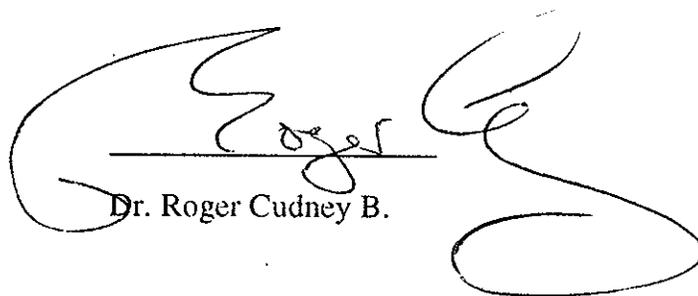


RESUMEN de la Tesis de Víctor Manuel Coello Cárdenas, presentado como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS con la opción en OPTICA. Ensenada, Baja California, Noviembre de 1995.

CONJUGACION OPTICA DE FASE EN UN CRISTAL DE BaTiO₃.

Resumen aprobado por:



Dr. Roger Cudney B.

En este trabajo se realiza un análisis teórico y experimental sobre la generación de ondas de fase conjugada en cristales fotorrefractivos, en particular en titanato de bario. Este análisis nos llevó al desarrollo de un oscilador fotorrefractivo en nuestro laboratorio.

Primeramente se sientan las bases para la comprensión del efecto fotorrefractivo. Se describe la formación de una rejilla fotorrefractiva mediante el modelo de transporte por banda y se discute el fenómeno de transferencia de energía entre dos haces láser ocasionada por una rejilla fotorrefractiva. Se realiza la deducción de las ecuaciones que describen esta transferencia de energía mediante un análisis de modos acoplados.

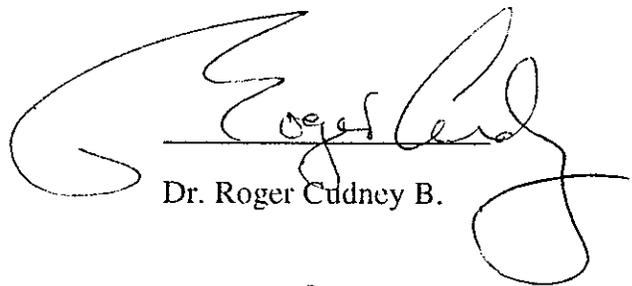
Luego se estudia la generación de ondas de fase conjugada en cristales fotorrefractivos mediante varias técnicas, que son la mezcla de 4 ondas, autoconjugación de fase y conjugación doble de fase. Se reportan resultados experimentales obtenidos utilizando un cristal de titanato de bario.

Por último se discuten las condiciones necesarias para obtener oscilaciones espontáneas en un oscilador fotorrefractivo que se realizó en el laboratorio. Este oscilador utiliza como cavidad dos caras internas de un cristal de titanato de bario.

ABSTRACT of the thesis of Víctor Manuel Coello Cárdenas, presented as a partial requirement to obtain the MASTER IN SCIENCE degree in OPTICS. Ensenada, Baja California, Mexico. November 1995.

OPTICAL PHASE CONJUGATION IN A BaTiO₃ CRYSTAL.

Abstract approved by:



Dr. Roger Cudney B.

In this thesis we present theoretical and experimental studies of phase conjugation of optical waves in photorefractive crystals, in particular in barium titanate. These studies led us to the development of a photorefractive oscillator.

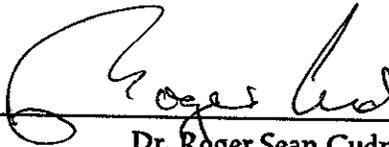
First we present a brief description of the photorefractive effect. We analyze the formation of photorefractive gratings using the band-conduction model and we describe how these gratings couple the intensities of two laser beams (two-beam coupling). This effect is studied using a coupled-mode analysis.

We then review 3 different techniques of obtaining phase conjugation in photorefractive crystals: four-wave mixing, self-pumped phase conjugation and double phase conjugation. We report experimental results obtained using a barium titanate crystal.

Finally, we discuss the conditions which must be met in order to obtain the spontaneous oscillations that were observed in a photorefractive oscillator produced in our laboratory. This oscillation occurs between two faces of the barium titanate crystal.

TESIS DEFENDIDA POR
VICTOR MANUEL COELLO CARDENAS

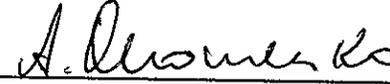
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE



Dr. Roger Sean Cudney Bueno
Director del Comité



Dra. Diana Tentori Santacruz
Miembro del Comité



Dr. Anatolii Khomenko Filatova
Miembro del Comité



Dr. Diego Rubén Yankelevich Gorfinkiel
Miembro del Comité



Dra. Diana Tentori Santacruz
Jefe del Departamento de Optica



Dra. Ma. Luisa Argote Espinoza
Director de Estudios de Posgrado

17 de Noviembre de 1995

**CENTRO DE INVESTIGACION CIENTIFICA Y DE
EDUCACION SUPERIOR DE ENSENADA.**

**DIVISION DE FISICA APLICADA.
DEPARTAMENTO DE OPTICA.**

**CONJUGACION OPTICA DE FASE EN UN CRISTAL DE
BaTiO₃.**

TESIS

**que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para
obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS presenta:**

VICTOR MANUEL COELLO CARDENAS

Ensenada, Baja California, México. Noviembre de 1995.

DEDICATORIA

A quienes le dan sentido a mi felicidad:

**Víctor Manuel Coello Ruiz.
Rosa E. Cárdenas de Coello.
Roxana Coello Cárdenas.**

Mi familia.

AGRADECIMIENTOS.

A mi director de tesis, Dr. Roger Cudney, por haber aceptado dirigir este trabajo y por los comentarios, sugerencias y apoyo que recibí de su parte para que esta tesis pudiera concluirse.

A mi comité de tesis formado por la Dra. Diana Tentori, Dr. Anatolii Khomenko, Dr. Diego Yankelevich y Dr. Rafael Kelly, por todas sus aportaciones y valiosos comentarios.

Al Dr. Raúl Rangel Rojo, por la forma tan desinteresada de colaborar en este trabajo y por todo el apoyo recibido de su parte durante mi segundo año de estancia.

A mi amigo y maestro en todos los sentidos, Ricardo Villagómez Tamez, por ser artífice de esta aventura y de las próximas.

Al mejor grupo de trabajo: Vene, Pablo, Amparito, Rodolfo "El profe" y Néstor, mis compañeros y amigos de generación.

A Alberto Mendoza, por su infatigable entusiasmo por la enseñanza.

A todos mis maestros de la maestría.

Al personal técnico del departamento de Óptica.

Al Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

De manera muy especial, a quien ocupa un espacio muy especial en mí,

Laury TQM.

A Blanca, por su maravillosa amistad.

A Verónica Hernández por todo su apoyo.

A Carmen y Chucho (que sean muy felices)

y a todos los que hicieron posible este reventón,

Maricela, Javier, Rafa, Manuel García, Miguel "El Flaco", Manuel Leyva, Salomé, Alejandro
"El Chilaquil", los físicos, los astrónomos, los electrónicos, los terrícolas, los oceanólogos...

la raza...

CONTENIDO

	<u>Página</u>
I.- INTRODUCCION.	1
II.- EL EFECTO FOTORREFRACTIVO.	4
II.1.-Introducción.	4
II.2.- El modelo de banda de conducción.	9
II.3.- Difracción en una rejilla.	13
II.4.- Conjugación de fase por medio del efecto fotorrefractivo.	19
III.-MEZCLADO DE ONDAS EN UN MEDIO FOTORREFRACTIVO.	22
III.1.- Introducción.	22
III.2.- La condición de Bragg.	23
III.2.1.- Difracción de Bragg en un medio anisotrópico.	27
III.3.- Mezclado de dos ondas en un medio fotorrefractivo.	29
III.3.1.- Las ecuaciones acopladas.	30
IV.-CONJUGACION OPTICA DE FASE.	37
IV.1.- Introducción.	37
IV.2.- Conjugación de fase en BaTiO ₃ vía mezclado de cuatro ondas.	38
IV.3.- El efecto de abanico (Fanning effect).	43
IV.4.- Espejos autoconjugadores de fase.	44
IV.5.- Doble conjugación de fase.	46
IV.6.- Corrección de aberraciones a través de la conjugación de fase.	47

CONTENIDO (Continuación)

Página

V.- EL OSCILADOR FOTORREFRACTIVO.	49
V.1.-Introducción.	49
V.2.- El oscilador lineal.	49
V.3.-Análisis sobre un oscilador lineal fotorrefractivo que utiliza dos de las caras internas del cristal como cavidad.	52
V.3.1.- Condiciones de oscilación.	56
VI.- DISCUSIONES EXPERIMENTALES.	61
VI.1.- El microscopio no lineal.	61
VI.2.- Mezclado de 4 ondas.	63
VI.3.- Autoconjugación de fase.	65
VI.4.- Doble conjugación de fase.	69
VI.5.- Corrección de aberraciones.	70
VII.- CONCLUSIONES.	72
APENDICES.	
A. Cálculo en una dimensión del campo eléctrico de espacio-carga.	74
B. Deducción de las ecuaciones acopladas para el mezclado de dos ondas en un cristal de BaTiO ₃ .	81
LITERATURA CITADA.	93

VARIABLES MAS UTILIZADAS EN ESTA TESIS.

e	Carga del electrón.
\vec{E}	Campo eléctrico.
\vec{J}	Densidad de corriente.
k	Número de onda de una onda plana.
\vec{K}	Vector de onda de la rejilla.
K_B	Constante de Boltzmann
m	Modulación del patrón de interferencia.
R	Reflectividad.
n	Índice de refracción.
n_o	Índice de refracción ordinario.
n_e	Índice de refracción extraordinario.
N_A	Densidad de trampas receptoras.
N_D	Densidad de trampas donadoras.
N_D^+	Densidad de trampas donadoras ionizadas.
r_{ijk}	Elementos del tensor electroóptico.
ρ	Densidad de carga.
η_e	Densidad de electrones en la banda de conducción.
λ	Longitud de onda.
Λ	Período de la rejilla.
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Tensor dieléctrico de rango 2.
$\underline{\underline{R}}$	Tensor electroóptico de rango 2.
Γ	Constante de acoplamiento.
T	Temperatura.
N_{ef}	Densidad efectiva de trampas.
\hat{e}	Estado de polarización.
\hat{c}	Dirección del eje cristalográfico c .

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Página</u>
1	Modelo del efecto fotorrefractivo. Trampas donadores, eléctricamente neutras, son fotoionizadas quedando como estados vacíos con posibilidad de recombinar electrones. Los electrones liberados migran por difusión a otras regiones del cristal donde se recombinan con trampas donadoras ionizadas. Originándose una redistribución de la carga.	7
2	El mecanismo fotorrefractivo. Dos haces coherentes entre sí se intersectan en un cristal electroóptico formando un patrón de interferencia. En las regiones de mayor intensidad se excitan electrones que emigran hacia regiones de baja intensidad. El campo eléctrico asociado con la distribución de carga resultante opera a través del efecto electroóptico produciendo una rejilla de índice la cual tendrá un corrimiento de fase de 90° con respecto al patrón de interferencia.	8
3	Difracción en una rejilla fija.	14
4	Transferencia de energía en un medio fotorrefractivo.	18
5	Generación de una onda fase conjugada.	21

Figura

LISTA DE FIGURAS (CONTINUACION)

Página

- 6 Dos haces acoplados en un cristal fotorrefractivo de BaTiO_3 . En (a) dos haces de igual intensidad incidente emergen con distintas intensidades. En (b) los haces no se intersectan y no ocurre el acoplamiento. En (c) el cristal es girado 180° , la dirección del acoplamiento también se invierte (tomada de J. Feinberg *et al* 1980). 23
- 7 (a) Esparcimiento de una onda monocromática en un medio periódico.
(b) La condición de Bragg 25
- 8 Representación gráfica de una rejilla de índice de refracción. 27
- 9 Difracción de Bragg en un medio anisotrópico. 28
- 10 Mezclado de dos ondas. 36
- 10a Curva de ganancia en función de la longitud de interacción para el mezclado de dos ondas en un cristal de BaTiO_3 . 37
- 10b Curva de ganancia en función de la longitud para un haz que se difracta en la misma. 37
- 11 Comparación entre un espejo ordinario (a) y un espejo conjugador de fase (b). 38
-

Figura**LISTA DE FIGURAS (CONTINUACION)****Página**

- | | | |
|----|---|----|
| 12 | Una onda plana es distorsionada (a) es refleja por un conjugador de fase y al pasar por el medio distorsionador se restaura (b). | 38 |
| 13 | Mezclado de cuatro ondas. | 39 |
| 14 | Condición de Bragg (mezclado de cuatro ondas). | 39 |
| 15 | Autoconjugadores de fase (a) "LINEAL". (b) "CAT". (c) "ANILLO". | 45 |
| 16 | Esquema de un doble conjugador de fase. | 46 |
| 17 | Vectores de onda de las rejillas (a). (b) Rejilla común. | 47 |
| 18 | Un frente de onda plano que se propaga sufre una distorsión. Al ser reflejado por un espejo conjugador de fase se genera la onda conjugada la cual al pasar a través del medio distorsionador corrige las aberraciones. | 48 |
| 19 | Un espejo conjugador de fase con una gran ganancia y un espejo ordinario pueden crear una cavidad resonante. | 50 |
| 20 | Representación esquemática de un espejo autoconjugador y un espejo ordinario que forman una cavidad donde se da una idea de la sencillez del arreglo óptico. | 51 |
-

<u>Figura</u>	LISTA DE FIGURAS (CONTINUACION)	<u>Página</u>
21	a) Un semirresonador bombeado por dos haces utilizando un espejo ordinario. b) Un semirresonador bombeado por un sólo haz utilizando un espejo ordinario.	52
22	Mezclado de cuatro ondas.	53
23	Esquema de un oscilador lineal fotorrefractivo.	54
24	Formación de la cavidad con dos de las caras internas del cristal	55
25	Curvas teóricas del factor de ganancia Γ_l contra ángulo θ para diferentes ángulos α .	58
26	Factor de ganancia contra θ para un ángulo de 10° .	59
27	Arreglo esquemático de un microscopio no lineal.	61
28	Mezclado de 4 ondas.	64
29	Autoconjugación de fase.	65
30	Doble conjugación de fase.	69

Figura

LISTA DE FIGURAS (CONTINUACION)

Página

31	Corrección de aberraciones.	71
B-1	Representación esquemática de dos ondas planas con estados de polarización en el plano de incidencia.	90

LISTA DE FOTOGRAFIAS

Página

- 1 Fotografía de una imagen fase conjugada, donde se nota una pobre resolución debido a que al cristal no llegaban las frecuencias espaciales altas de la imagen. 68

- 2 Fotografía de la misma imagen de fase conjugada, donde ahora se nota un mejoramiento en la resolución una vez que se capturaron las frecuencias espaciales altas de la imagen. 68

CONJUGACION OPTICA DE FASE EN UN CRISTAL DE

BaTiO₃

I. INTRODUCCION

A finales de la década de los '70 y principios de los '80 surgió un nuevo campo en el área de la óptica coherente: la conjugación de fase. La conjugación óptica no lineal de fase es una técnica por medio de la cual se invierte exactamente la dirección original de propagación de un haz de luz. Su funcionamiento está basado en el procesamiento en tiempo real de campos electromagnéticos a través de un medio no lineal. Cabe señalar, que este procesamiento puede ser extendido a otras regiones del espectro electromagnético, tales como las microondas, radares, los rayos UV, etcétera; y puede también involucrar otros campos como las ondas acústicas (Pepper, 1981).

Dentro de las aplicaciones de la conjugación de fase se encuentran la corrección de aberraciones en imágenes o señales debidas a la propagación de la onda a través de un medio distorsionador, resonadores fotorrefractivos, interferometría, entre otras. La técnica elimina la necesidad de costosos y, en ocasiones lentos, dispositivos electrónicos. Aunado a esto se encuentran las ventajas de la utilización del ancho de banda espacial o temporal que proporciona el uso de las técnicas de procesamiento óptico. Los cristales fotorrefractivos son uno de los medios no lineales más utilizados para la conjugación de fase.

Estos cristales requieren de muy bajas intensidades (del orden de miliwatts) para la obtención de una onda fase conjugada.

Aunque en este trabajo tocamos algunas de las aplicaciones de la conjugación de fase, el énfasis está en el mezclado de radiación electromagnética en medios fotorrefractivos y en las diferentes formas o técnicas para obtener una onda de fase conjugada en los mismos.

El mezclado de ondas en un medio fotorrefractivo consta de dos partes usualmente inseparables: la acción de la luz sobre el medio y la respuesta del mismo. Este trabajo comienza analizando la primera parte.

En el capítulo II se realiza un estudio sobre el efecto fotorrefractivo, en el cual la luz redistribuye cargas ocasionando una perturbación en el índice de refracción del material, formándose una rejilla de índice de refracción u holograma de volumen. El modelaje de este proceso es llevado a cabo mediante el modelo de transporte por banda. En este capítulo también se da una explicación breve del fenómeno de acoplamiento de ondas y de conjugación de fase a través de mezclado de 4 ondas.

La respuesta de un medio fotorrefractivo a la interacción de la luz se estudia en el capítulo III. Las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica son utilizadas para la deducción de las ecuaciones acopladas que gobiernan el comportamiento del mezclado de 2 ondas en medios fotorrefractivos. En este mismo capítulo se observará que esta mezcla de ondas nos lleva a un resultado de transferencia de energía entre los haces.

Una vez estudiado el mecanismo de formación de una rejilla de índice y la difracción de una onda que se propaga a través de ella, presentaremos como se efectúa la conjugación de fase en medios fotorrefractivos, en particular en un cristal de titanato de bario (BaTiO_3). En el capítulo IV se analizará entonces la comprobación teórica de la existencia de una onda

fase conjugada debido a la mezcla de 4 ondas en un cristal de BaTiO_3 . Se hablará ahí mismo sobre las diversas técnicas basadas en el uso de en cristales fotorrefractivos para la obtención de una onda de fase conjugada.

Como una consecuencia de la gran ganancia que se obtiene en la conjugación de fase en cristales fotorrefractivos surge el estudio y desarrollo de los osciladores fotorrefractivos. En el capítulo V se hace un breve estudio sobre estos dispositivos y se analizan los mecanismos de formación y condiciones de oscilación de un oscilador fotorrefractivo realizado en nuestro laboratorio con un cristal de BaTiO_3 , el cual utiliza dos de sus caras internas como cavidad.

En el capítulo VI se reportan las técnicas de conjugación de fase con un cristal de BaTiO_3 llevadas a cabo en nuestro laboratorio y se muestra la fotografía de una imagen conjugada obtenida. En este mismo capítulo se describe el funcionamiento de un microscopio no lineal realizado en laboratorio, el cual basa su principio de funcionamiento en el acoplamiento de dos ondas.

Por último en el capítulo VII se dan las conclusiones sobre este trabajo.

II.- EL EFECTO FOTORREFRACTIVO.

II.1.-Introducción.

El efecto fotorrefractivo puede ser definido como un fenómeno en el cual el índice de refracción de un medio se modifica como consecuencia de iluminarlo con un haz de luz (Pepper *et al*, 1990). El efecto fue descubierto en 1966 por Arthur Ashkin y sus colegas durante la realización de trabajos de investigación en transmisión de luz láser a través de cristales electroópticos. Ashkin observó que se introducía una inhomogeneidad en el índice de refracción la cual provoca que el frente de onda transmitido se distorsionara. Desde entonces este fenómeno ha sido observado en muchos cristales electroópticos entre los que se encuentran BaTiO_3 , KNbO_3 , LiNbO_3 , $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), GaAs, entre otros (Yeh, 1993). El fenómeno consiste básicamente en lo siguiente: un medio fotorrefractivo es iluminado, la iluminación provoca una excitación de carga en el medio, las cargas una vez excitadas, se redistribuyen en el medio por diferentes mecanismos produciendo un campo eléctrico que a su vez altera el índice de refracción a través del efecto electroóptico. Si la iluminación se realiza con una distribución senoidal de la intensidad producido por un patrón de interferencia la rejilla grabada tendrá un corrimiento en fase de 90° con respecto al patrón de intensidad lo que da lugar a fenómenos interesantes como el acoplamiento de ondas y conjugación de fase de los cuales hablaremos más adelante.

