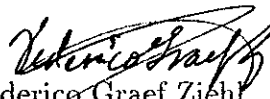


RESUMEN de la tesis de Luis Zavala Sansón, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en OCEANOGRAFÍA FÍSICA. Ensenada, Baja California, México. Septiembre de 1995.

INTERACCIÓN DE REMOLINOS OCEÁNICOS CON UNA PARED VERTICAL MERIDIONAL.

Resumen aprobado por:


Dr. Federico Graef Ziehl.
Director de tesis.

Se presenta un estudio numérico de la colisión de un remolino anticiclónico en forma de lente con una pared vertical meridional. Se utiliza un modelo de partículas en celda para resolver las ecuaciones primitivas de aguas someras para $1\frac{1}{2}$ capa en plano β . Este modelo no se había utilizado en problemas con fronteras ni en plano β . La condición de frontera se implementó sobre las partículas con la suposición de que rebotan de forma elástica con la pared. El modelo fué inicializado en todos los experimentos con la solución exacta en plano f (rodón) que es un remolino estacionario, frontal, circular de radio R y que rota como cuerpo sólido con frecuencia angular ω . En el plano β se mantiene aproximadamente la geometría circular y se mueve hacia el Oeste hasta chocar con la pared. 19

Cada experimento numérico fue caracterizado por los números adimensionales $\beta = \frac{\beta_0 R}{f_0}$ y $\varepsilon = \frac{\omega}{f_0}$ (Rossby), donde f_0 es el parámetro de Coriolis y β_0 su razón de cambio con la latitud, ambos evaluados en la latitud de referencia. Los resultados de los experimentos muestran que: a) en todos los remolinos se produce una pérdida de masa hacia el Sur proporcional a β y a ε , hasta que se disipan; b) inicialmente, los remolinos son deformados por efecto de la colisión (en proporción a β), pero un tiempo después recuperan su forma circular; c) cuando $\varepsilon > \beta$ existe una traslación meridional del remolino al Sur, pero cuando $\varepsilon < \beta$ el desplazamiento es inicialmente al Norte y posteriormente al Sur.

La pérdida de masa al Sur es atribuida al sentido de giro e intensidad del remolino, a la presencia de la pared y a la fuerza β debida a la variación del parámetro de Coriolis, la cual está dirigida siempre hacia el Sur. Los movimientos meridionales al Sur son producidos también por la fuerza β y la no linealidad del remolino; los desplazamientos al Norte se deben a la deformación del remolino al chocar y quizá también a la presencia de un efecto imagen mientras $\beta > \varepsilon$.

Conforme los remolinos pierden masa reajustan sus parámetros β y ε de modo que β disminuye pues el radio se reduce y ε aumenta por conservación de energía; esto significa que la tendencia es hacia $\varepsilon > \beta$, es decir, que el remolino emigre al Sur.

ABSTRACT of the Thesis of Luis Zavala Sansón, presented as partial requirement to obtain the MASTER IN SCIENCES grade in PHYSICAL OCEANOGRAPHY. Ensenada, Baja California, México. September 1995.

INTERACTION OF OCEANIC EDDIES WITH A VERTICAL MERIDIONAL WALL.

This is a numerical study about the collision of an anticyclonic lens-like eddy with a meridional vertical wall. A particle-in-cell model is used to solve the shallow water primitive equations for one and a half layer on a β -plane. This model has not been used with boundaries nor on the β plane. The boundary condition was implemented over the particles with the assumption that they rebound elastically from the wall. The model was initiated with the f -plane exact solution (rodon) which is a steady lens-like eddy of radius R rotating as a solid body with angular frequency ω . On the β -plane the circular shape is approximately preserved and it moves westward against the wall.

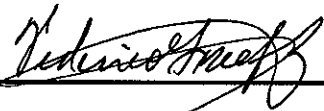
Each numerical experiment was identified with the non-dimensional numbers $\beta = \frac{\beta_0 R}{f_0}$ and $\varepsilon = \frac{\omega}{f_0}$ (Rossby) where f_0 and β_0 are the Coriolis parameter and its rate of change with latitude, respectively, both evaluated at the reference latitude. The results of the experiments show that: a) in all the cases there is a southward expulsion of mass proportional to β and ε , until the eddy dissipates; b) the eddy is deformed with the initial collision (proportional to β), but afterwards it recovers its circular shape; c) when $\varepsilon > \beta$ there is a meridional translation of the eddy to the south, but when $\varepsilon < \beta$ the movement is northward first and then southward.

The southward mass expulsion is attributed to the eddy sign and intensity, to the presence of the wall and to the β -force due to the variation of the Coriolis parameter which is always directed to the south. The meridional migrations are due to the β -force and the non-linearity of the eddy; the northward movements are due to the eddy's deformation and perhaps to an image effect as long as $\beta > \varepsilon$.

As the eddies lose mass there is a readjustment of β and ε such that β decreases because the radius becomes smaller and ε increases by energy conservation; this means that the parameters tend to $\varepsilon > \beta$, *i.e.* the eddy inexorably migrates southward.

TESIS DEFENDIDA POR: LUIS ZAVALA SANSON

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITE:



DR. FEDERICO GRAEF ZIEHL.- *Director del Comité*



DR. JOSE LUIS OCHOA DE LA TORRE.- *Miembro de Comité*



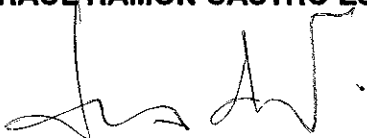
DR. JUAN MANUEL LOPEZ MARISCAL.- *Miembro del Comité*



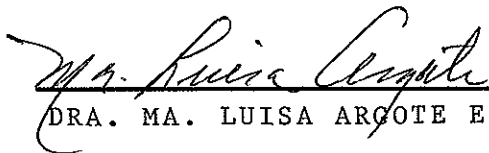
DR. EDGAR GERARDO PAVIA LOPEZ.- *Miembro del Comité*



DR. RAUL RAMON CASTRO ESCAMILLA.- *Miembro del Comité*



DR. ANTOINE BADAN DANGON.- *Jefe del Depto. de Oceanografía Física*



DRA. MA. LUISA ARGOTE ESPINOZA.- *Director de Estudios de Posgrado*

22 DE SEPTIEMBRE DE 1995

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA.

DIVISION DE OCEANOLOGÍA.
DEPARTAMENTO DE OCEANOGRAFÍA FÍSICA.

INTERACCIÓN DE REMOLINOS OCEÁNICOS CON UNA PARED VERTICAL
MERIDIONAL.

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS presenta:

LUIS ZAVALA SANSÓN.

Ensenada, Baja california, México. Septiembre de 1995.

DEDICATORIA

A Cathiuska, por la mejor parte de mi estancia en Ensenada.

A Sor Juana Inés, en el 300 aniversario de su muerte.

Al Ejército Zapatista de Liberación Nacional

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis Dr. Federico Graef Ziehl y a mi director no-oficial Dr. Edgar Gerardo Pavía López.

A los miembros del comité de tesis.

A los demás investigadores y amigos que se involucraron en el trabajo.

Al CICESE

Al CONACYT.

CONTENIDO

	<u>Página</u>
I INTRODUCCIÓN	1
II MODELO ANALÍTICO	6
II.1 Aproximación de aguas someras	6
II.2 Modelo de gravedad reducida	10
II.3 Integrales de movimiento	15
III MODELO NUMÉRICO Y CONDICIÓN DE FRONTERA	16
III.1 Método de partícula en celda (MPEC)	16
III.2 Inicialización del modelo	20
III.3 Condición de frontera	21
IV RESULTADOS	25
IV.1 Parámetros adimensionales	25
IV.2 Resultados cualitativos	27
IV.2.1 Serie 1	27
IV.2.2 Serie 2	30
IV.3 Resultados cuantitativos	35
IV.3.1 Expulsión de masa al Sur (<i>ems</i>)	35
IV.3.2 Desplazamiento meridional	37
V DISCUSIONES	43
V.1 Mecanismos físicos	43
V.1.1 Fuerza β	46
V.1.2 Efecto de la frontera	47
V.1.3 Deformación del remolino	50
V.1.4 Efectos no lineales	50
V.1.5 Expulsión de masa al Sur	51
V.2 Esquema general	52
V.3 Movimiento meridional	53
V.3.1 Argumentos de escala	53
V.3.2 Limitaciones	56
V.4 Comparación con otros trabajos	57
VI CONCLUSIONES	61

CONTENIDO (Continuación)

	<u>Página</u>
LITERATURA CITADA	62
APÉNDICES	65
A SOLUCIÓN EXACTA EN PLANO f Y MPEC EN PLANO β	65
A.1 Solución exacta en plano f : el rodón	65
A.2 Solución exacta en semiplano β	68
B VALIDEZ DEL REBOTE ELASTICO	72
B.1 Conservación de energía	72
B.2 Rebote elástico aleatorio	74
B.3 Variaciones al rebote elástico	76

LISTA DE FIGURAS

Figura		<u>Página</u>
1	Profundidad de la isoterma de 20° C que muestra el desprendimiento de remolinos anticiclónicos de la corriente del Lazo en el Golfo de México (Tomada de Elliott, 1982).	2
2	Modelos de remolinos homogéneos. a) Frontal o lente en 1 1/2 capa (este trabajo); b) barotrópicos; c) no frontales en 1 1/2 capa.	4
3	Aproximación de planos f y β . El centro del plano está a una latitud constante θ_0	9
4	Modelo del remolino frontal de 1 1/2 capa. Las densidades son constantes y la capa 2 se extiende al infinito.	11
5	Diagrama de flujo del MPEC (Tomado de Osuna-Cañedo, 1994). El superíndice señala la partícula k al tiempo n	18
6	Esquema de 9 puntos para la repartición de masa de las partículas a la malla y viceversa.	19
7	Rebote elástico. Cuando una partícula pasa la línea $x = B$ se reposiciona en $B + \delta x$ y se cambia el signo de la velocidad normal.	24
8	Experimentos de la serie 1 en el espacio de parámetros. Los marcados con un círculo emigran al Sur y con cruz primero al Norte y después al Sur.	29
9	Contornos de profundidad del caso 5, serie 1 ($\beta = 0.03, \varepsilon = 0.16$). La frontera está en 40 km.	31
10	Contornos de profundidad del caso 6, serie 1 ($\beta = 0.3, \varepsilon = 0.16$) La frontera está en 40 km.	32
11	Experimentos de la serie 2 en el espacio de parámetros. Los marcados con un círculo emigran al Sur y con cruz primero al Norte y después al Sur.	34
12	Porcentaje de masa perdida en los experimentos de la serie 2 después de 150 días del inicio del choque.	36
13	Porcentaje de masa perdida vs. tiempo para los casos a) 7 y 10 b) 11 y 12 de la serie 2. El choque inicia en $T=0$ (en $T=150$ se tienen los valores de la fig. 12).	38
14	Posición meridional del núcleo del remolino vs. tiempo para los casos 6, 7, 12 y 14 de la serie 2. El choque se produce en $T=0$	40
15	Estados inicial y final en el espacio de parámetros de la serie 2 después de 150 días del choque.	41
16	Trayectorias en el espacio de parámetros de los casos 10 y 12 de la serie 2 después de 180 días del inicio del choque.	42
17	Signos de las fuerzas que siente cada partícula según su posición en el remolino (ver los cuadrantes en la fig. 18).	44

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		<u>Página</u>
18	a) Direcciones de las fuerzas producidas por los términos β . b) Influencia de los términos no lineales.	45
19	Posiciones de 1/4 de las partículas del caso 6, serie 1 ($\beta = 0.3, \varepsilon = 0.16$).	48
20	Posiciones de 1/4 de las partículas del caso 5, serie 1 ($\beta = 0.03, \varepsilon = 0.16$).	49
21	Esquema general de los mecanismos propuestos en este trabajo.	54
22	Aproximación de la ecuación de movimiento en x en los lados Oeste y Este del remolino. La expulsión de masa al Sur no se toma en cuenta.	55
23	Mecanismos físicos en la interacción remolino-pared propuestos por Shi y Nof (1994).	60
24	Rodón elíptico en a) plano f^* , donde es estacionario y el fluido rota con frecuencia Ω^* y b) plano f, donde la elipse gira con frecuencia Ω y el fluido con $\Omega + \Omega^*$	66
25	Contornos de profundidad de la solución numérica de un remolino en el plano β modificado comparados con el contorno $h=0$ de la solución analítica.	71
26	Conservación de energía total en el tiempo del caso 11 de la serie 1 ($\beta=0.02, \varepsilon=0.109$). El choque se produce en el día 20. Todas las energías están normalizadas con su valor teórico.	73
27	Rebote elástico aleatorio (cualitativamente arroja los mismos resultados que el rebote elástico).	75

LISTA DE TABLAS

Tabla	<u>Página</u>
I Experimentos de la serie 1.	28
II Experimentos de la serie 2.	33

INTERACCIÓN DE REMOLINOS OCEÁNICOS CON UNA PARED VERTICAL MERIDIONAL

I INTRODUCCIÓN

Tema de la tesis. El presente trabajo trata sobre la dinámica de la interacción de remolinos oceánicos de mesoescala con una frontera vertical meridional, analizada numérica y analíticamente. Entre los fenómenos de esta escala (longitudes de 10^5 m y tiempos de semanas a meses) el estudio de remolinos reviste especial importancia en el océano debido a sus propiedades dinámicas (transporte de masa, momento lineal y angular) y termodinámicas (transporte de calor y salinidad) (Elliott, 1982). Un mecanismo por el cual se realiza este transporte a través de grandes distancias es la propagación de los remolinos al Oeste por efecto de la variación latitudinal del parámetro de Coriolis (efecto β); por lo tanto, en algún momento, en algún lugar, chocarán con una frontera. El objetivo en este trabajo es analizar dicha interacción simplificando el problema mediante modelos analíticos y numéricos sencillos para entender los mecanismos básicos asociados.

Motivación. La razón por la que se estudió este problema es la presencia de anticiclones en el Golfo de México que interaccionan con la plataforma continental frente a las costas de Tamaulipas. A nivel observacional es bien conocido el origen de los remolinos: ocasionalmente, la corriente del Lazo produce un giro anticiclónico al introducirse al Golfo por el estrecho de Yucatán y salir por el estrecho de Florida (Ichiye, 1962; Elliott, 1982; ver figura 1); la frecuencia con la que se desprenden varía desde 6 hasta 17 meses (Vukovich, 1991) y no es bien comprendida aún. Una vez aislado, con un radio de entre 100 y 200 km (Vukovich *et al.*, 1979), comienza su propagación al Oeste con una rapidez de 2 a 3 km/día aproximadamente (Elliott, 1982) hasta llegar a la plataforma continental mexicana alrededor de los 23° Norte, 95.5° Oeste (Kirwan *et al.*, 1988).

