

RESUMEN de la Tesis de Josué Alvarez Borrego presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **DOCTOR EN CIENCIAS EN FÍSICA APLICADA** con opción en **ÓPTICA**. Ensenada, Baja California, México. Diciembre de 1993.

**DETERMINACION DE PROPIEDADES ESTADISTICAS DE
SUPERFICIES RUGOSAS ALEATORIAS
A PARTIR DE IMAGENES REMOTAS**

Resumen aprobado por:



Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez.
Director de Tesis.

Se considera el problema de obtener información de las propiedades estadísticas de superficies rugosas aleatorias a partir de imágenes remotas. De particular interés son las estadísticas de primer y segundo orden de las alturas de la superficie. Más concretamente, es de interés estimar la desviación estándar de alturas, y la autocorrelación, o el espectro de la superficie. Suponiendo que el perfil de la superficie representa una realización de un proceso aleatorio Gaussiano se derivan algunos resultados analíticos y numéricos que relacionan la función de autocorrelación de las alturas de una superficie con la función de autocorrelación del patrón de intensidad que se forma en la imagen de ésta.

Se presentan algunos ejemplos numéricos que muestran la validez del modelo descrito para el caso de superficies unidimensionales. Por superficies unidimensionales entendemos aquellas que tienen variaciones de altura en una dirección, y una altura constante en una dirección perpendicular a ésta. En las simulaciones numéricas, se consideraron dos clases de espectros: por un lado, espectros asociados con superficies de una sola escala, y por el otro, el espectro de Pierson-Moskowitz que se asocia con superficies de varias escalas. Posteriormente se presentan ejemplos numéricos con superficies bidimensionales, tanto isotrópicas como anisotrópicas, con espectro Gaussiano. En los ejemplos presentados se observa que los resultados numéricos del modelo para una y dos dimensiones concuerdan bien con los resultados teóricos.

Finalmente, se presentan resultados experimentales para mostrar la aplicabilidad del modelo. Para esto, fué necesario fabricar superficies adecuadas. Se describe el experimento y se presenta un análisis y una discusión de los resultados obtenidos. Los resultados experimentales muestran que es posible estimar propiedades estadísticas de primer y segundo orden de las alturas de una superficie rugosa aleatoria con el modelo aquí descrito.

TESIS DEFENDIDA POR: **JOSUE ALVAREZ BORREGO**

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



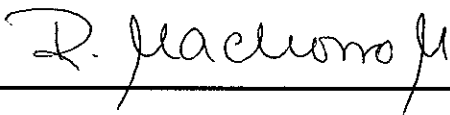
DR. EUGENIO RAFAEL MENDEZ MENDEZ.- Director del Comité



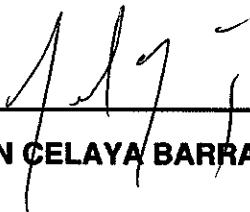
DR. HECTOR MANUEL ESCAMILLA TAYLOR.- Miembro del Comité



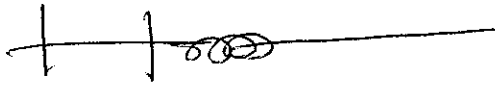
DR. FRANCISCO OCAMPO TORRES.- Miembro del Comité



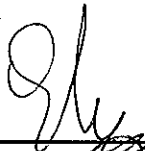
DR. ROBERTO MACHORRO MEJIA.- Miembro del Comité



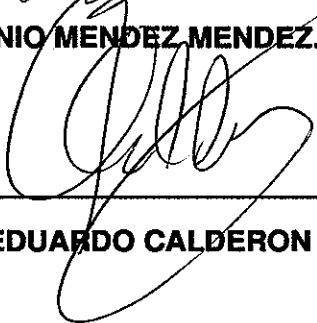
DR. MARTIN CELAYA BARRAGAN.- Miembro de Comité



DR. HECTOR ECHAVARRIA HERAS.- Miembro de Comité



DR. EUGENIO MENDEZ MENDEZ.- Jefe Depto. Optica



DR. LUIS EDUARDO CALDERON AGUILERA.- Director Estudios de Posgrado

16 DE DICIEMBRE DE 1993

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA**

**DIVISION DE FISICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE OPTICA**

C I C E S E

**DETERMINACION DE PROPIEDADES ESTADISTICAS DE
SUPERFICIES RUGOSAS ALEATORIAS
A PARTIR DE IMAGENES REMOTAS**

TESIS

Que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS presenta:

JOSUE ALVAREZ BORREGO

Ensenada, Baja California, Diciembre de 1993.

CONTENIDO

	<u>Página</u>
I INTRODUCCION.	1
II PROBLEMA DIRECTO.	11
II.1. Descripción de la situación física.	11
II.2. Caso unidimensional.	13
II.2.1. Derivación de la función de brillo basada en la óptica geométrica.	17
II.2.2. Derivación de la función de brillo basada en la teoría de coherencia parcial.	22
II.3. Caso bidimensional.	28
II.3.1. Derivación de la función de brillo basada en la óptica geométrica.	31
III PROBLEMA INVERSO.	35
III.1. Relaciones entre las variancias de la imagen, pendiente y superficie.	35
III.1.1. Caso unidimensional.	35
III.1.2. Caso bidimensional.	38
III.1.2.1. Caso isotrópico.	40
III.1.2.2. Caso anisotrópico.	43
III.2. Relaciones entre las funciones de correlación de la imagen y de la superficie.	45
III.2.1. Caso unidimensional.	45
III.2.2. Caso bidimensional.	48
IV EJEMPLOS NUMERICOS.	51
IV.1. Superficies unidimensionales de una sola escala.	52
IV.2. Superficies unidimensionales con espectro de Pierson Moskowitz.	62
IV.3. Superficies bidimensionales de una sola escala.	69
IV.3.1. Caso isotrópico.	69
IV.3.2. Caso anisotrópico.	77
V SIMULACION EN LABORATORIO.	87
V.1. Fabricación de la superficie.	87
V.2. Descripción del arreglo experimental.	90
V.3. Resultados experimentales.	97

VI	RESUMEN Y CONCLUSIONES.	106
	LITERATURA CITADA.	113

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1	Diagrama esquemático de la situación física.	12
2	Diagrama de bloques que muestra los pasos involucrados para la formación de la imagen, $i(x)$.	16
3	Geometría del experimento.	18
4	Los tres procesos involucrados mostrando la región seleccionada por $B(\Pi)$.	21
5	Geometría del experimento mostrando la posición física de la fuente y del sistema de detección.	23
6	Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen. Caso unidimensional.	37
7	Posición geométrica de la fuente y del sistema óptico de detección.	41
8	Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional isotrópico.	42
9	Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales en la dirección x entre la variancia de las intensidades de la imagen. Caso bidimensional anisotrópico. a) Para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.02. b) Para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.12.	44
10	Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso unidimensional.	47
11	Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional.	50
12	Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia Gaussiano.	55

LISTA DE FIGURAS (CONTINUACION)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
13	Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia Rectangular.	56
14	Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia Triángulo al cuadrado.	57
15	Funciones de densidad espectral para los procesos: a) $\zeta(x)$ de la Fig. 12, b) $\zeta(x)$ de la Fig. 13.	61
16	Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia de Pierson-Moskowitz.	65
17	Función de densidad espectral para el proceso $\zeta(x)$ de la Fig. 16.	68
18	Superficie bidimensional isotrópica.	72
19	Derivada parcial en la dirección x de la superficie mostrada en la Fig. 18.	73
20	Derivada parcial en la dirección y de la superficie mostrada en la Fig. 18.	74
21	Imagen de la superficie mostrada en la Fig. 18 para el caso en que la fuente y el sistema óptico de detección están en posición normal a la superficie promedio.	75
22	a) Función de autocorrelación de las alturas de la superficie isotrópica en la dirección x . b) Función de autocorrelación de la intensidad de la imagen en la dirección x .	78
23	Superficie bidimensional anisotrópica.	81
24	Derivada parcial en la dirección x de la superficie mostrada en la Fig. 23.	82
25	Derivada parcial en la dirección y de la superficie mostrada en la Fig. 23.	83

LISTA DE FIGURAS (CONTINUACION)

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
26	Imagen de la superficie mostrada en la Fig. 23 para el caso en que la fuente y el sistema óptico de detección están en posición normal a la superficie promedio.	84
27	Funciones de autocorrelación de las intensidades de la imagen en las direcciones x y y .	85
28	Funciones de autocorrelación de alturas de la superficie en las direcciones x y y .	86
29	Sistema óptico utilizado para fabricar una superficie bidimensional isotrópica.	89
30	Función de autocorrelación del patrón de granulado.	91
31	Geometría del experimento efectuado en el laboratorio donde se observa la posición de la fuente y del sistema de detección.	92
32	Imagen del patrón de brillo obtenido en el laboratorio con el CCD y su histograma.	94
33	Imagen del patrón de brillo después de haber sido codificado en unos y ceros.	96
34	Funciones de correlación de la intensidad de la imagen, pendientes y alturas de la superficie en la dirección x , para la superficie analizada en el laboratorio.	98
35	Relación del cambio porcentual en la variancia de alturas con el cambio en el ángulo de incidencia. $\sigma_{\zeta}^2 = 0.94 \mu m^2$ para $\theta_s = 8^\circ$.	101
36	Relación del cambio porcentual en la longitud de correlación de las alturas de la superficie con el cambio en el ángulo de incidencia. $\sigma_{\zeta}^2 = 0.94 \mu m^2$ para $\theta_s = 8^\circ$.	102
37	Relación de la variancia de las alturas con la variancia de la intensidad de la imagen para la superficie analizada en el laboratorio.	104
38	Imagen del patrón de brillo para un ángulo de incidencia de luz de 10° con el sistema de detección normal a la superficie.	105

FOTOGRAFIAS

Fotografía

1

Página

7

DEDICATORIA

A mi hermosa esposa Norma Alicia.

A mis pequeños hijos: Josué, Jesse, Priscila y Emanuel.

A mis Padres y a mis hermanos.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mi Señor Jesucristo por ofrecerme una nueva manera de vivir.

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Eugenio R. Méndez que aceptó dirigir esta tesis. Por su valiosa sugerencia de cómo comenzar a resolver el problema que en este trabajo se analiza. Por sus valiosos comentarios durante la realización del trabajo y comentarios sobre la escritura de la misma.

Mi más sincero agradecimiento al CICESE y su actual director Dr. Mario Martínez García por darme la oportunidad de la superación académica. Gracias por el soporte económico otorgado para la impresión de las publicaciones.

A los miembros de mi comité de tesis: Drs. Héctor Escamilla, Héctor Echavarría, Roberto Machorro, Martín Celaya, Francisco Ocampo, donde en múltiples reuniones escuché sus sugerencias y consejos. Por su valiosa colaboración en la revisión de esta tesis.

A los Drs. Saúl Álvarez, Héctor Escamilla, Dra. Diana Tentori por su valiosísima colaboración en la redacción de esta tesis que fué pasando del español apache al español legible. Gracias a la maestra en Letras Marisa Echeverría por sus valiosos comentarios en la redacción de los capítulos I y VI.

Al Dr. Héctor Echavarría por su tiempo en revisar las matemáticas que aquí se presentan.

Al Físico Carlos López Famoza quien me ayudó a la realización de las gráficas de color y de las imágenes en blanco y negro. Gracias por su tiempo.

Al M. C. Javier Camacho por su ayuda desinteresada en la realización de algunos dibujos en la computadora.

A la M. C. Amalia Martínez García que llevó a cabo la fabricación de superficies en el laboratorio.

A Marcia Padilla que me resolvió varios problemas con el procesador de palabras. A Doña O la mejor Secretaria del Departamento de Óptica, por su paciencia en mis terquedades.

Gracias a mis compañeros de trabajo que de una u otra forma estuvieron apoyándome y dándome ánimo pronto. A todos mis amigos, todos en general.

A mis Padres y mis hermanos que en años han esperado este acontecimiento.

Y nuevamente de manera muy especial, pero muy especial, a mi amantísima esposa, por su amor, dedicación, por soportarme en tiempos difíciles y siempre ser mi ayuda idónea en toda situación adversa y favorable. A mis hijos que espero ser siempre ejemplo para ellos.

**DETERMINACION DE PROPIEDADES ESTADISTICAS DE
SUPERFICIES RUGOSAS ALEATORIAS
A PARTIR DE IMAGENES REMOTAS**

I. INTRODUCCION

La costa oeste de la Península de Baja California está expuesta al oleaje, el cual ocasiona múltiples daños. En aguas profundas, el oleaje puede afectar plataformas marinas y, en aguas someras, construcciones costeras y zonas recreativas. En la bahía de Todos Santos, B.C., frecuentemente las olas sobrepasan el rompeolas durante los meses de invierno, afectando asentamientos humanos en la zona costera. La complejidad del movimiento de las olas en aguas profundas y en aguas someras así como la necesidad de entender mejor su comportamiento, ha dado origen a una gran cantidad de estudios del oleaje tanto en el campo como en el laboratorio.

Para estudiar el oleaje de manera cuantitativa, se ha intentado emplear tanto imágenes de radar como fotografías aéreas. La dinámica de la superficie marina es muy importante, ya que nos permite determinar su influencia sobre la capa superficial de mezcla y la línea de costa.

Este trabajo fué motivado por la posibilidad, ya sugerida por varios autores, de poder caracterizar superficies marinas mediante el análisis de imágenes aéreas de la superficie del mar. Como un paso inicial en esta dirección, en esta tesis se presenta un método para obtener información de las propiedades estadísticas de una superficie a partir de imágenes remotas, y su respectiva comprobación por medio de simulaciones numéricas y de laboratorio. La finalidad, en un futuro cercano, es aplicar esta técnica a imágenes reales de la superficie del mar para poder calcular algunas propiedades

estadísticas de las alturas de la superficie.

A fines del siglo pasado y con la finalidad de estudiar la superficie del mar se empezaron a medir algunos parámetros ópticos, como la irradiancia ascendente (la suma de todas las radiancias con ángulos del nadir de cero a 90 grados), la irradiancia descendente (la suma de radiancias con ángulos del zenith de cero a 90 grados) y algunas variables oceanográficas como temperatura, salinidad, densidad, etc., (Jerlov, 1976). La irradiancia de la luz reflejada sobre la superficie del mar fue el primer parámetro óptico que se midió. Años más tarde, se efectuaron mediciones de la irradiancia espectral a varias profundidades. La irradiancia espectral, aunada a otras variables tales como temperatura, salinidad y nutrientes, se utiliza para determinar la productividad orgánica primaria, que es la velocidad de fotosíntesis, o sea, fijación de carbono por unidad de área, o por unidad de volumen y por unidad de tiempo.

A mediados de este siglo, Duntley (1950) llevó a cabo un estudio experimental de las olas capilares (con longitud de onda de pocos centímetros y alturas de pocos milímetros). En este trabajo se midieron, *in situ*, las alturas de las olas capilares usando dos pares de alambres verticales sumergidos. Un par formaba un plano en la dirección a lo largo del viento y, el otro par, formaba un plano en la dirección perpendicular al viento. En particular, Duntley (1950) encontró que las pendientes de las olas capilares, ζ_{Π}^u (pendiente en dirección a la del viento) y ζ_{Π}^c (pendiente en la dirección perpendicular a la dirección del viento), obedecen a una distribución normal y son estadísticamente independientes.

Un poco después, Barber (1954) estimó la direccionalidad de las ondas del mar a partir del patrón de difracción de una imagen de la superficie del mar. Casi simultáneamente, Cox y Munk (1954a, 1954b) realizaron estudios de la estadística

de las pendientes de la superficie del mar derivadas de las reflexiones especulares de la luz sobre la superficie marina, patrón de brillo, las cuales fueron grabadas en fotografías aéreas. En una primera aproximación, estos autores encontraron que, la distribución de las pendientes es Gaussiana. Esto pudiera ser tomado como una indicación de que, bajo ciertas circunstancias, la superficie del océano puede ser modelada como un proceso aleatorio Gaussiano. Observaciones hechas con una boya flotante, donde se han filtrado las componentes de alta frecuencia, indican la presencia de una distribución cercana a una distribución Gaussiana (Longuet-Higgins et al., 1963).

Podemos decir que el trabajo experimental de Duntley (1950) y los de Cox y Munk (1954a y 1954b) son similares y complementarios: Duntley (1950), en efecto, colocó su medidor de ondas en un punto fijo en el mar e hizo observaciones de larga duración de las pendientes tanto en la dirección del viento como en una dirección perpendicular a ésta. Las fotografías aéreas de Cox y Munk (1954a y 1954b) fueron tomadas con tiempo de exposición cortos comparados con el movimiento de la superficie, cubriendo un área relativamente grande del mar. Cuando se comparan las estadísticas de las pendientes del oleaje en un punto, observadas en función del tiempo (Duntley, 1950) con las estadísticas de las pendientes a un tiempo fijo, observadas en función de la coordenada espacial (Cox y Munk, 1954a y 1954b), se encuentra que son prácticamente iguales (Preisendorfer, 1976). Esto sugiere que las suposiciones de estacionaridad y ergocidad son razonables, al menos en un área restringida y para ciertas zonas de la superficie del mar.

Cox (1958) realizó mediciones de pendientes de olas capilares generadas en un canal de olas de laboratorio, y encontró un comportamiento bastante complicado de la variancia de las pendientes, en función de la velocidad del viento.

En estudios posteriores, Stilwell (1969) empleó fotografías de la superficie del mar y utilizó un sistema óptico coherente para realizar un análisis de Fourier de las variaciones de densidad presentes en la emulsión fotográfica. Dichas variaciones de densidad están relacionadas con la distribución de pendientes de la superficie (Kivelson y Moszkowski, 1966). En una primera aproximación, Stilwell (1969) derivó una ecuación que relaciona la intensidad de la luz proveniente de la fuente con la densidad de la película fotográfica, suponiendo pendientes muy pequeñas, una iluminación uniforme en toda la superficie, y linealidad en el proceso fotográfico. Stilwell y Pilon (1974) ampliaron el modelo de Stilwell (1969) incluyendo casos en los que la geometría puede ser oblicua, y trataron de deducir espectros de energía del oleaje. Sus resultados están basados en una serie de aproximaciones que restringen severamente la aplicabilidad del modelo, pues consideraron valores de pendiente muy pequeños y linealidad en el proceso fotográfico.

Kasevich (1975) continuó el trabajo de Stilwell (1969) tomando en cuenta términos de segundo orden de la expresión en serie de Taylor de la ecuación que representa la cantidad de luz a la cual está expuesta la película fotográfica, con la finalidad de entender el mecanismo de la transferencia de información de la superficie marina a una imagen fotográfica. Utilizó modelos para simular la iluminación sobre la superficie, considerando cielos azul claro y cielos nublados, ya que no contó con datos reales de irradiancia. Concluyó que la luz que llega a la cámara, después de

ser reflejada por la superficie, está relacionada explícitamente con la orientación y altura de la cámara, con la distribución de irradiancia en la atmósfera y con las componentes de las pendientes de la superficie del mar.

Plass et al. (1977) puntualizaron que la velocidad del viento y el ángulo de elevación de la cámara influyen marcadamente en las reflexiones especulares de la luz sobre la superficie marina.

Peppers y Ostrem (1978) propusieron un modelo para determinar más fielmente las pendientes de las ondas a partir de fotografías del océano. Comprobaron la técnica desarrollada mediante simulaciones numéricas de diferentes modelos de irradiancia. Concluyeron que sus resultados son mejores que los que obtuvo Stilwell (1969 y 1974).

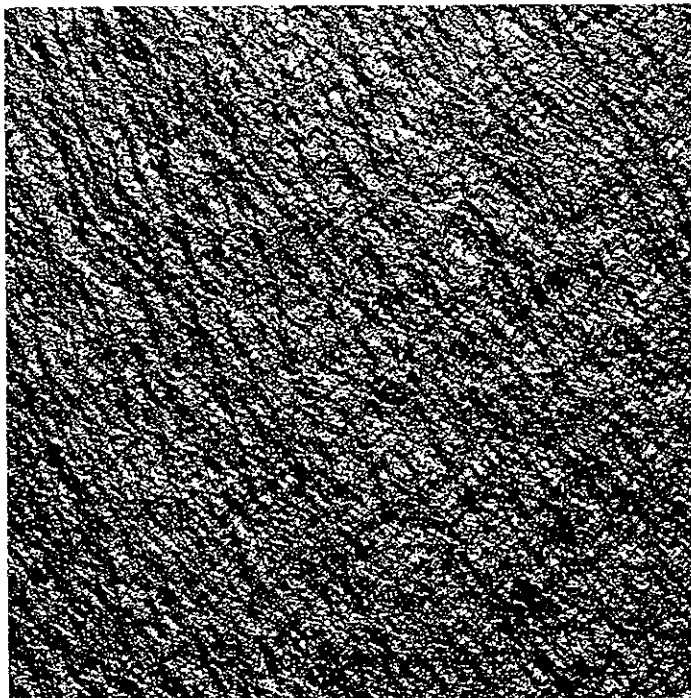
Chapman e Irani (1981) reportaron un análisis de los errores involucrados al estimar el espectro de pendientes de la superficie del mar mediante fotografías aéreas. Afirmaron que no es posible considerar una relación lineal entre el espectro de pendientes de las ondas y el espectro de la imagen obtenida en un sistema óptico coherente o en forma digital. Estos autores cuantificaron los errores involucrados en esta aproximación utilizando varios modelos de iluminación en simulaciones por computadora.

Preisendorfer y Mobley (1986) presentaron una simulación numérica de una superficie marina donde incluyeron reflexiones de luz solar directa y difusa y obtuvieron una imagen de la superficie con el patrón del brillo incluido (similares a las imágenes reales que obtuvieron Cox y Munk, (1954a y 1954b)). El objetivo de Preisendorfer y Mobley (1986) fué obtener información de la distribución angular de

la irradiancia descendente y de la irradiancia ascendente y de cómo dependen estas irradiancias de las propiedades ópticas del agua de mar. Desafortunadamente, este modelo no pudo comprobarse mediante una superficie marina real.

Un problema común a todos los trabajos mencionados, es que los varios modelos propuestos no pudieron ser validados con datos experimentales. Esto es debido a que se tiene muy poca información de la superficie marina estudiada.

En este trabajo se propone una metodología para calcular algunas propiedades estadísticas de la superficie marina por medio de fotografías aéreas. Con cielo despejado, la imagen se forma con luz del sol reflejada por la frontera aire-agua. Dicha imagen muestra variaciones grandes de intensidad debido a las reflexiones especulares de la luz sobre la superficie; esta imagen recibe el nombre de patrón de brillo (Fotografía 1). La relación entre la imagen formada por un sistema óptico en la película de la cámara fotográfica y el perfil de la superficie que refleja la luz hacia el detector es compleja. La relación entre las pendientes superficiales y la intensidad de la imagen es más directa y se puede representar por medio de una función que denominaremos la función de brillo. Empleando esta función de brillo encontraremos una relación entre la función de autocorrelación de las variaciones de intensidad en la imagen y la función de autocorrelación de las alturas de la superficie. Como un subproducto, se puede conocer también la variancia de las alturas de la superficie a partir de la variancia de las intensidades en la imagen. En esta tesis se presenta un análisis para superficies con variaciones de altura tanto en una como en dos direcciones; en otras palabras, para superficies uni y bidimensionales. Dentro de este proceso de análisis, se determinó una función analítica que describe el brillo que se produce cuando la luz que proviene de la fuente se refleja sólo una vez en la superficie.



Fotografía 1. Imagen de un patrón de brillo de la superficie del mar.

De esta manera, puede observarse que la imagen de la superficie consiste de regiones brillantes y oscuras que forman un patrón de brillo. Este patrón de brillo es codificado en dos niveles escogiendo un umbral adecuado después de analizar el histograma de intensidad de la imagen. A los valores brillantes se les asigna el valor de uno y a las regiones oscuras se les asigna el valor de cero. Los patrones de brillo obtenidos en el plano imagen contienen información estadística de las alturas de la superficie ya que, dependiendo de la pendiente local, la luz reflejada por cada punto de la superficie contribuirá o no a la imagen. Es claro, entonces, que estas fotografías tienen información de la distribución de pendientes superficiales, y es plausible suponer que ciertas propiedades estadísticas de la superficie pueden ser determinadas por medio de un análisis de dichas fotografías. En esta tesis se plantea la posibilidad de determinar el espectro o, equivalentemente, la función de correlación de las alturas de la superficie a partir de este tipo de imágenes.

En el capítulo II se describe la geometría del problema considerado. En este estudio están involucrados tres procesos aleatorios, relacionados entre sí: el perfil de la superficie, sus pendientes y su imagen. Se presentan, tanto para superficies uni y bidimensionales, las ecuaciones que relacionan las funciones de autocorrelación de los tres procesos. También se define la "función de brillo", que describe la formación del patrón de brillo. Esta función viene a ser la función que relaciona las pendientes de la superficie con los patrones de brillo que forman la imagen.

En el capítulo III, se presentan las relaciones que permiten obtener información sobre las propiedades estadísticas de las alturas de la superficie a partir de propiedades estadísticas de la imagen. Se analiza numéricamente la relación entre las funciones de correlación de la imagen y de las alturas de la superficie para estudiar las

condiciones bajo las cuales es posible llevar a cabo el proceso de inversión. Se obtienen, también numéricamente, las relaciones que conectan las variancias de la intensidad en la imagen y de las alturas de la superficie. Se muestran gráficamente resultados para superficies de una y dos dimensiones.

En el capítulo IV, se presentan algunos ejemplos que muestran la aplicabilidad de la técnica descrita para la obtención de los espectros de potencia de las alturas de una superficie a partir de imágenes remotas. Se presentan ejemplos con dos clases de espectros: espectros que describen superficies de una sola escala [Gaussiano, Rectángulo y Triángulo] y un espectro que describe superficies de varias escalas, el espectro de Pierson-Moskowitz (Pierson y Moskowitz, 1964). Con el modelo de Pierson-Moskowitz, se generan superficies con características similares a las de las superficies oceánicas. En este modelo, el espectro está completamente determinado por un parámetro que se asocia a la velocidad del viento. Ya que el objetivo aquí es probar la técnica descrita para relacionar la autocorrelación de alturas de una superficie marina con la autocorrelación de los patrones de brillo, el modelo de Pierson-Moskowitz es particularmente interesante para este estudio.

En una segunda instancia, se consideraron dos ejemplos numéricos para el caso bidimensional, simulándose tanto, superficies isotrópicas como anisotrópicas. Para este análisis se utilizó una función de brillo Gaussiana. Esta función de brillo es una simplificación que nos permite la obtención de resultados analíticos. En los ejemplos presentados, se observa que los resultados obtenidos de la simulación numérica, reproducen adecuadamente los resultados analíticos.

En el capítulo V, se describen los resultados obtenidos al comparar las predicciones del modelo teórico propuesto en este trabajo con los resultados

experimentales obtenidos con una simulación de laboratorio empleando una superficie isotrópica con propiedades estadísticas conocidas. El objetivo aquí es mostrar la validez del método propuesto. Se describe brevemente el proceso seguido para la fabricación de la superficie y, posteriormente, el arreglo experimental con el que se obtuvieron los patrones de brillo. Por último, se hace un análisis de los resultados obtenidos.

En el capítulo VI, se hace un resumen de este trabajo y se presentan las conclusiones del mismo.

II. PROBLEMA DIRECTO.

Como se ha mencionado en la introducción, este trabajo considera el problema de obtener información de la estadística de las variaciones de altura de una superficie mediante imágenes remotas.

En la primera parte de este capítulo se presenta, de una manera breve, la descripción de la situación física considerada. En este estudio están involucrados tres procesos aleatorios: el perfil de la superficie, su pendiente y su imagen. Se presentan, para superficies uni y bidimensionales, las ecuaciones que relacionan en forma directa las funciones de correlación de los tres procesos.

Se define una cierta "función de brillo", la cual es responsable de la formación de los patrones de brillo que constituyen la imagen. Esta función relaciona las pendientes de la superficie con los patrones de brillo que forman la imagen.

II.1. Descripción de la situación física.

La situación física se describe esquemáticamente en la figura 1.

Se ilumina la superficie con una fuente incoherente y uniforme de extensión angular, σ , y longitud de onda $\bar{\lambda}$. Se forma su imagen mediante un sistema óptico libre de aberraciones en el plano D. El ángulo de incidencia, θ_s , se define como el ángulo entre la dirección de incidencia de la luz y la normal a la superficie promedio. Entonces, en la Fig. 1, θ_s representa el ángulo de incidencia promedio que subtiende la fuente σ y θ_d representa el ángulo promedio que subtiende el sistema óptico de detección con la normal a la superficie promedio. La luz de la fuente se refleja en la superficie sólo una vez y, dependiendo de la pendiente, la luz reflejada contribuirá

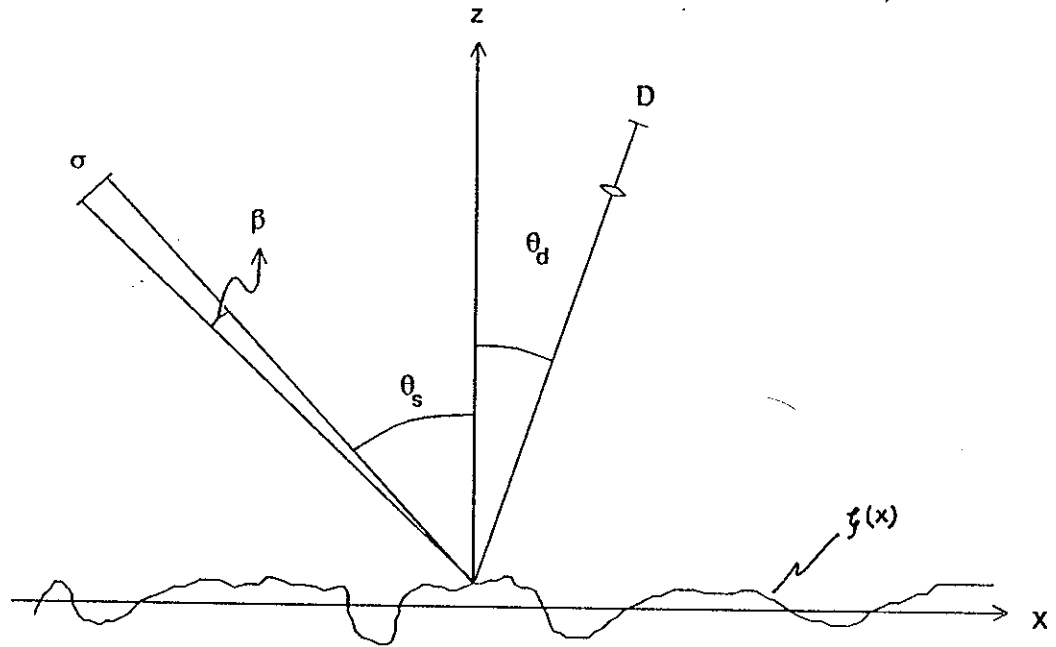


Figura 1. Diagrama esquemático de la situación física.

o no a la imagen de la superficie. La imagen consiste entonces de regiones brillantes y oscuras que forman un "patrón de brillo".

