

RESUMEN de la Tesis de Víctor Ruiz Cortés presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en FÍSICA APLICADA con opción en OPTICA. Ensenada, Baja California, México. Agosto de 1991.

**DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN INSTRUMENTO PARA LA MEDICION ANGULAR DE LUZ
ESPARCIDA POR SUPERFICIES RUGOSAS**

Resumen aprobado por:

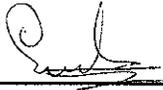


Dr. Eugenio R. Méndez Méndez
Director de Tesis

Se presenta el diseño, la construcción y la caracterización un instrumento para la medición angular de luz esparcida por superficies rugosas. El instrumento es controlado por una microcomputadora y puede ser utilizado en modos de iluminación convergente o divergente. Se presenta una revisión de la formulación matemática del problema de esparcimiento por superficies rugosas basada en el modelo de la pantalla delgada de fase y se deriva una expresión para la intensidad promedio esparcida. Esta formulación se justifica posteriormente comparando la expresión resultante para el campo esparcido con la expresión obtenida utilizando la aproximación de Kirchhoff. En el tratamiento teórico se consideran superficies rugosas con estadísticas Gaussianas y γ y con funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa. Se presentan resultados experimentales de esparcimiento de luz por varias superficies previamente caracterizadas y se comparan con las predicciones del modelo teórico presentado. Se encuentra que en algunos casos el modelo teórico no es adecuado para explicar estos resultados.

TESIS DEFENDIDA POR: VICTOR RUIZ CORTES

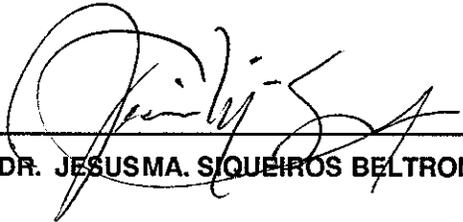
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



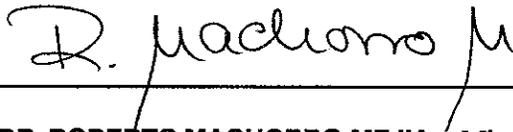
DR. EUGENIO R. MENDEZ MENDEZ.- Director del Comité



DR. HECTOR ESCAMILLA TAYLOR.- Miembro del Comité



DR. JESUSMA. SIQUEIROS BELTRONES.- Miembro del Comité



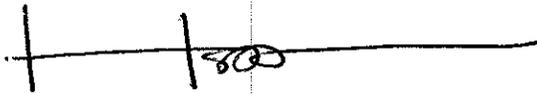
DR. ROBERTO MACHORRO MEJIA. - Miembro del Comité



M.C. FERNANDO FAVELA VARA.- Miembro del Comité



M.C. JOSUE ALVAREZ BORREGO.- Jefe Depto. Optica



DR. HECTOR ECHAVARRIA HERAS.- Director Académico

16 DE AGOSTO DE 1991

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE EDUCACION SUPERIOR DE
ENSENADA**

DIVISION DE FISICA APLICADA

DEPARTAMENTO DE OPTICA

**DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN INSTRUMENTO PARA LA MEDICION
ANGULAR DE LUZ ESPARCIDA POR SUPERFICIES RUGOSAS**

TESIS

**que, para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS, presenta:**

VICTOR RUIZ CORTES

Ensenada, Baja California, Agosto de 1991.

**A Gloria y Serafín
mis padres**

**A Yolanda, Marco Antonio y Sergio Serafín
mis hermanos**

**A Tepatepec
mi pueblo**

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Eugenio R. Méndez Méndez por la motivación para el estudio de esta área de la óptica y por la dirección de esta tesis

Al Dr. Héctor M. Escamilla T. por sus comentarios y la revisión de esta tesis.

A los Drs. Roberto Machorro, Martín Celaya y Jesús Siqueiros y al M.C. Fernando Favela, miembros del comité de tesis, por su colaboración y comentarios.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y a los contribuyentes por el apoyo recibido para la realización de esta tesis

Al personal del Taller de Mecánica y de Óptica por su cooperación para la elaboración de las piezas mecánicas del ESPARCIMETRO y las superficies utilizadas en los experimentos.

A los estudiantes integrantes del grupo de Óptica Estadística por sus comentarios y sugerencias, y a los compañeros de la maestría por los gratos momentos que pasé durante mi estancia en el CICESE.

Y a todas las personas que de una u otra manera contribuyeron para que este trabajo saliera adelante.

CONTENIDO

	<u>Página</u>	
I	INTRODUCCION	1
II	DESCRIPCION Y CARACTERIZACION DEL INSTRUMENTO PARA LA MEDICION ANGULAR DE LUZ ESPARCIDA POR SUPERFICIES RUGOSAS (ESPARCIMETRO)	4
	II.1	4
	II.1.1	5
	II.1.2	7
	II.1.3	8
	II.1.4	8
	II.1.5	9
	II.1.6	9
	II.1.7	9
	II.2	11
	II.2.1	12
	II.2.2	13
III	ESPARCIMIENTO DE LUZ POR SUPERFICIES RUGOSAS	16
	III.1	16
	III.2	22
	III.3	24
	III.4	31
	III.4.1	31
	III.4.2	34
	III.4.3	36
	III.4.4	39
IV	RESULTADOS	41
	IV.1	41
	IV.2	44
	IV.3	55

CONTENIDO (Continuación)

	Página
V CONCLUSIONES	57
LITERATURA CITADA	59
APENDICE A. MANUAL DE USUARIO. INSTRUMENTO PARA LA MEDICION ANGULAR DE LUZ ESPARCIDA POR SUPERFICIES RUGOSAS	61
APENDICE B. LA APROXIMACION DE KIRCHHOF	78

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Diagrama esquemático del Instrumento para la Medición Angular de Luz Esparcida por Superficies Rugosas.	5
2	Montura para colocar la superficie rugosa.	6
3	Montura para colocar el sistema de detección.	6
4	Montura para el sistema de iluminación.	7
5	Modo de iluminación convergente.	10
6	Modo de iluminación divergente.	10
7	Comportamiento cosenoidal de la intensidad en un difusor Lambertiano.	11
8	Curva de esparcimiento para la caracterización del ESPARCIMETRO (cuadros) en transmisión, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación convergente. Polarización S para el haz incidente. Angulo de incidencia 0°.	12
9	Curva de esparcimiento para la caracterización del ESPARCIMETRO en reflexión, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación divergente. Polarización S para el haz incidente. Angulo de incidencia 0° respecto a la normal a la superficie. SS detección de polarización S. SP detección de polarización P.	13
10	Curva de esparcimiento para la caracterización del ESPARCIMETRO en reflexión, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación divergente. Polarización S para el haz incidente. Angulo de incidencia 30° respecto a la normal a la superficie. SS detección de polarización S. SP detección de polarización P.	14
11	Curva de esparcimiento para la caracterización del ESPARCIMETRO en reflexión, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación divergente. Polarización S para el haz incidente. Angulo de incidencia 60° respecto a la normal a la superficie. SS detección de polarización S. SP detección de polarización P.	15
12	Onda electromagnética incidiendo sobre una superficie rugosa. \vec{e}_i representa el campo eléctrico de la onda incidente, \vec{e}_t el campo eléctrico esparcido en transmisión y \vec{e}_r el campo eléctrico esparcido en reflexión.	16
13	Geometría considerada para el problema de esparcimiento de luz por una superficie rugosa. \vec{e}_{ip} y \vec{e}_{is} son las componentes paralela y perpendicular (al plano de incidencia) del campo eléctrico.	17
14	Representación esquemática de una sección de perfil de una superficie rugosa.	18
15	Geometría para el cálculo del campo esparcido.	21
16	Modelo de la Pantalla Delgada de Fase. Frente de onda plano incidiendo sobre una superficie.	22
17	Cambio de fase introducido en transmisión. Diagrama esquemático de un frente de onda incidiendo sobre una superficie.	23

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
18	Cambio de fase introducido en reflexión. Diagrama esquemático de un frente de onda plano incidiendo sobre una superficie.	23
19	Geometría par el cálculo del campo esparcido.	25
20	Notación utilizada en el problema de esparcimiento.	26
21	fdp gamma para varios valores de N. En todos los casos el valor de la desviación estándar es igual a uno. Se compara con una fdp Gaussiana (cuadrados).	36
22	(a) Traza del perfil de la superficie No. 5 obtenida mediante el perfilómetro mecánico. La longitud de total del barrido es de $500 \mu m$, con un intervalo en el muestreo de $0.25 \mu m$. El valor estimado para la desviación estándar de las alturas es de $0.667 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor estimado para la longitud de correlación, a , es de $6.47 \mu m$.	44
23	(a) Histograma de alturas de la superficie No. 5, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$. (c) Curva de esparcimiento en reflexión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).	45
24	(a) Histograma de alturas de la superficie No. 5, al cual se le ha ajustado una fdp gamma de orden $N=19$. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gamma de orden $N=19$ y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$.	46
25	(a) Traza del perfil de la superficie No. 6 obtenida mediante el perfilómetro mecánico. La longitud de total del barrido es de $500 \mu m$, con un intervalo en el muestreo de $0.25 \mu m$. El valor estimado para la desviación estándar de las alturas es de $0.466 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor estimado para la longitud de correlación, a , es de $4.83 \mu m$.	47
26	(a) Histograma de alturas de la superficie No. 6, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$ y no se presenta en la gráfica. (c) Curva de esparcimiento en reflexión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).	48
27	(a) Histograma de alturas de la superficie No. 6, al cual se le ha ajustado una fdp gamma de orden $N=22$. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gamma de orden $N=22$ y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$ y no se presenta en la gráfica.	49

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
28	(a) Traza del perfil de la superficie No. 7 obtenida mediante el perfilómetro mecánico. La longitud de total del barrido es de $500 \mu m$, con un intervalo en el muestreo de $0.25 \mu m$. El valor estimado para la desviación estándar de las alturas es de $0.475 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor estimado para la longitud de correlación, a , es de $4.95 \mu m$.	50
29	(a) Histograma de alturas de la superficie No. 7, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$ y no se presenta en la gráfica. (c) Curva de esparcimiento en reflexión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).	51
30	(a) Histograma de alturas de la superficie No. 7, al cual se le ha ajustado una fdp gamma de orden $N=17$. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gamma de orden $N=17$ y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$ y no se presenta en la gráfica.	52
31	(a) Histograma de alturas de la superficie No.12, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana. El valor estimado para la desviación estándar de las alturas es de $0.22 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor de la longitud de correlación, a , es de $13.6 \mu m$.	53
32	Curva de esparcimiento en reflexión comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).	54

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I	Comparación de los valores de la desviación estándar de alturas, σ_z , de las superficies (rugosidad), estimadas de las trazas de las superficies obtenidas con un perfilómetro mecánico y de las curvas de esparcimiento de las superficies.	55

I. INTRODUCCION

La interacción de la luz con la materia ha sido tema de estudio por muchos años. La reflexión y refracción de la luz en una superficie plana, de cualquier material, son fenómenos bien comprendidos, y es posible inferir propiedades del material a partir de la luz reflejada o refractada por éste. Esto se puede aplicar en la caracterización de materiales. Sin embargo, la interacción de la luz con una superficie rugosa es, en general, un problema no resuelto.

El conocer la manera en que una superficie esparce la luz (o una onda electromagnética en general), es de gran importancia práctica pues el fenómeno tiene un gran número de aplicaciones que van desde la determinación de propiedades estadísticas de superficies (Roche y Pelletier [1984], Stover et al [1984], Hildebrand et al [1974]) hasta el estudio de la atmósfera de planetas (Beckmann y Spizzichino [1963]).

Recientemente el problema del esparcimiento de luz por superficies rugosas ha sido objeto de un renovado interés, debido principalmente a efectos de retroesparcimiento que no se conocían hasta hace algunos años (Méndez y O'Donnell [1987], O'Donnell y Méndez [1987]) y al desarrollo de nuevas técnicas para atacar el problema teóricamente (Desanto y Brown [1986], Nieto-Vesperinas y García [1981], Maradudin et al [1989]). La dificultad principal para resolver problemas de esparcimiento de luz por superficies rugosas es la de determinar los valores del campo electromagnético en la superficie. No existen, en general, soluciones analíticas o numéricas para este problema, aunque cierto progreso ha sido alcanzado por medio de simulaciones tipo Monte Carlo (Nieto-Vesperinas [1987]). También existen varios modelos que proponen aproximaciones para estos valores. Dos de estos serán considerados en esta tesis, y son: el modelo de la Pantalla Delgada de Fase y el de la aproximación de Kirchhoff. Cada uno de estos modelos tiene sus restricciones, aunque no se conoce exactamente su rango de validez (Thorsos [1988], Aguilar [1989]).

La verificación experimental de las teorías de esparcimiento se vuelve de gran importancia para sustentar las aproximaciones y suposiciones que se hacen en los tratamientos teóricos de cada modelo. Principalmente debido a que las teorías más recientes intentan tomar en cuenta efectos de depolarización y

esparcimiento múltiple. Para la realización de experimentos es necesario contar con el instrumental adecuado para realizar mediciones angulares de luz esparcida por superficies rugosas, y el tener la capacidad de fabricar superficies con las estadísticas propuestas en los modelos teóricos.

Para la fabricación de superficies, se conoce una técnica basada en la exposición repetida de patrones de granulado láser sobre placas con un depósito de fotorresina (Gray [1978]). Esta técnica ha sido utilizada ampliamente en problemas de esparcimiento donde se requieren superficies cuyas propiedades estadísticas sean Gaussianas o gamma de orden N . Un método recientemente propuesto para la fabricación de superficies es el descrito por Ponce [1991] y Méndez et al [1991]. En éste, las variaciones en el perfil de la superficie son producidas por la exposición de una placa fotosensible a una línea de luz muy angosta. La posición de la línea sobre la placa y el tiempo de exposición son controlados por computadora. Con este método también se pueden fabricar superficies con estadísticas Gaussianas.

Por lo que respecta a los instrumentos para la medición de la luz esparcida por superficies rugosas, existen compañías que los han comercializado denominándolos "scatterometers" o esparcímetros. Una de estas compañías es la TMA (Bozeman, Mass. EUA) que tiene diferentes modelos y tamaños. Sin embargo, los costos son excesivamente altos y los instrumentos son poco versátiles, por lo que varios grupos que trabajan en esparcimiento de luz han decidido construir sus propios instrumentos de medición. Es, por lo tanto, el propósito principal del trabajo reportado en esta tesis el de diseñar y construir un instrumento para la medición angular de luz esparcida por superficies rugosas (ESPARCIMETRO) que será utilizado por el grupo de óptica estadística del CICESE para experimentos de esparcimiento.

En el capítulo II de esta tesis, se describe el instrumento para la medición angular de luz esparcida por superficies rugosas construido, así como su caracterización.

En el capítulo III se presenta, a manera de revisión, la formulación matemática del problema del esparcimiento de luz por superficies rugosas. Se describe el modelo de la Pantalla Delgada de Fase y se obtienen las expresiones para la amplitud compleja y la intensidad del campo esparcido. Se discuten superficies rugosas con estadísticas Gaussianas y gamma de orden N .

En el capítulo IV se presentan algunos resultados experimentales obtenidos con el instrumento construido. Se presentan las curvas de esparcimiento junto con las correspondientes curvas teóricas obtenidas

mediante programas implementados en una microcomputadora utilizando los resultados del capítulo III.

En el capítulo V se presentan las conclusiones derivadas de los resultados obtenidos.

En el apéndice A, a manera de manual de usuario, se describen con detalle las componentes del ESPARCIMETRO y la manera de operarlo. Finalmente, en el apéndice B, se presenta un desarrollo en donde se deriva una expresión para la amplitud compleja del campo esparcido empleando la aproximación de Kirchhoff.

II DESCRIPCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DEL INSTRUMENTO PARA LA MEDICIÓN ANGULAR DE LUZ ESPARCIDA POR SUPERFICIES RUGOSAS (ESPARCIMETRO)

Para realizar trabajo experimental en esparcimiento de luz es necesario contar con un instrumento que sea capaz de medir la distribución angular de luz esparcida por una superficie como función del ángulo de incidencia y el ángulo de observación, para diferentes longitudes de onda, estados de polarización, etc. En este capítulo se describen, brevemente, los elementos que componen el Instrumento de Medición Angular de Luz Esparcida por Superficies Rugosas (ESPARCIMETRO) construido para la realización de experimentos de esparcimiento. Los detalles se presentan en el apéndice A a manera de manual de usuario.

II.1 Descripción del Instrumento

El ESPARCIMETRO construido, consta principalmente de los siguientes sistemas: iluminación, detección, adquisición de datos y control de posición. La secuencia de acciones que se requieren para un experimento son determinados por una microcomputadora mediante un programa de control. También fueron necesarias monturas mecánicas para colocar la muestra, el sistema de detección y el de iluminación.

En la figura 1 se muestra un diagrama esquemático del ESPARCIMETRO

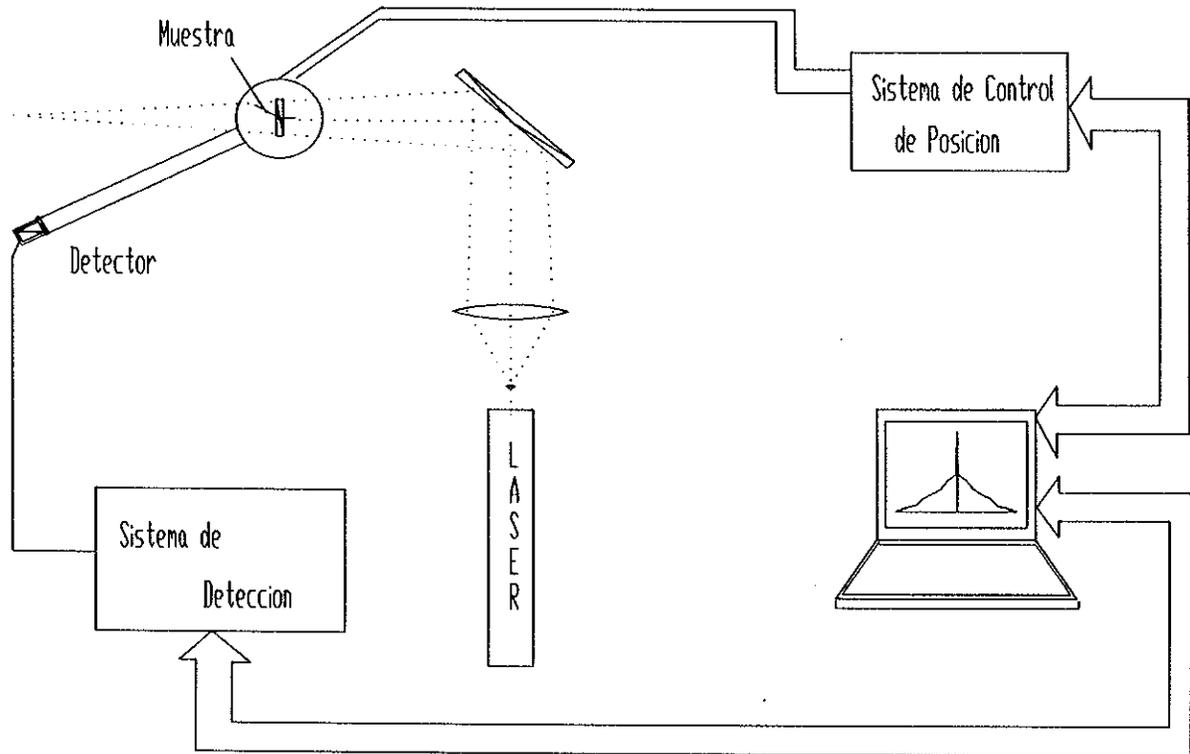


Figura 1 Diagrama esquemático del Instrumento para la Medición Angular de Luz Esparcida por Superficies Rugosas

II.1.1 Monturas Mecánicas

Para construir el ESPARCIMETRO fue necesario adquirir algunas monturas mecánicas y diseñar y fabricar algunas otras.

La montura para colocar la muestra está formada por tres piezas, mostradas esquemáticamente en la figura 2. Una montura Gimbal (NewPort Modelo GM-2), que provee un movimiento de orientación angular fino. Una mesa de traslación XY (para el movimiento en X es una mesa de traslación NewPort Modelo TSX-1A y para la traslación en Y es semejante a la anterior pero construida en el CICESE), este arreglo permite un movimiento en un plano. Por último una mesa de movimiento angular continuo (NewPort Modelo RSX-2) que permite iluminar la muestra a un ángulo cualquiera respecto a la normal de la superficie.

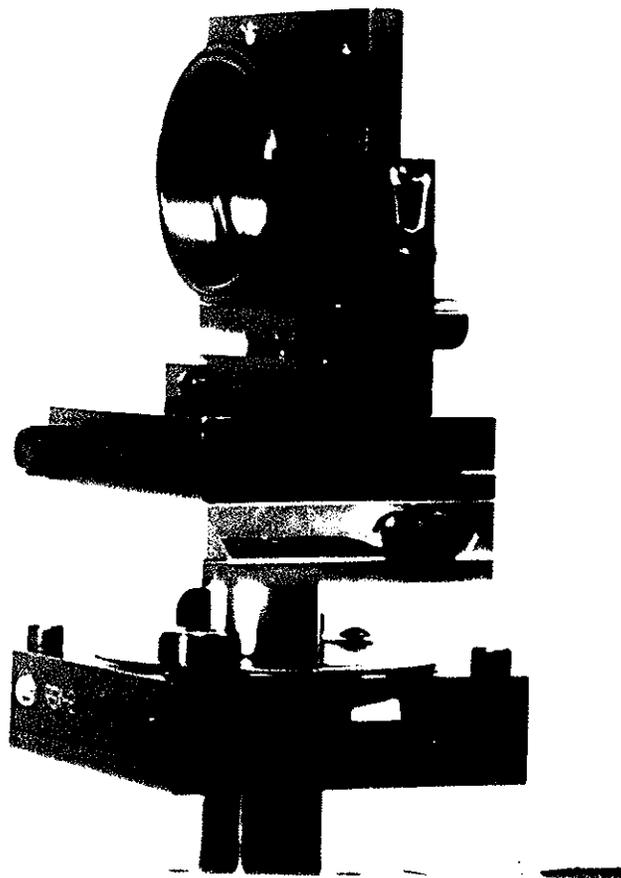


Figura 2 Montura para colocar la superficie rugosa.

Otra montura importante es el brazo rotatorio donde se coloca el sistema de detección. El brazo tiene una longitud de 73 cm. En uno de sus extremos se coloca el sistema de detección y en el otro un contrapeso. Este se muestra en la figura 3.

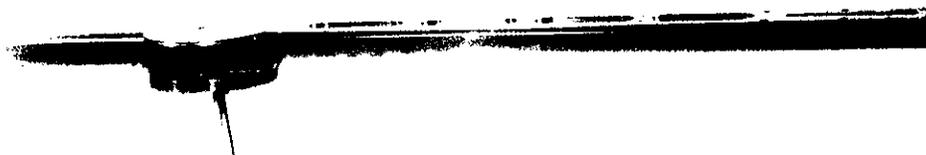


Figura 3 Montura para colocar el sistema de detección.

Una tercera montura es la destinada al sistema de iluminación. Esta consiste de una pieza semejante a un periscopio, lo que permite la medición de la luz esparcida en una dirección muy cercana a la de iluminación. Se muestra esquemáticamente en la figura 4.

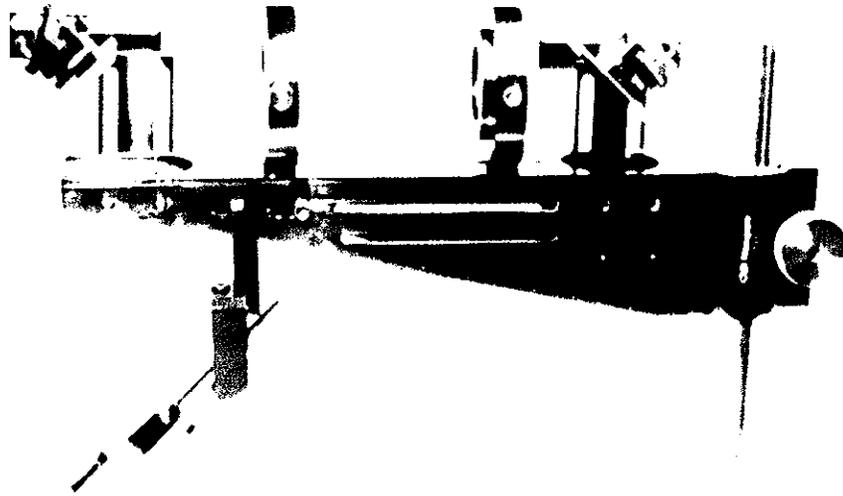


Figura 4. Montura para el sistema de iluminación.

A continuación se describen con más detalle cada uno de estos sistemas.

II.1.2 El Sistema de Iluminación

Este sistema lo forma un láser de Helio-Neón (Melles-Griot 7mW) con una longitud de onda de 632.8 nm, un filtro espacial, una lente utilizada para enfocar el haz y un polarizador.

La intensidad del haz puede ser controlada por filtros de densidad neutra o mediante la rotación de un polarizador lineal colocado en la trayectoria del láser, siempre y cuando éste no se coloque después del polarizador que define la polarización.

II.1.3 Sistema de Control de Posición

Este sistema permite colocar el dispositivo de detección en una posición determinada, lo que hace posible realizar mediciones de la intensidad esparcida en función del ángulo de observación.

La parte central del sistema de control de posición está formado por un motor a pasos (Aerotech modelo 45SMW, 50 polos) adaptado a una mesa de rotación que permite obtener movimientos angulares de 0.25 a 0.5 segundos de arco. Los movimientos del motor son controlados por una microcomputadora mediante dos tarjetas de interfase. La primera (Aerotech Dynacron-D3001 Stepping Translator), contiene toda la circuitería necesaria para manejar el motor a pasos. Las fuentes de poder están integradas y la resolución del motor puede ser seleccionada entre 200 y 400 pasos por revolución. La segunda tarjeta (MetraByte DAS-8), contiene líneas analógicas y digitales, contadores, un convertidor analógico-digital y un sistema controlador de interrupciones. Esta permite la interacción entre la microcomputadora y la tarjeta controladora del motor a pasos.

II.1.4 Sistema de Detección

Este sistema está formado por un detector, tubo fotomultiplicador (Hamamatsu Modelo R1463), un diafragma y un objetivo de microscopio 5X. El diafragma y el objetivo actúan como una abertura de integración, recolectando la luz esparcida y enfocándola sobre el detector. Es necesario asegurarse de que desde cualquier posición de observación el detector vea toda la región iluminada y que, en cualquier posición, la intensidad luminosa recibida por el detector esté dentro de la región lineal de respuesta de éste. La distancia entre la muestra y la lente de integración es de 48 cm. y entre la muestra y el diafragma es de 46 cm.

La abertura integradora colecta un número finito de motas del granulado o moteado láser ("speckle") producido por la interferencia aleatoria entre diferentes componentes del campo esparcido por la superficie rugosa. Estas fluctuaciones espaciales de intensidad tienen asociadas estadísticas que son bien conocidas. Para minimizar las variaciones estadísticas de la intensidad detectada, es necesario integrar espacialmente colectando un número grande de motas sobre el detector. Lo anterior se puede realizar con una abertura del sistema de detección suficientemente grande (abrir el diafragma). Sin embargo, esto limita la resolución angular del instrumento. Otra manera de lograr esto es iluminando una área mayor en la superficie rugosa, con lo que se reduce el tamaño de la mota. El tamaño de la mota en el plano de observación puede ser determinado por la relación (Ennos [1975], pag 207, Méndez [1987])

$$\sigma \approx \frac{1.2\lambda L}{D} \quad (1)$$

donde σ es el diámetro promedio de una mota, L la distancia del difusor al plano de detección y D el diámetro del área iluminada en la superficie rugosa. A la longitud de onda empleada (632.8 nm), para un diámetro del área iluminada en la superficie rugosa de 1.5 cm., y una distancia de la superficie al diafragma de 46 cm., el tamaño (diámetro) de la mota es de aproximadamente 23×10^{-4} cm. Para un radio en la abertura del sistema (radio del diafragma) de 0.5 cm. el número de motas colectadas es de aproximadamente 34×10^3 . Con esto podemos asegurar que el ruido estadístico por granulado del sistema es pequeño.

II.1.5 Sistema de Adquisición de Datos

La información obtenida por el fotomultiplicador es convertida a una señal digital mediante un picoamperímetro (Keithley Modelo 480). Este instrumento tiene un rango de operación de 10^{-9} a 10^{-3} Amperes. La información digital es enviada a la microcomputadora a través de una interfase IEEE-488. Una vez en la microcomputadora, la información es almacenada en un disco flexible.

