


RESUMEN de la Tesis de Silvio Guido Lorenzo Marinone Moschetto, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFIA con opción en OCEANOGRAFIA FISICA. Ensenada, Baja California, México. Junio de 1981.

EFFECTOS DE CORRIENTES ZONALES SOBRE ONDAS ECUATORIALES.

Resumen aprobado por:


Dr. Pedro Ripa A.
Director de Tesis

Se estudia el efecto de corrientes zonales centradas en el ecuador sobre las ondas ecuatoriales en el marco de un modelo de "casi una capa".

El efecto de las corrientes sobre estas ondas resulta en dos tipos de soluciones: estables e inestables. Para el primer tipo de solución se encuentra que las ondas de Rossby son las más afectadas por la corriente (en una especie de efecto Doppler); el efecto es mayor si ésta va hacia el Oeste. Del análisis del segundo tipo de soluciones resulta que la inestabilidad se debe principalmente a la interacción de las ondas de Yanai y segundo modo de Rossby con las corrientes. Asimismo, se encuentra que las corrientes al Oeste (que son las que producen un mayor efecto Doppler) son las más inestables.

Un resultado muy importante que se obtiene en esta tesis es que las ondas de Kelvin ante la presencia de corrientes fuertes, se vuelven dispersivas.

Se encuentra también que las soluciones cumplen el teorema de estabilidad encontrado por Ripa (1981a).

CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA

DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFIA

EFFECTOS DE CORRIENTES ZONALES SOBRE
ONDAS ECUATORIALES

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para
obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta

SILVIO GUIDO LORENZO MARINONE MOSCHETTO

Ensenada, B. C. Junio de 1981

TESIS APROBADA PARA SU DEFENSA POR:

Dr. Pedro Ripa, Director del Comité

Dr. Antoine Badan Dangon, Miembro del Comité

M.C. Luis Gustavo Alvarez, Miembro del Comité

Dr. Mario Martínez García, Miembro del Comité

Ing. Marco Antonio Uribe Rojo, Director del Departamento de
Oceanografía



Dr. Enrique Carrillo Barrios-Gómez, Coordinador Académico

Tesis presentada en Julio 10, 1981.

DEDICATORIA

A mi esposa e hijos Lucy, Bruno, Paula y Guido con mucho cariño y amor.

A mis padres y hermanos Silvio, Piera, Olivia y Bruno con afecto y cariño.

A mi difunto abuelo Bruno, por su fuerte empuje y consejo para que me dedicara al estudio de las ciencias.

A mis suegros Silviano y Augusta con estimación y respeto.

A mis familiares.

A mis amigos.

Que de alguna u otra forma me apoyaron y alentaron en el avance de mis estudios.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor y director de tesis Dr. PEDRO RIPA por las enseñanzas y conocimientos transmitidos y a su desinteresado apoyo en mi formación tanto académica como de investigación.

A los compañeros Cuauhtémoc Nava, Francisco Ocampo y Adolfo González por sus críticas y comentarios en el desarrollo de éste trabajo y el transcurso del estudio de la maestría y a Sergio Ramos por la elaboración de las gráficas de esta tesis.

Al Departamento de Pesca.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

A todo el personal de Oceanografía y del Centro de Cálculo, que de alguna manera contribuyeron en la realización de este trabajo.

A los miembros de mi comité de tesis, Dr. Antoine Badan, M. en C. Luis G. Alvarez y Dr. Mario Martínez por su revisión y crítica de esta tesis.

CONTENIDO

I. - INTRODUCCION	1
II. - DESCRIPCION DEL MODELO	5
II.1. - Ecuaciones del modelo y leyes de conservación	5
II.2. - Expansión perturbativa	9
III. - PROBLEMA DE AUTOVALORES	14
IV. - CONDICIONES DE ESTABILIDAD	21
IV.1. - Condiciones particulares	23
V. - SOLUCIONES ESTABLES DEL PROBLEMA	27
V.1. - Onda de Kelvin	27
V.2. - Onda de Yanai	32
V.3. - Ondas Inercio-gravitatorias y de Rossby	33
V.4. - Campos de velocidades y presión	36
VI. - SOLUCIONES INESTABLES	42
VI.1. - Relación de dispersión	42
VI.2. - Razón de crecimiento	45
VI.3. - Campos de velocidades y presión	47
VI.4. - Balance energético de las ondas inestables	50
VII. - CONCLUSIONES	55
LITERATURA CITADA	58
APENDICE A. Derivación de las ecuaciones del modelo	61
APENDICE B. Elementos de matriz del operador C	65
APENDICE C. Zonas de estabilidad	70
APENDICE D. Ecuaciones del ciclo de energía	74
APENDICE E. Lista de símbolos	76

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1	Estructura vertical del modelo. La capa intermedia con densidad ρ_2 y velocidad \underline{V} independiente de la profundidad se encuentra entre dos capas inertes.	6
2	Relación de dispersión para las ondas atrapadas en el ecuador. La frecuencia es $\hat{\omega}$, k es el número de onda zonal y n es el número cuántico meridional. Se muestran también los períodos y longitudes de onda para un valor particular de la constante de separación ($c=1$ m/s).	16
3	Relación entre el parámetro B y el ancho L de la corriente para diferentes valores de la constante de separación c .	25
4	Zona de estabilidad segura. Entre las líneas llenas y quebradas se cumplen las condiciones (64) y (65) respectivamente y donde se cumplen ambas la corriente es estable (área punteada). La línea gruesa separa la zona donde existe el modelo de acuerdo a la condición (69). Se muestran también las magnitudes de la corriente	

en el ecuador y el ancho de la misma para un valor particular de la constante de separación ($c=1$ m/s).

26

5 Diferencia entre los términos de corrección a la velocidad de fase para la onda de Kelvin de los resultados de esta tesis (línea llena) y los encontrados por McPhaden & Knox (1979) (línea quebrada).

30

6 Relación de dispersión para la onda de Kelvin para diferentes valores de A & B. Las líneas quebradas son el resultados de la ecuación (75) y las llenas de (52). Note el carácter dispersivo de la onda de Kelvin para $A > 0.2$.

31

7 Relación de dispersión para las ondas de Yanai para un valor particular de $B=0.15$. Las líneas llenas resultan de la ecuación (52), mientras que las quebradas de la ecuación (83).

34

8 Relación de dispersión modificada por una corriente al Este ($A=B=0.15$). El número cuántico meridional n mostrado corresponde a las ondas ecuatoriales sin la presencia de

- corrientes. 35
- 9 Relación de dispersión modificada por una corriente al Oeste ($B=0.15$ & $A=-0.15$). 37
- 10 Amplitudes U_1 , V_1 y H_1 en función de la latitud para el segundo modo de Rossby bajo el efecto de una corriente determinada por: a) $A=B=0.15$ y, b) $A=-0.15$ & $B=0.15$. Estas soluciones corresponden a un autovalor $w/\sqrt{\beta c} = 0.21$ y 0.28 respectivamente, para $k=-1.9\sqrt{\rho/c}$. La línea gruesa es la estructura correspondiente en la ausencia de corrientes. 38
- 11 Igual que figura 10 para la onda de Yanai con autovalor $w/\sqrt{\beta c}=0.33$ y 0.56 respectivamente. 40
- 12 Igual que figura 10 para una corriente al Este determinada por $A=B=0.15$ para: a) segundo modo inercio-gravitatorio con $w/\sqrt{\beta c}=2.838$ y, b) onda de Kelvin con $w/\sqrt{\beta c}=-1.94$. 41
- 13 Relación de dispersión para $A=-0.6$ & $B=0.15$. La línea quebrada representa la parte imaginaria del autovalor. El número cuántico

- meridional corresponde a las ondas ecuatoriales sin la presencia de corrientes. 43
- 14 Soluciones obtenidas al incluir sólo una onda de Yanai y el segundo modo de Rossby en la matriz a diagonalizar. Los parámetros A & B son los de la figura 13; sin embargo, los autovalores son reales. 44
- 15 Razón de crecimiento de la inestabilidad ecuatorial para $B=0.15$ (línea llena) y 0.5 (quebrada) en función de la magnitud de la corriente (A). 46
- 16 Efecto estabilizador de β y del ancho de la corriente (por medio del parámetro B) para diferentes magnitudes de corrientes (A) al Este y Oeste. 48
- 17 Amplitudes y módulos de los campos dinámicos u , v , y h , de la solución inestable de la figura 13 para el valor máximo de $\text{Im}(w)$, i.e., $w/\sqrt{\beta c}=(0.693+0.187i)$ para $k\sqrt{c/\beta}=-1.9$. La línea gruesa corresponde a la onda de Yanai

- cuando no hay corrientes para el mismo valor de
k. 49
- 18 Balance energético entre el "campo medio" y las
"perturbaciones". 52
- 19 Término de intercambio TI (línea gruesa) entre
las energías cinéticas del campo medio y de las
perturbaciones. La línea quebrada muestra los
valores de q_0'/β . Los campos u_1 y v_1
corresponden a los de la figura 17. 54

LISTA DE TABLAS

Tabla

Página

- I Análisis del error de los autovalores de la interacción de diferentes estados para un valor de $k\sqrt{c/\beta} = -2.0$ con el campo ψ_0 determinado por $A=0.35$ & $B=0.5$.

20

EFFECTOS DE CORRIENTES ZONALES SOBRE ONDAS ECUATORIALES

I. - INTRODUCCION

En el estudio del océano es importante tanto las propiedades "medias" como su variabilidad. La circulación oceánica promedio es relativamente bien conocida, más no lo es así su variabilidad. Esta última puede ser debida tanto a las fluctuaciones de las fuerzas atmosféricas como a la inestabilidad de las corrientes medias (Philander, 1979a).

El problema de estabilidad consiste en lo siguiente. Si se tiene una solución exacta de un modelo y se le agrega una pequeña perturbación, ésta crecerá en amplitud si es inestable o permanecerá acotada si es estable. Las escalas de tiempo y espacio de la solución inestable están determinados por la interacción de la perturbación inicial y la estructura de la solución exacta (Pedlosky, 1979).

Los estudios de estabilidad de corrientes pueden ser clasificados de acuerdo a que éstas varíen sólo en la dirección vertical (inestabilidad baroclínica) o tengan un corte horizontal (inestabilidad barotrópica).

Existen muchos trabajos sobre el problema de estabilidad baroclínica, entre los que destacan Charney (1947), Eady (1949), Kuo (1952), Phillips (1954) y Pedlosky (1964).

Referente a la inestabilidad barotrópica, existen

estudios como los de Kuo (1949), Charney & Stern (1962), quienes encuentran básicamente que una condición necesaria de inestabilidad es que el gradiente meridional de la vorticidad absoluta cambie de signo. Pedlosky (1964) encuentra que una condición necesaria de inestabilidad es que el producto de la velocidad zonal y el gradiente meridional de la vorticidad absoluta sea mayor que cero.

El problema de estabilidad ha sido estudiado en "latitudes medias" bajo el contexto de la aproximación geostrofica. El concepto de geostrofia no puede ser fácilmente extendido a la zona ecuatorial y, por lo tanto, los trabajos antes mencionados no son aplicables para el sistema de corrientes tropicales.

Existen estudios de estabilidad de corrientes ecuatoriales, por medio de modelos numéricos, como los hechos por Philander (1976, 1978a) y Kuo (1978). Aunque estos trabajos significan un aporte importante al conocimiento de la dinámica ecuatorial, la física del problema está aun muy lejos de ser satisfactoriamente entendida.

La zona ecuatorial (cuya importancia en la variabilidad del resto de los océanos es ampliamente reconocida) se caracteriza por la existencia de un sistema de corrientes zonales con fuertes cortes tanto verticales como meridionales. Asimismo, esta región actúa como una guía de ondas (Matsuno, 1966) en el sentido de que existen modos de oscilación de las variables oceánicas que están atrapados meridionalmente y se propagan a lo largo del ecuador.

Recientemente, Miyata (1981) y Ripa (1981a) han encontrado criterios de estabilidad para la zona ecuatorial. Los resultados de este último autor son la base de este trabajo.

En esta tesis, se estudia el problema de estabilidad de una corriente zonal centrada en el ecuador y el efecto de la interacción de ésta con las ondas ecuatoriales, en el marco de un modelo de "casi una capa". Este permite simular los efectos no-lineales dentro de un modo vertical, pero no incluye los efectos del corte vertical de las corrientes.

De acuerdo a los efectos de esta interacción, se pueden diferenciar los siguientes objetivos:

- 1.- Investigar el efecto de las corrientes sobre las ondas ecuatoriales. Es decir, analizar las modificaciones de la relación de dispersión y los campos de velocidades y presión.

- 2.- De las soluciones inestables de la interacción corriente-ondas, encontrar razones de crecimiento de la perturbación.

En la sección No. 2 se hace una descripción del modelo y de las diferentes leyes de conservación que restringen la evolución del sistema. En la tercera sección se presenta el problema de autovalores planteado por las ecuaciones de movimiento del modelo y se propone una manera de resolverlo mediante una expansión en una base completa y ortogonal. En la sección No. 4 se desarrollan las condiciones suficientes de

estabilidad obtenidas por Ripa (1981a). De estas condiciones se obtiene una zona de estabilidad (Fig. 4) para una corriente zonal centrada en el ecuador. En las secciones Nos. 5 & 6 se presentan y discuten los resultados de las soluciones estables e inestables respectivamente. En la sección No. 7 se presentan las conclusiones de esta tesis.

II. - DESCRIPCION DEL MODELO

II.1. - Ecuaciones del modelo y leyes de conservación

Se utiliza un modelo hidrostático de tres capas, en el que las capas superior e inferior son inertes, es decir, carecen de movimiento horizontal (Fig. 1).

No se toma en cuenta la fricción y se hace la aproximación de plano-beta. Las ecuaciones del modelo son (ver apéndice A para su desarrollo) .

$$\partial_t \underline{V} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} + f \hat{z} \times \underline{V} + c^2 \nabla h = 0 , \quad (1)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot [(1+h) \underline{V}] = 0 , \quad (2)$$

donde \underline{V} es la velocidad horizontal de la capa intermedia, ∇ es el operador gradiente horizontal, $\underline{X}=(x,y)$ son las coordenadas hacia el Este y Norte respectivamente, f es el parámetro de Coriolis ($f=\rho y$). Finalmente, h es definido en forma tal que

$$H = \bar{H}(1+h) , \quad (3)$$

donde H es la profundidad de la capa intermedia y \bar{H} su promedio horizontal.

El parámetro c está dado por

Modelo de "casi una capa"

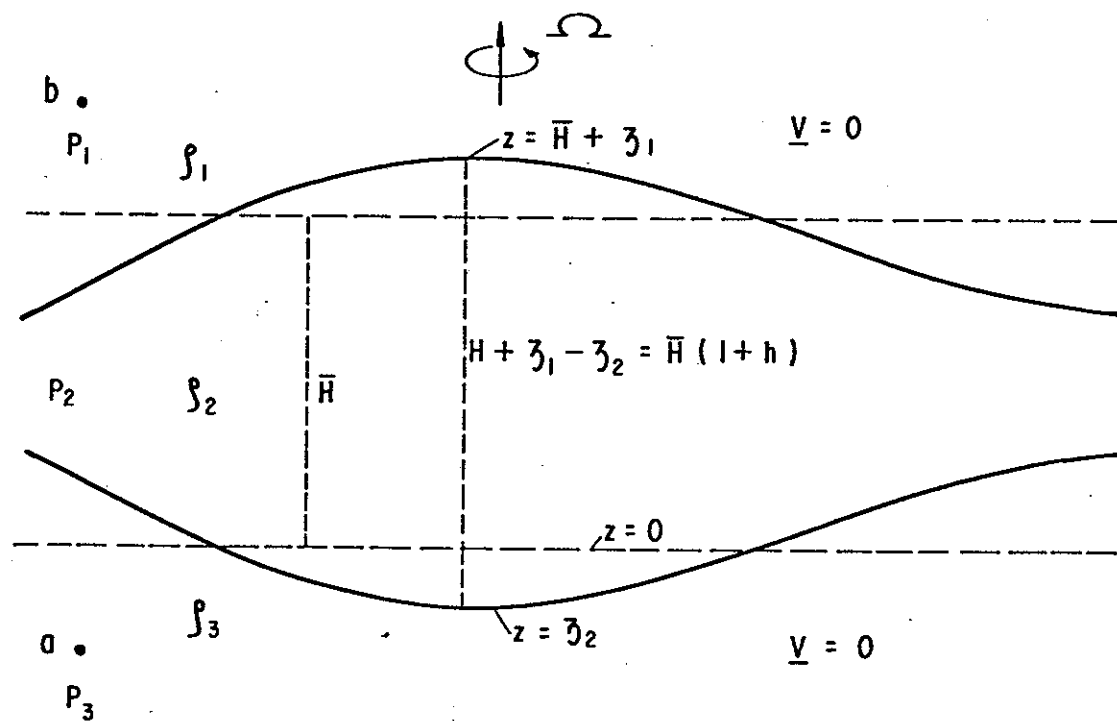


Figura 1. Estructura vertical del modelo. La capa intermedia con densidad ρ_2 y velocidad \underline{v} independiente de la profundidad se encuentra entre dos capas inertes.

$$c^2 = g\bar{H}(\rho_3 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_1) / [\rho_2(\rho_3 - \rho_1)] \quad (4)$$

Este parámetro es el autovalor o constante de separación de la ecuación de la estructura vertical y , de acuerdo a Philander (1979c), determina la longitud de onda vertical efectiva y la extensión latitudinal de las ondas.

Las condiciones de frontera son las utilizadas por Philander (1976; 1978a; 1978b) y McPhaden & Knox (1979), es decir

$$\underline{v}, h \Rightarrow 0 \quad \text{para} \quad |y| \Rightarrow \infty \quad (5)$$

Las distintas leyes de conservación que restringen la evolución del sistema en este modelo son (ver Ripa 1981b):

1.- La ecuación (2) representa la ley de conservación de volumen. Esta ecuación expresa que los cambios temporales de la profundidad de la capa intermedia son debidos a la divergencia del transporte horizontal.