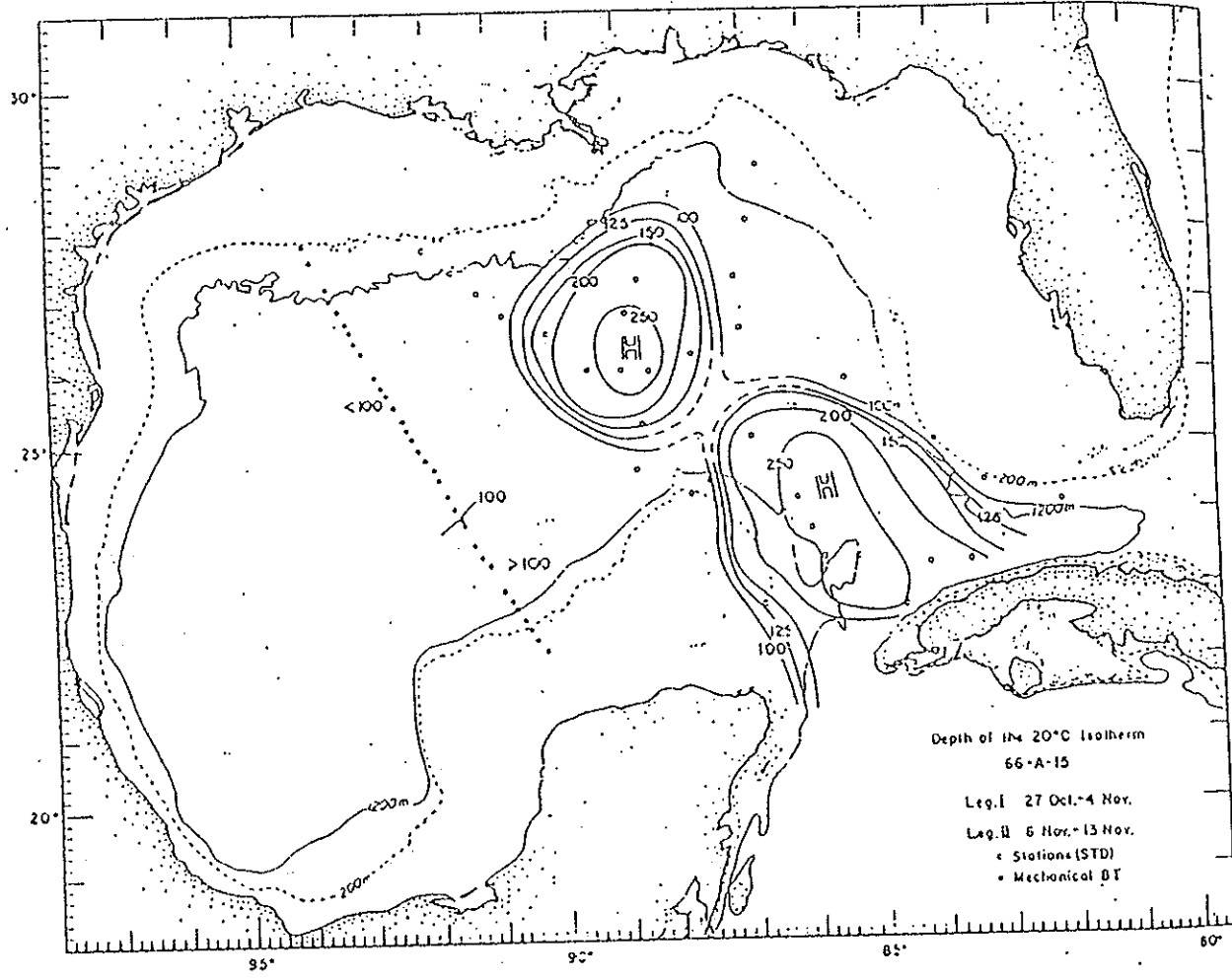


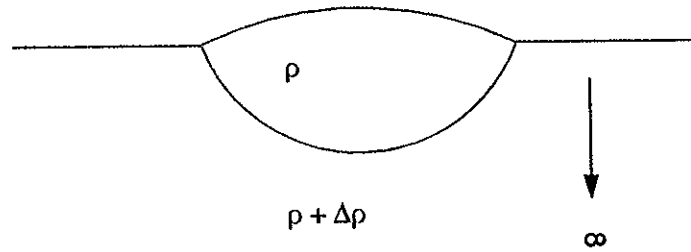
Figura 1: Profundidad de la isoterma de 20° C que muestra el desprendimiento de remolinos anticiclónicos de la corriente del Lazo en el Golfo de México (Tomada de Elliott, 1982).

Las observaciones de la interacción del remolino con la plataforma son recientes, incompletas y, por lo mismo, contradictorias. Kirwan *et al.* (1988) identifica dos remolinos en 1980 y 1982 mediante boyas rastreadas por satélite y reporta que, después de un breve período de ajuste, ambos giros emigran lentamente al Norte. Por otro lado, Vukovich (1991) describe el encuentro de un remolino con la plataforma entre 1985 y 1986, el cual se ajusta a una geometría elíptica, con semieje mayor orientado de Norte a Sur, que comienza a girar en sentido de las manecillas del reloj para después emigrar al Sur y disiparse.

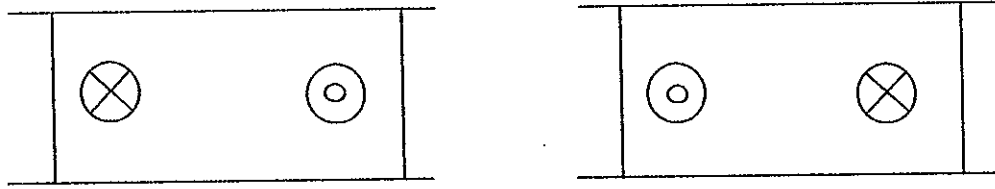
Método empleado. Evidentemente, la complejidad de los procesos que afectan al remolino (efectos topográficos, interacción con corrientes u otros remolinos, etc.) no permite predecir un comportamiento con exactitud. El interés por simplificar el problema parte de reducir esta complejidad con la intención de retener los elementos principales que influyen en la evolución del choque. Para ello, el tipo de remolinos que aquí se modelan son cuerpos de agua con densidad constante menor que el resto del océano (que se supone de profundidad infinita y en reposo), de forma circular y con vorticidad negativa (anticiclónicos); los perfiles de profundidad se consideran parabólicos y frontales, es decir, en forma de lente (ver figura 2a).

El modelo analítico consiste en las ecuaciones primitivas de aguas someras con $1\frac{1}{2}$ capa en plano β , las cuales se resuelven con un modelo numérico novedoso en oceanografía que simula al remolino con un cierto número de partículas; este método ha sido utilizado con excelentes resultados en el modelado de remolinos frontales en plano f (Pavía y Cushman-Roisin, 1988, 1990; Pavía 1992, Pavía y López-Mariscal, 1994) y en esta tesis se amplía su uso al plano β con una frontera. Con esta conceptualización se conserva la dinámica básica: los gradientes de presión, la fuerza de Coriolis y su variación latitudinal; la otra simplificación es el considerar la frontera como una pared vertical meridional, por lo que el fondo no se toma en cuenta. El uso del modelo de partículas se debe a que, a diferencia de los métodos eulerianos, reproduce de forma

a)



b)



Anticiclónicos

Ciclónicos

c)

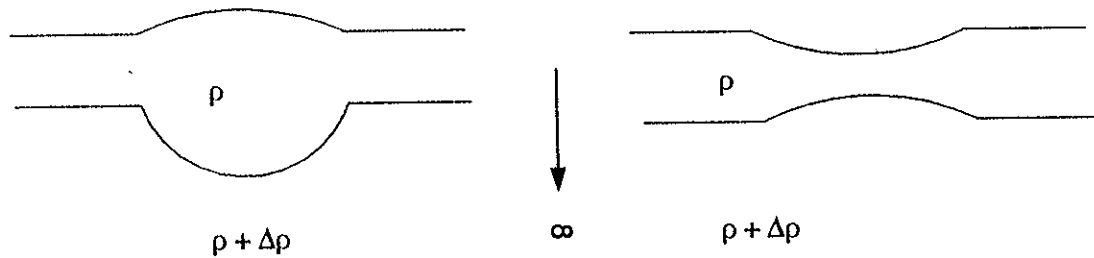


Figura 2: Modelos de remolinos homogéneos. a) Frontal o lente en 1 1/2 capa (este trabajo); b) barotrópicos; c) no frontales en 1 1/2 capa.

eficiente las características frontales de los remolinos. Este tipo de vórtices se ha observado en la Corriente del Golfo en el Atlántico (Joyce, 1991) y en el Golfo de México como ya se mencionó.

Antecedentes. Existen varios estudios teóricos y numéricos al respecto. Sommerfeld (1950) analizó brevemente el comportamiento de vórtices puntuales adyacentes a una pared argumentando un efecto imagen producido por la presencia de la frontera que empuja a los anticiclónicos al Norte y los ciclónicos al Sur; en este trabajo se encontró que tal efecto no es el dominante. Nof (1988a,b) estudió el comportamiento de remolinos anticiclónicos y ciclónicos barotrópicos y en $1\frac{1}{2}$ capa (fig. 2b, 2c) encontrando que la pared induce una expulsión de masa al Sur y al Norte, respectivamente; dicho resultado se comprobó en el presente trabajo y fue de suma importancia en la evolución del remolino. Shi y Nof (1994) realizaron varios experimentos numéricos con los modelos de $1\frac{1}{2}$ capa, sin embargo, sus resultados en el caso de remolinos frontales es incompleto (sólo presentan un caso) y no es concluyente. También se han modelado casos más complicados como el de Smith (1986), quien realizó simulaciones de 2 capas con topografía pero impuso la condición de no deslizamiento en la frontera ($\bar{u} = 0$), mientras que aquí se simula la condición de libre deslizamiento ($u_{normal} = 0$).

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se expone el modelo analítico y las integrales de movimiento asociadas. El capítulo 3 describe el modelo de partículas y discute la implementación numérica de la condición de frontera. En el capítulo 4 se muestran los resultados de los experimentos numéricos. En el capítulo 5 se discuten los resultados encontrados, se proponen mecanismos físicos para explicarlos y se comparan con otros trabajos. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones. El apéndice A contiene la solución en plano f con la cual se inicializaron los experimentos numéricos y las pruebas efectuadas para evaluar la confiabilidad del método de partículas en el plano β . En el apéndice B se presentan las pruebas realizadas para analizar la confiabilidad y efectividad de la condición de frontera.

II MODELO ANALÍTICO

Entre los modelos más importantes en mecánica de fluidos geofísicos está el de aguas someras debido a que diversos fenómenos asociados a la rotación de la tierra se pueden modelar con esta aproximación. En el presente trabajo, se utilizó una de sus versiones más sencillas: las ecuaciones primitivas de aguas someras para $1\frac{1}{2}$ capa, en plano β .

En la sección II.1 se presenta el modelo de aguas someras para una capa partiendo de las ecuaciones de gobierno escritas en forma general; también se muestran las aproximaciones de plano f y β . En la sección II.2 se deduce el modelo de gravedad reducida ($1\frac{1}{2}$ capa) en plano β ; esta derivación se incluye debido a que es poco mencionada en la literatura. En la última sección se muestran las integrales de movimiento de este modelo.

La suposición básica de la que se parte es que:

i) El fluido es incompresible, por lo que la ecuación de continuidad resulta $\nabla \cdot \bar{u} = 0$. Además, no hay viscosidad.

II.1 Aproximación de aguas someras

Consiste en suponer que:

ii) Las escalas de longitud horizontales (L) son mucho mayores que las verticales (D), esto es, $D \ll L$. De la ecuación de continuidad se encuentra que las velocidades horizontales (U) son mucho mayores que la vertical (W):

$$\begin{aligned} \frac{U}{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{W}{D} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \Rightarrow W &\sim O\left(\frac{D}{L}U\right) \end{aligned}$$

$$W \ll U.$$

donde (x, y, z) y (u, v, w) son dimensionales.

Con la suposición $i)$, las ecuaciones de movimiento y continuidad de un fluido en un marco de referencia en rotación $\bar{\Omega}$ son:

$$\rho \left(\frac{D\bar{u}}{Dt} + 2\bar{\Omega} \times \bar{u} \right) = \nabla(p + \Phi)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0,$$

donde Φ es el potencial gravitacional.

Si estas ecuaciones se escriben en coordenadas esféricas (φ, θ, z) con φ la longitud, θ la latitud y $z = r - R_T$ (R_T el radio de la tierra) y se expanden con respecto a $\delta = \frac{D}{L}$, los términos de orden cero resultan (Müller, 1995):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{uv}{R_T} \tan \theta - fv \\ = & -\frac{1}{\rho R_T \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R_T \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{R_T} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^2}{R_T} \tan \theta + fu \\ = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g$$

$$\frac{1}{R_T \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_T \cos \theta} \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

donde (u, v, w) son las componentes de la velocidad en (φ, θ, z) , respectivamente. Nótese que con esta aproximación se encuentra que las aceleraciones verticales son despreciables respecto a los gradientes de presión en z y la gravedad ($|\frac{Dw}{Dt}| \ll |\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g|$)

por lo que se puede considerar al campo de presión como hidrostático (Pedlosky, 1987). Otra consecuencia es que los campos de velocidad son independientes de la vertical ($\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$). El parámetro de Coriolis depende sólo de la latitud ($f = 2\Omega \sin\theta$).

Para hacer la aproximación en un plano (x, y) con x como longitud y y como latitud, el sistema (1) se expande respecto a una latitud de referencia θ_0 (ver figura 3). Manteniendo los términos de primer orden (Müller, 1995):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \left(1 + \frac{y}{R_T} \tan \theta_0\right) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{uv}{R_T} \tan \theta_0 - f_0 v - \beta_0 y v \\ = & -\frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{y}{R_T} \tan \theta_0\right) \frac{\partial p}{\partial x} \\ \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u \left(1 + \frac{y}{R_T} \tan \theta_0\right) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R_T} \tan \theta_0 + f_0 u + \beta_0 y u \\ = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \\ & 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(1 + \frac{y}{R_T} \tan \theta_0\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{R_T} \tan \theta_0 + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Los números f_0 y β_0 son los dos primeros términos de la expansión del parámetro de Coriolis:

$$\begin{aligned} f &= f(\theta_0) + \frac{df(\theta_0)}{d\theta} (\theta - \theta_0) + \dots \\ &= 2\Omega \sin(\theta_0) + 2\Omega \cos(\theta_0) (\theta - \theta_0) + \dots \end{aligned}$$

Pero $\theta - \theta_0 = \frac{y}{R_T}$, por lo tanto

$$f = f_0 + \beta_0 y + \dots,$$

con

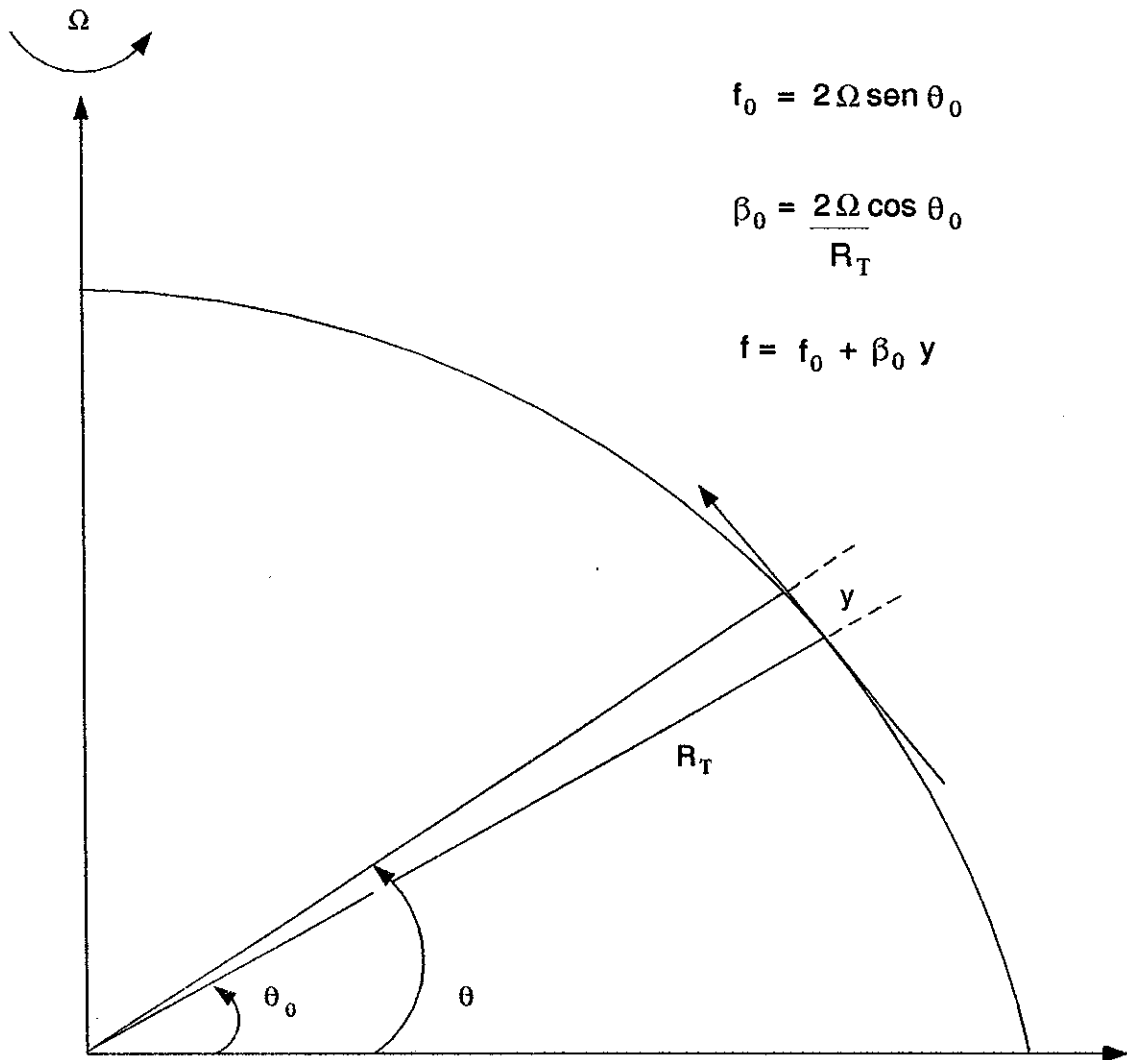


Figura 3: Aproximación de planos f y β . El centro del plano está a una latitud constante θ_0 .

$$f_0 = 2\Omega \text{sen}(\theta_0) \quad (3)$$

$$\beta_0 = \frac{2\Omega}{R_T} \cos \theta_0. \quad (4)$$

Generalmente, los términos proporcionales a $\tan \theta_0$ son despreciados¹, por lo que las ecuaciones de aguas someras en plano β para una capa homogénea son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - (f_0 + \beta_0 y) v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (f_0 + \beta_0 y) u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

La aproximación de plano f consiste en considerar sólo el primer término f_0 lo cual es correcto para escalas espaciales del orden de 10^3 a 10^4 m, mientras que el plano β , para escalas de 10^5 a 10^6 m, incluye el término lineal en y .

