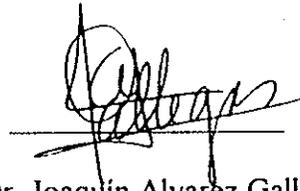


RESUMEN de la Tesis de Carlos Alberto Brizuela Rodríguez presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en FÍSICA APLICADA con opción en ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES. Ensenada, Baja California, México. Junio 1994.

## DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES EMPLEANDO TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA

Resumen aprobado por:



Dr. Joaquín Álvarez Gallegos.  
Director

La presente tesis está relacionada con la propuesta de una nueva metodología en el diseño de controladores para una clase de sistemas no lineales. Esta metodología puede ser considerada como la extensión de una técnica de diseño de aparición reciente, aplicable a sistemas lineales invariantes en el tiempo. Esta utiliza técnicas de optimización convexa para encontrar los controladores que hagan satisfacer ciertas especificaciones de desempeño impuestas de antemano.

Se consideran dos tipos de sistemas no lineales: aquéllos para los cuales existe una aproximación lineal obtenida mediante el truncamiento al primer orden de su expansión en series de Taylor, y aquéllos que pueden ser transformados a un sistema lineal invariante mediante retroalimentación del estado y un cambio de coordenadas.

Se presenta un ejemplo de aplicación utilizando el modelo de un motor de inducción trifásico. Para este sistema se establece un conjunto de especificaciones de desempeño directamente relacionado con las características dinámicas del mismo y que pueden formularse como funcionales convexas de matriz de transferencia en lazo cerrado resultante. Se muestra, en simulación numérica, que es posible obtener el desempeño dinámico deseado a pesar de la dinámica no trivial del modelo.

ABSTRACT of the thesis, presented by Carlos Alberto Brizuela Rodriguez, in order to obtain the MASTER of SCIENCE DEGREE in APPLIED PHYSICS within the option of TELECOMMUNICATIONS AND ELECTRONICS. Ensenada, Baja California, México. June 1994.

CONTROLLER DESIGN FOR A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS USING  
CONVEX OPTIMIZATION TECHNIQUES.

Approved by:



Ph. D. Joaquín Alvarez Gallegos.  
Thesis Advisor.

The present dissertation is related with the development of a new controller design procedure for a class of nonlinear systems. This methodology is an extension of a recent design technique for linear time invariant systems. The methodology uses convex optimization techniques to find out controllers that make the closed loop system meet some performance specifications established previously.

We consider two types of nonlinear systems: those for which it is possible to get a linear approximation to the first order Taylor's series expansion, and those which are linearizable by state feedback and a change of coordinates.

We present the application of the proposed technique to an induction motor modeled by a set of five nonlinear differential equations. A set of performance specifications directly related to the dynamic behavior of the motor is established. These especifications can be represented as convex functionals of the closed-loop transfer matrix. It is shown, by numeric simulation, the feasibility to obtain the desired performance in spite of model's complexity.

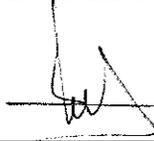
TESIS DEFENDIDA POR: **CARLOS ALBERTO BRIZUELA RODRIGUEZ**

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



---

**DR. JOAQUIN ALVAREZ GALLEGOS.-** Director del Comité



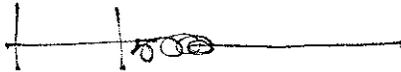
---

**DR. ENRIQUE MITRANI ABENCHUCHAN.-** Miembro del Comité



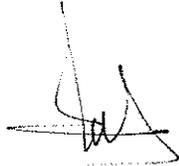
---

**M.C. MOISES CASTRO DELGADO.-** Miembro del Comité



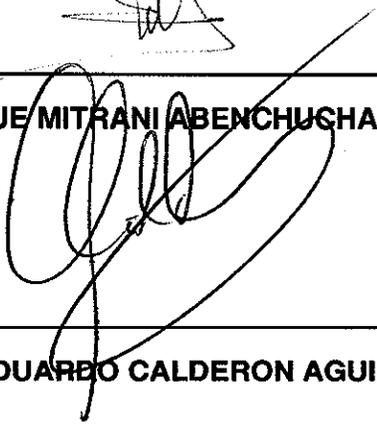
---

**DR. HECTOR ECHAVARRIA HERAS.-** Miembro del Comité



---

**DR. ENRIQUE MITRANI ABENCHUCHAN.-** Jefe Depto. Electrónica y Telecomunicaciones



---

**DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.-** Director de Estudios de Posgrado

10 DE JUNIO DE 1994

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE  
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA, B.C.**



**DIVISION DE FISICA APLICADA**

**DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y  
TELECOMUNICACIONES**

**DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UNA CLASE DE  
SISTEMAS NO LINEALES EMPLEANDO TECNICAS DE  
OPTIMIZACION CONVEXA**

**TESIS**

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el  
grado de **MAESTRO EN CIENCIAS** presenta:

**CARLOS ALBERTO BRIZUELA RODRIGUEZ**

Ensenada, Baja California, México. Junio de 1994

## DEDICATORIA

A mi madre **Ana Bella**

Tu me enseñaste día a día que "obras son amores y no buenas razones", me enseñaste que la palabra "te quiero" no solo se dice con la boca sino con las obras y de verdad, me enseñaste que el trabajo es un medio y no un fin, que las cosas buenas que hacemos son de Dios y que las miserias y los errores son nuestros. Mi gratitud y admiración hacia ti no tienen límites, tu comprensión y apoyo me han permitido culminar hoy una etapa en mi vida que a pesar de estar lleno errores, tuvo momentos buenos y alegres que fueron siempre una chispa de la alegría que tu me das. Gracias Mamá!

A mi padre **Arturo Mateo** porque con tu cariño especial me haces sentir que cuento con el mejor amigo.

A mis hermanas **Marta Gloria** y **María Mercedes** por su apoyo y esfuerzo para que siempre siguiera adelante y nunca desfalleciera. Gracias hermanitas!

## **AGRADECIMIENTOS**

Al amigo que tantas veces he traicionado y nunca me ha dado la espalda. El que tantas veces me espera y me acoge con cariño. El que siempre me da una mano en los momentos difíciles y el que me une con mis seres queridos a pesar de la distancia. El único Maestro que nunca se equivoca y siempre me enseña algo nuevo. Por todo; Gracias **Jesús**.

A mi director de tesis Dr. Joaquín Álvarez Gallegos por su paciencia y apoyo para la realización y culminación de este trabajo.

A los miembros del comité de tesis: M. C. Moisés Castro, Dr. Enrique Mitrani, Dr. Héctor Echavarría y en especial al Dr. Rafael Kelly por animarme a seguir por el camino que más cuesta; "el que más vale".

Mi agradecimiento especial al Dr. Ciro Martínez por la ayuda brindada desde el primer momento que llegué al CICESE.

Al Lic. Felix Herrera por su amistad, su tiempo y apoyo para acercarme un poco más a la única verdad.

A mis compañeros y amigos: Julio Cesar Rolón, Juan Ramón, Jorge Becerra, Jorge Constantino Tercero, Rogelio, Ana María, Mauro, Miguel y especialmente a Zarina Cruz Guillén por su amistad sincera y apoyo en todo momento.

A mis amigos Juan (people) y Rafael Espinosa Luna por contar siempre con ustedes.

A Cesar, Miky, Horacio, Hernando, al Jefe, Alejandro, Abel, Lucio, Guillermo, Nieves, Mario, a los "Capullos".

A Lupita Morales, Cecilia y todos los miembros de la biblioteca.

A mis compañeros del primer al noveno semestre del ITT.

A todos por los que por falta de tiempo no menciono.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

A la Organización de Estados Americanos.

---

# CONTENIDO

	Página
<b>I.INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
I.1 Antecedentes y motivación	1
I.1.1 Resultados recientes	4
I.2 Formulación del problema por resolver en este trabajo	5
I.3 Descripción de la metodología propuesta	6
I.4 Contribución	6
I.5 Organización del trabajo	7
<b>II.CONCEPTOS PRELIMINARES Y LINEALIZACIÓN CONVENCIONAL</b>	<b>8</b>
II.1 Introducción	8
II.2 Sistemas dinámicos continuos en el tiempo	9
II.3 Linealización convencional	11
II.4 Linealización del motor de inducción. Método convencional	16
<b>III.LINEALIZACIÓN EXACTA DE SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES</b>	<b>19</b>
III.1 Introducción	19
III.2 Linealización por retroalimentación no lineal del estado	19
III.2.1 Forma normal	22
III.2.2 Linealización completa	26
III.2.3 Linealización de sistemas con grado relativo estrictamente menor que $n$	30
III.3 Estabilidad del sistema linealizado	31
III.3.1 Dinámica cero	31
III.4 Linealización de sistemas de varias entradas y varias salidas	34
<b>IV.DISEÑO DE CONTROLADORES LINEALES EN FUNCIÓN DE LAS ESPECIFICACIONES DEL DESEMPEÑO</b>	<b>39</b>
IV.1 Introducción	39
IV.2 Marco de trabajo	40
IV.3 Parametrización de Youla	43
IV.4 Especificaciones de diseño	49
IV.5 Geometría de las especificaciones de diseño	50
IV.5.1 Realizabilidad	51
IV.5.2 Estabilidad interna	52
IV.5.3 Respuesta temporal	53

## CONTENIDO(Continuación)

IV.5.3.1 Sobrepasso	54
IV.5.4 Respuesta en frecuencia	54
IV.5.4.1 Seguimiento de una referencia	55
IV.5.4.2 Desacoplamiento	55
IV.5.4.3 Rechazo a perturbación: un caso sencillo	55
IV.5.5 Esfuerzo de control	55
IV.5.6 Especificaciones de desempeño robusto	56
4.5.6.1 Estabilidad Robusta	57
IV.6 Métodos numéricos para el diseño de $Q$	58
<b>V.SÍNTESIS DEL CONTROLADOR Y SIMULACIÓN</b>	<b>62</b>
V.1 Introducción	62
V.2 Descripción de la metodología propuesta	63
V.3 Linealización del modelo del motor de inducción	66
V.4 Diseño del controlador lineal e invariante en el tiempo	70
V.4.1 Diseño del controlador por ubicación de polos	70
V.4.2 Diseño del controlador convexo	71
V.4.2.1 Definición de la planta	71
V.4.2.2 Diseño del controlador basado en observador	72
V.4.2.3 Objetivos y restricciones	75
V.4.2.4 Obtención del controlador convexo	77
V.5 Simulación	79
<b>V.CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>87</b>
<b>LITERATURA CITADA</b>	<b>90</b>
<b>APÉNDICE A</b>	<b>93</b>
<b>APÉNDICE B</b>	<b>101</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1.	Diagrama esquemático de un sistema general de control automático	1
2.	Diagrama esquemático del sistema linealizado	23
3.	Señales involucradas en el diseño del controlador	41
4.	Sistema en lazo cerrado	41
5.	Planta perturbada	42
6.	Consideración de la perturbación	42
7.	Sistema en lazo cerrado con retroalimentación positiva	44
8.	Controlador parametrizado	46
9.	Controlador basado en observador	46
10.	Controlador parametrizado basado en observador	47
11.	Controlador nominal y parámetro $Q$	48
12.	Nueva planta y parámetro $Q$	48
13.	Diagrama para dar una interpretación práctica a la estabilidad interna	53
14.	Diagrama de flujo de la metodología propuesta	64
15.	Sistema linealizado resultante con retroalimentación estática	70
16.	Diagrama esquemático de la planta	71
17.	Diagrama esquemático del observador	73
18.	Controlador nominal basado en observador y ref. de vel.	74
19.	Diagrama esquemático para aumento del controlador	74
20.	Controlador nominal y planta	74
21.	Arquitectura para el bloque $Q$	77
22.	Controlador convexo	78
23.	Controlador por ubicación de polos	79
24.	Controlador nominal	79
25.	Controlador total convexo	79
26.	Primer simulación. Controlador por ubicación de polos	81
27.	Primer simulación. Controlador nominal	81
28.	Primer simulación. Controlador convexo	81
29.	Primer simulación apl. al flujo. Controlador por ubicación de polos	82
30.	Primer simulación apl. al flujo. Controlador nominal	82
31.	Primer simulación apl. al flujo. Controlador convexo	82
32.	Segunda simulación. Controlador por ubicación de polos	83

## LISTA DE FIGURAS(Continuación)

Figura		Página
33.	Segunda simulación. Controlador nominal	83
34.	Segunda simulación. Controlador convexo	83
35.	Tercer simulación. Controlador por ubicación de polos. Ley lineal	84
36.	Tercer simulación. Controlador por ubicación de polos. Ley no lineal	84
37.	Tercer simulación. Controlador nominal. Ley lineal	84
38.	Tercer simulación. Controlador nominal. Ley no lineal	85
39.	Tercer simulación. Controlador convexo. Ley lineal	85
40.	Tercer simulación. Controlador convexo. Ley no lineal	85
41.	Cuarta simulación. Controlador por ubicación de polos	86
42.	Cuarta simulación. Controlador nominal	86
43.	Cuarta simulación. Controlador convexo	86
A.1.	Marcos de referencia con respecto al estator	96

## LISTA DE TABLAS

Tabla	Página
I. Relación entre las especificaciones y el conjunto <b>H</b>	50

## NOTACIÓN Y SIMBOLOGÍA

$\  \cdot \ $	Norma
$\mathbf{x}$	Vector de elementos funciones del tiempo
$f(\mathbf{x})$	Campo vectorial en $\mathbf{x}$
$\mathbf{A}$	Matriz de elementos funciones del tiempo
$x$	Vector de elementor funciones de la variable de Laplace
$A$	Matriz de elementos funciones de la variable de Laplace
$x$	Función escalar del tiempo
$X$	Función escalar de la variable de Laplace
$R$	Conjunto de los números reales
$R^n$	espacio euclidiano $n$ -dimensional
$R_+$	Conjunto de los números reales positivos y el cero
$C^k$	Conjunto de funciones con derivadas parciales continuas de hasta orden $k$
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial temporal de orden $k$
$H$	Matriz de transferencia en lazo cerrado
$\mathbf{H}$	Conjunto de matrices de transferencia
$\mathbf{P}$	Conjunto de plantas
$\emptyset$	Conjunto vacío

# DISEÑO DE CONTROLADORES PARA UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES EMPLEANDO TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA

## I. Introducción

### I.1 Antecedentes y motivación

La ingeniería de control automático es una rama de la ingeniería que en general se ocupa de mejorar el desempeño de un sistema dinámico mediante el empleo de retroalimentación. Para entender mejor lo que esto implica es necesario hacer una revisión de los elementos fundamentales que forman parte de un sistema de control automático, así como discutir el problema al cual esta disciplina pretende dar una solución.

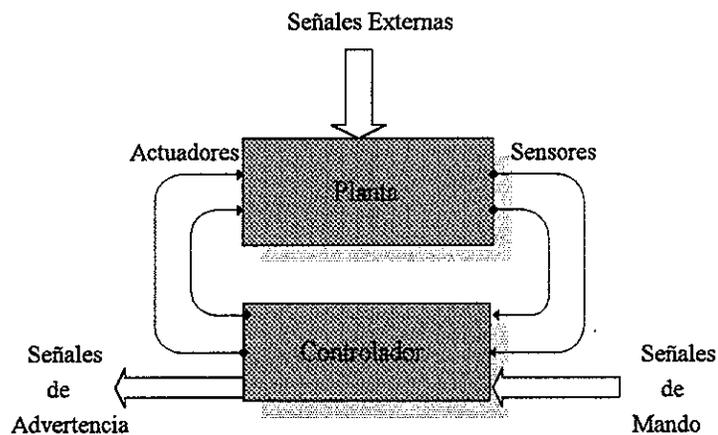


Figura 1. Diagrama esquemático de un sistema general de control automático.

Un sistema general de control automático está constituido en primer lugar, como se muestra en la figura 1, por lo que denominaremos "la planta". Esta puede ser un motor, un amplificador electrónico, una central eléctrica, etc. En general la planta es aquel sistema al cual se le quiere imponer un comportamiento determinado. Otro elemento lo constituye el conjunto de los "sensores"; estos son los dispositivos encargados de medir las señales a ser utilizadas por el sistema denominado "controlador". Este a su vez se encarga de procesar las señales entregadas por los sensores, junto con las "señales de mando" impuestas por el operador, para generar las señales que excitarán la planta a través de los "actuadores" y las "señales de advertencia" que alertan al operador de cualquier anomalía en el proceso. Las "señales externas" son todas aquellas que afectan directamente la planta, pero que no forman parte de las señales de los actuadores.

Uno de los problemas más difíciles con que se enfrenta el ingeniero de control al implementar el esquema de la figura 1 es el de poder traducir los requerimientos dados por el usuario en especificaciones sobre el controlador a diseñar.

La tendencia actual en las distintas áreas de la ingeniería es aumentar la eficiencia en todo tipo de proceso, minimizar el consumo de energía y disminuir el tiempo de respuesta.

Lo dicho anteriormente tiene como resultado que los usuarios de sistemas de control impongan requerimientos tales como, mínima energía necesaria para realizar alguna acción de control, error mínimo en estado estacionario, tiempo mínimo de asentamiento, oscilación mínima, facilidad en el manejo y ajuste del controlador, utilización del menor número posible de sensores, que el ruido en las mediciones afecte lo menos posible a la salida, que el sistema sea robusto a perturbaciones externas e internas, que exista desacoplamiento entre las señales de entrada y salida, etcétera. En la realidad, cuando el usuario impone sus requerimientos de desempeño no establece valores específicos de ellos, sino a lo más da un margen de valores entre los cuales podrían variar estos requerimientos. Esto obliga a buscar un método de diseño que permita cuantificar los requerimientos del usuario mediante especificaciones definidas para el controlador a diseñar.

Podemos formular en forma general el problema fundamental de control suponiendo que se ha logrado traducir los requerimientos del usuario en especificaciones cuantificables. Este problema fundamental de control se puede enunciar de la siguiente manera:

**Dados una planta (P) y un conjunto de especificaciones de desempeño (D), verifíquese si existe o no uno o varios controladores (C) tales que el sistema completo, planta y controlador(fig.1), cumpla con las especificaciones establecidas. □**

Debido a la complejidad que representa pretender establecer una metodología que resuelva el problema de control para todo el conjunto de sistemas dinámicos, se han hecho divisiones en varios subconjuntos de sistemas, cada uno de los cuales está formado por sistemas con características similares. También se hace la división de las especificaciones en subconjuntos para cada conjunto de sistemas.

Actualmente se han desarrollado varias metodologías para resolver parte del problema de control para conjuntos de sistemas y especificaciones particulares. El desarrollo de la teoría de

control clásico se limita a tratar con el conjunto de plantas lineales e invariantes en el tiempo, con una entrada de control y una sola salida, considerando además un modelo exacto del sistema. Esta metodología trabaja con la planta en su representación como función de transferencia, el diseño del controlador se realiza sobre el sistema en lazo abierto. Ocasionalmente se considera cierto tipo de sistemas con varias entradas y salidas; sin embargo, los procedimientos de diseño son a menudo restrictivos y pueden clasificarse, en general, como procedimientos empíricos.

Algunas especificaciones importantes que se pueden manejar con esta metodología son: estabilidad de plantas estables e inestables que sean de fase mínima, márgenes de estabilidad y respuesta temporal en lazo cerrado. Esta última se puede diseñar en forma exacta para sistemas de hasta orden dos, mientras que para sistemas de orden superior se utilizan procedimientos empíricos. Otras especificaciones son, por ejemplo, tiempo de subida, sobrepaso, tiempo de asentamiento, anchura de banda, error en estado estacionario para entradas de tipo escalón, tipo rampa, etcétera. Estas especificaciones se pueden lograr con esta metodología, utilizando en general procedimientos empíricos.

Es importante resaltar que con esta metodología es imposible determinar si el conjunto de las especificaciones impuestas es factible o no; mucho menos se puede determinar el compromiso entre las distintas especificaciones. Esto limita poder percibir las relaciones entre las distintas especificaciones.

Otras metodologías denominadas no clásicas utilizan frecuentemente la representación en variables de estado del sistema. Los requerimientos de estabilidad, regulación y seguimiento son las especificaciones más comúnmente impuestas. Se hace una extensión de las especificaciones admisibles para el control clásico a sistemas de varias entradas y salidas y se agregan especificaciones tales como rechazo a perturbaciones, estabilidad robusta, criterios de optimalidad entre otros.

Para el conjunto de sistemas no lineales, el espectro de especificaciones consideradas es bastante reducido y éstas tienden más bien a ser cualitativas que cuantitativas. Estabilidad, estabilidad robusta, seguimiento y seguimiento robusto son las especificaciones que han podido lograrse para ciertos tipos de sistemas no lineales. En este caso, la robustez se utiliza queriendo decir que la especificación utilizada se deteriorará lo menos posible bajo la presencia de perturbaciones externas o internas. Técnicas de control adaptable, diseños basados en la teoría de Lyapunov y control con estructura variable son algunas

metodologías seguidas para hacer frente a dichas perturbaciones. La utilización de una u otra depende de la forma del modelo de planta y de la perturbación considerada.

Es importante resaltar que uno de los métodos más utilizados para el análisis y síntesis de los sistemas no lineales lo constituye la linealización convencional o por expansión en series de Taylor. Este método, no obstante que presenta algunas restricciones y desventajas importantes tuvo mucha influencia en el trabajo aquí presentado.

### **I.1.1 Resultados recientes**

Recientemente, el desarrollo de una nueva metodología para el diseño de controladores lineales ha sido presentada en Boyd et al. [1988], Boyd et al. [1990], Boyd and Barrat [1991]. En esta técnica se propone que, a partir de la parametrización de todos los controladores lineales invariantes que estabilizan una planta también lineal e invariante, se obtengan aquéllos que, conectados al sistema completo, hagan que se cumplan con unas especificaciones establecidas de antemano.

Una característica fundamental de esta metodología es el hecho de que para una clase de especificaciones dadas se puede determinar la existencia o no de controladores tal que el esquema mostrado en la figura 1 cumpla con ellas. Además, es posible determinar el compromiso existente entre las distintas especificaciones, lo cual tiene un gran valor en el diseño de controladores.

Las limitaciones principales que presenta esta metodología es que sólo se aplica a sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Por otra parte, las especificaciones válidas son aquéllas que pueden ser expresadas como funcionales convexas de la matriz de transferencia en lazo cerrado. Aunque si bien es cierto que muchas de las especificaciones convencionales tales como el sobrepaso, tiempo de subida, seguimiento asintótico, etcétera, cumplen con esta condición de convexidad, otras tales como el orden del controlador, la arquitectura del mismo, así como algunas especificaciones de robustez no la satisfacen. Otra limitante la constituye también la necesidad de herramientas de cómputo poderosas.

Unos años antes de que apareciese este desarrollo para los sistemas lineales, en el área del control no lineal se presentaron ciertos resultados, los cuales permiten obtener un modelo lineal invariante mediante una transformación de coordenadas y retroalimentación

del estado [Isidori, 1989], [Nijmejer and A. van der Schaft, 1990]. Esta metodología es aplicable al conjunto de sistemas no lineales afines en el control.

Algunas limitaciones de esta técnica son las singularidades introducidas por la ley de control linealizante y la sensibilidad que presenta a las incertidumbres paramétricas. Esto último es un problema que no ha sido totalmente resuelto y constituye un tema de investigación actual [Slotine, 1993].

Una vez obtenido el modelo lineal mediante el procedimiento mencionado anteriormente, es posible mejorar el desempeño del sistema por medio de alguna técnica de control lineal. Las leyes de control utilizadas para el sistema linealizado van desde una retroalimentación estática por ubicación de polos como la utilizada en Kristjánsson et al. [1993] hasta ciertas leyes de control óptimo como las utilizadas en Colledani et al. [1993].

La disponibilidad de una metodología para el diseño de controladores para sistemas lineales que engloba un gran número de los procedimientos de diseño desarrollados para esta clase de sistemas, así como la posibilidad de linealizar en forma exacta una clase de sistemas no lineales mediante retroalimentación de estado nos motiva a hacer una conexión entre estas técnicas para resolver el problema de control para un conjunto más grande de sistemas que los que la sola metodología propuesta en Boyd and Barrat [1991] puede abarcar.

Con este panorama podemos formular un problema que, a nuestro conocimiento, no ha sido tratado en la literatura.

## **I.2 Formulación del problema por resolver en este trabajo**

Antes de formular el problema por tratar en este trabajo es necesario primeramente establecer el marco dentro del cual nos desenvolveremos.

Los sistemas con los que trataremos son aquéllos no lineales que pueden ser llevados, total o parcialmente, a un sistema lineal e invariante en el tiempo por medio de las técnicas de linealización convencional y/o por retroalimentación no lineal del estado. A estos sistemas los definiremos como linealizables. Las especificaciones permitidas serán aquellas que, al ser traducidas a especificaciones sobre el sistema linealizado, puedan ser representadas como funcionales convexas de la matriz de transferencia en lazo cerrado (del sistema linealizado). A tales especificaciones las denominaremos con el nombre de

especificaciones convexas. El problema específico de control bajo estas definiciones se enuncia entonces como sigue.

**Dado un sistema no lineal, linealizable, y un conjunto de especificaciones convexas, encontrar el conjunto de controladores que satisfacen dichas especificaciones\*, o determinar que no existe alguno. □**

Para resolver este problema se propone seguir la metodología que se presenta a continuación.

### **I.3 Descripción de la metodología propuesta**

La metodología propuesta consta de las siguientes fases.

- a) Linealización del sistema por cambios de coordenadas y retroalimentación del estado ó linealización por el método convencional.
- b) Traducción de las especificaciones impuestas sobre el sistema original no lineal en especificaciones sobre el sistema linealizado.
- c) Verificación de la condición de convexidad de las especificaciones obtenidas en la fase anterior.
- d) Diseño del controlador con la metodología propuesta por Boyd and Barrat [1991].
- e) Recuperación de la ley de control en las coordenadas originales para su aplicación al sistema no lineal original.

### **I.4 Contribución**

Este trabajo representa un pequeño primer avance para extender la metodología propuesta en Boyd and Barrat [1991] a una clase particular de sistemas no lineales.

Esta clase de sistemas no lineales está constituida por aquellos sistemas de fase mínima, linealizables mediante retroalimentación y cambio de coordenadas, y por aquéllos linealizables por métodos convencionales. Una limitación para la primer clase de sistemas es que deben tener el mismo número de entradas de control y de salidas. Se exige la invariancia en el tiempo para aquellas plantas que deden ser linealizadas por retroalimentación y la no

---

\* "controlador que satisface las especificaciones" significa que el controlador, en coordenadas originales y conectado a la planta, hace que el sistema completo cumpla con las especificaciones.

existencia de soluciones periódicas para aquéllas que deben ser linealizadas por el método convencional.

También se presenta una aplicación del método al modelo de un motor de inducción trifásico. Este modelo es representado por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de orden cinco y cuenta con dos entradas de control y dos salidas.

## **I.5 Organización del trabajo**

En el capítulo 2 se hace un análisis de lo que representa una aproximación lineal, así como las condiciones bajo las cuales se puede lograr dicha aproximación. También se muestra en ese capítulo que no es posible obtener por este método una aproximación mediante un sistema lineal e invariante en el tiempo que represente al modelo del motor de inducción.

En el capítulo 3 se presentan los fundamentos teóricos en los cuales se basa la teoría de linealización por retroalimentación no lineal del estado y cambio de coordenadas para sistemas no lineales afines en el control.

En el capítulo 4 se describen los conceptos teóricos básicos que respaldan la teoría de diseño de controladores en función de las especificaciones del desempeño impuesto, para sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Se muestra también cómo es posible expresar ciertas especificaciones de diseño como una funcional convexa de la matriz de transferencia en lazo cerrado.