II.1.6 Control de los Sistemas

Para el control automatizado de todos los sistemas se empleó una microcomputadora tipo PC compatible con IBM-XT. El lenguaje utilizado para realizar todo el programa de control fue Turbo-Pascal versión 5.0 y, tratando de hacer más eficiente el proceso de adquisición de datos, se utilizó el sistema de interrupciones.

II.1.7 Modos de Operación del ESPARCIMETRO

El ESPARCIMETRO puede ser operado en reflexión y en transmisión y la forma de iluminación de la muestra puede ser con un haz convergente o con uno divergente.

En el modo de iluminación convergente, el haz se enfoca sobre la abertura del sistema de detección.

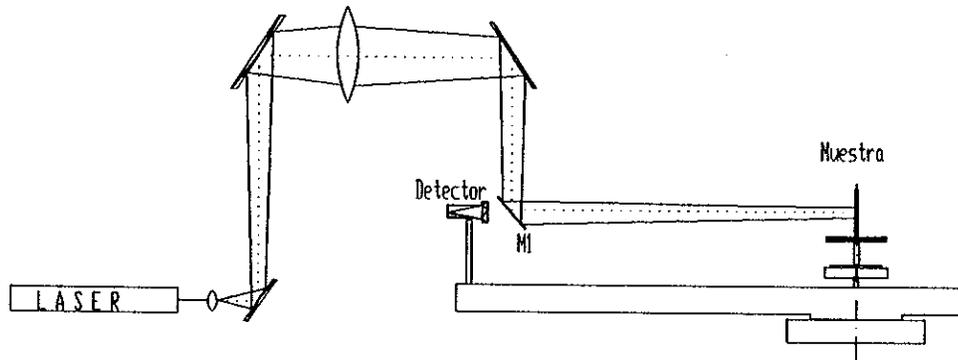


Figura 5 Modo de iluminación convergente

La ventaja de este tipo de iluminación es que el detector se encuentra en el campo lejano y la componente especular está confinada a una región angular pequeña. Esto nos permite, bajo ciertas suposiciones, separar experimentalmente las componentes especular y difusa. La desventaja principal de este tipo de iluminación es que para iluminar la muestra con el haz convergente se utiliza un espejo M1 (figura 5) que es grande, y cuando se trabaja en reflexión, éste obstruye una sección de aproximadamente 10 grados alrededor de la dirección de retroesparcimiento ("backscattering"). Este modo de iluminación es particularmente conveniente para mediciones en transmisión, y en reflexión para superficies con una componente especular significativa. Sin embargo, cuando la luz esparcida en la dirección antiparalela a la de iluminación ("backscattering") es de interés, es conveniente utilizar el modo de iluminación divergente. Se puede demostrar que aparte de los cambios obvios para la componente especular, este tipo de iluminación cambia muy poco la componente difusa, pues ésta varía lentamente como función del ángulo.

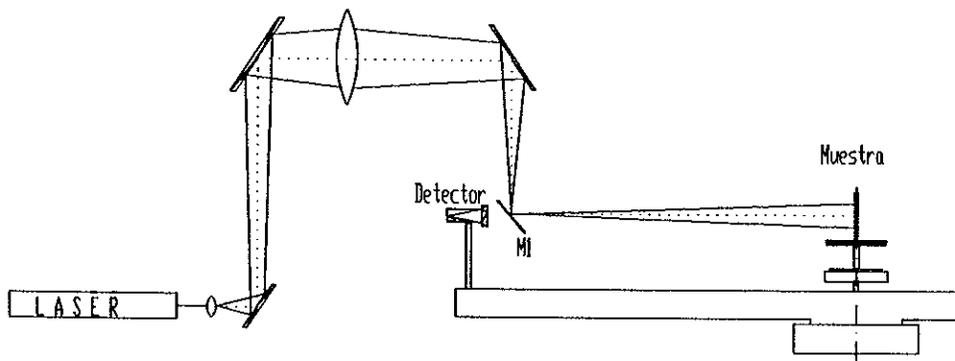


Figura 6 Modo de iluminación divergente

En el modo de iluminación divergente el haz se enfoca sobre un espejo muy angosto (una sección aguzada de un espejo), y de éste se obtiene un haz divergente que ilumina la muestra. Esta geometría permite

observar en una dirección muy cercana a la de iluminación. La desventaja principal de este arreglo es que la componente especular no está contenida en una región angular estrecha, sino en una región relativamente grande, por lo que no es recomendable su utilización con difusores débiles. Es decir, no se debe utilizar cuando exista una componente especular, aunque ésta sea pequeña.

II.2 Caracterización del Instrumento

Existen varias formas de caracterizar un instrumento que mida el esparcimiento de luz (W. L. Wolfe [1986]). El método utilizado para calibrar el ESPARCIMETRO consiste en obtener el patrón de esparcimiento de una muestra de referencia con propiedades de esparcimiento conocidas, y compararlas con las obtenidas por el instrumento. Para este caso se utilizaron difusores Lambertianos, llamados así por la similitud que tienen con las fuentes Lambertianas.

Una fuente Lambertiana es aquella para la cual la radiancia de la superficie ($W\ sr^{-1}\ cm^{-2}$) es independiente del ángulo de observación. Por otro lado un difusor Lambertiano es un difusor isotrópico para el cual la intensidad esparcida en cualquier dirección varía como el coseno del ángulo entre el punto de observación y la normal a la superficie. El término cosenoidal proviene de la dependencia angular que tiene el área de la superficie iluminada, proyectada en la dirección de observación. Sin embargo, la radiancia es la misma en todas direcciones.

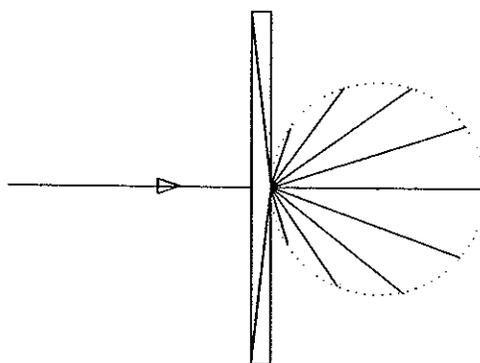


Figura 7 Comportamiento cosenoidal de la intensidad en un difusor Lambertiano.

Para caracterizar el instrumento en reflexión y en transmisión se emplearon dos tipos de difusores Lambertianos. En transmisión se utilizó un vidrio opal, y en reflexión se utilizó una superficie cubierta con sulfato de bario (BSO_4), que es considerado un estándar (difusor Lambertiano) en problemas de esparcimiento y colorimetría en la región visible del espectro.

II.2.1 Caracterización en Transmisión

Para caracterizar al ESPARCIMETRO en el modo de transmisión se utilizó como difusor Lambertiano un vidrio opal y un modo de iluminación convergente. El difusor empleado consiste de una suspensión coloidal sólida de partículas microscópicas las cuales causan múltiple esparcimiento de luz. En la figura 8 se muestra la curva de esparcimiento obtenida y se compara con la de un difusor Lambertiano ideal.

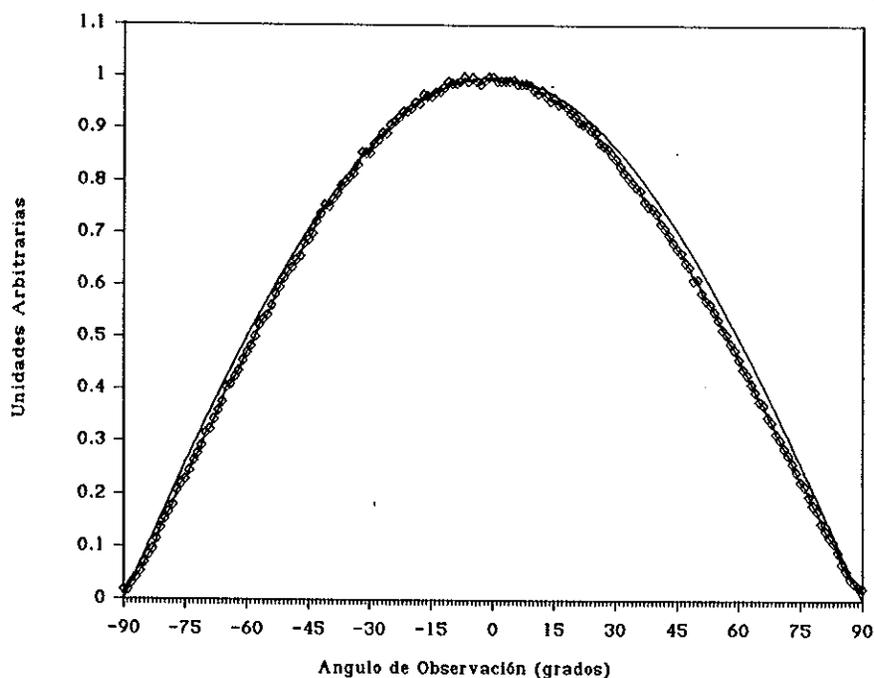


Figura 8 Curva de esparcimiento para la caracterización del ESPARCIMETRO (cuadros) en transmisión, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación convergente. Polarización S para el haz incidente. Ángulo de incidencia 0° .

Se observa que el acuerdo entre la curva experimental y la esperada es bueno. Esto nos indica que el instrumento, con la geometría utilizada, no introduce factores espurios en las mediciones angulares.

II.2.2 Caracterización en Reflexión

Para la caracterización del ESPARCIMETRO en reflexión se utilizó como difusor Lambertiano un sustrato cubierto con sulfato de bario. Se obtuvieron curvas de esparcimiento en el modo de iluminación divergente, iluminando el difusor a diferentes ángulos.

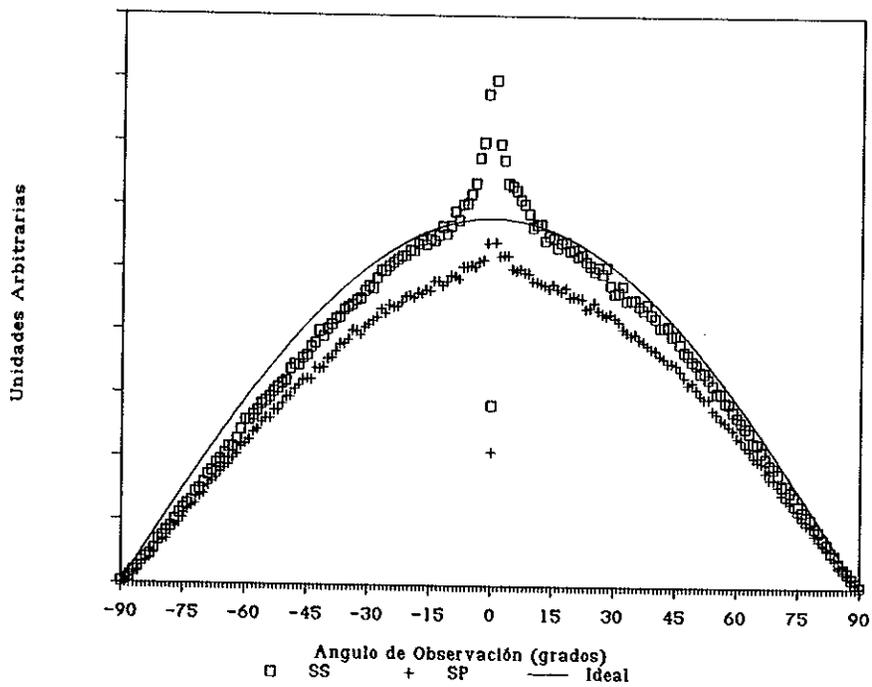


Figura 9

Curva de esparcimiento para la caracterización del ESPARCIMETRO en reflexión, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación divergente Polarización S para el haz incidente. Angulo de incidencia 0° respecto a la normal a la superficie. SS detección de polarización S, SP detección de polarización P.

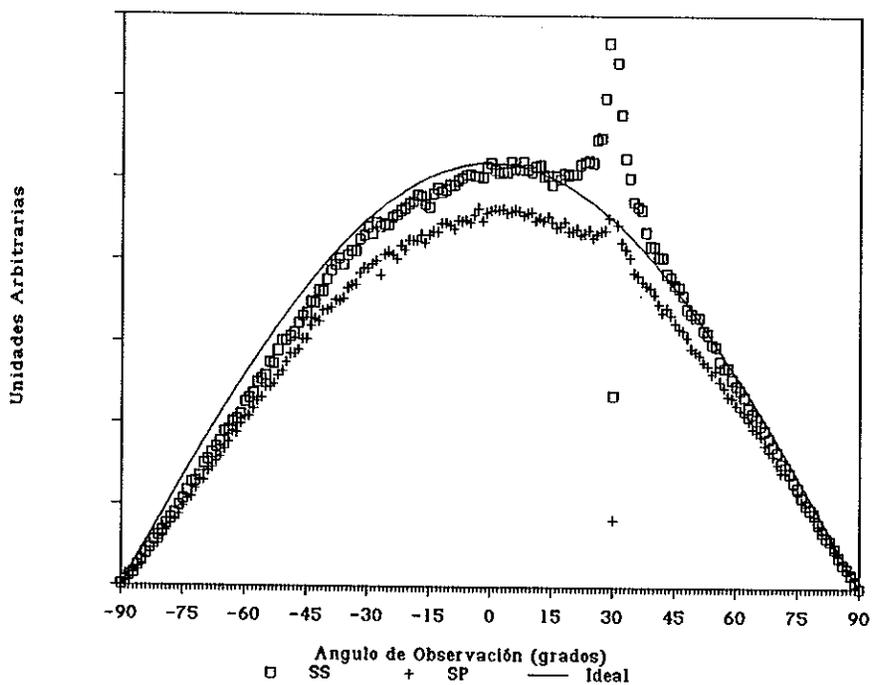


Figura 10

Curva de espacimientu para la caracterización del ESPARCIMETRO en reflexión, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación divergente. Polarización S para el haz incidente. Ángulo de incidencia -30° respecto a la normal a la superficie. SS detección de polarización S, SP detección de polarización P.

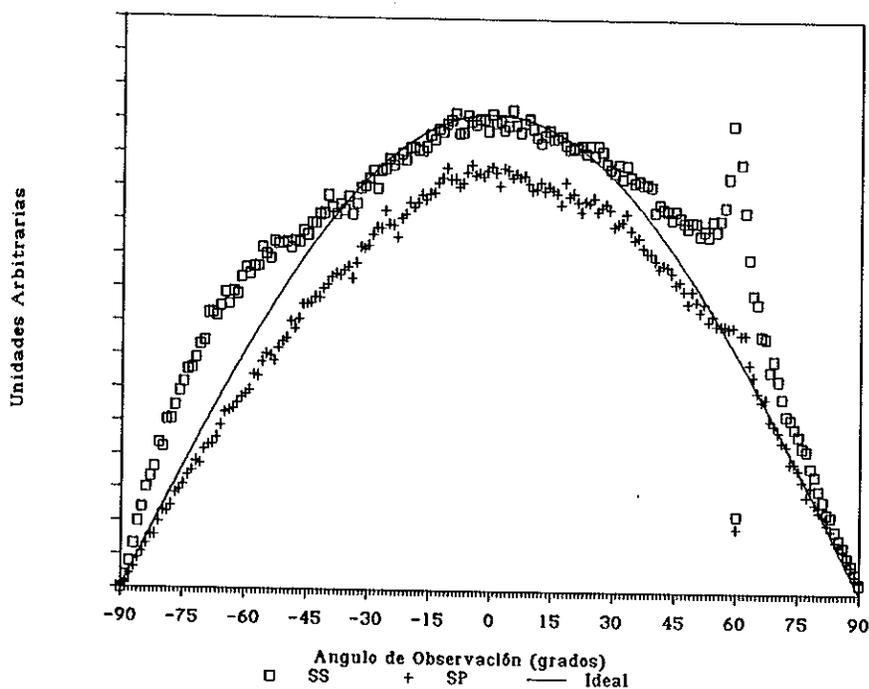


Figura 11 Curva de esparcimiento para la caracterización en reflexión del ESPARCIMETRO, comparada con la curva ideal (línea continua) de un difusor Lambertiano. Modo de iluminación divergente. Polarización S para el haz incidente. Angulo de incidencia -60° respecto a la normal a la superficie. SS detección de polarización S, SP detección de polarización P.

Se puede apreciar, de las curvas de esparcimiento obtenidas, que la respuesta del ESPARCIMETRO a un difusor Lambertiano es muy cercano a la curva ideal. Se atribuyen las pequeñas diferencias a que los difusores utilizados no tienen un comportamiento ideal. La diferencia más fuerte, de lo que es la curva ideal, se presenta en la dirección antiespecular ("back scatter") este pico es debido a un efecto de retroesparcimiento.

III ESPARCIMIENTO DE LUZ POR SUPERFICIES RUGOSAS ALEATORIAS

Como se mencionó en el capítulo I, no existe una solución analítica general para el problema del esparcimiento de luz por superficies rugosas. Esto es debido a que se desconocen los valores del campo eléctrico y su derivada normal en la frontera del sistema. Sin embargo, existen varios modelos que proponen valores para el campo y su derivada normal en la frontera y que permiten obtener resultados aproximados para el campo esparcido.

En este capítulo se presenta la formulación matemática del problema. Se presenta también, el modelo de la pantalla delgada de fase para analizar problemas de esparcimiento de luz. Utilizando este modelo, se encuentran expresiones para la intensidad esparcida por superficies cuyos perfiles constituyen funciones muestra de un proceso aleatorio Gaussiano o un proceso que se denominará gamma.

III.1 Formulación del Problema

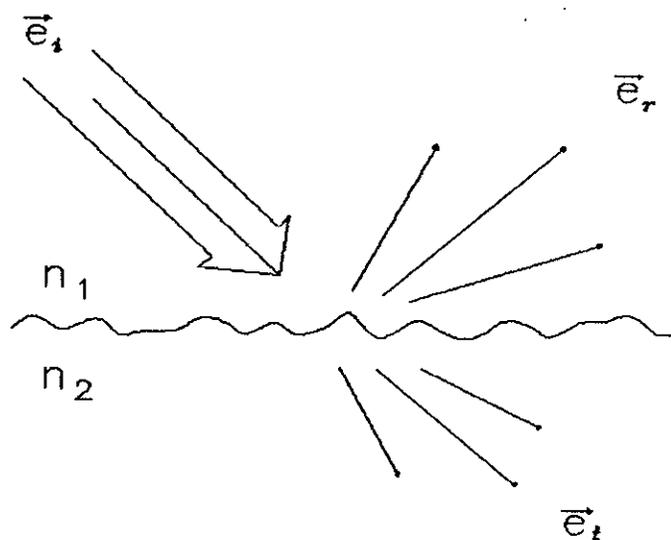


Figura 12 Onda electromagnética incidiendo sobre una superficie rugosa. \vec{e}_i representa el campo eléctrico de la onda incidente, \vec{e}_t el campo eléctrico esparcido en transmisión y \vec{e}_r el campo eléctrico esparcido en reflexión.

Cuando una onda electromagnética incide en una interfaz plana entre dos medios, ésta es reflejada y transmitida de acuerdo con leyes bien conocidas. Si esta interfaz no es plana, sino una superficie rugosa (figura 12), las ondas reflejada y transmitida no se conocen exactamente. El problema de interés es conocer, con algunas aproximaciones, los campos reflejado y transmitido a partir del campo incidente y las propiedades estadísticas de la superficie.

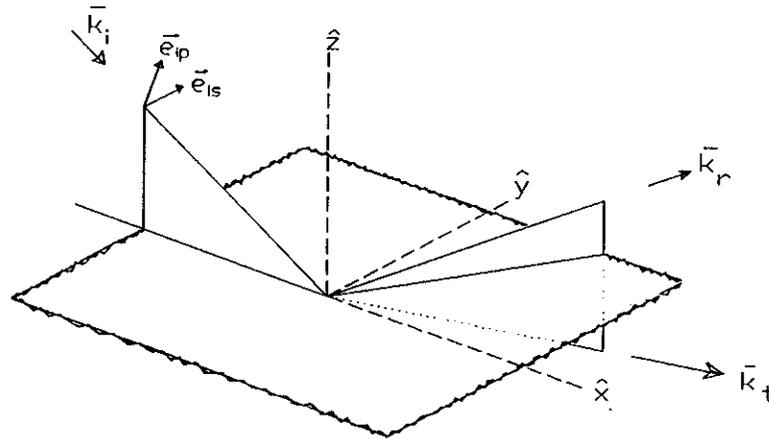


Figura 13 Geometría considerada para el problema de esparcimiento de luz por una superficie rugosa. \vec{e}_{ip} y \vec{e}_{is} son las componentes paralela y perpendicular (al plano de incidencia) del campo eléctrico.

Considere la geometría mostrada en la figura 13, donde se presenta esquemáticamente el vector de campo eléctrico de una onda electromagnética que incide sobre una superficie. Se denota el vector campo eléctrico de la onda incidente por

$$\vec{e}_i(x, y, z, t) = \vec{E}_i(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (2)$$

donde $\vec{E}_i(x, y, z)$ es la amplitud compleja del campo incidente. El vector amplitud compleja puede ser paralelo al plano de incidencia (polarización P), perpendicular al plano de incidencia (polarización S) o una combinación lineal de ambos. Si el campo incidente es P polarizado y el plano de incidencia es el plano xz (figura 13), se puede representar al campo eléctrico por la expresión

$$\vec{e}_i(x, y, z, t) = [E_{ix}(x, y, z)\hat{x} + E_{iz}(x, y, z)\hat{z}]e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Por otro lado, para el caso del campo incidente S polarizado se tiene

$$\vec{e}_i(x, y, z, t) = [E_{iy}(x, y, z)\hat{y}]e^{i\omega t}. \quad (4)$$

En este trabajo, se tratará al problema de esparcimiento como un problema escalar, lo cual constituye una buena aproximación en un gran número de problemas prácticos. El modelo que se utilizará no toma en cuenta efectos de esparcimiento múltiple y depolarización. Así mismo, en esta tesis sólo se considera el caso de las ondas S polarizadas, es decir, casos en los que el campo eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia. El caso de ondas P polarizadas se puede tratar de manera similar al que aquí se presenta.

El perfil que define la superficie rugosa con la cual interactúa el campo incidente será representada por la función (ver figura 14)

$$z = \xi(x, y). \quad (5)$$

El plano promedio de la superficie es el plano $z = 0$, y el medio en el espacio $z > \xi$ es el vacío.

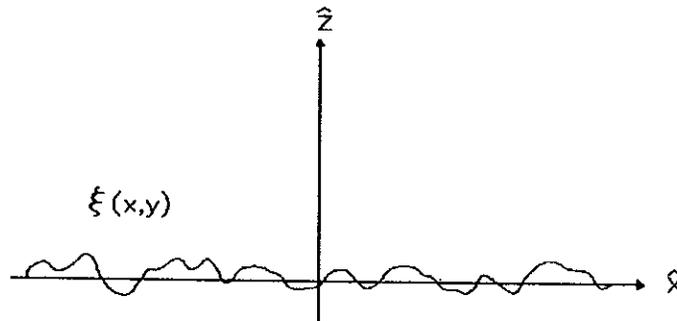


Figura 14 Representación esquemática de una sección del perfil de una superficie rugosa.

Considerando entonces un problema escalar, el campo $e(x, y, z, t)$ en la región de interés debe satisfacer la ecuación de onda:

$$\nabla^2 e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Para ondas monocromáticas, se tiene una dependencia temporal como la indicada en la ecuación (2). Sustituyendo esta expresión en la ecuación (6), se obtiene que la amplitud compleja del campo, $E(x, y, z)$, satisface la ecuación

$$(\nabla^2 + k^2)E = 0, \quad (7)$$

donde k es el número de onda ($k = 2\pi/\lambda$). La ecuación (7) se conoce como la ecuación de Helmholtz.

Considérese ahora un punto de observación denotado por $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ en la región

$z > \xi(x, y)$, en donde nos interesa conocer el campo, y sea S_o una superficie cerrada rodeando al punto P_o . Esta superficie S_o es tal que parte de su frontera coincide con el perfil de la superficie (véase por ejemplo la figura 15). Utilizando el teorema de Green (Goodman [1968], pag 34) se tiene que

$$\int_V \int [G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \nabla^2 E(x, y, z) - E(x, y, z) \nabla^2 G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)] dv = \int_{S_o} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds, \quad (8)$$

donde V es el volumen encerrado por la superficie S_o . Para que el teorema sea válido, tanto la función $G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)$, como su primera y segunda derivada deben ser continuas dentro del volumen cerrado V , y éste debe contener al punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$. Se selecciona a la función de Green $G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)$ de tal manera que dentro del volumen V , cumpla con la ecuación

$$(\nabla^2 + k^2)G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) = 0. \quad (9)$$

Es decir, se escoge una función de Green que cumpla con la ecuación de Helmholtz. Sustituyendo $\nabla^2 E(x, y, z)$ de la ecuación (7) y $\nabla^2 G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)$ de la ecuación (9) en la parte izquierda del teorema de Green (ecuación (8)), se obtiene que

$$0 = \int_{S_o} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds. \quad (10)$$

Solamente la selección adecuada de la función de Green $G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)$, como solución de la ecuación (9), y por lo tanto la selección adecuada de la superficie S_o , que depende del perfil de la superficie, permitirá la aplicación de la ecuación (10). Usualmente se escoge como función de Green para una geometría tridimensional una función que se interpreta como una onda esférica de amplitud unitaria expandiéndose alrededor del punto de observación $P_o = (x_o, y_o, z_o)$. Esto es, el valor de $G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)$ en cualquier punto arbitrario P_1 dentro del volumen V está dado por

$$G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{R}_{oo}|}}{|\vec{r} - \vec{R}_{oo}|}, \quad (11)$$

donde $|\vec{r} - \vec{R}_{oo}| = R_o$ es la distancia del punto P_o a un punto P_1 cualquiera en la superficie, \vec{R}_{oo} es un vector que va del origen de coordenadas al punto de observación, y \vec{r} es el vector de posición sobre la superficie. La función de Green dada por la ecuación (11) satisface la ecuación de Helmholtz (ecuación

(9)), dentro del volumen V , excepto en el punto P_o . Para evitar este punto singular se rodea al punto P_o por una pequeña esfera de radio ϵ y de superficie S_ϵ . La integración se hace ahora sobre dos superficies. Entonces, la ecuación (10) se puede reescribir como

$$\int_{S_o} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds + \int_{S_\epsilon} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds = 0. \quad (12)$$

Seguindo a Goodman [1968] (pag 35), al integrar la expresión (12) en el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$E(x_o, y_o, z_o) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_o} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds. \quad (13)$$

El resultado anterior es conocido como el Teorema Integral de Helmholtz-Kirchhoff. Este permite expresar el campo en cualquier punto P_o , en términos de los valores del campo y su derivada normal en cualquier superficie cerrada rodeando ese punto.

Considérese ahora la geometría mostrada en la figura 15. Cuando se trabaja en reflexión, el campo incidente se encuentra en la región I. Por otro lado, cuando se trabaja en transmisión, el campo incidente se encuentra en la región II. La integral (13) puede separarse como la suma de dos integrales, una de éstas será sobre la superficie S_2 , que corresponde a la contribución al campo esparcido por la superficie rugosa. La segunda integral es sobre la superficie S_1 , que es una semiesfera de radio infinito. Por lo anterior, la integral (13) se puede expresar como

$$E(x_o, y_o, z_o) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds + \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds. \quad (14)$$

Cuando el campo incidente está en la región I ($z > \xi(x, y)$), la primera integral de la ecuación (14) es la contribución al campo por la semiesfera infinita, es decir, en ausencia de la superficie rugosa. Esta contribución es solamente el campo incidente $E_i(x_o, y_o, z_o)$ en el punto P_o . Entonces se tiene que

$$E_i(x_o, y_o, z_o) = \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds, \quad (15)$$

con lo que el campo total en la región I es:

$$E(x_o, y_o, z_o) = E_i(x_o, y_o, z_o) + E_s(x_o, y_o, z_o), \quad (16)$$

donde

$$E_s(x_o, y_o, z_o) = \frac{1}{4\pi} \int_{s_2} \int \left[G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \frac{\partial}{\partial n} E(x, y, z) - E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) \right] ds, \quad (17)$$

representa el campo esparcido por la superficie. Para el segundo caso, cuando el campo incidente está en la región II ($z < \xi(x, y)$), la primera integral en la ecuación (14) es la contribución de la semiesfera infinita y ésta será igual a cero (ver Goodman [1968], pag. 37). Entonces, el campo total en la región I cuando el campo incidente está en la región II está dado por

$$E(x_o, y_o, z_o) = E_s(x_o, y_o, z_o), \quad (18)$$

donde $E_s(x_o, y_o, z_o)$ está dada por la ecuación (17). Nótese que en este caso (transmisión), en la región I sólo está presente el campo esparcido.