II.2 Modelo de gravedad reducida

En este modelo se considera:

iii) Una capa homogénea de densidad ρ_1 , activa ($\bar{u}_1(u, v, w) \neq 0$) sobre otra de mayor densidad ρ_2 en reposo ($\bar{u}_2 = 0$) (ver figura 4).

Utilizando (5), las ecuaciones de gobierno de las 2 capas en un sistema coordenado rotando con rapidez angular Ω , con las direcciones x (Este-Oeste), y (Norte-Sur) y z (profundidad) son las siguientes:

¹Los términos $-\frac{1}{\rho} \frac{y}{R_T} \tan \theta_0 \frac{\partial p}{\partial x}$ de la primera ecuación y $\frac{y}{R_T} \tan \theta_0 \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{v}{R_T} \tan \theta_0$ de la cuarta son del mismo orden que los términos $-\beta_0 y v$ y $\beta_0 y u$ por lo que se deberían tomar en cuenta en la aproximación de plano β . Sin embargo, comúnmente se desprecian.

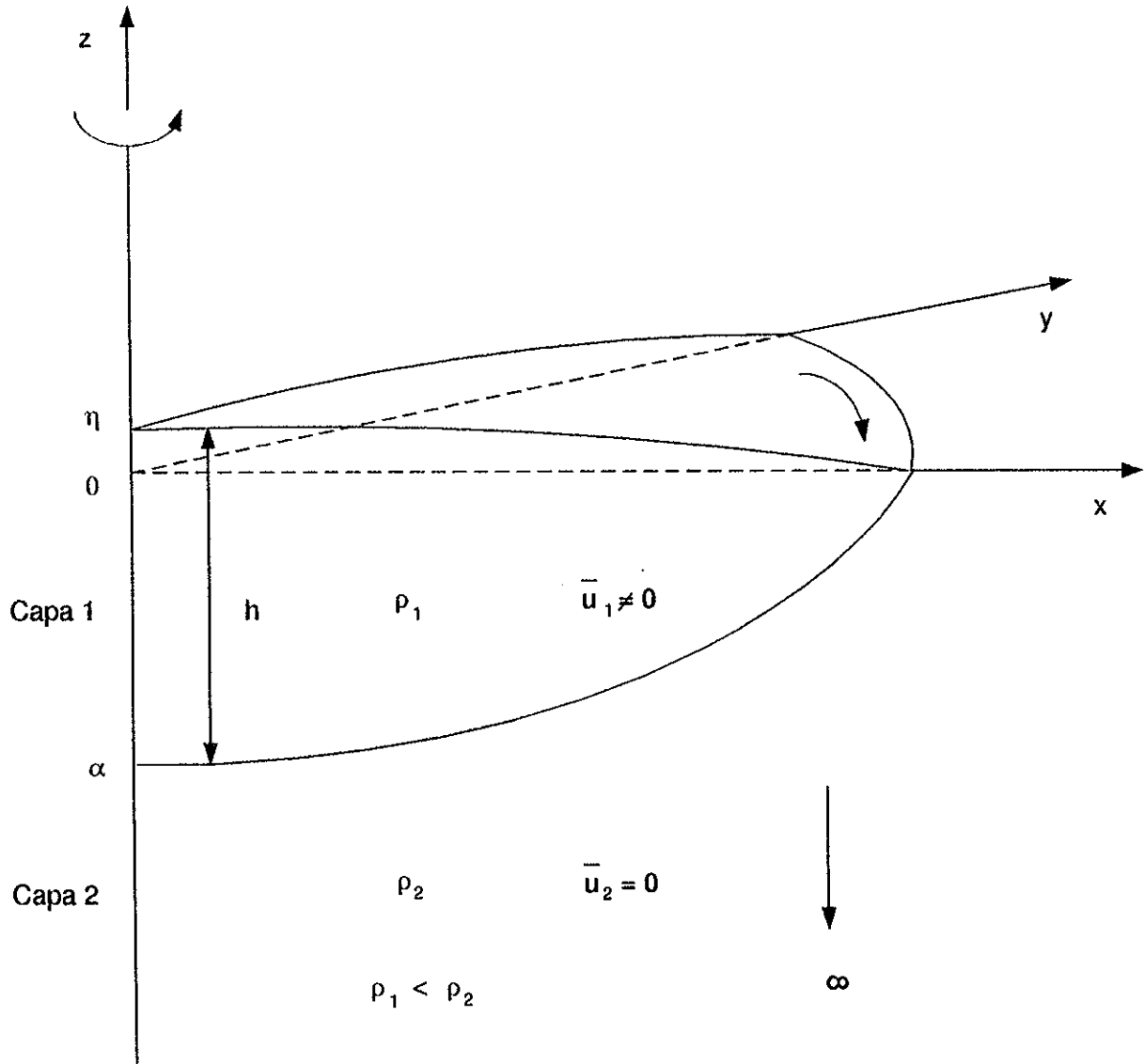


Figura 4: Modelo del remolino frontal de 1 1/2 capa. Las densidades son constantes y la capa 2 se extiende al infinito.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - (f_0 + \beta_0 y) v = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (f_0 + \beta_0 y) u = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (7)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} - g \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$0 = \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad (10)$$

$$0 = \frac{\partial p_2}{\partial y} \quad (11)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} - g. \quad (12)$$

La ecuación de continuidad de la capa 2 se cumple trivialmente por estar en reposo.

De (8) queda el balance hidrostático

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\rho_1 g.$$

La presión en cualquier punto de esta capa es

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^0 dp &= -\rho_1 g \int_z^\eta dz \\ -p_1 &= -\rho_1 g (\eta - z) \\ \implies p_1 &= \rho_1 g (\eta - z), \end{aligned} \quad (13)$$

donde η es la elevación de la superficie y se considera $p_1(\eta) = 0$. El gradiente de presión en x es

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \rho_1 g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (14)$$

De la misma forma en la segunda capa (donde α es la profundidad de la interfase)

$$\begin{aligned} \int_{p_2}^0 dp &= -\rho_2 g \int_z^\alpha dz - \rho_1 g \int_\alpha^\eta dz \\ -p_2 &= -\rho_2 g (\alpha - z) - \rho_1 g (\eta - \alpha) \\ \implies p_2 &= (\rho_2 - \rho_1) g \alpha + \rho_1 g \eta - \rho_2 g z. \end{aligned} \quad (15)$$

El gradiente en x de esta capa es 0 (por la ec. (10))

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial x} &= (\rho_2 - \rho_1) g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \rho_1 g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= 0 \\ \implies \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (16)$$

Sea $h = \eta - \alpha$ el espesor de la capa activa, entonces

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x};$$

utilizando (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial x} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \implies \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial h}{\partial x}; \end{aligned}$$

sustituyendo en (14)

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = g' \frac{\partial h}{\partial x}$$

con $g' = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right) g$ conocida como gravedad reducida. Análogamente, en la dirección y

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} = g' \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Al sustituir estas expresiones en (6) y (7) se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (18)$$

Por otro lado, dado que u y v son independientes de la profundidad, de la ecuación de continuidad (9) se tiene la velocidad vertical

$$w(x, y, z, t) = -z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \bar{w}(x, y, t). \quad (19)$$

La función \bar{w} se evalúa de las condiciones cinemáticas en la superficie y en la interfase de las capas

$$w(x, y, \eta, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (20)$$

$$w(x, y, \alpha, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (19) evaluada en α se obtiene \bar{w} :

$$\bar{w} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Nuevamente, sustituyendo (20) y \bar{w} en (19) evaluada en η

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

rearrreglando para utilizar la definición de $h = \eta - \alpha$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (22)$$

Las ecuaciones primitivas (EP) (17), (18) y (22) son un sistema cerrado de 3 variables independientes (x, y, t) y 3 dependientes (u, v, h) y constituyen el modelo a resolver en este trabajo.

II.3 Integrales de movimiento

El modelo de aguas someras en plano β tiene asociadas una familia infinita de constantes de movimiento (Young, 1986; Ripa, 1992). En primer lugar, debido a que no se consideran efectos de fricción ni viscosos, no hay fuentes ni sumideros, la energía mecánica total integrada en todo el dominio S se conserva

$$E = \frac{1}{2} \int_S [g'h^2 + h(u^2 + v^2)] dS. \quad (23)$$

Por otro lado, cada partícula de fluido conserva vorticidad potencial

$$q = \frac{f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}{h}.$$

También son integrales de movimiento las expresiones del tipo

$$J = \int_S hF(q)dS,$$

donde $F(q)$ es una función arbitraria de la vorticidad potencial. En particular, $F = 1$ implica la conservación de masa

$$M = \int_S hdS.$$

Para probar la validez de la condición de frontera en el modelo numérico, se evaluó la energía total (23) antes y después del choque del remolino para verificar su conservación (ver capítulo III y apéndice B).

III MODELO NUMÉRICO Y CONDICIÓN DE FRONTERA

III.1 Método de partícula en celda (MPEC)

Las EP se pueden resolver numéricamente de diversas maneras. Una de las más comunes es discretizarlas y resolverlas por diferencias finitas en una malla euleriana que cubra el dominio físico. Sin embargo, en este trabajo se utilizó un método de partículas novedoso en oceanografía. La ventaja del MPEC es su capacidad para resolver un remolino en forma de lente. Esta técnica ha sido utilizada recientemente para simular remolinos anticiclónicos en el plano f con excelentes resultados (Pavía y Cushman-Roisin, 1988, 1990; Pavía, 1992; Pavía y López-Mariscal, 1994).

En esta tesis se extiende el MPEC al plano β y con una pared. En los apéndices A y B se muestran algunas pruebas realizadas para evaluar la confiabilidad del modelo en este plano y de la condición de frontera utilizada.

Este método simula de manera efectiva $1\frac{1}{2}$ capas; la capa activa es formada por una serie de N partículas cada una de ellas con un volumen constante durante todo el tiempo de integración, la capa inactiva corresponde a las regiones con ausencia de partículas. Esencialmente, el MPEC resuelve, a cada paso de tiempo y para cada partícula, el sistema de ecuaciones

$$\frac{Dx_i}{Dt} = u_i$$

$$\frac{Dy_i}{Dt} = v_i$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = (f_0 + \beta_0 y_i)v_i - g' \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -(f_0 + \beta_0 y_i)u_i - g' \frac{\partial h}{\partial y},$$

con $i = 1, \dots, N$; (x_i, y_i) y (u_i, v_i) son la posición y la velocidad de la partícula *iésima*. Debido a que cada una de ellas mantiene su volumen constante la ecuación de continuidad es satisfecha implícitamente. Por lo anterior, se tiene control todo el tiempo sobre las posiciones de las partículas y sus velocidades; de ellas, se puede obtener la fuerza de Coriolis pero no los gradientes de presión. Esta segunda fuerza tiene que ser evaluada extrapolando la contribución de las partículas al campo de h en una malla euleriana para derivarlo mediante diferencias finitas y después interpolar la fuerza resultante de nuevo hacia las partículas (ver figura 5).

La extrapolación-interpolación se realiza mediante un esquema de 9 puntos (Pavía y Cushman-Roisin, 1988). Considérese la figura 6 donde se observa un subconjunto del dominio computacional con una malla cuadrada de luz $(\Delta x, \Delta y)$. Si una partícula se encuentra en la posición (x, y) , se reparte su volumen V a los 9 vértices de la malla más cercanos. Esta repartición se efectúa de la siguiente manera:

a) Sea el cuadrado C de lados Δx y Δy (línea discontinua) con centro en la posición de la partícula (x, y) .

b) Se divide el volumen en 4 partes proporcionales a cada una de las 4 subáreas en que queda dividido C .

c) Cada uno de los 4 cuadrados de la malla de lados Δx y Δy que rodean a C contienen una proporción de h (*i.e.* una subárea de C); ésta se reparte en los 4 vértices del cuadrado correspondiente. Así, el vértice que queda en el centro recibe una contribución de las 4 subáreas (que siempre es igual a un cuarto del total), los 4 centrales reciben la de 2, y las esquinas reciben sólo la de una subárea. Evidentemente, el vértice central siempre recibe más contribución que los demás puesto que es el punto de la malla más cercano a la partícula.

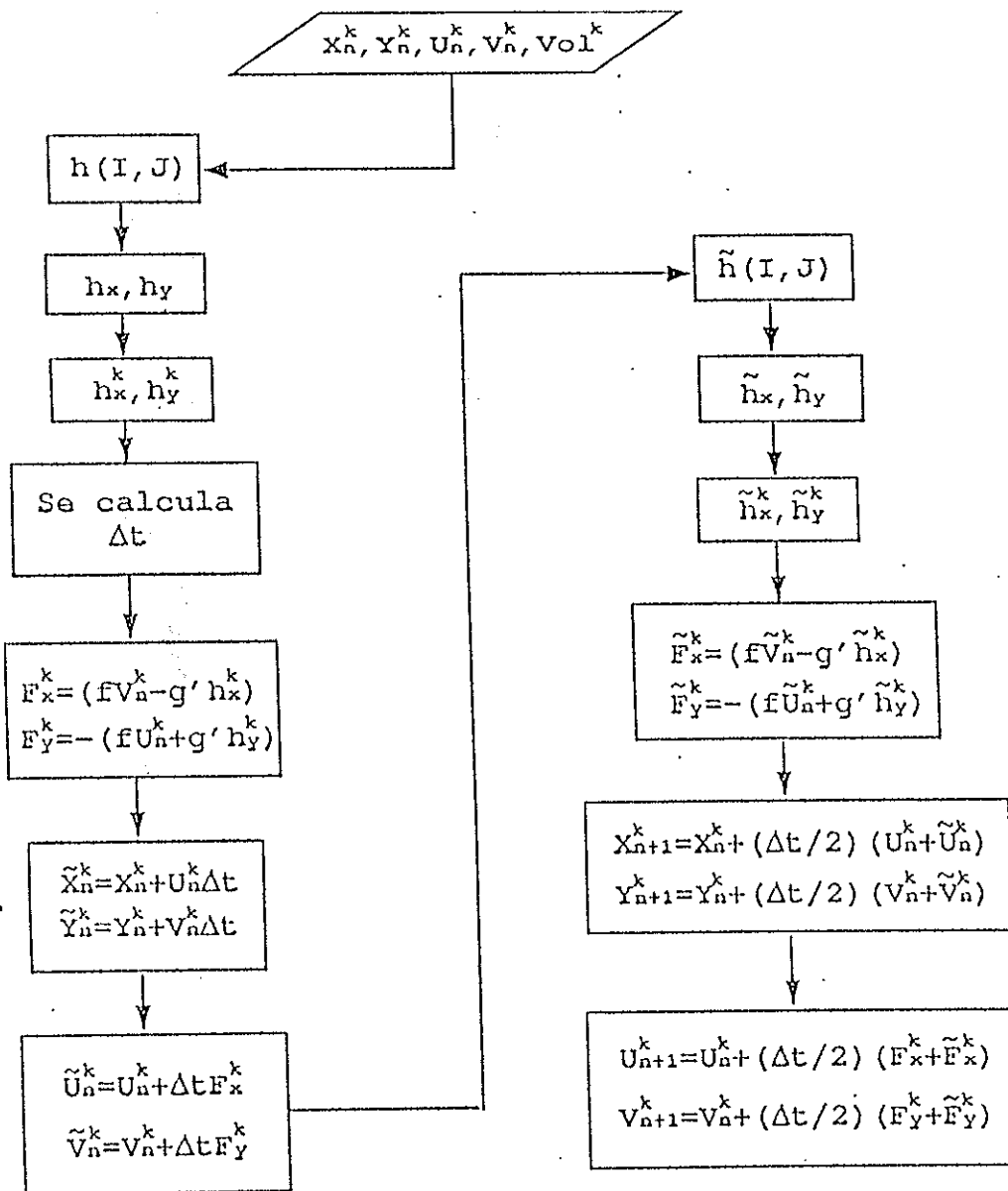


Figura 5: Diagrama de flujo del MPEC (Tomado de Osuna-Cañedo, 1994). El superíndice señala la partícula k al tiempo n .