En el capítulo 5 presentamos la metodología propuesta exponiendo los fundamentos en los cuales se cimienta, así como los problemas que es necesario resolver para una sustentación teórica más firme de la misma. También en este capítulo se aplica la metodología propuesta al modelo del motor de inducción y se presentan resultados en simulación.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones a las cuales se llega al haber realizado este trabajo y se expone una lista de recomendaciones para la continuación del mismo.

## II. Conceptos preliminares y linealización convencional

### II.1 Introducción

La existencia de herramientas poderosas para el análisis de los sistemas lineales invariantes en el tiempo no es desconocida; ellas están basadas en el principio de superposición. Al tratar con sistemas no lineales se presenta una situación más difícil, pues el principio de superposición deja de ser válido y se requieren herramientas matemáticas más complejas. Debido a la existencia de herramientas poderosas para tratar con los sistemas lineales, el primer paso en el análisis de un sistema no lineal debe ser su linealización, de ser posible, alrededor de un punto de operación para así analizar el modelo lineal resultante. No hay dudas de que, cuando sea posible [Khalil, 1992], debemos hacer uso de la linealización para entender tanto como sea posible el comportamiento del sistema no lineal original. En muchos casos la linealización no será suficiente para un análisis riguroso del sistema no lineal. Esto se debe principalmente a dos grandes limitaciones que presenta la linealización. Primeramente está el hecho de que por ser la linealización una simple aproximación alrededor de un punto nominal sólo es posible predecir con ella comportamientos locales en la vecindad de dicho punto. La segunda limitación es que la dinámica no lineal es mucho más rica que la lineal y presenta ciertos comportamientos que no tienen similares en los lineales. Algunos ejemplos de comportamientos exclusivos de los no lineales son: tiempo de escape finito, equilibrios múltiples aislados, ciclos límites, oscilaciones subarmónicas, comportamientos caóticos, modos de comportamientos múltiples, etcétera.

Una gran limitante de la linealización es que sólo es aplicable para sistemas no lineales que presenten órbitas hiperbólicas y además tiene la inconveniencia de ser aplicable en forma práctica a sistemas no lineales con órbitas de dimensión cero, *i. e.*, puntos de equilibrio.

En este capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios para clasificar los sistemas dinámicos continuos en el tiempo de acuerdo a características del campo, así como a características de las órbitas descritas. Se discute también las condiciones necesarias para

realizar la linealización a lo largo de una trayectoria dada, generalizando así el concepto de linealización alrededor de un punto. También se presenta un modelo linealizado del motor de inducción alrededor de una trayectoria nominal y se expone la dificultad de trabajar con este modelo.

A pesar de que estos conceptos de linealización convencional no se utilizan más adelante, su presentación en este capítulo obedece a dos razones principales.

En primer lugar la linealización convencional es una de las dos técnicas posibles que constituye el primer paso en la metodología propuesta en este trabajo. Estos conceptos básicos son necesarios para saber cuándo escoger o desechar esta técnica para la linealización de un sistema particular dado.

Una segunda razón y que está relacionada con el ejemplo aquí presentado es el de responder a la pregunta del por qué no utilizar técnicas más sencillas para enfrentar ciertos problemas, antes de tratar con técnicas más complejas.

## II.2 Sistemas dinámicos continuos en el tiempo

**Definición 2.1** Un sistema dinámico autónomo de orden  $n$  está definido por la ecuación diferencial siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \text{donde } \dot{\mathbf{x}} &= d\mathbf{x} / dt, & \mathbf{x}(t) &\in U \subseteq R^n, \end{aligned} \quad (1)$$

$U$  es un abierto en  $R^n$ ,  $\mathbf{x}(t)$  es el estado en el tiempo  $t$ ,  $\mathbf{f}$  es un campo vectorial, es decir, un mapeo que asigna un vector tangente a cada estado  $\mathbf{x}(t) \in U$ . Como la solución de (1) es dependiente de las condiciones iniciales la podemos escribir como  $\Phi_{\mathbf{x}_0}(t)$ , donde  $\Phi_{\mathbf{x}_0}(t): R_+ \rightarrow R^n$  es la trayectoria del estado a través de  $\mathbf{x}_0$ .

**Definición 2.2** Un sistema no autónomo de orden  $n$  está definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2)$$

En este caso el campo vectorial  $\mathbf{f}$  depende explícitamente del tiempo  $t$ . La solución de (2) que pasa por  $\mathbf{x}_0$  en el tiempo  $t_0$ , es denotada como  $\Phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Si  $\mathbf{f}$  es lineal con respecto a  $\mathbf{x}$

se dice que el sistema no autónomo es lineal. Si existe  $T > 0$  tal que  $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t+T)$  para todo  $\mathbf{x}$  y  $t$ , entonces se dice que el sistema es periódico con periodo  $T$ . El valor más pequeño de  $T$  que satisface la condición anterior es denominado periodo mínimo.

El estado estacionario de un sistema se refiere al comportamiento asintótico del mismo a medida que el tiempo tiende a infinito. Para que esto tenga sentido se requiere que el estado estacionario esté acotado. La diferencia entre la trayectoria y el estado estacionario se denomina transitorio. Los conceptos de transitorio y estado estacionario son muy útiles en el estudio de los sistemas lineales, pero para los no lineales, en los que es difícil encontrar una solución cerrada, estos conceptos pierden algo de su utilidad. Resulta muy útil estudiar los conceptos relacionados con el comportamiento del sistema en estado estacionario ya que es una situación sobre la que se tiene mucho interés desde el punto de vista de control.

Los conjuntos límite, el equivalente del estado estacionario para la representación en el espacio de estados, se define de la siguiente manera.

**Definición 2.3** [Vidyasagar, 1993] Supóngase que  $\mathbf{x}_0 \in R^n$ ,  $t_0 \in R_+$ . Entonces el punto  $\mathbf{p} \in R^n$  es llamado un punto límite de la trayectoria  $\Phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  si existe una secuencia  $\{t_i\}$  de números reales en  $[t_0, \infty)$  tal que

$$\lim_{t_i \rightarrow \infty} \|\mathbf{p} - \Phi(t_i, t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0. \quad (3)$$

El conjunto de todos los puntos límite de  $\Phi(\cdot, t_0, \mathbf{x}_0)$  es llamado el conjunto límite y es denotado por  $\Omega(t_0, \mathbf{x}_0)$ .

Veamos ahora distintos comportamientos en estado estacionario.

**Definición 2.4** [Parker and Chua, 1989] Un punto de equilibrio se define como una solución constante de (1), es decir,  $\mathbf{x}_{eq} = \Phi_t(\mathbf{x}_{eq})$  para todo  $t$ .

El conjunto límite correspondiente a un punto de equilibrio es el mismo punto de equilibrio, así como el de todos los puntos sobre todas las trayectorias que convergen a  $\mathbf{x}_{eq}$ .

Un simple ejemplo que tiene puntos de equilibrio múltiples es la ecuación del péndulo amortiguado [Parker and Chua, 1989].

**Definición 2.5** [Parker and Chua, 1989]  $\Phi_t(\mathbf{x}^*)$  es una solución periódica de (1) si  $\Phi_{t+T}(\mathbf{x}^*) = \Phi_t(\mathbf{x}^*)$  para algún periodo mínimo  $T > 0$ .

Una solución periódica se llama aislada si existe una vecindad de la misma que no contiene ninguna otra solución periódica. En el caso autónomo, una solución periódica aislada se denomina ciclo límite.

El conjunto límite correspondiente a un ciclo límite es la curva cerrada generada por  $\Phi_t(\mathbf{x}^*)$  en un periodo  $T$ . Un ejemplo es el ciclo límite encontrado en la ecuación de Van Der Pol [Parker and Chua, 1989].

Para sistemas no autónomos  $\Phi_t(\mathbf{x}^*, t_0)$  es una solución periódica si para todo  $t$  se cumple que

$$\Phi_t(\mathbf{x}^*, t_0) = \Phi_{t+T}(\mathbf{x}^*, t_0), \quad (4)$$

para algún periodo mínimo  $T_m > 0$ .

La ecuación de Duffing presenta este comportamiento de solución periódica [Parker and Chua, 1989].

Existen otros comportamientos en estado estacionario tales como soluciones cuasi-periódicas, soluciones caóticas, etcétera., las cuales no nos serán de mucha utilidad y por eso no trataremos con ellas.

Estos conceptos relacionados con el comportamiento en estado estacionario de los sistemas no lineales serán muy importantes al analizar la teoría de linealización que se presenta a continuación.

### II.3 Linealización convencional

Los primeros intentos de introducir el concepto de linealización se dieron hace ya más de 120 años y fue en el área de la mecánica. En particular en la teoría de los movimientos pequeños, se hacía la expansión en series de Taylor alrededor de un punto (posición de equilibrio mecánico).

El primer estudio formal de linealización se presenta en 1934; dicho estudio es realizado por N. Krylov y N. Bogoliubov [Minorsky, 1969]. A partir de este resultado se empieza a hacer aplicaciones en el área de control, dentro del cual se proponen varios métodos que en algunos casos fueron una extensión del trabajo realizado por Krylov como es el caso de la linealización armónica. También se presentó una propuesta tratando de dar un significado físico a la linealización, como fue el caso de la linealización de Aiserman o cuasilinealización.

El problema de todos los métodos mencionados anteriormente es que formalmente son válidos sólo para sistemas de hasta orden dos.

Un método más reciente es el propuesto por Sharma y Zhao [1993], el cual obtiene un modelo lineal que mejor aproxima (en el sentido que se minimiza alguna función de error) la respuesta de un sistema no lineal dado, para unas entradas específicas.

La complejidad que para el análisis presentan los sistemas no lineales y las innumerables herramientas matemáticas existentes para tratar con los sistemas lineales han hecho de la linealización el recurso más utilizado para el estudio de los sistemas no lineales. A pesar de su gran limitación, que consiste en la incapacidad de obtener resultados que se verifiquen globalmente, la linealización sigue siendo una piedra fundamental para el análisis y síntesis de un conjunto grande de sistemas no lineales. Es por eso necesario entender los fundamentos teóricos en el cual se basa la linealización de sistemas no lineales.

A continuación estableceremos en qué consiste el problema de la linealización y haremos una revisión de las soluciones propuestas en la literatura.

**Definición del problema:** Sea un sistema no lineal de orden  $n$  definido por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}\tag{5}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  con  $m \leq p \leq n$ . Sea  $\Gamma = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$  una trayectoria definida en un intervalo  $\Xi \subseteq \mathbb{R}_+$ . Encuéntrese un sistema lineal definido por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{z} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{z} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\tag{6}$$

donde  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times m}$ , tal que (6) sea la mejor aproximación lineal de (5) en  $\Xi$ .  $\square$

El término "mejor aproximación lineal" significa que la **linealización del mapa de transición de estados del sistema no lineal sea igual al mapa de transición de estados del sistema linealizado, en  $\Xi$ .**

El punto clave es que la definición de mejor aproximación implica una aproximación cualitativa más que cuantitativa. Esto nos impide obtener un cuantificador para determinar el grado de aproximación o para determinar la vecindad en la cual esta aproximación es válida.

Existen resultados que nos permiten afirmar [Sontag, 1990] que si el lado derecho de (5) es de clase  $C^1$  entonces la trayectoria generada por el mismo es también de clase  $C^1$ . Esto nos ayuda a imponer condiciones sobre el campo para la obtención de una aproximación lineal, sin tener que preocuparnos por la trayectoria. Es más, es suficiente imponer la condición de diferenciabilidad sobre el campo para asegurar la existencia de "la mejor aproximación lineal".

Todo lo expuesto anteriormente nos lleva a investigar sobre las condiciones que se deben cumplir para la diferenciabilidad del campo. Es importante, por lo tanto, tener claro el concepto de diferenciabilidad para un mejor entendimiento de la linealización. Este concepto de linealización se presenta a continuación.

**Definición 2.6** [Figueiredo, 1993] Sean  $X$  y  $Y$  espacios lineales normados y  $\Omega$  un conjunto abierto en  $X$ . Un operador  $T: \Omega \rightarrow Y$  se dice diferenciable en el sentido de Fréchet en el punto  $x_0 \in \Omega$  si existe un operador lineal acotado  $L(x_0): X \rightarrow Y$  dependiente de  $x_0$ , tal que para  $h \in X$  y  $x_0 + h \in \Omega$ , se verifique que

$$\lim_{\|h\|_x \rightarrow 0} \frac{\|T(x_0 + h) - T(x_0) - L(x_0)h\|_y}{\|h\|_x} = 0 \quad (7)$$

Necesariamente si  $L(x_0)$  existe se verifica que  $J(x_0) = L(x_0)$ , donde  $J(x_0)$  es el jacobiano de  $T$  en  $x_0$ .

Basándose en la definición anterior se puede demostrar que [Sontag, 1990]

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_0}, \quad \mathbf{B}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_0}, \quad \mathbf{C}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_0}, \quad \mathbf{D}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_0}, \quad (8)$$

donde  $\mathbf{d}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)$ ,  $\forall t \in \Xi$ , cumple con el concepto de mejor aproximación.

A continuación presentaremos una breve revisión bibliográfica de los resultados y condiciones para la linealización que en todos los casos pueden ser deducidas de la definición anterior.

Consideremos el sistema no lineal autónomo dado por Vidyasagar [1993]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (9)$$

Supongamos que  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , es decir, el origen es un equilibrio para el sistema dado por (9). Supongamos que  $\mathbf{f}$  es continuamente diferenciable y definamos

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}, \quad (10)$$

*i.e.*,  $\mathbf{A}$  es la matriz jacobiana de  $\mathbf{f}$  evaluada en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Por la definición de jacobiano y si además definimos

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (11)$$

se cumplirá que

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad (12)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana. Ahora el sistema dado por

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) \quad (13)$$

es la linealización, o el sistema linealizado de (9), alrededor del equilibrio en una vecindad tan pequeña como sea necesario.

Veamos ahora qué pasa en el caso de un sistema no autónomo definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)). \quad (14)$$

Supongamos que

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0. \quad (15)$$

Además supongamos que  $\mathbf{f}$  es continuamente diferenciable. Definamos ahora

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \text{ y} \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

Por (16) sabemos que para cada valor de  $t \geq 0$  se cumple que

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (17)$$

Sin embargo, aunque (17) se cumpla podría darse el caso en que

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \quad (18)$$

no se cumpla. Podemos decir entonces que la convergencia de (17) podría o no ser uniforme en  $t$ . Si (18) se cumple entonces el sistema dado por

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) \quad (19)$$

es la linealización alrededor del punto de equilibrio de (14).

Vemos que estos resultados presentados en el libro de Vidyasagar [1993] tratan el caso en que se tiene un punto de equilibrio (el origen) y se tiene interés en ese punto. A continuación presentamos una extensión de este trabajo para un conjunto más grande de sistemas y que abarca los casos anteriores.

**Proposición 2.1** Sea  $\Sigma$  un sistema definido en  $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  y dado por (5), sea  $\Gamma = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$  una trayectoria descrita por  $\Sigma$  en un intervalo de tiempo  $\Xi$ . Existe un sistema lineal  $\Sigma_l$  que mejor aproxima a  $\Sigma$  a lo largo de  $\Gamma$  en  $\Xi$  si y sólo si (7) se satisface para todo  $t \geq 0$ .

**Prueba:** Las herramientas necesarias para la demostración de esta proposición se pueden encontrar en Sontag [1990].  $\square$

Veamos ahora cómo aplicar estos conceptos para obtener la linealización del motor de inducción.

## II.4 Linealización del modelo del motor de inducción. Método convencional

Los motores de inducción se han convertido en el caballo de batalla en muchas áreas de la ingeniería, especialmente, en el área industrial donde las aplicaciones van desde actuadores para generar movimientos en bandas transportadoras hasta actuadores que generan fuerzas de corte en máquinas herramientas. Su rudeza, poca necesidad de mantenimiento y generación elevada de par con respecto al tamaño lo han hecho muy atractivo para nuevas aplicaciones. Esto último ha motivado en años recientes la realización de estudios más profundos para realizar el control del mismo.

Por otra parte una de las técnicas más utilizadas para el análisis y diseño de controladores para sistemas no lineales en general han sido como ya se mencionó la linealización alrededor de un punto de equilibrio. En esta sección se presenta la linealización del modelo del motor de inducción (cuya obtención se presenta en detalle en el apéndice A), que a diferencia de los casos convencionales no se realiza alrededor de un punto de equilibrio sino a lo largo de una órbita periódica que describe su funcionamiento en estado estacionario.

El modelo del motor está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_a u_a + \mathbf{g}_b u_b, \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2^2 + x_3^2\end{aligned}\tag{20}$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}_a$ ,  $\mathbf{g}_b$ ,  $u_a$ ,  $u_b$  están definidos en (A.32) (ver apéndice A). Para  $u_a = u_b = T_f = 0$  y  $x_5 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  tenemos un continuo de puntos de equilibrio (la recta definida por  $x_5 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ) el cual físicamente carece de interés ya que implica que el par generado, el aplicado, así como los flujos y las corrientes, son nulos. Físicamente este continuo de

equilibrios significa que si iniciamos el rotor con cualquier velocidad permanecerá en ella indefinidamente, ya que el modelo no toma en cuenta la fricción mecánica existente.

Luego de haber visto que no tiene sentido linealizar alrededor de algún equilibrio, se realizará la linealización de (20) a través de una trayectoria nominal definida por  $\Gamma = (\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)$ , donde  $\mathbf{x}_n$  es una trayectoria definida para una velocidad nominal  $x_{1n}$  y  $\mathbf{u}_n$  es la entrada que se debe aplicar para obtener esta  $x_{1n}$ .

Para comprobar si existe o no un sistema lineal que mejor aproxime a (20) a lo largo de  $\Gamma = (\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)$  en  $I := [0, \infty)$ , debemos verificar que (20) cumpla con las condición necesaria y suficiente de la proposición 2.1. No es difícil demostrar que (20) cumple con dicha condición. Al aplicar (8) al sistema dado por (20) tendremos que el sistema linealizado vendrá dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{z} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{z} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{donde } \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & ax_{4n} & -ax_{5n} & ax_{2n} & -ax_{5n} \\ -x_{3n} & d & -x_{1n} & 0 & e \\ x_{2n} & x_{1n} & d & e & 0 \\ cx_{3n} & b & cx_{1n} & -\gamma_n & 0 \\ -cx_{2n} & -cx_{1n} & b & 0 & -\gamma_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/\sigma & 0 \\ 0 & 1/\sigma \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{D}(t) = \mathbf{0} \quad (23)$$

siendo  $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, x_{5n})^T$  la solución del sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_a u_{an} + \mathbf{g}_b u_{bn}, \quad (24)$$

para algún  $u_{an}$  y  $u_{bn}$  adecuados.

Existen problemas bastante claros al linealizar un sistema de esta clase al utilizar técnicas de linealización convencional. Estos problemas son expuestos a continuación.

**Problema 1.** Una aproximación a la trayectoria nominal  $x_n$  puede obtenerse por el método del balance armónico [Zwillinger, 1993], o también puede obtenerse en forma numérica al resolver la ecuación nominal (24). Cualquiera que sea el método empleado se tienen dos grandes inconvenientes. Primero, la complejidad del procedimiento para obtener la solución aproximada para la trayectoria nominal. El segundo inconveniente se presenta al obtener la solución aproximada, ya que el sistema resultante es lineal y variante en el tiempo el cual requiere, para su manejo, de otras herramientas adicionales no necesariamente sencillas.

**Problema 2.** Aún si se conoce exactamente la solución periódica, la linealización sigue siendo una aproximación, y se desconoce *a priori* el tamaño de la zona del espacio de estados donde dicha aproximación pueda ser razonable.

Teniendo en cuenta los inconvenientes arriba mencionados podemos ver que la linealización convencional para sistemas que presenten soluciones periódicas podrían hacer el análisis de una complejidad mayor que si se utilizase otra técnica de linealización como la de cambio de coordenadas y retroalimentación. Un estudio en detalle de esta última se presenta en el capítulo siguiente.

# III. Linealización exacta de sistemas dinámicos no lineales

## III.1 Introducción

La linealización exacta es uno de los pocos procedimientos sistemáticos para diseñar algoritmos de control para sistemas no lineales. Esta metodología ha sido aplicada a numerosos problemas de investigación que involucran estabilización, desacoplamiento a perturbaciones, regulación, seguimiento con técnicas de control adaptable, etcétera. La mayor parte de estas aplicaciones son válidas para el modelo nominal; sin embargo, la estabilidad del sistema en lazo cerrado resultante bajo presencia de incertidumbres en la planta y/o perturbaciones es un tema menos abordado y constituye un área de investigación actual.

Debido a la relativa facilidad para resolver problemas de control asociados con plantas de dimensión finita, lineales e invariantes en el tiempo (LIT), la clase de sistemas no lineales que pueden ser transformados a un sistema lineal e invariante por medio de una retroalimentación de estado, ha recibido considerable atención en la literatura [Kabuli and Kosut, 1993].

En este capítulo se exponen los principios básicos de la teoría de **linealización por retroalimentación no lineal del estado**, así como las condiciones bajo las cuales se puede realizar dicha linealización. Esta técnica constituye una de las dos posibilidades para el primer paso en la obtención de un modelo lineal e invariante y forma parte del procedimiento general de diseño de controladores que se propone en este trabajo.

## III.2 Linealización por retroalimentación no lineal del estado

En su forma más simple, la linealización por retroalimentación consiste en cancelar las no linealidades del sistema original al aplicar una ley de control que es una función no lineal del estado, de tal modo que la dinámica en lazo cerrado visto desde la nueva entrada a

la salida escogida tenga un comportamiento lineal. Para explicar esta técnica se requiere definir los conceptos de derivadas de Lie, paréntesis de Lie, grado relativo y forma normal.

**Definición 3.1** [Slotine, 1990] Sea  $h: R^n \rightarrow R$  una función  $C^\infty$  y  $f: R^n \rightarrow R^n$ , un campo vectorial también  $C^\infty$ . Entonces la derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $f$  se define como una función dada por

$$L_f h = (\partial h / \partial \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (25)$$

En otras palabras, la derivada de Lie es simplemente la derivada direccional de  $h$  en la dirección de  $f$ . En forma iterativa podemos escribir la derivada  $i$ -ésima de Lie como

$$L_f^0 h = h, \quad (26)$$

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h) = (\partial(L_f^{i-1} h) / \partial \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Igualmente, si  $g$  es otro campo vectorial tendremos que

$$L_g L_f h = (\partial(L_f h) / \partial \mathbf{x}) \mathbf{g}. \quad (27)$$

**Definición 3.2** Sean  $f$  y  $g$  dos campos vectoriales definidos en  $R^n$ . El paréntesis de Lie de  $f$  y  $g$  es un campo vectorial definido como

$$[f, g](\mathbf{x}) = (\partial g / \partial \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\partial f / \partial \mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (28)$$

El paréntesis de Lie es comúnmente escrito como  $\mathbf{ad}_f g$ . En forma iterativa podemos escribir los paréntesis de Lie como

$$\mathbf{ad}_f^0 g = g, \quad (29)$$

$$\mathbf{ad}_f^i g = [f, \mathbf{ad}_f^{i-1} g]$$

para  $i = 1, 2, \dots$

A continuación daremos la definición de grado relativo, primeramente para sistemas de una entrada-una salida y más adelante lo haremos para el caso de varias entradas-varias salidas.

**Definición 3.3** Considérese el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad (30)$$

$$y = h(\mathbf{x}), \quad (31)$$

donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son campos vectoriales  $C^\infty$  y  $h$  una función  $C^\infty$ ,  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in R$  y  $y(t) \in R$ . Este sistema tiene grado relativo  $r$  en el punto  $\mathbf{x}^0$  si;

- (i)  $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x})=0$  para todo  $\mathbf{x}$  en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$  y todo  $k < r-1$
- (ii)  $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}^0) \neq 0$

Observemos que para todos aquellos  $\mathbf{x}^0$  en los cuales  $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) \neq 0$  para todo  $\mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$  y para algún  $k \leq n$ , y es cero justo en  $\mathbf{x}^0$ , entonces, para estos puntos el grado relativo no está definido.

Una interpretación interesante del grado relativo es la siguiente. Sea  $y=h(\mathbf{x})$  la salida ya definida anteriormente. Derivándola con respecto al tiempo tendremos que

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = L_{\mathbf{f}}h + (L_{\mathbf{g}}h)\mathbf{u} \quad (32)$$

Si  $r > 1$ , por definición tendremos que  $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})=0$ , por lo que  $\dot{y} = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ . Siguiendo de este modo, si derivamos y por segunda vez tendremos

$$\ddot{y} = L_{\mathbf{f}}^2 h + (L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h)\mathbf{u}. \quad (33)$$

Si  $r > 2$ , entonces  $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h = 0$ , de donde  $\ddot{y} = L_{\mathbf{f}}^2 h$ . En general, si seguimos derivando tendremos que:

$$y^{(k)} = L_{\mathbf{f}}^k h + (L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{k-1}h)\mathbf{u}, \quad \text{con } k < r. \quad (34)$$

Por definición, sabemos que si el grado relativo es  $r$ , entonces  $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h \neq 0$ . Es decir, el grado relativo será el número de veces que se debe derivar  $y$  de tal modo que la entrada " $u$ " aparezca en forma explícita en alguna derivada de la salida.

Analícemos ahora el significado que tiene el grado relativo en los sistemas lineales. Para ello calcularemos el grado relativo del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}, \\ y &= \mathbf{cx}, \end{aligned} \quad (35)$$

donde  $A \in R^{n \times n}$ ,  $b \in R^{n \times 1}$ ,  $c \in R^{1 \times n}$ . De esto tenemos que  $f(x) = Ax$ ;  $g(x) = b$  y  $h(x) = cx$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} L_f^k h &= cA^k x, \\ L_g L_f^k h &= cA^k b. \end{aligned} \quad (36)$$

Por definición, sabemos que si el grado relativo es  $r$ , se debe cumplir que

$$\begin{aligned} cA^k b &= 0 \quad \forall k < r-1 \\ cA^{r-1} b &\neq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Es posible mostrar [Isidori, 1989] que el número  $r$  que cumple con (37) es la diferencia entre el número de polos y el número de ceros de la función de transferencia dada por

$$H(s) = c(sI - A)^{-1} b. \quad (38)$$

### III.2.1 Forma normal

Una vez definido el grado relativo de un sistema debemos de analizar otro concepto, el cual es de fundamental importancia en la teoría de linealización. Este concepto es el de forma normal y se presenta a continuación.

**Definición 3.4**[Isidori, 1989] Se dice que el sistema afín en el control, de una entrada-una salida y de orden  $n$ , definido por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (39)$$

$$y = h(x) \quad (40)$$

donde  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R$  y  $y(t) \in R$ , está dado en su forma normal si tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{r-1} &= x_r, \\ \dot{x}_r &= b(x^*, \eta) + a(x^*, \eta)u, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\dot{\eta} = w(\mathbf{x}^*, \eta),$$

donde  $r$  es el grado relativo,  $\dot{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \dots \eta_{n-r}]^T$  y  $\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, \dots, x_r]^T$ .

Evidentemente si  $r = n$ , la dinámica definida por  $\eta$  no existirá. Veamos ahora una de las ventajas de tener un sistema en la forma normal.