Los "patrones de brillo" obtenidos en el plano de la imagen contienen información sobre la topografía de la superficie. En el presente trabajo este patrón se codifica en una señal de dos niveles. Cuando en la imagen tenemos un punto brillante, el valor que se le asigna es uno y cuando tenemos un punto oscuro, el valor asignado es cero. Esto se hace de acuerdo a un histograma que se obtiene de la imagen para determinar el umbral. De esta manera, el patrón de brillo que originalmente contenía varios valores de intensidad, se convierte en un patrón de brillo que adquiere sólo dos valores, unos y ceros. Esta manera de tratar la información es conveniente por varios motivos, entre otros, facilita el procesado de la información, y no requiere un intervalo dinámico grande del sistema de detección. En este punto, es pertinente notar que el problema de estimar el espectro o la correlación de procesos estocásticos a partir de procesos truncados de esta manera, ha sido estudiada por varios autores. En particular, podemos mencionar el trabajo pionero de Van Vleck y Middleton (1966), y algunas aplicaciones recientes en el contexto de teoría de "speckle" por Pedersen (1984), Ohtsubo (1985) y Marron y Morris (1986).

II.2. Caso unidimensional.

En este caso, la superficie sólo tiene variaciones de altura en una dirección, y dichas variaciones están representadas por la función $\zeta(x)$. A lo largo de esta tesis, supondremos que $\zeta(x)$ representa una realización de un proceso aleatorio Gaussiano estacionario con una función de correlación denotada por $C_{\zeta}(\tau) = \langle \zeta(x + \tau)\zeta(x) \rangle$

y una variancia denotada por σ_ζ^2 . Los paréntesis, $\langle \rangle$, representan un promedio sobre el ensamble de posibles realizaciones. La pendiente, o derivada de la superficie, se representa por $\Pi(x)$. Esta tiene una función de correlación denotada por $C_\Pi(\tau) = \langle \Pi(x + \tau)\Pi(x) \rangle$ y una variancia denotada por σ_Π^2 . Con nuestras suposiciones, la relación entre la función de correlación del perfil, $C_\zeta(\tau)$, y la de su derivada, $C_\Pi(\tau)$ está dada por (Papoulis 1981, págs. 316-317):

$$C_\Pi(\tau) = -\frac{d^2 C_\zeta(\tau)}{d\tau^2}. \quad (2.1)$$

Además, de la teoría de procesos aleatorios y las suposiciones anteriores, se tiene que el proceso aleatorio $\Pi(x)$, que representa las pendientes de la superficie, es un proceso aleatorio Gaussiano. Por tanto, la función de densidad de probabilidad conjunta de las pendientes, para dos diferentes posiciones x_1 y x_2 , está dada por (Davenport y Root 1958, pág. 149):

$$p(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_\Pi^2[1 - C_\Pi^2(\tau)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - 2C_\Pi(\tau)\Pi_1\Pi_2}{2\sigma_\Pi^2[1 - C_\Pi^2(\tau)]}\right], \quad (2.2)$$

donde, por simplicidad, se está escribiendo $\Pi(x_1)$ como Π_1 , y $\Pi(x_2)$ como Π_2 .

La imagen que se forma en el plano D (Fig. 1), es un proceso aleatorio que llamaremos $i(x)$. La imagen $i(x)$ está determinada por el proceso $\Pi(x)$, pendientes de la superficie, y la geometría del problema a través de una transformación no lineal que denominaremos la función de brillo. En general, el proceso $i(x)$ no es estacionario. Es decir, sus propiedades estadísticas son función de la posición x . Esto, a pesar de que los procesos $\zeta(x)$ y $\Pi(x)$ son estacionarios. La no estacionaridad de $i(x)$ proviene del hecho de que los ángulos θ_a y θ_s son función de la coordenada x (ver Fig. 1). Sin embargo, si el plano de observación es lejano, y restringimos el campo

de visión, el proceso puede ser considerado estacionario sobre una cierta región. Suponiendo que éste es el caso, escribiremos la función de correlación del proceso $i(x)$, asociado a la imagen, como $C_i(\tau) = \langle i(x + \tau)i(x) \rangle$, y su variancia como σ_i^2 . Los diferentes pasos involucrados en la obtención de la imagen, $i(x)$, se muestran en el diagrama de bloques de la figura 2.

El patrón de brillo, regiones brillantes y oscuras que forman la imagen, está determinado por la superficie misma, y por la "función de brillo", que se puede calcular de las posiciones y los diámetros aparentes de la fuente y el detector. La función de brillo opera sobre las pendientes, y será denotada por $B(\Pi(x))$. A través de esta función se puede encontrar la ubicación espacial y la extensión de los brillos.

Con las consideraciones ya descritas, la autocorrelación de la imagen, $C_i(\tau)$, puede ser escrita como:

$$C_i(\tau) = \langle B(\Pi_1)B(\Pi_2) \rangle,$$

o

$$C_i(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\Pi_1)B(\Pi_2)}{2\pi\sigma_{\Pi}^2[1 - C_{\Pi}^2(\tau)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - 2C_{\Pi}(\tau)\Pi_1\Pi_2}{2\sigma_{\Pi}^2[1 - C_{\Pi}^2(\tau)]}\right] d\Pi_1 d\Pi_2. \quad (2.3)$$

Evaluando esta integral se obtiene una relación entre los valores que adquieren las funciones de correlación $C_i(\tau)$ y $C_{\Pi}(\tau)$.

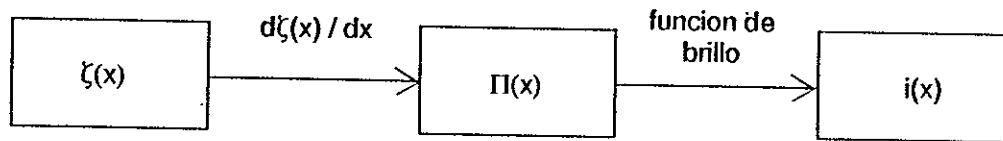


Figura 2. Diagrama de bloques que muestra los pasos involucrados para la formación de la imagen, $i(x)$.

II.2.1. Derivación de la función de brillo basada en la óptica geométrica.

La Fig. 3 muestra en detalle la geometría del experimento y los diferentes ángulos involucrados. En esta figura, α representa el ángulo entre el eje x y el plano tangente a la superficie en el punto $(x_0, \zeta(x_0))$, θ_d es el ángulo entre la vertical, z , y el eje óptico del sistema de detección, y θ_s es el ángulo entre la vertical y la posición media de la fuente. Los ángulos subtendidos por los diámetros de la fuente y el sistema de detección son representados por β y δd , respectivamente. El ángulo θ_r representa el ángulo entre la dirección de un rayo proveniente del punto medio de la fuente reflejado especularmente y la vertical.

De esta figura se puede determinar el intervalo de ángulos que reflejan especularmente hacia el sistema de detección. Denotaremos el ángulo entre la posición media de la fuente y la normal a la superficie por ϕ . Este ángulo puede escribirse de las siguientes dos maneras:

$$\phi = \theta_s - \alpha, \quad (2.4a)$$

$$\phi = \theta_r + \alpha. \quad (2.4b)$$

De estas dos igualdades se obtiene una expresión para el ángulo especular:

$$\theta_r = \theta_s - 2\alpha. \quad (2.5)$$

Debido a que la fuente tiene un tamaño finito, hay varias direcciones de incidencia que son reflejadas especularmente hacia la cámara. Las direcciones, θ_{os} , para las cuales hay rayos incidentes están determinadas por la condición:

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} \leq \theta_{os} \leq \theta_s + \frac{\beta}{2}; \quad (2.6)$$

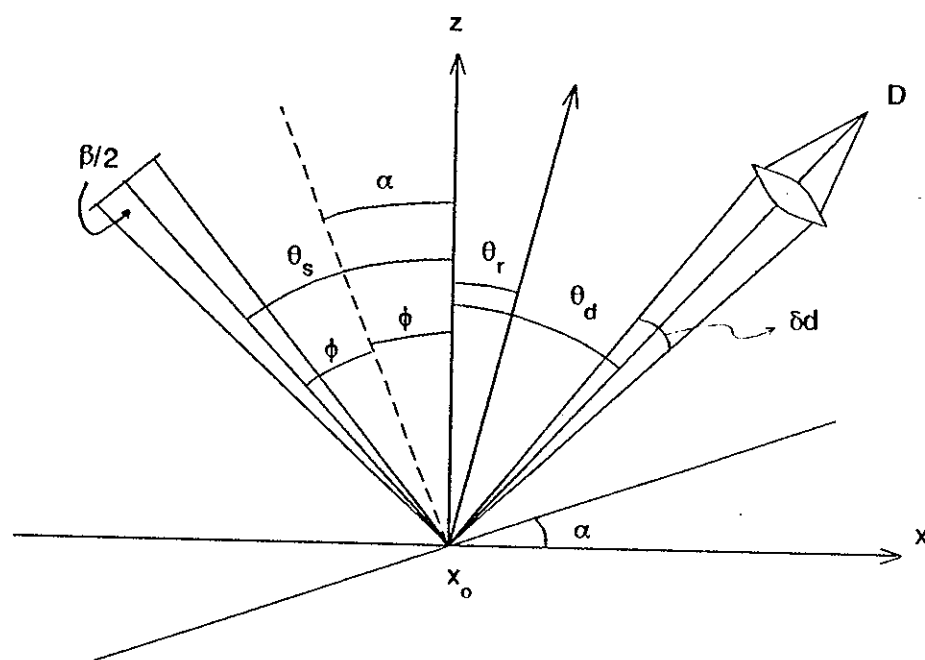


Figura 3. Geometria del experimento.

es decir, que la función que describe angularmente a la fuente, $\sigma(\theta_{os})$, se puede escribir como:

$$\sigma(\theta_{os}) = \text{rect}\left[\frac{\theta_{os} - \theta_s}{\beta}\right], \quad (2.7)$$

donde $\text{rect}(x)$ representa la función rectángulo (Gaskill 1978, pág. 43).

Para un punto en la superficie con pendiente $\tan(\alpha)$, y una dirección de incidencia, θ_{os} , el ángulo de reflexión $\theta = \theta_{os} - 2\alpha$. Entonces, la proyección angular de esta fuente, $\sigma_R(\theta)$, después de la reflexión, será:

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} - 2\alpha \leq \theta \leq \theta_s + \frac{\beta}{2} - 2\alpha, \quad (2.8a)$$

$$\sigma_R(\theta) = \text{rect}\left(\frac{\theta - \theta_r}{\beta}\right), \quad (2.8b)$$

en donde hemos tomado en cuenta la ec.(2.5).

Por otro lado, la pupila del sistema de detección se puede representar por la función:

$$P(\theta) = \text{rect}\left(\frac{\theta - \theta_d}{\delta d}\right). \quad (2.9)$$

La intensidad de luz, I , que llega al plano de detección D depende del traslape entre las funciones $\sigma_R(\theta)$ y $P(\theta)$, y se puede aproximar como:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_R(\theta)P(\theta)d\theta. \quad (2.10)$$

En situaciones prácticas δd es mucho menor que β , y podemos aproximar $P(\theta) \approx \delta(\theta - \theta_d)$, donde δ es la delta de Dirac, de manera que:

$$\begin{aligned}
 I &\approx \sigma_R(\theta_d), \\
 &\approx \text{rect}\left(\frac{\theta_d - \theta_r}{\beta}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Es decir que tendremos luz en el plano imagen cuando:

$$\theta_r - \frac{\beta}{2} \leq \theta_d \leq \theta_r + \frac{\beta}{2},
 \tag{2.12}$$

y utilizando el hecho de que $\theta_r = \theta_s - 2\alpha$, tenemos que:

$$\frac{\theta_s - \theta_d}{2} - \frac{\beta}{4} \leq \alpha \leq \frac{\theta_s - \theta_d}{2} + \frac{\beta}{4}.
 \tag{2.13}$$

Definiendo $\Pi = \tan\alpha$, $\gamma = (\theta_s - \theta_d)/2$ y $\Pi_0 = \tan\gamma$, y utilizando la relación, $\tan\left(\gamma \pm \frac{\beta}{4}\right) \approx \tan\gamma \pm (1 + \tan^2\gamma)\frac{\beta}{4}$, válida para $\beta/4$ pequeños, obtenemos la siguiente condición para la pendiente:

$$\Pi_0 - (1 + \Pi_0^2)\frac{\beta}{4} \leq \Pi \leq \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2)\frac{\beta}{4}.
 \tag{2.14}$$

Encontramos entonces la "función de brillo", $B(\Pi)$, que se puede escribir de la siguiente manera:

$$B(\Pi) = \text{rect} \left[\frac{\Pi - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2)\beta/2} \right].
 \tag{2.15}$$

La expresión (2.15), nos dice que la geometría del problema selecciona una región de las pendientes de la superficie y los codifica como puntos brillantes en la imagen $i(x)$. Una ilustración de los diferentes procesos se muestra en la Fig. 4.

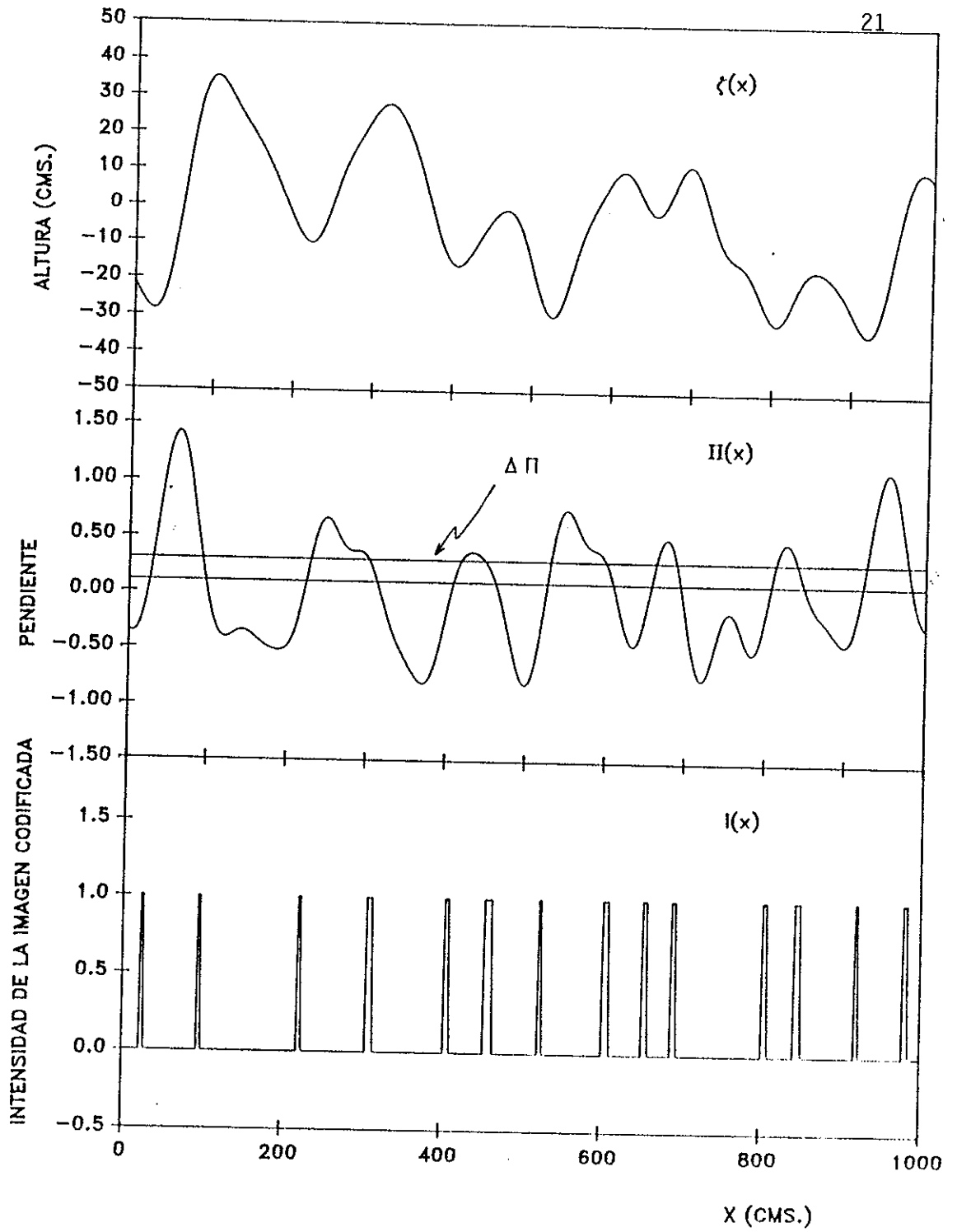


Figura 4. Los tres procesos involucrados mostrando la región seleccionada por $B(\Pi)$.

Este mismo resultado, ec. (2.15), puede obtenerse en forma más rigurosa utilizando las teorías de difracción y de coherencia. Debido a la importancia de la función $B(\Pi)$ en nuestro análisis, procedemos ahora a derivarla de esta manera.

II.2.2. Derivación de la función de brillo basada en la teoría de coherencia parcial.

Consideremos la situación que se muestra en la Figura 5. La posición de la fuente σ , que subtende un ángulo β , está determinada por el ángulo θ_s , o equivalentemente por las coordenadas (x_s, z_s) . La posición del detector está dada por el ángulo θ_d , o equivalentemente por las coordenadas (x_d, z_d) . Como se mencionó anteriormente, el perfil de la superficie está representado por la función $\zeta(x)$. En la figura, r_0 y r'_0 son las distancias de la fuente a los puntos x_0 y x'_0 que están sobre el plano $z = 0$ respectivamente.

Para una fuente cuasimonocromática, la intensidad mutua $J_0(x_0, x'_0)$ en el plano $z = 0$ puede obtenerse mediante el teorema de van Cittert-Zernike (Born y Wolf 1980, pág. 508):

$$J_0(x_0, x'_0) = \int_{\sigma} I(x_{os}) \frac{\exp[i\bar{k}(r_0 - r'_0)]}{r_0 r'_0} dx_{os}, \quad (2.16)$$

donde $I(x_{os})$ es la intensidad por unidad de área de la fuente y \bar{k} es el número de onda promedio. En este caso, $I(x_{os}) = \text{rect}[(x_{os} - x_s)/\beta]$. En la aproximación de Fresnel, las distancias r_0 y r'_0 están dadas por:

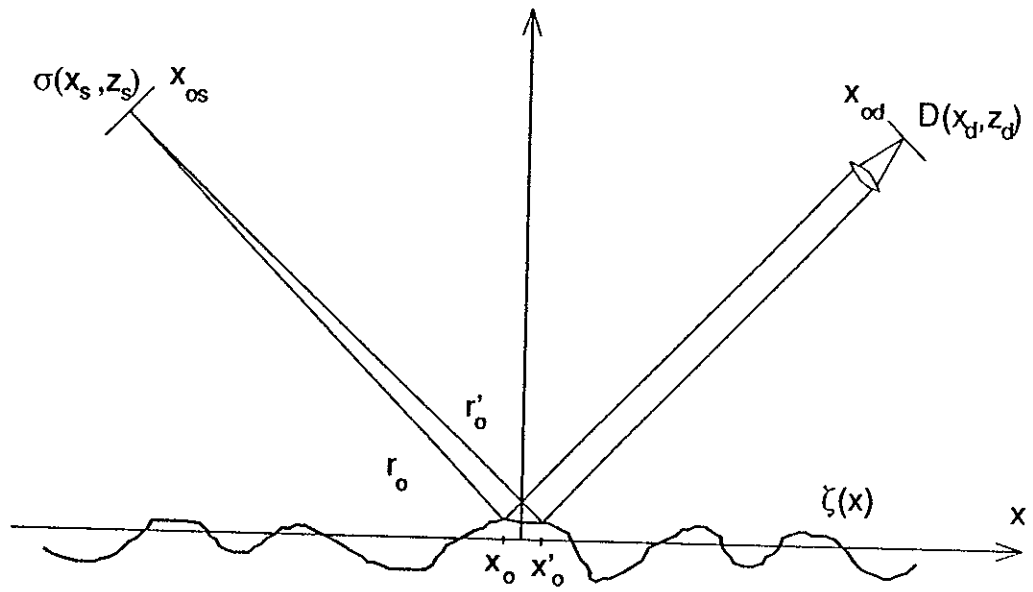


Figura 5. Geometría del experimento mostrando la posición física de la fuente y del sistema de detección.

$$r_0 \approx z_s + \frac{1}{2} \frac{(x_{os} - x_0)^2}{z_s},$$

y

$$r_0' \approx z_s + \frac{1}{2} \frac{(x_{os} - x_0')^2}{z_s},$$

así que la ecuación (2.16) puede escribirse en forma aproximada como:

$$J_0(x_0, x_0') = \frac{\exp(i\Psi)}{z_s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left[\frac{x_{os} - x_s}{\beta}\right] \exp\left[-i\bar{k}(x_0 - x_0') \frac{x_{os}}{z_s}\right] dx_{os}, \quad (2.17)$$

donde $\Psi = \bar{k}(x_0^2 - x_0'^2)/2z_s$.

Para una fuente puntual ubicada en la posición angular θ_{os} , y una dirección de detección denotada por θ_{od} , las variaciones de fase debidas a la superficie pueden describirse aproximadamente por (Welford, 1977):

$$\phi(x_0) = \bar{k}(\cos \theta_{os} + \cos \theta_{od})\zeta(x_0). \quad (2.18)$$

Después de la reflexión, la intensidad mutua en el plano $z=0$, puede escribirse como:

$$J'_0(x_0, x_0') = J_0(x_0, x_0') \exp[i\bar{k}(\cos \theta_{os} + \cos \theta_{od})(\zeta(x_0) - \zeta(x_0'))]. \quad (2.19)$$

En términos de $J'_0(x_0, x_0')$, la intensidad mutua en el plano imagen, $J_1(x_i, x_i')$, puede escribirse como (Born y Wolf 1980, pág. 526):

$$J_1(x_i, x_i') = \iint J'_0(x_0, x_0') K(x_0, x_i) K^*(x_0', x_i') dx_0 dx_0', \quad (2.20)$$

donde $K(x_0, x_i)$ representa la función de transmisión del sistema. En nuestro caso y suponiendo que el sistema de formación de imágenes es isoplanático, podemos escribirla como:

$$K(x_0, x_i) = K_0(x_0 - \epsilon x_i) \exp\left[i\bar{k}x_0 \frac{x_{od}}{z_d}\right], \quad (2.21)$$

donde $K_0(x_0 - \epsilon x_i)$ es la función de punto extendido del sistema y ϵ es la amplificación involucrada.

Substituyendo la ecuación (2.17) en (2.19), y (2.19) y (2.21) en la ecuación (2.20), y restringiendo el campo de visión de manera que $\Psi \approx 0$ se tiene que:

$$J_1(x_i, x'_i) = \frac{1}{z_s^2} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left[\frac{x_{os} - x_s}{\beta_x}\right] \exp\left[-i\bar{k}(x_0 - x'_0) \frac{x_{os}}{z_s}\right] \\ \exp[i\bar{k}(\cos\theta_{os} + \cos\theta_{od})(\zeta(x_0) - \zeta(x'_0))] \exp\left[i\bar{k}(x_0 - x'_0) \frac{x_{od}}{z_d}\right] \\ K_0(x_0 - \epsilon x_i) K_0^*(x'_0 - \epsilon x'_i) dx_0 dx'_0 dx_{os}. \quad (2.22)$$

Introduciendo el cambio de variable:

$$\Delta x_0 = x_0 - x'_0,$$

la intensidad de la imagen puede escribirse como:

$$I_i(x_i) = \frac{1}{z_s^2} \int dx_{os} \text{rect}\left[\frac{x_{os} - x_s}{\beta_x}\right] \int \int dx_0 d\Delta x_0 \exp\{i\bar{k}\Phi(x_0, \Delta x_0)\} G(x_0, \Delta x_0), \quad (2.23)$$

donde:

$$\Phi(x_0, \Delta x_0) = -\Delta x_0 \left[\frac{x_{os}}{z_s} - \frac{x_{od}}{z_d} \right] + (\cos \theta_{os} + \cos \theta_{od}) (\zeta(x_0) - \zeta(x_0 - \Delta x_0)), \quad (2.24)$$

$$G(x_0, \Delta x_0) = K_0(x_0 - \epsilon x_i) K_0^*(x_0 - \Delta x_0 - \epsilon x'_i).$$

Luego, la expresión (2.23) puede escribirse como:

$$I_i(x_i) = \frac{1}{z_s^2} \int dx_{os} \text{rect} \left[\frac{x_{os} - x_s}{\beta_x} \right] I_0(x_{os}), \quad (2.25)$$

donde $I_0(x_{os})$ está dado por:

$$I_0(x_{os}) = \int \int G(x_0, \Delta x_0) \exp[i\bar{k}\Phi(x_0, \Delta x_0)] dx_0 d\Delta x_0. \quad (2.26)$$

Esta integral puede ser evaluada como una expansión asintótica para \bar{k} grande usando el principio de la fase estacionaria (Born y Wolf 1980, pág. 752). Según este principio las principales contribuciones a esta integral provienen de puntos en el espacio $(x_0, \Delta x_0)$ para los cuales la fase es estacionaria. Se encuentra que pueden existir puntos criticos x_v dados por la condición

$$\zeta'(x_v) = \frac{(x_{os}/z_s) - (x_{od}/z_d)}{\cos \theta_{os} + \cos \theta_{od}} = \tan \left(\frac{\theta_{os} - \theta_{od}}{2} \right), \quad (2.27)$$

que dan una contribución

$$I_{0v}(x_v) = \sigma_0(x_v) G(x_v, \Delta x_v) \exp[i\bar{k}\Phi(x_v, \Delta x_v)] \quad (2.28)$$

a la integral (2.26), y donde

$$\sigma_0(x_v) = \frac{2\pi}{k(\cos \theta_{os} + \cos \theta_{od}) |\zeta''(x_v)|}. \quad (2.29)$$

De la expresión para $\zeta'(x_v)$ en la condición de la ec. (2.27) se encuentra que $\theta_{os} = 2 \tan^{-1}(\zeta'(x_v)) + \theta_d$, y considerando que $\theta_{od} \approx \theta_d$, podemos escribir:

$$I_0(\theta_{os}) = \sigma(x_v, \Delta x_v) \delta(\theta_{os} - (\theta_d + 2 \tan^{-1}(\zeta'(x_v)))) \quad (2.30)$$

donde:

$$\sigma(x_v, \Delta x_v) = \sigma_0(x_v) G(x_v, \Delta x_v) \exp[ik\Phi(x_v, \Delta x_v)].$$

Así:

$$\begin{aligned} I_i(x_i) &= \frac{\sigma(x_v, \Delta x_v)}{z_s^2} \int \text{rect}\left[\frac{\theta_{os} - \theta_s}{\beta}\right] I_0(\theta_{os}) d\theta_{os} = \\ &= \frac{\sigma(x_v, \Delta x_v)}{z_s^2} \begin{cases} 1 & \left| \frac{(\theta_d + 2 \tan^{-1}[\zeta'(x_v)]) - \theta_s}{\beta} \right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Las constantes a la izquierda de la función rect se pueden poner arbitrariamente con un valor de uno debido a que estaremos truncando los datos a dos niveles.

Analizando el término:

$$\left| \frac{\theta_d + 2 \tan^{-1}[\zeta'(x_v)] - \theta_s}{\beta} \right| \leq \frac{1}{2},$$

vemos que se puede reescribir de la forma:

$$\tan\left[\frac{\theta_s - \theta_d}{2} - \frac{\beta}{4}\right] \leq \tan \alpha \leq \tan\left[\frac{\theta_s - \theta_d}{2} + \frac{\beta}{4}\right]. \quad (2.32)$$

Esta relación confirma el resultado obtenido con la aproximación de la óptica geométrica, ecs.(2.14 y 2.15).

II.3. Caso bidimensional.

El perfil de la superficie bidimensional está representada por la función $\zeta(x, y)$, y como en el caso anterior, suponemos que constituye un proceso aleatorio Gaussiano estacionario con función de correlación $C_\zeta(\xi, \eta) = \langle \zeta(x + \xi, y + \eta)\zeta(x, y) \rangle$ y variancia σ_ζ^2 . La pendiente o derivada de la superficie en la dirección x , se representa por $\Pi_x(x, y)$ con función de correlación $C_{\Pi_x}^x(\xi, \eta) = \langle \Pi_x(x + \xi, y + \eta)\Pi_x(x, y) \rangle$, y variancia $\sigma_{\Pi_x}^2$. La pendiente o derivada de la superficie en la dirección y , se representa por $\Pi_y(x, y)$, con función de correlación $C_{\Pi_y}^y(\xi, \eta) = \langle \Pi_y(x + \xi, y + \eta)\Pi_y(x, y) \rangle$, y variancia $\sigma_{\Pi_y}^2$. La función de correlación cruzada de $\Pi_x(x, y)$ y $\Pi_y(x, y)$ se denota por $C_{\Pi}^{xy}(\xi, \eta)$. Las relaciones entre $C_\zeta(\xi, \eta)$ y $C_{\Pi_x}^x(\xi, \eta)$, $C_{\Pi_y}^y(\xi, \eta)$, $C_{\Pi}^{xy}(\xi, \eta)$, están dadas por:

$$C_{\Pi_x}^x(\xi, \eta) = -\frac{\partial^2 C_\zeta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}, \quad (2.33)$$

$$C_{\Pi_y}^y(\xi, \eta) = -\frac{\partial^2 C_\zeta(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}, \quad (2.34)$$

$$C_{\Pi}^{xy}(\xi, \eta) = -\frac{\partial^2 C_\zeta(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (2.35)$$

Además, de la teoría de procesos aleatorios y las suposiciones hechas, se tiene que el proceso aleatorio $\Pi(x, y)$, que representa las pendientes de la superficie bidimensional, es un proceso aleatorio Gaussiano. Por lo tanto la función de densidad de probabilidad conjunta de pendientes, para dos diferentes posiciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , está dada por (Davenport y Root 1958, pág. 152):

$$p(\Pi_x, \Pi_y, \Pi_x', \Pi_y') = \frac{1}{4\pi^2 |\Lambda|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2 |\Lambda|} \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 |\Lambda|_{nm} (\Pi_n - \mu_n)(\Pi_m - \mu_m) \right], \quad (2.36)$$

donde, por simplicidad se está escribiendo $\Pi(x_1)$ como Π_x , $\Pi(x_2)$ como Π_x' , $\Pi(y_1)$ como Π_y y $\Pi(y_2)$ como Π_y' , $|\Lambda|_{nm}$ es el cofactor del elemento λ_{nm} en el determinante $|\Lambda|$ de la matriz de covariancia:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Pi_x}^2 & 0 & C_{\Pi}^x & C_{\Pi}^{xy} \\ 0 & \sigma_{\Pi_y}^2 & C_{\Pi}^{xy} & C_{\Pi}^y \\ C_{\Pi}^x & C_{\Pi}^{xy} & \sigma_{\Pi_x}^2 & C_{\Pi}^{xy} \\ C_{\Pi}^{xy} & C_{\Pi}^y & C_{\Pi}^{xy} & \sigma_{\Pi_y}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Para una superficie isotrópica, $\sigma_{\Pi_x}^2 = \sigma_{\Pi}^2 = \sigma_{\Pi_y}^2$.

