T_i, x', z') \sigma(x', z') dx' dz' \quad (42)$$

y

$$\sigma_a^{xy}(x, T_i) = \frac{1}{1 - m_i} \int_R G^{TM}(\sigma, x, T_i, x', z') \sigma(x', z') dx' dz'. \quad (43)$$

La región de integración R , es el semiplano xz . G^{TE} y G^{TM} son las derivadas de Fréchet para el modo TE y TM, respectivamente.

En el Apéndice C se encuentra que para un semiespacio homogéneo de conductividad

σ_a

$$G^{TE}(\sigma_a^{yx}, x, x', z') = Re \left\{ \frac{2}{\pi \delta_{a_{yx}}^2} \int_0^\infty G_\lambda^{TE} \cos \lambda(x-x') d\lambda \right\} \quad (44)$$

y

$$G^{TM}(\sigma_a^{xy}, x, x', z') = Re \left\{ \frac{2}{\pi \delta_{a_{xy}}^2} \int_0^\infty G_\lambda^{TM} \cos \lambda(x-x') d\lambda \right\}, \quad (45)$$

donde

$$\delta_{a_{yx}} = \left(\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_a^{yx}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta_{a_{xy}} = \left(\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_a^{xy}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$G_\lambda^{TE} = \frac{\lambda + i(2 + \lambda)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2i}} e^{-(\sqrt{\lambda^2 + 2i} + \lambda)z'}$$

$$G_\lambda^{TM} = \sqrt{\lambda^2 + 2i} e^{-(\sqrt{\lambda^2 + 2i} + \lambda)z'}$$

La gráfica de las funciones G^{TE} y G^{TM} para $x = 0$, se muestran en las figs. 12 y 13, respectivamente. Estas funciones fueron evaluadas con los filtros de Anderson (1975). Considerando que para un semiespacio homogéneo $m_i = 0, i = 1, n$, las ecuaciones (42) y (43) implican que las funciones que se muestran en las figuras 12 y 13, representan la zona de influencia para los valores de conductividad aparente. Como puede observarse, comparando las dos figuras, las funciones son diferentes por lo que cada modo de propagación posee su propia función de peso, además la zona de influencia en ambos casos es más importante hacia los lados que a profundidad.

El problema inverso según se plantea en el presente trabajo, consiste en estimar la función de conductividad $\sigma(x', z')$, partiendo de los datos disponibles y de las funciones de peso correspondientes.

V.3 SOLUCION DEL PROBLEMA

Para resolver las ecuaciones (42) y (43) se suponen simultáneamente n semiespacios homogéneos con conductividades $\sigma_a(T_i), i = 1, n$. Se supone además, una partición del semiplano XZ como la mostrada en la figura 14. La j -ésima celda tiene una conductividad uniforme σ_j y su tamaño puede ser arbitrario, ya que la integral de la función de peso sobre el área de la celda se calcula analíticamente (ver Apéndice D). La función de conductividad $\sigma(x', z')$ se convierte en un vector σ de m dimensiones, y la integral se transforma en una matriz A de dimensiones $n \times m$. El procedimiento de solución es el mismo para ambos modos de propagación TE y TM, por lo que las ecuaciones que siguen se refieren indistintamente a uno u otro modo. En estos términos, las ecuaciones (42) y (43) se pueden escribir como

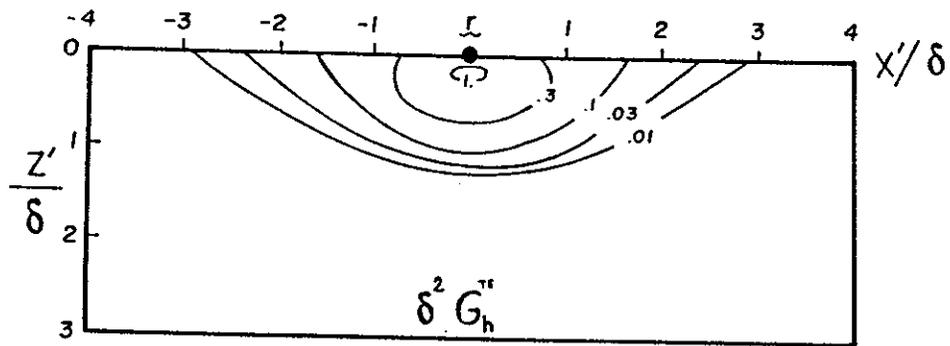


Figura 12. Función de peso para el modo TE en $x = 0$. La función tiene un valor infinito en $x' = 0, z' = 0$.

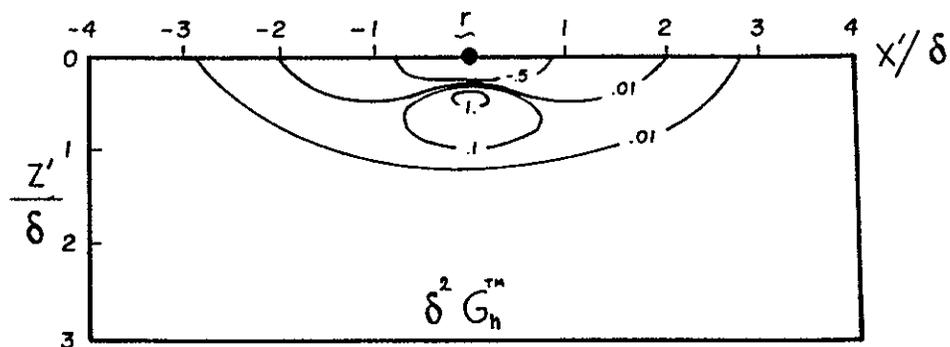


Figura 13. Función de peso para el modo TM en $x = 0$. La función tiene un valor infinito en $x' = 0, z' = 0$.

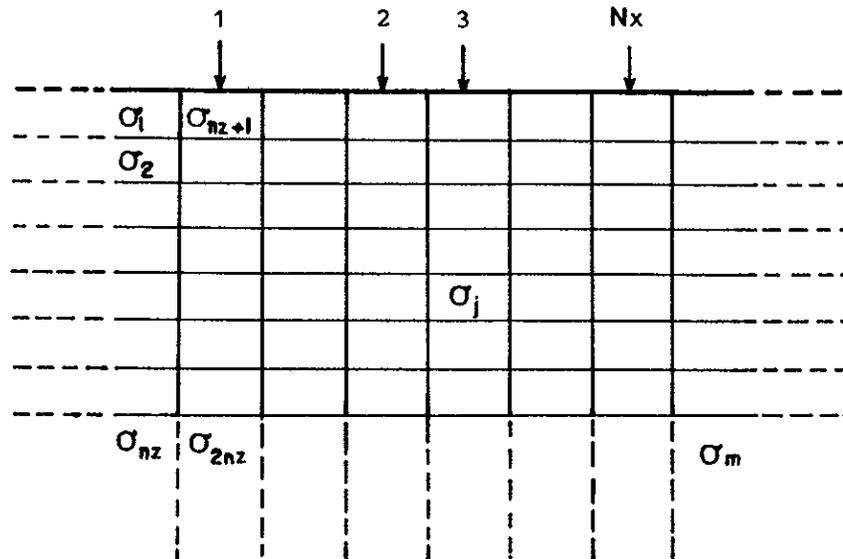


Figura 14. Geometría que se usa para resolver el problema en dos dimensiones. Las capas horizontales de la izquierda y de la derecha se extienden al infinito, así como la parte inferior de la malla.

$$\sigma_a = A\sigma, \quad (46)$$

donde

$$\sigma_{a_i} = \sigma_a(X_l, T_k), \quad (47)$$

$$A_{ij} = \int_{\Delta_j} G(\sigma_{a_i}, X_l, T_k, x', z') dx' dz', \quad (48)$$

con

$$i = (l-1)NT + K; \quad l = 1, NX; \quad K = 1, NT;$$

y

$$\sigma_j = \sigma(x', y')$$

para

$$(x', z') \in \Delta_j, j = 1, m.$$

Δ_j es la j -ésima celda del semiespacio, NT es el número de mediciones en cada uno de los NX sondeos y m es el número total de incógnitas.

La ecuación (46) se resuelve para σ mediante técnicas de programación lineal. Se supone que la conductividad de la capa superficial, en el modelo discretizado, se conoce y para poder aplicar técnicas de programación lineal se busca un vector σ que cumpla con (46) y que minimize la derivada parcial de $\sigma(x, z)$ con respecto a z . En lo demás, el procedimiento es idéntico al descrito en los casos unidimensionales.

A continuación se presentan algunas aplicaciones de la metodología expuesta en esta sección, primeramente en datos sintéticos y en seguida a datos de campo.

V. 4 EXPERIMENTOS NUMERICOS

Como una primera prueba, se tomó el modelo unidimensional que se muestra en la figura 15(a) y se calculó su resistividad aparente a los cinco períodos que se señalan en la figura 15(b). En seguida, con el fin de probar el algoritmo en dos dimensiones, se supuso que se contaba con tres sondeos idénticos tomados en las tres posiciones que se indican con flechas en la figura 15(a). Para realizar la inversión se supuso la discretización que se muestra en la figura 16(a), obteniéndose como resultado el modelo de la figura 16(b).

Una de las características del criterio de minimización que se utiliza en el presente trabajo, consiste en que de todos los modelos que cumplen con los datos, selecciona el que posee menor contraste entre capa y capa, dando como resultado modelos aplanados. Esto trae como consecuencia que las fronteras estimadas tiendan a ser más profundas que las de los modelos hipotéticos. Esto se observa en las aplicaciones de los capítulos anteriores, sobre todo en la primera iteración, y es una condición que se hereda en las aplicaciones bidimensionales. Por esta razón el modelo de la figura 16(b) tiene su frontera inferior a una profundidad mayor que la del modelo original. Puede comprobarse, sin embargo, que la conductancia de la capa conductora es la misma en ambos modelos, lo cual indica que se trata de efectos de equivalencia. Por lo demás, los modelos son bastante semejantes tanto vertical como horizontalmente, lo que demuestra la capacidad del algoritmo para tratar problemas bidimensionales.

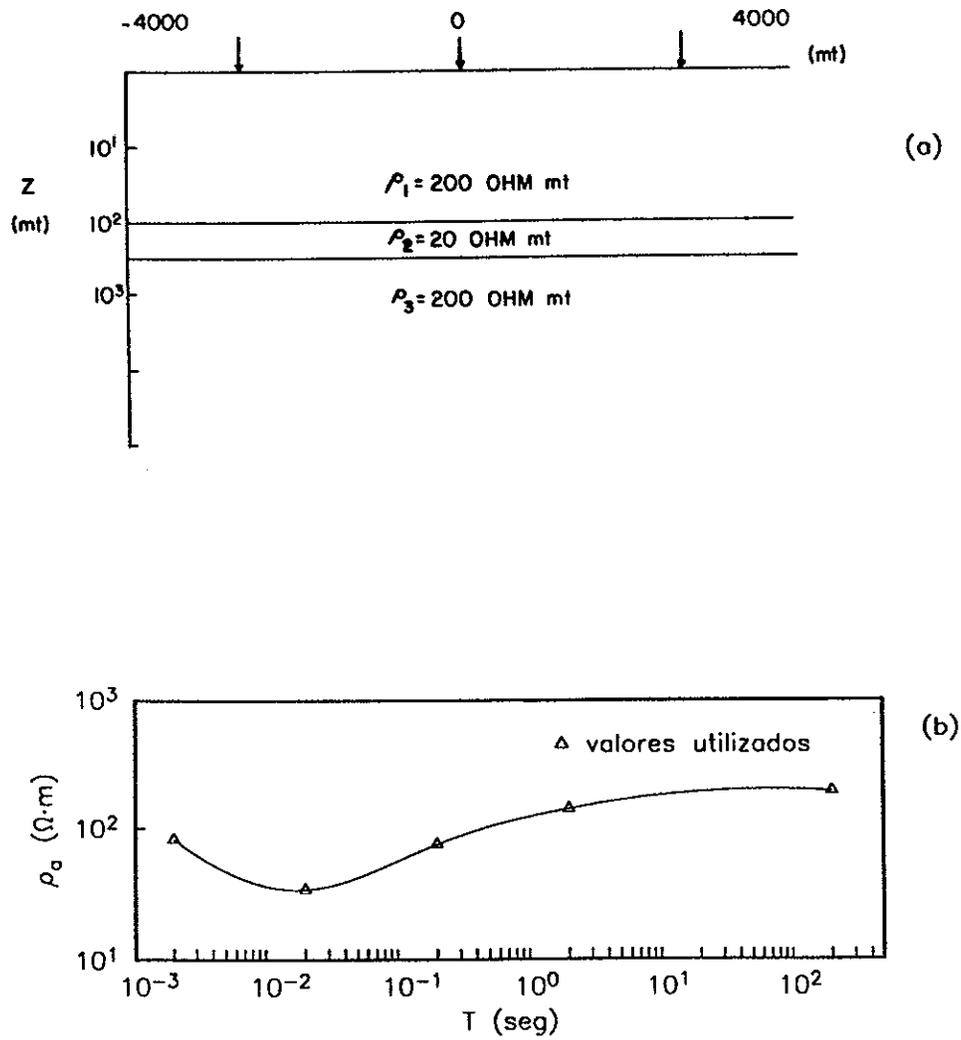


Figura 15. Prueba del método para un caso unidimensional. En (a) se muestra el modelo hipotético, con flechas se señalan los sitios en los que se ubican los sondeos, en (b) se señala con símbolos (Δ) los datos de la curva que se usaron para la inversión.