Sabemos que por definición de grado relativo,  $a(\mathbf{x}^*, \eta)$  tiene inversa para toda  $\mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ . Entonces la siguiente ley de control está bien definida:

$$u(\mathbf{x}^*, \eta) = \frac{1}{a(\mathbf{x}^*, \eta)} \left( v - b(\mathbf{x}^*, \eta) \right) \quad (42)$$

donde  $v$  es una nueva entrada. Al aplicar esta ley de control al sistema en su forma normal (41), tendremos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{r-1} &= x_r \\ \dot{x}_r &= v \\ \dot{\eta} &= w(\mathbf{x}^*, \eta) \end{aligned} \quad (43)$$

Con la aplicación de (42) en (41) se obtiene un sistema lineal de orden  $r$ , con una entrada  $v$  y otro subsistema que constituye la dinámica interna, la cual es no lineal y no observable. En la figura 2 se muestra un diagrama esquemático para (43). Lo interesante de este diagrama es que nos muestra que la dinámica es lineal de la entrada  $v$  a la salida  $y$ , debido a que el bloque controlador  $C$  cancela términos no lineales.

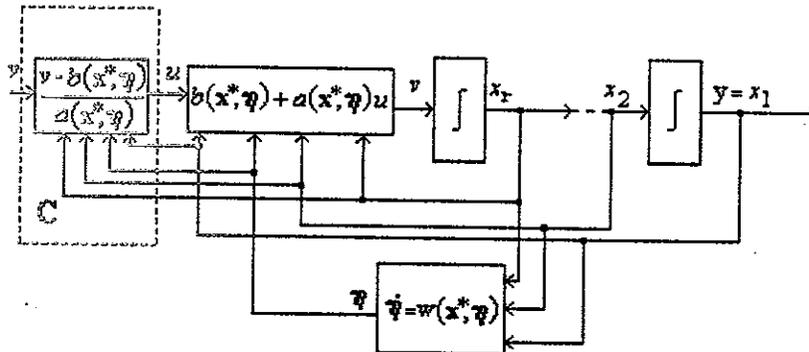


Figura 2. Diagrama esquemático del sistema linealizado.

De este modo se pudo obtener un sistema lineal y controlable de orden  $r$ .

De todo lo visto hasta aquí podemos ver claramente que lo que se necesita para llevar un sistema a la forma normal es que debe existir un cambio de coordenadas, por lo menos en forma local. Es decir, debe existir una transformación no lineal  $T$

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (44)$$

con

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (45)$$

tal que esta transformación cumpla con las siguientes propiedades:

- i)  $T(\mathbf{x})$  es invertible, i.e., existe una función  $T^{-1}(\mathbf{z})$  tal que  $T^{-1}(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  y  $T(T^{-1}(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$ ,
- ii)  $T(\mathbf{x})$  y  $T^{-1}(\mathbf{z})$  son funciones  $C^\infty$ , i.e., todas sus derivadas parciales existen y son continuas. Una transformación de este tipo, si cumple con las condiciones i) y ii) para todo  $\mathbf{x} \in R^n$ , se llama difeomorfismo global.

Analícemos ahora qué implican estas dos condiciones: La primera condición la necesitamos para recobrar el estado original del transformado, i.e., para tener  $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{z})$ . La segunda condición la necesitamos para asegurar que el sistema transformado no pierda la propiedad de suavidad de la función original.

Muchas veces es difícil encontrar una transformación que cumpla con estas condiciones para todo  $\mathbf{x}$ . Lo que se hace entonces es buscar transformaciones que cumplan estas condiciones por lo menos en una vecindad de un punto dado del espacio de estados. Es decir, se busca que la transformación sea un difeomorfismo local. Por lo general, se trata de encontrar que la transformación sea válida en la vecindad de un punto de equilibrio.

Un problema importante está relacionado con el cálculo de  $T(\mathbf{x})$ , de manera que podamos llevar al sistema a la forma normal. La solución a este problema la presentamos a continuación.

Procedemos a la obtención de la forma normal de un sistema dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \\ y &= h(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (46)$$

donde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  y  $h(\mathbf{x})$  son los mismos que fueron definidos en (30) y (31).

Supongamos que el sistema dado por (46) tiene un grado relativo  $n$  en  $\mathbf{x}^0$ . Considérese ahora la transformación, definida en un abierto que contiene a  $\mathbf{x}^0$ . De la definición 1.9 vemos que  $\dot{x}_1 = x_2$ , ...,  $\dot{x}_{n-1} = x_n$ . Una forma lógica de obtener esto es haciendo las siguientes asignaciones,  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,  $x_3 = \ddot{y}$ , ...,  $x_n = y^{(n-1)}$ . Por otro lado sabemos que  $y = L_f^k h$  para todo  $k < n-1$ . Teniendo en cuenta esto podemos elegir  $T$  de tal forma que:

$$\begin{aligned}z_1 &= T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \\ z_2 &= T_2(\mathbf{x}) = L_f h(\mathbf{x}), \\ z_3 &= T_3(\mathbf{x}) = L_f^2 h(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ z_n &= T_n(\mathbf{x}) = L_f^{n-1} h(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (47)$$

En Isidori [1989] se demuestra que  $h(\mathbf{x})$ ,  $L_f h(\mathbf{x})$ , ...,  $L_f^{n-1} h(\mathbf{x})$ , son funciones linealmente independientes, y califican por tanto como una transformación de coordenadas al menos local. Existe, por tanto, la transformación inversa  $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{z})$ . De (47) se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})u.\end{aligned}\quad (48)$$

Si hacemos  $b(\mathbf{z}) = L_f^n h(T^{-1}(\mathbf{z}))$  y  $a(\mathbf{z}) = L_g L_f^{n-1} h(T^{-1}(\mathbf{z}))$ , tendremos que

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= b(\mathbf{z}) + a(\mathbf{z})u.\end{aligned}\quad (49)$$

Veamos ahora qué pasa cuando el grado relativo " $r$ " de (46) es estrictamente menor que  $n$ . Como sabemos que  $h$ ,  $L_f h$ , ...,  $L_f^{r-1} h$ , son linealmente independientes, nada más nos

queda averiguar cómo hacer las  $(n-r)$  asignaciones restantes de tal modo a obtener una transformación que sea un difeomorfismo, al menos localmente. Para resolver esto, recurrimos a la siguiente proposición.

**Proposición 3.1** [Isidori, 1989] Supongamos que el sistema tiene grado relativo " $r$ " en  $\mathbf{x}^0$ , con  $r < n$ . Hagamos las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}), \\ T_2(\mathbf{x}) &= L_f h(\mathbf{x}), \\ T_3(\mathbf{x}) &= L_f^2 h(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ T_r(\mathbf{x}) &= L_f^{r-1} h(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{50}$$

Entonces es siempre posible encontrar  $(n-r)$  funciones adicionales;  $T_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, T_n(\mathbf{x})$ , de tal modo que

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{51}$$

tenga una matriz jacobiana no singular en  $\mathbf{x}^0$ , y se puede así utilizar (51) como una transformación local de coordenadas. Además, es posible elegir las  $(n-r)$  funciones  $T_i(\mathbf{x})$  de tal modo que

$$L_g T_i(\mathbf{x}) = 0, \tag{52}$$

para todo  $r+1 \leq i \leq n$  y para todo  $\mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ .  $\square$

Veamos ahora cómo utilizar alguno de los conceptos hasta aquí desarrollados, para realizar la linealización.

### III.2.2 Linealización completa

Mostraremos ahora los pasos a seguir para la obtención de un modelo lineal de una entrada-una salida para el sistema descrito por la ecuación (46). Esta linealización está basada en los conceptos de grado relativo y forma normal, expuestos anteriormente.

Si el sistema tiene grado relativo  $n$  procedemos como en la sección anterior, haciendo la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ z_n &= T_n(\mathbf{x}) = L_f^{n-1}h(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{53}$$

Con esta asignación se llega a

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n, \\ \dot{z}_n &= b(\mathbf{z}) + a(\mathbf{z})u, \end{aligned} \tag{54}$$

donde  $b(\mathbf{z}) = L_f^n h(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}))$ ,  $a(\mathbf{z}) = L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}))$ .

Por definición de grado relativo sabemos que  $L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) \neq 0$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{T}(\mathbf{x}^0)$ . Por tanto podemos escoger una ley de control válida en la vecindad de  $\mathbf{z}^0$ , de tal manera que  $u(\mathbf{z}) = (1/a(\mathbf{z})) * (v - b(\mathbf{z}))$ , donde  $v$  es una nueva entrada de control. Al sustituir esto en (54) se tendrá que

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n, \\ \dot{z}_n &= v, \end{aligned} \tag{55}$$

lo cual representa a un sistema lineal, controlable y con todos sus polos ubicados en el origen. Podemos concluir que si  $\mathbf{x}^0$  es un punto de equilibrio para el sistema original y este sistema tiene un grado relativo  $n$  en  $\mathbf{x}^0$ , entonces existe una ley de control válida en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , así como un cambio de coordenadas también definido en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , que transforma al sistema no lineal original a uno lineal y controlable definido en una vecindad del origen [Isidori, 1987].

En este sistema lineal obtenido se puede realizar el diseño de un controlador mediante el método de ubicación de polos para dar al sistema el desempeño que el usuario desee (i.e., eligiendo  $v$  en forma adecuada, e.g.,  $v = \mathbf{Kz}$ , donde  $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \dots \ k_n]$ ).

Al decir que el sistema tiene grado relativo  $n$ , implícitamente estamos diciendo que la salida fue tal que el grado relativo fue " $n$ ". En la mayoría de los casos esto no sucede y la pregunta lógica que sigue es: si para alguna salida  $h(\mathbf{x})$  el grado relativo es menor que  $n$ , ¿existirá alguna forma de elegir otra salida  $\gamma(\mathbf{x})$  de tal modo que el grado relativo sea " $n$ "? Es evidente que las condiciones que  $\gamma(\mathbf{x})$  debe cumplir para que el grado relativo sea  $n$  son:

$$L_g \gamma(\mathbf{x}) = L_g L_f \gamma(\mathbf{x}) = \dots = L_g L_f^{n-2} \gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (56)$$

para todo  $\mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$  y,

$$L_g L_f^{n-1} \gamma(\mathbf{x}) \neq 0. \quad (57)$$

La condición (57) nos ayuda a evitar que (56) tenga la solución trivial  $\gamma(\mathbf{x}) = 0$  además de asegurar que el control linealizante esté definido.

Veremos ahora que estas condiciones pueden ser transformadas a ecuaciones diferenciales parciales en  $\gamma(\mathbf{x})$ . Las condiciones para la existencia de una solución de éstas, así como la búsqueda de las mismas, están bien establecidas.

Se puede demostrar [Isidori, 1989] que las condiciones (56) y (57) son equivalentes a escribir :

$$L_g \gamma(\mathbf{x}) = L_{\text{ad}_f g} \gamma(\mathbf{x}) = \dots = L_{\text{ad}_f^{n-2} g} \gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (58)$$

para todo  $\mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , y

$$L_{\text{ad}_f^{n-1} g} \gamma(\mathbf{x}^0) \neq 0. \quad (59)$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada direccional a lo largo de un campo vectorial, (58) puede reescribirse como:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \left[ \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \quad \text{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \quad \dots \quad \text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \right] = 0 \quad (60)$$

Las condiciones para la existencia de una solución de (60) son bien conocidas y están dadas por el teorema de Frobenius, que lo presentaremos de la siguiente manera.

**Teorema 3.1** [Isidori, 1987] Consideremos la ecuación diferencial parcial dada por

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{l}_2(\mathbf{x}) \dots \mathbf{l}_k(\mathbf{x})] = 0 \quad (61)$$

en donde  $\mathbf{l}_1(\mathbf{x}), \mathbf{l}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{l}_k(\mathbf{x})$  son funciones vectoriales de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Supongamos que la matriz

$$[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{l}_2(\mathbf{x}) \dots \mathbf{l}_k(\mathbf{x})] \quad (62)$$

tiene rango  $k$  en  $\mathbf{x}^0$ . Entonces la matriz

$$[\mathbf{l}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{l}_2(\mathbf{x}) \dots \mathbf{l}_k(\mathbf{x}) \ [\mathbf{l}_i(\mathbf{x}), \mathbf{l}_j(\mathbf{x})]] \quad (63)$$

tiene rango  $k$  para toda  $\mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$  y para cada  $(i,j)$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ , si y sólo si existen  $(n-k)$  funciones escalares de  $\mathbf{x}$ ,  $\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x}), \dots, \gamma_{n-k}(\mathbf{x})$ , definidas en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , las cuales son soluciones de (61) y son tales que la matriz jacobiana:

$$\left[ \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \ \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \ \dots \ \left( \frac{\partial \gamma_{n-k}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]^T \quad (64)$$

tiene rango  $(n-k)$  en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ .  $\square$

Es evidente que lo que implica la condición necesaria y suficiente de este teorema es que el paréntesis de Lie  $[\mathbf{l}_i(\mathbf{x}), \mathbf{l}_j(\mathbf{x})]$ , debe de poder expresarse como una combinación lineal de todos los vectores  $\mathbf{l}$ , es decir;

$$[\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j](\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^k \alpha_{ijp}(\mathbf{x}) \mathbf{l}_p(\mathbf{x}) \quad \forall \ i, j,$$

donde  $\alpha_{ij}(\mathbf{x})$  es una función escalar de  $\mathbf{x}$ .

La primera condición dada en (63) se conoce también como involutividad de los campos vectoriales  $\{\mathbf{l}_1(\mathbf{x}), \mathbf{l}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{l}_k(\mathbf{x})\}$ .

Con todo lo hasta aquí visto podemos resumir en una proposición las condiciones necesarias y suficientes para ver si existe una salida  $\gamma(\mathbf{x})$  que haga al sistema de grado relativo  $n$ .

**Proposición 3.2** [Isidori, 1987] Dado el siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u,$$

es posible encontrar una función  $\gamma(\mathbf{x})$  definida como salida que hará al sistema de grado relativo  $n$ , si y sólo si:

i) la matriz  $[\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \quad \mathbf{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \quad \dots \quad \mathbf{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)]$ , tiene rango  $n$  y

ii) el conjunto  $\{\mathbf{g}(\mathbf{x}^0), \mathbf{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x}^0), \dots, \mathbf{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)\}$  es involutivo en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$ .  $\square$

Es posible concluir que las condiciones i) y ii) son necesarias y suficientes para la existencia de una retroalimentación de estado y un cambio de coordenadas válido al menos en forma local que transforma al sistema no lineal original

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u,$$

en uno lineal y controlable.

### III.2.3 Linealización de sistemas con grado relativo estrictamente menor que $n$

Supongamos que tenemos un sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad (65)$$

$$y = h(\mathbf{x}), \quad (66)$$

con grado relativo  $r < n$  en  $\mathbf{x}^0$ . Hagamos ahora las asignaciones como en la sección anterior, de manera a tener

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ z_r &= T_r(\mathbf{x}) = L_f^{r-1} h(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (67)$$

También en la sección anterior vimos que las  $n-r$  siguientes funciones  $T_i(\mathbf{x})$ , se pueden elegir de forma tal que el sistema transformado quede como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r, \\ \dot{z}_r &= b(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) + a(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})u, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}), \\ y &= z_1. \end{aligned} \quad (68)$$

donde  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \quad \eta_2 \dots \eta_{n-r}]^T$ . Eligiendo como ley de control a

$$u(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{a(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})} (v - b(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})) \quad (69)$$

tendremos al sistema (68) como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r, \\ \dot{z}_r &= v, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}), \\ y &= z_1. \end{aligned} \quad (70)$$

Tenemos ahora un sistema lineal y controlable de orden  $r$  y un sistema no lineal de orden  $(n-r)$ , cuya dinámica no aparece a la salida.

Como en la ley de control dada por (69) aparecen los estados  $\boldsymbol{\eta}$  (que son parte del sistema) de esta dinámica interna, tenemos que investigar la estabilidad de la misma; con esto trataremos en la siguiente sección.

### III.3 Estabilidad del sistema linealizado

Cuando nos referimos a la estabilidad del sistema linealizado implícitamente nos estamos refiriendo a la estabilidad local del estado estacionario del sistema original.

Al tratar con la estabilidad es de fundamental importancia la introducción de un concepto conocido como la dinámica cero, cuyo estudio facilita el análisis de estabilidad del sistema y el cual lo presentamos a continuación.

#### III.3.1 Dinámica cero

El concepto de la dinámica cero juega en muchos casos el mismo papel que los ceros de una función de transferencia, su nombre se lo debe a ese hecho.

Hemos visto que en los sistemas lineales el grado relativo está dado por la diferencia existente entre el número de polos y el número de ceros del sistema. En particular si  $r < n$ , la función de transferencia tendrá ceros; sin embargo, si  $r = n$  el sistema no tendrá ceros.

Hemos visto que al hacer la linealización del sistema dado por (46), obtenemos una parte lineal y controlable y otra no lineal y no observable.

De (69) vemos que es importante asegurar la estabilidad del sistema definido por  $\dot{\eta} = w(z, \eta)$ . Ahora, como esta dinámica está acoplada a la dinámica de entrada-salida, una forma más sencilla de estudiar sus características es analizando la dinámica cero, cuya definición la damos a continuación.

**Definición 3.5** [Isidori, 1987] La dinámica cero es la dinámica que describe el comportamiento interno del sistema cuando las entradas y las condiciones iniciales han sido elegidas de tal modo que se restringe a la salida a ser idénticamente nula para todo tiempo.

Por definición restringimos a la salida a ser idénticamente nula para todo tiempo; por lo tanto :

$$\begin{array}{l} \text{si} \quad y(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow z_1 = 0 \quad \forall t, \\ \quad \quad z_1 = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow z_2 = 0 \quad \forall t, \\ \quad \quad \vdots \\ \text{si} \quad z_{r-1} = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow z_r = 0 \quad \forall t, \end{array} \quad (71)$$

donde  $r$  es el grado relativo del sistema. De lo anterior se obtiene que

$$\begin{array}{l} \dot{z}_1 = 0, \\ \quad \quad \vdots \\ \dot{z}_r = b(\mathbf{0}, \eta) + a(\mathbf{0}, \eta)u = 0, \\ \dot{\eta} = w(\mathbf{0}, \eta). \end{array} \quad (72)$$

Si  $x^0$  es un punto de equilibrio, el punto correspondiente en el sistema linealizado  $(z, \eta) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , es también un equilibrio, lógicamente escogiendo  $x^0$  de tal modo que  $\eta(x^0) = \mathbf{0}$ . De (72) vemos que

$$0 = b(\mathbf{0}, \eta) + a(\mathbf{0}, \eta)u. \quad (73)$$

Recordemos que por definición de grado relativo  $a(0, \boldsymbol{\eta})$ , es distinto de cero (si  $\boldsymbol{\eta}(t)$  está en la vecindad del origen). Para asegurar que  $y(t)$  sea cero para todo  $t$ ,  $u(t)$  debe ser tal que (73) se cumpla, es decir,

$$u(t) = -b(0, \boldsymbol{\eta})/a(0, \boldsymbol{\eta}). \quad (74)$$

Con  $u(t)$  siendo lo indicado en (74), nos queda nada más estudiar la dinámica dada por :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{w}(0, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{w}_0(\boldsymbol{\eta}(t)) \quad (75)$$

que bajo las condiciones anteriores y con  $\boldsymbol{\eta}(0) \neq \mathbf{0}$  es la dinámica cero del sistema.

Podemos deducir de todo lo hasta aquí visto que la dinámica cero del sistema va evolucionando en una superficie lisa de dimensión  $n-r$  (manifold), definida por

$$S = \{\mathbf{x} \in R^n / h = L_g L_f^r h = \dots = L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) = 0\} \quad (76)$$

Para nuestro caso la importancia de estudiar la dinámica cero está resumida en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2** [Slotine, 1990] Sea el sistema dado en (46) de grado relativo  $r$  en  $\mathbf{x}^0$  (punto de equilibrio) y su dinámica cero presenta en el origen estabilidad asintótica local. Sea

$$d(p) = p^r + \alpha_{r-1} p^{r-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad (77)$$

un polinomio de Hurwitz. Entonces la ley de control siguiente:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} \left[ -L_f^r h(\mathbf{x}) - \alpha_{r-1} L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) - \dots - \alpha_0 h(\mathbf{x}) \right] \quad (78)$$

hace que el sistema original sea en  $\mathbf{x}^0$  asintóticamente estable en forma local.  $\square$

Este resultado es de fundamental importancia, ya que con él ahora sabemos que estudiando la dinámica cero del sistema podemos obtener resultados sobre la estabilidad del mismo.

Hasta aquí hemos visto importantes resultados en cuanto a la linealización y estabilidad para sistemas de una entrada y una salida. Es posible hacer la extensión de todos los resultados anteriores para los sistemas de varias entradas-varias salidas.

### III.4 Linealización de sistemas de varias entradas y varias salidas

El análisis presentado aquí se restringirá a sistemas con igual número de entradas y salidas.

Un sistema de varias entradas-varias salidas está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i, \\ y_1 &= h_1(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{79}$$

donde  $m$  es el número de entradas y salidas.

El concepto de grado relativo para (79) es similar que para el caso de una entrada-una salida. Es decir, es el número de veces que tenemos que derivar la salida  $j$ -ésima  $h_j(\mathbf{x})$ , para que algún componente del vector de entrada aparezca en forma explícita. En este caso trabajaremos con el concepto de vector de grados relativos, el cual lo definimos a continuación.

**Definición 3.6**[Isidori, 1989] El sistema definido por (79) tiene un vector de grados relativos  $[r_1 r_2 \dots r_m]$  en un punto  $\mathbf{x}^0$  si:

i)  $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m, \quad \forall k \leq r_j - 1$  y  $\forall \mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ .

ii) La matriz de dimensión  $m \times m$  dada por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

es no singular en  $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$ .

En este caso la condición de que  $\mathbf{A}(\mathbf{x}^0)$  sea no singular es la versión multivariable de que  $a(\mathbf{x}^0) \neq 0$ .

Ahora veremos cómo llevar un sistema dado por (79) a la forma normal.

**Proposición 3.3** [Isidori, 1989] Supongamos que el sistema definido por (79) tiene un vector de grados relativos  $[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]$  en  $\mathbf{x}^0$ , de tal modo que

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m \leq n \quad (80)$$

Hagamos ahora las siguientes asignaciones para  $1 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned} \phi_1^i(\mathbf{x}) &= h_i(\mathbf{x}), \\ \phi_2^i(\mathbf{x}) &= L_f h_i(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ \phi_{r_i}^i(\mathbf{x}) &= L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (81)$$

si  $\rho = r_1 + r_2 + \dots + r_m$  es estrictamente menor que  $n$ , entonces es siempre posible encontrar  $(n-\rho)$  funciones  $\phi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \phi_{\rho+2}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ , de tal modo que el mapeo

$$\Phi(\mathbf{x}) = \text{col}[\phi_1^1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{r_1}^1(\mathbf{x}), \dots, \phi_1^m(\mathbf{x}), \dots, \phi_{r_m}^m(\mathbf{x}), \phi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})] \quad (82)$$

tiene un jacobiano el cual es no singular en  $\mathbf{x}^0$  y por lo tanto califica como una transformación local de coordenadas en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ . Podemos decir además que si la distribución  $\mathbf{G} = \text{span} \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\}$  es involutiva en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , es siempre posible elegir  $\phi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \phi_{\rho+2}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ , de tal manera que  $L_{\mathbf{g}} \phi_i(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \ \rho+1 \leq i \leq n$ , para todo  $1 \leq j \leq m$  y para todo  $\mathbf{x}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ . La demostración de esto se puede ver en Isidori [1989]. Haciendo las asignaciones dadas en (81) se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1^1 &= \phi_2^1, \\
\dot{\phi}_{r_1-1}^1 &= \phi_{r_1}^1, \\
&\vdots \\
\dot{\phi}_{r_1}^1 &= L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) u_j, \\
&\vdots \\
\dot{\phi}_{r_m-1}^m &= \phi_{r_m}^m, \\
\dot{\phi}_{r_m}^m &= L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) u_j, \\
\dot{\eta} &= \mathbf{w}(\mathbf{z}, \eta),
\end{aligned}$$

donde  $\eta = [\phi_{\rho+1}, \dots, \phi_n]^T$ . En forma más compacta podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r_1} &= b_1(\mathbf{z}, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{1j}(\mathbf{z}, \eta) u_j \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r_m} &= b_m(\mathbf{z}, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{mj}(\mathbf{z}, \eta) u_j \\
\dot{\eta} &= \mathbf{w}(\mathbf{z}, \eta)
\end{aligned} \tag{83}$$

donde  $\mathbf{z} = \Phi$  y  $a_{ij} = L_g L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})$ .

Si aplicamos el siguiente vector de control

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{z}, \eta)], \tag{84}$$

donde  $\mathbf{A}$  esta dado en la condición ii) de la definición 3.6,

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} b_1(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) \\ \vdots \\ b_m(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \quad (85)$$

entonces (83) tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \vdots & \\ \dot{z}_{r_1} &= v_1, \\ \vdots & \\ \dot{z}_p &= v_m, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (86)$$

Con esto tenemos al sistema definido por (79) en la forma normal y de nuevo lo que se debe analizar es la estabilidad del sistema mediante métodos que son extensiones del caso de una entrada-una salida.

Es conveniente discutir en este punto las diferencias y ventajas fundamentales que existen al utilizar esta técnica o la de linealización convencional, para la obtención de un modelo linealizado. En el capítulo anterior vimos que la técnica de linealización convencional es solo aplicable a sistemas cuya órbita sea de dimensión cero, ya sea el sistema autónomo o no autónomo, sin embargo, para la técnica de linealización por retroalimentación y cambio de coordenadas no existe esta limitante.

Un punto muy importante y que marca gran diferencia entre las dos técnicas es la región de validez de la linealización. Para el caso de la linealización convencional esta región de validez no es cuantificable y está relacionada, por así decirlo, con el grado de linealidad del sistema original no lineal y se limita a una vecindad del punto de equilibrio sobre el que se realiza la linealización.

Para el caso de la linealización por retroalimentación la región de validez está bien definida y es aquel volumen del espacio de estados donde el grado relativo está definido y es el mismo para todos los puntos de dicho volumen.

La desventaja de utilizar la técnica de linealización por retroalimentación en la metodología propuesta en este trabajo consiste básicamente en que es necesario realizar un cambio de coordenadas. Este cambio de coordenadas nos obliga a hacer un estudio riguroso sobre cómo expresar las restricciones impuestas sobre el sistema no lineal original en restricciones sobre el sistema linealizado, especialmente aquellas restricciones relacionadas con la ley de control y con la robustez del sistema. Para el caso de la linealización convencional, debido a que se trabaja en las mismas coordenadas, no es necesario realizar dicho estudio.

## IV. Diseño de controladores lineales en función de las especificaciones del desempeño

### IV.1 Introducción

Una nueva metodología de CAD (Diseño asistido por computador) para el diseño de controladores lineales ha sido desarrollada [Boyd *et al.*, 1988]. La arquitectura y los procedimientos adoptados para esta metodología están basados en una teoría reciente que permite encontrar el conjunto de todos los controladores que estabilizan una determinada planta [Youla *et al.*, 1976]. Estos procedimientos permiten transformar el problema de diseño del controlador a un programa de optimización convexa, el cual puede ser resuelto en forma numérica.

El problema básico que se trata aquí es, dada una planta lineal e invariante en el tiempo (y posiblemente inestable), encontrar un controlador también lineal e invariante en el tiempo que estabilice la planta y que además haga que se satisfaga un conjunto de especificaciones de diseño establecidas de antemano.

Hay que resaltar que existen muy pocos métodos analíticos para el diseño de un controlador que haga satisfacer un conjunto de restricciones preestablecidas. Por lo general, para esos métodos, este conjunto de restricciones se reduce a uno de dos elementos: estabilidad y una especificación más, *v. gr.*, LQG,  $H_{\infty}$ .

Otro punto sobre el que también se conoce muy poco es la manera en que están relacionadas las diferentes restricciones que se ponen en el momento del diseño, [Boyd *et al.*, 1988], (e.g. sobrepaso y esfuerzo de control, tiempo de subida y tiempo de establecimiento, etcétera.). La metodología aquí presentada nos permite conocer en forma exacta el compromiso entre las distintas especificaciones.