La expresión resultante para el determinante es:

$$|\Lambda| = \sigma_{\Pi_x}^4 \sigma_{\Pi_y}^4 - \sigma_{\Pi_x}^4 C_{\Pi}^{y^2} - \sigma_{\Pi_y}^4 C_{\Pi}^{x^2} - 3\sigma_{\Pi_x}^2 \sigma_{\Pi_y}^2 C_{\Pi}^{xy^2} + 2\sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^{xy^2} C_{\Pi}^y + \sigma_{\Pi_y}^2 C_{\Pi}^{xy^2} (1 + C_{\Pi}^x) + (C_{\Pi}^x C_{\Pi}^y - C_{\Pi}^{xy^2})^2, \quad (2.38)$$

y para los cofactores,

$$\begin{aligned} |\Lambda|_{11} &= \sigma_{\Pi_y}^4 \sigma_{\Pi_x}^2 - \sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^{y^2} + 2C_{\Pi}^{xy^2} (C_{\Pi}^y - \sigma_{\Pi_y}^2), \\ |\Lambda|_{22} &= \sigma_{\Pi_x}^4 \sigma_{\Pi_y}^2 - \sigma_{\Pi_y}^2 C_{\Pi}^{x^2} + 2C_{\Pi}^{xy^2} (C_{\Pi}^x - \sigma_{\Pi_x}^2), \\ |\Lambda|_{33} &= \sigma_{\Pi_x}^2 \sigma_{\Pi_y}^4 - \sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^{y^2} - \sigma_{\Pi_y}^2 C_{\Pi}^{xy^2}, \\ |\Lambda|_{44} &= \sigma_{\Pi_x}^4 \sigma_{\Pi_y}^2 - \sigma_{\Pi_y}^2 C_{\Pi}^{x^2} - \sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^{xy^2}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$|\Lambda|_{12} = |\Lambda|_{21} = C_{\Pi}^{xy} \left(C_{\Pi}^{xy2} - \sigma_{\Pi_y}^2 C_{\Pi}^x + C_{\Pi}^x C_{\Pi}^y - \sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^y \right),$$

$$|\Lambda|_{13} = |\Lambda|_{31} = C_{\Pi}^{xy2} \left(\sigma_{\Pi_y}^2 - C_{\Pi}^y \right) - C_{\Pi}^x \left(\sigma_{\Pi_y}^4 - C_{\Pi}^{y2} \right),$$

$$|\Lambda|_{14} = |\Lambda|_{41} = C_{\Pi}^{xy} \left(\sigma_{\Pi_y}^2 \sigma_{\Pi_x}^2 - \sigma_{\Pi_y}^2 C_{\Pi}^x + C_{\Pi}^x C_{\Pi}^y - C_{\Pi}^{xy2} \right),$$

$$|\Lambda|_{23} = |\Lambda|_{32} = C_{\Pi}^{xy} \left(\sigma_{\Pi_x}^2 \sigma_{\Pi_y}^2 - \sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^y + C_{\Pi}^x C_{\Pi}^y - C_{\Pi}^{xy2} \right),$$

$$|\Lambda|_{24} = |\Lambda|_{42} = C_{\Pi}^{xy2} \left(\sigma_{\Pi_x}^2 - C_{\Pi}^x \right) - C_{\Pi}^y \left(\sigma_{\Pi_x}^4 - C_{\Pi}^{x2} \right),$$

$$|\Lambda|_{43} = |\Lambda|_{34} = \sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^{xy} \left(\sigma_{\Pi_y}^2 - C_{\Pi}^y \right) - \sigma_{\Pi_x}^2 C_{\Pi}^{xy} C_{\Pi}^x.$$

Con las consideraciones ya descritas, la autocorrelación de la imagen, $C_i(\xi, \eta)$, puede ser escrita como:

$$C_i(\xi, \eta) = \langle B(\Pi_x, \Pi_y) B(\Pi_x, \Pi_y) \rangle,$$

o

$$C_i(\xi, \eta) = \int \int \int \int B(\Pi_x, \Pi_y) B(\Pi_x, \Pi_y) p(\Pi_x, \Pi_y, \Pi_x, \Pi_y) d\Pi_x d\Pi_y d\Pi_x d\Pi_y.$$

(2.40)

Esta función puede ser integrada numéricamente para obtener la relación entre $C_i(\xi, \eta)$ y $C_{\Pi}(\xi, \eta)$.

De esta manera se pueden obtener relaciones entre las funciones de correlación de la imagen y de la pendiente de la superficie para el caso de superficies bidimensionales.

II.3.1. Derivación de la función de brillo basada en la óptica geométrica.

Para calcular la estadística de la imagen es necesario calcular la función de brillo bidimensional. Dada la equivalencia entre los resultados obtenidos para la función de brillo empleando la óptica geométrica y la teoría de coherencia parcial en el caso unidimensional, para el presente caso, y por simplicidad, solamente emplearemos la óptica geométrica.

Para una superficie bidimensional, denotamos por α_x y α_y los ángulos que el eje x y el eje y hacen con el plano tangente a la superficie en un punto dado; θ_d es el ángulo entre la vertical, z , y el eje óptico del sistema de detección, y θ_s es el ángulo entre la vertical y la posición media de la fuente. Los ángulos subtendidos por los diámetros de la fuente y el sistema de detección son representados por β y δd , respectivamente. Los ángulos de reflexión especular para las direcciones x e y están dados como:

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_s - 2\alpha_x, \\ \Theta_r &= \theta_s - 2\alpha_y.\end{aligned}\tag{2.41}$$

De nuevo, debido a que la fuente tiene un tamaño finito, no se tiene una sola dirección de incidencia sobre la superficie. Los intervalos angulares sobre los cuales tenemos luz incidente están dados por las condiciones:

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} \leq \theta_{os} \leq \theta_s + \frac{\beta}{2},\tag{2.42a}$$

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} \leq \Theta_{os} \leq \theta_s + \frac{\beta}{2}.\tag{2.42b}$$

Es decir, la función que describe angularmente a la fuente, $\sigma(\theta_{os}, \Theta_{os})$, se puede aproximar como:

$$\sigma(\theta_{os}, \Theta_{os}) = \text{Circ}\left(\frac{\theta_{os} - \theta_s}{\beta}, \frac{\Theta_{os} - \theta_s}{\beta}\right), \quad (2.43)$$

en donde, $\text{Circ}(x, y)$ representa la función círculo (Gaskill 1978, pág. 71).

La proyección angular de esta fuente, $\sigma_R(\theta, \Theta)$, después de la reflexión, está dada por las condiciones

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} - 2\alpha_x \leq \theta_{os} - 2\alpha_x \leq \theta_s + \frac{\beta}{2} - 2\alpha_x, \quad (2.44a)$$

$$\theta_s - \frac{\beta}{2} - 2\alpha_y \leq \Theta_{os} - 2\alpha_y \leq \theta_s + \frac{\beta}{2} - 2\alpha_y, \quad (2.44b)$$

que se puede resumir como:

$$\sigma_R(\theta, \Theta) = \text{Circ}\left(\frac{\theta - \theta_r}{\beta}, \frac{\Theta - \Theta_r}{\beta}\right). \quad (2.45)$$

Por otro lado, la pupila bidimensional del sistema de detección se puede representar por la función:

$$P(\theta, \Theta) = \text{Circ}\left(\frac{\theta - \theta_d}{\delta d_x}, \frac{\Theta - \Theta_d}{\delta d_y}\right). \quad (2.46)$$

Como en el caso unidimensional, la intensidad de luz, I , que llegará al plano de detección D depende del traslape entre las funciones $\sigma_R(\theta, \Theta)$ y $P(\theta, \Theta)$, y se puede aproximar como:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int \sigma_R(\theta, \Theta) P(\theta, \Theta) d\theta d\Theta. \quad (2.47)$$

En situaciones prácticas δd es mucho menor que β , y podemos aproximar $P(\theta, \Theta) \approx \delta(\theta - \theta_d)\delta(\Theta - \Theta_d)$, de manera que:

$$I \approx \sigma_R(\theta_d, \Theta_d) \approx \text{Circ}\left(\frac{\theta_d - \theta_r}{\beta}, \frac{\Theta_d - \Theta_r}{\beta}\right). \quad (2.48)$$

Es decir que llegará luz al plano de detección cuando:

$$\theta_r - \frac{\beta}{2} \leq \theta_d \leq \theta_r + \frac{\beta}{2}, \quad (2.49a)$$

$$\Theta_r - \frac{\beta}{2} \leq \Theta_d \leq \Theta_r + \frac{\beta}{2}, \quad (2.49b)$$

y utilizando el hecho de que $\theta_r = \theta_s - 2\alpha_x$, $\Theta_r = \theta_s - 2\alpha_y$, tenemos que:

$$\frac{\theta_s - \theta_d}{2} - \frac{\beta}{4} \leq \alpha_x \leq \frac{\theta_s - \theta_d}{2} + \frac{\beta}{4}, \quad (2.50a)$$

$$\frac{\theta_s - \Theta_d}{2} - \frac{\beta}{4} \leq \alpha_y \leq \frac{\theta_s - \Theta_d}{2} + \frac{\beta}{4}. \quad (2.50b)$$

de donde se puede observar que si el área de detección tiene simetría circular, los intervalos para α_x y α_y son iguales, en otras palabras, $\theta_d = \Theta_d$.

Definiendo $\Pi_x = \tan \alpha_x$, $\Pi_y = \tan \alpha_y$, $\gamma = (\theta_s - \theta_d)/2$, y $\Pi_0 = \tan \gamma$ y utilizando la misma relación que en el caso unidimensional para $\tan\left(\gamma \pm \frac{\beta}{4}\right)$, obtenemos las siguientes condiciones para las pendientes:

$$\Pi_0 - (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4} \leq \Pi_x \leq \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4}, \quad (2.51a)$$

$$\Pi_0 - (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4} \leq \Pi_y \leq \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2) \frac{\beta}{4}, \quad (2.51b)$$

Definimos entonces la "función de brillo", $\text{Circ}(\Pi_x, \Pi_y)$, como la función que determina la cantidad de luz que llega al plano de detección D, como función de las pendientes:

$$\begin{aligned}
 B(\Pi_x, \Pi_y) &= \text{Circ} \left(\frac{\Pi_x - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2)^{\frac{\beta}{2}}}, \frac{\Pi_y - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2)^{\frac{\beta}{2}}} \right) \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{en el intervalo dado por ec. (2.51)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

Al igual que la expresión (2.15), la ec. (2.52) nos dice que la geometría del problema selecciona una región de las pendientes de la superficie, traduciendo estas pendientes en puntos brillantes en la imagen $i(x, y)$.

III. PROBLEMA INVERSO

En este capítulo se presentan las relaciones que permiten obtener información sobre las propiedades estadísticas de las alturas de la superficie a partir de propiedades estadísticas de la imagen. Se analiza numéricamente la relación entre las funciones de correlación de la imagen y de las alturas de la superficie para estudiar las condiciones bajo las cuales es posible llevar a cabo el proceso de inversión. Se obtienen las expresiones que relacionan las variancias de la intensidad en la imagen y de las alturas de la superficie. Los resultados se muestran gráficamente para superficies con variaciones de altura tanto en una como en dos direcciones.

III.1. Relaciones entre las variancias de la imagen, pendiente y superficie.

III.1.1. Caso unidimensional.

El promedio de la imagen, μ_i , se puede escribir como (Papoulis, 1981, pág. 138):

$$\mu_i = \langle i(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\Pi)p(\Pi)d\Pi, \quad (3.1)$$

donde $B(\Pi)$ es la función de brillo unidimensional que fué definida en el capítulo II, a través de la ec.(2.15) y $p(\Pi)$ es la función de densidad de probabilidad de pendientes en una dimensión. Sustituyendo en la ec.(3.1) las expresiones que se obtuvieron para $B(\Pi)$ y $p(\Pi)$, se obtiene:

$$\mu_i = \langle i(x) \rangle = \frac{1}{\sigma_{\Pi}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{\Pi - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2)^{\frac{\beta}{2}}}\right) \exp\left[-\frac{\Pi^2}{2\sigma_{\Pi}^2}\right] d\Pi, \quad (3.2)$$

Definiendo $a = \Pi_0 - (1 + \Pi_0^2)(\beta/4)$ y $b = \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2)(\beta/4)$, se llega a:

$$\mu_i = \langle i(x) \rangle = \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sigma_{\Pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_{\Pi}}\right). \quad (3.3)$$

La variancia de la imagen, $i(x)$, se define como (Papoulis, 1981, pág. 144):

$$\sigma_i^2 = \langle i^2(x) \rangle - \langle i(x) \rangle^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [B(\Pi) - \mu_i]^2 p(\Pi) d\Pi. \quad (3.4)$$

Como $B(\Pi) = B^2(\Pi)$ se tiene que $\langle i^2(x) \rangle = \langle i(x) \rangle$, por tanto:

$$\sigma_i^2 = \langle i(x) \rangle - \langle i(x) \rangle^2 = \mu_i(1 - \mu_i), \quad (3.5)$$

y substituyendo la expresión de $\langle i(x) \rangle$, ec.(3.3), en la ec.(3.5), se llega a:

$$\sigma_i^2 = \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sigma_{\Pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_{\Pi}}\right) - \left[\operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sigma_{\Pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sigma_{\Pi}}\right) \right]^2, \quad (3.6)$$

la cual es la relación requerida entre la variancia de la imagen, σ_i^2 , y la variancia de las pendientes de la superficie, σ_{Π}^2 .

La relación (3.6) se muestra gráficamente en la figura 6, para algunos casos típicos, utilizando la geometría descrita en el capítulo II para el caso unidimensional, con $\theta_d = 0$ y $\beta = 0.68^\circ$. En el eje horizontal tenemos la variancia de pendientes superficiales, σ_{Π}^2 , y en el eje vertical tenemos la variancia de la intensidad de la imagen, σ_i^2 . En la figura se puede apreciar la dependencia de esta relación con la posición angular de la fuente, θ_s , recordando que la dirección de detección es normal a la superficie, $\theta_d = 0$, y que $\beta = 0.68^\circ$. De la gráfica, se observa también que para ángulos de incidencia pequeños (0-10 grados) y valores de variancia de pendientes también pequeños se pueden obtener valores de variancia de la intensidad de la imagen

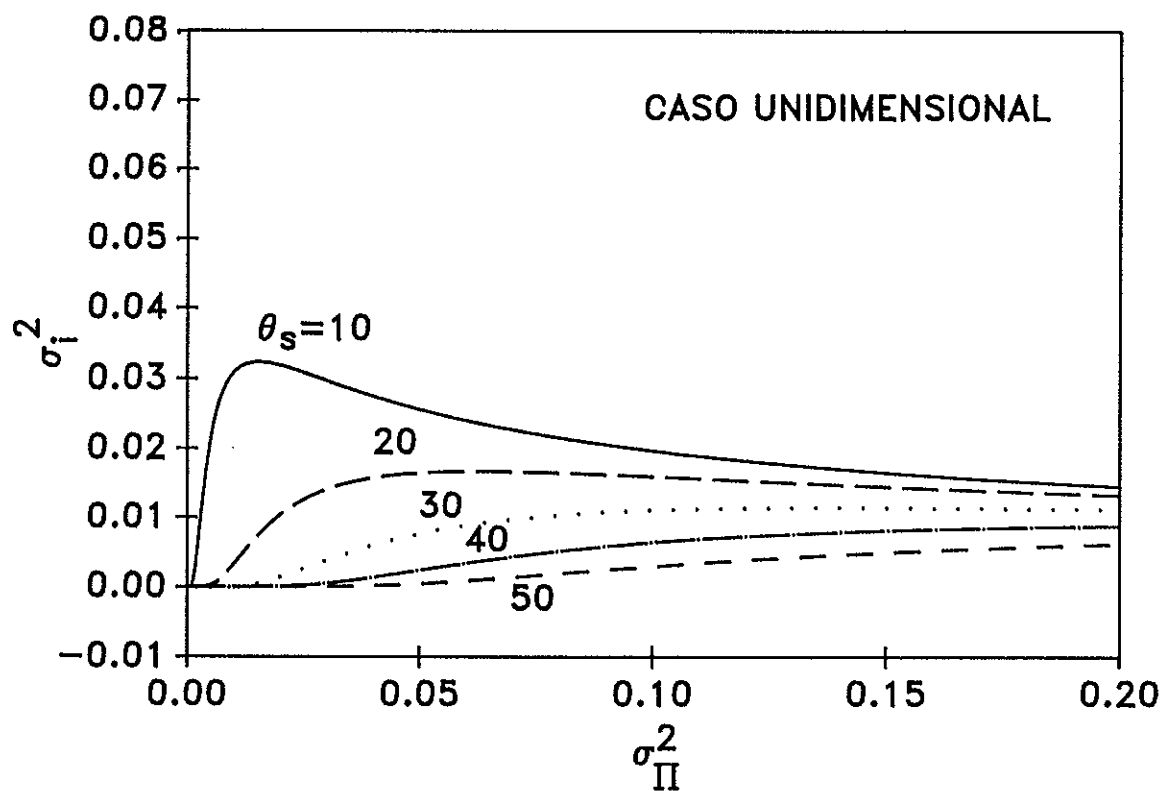


Figura 6. Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales con la variancia de la intensidad de la imagen. Caso unidimensional.

relativamente grandes. De la ec. (3.6), puede verse que este comportamiento es independiente de la forma que pudiera tener el espectro de potencia de las alturas de la superficie que se esté analizando, ya que ésta relación depende únicamente de la función de densidad de probabilidad de las pendientes y de la geometría del experimento.

De la figura 6 se puede ver también que en ciertos casos, si solamente se tienen datos correspondientes a un valor de θ_s , no es posible obtener la variancia de la pendiente, σ_{Π}^2 , debido a que para un valor de σ_i^2 tendremos dos posibles valores de σ_{Π}^2 . Para resolver este problema, es necesario procesar imágenes que corresponden a dos o más ángulos de incidencia diferentes y seleccionar un valor de variancia de pendientes que sea consistente con todos estos datos.

La relación entre σ_{Π} y σ_{ξ} puede obtenerse de la ec.(2.1) si se conoce la función de correlación de alturas de la superficie. El procedimiento para hacer esto será descrito en la sección III.2.

III.1.2. Caso bidimensional.

Al igual que en el caso anterior, el promedio μ_i , se define como:

$$\mu_i = \langle i(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\Pi_x, \Pi_y) p(\Pi_x, \Pi_y) d\Pi_x d\Pi_y, \quad (3.7)$$

donde $B(\Pi_x, \Pi_y)$ es la función de brillo bidimensional que fué definida en el capítulo II, a través de la ec. (2.52) y $p(\Pi_x, \Pi_y)$ es la función de densidad de probabilidad que describe las fluctuaciones de las pendientes. Sustituyendo en la ec. (3.7) las expresiones que se obtuvieron para $B(\Pi_x, \Pi_y)$ y $p(\Pi_x, \Pi_y)$, se obtiene:

$$\mu_i = \langle i(x) \rangle = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Pi_x}\sigma_{\Pi_y}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Circ} \left(\frac{\Pi_x - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2)^{\frac{\beta}{2}}}, \frac{\Pi_y - \Pi_0}{(1 + \Pi_0^2)^{\frac{\beta}{2}}} \right) \exp \left[-\frac{\sigma_{\Pi_y}^2 \Pi_x^2 + \sigma_{\Pi_x}^2 \Pi_y^2}{2\sigma_{\Pi_x}^2 \sigma_{\Pi_y}^2} \right] d\Pi_x d\Pi_y. \quad (3.8)$$

Definiendo: $a = \Pi_0 + r$, $b = \Pi_0 - r$, $c = \Pi_0 + \sqrt{r^2 - (\Pi_x - \Pi_0)^2}$,

$d = \Pi_0 - \sqrt{r^2 - (\Pi_x - \Pi_0)^2}$, y $r = \Pi_0 + (1 + \Pi_0^2)^{\frac{\beta}{4}}$; la ecuación (3.8) puede escribirse como:

$$\mu_i = \langle i(x) \rangle = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Pi_x}\sigma_{\Pi_y}} \int_b^a \int_d^c \exp \left[-\frac{\sigma_{\Pi_y}^2 \Pi_x^2 + \sigma_{\Pi_x}^2 \Pi_y^2}{2\sigma_{\Pi_x}^2 \sigma_{\Pi_y}^2} \right] d\Pi_x d\Pi_y, \quad (3.9)$$

Como en el caso anterior, $B(\Pi_x, \Pi_y) = B^2(\Pi_x, \Pi_y)$, de tal manera que para la variancia, σ_i^2 , se obtiene la misma relación que la ec.(3.5), sólo que para este caso μ_i está definida por la ec.(3.9).

III.1.2.1. Caso isotrópico.

Para este caso, $\sigma_{\Pi_x}^2 = \sigma_{\Pi_y}^2 = \sigma_{\Pi}^2$. Por lo tanto, la expresión (3.9) que se encontró para definir el promedio, μ_i , se puede escribir como:

$$\mu_i = \langle i(x) \rangle = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Pi}^2} \int_b^a \int_d^c \exp\left[-\frac{\Pi_x^2 + \Pi_y^2}{2\sigma_{\Pi}^2}\right] d\Pi_x d\Pi_y, \quad (3.10)$$

donde los límites de integración se conservan. La expresión para la variancia se encuentra al sustituir la ec.(3.10) en la ec.(3.5).

Para estudiar el comportamiento de la relación que existe entre la variancia de la imagen y la variancia de las pendientes, la figura 7 muestra en detalle la situación geométrica considerada. La posición de la fuente, σ , está dada por los ángulos θ_s y ϕ_s y la posición del sistema óptico de detección, D , está dada por los ángulos θ_d y ϕ_d . La figura 8 muestra gráficamente la relación entre la variancia de la imagen y variancia de las pendientes para el caso particular en que θ_s varía de 10 a 50 grados y ϕ_s y θ_d tienen un valor de cero. En otras palabras, la fuente está en el plano $x - z$ y el sistema óptico de detección está en el zenith, a lo largo del eje z .

Las curvas que se muestran en la figura 8 fueron obtenidas por integración numérica de la ec.(3.10) y con ayuda de la ec.(3.5). En el eje horizontal se tiene la variancia de las pendientes de la superficie y en el eje vertical se tiene la variancia de la intensidad de la imagen. Esta figura muestra algunas diferencias con respecto a la figura 6. Se puede ver que la variancia de σ_i^2 con σ_{Π}^2 es más abrupta, y que para valores grandes de σ_{Π}^2 hay muy poca diferencia en los valores de σ_i^2 . Se notan también comportamientos diferentes al cambiar el ángulo de incidencia de la luz. Por ejemplo, en la figura 8 se puede ver que hay cruzamientos entre las curvas.

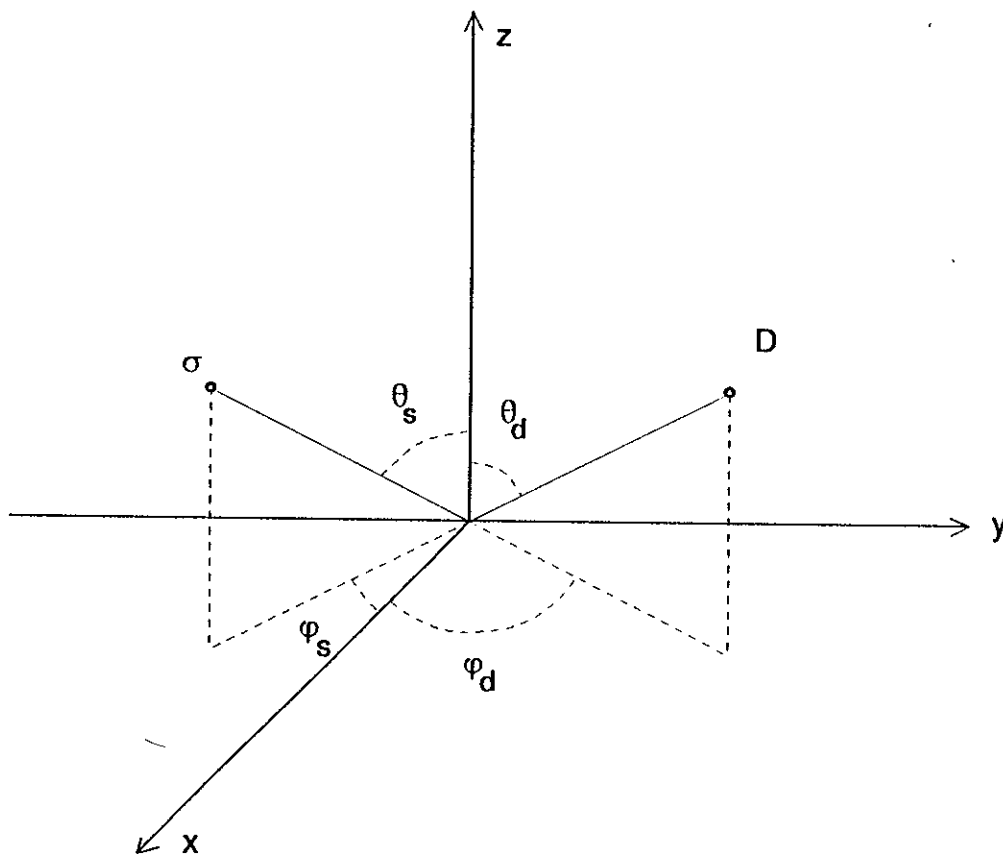


Figura 7. Posición geométrica de la fuente y del sistema óptico de detección.

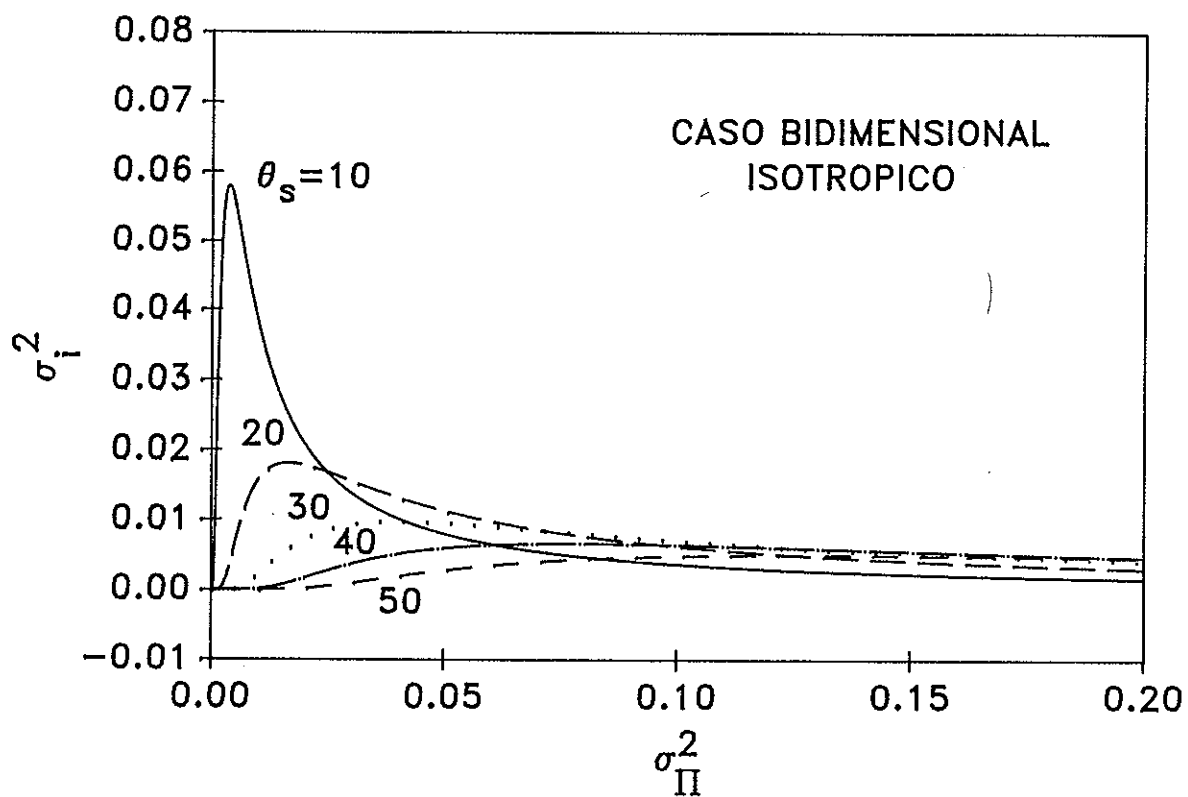


Figura 8. Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional isotrópico.

III.1.2.2. Caso anisotrópico.

Para este caso, la ec. (3.9) se sustituye en la ec.(3.5) para encontrar la expresión correspondiente para la variancia de la intensidad de la imagen con θ_d y ϕ_s igual a cero.