2.- La vorticidad potencial puede ser definida como

$$q = (f + \zeta) / (1 + h) \quad (6)$$

donde

$$\zeta = \hat{z} \cdot \text{rot} \underline{v} \quad (7)$$

es la componente vertical de la vorticidad relativa (rot

indica el rotacional). Tomando el rotacional de (1) y utilizando (2), resulta que la vorticidad potencial es constante siguiendo una columna de fluido, i. e.,

$$(\partial_t + \underline{V} \cdot \nabla) q = 0. \quad (8)$$

El significado de esta ecuación es, que para cada columna elemental de fluido, su velocidad absoluta de rotación es inversamente proporcional a su altura.

3.- El término $f v$ de la componente x de (1) puede ser escrito como $\underline{V} \cdot \nabla (f^2 / 2\beta)$. Si multiplicamos esta ecuación por $(1+h)$ y le sumamos $(2)(u - f^2 / 2\beta)$ se desprende que

$$\partial_t U + \nabla \cdot (\underline{V} U) + \partial_x d = 0. \quad (9)$$

En esta expresión

$$U = (1+h)(u - f^2 / 2\beta) \quad (10)$$

es el momento zonal y d está dado por

$$d = c^2 h (1+h/2). \quad (11)$$

La ecuación (10) muestra que el momento zonal de una partícula de fluido no está dado solo por mu , sino que tiene un término adicional $-mf^2 / 2\beta$.

4.- La ecuación de conservación de energía es

$$\partial_t E + \nabla \cdot [\underline{v}(d+E)] = 0, \quad (12)$$

donde

$$E = (1/2) [(1+h)\underline{v}^2 + c^2 h^2] \quad (13)$$

es la densidad de energía mecánica (por unidad de masa), suma de las energías cinética y potencial. La ecuación (12) puede ser obtenida haciendo: $(1+h)u$ [comp. x de (1)] + $(1+h)v$ [comp. y de (1)] + $[c^2 h + (u^2 + v^2)/2]$ (2).

II. 2. - Expansión perturbativa

Las variables dinámicas del modelo pueden ser descompuestas en la serie perturbativa (Ripa 1981a)

$$\varphi = \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 + \epsilon^2 \varphi_2 + \dots, \quad (14)$$

donde $\varphi = \begin{pmatrix} \underline{v} \\ ch \end{pmatrix} = \varphi(\underline{x}, t)$, $\epsilon \ll 1$ y el subíndice indica el orden de la expansión. El primer término, φ_0 , representa una solución exacta del modelo y los términos restantes representan pequeñas perturbaciones de orden ϵ^n .

Las ecuaciones de movimiento y las leyes de conservación pueden también ser expandidas en potencias de ϵ . Las ecuaciones del modelo en el orden más bajo resultan:

$$v_0 = 0, \quad (15)$$

$$f u_0 + c^2 h_0' = 0, \quad (16)$$

es decir, el flujo es zonal y está en balance geostrofico (la prima significa derivada respecto de y).

Al siguiente orden, las ecuaciones (1) y (2) son

$$D_0 u_1 - (f - u_0') v_1 + c^2 \partial_x h_1 = 0, \quad (17)$$

$$D_0 v_1 + f u_1 + c^2 \partial_y h_1 = 0, \quad (18)$$

$$D_0 h_1 + \nabla \cdot [(1 + h_0) \underline{V}_1] = 0, \quad (19)$$

donde $D_0 = \partial_t + u_0 \partial_x$. Este sistema de ecuaciones puede ser representado como

$$(\partial_t + N + iC) \psi_1 = 0, \quad (20)$$

donde N es un operador lineal antihermítico y C contiene los efectos del campo ψ_0 . Estos operadores tienen la forma

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -f & c \partial_x \\ f & 0 & c \partial_y \\ c \partial_x & c \partial_y & 0 \end{pmatrix},$$

$$iC = \begin{pmatrix} u_0 \partial_x & u_0' & 0 \\ 0 & u_0 \partial_x & 0 \\ c h_0 \partial_x & c h_0' + c h_0 \partial_y & u_0 \partial_x \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de movimiento a segundo orden son

$$(\partial_t + N + iC) + \left(\begin{array}{c} \underline{v}_1 \cdot \nabla \underline{v}_1 \\ \nabla \cdot (h_1 \underline{v}_1) \end{array} \right) = 0 \quad (21)$$

Los dos primeros términos de la expansión de la vorticidad potencial resultan

$$q_0 = (f - u_0') / (1 + h_0) \quad (22)$$

$$q_1 = (\zeta_1 - q_0 h_1) / (1 + h_0) \quad (23)$$

Las correspondientes leyes de conservación son

$$D_0 q_0 = 0 \quad (24)$$

$$D_0 q_1 + v_1 q_0' = 0 \quad (25)$$

La ecuación (25) resulta de hacer la operación $\partial_x(18) - \partial_y(17)$ y de utilizar (19).

El momento zonal es expandido de igual forma, resultando hasta segundo orden,

$$U_0 = (1 + h_0) (u_0 - f^2 / 2\beta) \quad (26)$$

$$U_1 = U_1(\varphi_1) = (1 + h_0) u_1 + h_1 (u_0 - f^2 / 2\beta) \quad (27)$$

$$U_2 = U_2(\varphi_2) + \hat{U}_2 \quad (28)$$

donde

$$\hat{U}_2 = u_2, h_2 \quad (29)$$

Las leyes de conservación del momento zonal a primer y segundo orden toman la forma

$$D_0 U_1 + \nabla \cdot (U_0 \underline{V}_1) + \partial_x [c^2 (1+h_0) h_1] = 0, \quad (30)$$

$$D_0 (U_1 (\psi_2)) + \nabla \cdot (U_0 [\underline{V}_2 + h_1 \underline{V}_1 / (1+h_0)]) + \partial_x [(1+h_0) (c^2 h_2 + \underline{V}_1^2 / 2)] - (1+h_0)^2 v_1 q_1 = 0, \quad (31)$$

$$D_0 (u_1 h_1) + \partial_x [c^2 h_1^2 + (1+h_0) (u_1^2 - v_1^2) / 2] + \partial_y [(1+h_0) u_1 v_1] + (1+h_0)^2 v_1 q_1 = 0. \quad (32)$$

La ecuación (30) resulta de hacer (17)(1+h₀) + (19)(u₀ - f²/2β), y la ecuación (31) de la suma de los productos de la primer componente de (21)(1+h₀) y de la tercera componente de (21)(u₀ - f²/2β). Finalmente, la ecuación (32) se obtiene multiplicando la ecuación (17) por h₁ y a la ecuación (19) por u₁ y sumando.

De igual forma, las expresiones para la energía son:

$$E_0 = (1+h_0) u_0^2 / 2 + c^2 h_0^2 / 2, \quad (33)$$

$$E_1 = E_1(\psi_1) = (1+h_0) u_0 u_1 + h_1 (u_0^2 / 2 + c^2 h_0), \quad (34)$$

$$E_2 = E_1(\psi_2) + \hat{E}_2, \quad (35)$$

donde

$$\hat{E}_2 = (1+h_0) \underline{V}_1^2 / 2 + h_1 u_1 u_0 + c^2 h_1^2 / 2. \quad (36)$$

Las leyes de conservación quedan como sigue

$$D_0 E_1 + \partial_x [c^2 (1+h_0) u_0 h_1] + \nabla \cdot [(1+h_0) (u_0^2/2 + c^2 h_0) \underline{v}_1] = 0, \quad (37)$$

$$D_0 \hat{E}_2 + \partial_x \{ (1+h_0) [c^2 h_1 u_1 + u_0 (u_1^2 - v_1^2)/2] + c^2 u_0 h_1^2 / 2 \} + \partial_y [(1+h_0) v_1 (c^2 h_1 + u_1 u_0)] + (1+h_0)^2 u_0 v_1 q_1 = 0. \quad (38)$$

La ecuación (37) se obtiene directamente de expandir la ecuación (12), mientras que la ecuación (38) resulta de efectuar la suma (17)[(1+h₀)u₁ + h₁u₀] + (18)[(1+h₀)v₁] + (19)[c²h₁ + u₁u₀].

III. - PROBLEMA DE AUTOVALORES

Ya que t no aparecen explícitamente en (20), podemos buscar soluciones del tipo

$$\varphi = \text{Re}[\Psi(\underline{x}) \exp(-i\omega t)] \quad (39)$$

Reemplazando (39) en (20) resulta

$$(N - i\omega + iC) \Psi(\underline{x}) = 0 \quad (40)$$

lo que constituye un problema de autovalores, es decir, existen soluciones que satisfacen (5) sólo para ciertos valores de ω . Si el autovalor es real ($\text{Im. } \omega = 0$), la interacción ondas-campo φ resulta en un sistema estable, mientras que un autovalor complejo ($\text{Im. } \omega \neq 0$) indica que las ondas son inestables ante la presencia del campo φ . El último caso implica un flujo neto de energía del campo medio hacia las ondas.

Las autosoluciones de (40) en la ausencia de corrientes ($\varphi = 0$), es decir,

$$(N - i\hat{\omega}) \hat{\Psi}(\underline{x}, a) = 0 \quad (41)$$

representan las ondas ecuatoriales. Las soluciones de (41) pueden ser etiquetadas (Matsuno, 1966) mediante el número de onda zonal, k ($-\infty < k < \infty$), el número cuántico meridional, n

($n=-1, 0, 1, 2, \dots$) y un índice discreto "r" que numera las diferentes soluciones para cada valor de k y n.

Las relaciones de dispersión resultan de resolver

$$\hat{\omega} = kc \quad n=-1 \quad (42)$$

para la onda de Kelvin,

$$\hat{\omega}(\hat{\omega} - kc) = \beta c \quad n=0 \quad (43)$$

para las de Yanai, y

$$\hat{\omega}^2 = k^2 c^2 + \beta kc^2 / \hat{\omega} + (2n+1) \beta c \quad n \geq 1 \quad (44)$$

para las inercio-gravitatorias y la de Rossby. Estas soluciones se muestran en la figura 2.

Los autovectores correspondientes pueden ser escritos en términos de las funciones parabólicas cilíndricas (Miller, 1966) en la forma

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{\pm}(\underline{X}, a) &= iA_{\pm}(a) F(n \pm 1, \sqrt{\beta/c} y) \exp(ikx), \\ \hat{\Psi}_0(\underline{X}, a) &= A_0(a) F(n, \sqrt{\beta/c} y) \exp(ikx), \end{aligned} \quad (45)$$

donde los coeficientes A_+ , A_- & A_0 están dados por las ecuaciones (B.13), (B.14) y (B.15). Estas autofunciones son ortogonales, es decir (Ripa, 1981b), $\int \hat{\Psi}_a^T \hat{\Psi}_b d^2 \underline{X} = \delta(a, b)$, donde el símbolo (T) significa transpuesto-complejo conjugado y

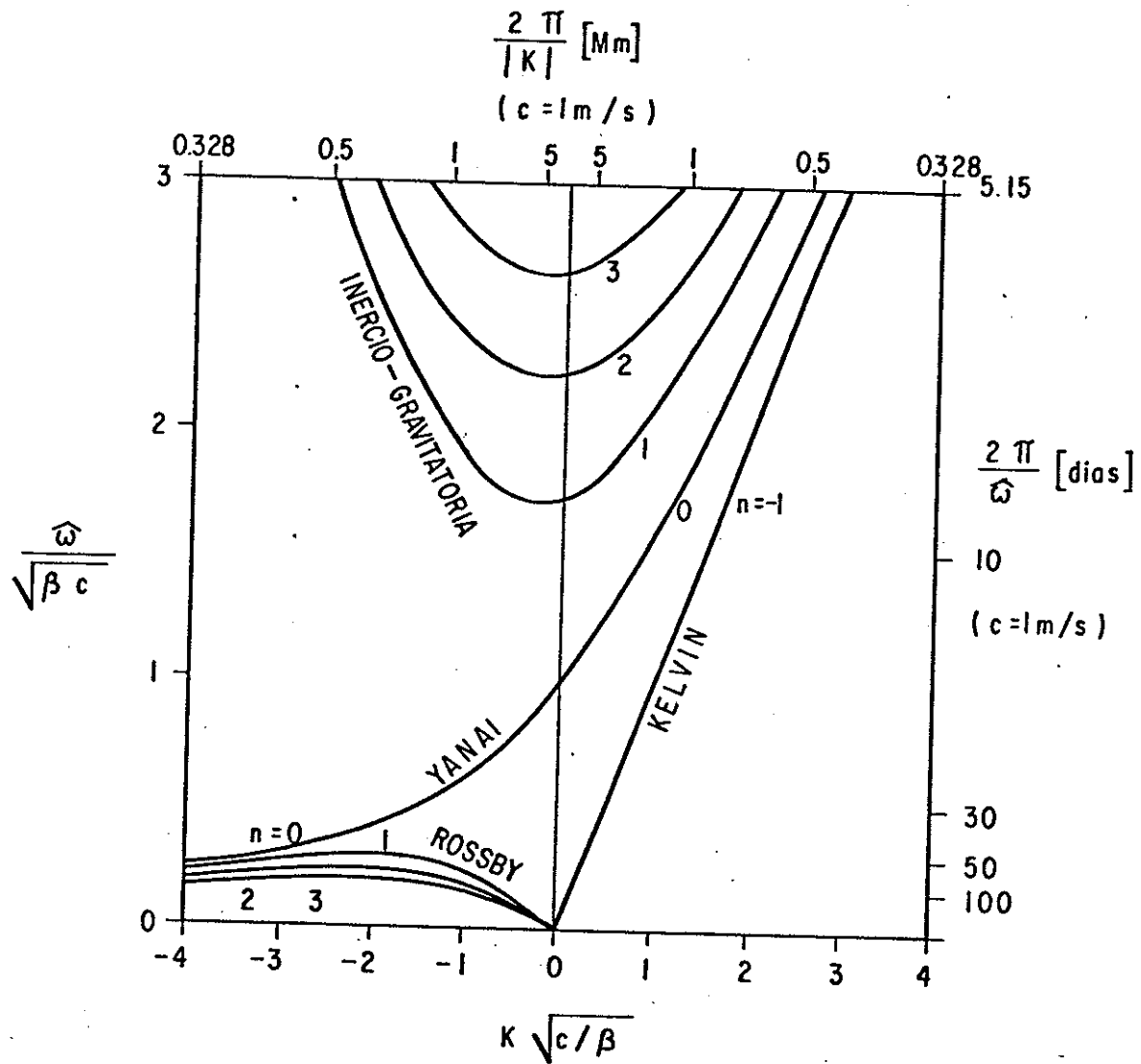


Figura 2. Relación de dispersión para las ondas atrapadas en el ecuador. La frecuencia es $\hat{\omega}$, k es el número de onda zonal y n es el número cuántico meridional. Se muestran también los períodos y longitudes de onda para un valor particular de la constante de separación ($c=1$ m/s).

$\sum_a \delta(a, b) F(b) = F(a)$ para

$$\sum_a = (2\pi)^{-1} (\beta/c)^{1/2} \int dk \sum_r \quad (46)$$

Las funciones (45) forman, además, una base completa (Ripa, 1981b), lo que permite hacer la expansión

$$\Psi(\underline{X}) = \sum_a \hat{\Psi}(\underline{X}, a) Z(a) \quad (47)$$

Esto es similar al formulismo utilizado por Kasahara (1980), quien expande utilizando las funciones de Hough, porque trabaja en la esfera.

Substituyendo (47) en (40), multiplicando por $\hat{\Psi}_b^+$, integrando en \underline{X} y utilizando (41) y la propiedad de ortogonalidad se obtiene

$$-wZ_b + \hat{w}_b Z_b + \sum_a C_{ba} Z_a = 0 \quad (48)$$

donde el C_{ba} es el elemento de matriz de C

$$C_{ba} = \int d^2 \underline{X} \hat{\Psi}_b^+ C \hat{\Psi}_a \quad (49)$$

Las integraciones en dx & dy pueden realizarse por separado, ver ecuación (45), en la forma

$$\begin{aligned} C_{ba} &= \left\{ \int \exp[i(k_a - k_b)x] dx \right\} \left\{ \int \hat{\Psi}_b^+ C \hat{\Psi}_a dy \right\} \\ &= 2\pi \delta(k_a - k_b) (c/\beta)^{1/2} B_{ba} \quad (50) \end{aligned}$$

donde

$$B_{ba} = \int dy (\beta/c)^{1/2} \hat{\Psi}_b^+ c \hat{\Psi}_a \quad (51)$$

En la ecuación (50) se vé que, por ser Ψ_0 independiente de x , sólo están acoplados estados con el mismo valor de k .

De (46), (48) y (50) se desprende que

$$(\hat{w}_b - w) Z_b + \sum_{\alpha} B_{ba} Z_{\alpha} = 0 \quad (52)$$

donde w es el autovalor y Z el autovector del problema (ver apéndice B para la expresión desarrollada de B_{ba}).

Las variables dinámicas u_i , v_i y h_i se pueden obtener de los autovectores resultantes de la ecuación (52) como sigue

$$\begin{bmatrix} u_i(x, y, t) \\ v_i(x, y, t) \\ h_i(x, y, t) \end{bmatrix} = \text{Re} \left[\begin{bmatrix} U_i(y) \\ V_i(y) \\ H_i(y) \end{bmatrix} \exp[i(kx - wt)] \right],$$

donde U_i , V_i y H_i son las amplitudes de los campos u_i , v_i y h_i respectivamente. Estas amplitudes se determinan utilizando (47) y (45), es decir,

$$U_i(y) = i \sum_{\alpha} Z(\alpha) [A_+(\alpha) F(n+1, \sqrt{\beta/c} y) + A_-(\alpha) F(n-1, \sqrt{\beta/c} y)] / \sqrt{2} \quad (53)$$

$$V_i(y) = \sum_{\alpha} Z(\alpha) A_0(\alpha) F(n, \sqrt{\beta/c} y) \quad (54)$$

$$H_i(y) = i \sum_{\alpha} Z(\alpha) [A_+(\alpha) F(n+1, \sqrt{\beta/c} y) - A_-(\alpha) F(n-1, \sqrt{\beta/c} y)] / c\sqrt{2} \quad (55)$$

Note que si $u_0(y) = u_0(-y)$, se pueden buscar soluciones de (52) tomando solo estados pares o impares (la paridad del estado es determinada por el número cuántico meridional n) pues ambos grupos están desacoplados.