En este capítulo se exponen las ideas básicas y los fundamentos para el diseño de controladores lineales en función de especificaciones referentes a un desempeño deseado. En primer lugar se define el marco de trabajo dentro del cual nos vamos a desenvolver, luego se expone el resultado teórico reciente que ha hecho posible el desarrollo de esta teoría. Se muestra también la geometría que tienen las especificaciones de diseño sobre el parámetro a diseñar y finalmente se muestra cómo traducir este problema de control en uno de programación convexa y cómo resolverlo en forma numérica.

## IV.2 Marco de trabajo

Para solucionar el problema básico mencionado anteriormente es necesario establecer una estructura o marco de trabajo donde se definirán las señales que intervienen en el diseño, ya sean éstas generadas por el usuario, por el ambiente externo, por el controlador o formen parte de señales sobre las que se tenga interés de imponer un comportamiento determinado. La forma en la cual se agrupan las señales nos darán una nueva definición de lo que será la planta. Este nuevo concepto de planta nos servirá como punto de partida en el diseño del controlador.

**Definición 4.1** Las entradas a la planta están divididas en dos vectores de señales formados por:

- El vector de señales del actuador o de control, denotado por  $\mathbf{u}$  y que consiste de todas aquellas señales que pueden ser manipuladas por el controlador.
- Todas las demás señales que entran a la planta se denominarán señales exógenas  $\mathbf{w}$ , formadas por ruido, referencias, señales de prueba, etc.

**Definición 4.2** Las salidas del modelo están formadas también por dos vectores de señales:

- El vector de señales sensadas  $\mathbf{y}$ , definido como aquellas señales que son accesibles al controlador. Estas señales son las entradas al controlador.
- Las señales de salida sobre las cuales se tiene interés de controlar, sean medidas o no, conforman lo que definimos como el vector de señales a regular,  $\mathbf{z}$ .

Todas las señales involucradas en las definiciones recién dadas son mostradas en la figura 3.

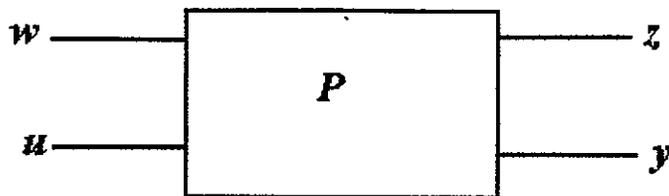


Figura 3. Señales involucradas en el diseño del controlador.

Este concepto de planta incluye más detalles del sistema que el esquema utilizado en control clásico. En esta estructura se definen exactamente cuales señales son accesibles al controlador, en control clásico esto es una información adicional que se da en otra etapa del problema de diseño del controlador (ver Boyd *et al.* [1990a] para más detalles).

La intención es que  $z$  y  $w$  deben incluir todas las señales sobre las cuales fijaremos las restricciones o especificaciones durante el diseño.

En la figura 4 vemos cómo conectar el controlador  $K$  con la planta  $P$ . En conjunto a la planta  $P$  y al controlador  $K$  conectados en esa forma lo llamaremos sistema en lazo cerrado.

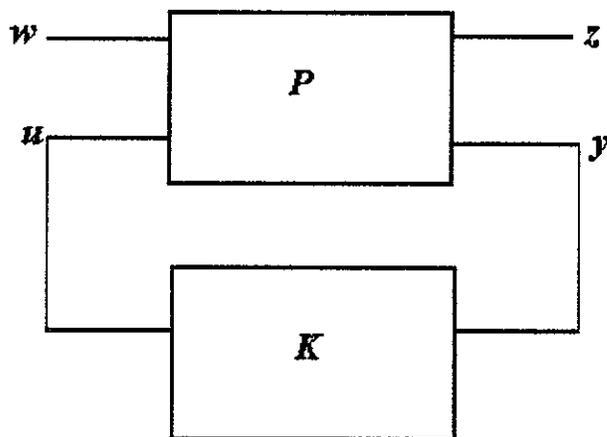


Figura 4. Sistema en lazo cerrado.

La función de transferencia [Boyd and Barrat, 1991]  $P$  puede descomponerse de la manera siguiente:

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}, \quad (87)$$

donde  $P_{zw}$  es la función de transferencia de  $w$  a  $z$ , y así para las demás.

Supongamos que conectamos  $K$  a  $P$  como se muestra en la figura 4, donde  $P$  está dado por (87). Entonces la matriz de transferencia  $H$  en lazo cerrado estará dada por

$$H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}, \quad (88)$$

donde  $I$  es la matriz identidad, con dimensiones adecuadas. Esta matriz es tal que  $z = Hw$ .

Cada componente  $H_{ij}$  de  $H$  es la función de transferencia en lazo cerrado de una entrada exógena  $w_j$  con respecto a una salida a regular,  $z_i$ . Estas funciones de transferencia pueden representar, por ejemplo, la relación entre alguna señal de perturbación y alguna señal de control, o la relación entre una señal del sensor y una señal interna al sistema, entre otras.

En síntesis, cada componente de  $H$  debe contener todas las funciones de transferencia que sean de interés para el diseño. Es posible incluir en  $H$  funciones de transferencia que desde el punto de vista clásico sería información adicional a la de la planta. Veamos mejor esto con el siguiente ejemplo. En la figura 5 vemos señales que son generadas en el interior de la planta,  $A$  y  $B$ . Si queremos obtener la función de transferencia que relaciona  $A$  con  $B$ , simplemente debemos atender que la señal  $A$  esté incluida como una componente del vector de entradas exógenas  $w$  y que la señal  $B$  esté incluida en el vector de salidas a regular  $z$ , así como se muestra en la figura 6 [Boyd *et al.*, 1990a], de tal modo que si nos interesa que esa señal interna no perturbe mucho a alguna salida, simplemente pediremos que una norma adecuada de la función de transferencia en cuestión esté acotada.

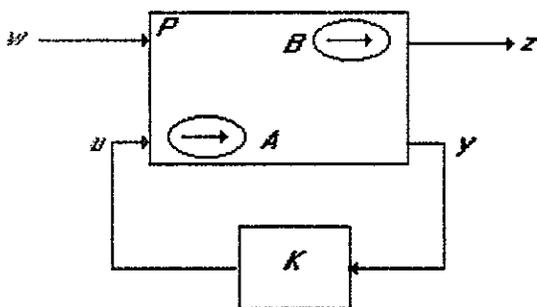


Figura 5. Planta perturbada.

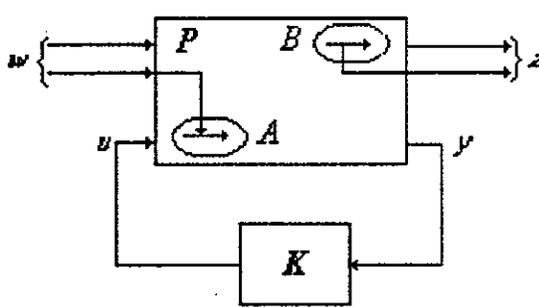


Figura 6. Consideración de la perturbación.

Un hecho muy importante asociado con esta arquitectura y con toda arquitectura en general es la realizabilidad de la misma, que básicamente consiste en lo siguiente:

"encontrar una matriz de transferencia  $H$ , perteneciente a una clase de matrices de transferencia  $\mathbf{H}_{\text{realz}}$ , que pueda ser realizada con algún controlador  $K$ ". Más específicamente,

$$\mathbf{H}_{\text{realz}} = \{H/H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \text{ para algún } K\} \quad (89)$$

Una forma de interpretar  $\mathbf{H}_{\text{realz}}$  es como si se pusieran condiciones sobre las relaciones entre los elementos  $H_{ij}$  que son componentes de  $H$  [Boyd and Barrat, 1991]. Lo que en el fondo estamos expresando es la condición de que el controlador esté conectado como se indica en nuestro marco de trabajo.

Una vez analizado el marco de trabajo dentro del cual nos vamos a desenvolver, es muy importante que estudiemos un resultado teórico que tiene mucha trascendencia y es la base para la metodología aquí presentada. Este resultado es la parametrización de Youla y fué presentado por primera vez para el caso multivariable en 1976 [Youla *et al.*, 1976].

### IV.3 Parametrización de Youla

La idea básica de la parametrización de Youla es poder obtener una representación de todas las matrices de transferencia del sistema en lazo cerrado que sean estables al variar un parámetro  $Q$ . Esto nos permite obtener todos los controladores que estabilizan la planta al variar el parámetro  $Q$ . Debido a que muchas especificaciones pueden ser expresadas como funcionales de la matriz de transferencia en lazo cerrado y el conjunto de todas las matrices de transferencia pueden ser parametrizadas en  $Q$ , es posible obtener el parámetro  $Q$  adecuado que haga cumplir las especificaciones y por lo tanto el controlador adecuado.

Un resultado muy importante de esta parametrización es que la matriz de transferencia en lazo cerrado es afin en el parámetro de diseño  $Q$ , lo cual nos facilita la obtención del parámetro adecuado que nos dé el desempeño exigido utilizando herramientas de optimización.

Para entender la parametrización de Youla o parametrización  $Q$ , es necesario introducir ciertos teoremas y conceptos como los que se presentan a continuación. Estos teoremas pueden ser vistos con mayor detalle en Maciejowski [1989].

**Teorema 4.1** Toda matriz de funciones de transferencias  $G(s)$  puede representarse en forma fraccional, *i.e.*,

$$G(s) = U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s) \quad (90)$$

donde  $U$ ,  $V$ ,  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  son matrices de funciones de transferencia estables, con  $U$  y  $V$  coprimas derechas y  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  coprimas izquierdas, si y sólo si  $G(\infty) = 0$ , i.e.,  $G(s)$  es una función de transferencia (matriz) racional y propia.  $\square$

Los resultados teóricos que respaldan esta factorización se encuentran en Vidyasagar [1985]. Un algoritmo práctico para la misma se puede encontrar en Maciejowski [1989]. Este resultado de factorización de una matriz de transferencia lo utilizaremos para llegar a la parametrización  $Q$ .

Para lo que sigue supondremos una retroalimentación positiva en nuestro esquema como se muestra en la figura 7.

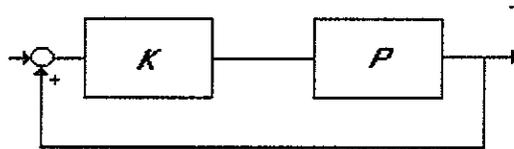


Figura 7. Sistema en lazo cerrado con retroalimentación positiva.

En Maciejowski [1989] se muestra que la estabilidad interna del sistema en lazo cerrado de la figura 7 es equivalente a que la matriz

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (91)$$

sea asintóticamente estable (todos los valores propios con parte real negativa). Aquí  $G = P$ .

**Teorema 4.2** Sean  $G$  y  $K$  matrices con representación fraccional  $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$  y  $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ . Entonces el sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si

$$\begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix}^{-1} \quad (92)$$

y

$$\begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}^{-1} \quad (93)$$

son estables.

□

**Teorema 4.3** Con la misma notación utilizada en el teorema 4.2, si el sistema en lazo cerrado es estabilizable, entonces  $M$ ,  $N$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  pueden ser escogidos de tal modo que

$$\begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (94)$$

y además  $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$  es un controlador estabilizante. □

Una consecuencia fundamental de los teoremas 4.2 y 4.3 es que todos los controladores  $K=UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$ , que cumplan con (94) son controladores estabilizantes.

El resultado central de toda la teoría de parametrización viene dado en el siguiente teorema.

**Teorema 4.4** Sea  $K = U_0 V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1}\tilde{U}_0$  tal que (94) se cumpla. Sea  $Q \in \mathbf{H}_\infty$ , i.e., para  $Q$  realizable, estable y de dimensiones adecuadas. Defínase:

$$U = U_0 + MQ, \quad V = V_0 + NQ, \quad (95)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + Q\tilde{M}, \quad \tilde{V} = \tilde{V}_0 + Q\tilde{N}, \quad (96)$$

entonces, i)  $UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$  y  $K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$  es un controlador estabilizante para  $G=NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ .

ii) Cualquier controlador estabilizante tiene una representación fraccional dada por (95) y (96). □

Este teorema da un resultado sorprendente, ya que nos dice que una vez encontrado un controlador (nominal) estabilizante, podemos construir a partir de él todo el conjunto de controladores que estabilizan la planta.

Una expresión para  $K$  muy útil derivada del teorema anterior es [Maciejowski, 1989],

$$K = K_0 + \tilde{V}_0^{-1} Q (I + V_0^{-1} N Q)^{-1} V_0^{-1} \quad (97)$$

El controlador dado por (97) lo podemos ver en la figura 8, la cual la utilizaremos en un análisis posterior.

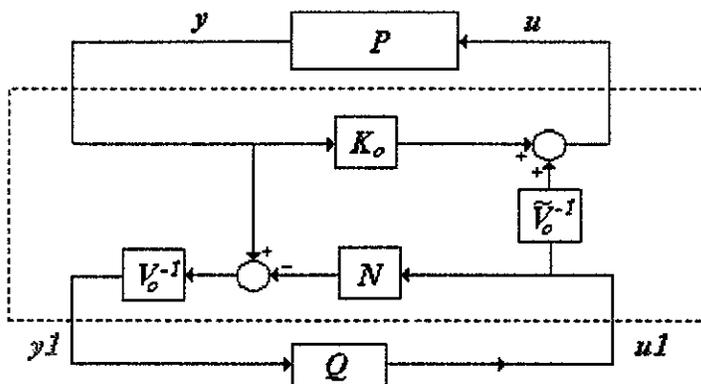


Figura 8. Controlador parametrizado.

Nos interesa saber cómo quedaría este parámetro  $Q$  para el sistema en lazo cerrado y cómo definir  $P$  para que el controlador aumentado contenga todos los controladores estabilizantes. Toda la teoría de parametrización se basa en la representación fraccional de la planta y el controlador, como lo hemos visto en los puntos anteriores. Doyle [Boyd et al., 1990a] ha dado una interpretación muy interesante de esta teoría. Él sugiere que el controlador nominal  $K_{nom}$  sea el controlador diseñado en base a un observador, como se puede apreciar en la figura 9. En esta figura  $Kre$  es la ganancia de retroalimentación del estado estimado,  $e$  es el error de estimación,  $\hat{y}$  corresponde a la salida del observador.

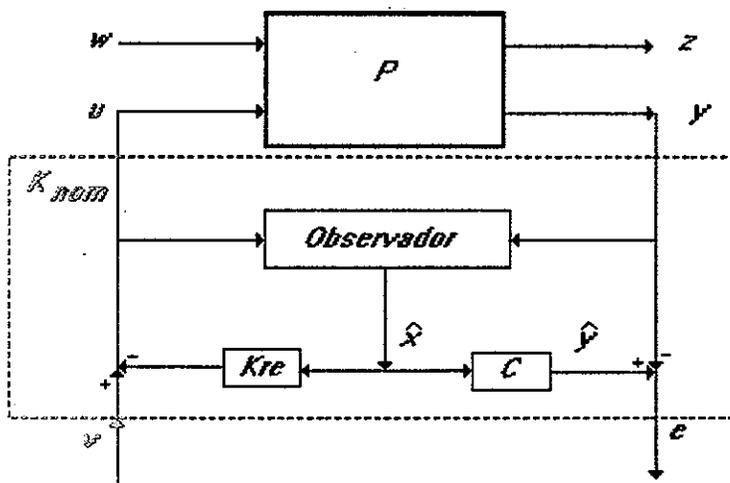


Figura 9. Controlador basado en observador.

De la ecuación (88) vemos que una condición para que la matriz  $H$  sea afin en  $K$  es que  $P_{yu} = 0$ . Esta misma idea se utiliza para aumentar el controlador nominal y de lo que se trata es de hacer que la función de transferencia de  $v$  a  $e$  sea cero. Esto último se logra mediante la construcción del controlador en la forma indicada en la figura 9, de donde se puede apreciar que  $v$  no afecta a  $e$ , produciendo esto que la matriz de transferencia de  $v$  a  $e$  sea nula. Con este resultado podemos conectar el parámetro de diseño  $Q$  entre  $v$  y  $e$  como se muestra en la figura 10, para así de esta forma con  $Q$  estable y de dimensiones adecuadas obtener todos los controladores estabilizantes.

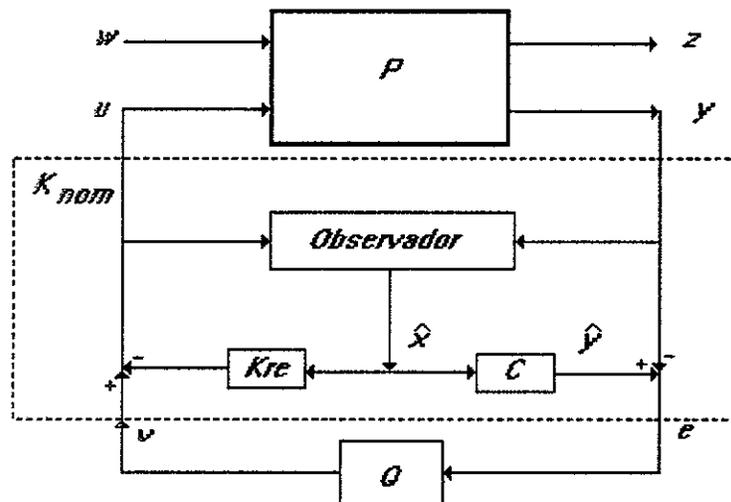


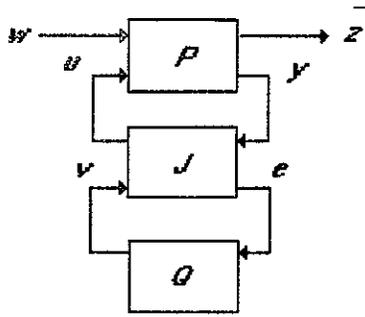
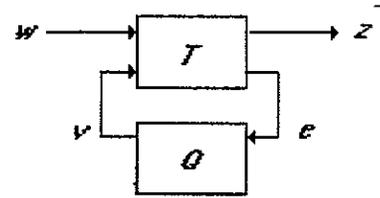
Figura 10. Controlador parametrizado basado en observador.

Para resumir, podemos decir que todos los controladores estabilizantes pueden ser obtenidos a partir de un controlador basado en un observador.

Ahora que hemos visto cómo realizar la parametrización, es necesario ver cómo queda la matriz  $H$  en función del parámetro de diseño  $Q$ . Considérese la ecuación (97) y su representación en la figura 8, donde al bloque interno, se denota como  $J$  (figura 11).

$$J = \begin{bmatrix} K_0 & \tilde{V}_0^{-1} \\ V_0^{-1} & -V_0^{-1}N \end{bmatrix} \quad (98)$$

Ahora combinaremos el bloque  $J$  con la planta  $P$  en uno solo al que denominaremos  $T$ , como se muestra en la figura 12. De aquí se puede escribir

Figura 11. Controlador nominal y parámetro  $Q$ .Figura 12. Nueva planta y parámetro  $Q$ .

$$z = F(T, Q)w \quad (99)$$

$$z = [T_{11} + T_{12}Q(I - T_{22}Q)^{-1}T_{21}]w \quad (100)$$

Resulta fácil demostrar que  $T_{22} = \theta$  (ver Maciejowski [1989] páginas 289-91), de tal modo que (100) queda como

$$z = [T_{11} + T_{12}QT_{21}]w, \quad (101)$$

de donde,

$$H = T_{11} + T_{12}QT_{21}. \quad (102)$$

De (102) se puede apreciar que la matriz de transferencia en lazo cerrado  $H$  tiene una dependencia sencilla de  $Q$ , la cual la analizaremos más adelante. Veamos ahora qué realización tienen las  $T_{ij}$ 's. Suponiendo una realización mínima para  $P$  dada por

$$P: (A, [B_1 \ B_2], \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}), \quad (103)$$

de tal modo que

$$P_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (104)$$

Puede ser demostrado que si  $F$  es una matriz de retroalimentación de estado estabilizable (i.e.,  $A + B_2F$  es estable) y  $E$  es una matriz (ganancia del observador) estable para la planta (i.e.,  $A + EC_2$  es estable), entonces las realizaciones de  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{21}$  están dadas por;

$$T_{11}: \left( \begin{bmatrix} A + B_2F & -B_2F \\ 0 & A + EC_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 + ED_{21} \end{bmatrix}, [C_1 + D_{12}F \quad -D_{12}F], D_{11} \right) \quad (105)$$

$$T_{12}:(A + B_2F, B_2, C_1 + D_{12}F, D_{12}) \quad (106)$$

$$T_{21}:(A + EC_2, B_1 + ED_{21}, C_2, D_{21}) \quad (107)$$

Nótese que las matrices  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{21}$  son estables. Con esto damos por finalizado la parametrización de Youla. Una vez visto que  $H_{zw}$  es afin en el parámetro  $Q$ , debemos ver cómo se relacionan las especificaciones de diseño y la matriz en lazo cerrado  $H_{zw}$  y por lo tanto, las especificaciones y el parámetro de diseño  $Q$ . De esto trataremos en la siguiente sección introduciendo el concepto de especificaciones de diseño .

#### IV.4 Especificaciones de diseño

Empezaremos esta sección dando la definición de especificaciones de diseño dentro del marco de trabajo en el cual nos estamos desarrollando.

**Definición 4.3** [Boyd and Barrat, 1991] Una especificación de diseño  $D$  es una función booleana de la matriz de transferencia  $H$ .

Esto quiere decir que para cada  $H \in \mathbf{H}$ , una  $D$  o se satisface o no. La  $D$  es una función que toma como argumento una  $H$  de dimensiones  $n_z \cdot n_w$  y nos da un resultado booleano;

$$D:\mathbf{H} \rightarrow \{\text{si, no}\}$$

donde  $\mathbf{H}$  representa todas la  $n_z \cdot n_w$  matrices de transferencia.

Parece un tanto extraño que la especificación de diseño sea función de  $H$  y no de  $K$ , siendo esto último lo que realmente diseñamos. El porqué de esto se aclarará en la siguiente sección.

Generalmente a la hora del diseño no sólo se tiene una especificación sino un conjunto de ellas, requiriéndose que todas se satisfagan simultáneamente. Este problema se conoce como factibilidad de las especificaciones y se define a continuación.

**Definición 4.4** Dado un conjunto de especificaciones de diseño  $\{D_1, D_2, \dots, D_L\}$ , determinar si existe o no un conjunto de matrices de transferencia  $\mathbf{H}_{\text{fact}}$  que cumpla con  $D_1, D_2, \dots, D_L$ .

Para dar una idea más clara sobre las especificaciones de diseño y el conjunto de matrices de transferencia en lazo cerrado relacionadas con ellas se presenta la tabla I.

**Tabla I.** Relaciones entre las especificaciones de diseño y  $\mathbf{H}$

Especificaciones de diseño	Conjunto de matrices de Transferencia
$H$ satisface $D_1$	$H \in \mathbf{H}_1$
$D_1$ es más estricta que $D_2$	$\mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{H}_2$
$D_1$ es más débil que $D_2$	$\mathbf{H}_1 \supseteq \mathbf{H}_2$
$D_1 \wedge D_2$	$\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$
$D_1$ no es factible	$\mathbf{H}_1 = \emptyset$
$D_1$ es factible	$\mathbf{H}_1 \neq \emptyset$
$D_1$ es propiamente más estricta que $D_2$	$\mathbf{H}_1 \subseteq \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}_2$

Con estos conceptos analizaremos ahora la geometría de las especificaciones de diseño.

#### IV.5 Geometría de las especificaciones de diseño

Empezamos esta sección enunciando el problema fundamental que queremos resolver.

**Problema fundamental:** dado una planta específica  $P$  y un conjunto de especificaciones de diseño, encontrar si existe una matriz de transferencia en lazo cerrado  $H$  que cumpla con las especificaciones, o determinar que no existe alguna.

Resulta entonces de vital importancia analizar la geometría que dichas especificaciones presentan. Conceptos como conjuntos convexos, cuasiconvexos y afines, funcionales convexas, cuasiconvexas y afines, serán necesarios para tratar dicha geometría (ver por ejemplo, Kolmogórov [1978], Berberian [1974] para revisar estos conceptos).

El número de entradas exógenas (nexog) y el número de salidas a regular (nreg) son fijadas por la configuración de control elegida. Llamaremos  $\mathbf{H}$  al conjunto de todas las matrices de transferencia de dimensión nreg·nexog. A la especificación de diseño  $D_i$  asociaremos el conjunto  $\mathbf{H}_i \subseteq \mathbf{H}$  de todas las matrices de transferencia que satisfacen  $D_i$ .

Como lo mencionamos anteriormente, durante el diseño se va a requerir que se cumplan un conjunto de especificaciones  $D_1, D_2, \dots, D_L$  a las cuales corresponde

$$\mathbf{H}_{spec} = \mathbf{H}_1 \cap \dots \cap \mathbf{H}_L.$$

Con esto podemos restablecer el problema fundamental de la siguiente manera:

"encontrar una matriz de transferencia en lazo cerrado  $H \in \mathbf{H}_{spec}$  o determinar que  $\mathbf{H}_{spec} = \emptyset$ ".

Una vez definido el concepto de especificación de diseño y establecido el problema fundamental definiremos ahora conceptos relacionados con propiedades geométricas de las especificaciones de diseño.

**Definición 4.5** Una especificación de diseño  $D_i$  se dice convexa en lazo cerrado si el conjunto de matrices de transferencias  $\mathbf{H}_i$  que la satisfacen es convexo.

La primera especificación a analizar es la realizabilidad.

#### IV.5.1 Realizabilidad

Para analizar esta restricción vamos a retomar la ecuación (89), de donde definiremos,

$$R = K(I - P_{yu}K)^{-1}. \quad (108)$$

Nótese que existe una correspondencia uno a uno entre  $K$  y  $R$ , de manera que  $K$  puede expresarse como

$$K = (I + RP_{yu})^{-1}R. \quad (109)$$

Con este resultado (89) se puede reescribir como:

$$\mathbf{H}_{realz} = \{H/H = P_{zw} + P_{zu}RP_{yw} \text{ para algún } R\}. \quad (110)$$

Demostraremos que (110) es un conjunto afin. Supongamos que  $R, \tilde{R} \in \mathbf{H}_{realz}$ , de tal modo que

$$\begin{aligned} H &= P_{zw} + P_{zu} R P_{yw}, \\ \tilde{H} &= P_{zw} + P_{zu} \tilde{R} P_{yw}. \end{aligned} \quad (111)$$

Debemos demostrar que  $H_\lambda = \lambda H + (1-\lambda)\tilde{H}$  pertenece a  $\mathbf{H}_{\text{realz}}$  para todo  $\lambda \in \mathcal{R}$ . Reemplazando (111) en  $H_\lambda$  se tiene que

$$H_\lambda = P_{zw} + P_{zu} R_\lambda P_{yw}, \quad (112)$$

donde  $R_\lambda = \lambda R + (1-\lambda)\tilde{R}$ , por lo que  $H_\lambda \in \mathbf{H}_{\text{realz}}$ , con lo que demostramos que  $\mathbf{H}_{\text{realz}}$  es un conjunto afin en  $\mathcal{R}$  y por lo tanto la realizabilidad es una especificación afin.