Consideramos en este caso la misma geometría que en el caso anterior y una superficie con escalas espaciales distintas en las direcciones x y y . La figura 9 muestra gráficamente la relación entre la variancia de la intensidad de la imagen y la variancia de las pendientes superficiales para diferentes ángulos de incidencia de la luz. Esta figura presenta dos ejemplos muy particulares en los cuales hemos fijado el valor de $\sigma_{n_y}^2$ y mostramos la variación de σ_i^2 con $\sigma_{n_x}^2$. En la figura 9a $\sigma_{n_y}^2 = 0.02$, y se puede observar un comportamiento similar al del caso isotrópico, aunque para valores grandes de la variancia de las pendientes, las curvas tienen un comportamiento más parecido al caso unidimensional. Esto se debe a que para el valor de variancia de pendientes utilizado en el ejemplo, la superficie bidimensional es prácticamente una superficie unidimensional, con variaciones "lentas" en la dirección y . Por otro lado, en la figura 9b se muestra un caso con pendientes en la dirección y más importantes.

Además, suponiendo una función de correlación Gaussiana, la relación entre las variancias de las pendientes en las direcciones x y y se puede calcular de las ecs. (2.33) y (2.34), resultando:

$$l_x^2 \sigma_{n_x}^2 = l_y^2 \sigma_{n_y}^2, \quad (3.11)$$

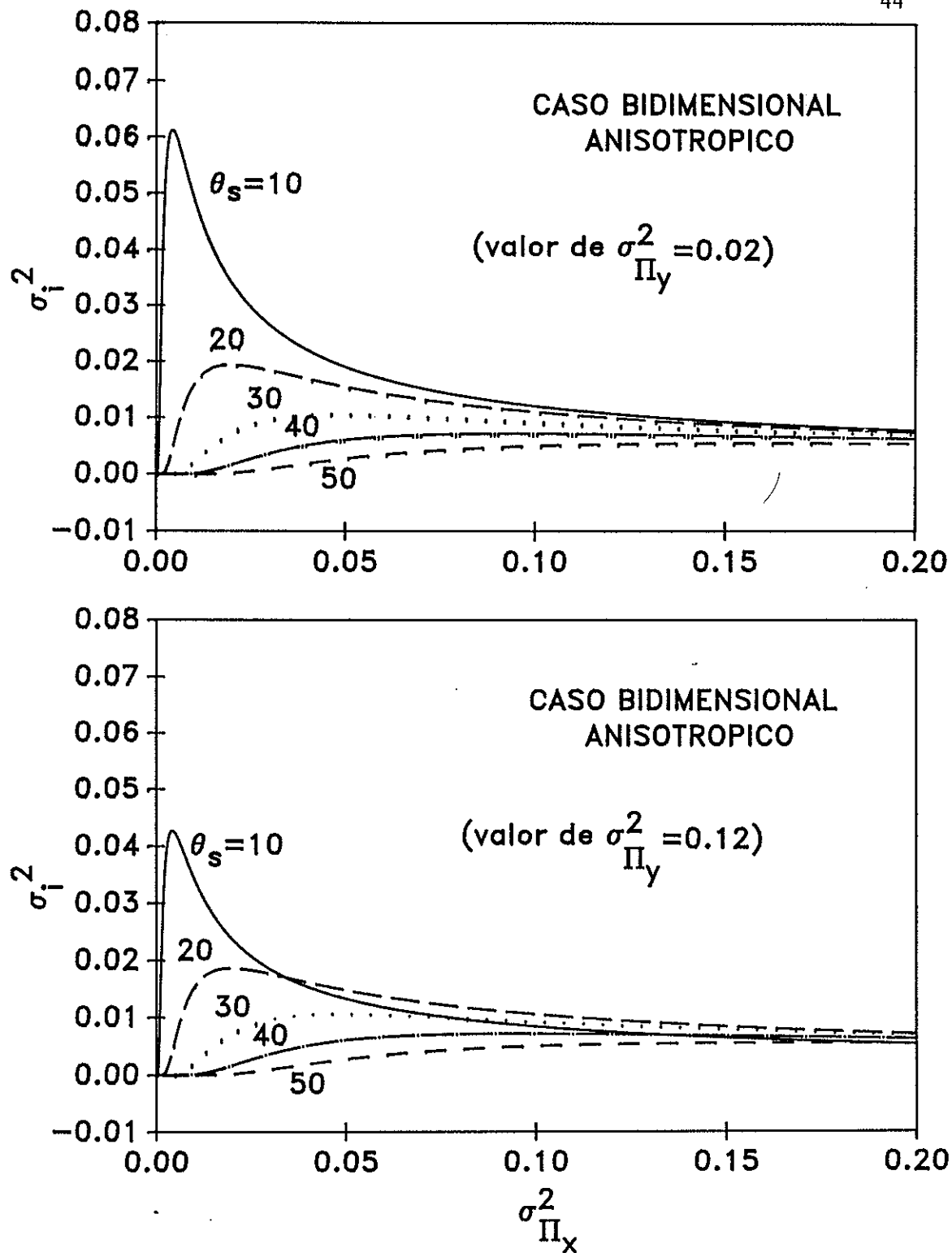


Figura 9. Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales en la dirección x con la variancia de las intensidades de la imagen. Caso bidimensional anisotrópico. a) Para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.02. b) Para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.12.

donde l_x , l_y son las longitudes de correlación de la superficie para las direcciones x y y respectivamente. Es importante señalar que la relación (3.11) solamente es válida para el caso en el que la función de correlación de las alturas de la superficie es Gaussiana.

III.2. Relaciones entre las funciones de correlación de la imagen y de las alturas de la superficie.

III.2.1. Caso unidimensional.

Como se mencionó anteriormente, nuestro análisis involucra tres procesos aleatorios: el perfil de la superficie, $\zeta(x)$, sus pendientes, $\Pi(x)$, y la imagen, $i(x)$. Cada proceso tiene una función de correlación y, como se mostró en el capítulo II, las tres funciones están relacionadas entre sí.

La relación entre la función de correlación de las alturas de la superficie, $C_\zeta(\tau)$, y la función de correlación de las pendientes de la superficie, $C_\Pi(\tau)$, está dada por la ec. (2.1), y la relación entre $C_\Pi(\tau)$ y la función de correlación de la imagen, $C_i(\tau)$, está dada por la ec. (2.3). Para llevar a cabo el proceso de inversión utilizando estas dos expresiones se deben de cumplir ciertas condiciones. Entre otras, se requiere que exista una correspondencia uno a uno entre las cantidades involucradas.

Utilizando la expresión (2.1) los datos procesados se pueden integrar numéricamente dos veces, de tal manera que obtengamos información de la función de correlación de las alturas de la superficie, $C_\zeta(\tau)$, a partir de la función de correlación

de las pendientes, $C_{\Pi}(\tau)$. Sin embargo, la relación (2.3) es una expresión más complicada, de la cual no podemos obtener una relación analítica. En este caso es posible obtener por integración numérica una relación entre los valores C_i que toma la función de correlación de la imagen, $C_i(\tau)$, y los valores C_{Π} que toma la función de correlación de las pendientes de la superficie, $C_{\Pi}(\tau)$. Consideramos ahora dos ejemplos particulares. La figura 10 muestra gráficamente, para un par de casos, la relación entre estos dos valores para diferentes ángulos de incidencia de la luz, θ_s . Para todos los casos, la posición angular de la cámara o detector, θ_d , es cero. Por ejemplo, en la figura 10a podemos observar que para $\sigma_{\Pi} = 0.2121$, el intervalo angular $\Delta\theta_s$, de 0° a 10° , no es adecuado para llevar a cabo el proceso de inversión, debido a que se obtiene una relación numérica multivaluada. En otras palabras, para un valor de la función de correlación de la imagen, C_i , se obtienen dos valores diferentes para la función de correlación de las pendientes de la superficie, C_{Π} . Por supuesto que estas relaciones pueden cambiar, aún manteniendo los mismos valores para los ángulos de incidencia, θ_s , si hacemos variar la posición angular del detector, θ_d . Se observa asimismo que, en este ejemplo, para valores de θ_s mayores que 20° es posible llevar a cabo el proceso de inversión.

La Fig. 10b muestra la relación numérica entre, C_i y C_{Π} , para el caso en que $\sigma_{\Pi} = 0.4242$. Observamos que el comportamiento es diferente al mostrado en la figura 10a. La relación entre C_i y C_{Π} depende críticamente del valor de σ_{Π} . Es entonces, muy importante determinar la variancia de las pendientes, σ_{Π}^2 , de manera confiable para poder escoger valores adecuados de θ_s y θ_d , y llevar a cabo el proceso de inversión.

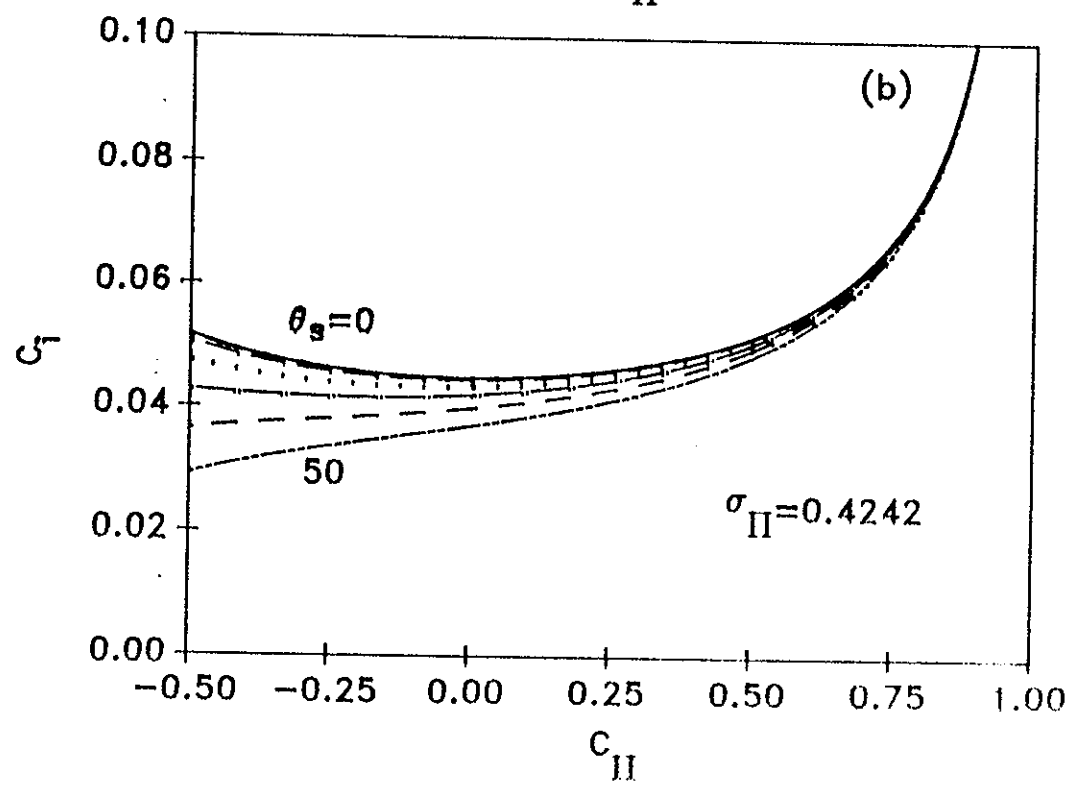
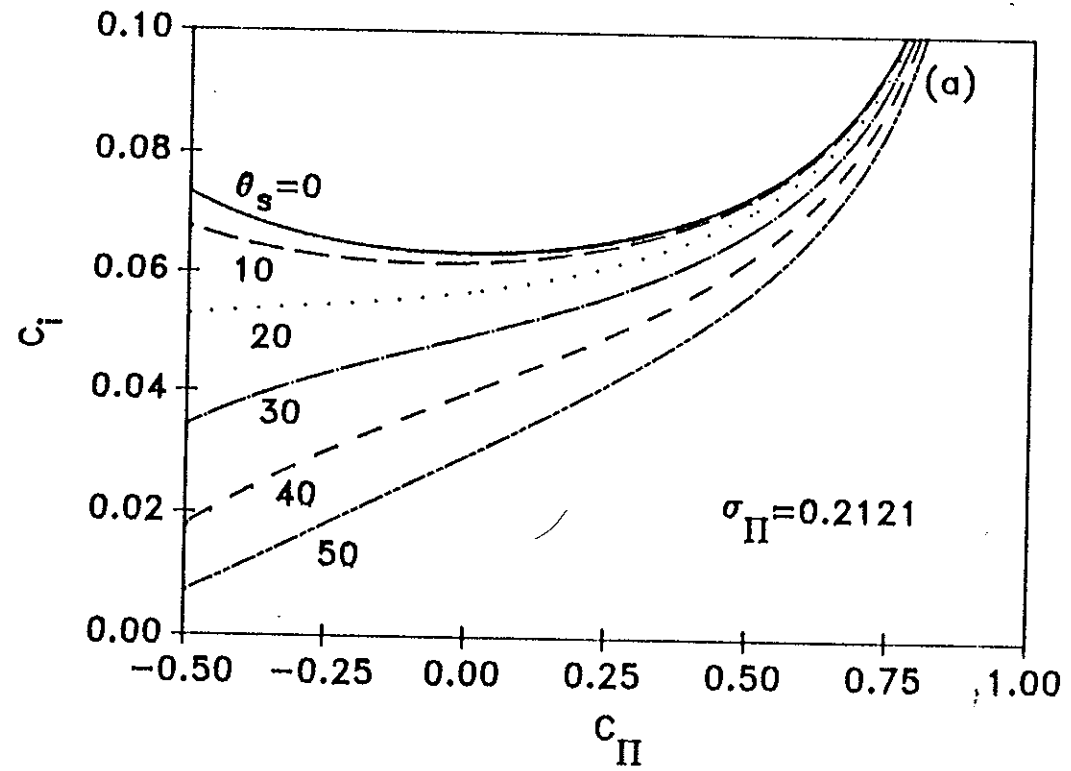


Figura 10. Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso unidimensional.

Vemos así que, bajo condiciones adecuadas, es posible obtener información de la función de correlación de las pendientes de la superficie, $C_{\Pi}(\tau)$, a partir de la función de correlación de la imagen, $C_i(\tau)$. También, de la ec. (2.1) es posible obtener la función de correlación de las alturas de la superficie, $C_z(\tau)$, a partir de $C_{\Pi}(\tau)$ y de esta manera, el proceso de inversión requerido para la determinación de la autocorrelación de la superficie estaría completo.

III.2.2 Caso bidimensional.

La relación entre la función de correlación de la superficie, $C_z(\xi, \eta)$, y la función de correlación de las pendientes, $C_{\Pi}(\xi, \eta)$, está dada por las ecs.(2.33) a (2.35). La relación entre la función de correlación de las pendientes, $C_{\Pi}(\xi, \eta)$, y la función de correlación de la imagen, $C_i(\xi, \eta)$, está dada por la ec. (2.40). Como se observó en el capítulo anterior, la función de densidad de probabilidad $p(\Pi_x, \Pi_y, \Pi_x', \Pi_y')$ está contenida en la ec. (2.40), y a su vez, las funciones de correlación de las pendientes, $C_{\Pi}(\xi, \eta)$, están contenidas en esta función de densidad de probabilidad. De manera que es posible obtener una relación gráfica entre $C_i(\xi, \eta)$ y $C_{\Pi}(\xi, \eta)$.

Consideramos ahora un ejemplo en el cual se observa una superficie isotrópica con $\sigma_{\Pi} = 0.2121$. Consideramos, en este ejemplo, únicamente las variaciones a lo largo de la dirección x en la imagen. El resultado de integrar numéricamente la ec.(2.40) se encuentra graficado en la figura 11, mostrando la relación entre los valores que toma la función de correlación de la imagen, $C_i(\xi, \eta)$, y los valores que toman las funciones de correlación de las pendientes de la superficie, $C_{\Pi}^x(\xi, \eta)$ y $C_{\Pi}^y(\xi, \eta)$. En el eje horizontal tenemos valores correspondientes a la función de correlación de

las pendientes, y en el eje vertical tenemos valores de la función de correlación de la imagen. Este ejemplo muestra ambas relaciones para cuatro diferentes ángulos de incidencia, θ_s , recordando que estamos considerando el caso θ_d y $\phi_s = 0$. En estas gráficas podemos observar que a cada valor de C_i le corresponde sólo un valor de C_{Π}^x , y sólo un valor de C_{Π}^y . En este ejemplo, C_{Π}^y siempre es cero ya que se está considerando sólo la dirección x . De esta manera, se puede calcular la función de correlación de pendientes, e integrando dos veces este resultado, la función de correlación de alturas de la superficie.

Vemos así que es posible obtener información de la función de correlación de las pendientes de la superficie, $C_{\Pi}(\xi, \eta)$, a partir de la función de correlación de la imagen, $C_i(\xi, \eta)$, y que empleando las ecs. (2.33) ó (2.34) es posible obtener la función de correlación de las alturas de la superficie, $C_{\zeta}(\xi, \eta)$. De esta manera, el proceso de inversión puede también completarse para el caso bidimensional.

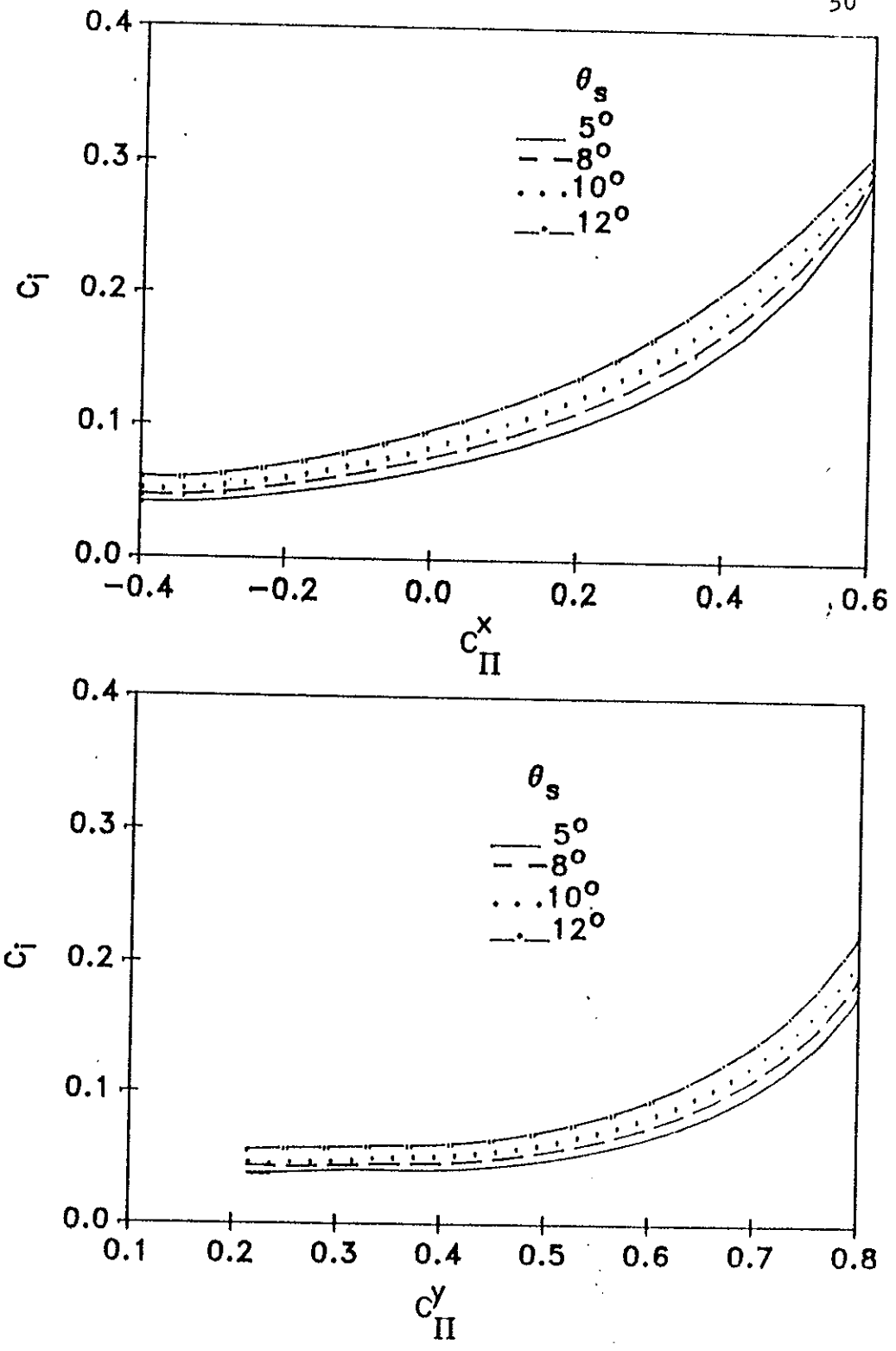


Figura 11. Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional.

IV. EJEMPLOS NUMERICOS.

En los dos capítulos anteriores se presentó un análisis que hace explícita la relación entre la función de correlación de las alturas de una superficie con la función de correlación de la imagen o patrón de brillo.

En esta sección se presentan algunos ejemplos numéricos que muestran la aplicabilidad de la técnica descrita para la obtención del espectro de potencia de una superficie a partir de imágenes remotas. Primeramente se presentan casos de superficies unidimensionales con dos clases de espectros: tres espectros que describen superficies de una sola escala, y el espectro de Pierson-Moskowitz que describe superficies de varias escalas. Con el modelo de Pierson-Moskowitz se generan, de una manera simple, superficies con características similares a las superficies oceánicas. En este último modelo el espectro está completamente determinado por un parámetro que se asocia a la velocidad del viento. Ya que el objetivo aquí es probar la técnica descrita para relacionar la autocorrelación de las alturas de una superficie marina con la autocorrelación de los patrones de brillo, el modelo de Pierson-Moskowitz es particularmente interesante para este estudio. Se presentan algunas simulaciones numéricas empleando superficies con estas dos clases de espectros.

En una segunda instancia se consideró el caso bidimensional. Para esto se generaron numéricamente superficies que representan realizaciones de un proceso aleatorio Gaussiano con espectro Gaussiano. Se consideraron tanto superficies

isotrópicas como anisotrópicas. Para este análisis se utilizó una función de brillo Gaussiana. Esta función de brillo es una aproximación sencilla que nos permite la obtención de resultados analíticos.

En los ejemplos presentados se observa que los resultados numéricos obtenidos con el modelo concuerdan bien con los resultados analíticos.

IV.1. Superficies unidimensionales de una sola escala.

Para este caso se generaron numéricamente algunas superficies unidimensionales con estadísticas Gaussianas, utilizando el método espectral descrito por Thorsos (1988). Se emplearon tres diferentes espectros que llamamos, Gaussiano, Rectángulo y Triángulo al cuadrado. Estos espectros están definidos de la siguiente manera, respectivamente:

$$S_1(K_x) = l\sqrt{\pi} \sigma_\zeta^2 \exp\left[-\frac{K_x^2 l^2}{4}\right], \quad (4.1)$$

$$S_2(K_x) = l\sigma_\zeta^2 \text{ rect}[lK_x], \quad (4.2)$$

$$S_3(K_x) = l\sqrt{\pi} \sigma_\zeta^2 \text{ tri}^2[lK_x], \quad (4.3)$$

donde el parámetro l puede ser identificado con la longitud de correlación, K_x es el número de onda y S es la densidad espectral de potencia.

Se define la función $\text{tri}(x)$ como

$$\begin{aligned} \text{tri}\left[\frac{x-x_0}{b}\right] &= 0 & \left|\frac{x-x_0}{b}\right| &\geq 1, \\ \text{tri}\left[\frac{x-x_0}{b}\right] &= 1 - \left|\frac{x-x_0}{b}\right| & \left|\frac{x-x_0}{b}\right| &< 1. \end{aligned}$$

Las funciones de correlación correspondientes a las funciones espectrales denotadas por las ecs. (4.1-4.3) son

$$C_{\zeta_1}(\tau) = \sigma_{\zeta}^2 \exp\left[-\frac{\tau^2}{l^2}\right], \quad (4.4)$$

$$C_{\zeta_2}(\tau) = \sigma_{\zeta}^2 \text{sinc}\left[\frac{\tau}{l}\right], \quad (4.5)$$

$$C_{\zeta_3}(\tau) = \frac{3l^2\sigma_{\zeta}^2}{10\tau^2} \left[1.0 - \text{sinc}\left(\frac{2\sqrt{5}\tau}{l\pi}\right) \right], \quad (4.6)$$

donde $\text{sinc}x = \sin\pi x/\pi x$, y τ es la variable que denota el corrimiento entre dos puntos de la superficie.

Las funciones de densidad espectral y las funciones de correlación definidas por las ecs. (4.1 - 4.6) están relacionadas, respectivamente, por el siguiente par de transformadas de Fourier:

$$S(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(x)\exp[-iux]dx,$$

$$C(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(u)\exp[iux]du,$$

donde, además, podemos definir la función de densidad espectral $S(u)$ como:

$$S(u) = \langle |\zeta(u)|^2 \rangle,$$

donde,

$$\zeta(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x) \exp[-iux] dx.$$

Se utilizaron los espectros definidos por las ecuaciones (4.1-4.3) debido a que sus funciones de correlación son fáciles de obtener mediante una transformada de Fourier, y de esta manera, las comparaciones entre los procesos de inversión, simulaciones numéricas y las fórmulas analíticas, pueden realizarse fácilmente (Figs. 12, 13 y 14).

Para comprobar la metodología presentada en los capítulos II y III se realizaron algunas simulaciones numéricas del problema. Cada realización unidimensional, $\zeta(x)$, así como su derivada, $\Pi(x)$, consistió de 16,384 puntos con intervalos de muestreo de dos centímetros. Para los tres ejemplos que se muestran, la longitud de correlación, l , fué de 100 cm. con una desviación estándar de altura de superficie, σ_z , de 14 cm. El parámetro β , correspondiente al diámetro aparente del Sol, fué tomado como 0.68° . La geometría considerada fué la misma que se describió en el capítulo II para el caso unidimensional, con un ángulo $\theta_s = 30^\circ$, y un ángulo $\theta_d = 0^\circ$ para los tres casos.

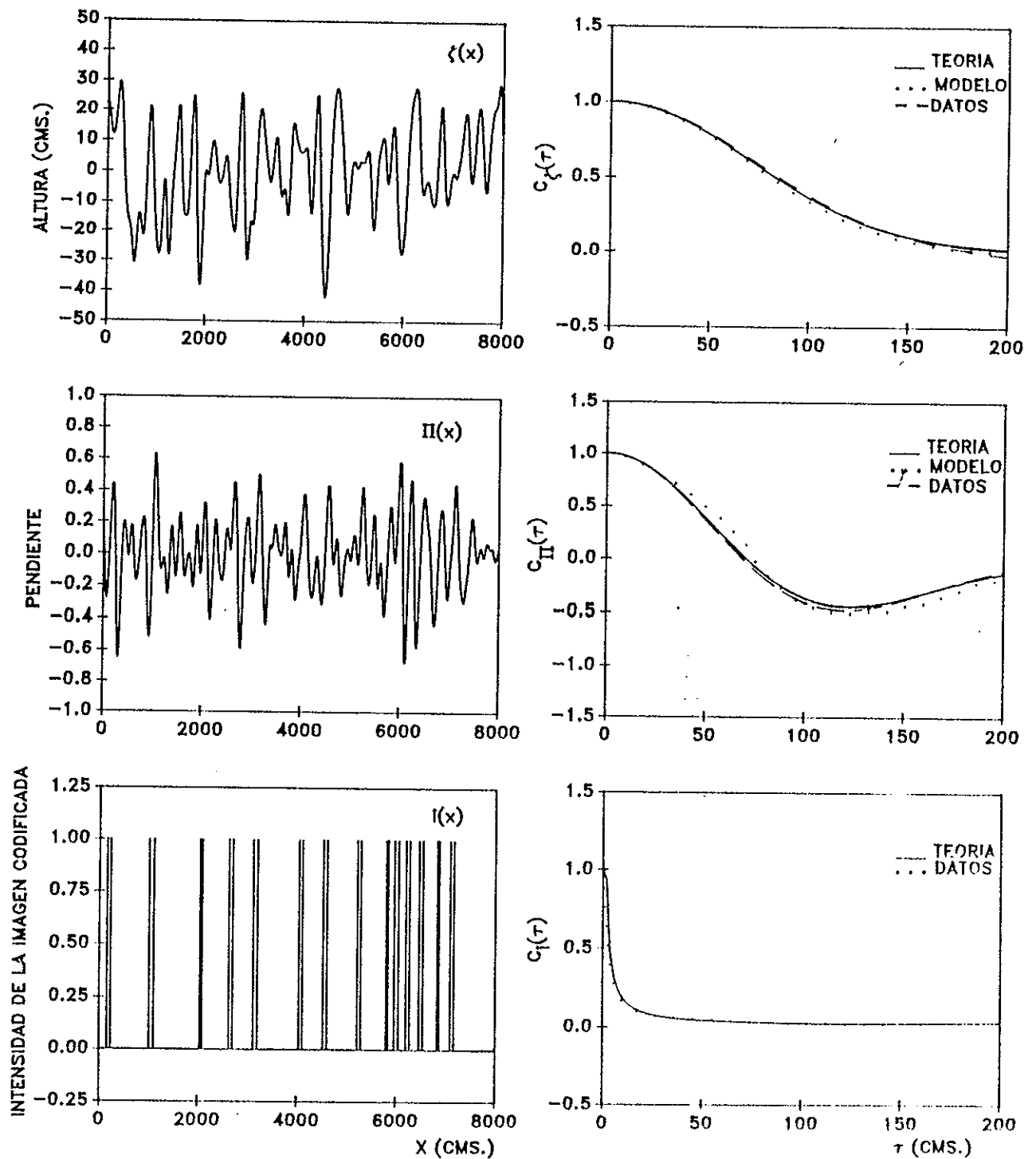


Figura 12. Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia Gaussiano.