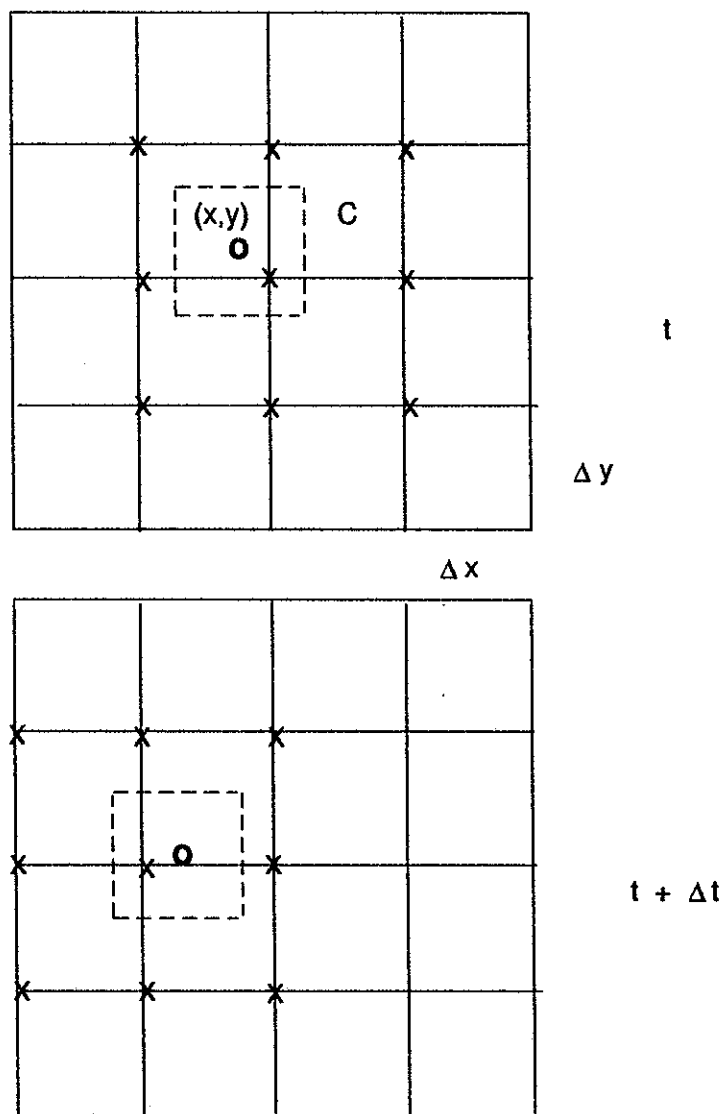


Figura 6: Esquema de 9 puntos para la repartición de masa de las partículas a la malla y viceversa.

Este procedimiento se efectúa para cada partícula de manera que un vértice puede recibir el peso de varias de ellas.

Una vez que se distribuye el campo de profundidad, se pueden calcular sus gradientes por medio de diferencias finitas centradas, excepto en el frente donde se calculan por diferencias hacia un lado. Después se procede a la inversa: los gradientes de h en la malla se interpolan a las partículas por el mismo esquema para obtener la fuerza debida a diferencias de presión sobre cada partícula.

El MPEC es un esquema de predicción-corrección de 2do orden por lo que todo el procedimiento descrito se ejecuta dos veces. Durante la etapa de predicción se calcula el paso de tiempo, de tal modo que el tránsito de la partícula con mayor rapidez (U_{\max}) a través de un cuadro de la malla, ocupe 10 pasos de tiempo ($\Delta t = 0.1 \frac{\Delta x}{U_{\max}}$). El código numérico está escrito en lenguaje FORTRAN 77.

III.2 Inicialización del modelo

Todos los experimentos numéricos se inicializaron con una solución exacta de las EP en plano f : un remolino frontal circular que gira anticiclónicamente como cuerpo sólido y con perfil de profundidad parabólico. Dicho remolino es un caso particular de los denominados rodones, los cuales pueden ser elípticos (Cushman-Roisin *et al.*, 1985; ver Apéndice A). Los campos de velocidad y profundidad son

$$h = H \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) \quad (24)$$

$$u = \omega y \quad (25)$$

$$v = -\omega x, \quad (26)$$

donde R es el radio, ω es la rapidez angular con que giran las partículas y H es la

profundidad máxima. En el código numérico se prescriben ω y R , mientras que H está dada por

$$H = \frac{R^2}{2g'}\omega(f_0 - \omega), \quad (27)$$

con $\omega < f_0$.

Una vez que la corrida inicia transcurre un pequeño período de ajuste (5 a 20 días) de la solución exacta de plano f a la solución numérica de plano β , por lo que la posición inicial de los remolinos antes de chocar con la frontera se escogió lo suficientemente alejada de ella.

El número de partículas utilizado en todos los casos que se presentan fue de 10981. Una regla de origen empírico es que para tener una buena resolución se deben tener al menos de 10 a 15 partículas por celda (Pavía y Cushman-Roisin, 1988).

El dominio físico de los experimentos fue variable aunque en la mayoría se utilizó un océano cuadrado de 990X990 km² con una luz de malla de 10 km. Esta resolución se considera buena debido a que es alrededor de tres veces menor al radio de deformación de la mayoría de los casos estudiados, es decir resuelve con buena aproximación escalas donde la rotación de la tierra es importante. Se probó doblar la resolución poniendo la luz de la malla de 5 km y aumentando 4 veces el número de partículas y se encontró poca diferencia en los resultados, pero mucho mayor tiempo de cómputo, por lo que se optó proseguir con la original.

III.3 Condición de frontera

El método de partícula en celda (MPEC) es semilagrangiano, pues obtiene soluciones aproximadas de las ecuaciones de movimiento calculando la posición y velocidad de un número determinado de partículas, pero construye los gradientes de presión en una malla euleriana según la distribución de las mismas, es decir, en puntos fijos del dominio. Por lo tanto, uno de los objetivos de este trabajo fue el de implementar la

condición de frontera adecuada sobre las partículas en presencia de una pared.

En un modelo puramente euleriano, sin fricción, dicha condición es la de no penetración y libre deslizamiento, es decir, la velocidad normal a la frontera debe ser igual a cero en ella. Con el MPEC no se puede implementar la velocidad en puntos fijos, puesto que las velocidades que se resuelven son las de las partículas y en la malla sólo se tienen los gradientes de presión.

Rebote elástico. Físicamente, la existencia de una frontera sólida impone la restricción al fluido a no penetrarla. Dado que en el MPEC se tiene control sobre las partículas, la condición de frontera debe evitar el paso de las mismas a través de una línea especificada.

Una de las maneras más sencillas de implementar dicha restricción con este método es hacer rebotar elásticamente a las partículas en la frontera sólida, como se explica a continuación (ver figura 7): Sea B la posición zonal de la frontera (la cual se escogió, de forma arbitraria, como una línea meridional de la malla donde se calculan los gradientes de h), sea la partícula i con posición zonal x_i tal que $x_i(t) > B$, y al siguiente paso de tiempo $x_i(t + \Delta t) < B$, es decir, atraviesa la frontera una distancia δx . Si la partícula rebota elásticamente su posición es, en términos de $x_i(t + \Delta t)$:

$$x_i^{reb}(t + \Delta t) = 2B - x_i(t + \Delta t).$$

Además, el signo de la velocidad normal a la frontera cambia de signo

$$u_i^{reb}(t + \Delta t) = -u_i(t + \Delta t).$$

La coordenada y la velocidad meridionales no sufren alteración alguna:

$$y_i^{reb}(t + \Delta t) = y_i(t + \Delta t), v_i^{reb}(t + \Delta t) = v_i(t + \Delta t).$$

Los cambios a x_i^{reb} y u_i^{reb} se pueden añadir fácilmente en el esquema numérico con un condicionante cada vez que se calcula la nueva posición y velocidad de las partículas antes de comenzar el siguiente paso de tiempo. Dicha señal es de la siguiente forma:

```

if  $x_i(t + \Delta t) < B$  then
 $x_i(t + \Delta t) = 2B - x_i(t + \Delta t)$ 
 $u_i(t + \Delta t) = -u_i(t + \Delta t)$ 
end if.

```

La aparente arbitrariedad de la condición descrita² exigió que se buscaran criterios confiables para mostrar su confiabilidad. Desafortunadamente medir el campo de u a lo largo de la frontera para verificar que sea cero no tiene sentido en el MPEC; esto se debe a que los campos de velocidad en la malla se pueden obtener de las partículas a través del esquema de 9 puntos; esta extrapolación es relevante en el campo de profundidad h (ya que a partir de él se calculan los gradientes de presión) pero es irrelevante para los campos de velocidad puesto que éstos no se utilizan en ningún cálculo posterior. Sin embargo, en ausencia de fronteras la extrapolación de los campos de velocidad es correcta.

Por lo anterior, se escogieron otras 3 formas de evaluar la condición de frontera: conservación de energía, rebote elástico en direcciones aleatorias y variaciones al rebote elástico, las cuales se describen en el apéndice B.

²La frontera occidental se escogió en $B = 50$ km para evitar que las partículas se salgan del dominio computacional, pero por el esquema de extrapolación de 9 puntos, el modelo calcula h hasta $B - \Delta x$, *i.e.* la frontera se considera en 40 km.

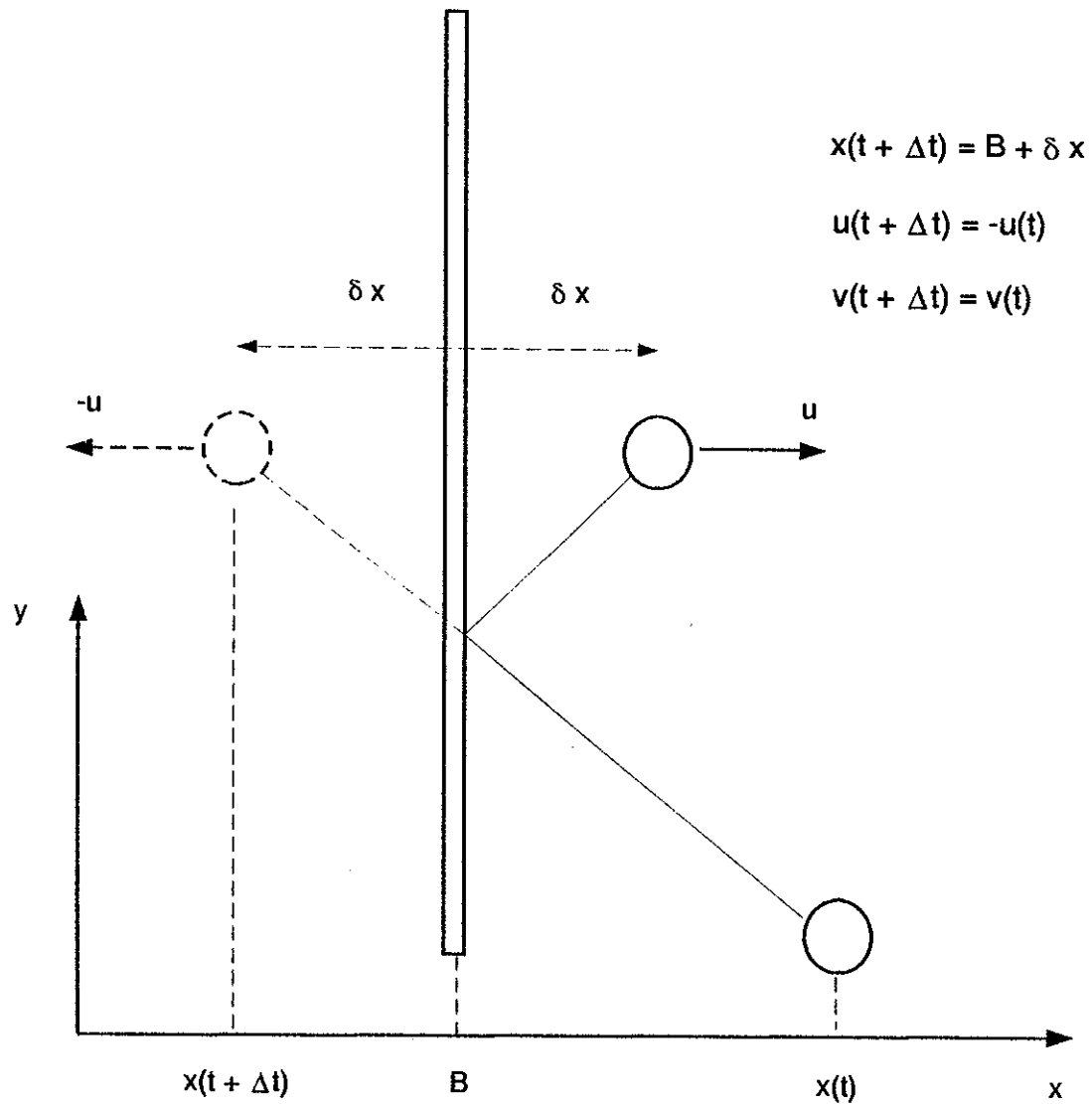


Figura 7: Rebote elástico. Cuando una partícula pasa la línea $x = B$ se repositiona en $B + \delta x$ y se cambia el signo de la velocidad normal.

IV RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de la interacción del remolino con la pared encontrados en los experimentos numéricos. Cada caso analizado se caracterizó por los valores de cuatro parámetros del problema, dos de ellos propios de la Tierra (el parámetro de Coriolis, f_0 , y su razón de cambio con la latitud, β_0) y los otros dos del remolino antes de chocar (la rapidez angular del vórtice, ω , y su radio, R)³. La gravedad reducida se mantuvo constante todo el tiempo ($g' = 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$). De los 4 parámetros mencionados se obtuvieron dos adimensionales⁴.

En total, se realizaron dos series de experimentos con distintas características. En la primera de ellas se buscó encontrar la influencia de los cuatro parámetros en el comportamiento del remolino al sentir el contacto con la frontera, es decir, se eligieron valores de f_0 y β_0 arbitrarios e independientes entre sí, sin importar que no correspondan a un caso físicamente real con tal de que los resultados mostraran con mayor claridad el efecto de cada uno de ellos; el mismo criterio se aplicó para ω y R . En la segunda serie se programaron los experimentos de manera sistemática con f_0 y β_0 propios de una latitud fija y ω y R con valores típicos del océano.

IV.1 Parámetros adimensionales

Las ecuaciones de movimiento se adimensionalizaron de la siguiente manera:

$$(u, v) = \omega R(u', v')$$

$$(x, y) = R(x', y')$$

³La profundidad H no se considera porque es dependiente de R , ω y f_0 , según la ecuación (27).

⁴Esto se puede mostrar con la matriz dimensional de parámetros:

	f_0	β_0	ω	R
L	0	-1	0	1
T	-1	-1	-1	0

donde L es longitud y T es tiempo. Sea n el número de parámetros (4) y r el rango de la matriz (2); por lo tanto, los números adimensionales independientes son $n - r = 2$.

$$h = Hh'$$

$$t = Tt',$$

donde las variables primadas son adimensionales, H la profundidad máxima y T un tiempo característico. El sistema adimensional es, omitiendo las primas:

$$\xi \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) - v - \beta y v = -s \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\xi \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) + u + \beta y u = -s \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\xi \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \left[\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \right] = 0.$$

Los números adimensionales son

$$\varepsilon = \frac{\omega}{f_0}$$

$$\beta = \frac{\beta_0 R}{f_0}$$

$$\xi = \frac{1}{T f_0}$$

$$s = \frac{g' H}{\omega R^2 f_0}$$

Para los casos que interesan en esta tesis, se consideran tiempos característicos mayores al período inercial, $T \sim \frac{1}{\omega}$, que implica $\xi = \varepsilon$. Además, si se sustituye en la expresión de s la definición de H (ecuación (27)), resulta $s = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$. Por lo tanto, los números adimensionales independientes son ε y β . Con ellos se graficaron todos los experimentos realizados en el espacio ε vs. β .

IV.2 Resultados cualitativos

IV.2.1 Serie 1

Los resultados encontrados en la primera serie tienen los parámetros del planeta (f_0, β_0) y del remolino (R, ω) arbitrarios con la finalidad de identificar la importancia de cada uno de ellos independientemente de que no sean valores reales. La figura 8 muestra la posición en el espacio ε vs. β de cada uno de los 18 experimentos. La tabla I contiene los valores asignados a los 4 parámetros de cada experimento, así como su posición inicial.

En general se observó el siguiente comportamiento:

a) En todos los casos, al hacer contacto el remolino con la pared se produce una pérdida de masa hacia el Sur, pequeña comparada con el resto. Comportamientos similares han sido estudiados por Nof (1988a,b).

b) Inicialmente, el remolino es deformado en la parte Oeste por la presencia de la pared en proporción con la velocidad zonal con la que incide y en el Suroeste se acumula mayor cantidad de fluido; un tiempo después de la expulsión mencionada, la masa restante se ajusta, aproximadamente, a un remolino circular con nuevos parámetros ε y β .

c) El cuerpo de agua remanente (que conserva la mayor parte de la masa inicial) se traslada meridionalmente hacia el Sur en algunos casos, o bien hacia el Norte en un principio y, de nuevo hacia el Sur posteriormente.

Este último comportamiento se puede asociar con la posición del remolino en el espacio de parámetros. La recta $\varepsilon = \beta$ (ver figura 8) divide ambas tendencias: cuando $\varepsilon > \beta$ (experimentos marcados con o) los remolinos emigran al Sur y cuando $\varepsilon < \beta$ (marcados con \times) se mueven al Norte inicialmente y al Sur un tiempo después. La traslación al Norte es difícil de observar y medir por la deformación del remolino y la expulsión de masa.

Tabla I: Experimentos de la serie 1.