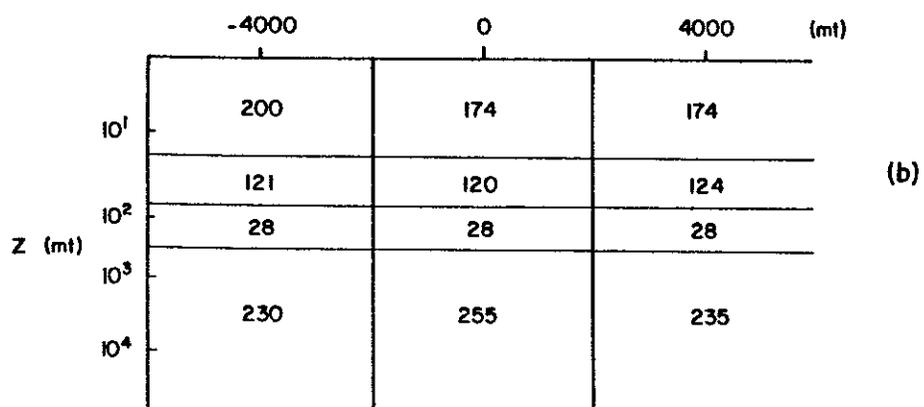
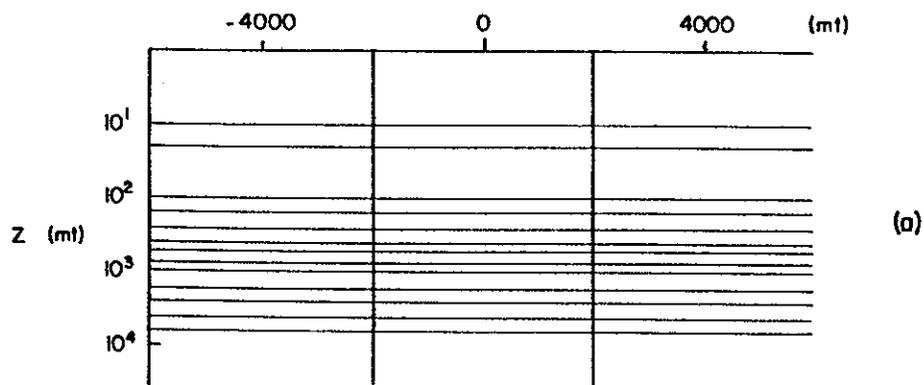


Figura 16. Resultados para el caso unidimensional. En (a) se encuentra la discretización que se usó, en (b) se encuentra el modelo estimado. El resultado es el mismo para ambos modos.

Como una segunda prueba se consideró un caso más difícil. Los datos que se utilizaron se muestran en la figura 17 para los modos TE y TM del modelo hipotético, que se muestra en las figuras 18(a) y 19(a). Los modelos encontrados se muestran en las figuras 18(b) y 19(b) para los modos TE y TM, respectivamente. Como puede observarse, comparando los modelos obtenidos con el modelo original, el correspondiente al modo TM resulta ser superior al del TE. Esto se debe a que en el modo TM el campo eléctrico que se considera es perpendicular a la frontera vertical, y siendo este campo discontinuo al cruzar la frontera, contiene mayor información sobre la existencia de la misma que el campo paralelo que se considera como base del modo TE, ya que este último es continuo. Puede observarse también, que consistentemente las fronteras horizontales en ambos modelos se encuentran por abajo de los 1000 m, el espesor de la capa superficial, lo cual se debe al criterio de minimización discutido más arriba. Por otro lado, el presente caso resulta mucho más difícil que el anterior, debido a que la profundidad de penetración mínima que tienen los datos es de 8 km, mientras que la profundidad de la capa superficial es de sólo 1 km. Es muy probable que los resultados serían mejores al incluir datos de períodos más cortos. Sin embargo, el objetivo del presente ejemplo no es obtener modelos perfectos, sino más bien ilustrar el tipo de modelos que se obtienen en condiciones difíciles. La inversión conjunta de los datos para TE y TM no arroja mejores resultados que la inversión para el modo TM.

V.5 INTERPRETACION APROXIMADA DE LOS DATOS

MAGNETOTELURICOS DE LA LINEA LINCOLN

Los datos magnetotelúricos de la línea Lincoln, tomados a lo largo de 200 km, son el resultado de un gran experimento electromagnético denominado EMSLAB (Electromagnetic Study of the Lithosphere and Asthenosphere Beneath the Juan de Fuca Plate). Los sondeos

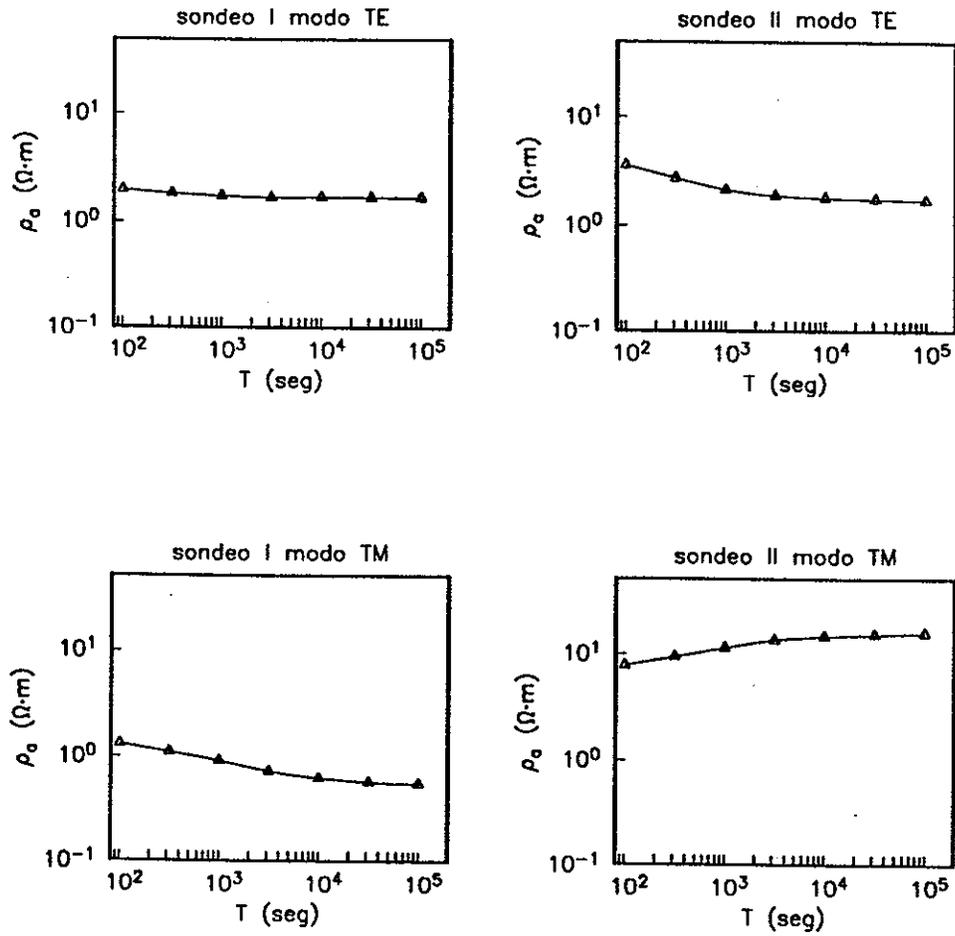


Figura 17. Datos usados (Δ) para el caso de un contacto vertical bajo una capa homogénea. La ubicación de los sondeos se encuentra en la figura 18b.

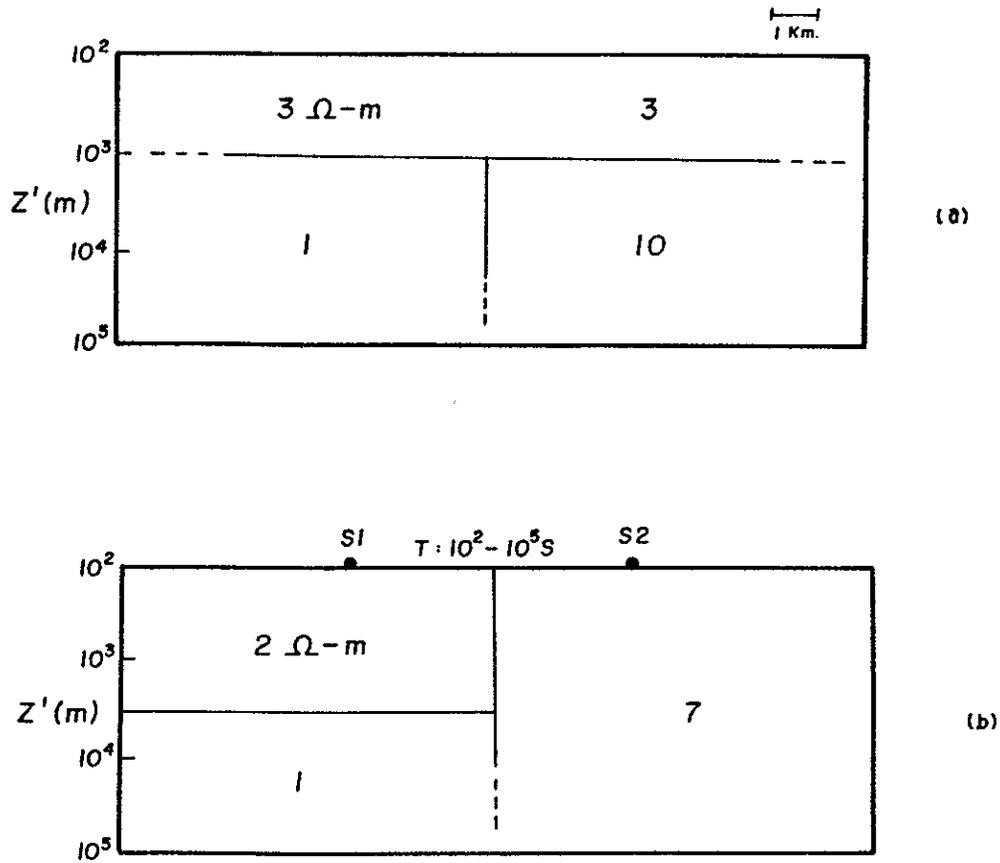


Figura 18. Resultados para un contacto vertical bajo una capa homogénea, modo TE. En (a) se encuentra el modelo hipotético, en (b) se encuentra el modelo estimado. La ubicación de los sondeos está dada por los símbolos S_1 y S_2 .