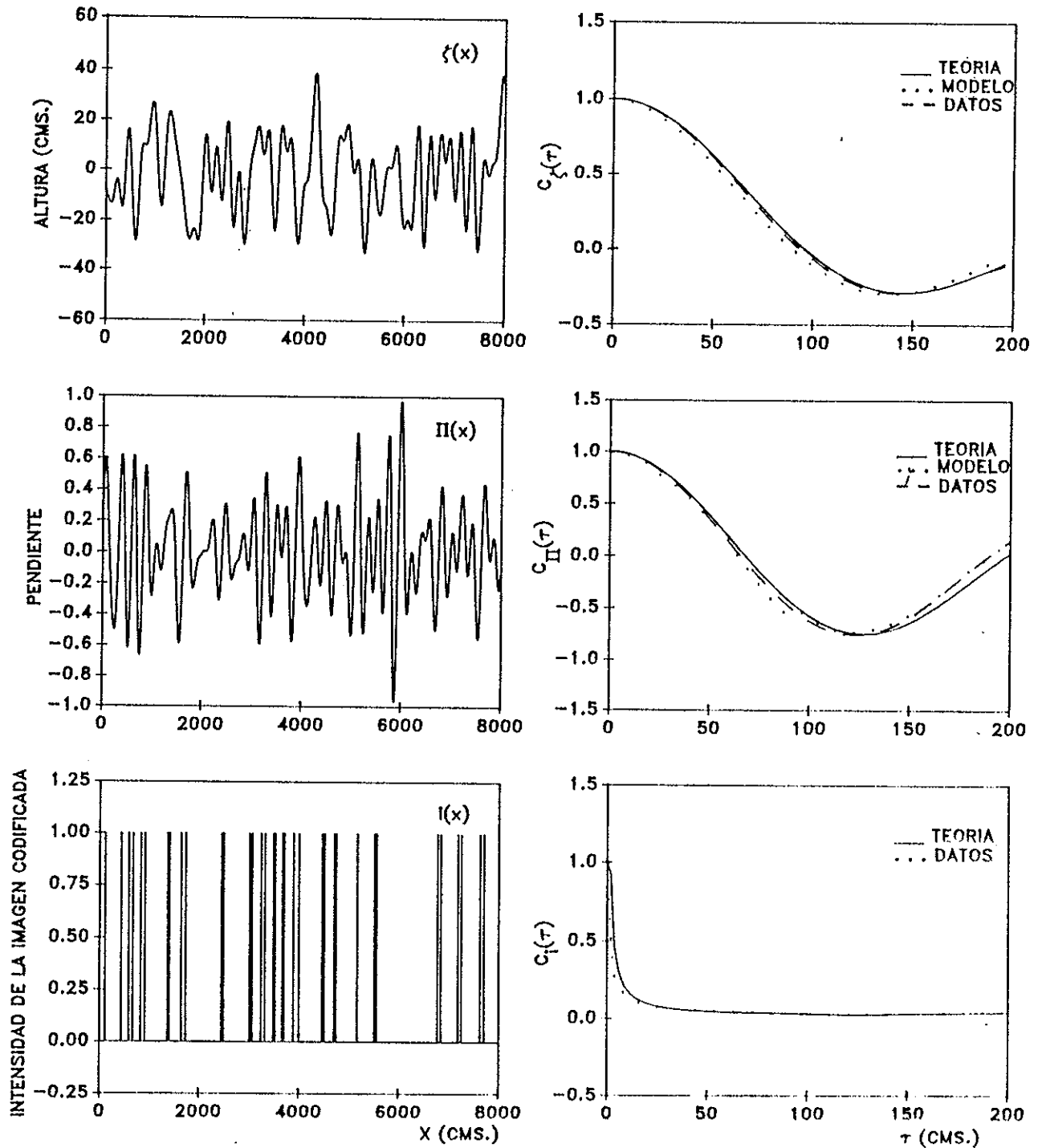


Figura 13. Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia Rectangular.

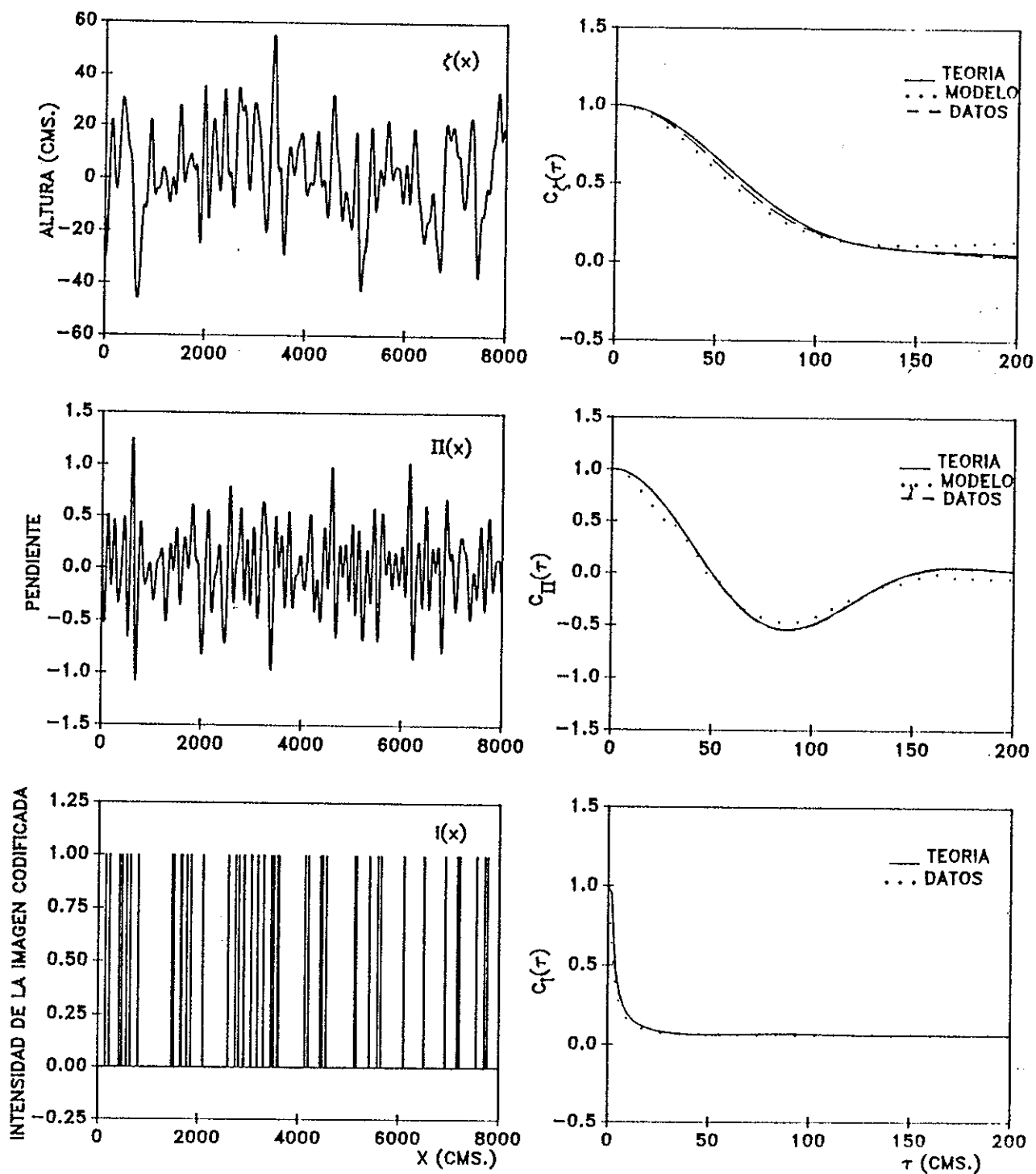


Figura 14. Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia Triángulo al cuadrado.

Las figuras 12, 13 y 14 muestran gráficamente los resultados de nuestros ejemplos numéricos. Estas figuras corresponden a los diferentes espectros denotados por las ecs. (4.1-4.3), respectivamente. Se presentan en estas figuras funciones muestra de las alturas de la superficie, $\zeta(x)$, de las pendientes, $\Pi(x)$ y de la imagen, $i(x)$. En el lado derecho se muestran las respectivas funciones de correlación. Se muestran las curvas teóricas (línea continúa), las correspondientes a los datos generados numéricamente (línea cortada), y las calculadas a partir de la imagen (línea punteada). La función muestra de la imagen, $i(x)$, fué obtenida siguiendo el procedimiento que se mostró en la figura 4, considerando la geometría descrita para el experimento numérico. Como puede observarse, del lado derecho de las Figs. 12, 13 y 14, las funciones de correlación de alturas de la superficie, $C_{\zeta}(\tau)$, graficadas con línea continua corresponden a las funciones de correlación teóricas definidas por las ecs. (4.4 - 4.6). Las funciones de correlación de pendientes de la superficie, $C_{\Pi}(\tau)$, graficadas con línea continúa corresponden al resultado analítico que se obtiene al derivar dos veces las funciones de correlación de alturas, ecs. (4.4 - 4.6), de acuerdo a la ec. (2.1). La función de correlación de la imagen, $C_i(\tau)$, representada por la línea continúa corresponde a la relación definida por la ec.(2.3). Como podemos observar, los resultados del modelo concuerdan bastante bien, tanto con los datos generados numéricamente, como con las curvas teóricas. Los datos correspondientes a la función de correlación de pendientes, $C_{\Pi}(\tau)$, línea punteada, Figs. 12, 13 y 14, fueron obtenidos empleando el proceso de inversión presentado en el capítulo III; y los datos

correspondientes a la función de correlación de alturas, $C_{\zeta}(\tau)$, línea punteada, Figs. 12, 13 y 14, fueron obtenidos después de integrar dos veces las funciones de correlación de las pendientes, como se explicó en el capítulo III.

Para reducir el ruido estadístico en la estimación numérica de $C_i(\tau)$, se realizaron promedios sobre 400 funciones de correlación, estimadas a partir de diferentes imágenes, $i(x)$, estadísticamente equivalentes. Debemos hacer notar que las correlaciones $C_i(\tau)$, deben estimarse de manera confiable y con muy poco ruido, pues para argumentos grandes, errores pequeños en la estimación de $C_i(\tau)$ pueden llevar a errores grandes en la estimación de $C_{\Pi}(\tau)$.

La figura 15 muestra los espectros de potencia correspondientes a los dos primeros casos (Gaussiano y Rectángulo), obtenidos tomando la transformada de Fourier de la función de correlación de las alturas. Podemos observar que para números de onda grandes, los resultados del proceso de inversión (puntos) concuerdan mejor con los valores de la simulación numérica (línea cortada) que con los resultados analíticos (línea continua). Esto es de esperarse, debido a que el proceso de inversión fué llevado a cabo utilizando la autocorrelación de la imagen, que fué calculada utilizando los valores de la simulación numérica.

Se pueden notar algunas fluctuaciones en estos resultados, ya que sólo se utilizaron 1024 valores de la función de autocorrelación de las alturas de la superficie para obtener el espectro. Sin embargo, estas fluctuaciones pueden ser reducidas de la misma forma en que el ruido estadístico fué reducido en la autocorrelación de la

imagen $i(x)$.

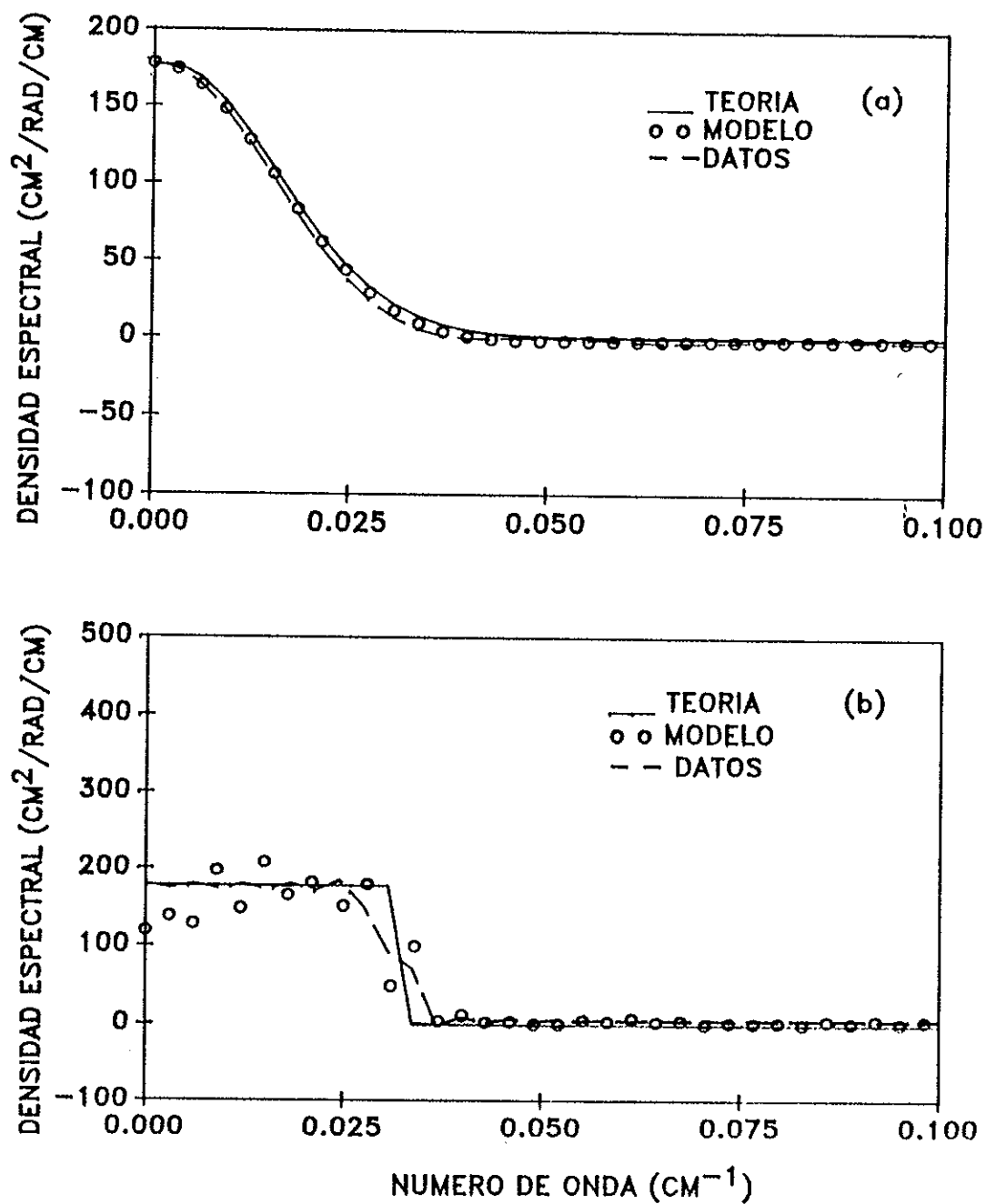


Figura 15. Funciones de densidad espectral para los procesos:
 a) $\xi(x)$ de la Fig. 12, b) $\xi(x)$ de la Fig. 13.

IV.2. Superficies unidimensionales con espectro de Pierson-Moskowitz.

Para obtener la función de densidad espectral, $S(K_x)$, partimos, para este caso, del espectro de frecuencias temporales propuesto por Pierson y Moskowitz (Pierson y Moskowitz, 1964):

$$\hat{S}(w) = \frac{a_0 g^2}{w^5} \exp\left[-b_0 \left(\frac{g}{wU}\right)^4\right]. \quad (4.7)$$

En esta expresión $a_0 = 8.10 \times 10^{-3}$, $b_0 = 0.74$, $g = 9.81 m/s^2$, U es la velocidad del viento definida a una altura de 19.5 m, y w representa la frecuencia de las olas.

Como en secciones pasadas hemos definido los diferentes espectros en función del número de onda K , procedemos ahora a obtener una expresión que defina la ec.(4.7) en términos de este número de onda. Para esto escribiremos a partir de la ec.(4.7) una expresión bidimensional del espectro en forma direccional como:

$$A^2(w, \theta) = \frac{1}{\pi} \hat{S}(w) \cos^2 \theta \quad \text{para} \quad w_1 < w < \infty \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (4.8),$$

w_1 representa el límite inferior de las frecuencias, que depende del tiempo de duración del viento sobre una cierta área del mar. El espectro definido por la ec.(4.8) puede ser escrito como una función de las componentes (K_x, K_y) del número de onda con el siguiente cambio de variables

$$w^2 = gK, \quad K = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}(K_y/K_x). \quad (4.9)$$

donde la primer expresión que está del lado izquierdo es una relación de dispersión obtenida de la teoría lineal de oleaje para aguas profundas, donde esta expresión nos relaciona la frecuencia temporal con la frecuencia espacial.

El Jacobiano de esta transformación es

$$J[(w, \theta)/(K_x, K_y)] = [g^{1/2}/2]K^{-3/2}, \quad (4.10)$$

con lo que el espectro puede escribirse como:

$$\hat{S}(K) = J[(w, \theta)/(K_x, K_y)]A^2(w, \theta),$$

o

$$S_4(K) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a_0}{2K^3} \right] \exp \left[-\frac{b_0 g^2}{K^2 U^4} \right] \cos^2 \theta. \quad (4.11)$$

Para el caso unidimensional, $K = K_x$. Al convertir el espectro de frecuencias de Pierson-Moskowitz en el espectro de potencia en función del número de onda, de la energía total de la onda sólo se consideran las ondas que se propagan a lo largo del eje x, como ha sido hecho en otros trabajos anteriores (Thorsos, 1990; Negrete y Alvarez-Borrego, 1990; Peón y Alvarez-Borrego, 1990). La función de correlación correspondiente a (4.11) ha sido calculada por Fortuit y De Boer (1971) y Peón (1988), pero no se ha encontrado una expresión analítica sencilla para ella.

Utilizando la ec. (3.3) se encuentra una relación entre σ_i^2 y σ_{Π}^2 , y utilizando la ec.(2.1) encontramos la relación entre σ_{Π}^2 y σ_{ξ}^2 .

Como en los casos anteriores, con objeto de probar el modelo propuesto en esta tesis se generaron numéricamente superficies con el espectro descrito por la ec.(4.11). La situación física considerada es la que fué descrita en el capítulo II para el caso unidimensional. Cada realización unidimensional consistió de 131,072 puntos. Esto fué necesario para poder tomar en cuenta tanto las escalas cortas como las largas. El intervalo de muestreo fué de dos centímetros. El perfil de la superficie fué generado considerando una velocidad de viento, U , de 10 m/s. La variancia de las alturas de la superficie, σ_{ζ}^2 , calculado numéricamente, fué de 64 cm^2 . El parámetro β , correspondiente al diámetro aparente del Sol, fué tomado como 0.68° . Para el ángulo de incidencia de la luz sobre la superficie, θ_s , se tomó un valor de 12° , mientras que para el ángulo, θ_d que hace el sistema óptico de detección con respecto a la normal, se tomó un valor de cero.

La figura 16 muestra los resultados del experimento numérico. En esta figura se muestran, del lado izquierdo, realizaciones numéricas de las alturas de la superficie $\zeta(x)$, sus pendientes $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de correlación (lado derecho). En la figura 16 se muestra sólo una pequeña parte de la serie para facilitar la visualización de las escalas cortas. Con respecto a las funciones de correlación, puede observarse que los resultados del modelo concuerdan bastante bien con los datos generados numéricamente. Para las funciones de correlación de las alturas y pendiente no se está graficando la curva teórica debido a que ésta coincide perfectamente con la curva que nos representa la función de correlación de los datos

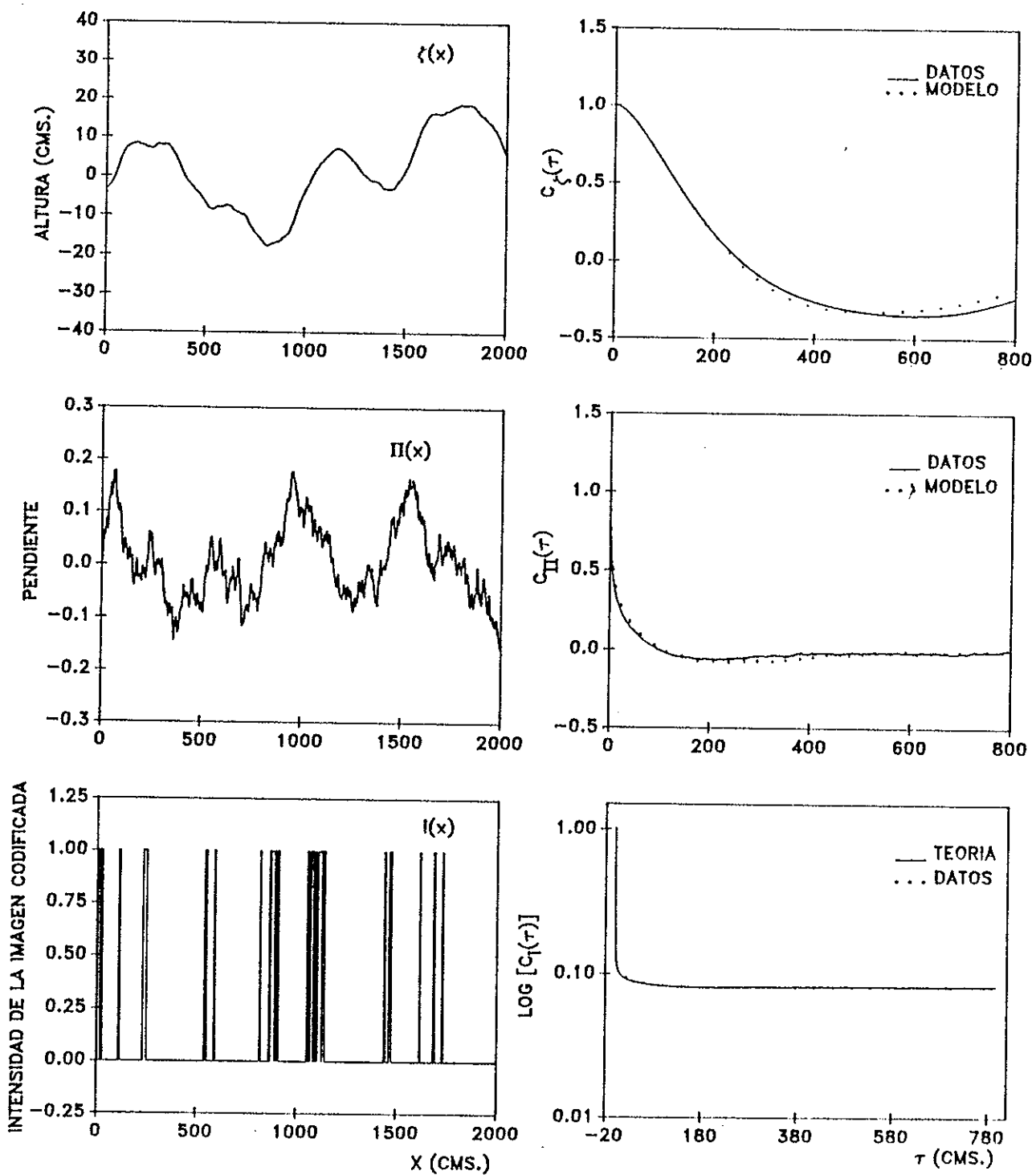


Figura 16. Altura de la superficie $\zeta(x)$, pendiente $\Pi(x)$ e imagen $i(x)$, con sus respectivas funciones de autocorrelación. Para el caso en que la superficie tiene un espectro de potencia de Pierson - Moskowitz.

de la realización numérica. Como en el caso de la sección IV.1, se realizaron promedios sobre 400 funciones de correlación, $C_i(\tau)$, para reducir el ruido estadístico. Los cálculos numéricos fueron realizados en una computadora Sun.

La figura 17 muestra el espectro obtenido a partir de la función de autocorrelación de las alturas de la superficie. Se puede observar que los resultados del modelo concuerdan bastante bien con los resultados numéricos y teóricos. Para números de onda muy pequeños o muy grandes el acuerdo no es muy bueno debido a problemas de muestreo y ruido numérico. Para este ejemplo, el espectro presenta un número de onda de corte de 0.25. En la gráfica sólo se presentan los resultados hasta un número de onda de 0.1 debido a que para valores mayores el espectro toma valores muy pequeños que se pueden confundir con el ruido numérico.

Es importante señalar que en ninguno de los ejemplos numéricos se han considerado ondas más cortas de dos centímetros. En trabajos reportados en la literatura (ver por ejemplo, Ocampo y Robinson, 1989,1990), varios autores han estudiado el efecto de la direccionalidad de las ondas capilares sobre las imágenes de radar, y han encontrado que la respuesta del radar depende fuertemente de ellas. Es importante señalar que el modelo aquí descrito, puede, en principio, tomar en cuenta las ondas capilares. Sin embargo, el efecto que estas tienen sobre la imagen no es tan importante como lo es en el caso del radar. Esto es debido a que las imágenes de radar se forman de manera muy distinta a la aquí descrita, y a que la longitud de onda de la radiación empleada es varios ordenes de magnitud mayor que la de la luz

en la región visible del espectro electromagnético.

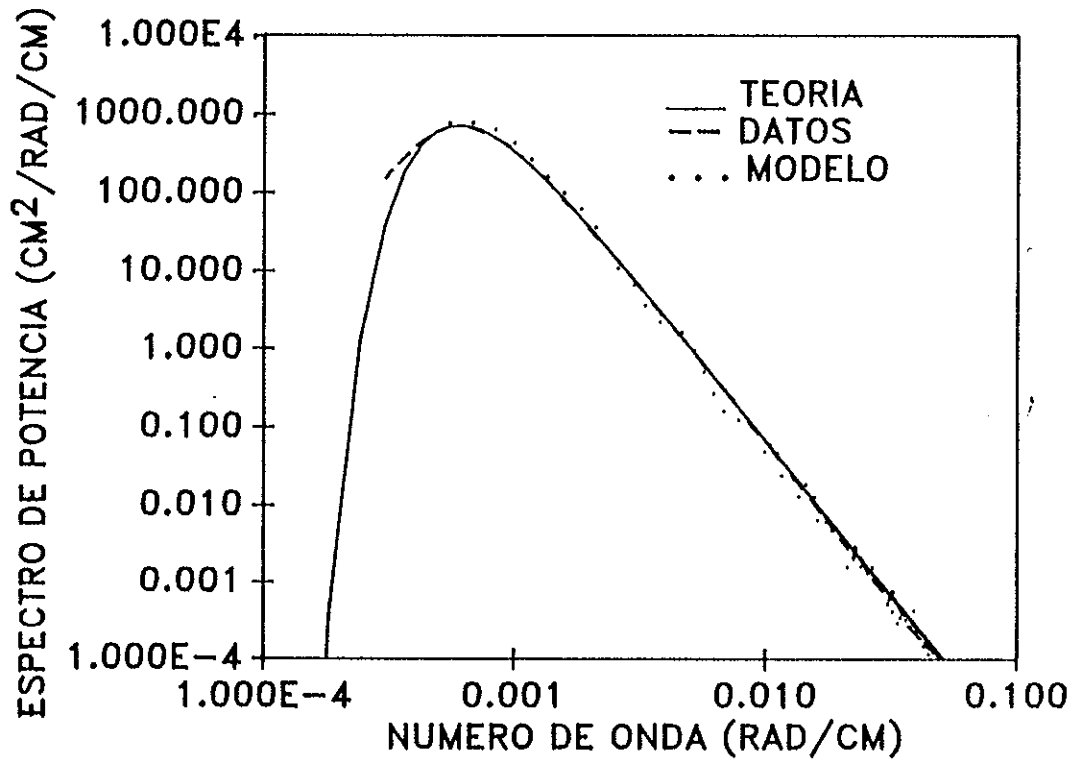


Figura 17. Función de densidad espectral para el proceso $\xi(x)$ de la Fig. 16.

IV.3 Superficies bidimensionales de una sola escala.

De la misma forma que en el caso 1-D, los ejemplos particulares que se presentan para superficies bidimensionales fueron obtenidos utilizando el método espectral descrito por Thorsos (1988). Para la generación de estos ejemplos se utilizó un espectro Gaussiano bidimensional dado por:

$$S_5(K_x, K_y) = \sigma_\xi^2 \sqrt{\pi} l_x l_y \exp\left[-\frac{(K_x^2 l_x^2 + K_y^2 l_y^2)}{4}\right], \quad (4.12)$$

donde K_x y K_y son los números de onda, l_x y l_y son las longitudes de correlación en las direcciones x y y respectivamente, y S_5 es la función de densidad espectral bidimensional.

La función de correlación bidimensional correspondiente está dada por:

$$C_{\xi_5}(\xi, \eta) = \sigma_\xi^2 \exp\left[-\left(\frac{\xi^2}{l_x^2} + \frac{\eta^2}{l_y^2}\right)\right], \quad (4.13)$$

donde ξ y η son las variables que denotan el corrimiento entre dos puntos de la superficie en las direcciones x y y respectivamente.

IV.3.1. Caso isotrópico.

Para una superficie isotrópica $l_x = l_y = l$, de tal manera que la ec.(4.13) puede escribirse como:

$$C_{\zeta_s}(\xi, \eta) = \sigma_{\zeta}^2 \exp\left[-\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{l^2}\right]. \quad (4.14)$$

La situación física considerada es la que se describió en el capítulo III con ayuda de la figura 7. En este ejemplo, los ángulos de posición θ_s , ϕ_s , θ_d , ϕ_d , se tomaron como cero. Es decir, por simplicidad se consideró tanto a la fuente como al sistema de detección, en el zenith. El valor de longitud de correlación utilizado en la simulación numérica fué de 15 centímetros, y se tomó una desviación estándar de alturas de la superficie, $\sigma_{\zeta} = 2$ cm.

En el capítulo II se mostraron las relaciones existentes entre la función de correlación de las alturas de la superficie, $C_{\zeta}(\xi, \eta)$, y las funciones de correlación de las pendientes, $C_{\Pi}^x(\xi, \eta)$ y $C_{\Pi}^y(\xi, \eta)$. Considerando el ejemplo particular en que la función de autocorrelación de las alturas de la superficie bidimensional es Gaussiana, tenemos:

$$C_{\Pi}^x(\xi, \eta) = -\left(\frac{4\xi^2}{l^4} - \frac{2}{l^2}\right)C_{\zeta_s}(\xi, \eta), \quad (4.15)$$

$$C_{\Pi}^y(\xi, \eta) = -\left(\frac{4\eta^2}{l^4} - \frac{2}{l^2}\right)C_{\zeta_s}(\xi, \eta), \quad (4.16)$$

$$C_{\Pi}^{xy}(\xi, \eta) = -\frac{4\xi\eta}{l^4}C_{\zeta_s}(\xi, \eta). \quad (4.17)$$

Para este caso, las ecs. (4.15) y (4.16) muestran que la relación entre σ_{Π}^2 y σ_{ζ}^2 es la misma que para el caso unidimensional.

La función de densidad de probabilidad conjunta de pendientes en dos posiciones diferentes x_1, y_1 y x_2, y_2 está dada por la ec. (2.36):

$$p(\Pi_x, \Pi_y, \Pi_x', \Pi_y') = \frac{1}{4\pi^2 |\Lambda|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2 |\Lambda|} \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 |\Lambda|_{nm} (\Pi_n - \mu_n) (\Pi_m - \mu_m) \right].$$

Para el caso isotrópico, la matriz de covariancia, Λ , su determinante y sus cofactores, se expresan de la misma manera que como en el capítulo II definidas a través de las ecs.(2.37 - 2.39), tomando en cuenta que para el caso isotrópico $\sigma_{\Pi_x} = \sigma_{\Pi_y} = \sigma_{\Pi}$.