El problema se reduce, entonces, a encontrar el campo en el punto P_o en términos de sus valores en la superficie. Estos valores en la superficie no se conocen y no se conoce una manera sencilla de determinarlos. Generalmente se procede proponiendo estos valores o aproximándolos bajo ciertas suposiciones que establecen algunos modelos. A continuación se describe uno de ellos.

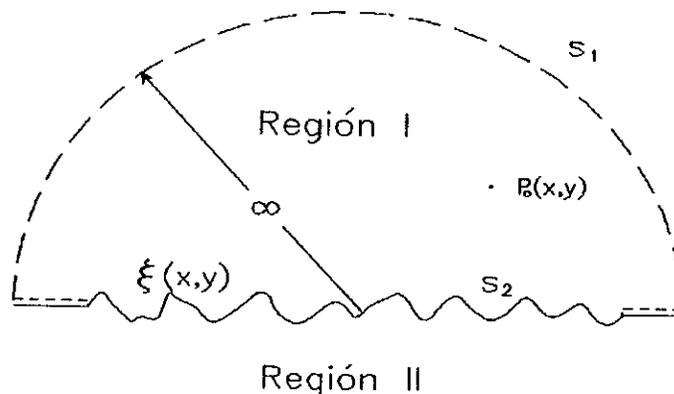


Figura 15 Geometría para el cálculo del campo esparcido.

III.2 El Modelo de la Pantalla Delgada de Fase

Uno de los modelos empleados para analizar problemas de esparcimiento de luz por superficies es el de la pantalla delgada de fase. Para explicar este modelo, considérese el frente de onda transmitido por un difusor iluminado por una onda plana, como se muestra en la figura 16. Este modelo establece que la superficie que esparce se puede modelar como una película plana e infinitamente delgada, cuyo efecto sobre el frente de onda incidente es el de modificar su fase en cada punto de acuerdo a las leyes de la óptica geométrica, tomando en cuenta la diferencia de camino óptico asociado al perfil de la superficie. Para que lo anterior se cumpla debe suponerse lo siguiente (Welford [1980]):

- a) que la superficie, en el caso de reflexión, es un reflector perfecto. En el caso de transmisión, que la superficie es homogénea y con un factor de transmisión que no depende del ángulo de incidencia local.
- b) que la superficie es suave. Es decir, sus detalles son mucho mayores que la longitud de onda y no tiene cambios abruptos en el perfil. Esto evita el esparcimiento múltiple y los efectos de sombreado.
- c) que los efectos de polarización son despreciables.

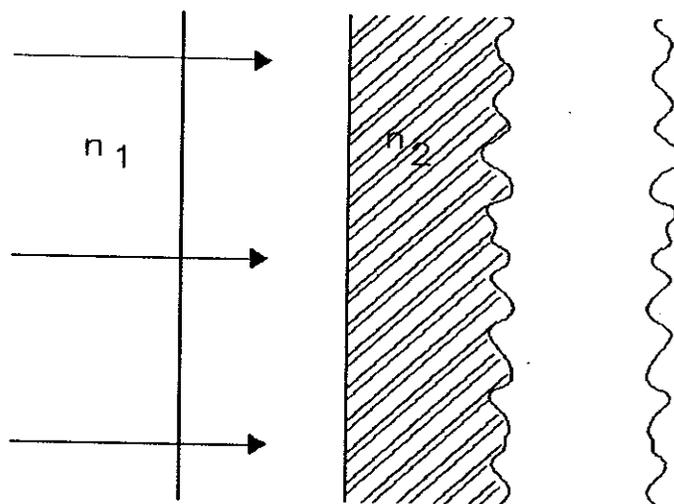


Figura 16 Modelo de la Pantalla Delgada de Fase. Frente de onda plano incidiendo sobre una superficie.

Para una superficie rugosa, el corrimiento de fase es una función aleatoria de las coordenadas y se representa por la función $\phi(x, y)$. Estas variaciones de fase dependen, además del ángulo de incidencia, la longitud de onda y el índice de refracción, de la variación de las alturas en la superficie. Entonces, las variaciones de fase $\phi(x, y)$ constituyen un proceso aleatorio. Con este modelo, se determinan los cambios

de fase introducidos en transmisión y en reflexión por un difusor de un material con índice de refracción n_2 y perfil $\xi(x, y)$, inmerso en un medio de índice de refracción n_1 . Para esto, considérese la situación mostrada en la figura 17. El cambio de fase incorporado en transmisión es:

$$\phi_{trans}(x, y) = k\xi(x, y) [\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} - n_1 \cos \theta_2]. \quad (19)$$

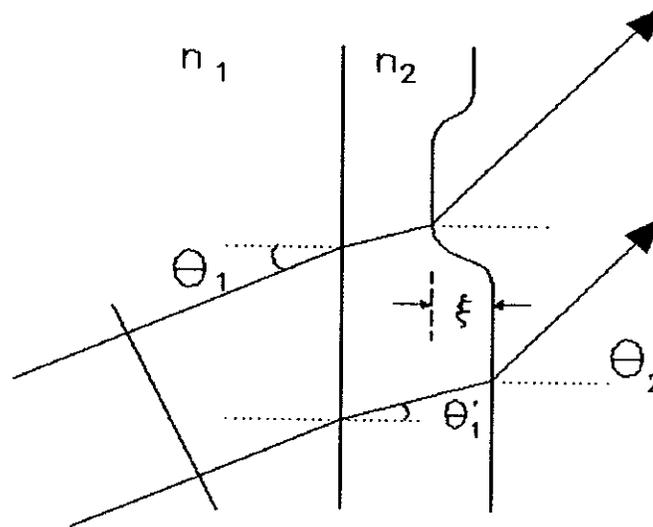


Figura 17 Cambio de fase introducido en transmisión. Diagrama esquemático de un frente de onda plano incidiendo sobre una superficie.

Por otro lado, para el caso de reflexión, y con referencia a la figura 18, el cambio de fase es:

$$\phi_{ref}(x, y) = n_1 k \xi(x, y) [\cos \theta_1 + \cos \theta_2]. \quad (20)$$

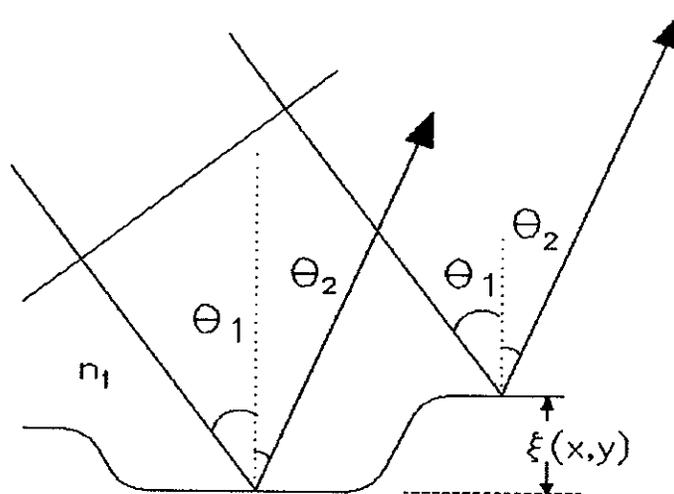


Figura 18 Cambio de fase introducido en reflexión. Diagrama esquemático de un frente de onda plano incidiendo sobre una superficie.

III.3 Generalidades del Esparcimiento de Luz por Superficies cuyo Perfil Constituye un Proceso Aleatorio

Considérese, de las ecuaciones para el campo total en reflexión (ecuación (16)), o en transmisión (ecuación (18)), sólo la parte que corresponde al campo esparcido (ecuación (17)). La función de Green fue propuesta en la sección 3.1 (ecuación (11)) y por brevedad se utilizará la notación $E_s(x_o, y_o, z_o) = E_s(P_o)$. Debido a que experimentalmente resulta conveniente iluminar la superficie con un frente de onda convergente, consideraremos este caso en particular. Utilizando el modelo de la Pantalla Delgada de Fase, se tiene que la amplitud compleja justo después de la superficie rugosa está dada por

$$E(x, y, 0) = T_p A \frac{e^{-ik_1 R_f}}{R_f} e^{i\phi_{trans}(x, y)}, \quad (21)$$

en transmisión, y

$$E(x, y, 0) = R_p A \frac{e^{-ik_1 R_f}}{R_f} e^{i\phi_{ref}(x, y)}, \quad (22)$$

en reflexión. En estas expresiones, A es la amplitud de la onda incidente, T_p representa el factor de transmisión promedio, R_p la reflectividad promedio de la superficie, y $\phi_{trans}(x, y)$ y $\phi_{ref}(x, y)$ los corrimientos de fase en transmisión y reflexión respectivamente y R_f la distancia del punto $(x, y, 0)$ al punto $(0, 0, z_o)$, ver figura 19. Por el momento se utilizará la expresión de la forma

$$E(x, y, 0) = A \frac{e^{-ik_1 R_f}}{R_f} e^{-i\phi(x, y)}, \quad (23)$$

sin especificar si es en transmisión o en reflexión; se entiende que habrá de agregarse el coeficiente adecuado y considerar el corrimiento de fase para cada caso.

Sustituyendo la expresión (23) en (17), y denotando S_z por S , obtenemos (Goodman [1968], pag 40)

$$E_s(x_o, y_o, z_o) = \frac{-iAk}{4\pi R_o R_f} \int_S \int e^{i\phi(x, y)} e^{ik(R_o - R_f)} [\cos(\vec{n}, \vec{R}_o) + \cos(\vec{n}, \vec{R}_f)] ds. \quad (24)$$

En estas expresiones $\cos(\vec{n}, \vec{R}_o)$ y $\cos(\vec{n}, \vec{R}_f)$ son, respectivamente, el coseno del ángulo formado entre la normal y el vector \vec{R}_o , y el coseno del ángulo formado entre la normal y el vector \vec{R}_f . Si el foco del haz incidente coincide con el origen del plano de observación se tiene que $\cos(\vec{n}, \vec{R}_f) = 1$. Asimismo, si la

superficie tiene pendientes pequeñas y $R_{oo} \gg (x, y)_{max}$, entonces $\cos(\vec{n}, \vec{R}_o) \approx \cos \theta_2$, donde θ_2 es el ángulo formado entre el eje z y el vector que va del origen al punto de observación. Se puede reescribir la ecuación (24) como

$$E_s(x_o, y_o, z_o) = \frac{-iAk}{4\pi R_o R_f} [1 + \cos \theta_2] \int_S \exp[i\phi(x, y)] \exp[ik(R_o - R_f)] ds. \quad (25)$$

El problema es, dada la estadística de la fase $\phi(x, y)$ en el plano $(x, y, 0)$, determinar algunas propiedades de la distribución de intensidad en el campo lejano. En particular, en este trabajo es de interés la distribución angular de la intensidad promedio. Considérese ahora la geometría mostrada en la figura 19. La superficie rugosa se encuentra en el plano $(x, y, 0)$, y la luz esparcida se detecta sobre el semicírculo de radio R_{oo} . Se utiliza ahora la siguiente aproximación:

$$R_o - R_f \approx -x \frac{x_o}{R_{oo}} - y \frac{y_o}{R_{oo}}, \quad (26)$$

que se puede reconocer como la aproximación de Fraunhofer (Born y Wolf [1975], pag. 382). Esta aproximación es adecuada si

$$\frac{k(x x_o + y y_o)^2}{2R_{oo}^3} \ll 2\pi. \quad (27)$$

Es decir, se está considerando que los términos de orden cuadrático o mayor no contribuyen de manera apreciable al valor de la integral de la ecuación (25).

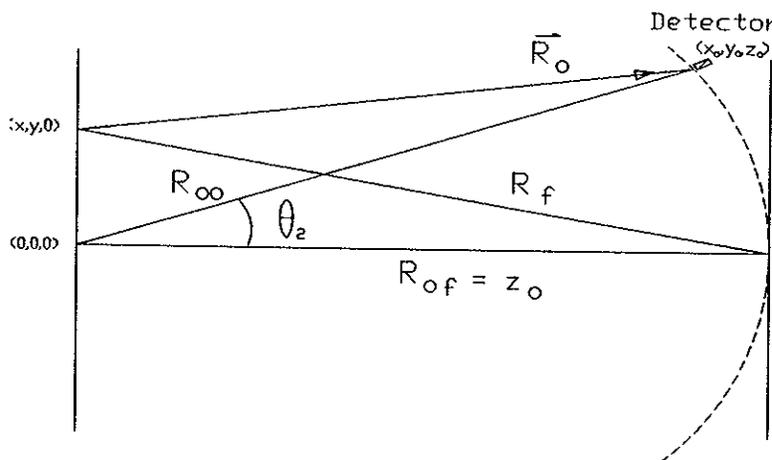


Figura 19

Geometría para el cálculo del campo esparcido.

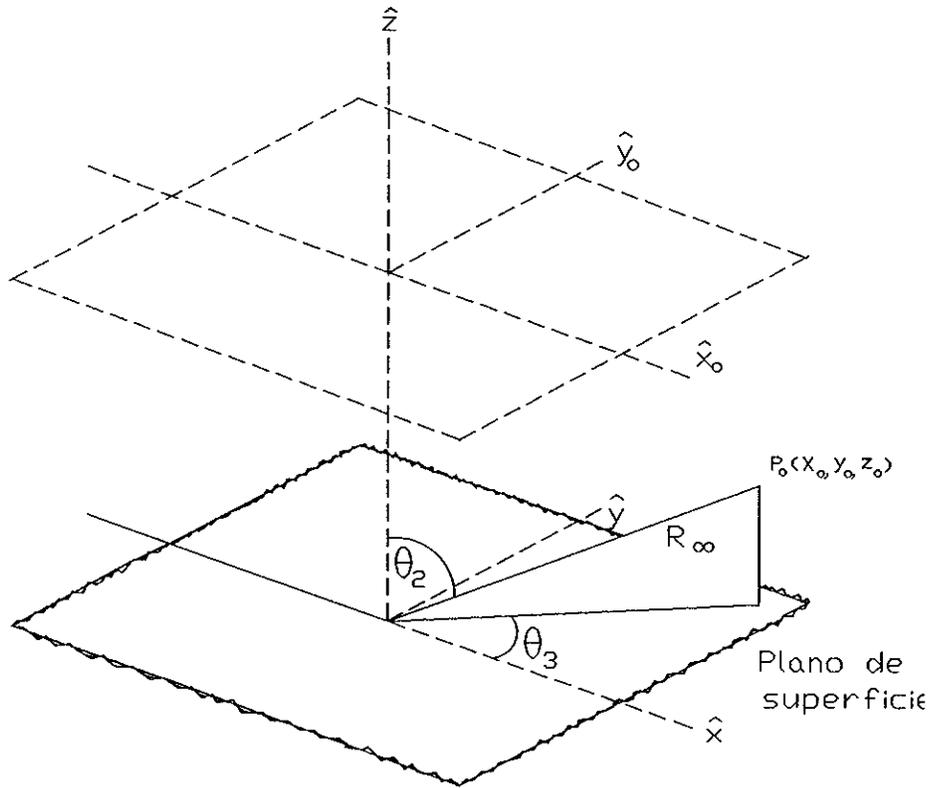


Figura 20 Notación utilizada en el problema de esparcimiento.

Considerando ahora la geometría mostrada esquemáticamente en la figura 20, se obtienen las siguientes relaciones

$$\frac{x_0}{R_{\infty}} = \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3 \quad ; \quad \frac{y_0}{R_{\infty}} = \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 . \quad (28)$$

Por lo que la expresión (27) se puede reescribir como

$$\frac{k(x \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3 + y \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2}{2R_{\infty}} \ll 2\pi , \quad (29)$$

y si se hace uso de la desigualdad (Born y Wolf [1975], pag. 384)

$$(x \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3 + y \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2 \leq (x^2 + y^2)(\text{sen}^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \text{sen}^2 \theta_2 \text{sen}^2 \theta_3) , \quad (30)$$

(nótese que los términos $\text{sen}^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3$ y $\text{sen}^2 \theta_2 \text{sen}^2 \theta_3$ no pueden adquirir valores mayores que uno),

entonces se puede reescribir la expresión (27) como

$$R_{\infty} \gg \frac{(x^2 + y^2)}{\lambda} , \quad (31)$$

lo que implica que, para estar de acuerdo con la aproximación de la expresión (26), la distancia del origen al punto de observación tiene que ser mucho mayor que la razón de la dimensión máxima del elemento esparcidor y la longitud de onda. Sustituyendo la aproximación (26) en la expresión (25) se obtiene la siguiente ecuación:

$$E_s(x_o, y_o, z_o) = \frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_S \exp[i\phi(x, y)] \exp\left[-ik\left(x \frac{x_o}{R_{oo}} + y \frac{y_o}{R_{oo}}\right)\right] ds, \quad (32)$$

donde K es el factor de oblicuidad y está definido por

$$K = 1 + \cos(\theta_2). \quad (33)$$

Sustituyendo las relaciones (28) en la ecuación (32), se obtiene:

$$E_s(P_o) = \frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_S \exp[i\phi(x, y)] \exp[iv_x x + iv_y y] ds, \quad (34)$$

donde

$$v_x = -k \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3; \quad v_y = -k \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3. \quad (35)$$

La expresión (34) representa la amplitud compleja en cualquier punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ a una distancia R_{oo} del origen del plano donde está la superficie, siempre y cuando la aproximación (26) sea adecuada. Las expresiones que se derivarán para la intensidad esparcida están basadas en esta expresión. Esta expresión se reduce en el caso del ESPARCIMETRO, ya que el detector sólo se mueve en un plano ($y_o = 0$ ó $v_y = 0$), sin embargo, por generalidad, se mantendrá la expresión (34). La expresión para la amplitud compleja utilizando el modelo de la Pantalla Delgada de Fase (ecuación (34)), es esencialmente la misma que se obtiene cuando se emplea la aproximación de Kirchhoff (ver Apéndice B). Las expresiones que resultan difieren, esencialmente, en la forma del factor de oblicuidad.

En general, la intensidad promedio en el campo lejano puede separarse matemáticamente en dos componentes que, por razones que no se discutirán, se conocen como la componente difusa o incoherente (I_{dif}), y la componente especular o coherente (I_{esp}). La intensidad promedio esparcida se define de la siguiente manera:

$$\langle I_s(P_o) \rangle = \langle |E_s(P_o)|^2 \rangle. \quad (36)$$

Separándola en sus componentes especular y difusa se tiene que

$$\langle I_s(P_o) \rangle = I_{esp}(P_o) + I_{dif}(P_o), \quad (37)$$

donde se está definiendo a las dos componentes como:

$$I_{esp}(P_o) = |\langle E_s(P_o) \rangle|^2, \quad (38)$$

$$I_{dif}(P_o) = \langle I_s(P_o) \rangle - |\langle E_s(P_o) \rangle|^2. \quad (39)$$

Primero se presenta el cálculo para la componente especular. De la ecuación (34) se obtiene que

$$\langle E_s(P_o) \rangle = \left\langle \frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_{\mathcal{A}} \exp[i\phi(x, y)] \exp[iv_x x + iv_y y] ds \right\rangle, \quad (40)$$

donde \mathcal{A} representa la región iluminada. El único término que tiene comportamiento aleatorio, y sobre el que se va a promediar, es el que corresponde a la variación de la fase. Para una posición (x, y) fija, ésta se considera una variable aleatoria que toma valores de acuerdo a una función de densidad de probabilidad. Tomando el promedio de ensamble y dada la naturaleza estacionaria del proceso aleatorio, las cantidades promediadas son independientes de las variables de integración. Entonces se puede reescribir la ecuación (40) como

$$\langle E_s(P_o) \rangle = \langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle E_o(P_o), \quad (41)$$

donde

$$E_o(P_o) = \frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_S \exp[iv_x x + iv_y y] ds. \quad (42)$$

$E_o(P_o)$ representa la amplitud compleja que se tendría en ausencia de la superficie (para transmisión) o con una superficie perfectamente plana y conductora perfecta (Chandley y Welford [1975], Beckmann y Spizzichino [1963], pag. 22). El valor del término $\langle e^{i\phi(x, y)} \rangle$ depende de la función de densidad de alturas de la superficie rugosa. Se propondrán algunas funciones de densidad de probabilidad específicas más adelante. De las expresiones (38) y (41) se encuentra que la componente especular está dada por

$$I_{esp}(P_o) = |\langle e^{i\phi(x, y)} \rangle|^2 I_o(P_o), \quad (43)$$

donde el término

$$I_o(P_o) = \left| \frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_{\mathcal{A}} \exp[iv_x x + iv_y y] ds \right|^2, \quad (44)$$

corresponde al patrón de difracción de Fraunhofer en ausencia de difusor, es decir, es la intensidad que se registraría en propagación libre. Se supone ahora, que se ilumina el difusor con un haz circular y uniforme de radio w . En este caso, es conveniente hacer el siguiente cambio de variables

$$x = \rho \cos \alpha, \quad (45a)$$

$$y = \rho \sin \alpha. \quad (45b)$$

Así mismo, para el punto de detección se definen nuevas coordenadas a través de las expresiones

$$\begin{aligned}v_x &= \tau \cos \eta, \\v_y &= \tau \sin \eta.\end{aligned}\quad (46)$$

Utilizando las nuevas variables, así como algunas identidades trigonométricas, de la expresión (44) se obtiene que

$$I_o(P_o) = \left| \frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_0^w \int_0^{2\pi} \exp[i\rho\tau \cos(\alpha - \eta)] \rho d\rho d\alpha \right|^2; \quad (47)$$

y después de integrar se obtiene el resultado

$$I_o(P_o) = \left[\frac{AkK}{4\pi R_o R_f} \right]^2 (\pi w^2)^2 \left[\frac{2J_1(w\tau)}{w\tau} \right]^2. \quad (48)$$

Se define ahora la cantidad I_{oo} , que representa la intensidad observada en eje en ausencia del difusor. De la expresión (48):

$$I_{oo} = \left[\frac{AK\mathcal{A}}{2\lambda R_o R_f} \right]^2, \quad (49)$$

donde $\mathcal{A} = \pi w^2$ es el área iluminada. Por lo tanto, de (35), (43) y (48), la expresión para la componente especular es:

$$I_{ssp}(P_o) = |\langle e^{i\phi(x,y)} \rangle|^2 I_{oo} \left[\frac{2J_1(wk\sqrt{(\sin\theta_2 \cos\theta_3)^2 + (\sin\theta_2 \sin\theta_3)^2})}{wk\sqrt{(\sin\theta_2 \cos\theta_3)^2 + (\sin\theta_2 \sin\theta_3)^2}} \right]^2. \quad (50)$$

Se procede ahora a calcular la componente difusa. Utilizando la expresión para el campo esparcido en un punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ (ecuación (34)), se tiene que

$$\begin{aligned}\langle I_s(P_o) \rangle &= \langle |E_s(P_o)|^2 \rangle = \langle E_s(P_o) E_s^*(P_o) \rangle = \\ &= \left\langle \left[\frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_{\mathcal{A}} \exp[i\phi(x_1, y_1)] \exp[iv_x x_1 + iv_y y_1] dy_1 dx_1 \right] \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_{\mathcal{A}} \exp[-i\phi(x_2, y_2)] \exp[-iv_x x_2 - iv_y y_2] dy_2 dx_2 \right] \right\rangle.\end{aligned}\quad (51)$$

Los términos que contienen a las variaciones de fase, son los únicos que tienen comportamiento aleatorio, y el promedio sólo afecta a éstos. Entonces se puede reescribir la ecuación (51) como

$$\langle I_s(P_o) \rangle = \left[\frac{AkK}{4\pi R_o R_f} \right]^2 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \langle \exp[i\phi(x_1, y_1) - i\phi(x_2, y_2)] \rangle \exp[iv_x(x_1 - x_2) + iv_y(y_1 - y_2)] dy_1 dx_1 dy_2 dx_2. \quad (52)$$

Por otro lado, el segundo término de la ecuación (39) se obtiene de las expresiones (41) y (42)

$$\begin{aligned} |\langle E_s(P_o) \rangle|^2 &= \langle E_s(P_o) \rangle \langle E_s(P_o) \rangle^* = \\ & \left[\frac{-iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle \exp[iv_x x_1 + iv_y y_1] dx_1 dy_1 \right] \\ & \left[\frac{iAkK}{4\pi R_o R_f} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle^* \exp[-iv_x x_2 - iv_y y_2] dx_2 dy_2 \right]; \end{aligned} \quad (53)$$

que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\langle E_s(P_o) \rangle|^2 &= \\ & \left[\frac{AkK}{4\pi R_o R_f} \right]^2 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} |\langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle|^2 \exp[iv_x(x_1 - x_2) + iv_y(y_1 - y_2)] dy_1 dx_1 dy_2 dx_2. \end{aligned} \quad (54)$$

Entonces de las ecuaciones (39), (52) y (54) la expresión completa para la componente difusa es

$$\begin{aligned} I_{dif}(P_o) \rangle &= \left[\frac{AkK}{4\pi R_o R_f} \right]^2 \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} [\langle \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] \rangle - |\langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle|^2] \\ & \exp[iv_x(x_1 - x_2) + iv_y(y_1 - y_2)] dy_1 dx_1 dy_2 dx_2, \end{aligned} \quad (55)$$

donde se está utilizando la notación

$$\phi_1 = \phi(x_1, y_1); \quad \phi_2 = \phi(x_2, y_2). \quad (56)$$

Las expresiones que tienen paréntesis triangulares son promedios cuyo valor depende de las propiedades estadísticas del perfil de la superficie rugosa. Se considerarán varias funciones de densidad de probabilidad (pdf) para las alturas en la siguiente sección. Se supone que la rugosidad en la superficie, y por lo tanto el cambio de fase $\phi(x, y)$, es un proceso aleatorio estacionario e isotrópico, por lo que $\langle \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] \rangle - |\langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle|^2$ es una función que sólo depende del parámetro ρ que es la separación entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Entonces, para evaluar la expresión (55), se utilizan los siguientes cambios de variables:

$$\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad (57a)$$

$$\tan \alpha = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}, \quad (57b)$$

con lo que la integral (55) se reescribe como

$$I_{dif}(P_o) = \left[\frac{AkK}{4\pi R_o R_f} \right]^2 \int_0^u \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{A}} \{ \langle \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] \rangle - | \langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle |^2 \} \exp[iv_x \rho \cos \alpha + iv_y \rho \sin \alpha] dx_1 dy_1 \rho d\rho d\alpha. \quad (58)$$

Utilizando el cambio de coordenadas de la expresión (46) en la ecuación anterior se obtiene, después del uso de identidades trigonométricas

$$I_{dif}(P_o) = \left[\frac{AkK}{4\pi R_o R_f} \right]^2 \int_0^u \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{A}} \{ \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] - | \langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle |^2 \} \exp[i\tau \rho \cos(\alpha - \eta)] dx_1 dy_1 \rho d\rho d\alpha. \quad (59)$$

Evaluando la integral sobre x_1 y y_1 se obtendrá solamente el área \mathcal{A} de la región iluminada. Si además se integra sobre la variable angular α se obtiene

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \int_0^u \{ \langle \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] \rangle - | \langle \exp[i\phi(x, y)] \rangle |^2 \} J_o(\tau \rho) \rho d\rho. \quad (60)$$

La expresión (60) representa la componente difusa de la intensidad promedio esparcida y junto con la expresión para la componente especular (ecuación (50)), son los resultados más importantes de esta sección. Para proseguir, es necesario suponer ciertas estadísticas para el proceso aleatorio.

III.4 Modelos Estadísticos de las Superficies

En la sección anterior se observó que matemáticamente es posible separar a la intensidad promedio en el campo lejano, en una componente especular y una difusa, ecuaciones (50) y (60) respectivamente. En ambas expresiones está presente el promedio sobre el término que introduce una variación en la fase, que es un proceso aleatorio. Para encontrar propiedades estadísticas del campo esparcido, es necesario conocer el tipo de proceso aleatorio que componen las variaciones en las alturas de la superficie iluminada. Conociendo esto es posible calcular los promedios involucrados.

III.4.1 Superficies cuyo Perfil es un Proceso Aleatorio Gaussiano con Función de Autocorrelación Gaussiana

En esta sección se considera el problema de determinar la componente especular y difusa de la intensidad promedio esparcida por una superficie cuyas variaciones de altura constituyen un proceso aleatorio

Gaussiano.