Algo importante que se debe de tener en cuenta es que si  $K$  y  $\tilde{K}$  son controladores que corresponden a  $H, \tilde{H} \in \mathbf{H}_{\text{realz}}$ , entonces, el controlador  $K_\lambda$  viene dado por

$$K_\lambda = (A + \lambda B)^{-1} (C + \lambda D), \quad (113)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= I + \tilde{K}(I - P_{yu}\tilde{K})^{-1}P_{yu}, \\ B &= K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu} - \tilde{K}(I - P_{yu}\tilde{K})^{-1}P_{yu}, \\ C &= \tilde{K}(I - P_{yu}\tilde{K})^{-1}, \\ D &= K(I - P_{yu}K)^{-1} - \tilde{K}(I - P_{yu}\tilde{K})^{-1}. \end{aligned}$$

La forma especial de  $K_\lambda$  dada por (113) es denominada una dependencia bilineal o lineal fraccional de  $\lambda$  y obviamente no es afin. La forma de  $K_\lambda$  en (113) es la causa por la que las especificaciones de diseño se definen en función de  $H$  y no de  $K$ .

#### IV.5.2 Estabilidad Interna

Para tratar este concepto recurriremos a la definición de Desoer-Chan que se enuncia a continuación.

**Definición 4.6** El sistema en lazo cerrado formado por la planta  $P$  y el controlador  $K$  es internamente estable si las cuatro matrices de transferencia

$$H_{uv1} = K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu}, \quad (114)$$

$$H_{uv2} = K(I - P_{yu}K)^{-1}, \quad (115)$$

$$H_{yv1} = (I - P_{yu}K)^{-1}P_{yu}, \quad (116)$$

$$H_{yv2} = (I - P_{yu}K)^{-1}, \quad (117)$$

son estables. En este caso decimos que  $K$  estabiliza a  $P$ .  $\square$

En Boyd and Barrat [1991] se da una interpretación práctica a estas cuatro matrices de transferencia, que consiste en lo siguiente. Supongamos que  $v1$  y  $v2$  son ruidos que corresponden al ruido del proceso y del sensor respectivamente, como se muestra en la figura 13. Una interpretación simple dice que la estabilidad interna requiere que el efecto de los ruidos pequeños del proceso y del sensor no resulten en una señal de actuador o de sensor muy grandes.

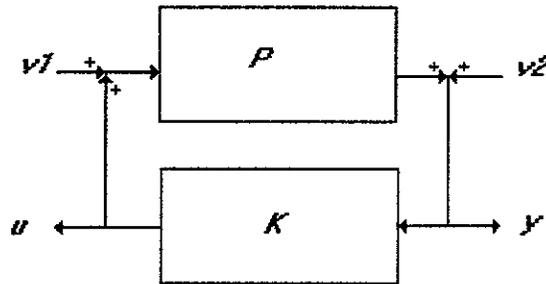


Figura 13. Diagrama para dar una interpretación práctica a la estabilidad interna.

Veamos ahora cómo representar la estabilidad interna en nuestro marco de trabajo. Para esto debemos incluir los ruidos del proceso y del sensor en el vector de entradas exógenas  $w$  y además se debe incluir  $u$  y  $y$  en el vector de variables a regular  $z$ . En dicho caso las cuatro matrices de transferencia (114-117) aparecen como submatrices de la matriz de transferencia en lazo cerrado  $H$ . Por lo tanto la estabilidad interna se expresará como el requerimiento de que estas submatrices sean estables.

Consideremos ahora la especificación de que  $H$  sea una matriz realizable por algún controlador  $K$  que estabilice la planta:

$$\mathbb{H}_{\text{estb}} = \{H/H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \text{ p/ algún } K \text{ estabilizante}\}. \quad (118)$$

Es evidente que  $\mathbb{H}_{\text{estb}} \subseteq \mathbb{H}_{\text{realz}}$ , por lo tanto  $\mathbb{H}_{\text{estb}}$  es un conjunto afin. Esto implica que  $D_{\text{estb}}$  es una especificación afin y lógicamente, convexa.

### IV.5.3 Respuesta temporal

Existen varias características de la respuesta temporal que son de interés, por ejemplo, características de la respuesta al escalón como sobrepaso, bajo paso, tiempo de

subida, tiempo de establecimiento, etcétera. Aquí hablaremos solamente de una de ellas. El análisis para los demás casos es similar.

### IV.5.3.1 Sobrepasso

Supongamos que  $s_{11}(t)$  es la respuesta al escalón de una entrada  $w_1$  a una salida  $z_1$  de tal modo que

$$s_{11}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{11}(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Supongamos que la restricción en el sobrepasso es

$$\sup_{t \geq 0} \{s(t) - 1\} \leq \alpha,$$

donde  $\alpha$  es el valor máximo del sobrepasso permitido. Esto se puede traducir como

$$\phi(H) \hat{=} \sup_{t \geq 0} \{s(t) - 1\} \leq \alpha,$$

donde  $\phi$  es una funcional cuyo argumento es la matriz de transferencia en lazo cerrado  $H$ . Con esto tendremos que el conjunto de matrices de transferencia  $\mathbf{H}_{sp}$  que cumplen con la restricción anterior estará dado por:

$$\mathbf{H}_{sp} = \{H / \phi_{sp}(H) \leq \alpha\}.$$

Es fácil demostrar [Boyd *et al.*, 1988] que este conjunto es afín y por lo tanto convexo.

### IV.5.4 Respuesta en frecuencia

Las especificaciones referentes a la respuesta en frecuencia son las más utilizadas en control clásico ya que pueden ser expresadas como restricciones sobre la función de transferencia directamente. Estas restricciones tienen una limitante muy importante y es que son expresadas específicamente sobre la función de transferencia en lazo abierto (margen de ganancia, margen de fase, etcétera.). Aquí haremos referencia a las especificaciones en el dominio de frecuencia sobre la matriz de transferencia en lazo cerrado. Dichas especificaciones pueden ser seguimiento a señal de referencia, desacople, rechazo a perturbaciones, etcétera.

#### IV.5.4.1 Seguimiento de una referencia

Es también posible especificar qué tan bien una variable a regular  $z$ , sigue a una señal de referencia  $w$ , en el dominio de la frecuencia.

Definamos un error de seguimiento  $z_2 = w_1 - z_1$ , con esto requeriremos que

$$|H_{21}(j\omega)| \leq l(\omega) \quad \forall \omega,$$

donde  $l(\omega)$  es una función que es pequeña para  $0 \leq \omega \leq \omega_b$ , indicando esto último el ancho de banda correspondiente a  $H_{21}(j\omega)$ . Esta restricción es convexa.

#### IV.5.4.2 Desacoplamiento

Si queremos que la salida  $z_2$  esté desacoplada de la entrada  $w_1$ , la restricción consistirá simplemente en verificar que

$$H_{21}(j\omega) = 0.$$

Esta restricción es afín y por lo tanto convexa.

#### IV.5.4.3 Rechazo a perturbación: un caso sencillo

La especificación de que la respuesta  $z$  a una perturbación constante  $d$  tienda asintóticamente a cero, está dada por

$$H_{zd}(0) = 0.$$

Similarmente, el rechazo a una perturbación en una banda de frecuencia determinada se puede especificar como

$$|H_{zd}(j\omega)| \leq \alpha \quad \forall \omega_0 \leq \omega \leq \omega_1,$$

Las dos especificaciones anteriores son convexas.

#### IV.5.5 Esfuerzo de control

En este tipo de especificación la idea central es tratar de mantener el esfuerzo de control lo más pequeño posible o hacer que el consumo de energía sea mínimo. Estas

restricciones se traducirán en restricciones temporales para el primer caso y en restricciones en el dominio de la frecuencia para el segundo caso. Considerando a  $u$ , (ley de control) como parte del vector de salidas a regular  $z$ , el problema se vuelve similar a los casos anteriores y las restricciones sobre el esfuerzo de control resultan ser convexas en lazo cerrado.

#### IV.5.6 Especificaciones de desempeño robusto

Las especificaciones de robustez tienen por objeto mantener dentro de ciertos límites razonables unos objetivos fijados de antemano, bajo la presencia de variaciones en la planta. Un concepto muy importante a tener en cuenta en esta sección es el de planta nominal  $P^{nom}$ , que es la planta en ausencia de perturbaciones o incertidumbres. El desempeño más importante que trataremos de conservar siempre es el de estabilidad. Se sabe muy poco de cómo mantener un determinado desempeño fuera del de estabilidad (e.g., un sobrepaso menor al 10%), en la presencia de cambios en la planta. Definamos a continuación lo que para nosotros será desempeño robusto.

**Definición 4.7** Decimos que la especificación  $D$  se cumple robustamente para  $K$  y  $\mathbf{P}$  si para cada  $P^{pert} \in \mathbf{P}$ ,  $D$  se cumple para la matriz de transferencia

$$P_{zw}^{pert} + P_{zu}^{pert} K (I - P_{yu}^{pert} K)^{-1} P_{yw}^{pert}.$$

En esta definición  $\mathbf{P}$  representa al conjunto de todas las plantas perturbadas.

**Definición 4.8** La especificación robusta  $D_{rob}$  formada por  $D$ ,  $P^{nom}$  y  $\mathbf{P}$  está dada por:

$D_{rob}$ :  $D$  se cumple robustamente para  $K$  y  $\mathbf{P}$  y, para cada  $K$  que satisface

$$H = P_{zw}^{nom} + P_{zu}^{nom} K (I - P_{yu}^{nom} K)^{-1} P_{yw}^{nom}.$$

Con estas definiciones expresaremos nuestra especificación de desempeño robusto como:

$D_{rob}(\mathbf{P}, D)$ , donde  $P^{nom}$  se sobre entiende. Esto quiere decir que  $D$  cumple para cada  $P^{pert} \in \mathbf{P}$

A continuación se verá brevemente lo que es estabilidad robusta.

### IV.5.6.1 Estabilidad robusta

De las definiciones anteriores nuestra especificación de estabilidad robusta estará expresada como:

$$D_{\text{est\_rob}}(\mathbf{P}, D_{\text{est}}).$$

Debido a la forma en que diseñamos el controlador  $K$  requerimos que las restricciones para la estabilidad robusta estén dadas sobre la matriz de transferencia en lazo cerrado  $H_{zw}$ . Una restricción para estabilidad robusta en el caso una entrada/una salida se especifica de la siguiente manera. Sea

$$M = \min_{\omega} \text{dist}(L^{\text{nom}}(j\omega), 1) = \min_{\omega} |1 - L^{\text{nom}}(j\omega)|, \quad (119)$$

la cual podemos escribir como

$$M \geq M_{\text{min}}, \quad (120)$$

donde  $M_{\text{min}}$  es la restricción que ponemos sobre la gráfica de Nyquist como la máxima distancia que se puede acercar al punto +1. La restricción dada por (120) puede ser expresada como una restricción sobre  $H_{zw}$  como se muestra a continuación

$$\|H_{12}^{\text{nom}}\|_{\infty} \leq 1/M_{\text{min}}, \quad (121)$$

donde  $H_{12}^{\text{nom}}$  es la función sensibilidad. Se puede demostrar [Boyd *et al.*, 1990a] que las restricciones (120) y (121) son equivalentes. Todo esto sirve cuando tratamos con sistemas con un solo actuador y un solo sensor. Una extensión para el caso de múltiples actuadores y múltiples sensores lo trataron Doyle y Stein [1981]. La interpretación de Doyle se puede ver como sigue.

Sea

$$L^{\text{nom}} = P_{yu}^{\text{nom}} K,$$

de tal modo que (120) se convierte en

$$\underline{\sigma}(L^{\text{nom}}(j\omega) - I) \geq M \quad \forall \omega, \quad (122)$$

donde  $\underline{\sigma}(\cdot)$  denota el valor singular mínimo. Esta especificación se puede expresar como una restricción convexa en la matriz de transferencia en lazo cerrado;

$$\|(I - L^{\text{nom}})^{-1}\|_{\infty} \leq 1/M. \quad (123)$$

Esta especificación de desempeño robusto es un ejemplo de especificación de desempeño robusto "moderno". Un enfoque moderno para el estudio de estabilidad robusta se basa en el teorema de la pequeña ganancia [Zames, 1966].

Una vez visto que muchas especificaciones de diseño se pueden expresar como funcionales convexas de la matriz de transferencia  $H$  y por tanto en nuestro parámetro de diseño  $Q$ , veremos cómo convertir el problema de diseño de  $Q$  en uno de optimización convexa y cómo resolverlo en forma numérica.

#### IV.6 Métodos numéricos para el diseño de $Q$

Si recordamos de la sección II.5, el problema fundamental consistía en que dado  $\mathbf{H}_{\text{spec}} = \mathbf{H}1 \cap \dots \cap \mathbf{H}L$ , determinar si este conjunto es vacío o no. La solución de este problema es de dimensión infinita. Un problema de este tipo tiene soluciones analíticas para casos bien específicos y en un gran número de ellos no cuenta con solución de este tipo. Por esta razón es necesario hacer una reducción del conjunto de soluciones factibles a uno finito, de tal modo que en vez de buscar si  $\mathbf{H}_{\text{spec}}$  es vacío o no determinaremos mejor si  $\mathbf{H}_{\text{spec}} \cap \mathbf{H}_{\text{apfin}}$  (apfin: aproximación finita) es vacío o no. Un problema evidente al hacer esto es que si la intersección de estos conjuntos es vacío no implica que no existe algún  $H$  que satisfaga nuestras especificaciones. La aproximación finita que se realiza se puede interpretar como una especificación ficticia que agregamos a las ya existentes. Podríamos ver un ejemplo de  $\mathbf{H}_{\text{apfin}}$  en lo siguiente. Supongamos que tenemos una planta discreta de una entrada-una salida y una especificación que consiste en que la respuesta al escalón este acotada de la siguiente manera;

$$1 - 0.95^t \leq s_{11}(t) \leq 1 + 0.95^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (124)$$

(124) requiere que para  $t \geq 90$ ,  $s_{11}(t)$  esté entre menos del 1% cercano a uno, lo que prácticamente implica que

$$s_{11}(t) = 1 \quad \text{para } t \geq 90. \quad (125)$$

Esto significa que la respuesta se estableció para  $t = 90$ . Entonces (125) nos lleva a una matriz  $H$  de dimensión finita (a lo más de dimensión 90), de tal modo que podemos escribir;

$$\mathbf{H}_{\text{apfin}} = \{H / s_{11}(t) = 1 \quad \text{p/ } t \geq 90\} \quad (126)$$

Un método general para generar la aproximación de dimensión finita a  $\mathbf{H}_{\text{spec}}$  es utilizando la representación paramétrica  $Q$  (102), donde  $Q$  varía sobre todo el conjunto infinito de matrices de transferencia de dimensiones nact nsens. Se podría restringir a  $Q$  que variase sólo sobre un subespacio de dimensión finita, por ejemplo, al subespacio de combinación lineal de algún conjunto fijo de matrices de transferencia estables  $Q$  [Boyd *et al.*, 1990a]. Esta idea podemos verla de la siguiente manera. Sea

$$Q = \sum_{i=1}^L x_i Q_i \quad (127)$$

donde  $x_i \in R$  y los  $Q_i$  son mapeos estables de la entrada  $e$  a la salida  $v$ , [Boyd *et al.*, 1988]. Por ejemplo, si  $Q$  es SISO, podríamos tomar  $q_i(t) = \delta_i(t)$ , de tal modo que  $q_i(t)$  sea la respuesta al impulso de  $Q_i$ , para que  $Q$  sea un filtro FIR con coeficientes  $x_i$  (peso de cada etapa). A  $X = [x_1, \dots, x_L]^T$  se le denomina variables de decisión. Con esta restricción adicional (127) se convierte en un programa convexo de dimensión finita  $L$ . Este programa puede expresarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(X) \\ &X \in \tilde{H} \end{aligned} \quad (128)$$

$$\text{donde } f(X) = \tilde{\Phi}\left(\sum_{i=1}^L x_i Q_i\right) \quad \text{y} \quad \tilde{H} = \left\{X \in R^L \mid \sum_{i=1}^L x_i Q_i \in \tilde{H}\right\}.$$

Veamos ahora cómo representar una especificación de diseño en una restricción sobre las variables de decisión  $x_i$ . Por simplicidad, supongamos que trabajamos con una planta discreta y que  $z$ ,  $w$ ,  $u$  y  $y$  son escalares. Supongamos que las variables de decisión  $x_i$  son simplemente las componentes de la respuesta al impulso del filtro  $Q$ , esto es,

$$q(t) = \begin{cases} x_t & t = 0, 1, \dots, L-1 \\ 0 & t \geq L \end{cases},$$

donde  $q(t)$  es la respuesta al impulso del filtro  $Q$ . Sean  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  la respuesta al impulso de  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ , sean  $h$  y  $s$  la respuesta al impulso y al escalón, respectivamente, de  $H_{zw}$ . Supongamos ahora la siguiente especificación en la respuesta al escalón:

$$\alpha \leq s(i_0) \leq \beta, \quad i_0 \geq 0 \quad (129)$$

Demostraremos que (129) es equivalente a una restricción de desigualdad lineal sobre la variable de decisión  $\mathbf{x}$

$$\gamma \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \delta \quad (130)$$

para valores apropiados de  $\gamma, \delta \in R, \mathbf{c} \in R^L$ . Sabiendo que  $H_{\mathbf{z}\mathbf{w}} = T_1 + T_2 Q T_3$ , tenemos que:

$$h(i) = t_1(i) + \sum_{k=0}^i \left( \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_3(k-j) \right) t_2(i-k), \quad (131)$$

de tal modo que

$$s(i_0) = \sum_{i=0}^{i_0} \left( t_1(i) + \sum_{k=0}^i \left( \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_3(k-j) \right) t_2(i-k) \right) \quad (132)$$

y (129) es equivalente a

$$\alpha - \sum_{i=0}^{i_0} t_1(i) \leq \sum_{j=0}^{L-1} x_j \left( \sum_{i=0}^{i_0} \sum_{k=0}^i t_3(k-j) t_2(i-k) \right) \leq \beta - \sum_{i=0}^{i_0} t_1(i), \quad (133)$$

que también es equivalente a (130) donde

$$\gamma = \alpha - \sum_{i=0}^{i_0} t_1(i), \quad (134)$$

$$\delta = \beta - \sum_{i=0}^{i_0} t_1(i) \quad (135)$$

y

$$c_j = \sum_{i=0}^{i_0} \sum_{k=0}^i t_3(k-j) t_2(i-k), \quad j = 0, 1, \dots, L-1. \quad (136)$$

Hemos mostrado así que la conversión de la restricción de diseño sobre  $H_{zw}$  a un programa convexo para el parámetro de diseño  $Q$  es matemáticamente directa. Sin embargo, es evidente que el manejo de dicha conversión es bastante complicada.

Podemos decir que el resultado fundamental de la teoría aquí expuesta consiste en que es posible diseñar controladores lineales e invariantes para plantas de la misma clase en función de las especificaciones del desempeño deseado, toda vez, claro está, que estas especificaciones puedan ser expresadas como una funcional convexa de la matriz de transferencia en lazo cerrado.

La importancia de este resultado es que debido a la posibilidad de realizarlo en forma numérica el diseño de los controladores puede ser totalmente automatizado.

En los capítulos anteriores vimos que es posible obtener una representación lineal e invariante de cierta clase de sistemas no lineales. Sin embargo, como los sistemas lineales obtenidos provienen de un sistema no lineal, muchas de las especificaciones vistas en la sección IV.5 de este capítulo no tienen sentido al ser aplicados sobre los no lineales. Esto se comenta con más detalle el capítulo siguiente.

# V. Síntesis del controlador y simulación

## V.1 Introducción

En este capítulo se propone una metodología de diseño de controladores, la cual es aplicable a una clase de sistemas no lineales. Debido a la dificultad de formalizar todos los procedimientos seguidos en la metodología, nos limitamos a dar una prueba de funcionamiento en simulación de la misma, al ser ésta aplicada a un modelo no lineal que, en forma simplificada, representa el comportamiento dinámico de un motor de inducción trifásico tipo jaula de ardilla. La falta de formalismos matemáticos nos impide presentar el procedimiento aquí propuesto como una nueva metodología de diseño propiamente dicho, sin embargo, se muestra a través de simulación que es un procedimiento factible, al menos para el caso del motor de inducción y puede ser extendido a muchos otros casos. La elección del modelo del motor de inducción se basa en el hecho de que en los últimos años se ha constituido en el modelo más utilizado para la prueba de cierto tipo de algoritmos de control no lineal. Además, es un sistema sobre el cual se tiene en la actualidad la necesidad de imponer más restricciones que aquellas básicas de estabilidad y seguimiento. En particular, se hace necesario imponer especificaciones sobre el desempeño dinámico, así como en el consumo de energía.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: primeramente hacemos una breve descripción de la metodología propuesta, con los respectivos problemas que es necesario resolver para dar una prueba formal de la validez de la misma; seguidamente se aplica la metodología propuesta al modelo del motor de inducción al cual se impone restricciones en la respuesta transitoria producida cuando se aplica un escalón en la entrada de referencia, además, se pide una minimización de la varianza de la señal de salida en la presencia de ruido en la señal medida así como una cota en el esfuerzo de control lineal al imponer la forma de la respuesta transitoria. Se presentan también los resultados obtenidos en simulación.

El modelo utilizado para la simulación es el denominado **ab**, los valores utilizados de cada uno de los parámetros se presentan en el apéndice A.

## V.2 Descripción de la metodología propuesta

El único antecedente del que se tiene conocimiento sobre la metodología aquí propuesta, se encuentra en Boyd and Barrat [1991], donde en un párrafo del capítulo 2 se expresa lo siguiente:

*"Un nuevo método para el control de plantas no lineales llamado linealización por retroalimentación ha sido desarrollado. Si la linealización por retroalimentación resulta exitosa, ella reduce el problema de diseño del controlador para una planta no lineal al de una planta lineal e invariante en el tiempo y de parámetros concentrados"*

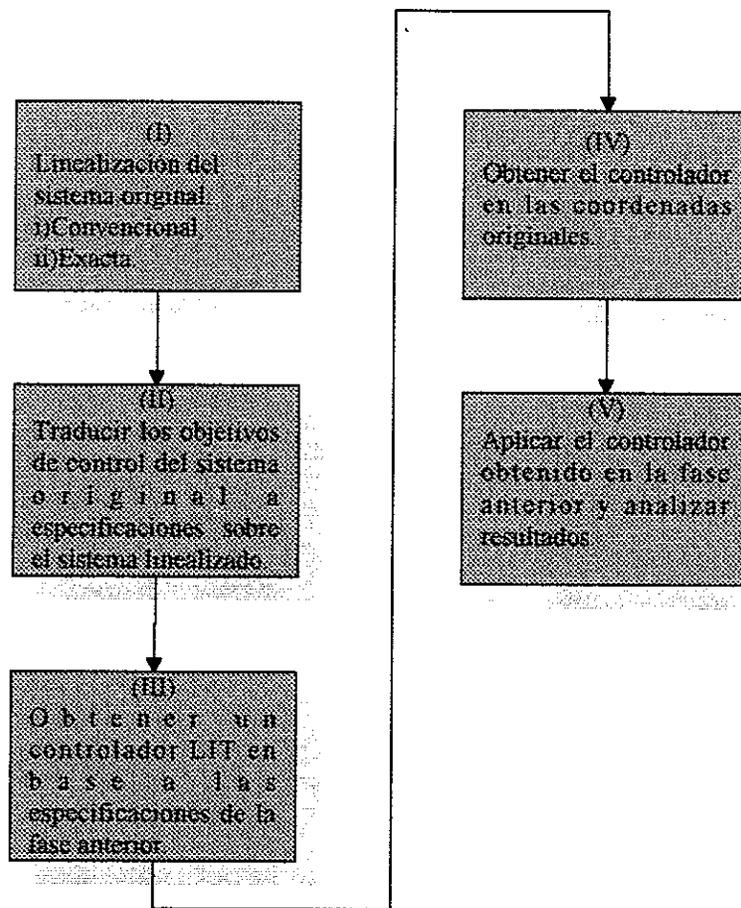
Esta afirmación es falsa, ya que si bien la linealización por retroalimentación transforma la planta no lineal original a una lineal en otras coordenadas, el problema de diseño del controlador para la planta no lineal no se transforma en el problema de diseño del controlador para la planta lineal resultante. Esto es debido principalmente al cambio de coordenadas y a la ley de control linealizante.

La metodología aquí propuesta toma en cuenta estos problemas recién mencionados, y otros que se presentan al querer combinar estas dos metodologías.

Para una presentación clara y breve del procedimiento propuesto utilizaremos un diagrama de flujo, el cual se muestra en la figura 14. Seguidamente hacemos una breve descripción de los pasos a seguir en dicho diseño y comentamos los respectivos problemas que podrían presentarse en cada uno de ellos.

**Paso 1.** Se cuenta con dos opciones para la linealización:

i) Linealización convencional. Las condiciones para llevarse a cabo fueron expuestas en el capítulo 2. En general podremos aplicar este procedimiento a sistemas autónomos y no autónomos cuyo punto de operación sea un punto de equilibrio. La gran limitante que presenta esta metodología radica en su naturaleza misma. La linealización tiene una validez local en una vecindad tan pequeña como sea necesaria alrededor de algún punto de equilibrio y no puede predecir, por lo tanto, lo que pasará lejos de ese punto de equilibrio. La contra parte de esta limitante es el hecho de que como se trabaja en una vecindad de un punto en el espacio de estados, el sistema linealizado se encuentra por así decirlo, en las mismas coordenadas que el sistema no lineal original. Esto último nos da la facilidad de expresar las mismas restricciones impuestas sobre el sistema no lineal al sistema linealizado.



**Figura 14.** Diagrama de flujo de la metodología propuesta.

ii) Linealización por retroalimentación del estado. Este método es aplicable a sistemas que tienen la estructura especial presentada en el capítulo 3. En el caso en que el sistema sea linealizable en forma completa (sin dinámica interna) y considerando además un modelo sin incertidumbres de ningún tipo, el único problema consistirá en traducir los objetivos relacionados con la ley de control en especificaciones sobre las variables del sistema linealizado.

La situación anterior es un caso bastante idealizado. En la realidad tendremos alguna dinámica interna no observable la cual debe ser estable. Sin embargo, un problema aún más importante lo representa la no cancelación en forma exacta de los términos no lineales mediante la ley de control, debido a la existencia natural de incertidumbres paramétricas o dinámicas no modeladas. En general, para resolver en forma parcial este problema se

recurren a técnicas de control adaptable, técnicas de control robusto o técnicas de control de estructura variable.

Para la metodología aquí propuesta la técnica de control adaptable es la más viable ya que ella actúa sobre la ley linealizante y el sistema resultante para la ley de control  $v$  sigue siendo lineal. La limitante de esta técnica es que reduce el conjunto de plantas a aquéllas que sean lineales en los parámetros que presenten incertidumbres. Por otro lado, con las demás técnicas resulta necesario agregar otro lazo de control y la ley de control original se ve afectada. Esto nos obligaría a hacer un nuevo estudio de cómo imponer restricciones de control en el sistema linealizado. Existen también algunos resultados presentados en Boyd and Barrat [1991] los cuales se consideran especificaciones de robustez en la presencia de perturbaciones del sistema lineal. Estas especificaciones no resultan en funcionales convexas sobre la matriz de transferencia en lazo cerrado, por lo que se debe recurrir a aproximaciones, lo que hace que el diseño sea muy conservativo.

**Paso 2.** Los objetivos de control fijados sobre las variables del sistema no lineal original no serán en general directamente aplicables sobre las variables del sistema linealizado, debido principalmente a la transformación de coordenadas. Este paso será siempre necesario si los objetivos se refieren a la ley de control cuando la linealización se realiza por retroalimentación del estado. Esta situación motiva a realizar estudios de cómo traducir los objetivos de control de un sistema no lineal que es linealizable por retroalimentación, a especificaciones sobre el sistema linealizado.