Vamos a analizar un poco la naturaleza del efecto. Consideremos que un cristal fotorrefractivo contiene ciertas impurezas o trampas cuyo estado energético se encuentra en la banda prohibida del material (Fig 1). Distingamos dos clases de estas trampas, trampas

donadoras y trampas receptoras (con carga negativa). Por simplicidad de análisis diremos que los donadores son todos iguales y tienen exactamente los mismos estados de energía y que lo mismo sucede con los receptores. Si este cristal es iluminado ocurrirá una fotoionización de los donadores generando con esto electrones en la banda de conducción. Como consecuencia los electrones generados habrán dejado atrás de ellos trampas vacías, en otras palabras, donadores ionizados (con carga +) donde pueden decaer electrones que se encuentran en la banda de conducción (recombinación).

Veamos el caso concreto en el que la iluminación en el cristal se realice con un par de haces que interfieran dentro del mismo formando una distribución senoidal de la intensidad. Los electrones generados por fotoionización de donadores se encontraran en la banda de conducción, por lo que su movilidad es alta y pueden migrar por difusión a otras regiones del cristal donde se recombina con otras trampas donadoras ionizadas. Si estos portadores de carga son atrapados en las zonas oscuras permanecerán ahí ya que no habrá luz que los reexcite. Por lo tanto existe una tendencia a que las cargas extraídas de las regiones iluminadas se acumulen en las regiones oscuras, quedando las regiones brillantes cargadas positivamente mientras que las oscuras lo estarán negativamente. En otras palabras se habrá creado una redistribución de la densidad de carga, con un corrimiento de fase de 180° con respecto al patrón de intensidad.

El campo eléctrico que se construye por esta redistribución o separación de cargas está directamente relacionado con la densidad de cargas ρ por la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \quad , \quad (1)$$

donde ε es la constante dieléctrica del medio y ε_0 es la permitividad en el vacío. A través de esta última relación sabemos que el campo eléctrico que se construye en el cristal está desfasado 90° con respecto al patrón de interferencia. Este campo eléctrico, al cual llamaremos de espacio-carga, induce una variación periódica en el índice de refracción vía el efecto electroóptico, en otras palabras, se crea una rejilla de índice de refracción.

En resumen podemos ver que el efecto fotorrefractivo consta de seis procesos fundamentales (Fig.2).

- (1) Generación de portadores de carga.
- (2) Transporte de los portadores de carga por difusión*.
- (3) Redistribución de la densidad de carga.
- (4) Captura de los portadores de carga.
- (5) Creación de un campo eléctrico interno.
- (6) Formación de una rejilla de índice de refracción por medio del efecto electroóptico.

* Existen otros mecanismos de transporte como el arrastre de cargas o el efecto fotogalvánico.

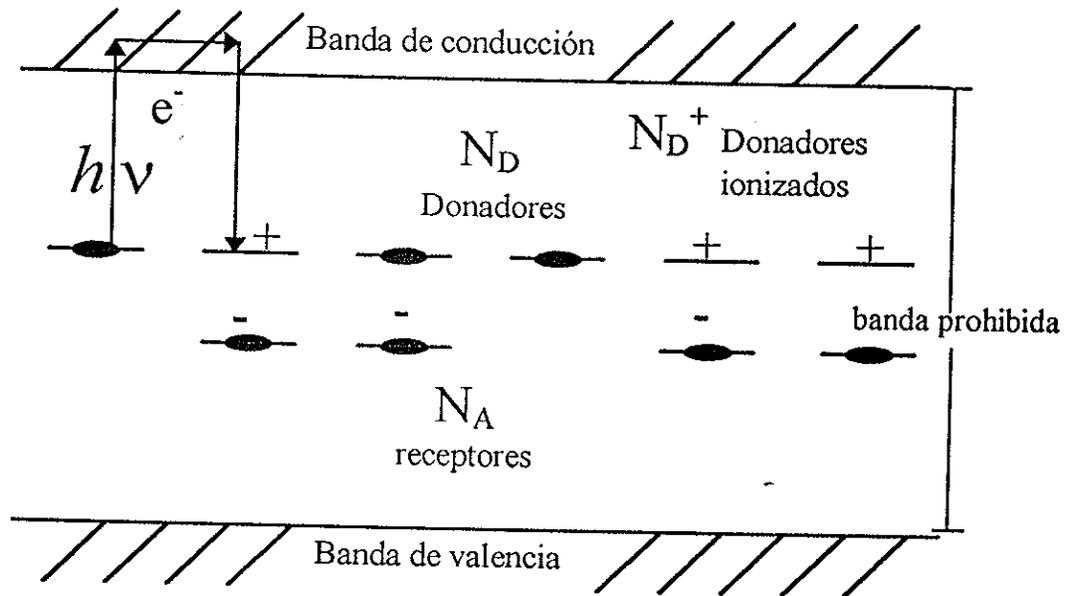


Figura 1.- Modelo del efecto fotorrefractivo.

Trampas donadoras, eléctricamente neutras, son fotoionizadas quedando como estados con carga positiva y con posibilidad de aceptar electrones. Los electrones liberados migran por difusión a otras regiones del cristal donde se recombinan con trampas donadoras ionizadas, originándose una redistribución de la carga.

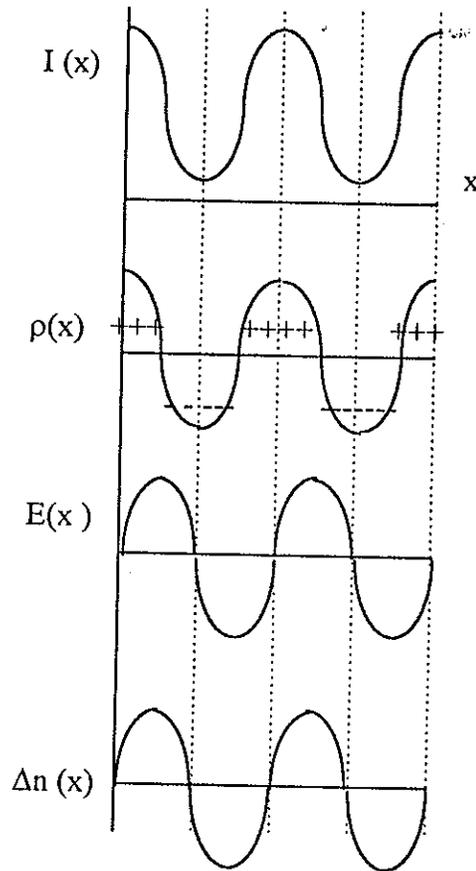


Figura 2.- El mecanismo fotorrefractivo.

Dos haces coherentes entre sí se intersectan en un cristal electroóptico formando un patrón de interferencia. En las regiones de mayor intensidad se excitan electrones que emigran hacia regiones de baja intensidad. El campo eléctrico asociado con la distribución de carga resultante opera a través del efecto electroóptico produciendo una rejilla de índice la cual tendrá un corrimiento de fase de 90° con respecto al patrón de interferencia.

II.2.- El modelo de transporte por banda.

Para encontrar una expresión del campo eléctrico construido dentro del cristal y poder entender el proceso de formación de la rejilla, se requiere de un modelo que nos describa la migración de las cargas internas del cristal. Dentro de los modelos más comúnmente utilizados para este fin se encuentra el modelo de transporte por banda

Denominemos trampa a todo átomo, molécula o sitio, del cual puedan ser excitadas cargas (electrones o agujeros) y al cual puedan decaer. Por sencillez supondremos que el cristal fotorrefractivo contiene dos especies de trampas, donadores y trampas receptores cuyas densidades denotaremos con N_D y N_A respectivamente. La densidad de electrones en la banda de conducción se denota por n_e .

La ecuación que gobierna la densidad de trampas donadores ionizadas, es decir, aquellas que han cedido uno de sus electrones es:

$$\frac{\partial N_D^+(x,t)}{\partial t} = sI(x)(N_D - N_D^+) - \gamma_D n_e N_D^+ , \quad (2)$$

(una descripción más detallada sobre esta ecuación se encuentra en Yariv, 1990).

En (2) s es la sección eficaz de fotoexcitación, N_D^+ es la densidad de donadores ionizados, γ_D es el coeficiente de recombinación de un electrón libre en una trampa N_D^+ , $I(x)$ es la intensidad de la luz. Para un patrón de interferencia formado por 2 ondas planas

con vectores de onda \vec{k}_1 y \vec{k}_2 y estados de polarización \hat{e}_1 y \hat{e}_2 , se cumple que la intensidad va de acuerdo a la siguiente expresión:

$$I(x) = I_0 \left[1 + \frac{me^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}}{2} + \frac{m^* e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}}{2} \right], \quad (3)$$

donde $\vec{K} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ es el vector de onda del patrón de interferencia y m es la modulación espacial que viene dada por:

$$m = \frac{2E_1 E_2^*}{|E_1|^2 + |E_2|^2} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2^* . \quad (4)$$

Con el transporte de carga tendremos una densidad de corriente, \vec{J} , asociada la cual consta de una contribución por arrastre de portadores de carga y otra por difusión, entonces:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \mu e \eta_e \vec{E}(\vec{r}, t) + K_B T \mu \nabla \eta_e . \quad (5)$$

Aquí μ es una constante de movilidad, \vec{E} es el campo eléctrico formado en el cristal, e es la carga del electrón y $K_B T$ es el producto de la constante de Boltzmann por la

temperatura. La densidad de corriente está relacionada con la densidad de carga por medio de la ecuación de continuidad de corriente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = e \frac{\partial}{\partial t} [N_D^+ - N_A - \eta_e]. \quad (6)$$

Las ecuaciones (1), (2), (5) y (6) conforman lo que se conoce como el modelo de transporte por banda. Para resolverlas analíticamente haremos varias aproximaciones.

Primero supondremos que la modulación es muy pequeña de manera que $|m| \ll 1$, supondremos también que nos encontramos en el estado estacionario de tal forma que no existe dependencia temporal en nuestro análisis y consideraremos que la intensidad es baja y por lo tanto la densidad de electrones en la banda de conducción es mucho menor que la densidad de donadores ionizados ($\eta_e \ll N_D^+$). Entonces las variables η_e , \vec{E} , N_D^+ , y \vec{J} las podemos representar como una suma truncada de Fourier de la forma:

$$N_D^+(\vec{r}) = N_{D_0}^+ + \left[\frac{N_{D_1}^+}{2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c. \right], \quad (7)$$

$$\eta_e(\vec{r}) = \eta_{e0} + \left[\frac{\eta_{e1}}{2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c. \right], \quad (8)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_0 + \left[\frac{\vec{J}_1}{2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c \right], \quad (9)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \frac{1}{2} \left[\vec{E}_1 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c \right], \quad (10)$$

Con lo anterior podemos llegar a una expresión para el campo eléctrico espacio-carga. Un análisis sobre tal obtención es realizado en el apéndice A. El resultado es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\frac{1}{2} m f(K) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c \right] \hat{K}, \quad (11)$$

con

$$f(K) = i \frac{K_B T}{e} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{k_0} \right)^2}, \quad (12)$$

y el parámetro k_0 viene dado por:

$$k_0 = \sqrt{\frac{e^2}{K_B T \epsilon \epsilon_0} N_{ef}}, \quad (13)$$

donde N_{ef} es la densidad de carga disponible para la creación del campo eléctrico que se construye en el cristal y está dada por:

$$N_{ef} = \frac{N_A}{N_D} (N_D - N_A). \quad (14)$$

La ecuación (11) nos muestra que el campo eléctrico construido no depende de la intensidad sino de la modulación del patrón de interferencia. A mayor K , mayor campo eléctrico espacio-carga (para $K \ll k_0$). Esto es debido a que aumenta la corriente de difusión. El campo eléctrico espacio-carga está limitado por la cantidad finita de carga Nef y alcanza su máxima magnitud cuando $K=k_0$.

Este campo eléctrico introduce una variación en el índice de refracción vía el efecto electroóptico de la forma :

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right) = r_{ef} E . \quad (15)$$

Aquí r_{ef} es un coeficiente electroóptico efectivo del material .

II.3.- Difracción en una rejilla.

Hasta ahora hemos visto como dos haces mutuamente coherentes forman una rejilla de índice de refracción en un medio fotorrefractivo. Los mismos haces que crearon la rejilla pueden ahora difractarse en ella. La difracción en dicha rejilla nos lleva a un resultado de transferencia de energía entre ambos haces como veremos más adelante. Veamos primero lo que sucede con dos haces de luz que inciden sobre una rejilla fija (Fig. 3). Supongamos que estos haces son dos ondas planas monocromáticas que inciden en un medio con índice de refracción de la forma:

$$n = n_0 + \frac{n_1}{2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{n_1^*}{2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (16)$$

donde \vec{k} es el vector de onda de la rejilla, y n_0 y n_1 son constantes que cumplen con $|n_0| \gg |n_1|$. Nótese que se ha permitido que n_1 adquiera valores complejos. Esto es para tomar en consideración desfases espaciales de la rejilla con respecto al patrón de interferencia que forman los dos haces incidentes.

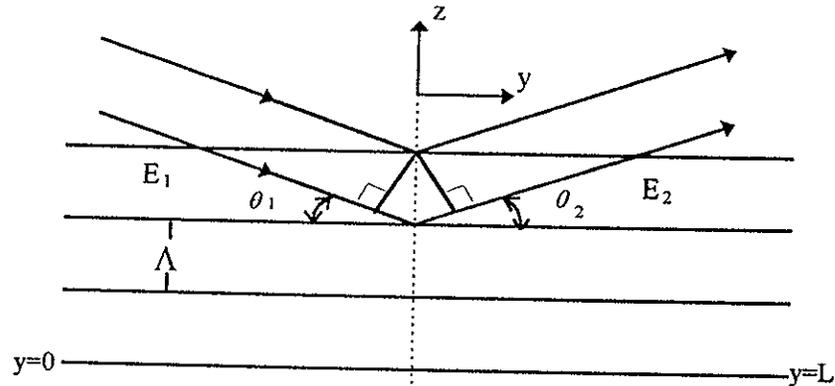


Figura 3. Difracción en una rejilla fija

Veamos como la perturbación introducida por n_1 acopla las dos ondas. Las amplitudes de los dos campos las denotaremos como E_1 y E_2 , siendo ambas funciones de la posición. El campo eléctrico total que por el momento supondremos escalar será:

$$E(y, z) = E_1 \exp[i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r})] + E_2 \exp[i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r})]. \quad (17)$$

Vamos a suponer que el vector de onda \vec{K} apunta en la dirección z y que la extensión de la rejilla es infinita en esa dirección, por lo que las amplitudes E_1 y E_2 sólo serán funciones de y (ver Fig. 3). Además, supondremos que las ondas cumplen con la condición de Bragg, es decir, que $\vec{K} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, por lo que $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Substituyendo la ecuación (17) en la ecuación de Helmholtz,

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right) E = 0, \quad (18)$$

obtenemos:

$$\sum_{j=1,2} \nabla^2 E_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} = \sum_{j=1,2} \left[\nabla^2 \vec{E}_j + 2i\vec{k}_j \cdot \nabla \vec{E}_j - k_j^2 \vec{E}_j \right] e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} = \sum_{j=1,2} -\frac{\omega^2}{c^2} n^2(\vec{r}) E_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}. \quad (19)$$

Suponiendo que la amplitud del campo eléctrico varía lentamente en \vec{r} con respecto a $e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}$ podemos utilizar la aproximación conocida como aproximación de variación lenta (slowly varying envelope approximation), es decir, $|\nabla^2 \vec{E}_j| \ll |2\vec{k}_j \cdot \nabla \vec{E}_j| \ll |\vec{E}_j| k_j^2$.

Utilizando $k = \frac{\omega n_0}{c}$ y despreciando términos que no tienen empatamiento de fase, llegamos al siguiente par de ecuaciones acopladas.

$$\frac{dE_1}{dy} = i\chi_1 E_2, \quad (20)$$

$$\frac{dE_2}{dy} = i\chi_2 E_1, \quad (21)$$

con χ_1 y χ_2 , las constantes de acoplamiento para (20) y (21) respectivamente, de la forma:

$$\chi_1 = \frac{\pi n_1}{2\lambda \cos\theta}, \quad \chi_2 = \frac{\pi n_1^*}{2\lambda \cos\theta}, \quad (22)$$

El factor de i en (20) y (21) nos indica que existe un defasamiento temporal de 90° entre el haz incidente y el difractado como consecuencia de la difracción en una rejilla de índice de refracción. Ahora bien, si en (20) consideramos la variación de E_1 con respecto a y sólo en un cierto intervalo Δy dentro del cual E_2 se mantiene aproximadamente constante tenemos la siguiente relación:

$$\Delta E_1 = i\chi_1 E_2 \Delta y . \quad (23)$$

Si consideramos que la variación del índice de refracción está corrida en fase 90° con respecto al patrón de interferencia, como ocurre con una rejilla fotorrefractiva, tenemos que en (16) $n_1 = -n_1^*$ lo cual se cumple si n_1 es puramente imaginario. Entonces χ_1 es una constante puramente imaginaria. Con lo anterior (23) puede ser reescrita como:

$$E_1(d) = E_1(0) - \frac{\pi}{2} \frac{|n_1|}{\lambda \cos\theta} E_2 d , \quad (24)$$

donde d es el grosor del intervalo. Según la ecuación (24) la amplitud de E_1 decrece, lo cual nos indica que existe pérdida de energía del haz 1 como producto de la difracción en la rejilla.

Con un análisis análogo al descrito podemos llegar al siguiente par de ecuaciones:

$$\Delta E_2 = i\chi_2 E_1 \Delta y , \quad (25)$$

$$E_2(d) = E_2(0) + \frac{\pi}{2} \frac{|n_1|}{\lambda \cos\theta} E_1 d , \quad (26)$$

donde en (26) podemos observar que el haz 2 experimenta una ganancia de energía. Las ecuaciones (25) y (26) son un indicativo entonces de que la energía de un haz se transfiere hacia el otro. Cualitativamente lo anterior lo podemos explicar de acuerdo a lo siguiente:

La difracción en una rejilla de índice de refracción provoca un desfaseamiento temporal de 90° entre los haces transmitido y difractado de cada haz. Pero además la rejilla se encuentra corrida en fase 90° con respecto al patrón de interferencia por lo que uno de los haces difractados tendrá un corrimiento en fase adicional de 90° con respecto a su onda transmitida y el otro haz difractado sufrirá un corrimiento adicional de -90° con respecto a su correspondiente haz transmitido. Es decir, a la salida del cristal tendremos dos haces compuestos por la superposición de dos ondas en cada uno de ellos. En el haz formado por la onda transmitida 1 y la onda difractada 2, ocurrirá una interferencia destructiva ($90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). Mientras que en el otro (el compuesto por la onda transmitida 2 y la onda difractada 1) ocurrirá una interferencia constructiva ($90^\circ - 90^\circ = 0$).

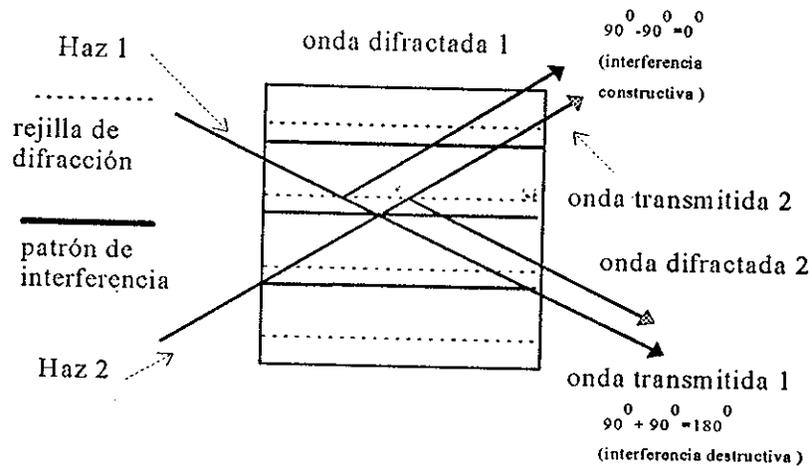


Figura 4. Transferencia de energía en un medio fotorrefractivo.