Para este experimento numérico la función de brillo bidimensional utilizada fué:

$$B(\Pi_x, \Pi_y) = \exp \left[-\frac{(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)}{a^2} \right]. \quad (4.18)$$

Para los experimentos numéricos se tomó un ángulo de incidencia, θ_s , un ángulo de detección, θ_d igual a cero, y un valor de $a = 0.1$. El valor $2a$ se puede considerar equivalente al diámetro aparente del Sol, β . El hecho de utilizar una función de brillo Gaussiana nos lleva a la obtención de resultados analíticos y es una buena aproximación a la función de brillo circular que se obtuvo en el capítulo II.

Las figuras 18-21 muestran los arreglos generados numéricamente para la superficie bidimensional, $\zeta(x, y)$; la pendiente en la dirección x , $\Pi_x(x, y)$; la pendiente en la dirección y , $\Pi_y(x, y)$; y la imagen, $i(x, y)$, obtenida con la función de brillo, ec. (4.18), cuando $\theta_s = \theta_d = 0$.

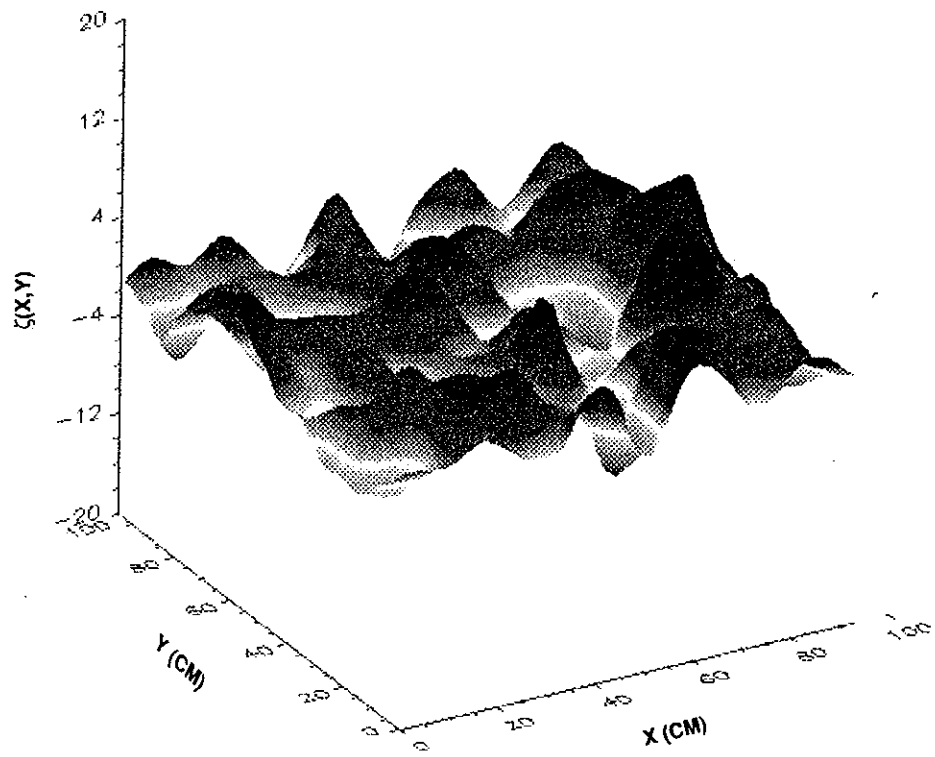


Figura 18. Superficie bidimensional isotrónica.

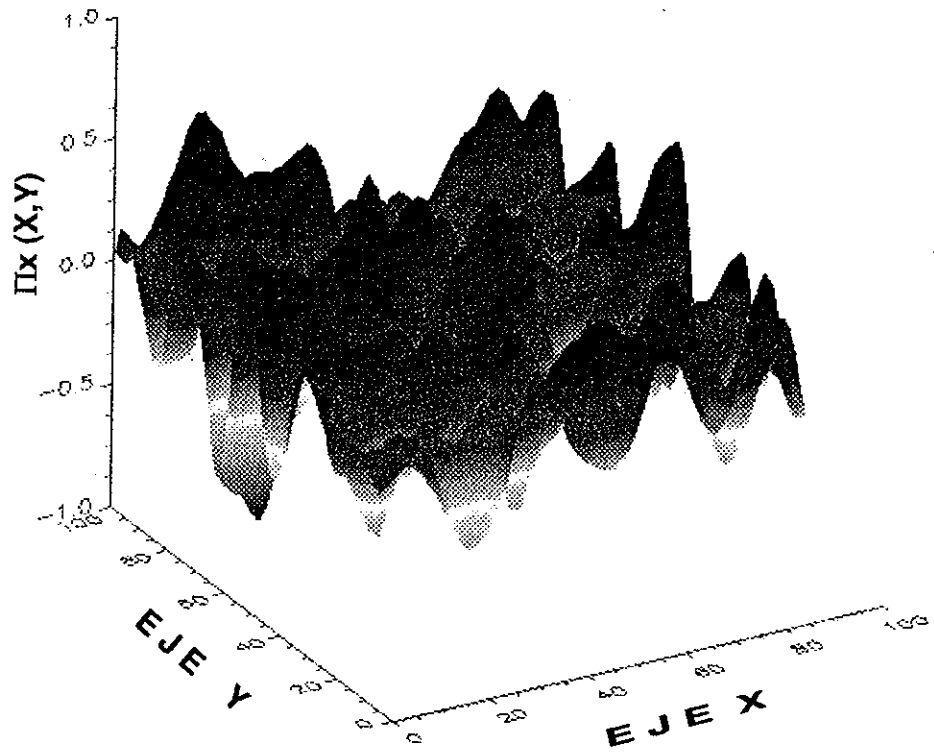


Figura 19. Derivada parcial en la dirección x de la superficie mostrada en la Fig. 18.

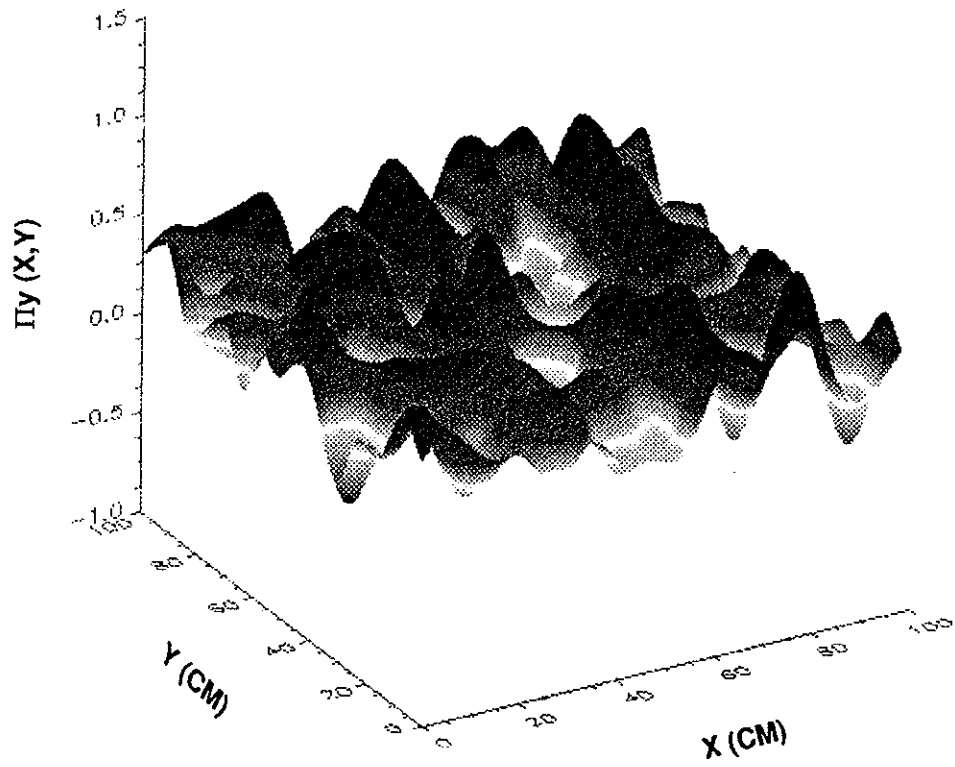


Figura 20. Derivada parcial en la dirección y de la superficie mostrada en la Fig. 18.

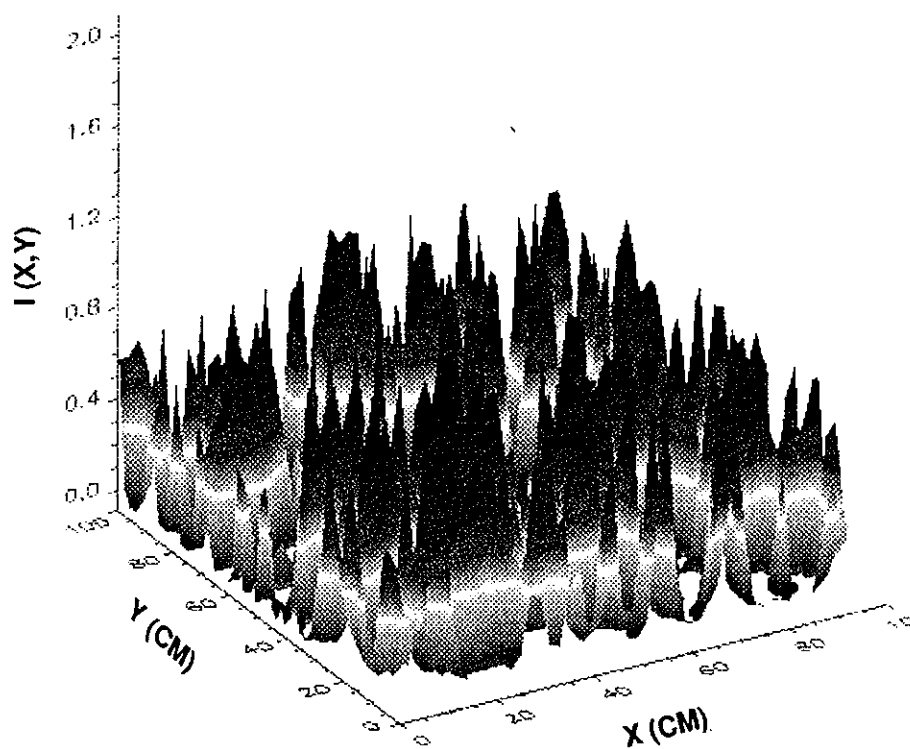


Figura 21. Imagen de la superficie mostrada en la Fig. 18 para el caso en que la fuente y el sistema óptico de detección están en posición normal a la superficie promedio.

La función de correlación, $C_i(\xi, \eta)$, de la imagen, $i(x, y)$, está dada por la ec.

(2.40):

$$C_i(\xi, \eta) = \int \int \int \int B(\Pi_x, \Pi_y) B(\Pi_x, \Pi_y) p(\Pi_x, \Pi_y, \Pi_x, \Pi_y) d\Pi_x, d\Pi_y, d\Pi_x, d\Pi_y.$$

Esta ecuación puede integrarse analíticamente para obtener la relación entre $C_i(\xi, \eta)$ y $C_\xi(\xi, \eta)$. El resultado es

$$C_i(\xi, \eta) = \frac{\chi_0}{4 |\Lambda|^{1/2}} \left[\frac{[\chi_2 - \chi_3^2] [\chi_4 - \chi_5^2]}{4\chi_1} - \frac{\chi_0 [\chi_6 \chi_7 - \chi_8 \chi_5]}{\chi_6} \right]^{-1/2}, \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Lambda|_{11}}{2|\Lambda|} \right), \\ \chi_1 &= \chi_0 \left[\chi_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Lambda|_{22}}{2|\Lambda|} \right) - \left(\frac{|\Lambda|_{12}}{|\Lambda|} \right)^2 \right], \\ \chi_2 &= 4\chi_1 \left[\chi_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Lambda|_{33}}{2|\Lambda|} \right) - \left(\frac{|\Lambda|_{13}}{|\Lambda|} \right)^2 \right], \\ \chi_3 &= \left[\chi_0 \frac{|\Lambda|_{23}}{|\Lambda|} - \frac{|\Lambda|_{12} |\Lambda|_{13}}{|\Lambda|^2} \right], \\ \chi_4 &= 4\chi_1 \left[\chi_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Lambda|_{44}}{2|\Lambda|} \right) - \left(\frac{|\Lambda|_{14}}{|\Lambda|} \right)^2 \right], \\ \chi_5 &= \left[\chi_0 \frac{|\Lambda|_{24}}{|\Lambda|} - 2 \frac{|\Lambda|_{12} |\Lambda|_{14}}{|\Lambda|^2} \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\chi_6 = \left[\chi_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Lambda|_{22}}{2|\Lambda|} \right) - \left(\frac{|\Lambda|_{12}}{|\Lambda|} \right)^2 \right],$$

$$\chi_7 = \chi_0 \frac{|\Lambda|_{34}}{|\Lambda|} - 2 \frac{|\Lambda|_{13} |\Lambda|_{14}}{|\Lambda|^2},$$

$$\chi_8 = \left[\frac{\chi_0 |\Lambda|_{23}}{2|\Lambda|} - \frac{|\Lambda|_{12} |\Lambda|_{13}}{|\Lambda|^2} \right],$$

donde los cofactores están definidos como en el capítulo II a través de las ecs.(2.39).

En la figura 22b se puede observar, que para un sólo proceso numérico en la dirección x , la función de correlación de la imagen teórica, $C_i(\xi, \eta)$ concuerda bastante bien con la función de correlación obtenida de los datos generados numéricamente. La figura 22a muestra la comparación de la teoría, los datos y los resultados numéricos del modelo en lo que respecta a la función de correlación de las alturas de la superficie, $C_{\zeta}(\xi, \eta)$. Por otro lado, los resultados obtenidos en la dirección y , son iguales que para el caso mostrado, y por esa razón no se incluyen.

IV.3.2. Caso anisotrópico.

Consideramos nuevamente un ejemplo particular. Como en el caso anterior, empleamos una superficie con función de correlación bidimensional de forma Gaussiana. Sin embargo, tenemos que para una superficie anisotrópica, $l_x \neq l_y$. De esta manera las ecuaciones (4.15-4.17) se pueden reescribir como:

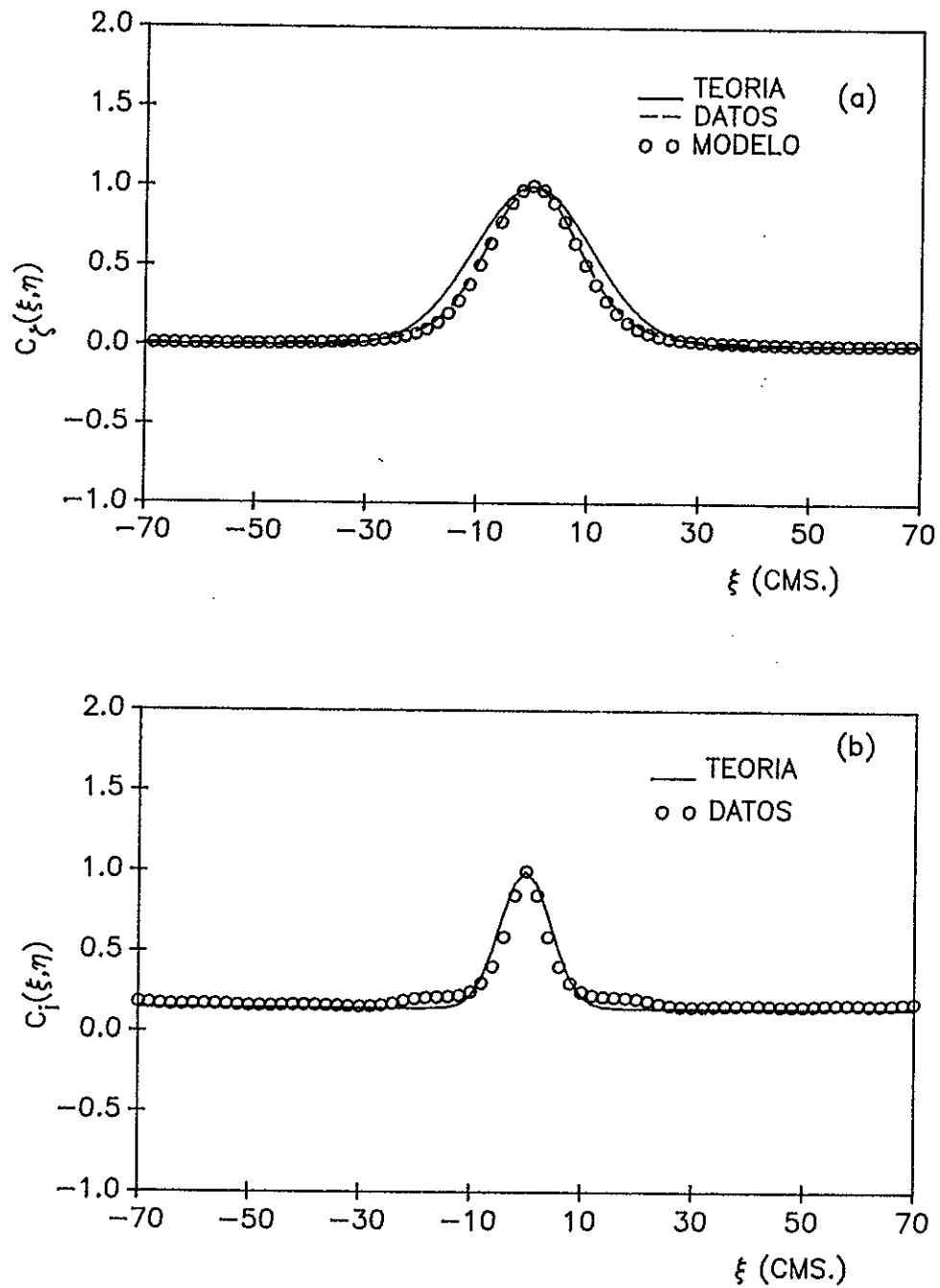


Figura 22. a) Función de autocorrelación de las alturas de la superficie isotrópica en la dirección x. b) Función de autocorrelación de la intensidad de la imagen en la dirección x.

$$C_{\Pi}^x(\xi, \eta) = -\left(\frac{4\xi^2}{l_x^4} - \frac{2}{l_x^2}\right)C_{\zeta}(\xi, \eta), \quad (4.21)$$

$$C_{\Pi}^y(\xi, \eta) = -\left(\frac{4\eta^2}{l_y^4} - \frac{2}{l_y^2}\right)C_{\zeta}(\xi, \eta), \quad (4.22)$$

$$C_{\Pi}^{xy}(\xi, \eta) = -\frac{4\xi\eta}{l_x^2 l_y^2}C_{\zeta}(\xi, \eta). \quad (4.23)$$

De las ecs. (2.32) y (2.33), que relacionan a las funciones de correlación de las pendientes y de las alturas de la superficie, tenemos que para nuestro ejemplo:

$$\sigma_{\Pi_x} = \frac{\sqrt{2}}{l_x} \sigma_{\zeta}, \quad (4.24)$$

$$\sigma_{\Pi_y} = \frac{\sqrt{2}}{l_y} \sigma_{\zeta}. \quad (4.25)$$

Los valores utilizados en la simulación para l_x y l_y fueron de 15 y 20 centímetros respectivamente. La posición de la fuente y del sistema óptico de detección es la misma que en el caso anterior.

Para el caso anisotrópico se utilizaron las ecs. (2.37)-(2.39) dadas en el capítulo II. Nuevamente, la función de correlación de la imagen, $C_i(\xi, \eta)$, está dada por la ec. (2.40). La relación entre la función de correlación de la imagen, $C_i(\xi, \eta)$, y la función de correlación de las alturas de la superficie, $C_{\zeta}(\xi, \eta)$, está dada por la ec. (4.19), manteniéndose válidas las relaciones (4.20).

Las figuras 23-26 muestran la superficie bidimensional anisotrópica, $\zeta(x, y)$; su pendiente a lo largo de la dirección x , $\Pi_x(x, y)$; su pendiente a lo largo de la dirección y , $\Pi_y(x, y)$; y la imagen, $i(x, y)$, obtenida bajo las mismas condiciones que en el caso isotrópico.

Las figuras 27a y 27b muestran la comparación de la teoría con los datos de la función de autocorrelación de la imagen, $C_i(\xi, \eta)$, a lo largo de las direcciones x y y respectivamente, para un solo proceso. Las figuras 28a y 28b muestran la comparación de la teoría, los datos y los resultados del proceso de inversión de la función de autocorrelación de las alturas de la superficie, $C_s(\xi, \eta)$, a lo largo de las direcciones x y y , respectivamente. Como en el caso unidimensional se realizaron promedios sobre 400 funciones de correlación, estimadas a partir de diferentes imágenes, $i(x, y)$, estadísticamente equivalentes.

Para esta superficie anisotrópica, podemos observar de las figuras 27 y 28 la diferencia en la longitud de correlación para las dos direcciones. El resultado obtenido del proceso de inversión concuerda muy bien con los datos obtenidos de la simulación numérica.

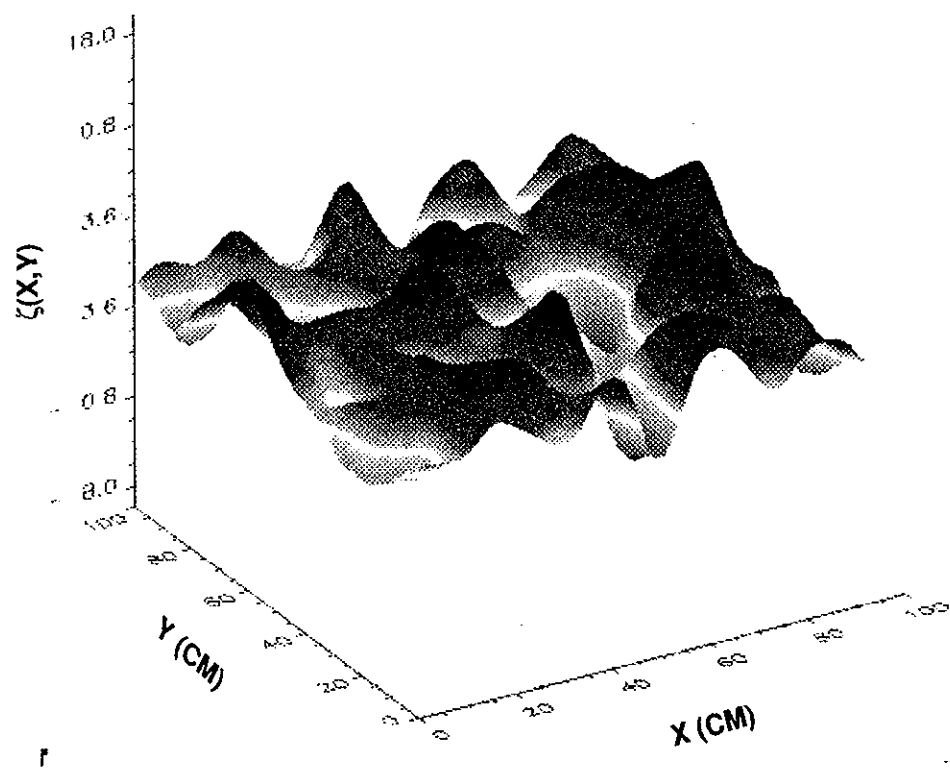


Figura 23. Superfície bidimensional anisotrópica.

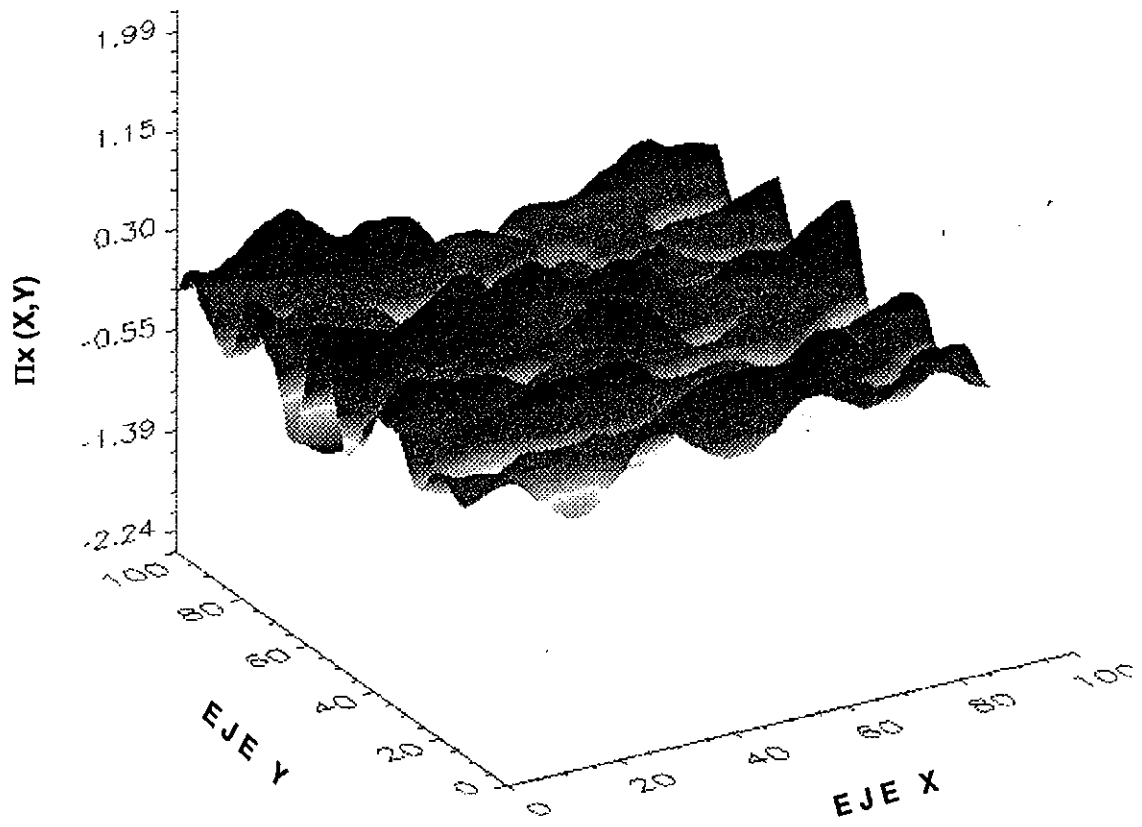


Figura 24. Derivada parcial en la dirección x de la superficie mostrada en la Fig. 23.

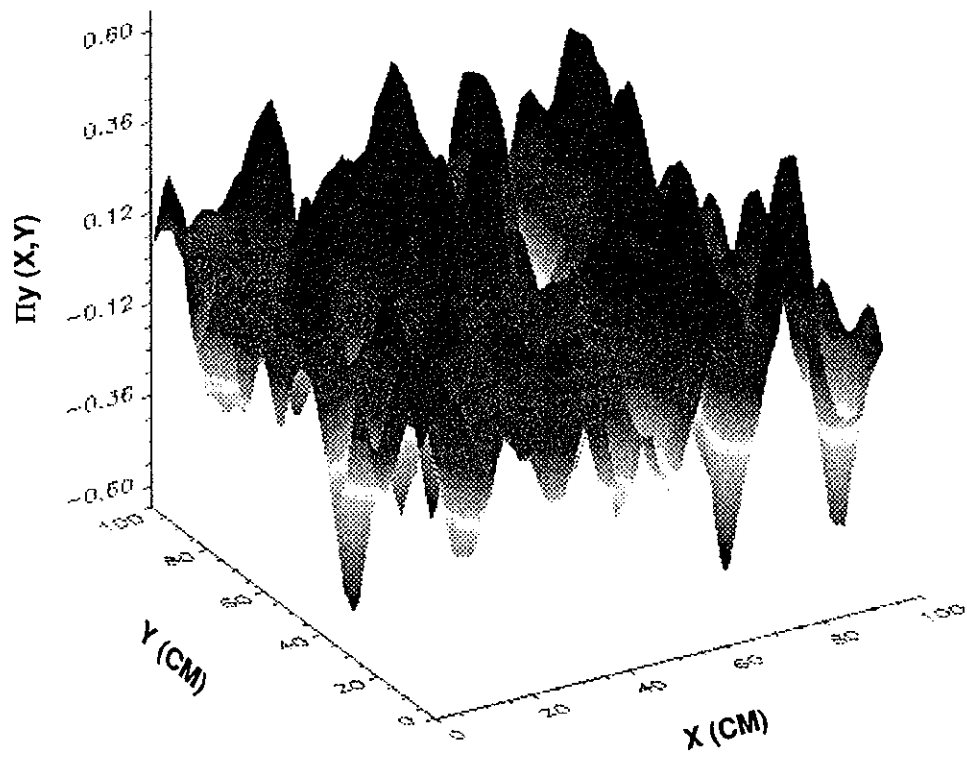


Figura 25. Derivada parcial en la dirección y de la superficie mostrada en la Fig. 23.

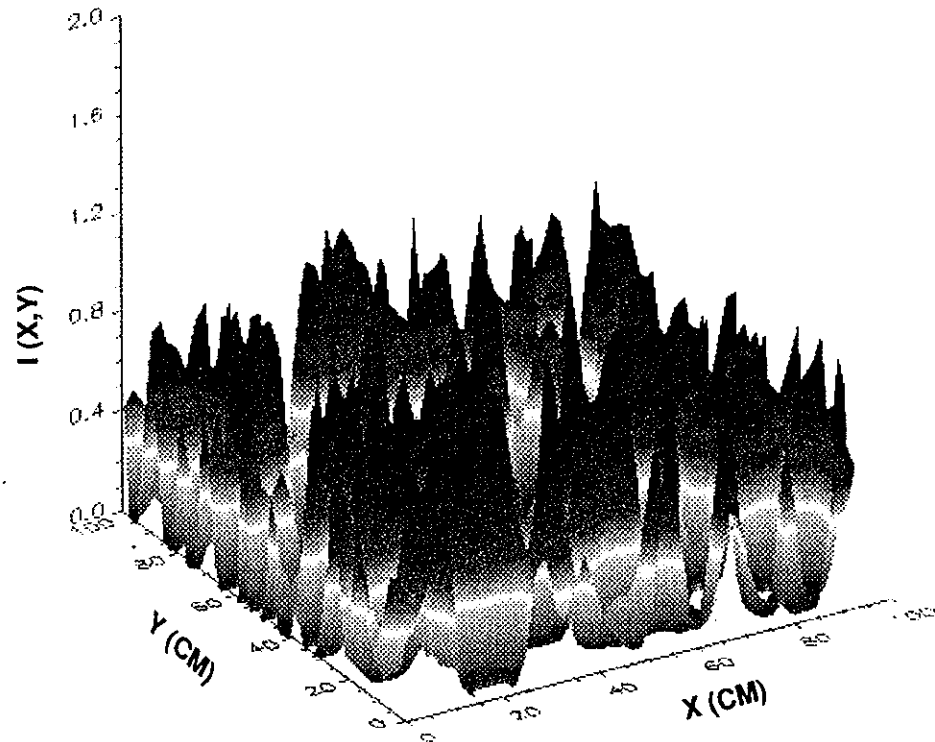


Figura 26. Imagen para la superficie mostrada en la Fig. 23 para el caso en que la fuente y el sistema óptico de detección están en posición normal a la superficie promedio.