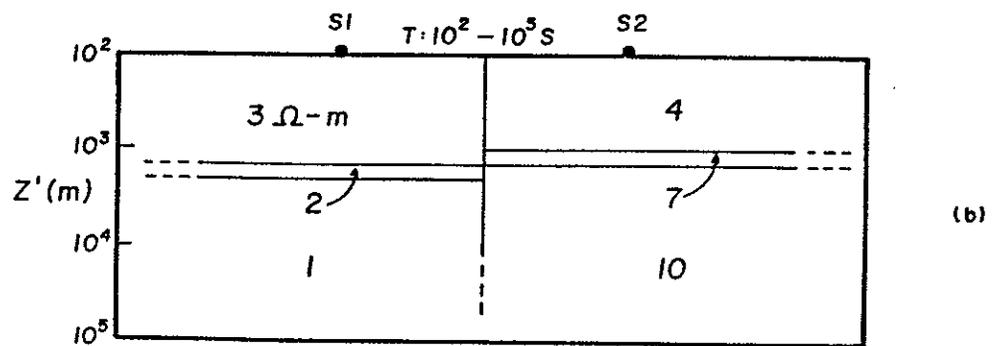
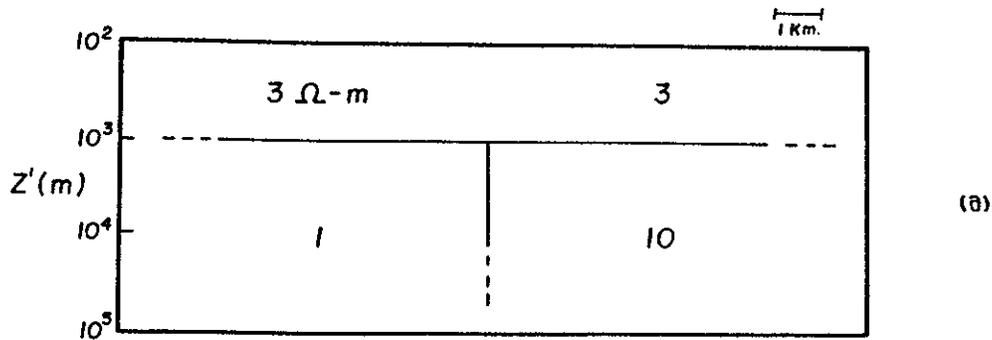


Figura 19. Resultados para un contacto vertical bajo una capa homogénea, modo TM. En (a) se encuentra el modelo hipotético, en (b) se encuentra el modelo estimado. La ubicación de los sondeos está dada por los símbolos S_1 y S_2 .

se realizaron en la parte oeste del estado de Oregon en E.U.A., a lo largo de una línea que se extiende desde la cordillera costera hasta la meseta Deschutes-Umatilla, pasando por el valle Willamette y la cordillera Cascade. El sistema de placas Juan de Fuca, con un ángulo de buzamiento de 10° , queda bajo la placa Norteamericana en cuyo borde oeste se localiza la línea Lincoln. El estudio se llevó a cabo con el fin de detectar la placa a profundidad.

En 1988 Ramírez-Hernández realizó un análisis de los datos promediando las curvas de resistividad aparente según su morfología, llegando a establecer 8 grupos y basando su interpretación en las 8 curvas resultantes del promediado. El modelo que Ramírez-Hernández encontró, usando el algoritmo de Jupp & Vozoff (1977) se muestra en la figura 20. En este modelo la placa Juan de Fuca corresponde al conductor que se marca en la figura con buzamiento de 14° .

En el presente trabajo se utilizaron los mismos datos excepto por el sondeo del grupo VI, el cual presenta mucha "estática", por lo que fue eliminado en el proceso de inversión. La discretización que se utilizó comprende 112 incógnitas y 70 datos. El modelo estimado y las resistividades aparentes calculadas con la ecuación (46) se muestran en las figuras 21 y 22, respectivamente. Como se puede observar, la respuesta lineal concuerda bastante bien con las observaciones. Se utilizaron sólo los datos del modo TM, ya que los correspondientes al TE están distorcidos por la longitud finita del rumbo y como lo demostró Wannamaker *et al.* (1984), en estas circunstancias es preferible usar sólo los datos del modo TM. Con el fin de apreciar mejor los rasgos del modelo obtenido en relación con otras interpretaciones de los mismos datos, en las figuras 23 a la 26 se comparan los perfiles verticales de la distribución estimada con los correspondientes de los modelos de Ramírez-Hernández (1988)

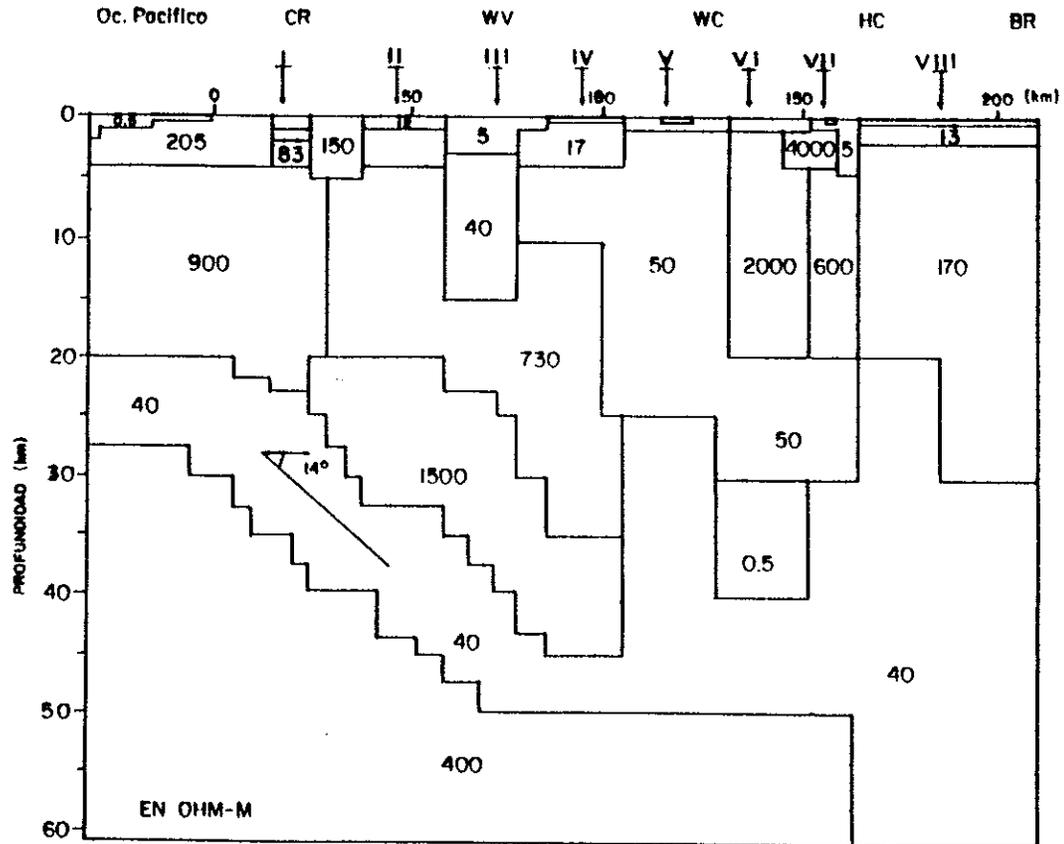


Figura 20. Modelo encontrado por Ramírez-Hernández (1988) al usar 8 grupos de sondeos. La placa Juan de Fuca se señala como un conductor de $40 \Omega\text{-m}$, con un ángulo de 14° de buzamiento, las abreviaciones CR, WV, WC, HC y BR se refieren a Coast Range, Willamette Valley, Western Cascades, High Cascades y Blue Mountains, respectivamente.

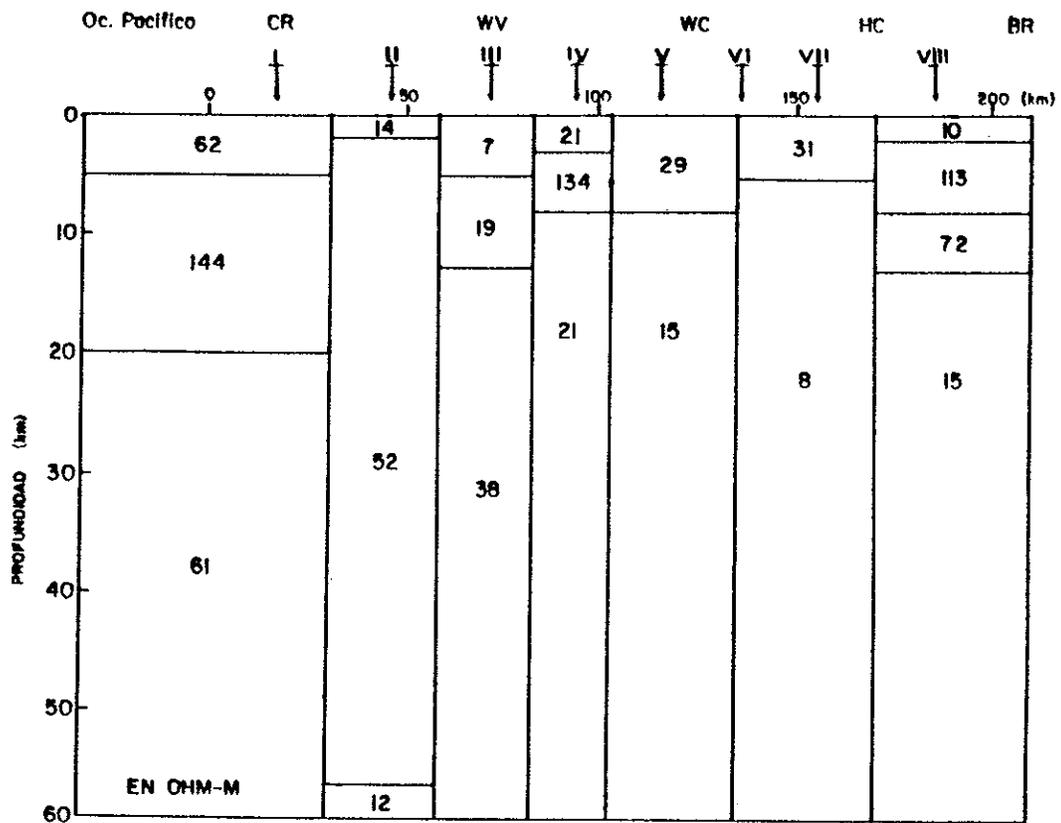


Figura 21. Inversión bidimensional aproximada para los datos magnetoteléuricos de la línea Lincoln. Las resistividades de las celdas están en $\Omega\cdot m$, el significado de los símbolos CR, WV, WC, HC y BR se encuentra en la figura 20.

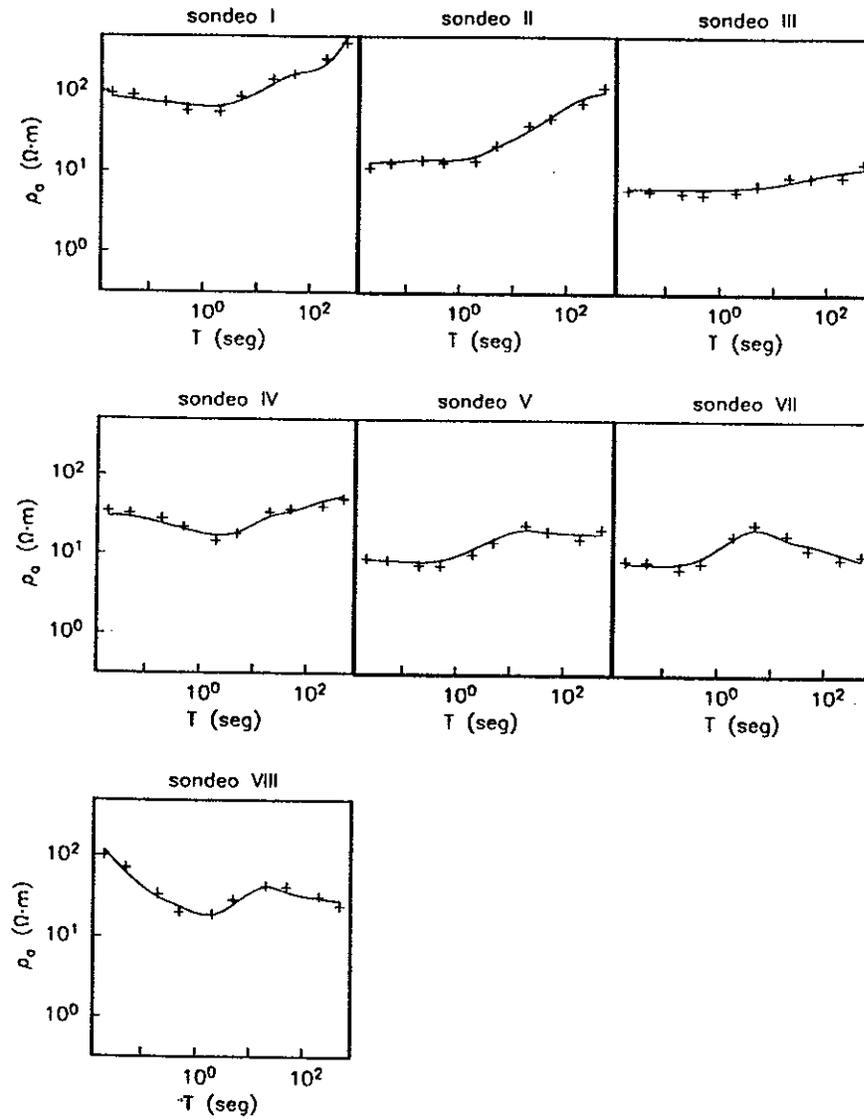


Figura 22. Respuestas lineales obtenidas al invertir los datos magnetotéluricos de la línea Lincoln. Con símbolos (+) se muestra los datos que se usaron, la respuesta lineal es la línea continua en cada gráfica.