Uno de los objetivos más importantes en cualquier aplicación práctica es imponer cotas sobre el esfuerzo de control. Para la metodología que proponemos será necesario analizar la ley de control dada por la ecuación (84) en el capítulo 3, y si nuestro interés es imponer cotas sobre  $u$  debemos ver en qué tipo de restricción se convierte al ser ésta traducida sobre  $v$ . Es evidente, de la ecuación (84), que si queremos imponer alguna cota sobre  $u$  deberemos imponer una cota sobre  $v$  pero, en general, esta relación no será directa debido a la presencia de  $b(x)$  y  $A^{-1}(x)$ . Otra restricción de no menos importancia que debe ser estudiada es la minimización de la disipación energética de la ley de control  $u$  y su traducción sobre  $v$ .

Otro punto importante a considerar es que existen algunas restricciones utilizadas en el diseño de controladores lineales que no tienen sentido al ser aplicados a los no lineales: margen de fase, margen de ganancia, ancho de banda, son algunas de ellas. Sin embargo, lo

importante es que lo único que necesitamos para el diseño es que las restricciones impuestas sobre el sistema no lineal puedan ser traducidas como funcionales convexas de la matriz de transferencia en lazo cerrado del sistema linealizado, sin importar, si estas restricciones tienen o no algún sentido físico para el sistema linealizado.

**Paso 3.** Este es un procedimiento independiente del sistema no lineal original y sólo tiene que ver con las especificaciones obtenidas en la fase anterior, el sistema linealizado y las señales de interés. Los detalles de este procedimiento están especificados en el capítulo 4. Los problemas de esta fase están directamente relacionados con la programación con que se cuenta para la resolución del problema de optimización convexa, así como con el equipo de cómputo disponible.

**Paso 4.** Esta fase consiste en conectar el controlador lineal e invariante en el tiempo obtenido en el paso anterior a la ley de control linealizante, dado por la ecuación (116) del capítulo 3, para así obtener la ley de control que será aplicada al sistema no lineal original.

**Paso 5.** Esta fase nos sirve para verificar si los objetivos fijados en el paso 2 son todos satisfechos; es decir, en este punto se comprueba el desempeño que se logra con el controlador completo diseñado.

En la siguiente sección aplicaremos este procedimiento al modelo del motor de inducción.

### V.3 Linealización del modelo del motor por retroalimentación

En el apéndice A se obtuvo un modelo(ec. A.31) para el motor de inducción dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + u_a \mathbf{g}_a + u_b \mathbf{g}_b, \quad (137)$$

donde

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$ ,  $u_a$  y  $u_b$  son las entradas de control,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mu(x_2x_5 - x_3x_4) - T_l / J \\ -\alpha x_2 - x_1x_3 + \alpha Mx_4 \\ x_1x_2 - \alpha x_3 + \alpha Mx_5 \\ \alpha\beta x_2 + \beta x_1x_3 - \gamma x_4 \\ -\beta x_1x_3 + \alpha\beta x_3 - \gamma x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{g}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sigma Ls \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{g}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sigma Ls \end{bmatrix}.$$

La linealización completa de (137) requiere verificar las condiciones impuestas en el teorema 3.1. Esto se traduce en encontrar dos salidas  $h1(\mathbf{x})$  y  $h2(\mathbf{x})$ , tal que (137), junto con las salidas  $h1$  y  $h2$ , tenga un vector de grados relativos cuya suma de elementos sea igual a cinco. Para verificar si existen tales salidas debemos probar que la distribución  $\mathbf{G} = \text{span}\{\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_a, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_b\}$  es involutiva. Marino [1993] explica que  $[\text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_a, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_b]$  no pertenece a  $\mathbf{G}$ , implicando esto que  $\mathbf{G}$  no es involutiva. Por esta razón no podremos realizar una linealización completa sino que será una linealización parcial, buscando llegar al subsistema lineal de mayor dimensión. En el mismo artículo se expone que el subsistema lineal de mayor dimensión que puede obtenerse es de cuarto orden. Con este resultado verificaremos que, si con salidas que tengan un significado físico, se logra obtener un sistema lineal de dimensión cuatro. Es necesario encontrar un compromiso entre las salidas que nos dan el sistema linealizado de dimensión mayor, y aquellas salidas que tienen un significado físico y sean de interés desde el punto de vista de control.

En el caso del motor de inducción es conveniente escoger como salidas el flujo y alguna otra variable de interés como podría ser el par generado o la velocidad. La elección del flujo tiene su fundamento en la teoría del control vectorial [Boldea, 1992] y está relacionada con cuidar que no se produzca la saturación del campo del rotor. Además, controlando el flujo se puede lograr un consumo óptimo de potencia [Kim, 1992]. Para un consumo de potencia óptimo y un desempeño dinámico eficiente es necesario desacoplar la dinámica del flujo del de la velocidad, ya que se ha demostrado [Kim, 1992] que bajo estas condiciones existe una norma de flujo para cada velocidad que nos da el mínimo consumo de potencia. En nuestro caso escogeremos como salidas el flujo y la velocidad. Con estas salidas el vector de grados relativos será  $\mathbf{r} = [2 \ 2]$ , donde la matriz de desacoplamiento es no singular para  $x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ . Las nuevas coordenadas definidas en (81) estarán dadas por

$$y_1 = h1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$y_2 = L_f h1(x) = \mu(x_2x_5 - x_3x_4) - T_l / J$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= h2(\mathbf{x}) = x_2^2 + x_3^2 - fref & (138) \\
y_4 &= L_f h2(\mathbf{x}) = -2\alpha(x_2^2 + x_3^2) + 2\alpha M(x_2 \dot{x}_4 + x_3 \dot{x}_5) \\
y_5 &= h3(\mathbf{x}) = \arctan(x_3/x_2)
\end{aligned}$$

Donde  $h3$  representa el ángulo del flujo con respecto a un eje fijo en el estator [Espinoso, 1993] y es utilizada para completar la transformación de coordenadas.

La transformación (138) es uno a uno en  $\mathbf{V} = \{\mathbf{x} \in R^5 / x_2^2 + x_3^2 \neq 0\}$ , pero es sobreyectiva sólo para  $y_3 > 0$ ,  $-\pi/2 \leq y_5 \leq \pi/2$ . La transformación inversa bajo estas condiciones está dada por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 \\
x_2 &= \sqrt{z3} \cos y_5 \\
x_3 &= \sqrt{z3} \sin y_5 & (139)
\end{aligned}$$

$$x_4 = \left( \cos y_5 \left( \frac{y_4 + 2\alpha z3}{2\alpha M} \right) - \frac{1}{\mu} \sin y_5 (y_2 + T_l / J) \right) / \sqrt{z3}$$

$$x_5 = \left( \sin y_5 \left( \frac{y_4 + 2\alpha z3}{2\alpha M} \right) + \frac{1}{\mu} \cos y_5 (y_2 + T_l / J) \right) / \sqrt{z3},$$

donde  $z3 = y_3 + fref$ .

De la ecuación (83) vemos que el sistema transformado estará dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= L_f^2 h1(x) + L_{g_a} L_f h1 u_a + L_{g_b} L_f h1 u_b \\
\dot{y}_3 &= y_4 & (140) \\
\dot{y}_4 &= L_f^2 h2(x) + L_{g_a} L_f h2 u_a + L_{g_b} L_f h2 u_b \\
\dot{y}_5 &= L_f h3(x)
\end{aligned}$$

Podemos reescribir (140) como:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^2 h1 \\ L_f^2 h2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}, \quad (141)$$

$$\dot{y}_5 = np y_1 + Rr (J y_2 + T_l) / (y_3 + fref) np, \quad (142)$$

donde

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_a} L_f h1 & L_{g_b} L_f h1 \\ L_{g_a} L_f h2 & L_{g_b} L_f h2 \end{bmatrix} \quad (143)$$

$$\det(\mathbf{D}) = -2\alpha M \mu (x_2^2 + x_3^2) / (\sigma L s)^2 \quad (144)$$

de donde podemos ver que  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  es no singular en  $V$ . De (84) podemos ver que la ley de control linealizante para (140) viene dada por:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} -L_f^2 h1 + va \\ -L_f^2 h3 + vb \end{bmatrix} \quad (145)$$

donde  $va$  y  $vb$  son las nuevas entradas de control. Aplicando la entrada definida por (145) tendremos a (140) como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= va \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= vb \\ \dot{y}_5 &= npy_1 + Rr(Jy_2 + T_l) / (y_3 + fref)np \end{aligned} \quad (146)$$

Para este caso la dinámica cero está dada por

$$\dot{y}_5 = RrT_l / (fref \cdot np), \quad (147)$$

la cual es la dinámica de un simple integrador. Puesto que  $y_5$  es el ángulo del vector de flujo en el entrehierro y está confinado a evolucionar en un espacio acotado, podemos decir que la dinámica cero es estable. Con este análisis cualitativo de la dinámica cero podemos inferir la estabilidad de la dinámica no observable.

El sistema resultante en (146) está compuesto por dos sistemas lineales desacoplados de orden dos cada uno y un sistema no lineal de primer orden.

## V.4 Diseño del controlador lineal e invariante en el tiempo

Se procederá a la construcción de dos controladores: uno por retroalimentación estática o ubicación de polos y seguidamente el controlador óptimo denominado **controlador convexo**.

### V.4.1 Diseño del controlador por ubicación de polos

La razón por la cual diseñamos el controlador por ubicación de polos es que este es muy utilizado para ser aplicado a sistemas lineales provenientes de la linealización por retroalimentación y nos interesa ver el desempeño que es posible obtener con el.

Habiendo visto en la sección V.3 que la dinámica interna es estable, lo que nos queda ahora es diseñar un controlador para el sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= va, \end{aligned} \tag{148.a}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= y_4, \\ \dot{y}_4 &= vb. \end{aligned} \tag{148.b}$$

Vemos que (148) está compuesto en realidad por dos subsistemas desacoplados, cada uno de segundo orden. Sea  $va = -k_1 y_1 - k_2 y_2 + refl$ . Encontramos entonces la ganancia de retroalimentación estática para el primer subsistema de (148), reescrito de la siguiente forma  $\ddot{y}_1 + k_2 \dot{y}_1 + k_1 (y_1 - refl) = 0$ ,

(149)

donde  $k_1$  y  $k_2$  son componentes del vector de ganancia estática y  $refl$  es la señal de referencia que queremos que  $y_1$  siga. El sistema dado por (149) se muestra en la figura 15.

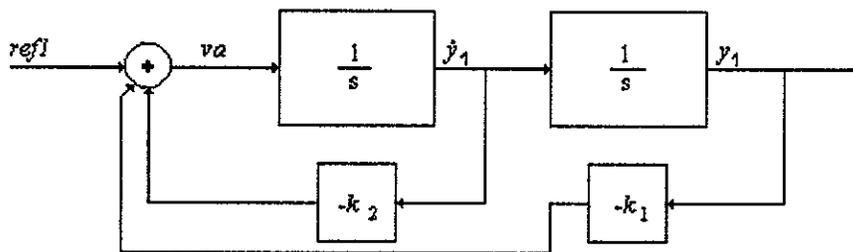


Figura 15. Sistema linealizado resultante con retroalimentación estática.

Eligiendo  $k_1$  y  $k_2$  de tal manera que los polos estén todos ubicados en el lado izquierdo del plano complejo y haciendo lo mismo para el segundo subsistema, se puede asegurar que para una entrada acotada en  $ref1$  se obtenga una salida acotada en  $y_1$ . Es decir, se puede lograr estabilidad del tipo entrada-salida. Para ubicar los polos de (148.a) en los puntos  $p_1 = -10$  y  $p_2 = -5$ , tenemos que los valores para  $k_1$  y  $k_2$  serán 50 y 15, respectivamente. Estos valores de  $p_1$  y  $p_2$  dan una respuesta transitoria que se acerca a la especificada. Contra este sencillo controlador conectado a la planta original compararemos el controlador óptimo que se diseña a continuación.

## V.4.2 Diseño del controlador convexo

Para el diseño del controlador convexo seguiremos el procedimiento establecido en el capítulo anterior. Nótese que ahora se está tratando con un problema que se considera independiente del sistema original no lineal.

Como vimos en la sección IV.3 del capítulo 4, podemos hacer uso del teorema 4.4 construir un controlador nominal con la estructura propuesta por Doyle y mostrada en la figura 9 del capítulo 4. Para ello empezamos estableciendo cuáles son las señales sobre las cuales tenemos interés, para así definir lo que denotaremos como "planta".

### V.4.2.1 Definición de la planta

De acuerdo con lo visto en la primera parte del capítulo 4, llamaremos "planta" al sistema que incluye todas las señales sobre las cuales estemos interesados. En la figura 16 mostramos la planta de acuerdo con nuestro interés de control. En esta figura,  $ref1$  indica

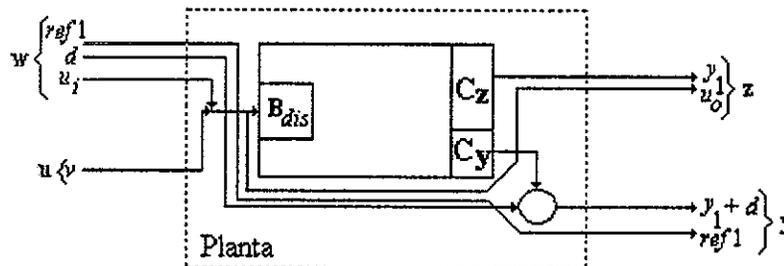


Figura 16. Diagrama esquemático de la planta.

la señal de referencia, valor al cual queremos que siga  $y_1$ ;  $d$  es el ruido del sensor, el ruido introducido en la medición de la velocidad  $y_1$ ;  $u_i$ , junto con  $u_0$ , son señales introducidas para el caso de querer imponer restricciones referentes al círculo de radio  $M$  como se explica en la sección IV.5.6.1 del capítulo 4;  $u$  es la señal generada por el controlador. En este caso,  $y_1+d$  y  $ref1$  son las señales que están disponibles para el controlador.

#### V.4.2.2 Diseño del controlador nominal basado en un observador

Debido a que el compilador disponible fué diseñado para trabajar con plantas discretas, es necesario realizar la discretización de la planta dada por (148.a). Este compilador disponible tiene muchas limitantes, como la del aumento excesivo del tiempo de optimización al aumentar el tamaño de las matrices de respuesta al impulso. Esto último limita la frecuencia de muestreo, pudiendo ocasionar problemas cuando se requiera razones de muestreos elevadas. El inconveniente más fuerte al utilizar este compilador está en que es necesario realizar la discretización teniendo en cuenta que la teoría de linealización exacta para sistemas muestreados aún no es muy clara.

Para la elección del periodo de muestreo tomaremos en cuenta la dinámica del subsistema más rápido y que en el caso particular del motor lo constituye la dinámica del flujo. La elección del periodo de muestreo se realiza en forma empírica.

El sistema (148.a) discretizado estará dado por

$$\mathbf{A}_{dis} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{dis} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{dis} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D}_{dis} = \mathbf{0}. \quad (150)$$

Se elige una frecuencia de muestreo igual a 50hz, (148.a) queda como

$$\mathbf{A}_{dis} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{dis} = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.02 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{dis} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D}_{dis} = \mathbf{0}, \quad (151)$$

donde  $\mathbf{A}_{dis}$ ,  $\mathbf{B}_{dis}$ ,  $\mathbf{C}_{dis}$ ,  $\mathbf{D}_{dis}$ , representan la realización del sistema discretizado.

Es fácil demostrar que la pareja  $(\mathbf{A}_{dis}, \mathbf{C}_{dis})$  es observable y que  $(\mathbf{A}_{dis}, \mathbf{B}_{dis})$  es controlable. Por lo tanto podemos construir un observador de dónde obtener la señal de control. Los valores de  $k_1$  y  $k_2$  se escogen para ubicar los polos en  $p = 0.3172 \pm 0.6312j$  y

están dados por [Kailath, 1980]  $k_1 = 2161.6$  y  $k_2 = 46.66$ . Estos polos fueron elegidos de modo que la respuesta al escalón presente una pequeña oscilación y pueda ser apreciada en forma clara el efecto de agregar el bloque  $Q$ . En la figura 17 vemos el observador y la ganancia  $k$  que estabiliza el sistema.

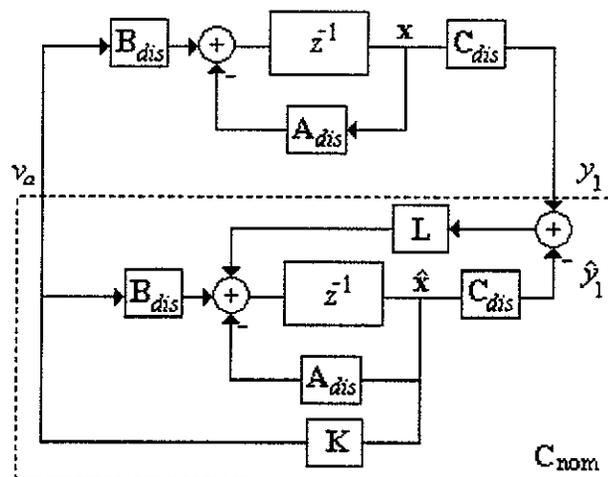


Figura 17. Diagrama esquemático del observador.

Inyectaremos ahora una señal de referencia al controlador nominal (como se indica en la figura 18) y calcularemos  $\mathbf{Br}$  de tal modo que en estado estacionario la ganancia desde esta referencia a la salida  $y_1$  sea unitaria. Es preciso para ello obtener primeramente un valor adecuado de la ganancia  $L$  del observador, para ello haremos que los autovalores de  $A_d - LC_d$  valgan 0.001 y 0.0001 respectivamente. Con estos autovalores así elegidos pretendemos que el error de observación sea cero tan pronto como sea posible. La ganancia del observador vendrá dada por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 \\ 49.945 \end{bmatrix}. \quad (152)$$

Con este valor de la ganancia podemos obtener ahora la ganancia de la referencia que valdrá

$$\mathbf{Br} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15.817 \end{bmatrix}. \quad (153)$$



de  $v$  a  $z$  y  $T_3$  de  $w$  a  $e$ . Estas realizaciones están dadas por las ecuaciones (105), (106) y (107)(capítulo 4) respectivamente, de donde se tiene que

$$T_{1A} = T_{2A} = T_{3A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & -0.432 & -0.0093 \\ 0 & 1 & -43.23 & -0.933 \\ 1.999 & 0 & -1.431 & 0.0107 \\ 49.945 & 0 & -93.18 & 0.067 \end{bmatrix}, T_{1B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1.999 & 0 \\ -15.82 & 49.945 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{1C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2161.6 & -46.7 \end{bmatrix}, \quad T_{1D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{2B} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.02 \\ 0.0002 \\ 0.02 \end{bmatrix},$$

$$T_{2C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2161.6 & -46.7 \end{bmatrix}, \quad T_{2D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_{3B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1.999 & 0 \\ -15.82 & 49.945 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_{3C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_{3D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A continuación haremos un listado de los objetivos y restricciones en forma cuantificada que se impondrán para el diseño del controlador convexo y que fueron obtenidos de las especificaciones fijadas al inicio.

#### V.4.2.3 Objetivos y restricciones

En nuestro caso tomaremos como objetivo la minimización de la varianza de la señal de salida de interés(en nuestro caso la velocidad), debido a ruido que se suma a la señal sensada(velocidad medida). Este objetivo lo podemos describir como

$$\text{minimizar } \|h_{12}\|_2^2, \tag{154}$$

donde  $h_{12}$  es la respuesta al impulso de la función de transferencia de la entrada de ruido a la salida a regular  $y_1$ .

Veremos el conjunto de restricciones a las cuales está sujeto este objetivo.

**a). Restricciones temporales**

Exigiremos que la respuesta de la salida de  $y_1$  a un escalón aplicado en la entrada  $refl$  cumpla con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} -0.2 \leq y_1(k) \leq 1.2 & \quad \text{para } k \leq 24 \\ 0.8 \leq y_1(k) \leq 1.2 & \quad \text{para } 25 \leq k \leq 34 \\ 0.95 \leq y_1(k) \leq 1.05 & \quad \text{para } 35 \leq k \leq 75 \end{aligned} \quad (155)$$

La primera restricción nos da una medida del sobrepaso y del disparo inverso. La segunda nos impone un tiempo de subida máximo, así como el tiempo de asentamiento. La tercera restringe la respuesta a valores cercanos a la unidad. El valor correcto de cada restricción está en función del periodo de muestreo escogido.

**b). Restricciones en frecuencia**

Sabemos [Boyd *et al.*, 1988] que el seguimiento asintótico lo podemos poner como una restricción en el dominio de la frecuencia de la siguiente manera

$$0.98 \leq H_{11}(z)|_{z=e^{j\omega}} \leq 1.02, \quad (156)$$

donde  $H_{11}$  es la función de transferencia de la referencia  $refl$  a la salida a regular que en nuestro caso es  $y_1$  (la velocidad). Esta restricción exige un error en estado estacionario máximo de 2%.

**c). Cota sobre el esfuerzo de control**

$$|s_{21}(t)| \leq 181. \quad (157)$$

Esta restricción nos está indicando que para una entrada escalón unitario en la referencia, la señal de control  $va$  no sobrepase a 181 veces al escalón de entrada. Que la señal de control no sobrepase 181 veces el valor del escalón de entrada no implica que  $u_a$  y  $u_b$  estarán acotados de la misma manera. Lo único que se puede asegurar es que bajo condiciones nominales, *i. e.*, sin incertidumbres ni perturbaciones, la señal de control estará acotada de la siguiente manera

$$\|(u_a, u_b)\| \leq \delta(\delta_1 + \delta_2), \quad (158)$$

donde  $\delta = \max_{\mathbf{x}} \|D^{-1}(\mathbf{x})\|$ ,  $\delta_1 = \max_{\mathbf{x}} (\|L_f^2 h_1\| + \|L_f^2 h_2\|)$ ,  $\delta_2 = \max |v\alpha|$ .

El valor de 181 se obtuvo al fijar  $|s_{21}(t)|$  como objetivo a minimizar sujeto a (155).

Todas estas restricciones junto con el objetivo fueron formulados en un programa fuente (programa del apéndice B). Este programa fuente es compilado y las restricciones y el objetivo se traducen en un programa de optimización convexa, el cual será resuelto con un algoritmo especial para ello e incluido en el mismo compilador. Para más detalles sobre el compilador utilizado se puede ver Boyd *et al.*, [1990b].

Si existe un conjunto de parámetros que cumpla con las restricciones impuestas el algoritmo encontrará aquél que minimice la función objetivo. Si no existe ningún parámetro que cumpla con las restricciones el compilador nos dará un mensaje diciendo que el conjunto de parámetros que satisfacen las restricciones es vacío y que debemos relajar algunas o todas ellas. Para averiguar qué restricciones son necesarias relajar es necesario revisar un archivo de salida generado por el compilador y en el cual se indican cuáles restricciones son violadas y los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada una de ellas.

Veremos ahora cómo utilizar el parámetro que nos da como salida el compilador.

#### V.4.2.4 Obtención del controlador convexo

La arquitectura impuesta para  $Q$  es la de un filtro de respuesta finita al impulso (FRFI), el cual para este diseño específico se muestra en la figura 21.

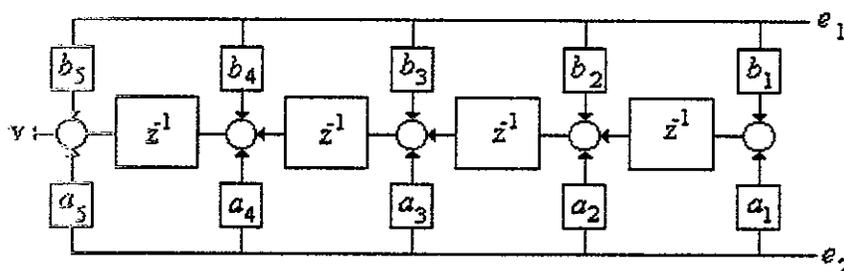


Figura 21. Arquitectura para el bloque  $Q$

La realización para el esquema de la figura 21 está dado por

$$\mathbf{A}_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} -22.952 & 19.335 \\ 9.482 & 11.781 \\ -5.808 & 0.308 \\ -3.939 & -0.062 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_q = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (159)$$

$$\mathbf{D}_q = [24.8713 \ -36.601].$$

Los elementos  $\mathbf{B}_q$  y  $\mathbf{D}_q$  vienen dados en la matriz de salida del compilador. La realización del controlador total [Boyd *et al.*, 1990b] que se muestra en la figura 22 vendrá dada por

$$\mathbf{A}_{CTOT} = \begin{bmatrix} -0.699 & 0.107 & 0.02 & 0 & 0 & 0 \\ -1.997 & 0.067 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ -19.335 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -11.781 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.308 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.062 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{CTOT} = \begin{bmatrix} 0.497 & 1.267 \\ 3.393 & -2.326 \\ -22.952 & 19.335 \\ 9.482 & 11.781 \\ -5.808 & 0.308 \\ -3.939 & -0.062 \end{bmatrix}, \quad (160)$$

$$\mathbf{C}_{CTOT} = [14.986 \ -4.666 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \mathbf{D}_{CTOT} = [24.871 \ -36.601].$$

Una vez obtenido el controlador completo nos queda analizar en simulación si este controlador cumple con los objetivos fijados al ser aplicado al sistema no lineal original.

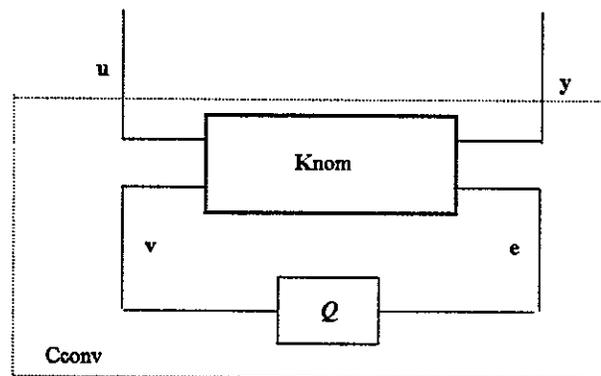


Figura 22. Controlador convexo.

A continuación presentamos los resultados obtenidos en simulación.

## V.5 SIMULACIÓN

Las pruebas de simulación serán realizadas con tres controladores; el **controlador por ubicación de polos** en el esquema de la figura 23, el controlador basado en observador que denominaremos **controlador nominal** y se muestra en la figura 24 y finalmente el controlador diseñado con la técnica aquí propuesta al cual denominaremos **controlador convexo** y el cual es mostrado en la figura 25.

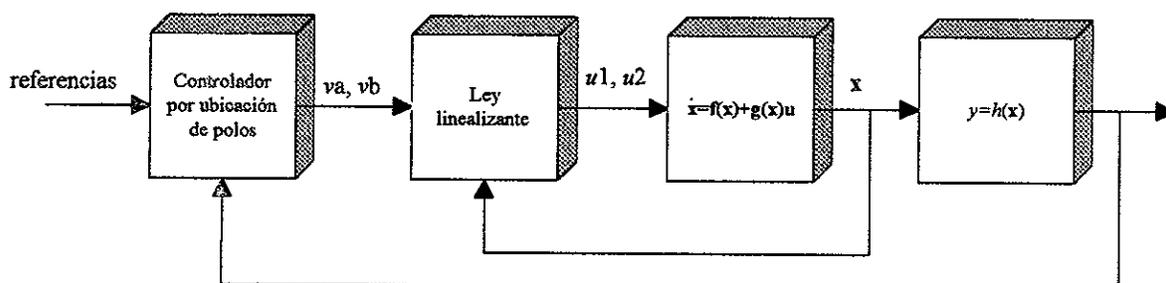


Figura 23. Controlador por ubicación de polos.