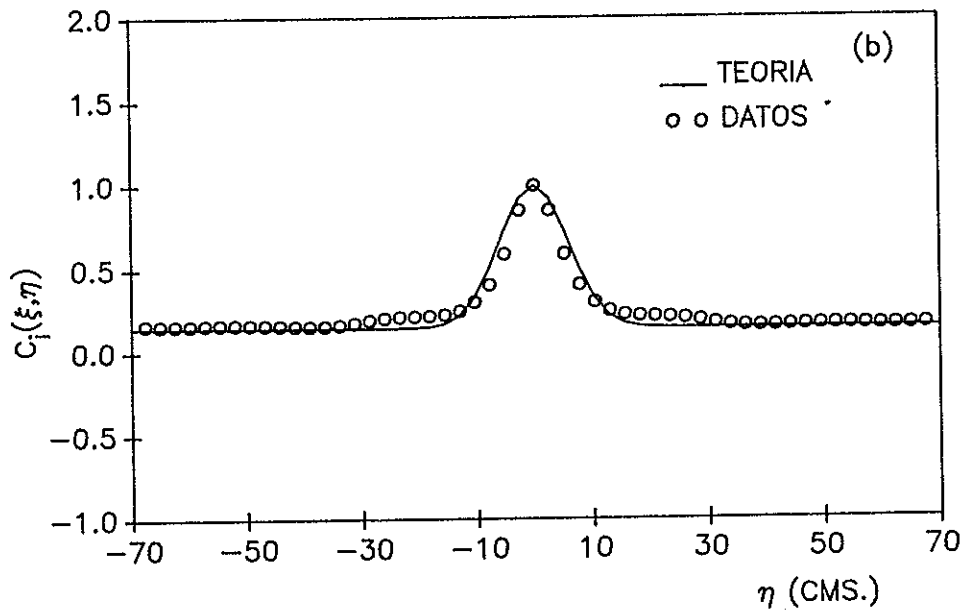
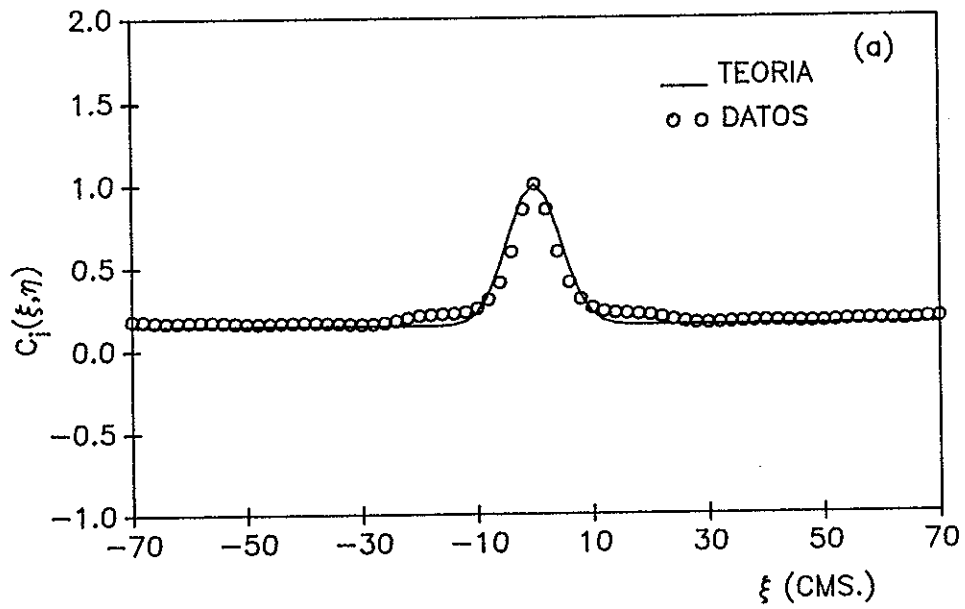


Figura 27. Funciones de autocorrelación de las intensidades de la imagen en las direcciones x y y.

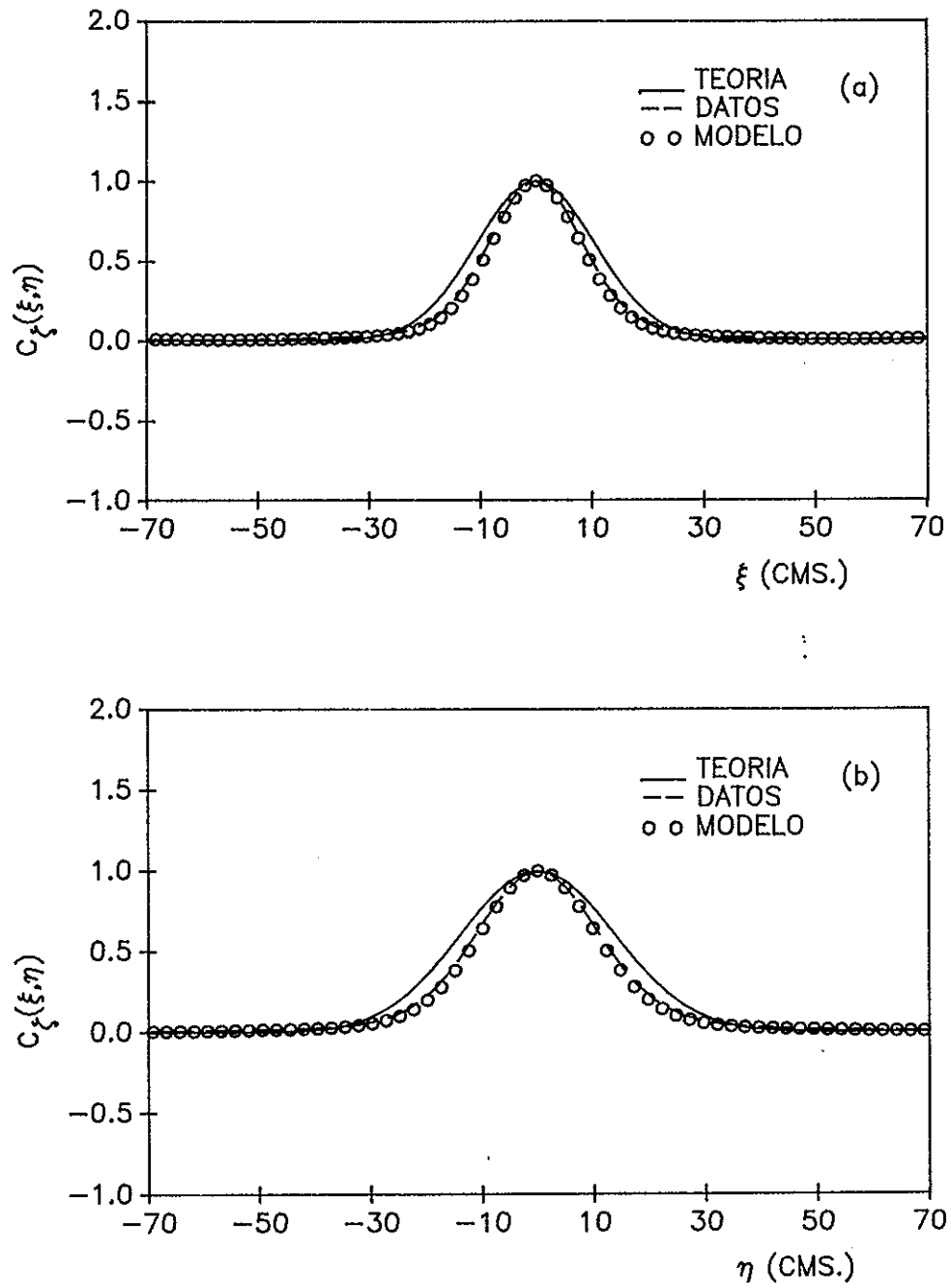


Figura 28. Funciones de autocorrelación de alturas de la superficie en las direcciones x y y.

V. SIMULACION EN LABORATORIO.

En este capítulo se describe en forma breve el proceso seguido para la fabricación de una superficie con propiedades estadísticas fácilmente modelables, y posteriormente, el experimento de laboratorio donde se obtienen las imágenes de dicha superficie. Se presentan los resultados de comparar las predicciones del método propuesto en este trabajo con los resultados experimentales obtenidos empleando la superficie mencionada. El objetivo, aquí, es hacer una comparación detallada de las propiedades estadísticas de la superficie estimadas con nuestro modelo, y aquellas estimadas por otros métodos. Por último, se presenta una discusión de los resultados obtenidos.

V.1. Fabricación de la superficie.

La técnica que se empleó para la fabricación de las superficies es una variación de una técnica originalmente descrita por Gray (1978), que consiste en la formación de un relieve aleatorio en placas cubiertas con fotorresina mediante la exposición de patrones de granulado (speckle). La fotorresina es un material sensible a la luz azul o ultravioleta, en cierto sentido similar a una película fotográfica, pero con la diferencia de que al ser revelada se genera un relieve superficial en lugar de variaciones en transmitancia como en la película fotográfica.

El sistema óptico empleado para fabricar la superficie rugosa se muestra esquemáticamente en la Fig. 29. La luz proveniente de un láser incide sobre un difusor de vidrio, formándose así, en el campo de difracción, un patrón de granulado. Dicho patrón se graba en la fotorresina depositada sobre la placa. La estadística de patrones de granulado ha sido muy estudiada (Dainty, 1984), y es bien conocido que cuando se iluminan varias regiones no correlacionadas del difusor y se observa en el campo lejano, la función de densidad de probabilidad asociada a las variaciones de intensidad luminosa tiene una forma exponencial negativa. Así que, si exponemos una placa de vidrio cubierta con fotorresina a un solo patrón de granulado, después del revelado, debería obtenerse una superficie con una función de densidad de probabilidad de alturas de forma exponencial negativa. Esto, suponiendo que la relación entre la exposición y el relieve resultante es lineal.

Para obtener una superficie con función de densidad de probabilidad de alturas de forma aproximadamente Gaussiana, se expone repetidamente la placa cubierta con fotorresina a patrones de granulado estadísticamente independientes. En nuestro caso, las exposiciones se realizaron con luz de un láser de Helio-Cadmio (Liconix 4240 NB) a una longitud de onda de 0.442 micras. Este procedimiento se realiza en forma automática; para esto el difusor fué colocado sobre un microposicionador controlado por una computadora personal. La superficie fué expuesta a diez diferentes patrones de granulado. Una vez reveladas, las placas de fotorresina se cubrieron con una película delgada de aluminio para aumentar la reflectividad de la superficie.

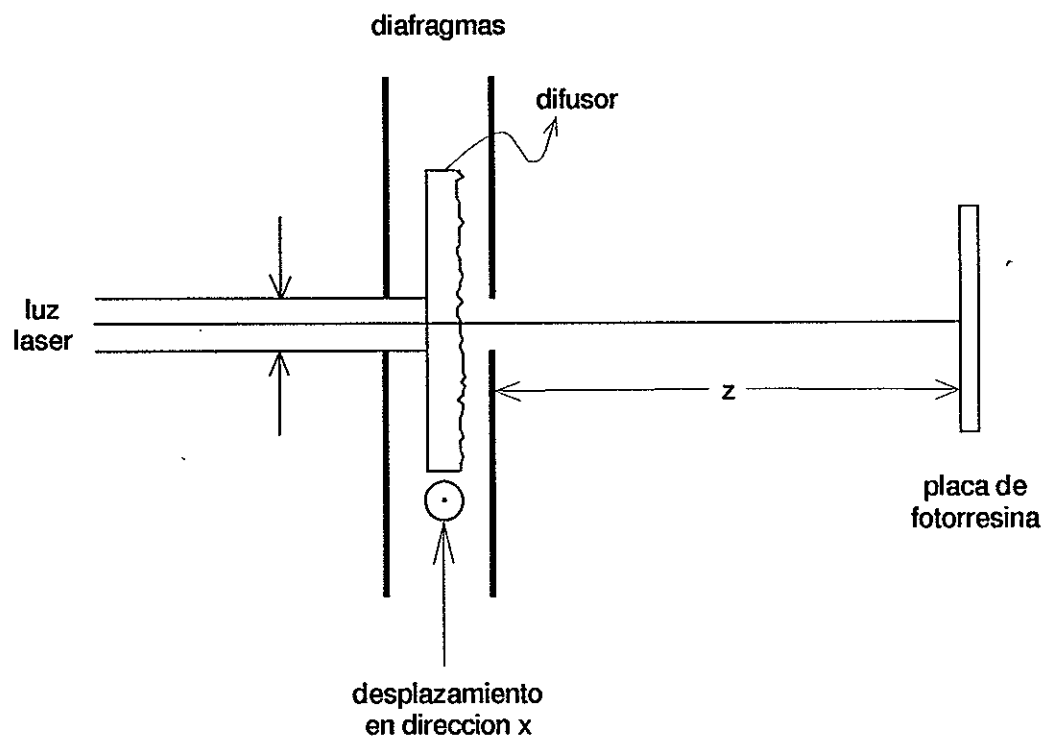


Figura 29. Sistema óptico utilizado para fabricar una superficie bidimensional isotrópica.

El haz de luz láser tiene un perfil de intensidad Gaussiano, y se puede demostrar que en este caso el patrón de granulado tiene una función de correlación Gaussiana (Gray, 1978). El tamaño del grano en el patrón de granulado puede controlarse al escoger la longitud z , que es la distancia entre el difusor y la placa de fotorresina. Para estimar esta función de correlación, se utilizó un arreglo bidimensional de detectores tipo CCD (Charge Coupled Device) colocado en el mismo plano que la placa de fotorresina. De esta manera se puede obtener una imagen del patrón de granulado, de donde se calcula la función de correlación de la intensidad. Esta estimación de la función de correlación se muestra con línea punteada en la Fig. 30. La línea continua muestra el mejor ajuste de estos datos a una función Gaussiana analítica. La longitud de correlación estimada para el patrón de granulado, y por tanto para la superficie es de aproximadamente $\sim 67.5\mu m$.

V.2. Descripción del arreglo experimental.

Para obtener las imágenes de la superficie se utilizó el arreglo óptico mostrado en la Fig. 31. Un haz casi colimado de luz blanca se hace pasar por un difusor, para aproximar una fuente plana, uniforme e incoherente. Cercano al difusor se colocó

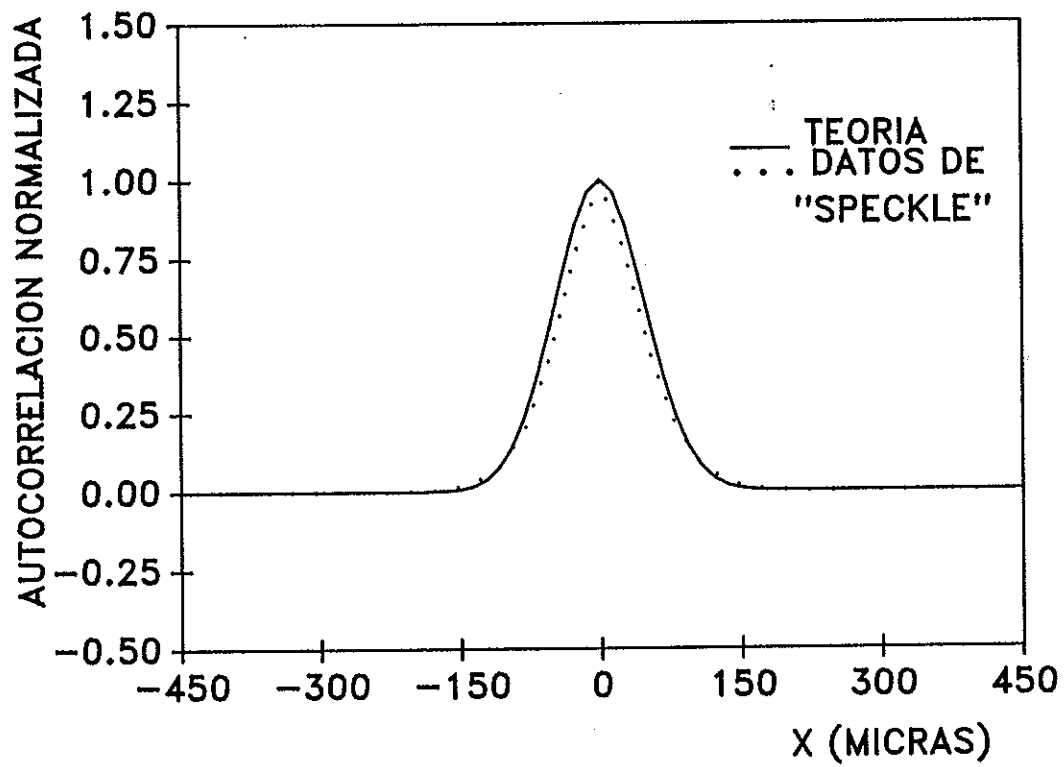


Figura 30. Función de autocorrelación del patrón de granulado.

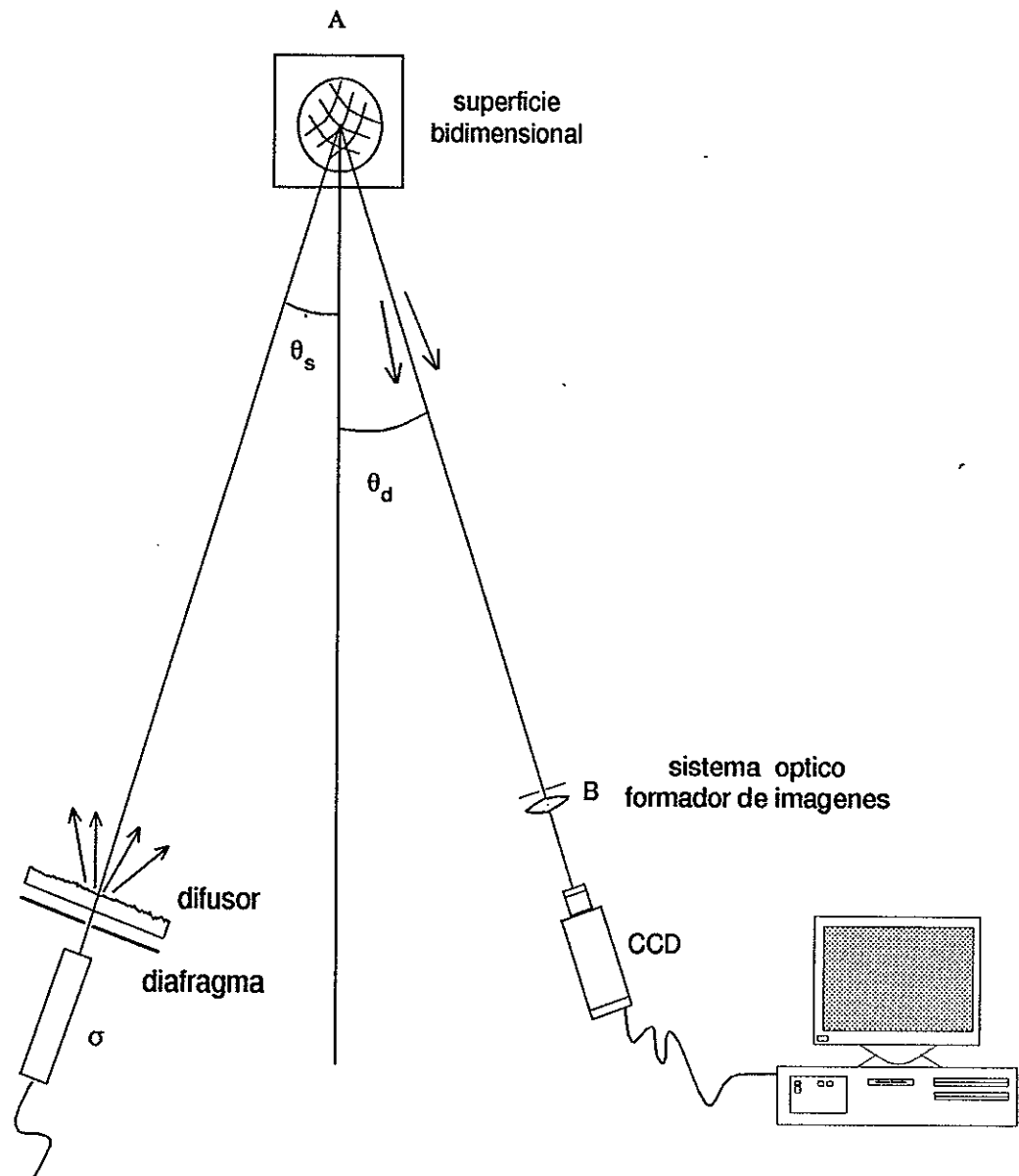
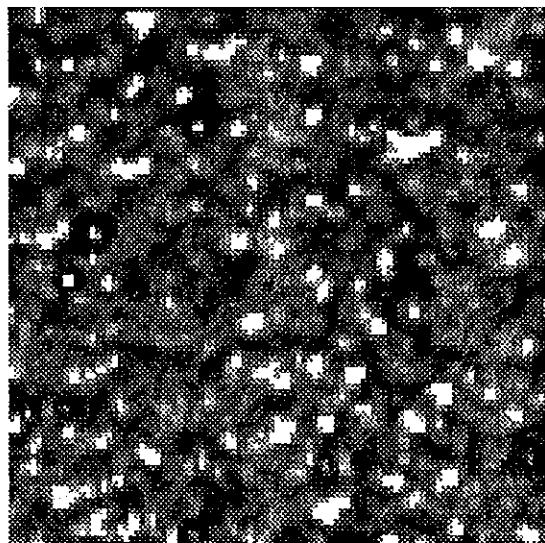


Figura 31. Geometría del experimento efectuado en el laboratorio donde se observa la posición de la fuente y del sistema de detección.

un diafragma para controlar el tamaño, σ , de esta fuente. La placa de vidrio con la superficie bidimensional se encuentra a una distancia de 40 cm. de la fuente que subtende un diámetro angular de 2.9° . La luz que proviene de la fuente incide sobre la superficie a un ángulo θ_s , y es reflejada por la superficie de una manera que depende de la distribución de pendientes.

A una distancia de 110 cm. de la superficie se coloca un sistema formador de imágenes que consiste de una lente de cámara (Nikkon, $f=80-200$ mm, $f/4.5$) y en el plano focal de ésta, un arreglo bidimensional de detectores tipo CCD (Santa Barbara Instrument Group, modelo ST-6). El diámetro angular subtendido por el sistema de detección es de 0.5° y el eje óptico de este sistema hace un ángulo θ_d con la normal al plano promedio de la superficie. Por simplicidad se escogió la geometría de manera que los ejes ópticos de los sistemas de iluminación y detección, y la normal al plano promedio de la superficie, se encuentren en el mismo plano. La cámara CCD tiene un arreglo de 375×242 elementos detectores, cada uno de tamaño de 23×27 micras. El área total del arreglo es de 8.6×6.5 mm². Para llevar a cabo el análisis de la superficie se tomaron cuatro subimágenes de 100×100 puntos. La imagen captada por el CCD, Fig. 32, es digitalizada y enviada a una computadora para su despliegue, almacenamiento y posterior procesamiento.

Nuestro interés se concentra solamente en las zonas brillantes, o sea, aquellas partes de la superficie con pendientes tales que, de acuerdo a la geometría del problema, reflejan luz que es colectada por el detector. El CCD asigna valores de



(a)

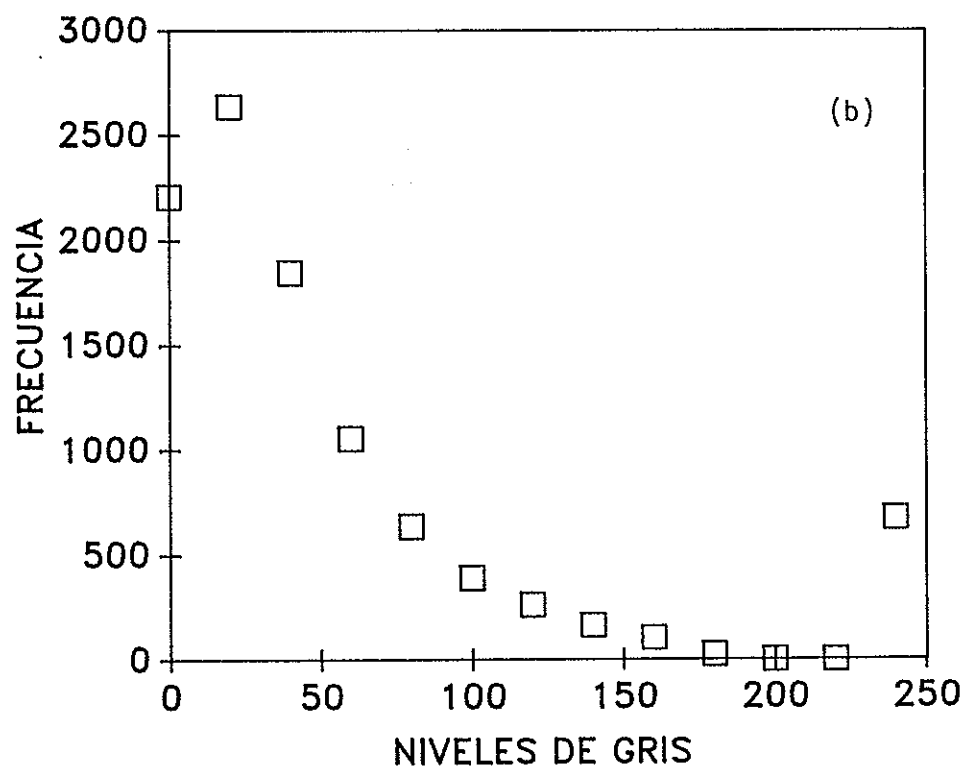


Figura 32. Imagen del patrón de brillo obtenido en el laboratorio con el CCD y su histograma.

intensidad en la imagen en el intervalo 0 a 255. La Fig. 32 muestra el histograma de una de las cuatro subimágenes, tomadas a $\theta_s = 8^\circ$. De nuestro modelo uno esperaría observar un valor cercano a cero con mucha frecuencia, y un valor alto de intensidad (correspondiente al brillo) también con mucha frecuencia. Es decir que esperamos dos picos bastante bien definidos en los extremos del histograma. Sin embargo esto no es así. El histograma presenta un pico bastante ancho para valores bajos de densidad. Esto es debido a que la superficie también presenta, además de la escala correspondiente al patrón de granulado, escalas de rugosidad muy pequeñas que producen reflexión difusa. Como el modelo no considera escalas de rugosidad tan pequeñas, a las densidades que tienen valores de 200 en adelante se les convierte en uno, pues estamos considerando que estos valores son producidos por reflexión especular. A todos los valores de densidad menores de 200 se les convierte en cero, truncando de esta manera toda la contribución de reflexión difusa a la imagen. De esta manera se obtiene una imagen nueva que proviene de codificar en ceros y unos la imagen obtenida con el CCD. En la Fig. 33 se muestra la imagen de la Fig.32 después de haber sido codificada en dos niveles.

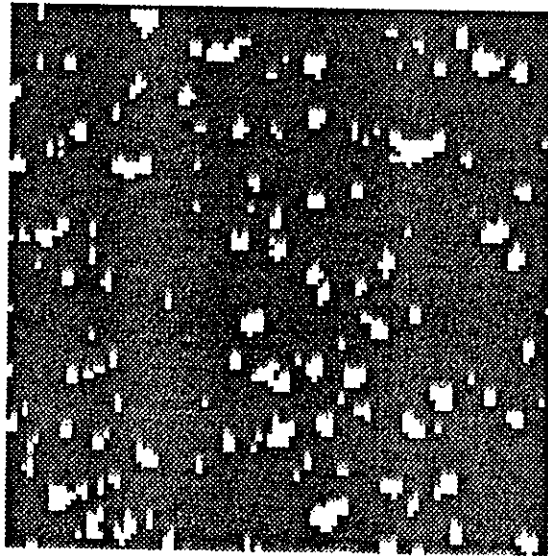


Figura 33. Imagen del patrón de brillo después de haber sido codificado en unos y ceros.

V.3 Resultados experimentales.

Se tomaron imágenes con ángulos de incidencia, θ_i , de 8, 8.5 y 10 grados, con $\theta_d = 0$ para todos los casos. Uno de los objetivos es la obtención de la variancia de alturas de la superficie, σ_z^2 , a partir de las estadísticas de la imagen. Primeramente, para las cuatro subimágenes se calculó la variancia de intensidad, σ_i^2 . La ec.(3.6), expresa la relación entre la variancia de la intensidad de la imagen, σ_i^2 , y la variancia de las pendientes, σ_{Π}^2 .