(1) RAMIREZ-HERNANDEZ (1988) (2) JIRACEK *et al* (1989) (3) PRESENTE TRABAJO

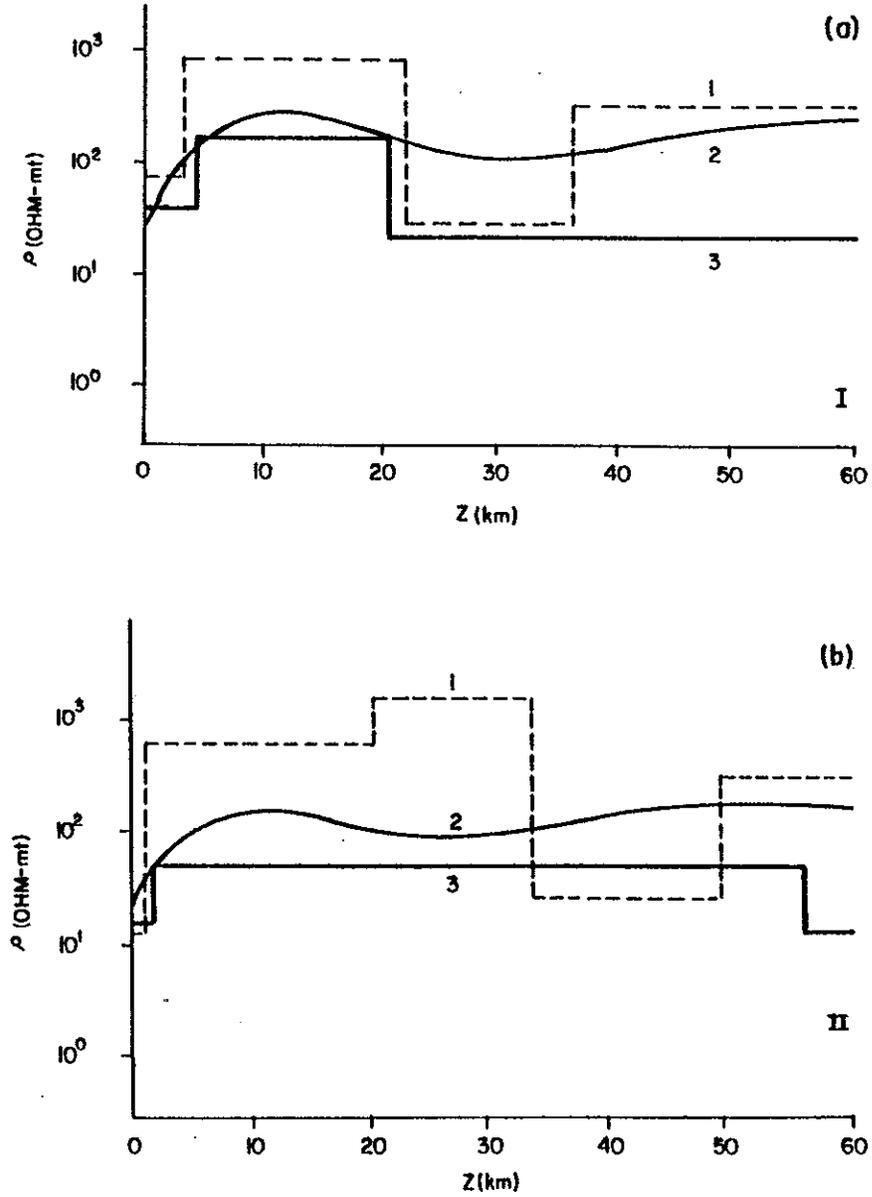


Figura 23. Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek *et al.* (1989). Perfil de resistividad bajo los sondeos I y II.

(1) RAMIREZ - HERNANDEZ (1988) (2) JIRACEK et al (1989) (3) PRESENTE TRABAJO

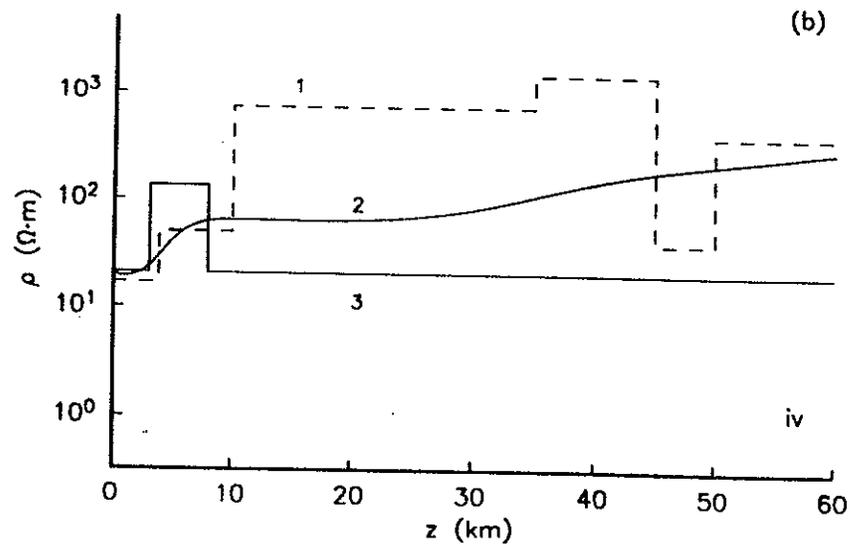
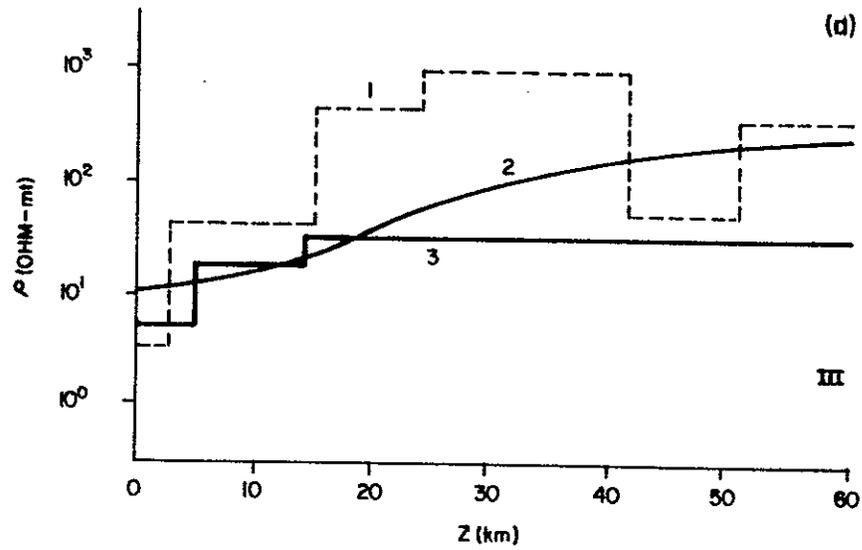


Figura 24. Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek *et al.* (1989). Perfil de resistividad bajo los sondeos III y IV.

(1)RAMIREZ-HERNANDEZ (1988) (2)JIRACEK et. al. (1989) (3)PRESENTE TRABAJO

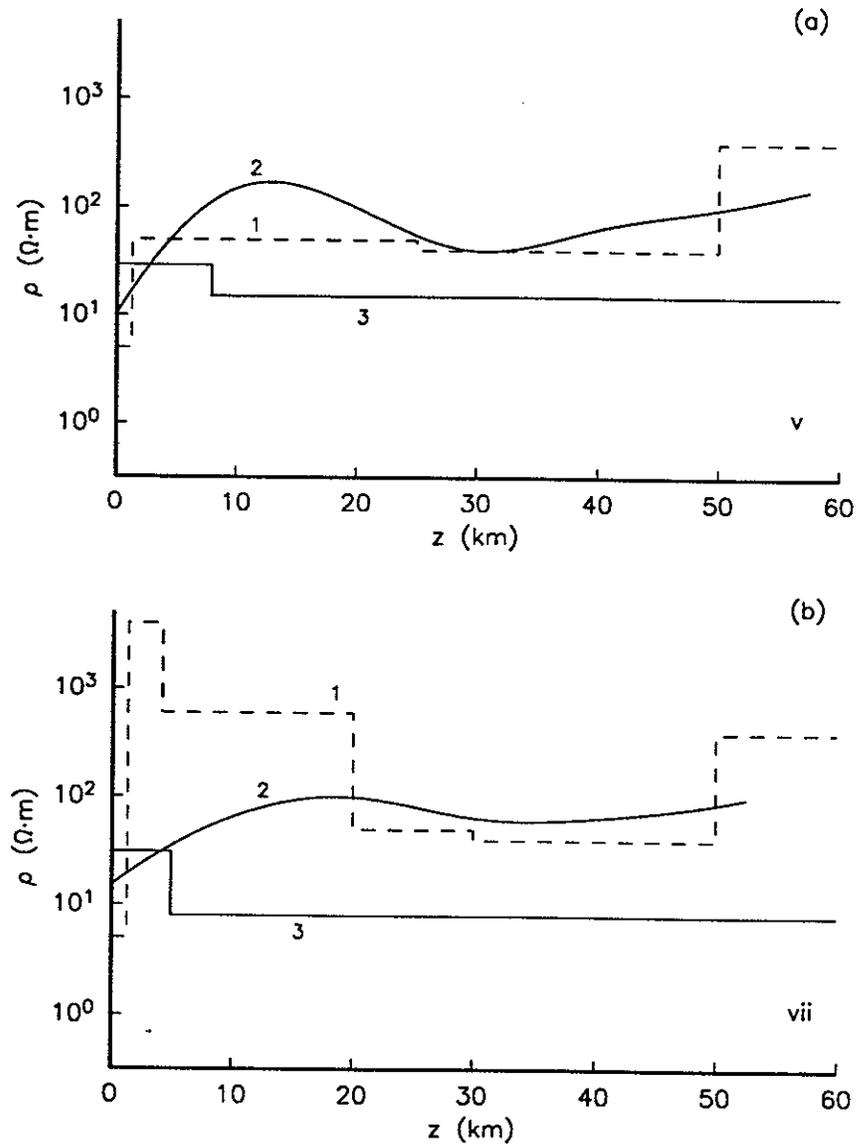


Figura 25. Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek *et al.* (1989). Perfil de resistividad bajo los sondeos V y VII.