Las autosoluciones de (52) son aproximadas truncando la sumatoria a un número finito de (orden 10 a 20) estados base. En todos los resultados que se presentan, se verificó su precisión mediante el agregado de más estados en la matriz a diagonalizar. Más concretamente, se buscó que los cambios de un determinado autovalor, al aumentar el orden de la matriz fueran inferiores al 1%. También se verificó que las amplitudes de los estados que se agregaban fueran despreciables.

A manera de ejemplo, la Tabla I muestra tres autovalores correspondientes a un campo Ψ determinado por $A=0.35$ & $B=0.15$ y para $k\sqrt{c/\beta} = -2.0$. Los estados utilizados para éste cálculo son (en este orden): inercio-gravitatorio con $n=4$ & 2 ; Yanai; y Rossby con $n=2, 4, 6, 8, 10$.

Orden de la matriz	Autovalores		
	1	2	3
1	3.46 0.0		
2	3.47 0.0	2.79 0.0	
3	3.47 0.0	2.79 0.0	0.16 0.0
4	3.47 0.0	2.79 0.0	0.18 0.0
5	3.47 0.0	2.79 0.0	0.22 0.0
6	3.47 0.0	2.79 0.0	0.22 0.0
7	3.47 0.0	2.80 0.0	0.23 0.0
8	3.47 0.0	2.80 0.0	0.23 0.0

Tabla I.- Análisis del error de los autovalores de la interacción de diferentes estados para un valor de $k\sqrt{c/\beta} = -2.0$ con el campo ψ_0 determinado por $A=0.35$ & $B=0.5$.

IV. - CONDICIONES DE ESTABILIDAD

Condiciones suficientes de estabilidad para el campo Ψ_0 (es decir, que implican $\text{Im}(w)=0$ para todas las soluciones de (52)) pueden ser deducidas de la siguiente forma (Ripa, 1981a).

Efectuando la operación (36) - α (29), donde α es un número con unidades de velocidad, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{E}_2 - \alpha \hat{U}_2 &= (1+h_0)u_1^2/2 + (u_0 - \alpha)u_1 h_1 + c^2 h_1^2/2 \\ &= [(\alpha - u_0)u_1 / c\sqrt{2} - ch_1 / \sqrt{2}]^2 + u_1^2 [(1+h_0)/2 - (\alpha - u_0)^2 / 2c^2] , \end{aligned}$$

de donde resulta que una condición suficiente para que $\hat{E}_2 - \alpha \hat{U}_2$ sea definido positivo es

$$(\alpha - u_0)^2 \leq c^2(1+h_0) . \quad (56)$$

Por otra parte, introduciendo el desplazamiento meridional \mathcal{J} mediante

$$v_1 = D_0 \mathcal{J} , \quad (57)$$

de la ecuación (25) resulta

$$q_1 = -q_0 \mathcal{J} , \quad (58)$$

Substituyendo (57) & (58) en (32) & (38), integrando y

utilizando las condiciones de frontera (5), se obtiene

$$\partial_t \langle \hat{U}_2 - (1+h_0)^2 q_0' f^2 / 2 \rangle = 0, \quad (59)$$

$$\partial_t \langle \hat{E}_2 - (1+h_0)^2 u_0 q_0' f^2 / 2 \rangle = 0, \quad (60)$$

donde $\langle \dots \rangle$ significa promedio espacial.

De las ecuaciones (59) y (60) resulta

$$\partial_t [\langle \hat{E}_2 - \alpha \hat{U}_2 \rangle + \langle (1+h_0)^2 (\alpha - u_0) q_0' f^2 \rangle / 2] = 0, \quad (61)$$

la que puede representarse en la forma

$$\partial_t [\langle R \rangle + \langle Q \rangle] = 0, \quad (61')$$

donde

$$R = \hat{E}_2 - \alpha \hat{U}_2 \quad \text{y} \quad Q = (1+h_0)^2 (\alpha - u_0) q_0' f^2.$$

Una condición suficiente para que Q sea definido positivo es $(\alpha - u_0) q_0' \geq 0$ para todo y .

De manera que si existe un número α tal que,

$$(\alpha - u_0)^2 \leq c^2 (1+h_0) \quad (62)$$

$$(\alpha - u_0) q_0' \geq 0 \quad \forall y, \quad (63)$$

la perturbación ψ se encuentra acotada en el tiempo. Las condiciones (62) y (63) son suficientes para que el flujo en consideración sea estable. Note que si hacemos $\alpha = 0$, se obtiene las condiciones suficientes de estabilidad de Miyata

(1981)

$$u_0 q_0' \geq 0$$

$$u_0^2 \geq c^2 (1+h_0) ,$$

que son sólo un caso particular de (62) y (63).

IV.1. - Condiciones particulares

De las condiciones suficientes de estabilidad encontradas por Ripa (1981a) se desprende el siguiente corolario:

Si $q_0' \geq 0 \quad \forall y$ (64)

y $[\max(u_0) - \min(u_0)]^2 \leq c^2 [(1 + \min(h_0))]$, (65)

entonces el campo ψ_0 es estable; ya que cumpliéndose estas condiciones, se satisfacen las ecuaciones (62) y (63).

En este trabajo se estudian las condiciones de estabilidad para un flujo centrado en el ecuador de la forma

$$u_0(y) = u_0(0) \exp(-y^2/L^2) \quad (66)$$

y (por geostrofia, ecuación (16))

$$h_0(y) = \beta L^2 / (2c^2) u_0(y) \quad (67)$$

En éste trabajo nos referiremos al campo Ψ_0 en función de los parámetros adimensionales

$$A = u_0(0)/c \quad \& \quad B = \beta L^2 / (2c) . \quad (68)$$

Dado el valor de la constante c , los parámetros A & B se usan para calcular la magnitud de la corriente en el ecuador ($y=0$) y el ancho en que ésta decae en un factor $1/e$ respectivamente (fig. 3). El parámetro c está definido en (4).

Una restricción importante de remarcar, es la zona del plano A-B donde existe el modelo. Para su validez se debe cumplir que, $\min(h_0) > -1$, pues de otra forma las interfaces β_1 y β_2 se cruzarían. Esta condición implica (apéndice C) que

$$AB > -1 . \quad (69)$$

Las condiciones (64) & (65) se satisfacen, para el campo Ψ_0 dado por (66) & (67), en

$$(64) \quad \Leftrightarrow \quad A_2(B) < A < A_1(B) , \quad (70)$$

$$(65) \quad \Leftrightarrow \quad A_4(B) < A < A_3(B) , \quad (71)$$

respectivamente (ver apéndice C para el desarrollo y expresiones en (69) y (70)) (fig. 4).

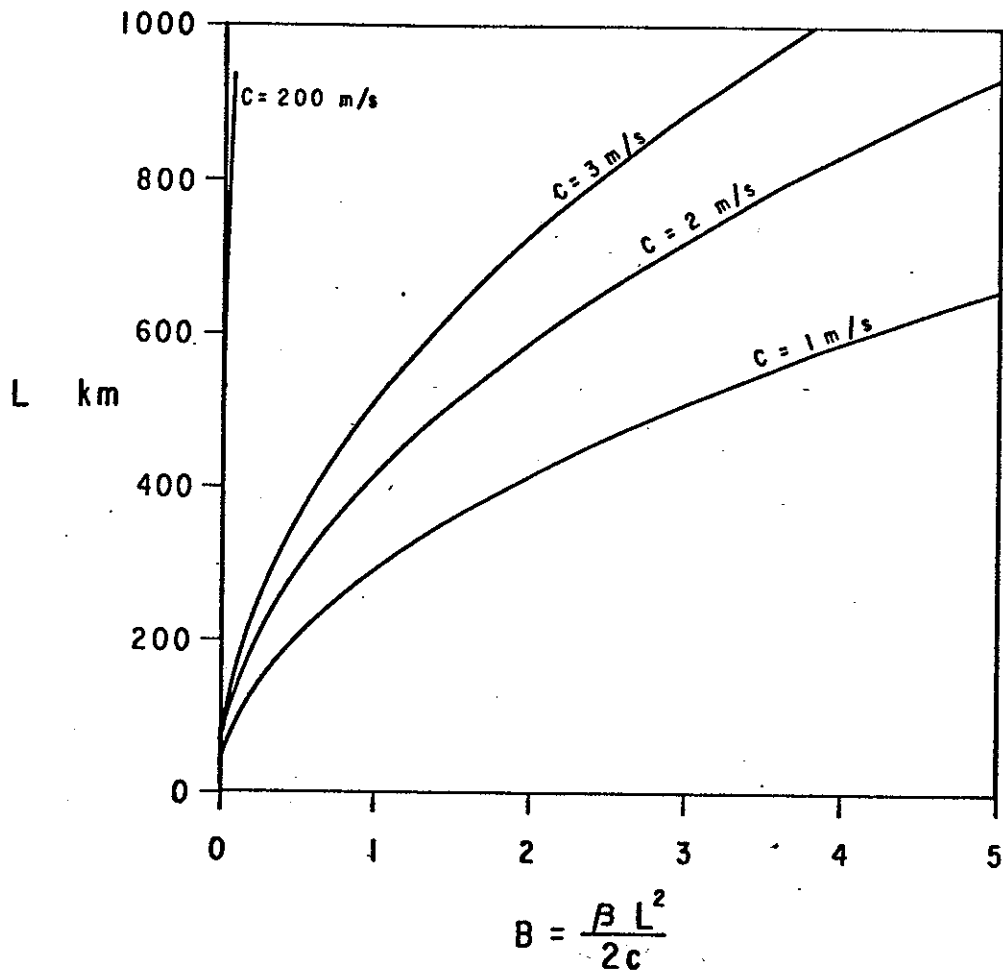


Figura 3. Relación entre el parámetro B y el ancho L de la corriente para diferentes valores de la constante de separación c .

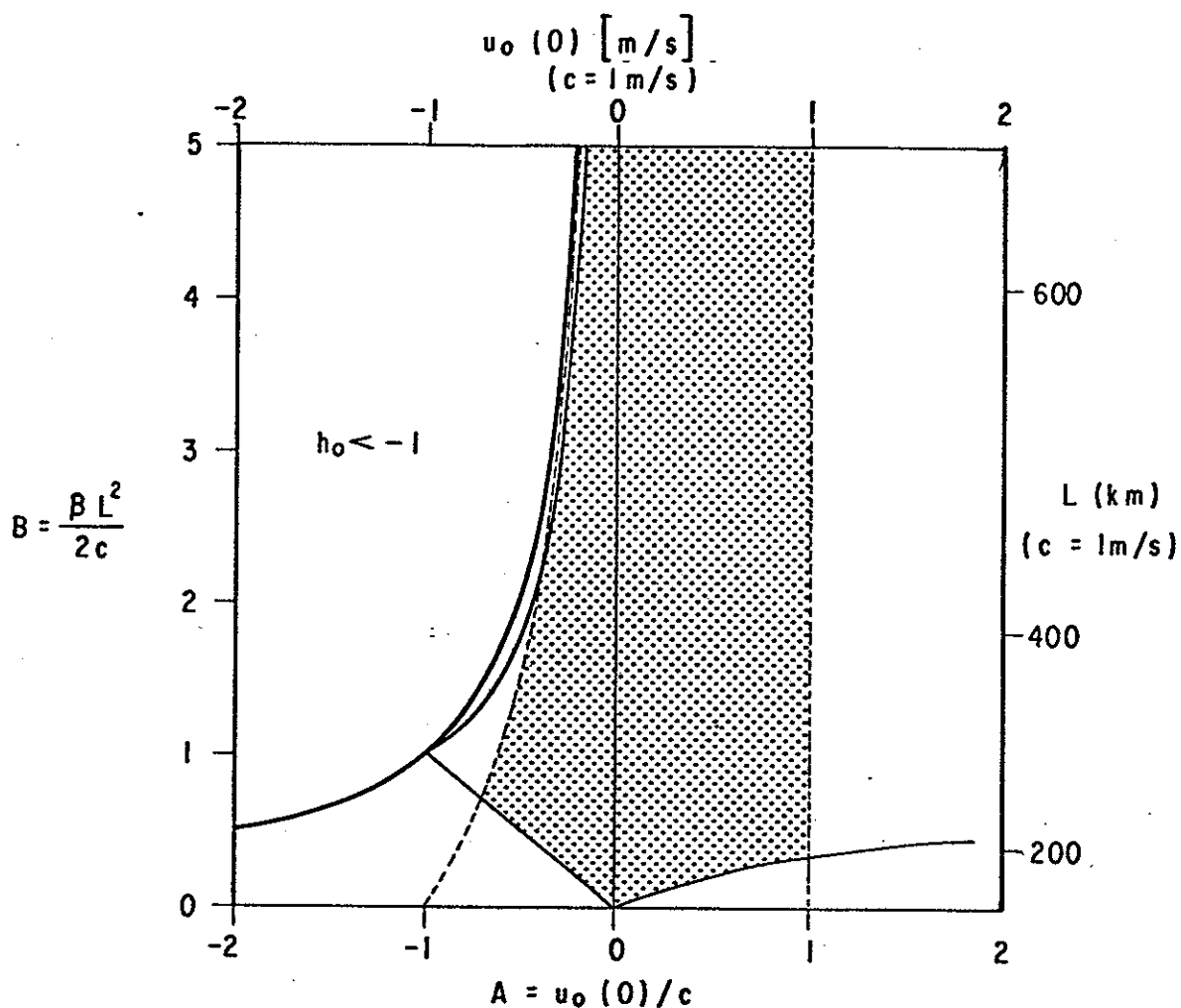


Figura 4. Zona de estabilidad segura. Entre las líneas llenas y quebradas se cumplen las condiciones (64) y (65) respectivamente y donde se cumplen ambas la corriente es estable (área punteada). La línea gruesa separa la zona donde existe el modelo de acuerdo a la condición (69). Se muestran también las magnitudes de la corriente en el ecuador y el ancho de la misma para un valor particular de la constante de separación ($c=1 \text{ m/s}$).

V. - SOLUCIONES ESTABLES DEL PROBLEMA

Para valores de A & B dentro de la zona de estabilidad (Fig. 4) [$\text{Im}(\omega)=0$], y tales que el campo φ_0 sea "débil", las soluciones de (52) son las ondas ecuatoriales ligeramente modificadas. Es así, que para valores suficientemente pequeños de A, los autovalores de (52) pueden ser aproximados por

$$w \sim \hat{w}_a + B_{aa} \quad (72)$$

para cada estado. Note que w en ésta ecuación es real.

En las siguientes dos secciones se desarrollan expresiones de este tipo para las ondas de Kelvin y de Yanai respectivamente.

V.1. - Onda de Kelvin

El estado de una onda de Kelvin es definido por el número cuántico meridional $n=-1$, para $-\infty < k < \infty$. De esta forma, en la ecuación (72), se obtiene utilizando (42) y (B.13)

$$w \sim kc + (\beta/c)^{1/2} [kU_{0,0} + kcH_{0,0}/2] = 0, \quad (73)$$

donde $U_{0,0}$ & $H_{0,0}$ están definidos en (B.11). Para el campo φ_0 definido en (66) y (67)

$$U_{0,0} = (c^3/\beta)^{1/2} A \sqrt{2B/(1+2B)} \quad \& \quad H_{0,0} = BU_{0,0}/c, \quad (74)$$

substituyendo en (73) tenemos finalmente

$$w = kc[1 + A \sqrt{2B/(1+2B)} (1+B/2)] + O(A^2). \quad (75)$$

Un hecho importante de remarcar es, que a primer orden las ondas de Kelvin se mantienen como no-dispersivas, es decir, $w/k = \text{constante}$.

McPhaden y Knox (1979) estudiaron el mismo modelo, haciendo una expansión similar a (14) con $\epsilon = A$, suponiendo que éste sea un número pequeño. Estos autores expanden asimismo el autovalor w , para el caso de la onda de Kelvin, en la forma

$$w = w_0 + Aw_1 + O(A^2), \quad (76)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} w_0 &= kc, \\ w_1 &= kc \sqrt{2B/(1+2B)}. \end{aligned} \quad (77)$$

Aw_1 representa el corrimiento Doppler a primer orden de la onda de Kelvin.

La ecuación (76) difiere de la obtenida en este trabajo (75) en el término extra

$$kcAB \sqrt{2B/(1+2B)} / 2, \quad (78)$$

que representa una corrección al valor efectivo de la

constante c , debido al campo $h_0(y)$. Por ejemplo, tomando el límite de B tendiendo a infinito, la ecuación (75) se reduce a

$$\omega - kc[1+AB/2] = kc \sqrt{1+h_0(0)+0(A^2B^2)}, \quad (79)$$

mientras que la ecuación (76) tiende a

$$\omega = kc[1+A], \quad (80)$$

resultado claramente incorrecto.

En la figura 5 se grafica la corrección a la velocidad de fase de las ondas de Kelvin respecto de aquellas con campo $\psi_0=0$, de acuerdo a los resultados aquí obtenidos y a los de McPhaden y Knox (1979). Para valores pequeños de B , ambos resultados son equivalentes, pero para valores de B mayores de 0.2, McPhaden y Knox (1979) subestiman el corrimiento de la frecuencia.

En la figura 6 se muestran en el diagrama de dispersión, los resultados obtenidos para la onda de Kelvin resolviendo la ecuación (52) con un número suficiente de estados. Para $A=0.2$ la diferencia con el valor dado por (75) es del 5% en frecuencias altas. Es importante notar que la onda de Kelvin se vuelve dispersiva ante la presencia de corrientes con velocidades comparables a su velocidad de fase.