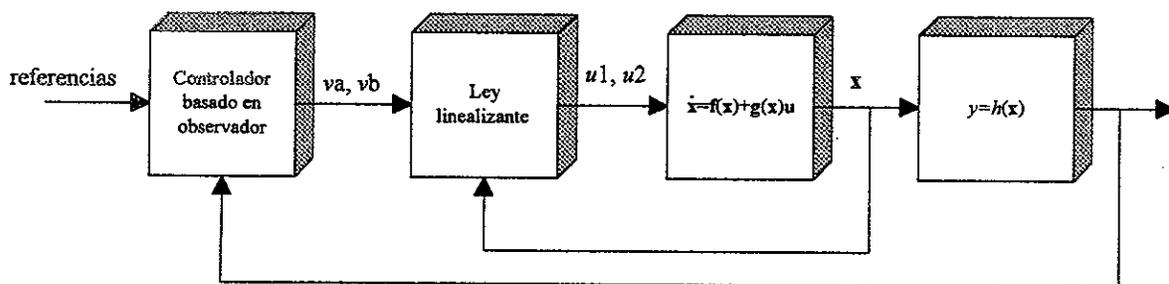


Figura 24. Controlador nominal.

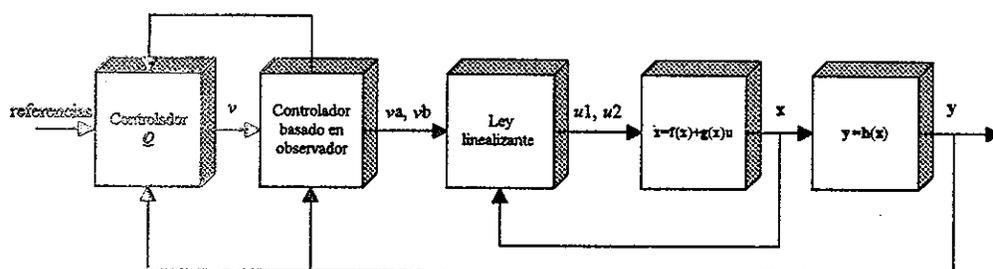


Figura 25. Controlador convexo.

Las simulaciones a realizar con estos controladores se basan principalmente en verificar si cumplen con las especificaciones impuestas. Todas las simulaciones serán realizadas suponiendo que los parámetros son bien conocidos y se tiene acceso al estado. A continuación se explica en qué consisten cada una de ellas.

**Primer simulación.** Aplicamos un escalón en la entrada de referencia de velocidad  $ref1$  y vemos si la velocidad  $y_1$  cumple con la restricción impuesta en (155). El escalón se aplica una vez que la velocidad alcanza su valor nominal en estado estacionario. Esto se realiza manteniendo la referencia del flujo  $ref2$  a un valor constante de 5 webers y con un par nominal de 50 Nw/m, suponiendo además que la velocidad se mide libre de ruido. El escalón va de -300 rad/s a +300 rad/s. Un experimento similar al anterior se realiza para la referencia del flujo  $ref2$ , siendo el escalón de 2 a 5 webers. Ahora verificamos el comportamiento de la norma del flujo  $y_2$ .

**Segunda simulación.** Esta consiste en considerar que a la velocidad medida se le suma una señal aleatoria que tiene un promedio estadístico cero y una varianza unitaria, con esto se observa qué tanto se deteriora el transitorio de la velocidad, así como el estado estacionario del mismo.

**Tercer simulación.** Con la misma entrada dada en la primer simulación para velocidad, se observa el esfuerzo de control del sistema linealizado para ver si se cumple la restricción impuesta sobre el mismo en (159).

**Cuarta simulación.** Aquí se analiza el desempeño que se logra con los controladores cuando se aplica una perturbación en el par del 40% de su valor nominal.

A continuación se presenta el listado de gráficas provenientes de las pruebas realizadas en simulación.

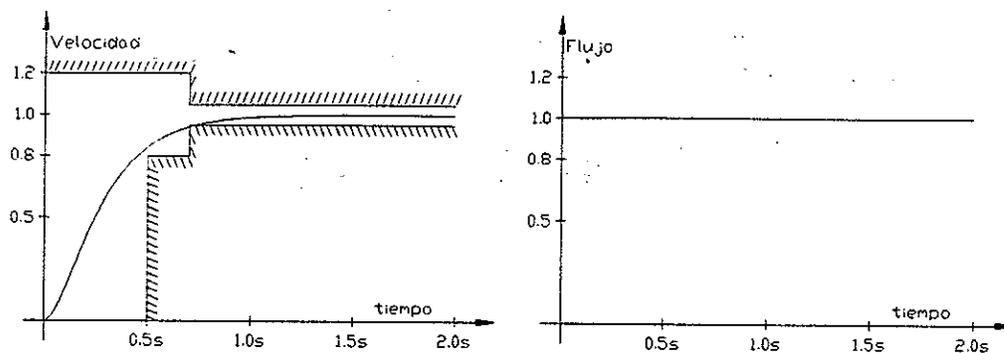


Figura 26. Primer simulación. Controlador por ubicación de polos.

En la figura 26 vemos el desempeño obtenido con el controlador con retroalimentación estática o por ubicación de polos. Está claro en esta gráfica que este controlador no cumple con las restricción del tiempo de establecimiento impuesto, por otro lado vemos que el efecto del escalón de la velocidad sobre el flujo es mínimo.

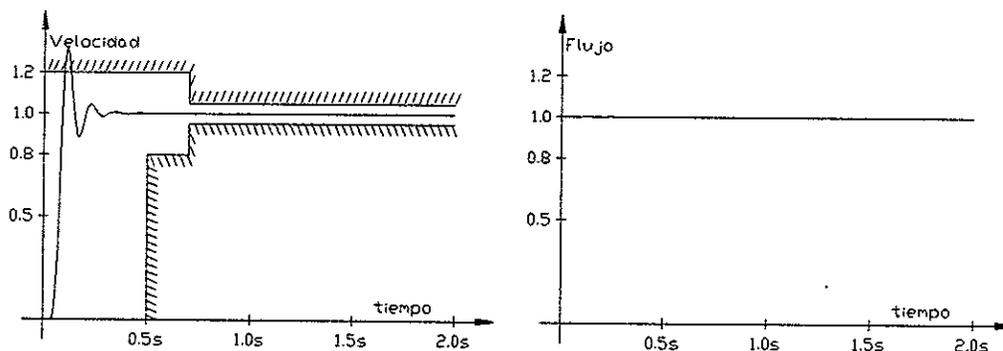


Figura 27. Primer simulación. Controlador nominal.

En la figura 27 vemos la respuesta que se obtiene con el controlador nominal. El tiempo de subida si se satisface, pero no el sobrepaso. En la figura 28 vemos que el controlador convexo cumple con todas la restricciones temporales impuestas.

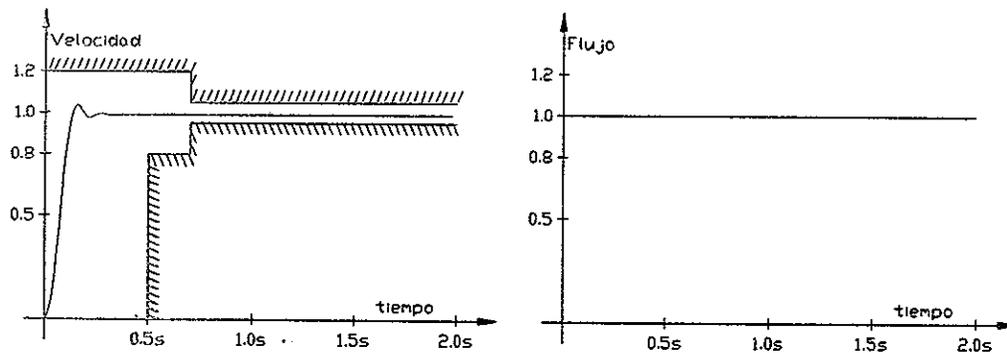
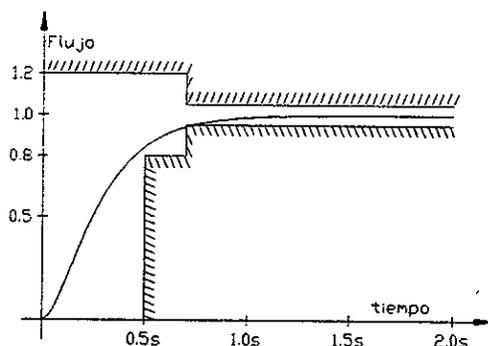
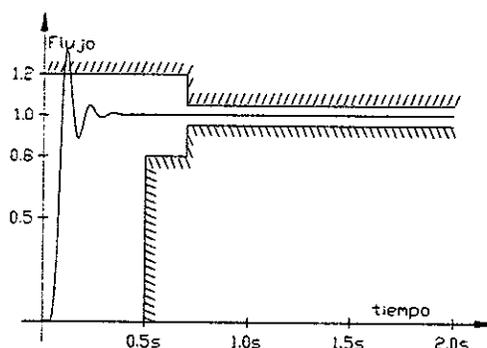


Figura 28. Primer simulación. Controlador convexo.

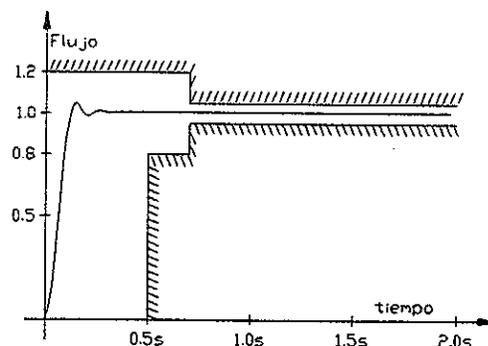
En las figuras 29, 30 y 31 se repite el experimento anterior, sólo que ahora el escalón es aplicado al flujo para un valor fijo en la velocidad. De vuelta vemos que el único controlador que hace satisfacer las restricciones temporales es el convexo.



**Figura 29.** Primer simulación aplicado al flujo. Controlador por ubicación de polos.



**Figura 30.** Primer simulación aplicado al flujo. Controlador nominal.



**Figura 31.** Primer simulación aplicado al flujo. Controlador convexo.

En las figuras 32, 33 y 34 vemos el efecto que produce la señal aleatoria sumada a la velocidad medida. Se puede apreciar que el efecto para el controlador nominal es el más notable, le sigue el controlador convexo y aparentemente el menos afectado es el controlador por ubicación de polos. No podemos hacer una comparación directa entre los

tres desempeños logrados ya que esta no es la única restricción impuesta sino que además se debe cumplir con las anteriores.

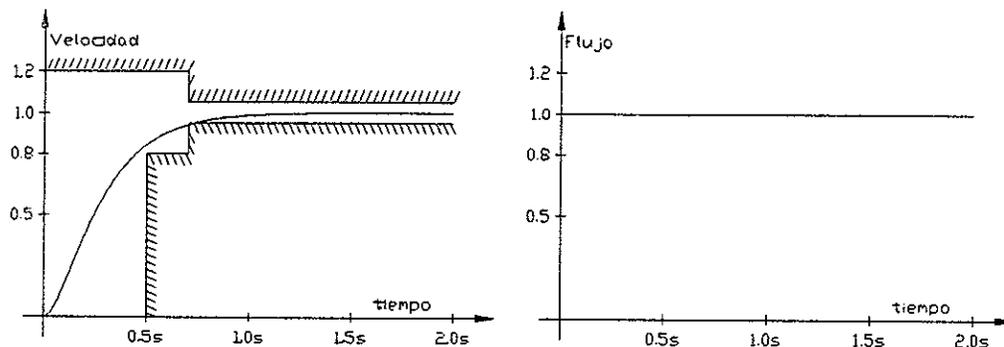


Figura 32. Segunda simulación. Controlador por ubicación de polos.

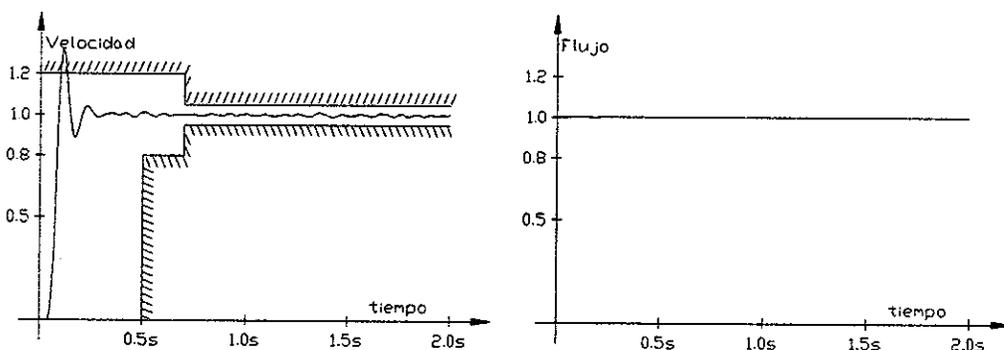


Figura 33. Segunda simulación. Controlador nominal.

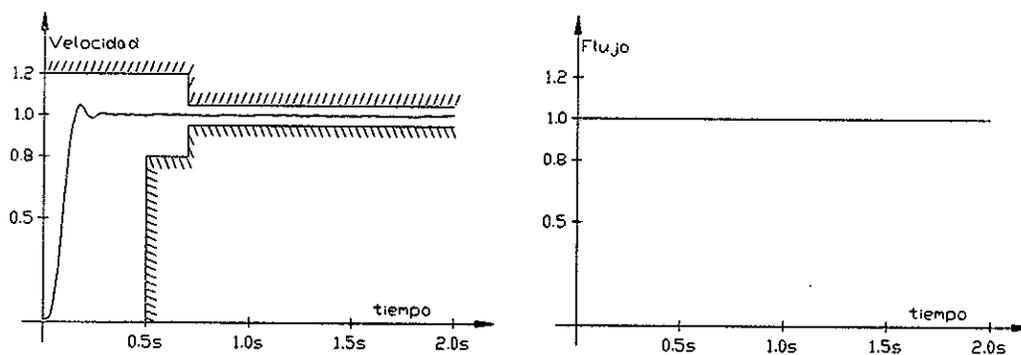


Figura 34. Segunda simulación. Controlador convexo.

En las figuras 35 a la 40 vemos el esfuerzo de control de la ley lineal  $v$ , así como el de la ley linealizante  $u$ . De nuevo el único controlador que cumple con las restricciones es el convexo.

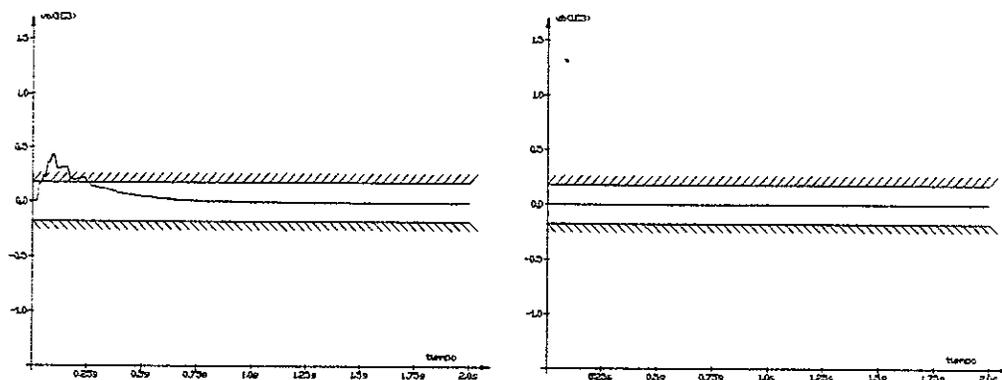


Figura 35. Tercer simulación. Controlador por ubicación de polos. Ley lineal.

Lo importante es ver el efecto de  $v$  sobre  $u$ , ya que es esta última la señal de control aplicada a la planta. Resulta necesario, por lo tanto, hacer un estudio más profundo de la forma en que estas dos señales están relacionadas, especialmente en lo que se refiere al consumo de energía.

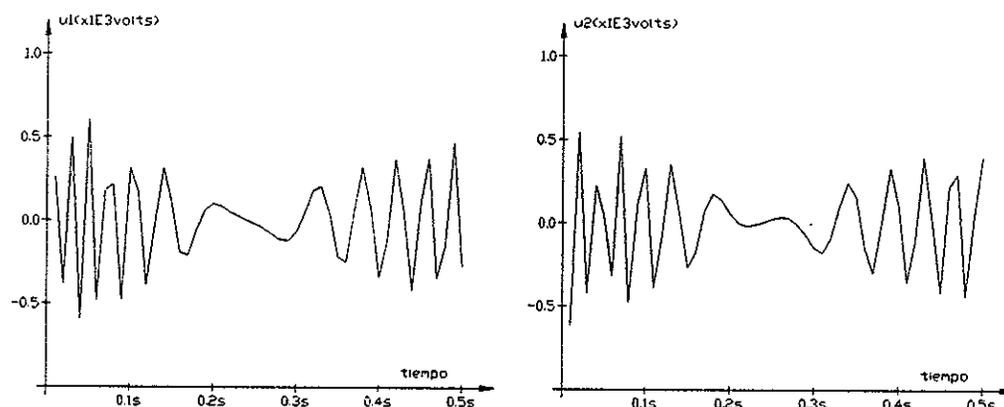


Figura 36. Tercer simulación. Controlador por ubicación de polos. Ley no lineal.

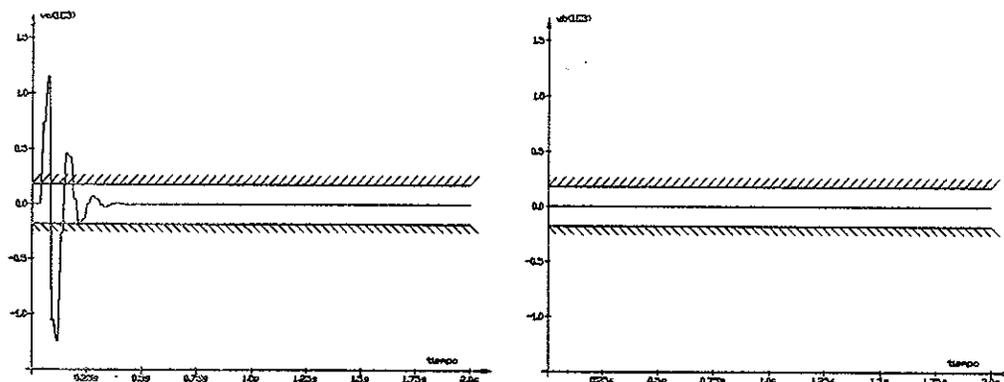


Figura 37. Tercer simulación. Controlador nominal. Ley lineal.

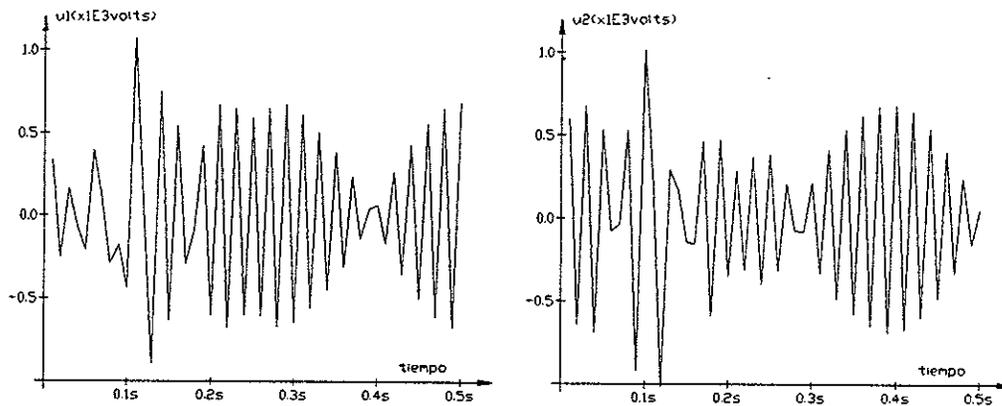


Figura 38. Tercer simulación. Controlador nominal. Ley no lineal.

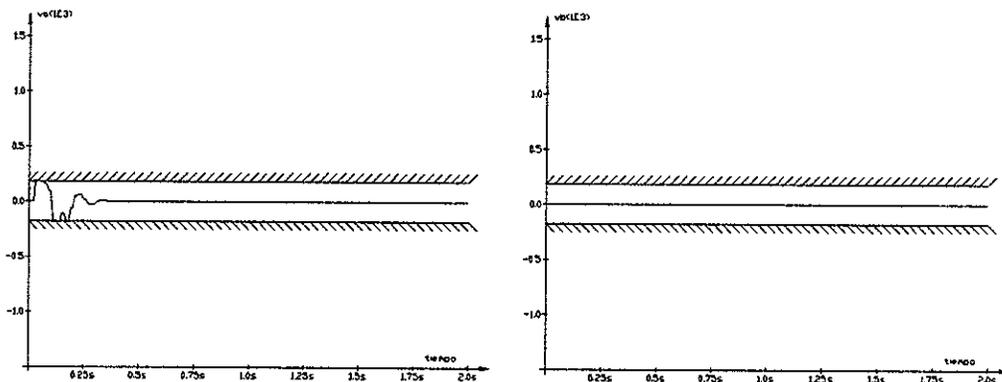


Figura 39. Tercer simulación. Controlador convexo. Ley lineal.

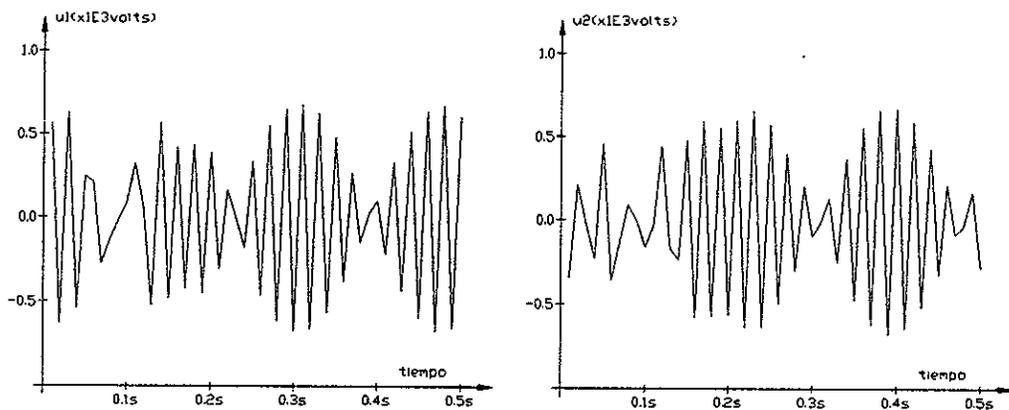


Figura 40. Tercer simulación. Controlador convexo. Ley no lineal.

En las figuras 41 a 43 estamos viendo el desempeño del sistema ante una situación que no fue contemplada en el diseño. Sin embargo, como se puede apreciar en los resultados de simulación, el controlador convexo es el que se ve menos afectado.

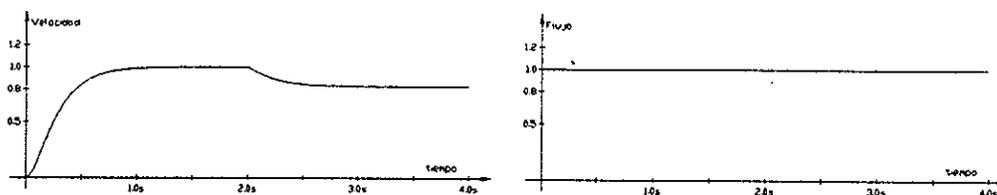


Figura 41. Cuarta simulación. Controlador por ubicación de polos.

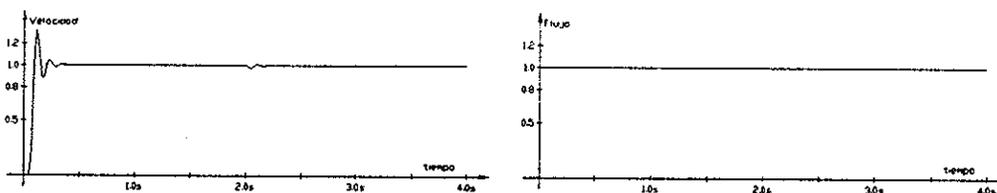


Figura 42. Cuarta simulación. Controlador nominal.

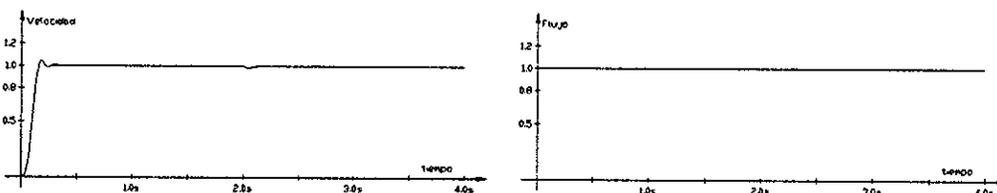


Figura 43. Cuarta simulación. Controlador convexo.

De todas las gráficas obtenidas podemos apreciar que el desempeño logrado con el controlador convexo es el más próximo al desempeño deseado.

Lo más importante de estas simulaciones es que se muestra que es posible diseñar un controlador en función de un desempeño deseado, más que comparar distintos desempeños logrados con distintos controladores y decir que el desempeño de uno u otro es mejor.

Es conveniente aclarar que las simulaciones relacionadas con incertidumbres paramétricas no fueron incluidas, ya que para todos los controladores el sistema se inestabiliza, aún para pequeñas variaciones en los parámetros.

Un análisis de los resultados de estas simulaciones se presentan en el capítulo siguiente de conclusiones.

## VI. Conclusiones y recomendaciones

Se propuso una nueva metodología que permite diseñar controladores en función de especificaciones del desempeño deseado para un conjunto particular de sistemas no lineales. Esta tiene como eje principal a otras dos de aparición reciente. La técnica de linealización por retroalimentación y la de diseño de controladores lineales e invariantes para plantas también lineales e invariantes, en función de la especificación del desempeño deseado. La metodología aquí propuesta puede ser considerada como una extensión de la última para el conjunto de aquellos sistemas no lineales que pueden ser transformados a uno lineal e invariante mediante las técnicas de linealización convencional o por retroalimentación y cambio de coordenadas.

Con esta técnica es posible obtener resultados muy interesantes para la clase especial de sistemas no lineales arriba mencionados. Estos resultados son ya conocidos para los sistemas lineales y se obtienen mediante la metodología propuesta en Boyd and Barrat [1991] y que básicamente son el poder determinar los límites del desempeño así como el compromiso existente entre las especificaciones impuestas para el diseño.

Debido a la posibilidad de encontrar los límites del desempeño, es factible utilizar este método para verificar qué tan bueno es el desempeño de los controladores diseñados, *e. g.*, si encontramos que el menor sobrepaso que se puede obtener con un sistema en particular bajo ciertas condiciones es del 30% y vemos que bajo las mismas condiciones un PI logra un sobrepaso de 35%, lo que se puede mejorar no es mucho y podemos considerar al PI como bueno, etcétera. Es conveniente aclarar que el límite del desempeño será obtenido con algún elemento de la familia de todos los controladores lineales e invariantes en el tiempo conectados al sistema linealizado y en condiciones nominales.

La factibilidad de poder determinar el compromiso existente entre las distintas especificaciones de desempeño impuestas permite imponer restricciones factibles y evitar intentos fallidos en la búsqueda de un desempeño imposible.

Debemos recordar que el conjunto de especificaciones permisibles para esta metodología es el de aquellas que puedan ser expresadas como funcionales convexas o cuasi-convexas de la matriz de transferencia en lazo cerrado.

La facilidad para la automatización del procedimiento aquí presentado así como la disponibilidad cada día mayor de herramientas poderosas de cómputo nos hace suponer que esta metodología tendrá gran aceptación en el ámbito ingenieril del control automático, aún antes de que sea totalmente formalizada.