(1) RAMIREZ-HERNANDEZ (1988) (2) JIRACEK *et al* (1989) (3) PRESENTE TRABAJO

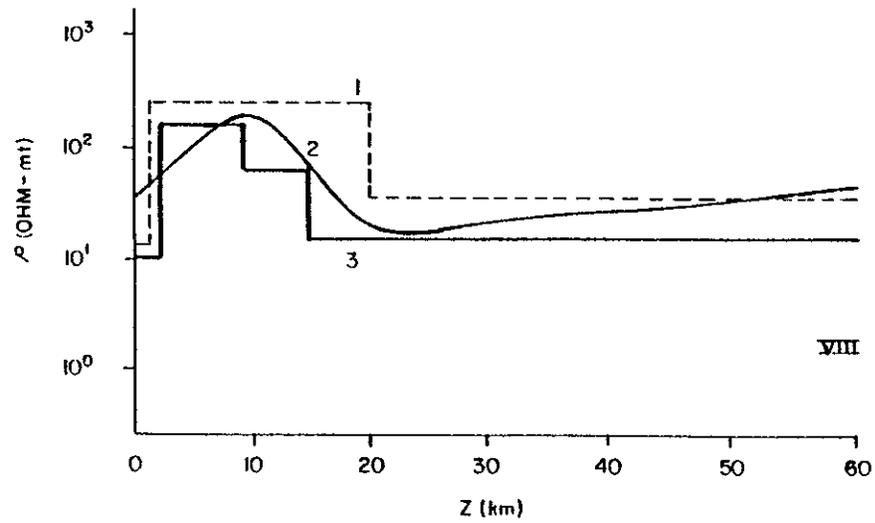


Figura 26. Comparación de nuestros resultados con los de Ramírez-Hernández (1988) y los de Jiracek *et al.* (1989). Perfil de resistividad bajo el sondeo VIII.

y Jiracek *et al.* (1989). No es necesario observar detenidamente las figuras para darse cuenta que los modelos difieren apreciablemente en la mayor parte de los casos, excepto bajo los sondeos I y VIII. También es evidente que los perfiles con menor estructura corresponden al presente trabajo, siguiéndoles en complejidad los de Jiracek *et al.* (1989). Esto se debe en parte al criterio de minimizar la derivada vertical de los perfiles, y al hecho de que la solución corresponde a la primera iteración. Es de esperarse, como sucede en los problemas unidimensionales, que la estructura se complique un poco más en iteraciones subsecuentes. Es de esperarse también, dada la relación que se observa entre los tres modelos, que la solución se acerque más a la de Jiracek *et al.* (1989) que a la de Ramírez-Hernández (1988).

Con relación al problema fundamental de si el experimento EMSLAB fue un éxito o no, dependiendo de si se logró detectar la placa Juan de Fuca, los resultados del presente trabajo señalan que el objetivo sólo se logró en parte, aunque sólo se invirtieron las amplitudes y las fases no. El perfil vertical bajo el sondeo I (figura 23) muestra la existencia de un conductor a una profundidad de alrededor de 20 km. Sobre la existencia de este conductor están de acuerdo los tres modelos, aunque el correspondiente al presente trabajo no garantiza que se haya detectado la frontera inferior de la placa. Lo único que está claro es que se logró detectar su parte superior.

V.6 CONCLUSIONES

El método desarrollado en el presente capítulo permite obtener modelos razonables en una sola iteración, suponiendo como modelo inicial un conjunto de n semiespacios homogéneos diferentes, siendo n el número de datos. El criterio de minimizar la derivada vertical de la distribución bidimensional, conduce a modelos bastante simples que sin

embargo cumplen con los datos, por lo que deben considerarse como modelos posibles de la tierra. La aplicación del método a la interpretación de los datos del experimento EMSLAB, confirma la detección de la placa Juan de Fuca, aunque no parece haber garantía de que se haya detectado su frontera inferior.

VI. RESOLUCION DE MEDICIONES MAGNETOTELURICAS EN AMBIENTES BIDIMENSIONALES

VI.1 INTRODUCCION

Uno de los problemas más comunes en la interpretación de mediciones magnetoteléuricas, consiste en que los sondeos individuales muchas veces se distorsionan por la presencia de pequeñas inhomogeneidades superficiales extrañas al objetivo del estudio. Por lo general, las curvas se desplazan verticalmente respecto de las que no contienen estos efectos, de donde le viene el nombre de corrimiento estático a este fenómeno de distorsión. Para corregirlo se han diseñado diversos métodos entre los cuales se encuentra el procedimiento EMAP (Electromagnetic Array Profiling, Bostick, 1984; 1986; Torres Verdín, 1985). Este procedimiento consiste en tomar mediciones contínuas de campo eléctrico, sobre líneas que por lo común resultan bastante largas comparadas con las de estudios convencionales. Adicionalmente, las mediciones se sujetan a un proceso de filtrado con el fin de eliminar los posibles efectos de inhomogeneidades superficiales.

Un problema al respecto que no ha sido analizado en la literatura, es determinar el efecto del filtrado en la resolución de los datos a profundidad. Al parecer, no debería haber diferencia entre datos procesados y sin procesar ya que se trata de los mismos datos. Podría pensarse, incluso, que la resolución debería de empeorar después del filtrado, ya que los datos originales poseen toda la información disponible y los filtrados sólo una parte. Razonamientos de este tipo motivaron el presente capítulo. Partiendo de las mismas ecuaciones que en los capítulos anteriores, se procede a calcular las funciones de resolución de Backus y Gilbert (1970) para conjuntos de datos procesados y sin procesar.

VL2 METODOLOGIA

En la comparación se supone un semiespacio homogéneo sobre el cual se efectúan mediciones magnetoteléuricas en el modo TM, por lo que para el presente caso se aplica la ecuación (43). Para una medición de resistividad aparente sin filtrar podemos escribir

$$\rho_{a_i} = \int G_{d_i}(\rho_0, x, z) \rho(x, z) dx dz, \quad (49)$$

donde G_{d_i} es la derivada de Fréchet de ρ_{a_i} con respecto a $\rho(x, z)$ y ρ_0 es la resistividad del semiespacio.

Para una medición filtrada $\bar{\rho}_{a_i}$ tendremos

$$\bar{\rho}_{a_i} = \sum_{j=-l}^l f_j(\rho_a)_{i-j} = \int F_{d_i}(\rho_0, x, z) \rho(x, z) dx dz, \quad (50)$$

donde

$$F_{d_i} = \sum_{j=-l}^l f_j G_{d(i-j)}(\rho_0, x, z). \quad (51)$$

Los valores f_j del filtro se aplican simétricamente a dipolos contiguos a partir de uno central según se muestra en la figura 27. Los valores corresponden a una ventana de Hanning cuya longitud viene dada como $L = \sqrt{2} \delta$, donde δ es la profundidad nominal de penetración.

Según Backus y Gilbert (1970), la resistividad promedio en (x_0, z_0) se puede expresar como

$$\langle \rho(x_0, z_0) \rangle = \iint A(x, z; x_0, z_0) \rho(x, z) dx dz. \quad (52)$$

La función A se denomina función promediante y se construye, para nuestro caso, a partir de las funciones F y G para datos procesados y sin procesar, respectivamente.

La función A viene dada como

$$A(x, z; x_0, z_0) = \sum_i^N \alpha_i(x_0, z_0) G_{d_i}(\rho_0, x, z) \quad (53)$$

para datos sin procesar, y por una expresión similar para datos procesados. En el Apéndice E se presentan los detalles numéricos para el cálculo de $A(x, z; x_0, z_0)$. Se observa de la ecuación (52) que $A(x, z; x_0, z_0)$ es la ventana a través de la cual el promedio "ve" al modelo. Si A fuera una función delta

$$\langle \rho(x_0, z_0) \rangle = \rho(x_0, z_0), \quad (54)$$

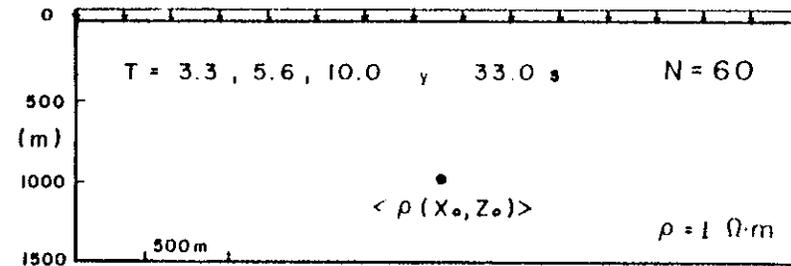
y habría una resolución perfecta. Las constantes α_i se calcularon de tal manera que se minimice

$$Q = \iint [A(x, z; x_0, z_0) - \delta(x_0, z_0)]^2 dx dz. \quad (55)$$

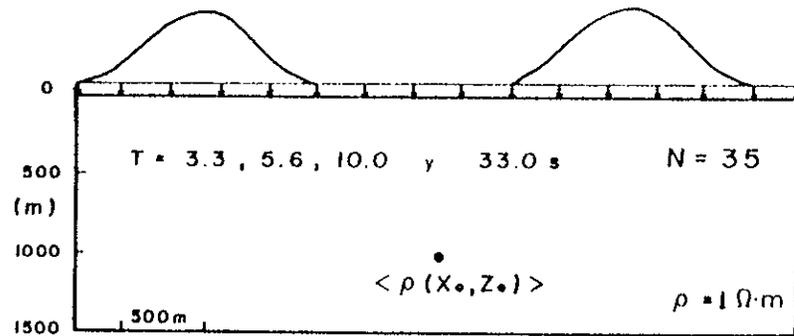
A este criterio se le conoce como primer criterio de Dirichlet.

VI.3 RESULTADOS

En la figura 27 se muestra el diseño del experimento numérico. Para MT se usa el modo TM y dipolos contiguos de 300 m de longitud. Se emplean 4 períodos y el número



M T



E M A P

Figura 27. Configuración del experimento numérico para comparar las funciones promediantes de datos filtrados y sin filtrar. Para el método magnetotelúrico se supuso que las mediciones de campo eléctrico se realizaron con dipolos contiguos, el punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.

total de datos es de 60. Para EMAP se usan los mismos dipolos, sólo que ahora se filtra el campo eléctrico, de tal manera que el número total de datos es de 35. En ambos casos buscamos la función promediante en $z_0 = 1000$ m, $x_0 = 2100$ m.

En las figuras 28 y 29 se muestran las derivadas de Fréchet para MT, asociadas al dipolo central, las derivadas para otros dipolos se obtienen al trasladar estas figuras al centro del dipolo, se observa que estas funciones se extienden a mayor profundidad conforme el período aumenta.

En las figuras 30 y 31 se muestran las derivadas de Fréchet para EMAP, se observa que son una versión suavizada de las correspondientes al caso anterior.

En la figura 32 se muestra $A(x, z; 2100, 1000)$ para MT y EMAP. Para MT el máximo se encuentra en $x = 2100$ m y $z = 300$ m; para EMAP en $x = 2100$ m y $z = 1000$ m. Lo anterior significa que los datos sin procesar, no son capaces de estimar la resistividad en el punto de interés mediante una función centrada en este punto. También significa que los datos procesados, sí son capaces de estimar la resistividad en el punto de interés mediante una función centrada en dicho punto.

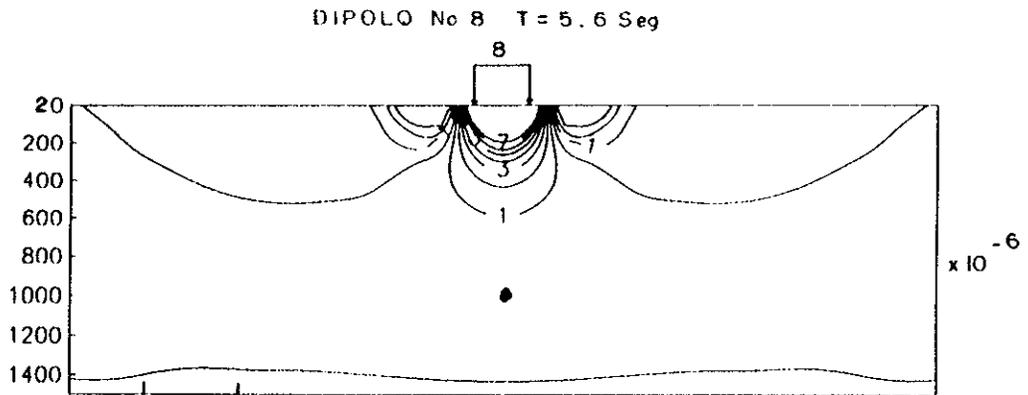
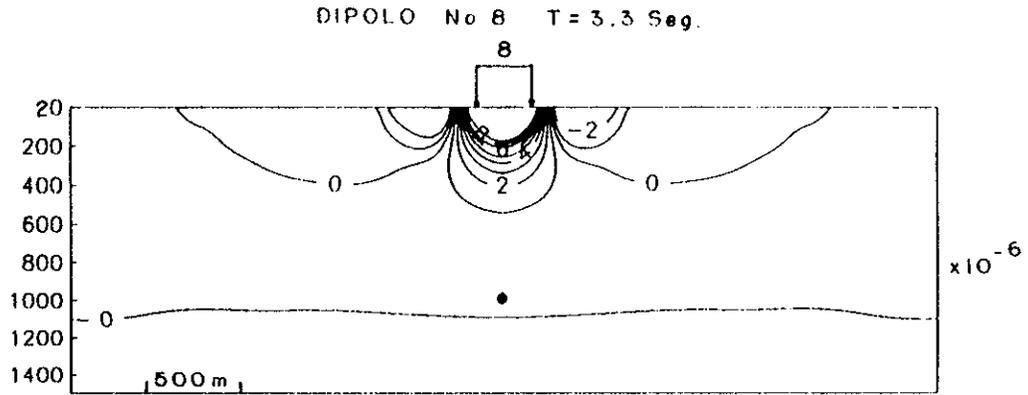


Figura 28. Funciones de peso para las mediciones magnetotelúricas, gráfica para los periodos 3.3 y 5.6 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.