Caso	$f_0 \times 10^{-5} (\text{s}^{-1})$	$\beta_0 \times 10^{11} (\text{ms})^{-1}$	$R \times 10^5 (\text{m})$	$\varepsilon = \omega / f_0$	$\beta = \beta_0 R / f_0$
1	10	2	1	0.507	0.02
2	"	"	"	0.268	"
3	"	"	0.5	0.4	0.01
4	"	80	"	0.5	0.04
5	"	2	1.5	0.16	0.03
6	"	20	"	"	0.3
7	"	2	2	0.076	0.04
8	"	20	"	"	0.4
9	"	40	1	0.268	"
10	"	20	"	"	0.2
11	"	2	"	0.109	0.02
12	"	"	"	0.4	"
13	"	"	"	0.758	"
14	"	80	"	0.268	0.8
15	5	2	2	0.076	0.08
16	"	"	"	0.4	"
17	"	"	3	0.109	0.12
18	"	"	"	0.033	"

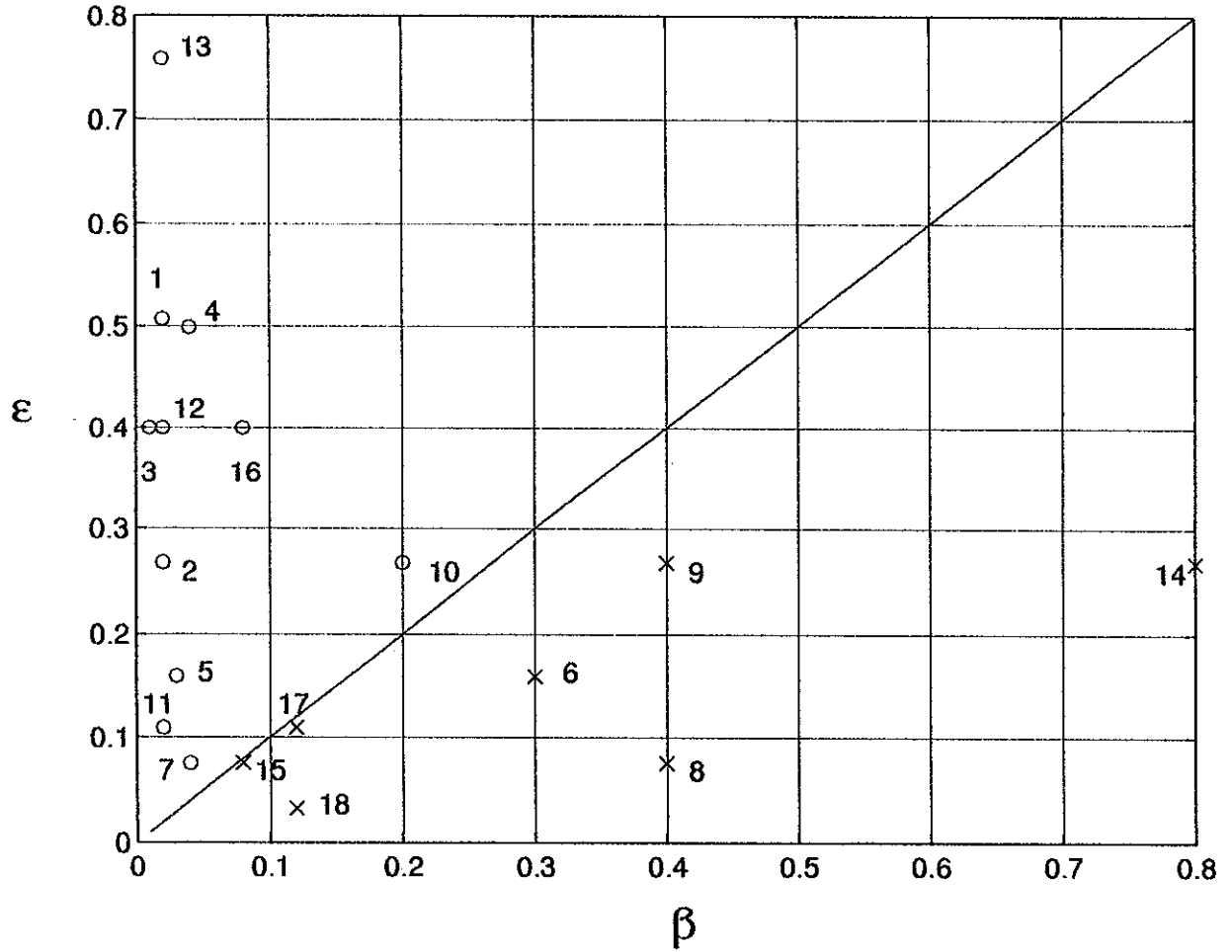


Figura 8: Experimentos de la serie 1 en el espacio de parámetros. Los marcados con un círculo emigran al Sur y con cruz primero al Norte y después al Sur.

La figura 9 muestra los contornos de profundidad del experimento 5 con intervalos de 25 días; en este caso $\varepsilon = 0.16, \beta = 0.03$, es decir $\varepsilon > \beta$, y se pueden observar claramente la expulsión de masa al Sur, la forma circular del remolino después del choque y su desplazamiento al Sur; el océano cuadrado tiene los 4 lados cerrados y la masa expelida lo rodea totalmente. En la figura 10 se observa la corrida 6, con $\varepsilon = 0.16, \beta = 0.3$, esto es $\beta > \varepsilon$; en este caso se aprecia una mayor pérdida de masa, la deformación en la parte Oeste es más evidente, así como la acumulación en el Suroeste, pero ahora el desplazamiento inicial es hacia el Norte; para tiempos mayores a los mostrados emigra hacia el Sur. En este ejemplo, los intervalos de tiempo son mucho más cortos debido a que el remolino incide en la pared a una velocidad mayor por el efecto β ; de la tabla 1 se puede ver que β_0 se escogió un orden de magnitud mayor ($2 \times 10^{-10} m^{-1} s^{-1}$) que el valor típico de la Tierra.

La deformación en el Oeste y la acumulación en el Suroeste es más evidente cuando β es importante; de hecho, el crecimiento en el Suroeste le da una forma elíptica al remolino (ver figura 10).

IV.2.2 Serie 2

Una vez observado el comportamiento de la primera serie se efectuó otro conjunto de experimentos fijando el parámetro de Coriolis y su razón de cambio correspondientes a 23° Norte ($f_0 = 5.66 \times 10^{-5} s^{-1}, \beta_0 = 2.09 \times 10^{-11} (ms)^{-1}$), latitud a la que aproximadamente los remolinos que desprende la Corriente del Lazo interactúan con las costas mexicanas (Kirwan *et al.* 1988; Vukovich, 1991); en este caso sólo se variaron el radio y la rapidez angular dentro de rangos típicos de vórtices oceánicos.

La figura 11 contiene la localización de estos experimentos en el espacio adimensional y la tabla II los valores de R y ω . Los resultados obtenidos fueron muy similares a los ya descritos como era de esperarse, debido a que pertenecen a un subconjunto del espacio ε vs. β de la primera serie.

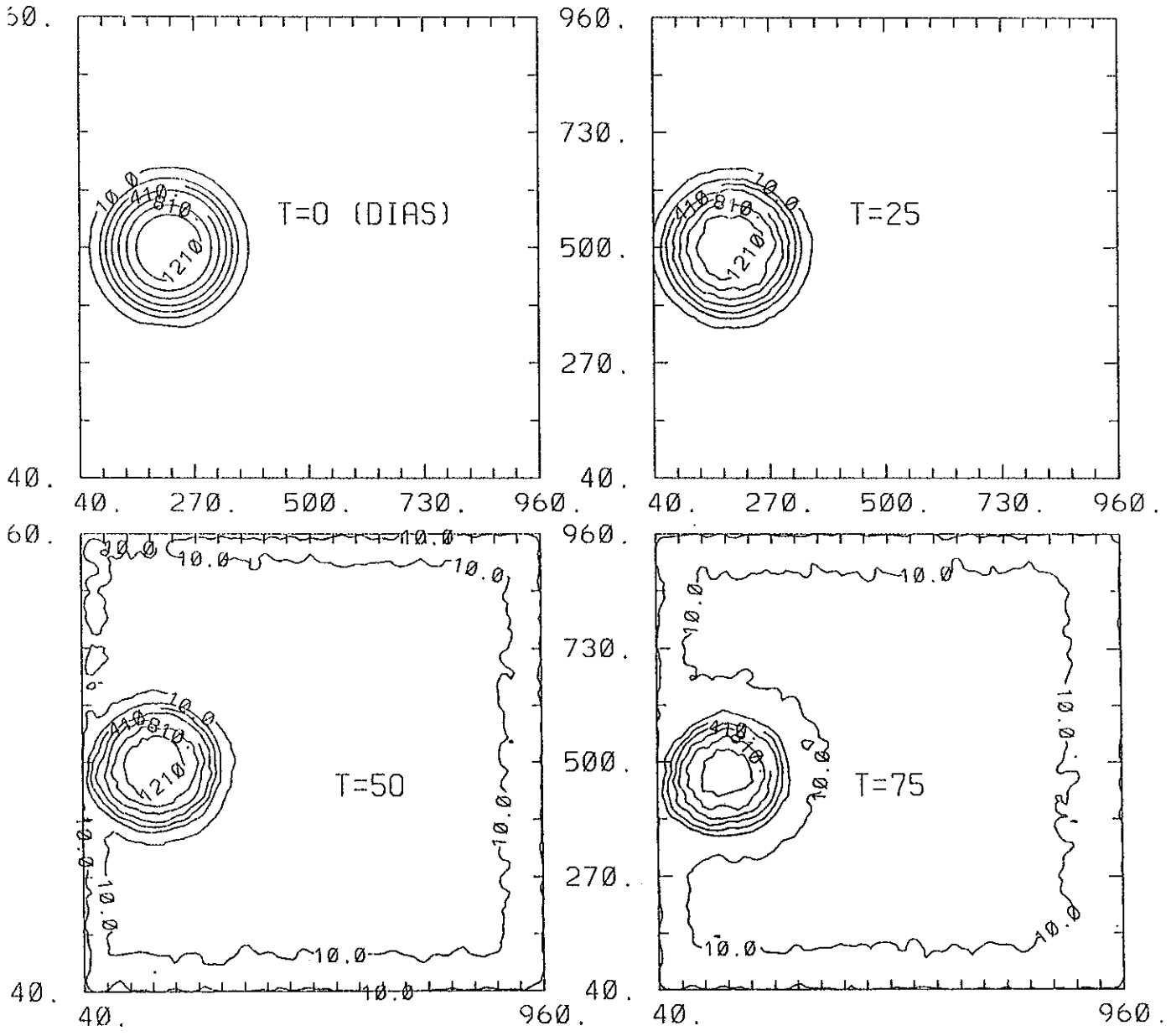


Figura 9: Contornos de profundidad del caso 5, serie 1 ($\beta = 0.03, \epsilon = 0.16$). La frontera está en 40 km.

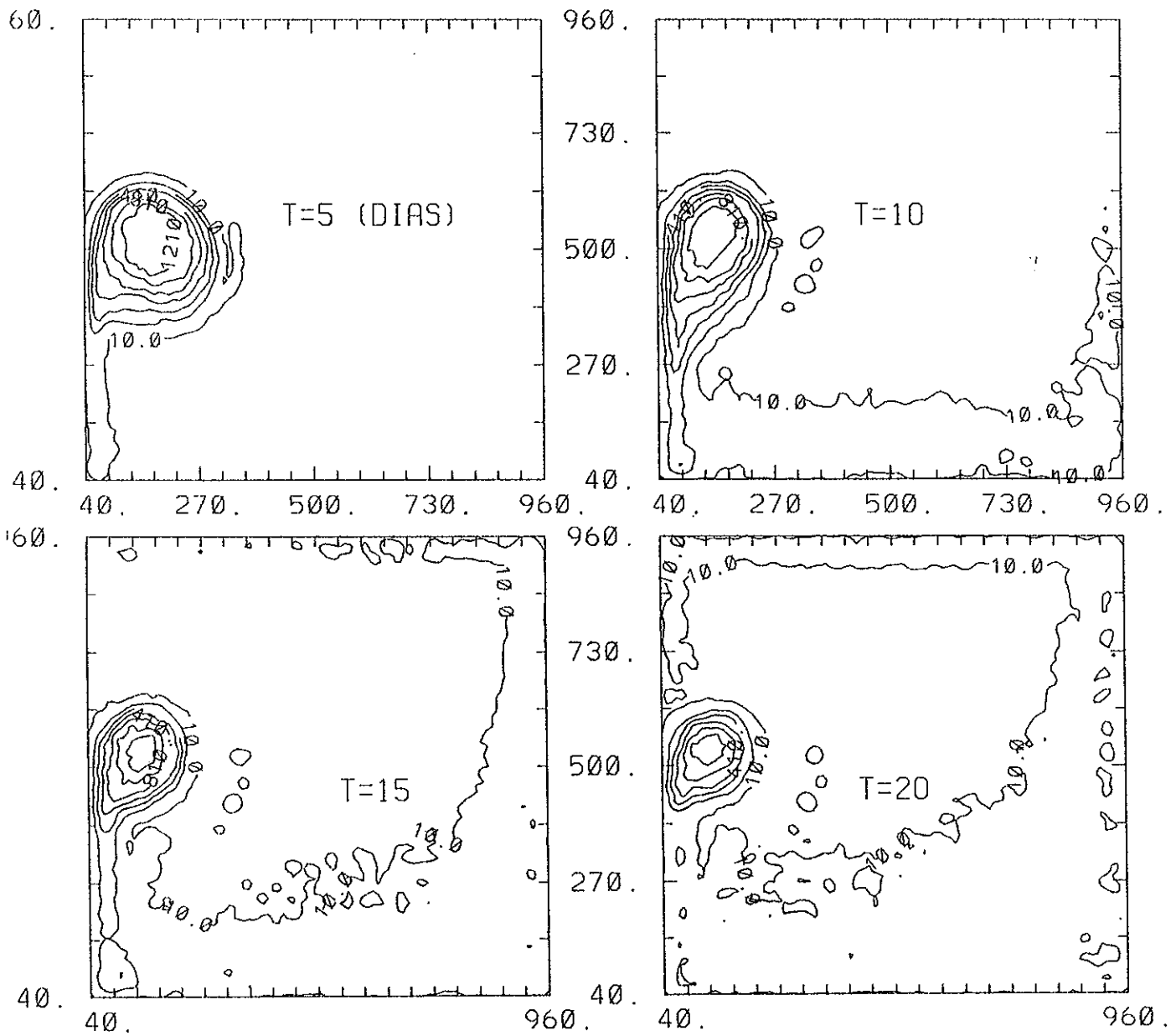


Figura 10: Contornos de profundidad del caso 6, serie 1 ($\beta = 0.3, \varepsilon = 0.16$). La frontera está en 40 km.

Tabla II: Experimentos de la serie 2.

$$f_0 = 5.66 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\beta_0 = 2.09 \times 10^{-11} (\text{ms})^{-1}$$

Caso	$R \times 10^5 (\text{m})$	$\varepsilon = \omega / f_0$	$\beta = \beta_0 R / f_0$
1	1.35	0.0309	0.05
2	2.02	"	0.075
3	2.7	"	0.1
4	0.5	0.0524	0.025
5	1.35	"	0.05
6	2.02	"	0.075
7	2.7	"	0.1
8	1.35	0.0755	0.05
9	2.02	"	0.075
10	2.7	"	0.1
11	1.35	0.0937	0.05
12	2.02	"	0.075
13	2.7	"	0.1
14	1.35	0.1092	0.05
15	2.02	"	0.075
16	2.7	"	0.1

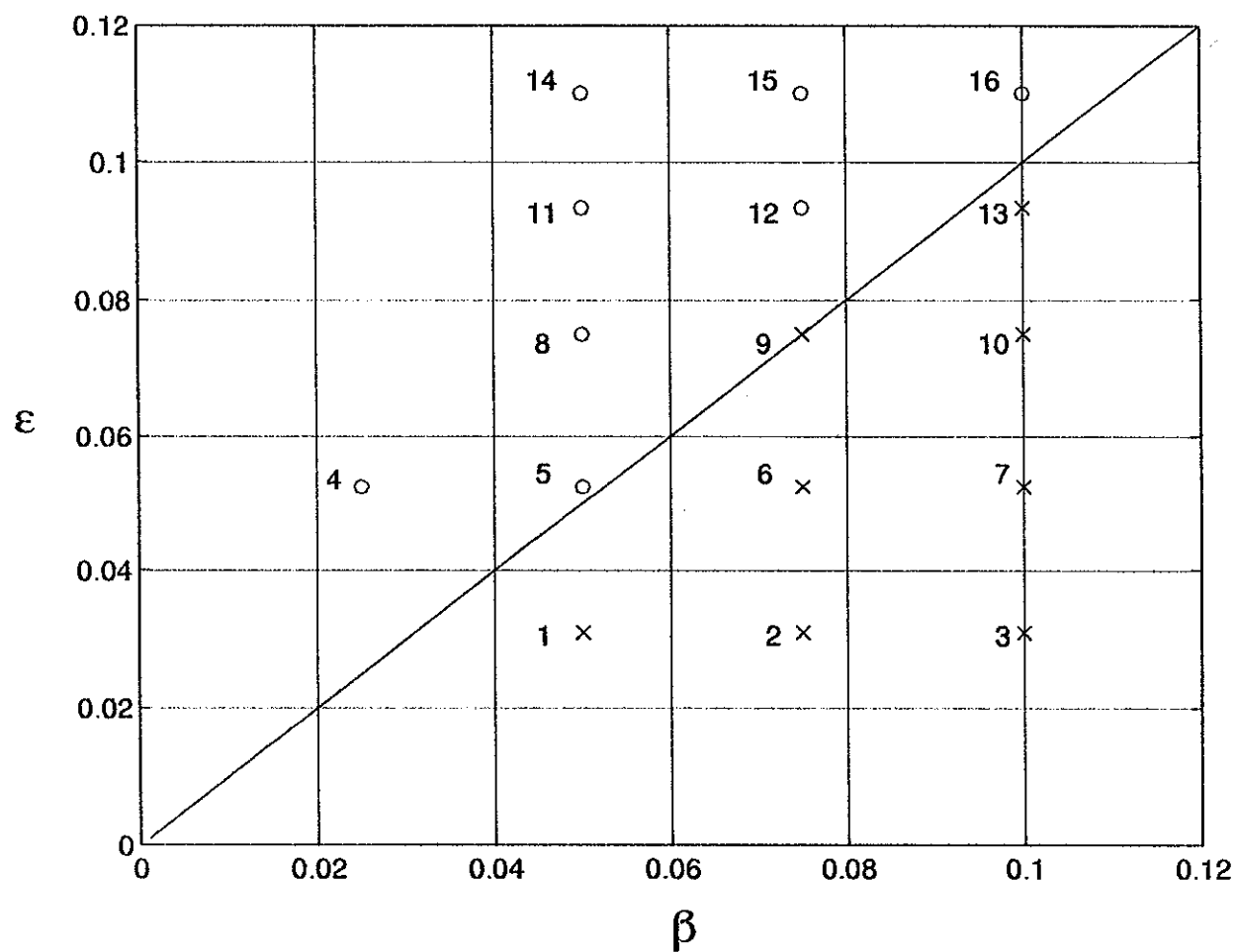


Figura 11: Experimentos de la serie 2 en el espacio de parámetros. Los marcados con un círculo emigran al Sur y con cruz primero al Norte y después al Sur.