Los resultados, obtenidos en simulación con suposiciones muy idealizadas sobre la planta, *i. e.*, acceso al estado y conocimiento de los parámetros, han sido satisfactorios, teniendo en cuenta que los objetivos de control fueron en su totalidad satisfechos. Se ha diseñado una respuesta transitoria para el flujo y la velocidad, las cuales fueron satisfechas. Se ha impuesto una cota sobre el esfuerzo de control (lineal), el cual también se pudo satisfacer. Por otro lado se ha visto que el efecto del ruido sobre la velocidad en estado estacionario y la respuesta transitoria, obtenidas con el controlador convexo, es comparable a la de los otros controladores. Este resultado es favorable ya que los demás controladores no cumplieron con las restricciones temporales.

Todos estos resultados nos hablan de la factibilidad en la aplicación de la metodología aquí propuesta para los sistemas no lineales que puedan ser linealizados por una de las dos técnicas vistas en los capítulos 2 y 3.

En base a los resultados obtenidos y a los problemas enfrentados durante el desarrollo de este trabajo se presenta la siguiente lista de recomendaciones que podrían motivar su continuación, o el inicio de otro trabajo más específico.

- Hacer una prueba en simulación para el control del motor de inducción utilizando el esquema de control adaptable propuesto en Marino [1993] para hacer frente a las incertidumbres paramétricas.
- Una vez obtenidos resultados en el punto anterior, hacer una revisión de los trabajos más recientes de esquemas de control adaptable para sistemas linealizables por retroalimentación y ver cómo caracterizar el conjunto de sistemas no lineales para los cuales esta metodología pueda ser utilizada.

- Estudiar los efectos de ruido en la medición del estado al realizar la linealización. Como primer paso se recomienda modelar adecuadamente el ruido presente en los sistemas caracterizados en el punto anterior.

- En lo referente al segundo paso de la metodología aquí propuesta, es necesario hacer un estudio más detallado de las propiedades del mapeo de la ley de control linealizante sobre la ley de control del sistema linealizado, para así ver la posibilidad de imponer restricciones sobre la disipación energética de la ley de control, sobre la cota del mismo o alguna otra restricción de interés.

- Es necesario realizar un estudio en detalle de la estabilidad de los sistemas cuya dinámica cero es estable pero no asintóticamente estable.

- El estudio del problema de rechazo a perturbaciones desvanecientes y no desvanecientes en el esquema de diseño aquí presentado es algo que se debe realizar para que esta metodología sea factible de aplicarse en el mundo real.

- El problema de estabilidad de los sistemas linealizados y muestreados es un tema que también debe de ser resuelto para poder respaldar en forma rigurosa la metodología aquí presentada.

---

## LITERATURA CITADA

Berberian, S. K. Lectures in Functional Analysis and operator Theory. Springer-Verlag. 1974.

**Boldea, J., S. A. Nasar.** VECTOR CONTROL of AC DRIVES. CRC Press. 1992.

Boyd, S., V. Balakrishnan, C. Barrat, N. Khraishi, X. Li, D. Meyer, and S. Norman. A new CAD method and associated architectures for linear controllers. IEEE Trans. Aut. Control, Vol. 33, NO. 3. March 1988.

Boyd, S., C. Barrat, and S. Norman. Linear controller Design: Limits of performance via convex optimization. Proc. IEEE, March 1990a.

Boyd, S., N. Khraishi, C. Barrat, S. Norman, V. Balakrishnan and D. Meyer. QDESv1.5. ISL. EE Department. Stanford University. Nov. 1990b.

Boyd, S. and C. Barrat. Linear controller Design: Limits of performance. Prentice Hall. 1991.

**Colledani, F., H. Bourles, M. P. Vanhersecke.** Robust Controller with local linearizing feedback for frequency/power control of power plants. Proc. of 32nd CDC. San Antonio. 1993.

Doyle, J. and G. Stein. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. IEEE Trans. Aut. Control. Vol. AC-26. February 1981.

Espinosa, G. R. Control no lineal de Motores de inducción. Tesis doctoral. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de Mexico. Diciembre de 1993.

Figueiredo, R. J. P, de., G. Chen. Nonlinear Feedback Control Systems. An Operator Theory Approach. Academic Press. 1993.

Isidori, A. Nonlinear Control. Notes for a course at the Carl Cranz Gesellschaft. August 1987.

---

Isidori, A. *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Springer-Verlag, second edition, 1989.

Kabuli, M. G., R. L. Kosut. *On Feedback Linearizable Plants*. Proc. of ACC. San Francisco. 1993.

Kailath, T. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.

Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. Macmillan. 1992.

Kim, G., I. Ha, M. Ko. *Control of Induction Motors for Both High Dynamic Performance and High Power Efficiency*. IEEE Trans. on Industrial Electronics. Vol. 39, NO. 2. August 1992.

Kolmogórov, A. N. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. MIR. 1978.

Krause, P. C. *Analysis of Electric Machinery*. McGraw-Hill. 1986.

Kristjánsson, E., C. Abdallah, and M. Jamshidi. *Power Systems Stabilization with feedback linearization*. Proc. of 32nd CDC. San Antonio. 1993.

Leonhard, W. *Control of Electrical Drives*. Springer-Verlag. 1985.

Maciejowski, J. M. *Multivariable Feedback Design*. Addison Wesley. 1989.

Marino, R., S. Peresada, and Paolo Valigi. *Adaptive Input-Output Linearizing Control of Induction Motors*. Trans. Aut. Control, February 1993.

Minorsky, N. *Theory of Nonlinear Control Systems*. McGrawhill. 1969.

Nijmeijer, H. and A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag. 1990.

Parker, T. S. and L. O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag. 1989.

---

**Sharma, V.** and Y. Zhao: Dynamic Optimal Linearization of Nonlinear Systems. Proc of ACC. San Francisco, June 1993.

**Slotine, J. J. E.,** W. Li. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall. 1991.

**Slotine, J. J. E.** and Karl Hedrick. Robust input-output linearization. Int. J. Control. Vol. 57, No. 5, 1993.

**Sontag, E. D.** Mathematical Control Theory. Springer-Verlag. 1990.

**Stephan, J.,** Marc Bodson and J. Chiasson. An Adaptive Method for Induction Motor Control. Procc. of ACC. San Francisco 1993.

**Vidyasagar, M.** Nonlinear Systems Analysis. Prentice Hall. 1993.

**Vidyasagar, M.** Control systems synthesis: A Factorization Approach. MIT Press, 1985.

**Youla, D. C.,** H. A. Jabr. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers-Part II: The multivariable case. IEEE Trans. Aut. Control. Vol. AC-21. June 1976.

**Zames.** On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems-Part I: conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and pasitivity. IEEE Trans. Aut. Control. Vol. AC-11. April 1966.

**Zwillinger, D.** Handbook of Differential Equations. Academic Press. 1992.

---

# Apéndice A

## Modelado del motor de inducción

### A.1 Introducción

A medida que la teoría del control va avanzando, la necesidad de obtener modelos matemáticos que describen un sistema físico o algún evento en forma cada vez más precisa es requerida.

En el caso de los motores de inducción, modelos estándares están disponibles en la literatura [Stephan, 1993]. Se considera importante la obtención del modelo por ser éste el sistema al cual aplicaremos la metodología propuesta y también por que así tendremos una idea más clara de dónde provienen los distintos modelos propuestos en la literatura. Krause [1985] da los fundamentos teóricos básicos sobre el funcionamiento de las máquinas electromecánicas en general, y Leonhard [1985] presenta la teoría básica del control de las mismas, así como la tecnología disponible para la realización de dicho control.

Un hecho muy relevante es la utilización de distintos modelos a lo largo de la historia del control de los motores de inducción. Así, para máquinas síncronas, R. H. Park propone una transformación de coordenadas, la cual proyecta las variables asociadas al estator como variables que giran en un marco de referencia fijo en el rotor. Esta transformación propuesta por Park revolucionó el análisis de las máquinas eléctricas, a pesar de que su única propiedad era la de eliminar la dependencia temporal de las inductancias. D. S. Berereton *et al.* y H. C. Stanley, por su parte, obtuvieron una transformación aplicada a motores de inducción que también eliminaba la dependencia temporal de las inductancias proyectando las variables asociadas al rotor a una referencia fija en el estator. El desarrollo de Park, Berereton *et al.* y Stanley fueron tomadas como transformaciones distintas unas de otras y fue hasta 1965 cuando P. C. Krause propone que todas las transformaciones conocidas hasta entonces podrían contenerse en una general, la cual consistía en proyectar todas las variables, ya sean éstas del rotor o del estator, sobre un sistema referencial girando a una velocidad arbitraria.

## A.2 Obtención del modelo no lineal del motor de inducción.

Es importante establecer primero las suposiciones que se manejarán durante la obtención del modelo del motor. Las hipótesis para este desarrollo son las siguientes:

S1. Las bobinas del rotor se hallan en cortocircuito.

S2 El devanado está sinusoidalmente distribuido, i.e., los armónicos espaciales de la fuerza magnetomotriz y los armónicos debidos a la presencia de las ranuras son despreciables [Boldea, 1992].

S3. Las fases son simétricas, el estator y rotor son concéntricos, la permeabilidad de los núcleos es infinita y los materiales magnéticos presentan características lineales.

S4. Las fuerzas de fricción mecánicas son despreciadas.

Bajo las suposiciones anteriores la ecuación que relaciona los voltajes, corrientes y flujos magnéticos viene dada por

$$\mathbf{v}_{123}^s = \mathbf{R}_s \mathbf{i}_{123}^s + p \Psi_{123}^s, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{v}_{123}^s$ ,  $\mathbf{i}_{123}^s$ ,  $\Psi_{123}^s$  representan los vectores de voltajes, corrientes y flujos del estator, respectivamente y  $\mathbf{R}_s$  es la matriz de resistencias del estator. Estas variables están definidas como

$$\mathbf{v}_{123}^s = \begin{bmatrix} v_1^s \\ v_2^s \\ v_3^s \end{bmatrix}, \mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} r_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{s3} \end{bmatrix}, \mathbf{i}_{123}^s = \begin{bmatrix} i_1^s \\ i_2^s \\ i_3^s \end{bmatrix}, \Psi_{123}^s = \begin{bmatrix} \psi_1^s \\ \psi_2^s \\ \psi_3^s \end{bmatrix} \text{ y } p = \frac{d}{dt}. \quad (\text{A.2})$$

El subíndice indica el número de la fase y el superíndice nos indica si la variable se refiere al estator o al rotor. Tomando en cuenta la notación anterior podemos escribir para el rotor la siguiente ecuación

$$\mathbf{v}_{123}^r = \mathbf{R}_r \mathbf{i}_{123}^r + p \Psi_{123}^r. \quad (\text{A.3})$$

La ecuación que relaciona el flujo y la corriente en el motor en virtud de la suposición S3 está dada por

$$\Psi_{123}^{s,r} = \mathbf{L}_{s,r} i_{123}^{s,r} + \mathbf{L}_{s,r}(\gamma) i_{123}^{r,s}, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\mathbf{L}_{s,r} = \begin{bmatrix} l_{ls,r} + l_{ms,r} & -0.5l_{ms,r} & -0.5l_{ms,r} \\ -0.5l_{ms,r} & l_{ls,r} + l_{ms,r} & -0.5l_{ms,r} \\ -0.5l_{ms,r} & -0.5l_{ms,r} & l_{ls,r} + l_{ms,r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_s(\gamma) = \mathbf{L}_r^T(\gamma) = l_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \cos(\gamma-h) & \cos(\gamma+h) \\ \cos(\gamma+h) & \cos(\gamma) & \cos(\gamma-h) \\ \cos(\gamma-h) & \cos(\gamma+h) & \cos(\gamma) \end{bmatrix},$$

donde  $l_{ls}$  es la inductancia de pérdidas,  $l_{ms}$  es la inductancia de magnetización,  $h=2\pi/3$  y  $\gamma$  es el ángulo entre los flujos del rotor y del estator,  $l_{sr}$  representa la inductancia de acoplamiento entre el rotor y el estator y es dependiente de la posición relativa ( $\gamma$ ) entre ambas. Para más detalles ver Krause [1985].

Al obtener la representación en variables de estado a partir de (A.1), (A.2), (A.3) y (A.4) se tendrían siete ecuaciones diferenciales. En la suposición S3 se establece que se está trabajando con un sistema balanceado, en el cual la suma de voltajes y corrientes es nula. Es decir, existen dos grados de libertad y tres ecuaciones, lo cual se puede aprovechar para eliminar una de las variables y trabajar con un sistema bifásico. Esto se puede lograr a través de una transformación de coordenadas. A continuación se presenta un esquema de transformación general de un marco referencial ( $xx$ ) a otro ( $yy$ );

$$\mathbf{f}_{123}^{yy} = {}^{xx}\mathbf{K}^{yy} \mathbf{f}_{123}^{xx}, \quad (\text{A.5})$$

donde  ${}^{xx}\mathbf{K}^{yy}$  es el operador lineal que lleva a cada función  $f_i^{xx} \in \mathbf{f}_{123}^{xx}$  a una  $f_i^{yy} \in \mathbf{f}_{123}^{yy}$ . Para obtener todas las transformaciones conocidas es necesario obtener una general; ésta se logra haciendo una proyección de las variables del rotor y estator sobre un marco referencial que gira a una velocidad arbitraria  $\dot{\theta}$  como se muestra en la figura A.1.

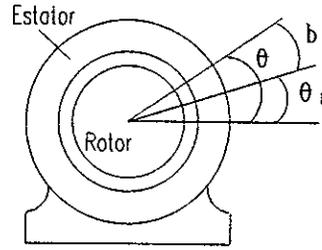


Figura A.1. Marcos de referencia con respecto al estator.

En esta figura  $b = \theta - \theta_r$ , con  $\theta$  el ángulo entre un marco fijo en el estator y el marco arbitrario,  $\theta_r$  el ángulo entre el marco referencial fijo en el rotor y el otro en el estator. Es conveniente aclarar que  $\theta_r$  no es la posición física del rotor con respecto al estator sino más bien el ángulo en grados eléctricos entre las variables del rotor y el estator. La relación con la posición física viene dada por

$$\theta_r = np\theta_{r,m}, \quad (\text{A.6})$$

donde  $\theta_{r,m}$  es la posición angular mecánica y  $np$  es el número de pares de polos. La transformación bajo estas condiciones vendrá dada por

$$\mathbf{f}_{abc}^{s\theta} = \mathbf{K}_s \mathbf{f}_{123}^s, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{f}_{abc}^{r\theta} = \mathbf{K}_r \mathbf{f}_{123}^r, \quad (\text{A.8})$$

donde  $\mathbf{f}_{abc}^{s\theta}$  representa al vector de nuevas variables en el sistema referencial definido por  $\theta$  y debidas a las variables del estator; lo mismo es válido para  $\mathbf{f}_{abc}^{r\theta}$ .  $\mathbf{K}_s$  y  $\mathbf{K}_r$  son operadores lineales sobre el estator y el rotor respectivamente, los cuales están definidos al final de este apéndice. Aplicando (A.7) y (A.8) en (A.1), (A.3) y (A.4) tendremos que

$$\mathbf{v}_{abc}^{s\theta} = \mathbf{K}_s \mathbf{R}_s \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{i}_{abc}^{s\theta} + \mathbf{K}_s p (\mathbf{K}_s^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{abc}^{s\theta}), \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{v}_{abc}^{r\theta} = \mathbf{K}_r \mathbf{R}_r \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{i}_{abc}^{r\theta} + \mathbf{K}_r p (\mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{abc}^{r\theta}), \quad (\text{A.10})$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{abc}^{s\theta} = \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{i}_{abc}^{s\theta} + \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\gamma) \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{i}_{abc}^{r\theta}, \quad (\text{A.11})$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{abc}^{r\theta} = \mathbf{K}_r \mathbf{L}_r \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{i}_{abc}^{r\theta} + \mathbf{K}_r \mathbf{L}_r^T (\gamma) \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{i}_{abc}^{s\theta}, \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\mathbf{K}_s \mathbf{R}_s \mathbf{K}_s^{-1} = \mathbf{R}_s, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{K}_r \mathbf{R}_r \mathbf{K}_r^{-1} = \mathbf{R}_r, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{L}_r^* = \mathbf{K}_r \mathbf{L}_r \mathbf{K}_r^{-1} = \begin{bmatrix} l_{lr} + 1.5l_{mr} & 0 & 0 \\ 0 & l_{lr} + 1.5l_{mr} & 0 \\ 0 & 0 & l_{lr} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{L}_s^* = \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s \mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} l_{ls} + 1.5l_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & l_{ls} + 1.5l_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & l_{ls} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s(\gamma) \mathbf{K}_r^{-1} = \mathbf{K}_r \mathbf{L}_s^T(\gamma) \mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5l_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & 1.5l_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Sustituyendo (A.13), (A.14), (A.15), (A.16) y (A.17) en (A.9), (A.10), (A.11) y (A.12), tendremos que

$$\mathbf{v}_{abc}^{s\theta} = \mathbf{R}_s \mathbf{i}_{abc}^{s\theta} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{abc}^{s\theta} + p \boldsymbol{\Psi}_{abc}^{s\theta}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{v}_{abc}^{r\theta} = \mathbf{R}_r \mathbf{i}_{abc}^{r\theta} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{abc}^{r\theta} + p \boldsymbol{\Psi}_{abc}^{r\theta}, \quad (\text{A.19})$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{abc}^{s\theta} = \mathbf{L}_s^* \mathbf{i}_{abc}^{s\theta} + \begin{bmatrix} 1.5l_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & 1.5l_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{abc}^{r\theta} \quad \text{y} \quad (\text{A.20})$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{abc}^{r\theta} = \mathbf{L}_r^* \mathbf{i}_{abc}^{r\theta} + \begin{bmatrix} 1.5l_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & 1.5l_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{abc}^{s\theta}. \quad (\text{A.21})$$

Teniendo en cuenta que estamos trabajando con un sistema balanceado, las variables  $v_{cs}$ ,  $i_{cs}$ ,  $\Psi_{cs}$ ,  $i_{cr}$  y  $\Psi_{cr}$  son nulas. Con estas consideraciones y detallando las ecuaciones (A.18) a (A.21) tendremos que

$$\begin{aligned} v_{as} &= r_s i_{as} + \dot{\theta} \psi_{bs} + p \psi_{as} \\ v_{bs} &= r_s i_{bs} + \dot{\theta} \psi_{as} + p \psi_{bs} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned}\psi_{as} &= l_s i_{as} + M i_{ar} \\ \psi_{bs} &= l_s i_{bs} + M i_{br}\end{aligned}\quad (A.23)$$

$$\begin{aligned}v_{ar} &= r_r i_{ar} + \dot{\theta} \psi_{br} + p \psi_{ar} \\ v_{br} &= r_s i_{br} - \dot{\theta} \psi_{ar} + p \psi_{br}\end{aligned}\quad (A.24)$$

$$\begin{aligned}\psi_{ar} &= l_r i_{ar} + M i_{as} \\ \psi_{br} &= l_r i_{br} + M i_{bs}\end{aligned}\quad (A.25)$$

Si queremos obtener la transformación **ab**, i. e., el eje de referencia fijo en el estator, tendremos que  $\dot{\theta} = 0$  y las ecuaciones anteriores quedarán como

$$\begin{aligned}v_{as} &= r_s i_{as} + p \psi_{as} \\ v_{bs} &= r_s i_{bs} + p \psi_{bs}\end{aligned}\quad (A.26)$$

$$\begin{aligned}v_{ar} &= r_r i_{ar} + \dot{\theta}_r \psi_{br} + p \psi_{ar} \\ v_{br} &= r_s i_{br} - \dot{\theta}_r \psi_{ar} + p \psi_{br}\end{aligned}\quad (A.27)$$

Las ecuaciones para los flujos siguen siendo las mismas que en (A.23) y (A.25). Utilizando (A.23) y (A.25) eliminaremos  $i_{ar}, i_{br}, \psi_{as}$  y  $\psi_{bs}$  de las ecuaciones (A.26) y (A.27), teniendo como resultado

$$\begin{aligned}r_r \psi_{ar} / l_r - r_r M i_{as} / l_r + \dot{\psi}_{ar} + \dot{\theta}_r \psi_{br} &= 0 \\ r_r \psi_{br} / l_r - r_r M i_{bs} / l_r + \dot{\psi}_{br} - \dot{\theta}_r \psi_{ar} &= 0 \\ r_s i_{as} + M \dot{\psi}_{ar} / l_r + (l_s - M^2 / l_r) \dot{i}_{as} &= v_{as} \\ r_s i_{bs} + M \dot{\psi}_{br} / l_r + (l_s - M^2 / l_r) \dot{i}_{bs} &= v_{bs}.\end{aligned}\quad (A.28)$$

El par eléctrico generado se puede obtener fácilmente haciendo un análisis de la conversión de energía que tiene lugar entre las partes eléctrica y mecánica [Krause, 1986] y que expresado en función de las corrientes del estator y flujos del rotor está dado por Marino [1993]

$$T_e = Mnp(\psi_{ar} i_{bs} - \psi_{br} i_{as}) / l_r. \quad (A.29)$$

Con esto la dinámica del rotor queda descrita por  $J\dot{\omega} = T_e - T_l$ , donde  $T_l$  es el par de carga,  $J$  es el momento de inercia del rotor y  $\dot{\omega} = \ddot{\theta}_m$  es la aceleración angular del rotor. Eligiendo como variables de estado la velocidad, los flujos del rotor y las corrientes del estator apoyados en (A.28) y (A.29) tendremos que

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= (Mnp(\psi_{ar}i_{bs} - \psi_{br}i_{as})/l_r - T_1)/J, \\ \dot{\psi}_{ar} &= -r_r\psi_{ar}/l_r - np\omega\psi_{br} + r_rMi_{as}, \\ \dot{\psi}_{br} &= -r_r\psi_{br}/l_r + np\omega\psi_{ar} + r_rMi_{bs},\end{aligned}\tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}i_{as} &= Mr_r\psi_{ar}/(\sigma l_s l_r^2) + npM\omega\psi_{br}/(\sigma l_s l_r) - \frac{M^2 r_r + l_r^2 r_s}{\sigma l_s l_r^2} i_{as} + v_{as}/(\sigma l_s) \\ i_{bs} &= Mr_r\psi_{br}/(\sigma l_s l_r^2) - npM\omega\psi_{ar}/(\sigma l_s l_r) - \frac{M^2 r_r + l_r^2 r_s}{\sigma l_s l_r^2} i_{bs} + v_{bs}/(\sigma l_s)\end{aligned}$$

donde  $\sigma = 1 - M^2/l_s l_r$ .

Hagamos ahora la siguiente asignación de los parámetros y un cambio de variables de la manera siguiente:

$$\alpha = r_r/l_r, \quad \beta = M/(\sigma l_s l_r), \quad \mu = npM/(Jl_r), \quad \gamma = (M^2 r_r + l_r^2 r_s)/(\sigma l_s l_r^2), \quad u_a = v_a, \quad u_b = v_b \quad \text{y}$$

$$\mathbf{x} = (\omega, \psi_{ar}, \psi_{br}, i_{as}, i_{bs})^T. \quad \text{Con estas nuevas asignaciones tendremos a (A.30) reescrito como}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + u_a \mathbf{g}_a + u_b \mathbf{g}_b,\tag{A.31}$$

$$\text{donde } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mu(x_2 x_5 - x_3 x_4) \\ -\alpha x_2 - np x_1 x_3 + \alpha M x_4 \\ -\alpha x_3 + np x_1 x_2 + \alpha M x_5 \\ \alpha \beta x_2 + np \beta x_1 x_3 - \gamma x_4 \\ \alpha \beta x_3 - np \beta x_1 x_2 - \gamma x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/(\sigma l_s) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/(\sigma l_s) \end{bmatrix}\tag{A.32}$$

Para obtener las demás representaciones lo único que se debe hacer es elegir el marco de referencia adecuado.

A continuación presentamos el valor de los parámetros a ser utilizados en el desarrollo de la tesis, así como las matrices  $\mathbf{K}_s$  y  $\mathbf{K}_r$  aquí utilizadas.

- El modelo del motor utilizado en la simulación es [Marino, 1993] uno de 15 KW, con un par promedio de 50Nm y velocidad promedio de operación de 220rad/seg. Los valores nominales para los parámetros son los siguientes:

$$\begin{aligned}r_s &= 0.18\Omega, \\ r_r &= 0.15\Omega, \\ l_r &= 0.0699\text{H},\end{aligned}$$

$$I_s = 0.0699H,$$

$$M = 0.068H,$$

$$np = 1,$$

$$J = 0.0586 \text{Kgm}^2.$$

- Las matrices que proyectan las variables del rotor y del estator sobre un eje que está girando a una velocidad arbitraria  $\dot{\theta}$  están dados por

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+h) & \cos(\theta-h) \\ \text{sen}\theta & \text{sen}(\theta+h) & \text{sen}(\theta-h) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos b & \cos(b+h) & \cos(b-h) \\ \text{sen} b & \text{sen}(b+h) & \text{sen}(b-h) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

donde el factor  $2/3$  es utilizado para preservar la potencia total al trabajar con un sistema bifásico.

## Apéndice B

### Programa fuente para QDESv1.5

El programa que se presenta a continuación es el fuente para el compilador QDES, el cual lo compilará en un problema de optimización convexa y con un optimizador incluido en el mismo compilador lo resolverá para dar como salida el parámetro de diseño  $Q$ .

Se puede apreciar que este programa fuente está en un lenguaje muy próximo al que se utiliza para dar las especificaciones de diseño en ingeniería de control automático. Más detalles de cómo formular programas para el compilador aquí utilizado se puede encontrar en Boyd *et al.*, [1990b].

```

/*
 * Programa fuente para qdes para el problema de la tesis
 *
 * Carlos Brizuela, 24 de julio de 1993
 */

        /* entradas exógenas */
#define REF          1          /* entrada de referencia  $ref_1$  */
#define NOISE        2          /* ruido de entrada  $d$  */
#define U_LOOP_IN    3          /* entrada de prueba de lazo  $u_1$  */

        /* variables a regular */
#define POSN         1          /* velocidad del motor  $y_1$  */
#define ACTUATOR     2          /* entrada a la planta  $v_a$  */

        /*Definición de entradas del filtro  $Q$  */
#define REF_OUT      1          /* referencia */
#define OBS_ERR      2          /* error del observador */

        /*Definición de la planta*/

declarations {
    n_exog = 3;          /* Entradas exógenas */
    n_reg = 2;          /* Variables a regular */
    n_sens = 2;         /* Señales disponibles para el controlador */

```

```

n_act = 1;                /* Señales de control */
n_sample = 120;          /* Número de muestras a considerar */
n_tap = 5;              /* Dimensión del parámetro Q */
/*Respuesta al impulso de las matrices T1, T2 y T3*/
t1_coeffs = {
#include "t1pepe.xat"
};
t2_coeffs = {
#include "t2pepe.xat"
};
t3_coeffs = {
#include "t3pepe.xat"
};
}
/*Objetivo de control*/
minimize {
  from t=0 to n_sample-1 sum {
    h_sqr[POSN][NOISE](t);
  }
}

/*Restricciones */
constraints {

  /* limites en la respuesta al escalón de REF a POSN */
  for t=0 to 24 do
    -0.2 <= u_step[POSN][REF](t) <= 1.2;
  for t=25 to 34 do
    0.8 <= u_step[POSN][REF](t) <= 1.2;
  for t=35 to 75 do
    0.95 <= u_step[POSN][REF](t) <= 1.05;

  /* seguimiento asintótico */
  0.98 <= Re_H[POSN][REF](1,0) <= 1.02;

  /* limites sobre el esfuerzo de control */
  for t=0 to 15 do
    -181 <= u_step[ACTUATOR][REF](t) <= 181;
}

```