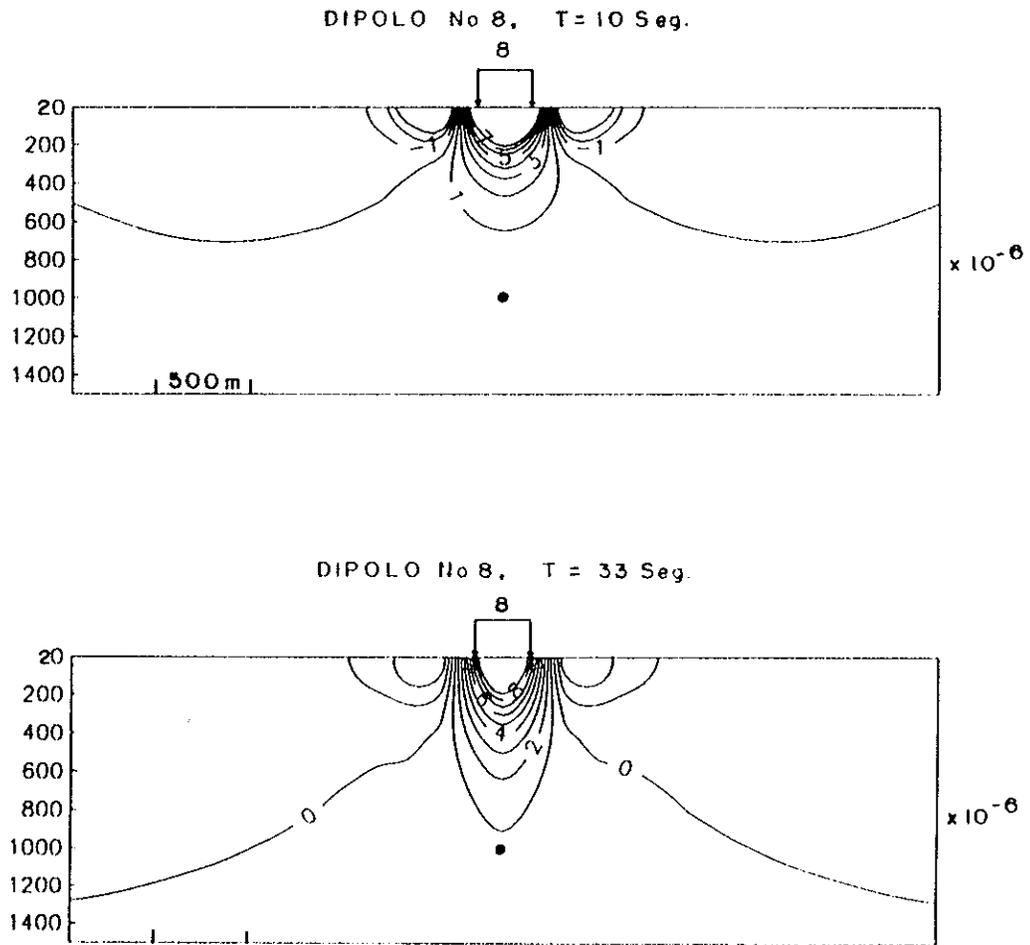


Figura 29. Funciones de peso para las mediciones magnetotelúricas, gráfica para los periodos 10 y 33 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.

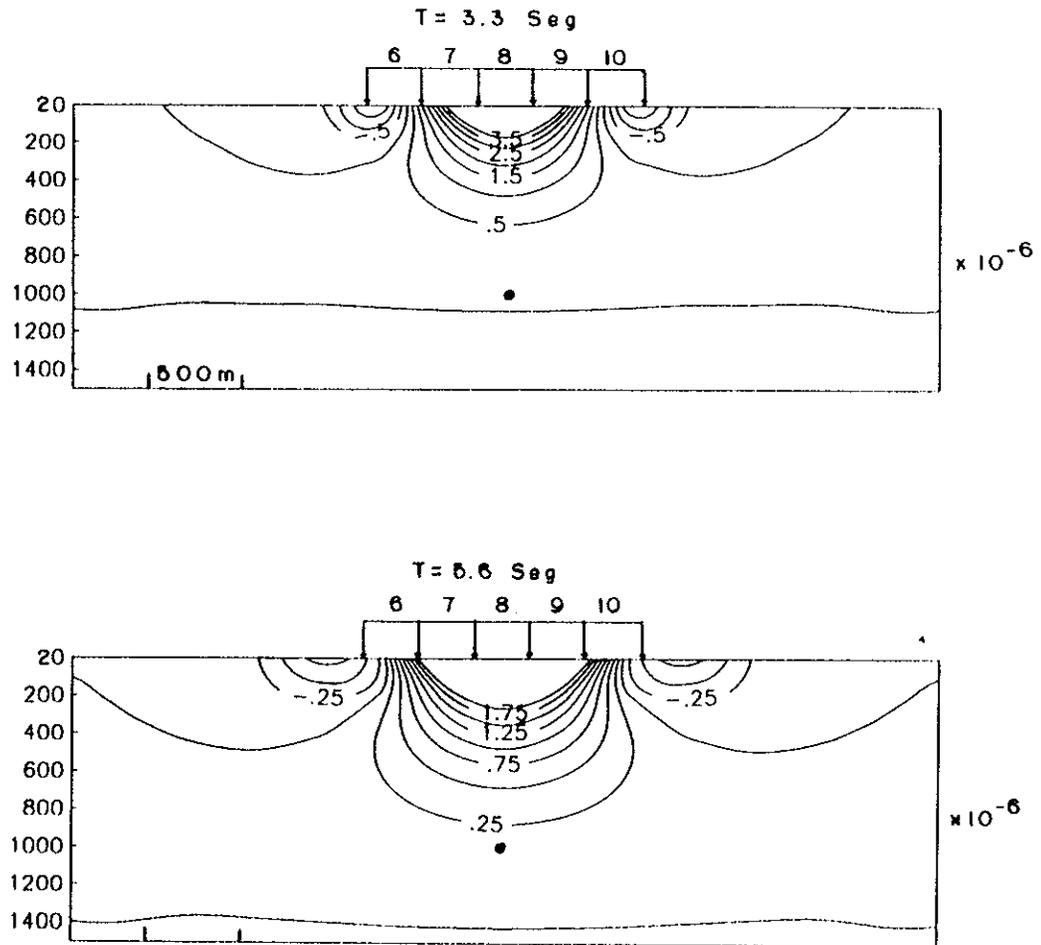


Figura 30. Funciones de peso para mediciones filtradas (EMAP), gráfica para los periodos 3.3 y 5.6 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.

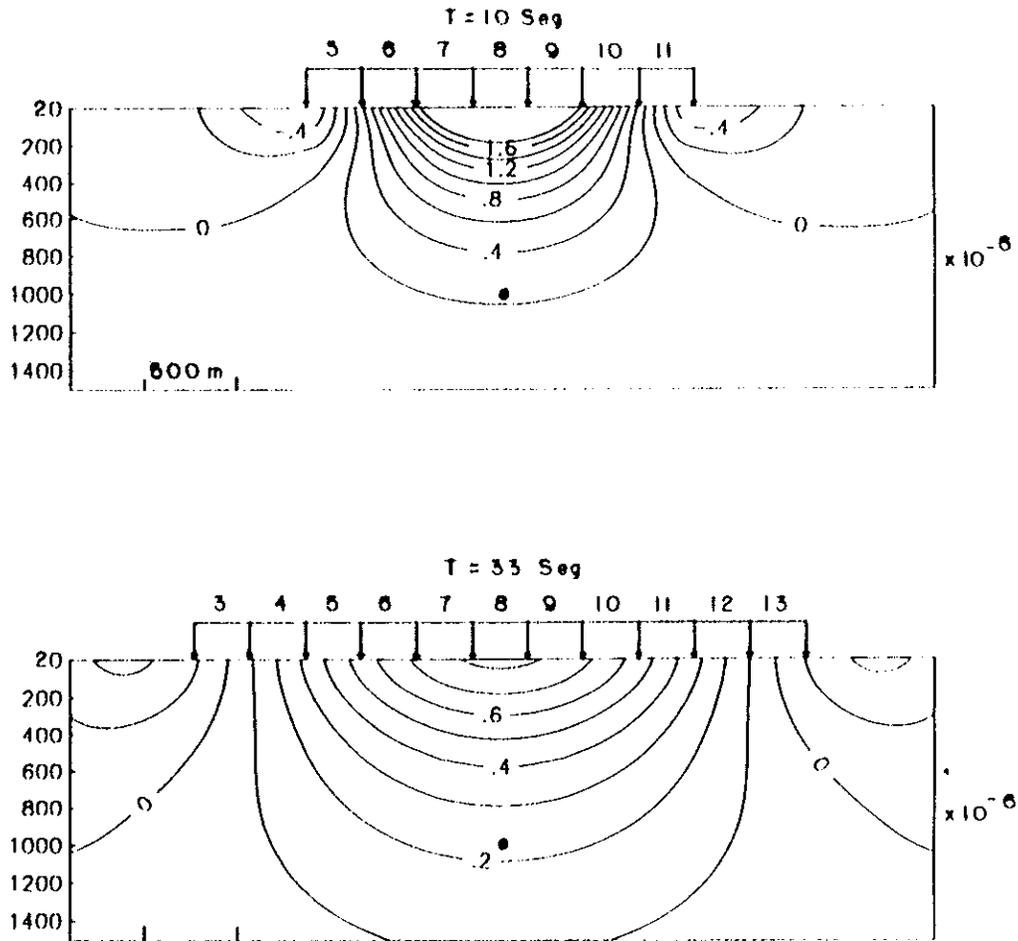


Figura 31. Funciones de peso para mediciones filtradas (EMAP), gráfica para los periodos 10 y 33 seg. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.

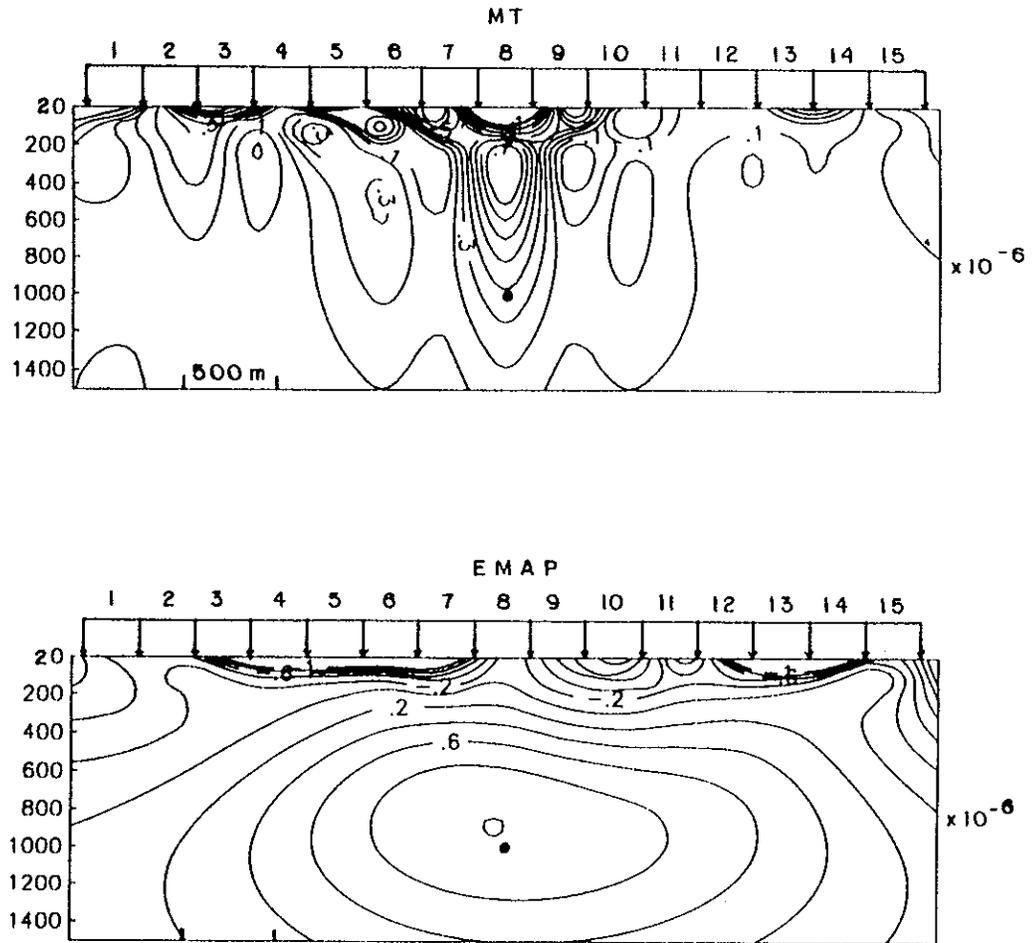


Figura 32. Funciones promediantes para MT y EMAP. El punto grueso es donde se desea calcular el promedio de la resistividad.