Suponemos que las variaciones de altura $\xi(x, y)$ de la superficie iluminada constituyen una función muestra de un proceso aleatorio Gaussiano. Entonces, la función de densidad de probabilidad que describe estas variaciones es Gaussiana. También se supone, sin perder generalidad, que el promedio de las alturas es cero ($\langle \xi(x, y) \rangle = 0$). Esta función de densidad de probabilidad se escribe de la siguiente manera (Freund y Walpole [1980], pag 206, Goodman [1984], pag 12)

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right] \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (61)$$

donde σ_ξ representa la desviación estandar de la variable $\xi(x, y)$. Dadas las relaciones (19) y (20), se observa que también $\phi(x, y)$ constituye un proceso aleatorio Gaussiano, y la función de densidad de probabilidad está dada por una ecuación similar a la ecuación (57) con $\phi(x, y)$ reemplazando a $\xi(x, y)$. La función de densidad de probabilidad bivariada también es conocida (Goodman [1984], pag 35), entonces, ya sea por integración directa o a través de la función característica, se tiene que (Beckmann y Spizzichino [1963], pag 185):

$$\langle e^{i\phi(x, y)} \rangle = e^{-\sigma_\phi^2/2}; \quad (62)$$

$$\langle e^{i[\phi(x_1, y_1) - \phi(x_2, y_2)]} \rangle = e^{-\sigma_\phi^2[1 - C(\rho)]}, \quad (63)$$

donde $C(\rho)$ es la función de autocorrelación y σ_ϕ^2 es la variancia del cambio de fase incorporado. Para una función de autocorrelación de tipo Gaussiano, se tiene que (Beckmann y Spizzichino [1963], pag 80)

$$C(\rho) = e^{-\rho^2/\alpha^2}, \quad (64)$$

donde α es la longitud de correlación.

La componente especular de la intensidad se encuentra de las ecuaciones (50) y (62), de donde se obtiene

$$I_{\bullet\bullet\rho}(P_o) = e^{-\sigma_\phi^2} I_{oo} \left[\frac{2J_1\left(wk\sqrt{(\sin\theta_2\cos\theta_3)^2 + (\sin\theta_2\sin\theta_3)^2}\right)}{wk\sqrt{(\sin\theta_2\cos\theta_3)^2 + (\sin\theta_2\sin\theta_3)^2}} \right]^2. \quad (65)$$

La expresión anterior es la componente especular de la intensidad promedio en el campo lejano.

En el caso de la componente difusa, sustituyendo (62) y (63) en la expresión para la componente difusa (ecuación (60)) se obtiene

$$I_{diff}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \int_0^w \left\{ e^{-\sigma_\phi^2[1 - C(\rho)]} - e^{-\sigma_\phi^2} \right\} J_0(\tau\rho) \rho d\rho. \quad (66)$$

Para evaluar esta integral, se expresa el factor del integrando que está entre paréntesis cursivos como una serie de Taylor. Es decir

$$e^{-\sigma_{\dagger}^2[1-C(\rho)]} = e^{-\sigma_{\dagger}^2} = e^{-\sigma_{\dagger}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\dagger}^{2m}}{m!} [C(\rho)]^m. \quad (67)$$

De lo anterior, la expresión (66) se puede reescribir de la forma

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} e^{-\sigma_{\dagger}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\dagger}^{2m}}{m!} \int_0^w [C(\rho)]^m J_o(\tau\rho) \rho d\rho. \quad (68)$$

Considerando que la función de autocorrelación está dada por la ecuación (64) y usando las relaciones dadas por las ecuaciones (35) y (46), se puede evaluar la integral término a término sobre la parte radial considerando el resultado (Beckmann y Spizzichino [1963], apéndice B):

$$\int_0^{\infty} J_o(v\tau) e^{-p\tau^2} \tau d\tau = \frac{1}{2p} e^{-v^2/4p} \quad (\Re(p) > 0). \quad (69)$$

Dado que la función de autocorrelación que se está considerando (ecuación (64)) tiene valor significativo sólo para valores pequeños de ρ , se puede cambiar el límite superior de la integral de la parte radial de w a infinito sin necesidad de hacer cambios en las variables de integración. Entonces se encuentra que la componente difusa de la intensidad promedio en el campo lejano está dada por

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi\alpha^2}{4\mathcal{A}} I_{oo} e^{-\sigma_{\dagger}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\dagger}^{2m}}{m!} \exp\left\{\frac{-k^2\alpha^2}{4m} [(\sin\theta_2 \cos\theta_3)^2 + (\sin\theta_2 \sin\theta_3)^2]\right\}. \quad (70)$$

La solución anterior es válida para cualquier valor de σ_{\dagger} , aunque para valores grandes la serie converge lentamente y se pueden presentar problemas numéricos. Cuando $\sigma_{\dagger} \gg 1$ es posible obtener otro tipo de solución que es más conveniente (Beckmann y Spizzichino [1963], pag 84, Kim et al [1987]). Primero se nota que en este caso, el término $e^{-\sigma_{\dagger}^2}$ es prácticamente cero. El factor dentro de los paréntesis cursivos en la ecuación (66) contribuye significativamente a la integral cuando la función de autocorrelación (ecuación (64)), tiene un valor grande. Es decir solamente para valores pequeños de ρ . Por lo anterior, cuando $\sigma_{\dagger} \gg 1$ ("deep phase screen") es posible aproximar el valor de la integral considerando solamente los dos primeros términos del desarrollo en serie de la función de autocorrelación, esto es

$$C(\rho) = e^{-\rho^2/a^2} \approx 1 - \frac{\rho^2}{a^2}. \quad (71)$$

Este método tiene bases matemáticas firmes, y se conoce como el método de "steepest descent" (Born y Wolf [1975], Apéndice III), aunque aquí solamente se han dado argumentos para hacerlo parecer razonable. Con las consideraciones anteriores, es posible reescribir la expresión (66) como

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \int_0^{\infty} \{\exp[-\sigma_{\downarrow}^2 \rho^2 / \alpha^2]\} J_o(\tau\rho) \rho d\rho. \quad (72)$$

Para evaluar la integral anterior, utilizando el resultado de la expresión (69). Entonces de la ecuación (72) resulta:

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left[\frac{\alpha^2}{2\sigma_{\downarrow}^2} \exp\left(-\frac{\tau^2 \alpha^2}{4\sigma_{\downarrow}^2}\right) \right]. \quad (73)$$

El resultado anterior muestra la componente difusa de la intensidad esparcida promedio por una superficie con una distribución de alturas Gaussiana y una función de autocorrelación Gaussiana cuando la variancia de la fase es muy grande. Considerando las relaciones en las expresiones (35) y (46), se escribe finalmente la expresión para la componente difusa para el caso $\sigma_{\downarrow}^2 \gg 1$, como:

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left[\frac{\alpha^2}{2\sigma_{\downarrow}^2} \exp\left(-\frac{k^2 \alpha^2}{4\sigma_{\downarrow}^2} [(\sin\theta_2 \cos\theta_3)^2 + (\sin\theta_2 \sin\theta_3)^2] \right) \right]. \quad (74)$$

III.4.2 Superficies cuyo Perfil es un Proceso Aleatorio Gaussiano con Función de Autocorrelación Exponencial Negativa.

En la sección anterior se consideró una superficie cuyas alturas constitúan un proceso aleatorio Gaussiano con una función de autocorrelación Gaussiana. Ahora se considera un proceso del mismo tipo pero con una función de autocorrelación exponencial negativa, es decir

$$C(\rho) = e^{-\rho/\alpha}. \quad (75)$$

La componente especular es la misma que se obtuvo en la sección anterior (ecuación (65)), ya que en ésta no está involucrada la función de autocorrelación. Para la componente difusa, sustituyendo (75) en (68), se puede reescribir la expresión (68) como

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} e^{-\sigma_{\downarrow}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\downarrow}^{2m}}{m!} \int_0^{\infty} e^{-m\rho/\alpha} J_o(\tau\rho) \rho d\rho \quad (76)$$

Nuevamente, la función de autocorrelación que se considera (ecuación (75)), tiene valor significativo para valores pequeños de ρ , por lo que se puede cambiar el límite superior de la integral anterior por infinito sin necesidad de hacer modificaciones adicionales. Para evaluar la integral en la expresión anterior, se utiliza el resultado (Gradshteyn y Ryzhik [1980], pag 712):

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_0(\beta x) x dx = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}, \quad (77)$$

con el cual, de la ecuación (76) se obtiene

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \frac{e^{-\sigma_\dagger^2}}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\dagger^{2m}}{(m-1)!} \left\{ \frac{m^2}{\alpha^2} + \tau^2 \right\}^{-3/2}. \quad (78)$$

Usando las relaciones de las ecuaciones (35) y (46), la distribución de la componente difusa de la intensidad promedio en el campo lejano debido a una superficie cuyas alturas es un proceso aleatorio Gaussiano con una función de autocorrelación exponencial negativa es

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \frac{e^{-\sigma_\dagger^2}}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\dagger^{2m}}{(m-1)!} \left(\frac{m^2}{\alpha^2} + k^2 [(\sin \theta_2 \cos \theta_3)^2 + (\sin \theta_2 \sin \theta_3)^2] \right)^{-3/2}. \quad (79)$$

Con una justificación como la descrita en la parte final de la sección III.4.1, se considerarán los primeros dos términos del desarrollo en serie de la función de autocorrelación exponencial negativa para poder obtener otro tipo de solución. Esto sólo será válido cuando $\sigma_\dagger \gg 1$. Entonces se aproxima a la función de autocorrelación como:

$$C(\rho) = e^{-\rho/\alpha} \approx 1 - \frac{\rho}{\alpha}. \quad (80)$$

Considerando la aproximación anterior, es posible reescribir la expresión para la componente difusa, ecuación (66), como:

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \int_0^{\infty} e^{-\sigma_\dagger^2 \rho/\alpha} J_0(\tau \rho) \rho d\rho. \quad (81)$$

Para evaluar la integral anterior, se utiliza el resultado de la expresión (77), por lo que después de integrar en la ecuación (81) resulta la expresión

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left[\frac{\alpha^2}{\sigma_\dagger^4} \left(1 + \frac{\tau^2 \alpha^2}{\sigma_\dagger^4} \right)^{-3/2} \right]. \quad (82)$$

Sustituyendo las relaciones (35) y (46) en la expresión anterior se obtiene finalmente:

$$I_{diff}(P_o) = \frac{\pi}{2\lambda} I_{\infty} \left[\frac{\alpha^2}{\sigma_{\downarrow}^4} \left(1 + \frac{k^2 \alpha^2}{\sigma_{\downarrow}^4} [(\sin \theta_2 \cos \theta_3)^2 + (\sin \theta_2 \sin \theta_3)^2] \right)^{-3/2} \right]. \quad (83)$$

III.4.3 Superficies cuyo Perfil es un Proceso Aleatorio Gamma con Función de Autocorrelación Gaussiana

En esta sección se consideran superficies cuyas variaciones de altura constituyen un proceso no Gaussiano. Para el proceso considerado aquí, las estadísticas de primer orden (es decir, en un punto) del perfil de la superficie $\xi(x, y)$ están descritas por la distribución gamma de orden N , cuya función de distribución de probabilidad está dada por (Freund y Walpole [1980], pag196. Escamilla y Méndez [1991]),

$$p(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{N}} \right)^{-N} \frac{\xi^{N-1}}{\Gamma(N)} \exp\left[-\frac{\xi}{\sigma_{\xi}/\sqrt{N}} \right] & \xi > 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases} \quad (84)$$

Conociendo las relaciones (19) y (20) se puede observar de éstas que $\phi(x, y)$ constituye, también, un proceso aleatorio gamma, y su función de densidad de probabilidad está dada por la ecuación (84) con σ_{\downarrow} reemplazando a σ_{ξ} . En la figura 21 se muestran gráficas de la función de densidad de probabilidad gamma para diferentes valores de N . Para facilitar su comparación se desplazó la función de densidad de probabilidad por una cantidad igual a $\sqrt{N} \sigma_{\xi}$ de tal manera que la media es igual a cero.

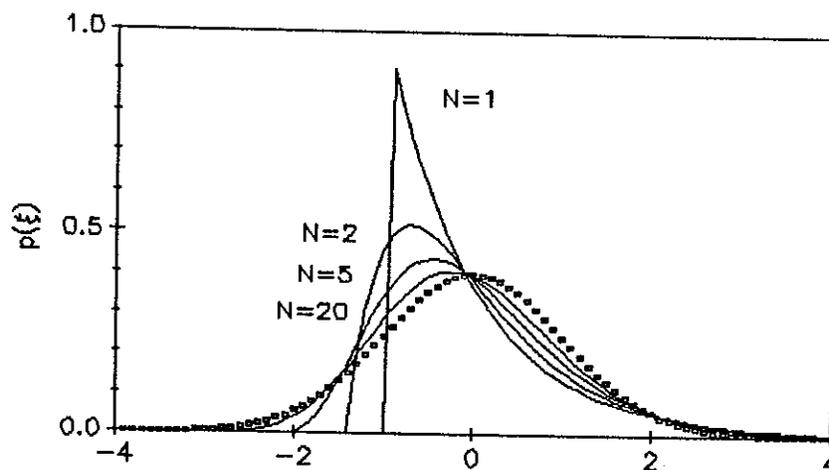


Figura 21 fdp gamma para varios valores de N . En todos los casos el valor de la desviación estándar es igual a uno. Se compara con una FDP Gaussiana (cuadrados).

El proceso gamma es un derivado del proceso Gaussiano y se conoce que los promedios necesarios para resolver el problema de esparcimiento en la aproximación de la pantalla delgada de fase, están dados por (Escamilla y Méndez [1991], Kim et al [1987]):

$$\langle e^{i\phi(x,y)} \rangle = \left(1 - i \frac{\sigma_\phi}{\sqrt{N}} \right)^{-N}, \quad (85)$$

$$|\langle e^{i\phi(x,y)} \rangle|^2 = \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N} \right)^{-N}, \quad (86)$$

$$\langle e^{i\phi(x_1,y_1) - i\phi(x_2,y_2)} \rangle = \left(1 + \sigma_\phi^2 \frac{(1 - C(\rho))}{N} \right)^{-N}, \quad (87)$$

donde $C(\rho)$ es la función de autocorrelación y σ_ϕ^2 es la variancia de la fase.

Utilizando las ecuaciones (86) y (50) se encuentra entonces que la componente especular está dada por

$$I_{esp}(P_o) = \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N} \right)^{-N} I_{oo} \left[\frac{2J_1 \left(wk \sqrt{(\text{sen } \theta_2 \cos \theta_3)^2 + (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2} \right)}{wk \sqrt{(\text{sen } \theta_2 \cos \theta_3)^2 + (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2}} \right]^2. \quad (88)$$

Similarmente, sustituyendo las expresiones (86) y (87) en (60) se encuentra una expresión para la componente difusa

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \int_0^w \left\{ \left(1 + \sigma_\phi^2 \frac{1 - C(\rho)}{N} \right)^{-N} - \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N} \right)^{-N} \right\} J_o(\tau\rho) \rho d\rho. \quad (89)$$

Para facilitar la solución de la integral anterior, se utiliza el siguiente desarrollo en serie:

$$\begin{aligned} \left(1 + \sigma_\phi^2 \frac{(1 - C(\rho))}{N} \right)^{-N} &= \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N} \right)^{-N} \left(1 - \frac{\sigma_\phi^2}{N + \sigma_\phi^2} C(\rho) \right)^{-N} \\ &= \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N} \right)^{-N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! m!} \left(\frac{\sigma_\phi^2}{N + \sigma_\phi^2} \right)^m C^m(\rho) \\ &= \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N} \right)^{-N} + \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N} \right)^{-N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! m!} \left(\frac{\sigma_\phi^2}{N + \sigma_\phi^2} \right)^m C^m(\rho). \end{aligned} \quad (77)$$

Sustituyendo en la ecuación (89), después de algunas simplificaciones y considerando el mismo argumento que en la sección anterior para cambiar el límite superior de la integral de w por infinito, se obtiene:

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N}\right)^{-N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! m!} \left(\frac{\sigma_\phi^2}{N + \sigma_\phi^2}\right)^m \int_0^{\infty} C^m(\rho) J_o(\tau\rho) \rho d\rho. \quad (91)$$

Para poder calcular la intensidad esparcida, es necesario suponer alguna dependencia funcional para la función de autocorrelación. En esta sección se propone una función de autocorrelación Gaussiana como la expresada por la ecuación (64). Considerando el resultado de la ecuación (69), con el cual se evalúa la integral en la expresión (91), y utilizando las relaciones de las expresiones (35) y (46), se obtiene

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{4\mathcal{A}} I_{oo} \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2}{N}\right)^{-N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! m!} \left(\frac{\sigma_\phi^2}{N + \sigma_\phi^2}\right)^m \frac{\alpha^2}{m} \exp\left(-\frac{\alpha^2 k^2}{4m} [(\sin\theta_2 \cos\theta_3)^2 + (\sin\theta_2 \sin\theta_3)^2]\right). \quad (92)$$

La expresión anterior representa la parte difusa de la intensidad promedio esparcida por una superficie rugosa cuyas variaciones de altura constituyen un proceso aleatorio gamma de orden N con una función de autocorrelación Gaussiana.

La solución expresada en la ecuación (92) es válida para cualquier valor de σ_ϕ , pero, como en las secciones anteriores, es posible obtener otro tipo de expresión para la componente para casos en que $\sigma_\phi \gg 1$. Si en la superficie a tratar se dá este caso, la componente especular será prácticamente nula y la función de autocorrelación contribuirá a la integral solamente para valores de ρ cercanos a cero. Entonces, si se hace el desarrollo en serie de la función de autocorrelación, es posible considerar sólo los primeros dos términos de la serie, por lo que

$$C(\rho) = e^{-\rho^2/\alpha^2} \approx 1 - \frac{\rho^2}{\alpha^2}. \quad (93)$$

La expresión para la componente difusa de la intensidad esparcida promedio se reescribe como:

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sigma_\phi^2 \rho^2}{N\alpha^2}\right)^{-N} J_o(\tau\rho) \rho d\rho. \quad (94)$$

El resultado de evaluar la expresión anterior es (Gradshteyn y Ryzhik [1980], pag 686)

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left\{ \frac{N\alpha^2}{\sigma_\phi^2 \Gamma(N)} \left(\frac{\sqrt{N}\alpha\tau}{2\sigma_\phi}\right)^{N-1} K_{N-1}\left(\frac{\sqrt{N}\alpha\tau}{\sigma_\phi}\right) \right\}. \quad (95)$$

Donde K_{N-1} es la función de Bessel modificada de orden $N-1$. Utilizando las relaciones de las expresiones (35) y (46) se obtiene

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left\{ \frac{N\alpha^2}{\sigma_{\dagger}^2 \Gamma(N)} \left(\frac{\sqrt{N}\alpha\tau}{2\sigma_{\dagger}} \right)^{N-1} K_{N-1} \left(\frac{\sqrt{N}\alpha k}{\sigma_{\dagger}} \sqrt{(\text{sen } \theta_2 \cos \theta_3)^2 + (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2} \right) \right\}. \quad (96)$$

III.4.4 Superficies como Proceso Aleatorio Gamma y Función de Autocorrelación Exponencial Negativa

En la sección anterior, se ha considerado el caso en el cual la función de autocorrelación sigue un comportamiento Gaussiano. Ahora se considera un proceso aleatorio del mismo tipo que el considerado en la sección anterior pero con una función de autocorrelación exponencial negativa, como la descrita por la ecuación (75).

La componente especular no varía con respecto al caso anterior, ya que ésta no depende de la función de autocorrelación. Para la componente difusa, se sustituye la función de autocorrelación (ecuación (75)) en la ecuación (91) y se obtiene

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left(1 + \frac{\sigma_{\dagger}^2}{N} \right)^{-N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! m!} \left(\frac{\sigma_{\dagger}^2}{N+\sigma_{\dagger}^2} \right)^m \int_0^{\infty} (e^{-\rho/\alpha})^m J_0(\tau\rho) \rho d\rho. \quad (97)$$

Para evaluar la integral en la expresión anterior, se utiliza el resultado de la expresión (77). Se obtiene

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left(1 + \frac{\sigma_{\dagger}^2}{N} \right)^{-N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! m!} \left(\frac{\sigma_{\dagger}^2}{N+\sigma_{\dagger}^2} \right)^m \frac{m}{\alpha} \left(\frac{m^2}{\alpha^2} + \tau^2 \right)^{-3/2}. \quad (98)$$

En términos de θ_2 y θ_3 y, considerando las relaciones (35) y (46), se encuentra finalmente que la componente difusa está dada por

$$I_{dif}(P_o) = \frac{\pi}{2\alpha\mathcal{A}} I_{oo} \left(1 + \frac{\sigma_{\dagger}^2}{N} \right)^{-N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! (m-1)!} \left(\frac{\sigma_{\dagger}^2}{N+\sigma_{\dagger}^2} \right)^m \left(\frac{m^2}{\alpha^2} + k^2 [(\text{sen } \theta_2 \cos \theta_3)^2 + (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2] \right)^{-3/2}. \quad (99)$$

Con una justificación como la descrita al final de la sección anterior, para cuando $\sigma_{\dagger} \gg 1$, se considerarán sólo los dos primeros términos del desarrollo en serie de la función de autocorrelación. Entonces se reescribe a la función de autocorrelación como en la expresión (80). Entonces la expresión para la componente difusa de la intensidad promedio esparcida se escribe, cuando $\sigma_{\dagger} \gg 1$, como:

$$I_{diff}(P_o) = \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left(\frac{\sigma_{\ddagger}^2 \alpha}{N} \right)^{-N} \int_0^{\infty} \left(\rho + \frac{N}{\sigma_{\ddagger}^2 \alpha^2} \right)^{-N} J_o(\tau \rho) \rho d\rho.$$

(100)

Finalmente, evaluando la integral anterior (Gradshteyn y Ryzhik [1980], pag 685), y considerando las relaciones de las expresiones (35) y (46) se tiene:

$$I_{diff}(P_o) =$$

$$= \frac{\pi}{2\mathcal{A}} I_{oo} \left(\frac{\sigma_{\ddagger}^2 \alpha}{N} \right)^{-N} \frac{\pi(N/\sigma_{\ddagger}^2 \alpha)^{2-N}}{\text{sen}[\pi(3-N)]\Gamma(N)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (N/2\alpha\sigma_{\ddagger}^2)^{2m} \Gamma(2+2m)}{m! \Gamma(m+1) \Gamma(3-N+2m)} [(\text{sen } \theta_2 \text{Cos } \theta_3)^2 + (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2]^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N/2\alpha\sigma_{\ddagger}^2)^{N+m-2} \Gamma(N+m) \text{sen}[\pi(3-N-m)]}{2m! \Gamma[(N+m)/2]} [(\text{sen } \theta_2 \text{Cos } \theta_3)^2 + (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3)^2]^{N+m-2} \right\}.$$

(101)

La idea de utilizar el método "steepest descent" es de obtener una expresión donde se eviten los problemas numéricos al implementar estos resultados en un programa de computadora. La expresión anterior no muestra ser una mejor alternativa que la expresión (99) para su realización en una computadora, por lo que no se considerará en la obtención de curvas de espacimientto teóricas. En este caso parece ser más conveniente la evaluación numérica directa de la ecuación (100).

IV RESULTADOS

En este capítulo se presentan algunos resultados de mediciones angulares de luz esparcida por superficies rugosas, y se comparan con curvas de esparcimiento obtenidas teóricamente. En los casos en los que existe una componente especular se estima la desviación estándar de alturas de las superficies (rugosidad).

IV.1 PRESENTACION DE LOS RESULTADOS

Las superficies rugosas empleadas en los experimentos fueron vidrios esmerilados con diferentes abrasivos, y superficies fabricada sobre fotorresina. El método para la fotofabricación de superficies con fotorresina se describe en Ponce [1991] y Méndez et al [1991].

De cada una de las superficies empleadas se obtuvieron trazas de los perfiles. Estas se midieron con un perfilómetro mecánico (Dektak 3030). Normalmente se muestrean 2000 puntos, con una separación entre muestras de $0.25 \mu m$, en algunos casos, y de $1.0 \mu m$ en otros. Los parámetros estadísticos de las superficies se estimaron de las trazas obtenidas.

Se implementaron programas para calcular la intensidad esparcida suponiendo que la variación en las alturas en las superficies es un proceso aleatorio Gaussiano o gamma. Las mediciones angulares de esparcimiento fueron realizadas con el instrumento construido y descrito en el capítulo II, utilizando luz con una longitud de onda de $0.6328 \mu m$.

Para algunas superficies es posible, mediante las curvas de esparcimiento experimentales, estimar la desviación estándar de alturas o rugosidad en las superficies. Para esto, considérese la expresión para la intensidad promedio esparcida, ecuación (37), expresada como la suma de una componente especular y una difusa. De las expresiones (37), (43) y (62) la intensidad promedio esparcida está dada por

$$\langle I_s(P_o) \rangle = \langle |e^{i\phi(x,y)}|^2 I_o(P_o) + I_{dif}(P_o) \rangle. \quad (102)$$

Para incidencia normal, la componente especular está confinada a una región muy pequeña alrededor del punto $\theta_2 = 0$. El valor de la componente especular se puede encontrar de las curvas de esparcimiento extrapolando el valor de la componente difusa al punto $\theta_2 = 0$. Entonces, de la expresión anterior se tiene que

$$\langle |e^{i\phi(x,y)}|^2 I_o(0) \rangle = \langle I_s(0) \rangle - I_{dif}(0). \quad (103)$$

Si además se conoce $I_o(0)$, que es la intensidad que se registraría en $\theta_2 = 0$ si el difusor fuera completamente plano, y conociendo la relación entre la desviación estándar de las alturas y la desviación estándar de la fase (ecuación (19)), se encuentra que la desviación estándar de alturas de la superficie es (de ecuación (103)):

$$\sigma_h = \frac{1}{k(n-1)} \left[-\text{Ln} \left(\frac{\langle I_s(0) \rangle - I_{dif}(0)}{I_o(0)} \right) \right], \quad (104)$$

donde se ha considerado que la variación de alturas de la superficie constituye un proceso aleatorio Gaussiano. Si, por otro lado, se considera que la variación de alturas constituye un proceso aleatorio gamma, se puede demostrar que la desviación estándar de alturas está dada por

$$\sigma_h = \frac{1}{k(n-1)} \sqrt{\left[\left(\frac{\langle I_s(0) \rangle - I_{dif}(0)}{I_o(0)} \right)^{-1/N} - 1 \right] N}. \quad (105)$$

La presentación de resultados se hace, principalmente, mediante una serie de gráficas. En el caso de vidrios esmerilados, para cada superficie se presenta primero una breve explicación de la forma de fabricación, a continuación se muestra una gráfica con una traza de la superficie. Una segunda gráfica es la función de autocorrelación experimental y se compara con la función de autocorrelación Gaussiana y la función de autocorrelación exponencial negativa. Una tercera gráfica presenta el histograma de alturas de la superficie, ajustando a ésta una función de densidad de probabilidad Gaussiana. Las gráficas cuarta y quinta muestran, respectivamente, los patrones de esparcimiento de las superficies rugosas en transmisión y en reflexión. Se comparan con las curvas de esparcimiento teóricas suponiendo una función de densidad de probabilidad Gaussiana para las alturas y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa. Una sexta gráfica presenta el histograma de alturas de la superficie ajustando a ésta una función de densidad

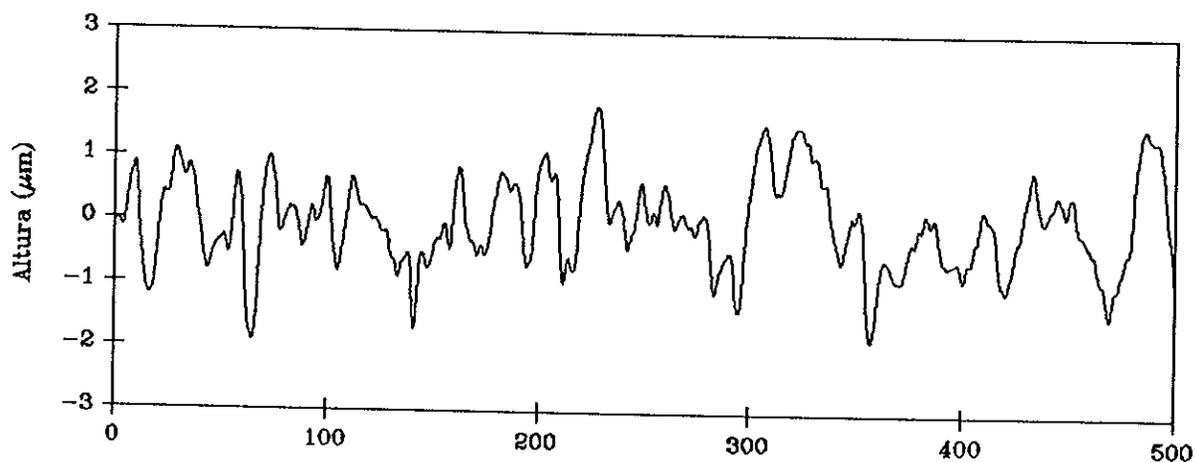
de probabilidad gamma de orden N . Una séptima gráfica muestra el patrón de esparcimiento de la superficie rugosa en transmisión. Se comparan con las curvas de esparcimiento teóricas, suponiendo una función de densidad de probabilidad gamma para las alturas y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa.