IV.3 Resultados cuantitativos

En esta sección se muestran algunas mediciones cuantitativas de los resultados encontrados en la serie 2 debido a que:

- a) los experimentos numéricos duran aproximadamente el mismo número de días y se pueden comparar fácilmente,
- b) se mide más fácilmente la pérdida de masa hacia el Sur,
- c) se pueden medir y comparar los desplazamientos meridionales con mayor precisión y
- d) son casos con parámetros aproximadamente reales.

IV.3.1 Expulsión de masa al Sur (*ems*)

Este fenómeno está fuertemente ligado con los 2 números adimensionales, ε y β , ya que entre mayor sean éstos, se pierde más masa. La figura 12 muestra el espacio ε vs. β con el porcentaje de masa expelida por los experimentos de la serie 2 después de 150 días de hacer contacto con la pared. Es claro que entre mayor sea ε o β , la razón de expulsión se incrementa. La medida de este porcentaje se debe considerar aproximada puesto que la deformación del remolino exige la elección de un criterio para determinar cuales partículas pertenecen al remolino y cuales han sido expulsadas de éste. El problema es más difícil de resolver en la serie 1 debido a que las deformaciones de la geometría circular son mucho mayores. Por lo tanto, para medir la cantidad de fluido remanente se utilizó el siguiente procedimiento:

1) La frontera Sur se dejó abierta para que las partículas que la traspasen se pierdan; de lo contrario, rodean la cuenca y tocan de nuevo al remolino con la posibilidad de que afecten su evolución. Numéricamente, se hizo 0 el volumen de cada partícula que atravesara dicha frontera.

2) Se estimó el radio del remolino (R_{150}) y la posición de la profundidad máxima (x_H, y_H) después de 150 días de chocar.

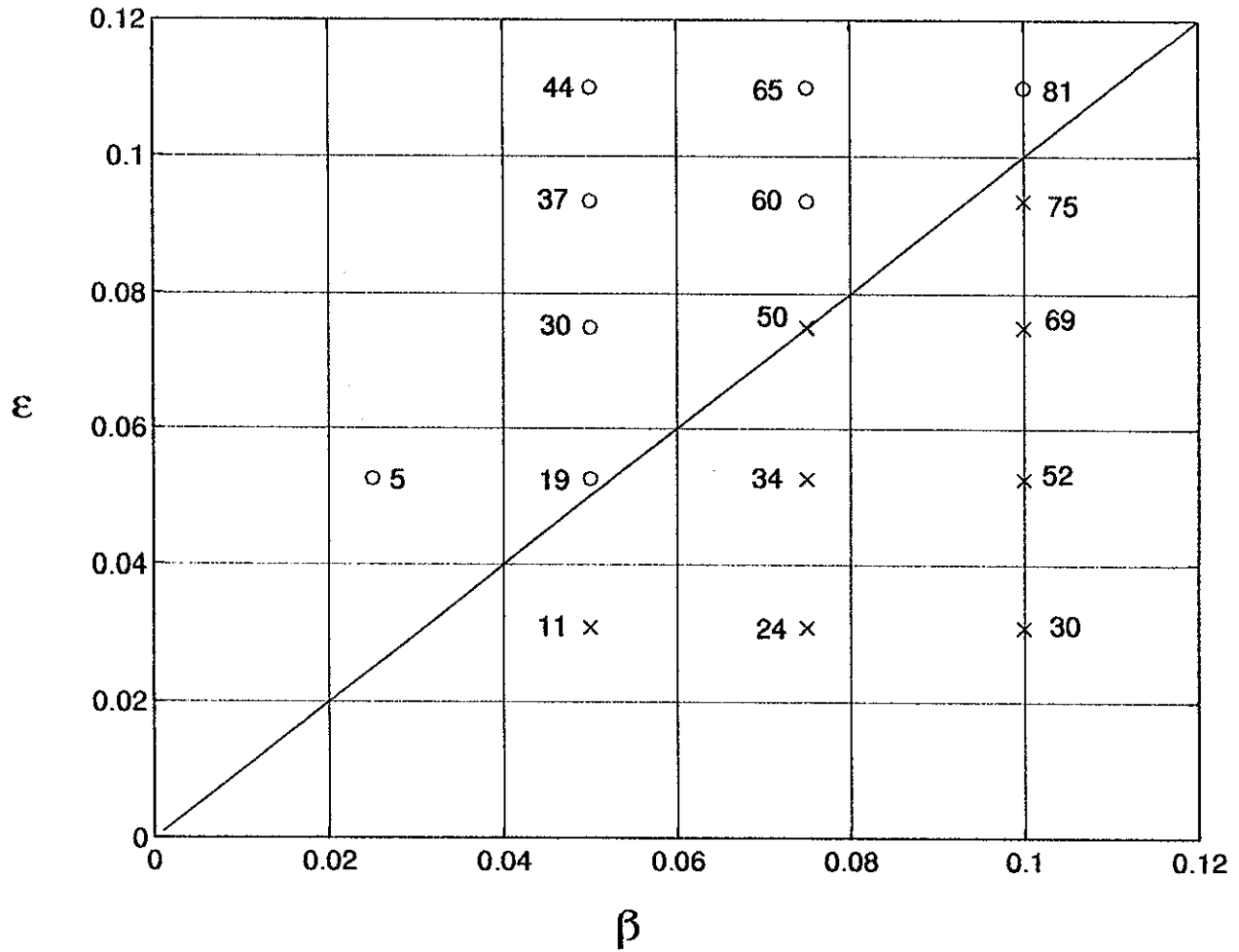


Figura 12: Porcentaje de masa perdida en los experimentos de la serie 2 después de 150 días del inicio del choque.

3) Se midió la masa contenida en el cuadrado⁵ con centro en (x_H, y_H) y lado $2R_{150}$. Nótese que R_{150} es aproximado puesto que no queda un círculo exactamente.

Una forma más precisa de hacer esta medición sería ajustar el remolino a un rodón por mínimos cuadrados (Pavía y López-Mariscal, 1994) y de ahí obtener la masa perdida.

Por otro lado, una vez que el remolino se ajusta a la pared, sigue expulsando masa al Sur. En la figura 13 están graficadas las pérdidas de masa (ems) de los casos 7, 10, 11 y 12 en función del tiempo (hasta 170 días) y se puede apreciar que la razón de pérdida es prácticamente constante. La relevancia de los parámetros adimensionales es clara: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12}$ y $\beta_{11} < \beta_{12}$ pero $ems_{11} < ems_{12}$ lo que resalta la importancia de β . Análogamente, $\varepsilon_7 < \varepsilon_{10}$ y $\beta_7 = \beta_{10}$ pero $ems_7 < ems_{10}$ lo cual indica la influencia de ε .

En la primera serie es notoria la intensificación de este fenómeno al inicio del choque, cuando la deformación del remolino es más intensa, como lo sugiere la figura 10. Pero en este caso no tiene mucho sentido estimar un radio, como en el procedimiento anterior, puesto que la forma dista mucho de ser circular.

En resumen, los resultados indican que la expulsión de masa al Sur está asociada a la deformación del remolino al chocar (dependiente de β) y al número de Rossby; el primer efecto es atenuado una vez que el remolino se ajusta a una geometría aproximadamente circular y el segundo se acentúa al aumentar ε .

IV.3.2 Desplazamiento meridional

Como ya se mencionó, los remolinos para los cuales $\varepsilon > \beta$ se desplazan hacia el Sur, mientras que para $\beta > \varepsilon$ se mueven inicialmente al Norte y después hacia el Sur. La figura 14 muestra las gráficas de la posición meridional del núcleo del remolino contra

⁵Se podría utilizar el círculo de radio R_{150} pero por la forma de la malla es más fácil hacerlo en el cuadrado. La sobreestimación es despreciable debido a que la masa en la periferia del remolino es pequeña comparada con él, además de que es un cálculo aproximado.

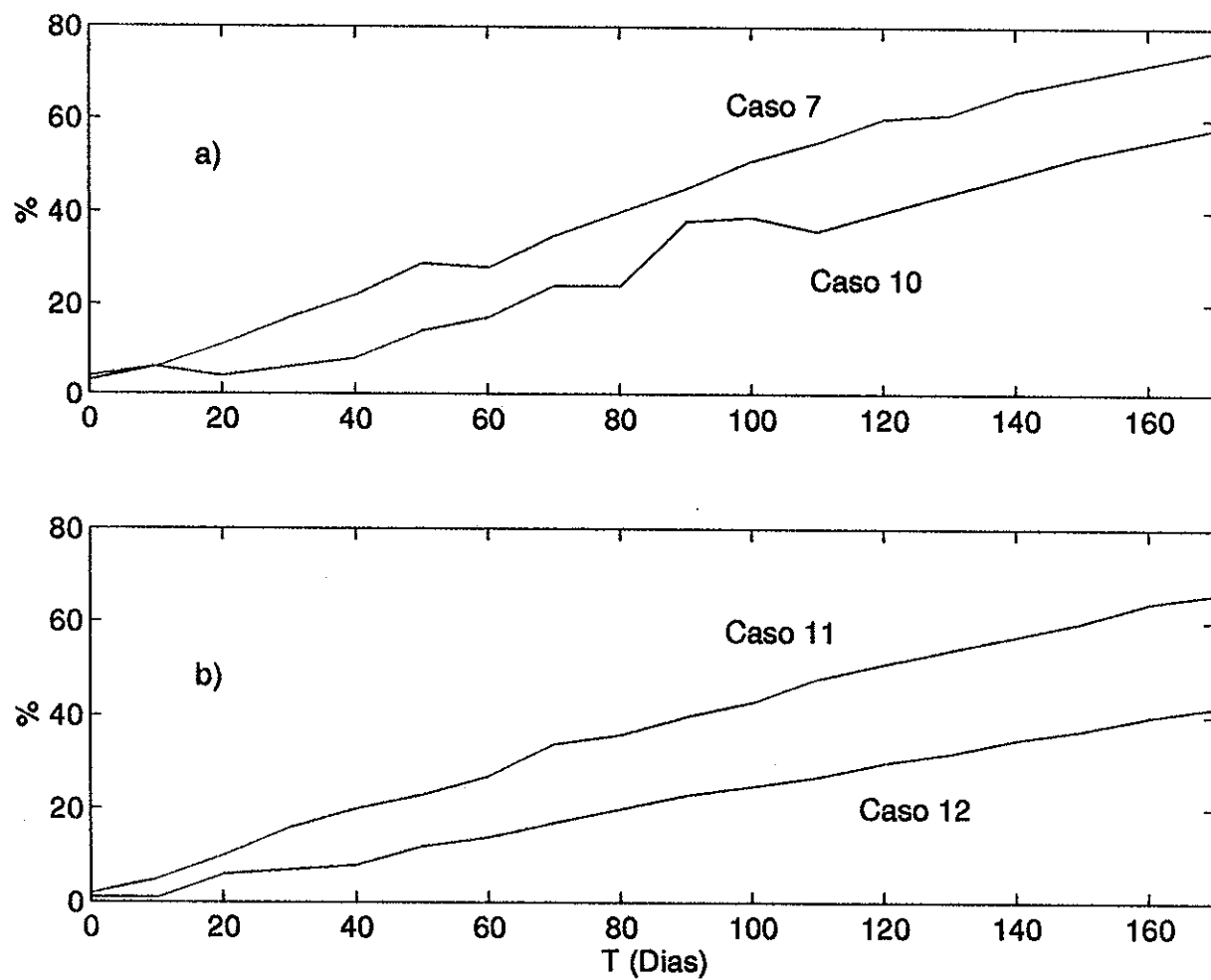


Figura 13: Porcentaje de masa perdida vs. tiempo para los casos a) 7 y 10, b)11 y 12 de la serie 2. El choque inicia en $T=0$ (en $T=150$ se tienen los valores de la fig. 12).

el tiempo en los casos 6, 7, 12 y 14 de la serie 2; es evidente que el desplazamiento al Norte del ejemplo 7 es muy pequeño respecto al radio inicial del remolino pero no despreciable.

El núcleo mencionado está definido como todos los puntos de la malla tal que $h > 0.1h_{máxima}$, de esta manera se desprecia la masa expulsada, ya sea al salir por la frontera Sur o por tener profundidades menores al 10% de la profundidad máxima. Nuevamente, para la serie 1 es difícil hacer esta estimación ya que la masa expelida es mayor y llega a tener profundidades mayores al 10% de la máxima.

Al parecer, el movimiento meridional al Norte es debilitado por la pérdida de masa del remolino y por su ajuste paulatino a un nuevo vórtice junto con un cambio de los dos parámetros que lo caracterizan. Lo anterior se puede mostrar encontrando los nuevos números β y ε . El primero se obtiene estimando el nuevo radio, ya que $\beta = \frac{\beta_0 R}{f_0}$. Por otro lado, para obtener el nuevo $\varepsilon = \frac{\omega}{f_0}$, se debe buscar la nueva rapidez angular. Si se parte de la definición de profundidad máxima de un rodón circular (ecuación (27)) $H = \frac{R^2}{2g'}\omega(f_0 - \omega)$, con H y R conocidas, se puede resolver para ω y después calcular el número ε . De esta manera, se midieron la profundidad máxima y el radio aproximado de cada ejemplo de la serie 2 y se obtuvieron sus nuevos parámetros. La figura 15 muestra los estados inicial y final (después de 150 días del choque) unidos mediante una línea recta. Este resultado muestra que ε aumenta y β disminuye de forma que el estado terminal siempre está en el área de los remolinos que emigran al Sur ($\varepsilon > \beta$).

La figura 16 muestra la evolución de ε y β en el tiempo (cada 10 días, 170 en total) de los casos 10 y 12 en el espacio de parámetros. Las trayectorias se mantienen aproximadamente rectas como en la figura 15.