En otras palabras, la energía se transfiere de un haz a otro. La transferencia de energía es uno de los fenómenos más interesantes derivados del efecto fotorrefractivo y tiene una gran variedad de aplicaciones, de las cuales hablaremos más adelante.

Otro de los fenómenos, no menos interesantes, derivados del efecto fotorrefractivo es la conjugación de fase de la cual hablaremos en el siguiente punto y se hará un análisis más detallado de la misma en el capítulo 3.

II.4.- Conjugación de fase por medio del efecto fotorrefractivo.

Definamos primeramente el concepto de onda conjugada. Consideremos la propagación de una onda electromagnética, con vector de onda \vec{k} , tal que podamos asociarle un campo eléctrico de la forma:

$$E(\vec{r}, t) = E(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t} \quad , \quad (27)$$

donde la amplitud $E(\vec{r})$ varía lentamente en \vec{r} con respecto a $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Si conjugamos la parte espacial de la ecuación (27) obtenemos otra onda,

$$E_c(\vec{r}, t) = E^*(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t} \quad , \quad (28)$$

la que es llamada onda conjugada. Observando las ecuaciones (27) y (28), podemos notar que conservan exactamente los mismos frentes de onda en cualquier punto del espacio, pero

la dirección de propagación es en sentido contrario. La obtención de la conjugación óptica de fase involucra el uso de algunas de las grandes variedades de los fenómenos no lineales. Una de los fenómenos no lineales usados para la obtención de una onda de fase conjugada, en un medio fotorrefractivo, es la mezcla de cuatro ondas. Existen otros mecanismos utilizados para el mismo fin como lo son la autoconjugación de fase o la doble conjugación de fase de los cuales hablaremos más adelante. Por el momento hablaremos de la técnica del mezclado de cuatro ondas a manera de ilustrar la generación de una onda de fase conjugada.

Regresando a la formación de la rejilla de índice, en la Fig. 5 se usan dos haces para grabar una rejilla de índice de refracción en un cristal fotorrefractivo. Estos haces son una onda arbitraria (haz 1) y una onda plana (haz 2). Un tercer haz plano, que llamaremos haz de bombeo, se encuentra en contrapropagación con el haz 2. Este tercer haz, al viajar a través del cristal, se difracta en la rejilla en la dirección del haz de la señal. Físicamente que una onda sea la conjugada de la onda de la señal, significa que se propaga en sentido contrario a la onda de señal conservando exactamente la misma forma de frente de onda en cualquier punto a lo largo de su trayectoria. Este hecho permite su aplicación en lo referente a la corrección de aberraciones provocadas por dispositivos ópticos.

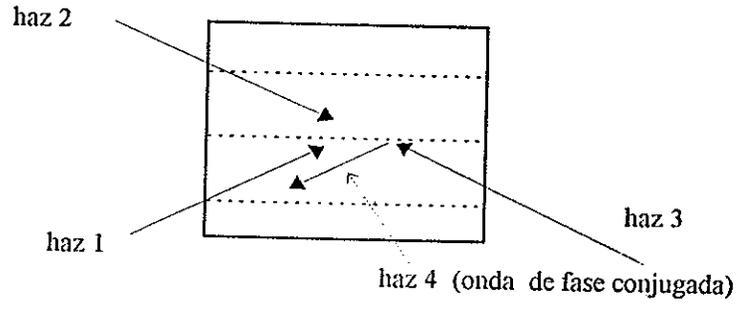


Figura 5.

Generación de una onda fase conjugada.

III.- MEZCLA DE ONDAS EN UN MEDIO FOTORREFRACTIVO.

III.1.- Introducción.

Como vimos en el capítulo pasado dos haces mutuamente coherentes, con estados de polarización que no sean ortogonales entre sí y que se intersecten en un cristal fotorrefractivo dan lugar a la formación de una rejilla de difracción. Los mismos haces que la crean pueden difractarse en ella misma produciendo a la salida del cristal dos haces compuestos cada uno por la superposición de dos ondas. En uno de ellos tal superposición da lugar a una interferencia constructiva, en el otro a una interferencia destructiva, es decir, el efecto final será la transferencia de energía de un haz hacia el otro, lo que se conoce como acoplamiento de ondas. Este acoplamiento puede llegar a ser muy grande. En titanato de bario (BaTiO_3), por ejemplo, un haz puede adquirir (en teoría) el 99% de la potencia del otro haz a pesar de haber viajado sólo algunos milímetros dentro del cristal (Feinberg *et al.* 1980). Cuál de los haces experimenta ganancia o pérdida es determinado por el tipo de portadores de carga (electrones o agujeros), y por el signo del coeficiente electroóptico que en el caso del BaTiO_3 depende de la dirección del eje de simetría del cristal o eje c (Fig. 6). Este acoplamiento hace que la modulación del patrón de interferencia varía a lo largo de la distancia de interacción en el cristal, por lo que no podemos considerar a la variación del índice de refracción constante (n_1 en la ecuación 16). Antes de entrar en tal discusión

veamos uno de los aspectos importantes en la difracción por una rejilla de índice de refracción: la condición de Bragg.

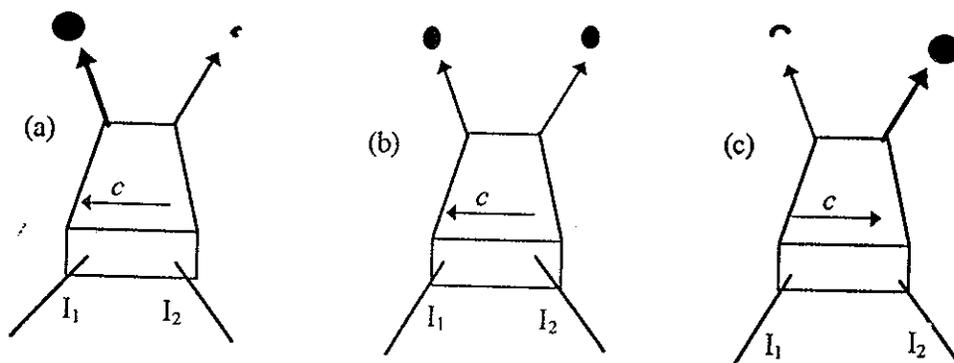


Figura 6. Dos haces acoplados en un cristal fotorrefractivo de BaTiO_3 . En (a) dos haces de igual intensidad incidente emergen con distintas intensidades. En (b) los haces no se intersectan y no ocurre el acoplamiento. En (c) el cristal es girado 180° , la dirección del acoplamiento también se invierte (tomada de Feinberg *et al*, 1980.).

III.2.- La condición de Bragg.

En el capítulo primero hicimos uso de la condición de Bragg para el análisis de transferencia de energía entre dos haces que inciden en una rejilla fija. Hagamos una extensión de tal condición para un medio anisotrópico y detengámonos un poco a discutir la naturaleza de la misma lo que nos llevará a observar que puede ser interpretada simplemente como una conservación del momento. Primeramente analicemos el esparcimiento de una onda plana monocromática en un medio periódico e isotrópico [Fig 7 (a)]. En dicho medio el índice de refracción es frecuentemente representado como (Yeh, 1991):

$$n(z) = n_0 + \Delta n p(z), \quad (29)$$

donde n_0 y Δn son constantes y $p(z)$ es una función de la posición de la forma:

$$p(z) = p(z + \Lambda), \quad (30)$$

donde Λ es la periodicidad con un máximo de la función en uno y un mínimo de cero. Supongamos que la variación en el índice de refracción está confinada a un arreglo de planos infinitos y equidistantes tal que las discontinuidades produzcan reflexiones especulares en cada plano, es decir, que el ángulo de incidencia sea igual al ángulo de reflexión. Cada uno de estos planos refleja sólo una muy pequeña porción de la onda plana incidente. La luz esparcida es una superposición coherente de las ondas reflejadas. Para encontrar la condición de interferencia constructiva consideremos la diferencia de caminos ópticos para dos rayos reflejados por dos planos adyacentes. Se puede probar que tal diferencia está dada por $\Delta d = 2\Lambda \sin\theta$, donde θ es el ángulo entre el rayo y la normal al plano de incidencia [Fig 7 (a)].

La interferencia es constructiva cuando la diferencia de caminos ópticos es igual a un número entero, N , de longitudes de onda λ / n_0 en el medio por lo que:

$$2\Lambda \sin\theta = N(\lambda / n_0), \quad (31)$$

donde n_0 es el índice de refracción promedio del medio y Λ es el espaciamiento entre los planos y por lo tanto el período de la variación del índice de refracción.

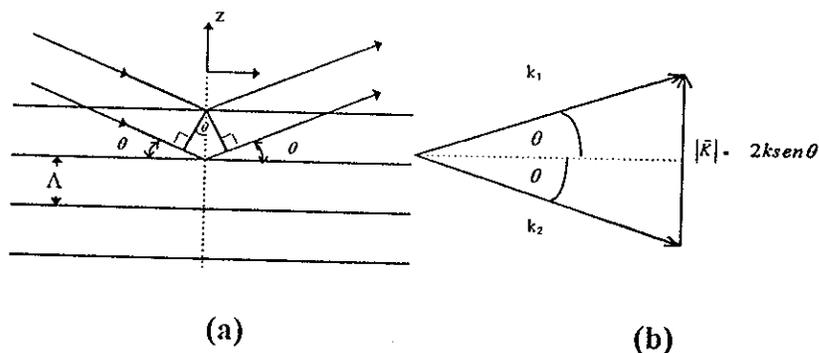


Figura 7. (a) Esparcimiento de una onda monocromática en un medio periódico. (b) La condición de Bragg.

La ecuación (31) es conocida como la Ley de Bragg, en la cual podemos notar que aunque las reflexiones en los planos sean especulares la difracción de los haces ocurre sólo para ciertos ángulos θ . La ecuación (31) también puede ser escrita como:

$$2k \text{sen} \theta = N \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (32)$$

donde k es el número de onda del haz en el medio, $k = \frac{n_0 2\pi}{\lambda}$. El término $\frac{2\pi}{\Lambda}$ es conocido como el número de onda de la rejilla, es decir:

$$K = \frac{2\pi}{\Lambda}. \quad (33)$$

Para el caso de una variación senoidal del índice de refracción en la ecuación (32), N sólo puede tomar el valor de 1, entonces la ecuación (32) toma la forma:

$$2k \sin \theta = \vec{K}. \quad (34)$$

La última expresión es equivalente a:

$$\vec{K} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \quad (35)$$

donde \vec{K} es el vector de onda de la rejilla de índice de refracción y \vec{k}_1 y \vec{k}_2 son los vectores de onda de los haces que forman tal rejilla [Fig 7 (b)].

Se puede interpretar la Ley de Bragg como la conservación del momento de fotones. La dualidad onda-partícula de la luz permite describir a un haz incidente, con vector de onda \vec{k}_1 , y a un haz reflejado, con vector de onda \vec{k}_2 , como una serie de partículas con momento $\hbar\vec{k}_1$ y $\hbar\vec{k}_2$, respectivamente. Si le asociamos a la rejilla un momento $\hbar\vec{K}$, por conservación del momento se tiene que

$$\hbar\vec{k}_1 = \hbar\vec{k}_2 + \hbar\vec{K}, \quad (36)$$

de donde obtenemos que $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{K}$, que es la condición de Bragg expresada anteriormente en la ecuación (35).

III.2.1.- Difracción de Bragg en un medio anisotrópico.

Hemos visto ya que la difracción de la luz en un medio isotrópico puede ser descrita por un proceso de interacción entre la onda incidente y la onda difractada. En un medio isotrópico el índice de refracción que experimente un haz es independiente de la dirección de propagación, de tal suerte que en dicho medio las magnitudes de los vectores de onda de dos haces con la misma frecuencia son siempre iguales entre sí. En un medio anisotrópico el índice de refracción que experimenta un haz de luz que atraviesa el medio va a depender de su dirección de propagación. La condición de Bragg sigue siendo la ecuación (35) sin embargo ahora $|\vec{k}_1| \neq |\vec{k}_2|$. Utilizando la definición de los ángulos θ y θ' dada en la figura 8 tenemos:

$$K = k' \operatorname{sen}\theta' - k \operatorname{sen}\theta \quad (37)$$

$$k' \cos\theta' = k \cos\theta \quad (38)$$

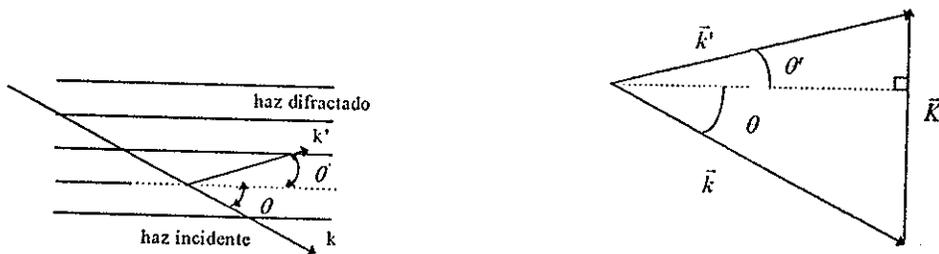


Figura 8.- Difracción de Bragg en un medio anisotrópico.

Sustituyendo (38) en (37) y sabiendo que $\text{sen}\theta' = \sqrt{1 - \cos\theta'^2}$ llegamos a que:

$$2k\text{sen}\theta = K + \frac{k^2 - k'^2}{K}. \quad (39)$$

De manera análoga,

$$2k'\text{sen}\theta' = K - \frac{k^2 - k'^2}{K}, \quad (40)$$

o equivalentemente

$$2\Lambda\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{n} - \frac{\Lambda^2}{n\lambda}(n'^2 - n^2), \quad (41)$$

$$2\Lambda\text{sen}\theta' = \frac{\lambda}{n'} + \frac{\Lambda^2}{n'\lambda}(n'^2 - n^2), \quad (42)$$

donde n y n' son los índices de refracción para cada dirección de propagación. Si consideramos el caso de un cristal uniaxial, como el titanato de bario, y suponemos que la polarización del tiene una componente a lo largo del eje c del cristal, es decir en un modo extraordinario con un índice de refracción $n = n_e$, y el haz difractado polarizado perpendicular al eje c con un modo ordinario e índice de refracción $n' = n_o$, entonces (41) y (42) tienen la forma:

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{2n_e} \left[\frac{\lambda}{\Lambda} + \frac{\Lambda}{\lambda}(n_e^2 - n_o^2) \right], \quad (43)$$

$$\text{sen}\theta' = \frac{1}{2n_o} \left[\frac{\lambda}{\Lambda} - \frac{\Lambda}{\lambda} (n_e^2 - n_o^2) \right] . \quad (44)$$

En las ecuaciones (43) y (44) se puede probar que para valores de $\frac{\lambda}{\Lambda} = |n_o \pm n_e|$, los valores de θ y θ' son iguales a 90° lo cual indica que k , k' y K son colineales y no existe difracción. La difracción de Bragg es posible sólo cuando $|n_o - n_e| \leq \frac{\lambda}{\Lambda} \leq |n_o + n_e|$ y los ángulos θ y θ' son reales. Cuando $\frac{\lambda}{\Lambda} \leq |n_o - n_e|$ ó $\frac{\lambda}{\Lambda} \geq |n_o + n_e|$, el valor de $\text{sen}\theta$ y $\text{sen}\theta'$ se vuelve más grande que la unidad y la difracción no es posible.

III.3.- Mezcla de dos ondas en un medio fotorrefractivo.

Realicemos ahora el análisis de modos acoplados para obtener del comportamiento de los haces que se difractan en una rejilla de índice de refracción, para lo cual utilizaremos la naturaleza vectorial de los campos involucrados.

El mezclado de ondas en un medio fotorrefractivo consiste de dos partes usualmente inseparables; la acción de la luz sobre la materia y la respuesta del medio. La primera es cubierta por la teoría del efecto fotorrefractivo en la cual la luz redistribuye cargas y éstas perturban el índice de refracción del material construyendo una rejilla de índice vía el efecto electroóptico. La segunda es descrita por las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica con las que podemos describir a la luz esparcida por la rejilla.

A continuación vamos a deducir las ecuaciones que describen el comportamiento de los dos haces de salida que experimentan transferencia de energía como resultado de atravesar un cristal fotorrefractivo con una rejilla grabada. El análisis lo supondremos en el estado estacionario y nos concretaremos al caso de titanato de bario (BaTiO_3). Dado que las ecuaciones que describen a estas ondas son altamente no lineales las soluciones analíticas son posibles sólo en algunos casos aproximados. A pesar de esto, tales soluciones han sido aplicadas con éxito a una variedad de experimentos (Yeh, *et al*, 1991.). Por lo tanto para nuestros fines y propósitos también se adecúan.

III.3.1.- Las ecuaciones acopladas.

De las ecuaciones de Maxwell sabemos que en general se debe cumplir que:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \overline{\epsilon} \cdot \vec{E}(\vec{r}), \quad (45)$$

donde $\overline{\epsilon}$ es el tensor dieléctrico de rango 2. Partamos primero de un caso sencillo, es decir, cuando el medio es isotrópico. En este caso el tensor dieléctrico se convierte en un escalar, y el vector desplazamiento eléctrico \vec{D} es paralelo al vector campo eléctrico \vec{E} , de manera que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Por lo tanto podemos reescribir a (45) como:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E}(\vec{r}), \quad (46)$$

que es la ecuación de onda de Helmholtz. Se puede encontrar que una solución a la ecuación de onda estará dada por una superposición lineal de ondas planas, es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \vec{E}_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}, \quad (47)$$

donde

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \hat{s}, \quad (48)$$

donde \hat{s} es una dirección unitaria de propagación.

El titanato de bario es un medio anisotrópico. En este tipo de materiales se tiene que en general el vector campo eléctrico y el vector desplazamiento eléctrico no son paralelos. Para ello se tiene que resolver en su totalidad (45) encontrándose que para cualquier dirección de propagación \hat{s} se tiene una solución de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{e}, \quad (49)$$

donde ahora el estado de polarización \hat{e} y el índice de refracción dependen de la dirección de propagación y del tensor dieléctrico. Ahora bien, supongamos que ϵ sí depende de \vec{r} , pero no fuertemente, es decir, introduzcamos una pequeña perturbación $\Delta \epsilon$ en el tensor dieléctrico, quedando de la forma,

$$\bar{\epsilon} \equiv \bar{\epsilon}_0 + \Delta\bar{\epsilon}, \quad (50)$$

con

$$\Delta\bar{\epsilon} \approx -\bar{\epsilon}_0 \cdot \left[\bar{R} \cdot \vec{E}^{sc} \right] \cdot \bar{\epsilon}_0, \quad (51)$$

donde \bar{R} es el tensor electroóptico y \vec{E}^{sc} es el campo eléctrico interno de espacio-carga generado por el patrón de interferencia. Una derivación de la ecuación (51) se incluye en el apéndice A.

Si la modulación del patrón de interferencia es baja entonces tenemos que (apéndice A):

$$\vec{E}^{sc} = \left[\frac{1}{2} imf(K)e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} + c.c \right] \hat{K}, \quad (52)$$

donde m es la modulación y $f(K)$ viene dado por:

$$f(K) = \frac{K_B T}{e} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{k_0} \right)^2}. \quad (53)$$

Si la perturbación $\Delta\bar{\epsilon}$ es pequeña ($\Delta\bar{\epsilon} \ll \bar{\epsilon}$) podemos suponer que la solución de (45) sigue siendo una superposición de ondas planas de la forma de (47), con la diferencia

que las amplitudes E_j variarán lentamente en \vec{r} comparado con $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, y estarán acopladas entre sí.