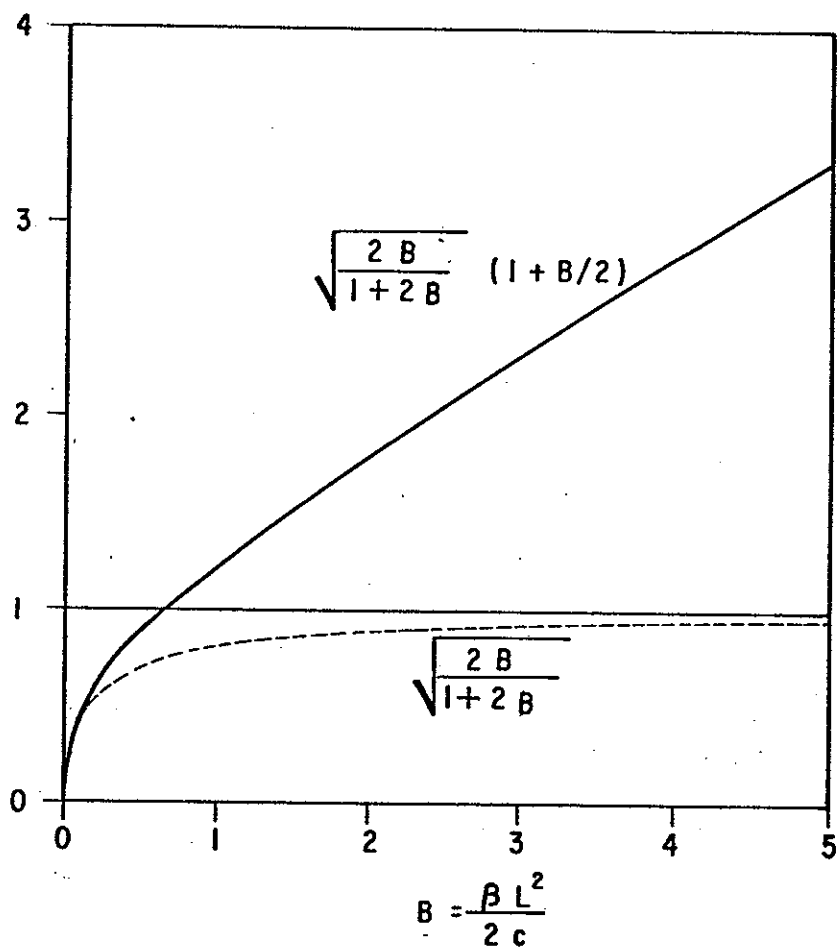


Figura 5. Diferencia entre los términos de corrección a la velocidad de fase para la onda de Kelvin de los resultados de esta tesis (línea llena) y los encontrados por McPhaden & Knox (1979) (línea quebrada).

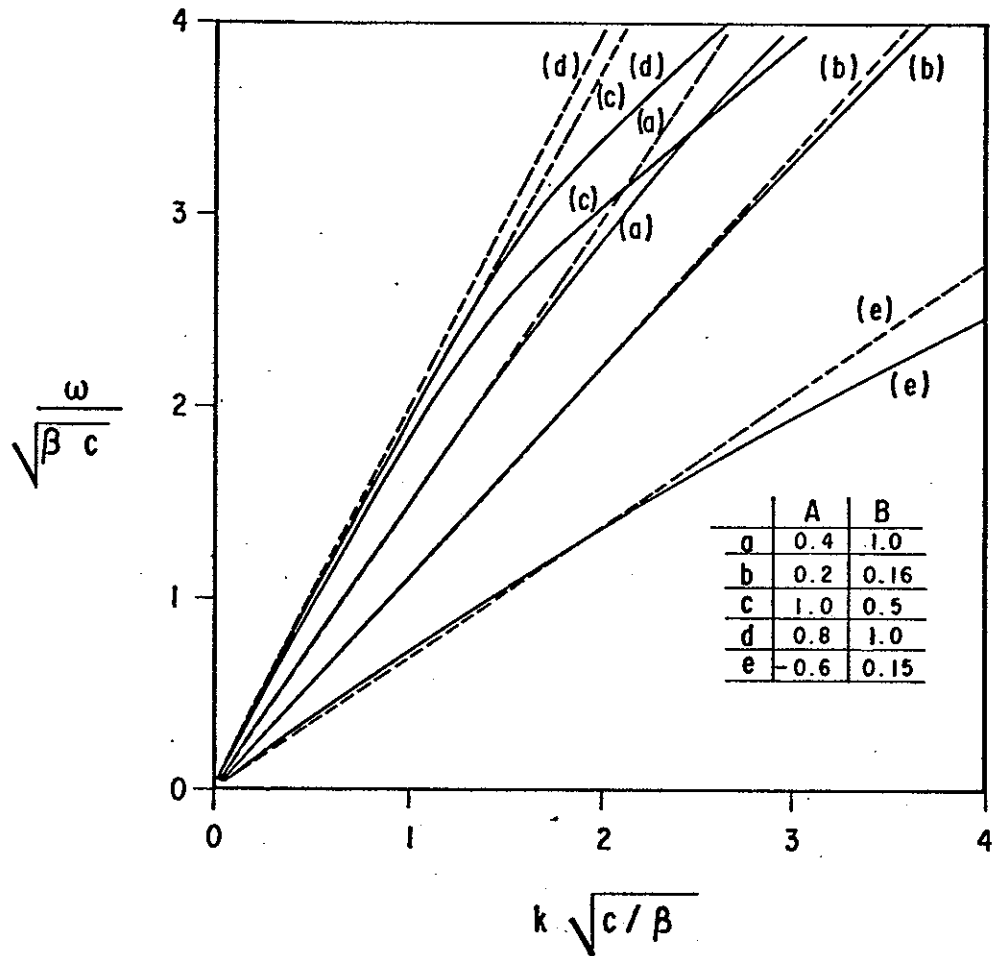


Figura 6. Relación de dispersión para la onda de Kelvin para diferentes valores de A & B. Las líneas quebradas son el resultados de la ecuación (75) y las llenas de (52). Note el carácter dispersivo de la onda de Kelvin para $A > 0.2$.

V.2. - Onda de Yanai

El estado de la onda de Yanai esta definido por el número cuántico meridional $n=0$, para $-\infty < k < \infty$.

De la ecuación (72) tenemos que

$$\begin{aligned} \omega - \hat{\omega}_a + \sqrt{\beta}/c \left[(2k - \hat{\omega}_a/c) A_+^2 U_{1,1} + (2k + \beta/\hat{\omega}_a) A_0^2 U_{0,0} \right. \\ \left. + \hat{\omega}_a A_0^2 H_{0,0} + (kc - \hat{\omega}_a/2) A_+^2 H_{1,1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (81)$$

los coeficientes A_+ & A_0 están definidos en (B.14), y de (B.17) resulta que

$$\begin{aligned} U_{1,1} = \sqrt{c^3/\beta} A_+ \pi^{-1/2} 2B/(1+2B) \left[-4/(1+2B) \right] \Gamma(1.5) F(-1, -1; -1.5; z)/2 \\ H_{1,1} = B U_{1,1} / c, \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma(1.5) = \sqrt{\pi}/2 \quad \& \quad F(-1, -1; -1.5; z) = -2B,$$

por lo que

$$\begin{aligned} U_{1,1} = \sqrt{c^3/\beta} 2AB \sqrt{2B/(1+2B)} / (1+2B), \\ H_{1,1} = B U_{1,1} / c \end{aligned} \quad (82)$$

y $U_{0,0}$ & $H_{0,0}$ ya están definidos en (74).

Substituyendo (74), (82) y (B.14) en la ecuación (81) resulta

$$\omega = \omega + AB \sqrt{2B/(1+2B)} \left[X(1+B/2) + YT \right] / (2\hat{\omega} - kc), \quad (83)$$

donde

$$\begin{aligned} X &= 2B\hat{\omega}(2kc - \hat{\omega}) / (1+2B), \\ Y &= \hat{\omega} - kc, \quad T = 2kc + \hat{\omega}B + c\beta/\hat{\omega} \end{aligned}$$

y $\hat{\omega}$ está definido en (43).

En la figura 7 se compara el resultado de (83) y el de (52) para dos valores de A. Al igual que Philander (1979b), se encuentra que ω/k , en la rama de Rossby, no cambia de signo, en contraposición a lo predicho por (83) para $A > 0$ y $|k|$ suficientemente grande.

La razón del fuerte efecto de la corriente sobre la rama de Rossby es que en este caso las velocidades de fase son comparables a las corrientes, y los efectos no-lineales adquieren gran importancia (Philander, 1979b; Philander y Pacanowski, 1981). Esto no es cierto para las inercio-gravitatorias, pues éstas tienen velocidades de fase mayores que las corrientes.

V.3. - Ondas Inercio-gravitatorias y de Rossby

En la figura 8 se muestra la relación de dispersión para las ondas ecuatoriales ante la presencia de un campo ψ_0 determinado por $A=B=0.15$ (de acuerdo a (70) y (71) para $B=0.15$, las soluciones son necesariamente estables [$\text{Im}(\omega)=0$] para $-0.15 \leq A \leq 0.35$). Comparando con la figura 2 se observa que el efecto de la corriente sobre las ondas inercio-gravitatorias es menor al de las ondas de Rossby, debido a que las últimas tienen velocidades de fase comparables a u , mientras que las primeras no. Para las ondas

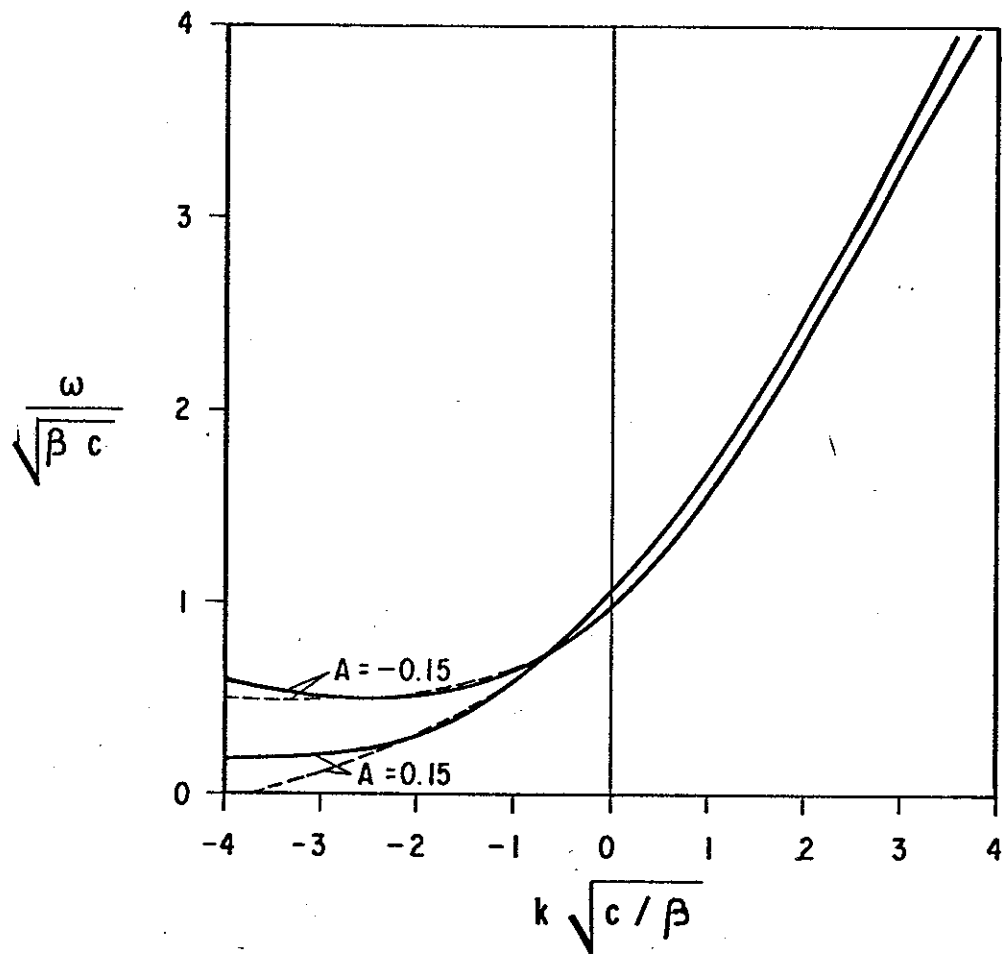


Figura 7. Relación de dispersión para las ondas de Yanai para un valor particular de $B=0.15$. Las líneas llenas resultan de la ecuación (52), mientras que las quebradas de la ecuación (83).

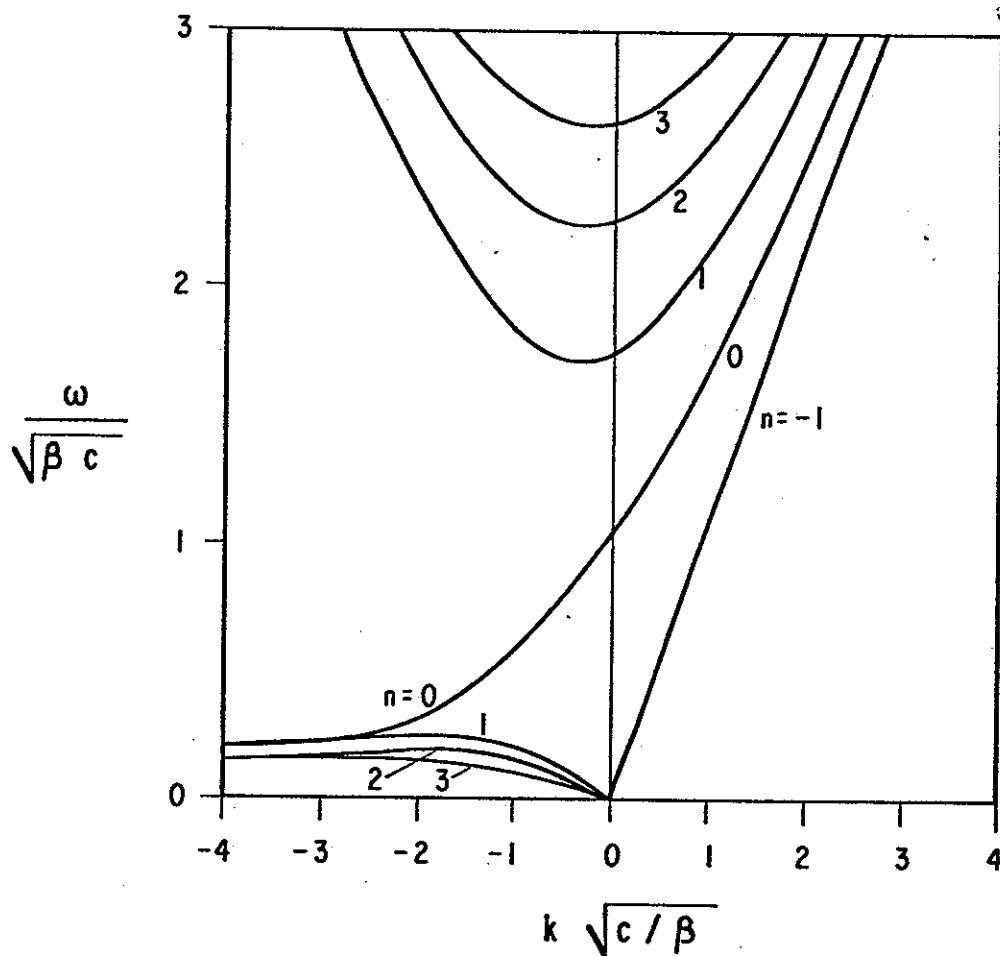


Figura B. Relación de dispersión modificada por una corriente al Este ($A=B=0.15$). El número cuántico meridional n mostrado corresponde a las ondas ecuatoriales sin la presencia de corrientes.

de Rossby se encuentra también una disminución de su frecuencia máxima.

En la figura 9 se muestra la relación de dispersión para $B=0.15$ & $A=-0.15$. El efecto en las ondas de Rossby es más notable que para el caso de la figura 8.

V.4. - Campos de velocidades y presión

En las figuras 10, 11 y 12 se presentan ejemplos de amplitudes U_1 , V_1 y H_1 (ver ecuaciones (53), (54) y (55)) para las ondas de Rossby ($n=2$), Yanai, inercio-gravitatoria ($n=2$) y Kelvin. Se resalta el efecto del campo ω_0 , determinado por los parámetros A & B , comparando con la estructura correspondiente a la ausencia de corrientes ($A=0$). Las amplitudes U_1 y H_1 son imaginarias y V_1 es real, es decir, están fuera de fase.

Los campos U_1 & H_1 correspondientes al segundo modo de Rossby (Fig. 10a) presentan un ligero aumento de sus latitudes de inflexión (lugar donde la estructura pasa de ser oscilatoria a ser exponencial). H_1 aumenta donde el corte de $u_0(y)$ es máximo y V_1 lo hace en la zona donde está la corriente. En la figura 10b, para el caso de una corriente al Oeste, los campos u_1 y h_1 presentan un aumento en la zona de máximo corte y curvatura de la corriente respectivamente. En V_1 , una ligera atenuación en el ecuador es evidente y un apreciable aumento ocurre en la zona de corte. Este resultado

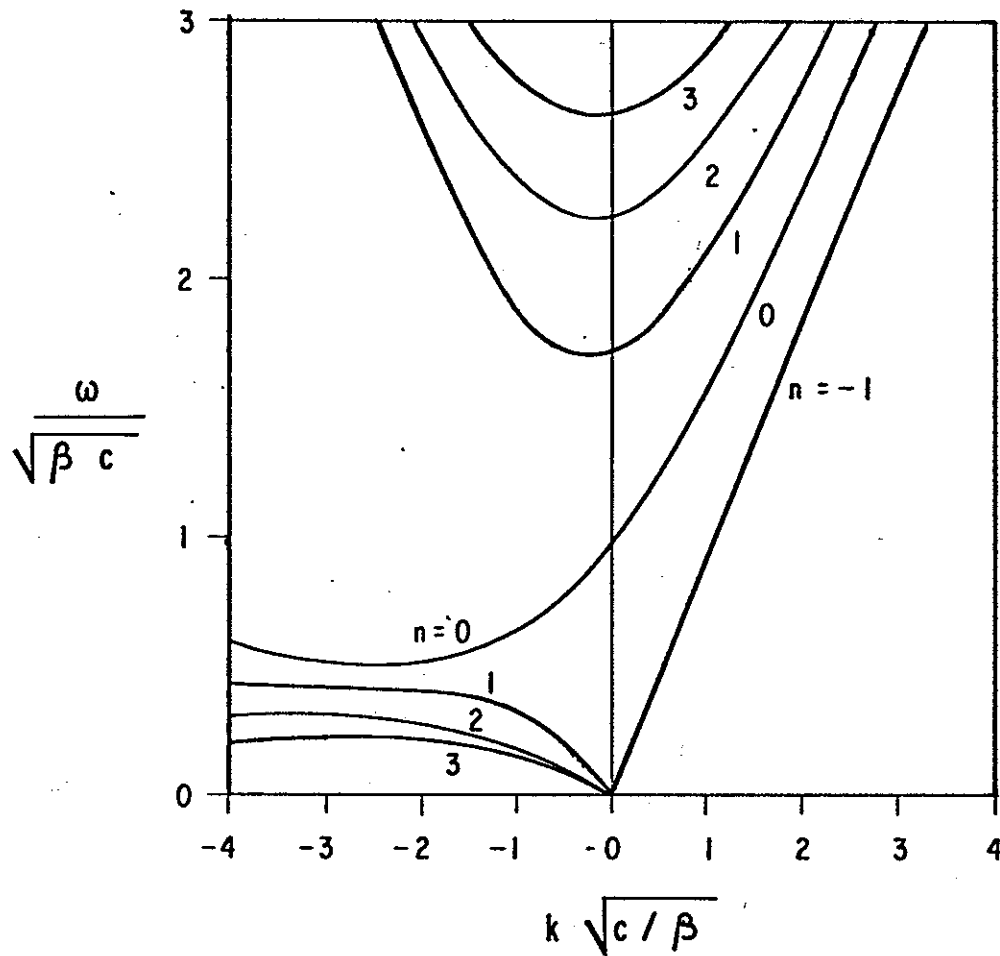


Figura 9. Relación de dispersión modificada por una corriente al Oeste ($B=0.15$ & $A=-0.15$).