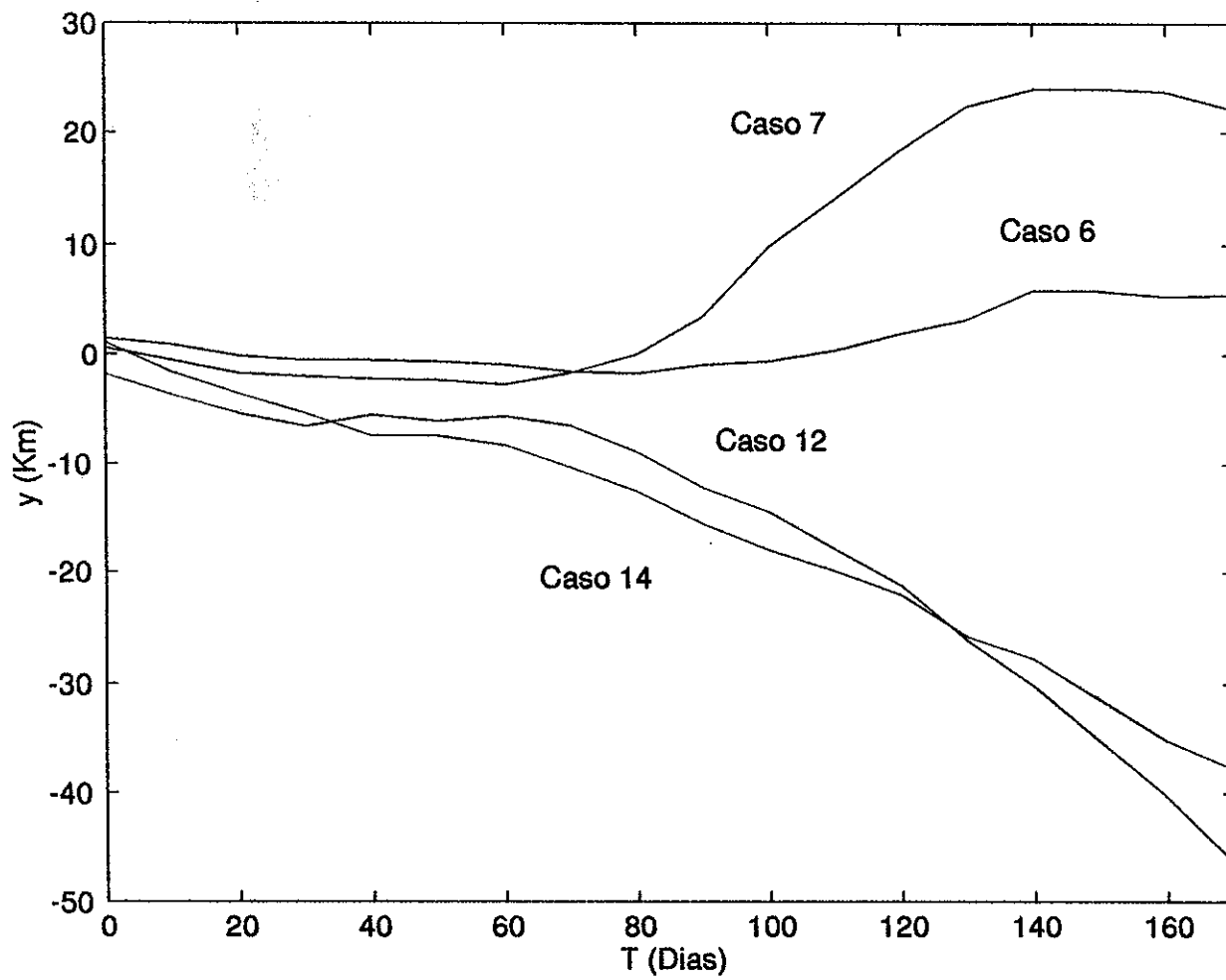


Figura 14: Posición meridional del núcleo del remolino vs. tiempo para los casos 6, 7, 12 y 14 de la serie 2. El choque se produce en $T=0$.

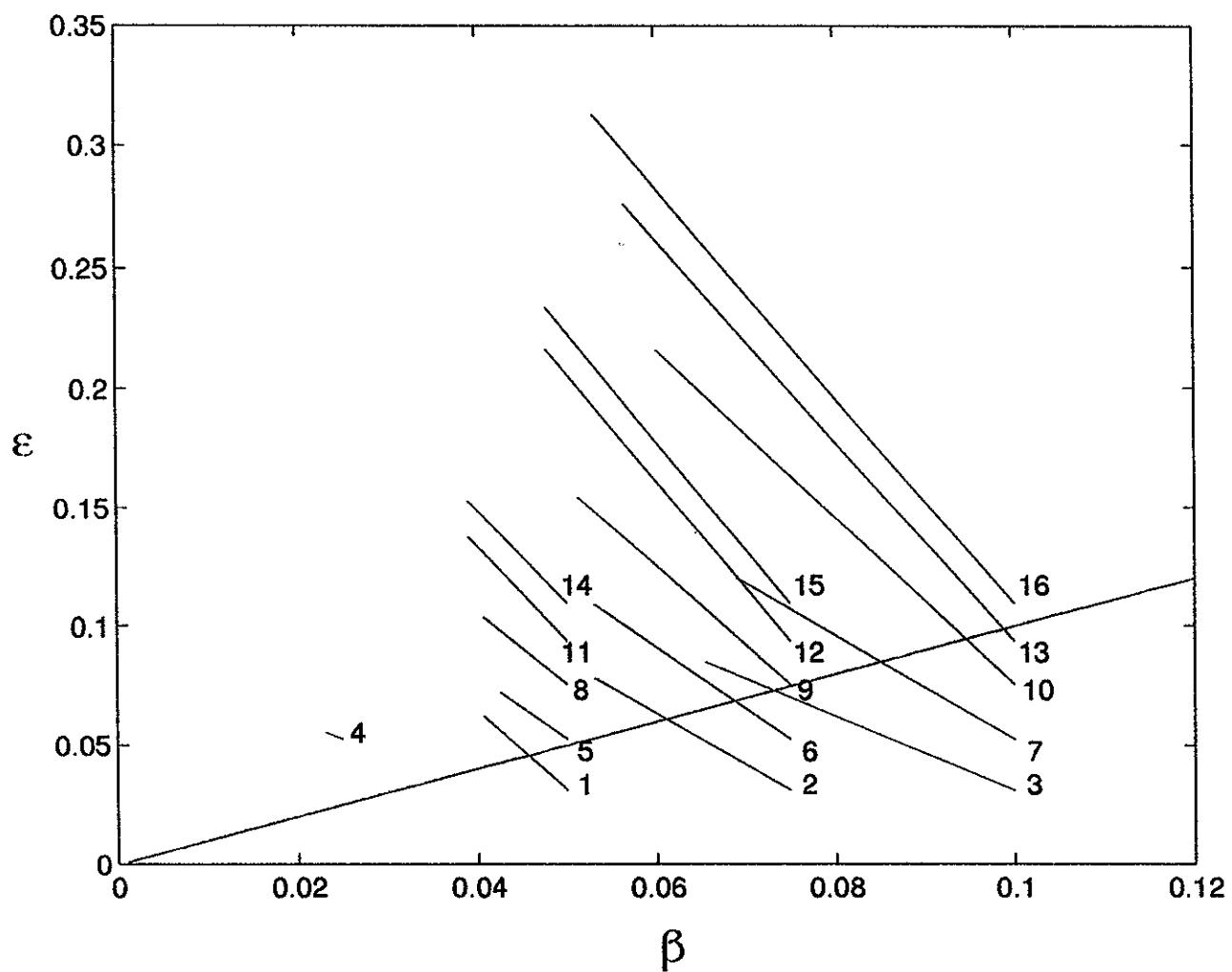


Figura 15: Estados inicial y final en el espacio de parámetros de la serie 2 después de 150 días del choque.

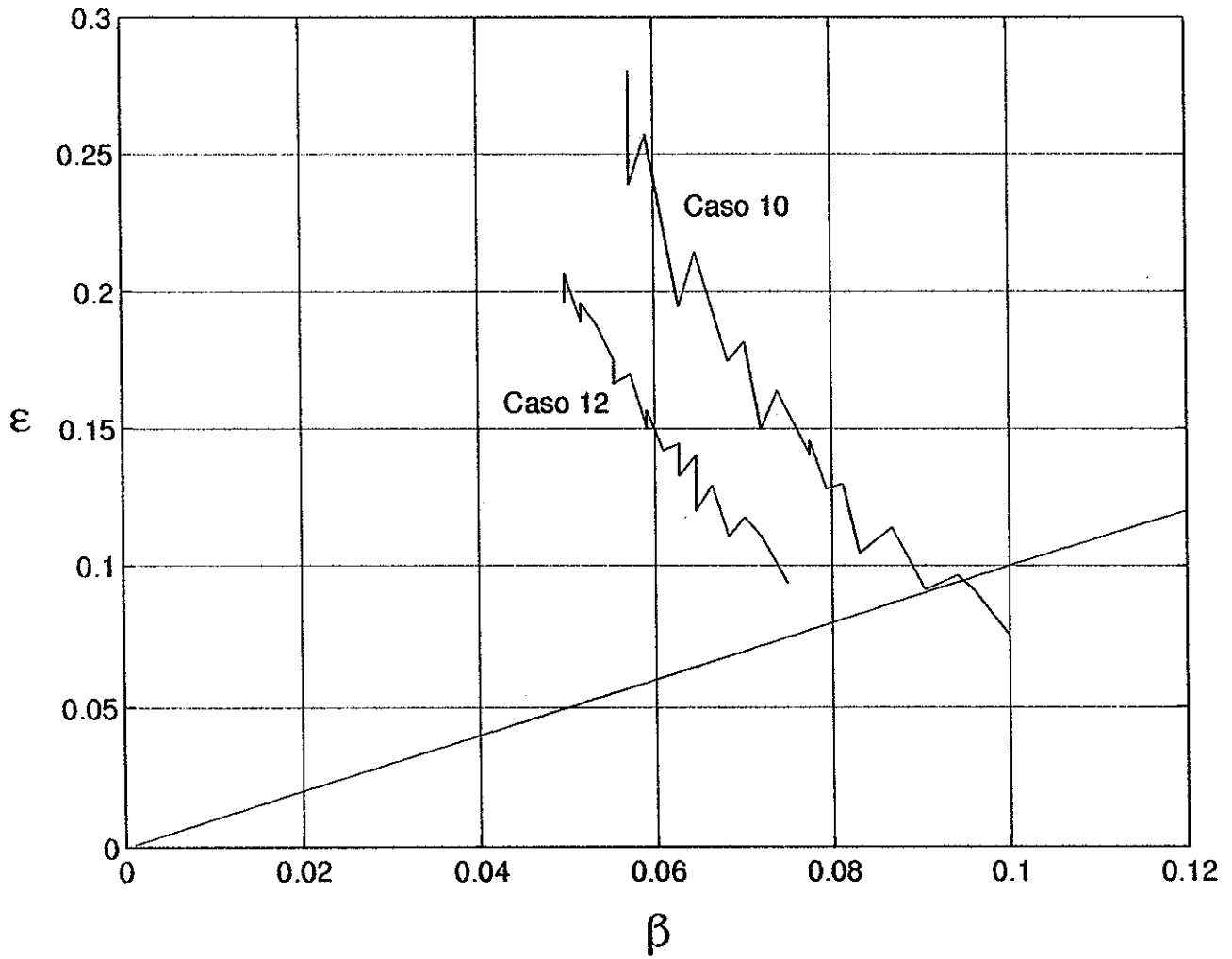


Figura 16: Trayectorias en el espacio de parámetros de los casos 10 y 12 de la serie 2 después de 180 días del inicio del choque.

V DISCUSIONES

Los resultados expuestos en el capítulo anterior muestran, en general, los siguientes comportamientos de los remolinos al chocar con la pared:

a) Pérdida de masa hacia el Sur formando un frente costero.

b) La forma circular se conserva aproximadamente a pesar de la interacción con la pared; las mayores desviaciones de esta geometría se observan junto a la pared (donde se comprime ligeramente) y al Suroeste (por la expulsión de masa).

c) Un desplazamiento latitudinal del centro de masa *i*) al Sur o *ii*) al Norte y posteriormente al Sur, dependiendo de la magnitud del efecto β y del número de Rossby.

La relación entre éstos parámetros es, aproximadamente:

$\beta > \varepsilon \implies$ desplazamiento al Norte

$\beta < \varepsilon \implies$ desplazamiento al Sur.

Como se mencionó, la recta $\beta = \varepsilon$ divide a estos dos comportamientos en el espacio de parámetros.

En este capítulo se propone la intervención de 5 mecanismos físicos que explican los resultados encontrados. Además, se discute la presencia de diferentes efectos mencionados por otros autores (Shi y Nof, 1994) y no confirmados en este trabajo.

V.1 Mecanismos físicos

Para encontrar las razones de los comportamientos descritos se parte del hecho de que la dinámica de las partículas obedece las ecuaciones de movimiento. Esto significa que se debe buscar la magnitud y la dirección de las fuerzas que actúan sobre las partículas de fluido; la primera es difícil de determinar, pero se puede poner atención en los signos de dichas fuerzas.

En la figura 17 se presenta un cuadro con los signos de las fuerzas que siente cada partícula en las direcciones x y y según su posición en el remolino (suponiendo que al chocar conserva una simetría en y); éste es dividido en cuadrantes, en cada uno de los

Fuerzas en x			
Cuadrante	$+ f_0 v$	$+ \beta_0 yv$	$- g'h_x$
1	-	-	+
2	+	+	-
3	+	-	-
4	-	+	+

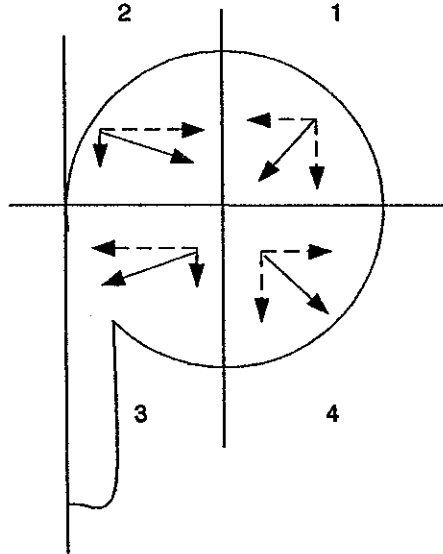
Fuerzas en y			
Cuadrante	$- f_0 u$	$- \beta_0 yu$	$- g'h_y$
1	-	-	+
2	-	-	+
3	+	-	-
4	+	-	-

Figura 17: Signos de las fuerzas que siente cada partícula según su posición en el remolino (ver los cuadrantes en la fig. 18).

a) Términos β_0

En x: $\beta_0 yv$

En y: $-\beta_0 yu$



b) Términos no lineales

En x: $-vu_y$

En y: $-uv_x$

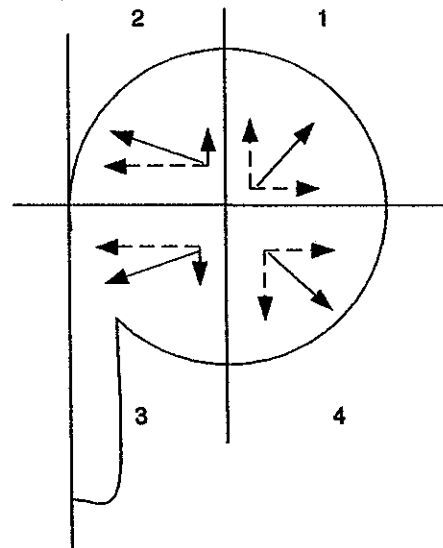


Figura 18: a) Direcciones de las fuerzas producidas por los términos β . b) Influencia de los términos no lineales.

cuales compiten los gradientes de presión con la fuerza de Coriolis más la corrección debida a β . En la figura 18a las flechas indican la dirección de los términos β ; en la 18b se representa la influencia de los términos no lineales en ambas ecuaciones de movimiento; se desprecian uu_x y vv_y en las direcciones zonal y meridional respectivamente, por considerar $u_x \sim 0, v_y \sim 0$. La presencia de la pared juega un papel relevante pues se va a suponer a u pequeña cerca de ella. A continuación, se exponen 4 mecanismos físicos que explican, aproximadamente, los resultados encontrados con base en la figura 18; cabe hacer notar que no son independientes entre sí e inclusive se retroalimentan unos a otros.

V.1.1 Fuerza β

Es la fuerza resultante hacia el Sur debida a la variación latitudinal del parámetro de Coriolis; por ser mayor f a latitudes positivas que negativas ($f_0 + \beta y > f_0 - \beta y$) la fuerza de Coriolis es mayor en el Norte que en el Sur. Lo anterior es evidente tomando en cuenta los signos de los términos β en las direcciones zonal y meridional y graficando ambas componentes (ver fig. 18a); se puede apreciar que hay una convergencia en la parte Norte y una divergencia en la parte Sur, ya que en x , $(\beta y v)_{2,4} > 0$ y $(\beta y v)_{1,3} < 0$ mientras que en y , $(-\beta y u)_{1,2,3,4} < 0$. Las resultantes de estas fuerzas en los 4 cuadrantes indican que el remolino se debe desplazar al Sur.

En el caso del remolino en un océano abierto se sabe que aún estando presente la fuerza β no hay desplazamiento hacia el Sur (Killworth, 1983), por lo que debe existir otra al Norte que la compense; esta nueva fuerza es inducida por la propagación del remolino hacia el Oeste (Nof, 1981). Sin embargo, en presencia de la frontera occidental el remolino no puede seguir desplazándose zonalmente por lo que la fuerza β lo impulsa hacia el Sur.

Por otro lado, en la figura 12 se puede apreciar que el incremento de β significa mayor pérdida de masa al Sur, lo cual está de acuerdo con la figura 18a; sin embargo,

no es la única fuerza que la produce, como se verá más adelante.