En el caso de dos ondas planas que interfieren en un cristal fotorrefractivo proponemos como solución de la ecuación (45) es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r})e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}}\hat{e}_1 + \vec{E}_2(\vec{r})e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}\hat{e}_2. \quad (54)$$

Siguiendo con nuestro desarrollo haremos las siguientes aproximaciones. Consideraremos que el vector campo eléctrico es casi paralelo al vector desplazamiento eléctrico \vec{D} . Supondremos además, que el ángulo que forman los haces entre sí es muy pequeño y que inciden de tal forma que el vector de onda de la rejilla que formen sea paralelo al eje c del cristal (Fig 11). Entonces si sustituimos (54) en el lado izquierdo de (46) y si suponemos que las envolventes $\vec{E}_1(\vec{r})$ y $\vec{E}_2(\vec{r})$ varían lentamente con respecto a $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, es decir, $|\nabla^2\vec{E}_1(\vec{r})| \ll |2\vec{k}_1 \cdot \nabla\vec{E}_1(\vec{r})| \ll |\vec{E}_1(\vec{r})|k_1^2$ y $|\nabla^2\vec{E}_2(\vec{r})| \ll |2\vec{k}_2 \cdot \nabla\vec{E}_2(\vec{r})| \ll |\vec{E}_2(\vec{r})|k_2^2$ (slowly varying envelope approximation) llegamos a:

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r}) = [2i\vec{k}_1 \cdot \nabla\vec{E}_1 - \vec{k}_1^2\vec{E}_1]\hat{e}_1 e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + [2i\vec{k}_2 \cdot \nabla\vec{E}_2 - \vec{k}_2^2\vec{E}_2]\hat{e}_2 e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}. \quad (55)$$

Desarrollando el lado derecho de (46) tenemos que:

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega^2}{c^2} \left[\bar{\epsilon}_1 + \Delta \bar{\epsilon}(\bar{r}) \right] \cdot \bar{E}(r) = & -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\bar{E}_1 e^{i\bar{k}_1 \cdot \bar{r}} \bar{\epsilon}_1 \cdot \hat{e}_1 + \bar{E}_2 e^{i\bar{k}_2 \cdot \bar{r}} \bar{\epsilon}_1 \cdot \hat{e}_2 \right] \\
& -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\bar{E}_1 \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{e}_1 e^{i\bar{k}_1 \cdot \bar{r}} + \bar{E}_2 \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{e}_2 e^{i\bar{k}_2 \cdot \bar{r}} \right] \quad (56)
\end{aligned}$$

Supongamos que $\hat{e}_1 \approx \hat{e}_2 \approx \hat{c}$. Igualando las ecuaciones (55) y (56) y multiplicando la ecuación resultante por \hat{c} , obtenemos:

$$\left[2i\bar{k}_1 \cdot \nabla \bar{E}_1 \right] e^{i\bar{k}_1 \cdot \bar{r}} + \left[2i\bar{k}_2 \cdot \nabla \bar{E}_2 \right] e^{i\bar{k}_2 \cdot \bar{r}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[E_1 \hat{c} \cdot \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{c} e^{i\bar{k}_1 \cdot \bar{r}} + E_2 \hat{c} \cdot \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{c} e^{i\bar{k}_2 \cdot \bar{r}} \right]. \quad (57)$$

Realizando la multiplicación tensorial $\hat{c} \cdot \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{c}$ (APENDICE B) y tomando en cuenta la ortogonalidad de la función exponencial encontramos el siguiente par de ecuaciones acopladas:

$$\left[2i\bar{k}_1 \cdot \nabla \bar{E}_1 \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{n_e^4 r_{33} f(K)}{|E_1|^2 + |E_2|^2} (i) |E_2|^2 E_1 \quad , \quad (58)$$

$$\left[2i\bar{k}_2 \cdot \nabla \bar{E}_2 \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{n_e^4 r_{33} f(K)}{|E_1|^2 + |E_2|^2} (-i) |E_1|^2 E_2 \quad , \quad (59)$$

donde r_{33} es una constante electroóptica del material y $n_e = \hat{c} \cdot \bar{\epsilon} \cdot \hat{c}$ es el índice de refracción extraordinario del cristal. Ahora bien, si llamamos al haz 1 haz de prueba y al haz 2 haz de bombeo (Fig. 9) e imponemos que el haz de bombeo sea mucho mayor en

intensidad que el de prueba ($|E_2|^2 \gg |E_1|^2$), entonces E_2 es aproximadamente constante.

Resolviendo para E_1 de (58),

$$E_1(l) = E_1(0) \exp\left[\frac{\omega}{2c} n_0^3 r_{33} f(K) l\right], \quad (60)$$

$$\therefore I(l) = I(0) \exp\left[\frac{\omega}{c} n_0^3 r_{33} f(K) l\right], \quad (61)$$

donde l es la longitud de interacción en el cristal. De la ecuación (61) vemos que la intensidad crece (o decrece) con la distancia de interacción. En la figura 10 se muestra $I(L)/I(0)$ calculado con valores experimentales típicos.

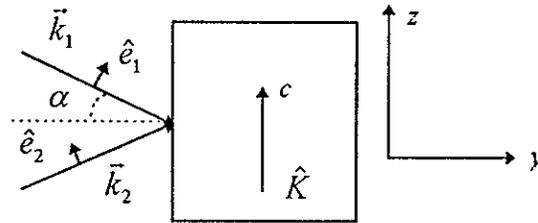


Figura 9. Mezclado de dos ondas.

Las ecuaciones (58) y (59) representan el comportamiento de dos haces que forman una rejilla de difracción en un cristal fotorrefractivo y que a su vez, ya formada la

rejilla, se difractan en ella. El análisis que se hizo presentó una configuración geométrica y matemática sencilla, pero los conceptos manejados sientan las bases para un tratamiento un poco más general en materia de mezclado de ondas.

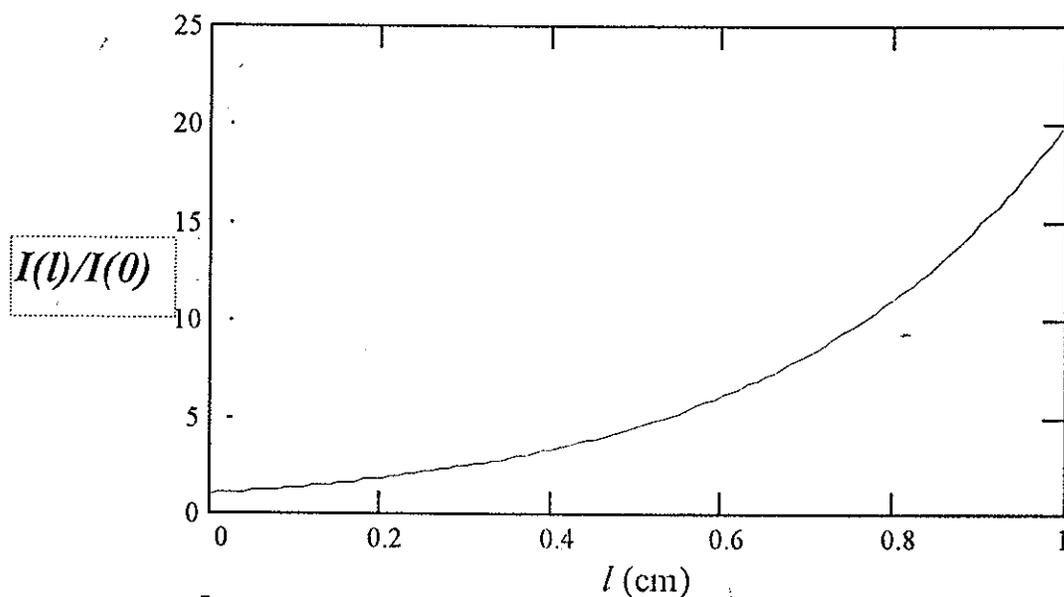


Figura 10.

Ganancia en función de la longitud de interacción para el mezclado de dos ondas en un cristal de BaTiO_3 , donde $N_0=2.49$, $N_e=2.43$, $r_{42}=1.6 \times 10^{-7}$ pm/V, $\lambda=514.5 \mu\text{m}$, $N_c=10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $T=300^\circ \text{ K}$.

IV.-CONJUGACION OPTICA DE FASE.

IV.1.- Introducción.

La conjugación de fase óptica es un fenómeno basado en procesos no lineales mediante el cual es posible obtener la reflexión de un haz exactamente en sentido opuesto a su dirección original de propagación, conservando el haz su mismo frente de onda y fase (Yariv y Fischer, 1983). Al dispositivo capaz de lograr tal efecto se le conoce como un espejo conjugador de fase. Un espejo plano convencional sobre el cual incida un haz óptico cambia el signo de la componente normal a la superficie de \vec{k} (el vector de onda del haz), dejando la componente tangencial sin cambio [Fig 11 (a)], de esta manera un haz puede ser dirigido arbitrariamente con sólo cambiar la posición del espejo (Fisher, 1983). Un espejo conjugador de fase provoca una inversión cuantitativa del vector \vec{k} tal que un rayo que incida en él regresará sobre sí mismo independientemente de la orientación del espejo [Fig 11 (b)].

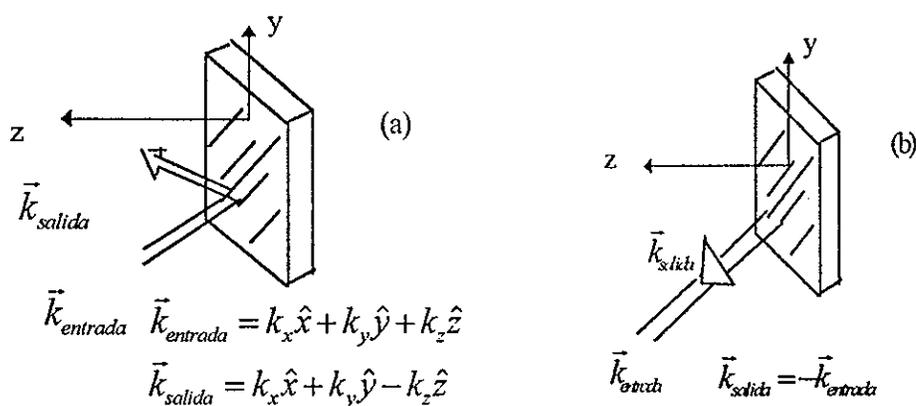


Figura 11. Comparación entre un espejo ordinario (a) y un espejo conjugador de fase (b).

Más en general, si una onda arbitraria pasa a través de un medio distorsionador y de ahí incide sobre un espejo conjugador de fase, entonces al pasar la onda que regresa a este espejo otra vez por el distorsionador las aberraciones sufridas al atravesar el distorsionador las aberraciones ocurridas anteriormente, por lo que la onda que emerge del distorsionador es la misma onda arbitraria, pero viajando en el sentido opuesto

Con lo cual podemos notar que esta clase de espejos exhibe propiedades de corrección de aberraciones [Fig. 12, (a) y (b)], lo que implica una serie de aplicaciones en materia de transmisión de imágenes.

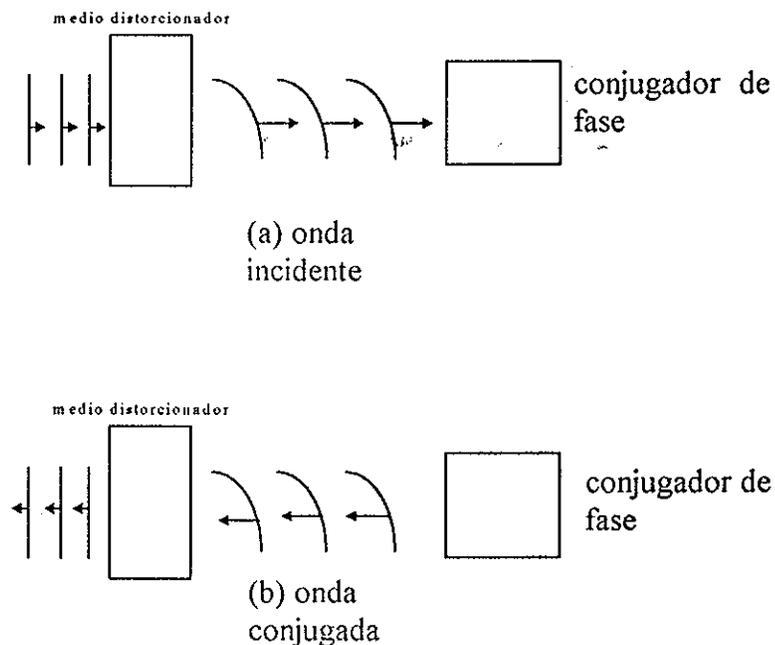


Figura 12. Una onda plana es distorsionada (a) es reflejada por un conjugador de fase y al pasar por el medio distorsionador se restaura (b).

IV.2.- Conjugación de fase en BaTiO_3 vía mezclado de cuatro ondas.

Uno de los métodos tradicionalmente utilizados para la generación de una onda conjugada en un medio fotorrefractivo es el mezclado de cuatro ondas. La técnica consiste

en lo siguiente. Refiriéndonos a la figura 13, una rejilla de índice es grabada en el cristal por los haces 1 y 2; tomemos al haz 1 como un haz de señal y al haz 2 como un haz de bombeo. un tercer haz también de bombeo incide sobre esta rejilla y se difracta en ella, produciendo un haz 4. Mostraremos ahora que si la onda de bombeo 3 es de la fase conjugada de la onda de bombeo 2, entonces la onda 4 es la conjugada de la señal (onda 1).

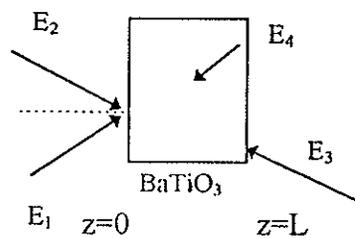


Figura 13. Mezclado de cuatro ondas

Vamos a suponer la situación de la figura 13 para un cristal de titanato de bario y consideremos que existe sólo una rejilla común para los dos pares de haces descrita por la condición de Bragg, es decir, que sólo puede interferir el haz 1 con el haz 2 y el haz 4 con el haz 3. (Fig. 14).

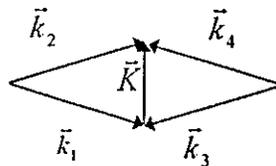


Figura 14. Condición de Bragg (mezclado de cuatro ondas)

El campo eléctrico que, en este caso, satisface la ecuación de onda de Helmholtz está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \hat{e}_1(\vec{r}) + E_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \hat{e}_2(\vec{r}) + E_3 e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}} \hat{e}_3(\vec{r}) + E_4 e^{i\vec{k}_4 \cdot \vec{r}} \hat{e}_4(\vec{r}), \quad (62)$$

donde se ha considerado que se introduce una pequeña perturbación $\Delta \bar{\epsilon}$ en el tensor dieléctrico, lo que permite que las amplitudes de los 4 campos varíen lentamente con respecto a $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$. La modulación del patrón de interferencia, en este caso, está dada por:

$$m = \frac{2[E_1 E_2^* (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2^*) + E_3 E_4^* (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_4^*)]}{|E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2 + |E_4|^2} \quad (63)$$

Sustituyendo (62) en la ecuación de onda de Helmholtz, tomando por simplicidad de análisis a los estados de polarización de los cuatro haces perpendiculares al plano de incidencia, el vector de onda de la rejilla paralelo al eje c y considerando que el vector campo eléctrico es paralelo al vector desplazamiento eléctrico llegamos a las siguientes ecuaciones acopladas.

$$2i\vec{k}_1 \cdot \nabla \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{\omega^2 r_{13} n_0^4 f(K) [i] [E_1 E_2^* + E_3 E_4^*] E_2}{c^2 I_0}, \quad (64)$$

$$2i\vec{k}_2 \cdot \nabla \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{\omega^2 r_{13} n_0^4 f(K) [-i] [E_1^* E_2 + E_3^* E_4] E_1}{c^2 I_0}, \quad (65)$$

$$2i\bar{k}_3 \cdot \nabla \bar{E}_3(\vec{r}) = \frac{\omega^2 r_{13} n_0^4 f(K) [i] [E_1 E_2^* + E_3 E_4^*] E_4}{c^2 I_0} , \quad (66)$$

$$2i\bar{k}_4 \cdot \nabla \bar{E}_4(\vec{r}) = \frac{\omega^2 r_{13} n_0^4 f(K) [-i] [E_1^* E_2 + E_3^* E_4] E_3}{c^2 I_0} , \quad (67)$$

donde

$$I = |E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2 + |E_4|^2 . \quad (68)$$

Resolvamos las ecuaciones (64) a (67) para comprobar que E_4 es la onda conjugada de E_1 . Para ello consideraremos que las ondas de bombeo 2 y 3 son mucho mayor en intensidad que las ondas 1 y 2, es decir,

$$|E_1|^2, |E_4|^2 \ll |E_2|^2, |E_3|^2 . \quad (69)$$

Consideremos además, por simplicidad de análisis y sin pérdida de generalidad, que los haces se propagan en la dirección z . Entonces, de acuerdo a (69), (65) y (66) se convierten en:

$$\frac{dE_2}{dz} = \frac{dE_3}{dz} = 0 , \quad (70)$$

y las ecuaciones (64) y (67) en:

$$\frac{dE_1}{dz} = \Gamma [E_1 + E_4^*] \quad , \quad (71)$$

$$\frac{dE_4^*}{dz} = \Gamma [E_4^* + E_1] \quad , \quad (72)$$

con:

$$\Gamma = \frac{\omega r_{13} m_0^4 f(K) |E_2|^2}{c I_0} \quad , \quad (73)$$

y donde hemos tomado el hecho que $E_2 = E_3^*$. Resolviendo (71) y (72) con las condiciones a la frontera $E_1(0)=E_0$ y $E_4(L)=0$, tenemos las siguientes soluciones:

$$E_1 = E_0 \left[\frac{e^{2\Gamma L} + e^{2\Gamma Z}}{1 + e^{2\Gamma L}} \right] \quad , \quad (74)$$

$$E_4 = E_0 \left[\frac{e^{2\Gamma Z} - e^{2\Gamma L}}{1 + e^{2\Gamma L}} \right] \quad , \quad (75)$$

En (75) notamos como E_4 es generado por el proceso de mezclado de cuatro ondas. El haz comienza con $E_4=0$ en $z=L$ y crece exponencialmente a lo largo de la dirección $-z$. La amplitud del haz 4 es proporcional a E_1^* en $z=0$. Entonces el haz 4 es la onda fase conjugada del haz 1.

IV.3.- El efecto de abanico (Fanning effect).

Uno de los efectos derivados de la incidencia de un haz de luz en un medio fotorrefractivo es el llamado efecto de abanico el cual juega un importante papel en la conjugación de fase en un cristal fotorrefractivo. El efecto de abanico puede ser definido como un esparcimiento estimulado y asimétrico de luz en un medio fotorrefractivo.

Cuando un haz láser pasa a través de un medio fotorrefractivo ocurre un esparcimiento de luz en las imperfecciones del cristal el cual parece ser asimétrico con respecto al mismo haz (a excepción en lo largo del eje c). Para intensidades moderadas la luz esparcida crece con el tiempo para finalmente llegar a un patrón de esparcimiento estacionario. La explicación de este fenómeno es el siguiente: Las ondas esparcidas por las imperfecciones interfieren con el mismo haz incidente que los generó, creando una distribución de rejillas fotorrefractivas. Dependiendo de la orientación del cristal algunos de los muchos haces de luz difractados por estas rejillas pueden ser amplificados por medio de la transferencia de energía en el mezclado de ondas. Esta amplificación puede ser muy significativa en cristales que exhiben gran acoplamiento a pesar de que exista poco esparcimiento de luz. El efecto de abanico juega un importante papel en el desarrollo de conjugadores de fase y resonadores fotorrefractivos, aunque el efecto en sí puede ser una fuente importante de ruido.

IV.4.- Espejos autoconjugadores de fase.