En el caso de la superficie fabricada sobre fotorresina, se presenta primero una gráfica donde se muestra su histograma de alturas y, ajustada a éste, una función de densidad de probabilidad Gaussiana. La segunda gráfica muestra la función de autocorrelación experimental comparada con las funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa. La tercera gráfica corresponde al patrón de esparcimiento en reflexión. Se compara con las curvas de esparcimiento teóricas suponiendo una función de densidad de probabilidad Gaussiana para las alturas y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa.

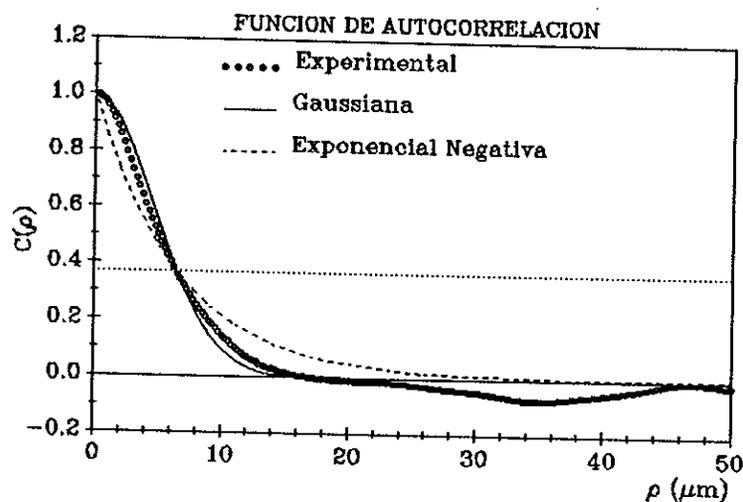
Al final se presenta una tabla comparativa de los valores estimados para la desviación estándar de alturas, partiendo de las curvas de esparcimiento.

IV.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Superficie No. 5: Vidrio esmerilado con diferentes grados de abrasivo. Primero con abrasivo No. 30 (el número es el tamaño promedio de las partículas que forman el abrasivo en micras), y después con abrasivo del No. 12. Para los experimentos en reflexión las superficies fueron cubiertas con una película delgada de oro.



(a)



(b)

Figura 22

(a) Traza del perfil de la superficie No. 5 obtenida mediante el perfilómetro mecánico. La longitud total del barrido es de $500 \mu m$, con un intervalo en el muestreo de $0.25 \mu m$. El valor estimado para la desviación estándar de alturas es de $0.667 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor estimado para la longitud de correlación, a , es de $6.47 \mu m$.

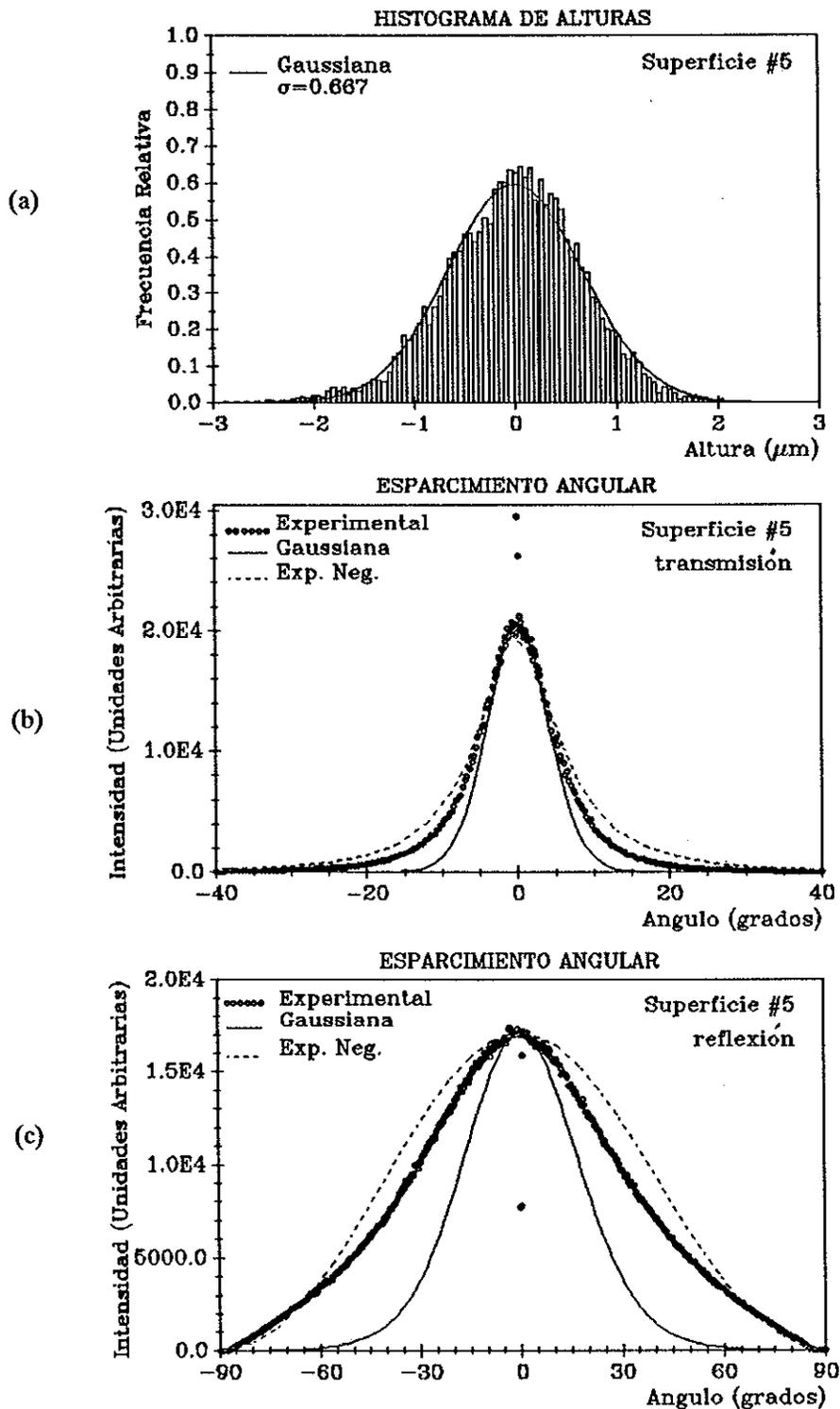


Figura 23

(a) Histograma de alturas de la superficie No.5, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana.
 (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$.
 (c) Curva de esparcimiento en reflexión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).

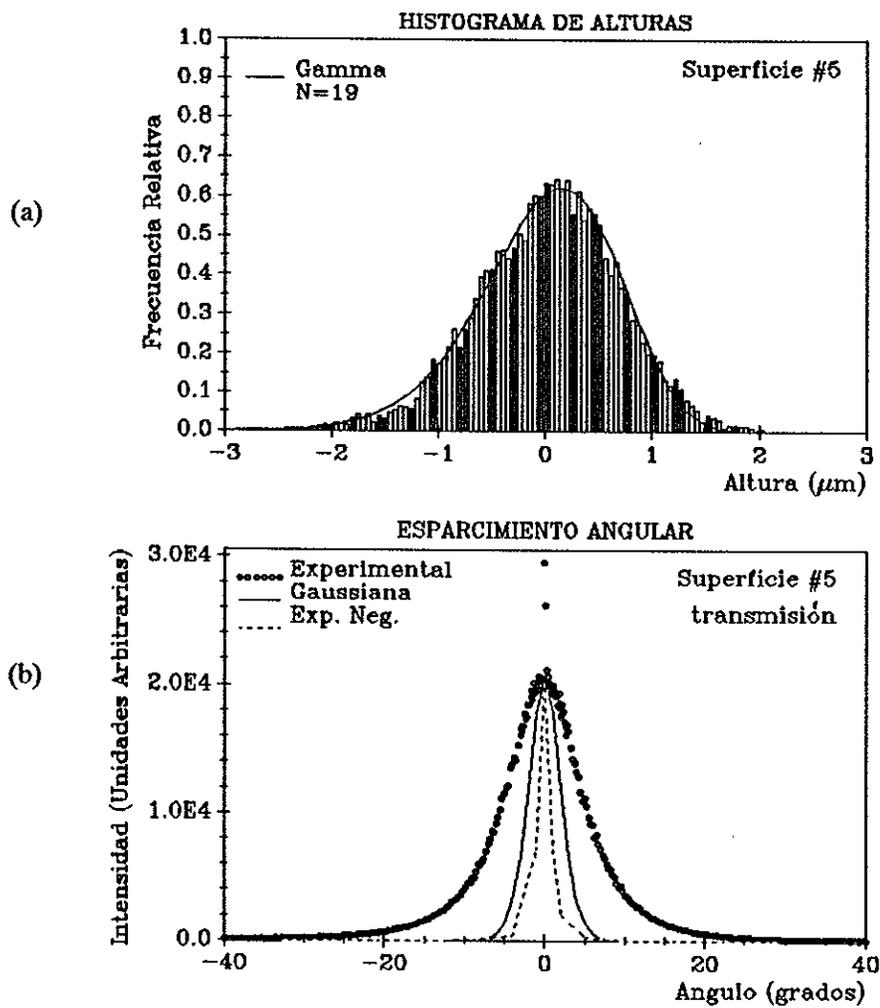
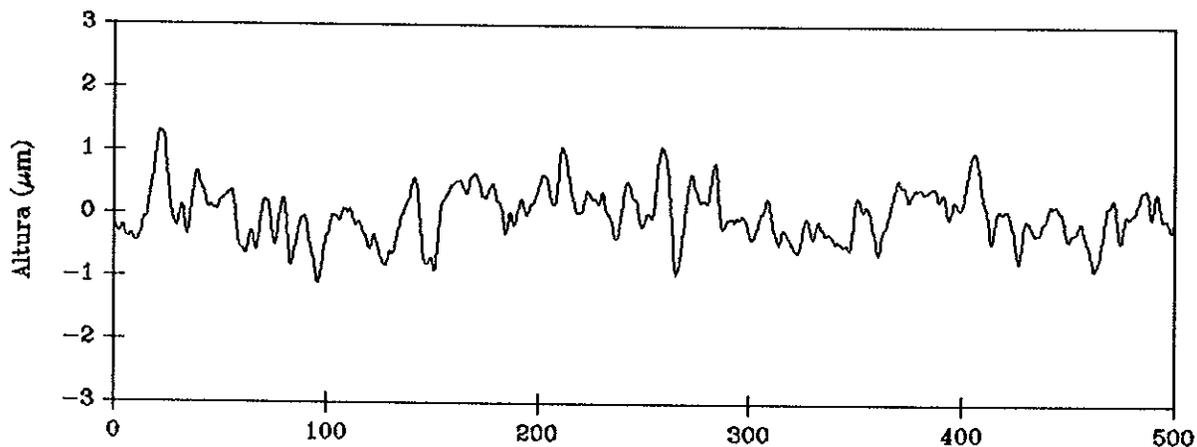


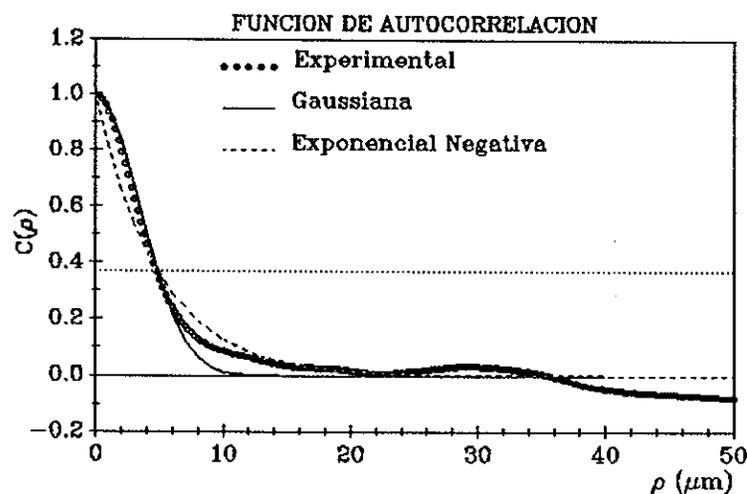
Figura 24

(a) Histograma de alturas de la superficie No.5, al cual se le ha ajustado una fdp gamma de orden $N=19$. (b) Curva de esparcimiento en trasmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gamma de orden $N=19$ y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). La componente especular sólo está presente en una región muy pequeña alrededor de $\theta_2 = 0$.

Superficie No. 6: Vidrio esmerilado con diferentes grados de abrasivo. Primero con abrasivo No. 30 (el número es el tamaño promedio de las partículas que forman el abrasivo en micras), después con abrasivo del No. 12 y por último con abrasivo del No. 9. Para los experimentos en reflexión las superficies fueron cubiertas con una película delgada de oro.



(a)



(b)

Figura 25 (a) Traza del perfil de la superficie No. 6 obtenida mediante el perfilómetro mecánico. La longitud total del barrido es de $500 \mu m$, con un intervalo en el muestreo de $0.25 \mu m$. El valor estimado para la desviación estándar de altura es de $0.466 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor estimado para la longitud de correlación, a , es de $4.83 \mu m$.

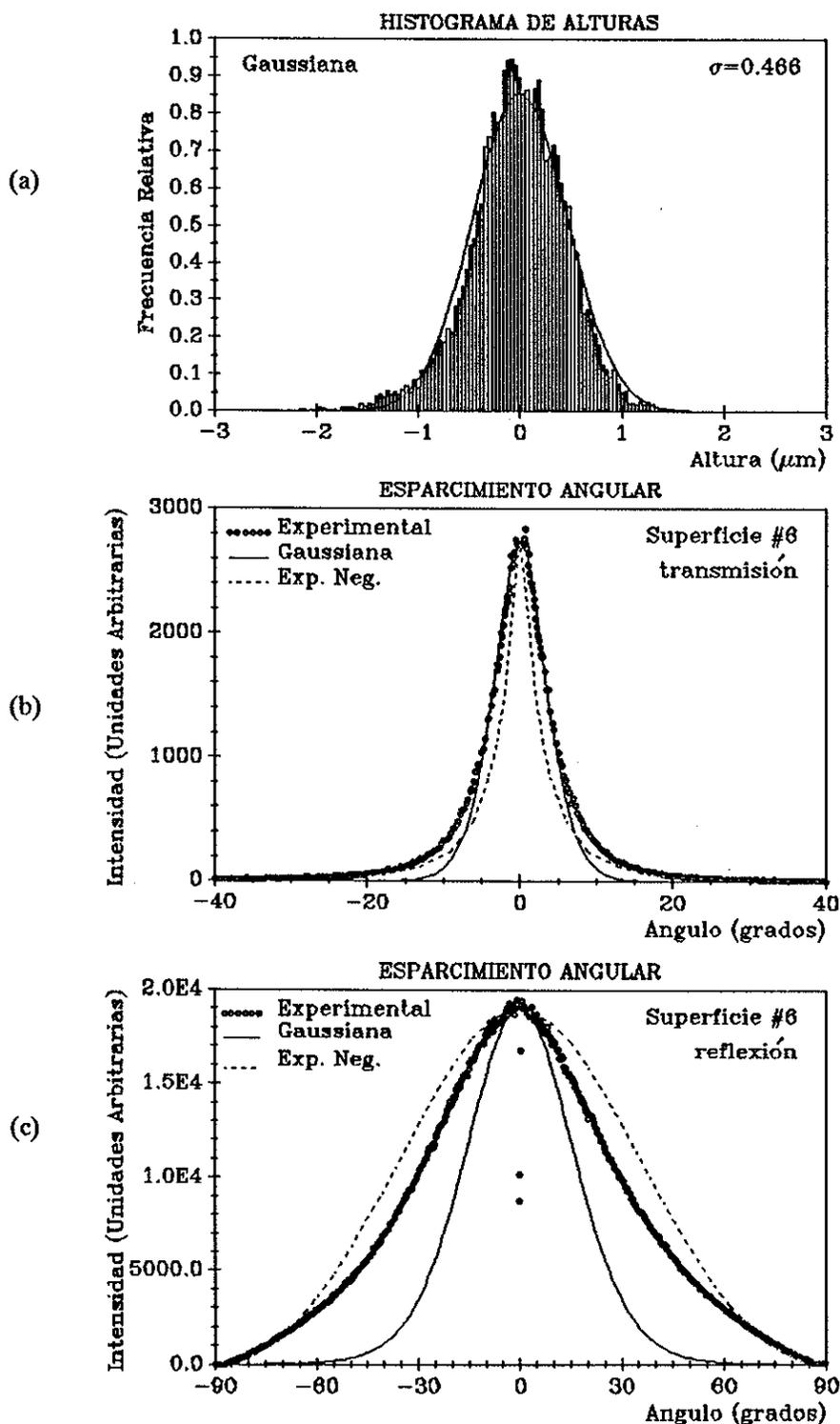


Figura 26

(a) Histograma de alturas de la superficie No.6, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). No se muestra en la gráfica la componente especular. (c) Curva de esparcimiento en reflexión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).

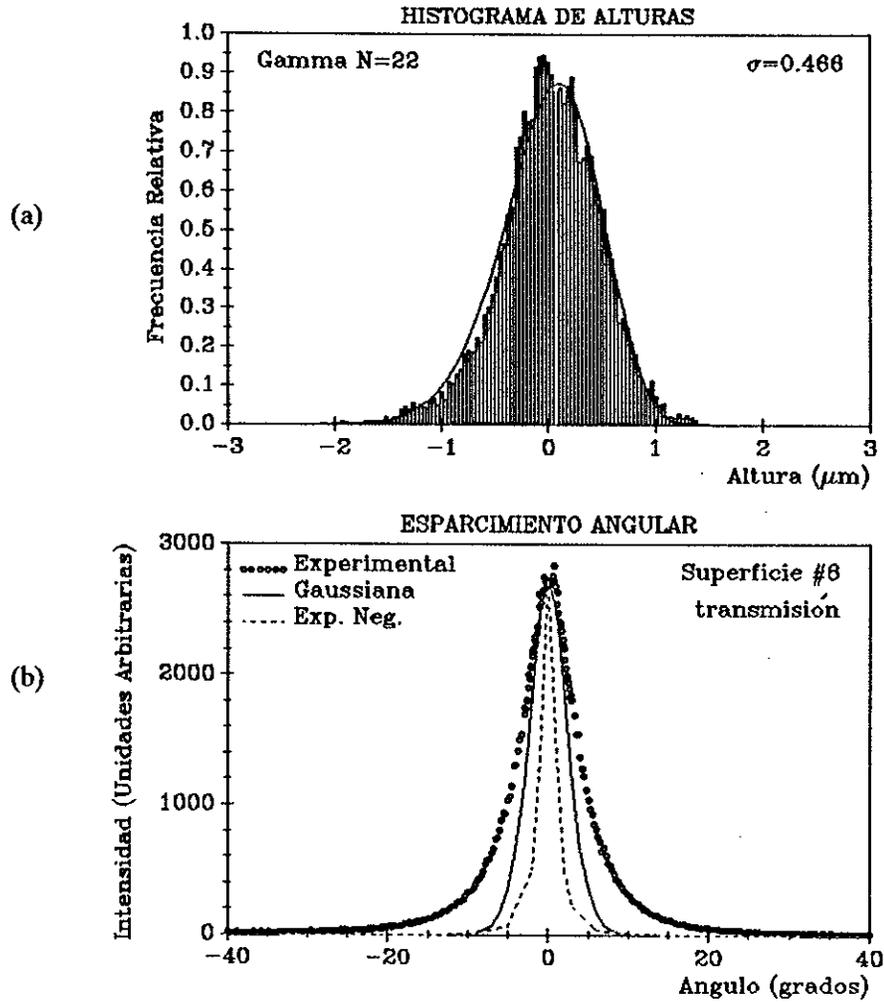
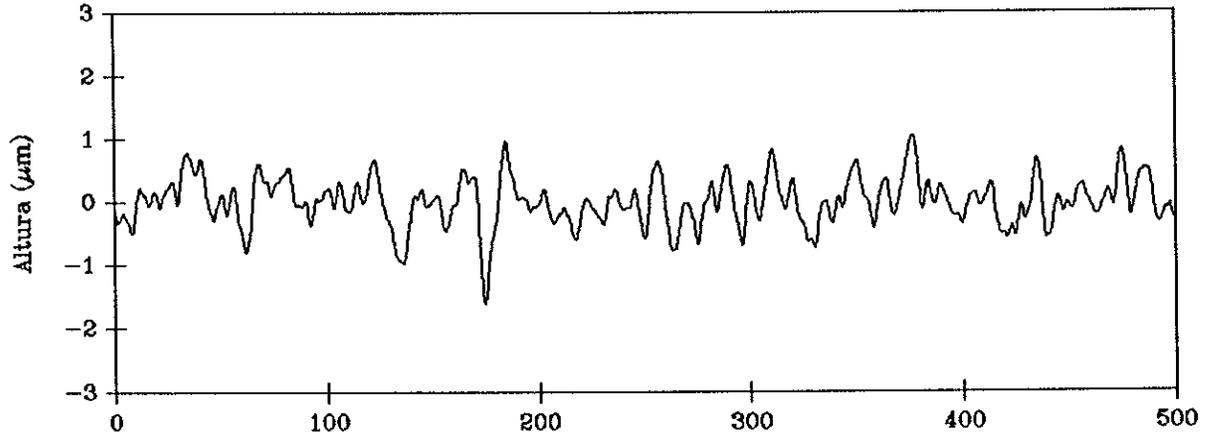


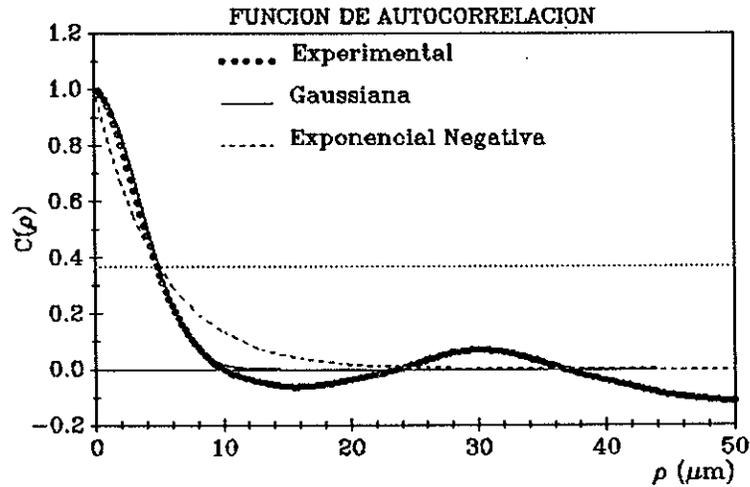
Figura 27

(a) Histograma de alturas de la superficie No.6, al cual se le ha ajustado una fdp gamma de orden $N=22$. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gamma de orden $N=22$ y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). No se muestra en la gráfica la componente especular.

Superficie No. 7: Vidrio esmerilado con diferentes grados de abrasivo. Primero con abrasivo No. 30 (el número es el tamaño promedio de las partículas que forman el abrasivo en micras), después con abrasivo del No. 12 y No. 9, por último con abrasivo del No. 5. Para los experimentos en reflexión las superficies fueron cubiertas con una película delgada de oro.



(a)



(b)

Figura 28 (a) Traza del perfil de la superficie No. 7 obtenida mediante el perfilómetro mecánico. La longitud total del barrido es de $500 \mu m$, con un intervalo en el muestreo de $0.25 \mu m$. El valor estimado para la desviación estándar de alturas es de $0.475 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor estimado para la longitud de correlación, a , es de $4.95 \mu m$.

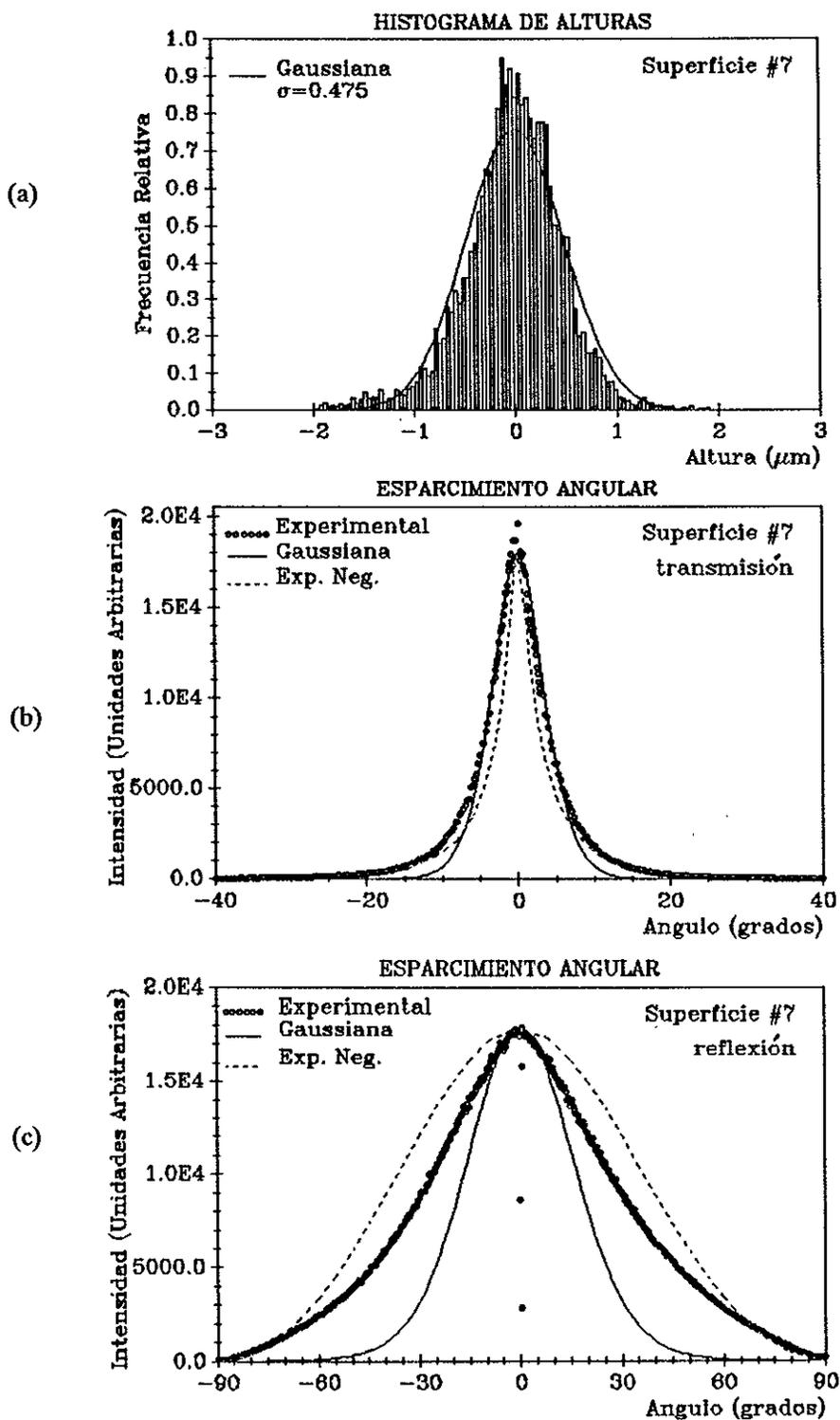


Figura 29

(a) Histograma de alturas de la superficie No.7, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana.
 (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). No se muestra en la gráfica la componente especular.
 (c) Curva de esparcimiento en reflexión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).