La relación entre la variancia de las pendientes superficiales, y la variancia de las alturas de la superficie, σ_z^2 , involucra información de la escala lateral de la superficie. En este caso, es necesario conocer la longitud de correlación de las alturas. Para esto se estimó la función de correlación de la imagen, C_i , a partir de las imágenes obtenidas. La Fig. 34a muestra los valores estimados de la función de correlación para una subimagen. La ec.(2.40) nos da la relación existente entre la función de correlación de la imagen, C_i , y la función de correlación de pendientes, C_{Π} . Para este caso se estimó únicamente la correlación en la dirección x , C_{Π}^x , debido a que se trata de una superficie isotrópica. Los valores estimados de la función de correlación normalizada C_{Π}^x , se muestran en la Fig. 34b, obtenidos de promediar los valores estimados de la función de correlación, C_i para las cuatro subimágenes. Para estimar la función de correlación de las alturas, C_z , en la dirección x , se utiliza la relación (2.33). El resultado se muestra en la Fig. 34c. Se puede observar que la función

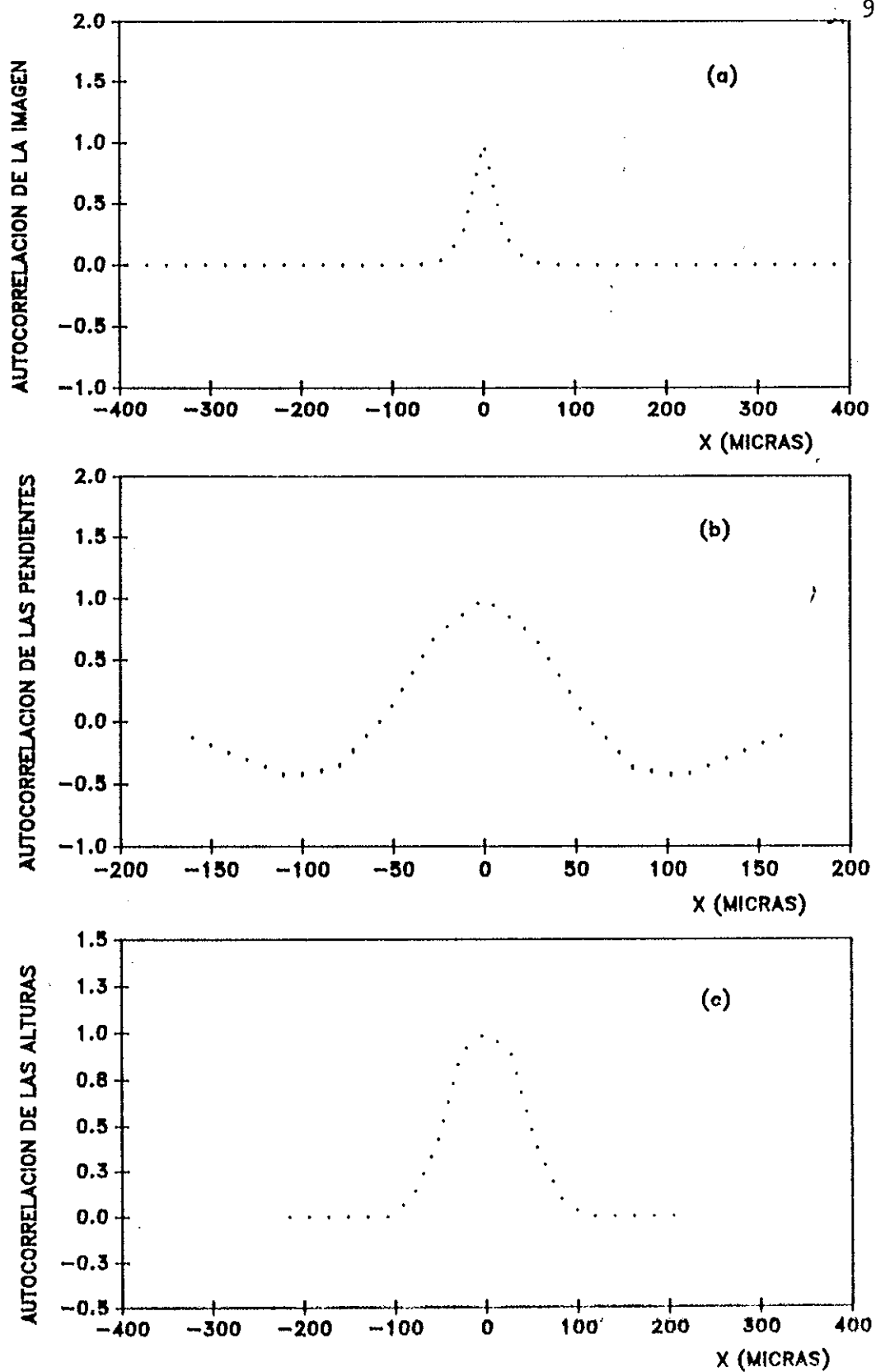


Figura 34. Funciones de correlación de la intensidad de la imagen, pendientes y alturas de la superficie en la dirección x, para la superficie analizada en el laboratorio.

estimada es un poco más angosta que la que se muestra en la Fig. 30, que es la que, suponemos, describe la correlación de la superficie, según se explicó en la sección V.1. De la Fig. 34c podemos obtener un valor aproximado para la longitud de correlación. En este caso encontramos un valor de ~60 micras.

Para tener una idea de la dependencia de los valores estimados de la variancia de las alturas de la superficie con respecto al ángulo de incidencia de la luz que incide sobre ésta, se graficó el cambio porcentual en el valor estimado de la variancia de las alturas contra el cambio en el ángulo de incidencia, para una θ_i inicial igual a ocho grados. Para esta θ_i , $\sigma_z^2 = 0.94 \mu m^2$. Esta gráfica se muestra en la Fig. 35. Con respecto al cambio porcentual del error en la longitud de correlación se procedió de manera similar, Fig. 36. Las gráficas muestran, por ejemplo, que para una tolerancia de 0.5 grados en el valor del ángulo de incidencia utilizado se obtiene un 20% de error en la estimación de la variancia de las alturas de la superficie y un 10% de error en la estimación de la longitud de correlación de la superficie.

La Tabla I nos muestra los valores de σ_z^2 para ángulos de incidencia de 8, 8.5 y 10 grados. Para cada caso, el primer valor indica el valor máximo de variancia de alturas de la superficie obtenido de cuatro subimágenes, el segundo valor indica la variancia obtenida al considerar las cuatro subimágenes formando una sola imagen y el tercer valor nos indica el valor mínimo de variancia de alturas de la superficie obtenido de las cuatro subimágenes. Esto se muestra más claramente en la Fig. 37. Analizando la Tabla I y la Fig. 37 podemos observar que cuando $\theta_i = 10^\circ$ los resultados

no concuerdan bien con los obtenidos para los otros dos ángulos de incidencia. Lo más fácil sería pensar en rechazar este intervalo, considerando que las imágenes obtenidas a este ángulo de incidencia tienen un patrón de brillo bastante pobre (Fig. 38). También se puede observar que la pendiente de la curva para 10 grados es bastante horizontal, lo cual origina un incremento en el error en la variancia de las alturas de la superficie para un intervalo dado de variancia de la intensidad de la imagen. De estos resultados podemos concluir que el valor de la variancia de las alturas de la superficie se encuentra en el intervalo de 0.88 a $1.05 \mu m^2$.

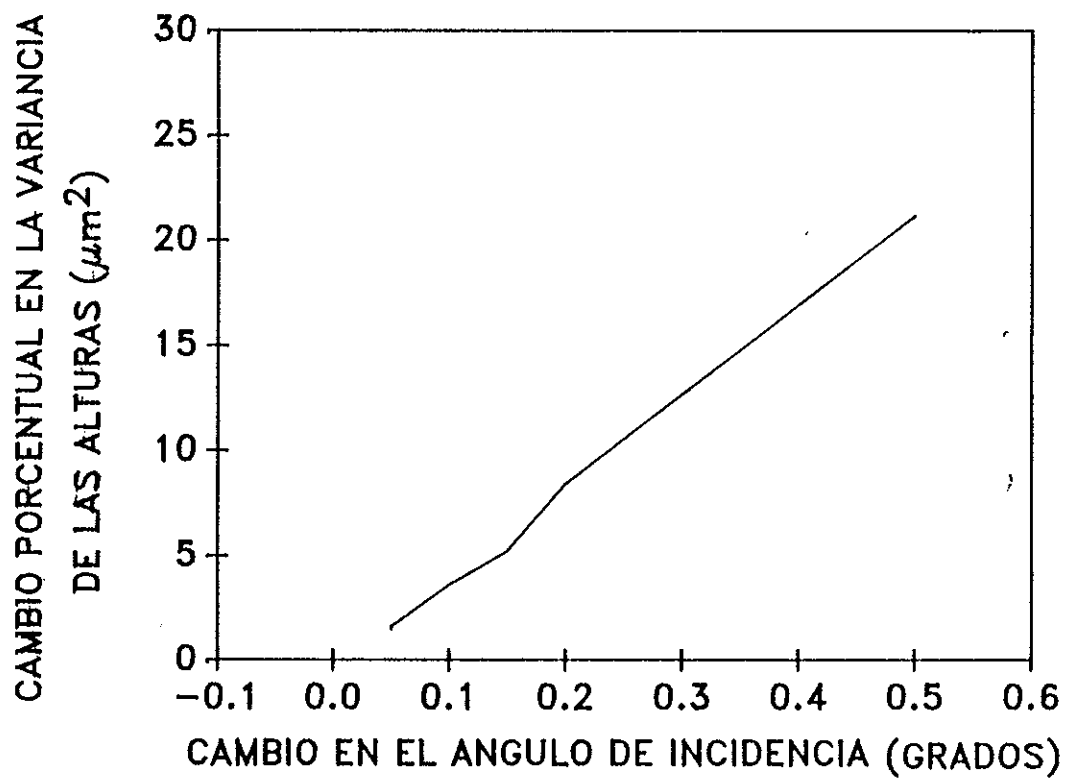


Figura 35. Relación del cambio porcentual en la variancia de alturas con el cambio en el ángulo de incidencia.
 $\sigma_s^2 = 0.94 \mu\text{m}^2$ para $\theta_s = 8^\circ$.

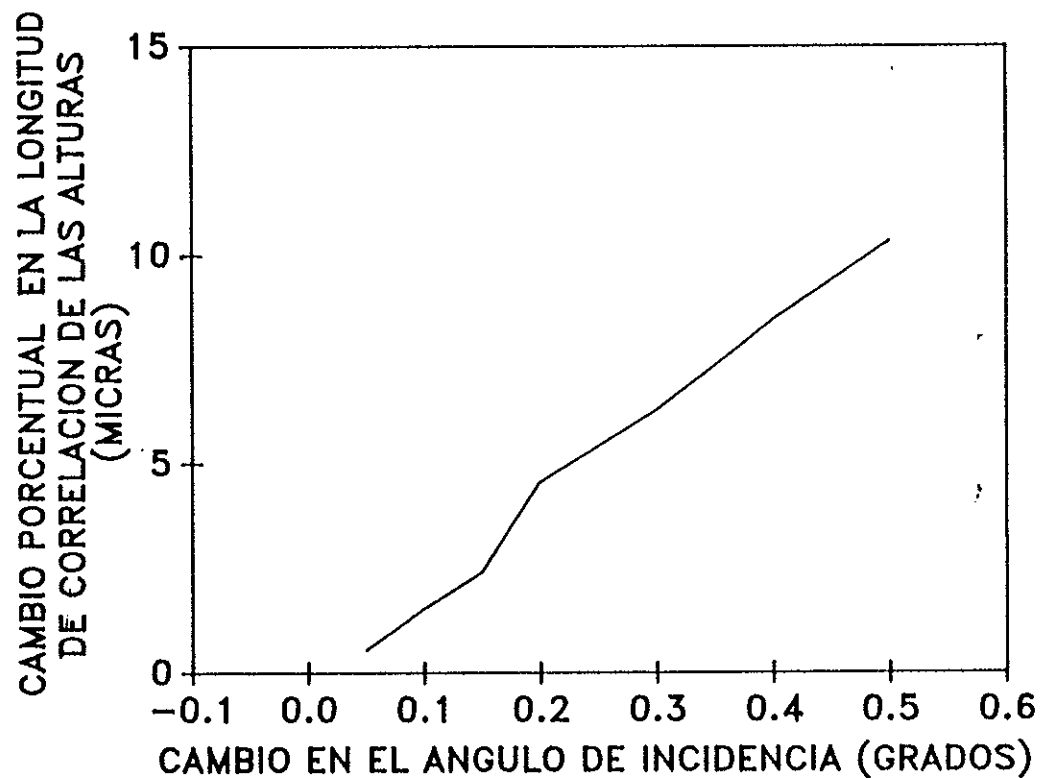


Figura 36. Relación del cambio porcentual en la longitud de correlación de las alturas de la superficie con el cambio en el ángulo de incidencia. $\sigma_s^2 = 0.94 \mu\text{m}^2$ para $\theta_s = 8^\circ$.

Tabla I. Valores de la variancia de alturas para diferentes ángulos de incidencia.

8°	1.05 0.94 0.91
8.5°	1.00 0.95 0.88
10°	1.16 1.12 1.03

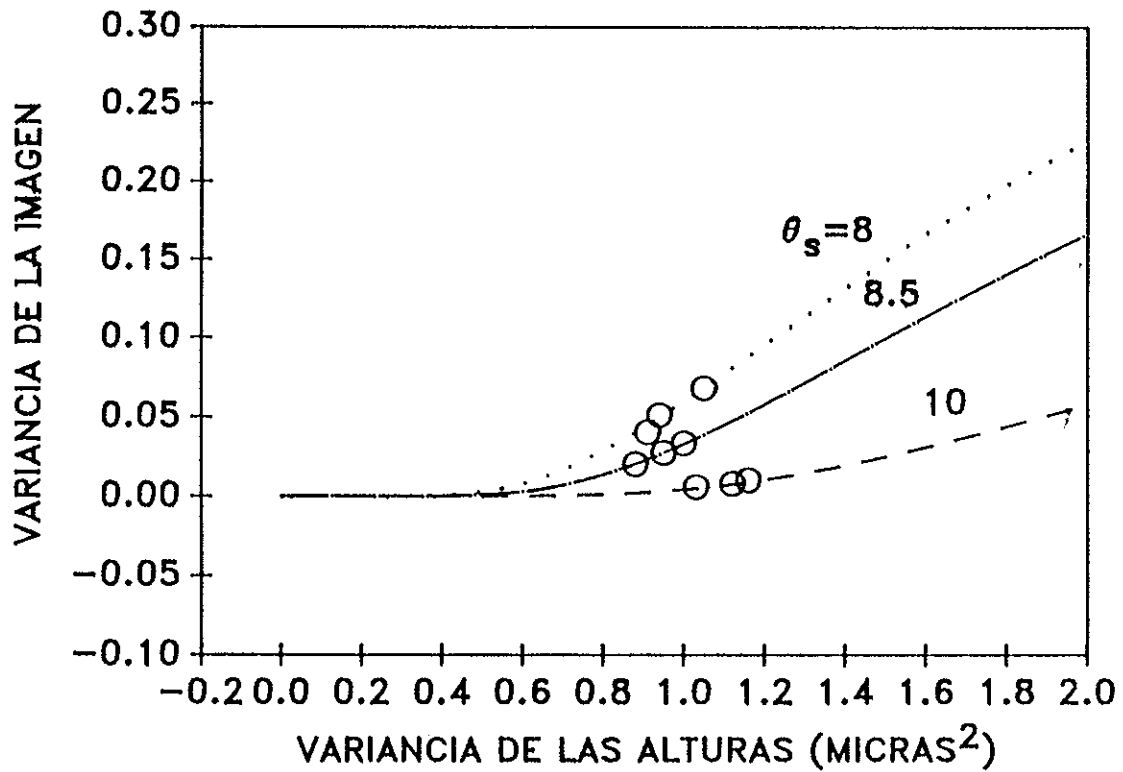


Figura 37. Relación de la variancia de las alturas con la variancia de la intensidad de la imagen para la superficie analizada en el laboratorio.

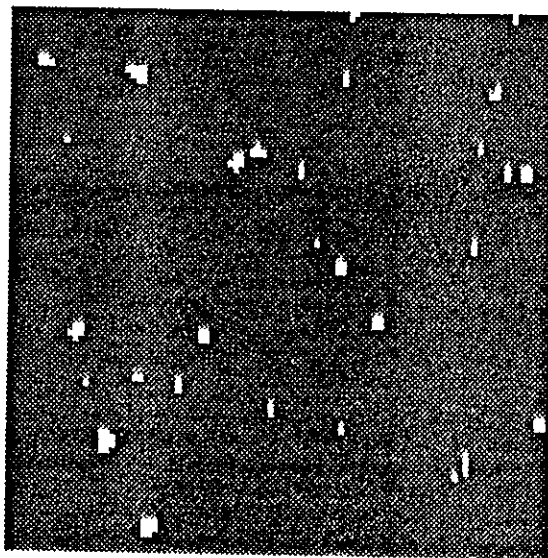


Figura 38. Imagen del patrón de brillo para un ángulo de incidencia de luz de 10° con el sistema de detección normal a la superficie.

VI. RESUMEN Y CONCLUSIONES.

En este trabajo se presentaron resultados concernientes a la obtención de información estadística de la topografía de una superficie con variaciones de altura aleatorias a partir de imágenes remotas. El objetivo, en un futuro cercano, es aplicar la técnica aquí desarrollada para estudiar superficies marinas reales. Esto es algo de cierta importancia, ya que conocer la estadística del oleaje nos permite determinar su influencia en el ambiente marino y en la línea de costa.

Entre los trabajos más importantes que preceden a éste, destaca el de Barber (1954) quien utilizó un método óptico para encontrar la dirección del oleaje, así como el de Cox y Munk (1954a y 1954b), quienes encontraron que, bajo ciertas circunstancias, la distribución de pendientes es aproximadamente Gaussiana. De esto puede concluirse que, en ciertos casos, la superficie del océano pudiera ser modelada como un proceso aleatorio Gaussiano. Una de las conclusiones que puede obtenerse tanto de trabajos anteriores como del presente es que la relación entre el espectro de potencia de las alturas de la superficie y el espectro de potencia de la imagen no es directa. Otra, es que la cantidad de luz que llega a la cámara, después de ser reflejada por la superficie, está relacionada explícitamente con la orientación y altura de la cámara y con las componentes de las pendientes de la superficie del mar, y no con las alturas como ha sido supuesto por varios autores.

Se llevó a cabo un estudio sobre la relación que existe entre la función de correlación de la imagen y la función de correlación de las alturas de la superficie. Esta misma relación permite obtener la variancia de las alturas de la superficie a partir de la variancia de la intensidad en la imagen. El análisis fué hecho tanto para superficies unidimensionales como bidimensionales. Dentro de este proceso de análisis, se determinó una función analítica que describe el patrón de brillo que se registra en la imagen cuando la luz que proviene de la fuente se refleja sólo una vez en la superficie. Se supuso que las alturas de la superficie a analizar representan una realización de un proceso aleatorio Gaussiano, lo cual implica que la función de densidad de probabilidad de pendientes asociada a un punto de la superficie es también Gaussiana.

La investigación reportada aquí involucra tres procesos aleatorios: el perfil de las alturas de la superficie, sus pendientes y la imagen. Cada proceso tiene una función de correlación y las tres funciones están relacionadas entre sí. Una de las condiciones necesarias para llevar a cabo el proceso de inversión entre estas funciones es que exista una correspondencia uno a uno entre los valores de estas tres funciones.

En el caso unidimensional, se obtuvo una expresión analítica para la relación entre la variancia de las fluctuaciones de brillo en la imagen y la variancia de las pendientes, mientras que para el caso bidimensional se obtuvo una relación numérica. Se encontraron también relaciones numéricas para estimar la función de correlación de las pendientes a partir de la función de correlación de las variaciones de intensidad

de la imagen.

Con objeto de determinar las condiciones para llevar a cabo el proceso de inversión, se analizaron las relaciones entre las variancias y las funciones de correlación de los tres procesos, graficando estas expresiones para diferentes ángulos de incidencia. Del análisis de la relación entre las variancias, hacemos notar que el comportamiento que se obtuvo, para diferentes ángulos de incidencia de la luz (observando en dirección normal a la superficie), es congruente con lo que se esperaría intuitivamente. Por ejemplo, para ángulos de incidencia pequeños (0-10 grados), y valores de variancia de pendientes también pequeños, se pueden obtener valores de variancia de la intensidad de la imagen relativamente grandes.

En el análisis concerniente a las funciones de correlación, se obtuvo una relación entre la función de correlación de la imagen y la función de correlación de las pendientes. Esto se hizo por integración numérica. De los resultados obtenidos, se concluye que estas relaciones tienen diferentes comportamientos para distintos ángulos de incidencia de la luz o para distintas posiciones angulares del sistema de detección. Esto significa que, para un problema dado, se debe escoger la geometría adecuada para que el proceso de inversión se pueda realizar, y que esta geometría óptima, depende de la relación entre la variancia de la imagen y la variancia de las pendientes.

Se mostró, además, que de los datos obtenidos para la función de correlación de las pendientes de la superficie partiendo de la función de correlación de la imagen, se puede estimar la función de correlación de alturas, integrando dos veces la primera.

Se presentaron algunos ejemplos en las que por medio de simulaciones numéricas se mostró la aplicabilidad de la técnica introducida en esta tesis a la obtención del espectro de potencia y la función de correlación de las fluctuaciones de altura de una superficie, partiendo de imágenes remotas. Primeramente, se consideró el caso unidimensional. Aquí se utilizaron dos clases de espectros: espectros que corresponden a superficies de una sola escala y el espectro de Pierson-Moskowitz, que se asocia con superficies de varias escalas. Se realizaron algunas simulaciones con estas dos clases de espectros y se presentaron los resultados obtenidos. Los ejemplos de perfiles de alturas de superficies unidimensionales, con estadística Gaussiana, fueron generados utilizando el método espectral descrito por Thorsos (1988). Con respecto a las funciones de correlación se puede concluir lo siguiente: en los ejemplos presentados, tanto para superficies consideradas de una sola escala como para las de varias escalas, se pudo observar que los resultados estimados por el modelo se aproximan bien a los resultados numéricos y analíticos. Dentro de la realización del perfil de alturas de la superficie con el espectro de Pierson Moskowitz no se incluyeron ondas capilares y sería importante incluir esto en un futuro. La simulación por computadora de ondas capilares es un problema bastante complejo, ya que su comportamiento es bastante diferente al que presentan las ondas de gravedad.

Con respecto a los espectros de potencia, se observa que en todas las simulaciones presentadas los resultados estimados con el modelo concuerdan razonablemente con los resultados analíticos.

En una segunda instancia, se consideró el caso bidimensional. Para esto se generó una superficie bidimensional que consistió en una matriz de 100×100 , para representar las alturas en la superficie. Se consideraron superficies tanto isotrópicas como anisotrópicas. Como en el caso unidimensional, los ejemplos de superficies en dos dimensiones fueron generados utilizando una variación del método espectral descrito por Thorsos (1988).

Tanto para el caso unidimensional como para el bidimensional, el ruido estadístico en la estimación numérica de la función de correlación de la imagen fue reducido al promediar sobre 400 funciones de correlación, estimadas a partir de diferentes imágenes con estadísticas equivalentes. En este sentido, es importante recalcar que las funciones de correlación de la imagen deben estimarse con mucha precisión, reduciendo lo más posible la fluctuación estadística. Esto es debido a que la relación entre la función de correlación de la imagen y la función de correlación de las pendientes es muy sensible a pequeños cambios en los valores estimados de la función de correlación de la imagen.

Para concluir este trabajo, se llevó a cabo una simulación de laboratorio con una superficie bidimensional isotrópica fabricada mediante la técnica descrita por Gray (1978). Uno de los objetivos fue la aplicación de la técnica utilizada en este trabajo

para obtener la variancia de las alturas de la superficie y su función de correlación a partir de la imagen del patrón de brillo de la superficie que se forma cuando un haz de luz blanca incide sobre ésta. Los resultados obtenidos para la variancia de alturas de la superficie estuvieron dentro del intervalo esperado y la función de correlación de las alturas de la superficie estimada fué bastante similar a la esperada de acuerdo al proceso de fabricación.

Así, se ha demostrado que la técnica descrita en esta tesis puede aplicarse al estudio estadístico de superficies rugosas mediante el análisis de imágenes remotas que contengan información del patrón de brillo producido por reflexión especular. Para esto, se deben tener en cuenta algunos factores: por ejemplo, que las longitudes de onda de las rugosidades de la superficie a analizar deben ser mayores que la longitud de onda de la luz que se utiliza en el experimento. Se suponen también estadísticas Gaussianas, y no se consideran reflexiones múltiples. Es importante también el saber la geometría adecuada para que el proceso de inversión pueda llevarse a cabo.

Consideramos importante el extender este trabajo al estudio de superficies con estadísticas no Gaussianas. Esto daría lugar a la aplicación inmediata de esta técnica al estudio de superficies marinas para cualquier zona del océano. De otra manera, se restringe la aplicación del modelo a ciertas áreas de la superficie del mar donde las suposiciones de nuestro modelo sean razonables.

Para trabajos futuros hay aún varios problemas que deben resolverse. Por ejemplo, es de gran interés estudiar detenidamente el comportamiento de las olas

capilares, dada la complejidad de éstas y el hecho de que su distribución de pendientes aún se desconoce (Cox, 1993). Las ondas capilares también tienen un efecto dentro del patrón de brillo y es necesario estudiar su contribución a la imagen.

LITERATURA CITADA

- Barber, N.F., 1954. Finding the direction of travel of sea waves. *Nature*, 174, 1048-1050.
- Born, M., y Emil Wolf, 1980. Principles of optics. Pergamon Press, Sixth Edition, New-York.
- Chapman, R.D., y G.B. Ostrem, 1978. Errors in estimating slope spectra from wave images. The Johns Hopkins University. Applied Physics Laboratory. Johns Hopkins Road, Laurel, Maryland, 20810.
- Cox, C., y W. Munk, 1954a. Measurements of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. *J. Opt. Soc. Am.*, 44, 838-850.
- Cox, C., y W. Munk, 1954b. Statistics of the sea surface derived from sun glitter. *J. Mar. Res.*, 13, 198-227.
- Cox, C., 1958. Measurements of slopes of high-frequency wind waves. *J. Mar. Res.*, 16, 199-225.
- Cox, C., 1993. Comunicación personal.
- Dainty, J. C., 1984. The statistics of speckle patterns, in *Progress in Optics*, Vol. XIV, Second edition, E. Wolf, ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- Davenport, W. B. Jr., y W. L. Root, 1958. An introduction to the theory of random signals and noise. McGraw-Hill, New-York.

- Duntley, S. Q., 1950. The visibility of submerged objects, Part 1. Optical effects of water waves. MIT, Office of Naval Research Contract N5ori-07831 and Bureau of Ships contract Nobs-50378, 11 pp.
- Fortuit, L., y J. G. De Boer, 1971. Spatial and temporal correlation of the sea surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49, 1677-1679.
- Gaskill, Jack D., 1978. Linear systems, Fourier transforms, and optics. Chap. 3, John Wiley & Sons, New-York.
- Gray, P. F., 1978. A method of forming optical diffusers of simple known statistical properties. *Optica Acta*, 25, No. 8, 765-775.
- Jerlov, N.G., 1976. Marine Optics, Vol. 14, American Elsevier, New-York.
- Kasevich, R. S., 1975. Directional wave spectra from daylight scattering. *J. Geophys. Res.*, 80, No. 33, 4535-4541.
- Kivelson, M., y S. Moszkowski, 1966. Reflection of electromagnetic waves from a rough surface. *J. Appl. Phys.*, 36, 3609-3612.
- Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright, y D. D. Smith, 1963. Observations of the directional spectrum of sea waves-Using the motions of a floating buoy, in *Ocean Wave Spectra*, pp. 111-136, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Marron, J., y G. Michael Morris, 1986. Correlation measurements using clipped laser speckle. *Applied Optics*, 25, No. 5, 789-793.
- Negrete-Regagnon, P. y J. Alvarez-Borrego, 1990. Optical and digital image processing of a simulated sea surface. *Opt. Pura y Apl.*, 23, 7-29.
-

- Neumann, G., 1953. On ocean wave spectra and a new method of forecasting wind-generated sea. Beach erosion board, Corps of Engineers, Tech. Memo. 43, 42 pp.
- Ocampo Torres, F.J. y I.S. Robinson, 1989. Wind directional effects on the hydrodynamic modulation of microwave radar images of ocean waves. *Int. J. Remote Sensing*, 10, No. 8, 1339-1355.
- Ocampo Torres, F.J. y I.S. Robinson, 1990. Wind wave directionality effects on the radar imaging of ocean swell. *J. Geophys. Res.*, 95, No. C11, 20,347-20,362.
- Ohtsubo, J., 1985. Intensity clipping correlation of speckle patterns. *Applied Optics*, 24, 746.
- Papoulis, A., 1981. Probability, random variables, and stochastic processes, Chap. 9, McGraw-Hill, New-York.
- Pedersen, H. M., 1984. Theory of speckle correlation measurements using nonlinear detectors. *J. Opt. Soc. Am. A* 1. 850.
- Peón-González, R., 1988. Correlación óptica y digital de superficies marinas simuladas que contienen el espectro teórico de Pierson-Neumann y Pierson-Moskowitz. Tesis de Licenciatura, Fac. de Ciencias Marinas, Univ. Autónoma de Baja Calif., Ensenada B. C., México.
- Peón-González, R., y J. Alvarez-Borrego, 1990. Optical and digital correlation of simulated sea surfaces. *Opt. Pura y Apl.*, 23, 31-54.

- Peppers, N., y J. S. Ostrem, 1978. Determination of wave slopes from photographs of the ocean surface: a new approach. *Applied Optics*, 17, 3450-3458.
- Pierson, W. J., 1955. Wind generated gravity waves. *Advances in Geophysics*, 2, Academic Press, 93-178.
- Pierson, W. J., y W. Marks, 1952. The power spectrum analysis of ocean-wave records. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 33, 834-844.
- Pierson, W. J. Jr., y L. Moskowitz, 1964. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. *J. Geophys. Res.*, 69, 5181-5190.
- Plass, Gilbert N., George W. Kattawar y John A. Guinn, Jr., 1977. Isophotes of sunlight glitter on a wind-ruffled sea. *Applied Optics*, 16, No. 3, 643-646.
- Preisendorfer, R. W., 1976. *Hydrologic Optics*, Vol. VI, Pacific Environmental Laboratory, ERL/NOAA.
- Preisendorfer, R. W., y Curtis D. Mobley, 1986. Albedos and glitter patterns of a wind roughened sea surface. *J. Physical Oceanography*, 16, 1293-1316.
- Stilwell, D. Jr., 1969. Directional energy spectra of the sea from photographs. *J. Geophys. Res.*, 74, 1974-1986.
- Stilwell, D. Jr., y R. O. Pilon, 1974. Directional spectra of surface waves from photographs. *J. geophys. Res.*, 79, 1277-1284.
- Thorsos, E. I., 1988. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83, 78-92.
-

- Thorsos, E. I., 1990. Acoustic scattering from a "Pierson-Moskowitz" sea surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88, 335-349.
- Van Vleck, J. H., y D. Middleton, 1966. The spectrum of clipped noise. *Proc. IEEE*, 54, 1-19.
- Welford, W. T., 1977. Optical estimation of statistics of surface roughness from light scattering measurements. *Opt. Quantum Electron*, 9, 269-287.
-