En la generación de conjugación de fase por mezclado de cuatro ondas la alineación de los haces de bombeo es un factor determinante para este fin. Otro factor a considerar en esta técnica es que la calidad de la onda conjugada está en base a la calidad de los haces de bombeo. Si el haz de bombeo encargado de la reconstrucción del holograma exhibe una baja calidad óptica, provocada principalmente por aberraciones del frente de onda, la generación de la onda fase conjugada será difícil y lo será aún más conforme más complicada se vuelva la imagen. Un gran paso hacia el desarrollo de mejores conjugadores de fase fue el descubrimiento de los espejos autoconjugadores de fase, los cuales combinan ganancia fotorrefractiva y retroalimentación para generar sus propios haces de bombeo, es decir, en un espejo autoconjugador de fase las ondas de bombeo son generadas internamente en el cristal por el mismo haz incidente. Experimentalmente hablando es un proceso sencillo ya que no involucra ninguna clase de arreglo óptico complicado. White *et al* (1982) desarrollaron el primer espejo autoconjugador de fase. El espejo consiste de un cristal fotorrefractivo colocado entre dos espejos ordinarios alineados cuidadosamente de tal manera que formen una cavidad resonante [Fig 15 (a)]. La onda de entrada genera un par de haces en contrapropagación que formarán la cavidad, estos mismos haces sirven como haces de bombeo para formar una onda conjugada de la onda de entrada por medio del mezclado de cuatro ondas. Una vez que el dispositivo está funcionando uno de los espejos que forman el resonador puede ser removido.

Feinberg (1982) demostró un autoconjugador de fase consistente sólo en un cristal fotorrefractivo. Este dispositivo también genera sus propios haces de bombeo sólo que esto ocurre dentro del mismo cristal lo cual hace que los haces de bombeo se alineen de tal manera que logran maximizar la ganancia óptica [Fig 15 (b)].

Cronin-Golomb (1983) demostró un autoconjugador de fase que utiliza espejos para deflectar el haz incidente en un anillo el cual regresará el haz hacia el cristal produciendo una onda fase conjugada. El dispositivo exhibe un bajo umbral de acoplamiento no lineal, y por lo tanto útil para longitudes de onda donde la no linealidad es pequeña [Fig 15 (c)].

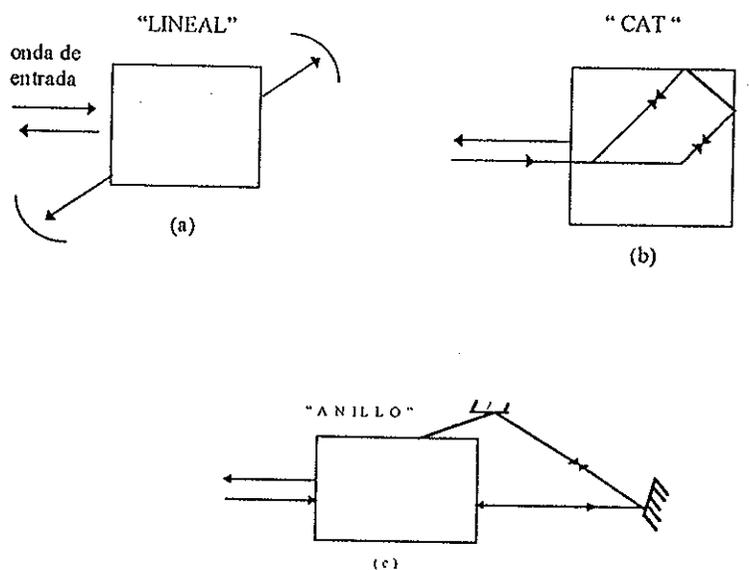


Figura 15. Autoconjugadores de fase (a) "LINEAL". (b) "CAT". (c) "ANILLO"

IV.5.- Doble conjugación de fase.

Otro de los dispositivos que emplean un medio fotorrefractivo para la obtención de una onda fase conjugada es el llamado conjugador de fase mutuamente bombeado o conjugador doble de fase. El modo de operación de este dispositivo es en base a dos haces mutuamente incoherentes incidiendo en el cristal, dando como resultado que cada haz produzca una onda conjugada del otro (Fig 16). El proceso puede ser explicado en base a lo siguiente.

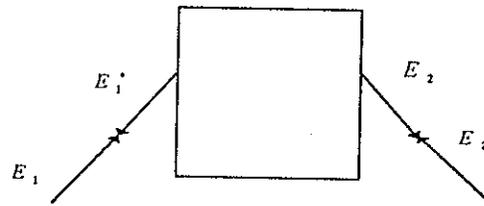


Figura 16. Esquema de un doble conjugador de fase.

Al incidir los dos haces en el cristal cada uno de ellos provocará un efecto de abanico en el cristal, como consecuencia, la luz esparcida interferirá con los haces incidentes formando una gran cantidad de rejillas de índice cuyos vectores de onda irán formando un círculo [Fig 17 (a)]. Dentro de todas las rejillas se formará una que va a ser común a ambos haces. Por ser común, esta rejilla será grabada más eficientemente que las demás y se reforzará aún más por difracción de los haces que la crearon. La interacción de los haces de incidencia con la rejilla que sobrevive hará que cada haz se difracte en la onda conjugada del otro, las demás rejillas irán decayendo por procesos de borrado hasta que sólo sobreviva la rejilla común, [Fig 17 (b)]. En tres dimensiones existe más de una rejilla común, razón por

la cual los vectores de onda asociados a cada rejilla formarán un círculo perpendicular al plano de incidencia. Físicamente lo que se observará es una serie de anillos que se irán colapsando hasta obtener las ondas fase conjugada. El colapso de estos anillos no es otra cosa que la consecuencia de que al final sólo exista una rejilla la cual se encuentra en el plano de incidencia, es decir, el plano de máxima interacción. Las demás rejillas irán decayendo en el tiempo al encontrarse fuera de dicho plano y el colapso de los anillos sucederá.

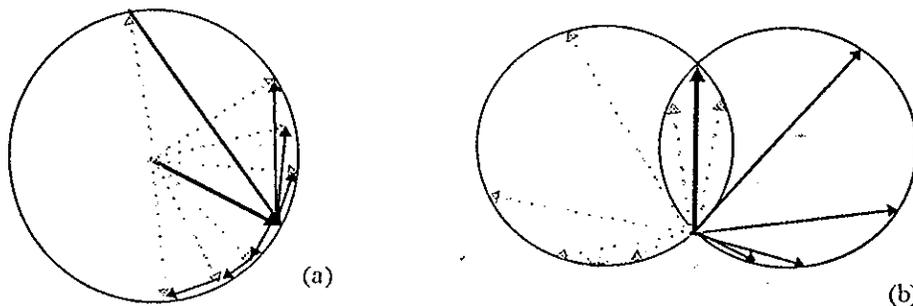


Figura 17. Vectores de onda de las rejillas (a). (b) Rejilla común

IV.6.- Corrección de aberraciones a través de la conjugación de fase.

Como una consecuencia de las vibraciones, defectos en dispositivos ópticos y turbulencias, las aberraciones comúnmente aparecen en los arreglos ópticos. La mayoría de las aberraciones de fase pueden ser compensadas logrando que una réplica del frente de onda regrese sobre su trayectoria original y corrija la aberración al pasar a través del propio medio aberrador. Un espejo conjugador de fase es capaz de lograr esta función. La

propiedad de los espejos conjugadores de fase para producir la onda conjugada de un frente de onda monocromático trae consigo la habilidad de estos dispositivos para la corrección de aberraciones (Fig 18). Como ejemplo, la transmisión de imágenes en una fibra multimodal. La dispersión modal que sufre la señal al cabo de una distancia de propagación suficientemente grande ocasiona que la imagen ya no pueda ser reconocible. Un espejo conjugador de fase puede corregir tal distorsión ya sea regresando la onda conjugada de la señal imagen por la fibra inicial o por una fibra que esté unida a ella. La conjugación de fase como consecuencia del efecto fotorrefractivo es un fenómeno interesante, la explotación de tal habilidad en materia de corrección de aberraciones es un campo abierto hoy en día.

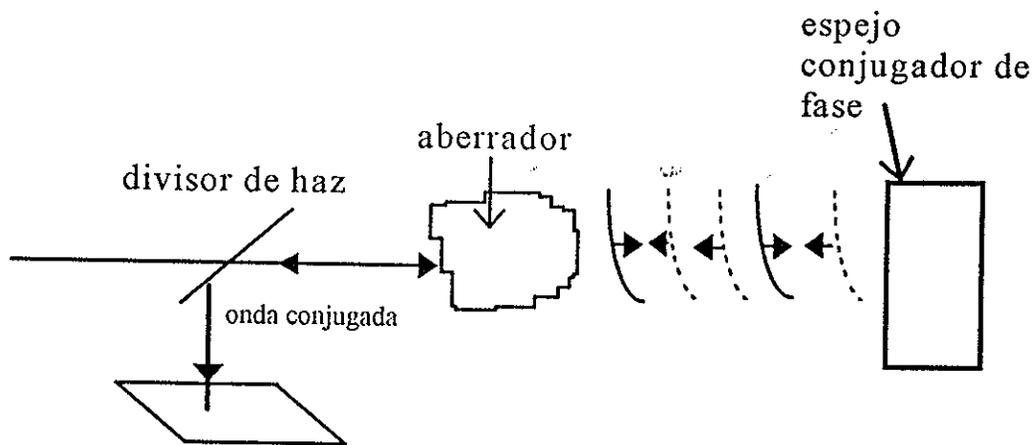


Figura 18.

Un frente de onda plano que se propaga sufre una distorsión. Al ser reflejado por un espejo conjugador de fase se genera la onda conjugada la cual al pasar a través del medio distorsionador corrige las aberraciones.

V.-EL OSCILADOR FOTORREFRACTIVO

V.1.-Introducción.

En un cristal de titanato de bario los factores de ganancia que permiten una gran amplificación en la intensidad de un haz son comunes. Si tal ganancia es introducida en una cavidad una oscilación puede ser relativamente fácil de alcanzar. En este capítulo discutiremos este tipo de osciladores conocidos en la literatura como osciladores fotorrefractivos. Veremos, además, el análisis y las condiciones de oscilación de un oscilador fotorrefractivo llevado a cabo en nuestro laboratorio.

V.2.- El oscilador lineal.

Feinberg y Hellwarth, 1980, y White *et al*, 1982, realizaron la demostración de un espejo conjugador de fase con una reflectividad que excede a la unidad haciendo uso de la gran ganancia que se obtiene cuando se utiliza el coeficiente electroóptico r_{42} de un cristal de BaTiO_3 . Cuando tal ganancia es confinada en una cavidad y logra superar las pérdidas en un viaje redondo dentro de la cavidad entonces una oscilación se construye. El principio de funcionamiento de este fenómeno lo podemos entender si pensamos en la representación esquemática de la figura 19.

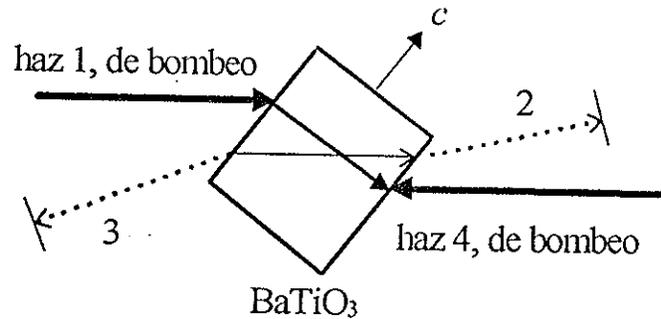


Figura 19. Un oscilador lineal fotorrefractivo.

Un haz incide en un cristal de titanato de bario (el haz 1 en la figura 19) generando el efecto de abanico. El ruido y el haz 1 forman una rejilla de índice de refracción provocando con esto que el haz 1 se difracte en la rejilla siguiendo la dirección del ruido, como se muestra en la figura 19. Un espejo exterior regresa hacia el cristal la parte del ruido que incide normalmente a su superficie. Este haz que regresa al cristal y el haz 4 interfieren para formar exactamente la misma rejilla que ya existe con el consecuente reforzamiento de la misma. El haz 4 se difracta en esta rejilla produciendo un haz antiparalelo al haz 2 (haz 3). Si ahora colocamos un segundo espejo ordinario en la dirección de propagación de este haz y de manera tal que forme una cavidad con el otro espejo y si la ganancia excede a las pérdidas en un viaje redondo dentro de la cavidad una oscilación se construye.

Es de llamar la atención que se sigue construyendo una oscilación aunque sólo exista uno de los haces de bombeo. White *et al*, 1982, explicaron el mecanismo de oscilación de la siguiente forma:

A partir de el haz incidente (haz 1) se forma un incipiente haz2 mediante el proceso de abanicado. El haz 2 es reflejado por un espejo, formando el haz 3, el cual es reflejado

nuevamente por otro espejo en la dirección del haz 2. Si la dirección del eje c es tal que la energía se transfiere del haz 1 al haz 2, y si esta energía transferida es mayor a la pérdida por absorción, transmitancia de los espejos, etc., entonces tanto el haz 2 como el haz 3 aumentarán en intensidad, reforzando así la rejilla que creó el haz 2. Este proceso se repite de tal forma que la intensidad de los haces 2 y 3 aumentan continuamente hasta que la ganancia fotorrefractiva se satura. El estado estacionario se obtiene cuando la ganancia se reduce al nivel de las pérdidas.

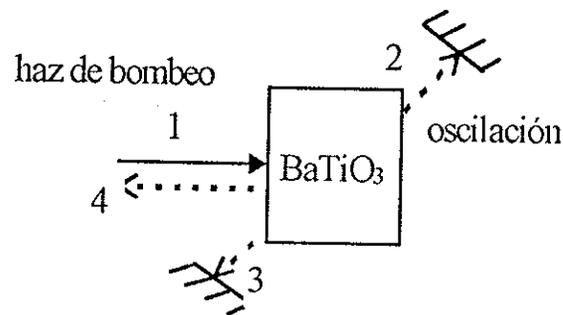


Figura 20. Un oscilador fotorrefractivo utilizando un solo haz incidente de bombeo.

Si en las configuraciones anteriores es removido el segundo espejo ordinario, como se muestra en la figura 21, tendremos ahora lo que se conoce en la literatura como un semirresonador fotorrefractivo. El principio de funcionamiento sigue siendo el mismo que en los dos casos anteriores sólo que ahora ante la ausencia de uno de los espejos ordinarios no

se tiene una oscilación en el sentido estricto de la palabra. En este tipo de dispositivos notamos que el haz de salida (haz 3, figura 21 (a)) presenta la posibilidad de ser mayor en intensidad que el haz que circula entre la rejilla y el espejo ordinario (haz 2, figura 21 (a) y (b)). Lo anterior es explicado por el fenómeno de transferencia de energía. Al interactuar el haz de salida con los haces que se encuentran dentro del cristal, entonces existirá un acoplamiento de ondas entre el haz de salida y uno de estos haces. Entonces dependiendo de la orientación del eje c el haz de salida puede ser amplificado.

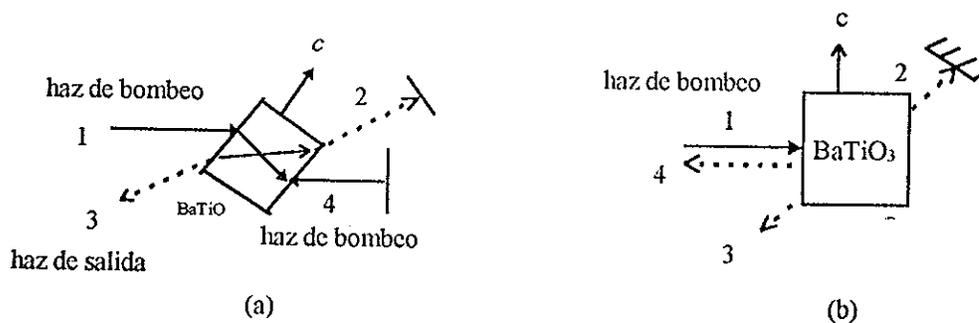


Figura 21. (a) Un semirresonador bombeado por dos haces utilizando un espejo ordinario. (b) Un semirresonador bombeado por un solo haz utilizando un espejo ordinario.

V.3.-Análisis sobre un tipo de oscilador lineal fotorrefractivo que utiliza dos de caras internas del cristal como cavidad.

Un tipo de oscilador fotorrefractivo hasta el momento aún no reportado fue conseguido en nuestro laboratorio. Surgió como consecuencia de experimentos realizados con el objetivo de conseguir un oscilador lineal de la forma del primero expuesto en este capítulo.

Como parte de la alineación de los haces de bombeo se montó un arreglo para la generación del mezclado de cuatro ondas (Fig. 22).

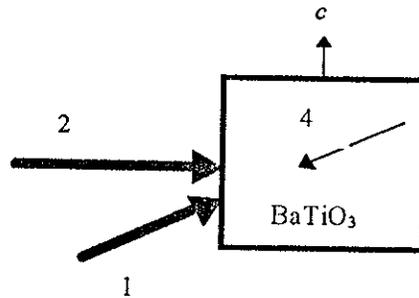


Figura 22- Mezclado de cuatro ondas.

En la Fig. 22 los haces 1 y 2 interfieren para formar una rejilla de índice de refracción. Para corroborar la grabación eficiente de la rejilla se bloqueo el haz 2 con el fin de observar qué tan intenso era el haz de luz difractado.

Se observó que cuando se bloqueaba el haz 2 un haz transmitido seguía apareciendo en la dirección de este haz, lo cual está de acuerdo con la teoría del acoplamiento de ondas; lo no usual en lo que se estaba observando era que dicho haz no decaía en el tiempo sino que se reforzaba, hasta llegar a un estado estacionario, apareciendo a su vez muchos órdenes de difracción y observándose lo mismo en la contradi dirección del haz 2 (Fig. 23).

Cualitativamente lo que pensamos está ocurriendo es lo siguiente. El haz incidente crea diversos haces dentro del cristal debido al efecto de abanico. Este haz interfiere con uno de ellos formando una rejilla de índice de refracción (haces 1 y 2 en la fig. 24).

Supongamos que el haz 1 es mucho mayor en intensidad que el haz 2. De acuerdo a la teoría del acoplamiento de dos ondas los haces 1 y 2, al formar la rejilla, sufrirán transferencia de energía. Si la orientación del cristal es tal que permita que el haz 2 experimente ganancia, la ganancia quedará confinada en una cavidad formada por dos caras del cristal. En el momento que esta ganancia supere a las pérdidas, una oscilación se construirá (haz 3). Los órdenes de difracción pueden deberse a la formación de múltiples rejillas. Al igual que el haz 2 otros haces son creados por el efecto de abanico y actúan de manera independiente con el haz 1, formando a su vez una oscilación espontánea y su correspondiente haz de salida.

Veamos ahora las condiciones de oscilación de nuestro oscilador.