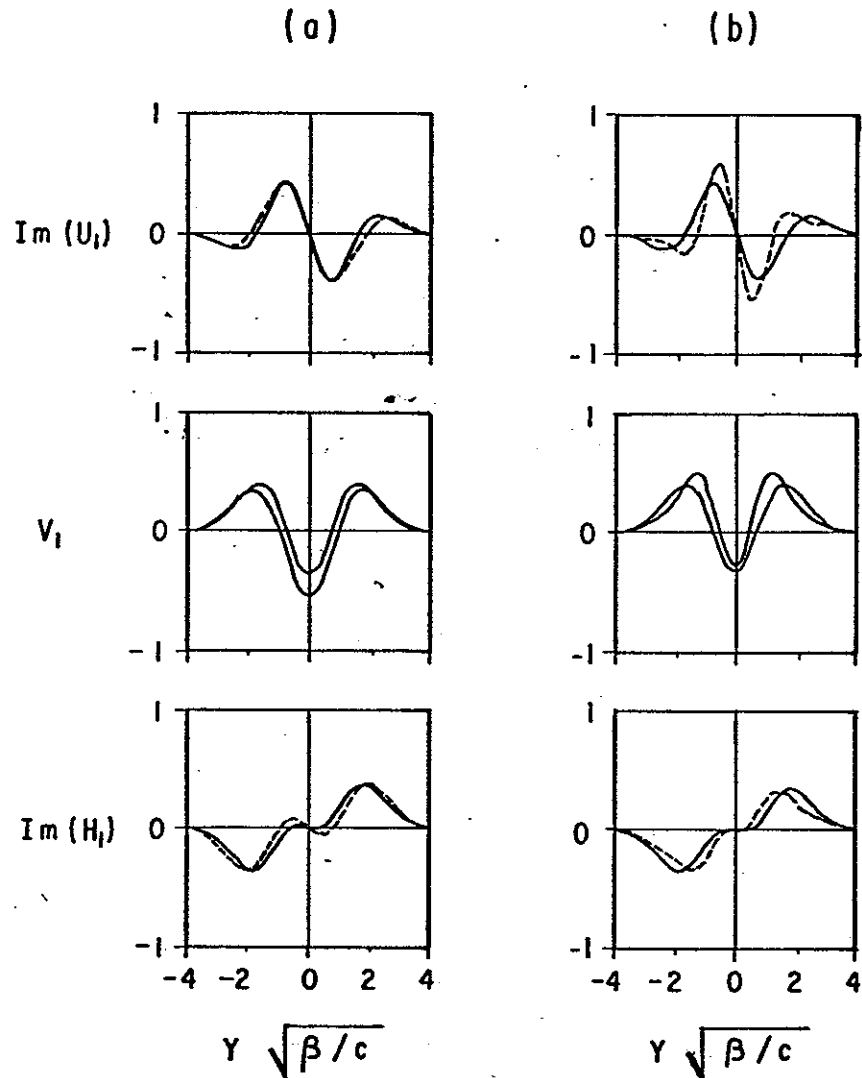


Figura 10. Amplitudes U_i , V_i y H_i , en función de la latitud para el segundo modo de Rossby bajo el efecto de una corriente determinada por: a) $A=B=0.15$ y, b) $A=-0.15$ & $B=0.15$. Estas soluciones corresponden a un autovalor $w/\sqrt{\beta c} = 0.21$ y 0.28 respectivamente, para $k=-1.9\sqrt{\beta/c}$. La línea gruesa es la estructura correspondiente en la ausencia de corrientes.

es exactamente el contrario al caso de $A=0.15$ (Fig. 10a).

En la figura 11a se presentan las amplitudes correspondientes a la onda de Yanai para $A=B=0.15$. La modificación, respecto al caso $A=0$, es mínima para V_1 y H_1 , mientras que U_1 se intensifica en la zona de corte de u_0 y disminuye más allá de esta zona. También el caso contrario se presenta para una corriente al Oeste (Fig. 11b)

La modificación del segundo modo inercio-gravitatorio (Fig. 12a) es despreciable, lo que también se observa en el diagrama de dispersión (Fig. 8); esto es debido a que la velocidad de fase de estas ondas es mayor que el valor efectivo de $u_0(y)$.

En la figura 12b se presenta el mismo tipo de resultados para la onda de Kelvin. La única modificación importante es que aparece un campo V_1 , ausente en la solución para $\psi_0=0$.

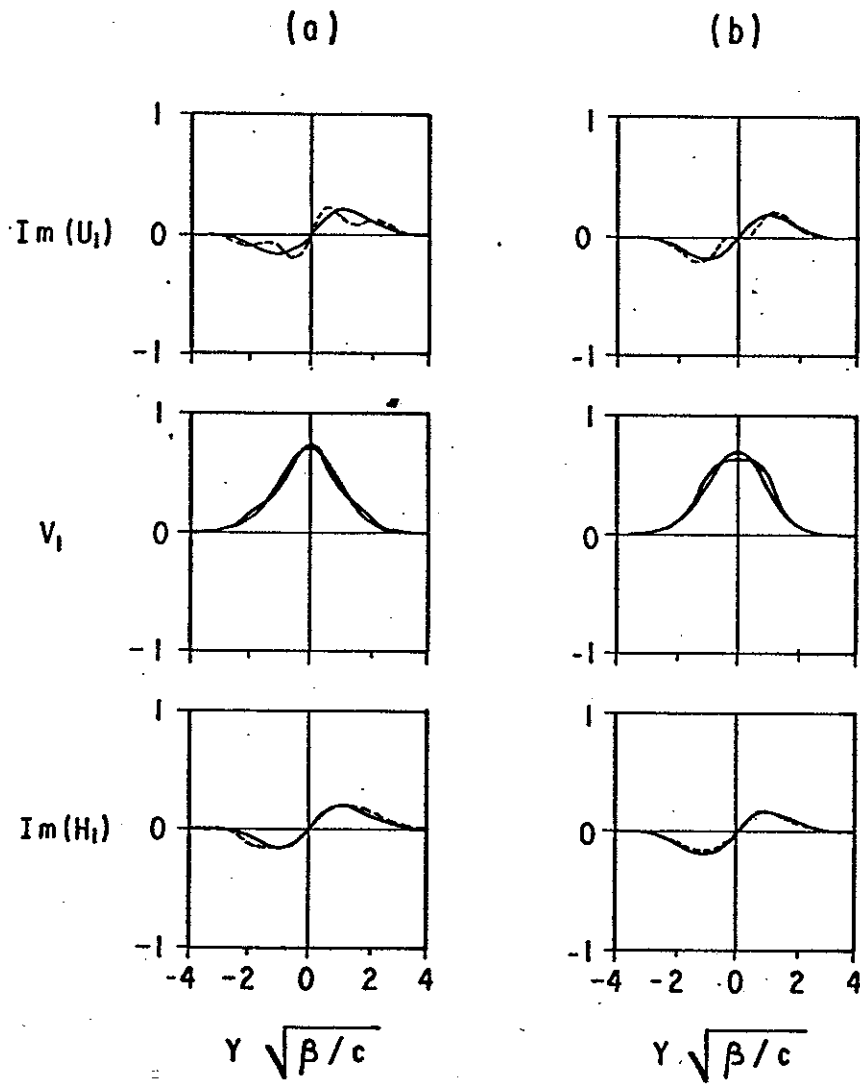


Figura 11. Igual que figura 10 para la onda de Yanai con autovalor $\omega/\sqrt{\beta c}=0.33$ y 0.56 respectivamente.

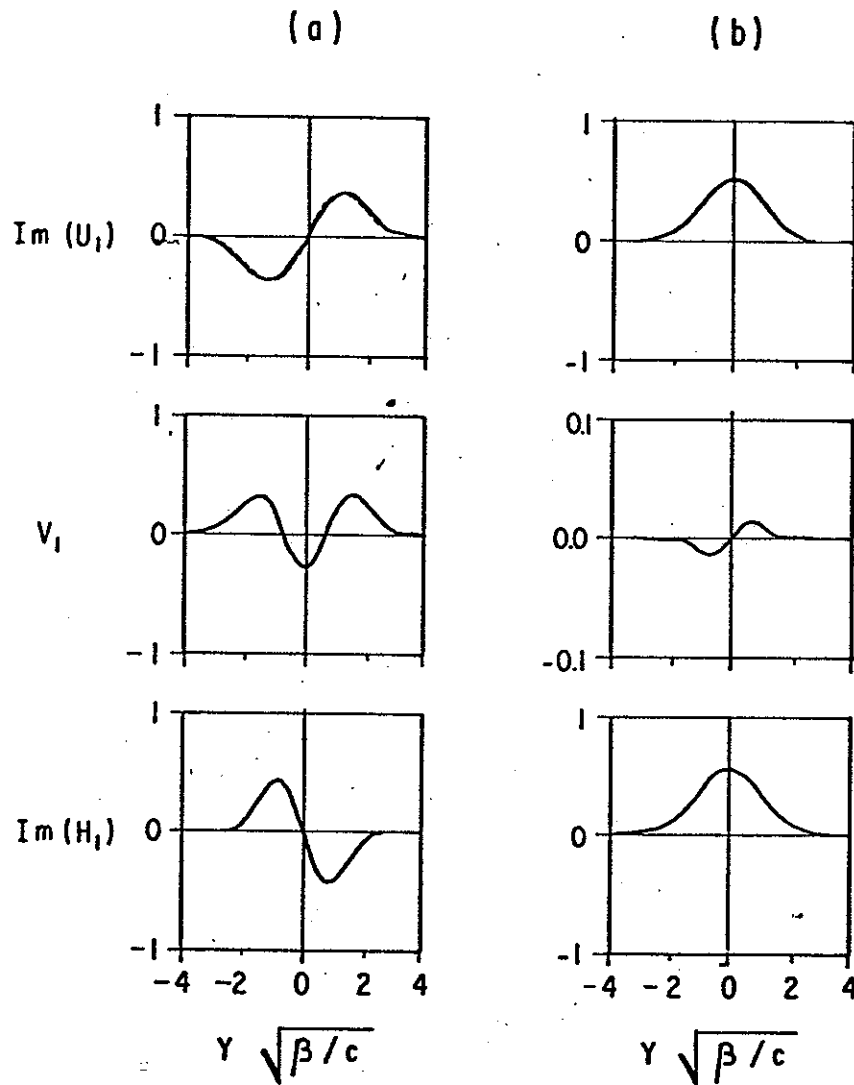


Figura 12. Igual que figura 10 para una corriente al Este determinada por $A=B=0.15$ para: a) segundo modo inercio-gravitatorio con $\omega/\sqrt{\beta c}=2.838$ y, b) onda de Kelvin con $\omega/\sqrt{\beta c}=-1.94$.

VI. - SOLUCIONES INESTABLES

En este capítulo se muestra la relación de dispersión de las soluciones inestables, la razón de crecimiento de las ondas inestables en función de los parámetros de la corriente (A & B) y los campos dinámicos correspondientes a estas soluciones.

VI.1. - Relación de dispersión

En la figura 13 se muestra la relación de dispersión para $A=-0.6$ y $B=0.15$, en la cuál, resalta la presencia de autovalores complejos los que evidencian la inestabilidad del campo ψ . Estos autovalores se encuentran en la unión de las curvas que, permitiendo a A llegar a cero, corresponden a las ondas de Yanai y segundo modo de Rossby. Sin embargo, si en la matriz (52) se incluyen sólo estos dos estados no se encuentran soluciones inestables (Fig. 14); es decir, para que se tengan soluciones inestables se necesita la interacción de muchas ondas con el campo ψ .

Miyata (1981) asevera que la inestabilidad ecuatorial se debe a la interacción entre la onda de Yanai y el primer modo de Rossby, lo cuál, de nuestros resultados, vemos que es con el segundo. Esto se debe a que los modos pares están desacoplados de los impares, razón por la cuál no podemos tener soluciones inestables como resultado de la interacción

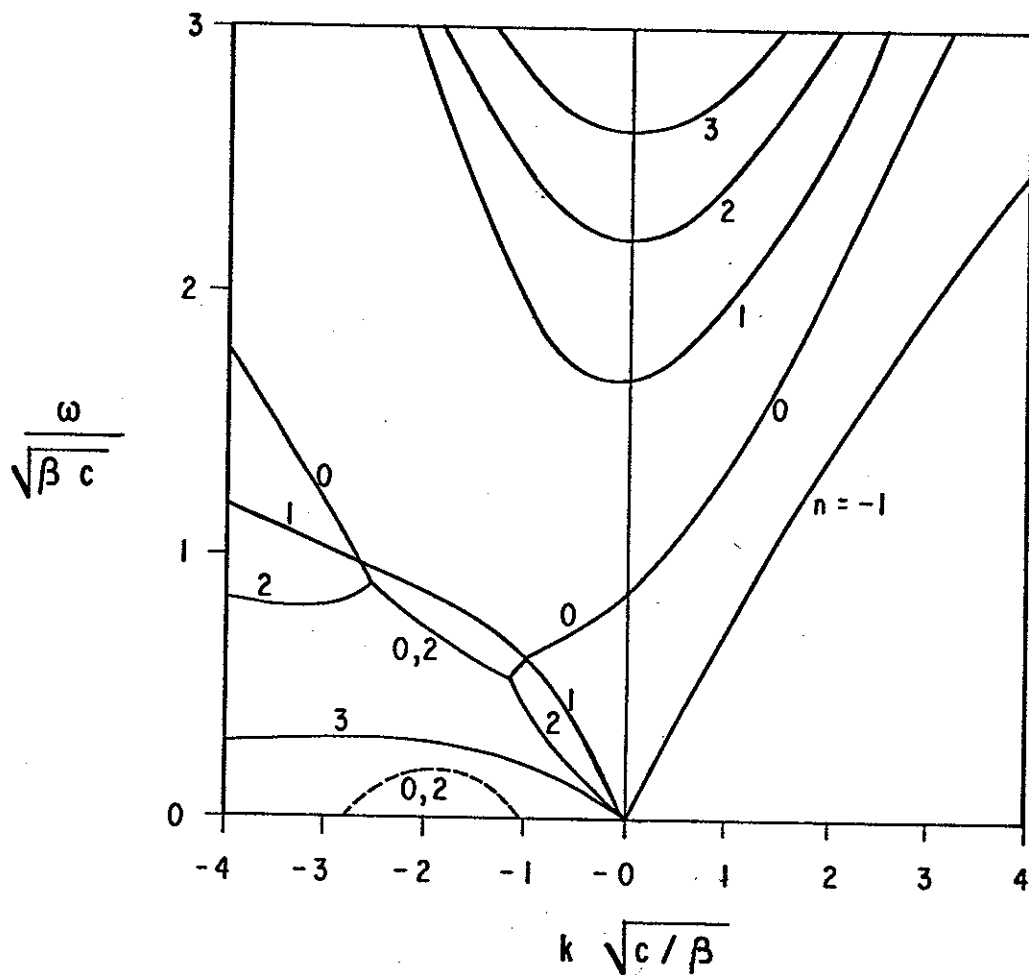


Figura 13. Relación de dispersión para $A=-0.6$ & $B=0.15$. La línea quebrada representa la parte imaginaria del autovalor. El número cuántico meridional corresponde a las ondas ecuatoriales sin la presencia de corrientes.