Suponiendo que las variables aleatorias ρ_{a_i} son independientes, entonces la varianza de $\langle \rho(x_0, z_0) \rangle$ para datos sin filtrar, se puede calcular como

$$\text{var} \langle \rho(x_0, z_0) \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{var}(\rho_{a_i}). \quad (56)$$

Para EMAP se puede demostrar que

$$\text{var} \langle \rho(x_0, z_0) \rangle = \Delta x^2 \sum_j f_j^2 \text{var}(\rho_{a_{i-j}}) \quad (57)$$

siendo Δx siendo la longitud de los dipolos. En particular, si $\text{var}(\rho_{a_i}) = b^2$, la fórmula anterior se convierte en:

$$\text{var} \langle \rho(x_0, z_0) \rangle = \Delta x \frac{3b^2}{2} \sum_i \frac{\alpha_i^2}{L_i} \quad \text{con} \quad L_i = \sqrt{2} \delta_i \quad (58)$$

Para poder comparar $\text{var} \langle \rho(x_0, z_0) \rangle$ de MT y EMAP suponemos que las resistividades aparentes tienen la misma varianza y la llamamos b^2 . Así, $\text{var} \langle \rho(x_0, z_0) \rangle$ para MT fue de $1.44b^2 (\Omega \cdot m)^2$ y para EMAP fue de $0.72 (\Omega \cdot m)^2$. Por consiguiente la estima de EMAP tiene más resolución y menos varianza que la correspondiente a MT. Esto significa que tanto en el poder resolutivo espacial como en el valor predictivo asociado con errores aleatorios, el procedimiento EMAP realmente es superior a la manera tradicional de tratar los datos.

VI.4 CONCLUSIONES

El filtrado de EMAP hace que la resolución mejore, en relación a la obtenida con MT. Los efectos de las inhomogeneidades superficiales aún están presentes; sin embargo, son más pequeñas y más uniformes que en el caso de MT.

Al parecer el filtrado que se hace en EMAP es un paso necesario y debe hacerse antes de cualquier tipo de interpretación, a menos que los datos no estén distorcidos por inhomogeneidades superficiales.

Las funciones promediantes para MT son el resultado de un solo paso en el proceso de optimización; las de EMAP provienen de dos etapas cada una con su propio criterio. De acuerdo con los resultados, las dos etapas no se pueden reducir a una sola.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se expuso primero un método para resolver una ecuación integral de Fredholm de la primera clase, mediante técnicas de programación lineal. De los ejemplos realizados con dos problemas geofísicos lineales, se concluye que el método es estable en el sentido que se pueden usar con datos ruidosos y además conduce a modelos con sentido geofísico.

El método también pudo aplicarse a problemas no lineales; en este caso se usaron ecuaciones integrales alineales equivalentes a las de Maxwell, para los problemas inversos de MT y resistividad en una dimensión. De los resultados se concluye que las ecuaciones alineales son una alternativa viable para resolver problemas electromagnéticos inversos. Entre las ventajas sobre linealización se cuenta que se minimiza el modelo y no sólo una perturbación del mismo. Además, y mucho más trascendente, lo anterior demuestra que las ecuaciones de Maxwell son autosuficientes en relación con los problemas inversos, por lo que no es necesario recurrir a los esquemas tradicionales de linealización para atacar problemas en más de una dimensión.

También se desarrolló un método para la interpretación aproximada de datos MT en dos dimensiones. Los modelos encontrados con programación lineal son tales que cumplen con las ecuaciones de aproximación y son de mínima estructura vertical. A partir de los ejemplos realizados se concluye que el método debe ser considerado como una herramienta adicional en el proceso de interpretación y los modelos encontrados sólo como una primera

aproximación al problema no lineal. La interpretación realizada para los datos del experimento EMSLAB, confirma que se detectó la placa Juan de Fuca a profundidad, aunque no parece haber evidencias de la base de la misma.

Finalmente, se calculó el poder resolutivo de las mediciones MT en dos dimensiones. Con esto se pudo hacer un experimento numérico para comparar el poder resolutivo de MT (modo TM) y EMAP. Los resultados muestran que el proceso de filtrado que se realiza en EMAP hace que la resolución mejore apreciablemente. Lo mismo sucede con la varianza del valor promedio de la conductividad.

BIBLIOGRAFIA

- Anderson, W.L., 1975, Improved digital filters for evaluating Fourier and Hankel transform integrals. U.S.G.S. rep. USGS-GD-75-012, 223 pp.
- Backus, G., and Gilbert, F., 1970, Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data. Trans. Phil. Roy. Soc., A266, p. 185-194.
- Bailey, R.C., 1970, Inversion of the geomagnetic induction problem. Proc. R. Soc. London, A315, p. 185-194.
- Berdichevsky, M.N., and Zhdanov, M.S., 1984, Advanced theory of deep geomagnetic sounding. Elsevier, New York. 408pp.
- Boerner, D.E. and Holladay, J.S., 1990, Approximate Fréchet derivatives in inductive electromagnetic soundings. Geophysics, v. 55, p. 1589-1595.
- Bostick, F.X., Jr., 1986, Electromagnetic array profiling (expanded abstr.). Soc. Expl. 56th Ann. Internat. Mtg., Houston, TX.
- Bostick, F.X., Jr., Electromagnetic Array Profiling (EMAP) (patente).
- Cagniard, L., 1953, Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. Geophysics, v. 18, p. 605-635.
- Constable, S.C., McElhinny, M.W., and McFadden, P.L., 1984, Deep schlumberger sounding and the crustal resistivity structure of central Australia. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., v. 79, p. 893-910.
-

- Constable, S.,C., Parker, R.L., and Constable, C.G., 1987, Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from EM sounding data. *Geophysics*, v. 52, p. 289-300.
- Cuer, M., and Bayer, R., 1980, FORTRAN routines for linear inverse problems. *Geophysics*, v. 45, p. 1706-1719.
- de Groot-Hedlin, C., and Constable, S., 1990, Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *Geophysics*, v. 55, p. 1613-1624.
- Esparza, F.J., and Gómez-Treviño, E., 1987, Electromagnetic sounding in the resistive limit and the Backus-Gilbert method for estimating averages. *Geoexploration*, v. 24, p. 441-454.
- Esparza, F.J., y Gómez-Treviño, E., 1989, Inversión unidimensional de datos de polarización inducida para medios con contraste pequeño en resistividad. *Geofísica Internacional*, v. 28, p. 467-479.
- Gass, S.I., 1969, *Linear Programming*. McGraw-Hill, New York. 358 pp.
- Gómez-Treviño, E., 1987a, Nonlinear integral equations for electromagnetic inverse problems. *Geophysics*, v. 52, p. 1297-1302.
- Gómez-Treviño, E., 1987b, A simple sensitivity analysis of time-domain and frequency-domain electromagnetic measurements. *Geophysics*, v. 52, p. 1418-1423.
- Grant, F.S., and West, G.F., 1965, *Interpretation theory in applied geophysics*. McGraw-Hill, New York. 584pp.
-

- Jiracek, G.R., Rodi, W.L., and Vanyan, L.L., 1987, Implications of magnetotelluric modelling for the deep crustal environment in the Rio Grande Rift. *Phys. Earth Planet. Inter.*, v. 45, p. 179-192.
- Jiracek, G.R., Curtis, J.H., Ramírez, J., Martínez, M. and Romo, J., 1989, Two-dimensional magnetotelluric inversion of the EMSLAB Lincoln line. *J. Geophys. Res.*, v. 94, p. 14 145-14 151.
- Jupp, D.L.B., and Vozzof, K., 1977, Two-dimensional magnetotelluric inversion. *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, v. 50, p. 333-352.
- Lee, K.H. and Morrison, H.F., 1980, A solution for TM-mode plane waves incident on a two-dimensional inhomogeneity. Lawrence Berkeley Lab., Rep. LBL-10649.
- Lee, K.H. and Morrison, H.F., 1985, A solution for TM-mode plane waves incident on a two-dimensional inhomogeneity. *Geophysics*, v. 50, p. 1163-1165.
- Lee, S., McMechan, G.A., and Aiken, C.L.V., 1987, Phase-field imaging: the electromagnetic equivalent of seismic migration. *Geophysics*, v. 52, p. 678-693.
- Oldenburg, D.W., 1978, The interpretation of direct current resistivity measurements. *Geophysics*, v. 43, p. 610-625.
- Oldenburg, D.W., 1979, One-dimensional inversion of natural source magnetotelluric observations. *Geophysics*, v. 44, p. 1218-1244.
- Oldenburg, D.W., and Samson, J.C., 1979, Inversion of interferometric data from cylindrically symmetric, refractionless plasmas. *J. Opt. Soc. Amer.*, v. 69, p. 927-942.
-

- Orellana, E., 1974, *Prospección geoelectrica por campos variables*. Paraninfo, Madrid, 571 pp.
- Parker, R.L., 1970, The inverse problem of electrical conductivity in the mantle. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, v. 22, p. 121-138.
- Parker, R.L., 1977, Understanding inverse theory. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, v. 5, p. 35-64.
- Ramírez-Hernández, J., 1988, *Modelado bidimensional del perfil magnetotelúrico de EMSLAB-Juan de Fuca*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, Baja California. 131pp.
- Rodi, W.L., Swanger, H.J., and Minster, J.B., 1984, ESP/MT: An interactive system for two-dimensional magnetotelluric interpretation. *Geophysics*, v. 49, p. 611.
- Roy, A., 1963, New interpretation techniques for telluric and some direct current fields. *Geophysics*, v. 28, p. 250-261.
- Roy, A., 1966, Downward continuation and its application to electromagnetic data interpretation. *Geophysics*, v. 31, p. 167-184.
- Roy, A., 1968, Continuation of electromagnetic fields - I. *Geophysics*, v. 33, p. 834-837.
- Roy, A., 1969, Continuation of electromagnetic fields - II. *Geophysics*, v. 34, p. 572-583.
- Sasaki, Y., 1989, Sensitivity analysis of magnetotelluric measurements in relation to static effects. *Geophys. Prosp.*, v. 37, p. 395-406.
-

- Smith, J.T., and Booker, J.R., 1988, Magnetotelluric inversion for minimum structure. *Geophysics*, v. 53, p. 1565-1576.
- Spies, B.R., 1989, Depth of investigation in electromagnetic sounding methods. *Geophysics*, v. 54, p. 872-888.
- Torres-Verdín, C., 1985, Implications of the Born approximation for the magnetotelluric problem in three-dimensional environments. M.S. thesis, The University of Texas at Austin, Austin, TX.
- Wait, J.R., 1962, *Electromagnetic waves in stratified media*. MacMillan, New York.
- Wannamaker, P.E., Hohmann, G.W. and Ward, S.H., 1984, Magnetotelluric responses of three-dimensional bodies in layered earths. *Geophysics*, v. 49, p. 1517-1533.
- Weidelt, P., 1972, The inverse problem of geomagnetic induction. *Z. Geophys.*, v. 38, p. 257-289.
- Weidelt, P., 1975, Inversion of two-dimensional conductivity structures. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, v. 10, p. 282-291.
- Zhdanov, M.S., and Frenkel, M.A., 1983, The solution of the inverse problems on the basis of the analytical continuation of the transient electromagnetic field in the reverse time. *J. Geomag. Geoelectr.*, v. 35, p. 747-766.
-

APENDICE A

El problema de minimización planteado en las ecuaciones (12) y (13) no puede resolverse mediante técnicas de programación lineal, ya que el vector de incógnitas \mathbf{p} puede ser positivo o negativo. Para salvar este obstáculo definimos las variables auxiliares x'_i y x''_i mediante

$$p_i = x'_i - x''_i \quad i = 1, m \quad (\text{A.1})$$

con $x'_i \geq 0$ y $x''_i \geq 0$

La función a minimizar (ec. 13) se convierte en

$$\Psi = \sum_{i=1}^m |x'_i + x''_i| \quad (\text{A.2})$$

y el vector solución resulta ser

$$p_i = p_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (x'_j - x''_j) \quad i = 2, m \quad (\text{A.3})$$

Para resolver numéricamente el problema de programación lineal se utilizó el algoritmo del simplex revisado (Gass, 1969) y parte del paquete publicado por Cuer y Bayer (1980).