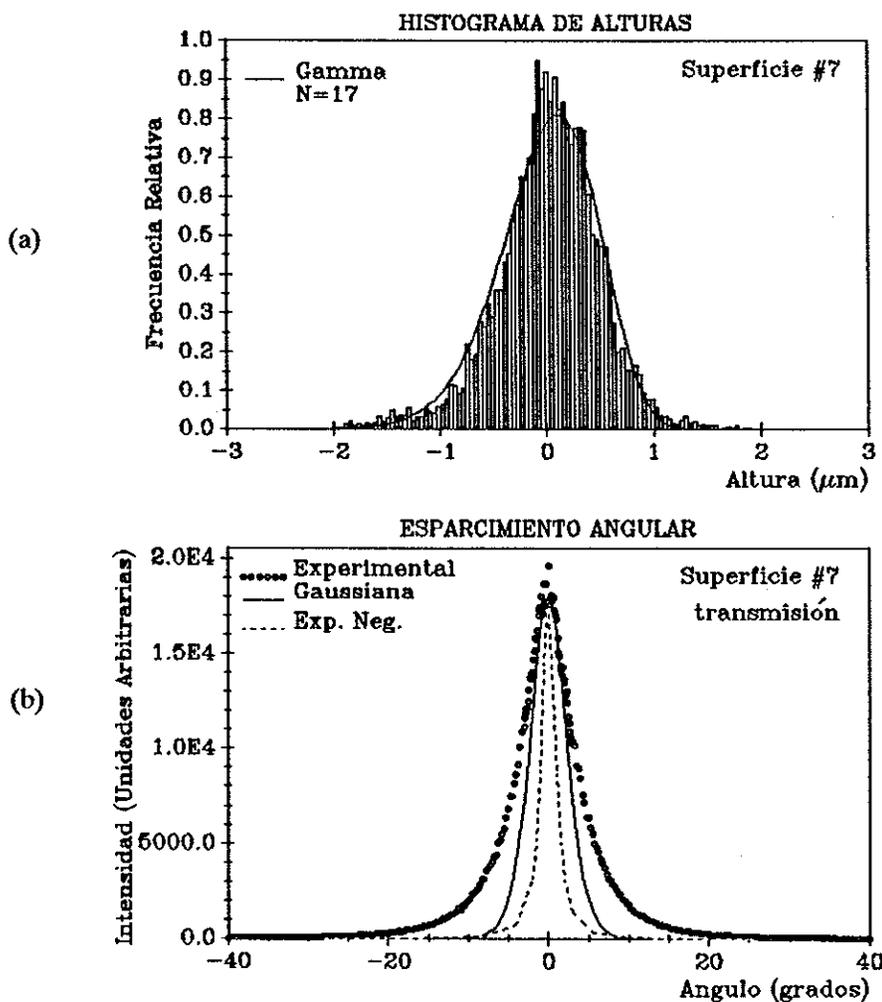
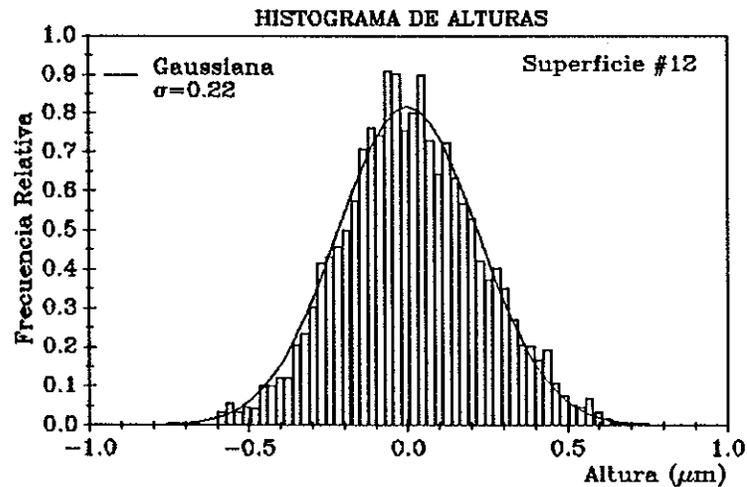


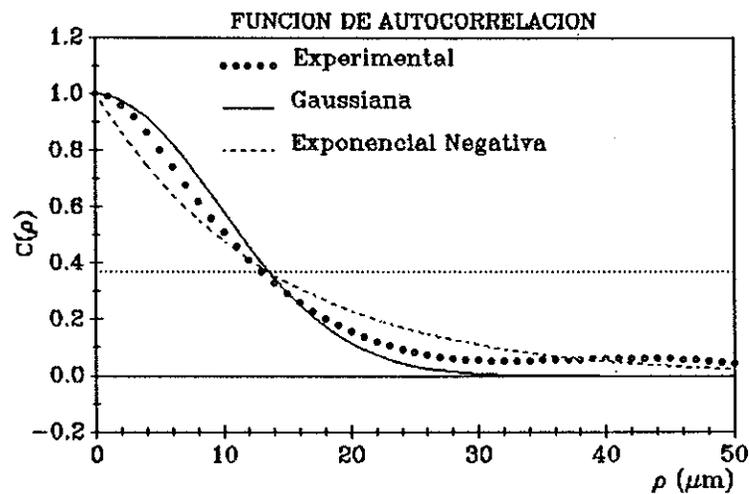
Figura 30

(a) Histograma de alturas de la superficie No.7, al cual se le ha ajustado una fdp gamma de orden $N=17$. (b) Curva de esparcimiento en transmisión, comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gamma de orden $N=17$ y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa). No se muestra en la gráfica la componente especular.

Superficie No. 12: Superficie fabricada en fotorresina depositada sobre un sustrato de vidrio. Es una superficie generada con números aleatorios con distribución Gaussiana. Su desviación estándar calculada a partir de los datos del perfilómetro es de $0.22 \mu m$. Esta superficie fue cubierta con una película delgada de oro.



(a)



(b)

Figura 31 (a) Histograma de alturas de la superficie No.12, al cual se le ha ajustado una fdp Gaussiana. El valor estimado para la desviación estándar de alturas es de $0.22 \mu m$. (b) Función de autocorrelación experimental comparada con una función de autocorrelación Gaussiana y una exponencial negativa. El valor de la longitud de correlación, a , es de $13.6 \mu m$.

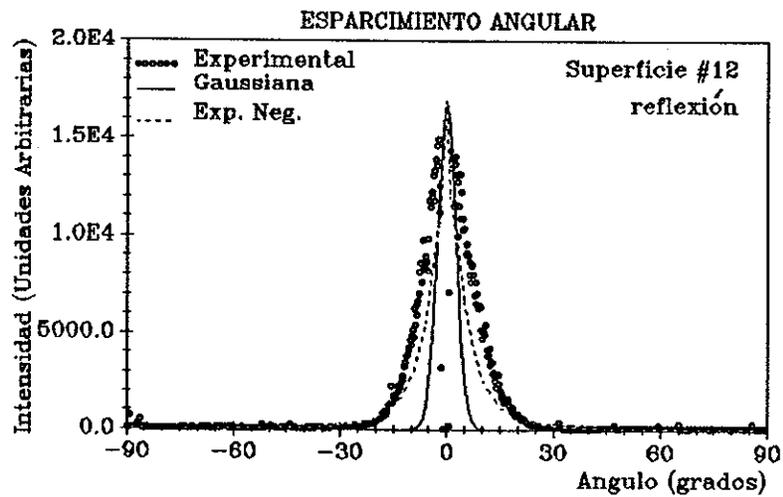


Figura 32 Curva de esparcimiento en reflexión comparada con curvas de esparcimiento teóricas (fdp Gaussiana y funciones de autocorrelación Gaussiana y exponencial negativa).

En la tabla I, se presentan los valores de las rugosidades estimadas con las expresiones (103) y (104), para las superficies 5, 6 y 7. En la tabla aparecen primero los valores de rugosidad obtenidos de las trazas dadas por el perfilómetro, la incertidumbre que se dá para la estimación de la rugosidad representa el error estadístico esperado debido al tamaño finito de la muestra. Después aparece la rugosidad estimada considerando que las alturas en la superficie son un proceso aleatorio Gaussiano, y por último, la rugosidad estimada considerando que las alturas en la superficie son un proceso aleatorio gamma.

Tabla I. Comparación de los valores de la desviación estándar de alturas, σ_{ξ} de las superficies (rugosidad), estimadas de las trazas de las superficies obtenidas con un perfilómetro mecánico y de las curvas de esparcimiento de las superficies.

	Superficie #5	Superficie #6	Superficie #7
Perfilómetro	$\sigma_{\xi} = 0.667 \pm 0.1 \mu m$	$\sigma_{\xi} = 0.466 \pm 0.05 \mu m$	$\sigma_{\xi} = 0.475 \pm 0.06 \mu m$
fdp Gaussiana	$\sigma_{\xi} = 0.610 \mu m$	$\sigma_{\xi} = 0.478 \mu m$	$\sigma_{\xi} = 0.491 \mu m$
fdp gamma	$\sigma_{\xi} = 0.699 \mu m$	$\sigma_{\xi} = 0.477 \mu m$	$\sigma_{\xi} = 0.491 \mu m$

En general, el acuerdo entre entre los métodos de estimación utilizados es bueno. Esto dá confianza en el método, e indica que las aproximaciones utilizadas son adecuadas para este tipo de medición.

IV.3 DISCUSION DE RESULTADOS

Para mostrar el funcionamiento y las capacidades del ESPARCIMETRO se realizaron mediciones de esparcimiento de luz para varias superficies rugosas. A estas curvas experimentales se ajustaron curvas teóricas de esparcimiento, basadas en las propiedades estadísticas de los perfiles obtenidos utilizando el perfilómetro mecánico. Las mediciones de esparcimiento fueron realizadas en geometrías de transmisión y reflexión. Para el caso de reflexión, las superficies fueron cubiertas con una película delgada de oro.

De los resultados mostrados en este capítulo, se puede notar que la curva de esparcimiento teórica que mejor ajusta a la experimental, para los vidrios esmerilados es aquella obtenida cuando se considera una

distribución de alturas Gaussiana y una función de autocorrelación exponencial negativa. Sin embargo, el ajuste no es muy bueno. Esto puede deberse, principalmente, a tres cosas:

- i) Problemas en la caracterización de la superficie.
- ii) Problemas en el modelo estadístico de la superficie.
- iii) Problemas en el tratamiento teórico.

En lo que concierne al punto (i), se puede mencionar que cuando las superficies tienen detalle que no puede ser resuelto por el tamaño finito de la aguja del perfilómetro mecánico se presentan efectos no lineales que complican las mediciones (Ruiz et al (1991), Church y Takacs (1990), Al-Jumaily et al (1987)). Este puede ser el caso del vidrio esmerilado, que parece tener detalle en varias escalas (Shirley y George [1988]), varios autores han propuesto que estas superficies son de tipo fractal (Jakeman [1983], Jaggard y Sun [1990]).

En cuanto al punto (ii), solamente se ensayaron dos casos bastante extremos en cuanto a la función de autocorrelación: la Gaussiana y la exponencial negativa. De los resultados presentados es de esperarse que las superficies tengan un comportamiento intermedio que tal vez pueda modelarse por medio de una correlación K .

El punto (iii) es también importante, pues se ha visto que una cantidad significativa de la energía fue encontrada en la componente con polarización cruzada (SP), ésta se encontró en algunos experimentos realizados con vidrio al cual se le atacó químicamente. La teoría que se ha empleado es una teoría escalar, y resulta inadecuada para predecir estos efectos. Sin embargo, actualmente no existen tratamientos teóricos mejores al presentado en esta tesis.

Es conveniente hacer notar que el comportamiento de la curva de esparcimiento está fuertemente relacionado con la forma de la función de autocorrelación cerca del origen. Por otro lado, se observa que la curva de esparcimiento obtenida con una función de densidad de probabilidad gamma es más angosta que la obtenida para una fdp Gaussiana con los mismos valores para la longitud de correlación y desviación de alturas, y la misma forma de función de autocorrelación. Así mismo, se observa que los valores estimados a partir de las mediciones de esparcimiento, para los parámetros de rugosidad de las superficies que muestran una componente especular, están de acuerdo con los obtenidos con el perfilómetro mecánico.

V CONCLUSIONES

Se ha desarrollado y caracterizado un instrumento para la medición angular de luz esparcida por superficies rugosas que, de acuerdo a la caracterización realizada, muestra una buena respuesta angular. El ESPARCIMETRO cuenta con un programa de control, lo que permite utilizar el instrumento con facilidad. Así mismo, en comparación con los instrumentos comerciales, este instrumento es versátil, ya que puede utilizarse en un modo de iluminación convergente o divergente, así como en reflexión o transmisión.

Con base en el modelo de la Pantalla Delgada de Fase, se presentó la derivación de expresiones para la intensidad promedio esparcida por superficies cuyas variaciones de altura pueden considerarse como procesos aleatorios Gaussiano o gamma, y se implementaron los programas que la calculan, para un par de funciones de autocorrelación.

De los resultados teóricos y experimentales, se observa que la forma de las curvas de esparcimiento depende fuertemente de la función de autocorrelación, más que de los valores de la longitud de correlación o de la desviación estándar de las alturas. Para difusores muy rugosos resulta importante la forma de la función de autocorrelación cerca del origen.

Utilizando la aproximación de Kirchhoff, se presentó la derivación de una expresión para la amplitud compleja del campo esparcido por superficies rugosas. Comparando esta expresión con la obtenida con el modelo de la Pantalla Delgada de Fase, se observa que, esencialmente, sólo difieren en la forma del factor angular que precede a la expresión integral principal.

Se sugiere utilizar, para futuras mediciones en el ESPARCIMETRO, un amplificador sujetador de fase ("lock in"), para reducir el posible ruido ambiental en las lecturas del detector, especialmente a bajas intensidades. Se recomienda implementar un atenuador, de tal manera que cuando el instrumento de medición se sature, el atenuador sea colocado automáticamente. Así mismo, se recomienda implementar un sistema de retroalimentación, que permita conocer con certeza la posición del ESPARCIMETRO, con el fin de poder aumentar la velocidad de desplazamiento del instrumento.

Por último, se sugiere un estudio más detallado de la influencia de la forma de la función de autocorrelación de la variación de alturas de las superficies en la forma de la curva de esparcimiento. Por otro lado, sería de interés realizar un estudio con nuevas formas de funciones de densidad de probabilidad para la distribución de alturas que se aproximen cada vez más a las experimentales.

LITERATURA CITADA

- Aerotech, Inc. Operator's Manual. Taunton, MA.
- Aguilar J.F. 1989. La validez de la aproximación de Kirchhoff en microscopía de superficies. Tesis de maestría.
- Al-Jumaily G.A. S.R. Wilson, K.C. Jungling, J.R. McNeil y J.M. Bennet. 1987. Frequency response characteristics of mechanical surface profilometer. *Opt Eng.* **26**:953-958.
- Beckmann P. y A. Spizzichino. 1963. *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces.* Pergamon. Oxford.
- Berry M.V. 1979. Diffractals. *J. Phys. A: Math. Gen* **12**:781-797.
- Born M. y E. Wolf. 1975. *Principles of Optics.* Pergamon Press. Oxford. 808 pp.
- Chandley P.J. y W.T. Welford. 1975. A re-formulation of some results of P. Beckmann for scattering from rough surfaces. *Opt. Quant. Elec.* **7**:393-397.
- Church E.L. y P.Z. Takacs. 1990. Effects of the non-vanishing tip size in mechanical profile measurements. En: *Optical Testing and Metrology III: Recent Advances in Industrial Optical Inspection.* (C.P. Grover). *Proc. SPIE* **1332**:504-514.
- DeSanto, J.A. y G.S. Brown. 1986. Analytical Techniques for Multiple Scattering from Rough Surfaces. p 3-62. En: *Progress in Optics Vol. XXIII* (E. Wolf). North Holland. Amsterdam.
- Ennos A.E. 1984. Speckle Interferometry. p203-253. En: *Laser Speckle and Related Phenomena.* (J.C. Dainty). Springer-Verlag. Berlin.
- Escamilla H.M. y E.R. Méndez. 1991. Speckle statistics from gamma-distributed random phase screens. Aceptado para su publicación en *J. Opt Soc. Am.*
- Freund J.E. y R.E. Walpole. 1980. *Mathematical Statistics.* Prentice-Hall. Englewood. 580 pp.
- Goodman J. W. 1968. *Introduction to Fourier Optics.* McGraw-Hill. San Francisco. 287pp.
- Goodman J. W. 1984. *Statistical Optics.* John Wiley & Sons. New York. 550 pp.
- Gradshteyn I.S. e I.M. Ryzhik. 1980. *Table of Integrals, Series, and Products.* Academic Press. New York. 1160pp.
- Gray P.F. 1978. A method of forming optical diffusers of simple known statistical properties. *Optical Acta* **25**(8):765-775.
- Hildebrand B.P., R.L. Gordon y E.V. Allen. 1974. Instrument for measuring the roughness of supersmooth surfaces. *Appl. Opt.* **13**(1):177-180.
- Jaggard D.L. y X. Sun. 1990. Scattering from fractally surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A.* **7**:1131-1138.
- Jakeman E. 1983. Fraunhofer scattering by a subfractal diffuser. *Opt. Acta.* **30**:1207-1212.
- Keithley Instruments, Inc. Keithley Model 480. Digital Picoammeter Instruction Manual. Cleveland, Ohio.
- Kim M.J., E.R. Méndez y K.A. O'Donnell. 1987. Scattering from gamma-distributed surfaces. *J. Mod. Opt.* **34**, 1107-1119.
- Maradudin A.A., E.R. Méndez y T. Michel. 1989. Backscattering effects in the elastic scattering of p-polarized light from a large-amplitude random metallic grating. *Opt. Lett.* **14**:151-153.
- Méndez E.R. 1987. Laser and stellar speckle. *Sci. Prog.* **71**:365-380.
- Méndez E.R. y K.A. O'Donnell. 1987. Observation of depolarization and backscattering enhancement in light scattering from Gaussian random surfaces. *Opt. Commun.* **61**(2):91-95.

- Méndez E.R., M.A. Ponce, V. Ruiz-Cortés y Z.H. Gu. 1991. Photofabrication of one-dimensional rough surfaces for light scattering experiments. Aceptado para su publicación en *Appl. Opt.* **30**(24).
- MetraByte Corp. DAS-8 User's Manual for the D3001 Stepping Translator. Pittsburgh, PA.
- Nieto-Vesperinas M. y N. García. 1981. A detailed study of the scattering of scalar waves from random rough surfaces. *Optica Acta.* **28**(12):1651-1672.
- Nieto-Vesperinas M. y J.M. Soto-Crespo. 1987. MonteCarlo simulations for scattering of electromagnetic waves from perfectly conductive random rough surfaces. *Opt Lett.* **12**(12):979-981.
- O'Donnell K.A. y E.R. Méndez. 1987. Experimental study of scattering from characterized random surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 1194-1196.
- Ponce M.A. 1991. Diseño y fotofabricación de superficies rugosas aleatorias. Tesis de Maestría.
- Roche P. y E. Pelletier. 1984. Characterizations of optical surfaces by measurement of scattering distribution. *Appl. Opt.* **23**(20):3561-3566
- Shirley L.G. y N. George. 1988. Diffuser radiation patterns over a large dynamic range. 1: Strong diffusers. *Appl. Opt.* **27**:1850-1861.
- Stover J.C. y C.H. Gillespie. 1984. Calculation of surface statistics from light scatter. *Opt. Eng.* **23**(4):406-412.
- Thorsos E.I. 1988. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surfaces scattering using a Gaussian roughness spectrum. *J. Acoust. Soc. Am.* **83**:78-92.
- Welford W.T. 1977. Optical estimation of statistics of surface roughness from light scattering measurements. *Opt. Quant. Elec.* **9**. 269-287.
- Wolfe W.L., F.O. Bartell y L.D. Brooks. 1982. Description and limitations of an automated scatterometer. *Proc SPIE* **362**:180-184.
-

APENDICE A. MANUAL DE USUARIO. INSTRUMENTO PARA LA MEDICION ANGULAR DE LUZ ESPARCIDA POR SUPERFICIES RUGOSAS (ESPARCIMETRO)

El ESPARCIMETRO es un instrumento para la medición angular de luz esparcida por superficies rugosas. Este instrumento consta de varios sistemas que son controlados por un programa ejecutado por una microcomputadora. Un diagrama esquemático del instrumento se muestra en la figura A.1.

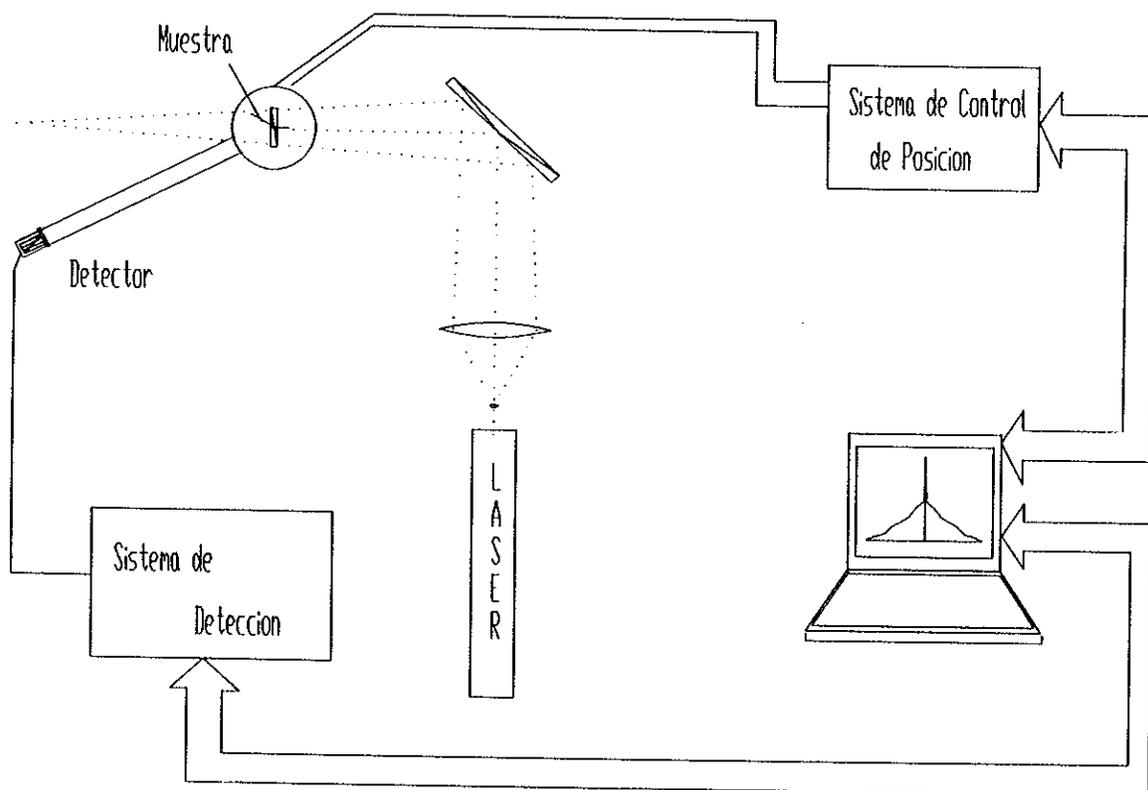


Figura A.1 Diagrama esquemático del ESPARCIMETRO

El ESPARCIMETRO construido consta de los siguientes sistemas: iluminación, detección, adquisición de datos y control de posición. Además, incluye algunas piezas mecánicas para colocar la muestra a ser analizada, y los sistemas de detección e iluminación. A continuación se describen los sistemas y elementos que componen el instrumento.

A.1 Las monturas mecánicas

Las monturas utilizadas, por su función, pueden ser divididas en: montura para la muestra, montura el para sistema de detección y montura para el sistema de iluminación.

La montura mecánica en donde se coloca la muestra a analizarse, está formada por tres piezas mostradas esquemáticamente en la figura A.2. Estas son: una montura Gimbal (NewPort modelo GM-2), que provee un movimiento angular fino. Una mesa de traslación XY (NewPort modelo TSX-1A), que permite el movimiento en un plano. Por último, una mesa de movimiento angular continuo (NewPort modelo RSX-2), que permite iluminar a la muestra (superficie rugosa) a un ángulo cualquiera con respecto a la normal a la superficie.

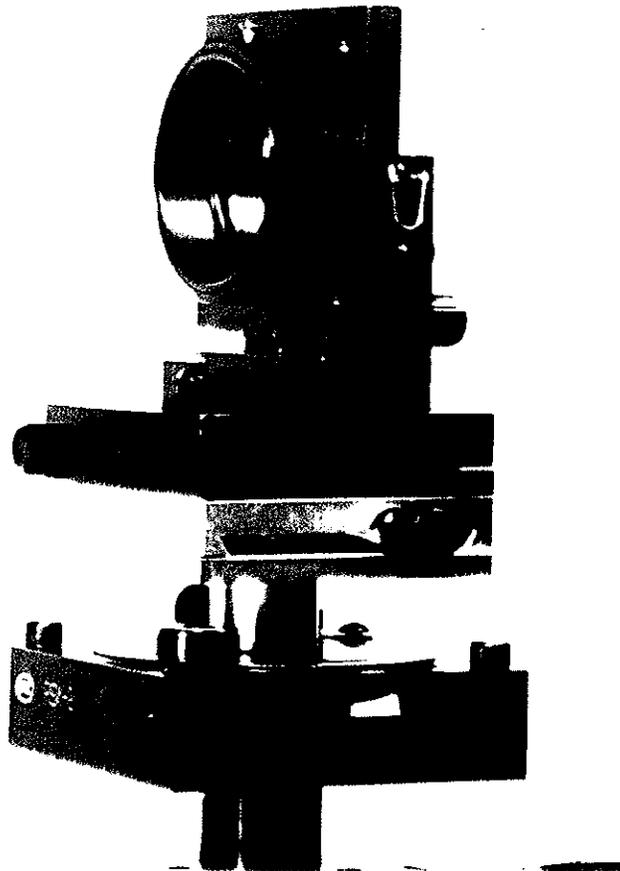


Figura A.2 Montura para colocar la muestra.

La montura para el sistema de detección es un brazo rotatorio que tiene una longitud de 73 cm (ver figura A.3). En uno de sus extremos se coloca el sistema de detección y en el otro un contrapeso.

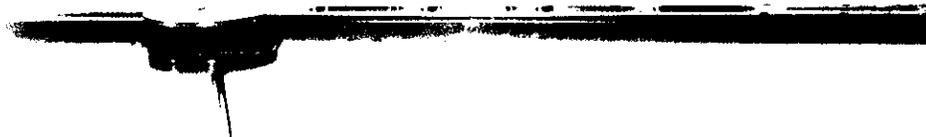


Figura A.3 Montura para el sistema de detección.

La montura destinada al sistema de iluminación, consiste de una pieza semejante a un periscopio, lo que permite la medición de la luz esparcida en una dirección muy cercana a la de retroesparcimiento (ver figura A.4).

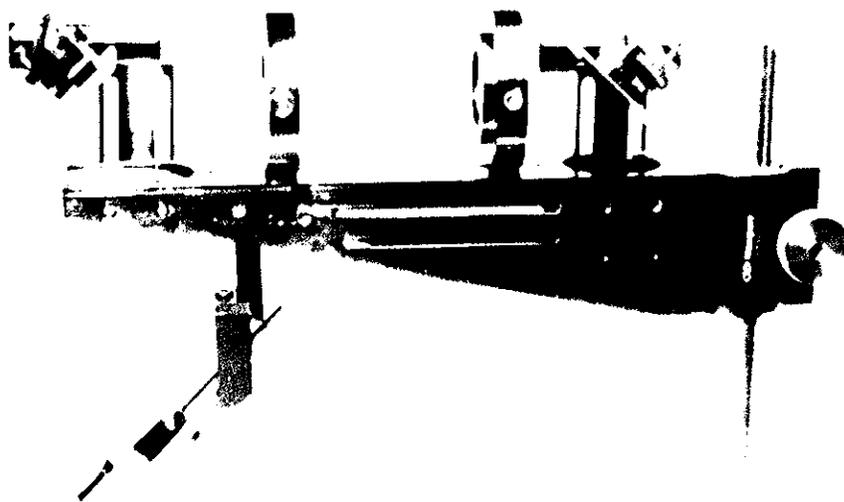


Figura A.4 Montura para el sistema de iluminación.

A.2 El sistema de iluminación

El sistema de iluminación es un sistema óptico cuyo propósito básico es el de iluminar la muestra de interés de manera conveniente para poder medir el patrón de esparcimiento. El sistema de iluminación lo forma un láser de Helio-Neón (Melles-Griot 7 mW) con una longitud de onda de 632.8 nm., un filtro espacial, una lente utilizada para enfocar el haz y un polarizador.

La muestra pueden ser iluminada por un haz convergente o por uno divergente. En el modo de iluminación convergente el haz se enfoca sobre la abertura del sistema de detección (figura A.5). Por otro lado, en el modo de iluminación divergente el haz se enfoca sobre un espejo muy angosto (una sección aguzada de un espejo), y de éste se obtiene un haz divergente que ilumina la muestra (figura A.6).

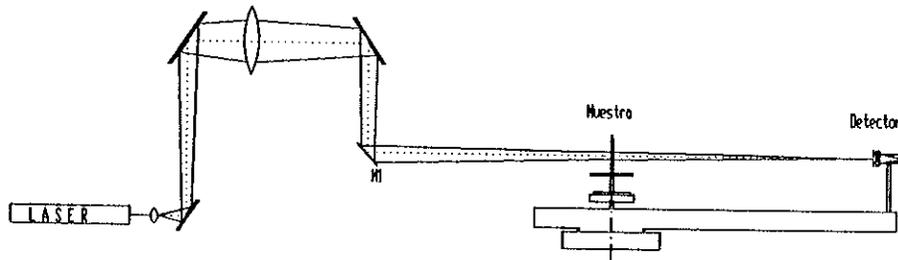


Figura A.5 Modo de iluminación convergente.