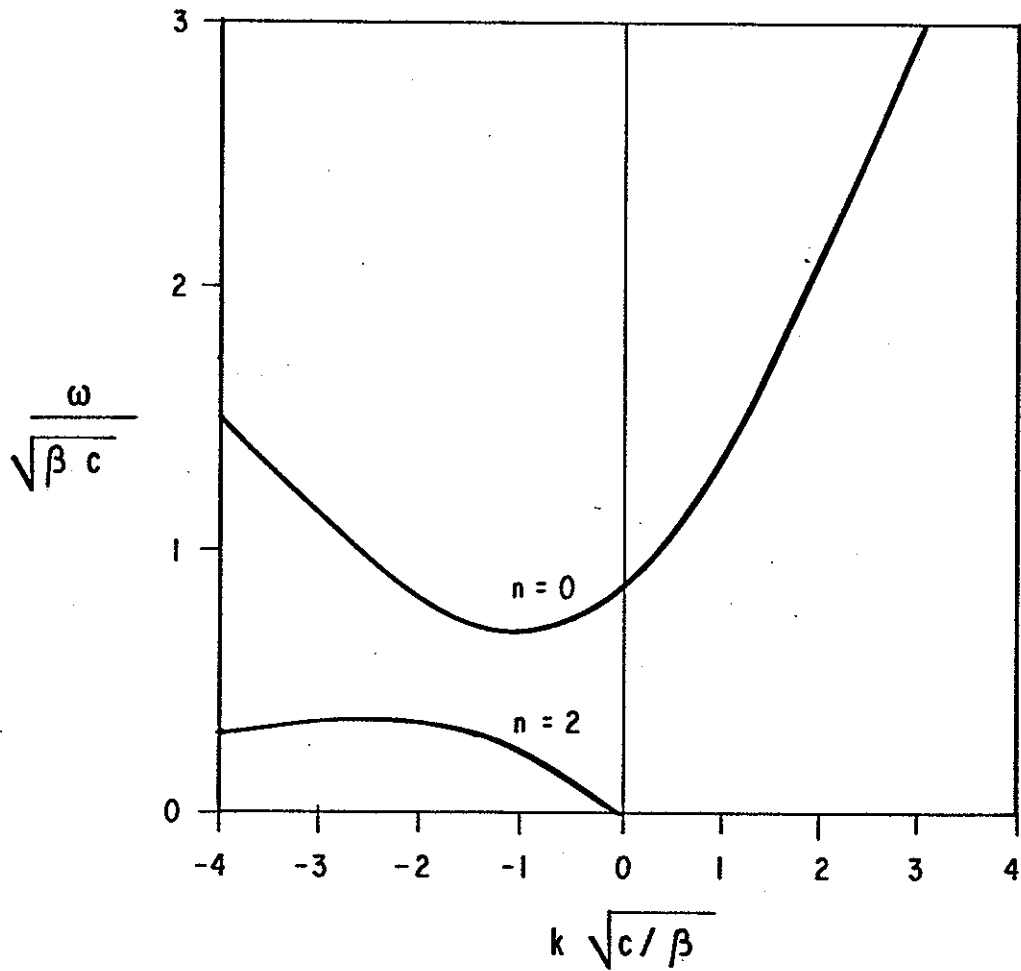


Figura 14. Soluciones obtenidas al incluir sólo una onda de Yanai y el segundo modo de Rossby en la matriz a diagonalizar. Los parámetros A & B son los de la figura 13; sin embargo, los autovalores son reales.

de modos de distinta paridad con el campo ω .

En la figura 8 se observa como, en el diagrama de dispersión, la onda de Yanai se junta con el primer modo de Rossby sin producir ningun efecto.

En la relación de dispersión de la figura 13, además de la presencia de soluciones inestables, se observa el comportamiento dispersivo de la onda de Kelvin ya mencionado en la sección 5.2.

Otro rasgo importante, que aparece por vez primera es, una modificación notable de las ondas inercio-gravitatorias. Esto es, aparte de contribuir en la interacción por la cuál aparecen soluciones inestables, ellas por si mismas presentan un pequeño corrimiento Doppler (Fig. 13), es decir, las frecuencias que tendrían con el campo $\omega=0$, se han desplazado a números de onda mayores. Como se vé, las ondas inercio-gravitatorias necesitan corrientes fuertes para que su modificación sea notable debido a la alta velocidad de fase que tienen.

VI.2. - Razón de crecimiento

En la figura 15 se muestra el máximo de $\text{Im}(\omega)$ (ver figura 13) para valores de A entre -2 y 2, para dos valores de B (0.15 y 0.5). La razón de crecimiento es nula para $-0.2 \leq A \leq 0.35$ para el primer valor de B y para el segundo $-0.5 \leq A \leq 1.3$, lo que corresponde a la zona de estabilidad

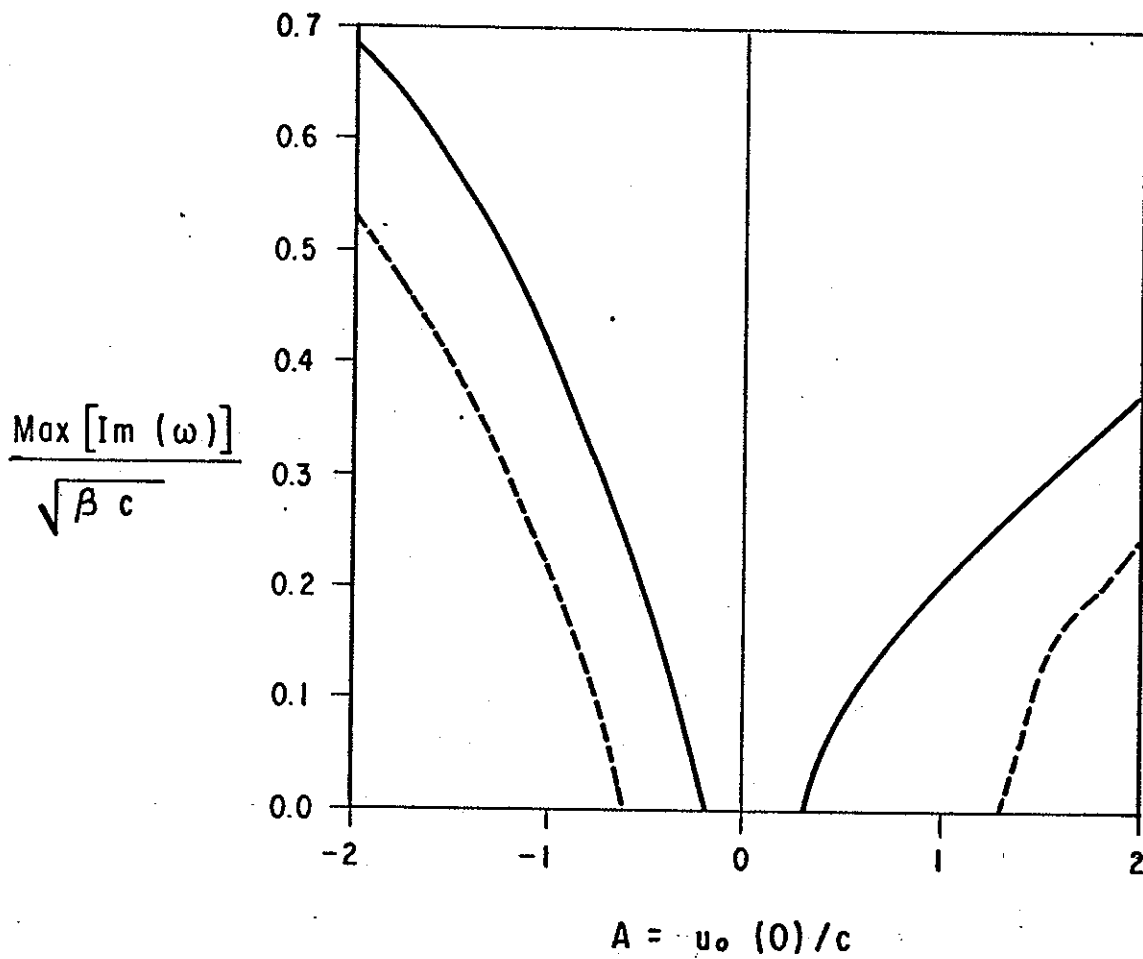


Figura 15. Razón de crecimiento de la inestabilidad ecuatorial para $B=0.15$ (línea llena) y 0.5 (quebrada) en función de la magnitud de la corriente (A).

(Fig. 4).

Las corrientes al Este son más estables que las hacia el Oeste en el sentido de que: a) el umbral de $|u(0)|$ para que haya inestabilidad es mayor para las primeras, y b) la máxima razón de crecimiento es mayor para $A < 0$ que para $A > 0$ (e igual $|A|$).

Philander (1976) encuentra los mismos resultados aquí señalados.

Un hecho importante de remarcar, que se desprende de la condición necesaria de estabilidad (64), es el efecto estabilizador de β . En la figura 16 se muestra la razón de decrecimiento en función de B (el parámetro B es directamente proporcional a β) para diferentes valores de A . Este efecto ya ha sido encontrado (Charney, 1947; Pedlosky, 1964) en latitudes medias, donde, básicamente, la condición (64) es la que controla la estabilidad. El efecto estabilizador de β ha sido también visto en modelos numéricos (Kuo, 1978).

VI.3. - Campos de velocidades y presión

En la figura 17 se presentan las amplitudes U_1 , V_1 y H_1 correspondientes a la solución inestable con mayor razón de crecimiento. En este caso, se escogió que $V_1(0)$ fuera real. Se observa, respecto del caso $\gamma_0 = 0$, una fuerte intensificación en la zona de la corriente donde es mayor el corte de $u_0(y)$. Este aumento en módulo es más marcado en U_1 . Otro hecho

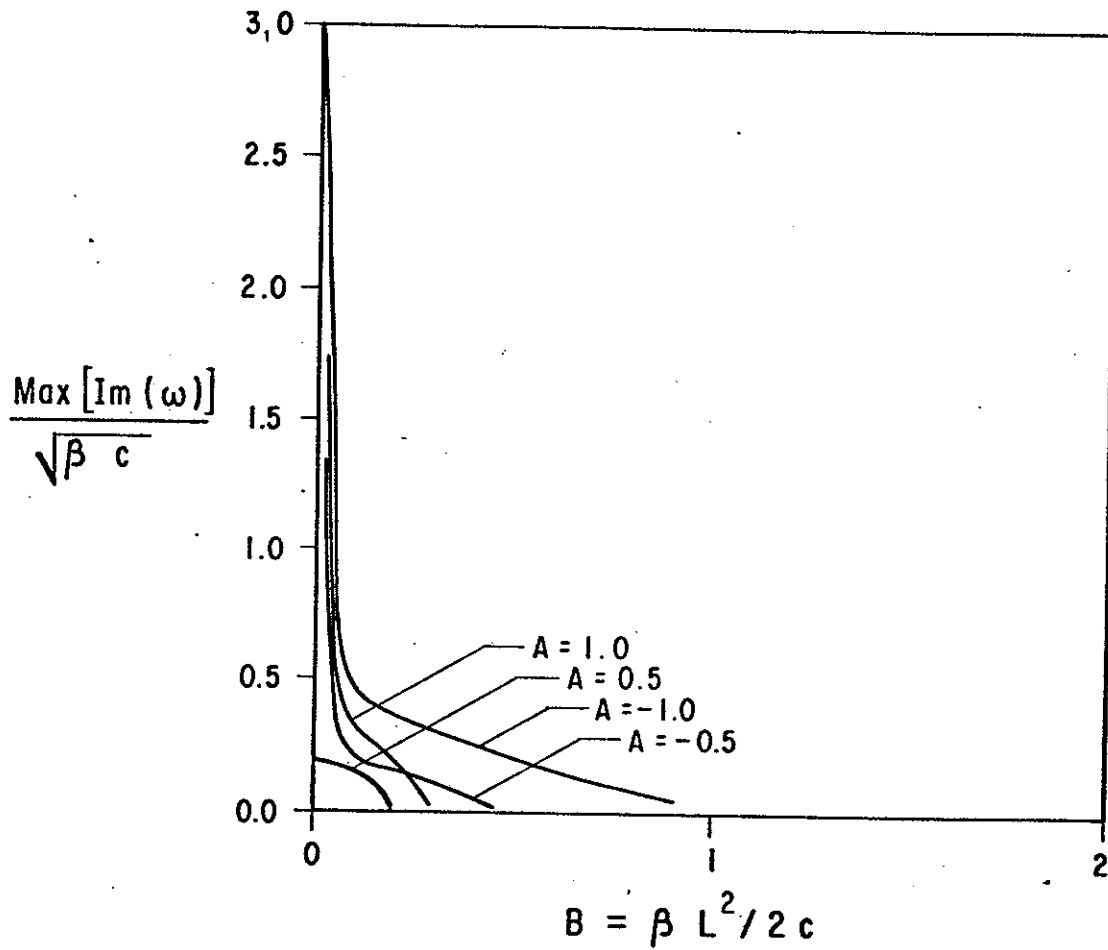


Figura 16. Efecto estabilizador de β y del ancho de la corriente (por medio del parámetro B) para diferentes magnitudes de corrientes (A) al Este y Oeste.

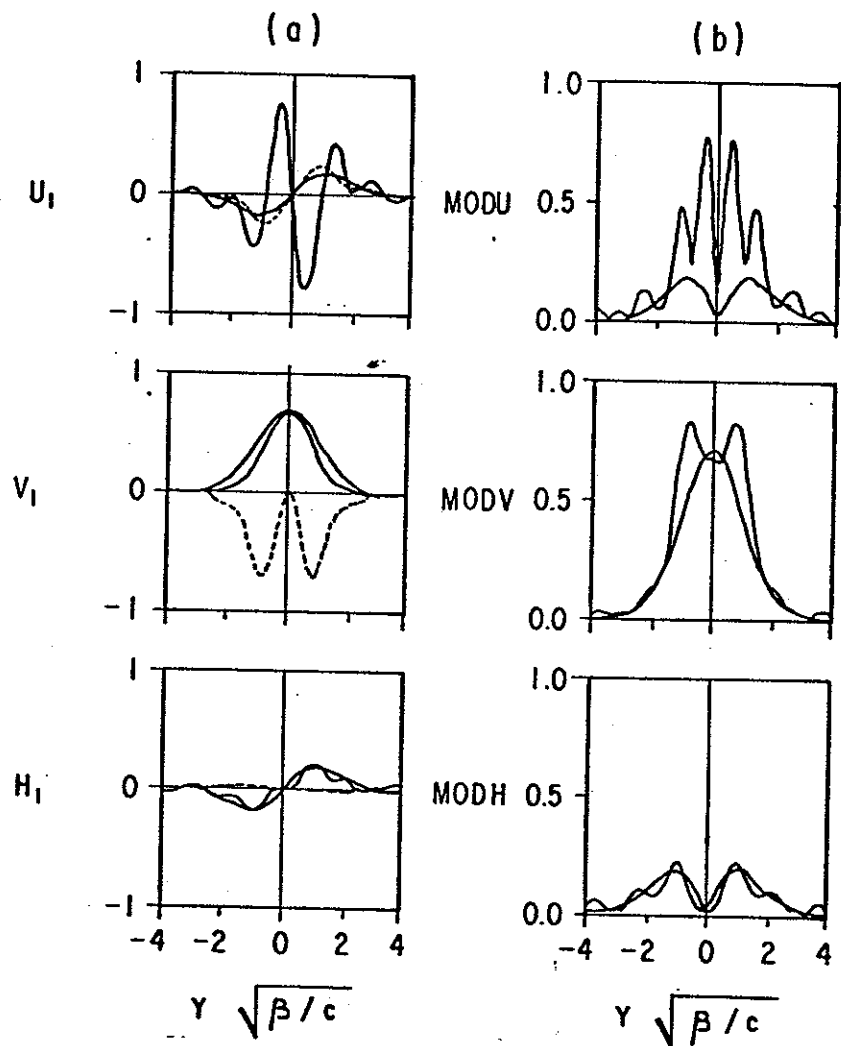


Figura 17. Amplitudes y módulos de los campos dinámicos u , v , y h , de la solución inestable de la figura 13 para el valor máximo de $\text{Im}(\omega)$, i. e., $\omega/\sqrt{\beta c} = (0.693 + 0.187i)$ para $k\sqrt{c/\beta} = -1.9$. La línea gruesa corresponde a la onda de Yanai cuando no hay corrientes para el mismo valor de $|k|$.

interesante de destacar es, cuando $\psi_0 = 0$ (líneas sólidas) U , y H , son imaginarios puros y, en este caso, vemos que la parte imaginaria de U , y H , (línea punteada) presenta aproximadamente la misma estructura. La parte real (que sería cero si $\psi_0 = 0$) aparece como producto de la inestabilidad oscilando respecto a la parte imaginaria. Para V_1 , que es real cuando no hay corriente, la parte real tiene la misma estructura. Aparece, también, una parte imaginaria, fundamentalmente en la zona de máxima curvatura de la corriente (U_0'').

VI.4. - Balance energético de las ondas inestables

Un factor muy importante para el entendimiento de la física que tiene la interacción de ondas con el campo original ψ_0 , resulta del análisis del balance energético. El balance energético involucrado en los procesos dinámicos nos permite evaluar el sentido del flujo de energía entre los diferentes campos.

De la ecuación (13) tenemos que la energía cinética es

$$E_K = [(1+h)\underline{V}^2]/2 \quad (84)$$

y la energía potencial

$$E_P = c^2 h^2 / 2 \quad (85)$$

De las ecuaciones (33), (34) y (35) separando cada tipo

de energía, resulta

$$\overline{EP} = c^2 (\overline{h_0^2} + 2h_0 \overline{h_2}) / 2 + c^2 \overline{h_1^2} / 2 + O(\epsilon^4) \quad (86)$$

y

$$\begin{aligned} \overline{EK} = & [(1+h_0 + \overline{h_2}) \overline{V_0^2} + 2(1+h_0) \overline{V_0} \cdot \overline{V_2}] / 2 + [(1+h_0) \overline{V_1^2} \\ & + 2\overline{h_1} \overline{V_1} \cdot \overline{V_0}] / 2 + O(\epsilon^4) , \end{aligned} \quad (87)$$

donde la barra indica promedio en x.