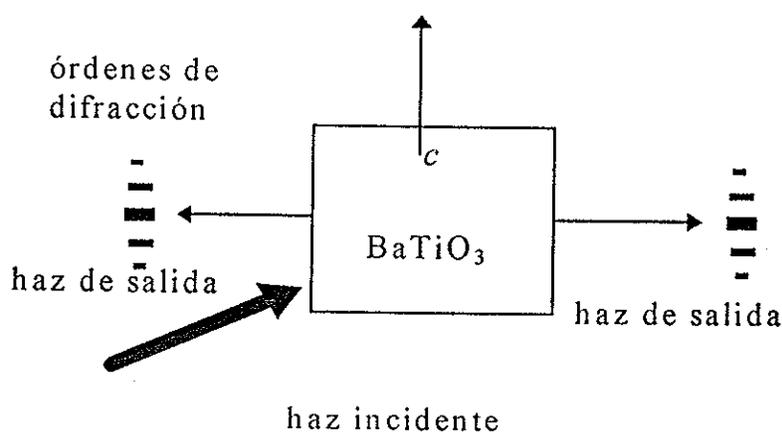


Figura 23. Esquema de un oscilador realizado en nuestro laboratorio

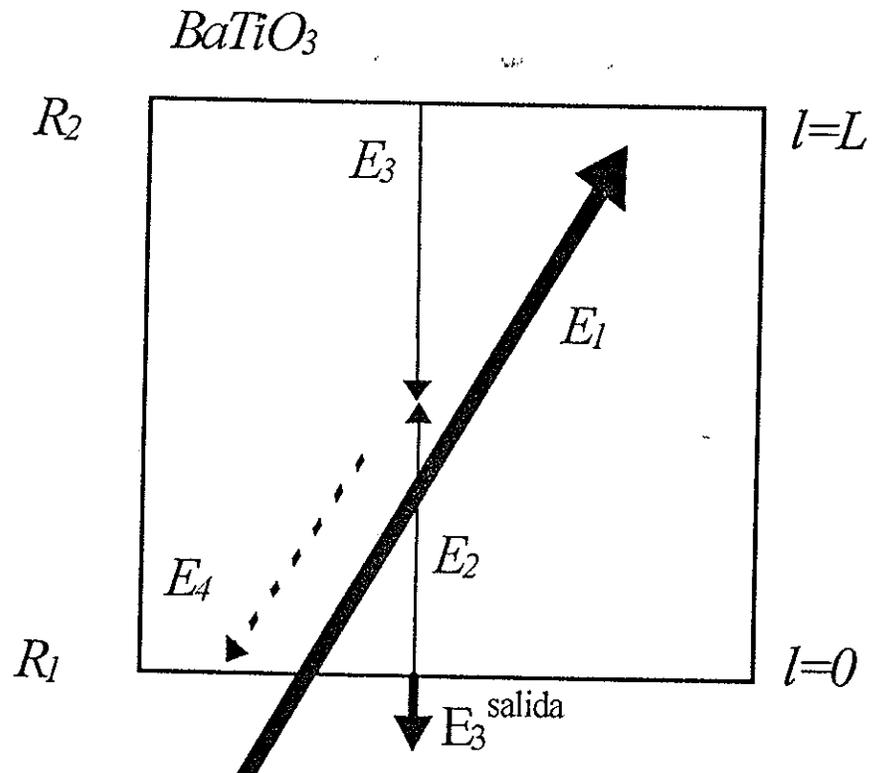


Figura 24. Formación de la cavidad con dos de las caras internas del cristal.

V.3.1.- Condiciones de oscilación.

En nuestro análisis vamos a suponer que la intensidad del haz 4 es mucho menor que la de los haces 1, 2 y 3 tal que podamos despreciarla y de hecho esta aproximación está de acuerdo con la práctica ya que el haz 4, que es la onda conjugada del haz 1 es tan débil que no es posible observarlo. Entonces la única rejilla supuesta para nuestro caso será la que formen el haz 1 y 2 (fig 24).

Refiriéndonos a la fig. 24, la ecuación que describe al campo eléctrico E_2 está dada por el análisis de modos acoplados donde hemos considerado el hecho que las polarizaciones de los haces están sobre el plano de incidencia pero no son paralelas entre sí; un análisis más detallado sobre este desarrollo se incluye en el apéndice B. Entonces:

$$\frac{dE_2(l)}{dl} = \frac{\omega}{2c} n_0^2 n_c^2 r_{eff} f(K) E_2 \frac{|E_1|^2}{I_T}, \quad (76)$$

donde

$$r_{eff} = r_{42} \text{sen}(2\theta) \cos(\theta) \cos(2\alpha), \quad (77)$$

y

$$I_T \equiv |E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2. \quad (78)$$

En la ecuación (76) 2α es el ángulo que forman los haces 1 y 2 entre sí y θ es el ángulo que forma la bisectriz del ángulo que forman los dos haces y el eje c . Los coeficientes electroópticos r_{13} y r_{33} son muy pequeños comparados con r_{42} y se han supuesto cero para este caso.

Resolviendo la ecuación (76), estableciendo condiciones a la frontera y suponiendo que nos encontramos justo en el umbral de oscilación, es decir I_2 e I_3 son iguales a cero, es posible llegar a la siguiente relación.

$$R^2 e^{\Gamma l} = 1 \quad (79)$$

donde

$$\Gamma = \frac{\omega}{c} n_o^2 n_c^2 \frac{|E_1|^2}{I_T} f(k)$$

La ecuación (79) es la condición de oscilación en un resonador que nos dice que el producto de las reflectividades por la ganancia es igual a la unidad en un viaje redondo.

En nuestro caso hemos supuesto que las reflectividades R_1 y R_2 son iguales en las caras del cristal y calculando su valor se encuentran deben de ser $R_1=R_2=R=.18$. Con lo anterior podemos saber de (79) la condición de oscilación sobre el factor de ganancia Γl que de acuerdo a nuestros cálculos se encuentra debe ser mayor o igual a 3.42. Para analizar el intervalo de ángulos para los cuales se cumple la anterior condición veamos la siguiente representación gráfica del factor Γl (Fig 25).

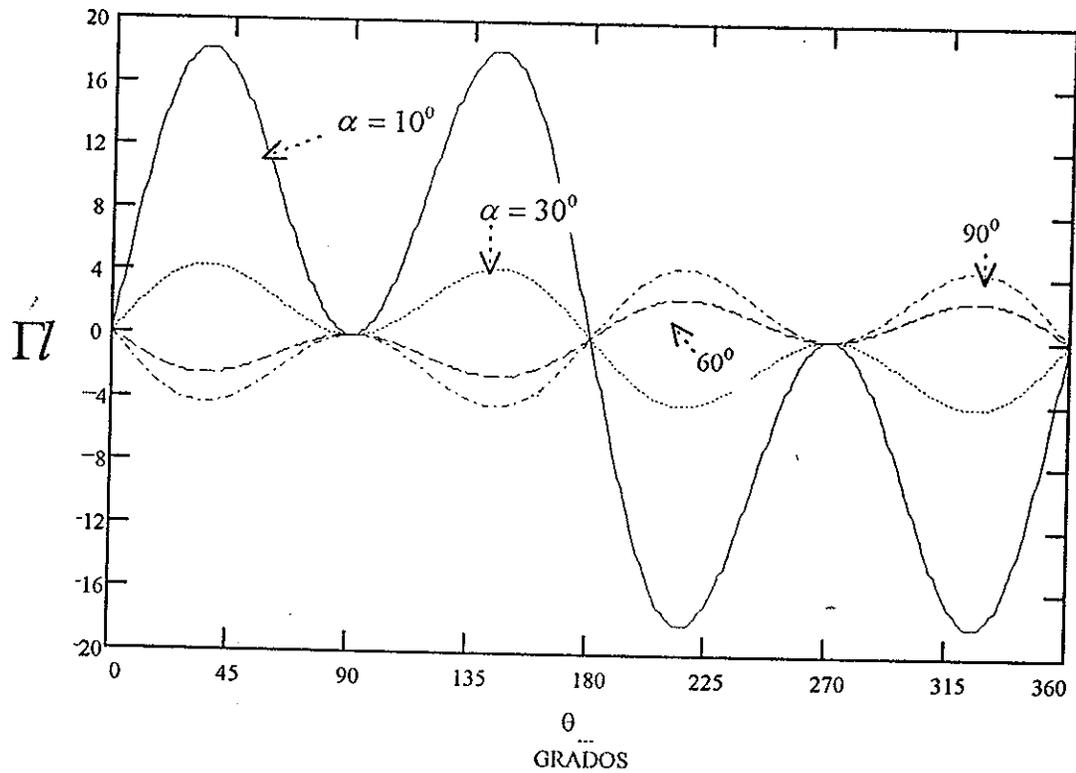


Figura 25. Curvas teóricas del factor de ganancia Γ contra ángulo θ para diferentes ángulos α . Se utilizaron los siguientes valores para los cálculos: $n_o = 2.49$, $n_e = 2.43$, $r_{42} = 1.6 \times 10^{-9}$ pm/V, $\lambda = 514.5 \mu\text{m}$, $N_{ef} = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $T = 300 \text{ K}$, $l = 0.6 \text{ cm}$.

De la figura 25 se observa una notable diferencia en el incremento del factor de ganancia para un ángulo α de 10° de tal forma que fijaremos nuestro análisis en dicho ángulo. De la misma gráfica observamos que podemos discriminar los ángulos θ mayores que 180° ya que estos ángulos implican un factor de ganancia negativo. Si centramos

nuestra atención entonces en un ángulo $\alpha = 10^\circ$ y θ con valores entre 0° y 180° tenemos la siguiente gráfica para el factor de ganancia (fig. 26).

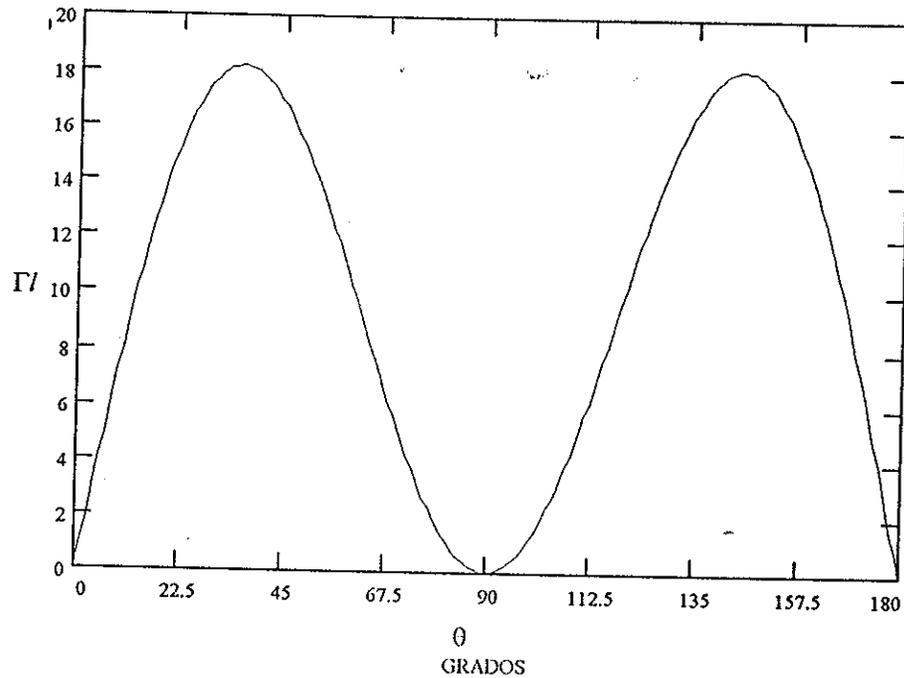


Figura 26. Factor de ganancia contra θ para un ángulo α de 10° .

De la figura 25 ó analíticamente es posible conocer el intervalo de ángulos θ los cuales cumplen con la condición de oscilación previamente encontrada.

Los intervalos de ángulos θ para los cuales tendremos oscilación serían:

$$4.02 \leq \theta \leq 74.3 \quad \text{y} \quad 105.6 \leq \theta \leq 175.8$$

Ahora bien, tomando la aproximación de que $I_1 \gg I_2, I_3$, es posible llegar a una expresión para la intensidad de salida quedando de la forma:

$$\frac{I_3^{salida}(I)}{I_1} = R \left[\frac{R-1}{R+1} \right] \left[1 - \frac{\ln R^2}{\Gamma I} \right], \quad (80)$$

En la ecuación (80) podemos ver que la intensidad de salida que se encuentra para un factor de ganancia de 3.42 es cero lo cual corrobora nuestros análisis previos sobre la condición de umbral.

Podemos conocer también que el valor de la intensidad de salida tiende a depender sólo de las reflectividades, al encontrarse que el factor $\frac{\ln R^2}{\Gamma I}$ tiende a cero para valores de $\Gamma I \gg 3.4$ los cuales son valores muy característicos en cristales de titanato de bario, es decir, a primera aproximación y con los datos que se utilizaron se puede saber que la ganancia en nuestro oscilador es del orden de 12% y se mantendrá así a pesar de que se incremente el factor de ganancia.

VI.- DISCUSIONES EXPERIMENTALES.

VI.1.- El microscopio no lineal.

Un ejemplo de las aplicaciones del acoplamiento de ondas es el microscopio no lineal, (R Cudney *et al* 1988). En este dispositivo una imagen es grabada en un cristal fotorrefractivo y es continuamente comparada con la imagen real y cualquier discrepancia entre ellas es inmediatamente visualizada.

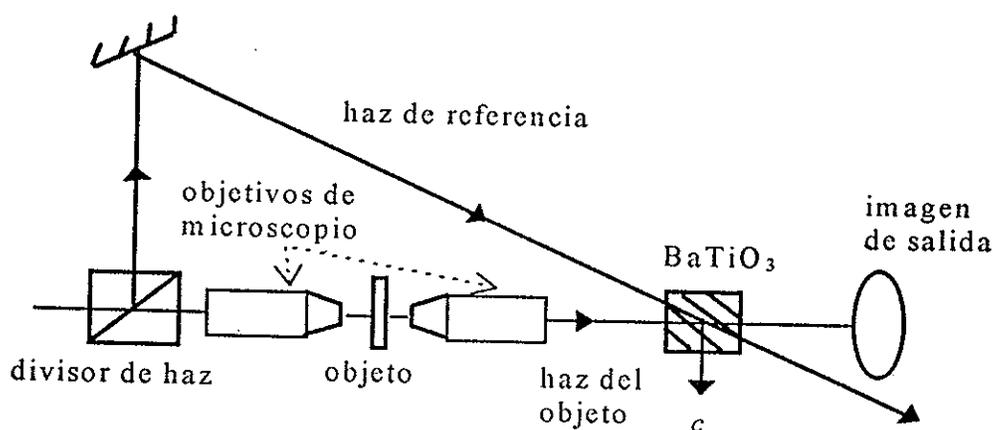


Figura 27. Arreglo esquemático de un microscopio no lineal.

La figura 27 nos muestra el arreglo que fue montado en el laboratorio de holografía del departamento de Óptica. Como medio fotorrefractivo se utilizó un cristal de $BaTiO_3$. Un par de objetivos de microscopio X10 y una lente en la salida del sistema eran el sistema formador de imágenes. El láser utilizado fue un láser de argón en la longitud de onda de $514.5 \mu m$.

La forma de operación del dispositivo la podemos describir de la siguiente forma: el haz láser es dividido en dos, un haz del objeto y un haz de referencia (Fig 27). El haz del objeto pasa a través de los objetivos de microscopio y del objeto dirigiéndose hacia el cristal donde interfiere con el haz de referencia un holograma de volumen. Los mismos haces que forman el holograma se difractarán en él, produciéndose el fenómeno de acoplamiento de ondas. El cristal se orientó de tal manera que la dirección de transferencia de energía entre los haces fuera tal que el haz del objeto cediera toda su energía al haz de referencia. De esta forma en el plano de salida donde se forme la imagen esta aparece siempre oscura. Ahora bien, como el holograma requiere un cierto tiempo finito para ser grabado o borrado, si súbitamente introducimos un cambio de posición en el objeto en un tiempo más corto que el tiempo de grabado del holograma la imagen será visible inmediatamente ya que la interferencia destructiva que forma al haz del objeto no es optimizada. Si el movimiento del objeto, que pueden ser uno o más microorganismos, es más rápido que el tiempo de escritura del holograma entonces el dispositivo mostrará la imagen del objeto dejando lo que se encuentre inmóvil en forma oscura. Lo anterior es una propiedad del dispositivo de desplegar sólo objetos en movimiento.

El filtraje de imágenes en medios fotorrefractivos sienta las bases para una nueva generación de dispositivos ópticos que no necesitan abstraer la imagen pixel por pixel. El dispositivo necesita sólo algunos miliwatts de potencia para detectar objetos en movimiento del orden de micrómetros por segundo.

VI.2.- Mezclado de 4 ondas.

La técnica del mezclado de cuatro ondas en un medio fotorrefractivo para la generación de una onda fase conjugada fue llevada a cabo en nuestro laboratorio utilizando un cristal de BaTiO_3 y un láser de argón en la longitud de onda de 488 nm. Una descripción del arreglo utilizado se muestra en la fig. 28.

El arreglo de la figura 28 nos muestra un haz láser el cual es dividido en 2 un haz del objeto y en un haz de referencia. El haz del objeto es limpiado por un filtro espacial y luego colimado por una lente. Una vez colimado, pasa a través del objeto es recolectado por una lente que lo enfoca y finalmente incide en el cristal fotorrefractivo. Una vez en el cristal el haz de referencia y el del objeto se intersectan y dan lugar a la grabación de un holograma de volumen del objeto..

Debido a que la longitud de coherencia de nuestro láser era del orden de 5 cm, se debió mantener especial cuidado con la diferencia de caminos ópticos entre el haz de referencia y el haz del objeto para que tal diferencia no excediera la longitud de coherencia del láser y así mantener las condiciones de interferencia.

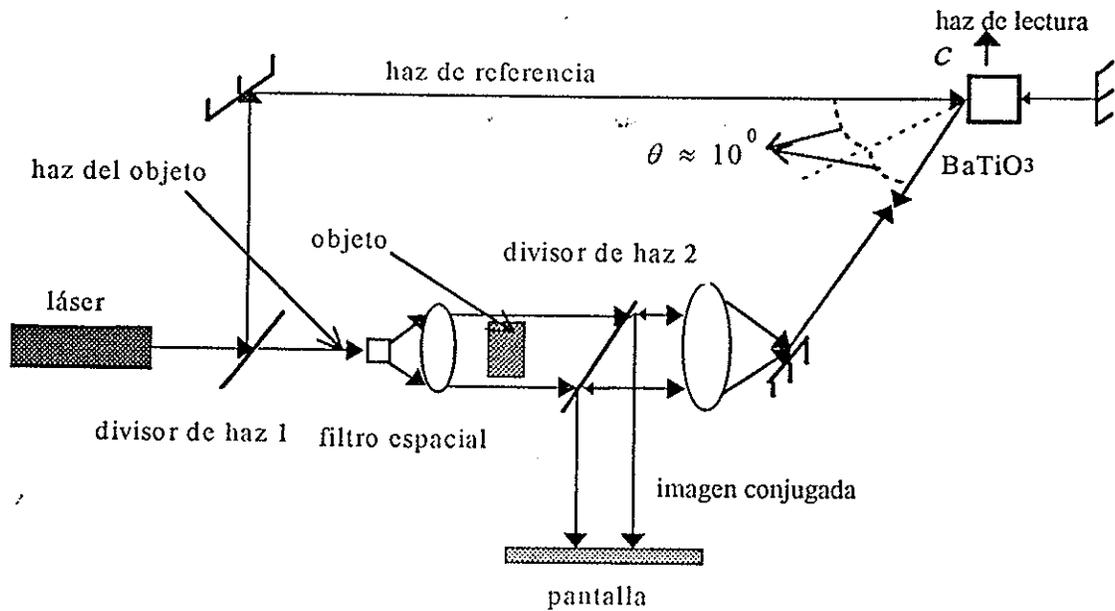


Figura 28.

Mezclado de 4 ondas.

Una vez conseguidas las condiciones para lograr un patrón de interferencia en el cristal, lo que se buscó es hacer uso de la gran eficiencia de difracción que se produce al utilizar el coeficiente electroóptico r_{42} del BaTiO₃. Del apéndice B sabemos que esto se logra cuando el haz del objeto y el de referencia forman un ángulo de aproximadamente 10 grados con respecto a su bisectriz y cuando el eje *c* del cristal forma un ángulo aproximado de 5 grados con respecto a tal bisectriz.

La alineación del haz de lectura para que se encuentre exactamente en contrapropagación con el haz de referencia es un factor fundamental en la reconstrucción del holograma. El factor de alineación anterior se vuelve más crítico conforme más complicada sea la imagen. La corroboración de la obtención de la imagen conjugada se logra con la ayuda del divisor de haz 2 que en nuestro esquema está colocado justo antes del objeto en

relación a la dirección de propagación de la onda conjugada. Al incidir la onda conjugada en el divisor esta es proyectada en una pantalla.

La imagen conjugada obtenida presentaba una buena resolución obteniéndose un factor de reflectividad para la misma del orden del 30%.

VI.3.- Autoconjugación de fase.

La autoconjugación de fase fue, por mucho, la más eficiente y simple de las técnicas que se llevaron a cabo para la generación de una onda conjugada. En la Fig. 29 se muestra una representación esquemática del arreglo realizado en nuestro laboratorio. La configuración que se utilizó fue la llamada del tipo CAT, la cual nos permite una autogeneración de las ondas de bombeo. Esto último evita las cuidadosas alineaciones que representa la técnica del mezclado de 4 ondas.