APENDICE B

En este apéndice se encuentra una expresión para la derivada de $\log \sigma_a$ con respecto al logaritmo del período. Suponemos, como es usual, una onda plana de frecuencia f incidiendo verticalmente en un terreno estratificado. El espesor de la i -ésima capa lo denotaremos por t_i . La resistividad aparente ρ_a , se puede calcular mediante (Orellana, 1974)

$$\rho_a = 2\pi f \mu_0 c c^* \quad (B.1)$$

con

$$c = \frac{1}{k_1} \cot h [k_1 t_1 + \cot h^{-1} \left(\frac{k_1}{k_2} \cot h \{k_2 t_2 \dots \right. \\ \left. \cot h \left[k_{m-1} t_{m-1} + \cot h^{-1} \left(\frac{k_{m-1}}{k_m} \dots \right) \right] \right) \quad (B.2)$$

$$y \quad k_j = \left(i 2\pi f \frac{\mu_0}{\rho_j} \right)^{1/2}$$

$$\text{de (B.1)} \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial T} = 4\pi \mu_0 f \left[\operatorname{Re}(c) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right) + \operatorname{Im}(c) \operatorname{Im} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right) \right] - f \rho_a \quad (B.3)$$

$$\text{y de (B.2)} \quad \frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{f}{2} (i 2\pi \mu_0)^{1/2} \sum_i \frac{\partial c}{\partial k_i} \left(\frac{f}{\rho_i} \right)^{1/2} \quad (B.4)$$

la expresión para $\frac{\partial c}{\partial k_i}$ puede encontrarse en Constable *et al.* (1987).

Finalmente, la expresión para la pendiente logarítmica se puede encontrar usando (B.3) y (B.4). El resultado es

$$m = -4\pi\mu_0\sigma_a \left[\operatorname{Re}(c)\operatorname{Re}\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right) + \operatorname{Im}(c)\operatorname{Im}\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right) \right] + 1 \quad (\text{B.5})$$

APENDICE C

En este apéndice se encuentran las derivadas de Fréchet de σ_a con respecto a σ para los modos TE y TM, para un semiespacio homogéneo. Partimos de la definición de la conductividad aparente para el modo TE

$$\sigma_a = \omega\mu_0 \left| \frac{H_x(x, 0)}{E_y(x, 0)} \right|^2 \quad (\text{C.1})$$

Al perturbar ambos miembros de esta ecuación encontramos

$$\delta\sigma_a = -2\sigma_a \text{Re} \left[\frac{\delta E_y(x, 0)}{E_y(x, 0)} - \frac{\delta H_x(x, 0)}{H_x(x, 0)} \right] \quad (\text{C.2})$$

En lo que sigue, todas las distancias se encuentran normalizadas por la profundidad de penetración (δ). Para encontrar δE_y , recurrimos a las relaciones de dispersión las cuales están dadas por

$$\delta E_y(x, z) = \int G(x, z; x', z') E_y(x', z') \delta\sigma(x', z') dx' dz' \quad (\text{C.3})$$

En esta ecuación G es la componente "y" del campo eléctrico en (x, z) debido a una línea de corriente en (x', z') paralela al eje "y". G se encuentra para la distribución de conductividad de interés, en nuestro caso un semiespacio homogéneo. $E_y(x, z)$ es el campo en el punto (x, z) , en nuestro caso para un semiespacio homogéneo.

La expresión para G se puede encontrar en Wait (1962) y está dada por

$$G(x, z; x', z') = \int_0^\infty \left[\frac{u - \lambda}{u + \lambda} e^{-u(z+z')} + e^{-u|z-z'|} \right] \frac{\cos \lambda(x-x')}{u} d\lambda \quad (\text{C.4})$$

con $u^2 = \lambda^2 + 2i$ y $E_y(x, z)$ es simplemente

$$E_y(x, z) = E(0)e^{-\sqrt{2i}z} \quad (\text{C.5})$$

Con las ecuaciones (C.3), (C.4) y (C.5) se puede encontrar $\delta E_y(x, 0)/E_y(x, 0)$. Para encontrar $\delta H_x(x, 0)$ usamos la primera ecuación de Maxwell

$$\delta H_x(x, 0) = \frac{1}{i\omega\mu_0\delta} \left. \frac{\partial}{\partial z} \delta E_y(x, z) \right|_{z=0} \quad (\text{C.6})$$

Finalmente, al usar (C.2), (C.4), (C.5) y (C.6) encontramos que

$$G^{TE} = Re \left\{ \frac{2}{\pi\delta^2} \int_0^\infty G_\lambda^{TE} \cos \lambda(x-x') d\lambda \right\} \quad (\text{C.7})$$

$$\text{con } G_\lambda^{TE} = \frac{\lambda + i(2 + \lambda)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2i}} e^{-(\sqrt{\lambda^2 + 2i} + \sqrt{2i})z'}$$

Para el modo TM, la perturbación en la conductividad aparente está dada por

$$\delta\sigma_a = -2\sigma_a Re \left[\frac{\delta E_x(x, 0)}{E_x(x, 0)} \right] \quad (\text{C.8})$$

las relaciones de dispersión, en este caso están dadas en Lee & Morrison (1985) y son

$$\delta E_x(x, z) = \int (g_{11}, g_{12}, g_{13}) \mathbf{E}(x', z') \delta \sigma(x', z') dx' dz' \quad (\text{C.9})$$

En esta ecuación $g_{ij}(x, y; x', z')$ es la componente j del campo eléctrico en (x, y) debido a un dipolo eléctrico oscilante con corriente unitaria en (x', y') , orientado en la dirección i . Ya que \mathbf{E} para el modo TM es

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$$

y para un semiespacio homogéneo $E_z = 0$, sólo nos interesa encontrar $g_{11}(x, z; x', z')$ en la ecuación (C.9). Esta ecuación está dada por Lee & Morrison (1980) y es

$$g_{11}(x, z; x', z') = \frac{-1}{\pi \sigma \delta^2} \int_0^\infty u [e^{-u|x-z-z'|} + e^{-u(z+z')}] \cos \lambda(x-x') d\lambda \quad (\text{C.10})$$

Combinando (C.8) y (C.9), la derivada de Fréchet es

$$G^{TM} = -2\sigma Re [g_{11}(x, 0; x', z') e^{-\sqrt{2i}z'}] \quad (\text{C.11})$$

y usando (C.10) encontramos finalmente que

$$G^{TM} = Re \left[\frac{2}{\pi \delta^2} \int_0^\infty u e^{-u(u+\sqrt{2i}z')} \cos \lambda(x-x') d\lambda \right] \quad (\text{C.12})$$

APENDICE D

En este apéndice se calcula la integral (I) de las funciones de peso, que aparece definida en la ecuación (48). La integral se calcula en un elemento típico Δ_j definido por $x_i \leq x' \leq x_{i+1}$, $z_j \leq z' \leq z_{j+1}$. Asumiremos que toda las distancias se encuentran normalizadas por la profundidad de penetración. La integración se puede realizar en forma analítica. El resultado para el modo TE es

$$I = \frac{-2}{\pi} Re \int_0^\infty \frac{\lambda + i(2 + \lambda)}{(u + \lambda)(u + \sqrt{2i})\lambda} \left[e^{-(u + \sqrt{2i})z_j} - e^{-(u + \sqrt{2i})z_{j+1}} \right] \text{sen } \lambda(x - x') \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} d\lambda \quad (\text{D.1})$$

con $u^2 = \lambda^2 + 2i$

para el modo TM el resultado es

$$I = \frac{2}{\pi} Re \int_0^\infty \frac{u}{\lambda(u + \sqrt{2i})} \left[e^{-(u + \sqrt{2i})z_{j+1}} - e^{-(u + \sqrt{2i})z_j} \right] \text{sen } \lambda(x - x') \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} d\lambda \quad (\text{D.2})$$

Denotemos a la transformada seno de $f(\lambda)$ como $L\{f(\lambda)\}$, las funciones que aparecen en (D.1) y (D.2) son del tipo $g(\lambda)/\lambda$. Para calcular $L\{f(\lambda)\}$ con los filtros de Anderson (1975) se requiere que la transformada de Fourier de $f(\lambda)$ sea de banda limitada. Ya que la transformada de $\frac{1}{\lambda}$ no es de banda limitada, recurrimos al siguiente artificio

$$L\left\{\frac{g(\lambda)}{\lambda}\right\} = L\left\{\frac{g(\lambda) - g(0) + g(0)}{\lambda}\right\} = L\left\{\frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda}\right\} + g(0)\frac{\pi}{2} \text{sgn}(x - x')$$

$\text{sgn}(x)$ es la función signo.

APENDICE E

El vector de incógnitas α que aparece en el cálculo de la función promediante (ecuación 53), está relacionado con la matriz de productos internos Γ , mediante

$$\Gamma\alpha = \mathbf{b} \quad (\text{E.1})$$

con $b_i = G_i(x' = x_0, z' = z_0)$

En este apéndice se calculan los elementos de Γ . Ya que para el modo TM las mediciones se realizan con dipolos, la función de peso en este caso será:

$$G(x, x', z') = \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} G^{TM}(x, x', z') dx \quad (\text{E.2})$$

siendo G^{TM} la función de peso para el caso de mediciones puntuales del campo eléctrico definida en la ecuación (45) y a es la longitud del dipolo. La integración que aparece en (E.2) puede calcularse directamente. El resultado es

$$G(x, x', z') = \frac{2}{\pi a \delta} \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{u e^{-(u + \sqrt{2i})z'/\delta}}{\lambda} \text{sen} \lambda \left(\frac{x}{\delta} + \frac{a}{2\delta} - \frac{x'}{\delta} \right) d\lambda - \int_0^\infty \frac{u e^{-(u + \sqrt{2i})z'/\delta}}{\lambda} \text{sen} \lambda \left(\frac{x}{\delta} - \frac{a}{2\delta} - \frac{x'}{\delta} \right) d\lambda \right\} \quad (\text{E.3})$$

Para EMAP las funciones de peso se definen en la ecuación (51) en términos de la función G .

La matriz de productos internos para el modo TM se define mediante

$$\Gamma_{ij} = \int_{z'=0}^\infty \int_{x'}^{+co} G(x_i, x', z', T_k) G(x_j, x', z', T_k) dx' dz' \quad (\text{E.4})$$

con $i = (l - 1)nt + k$; $l = 1, nx$; $k = 1, nt$

y $j = (l' - 1)nt + k'$; $l' = 1, nx$; $k' = 1, nt$

y por una relación similar para EMAP. El número de sondeos es nx y nt es el número de períodos en cada sondeo. Ya que las funciones G tienen un valor infinito en el punto de medición, para poder calcular Γ_{ij} se quitó una región semicircular de radio $a/8$. Se observa de la ecuación (E.3) que se puede hacer una tabla para calcular G , en términos de x' y z' y en seguida realizar la integración numérica para formar la matriz de productos internos.