Las variaciones de energía cinética media (respecto de la del campo ψ_0) debido al "campo medio" y a las "perturbaciones" son

$$\overline{EKM} = (1+h_0) \overline{u_0 u_2} + \overline{u_0^2 h_2} / 2 , \quad (88)$$

$$\overline{EKP} = (1+h_0) \overline{V_1^2} / 2 + \overline{u_0 h_1 u_1} . \quad (89)$$

Las variaciones de la energía potencial, a su vez, son

$$\overline{EPM} = c^2 \overline{h_0 h_2} + c^2 \overline{h_0^2} / 2 , \quad (90)$$

$$\overline{EPP} = c^2 \overline{h_1^2} / 2 . \quad (91)$$

Utilizando el sistema de ecuaciones (17), (18), (19) y (21), integrando en x y haciendo uso de las condiciones de frontera (ver apéndice D) tenemos que la conservación de cada tipo de energía para cada campo está dada por (Fig. 18)

$$\partial_t \overline{EPM} + f u_0 (1+h_0) \overline{v_2} + f u_0 \overline{h_1 v_1} = 0 , \quad (92)$$

$$\partial_t \overline{EPP} - f u_0 \overline{h_1 v_1} - c^2 (1+h_0) \overline{V_1 \cdot \nabla h_1} + f u_0 \overline{h_1 v_1} = 0 , \quad (93)$$

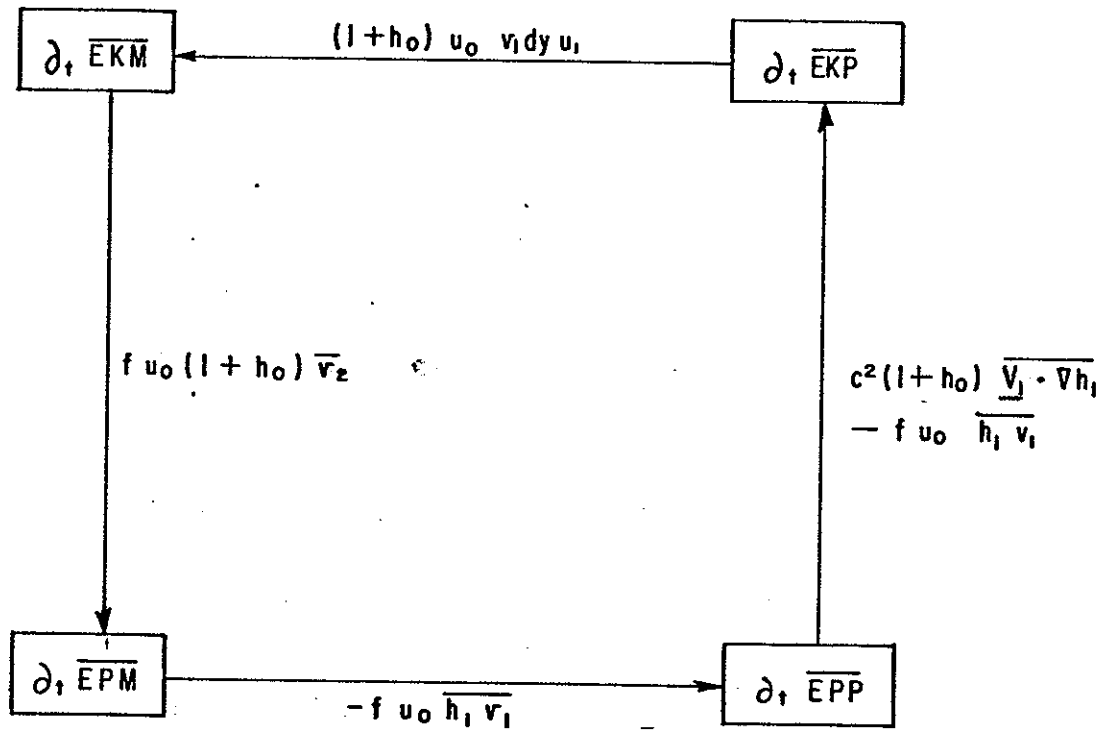


Figura 18. Balance energético entre el "campo medio" y las "perturbaciones".

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{EK} + u_0 u_0' (1+h_0) \overline{v_z} + (1+h_0) u_0 \overline{v_1 \partial_y u_1} \\ - f u_0 (1+h_0) \overline{v_z} = 0, \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{EK} + u_0 u_0' h_1 v_1 + c^2 (1+h_0) \overline{v_1 \cdot \nabla h_1} \\ - f u_0 \overline{h_1 v_1} - (1+h_0) u_0 \overline{v_1 \partial_y u_1} = 0, \end{aligned} \quad (95)$$

que básicamente son las desarrolladas por Orlandi (1969; 1973) y Philander (1976).

El flujo de energía cinética de las perturbaciones hacia el campo medio está dado por la integral de

$$TI = (1+h_0) u_0 \overline{v_1 \partial_y u_1} \quad (96)$$

Este puede ser escrito como

$$- [(1+h_0) u_0' - f u_0^2 / c^2] \overline{u_1 v_1} - (1+h_0) u_0 \overline{u_1 \partial_y v_1}, \quad (97)$$

donde vemos que el primer término del flujo de energía entre los dos campos es a través de los esfuerzos de Reynolds.

En la figura 19 se presenta el término de intercambio (TI) entre las energías cinéticas dado por (96) para la solución inestable correspondiente a la figura 17. En esta figura se observa que justamente donde $q_0' < 0$ el término de intercambio TI es positivo y viceversa, es decir, la fuente de energía de las perturbaciones es donde $q_0' < 0$.

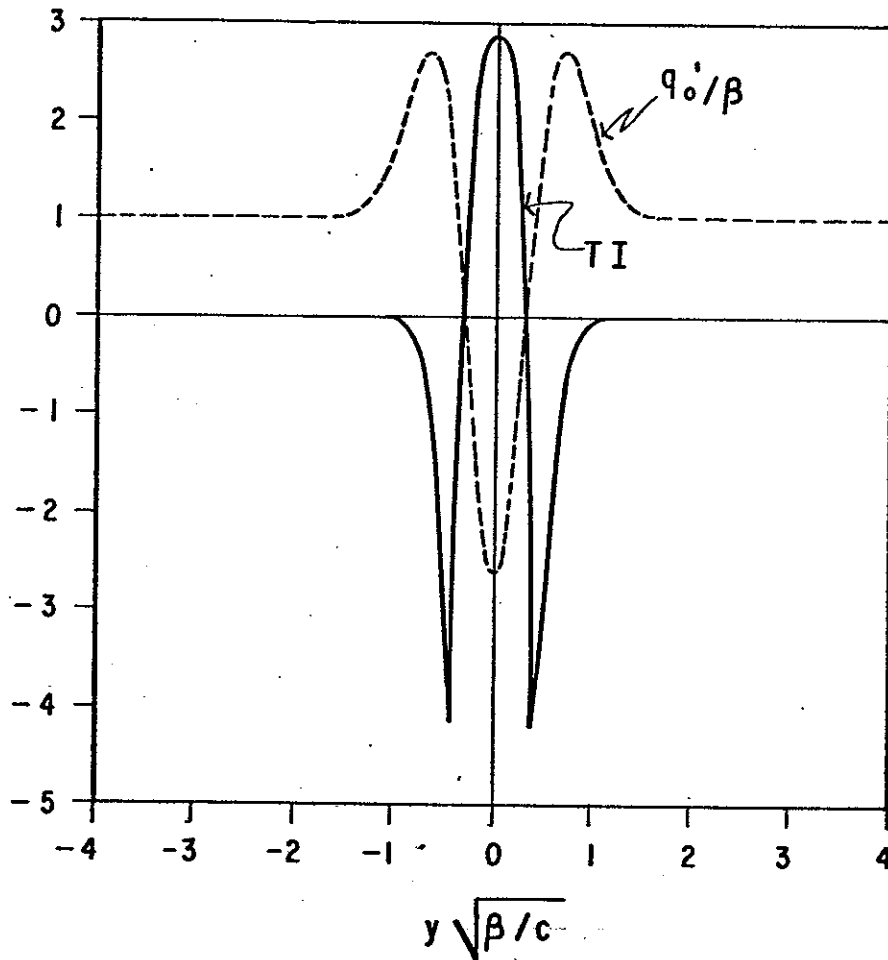


Figura 19. Término de intercambio TI (línea gruesa) entre las energías cinéticas del campo medio y de las perturbaciones. La línea quebrada muestra los valores de q_0'/β . Los campos u , y v , corresponden a los de la figura 17.

VII. - CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos en esta tesis se puede resumir lo siguiente.

1. - Para las soluciones estables de la interacción ondas-campo $\%$ tenemos que:

- a) Las ondas de Rossby están sujetas a un efecto Doppler mucho mayor que el de las ondas inercio-gravitatorias.
- b) Las corrientes al Oeste producen un efecto Doppler más fuerte, en las ondas de Rossby que aquellas al Este.
- c) Para el corrimiento de la frecuencia de la onda de Kelvin aparece un término de corrección al valor de la constante c debido al ancho de la corriente [ver ecuación (75)]. Este término es más importante para corrientes más anchas; su efecto es despreciable si la corriente es mucho más angosta que una onda de Kelvin. Para corrientes fuertes se encuentra que la onda de Kelvin es dispersiva (Fig. 6), es decir, las velocidades de fase y de grupo dependen de la longitud de onda.

2. - De las soluciones inestables se encontró que:

- a) Las corrientes al Oeste producen una razón de crecimiento

mayor que las corrientes al Este con igual magnitud, es decir, son más inestables.

b) Para corrientes al Oeste, los modos que se excitan corresponden, cuando el campo $\psi_0 = 0$, a las ondas de Yanai y segundo modo de Rossby (Fig. 16). Estos modos, por ser pares, producen meandros en la corriente (que, de acuerdo a Philander (1976) son las más inestables).

c) De las amplitudes de los campos dinámicos (Fig. 17) tenemos que donde éstas aumentan es en la zona de máximo corte y curvatura, por lo que [y de acuerdo a Kuo (1978)], se puede concluir que la fuente principal de inestabilidad (barotrópica) es el corte horizontal, el cuál produce cambios de signo en q_0' .

De los dos tipos de resultados presentados (estables e inestables), se tiene que las corrientes al Oeste tienen mayor efecto sobre las ondas ecuatoriales respecto del producido por corrientes al Este. Es decir, producen: 1) un efecto Doppler mayor, 2) inestabilidades en las ondas para corrientes que al Este son estables, 3) una razón de crecimiento mayor para magnitudes iguales que corrientes inestables al Este.

En esta tesis queda una pregunta muy interesante por resolver. ¿Representa la condición suficiente de estabilidad encontrada por Ripa (1981a) una condición necesaria de inestabilidad? De las razones de crecimiento mostradas en la

figura 15 parecería que la respuesta es afirmativa, sin embargo, estos son solo un par de casos, lo que no prueba aun que efectivamente sean una condición necesaria de inestabilidad.

LITERATURA CITADA

- Busbridge, I.W. 1948. Some integrals involving Hermite polynomials. The J. of the London Math. Soc. 23:135-141.
- Charney, J.G. 1947. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J. Meteor. 4:135-163.
- Charney, J.G. y M. Stern, 1962. On the instability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. J. Atmosph. Sci. 19:159-172.
- Eady, E.T. 1949. Long waves and cyclone waves. Tellus. 1:33-52.
- Kasahara, A. 1980. Effect of zonal flows on the free oscillations of a barotropic atmosphere. J. Atmosph. Sci., 37:917-929.
- Kuo, H.L. 1949. Dynamic instability of two-dimensional flow in a barotropic atmosphere. J. Meteor. 6:105-122.
- Kuo, H.L. 1952. Three dimensional disturbances in a baroclinic zonal current. J. Meteor. 9:260-278.
- Kuo, H.L. 1978. A two-layer model study of the combined barotropic and baroclinic instability in the tropics. J. Atmos. Sci. 35:1840-1860.
- Matsuno, T. 1966. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. J. Meteor. Soc. Japan. 44:25-43.
- McPhaden, M.J. y R.A. Knox 1979. Equatorial Kelvin and Inertio-Gravity waves in zonal shear flow. J. Phys. Ocean. 9:263-277.

- Miller, J. C. P. 1966. Parabolic cylinder functions, C.19. En "Handbook of Mathematical Functions (M. Abramowitz & I. A. Stegun, eds.). Dover Publications, Inc., New York. 1046 pp.
- Miyata, M. 1981. A criterion for barotropic instability at the equator. Tropical Ocean-Atmosphere Newsletter., pp. 12, (no publicado).
- Orlansky, I. 1969. The influence of bottom topography on the stability of jets in a baroclinic fluid. J. Atmos. Sci. 26:1216-1232.
- Orlansky, I. y M.D. Cox 1973. Baroclinic instability in ocean currents. Geop. Fluid Dyn. 4:297-332.
- Pedlosky, J. 1964. The stability of currents in the atmosphere and the oceans. Part I. J. Atmosph. Sci. 27:201-219.
- Pedlosky, J. 1979. Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Inc., New York. 626 pp.
- Philander, S.G.H. 1976. Instabilities of zonal equatorial currents. J. Geophys. Res. 81:3725-3735.
- Philander, S.G.H. 1978a. Instabilities of zonal equatorial currents, 2. J. Geophys. Res. 83:3679-3682.
- Philander, S.G.H. 1978b. Forced Oceanic Waves. Rev. Geophys. Space Phys. 15:15-46.
- Philander, S.G.H. 1979a. Instabilities of equatorial currents. En "Reviews Papers of Equatorial Oceanography Fine Workshop Proceeding": Ed. NOVA/N. Y. I. T., Univ. Press. 475 pp.

- Philander, S.G.H. 1979b. Equatorial waves in the presence of equatorial undercurrent. *J. Phys. Ocean.* 9:254-262.
- Philander, S.G.H. 1979c. Variability of tropical oceans. *Dyn. Atmosph. Oceans.* 3:191-208.
- Philander, S.G.H. and R.C. Pacanowski 1981. Response of equatorial oceans to periodic forcing. *J. Geophys. Res.* 86:1903-1916.
- Phillips, N.A. 1954. Energy transformations in meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level quasi-geostrophic model. *Tellus.* 6:273-286.
- Ripa, 1981a. On the stability of equatorial currents (En preparación).
- Ripa, 1981b. Nonlinear wave-wave interactions on the equatorial beta-plane. Part I, Conservation laws and the Kelvin modes problem (enviado a *J. of Phys. Ocean.*).

APENDICE A. Derivación de las ecuaciones del modelo

Integrando la relación $dP = -\rho g dz$ (que da el balance vertical de momento en la aproximación hidrostática) desde $z = "b"$ hasta $z = "a"$ (Fig. 1) resulta

$$P_1 - P_3 = P_2 + g[\rho_1 (b - \bar{H} - z_1) + \rho_2 (\bar{H} + z_1 - z_2) + \rho_3 (z_2 - a)] , \quad (A.1)$$

donde P_i y ρ_i ($i=1,2,3$) son la presión y densidad de cada capa, y z_1 y z_2 son la elevación de las dos interfaces.

Si se exige que las capas superior e inferior no tengan movimiento, es decir, que los gradientes horizontales de P_1 y P_3 sean nulos, resulta

$$z_1 (\rho_2 - \rho_1) + z_2 (\rho_3 - \rho_2) = 0 , \quad (A.2)$$

ya que z_1 y z_2 son funciones de X .

La altura de la capa intermedia (Fig. 1) puede ser expresada como

$$H = \bar{H} + z_1 - z_2 = \bar{H}(1+h) . \quad (A.3)$$

De (A.2) tenemos que

$$z_1 = -[(\rho_3 - \rho_2) / (\rho_2 - \rho_1)] z_2 \quad (A.4)$$

y con (A.3) se obtiene

$$z_1 = [(\rho_3 - \rho_2) / (\rho_3 - \rho_1)] \bar{H}h, \quad z_2 = -[(\rho_2 - \rho_1) / (\rho_3 - \rho_1)] \bar{H}h. \quad (\text{A. 5})$$

Las ecuaciones de movimiento, despreciando fuerzas de fricción, para la capa intermedia son

$$\rho_2 (\partial_t + \underline{M} \cdot \text{grad}) \underline{M} + \text{grad } P_2 + \rho_2 f \underline{\hat{x}} \underline{M} = 0, \quad (\text{A. 6})$$

$$\text{div } \underline{M} = 0, \quad (\text{A. 7})$$

donde $\underline{M} = (u, v, w)$ es el vector velocidad, $\text{grad} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, div es la divergencia y

$$P_2 = P_1 + g [\rho_1 (b - \bar{H} - z_1) + \rho_2 (\bar{H} + z_1 - z)] . \quad (\text{A. 8})$$

Integrando (A. 7) en toda la capa intermedia, es decir, haciendo

$$\int_{z_2}^{\bar{H}+z_1} \text{div } \underline{M} = (\partial_x u + \partial_y v) (\bar{H} + z_1 - z_2) + w \Big|_{z_2}^{\bar{H}+z_1} = 0 \quad (\text{A. 9})$$

y utilizando condiciones de contorno en las dos interfaces,

$$D_t z_1 = w \Big|_{\bar{H}+z_1}, \quad D_t z_2 = w \Big|_{z_2}, \quad (\text{A. 10})$$

resulta

$$(\partial_x u + \partial_y v) (\bar{H} + z_1 - z_2) + D_t (z_1 - z_2) = 0 .$$

Utilizando (A. 3) es

$$(\partial_x u + \partial_y v) \bar{H}(1+h) + D_z \bar{H} h = 0 ,$$

la que puede reescribirse como la ecuación (2).

Substituyendo (A.8) en la componente x de (A.6) y con (A.5) se obtiene

$$\partial_z u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u - f v + c^2 h_x = 0 \quad (\text{A.11})$$

(donde $c^2 = g \bar{H} (\rho_3 - \rho_2) (\rho_2 - \rho_1) / [\rho_2 (\rho_3 - \rho_1)]$) y sumando u(A.7) resulta

$$\partial_z u + \partial_x u^2 + \partial_y (uv) + \partial_z (uw) - f v + c^2 h_x = 0 \quad (\text{A.12})$$

Efectuando ahora la misma integral que para la ecuación de la divergencia, se llega a

$$[\partial_z u + \partial_x u^2 + \partial_y (uv) - f v + c^2 h_x] \bar{H}(1+h) + (uw) \Big|_{z_2}^{\bar{H}+3_1} = 0 , \quad (\text{A.13})$$

donde, por (A.10)

$$(uw) \Big|_{z_2}^{\bar{H}+3_1} = u D_z (3_1 - 3_2) . \quad (\text{A.14})$$

Substituyendo (A.14) en (A.13) y desarrollando las derivadas parciales tenemos

$$[\partial_z u + u \partial_x u + v \partial_y u - f v + c^2 h_x] \bar{H}(1+h) + (u \partial_x u + u \partial_y v) \bar{H}(1+h) + u D_z (3_1 - 3_2) = 0 \quad (\text{A.15})$$

y reconociendo los dos últimos terminos de (A.15) vemos que

son exactamente cero, pues es $u(2)$. Entonces, (A.15) queda

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - f v + c^2 h_x = 0 . \quad (\text{A.16})$$

Si tomamos la componente meridional de (A.6) y repetimos el mismo procedimiento, salvo que en lugar de sumarle $u(\text{div } \underline{M})$, le sumamos $v(\text{div } \underline{M})$, se obtiene

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + f u + c^2 h_y = 0 , \quad (\text{A.17})$$

la que junto con (A.16) constituye la ecuación (1) del texto.