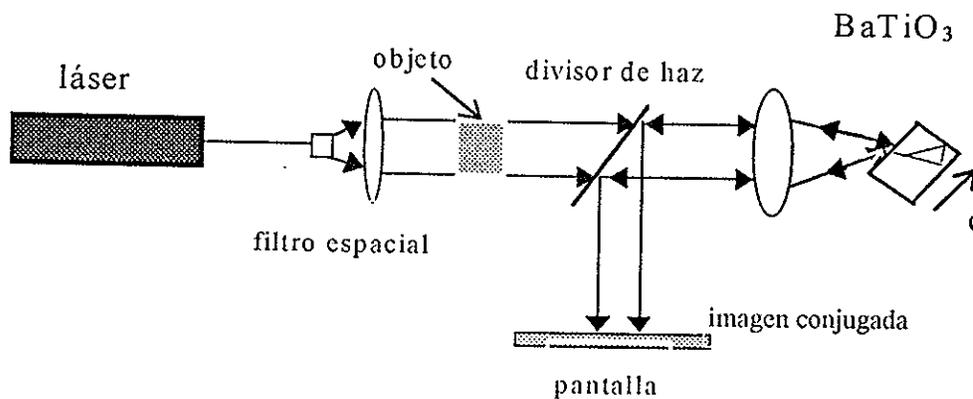


Figura 29.

Autoconjugación de fase.

El arreglo óptico consiste básicamente en colimar un haz láser. Una vez colimado el haz es dirigido sobre nuestro objeto y es enfocado para que incida sobre el cristal. Después de algunos segundos donde parece que el cristal "piensa" sobre la optimización de las ondas de bombeo, una imagen conjugada es producida y proyectada en una pantalla mediante el uso de un divisor de haz. Debido a la alta no linealidad del proceso de autoconjugación de fase es difícil establecer un criterio a seguir para la generación de la onda conjugada. Lo que se busca en principio es utilizar el coeficiente electroóptico r_{42} del BaTiO_3 , para lo cual el cristal es orientado de tal forma que el vector de la onda de la rejilla que forme el cristal no sea paralelo al eje c del cristal.

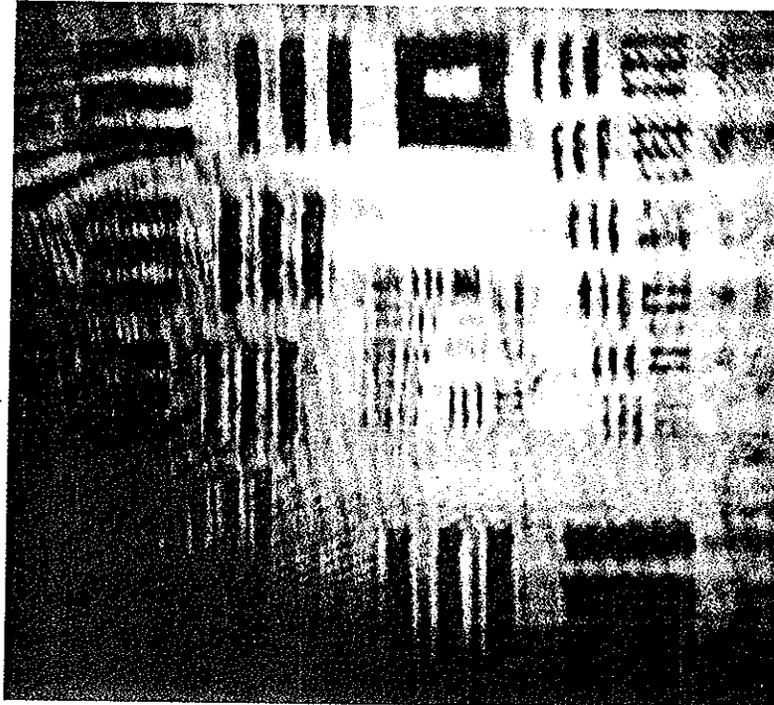
El efecto de abanico juega un factor importante en esta clase de dispositivos, dado que por medio de él las ondas de bombeo autogeneradas en el cristal son optimizadas para generar la conjugación de fase pero, por otra parte, es muy común encontrarse con luz esparcida aún después de conseguir la onda fase conjugada ya que existen rejillas que no son borradas y continúan con el proceso de difracción de los haces que las formaron, lo que contribuye en un factor importante de ruido.

La imagen conjugada obtenida por medio de esta técnica fue la de mayor resolución, encontrándose un factor de reflectividad para la misma del 37%.

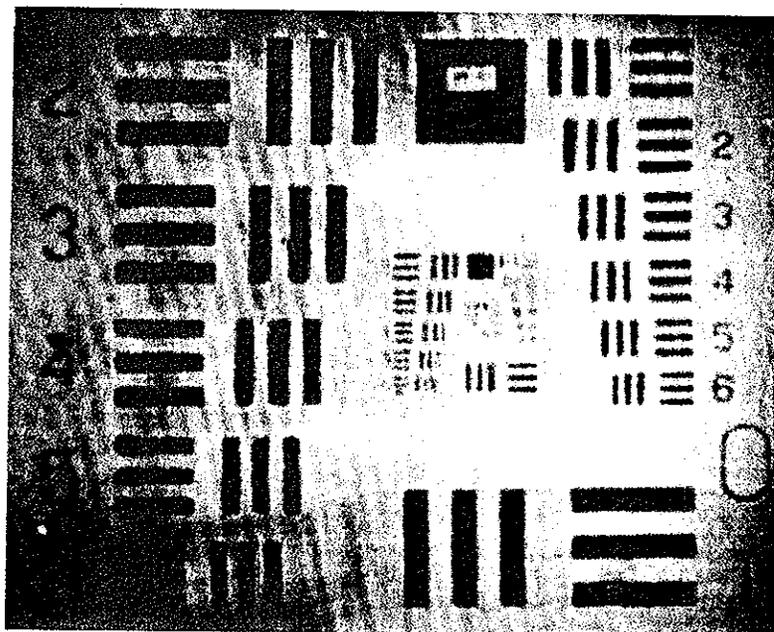
En la foto 1 se muestra la imagen de una tarjeta de resolución donde notamos una pobre resolución de la imagen. Este hecho fue debido a que las frecuencias espaciales altas de la imagen, las cuales contribuyen en la resolución de la imagen, no llegaban a el cristal. Para corregir lo anterior se utilizan una lente de distancia focal más corta y observamos en

la foto 2 la imagen conjugada que se obtiene, donde se nota el mejoramiento en la resolución de la imagen.

La técnica presenta una sencillez en cuestión de arreglo óptico lo que hace que la misma sea relativamente fácil de reproducir aún en laboratorios modestamente equipados.



1 Fotografía de una imagen de fase conjugada, donde se nota una pobre resolución debido a que al cristal no llegaban las frecuencias altas de la imagen.



2 Fotografía de la misma imagen de fase conjugada, donde ahora se nota un mejoramiento de la resolución una vez que se capturaron las frecuencias altas de la imagen.

VI.4.- Doble conjugación de fase.

La conjugación doble de fase presenta la posibilidad de tener dos ondas conjugadas en un solo arreglo óptico. Dos haces incoherentes entre sí al incidir en un cristal fotorrefractivo forman cada uno por separado el efecto de abanico. El cristal consigue optimizar una sola de las rejillas que se forman en el proceso, la cual es común a ambos haces por lo que cada haz puede difractarse como la onda conjugada del otro. Un esquema del arreglo montado en nuestro laboratorio se muestra en la Fig 30.

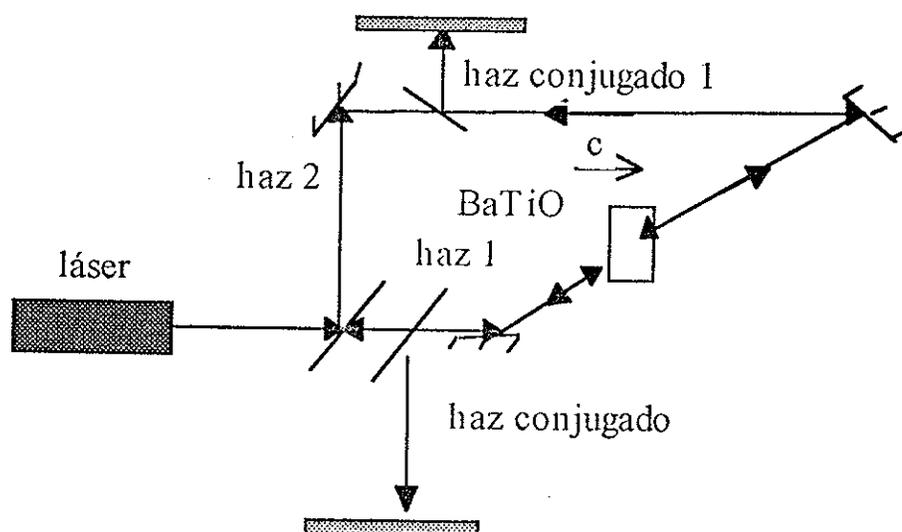


Figura 30. .

Doble conjugación de fase.

La técnica presenta un tiempo de formación del orden de 1 minuto o más para la completa reconstrucción de cada haz. Lo anterior es debido al proceso de borrado del gran número de rejillas que se forman dentro del cristal. Como en las anteriores técnicas se busca hacer uso del coeficiente electroóptico r_{42} para una eficiente grabación de la rejilla común.

VI.5.- Corrección de aberraciones.

Una de las aplicaciones que exhibe el hecho de obtener una onda fase conjugada es la corrección de aberraciones. En los arreglos esquemáticos de las figuras 28 y 29 se introdujo un elemento dispersivo que ocasionaba la distorsión de la imagen (Fig 31). La onda fase conjugada al pasar por el medio distorsionador corrige la aberración provocada por el medio distorsionador. Entonces lo que obtenemos en la pantalla es la imagen conjugada del objeto libre de aberraciones. La corrección de aberraciones es una de las consecuencias más útiles en materia de conjugación de fase.

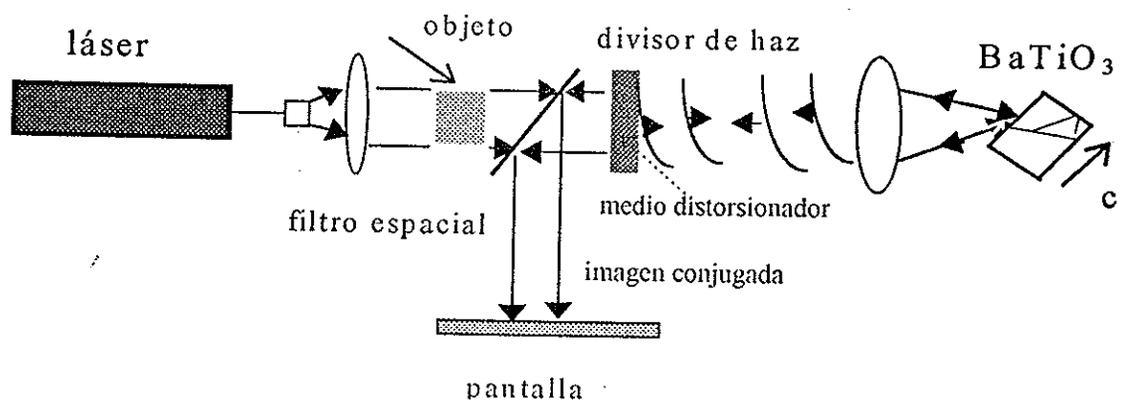


Figura 31.

Corrección de aberraciones.

VII.- CONCLUSIONES.

VII.1 Breve resumen.

El objetivo de este trabajo fue el análisis de la conjugación óptica de fase en un cristal fotorrefractivo de BaTiO_3 y el desarrollo de un oscilador fotorrefractivo utilizando la gran ganancia que proporciona un espejo conjugador de fase. Para ello el trabajo pasa por dos etapas. En la primera etapa se analizan las bases teóricas en las cuales está fundamentada la conjugación óptica de fase en el BaTiO_3 . En la segunda se llevan a cabo desarrollos experimentales de conjugación de fase en BaTiO_3 y se desarrolla un oscilador fotorrefractivo utilizando dos caras internas del cristal como cavidad. De esta forma el trabajo nos permite obtener las siguientes conclusiones.

VII.2 Conclusiones.

Las aproximaciones hechas en el manejo de nuestros modelos que describen los fenómenos fotorrefractivos son buenas para nuestros propósitos ya que nos permiten conocer las tendencias para conseguir una óptima eficiencia de difracción de una rejilla de difracción. Aunque las mismas nos restringen de otras informaciones como, por ejemplo, obtener información sobre el tiempo de respuesta del material.

Se llevaron a cabo tres técnicas para la obtención de una onda fase conjugada, siendo la técnica conocida como autoconjugación de fase la más eficiente en cuestión de rapidez y calidad.

En las tres técnicas llevadas a cabo para obtener una onda fase conjugada la gran ganancia que se obtiene por el coeficiente electroóptico r_{42} del BaTiO_3 juega un papel muy importante haciendo del titanato de bario un medio fotorrefractivo ideal para este fin.

Las mismas ventajas que proporciona la utilización del coeficiente electroóptico r_{42} nos llevaron a la explicación del oscilador fotorrefractivo que utiliza dos de sus caras internas como cavidad. Un hecho aparentemente en contradicción con la grabación y borrado de la rejilla de índice, se explica mediante la formación de una oscilación espontánea entre dos de las caras internas del cristal debida a la gran ganancia que se tiene por el uso del coeficiente electroóptico r_{42} del cristal. Los análisis experimentales cuantitativos no se pudieron realizar por cuestiones de tiempo. Una optimización del dispositivo puede llevar a suprimir el uso de la cavidad entre un espejo ordinario y el espejo conjugador de fase la cual es comúnmente utilizada para desarrollar osciladores fotorrefractivos. Por otra parte la aparición de esta oscilación espontánea puede convertirse en una fuente importantísima de ruido. En experimentos donde una oscilación espontánea no sea requerida, este efecto puede volverse incluso muy molesto.

APENDICE A.

CALCULO EN UNA DIMENSION DEL CAMPO ELECTRICO ESPACIO-CARGA.

Tenemos las siguientes 4 ecuaciones que conforman lo que se conoce como el modelo de banda de conducción.

$$\frac{\partial N_D^+(x,t)}{\partial t} = sI(x)[N_D - N_D^+] - \gamma_D \eta_e N_D^+, \quad \text{ecuación de velocidad. (rate equation) ,} \quad (\text{A-1})$$

$$J(x,t) = \mu e \eta_e E(x,t) + K_B T \mu \frac{\partial \eta_e}{\partial x}, \quad \text{ecuación de densidad de corriente ,} \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = -e \frac{\partial}{\partial t} [N_D^+ - \eta_e], \quad \text{ecuación de continuidad ,} \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{e[N_D^+ - \eta_e - N_A]}{\epsilon \epsilon_0}, \quad \text{ecuación de Gauss .} \quad (\text{A-4})$$

Suponiendo una modulación muy pequeña en la intensidad, podemos representar como una expansión en series de Fourier a primer orden a la densidad de trampas donadoras ionizadas, al número de electrones en la banda de conducción, a la densidad de corriente, al campo eléctrico y a la propia intensidad por lo tanto:

$$N_D^+(x,t) = N_{D_0}^+ + \left[\frac{N_{D_1}^+}{2} e^{iKx} + c.c \right], \quad (\text{A-5})$$

$$\eta_e(x, t) = \eta_{e0} + \left[\frac{\eta_{e1}}{2} e^{iKx} + c.c \right] , \quad (\text{A-6})$$

$$J(x, t) = J_0 + \left[\frac{J_1}{2} e^{iKx} + c.c \right] , \quad (\text{A-7})$$

$$I(x, t) = I_0 \left[1 + \frac{m}{2} e^{iKx} + c.c \right] , \quad (\text{A-8})$$

$$E(x, t) = E_0 + \frac{1}{2} \left[E_1 e^{iKx} + c.c \right] , \quad (\text{A-9})$$

siendo m la modulación compleja que es de la forma:

$$m = 2 \frac{A_1 A_2^*}{|A_1|^2 + |A_2|^2} , \quad (\text{A-10})$$

donde A_1 y A_2 son las amplitudes de los haces que interfieren en el cristal.

Para efectos de simplicidad consideremos que $N_D \gg N_A \gg \eta_e$ y $N_{D_1} \gg \eta_{e_1}$, lo cual está corroborado con datos experimentales (Yariv, Optical Electronics). Supondremos también, que el término E_0 , el cual puede deberse a un campo eléctrico externo constante, es idénticamente cero. El análisis lo realizaremos en el estado estacionario. Centremos nuestra

atención entonces en encontrar una expresión para el término E_1 en (A-9), al cual llamaremos campo eléctrico espacio-carga.

Iniciemos el cálculo resolviendo el orden 0 de la expansión de Fourier. De (A-1) tenemos que para el estado estacionario:

$$sI(x)[N_D - N_D^+] - \gamma_D \eta_e N_D^+ = 0 \quad , \quad (\text{A-11})$$

$$sI_0[N_D - N_{D_0}^+] - \gamma_D \eta_{e0} N_{D_0}^+ = 0 \quad . \quad (\text{A-12})$$

Por lo tanto de (A-12) obtenemos:

$$\eta_{e0} = \frac{sI_0 [N_D - N_{D_0}^+]}{\gamma_D N_{D_0}^+} \quad , \quad (\text{A-13})$$

y de (A-4)

$$\frac{e}{\epsilon \epsilon_0} [N_D^+ - \eta_e - N_A] = 0 \quad . \quad (\text{A-14})$$

Sabiendo que la intensidad de la luz es suficientemente baja para que $\eta_e \ll N_A$, entonces

$$N_{D_0}^+ = N_A \quad (A-15)$$

Ahora resolviendo para el orden 1. Sustituyendo (A-2) en (A-3) tenemos:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = e\mu \left[\frac{\partial \eta_e}{\partial x} E_x(x,t) + \frac{\partial E_x}{\partial x} \eta_e \right] + K_B T \mu \frac{\partial^2 \eta_e}{\partial x^2} = 0 \quad (A-16)$$

y de ahí que

$$e\mu \left\{ iK \frac{\eta_{e1}}{2} e^{jKx} \cdot \left[\frac{E_1}{2} e^{jKx} \right] + \left[\eta_{e0} + \frac{\eta_{e1}}{2} e^{jKx} \right] \cdot \left[iK \frac{E_1}{2} e^{jKx} \right] \right\} - K_B T \mu K \eta_{e1} e^{jKx} = 0 \quad (A-17)$$

Despreciando los términos de segundo orden y suponiendo que no hay campos eléctricos aplicados externamente ($E_0 = 0$), llegamos a

$$\eta_{e0} iK E_1 + \frac{K_B T}{e} K^2 \eta_{e1} = 0 \quad (A-18)$$

Por otro lado partiendo de la ecuación (A-1) podemos obtener η_{e1} ,

$$sI_0 \left[m \left[N_D - N_{D_0}^+ \right] - N_{D_1}^+ \right] - \gamma_D \eta_{e1} N_{D_0}^+ - \gamma_D \eta_{e0} N_{D_1}^+ = 0 \quad (A-19)$$

Sustituyendo (A-12) y (A-15) en (A-19) obtenemos

$$\frac{\gamma_D \eta_{e0} N_A}{N_D - N_A} [m[N_D - N_A] - N_{D1}^+] = \gamma_D [\eta_{e1} N_A + \eta_{e0} N_{D1}^+], \quad (\text{A-20})$$

$$(\eta_{e0} N_A) m - \frac{\eta_{e0} N_A N_{D1}^+}{N_D - N_A} = \eta_{e1} N_A + \eta_{e0} N_{D1}^+, \quad (\text{A-21})$$

$$\frac{\eta_{e1}}{\eta_{e0}} = \left[m - \frac{N_{D1}^+}{N_D - N_A} \right] - \frac{N_{D1}^+}{N_A}. \quad (\text{A-22})$$

Definiendo a N_{ef} (la cantidad efectiva de trampas en el cristal) como

$$N_{ef} = [N_D - N_A] \left(\frac{N_A}{N_D} \right), \quad (\text{A-23})$$

tenemos que:

$$\eta_{e1} = \eta_{e0} \left[m - \frac{N_{D1}^+}{N_{ef}} \right]. \quad (\text{A-24})$$

Por otro lado, de (A-4) tenemos que:

$$ikE_1 = \frac{e}{\epsilon\epsilon_0} N_{D1}^+ . \quad (\text{A-25})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (A-18), (A-24) y (A-25) llegamos a:

$$E_{sc} = i \frac{K_B T}{e} K \left[\frac{A_1 A_2^*}{|A_1|^2 + |A_2|^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{K^2 \epsilon \epsilon_0 K_B T}{e^2 N_{eff}}} \right] \right] . \quad (\text{A-26})$$

Definiendo

$$k_0 = \sqrt{\frac{e^2}{K_B T \epsilon_0 \epsilon} N_{eff}} , \quad (\text{A-27})$$

y

$$f(K) = \pm \frac{K_B T}{e} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{k_0}\right)^2} , \quad (\text{A-28})$$

llegamos a una expresión para el campo eléctrico E_1

$$E^{sc} = i \left[\frac{A_1 A_2^*}{|A_1|^2 + |A_2|^2} \right] [f(K)] \quad (A-29)$$

Finalmente, utilizando la ecuación (A-29) y (A-9) y suponiendo que $E_0 = 0$, obtenemos

$$E(x,t) = \frac{1}{2} \left[i \frac{A_1 A_2^*}{|A_1|^2 + |A_2|^2} \right] [f(K)] e^{iKx} + c.c \quad (A-30)$$

que es el campo eléctrico interno generado debido al transporte de cargas, de acuerdo al modelo de banda de conducción, una vez alcanzado el estado estacionario.