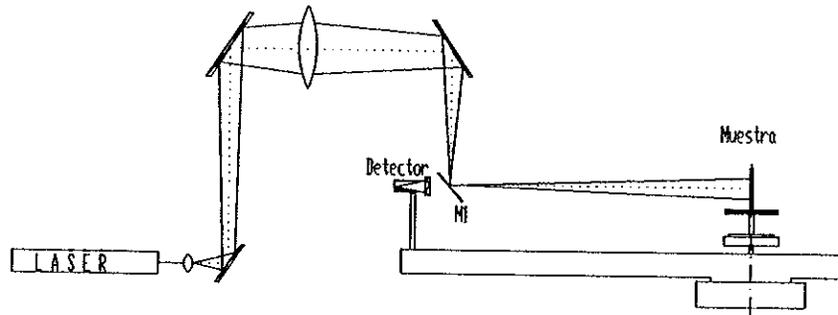


Figura A.6 Modo de iluminación divergente.

La intensidad del haz puede ser controlada por filtros de densidad neutra o mediante la rotación de un polarizador lineal colocado en la trayectoria del láser, antes del polarizador que define la polarización del haz que ilumina la superficie.

A.3 Sistema de control de posición

Este sistema permite colocar el dispositivo de detección en una posición determinada, ya sea en forma manual o remota, a través de una microcomputadora. En forma remota es posible un barrido angular automatizado para realizar mediciones de la intensidad del campo esparcido en función del ángulo de observación.

La parte central del sistema de posicionamiento está formada por un motor a pasos (Aerotech modelo 45SMW, 50 polos) adaptado a una montura de rotación. Mediante una tarjeta de interfase (Aerotech Dynacron-D3001 Stepping Translator) es posible controlar el motor a pasos en forma manual o remota. La tarjeta anterior contiene toda la circuitería necesaria para manejar el motor a pasos. La resolución del motor puede ser seleccionada de entre 200 y 400 pasos por revolución. Como ya se mencionó, el motor a pasos tiene adaptada una mesa de rotación que permite obtener movimientos angulares de 0.5 a 0.25 segundos de arco.

A.3.1 Control Manual

Para el control manual, existen cinco interruptores que controlan el ESPARCIMETRO. Físicamente, estos interruptores se encuentran en la parte frontal de la caja de acrílico que contiene a la tarjeta Aerotech Dynacron-D3001 Stepping Translator (figura A.7).

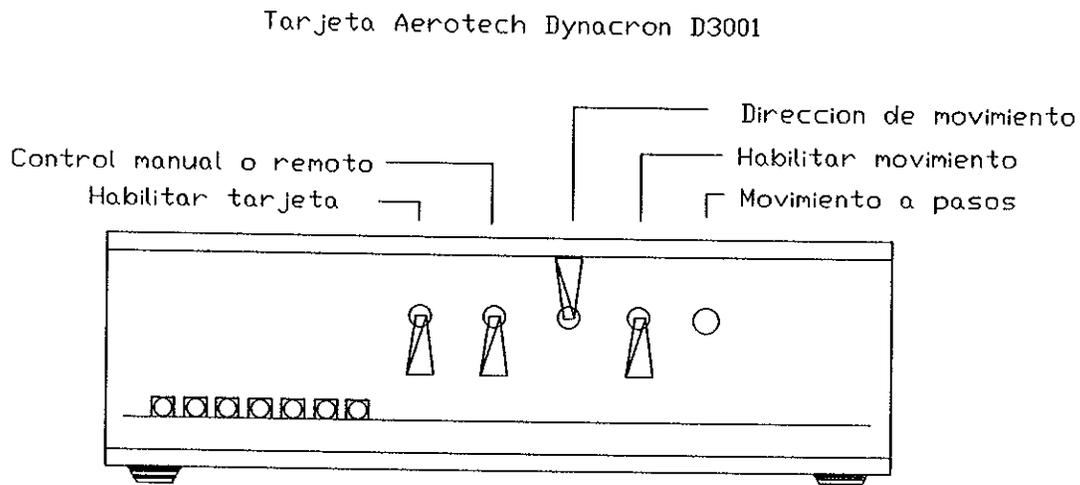


Figura A.7 Interruptores de la tarjeta Aerotech Dynacron-D3001 Stepping Translator.

Interruptor para habilitar la tarjeta de interfase ("Reset").

El interruptor que habilita la tarjeta es el primero de izquierda a derecha (figura A.7). Si este interruptor está hacia abajo, habilita la tarjeta controladora del motor. Si el interruptor está hacia arriba, la deshabilita.

Interruptor para control manual o remoto.

Este interruptor es el segundo de izquierda a derecha y permite tener un control manual (interruptor hacia abajo) o un control remoto (interruptor hacia arriba). Si el interruptor está en posición de control manual es posible hacer girar el motor paso a paso o en movimiento continuo. Si está en posición de control remoto, el control del movimiento se hace mediante un sistema externo. Por ejemplo una microcomputadora.

Interruptor para dirección de movimiento.

Este interruptor es el tercero de izquierda a derecha y permite seleccionar la dirección de movimiento del motor cuando éste se utiliza en modo manual. Si el interruptor está hacia arriba el movimiento del ESPARCIMETRO es en dirección al movimiento de las manecillas del reloj (viendo el instrumento desde arriba), y si está hacia abajo, el movimiento es en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

Interruptor para habilitar el movimiento.

Este interruptor, cuarto de izquierda a derecha, habilita (cuando está hacia arriba) el movimiento continuo del motor. El interruptor deshabilita el movimiento continuo cuando está hacia abajo. Este interruptor sólo está activado en el modo manual.

Interruptor para movimiento a pasos.

Este interruptor permite el movimiento del motor en pasos individuales. Presionando este interruptor el motor avanza un paso en una dirección determinada por el interruptor de dirección de movimiento. El interruptor de movimiento a pasos sólo se activa en modo manual.

Para mayores detalles se puede consultar, "Operator's Manual for the D3001 Stepping Translator". Aerotech, Inc. Pittsburgh, PA.

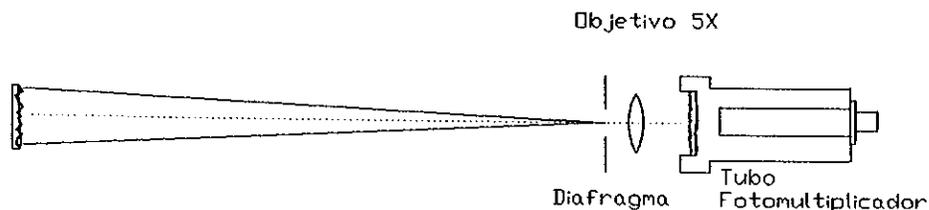


Figura A.9 Sistema de detección.

El tubo fotomultiplicador utilizado tiene una respuesta espectral que va desde 300 a 800 nm. Según especificaciones del fabricante, se le puede aplicar un voltaje máximo de 1250 Voltios a 0.1 mAmp., y tiene una corriente oscura (corriente registrada en el fotomultiplicador en oscuridad total) máxima de 2 nAmp. Sin embargo, la corriente oscura medida experimentalmente es de 3.5 nAmp.

La región lineal del fotomultiplicador, según especificaciones del fabricante, es un intervalo entre la corriente oscura y una vigésima parte de la corriente de dinodo. Entonces para un voltaje de 1000 voltios, la corriente máxima para estar dentro de la región lineal es de $300\mu\text{Amp}$. Experimentalmente se determinó que el rango entre $0.1\mu\text{Amp}$ y $100\mu\text{Amp}$. era adecuado. Para mayores detalles se puede consultar: "Photomultiplier Tubes" y "Accessories for photomultiplier tubes". Hamamatsu Photonics K.K., Hamamatsu, Japón.

A.5 Sistema de adquisición de datos

La señal detectada por el tubo fotomultiplicador es convertida a una señal digital mediante un picoamperímetro (Keithley model 480), mostrado esquemáticamente en la figura A.10. Este instrumento tiene un intervalo de operación que va desde 10^{-9} a 2×10^{-3} amperes, dividido en siete escalas. La información digital es enviada a la microcomputadora a través de una interfase IEEE-488. Para mayor información se puede consultar "Keithley Model 480, Digital Picoammeter Instruction Manual". Keithley Instruments, Inc. Cleveland, Ohio.

Una vez en la microcomputadora la información es almacenada en un disco flexible para su procesamiento posterior.

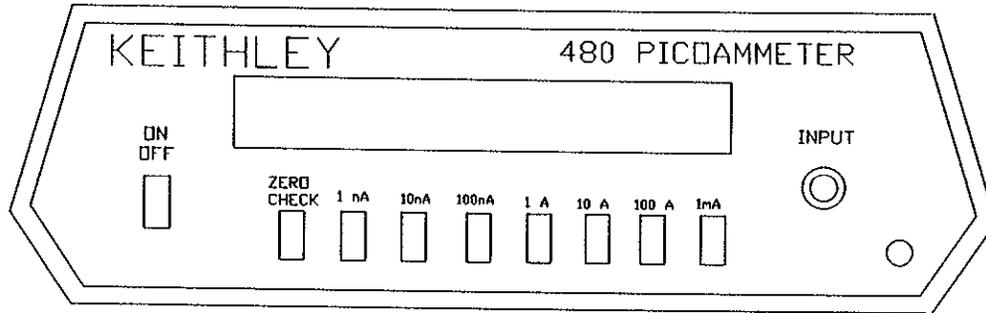


Figura A.10 Picoamperímetro Keithel modelo 480.

A.6 Control de los sistemas

Para el control automatizado de los sistemas se empleó una microcomputadora. El lenguaje utilizado para generar el programa de control fue Turbo-Pascal versión 5.0.

Descripción del programa de control.

Para poder ejecutar el programa que controla los sistemas se deben tener los siguientes archivos en un mismo directorio o disco flexible:

SCATTER.EXE

4X6.FON

14X9.FON

8X8.FON

ERROR.MSG

FORMA.SCT

El archivo SCATTER.EXE es el archivo principal que contiene las secuencias necesarias para operar el ESPARCIMETRO. Los archivos con extensión .FON contienen la información de los modelos de letras empleadas en el programa. El archivo ERROR.MSG contiene los tipos de errores que se pueden producir en la ejecución de rutinas para graficar. FORMA.SCT es un archivo que contiene valores iniciales para algunas funciones del ESPARCIMETRO.

A.7 El programa de control

Para iniciar la sesión en el ESPARCIMETRO basta con ejecutar el archivo SCATTER.EXE. Al ejecutarse el programa se despliega en la pantalla de la computadora, la portada mostrada en la figura A.11. Al aparecer esta portada se prime cualquier tecla, excepto [ESC], para continuar. Si se oprime [ESC] se termina la sesión.



Figura A.11 Portada de inicio de sesión en el ESPARCIMETRO.

La imagen que aparece después de la de portada es la que se muestra en la figura A.12.

INTERVALO								
Posición Actual: 0.00	Resolución: 0.05 grados							
Angulo Inicial: -45.00	Angulo Final: 45.00							
Incremento: 0.25								
Al iniciar barrido: Monitor: APAGADO								
Al terminar barrido: Movimiento:								
SI Vuelve a origen	NO Muestra grafica	LEVOCIRO						
<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px 20px;">Inicia Barrido</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px 20px;">Graba Formato</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px 20px;">Busca Origen</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px 20px;">Grabar Archivo</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px 20px;">Grafica</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px 20px;">Fija Origen</td> </tr> </table>			Inicia Barrido	Graba Formato	Busca Origen	Grabar Archivo	Grafica	Fija Origen
Inicia Barrido	Graba Formato	Busca Origen						
Grabar Archivo	Grafica	Fija Origen						

Figura A.12 Portada de intervalo.

A continuación se describen los comandos que aparecen en la pantalla:

Posición Actual:

En esta sección de la pantalla aparece la posición actual del sistema de detección del ESPARCIMETRO, con respecto a un cierto origen que se denominará origen absoluto. El origen absoluto se asigna a la posición en la que se encuentra el brazo de detección del ESPARCIMETRO al iniciar la sesión. Generalmente se coloca el brazo de detección en la posición deseada como origen utilizando el control manual. Una vez encontrada esta posición se cambia el instrumento a modo remoto.

Resolución:

Indica el movimiento angular mínimo que puede realizar el ESPARCIMETRO.

Convenciones adoptadas para el movimiento del ESPARCIMETRO:

Observando al instrumento desde una vista superior, como lo muestra la figura A.13, el movimiento dextrógiro implica un giro en favor de las manecillas del reloj, mientras que el movimiento levógiro implica un giro en contra del movimiento de las manecillas del reloj.

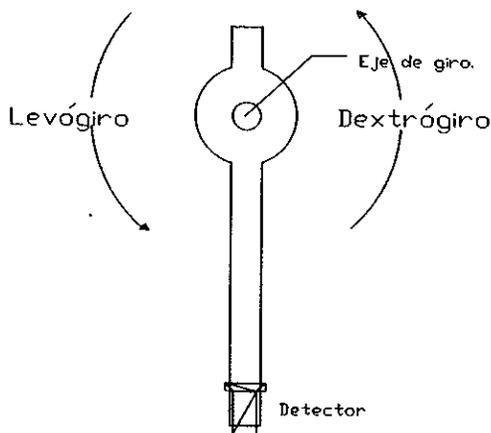


Figura A.13 Convención para la dirección del movimiento del ESPARCIMETRO.

Angulo Inicial:

Indica la posición angular de la cual va a iniciar el barrido el ESPARCIMETRO. Suponiendo, por ejemplo, que el ESPARCIMETRO está en una posición de inicio cualquiera (origen relativo), si el ángulo inicial se escoge con un valor menor que el correspondiente al origen relativo, se indicará que la posición inicial de barrido está a la izquierda de la posición de origen relativo. Por otro lado, si el valor del ángulo inicial es mayor al del origen relativo, la posición de inicio del barrido estará a la derecha de la posición de origen relativo. La dirección en la que se mueve el instrumento es independiente de esta selección y sólo está determinada por el tipo de movimiento, dextrógiro o levógiro.

Angulo Final:

Indica la posición angular a la cual va a terminar el barrido el ESPARCIMETRO. Suponiendo, por ejemplo, que el ESPARCIMETRO está en una posición de inicio cualquiera (origen relativo), si el ángulo final se escoge con un valor menor que el correspondiente al origen relativo, se indicará que la posición final de barrido está a la izquierda de la posición de origen relativo. Si el valor del ángulo final es mayor que el valor del origen relativo, la posición final del barrido estará a la derecha de la posición de origen relativo. La dirección en la que se mueve el instrumento es independiente de esta selección y sólo está determinado por el tipo de movimiento, dextrógiro o levógiro.

Incremento:

Indica el incremento angular que hay entre tomas de datos.

Al iniciar el barrido:

Cuando se han establecido las posiciones de iniciación y terminación del barrido, así como el incremento, puede iniciarse el ciclo para la toma de datos. En ocasiones es importante la total obscuridad, por lo que el brillo de la pantalla de la microcomputadora podría generar ruido. Esta opción permite que justo al iniciar el barrido para toma de datos, el monitor se apague y no interfiera con las mediciones. Al terminar el barrido se encenderá el monitor nuevamente. Si así se desea, el monitor puede quedar encendido durante todo el barrido.

Al terminar el barrido:

En estas opciones se especifican las acciones a seguir cuando se ha terminado el barrido. Una de ellas es volver, o no, a la posición de origen absoluto. Otra es el mostrar una gráfica con las mediciones realizadas durante el barrido. Las opciones anteriores se especifican mediante un si o un no en el recuadro adecuado.

Movimiento:

Especifica el tipo de movimiento que va a realizar el ESPARCIMETRO. Si el valor del origen relativo es mayor al del ángulo inicial, menor al del ángulo final y el tipo de movimiento es levógiro, el barrido iniciará a la izquierda del origen, pasará por el origen, y terminará a la derecha del origen. Si el valor del origen relativo es mayor al del ángulo inicial, menor al del ángulo final y el tipo de movimiento es dextrógiro, el barrido iniciará a la izquierda del origen, no pasará por el origen y terminará a la derecha del origen. Estas situaciones se muestran esquemáticamente en la figura A.14.

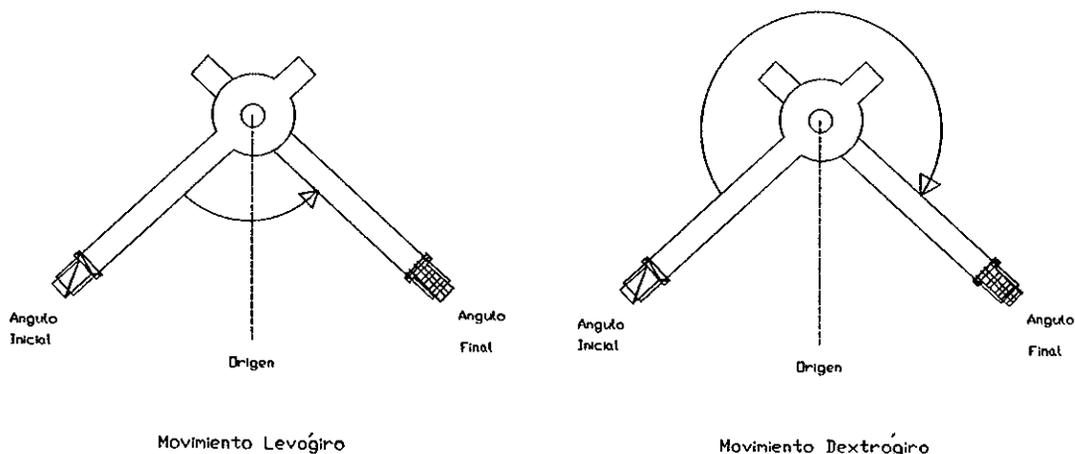


Figura A.14 Convención para el movimiento del ESPARCIMETRO.

Para modificar alguna de las opciones anteriores, basta colocar el apuntador en la posición adecuada con ayuda de las teclas marcadas con flechas. La dirección en la que apunta la flecha indica la dirección del movimiento del apuntador sobre la pantalla. Al estar en la posición deseada se oprime la barra espaciadora y aparece un pequeño recuadro, lo cual indica que la opción puede ser modificada. Como ejemplo, si se quiere cambiar el ángulo inicial, la imagen en la pantalla aparecerá como en la siguiente figura (figura A.15).

INTERVALO		
Posicion Actual:	0.00	Resolucion: 0.05 grados
Angulo Inicial:	<input type="text" value="-90.0"/>	Angulo Final: 45.00
	Incremento: 0.25	
Al iniciar barrido:	Monitor: APAGADO	
Al terminar barrido:		Movimiento:
SI Vuelve a origen	NO Muestra grafica	LEVOCIRO
<input type="button" value="Inicia Barrido"/>	<input type="button" value="Graba Formato"/>	<input type="button" value="Busca Origen"/>
<input type="button" value="Grabar Archivo"/>	<input type="button" value="Grafica"/>	<input type="button" value="Fija Origen"/>

Figura A.15 Ejemplo para modificar el ángulo inicial.

Existen otras opciones que son auxiliares en el manejo del ESPARCIMETRO. Estas se describen a continuación.

Inicia Barrido:

Una vez especificados el ángulo de inicio, el ángulo final y el intervalo, se puede iniciar el barrido colocando el apuntador sobre el recuadro que indica Inicia Barrido y oprimiendo la tecla [enter]. Al hacer esto, aparece una imagen en la pantalla que indica "Un momento...". Esto es sólo para revisar algunos parámetros de operación del ESPARCIMETRO (fig A.16). Si al revisar los parámetros de operación del ESPARCIMETRO existe algún error, principalmente por estar apagado el instrumento para la toma de datos, aparecerá en la pantalla un aviso como el de la figura A.17. Por lo que hay que verificar que todos los instrumentos del ESPARCIMETRO estén operando.

INTERVALO		
Posicion Actual: 0.00	Resolucion: 0.05 grados	
Angulo Inicial: -45.00	Angulo Final: 45.00	
Incremento: 0.25		
Al Al t SI	Un momento	
origen	grafica	
<input type="button" value="Inicia Barrido"/>	<input type="button" value="Graba Formato"/>	<input type="button" value="Busca Origen"/>
<input type="button" value="Grabar Archivo"/>	<input type="button" value="Grafica"/>	<input type="button" value="Fija Origen"/>

Figura A.16 Aviso para inicio de rutina de barrido.

INTERVALO		
Posicion Actual: 0.00	Resolucion: 0.05 grados	
Angulo Inicial: -45.00	Angulo Final: 45.00	
Incremento: 0.25		
Al Al t SI	No responde el instrumento de medicion Probablemente esta apagado < RET >	
origen	grafica	
<input type="button" value="Inicia Barrido"/>	<input type="button" value="Graba Formato"/>	<input type="button" value="Busca Origen"/>
<input type="button" value="Grabar Archivo"/>	<input type="button" value="Grafica"/>	<input type="button" value="Fija Origen"/>

Figura A.17 Aviso por algún error en los sistemas del ESPARCIMETRO.

Graba Formato:

Esta opción permite grabar como formato, para una próxima sesión, el ángulo final, el ángulo inicial, el incremento y las condiciones para el inicio y terminación de barrido. Esta información se graba en un archivo de nombre FORMA.SCT.

Busca Origen:

Si por alguna razón fue interrumpido el proceso de toma de datos en el barrido y se desea empezar nuevamente, la opción Busca Origen permite colocar el ESPARCIMETRO nuevamente en la posición de origen absoluto.

Grabar Archivo:

Al finalizar el barrido, los datos experimentales están en la memoria de la microcomputadora. Si se desea conservar la información, ésta se debe almacenar en un disco flexible o duro. La opción graba archivo permite grabar la información en un archivo cuyo nombre será especificado por el usuario. Cuando se selecciona la opción para grabar archivo, aparece la siguiente imagen en la pantalla (figura A.18). Si en ese momento es oprimida la tecla [Enter], la información se grabará en un archivo cuyo nombre es SCATTER.DAT. Sin embargo, el usuario puede modificar el nombre del archivo y la trayectoria donde se graba.

INTERVALO		
Posicion Actual: 0.00		Resolucion: 0.05 grados
Angulo Inicial: -45.00	Angulo Final: 45.00	
Incremento: 0.25		
Nombre del Archivo >> A:\scatter.dat		
SI Vuelve a origen	NO Muestra grafica	LEVOGIRO
Inicia Barrido	Graba Formato	Busca Origen
Grabar Archivo	Grafica	Fija Origen

Figura A.18 Imagen en pantalla para la opción de grabar información en archivo.

Gráfica:

Permite observar en pantalla, en forma de una grafica X-Y, los datos obtenidos en el último barrido. Una gráfica típica para un experimento de esparcimiento se muestra en la figura A.16.

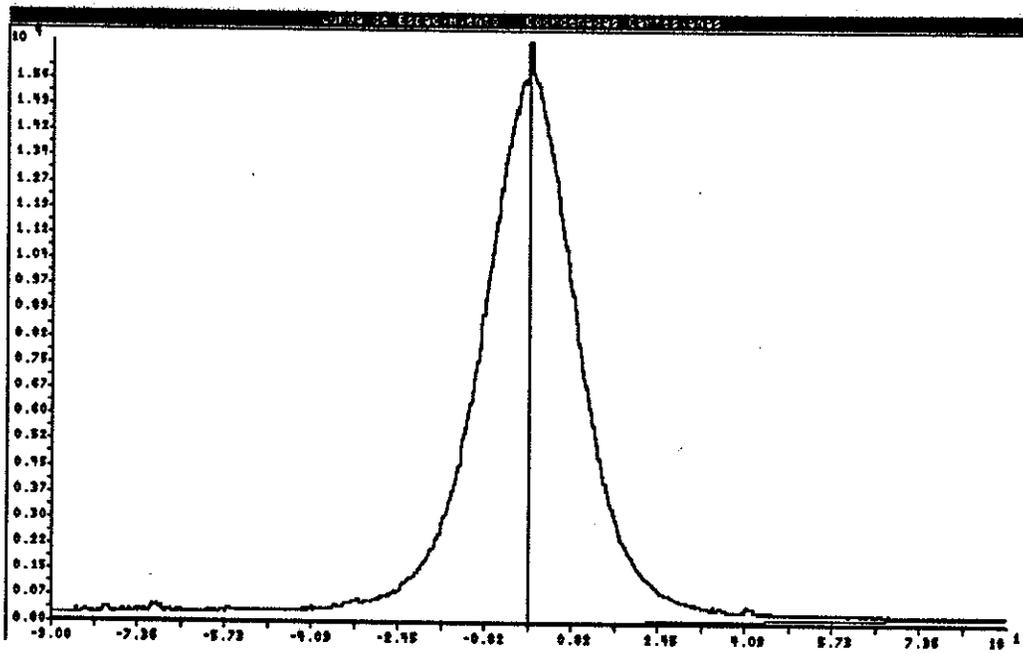


Figura A.19 Imagen en pantalla de una gráfica de un experimento de esparcimiento.

Fija Origen:

Si se desea que la posición actual del brazo del detector sea el origen absoluto de coordenadas, se puede utilizar la opción de fijar el origen. Esta opción le asigna un valor de cero grados al ángulo correspondiente a la posición actual (origen absoluto).

APENDICE B. LA APROXIMACION DE KIRCHHOFF

La aproximación de Kirchhoff es un modelo empleado para analizar problemas de esparcimiento por superficies rugosas que se puede considerar más riguroso que el modelo de la pantalla delgada de fase. Este modelo supone que una superficie rugosa es localmente plana. Es decir, la contribución al campo esparcido por un punto de la superficie es igual a aquella debida a un plano tangente a ese punto (figura B.1). Esta contribución se considera independiente de lo que ocurre en otros puntos

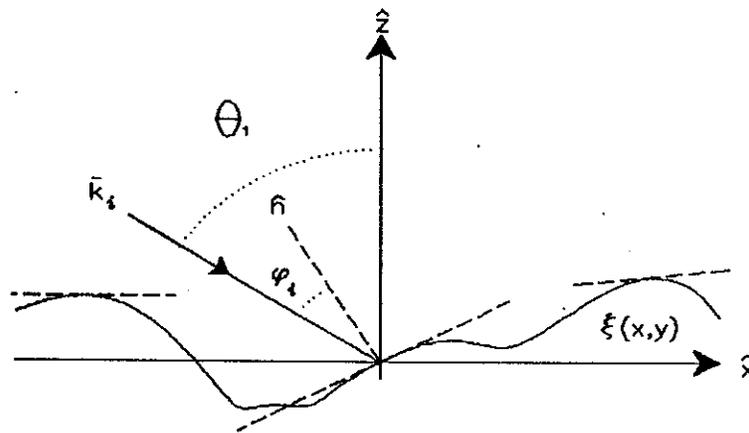


Figura B.1 Aproximación de Kirchhoff. Representación del plano tangente a un punto.

Con este modelo es posible aproximar el campo y la derivada normal del campo en la superficie, a través de las siguientes relaciones (Beckmann y Spizzichino [1963], pag 20. DeSanto y Brown [1986])

$$(E)_s = (1 + R)E_i(x, y, 0), \quad (b.1)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial n}\right)_s = i(1 - R)E_i(x, y, 0)\vec{k}_i \cdot \vec{n}, \quad (b.2)$$

para el caso de reflexión. Para el caso en transmisión, se sigue un desarrollo semejante al presentado por DeSanto y Brown [1986] (pag 11) para el caso de reflexión.

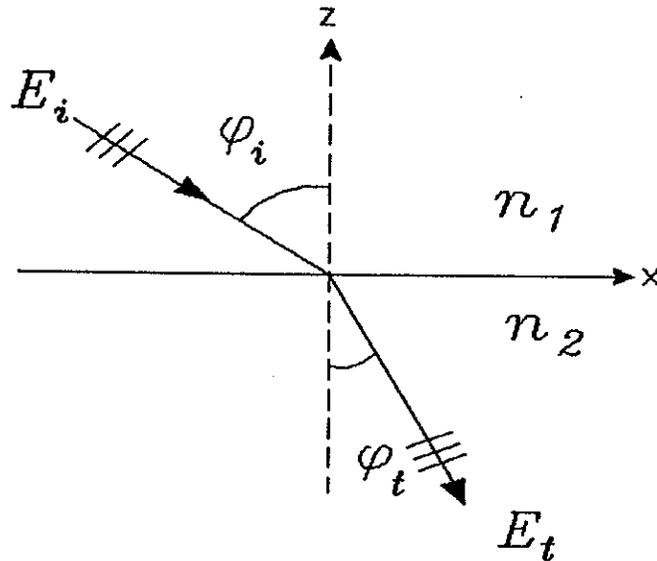


Figura B.2 Frente de onda plana incidiendo sobre una superficie plana. Geometría para obtener las condiciones de frontera en el caso de transmisión.

Se considera primero una onda plana incidente sobre una superficie plana (en una geometría bidimensional), como se muestra en la figura (B.2). La amplitud compleja del campo incidente está dada por

$$E_i(x, z) = A_i \exp[ik_i(x \sin \psi_i - z \cos \psi_i)]. \quad (\text{b.3})$$

Asimismo, el campo transmitido se representa por

$$E_t(x, z) = A_t \exp[ik_2(x \sin \psi_t - z \cos \psi_t)], \quad (\text{b.4})$$

donde A_t está relacionada con el coeficiente de transmisión.