APENDICE B. Elementos de matriz del operador C

En la ecuación (51) se define

$$B_{ba} = \int dy (\beta/c)^{1/2} \hat{\Psi}_b^\dagger C \hat{\Psi}_a. \quad (\text{B.1})$$

Tomando en cuenta que los $\hat{\Psi}_{a,b}$ son las soluciones para $\phi_0=0$, tenemos que

$$\hat{\Psi}_b^\dagger = (\hat{u}_b^*, \hat{v}_b^*, c\hat{h}_b^*) \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}_a = \begin{pmatrix} \hat{u}_a \\ \hat{v}_a \\ c\hat{h}_a \end{pmatrix},$$

donde * significa complejo conjugado. La matriz C esta definida en el sección II.2.

Si desarrollamos el producto del lado derecho de (B.1) se tiene

$$B_{ba} = (\beta/c)^{1/2} \int dy [\hat{u}_b^* u_0 \partial_x \hat{u}_a + c^2 \hat{h}_b^* h_0 \partial_x \hat{u}_a + \hat{v}_b^* u_0 \partial_x \hat{v}_a + c^2 \hat{h}_b^* u_0 \partial_x \hat{h}_a + u_0' \hat{u}_b^* \hat{v}_a + c^2 h_0' \hat{h}_b^* \hat{v}_a + c^2 \hat{h}_b^* h_0 \partial_y \hat{v}_a]. \quad (\text{B.2})$$

Los tres últimos términos de (B.2) pueden reescribirse como

$$-u_0 \hat{u}_b^* \partial_y \hat{v}_a - u_0' \hat{v}_a \partial_y \hat{u}_b^* - c^2 h_0 \hat{v}_a \partial_y \hat{h}_b^* + \partial_y (u_0 \hat{u}_b^* \hat{v}_a) + c^2 \partial_y (h_0 \hat{h}_b^* \hat{v}_a) \quad (\text{B.3})$$

y los dos últimos términos de (B.3) desaparecen al aplicar las condiciones de frontera (5) despues de integrar.

De las ecuaciones (17), (18), (19), (23) y (25) con $u_0 = h_0 = 0$ tenemos que

$$\partial_y \hat{v}_a = -(-i\hat{\omega}_a \hat{h}_a + \partial_x \hat{u}_a) , \quad (\text{B. 4})$$

$$c^2 \partial_y \hat{h}_b^* = -(i\hat{\omega}_b \hat{v}_b^* + f\hat{u}_b^*) , \quad (\text{B. 5})$$

$$f\hat{v}_a = -i\hat{\omega}_a \hat{u}_a + ik_a c^2 \hat{h}_a , \quad (\text{B. 6})$$

$$\partial_y \hat{u}_b^* = \partial_x \hat{v}_b^* - f\hat{h}_b^* - i\beta \hat{v}_b^* / \hat{\omega}_b \quad (\text{B. 7})$$

y substituyendo las ecuaciones (B.4) a (B.7) en (B.3) y este a su vez en (B.2), resulta que eliminamos todos los gradientes. El resultado es

$$\begin{aligned} B_{ba} = & i(\beta/c)^{1/2} \int dy [2ku_0 (\hat{u}_b^* \hat{u}_a + \hat{v}_b^* \hat{v}_a + c^2 \hat{h}_b^* \hat{h}_a) \\ & + (\beta u_0 / \hat{\omega}_b + \hat{\omega}_b h_0) \hat{v}_a \hat{v}_b^* - \hat{\omega}_b h_0 \hat{u}_a \hat{u}_b^* \\ & - (\hat{\omega}_a u_0 - kc^2 h_0) (\hat{u}_a \hat{h}_b^* + \hat{h}_a \hat{u}_b^*)] . \end{aligned} \quad (\text{B. 8})$$

Utilizando el hecho de que

$$\hat{u} = (\hat{\psi}^+ + \hat{\psi}^-) / \sqrt{2} , \quad \hat{v} = \hat{\psi}_0 \quad \& \quad \hat{h} = (\hat{\psi}^+ - \hat{\psi}^-) / c\sqrt{2} ,$$

tenemos que (B.8) puede expresarse como

$$\begin{aligned} B_{ba} = & i(\beta/c)^{1/2} \int dy [(2k - \hat{\omega}_a / c) u_0 \hat{\psi}_b^* \hat{\psi}_a^+ + (2k + \beta / \hat{\omega}_b) u_0 \hat{\psi}_b^* \hat{\psi}_a^0 \\ & + (2k + \hat{\omega}_a / c) u_0 \hat{\psi}_b^* \hat{\psi}_a^- + \hat{\omega}_b h_0 \hat{\psi}_a^* \hat{\psi}_b^0 - (kc + \hat{\omega}_a / 2) h_0 \hat{\psi}_b^* \hat{\psi}_a^- \\ & + (kc - \hat{\omega}_a / 2) h_0 \hat{\psi}_b^* \hat{\psi}_a^+ - \hat{\omega}_a / 2 (h_0 \hat{\psi}_b^* \hat{\psi}_a^- + h_0 \hat{\psi}_b^* \hat{\psi}_a^+)] . \end{aligned} \quad (\text{B. 9})$$

Utilizando la definición de los $\hat{\Psi}_{a,b}$ de las ecuaciones (45)

$$B_{ba} = i(\beta/c)^{1/2} \int dy \{ (2k - \hat{\omega}_a / c) u_0 A_b^+ A_a^+ F(n_b + 1, y^*) F(n_a + 1, y^*)$$

$$\begin{aligned}
& + (2k + \beta/\hat{\omega}_b) u_0 A_b^+ A_a^0 F(n_b, y^*) F(n_a, y^*) \\
& + (2k + \hat{\omega}_a/c) u_0 A_b^- A_a^- F(n_b - 1, y^*) F(n_a - 1, y^*) + \hat{\omega}_b h_0 A_b^0 A_a^0 F(n_b, y^*) F(n_a, y^*) \\
& - (kc + \hat{\omega}_a/2) h_0 A_b^- A_a^- F(n_b - 1, y^*) F(n_a - 1, y^*) \\
& + (kc - \hat{\omega}_a/2) h_0 A_b^+ A_a^+ F(n_b + 1, y^*) F(n_a + 1, y^*) \\
& - \hat{\omega}_a/2 [h_0 A_b^+ A_a^- F(n_b + 1, y^*) F(n_a - 1, y^*) \\
& + h_0 A_b^- A_a^+ F(n_b - 1, y^*) F(n_a + 1, y^*)] \quad , \quad (B. 10)
\end{aligned}$$

donde $y^* = \sqrt{\beta/c}$ y. Si definimos

$$\begin{aligned}
U_{m,m'} &= \int dy u_0(y) F(m, y^*) F(m', y^*) \quad , \\
H_{m,m'} &= \int dy h_0(y) F(m, y^*) F(m', y^*) \quad (B. 11)
\end{aligned}$$

y sustituimos en (B.10), tenemos que la expresión (51) del texto queda

$$\begin{aligned}
B_{ba} &= (\beta/c)^{1/2} [(2k - \hat{\omega}_a/c) A_b^+ A_a^+ U_{n_b+1, n_a+1} \\
& + (2k + \beta/\hat{\omega}_b) A_b^0 A_a^0 U_{n_b, n_a} + (2k + \hat{\omega}_a/c) A_b^- A_a^- U_{n_b-1, n_a-1} \\
& + (kc - \hat{\omega}_a/2) A_b^+ A_a^+ H_{n_b+1, n_a+1} - (kc - \hat{\omega}_a/2) A_b^- A_a^- H_{n_b-1, n_a-1} + \hat{\omega}_b A_b^0 A_a^0 H_{n_b, n_a} \\
& - \hat{\omega}_a/2 (A_b^+ A_a^- H_{n_b+1, n_a-1} + A_b^- A_a^+ H_{n_b-1, n_a+1})] = 0 \quad , \quad (B. 12)
\end{aligned}$$

donde (Ripa, 1981b)

$$A_+ = 1, A_- = A_0 = 0 \quad [n=-1], \quad (B. 13)$$

para la onda de Kelvin,

$$\begin{aligned}
A_+ &= (2-s')^{1/2}, A_- = 0 \\
A_0 &= \text{sgn}(\hat{\omega})(1-s') A_+ \quad [n=0], \quad (B. 14)
\end{aligned}$$

para las ondas de Yanai y

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= \operatorname{sgn}(1+s') (1\pm s') [n+1/2\pm 1/2]^{1/2} / W \\ A_0 &= \operatorname{sgn}(\hat{\omega}) [(2n+1+s')(1-s')]^{1/2} / W \end{aligned} \quad [n \geq 1], \quad (\text{B. 15})$$

para las ondas inercio-gravitatorias y de Rossby, donde

$$W = [4n+2+3s'-s'^3] \quad \& \quad s' = (k/\hat{\omega})c.$$

Si tomamos el campo ψ representado en las ecuaciones (66) y (67) y expresamos las funciones parabólicas cilíndricas en términos de los polinomios de Hermite [$H(m, \sqrt{\beta/c} y)$], tenemos

$$\begin{aligned} U_{m,m'}^* &= \int dy^* A \pi^{-1/2} (2^m m!)^{-1/2} (2^{m'} m'!)^{-1/2} \exp(-y^{*2}/S) H(m, y^*) H(m', y^*) \\ & \quad H_{m,m'}^* = B U_{m,m'}^* \end{aligned} \quad (\text{B. 16})$$

donde

$$\begin{aligned} y^* &= \sqrt{\beta/c} y \quad \& \quad S = (1+2B)/2B \\ U_{m,m'}^* &= \sqrt{\beta/c^3} U_{m,m'} \quad \& \quad H_{m,m'}^* = \sqrt{\beta/c} H_{m,m'} \end{aligned}$$

y A & B están definidos en (68).

La solución correspondiente (B. 16) de acuerdo a Busbridge (1948) es

$$U_{m,m'}^* = A \pi^{-1/2} (2^m m!)^{-1/2} (2^{m'} m'!)^{-1/2} S^{-1/2} (-z/2)^{-K} \Gamma(K+1/2) F(-m, -m'; 1/2-K; z) \quad (B.17)$$

$$H_{m,m'}^* = B U_{m,m'}^* ,$$

donde

$$z = (1+2B)/2 \quad \& \quad K = (m+m')/2$$

y Γ es la función gamma y F es una función hipergeométrica.

La solución (B.17) solamente es válida para $m+m'=2K$, donde K es un número entero positivo, de otro modo $U_{m,m'}^* = H_{m,m'}^* = 0$.

APENDICE C. Zonas de estabilidad

Desarrollando la ecuación (64) resulta

$$(\beta - u_0'')(1+h_0) + (f - u_0')fu_0/c^2 \geq 0. \quad (C.1)$$

Substituyendo las expresiones (66) y (67) del texto en (C.1) y dividiendo con β la expresión es

$$G(x) = 1 + [2x(B^2 - 1)/B + (B^2 + 1)/B]A \exp(-x) + A^2 \exp(-2x) \geq 0, \quad (C.2)$$

donde

$$x = y^2 / L^2$$

y A & B están definidos en (68).

Para el ecuador ($y=0$) tenemos

$$\begin{aligned} G(0) &= 1 + A(B^2 + 1)/B + A \geq 0 \\ &= (A+B)(A+1/B) \geq 0, \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$A \geq \max(-B, -1/B). \quad (C.3)$$

Derivando (C.2) respecto de x e igualando a cero tenemos

$$2A \exp(-x) + 2x(B-1/B) = B-3/B \quad (C.4)$$

y substituyendo en (C.2) obtenemos

$$G(x) = 1 + 2(B-1/B)A \exp(-x) - A^2 \exp(-2x) \geq 0, \quad (C.5)$$

igualando a cero y resolviendo para $A \exp(-x)$

$$A \exp(-x) = (B-1/B) \pm \sqrt{(B-1/B)^2 + 1} \quad (C.6)$$

y substituyendo en (C.4) se llega a

$$\begin{aligned} 2x(B-1/B) &= -(B+1/B) \mp 2\sqrt{(B-1/B)^2 + 1} \\ x &= [B^2 + 1 \pm 2B\sqrt{(B-1/B)^2 + 1}] / (2-2B^2), \end{aligned} \quad (C.7)$$

de (C.2) y (C.7) se desprende el siguiente resultado

$$G(x) = A^2 \exp(-2x) + A \exp(-x) [\mp 2/B \sqrt{(B^2-1)^2 + B^2}] + 1 \geq 0$$

y resolviendo para A tenemos

$$\begin{aligned} A &= [\pm D \pm \sqrt{D^2 - 1}] \exp(x) \\ A &= [\pm D \pm \sqrt{D^2 - 1}] \exp [(B + 1 \pm \sqrt{2BD}) / (2-2B^2)], \end{aligned} \quad (C.8)$$

donde

$$D = 1/B \sqrt{(B^2-1)^2 + B^2}$$

y las soluciones de interes son:

$$A_1 = [D - \sqrt{D^2 - 1}] \exp [(B^2 + 1 + 2BD) / (2-2B^2)] \quad \text{para } B < 1, \quad (C.9)$$

$$A_2 = [\sqrt{D^2 - 1} - D] \exp[(B^2 + 1 - 2BD)/(2 - 2B^2)] \quad \text{para } B > 1, \quad (C. 10)$$

con (C. 3), (C. 9) y (C. 10) tenemos la zona donde se cumple (70), es decir,

$$\begin{aligned} A_1(B) &= A_1, \\ A_2(B) &= \max[-B, -1/B, A_2]. \end{aligned} \quad (C. 11)$$

Para la condición (65) con las ecuaciones (66) y (67) tenemos que, para valores positivos de A,

$$A_3 \leq 1 \quad (C. 12)$$

y para valores negativos de A, tenemos que $A^2 \leq 1 + AB$ y resolviendo para A resulta

$$A = B/2 + \sqrt{B^2/4 + 1},$$

por lo que

$$A_4 \geq B/2 - \sqrt{B^2/4 + 1}, \quad (C. 13)$$

entonces la zona donde se cumple (65) es

$$\begin{aligned} A_4(B) &= A_4, \\ A_3(B) &= A_3. \end{aligned} \quad (C. 14)$$

En (C. 11) y (C. 14) tenemos las ecuaciones que delimitan la zona de existencia en el plano A-B para las condiciones (64) y (65) respectivamente. La zona de estabilidad será por

lo tanto

$$\max[A_1, A_2, -B, -1/B] < A < \min[A_1, A_2]$$

Finalmente, sobre la zona de validez del modelo, tenemos que

$$h_0(y) > -1 \quad (C. 15)$$

y por máximos y mínimos tenemos que en $y=0$ se encuentra el mínimo valor de h_0 , es decir, $h_0 = AB$ y por (C. 15) se tiene

$$AB > -1, \quad (C. 16)$$

la ecuación (69) del texto.

APENDICE D. Ecuaciones del ciclo de energía

Las ecuaciones de conservación para (88), (89), (90) y (91) pueden ser obtenidas como sigue:

Para la ecuación (90), multiplicando la tercer componente de (21) por $c^2 h_0$ e integrando en x se llega a

$$\partial_t (c^2 h_0 \overline{h_2}) + c^2 h_0 \partial_y [(1+h_0) \overline{v_2}] + c^2 h_0 \partial_y \overline{h_1 v_1} = 0 \quad (D.1)$$

Si multiplicamos la ecuación (19) por $c^2 h_1$ e igualmente integramos, tenemos la conservación para \overline{EPP}

$$\partial_t (c^2 \overline{h_1^2} / 2) + c_2 h_1 \overline{\nabla \cdot [(1+h_0) \underline{v}_1]} = 0 \quad (D.2)$$

La ecuación de conservación de \overline{EKM} se obtiene multiplicando la primer componente de (21) por $(1+h_0)u_0$ más el producto de la tercer componente de (21) por $h_2 u_0$, es decir,

$$\partial_t \overline{EKM} - f u_0 (1+h_0) \overline{v_2} + u_0 u_0' (1+h_0) \overline{v_2} + (1+h_0) u_0 \overline{v_1 \partial_y u_1} = 0 \quad (D.3)$$

Finalmente, para \overline{EKP} , efectuando la operación (17) $[(1+h_0)u_1 + h_1 u_0] + (18) (1+h_0)v_1 + (19)u_1 u_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{EKP} + (1+h_0) u_0' \overline{u_1 v_1} + (1+h_0) c^2 \overline{v_1 \cdot \nabla h_1} - u_0 (f - u_0') \overline{h_1 v_1} \\ + u_0 u_1 \partial_y [(1+h_0) v_1] = 0 \end{aligned} \quad (D.4)$$

La ecuación (D.1) puede ser reescrita utilizando el hecho

de que $F \delta_y G = \delta_y (FG) - G \delta_y F$; al integrar en y tenemos por (5) que $\int \delta_y (FG) = 0$, es decir, el primer término no interviene en la dinámica del sistema. La ecuación (D.1) es así reducida a

$$\partial_t (c^2 h_0 \overline{h_2}) + f u_0 (1+h_0) \overline{v_2} + c^2 h_0 \delta_y \overline{h_1 v_1} = 0, \quad (D.5)$$

y utilizando la ecuación (16), se obtiene la ecuación (92) del texto.

Las ecuaciones (93), (94) y (95) del texto se obtienen de igual forma.

APENDICE E. Lista de símbolos

$\underline{V}=(u, v)$	vector velocidad horizontal
f	parámetro de Coriolis
β	gradiente meridional de f
grad	operador gradiente
∇	operador gradiente horizontal
$\underline{X}=(x, y)$	vector posición horizontal
c	constante de separación vertical
\hat{z}	versor vertical
h	dilatación vertical
H	profundidad capa intermedia
\bar{H}	promedio horizontal de H
ρ	densidad
P	presión
q	vorticidad potencial
ζ	vorticidad vertical relativa
U	momento zonal
m	masa
E	densidad de energía
k	número de onda zonal
n	número cuántico meridional
$\hat{\omega}$	frecuencia ondas ecuatoriales
ω	autovalor
Z	autovector
(τ)	transpuesto complejo conjugado
$A_{r,0}$	coeficientes de acoplamiento

α	número paramétrico, condiciones estabilidad
\int	desplazamiento meridional
L	ancho de la corriente
EK	energía cinética
EP	energía potencial
$\langle x \rangle$	promedio horizontal de x
$\overline{(x)}$	promedio zonal de (x)
3	interfaces capas del modelo
div	divergencia
*	complejo conjugado
sgn(x)	signo de (x)