APENDICE B.

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES ACOPLADAS PARA EL MEZCLADO DE DOS ONDAS EN UN CRISTAL BaTiO_3 .

De las ecuaciones de Maxwell tenemos que:

$$\vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x \vec{E}(\vec{r}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}, \quad (\text{B-1})$$

la cual la podemos reescribir como:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \cdot \vec{E}(\vec{r}), \quad (\text{B-2})$$

donde hemos utilizado la identidad vectorial

$$\vec{\nabla}_x[\vec{\nabla}_x \vec{A}] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}, \quad (\text{B-3})$$

y

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{B-4})$$

Para un medio homogéneo e isotrópico \vec{D} , el vector desplazamiento eléctrico es paralelo al campo eléctrico \vec{E} , entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ y la ecuación (B-2) toma la forma de:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E}(\vec{r}) , \quad (\text{B-5})$$

que es la ecuación de onda de Helmholtz y cuyas soluciones vienen dadas por una superposición de ondas planas de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} , \quad (\text{B-6})$$

donde \vec{E} , la amplitud, es constante. Para un medio inhomogéneo y anisotrópico, como lo es el titanato de bario, \vec{D} no es paralelo a \vec{E} y por lo tanto $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$. Es decir, hay que resolver (B-2) en su totalidad. Se puede encontrar que para cualquier dirección de propagación las soluciones vienen dadas por una superposición lineal de ondas de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{e} . \quad (\text{B-7})$$

Vamos a suponer que el tensor dieléctrico ϵ varía muy poco con \vec{r} tal que sólo introduzcamos en él una pequeña perturbación, entonces:

$$\bar{\epsilon} \equiv \bar{\epsilon}_1 + \Delta\bar{\epsilon} \quad . \quad (\text{B-8})$$

En la ecuación (B-8), la perturbación $\Delta\bar{\epsilon}$ la podemos definir de acuerdo a lo siguiente: un campo eléctrico altera el índice de refracción de un material vía el efecto electroóptico. El cambio del medio está definido en términos del inverso de $\bar{\epsilon}$ de la siguiente forma:

$$\left[\bar{\epsilon}\right]^{-1} \equiv \bar{h} + \Delta\bar{h} \quad , \quad (\text{B-9})$$

donde

$$\Delta\bar{h} = \bar{R} \cdot \bar{E}^{sc} \quad . \quad (\text{B-10})$$

Podemos encontrar una relación entre los tensores $\bar{\epsilon}$ y $\Delta\bar{h}$ si hacemos una expansión tensorial en series de Taylor.

$$\left[\bar{h} + \Delta\bar{h}\right]^{-1} = \left[\bar{h} + \bar{h} \cdot \left[\bar{h}\right]^{-1} \cdot \Delta\bar{h}\right]^{-1} \quad , \quad (\text{B-11})$$

$$\bar{\epsilon} = \left[\bar{h} \left[\Pi + \left[\bar{h}\right]^{-1} \cdot \Delta\bar{h}\right]\right]^{-1} \quad . \quad (\text{B-12})$$

En matrices se cumple que:

$$[AB]^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1} , \quad (\text{B-13})$$

$$\therefore \bar{\epsilon} = \left[\Pi + [\bar{h}]^{-1} \cdot \Delta \bar{h} \right]^{-1} [\bar{h}]^{-1} , \quad (\text{B-14})$$

$$\approx \left[\Pi - [\bar{h}]^{-1} \cdot \Delta \bar{h} \right] [\bar{h}]^{-1} . \quad (\text{B-15})$$

Por lo tanto:

$$\Delta \bar{\epsilon} \approx -\bar{\epsilon} \cdot \left[\bar{R} \cdot \bar{E}^{sc} \right] \cdot \bar{\epsilon} , \quad (\text{B-16})$$

es decir,

$$\Delta \bar{\epsilon} = - \left[\frac{1}{2} \text{im}f(K) e^{i\bar{K} \cdot \bar{r}} + c.c \right] \left[\bar{\epsilon}_1 \cdot \left[\bar{R} \cdot \hat{K} \right] \cdot \bar{\epsilon}_1 \right] . \quad (\text{B-17})$$

Si sólo estamos introduciendo esta pequeña perturbación en el tensor dieléctrico, podemos suponer que (B-7) cumple también con (B-2), la ecuación de onda de Helmholtz, donde las amplitudes $\bar{E}(\bar{r})$ ahora variarían lentamente en \bar{r} comparado con $e^{i\bar{K} \cdot \bar{r}}$.

Calculemos ahora las ecuaciones que describen el acoplamiento entre dos ondas que interfieren en un cristal de titanato de bario. Proponemos como solución de la ec. de Helmholtz

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_p(\vec{r})e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} \hat{e}_p + E_b(\vec{r})e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \hat{e}_b \quad , \quad (\text{B-18})$$

donde E_p' y E_b son las amplitudes del haz de prueba y del haz de bombeo, \hat{e}_p y \hat{e}_b son sus estados de polarización.

Entonces la ecuación de Helmholtz nos queda de la forma:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\epsilon_1 + \Delta \epsilon \right] \cdot \left[E_p(\vec{r})e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} \hat{e}_p + E_b(\vec{r})e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \hat{e}_b \right] \quad . \quad (\text{B-19})$$

Analizando el lado izquierdo de (B-20) tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = & \left[\nabla^2 E_p(\vec{r}) + 2i\vec{k}_p \cdot \vec{\nabla} E_p(\vec{r}) - E_p(\vec{r})k_p^2 \right] e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} \hat{e}_p + \\ & \left[\nabla^2 E_b(\vec{r}) + 2i\vec{k}_b \cdot \vec{\nabla} E_b(\vec{r}) - E_b(\vec{r})k_b^2 \right] e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \hat{e}_b \quad . \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

Tomando la aproximación de la variación lenta (slowly varying envelope approximation), dado que las envolventes $\vec{E}_p(\vec{r})$ y $\vec{E}_b(\vec{r})$ varían lentamente con respecto a $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, es decir,

$$|\nabla^2 E_p(\vec{r})| \ll [2\vec{k}_p \cdot \vec{\nabla} E_p(\vec{r})] \ll |E_p(\vec{r})| k_p^2 \quad \text{y} \quad |\nabla^2 E_b(\vec{r})| \ll [2\vec{k}_b \cdot \vec{\nabla} E_b(\vec{r})] \ll |E_b(\vec{r})| k_b^2$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = [2i\vec{k}_p \cdot \vec{\nabla} E_p - k_p^2 E_p] e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} \hat{e}_p + [2i\vec{k}_b \cdot \vec{\nabla} E_b - k_b^2 E_b] e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \hat{e}_b \quad (\text{B-21})$$

Trabajando ahora con el lado derecho de (B-19) tenemos:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} [\bar{\epsilon}_1 + \Delta \bar{\epsilon}(\vec{r})] \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} [E_p e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} \bar{\epsilon}_1 \cdot \hat{e}_p + E_b e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \bar{\epsilon}_1 \cdot \hat{e}_b] - \frac{\omega^2}{c^2} [E_p e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{e}_p + E_b e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{e}_b] \quad (\text{B-22})$$

Primero analizaremos el caso cuando las polarizaciones son perpendiculares al plano de incidencia y paralelas entre sí. Tomemos $\hat{e}_p = \hat{e}_b = \hat{x}$

Igualando (B-20) y (B-21) tenemos:

$$[2i\vec{k}_p \cdot \vec{\nabla} E_p - k_p^2 E_p] e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} + [2i\vec{k}_b \cdot \vec{\nabla} E_b - k_b^2 E_b] e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} = -\frac{\omega^2}{c^2} [\hat{x} \cdot \bar{\epsilon}_1 \cdot \hat{x} [E_p e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} + E_b e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}}] - \frac{\omega^2}{c^2} [E_p \hat{x} \cdot \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{x} e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} + E_b \hat{x} \cdot \Delta \bar{\epsilon} \cdot \hat{x} e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}}] \quad (\text{B-23})$$

Pero $\hat{x} \cdot \bar{\epsilon} \cdot \hat{x} = n_o$ el índice ordinario del material. Tomando en cuenta lo anterior y substituyendo (B-18) en (B-23) llegamos a:

$$\left[2i\vec{k}_p \cdot \vec{\nabla} E_p e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} + 2i\vec{k}_b \cdot \vec{\nabla} E_b e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \right] = \frac{\omega^2}{2c^2} \left[\hat{x} \cdot \overset{\equiv}{\epsilon} \cdot \overset{\equiv}{R} \cdot \overset{\equiv}{K} \cdot \overset{\equiv}{\epsilon} \cdot \hat{x} \right] f(k_g) \left[imE_p e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} + im^* E_b e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \right], \quad (\text{B-24})$$

donde $\overset{\equiv}{R}$ es el tensor electroóptico, el cual es un tensor de rango 3 con 27 componentes.

Si la absorción del cristal es despreciable, se cumple que

$$r_{ijk} = r_{jik}. \quad (\text{B-25})$$

Utilizando esta simetría podemos reducir el número de índices de 3 a 2, siguiendo la convención de índices contractados,

$$\begin{aligned} 1 &= (11) = (xx), \\ 2 &= (22) = (yy), \\ 3 &= (33) = (zz), \\ 4 &= (23) = (32) = (yz) = (zy), \\ 5 &= (31) = (13) = (zx) = (xz), \\ 6 &= (12) = (21) = (xy) = (yx). \end{aligned} \quad (\text{B-26})$$

Usando los índices contractados nos queda

$$\begin{aligned} r_{1k} &= r_{11k}, \\ r_{2k} &= r_{22k}, \\ r_{3k} &= r_{33k}, \\ r_{4k} &= r_{23k} = r_{32k}, \end{aligned} \quad (\text{B-27})$$

$$r_{5k} = r_{31k} = r_{13k},$$

$$r_{6k} = r_{12k} = r_{21k},$$

con $k = 1, 2, 3$ ó x, y, z .

Por lo general, las simetrías del medio permiten simplificar aún más el tensor electroóptico. En el caso del titanato de bario, que pertenece al grupo puntal $4mm$, lo podemos representar como:

$$\overline{\overline{R}} = [r_{13}[xxz + yyz] + r_{33}[zzz] + r_{42}[yzy + zyy + xzx + zxx]] \quad . \quad (\text{B-28})$$

Tomando la dirección del vector de onda de la rejilla paralela al eje c (\hat{z}) del cristal
y

$$\overline{\overline{R}} \cdot \hat{K} = [r_{13}\hat{K}[xx + yy] + r_{33}\hat{K}[zz]] \quad . \quad (\text{B-29})$$

Por otro lado el tensor dieléctrico evaluado en la frecuencia ω es de la forma:

$$\overline{\overline{\epsilon}}(\omega) = [n_o^2(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}) + n_e^2(\hat{z}\hat{z})] \quad . \quad (\text{B-30})$$

Entonces:

$$\left[\overline{\overline{R}} \cdot \hat{K} \right] \cdot \overline{\overline{\epsilon}}(\omega) = n_o^2 r_{13} [\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}] + n_e^2 r_{33} [\hat{z}\hat{z}] \quad (\text{B-31})$$

y

$$\overline{\overline{\epsilon}}(\omega) \cdot \left[\overline{\overline{R}} \cdot \hat{K} \right] \cdot \overline{\overline{\epsilon}}(\omega) = n_o^4 r_{13} [\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}] + n_e^4 r_{33} [\hat{z}\hat{z}] \quad (\text{B-32})$$

Finalmente obtenemos:

$$\left[\hat{x} \cdot \left[\overline{\overline{\epsilon}} \cdot \left[\overline{\overline{R}} \cdot \hat{K} \right] \cdot \overline{\overline{\epsilon}} \right] \cdot \hat{x} \right] = n_e^4 r_{13} \quad (\text{B-33})$$

Sustituyendo (B-33) en (B-24) :

$$\left[2i\vec{k}_p \cdot \vec{\nabla} E_p e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} + 2i\vec{k}_b \cdot \vec{\nabla} E_b e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \right] = \frac{\omega^2}{2c^2} mf(K) n_o^4 r_{13} \left[im E_b e^{i\vec{k}_p \cdot \vec{r}} - im^* E_p e^{i\vec{k}_b \cdot \vec{r}} \right] \quad (\text{B-34})$$

Igualando términos que oscilan a la misma frecuencia espacial, llegamos al siguiente par de ecuaciones acopladas, que describen el mezclado de dos ondas con las características descritas al principio del desarrollo.

$$2i\vec{k}_p \cdot \vec{\nabla} E_p = \frac{\omega^2}{c^2} f(K) \frac{n_o^4 r_{13}}{I_0} (i) |E_p|^2 E_b, \quad (\text{B-35})$$

$$2i\vec{k}_b \cdot \vec{\nabla} E_b = \frac{\omega^2}{c^2} f(K) \frac{n_o^4 r_{13}}{I_0} (-i) |E_b|^2 E_p. \quad (\text{B-36})$$

Veamos un caso más general. Supongamos que los estados de polarización y vectores de propagación se encuentran en el plano y - z , que los haces formen un ángulo de 2α entre sí y que la bisectriz de este ángulo está a un ángulo θ con respecto al eje z , como se indica en la figura B-1.

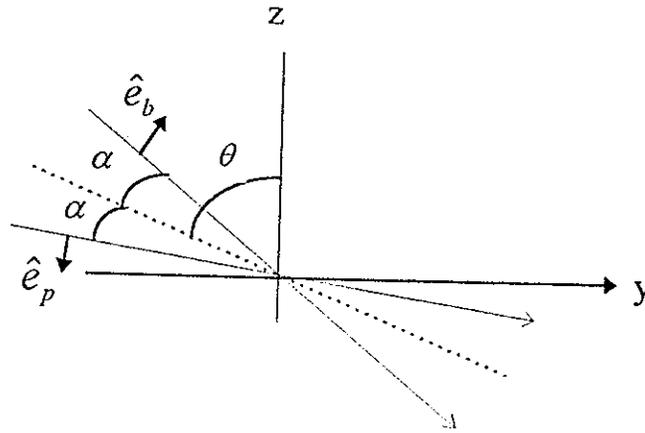


Figura B-1. Representación esquemática de dos ondas planas con estados de polarización en el plano de incidencia.

De acuerdo a la Fig (B-1) los estados de polarización están dados por:

$$\hat{e}_p = -\hat{y} \cos(\theta + \alpha) - \hat{z} \sin(\theta + \alpha) , \quad (\text{B-37})$$

$$\hat{e}_b = \hat{y} \cos(\theta - \alpha) + \hat{z} \sin(\theta - \alpha) . \quad (\text{B-38})$$

Calculando la r_{eff} , el coeficiente electroóptico efectivo el cual esta dado por:

$$r_{eff} = -\hat{e}_p^* \cdot \left[\hat{\epsilon} \cdot \left[\hat{R} \cdot \hat{k}_s \right] \cdot \hat{\epsilon} \right] \cdot \hat{e}_b, \quad (\text{B-39})$$

obtenemos la siguiente expresión :

$$r_{eff} = r_{42} n_0^2 n_e^2 \text{sen}(2\theta) \cos(\theta) \cos(2\alpha), \quad (\text{B-40})$$

donde hemos despreciado a los términos con r_{13} y r_{33} , ya que $r_{42} \gg r_{13}, r_{33}$.

Desarrollando (B-22) para este caso y tomando en cuenta la expresión (B-40) podemos llegar al siguiente par de ecuaciones acopladas:

$$2ik_p \cdot \bar{\nabla} E_p = -\frac{\omega^2}{c^2} r_{eff} f(K)(i) |E_b|^2 \frac{E_p}{|E_p|^2 + |E_b|^2}, \quad (\text{B-41})$$

$$2ik_b \cdot \bar{\nabla} E_b = -\frac{\omega^2}{c^2} r_{eff} f(K)(-i) |E_p|^2 \frac{E_b}{|E_p|^2 + |E_b|^2}. \quad (\text{B-42})$$

Supongamos que la intensidad del haz de bombeo es mucho mayor que el haz de prueba, es decir, $|E_b|^2 \gg |E_p|^2$, entonces de (B-41) y (B-42) encontramos que

$$\frac{dE_b}{dt} \approx 0, \quad (\text{B-43})$$

$$\frac{dE_p}{dt} \approx \frac{\omega^2}{2Kc^2} r_{eff} f(K) E_p, \quad (\text{B-44})$$

donde l es la longitud de interacción dentro del cristal. La solución de (B-44) es

$$E_p(l) = E_p(0)e^{\Gamma/2}, \quad (\text{B-45})$$

donde la constante de acoplamiento

$$\Gamma = \frac{\omega}{c} n_o^3 r_{eff} f(K). \quad (\text{B-46})$$

La intensidad del haz de prueba es entonces

$$I_p(l) = I_p(0)e^{\Gamma}. \quad (\text{B-47})$$

LITERATURA CITADA

- Bartsch, J. 1974. "Handbook of Mathematical Formulas". Academic Press. Primera edición. New York 323 pp.
- Belanger P.A., 1982. "Phase conjugation and optical resonators". Optical Eng. 21 (2): 266-269
- Cudney, R.S., R.M. Pierce and Jack Feinberg. 1988. "The transient detection microscope". Nature. 332 (6163): 424-426.
- Feinberg, J., and R. W. Hellwarth. 1980. "Phase-conjugating mirror continuous-wave gain". Optics Lett. 5 (12): 519-522.
- Fisher, R.A. 1983. "Optical Phase Conjugation". Academic Press. Primera edición. New York. 636 pp.
- Orlov, S., Mordechai Segev, and Amnon Yariv. 1993 "Conjugation fidelity and reflectivity in photorefractive double phase-conjugate mirrors". Optics Lett. 19 (8): 578-582.
- Pepper, D.M., Jack Feinberg and Nicolai V. Kukhtarev. 1990. "The photorefractive effect". Scientific American. 232 (4523): 321-326.
- Pepper, D.M., 1981. "Nonlinear optical phase conjugation". Optical Eng. 21(2): 156-167.
- Pochi, Y. 1993. "Introduction to photorefractive nonlinear optics". John Wiley and Sons, Inc. Primera edición. New York. 410 pp.
- White, J.O., Mark Cronin-Colomb, Baruch Fischer, and Amnon Yariv. 1982. "Coherent oscillation by self-induced gratings in the photorefractive crystal BaTiO₃". Appl. Phys. Lett. 40 (6): 450-451.
- Yariv, A. 1991. "Optical Electronics". Saunders College Publishing. Cuarta edición. Philadelphia. 713 pp.