Se supone que se cumplen las siguientes condiciones: invariancia translacional en la dirección x en el plano $z = 0$. Entonces las componentes x de la onda incidente y de la transmitida son iguales. La segunda condición es que se satisfagan los valores de frontera para el campo electromagnético. Entonces en el plano $z = 0$ se tiene

$$E_i(x, 0) = T E_t(x, 0), \quad (\text{b.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_i(x, 0) = \frac{\partial}{\partial z} E_t(x, 0). \quad (\text{b.6})$$

Después de evaluar lo anterior, considerando las ecuaciones (b.3) y (b.4) se obtiene

$$(E)_s = T E_t(x, y, 0), \quad (\text{b.7})$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial n}\right)_s = iT E_t(x, y, 0) \vec{k}_i \cdot \vec{n}. \quad (\text{b.8})$$

En estas expresiones $E_i(x, y, 0)$ es el campo incidente evaluado en la superficie. R y T son, respectivamente, los coeficientes de reflexión y transmisión de Fresnel. Estos dependen de la polarización del haz incidente y del ángulo local de incidencia. Para polarización S, estos coeficientes están dados por (Born y Wolf [1987], pag 40)

$$R = \frac{n_1 \cos \psi_i - n_2 \cos \psi_t}{n_1 \cos \psi_i + n_2 \cos \psi_t}, \quad (b.9)$$

$$T = \frac{2n_1 \cos \psi_i}{n_1 \cos \psi_i + n_2 \cos \psi_t}, \quad (b.10)$$

donde ψ_i es el ángulo local de incidencia y ψ_t es el ángulo local de transmisión (ver figura B.1).

Para el cálculo del campo esparcido se supondrá que se ilumina a la superficie rugosa con una onda convergente de amplitud A , ya que experimentalmente este tipo de iluminación es conveniente. Entonces, el haz incidente es de la forma:

$$E_i(x, y, 0) = \frac{A}{R_f} e^{-ik_1 R_f}, \quad (b.11)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, y $R_f = |\vec{R}_{of} - \vec{r}|$ es la distancia de un punto en la superficie al punto donde converge el haz, \vec{R}_{of} es el vector que va del origen al punto donde converge el haz y \vec{r} es el vector de posición, que para puntos en la superficie se expresa como

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + \xi(x, y)\hat{z} \quad (b.12)$$

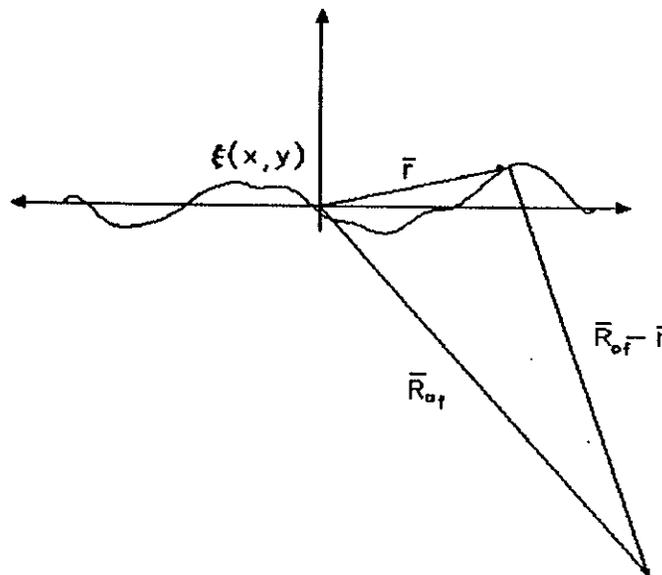


Figura B.3

Geometría para la aproximación del campo incidente, $R_{of} \gg r$.

Considerando que el haz incidente converge a un punto situado en una región lejana a la superficie, es posible realizar algunas aproximaciones (figura B.3). Se escribe primero

$$|\vec{R}_{of} - \vec{r}| = \sqrt{R_{of}^2 + r^2 - 2\vec{R}_{of} \cdot \vec{r}} = R_{of} \sqrt{1 + \frac{r^2}{R_{of}^2} - 2 \frac{\vec{R}_{of} \cdot \vec{r}}{R_{of}^2}}. \quad (b.13)$$

Como se está suponiendo que $R_{of} \gg r$ (el haz converge en un punto alejado), es posible aproximar esta cantidad en la forma:

$$|\vec{R}_{of} - \vec{r}| = R_{of} \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{R}_{of} \cdot \vec{r}}{R_{of}^2}} = R_{of} \left[1 - \frac{\vec{R}_{of} \cdot \vec{r}}{R_{of}^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\vec{R}_{of} \cdot \vec{r}}{R_{of}^2} \right)^2 + \dots \right], \quad (b.14)$$

que se puede reescribir de la siguiente manera

$$|\vec{R}_{of} - \vec{r}| \approx R_{of} - \frac{\vec{R}_{of} \cdot \vec{r}}{R_{of}} - \frac{1}{4} \frac{(\vec{R}_{of} \cdot \vec{r})^2}{R_{of}^3} + \dots \quad (b.15)$$

Se define ahora al vector k_i como :

$$\vec{k}_i = k \frac{\vec{R}_{of}}{R_{of}}, \quad (b.16)$$

y, por simplicidad, se supone que éste siempre está contenido en el plano xz (figura B.4). Finalmente, reteniendo solamente términos cuadráticos o de orden menor, el campo incidente se puede expresar como

$$E_i(x, y, z) = \frac{A}{R_{of}} \exp \left[-ik_i R_{of} + i\vec{k}_i \cdot \vec{r} + \frac{i}{4kR_{of}} (\vec{k}_i \cdot \vec{r})^2 \right]. \quad (b.17)$$

B.1 Aproximación de Kirchhoff. Reflexión.

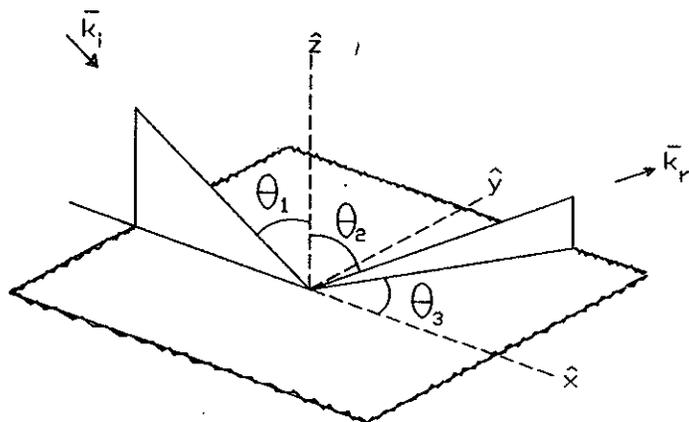


Figura B.4 Geometría de Esparcimiento. Aproximación de Kirchhoff para el caso de reflexión.

Considérese un frente de onda convergente incidiendo sobre una superficie rugosa, representada por la función $\xi(x, y)$. El ángulo de incidencia, definido por la dirección de propagación de E_i y el eje z , será denotado por θ_1 , y el ángulo de esparcimiento definido por z y \vec{k}_r (figura B.4), será denotado por θ_2 . Aquí, \vec{k}_r es el vector en la dirección de esparcimiento, y se cumple que $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = k$.

Sea $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ un punto cualquiera de observación. Entonces, para calcular el campo esparcido por una superficie en P_o , se considera primero la expresión (17) del capítulo III, donde $G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)$ es la función de Green. Se propondrá para ésta la misma función que en la sección 3.1, es decir, la ecuación (11). Si la distancia del punto de observación P_o a un punto $x, y, \xi(x, y)$ en la superficie, denotada por R_o , es mucho mayor que la distancia del origen a cualquier punto situado en la superficie ($r \gg R_o$), es posible hacer una aproximación semejante a la realizada para el campo incidente (ecuación (b.18)). De las consideraciones anteriores se obtiene

$$G(x, y, z/x_o, y_o, z_o) = \frac{1}{R_{oo}} \exp \left[-ik_r R_{oo} + i\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \frac{i}{4kR_{oo}} (\vec{k}_r \cdot \vec{r})^2 \right], \quad (b.18)$$

donde R_{oo} es la distancia del origen al punto de observación y \vec{k}_r es el vector en la dirección de esparcimiento, que se denota por

$$\vec{k}_r = k \frac{\vec{R}_{oo}}{R_{oo}}. \quad (b.19)$$

Para calcular el campo esparcido en un punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ se sustituyen, en la ecuación (17), las expresiones para la función de Green (ecuación (b.18)), el campo y su derivada normal en la superficie. Estas dos últimas se obtuvieron mediante las expresiones (b.1) y (b.2). Entonces se tiene que:

$$E_s(P_o) = \frac{iA}{4\pi R_{oo} R_{of}} e^{ik(R_{oo} - R_{of})} \int_S [R(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{n} - (\vec{k}_i + \vec{k}_r) \cdot \vec{n}] e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}} ds. \quad (b.20)$$

La expresión anterior sólo es válida en una región donde se cumpla que

$$\frac{1}{4k} \left[\frac{(\vec{k}_i \cdot \vec{r})^2}{R_{of}} - \frac{(\vec{k}_r \cdot \vec{r})^2}{R_{oo}} \right] \ll 2\pi. \quad (b.21)$$

De la figura 19 se observa que $R_{of} = R_{oo}$, por lo que la expresión (b.21) se puede escribir como

$$\frac{k r^2}{4R_{oo}} [\cos^2(\vec{k}_i, \vec{r}) - \cos^2(\vec{k}_r, \vec{r})] \ll 2\pi. \quad (b.22)$$

Donde $\cos^2(\vec{k}_i, \vec{r})$ y $\cos^2(\vec{k}_r, \vec{r})$ son, respectivamente, el coseno del ángulo que se forma entre el vector \vec{k}_i y el vector \vec{r} y el coseno del ángulo que forma el vector \vec{k}_r y el vector \vec{r} . Nótese que el valor de estos cosenos nunca es mayor a uno, por lo que la expresión (b.22) puede reescribirse como

$$\frac{r^2}{\lambda} \ll 4R_{oo}. \quad (b.23)$$

Lo que implica que la distancia del origen al punto de observación tiene que ser mucho mayor que la razón de la dimensión máxima al cuadrado del elemento esparcidor a la longitud de onda, para que la condición (b.21) se cumpla.

Considérese ahora, el siguiente cambio de variables

$$\vec{v}_r = \vec{k}_i - \vec{k}_r, \quad \vec{p} = \vec{k}_i + \vec{k}_r. \quad (b.24)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (b.20), ésta se puede reescribir en la forma

$$E_s(P_o) = \frac{iA}{4\pi R_{oo} R_{of}} e^{ik(R_{oo} - R_{of})} \int_S \int (R\vec{v}_r - \vec{p}) \cdot \vec{n} \exp[i\vec{v}_r \cdot \vec{r}] ds. \quad (b.25)$$

La expresión (b.25) representa el campo esparcido por una superficie en un punto P_o . De la figura B.4, y para una geometría en reflexión se pueden expresar los vectores \vec{k}_i y \vec{k}_r como

$$\vec{k}_i = k \operatorname{sen} \theta_1 \hat{x} - k \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (b.26)$$

$$\vec{k}_r = k \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 \hat{x} + k \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \hat{y} + k \cos \theta_2 \hat{z}. \quad (b.27)$$

Si se sustituyen las relaciones anteriores en la expresión para el campo esparcido (ecuación (b.25)), y conociendo además que

$$\hat{n} = \frac{-\xi_x \hat{x} - \xi_y \hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{(\xi_x)^2 + (\xi_y)^2 + 1}}, \quad (b.28)$$

$$ds = \sqrt{(\xi_x)^2 + (\xi_y)^2 + 1} dx dy, \quad (b.29)$$

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad (b.30)$$

se obtiene, después de un desarrollo algebraico,

$$E_s(P_o) = \frac{iA}{4\pi R_{oo} R_{of}} e^{ik(R_{oo} - R_{of})} \int \int [\alpha_r \xi_x + c_r \xi_y - b_r] \exp[i\vec{v}_r \cdot \vec{r}] dy dx. \quad (b.31)$$

En esta expresión, las cantidades α_r , b_r y c_r están dadas por

$$\alpha_r = (1 - R) \operatorname{sen} \theta_1 + (1 + R) \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3, \quad (b.32)$$

$$b_r = (1 + R) \cos \theta_2 - (1 - R) \cos \theta_1, \quad (b.33)$$

$$c_r = (1 + R) \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3. \quad (b.34)$$

La ecuación (b.31) es la expresión más general para el campo esparcido en una geometría de reflexión basada en la aproximación de Kirchhoff. Sin embargo, la evaluación de esta integral de manera analítica resulta difícil ya que el coeficiente de reflexión (ecuación (b.9)), depende del ángulo local de incidencia

(figura B.1). Esto implica que α_r , b_r y c_r dependen de la posición (x,y) en la superficie, y por lo tanto de la variable de integración. Una manera de evaluar la integral en la expresión (b.31), es suponer que los factores α_r , b_r y c_r son independientes de la posición. Esto se logra considerando a la superficie como un conductor perfecto. En este caso (conductividad infinita), para polarización S, el coeficiente de reflexión es $R = -1$ (Born y Wolf [1975], pag 615). Sustituyendo este valor en las ecuaciones (b.32), (b.33) y (b.34) se obtienen las siguientes expresiones, que son independientes de la posición en la superficie:

$$\alpha_r = 2 \operatorname{sen} \theta_1, \quad b_r = -2 \cos \theta_1, \quad c_r = 0. \quad (\text{b.35})$$

Antes de evaluar la integral en la expresión (b.31), se desarrolla el producto escalar $\vec{v}_r \cdot \vec{r}$ en la forma,

$$\vec{v}_r \cdot \vec{r} = v_{rx}x + v_{ry}y + v_{rz}z(x, y); \quad (\text{b.36})$$

donde

$$v_{rx} = k(\operatorname{sen} \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3), \quad (\text{b.37a})$$

$$v_{ry} = -k(\operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3), \quad (\text{b.37b})$$

$$v_{rz} = -k(\cos \theta_1 + \cos \theta_2). \quad (\text{b.37c})$$

Regresando a la expresión (b.31), y considerando a α_r , b_r y c_r independientes de la posición (superficie conductora perfecta), es posible evaluar la integral por partes. Después de un desarrollo algebraico se obtiene

$$E_s(P_s) = \frac{iAk}{4\pi R_{oo} R_{of}} e^{ik(R_{oo} - R_{of})} \left[- \left(\frac{\alpha_r v_{rx}}{v_{rz}} + b_r \right) \int_{\mathcal{A}} \int \exp[i\vec{v}_r \cdot \vec{r}] dy dx \right] + B_r(x, y), \quad (\text{b.38})$$

donde \mathcal{A} es la región iluminada en la superficie y $B_r(x, y)$ es un efecto de borde y está dado por

$$B_r(x, y) = \frac{iAk}{4\pi R_{oo} R_{of}} e^{ik(R_{oo} - R_{of})} \left(\frac{\alpha_r}{i v_{rx}} \int_{-x}^y e^{i\vec{v}_r \cdot \vec{r}} dy \right). \quad (\text{b.39})$$

Este término se puede despreciar cuando el área iluminada es mucho mayor a λ^2 (Beckmann y Spizzichino [1963], pag 31). Utilizando las relaciones (b.37) en el término entre paréntesis de la ecuación (b.38) se encuentra que :

$$F_r(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_r}{v_{rz}} + b_r \right) = \left(\frac{1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2} \right). \quad (\text{b.40})$$

Este término, $F_r(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, representa un factor angular que ha sido controversial en la literatura (Nieto-Vesperinas y García [1981]). Sustituyendo la relación (b.40) en la expresión (b.38) se tiene que

$$E_s(P_s) = \frac{iAk}{2\pi R_{oo} R_{of}} e^{ik(R_{oo} - R_{of})} F_r(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \int_{\mathcal{A}} \int \exp[i\vec{v}_r \cdot \vec{r}] dy dx + B_r(x, y). \quad (\text{b.41})$$

La expresión anterior es la solución general para la amplitud compleja del campo esparcido por una superficie conductora perfecta en una geometría de reflexión utilizando la aproximación de Kirchhoff.

B.2 Aproximación de Kirchhoff. Transmisión.

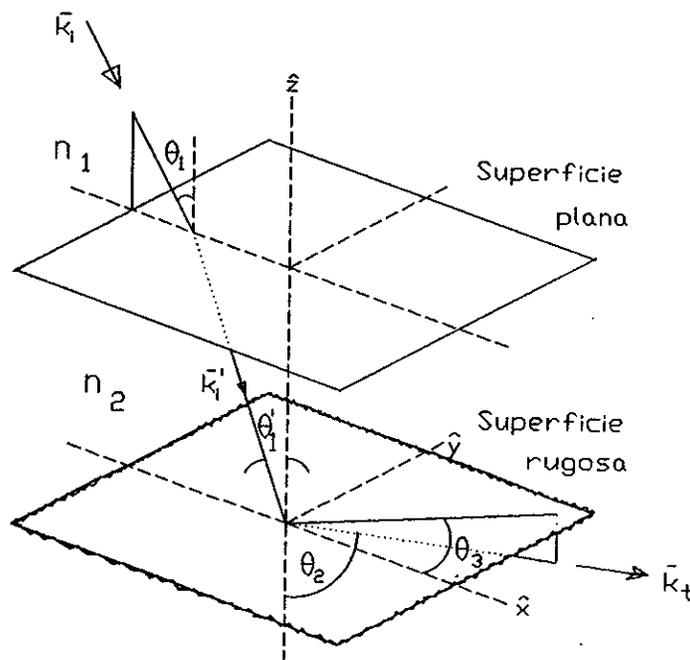


Figura B.5 Geometría de Esparcimiento. Aproximación de Kirchhoff, para el caso en transmisión.

Para esta geometría, considérese una placa que por un lado es rugosa (superficie 2) y por el otro lisa (superficie 1), como se muestra en la figura B.5. Se ilumina la placa por el lado liso con un frente de onda convergente (ecuación (b.17)), ya que experimentalmente esto es conveniente. El cambio que ocurre en el vector de propagación cuando el haz se refracta en la superficie 1 (figura B.6), debido al paso de un medio de índice de refracción n_1 a otro con índice n_2 se obtiene mediante el uso de la ley de Snell, y de algunas identidades trigonométricas. Se supone por simplicidad, que el vector de propagación del haz incidente \vec{k}_i , siempre está contenido en el plano xz , y se representa por

$$\vec{k}_i = k \sin \theta_1 \hat{x} - k \cos \theta_1 \hat{z}, \quad (b.42)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$.

El vector de propagación del haz en el medio n_2 se representa por

$$\vec{k}_t = k' \sin \theta_2 \hat{x} - k' \cos \theta_2 \hat{z}, \quad (b.43)$$

donde k' es el número de onda en el medio n_2 . Utilizando la ley de Snell, se tienen las relaciones

$$k' = k \frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta'_1}, \quad (\text{b.44a})$$

$$\cos \theta'_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{sen}^2 \theta_1}. \quad (\text{b.44b})$$

Sustituyendo las expresiones (b.44) en la ecuación (b.43) se obtiene una expresión para el vector de propagación en el medio n_2 en función del ángulo de incidencia sobre la superficie 1 y del número de onda en el medio n_1 . Esto es

$$\vec{k}'_i = k \text{sen } \theta_1 \hat{x} - k \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \text{sen}^2 \theta_1} \hat{z}. \quad (\text{b.45})$$

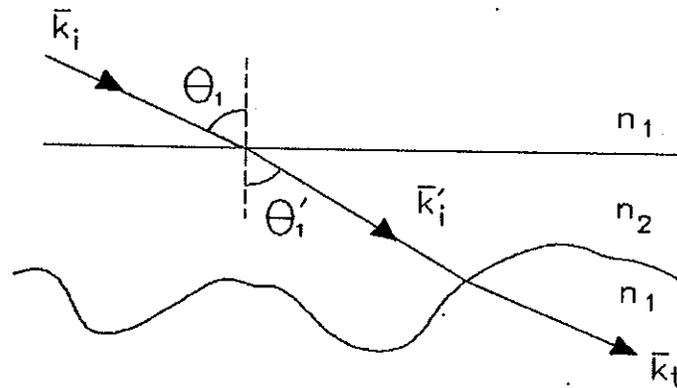


Figura B.6 Geometría de transmisión a través de una superficie plana y rugosa.

Considérese ahora el frente de onda convergente que ha sido refractado en la superficie 1, y que incide sobre la superficie rugosa (superficie 2) representada por la función $\xi(x, y)$, a un cierto ángulo denotado por θ_i (ver figura B.6). Este ángulo de incidencia, θ_i , en el medio n_2 , es el comprendido entre la dirección de propagación del campo E_i en el medio 2 y el eje \hat{z} (figura B.6), mientras que el ángulo de esparcimiento, θ_2 , es el comprendido entre \hat{z} y \vec{k}_t . El vector \vec{k}_t es un vector en la dirección de esparcimiento. Nótese además que $|\vec{k}_t| = |\vec{k}_i| = k \neq |\vec{k}'_i|$. Entonces se puede expresar al campo incidente de manera semejante a la expresión (b.17), sólo que éste se encuentra en un medio n_2 , por lo que, en este medio, el campo incidente puede expresarse como

$$E_i(x, y, z) = \frac{A}{R_{of}} \exp \left[-ik' R_{of} + i\vec{k}'_i \cdot \vec{r} + \frac{i}{4k' R_{of}} (\vec{k}'_i \cdot \vec{r})^2 \right]. \quad (\text{b.46})$$

Esta es una aproximación válida cuando $R_{of} \gg r$.

Como en la sección anterior, se considera un punto de observación cualquiera $P_o = (x_o, y_o, z_o)$, y sea R_o la distancia de P_o a un punto $(x, y, \xi(x, y))$ en la superficie. Entonces, el campo esparcido puede determinarse mediante la expresión (17) del capítulo III. $G(x, y, z/x_o, y_o, z_o)$ es la función de Green, que ya ha sido propuesta a través de la expresión (b.18). Sustituyendo en la ecuación (17) las expresiones para la función de Green, el campo en la superficie, y la derivada normal del campo en la superficie (utilizando las ecuaciones (b.7), (b.8) y (b.46)) se obtiene:

$$E_s(P_o) = -\frac{iA}{2\pi R_{oo}R_{of}} e^{i[kR_{oo}-k'R_{of}]} \int_S T(\vec{k}_i \cdot \vec{n}) \exp[i(\vec{k}_i - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}] ds. \quad (b.47)$$

El rango de validez de esta expresión es similar al de la expresión (b.20), es decir, el punto de observación se encuentra alejado de la superficie rugosa.

Considerando ahora el cambio de variable:

$$\vec{v}_i = \vec{k}_i - \vec{k}_i, \quad (b.48)$$

se puede escribir la ecuación (b.47) en la forma:

$$E_s(P_o) = -\frac{iA}{2\pi R_{oo}R_{of}} e^{i[kR_{oo}-k'R_{of}]} \int_S T(\vec{k}_i \cdot \vec{n}) \exp[i\vec{v}_i \cdot \vec{r}] ds. \quad (b.49)$$

La expresión anterior representa el campo esparcido por una superficie en una geometría de transmisión. Nótese además de la figura B.6 y de la ecuación (b.45), que:

$$\vec{k}_i = k \text{sen} \theta_1 \hat{x} - k \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \text{sen}^2 \theta_1} \hat{z}, \quad (b.50)$$

$$\vec{k}_t = k \text{sen} \theta_2 \cos \theta_3 \hat{x} + k \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_3 \hat{y} - k \cos \theta_2 \hat{z}. \quad (b.51)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la expresión para el campo esparcido (ecuación (b.49)), y dadas las expresiones (b.28), (b.29) y (b.30), se encuentra que

$$E_s(P_o) = \frac{iA}{2\pi R_{oo}R_{of}} e^{i[kR_{oo}-k'R_{of}]} \int_A [\alpha_i \xi_x + c_i \xi_y + b_i] e^{i\vec{v}_i \cdot \vec{r}} dy dx, \quad (b.52)$$

donde las cantidades α_i , b_i y c_i están dadas por

$$\alpha_i = T \text{sen} \theta_2 \cos \theta_3, \quad b_i = T \cos \theta_2, \quad c_i = T \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_3. \quad (b.53)$$

La ecuación (b.52), es la expresión más general para el cálculo del campo esparcido en una geometría de transmisión utilizando la aproximación de Kirchhoff (plano tangente). Sin embargo, solamente se puede evaluar analíticamente para geometrías sencillas, pues el coeficiente de transmisión depende del ángulo local de incidencia (figura B.6), es decir de la posición (x,y) en la superficie. Por analogía con el caso de reflexión, se sabe que si los factores α_i , b_i y c_i fueran constantes, sería posible evaluar la integral en la expresión

(b.52). Suponemos entonces, que el material es un "dieléctrico perfecto", y que el coeficiente de transmisión es una constante que no depende del ángulo local de incidencia y que modifica la transmitancia en toda la superficie por un factor $T = t_o$. Esta puede ser una aproximación razonable para superficies con pendientes pequeñas y para ángulos de incidencia y esparcimiento relativamente pequeños. Por lo anterior, se supone que los factores α , b , y c , están dados por las siguientes expresiones, que son independientes de la posición sobre la superficie

$$\alpha = t_o \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3, \quad b = t_o \cos \theta_2, \quad c = t_o \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3. \quad (\text{b.54})$$

Para evaluar la integral en la expresión (b.52), se escribe primero el producto escalar $\vec{v}_1 \cdot \vec{r}$ en la forma:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{r} = v_{1x}x + v_{1y}y + v_{1z}\xi(x, y), \quad (\text{b.55})$$

donde

$$v_{1x} = k(\text{sen } \theta_1 - \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3), \quad (\text{b.56a})$$

$$v_{1y} = -k(\text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3), \quad (\text{b.56b})$$

$$v_{1z} = k\left(\cos \theta_2 - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \text{sen}^2 \theta_1}\right). \quad (\text{b.56c})$$

Evaluando la integral en la expresión (b.52) por partes, y después de un desarrollo algebraico, se obtiene

$$E_s(P_o) = \frac{iA}{2\pi R_{oo}R_{of}} e^{i(kR_{oo} - k'R_{of})} \left[-\left(\alpha \frac{v_{1x}}{v_{1z}} + c \frac{v_{1y}}{v_{1z}} - b\right) \int_A \int e^{i\vec{v}_1 \cdot \vec{r}} dy dx \right] + B_1(x, y), \quad (\text{b.57})$$

donde $B_1(x, y)$ es un efecto de borde definido por:

$$B_1(x, y) = \frac{iA}{2\pi R_{oo}R_{of}} e^{i(kR_{oo} - k'R_{of})} \left(\frac{\alpha}{iv_{1z}} \int_{-y}^y e^{i\vec{v}_1 \cdot \vec{r}} \Big|_{-x}^x dy + \frac{c}{iv_{1z}} \int_{-y}^y e^{i\vec{v}_1 \cdot \vec{r}} \Big|_{-y}^y dx \right). \quad (\text{b.58})$$

Este efecto es despreciable cuando el área iluminada es mucho mayor que λ^2 (Beckmann y Spizzichino [1963], pag 31). Utilizando las relaciones (b.54) en la expresión entre paréntesis de la ecuación (b.57) se obtiene

$$F_t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = -\left(\alpha \frac{v_{1x}}{v_{1z}} + c \frac{v_{1y}}{v_{1z}} - b\right) = \frac{t_o \left[1 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_2 \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \text{sen}^2 \theta_1} \right]}{\cos \theta_2 - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \text{sen}^2 \theta_1}}. \quad (\text{b.59})$$

El factor $F_t(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, representa un factor angular, o de oblicuidad, para la geometría de transmisión. Sustituyendo la relación anterior en la expresión (b.57), se obtiene la expresión para el campo esparcido por una superficie rugosa, cuando ésta es un dieléctrico perfecto, en una geometría de transmisión:

$$E_s(P_o) = \frac{iA}{2\pi R_{oo}R_{of}} e^{i(kR_{oo} - k'R_{of})} F_t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \int \int_A \exp[i\vec{v}_t \cdot \vec{r}] dy dx + B_t(x, y). \quad (b.60)$$

Las expresiones obtenidas aquí para el campo esparcido en las geometrías de reflexión y transmisión son esencialmente iguales a la obtenida en el capítulo III para el campo esparcido utilizando el modelo de la pantalla delgada de fase. La diferencia principal se encuentra en los factores angulares, o de oblicuidad, y en los términos de efecto de borde que se obtienen en la Aproximación de Kirchhoff. Por lo tanto, para determinar las expresiones para la intensidad promedio esparcida, se requiere un procedimiento semejante al utilizado en el capítulo III. Los resultados para la intensidad esparcida, basados en la aproximación de Kirchhoff, se obtienen entonces, de los resultados del capítulo III realizando algunos cambios.