V.1.2 Efecto de la frontera

La presencia de la pared ($u \sim 0$ en el Oeste) provoca que la fuerza meridional sobre las partículas sea, aproximadamente

$$\frac{Dv}{Dt} \sim -g' \frac{\partial h}{\partial y}$$

donde el término de Coriolis es pequeño comparado con el gradiente de presión. Por lo tanto, la fuerza que sienten las partículas más cercanas a la pared depende del signo de $-\frac{\partial h}{\partial y}$: en el Noroeste es positiva y en el Suroeste es negativa; este efecto es producido solamente por la pared y provoca la acumulación de partículas en estos sitios. La fuerza β , que siempre apunta al Sur, contrarresta dicho efecto en las partículas del Noroeste y lo aumenta en las del Suroeste.

La figura 19 muestra las posiciones de las partículas después del choque en el caso 6 de la serie 1 ($\varepsilon = 0.16, \beta = 0.3$) y es notorio que, efectivamente, en el Suroeste y en el Noroeste se acumulan formando aproximadamente un remolino elíptico con semieje mayor orientado de Norte a Sur que tiende a girar anticiclónicamente (Ripa, 1987); este efecto es más evidente en el Suroeste debido a que en este lugar las partículas convergen por el sentido de giro de la elipse, mientras que en el Noroeste, por Coriolis, giran a su derecha sin ningún obstáculo. En el caso 5 de la serie 1 ($\varepsilon = 0.16, \beta = 0.03$, figura 20) la acumulación de partículas en el Noroeste es menos marcada, pero la expulsión de las del Suroeste continúa.

Cuando β es muy grande, como en algunas corridas de la serie 1, se pueden observar algunos efectos notables. El exceso de masa acumulado en el Noroeste, sigue girando anticiclónicamente en el remolino de forma que cuando llega nuevamente a la pared corta, aunque no completamente, la expulsión al Sur. Posteriormente, el remolino tiende a ser circular.

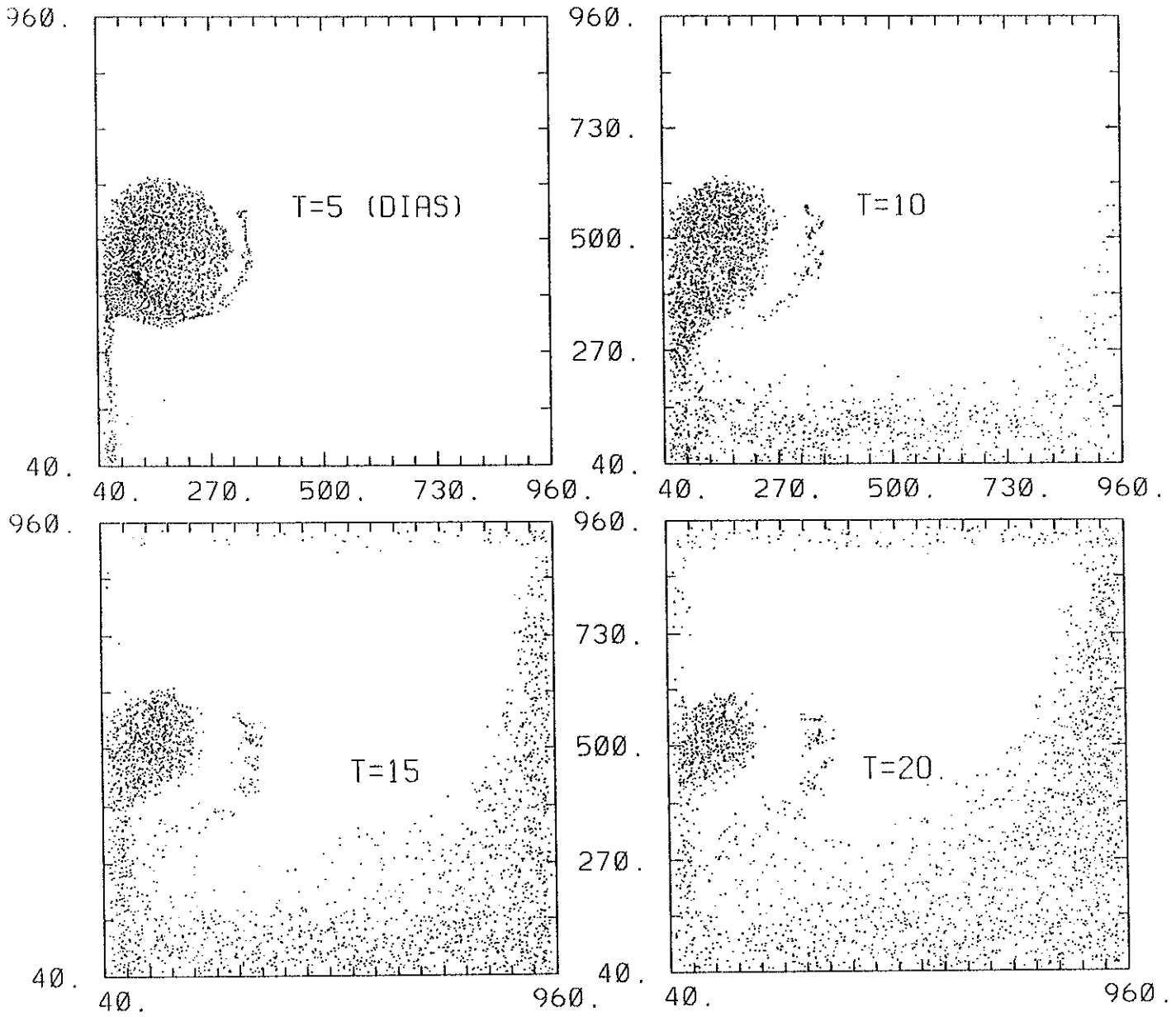


Figura 19: Posiciones de 1/4 de las partículas del caso 6, serie 1 ($\beta = 0.3, \varepsilon = 0.16$).

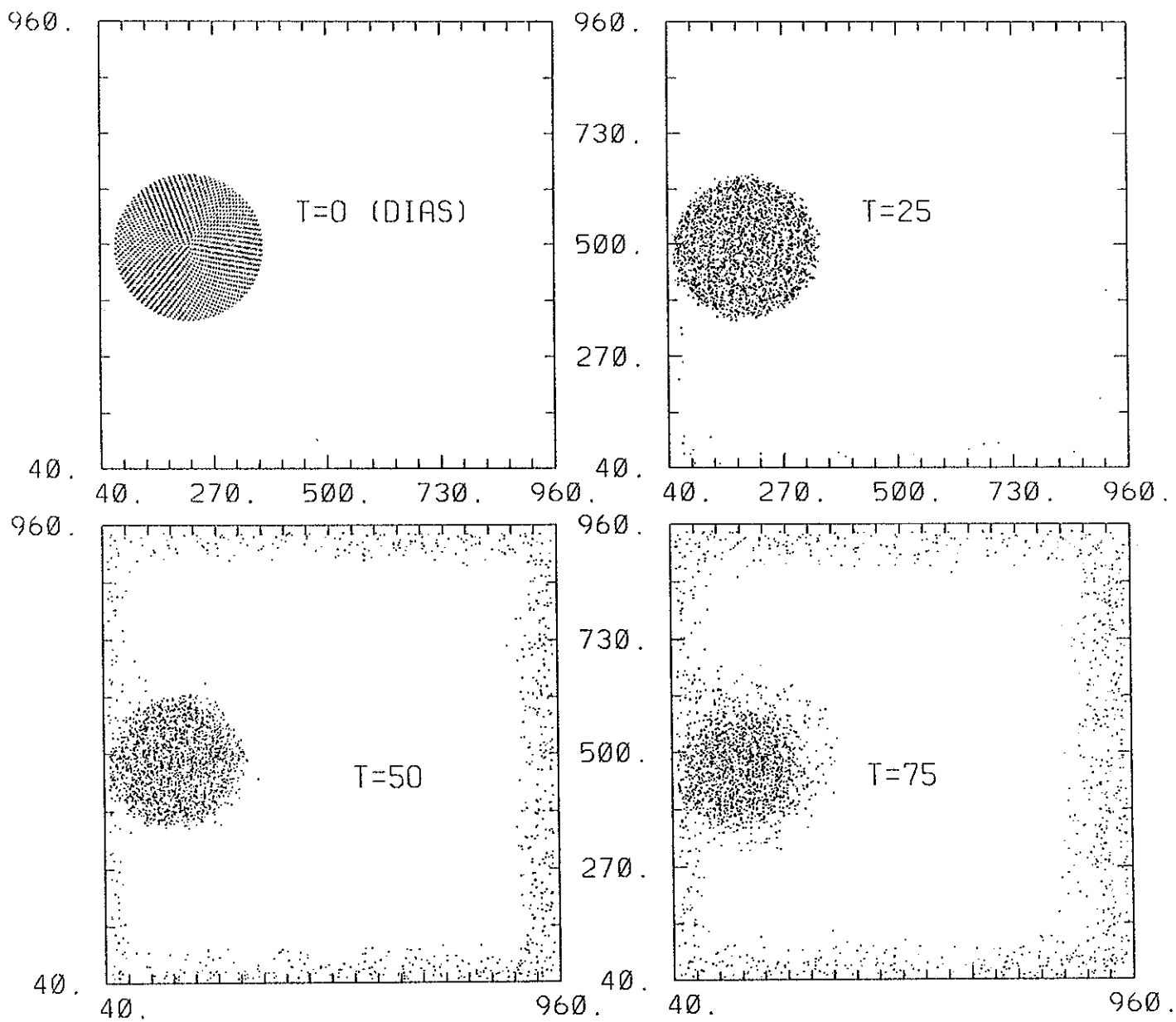


Figura 20: Posiciones de 1/4 de las partículas del caso 5, serie 1 ($\beta = 0.03, \varepsilon = 0.16$).

V.1.3 Deformación del remolino

El vórtice se desplaza hacia el Oeste hasta chocar con la pared donde se acumula fluido mientras que el efecto β sigue empujándolo o comprimiéndolo; la acumulación de masa escapa al Sur para formar el frente descrito anteriormente. Esta compresión es de importancia fundamental en la primera etapa del choque debido a que la deformación del remolino en el lado Oeste lo impulsa inicialmente al Norte. Para mostrarlo, considérese la velocidad meridional a partir del balance geostrófico en x al Oeste del remolino

$$v_{oeste} \sim \frac{g'}{f} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{oeste} > 0 \quad (28)$$

por lo que la compresión del remolino implica un aumento de $\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{oeste}$, o bien, de v_{oeste} que lo impulsa al Norte. Este incremento en el gradiente de presión zonal está en proporción con β puesto que entre mayor es ésta, mayor es la velocidad zonal del remolino al chocar con la pared y la compresión que se ejerce sobre el mismo. La deformación del remolino es más importante en las partículas del Noroeste, ya que sienten la fuerza hacia el Norte debido a la pared (como se describió en el apartado anterior), que en las del Suroeste que son impulsadas al Sur por la misma causa y por la fuerza β .

Nótese que la presencia de β influye en 2 sentidos: a) inicialmente, la velocidad con la que el remolino choca produce una mayor deformación y el empuje al Norte, b) posteriormente, como fuerza β impulsa al Sur y contribuye a la expulsión de masa.

V.1.4 Efectos no lineales

La importancia de la no linealidad radica en, al menos, dos factores importantes:

i) La influencia que tiene en el movimiento del remolino al Sur, como se mostró en el capítulo anterior cuando $\varepsilon > \beta$.

ii) La importancia que tiene en la pérdida de masa al Sur (ver fig. 12). Conforme el remolino pierde masa sufre un reajuste en sus parámetros, se reduce su radio (y el número $\beta = \frac{\beta_0 R}{f_0}$) y aumenta la rapidez angular (y el número de Rossby $\varepsilon = \frac{\omega}{f_0}$). El aumento de ε induce nuevamente la pérdida de masa, retroalimentándose ambos efectos. La intensificación del remolino se debe a que la energía total se debe conservar, por lo que al perder masa pierde energía potencial pero gana energía cinética (ver apéndice B). Este ajuste de ε y β provoca un desplazamiento de cada experimento en el espacio de parámetros del área donde $\beta > \varepsilon$ (en la que los remolinos se desplazan al Norte), al área donde $\beta < \varepsilon$ (en la cual se desplazan al Sur, ver figura 15). Efectivamente, una vez que el remolino se ha ajustado a la pared y sigue perdiendo masa, se mueve al Sur en todos los casos.

En la figura 18b se consideran los signos de los términos no lineales $-vu_y$ en x (despreciando uu_x) y $-uv_x$ en y (despreciando vv_y), los cuales se pueden considerar como el cambio local de las velocidades u y v en cada cuadrante. En un océano sin fronteras, todos tienen aproximadamente la misma magnitud por lo que se anulan al integrarlos sobre todo el remolino (Nof, 1981, 1983, 1984); pero en presencia de la pared ($u \sim 0$ cerca de ella) se rompe esta simetría. En los cuadrantes 3 y 4 los términos no lineales pueden favorecer el movimiento al Sur, mientras que en el 1 y 2 al Norte. Sin embargo, los resultados numéricos muestran que domina la tendencia al Sur.

V.1.5 Expulsión de masa al Sur

En resumen, la pérdida de masa del remolino al chocar se debe a:

- a) El sentido de giro (anticiclónico) y su intensidad (efectos no lineales) que favorecen la acumulación en la parte Suroeste.
- b) La presencia de la frontera que produce la fuerza al Sur $\frac{Dv}{Dt} \sim -g' \frac{\partial h}{\partial y}$ en las partículas acumuladas en el Suroeste.
- c) La fuerza β , que siempre apunta al Sur.

d) El rebote de las partículas en el Suroeste produce que la fuerza de Coriolis actúe al Sur, junto con el gradiente de presión, debido a que adquieren una velocidad u positiva. En cambio, en el Noroeste Coriolis y el gradiente de presión son opuestos.

V.2 Esquema general

Como se puede apreciar, la combinación de los mecanismos propuestos puede dar lugar a procesos muy complicados que no son independientes entre sí. El esquema general de lo que está ocurriendo se propone de la siguiente manera:

Sea un remolino anticiclónico con número de Rossby ε_i y número beta β_i desplazándose al Oeste con una velocidad del orden $c \sim \beta_0 R_d^2$ (donde R_d es el radio de deformación. Nof, 1981) y chocando un tiempo después con una pared vertical meridional. En una primera etapa sucede lo siguiente:

a) Al hacer contacto, actúa hacia el Sur la fuerza β , empujándolo en esa dirección y promoviendo la expulsión de masa al Sur.

b) El remolino se deforma en una elipse orientada meridionalmente por la presencia de la pared; el fluido que se acumula en el Suroeste es impulsado al Sur, mientras que el del Noroeste prosigue el giro anticiclónico.

c) La deformación también depende de la rapidez zonal con la que incide y produce un empuje al Norte.

d) Los efectos no lineales tienden a reforzar el impulso al Sur.

e) El remolino comienza a perder masa hacia el Sur según la magnitud de β_i y ε_i .

Esta pérdida de masa produce 3 efectos reajustando los parámetros del remolino y su forma:

i) Se atenúa la deformación inicial, tendiendo a la geometría circular; este comportamiento disminuye el impulso al Norte.

ii) Aumento de ε , lo cual favorece el desplazamiento al Sur y la pérdida de masa.

iii) Disminución de β , puesto que al perder masa el radio se acorta, esto reduce la

fuerza β y todas sus implicaciones.

El efecto final es la migración del remolino al Sur y la tendencia a recuperar la forma circular. La figura 21 muestra esquemáticamente los procesos descritos.

V.3 Movimiento meridional

En esta sección se presentan algunos argumentos analíticos y sus limitaciones que justifican, hasta cierto punto, el esquema general descrito, para apoyar las tendencias del remolino en la dirección Norte-Sur. Cushman-Roisin *et al.* (1990) utilizan cálculos similares para analizar la propagación al Oeste del remolino.

V.3.1 Argumentos de escala

Considérese la ecuación de movimiento en x en los lados Este y Oeste del remolino cuando interacciona con la pared (ver figura 22), añadiéndole a la componente de la velocidad meridional V (en valor absoluto) una corrección c_m de signo desconocido tal que $V \gg c_m$:

Oeste (despreciando $\frac{Dy}{Dt}$):

$$-f_0(V + c_m) = -g'\delta H_W,$$

Este: (despreciando $\frac{\partial u}{\partial t}, u\frac{\partial u}{\partial x}$)

$$-Vu_y - f_0(-V + c_m) = -g'(-\delta H_E),$$

donde δH_W y δH_E son las gradientes de presión en el Oeste y en el Este en valor absoluto; debido a que el remolino es comprimido contra la pared por su movimiento al Oeste debido al efecto β se puede esperar que $\delta H_W > \delta H_E$. Eliminando g' de ambas ecuaciones y despejando c_m se obtiene:

$$c_m = V \left(\frac{(1 - \delta H) - \frac{u_y}{f_0}}{1 + \delta H} \right),$$

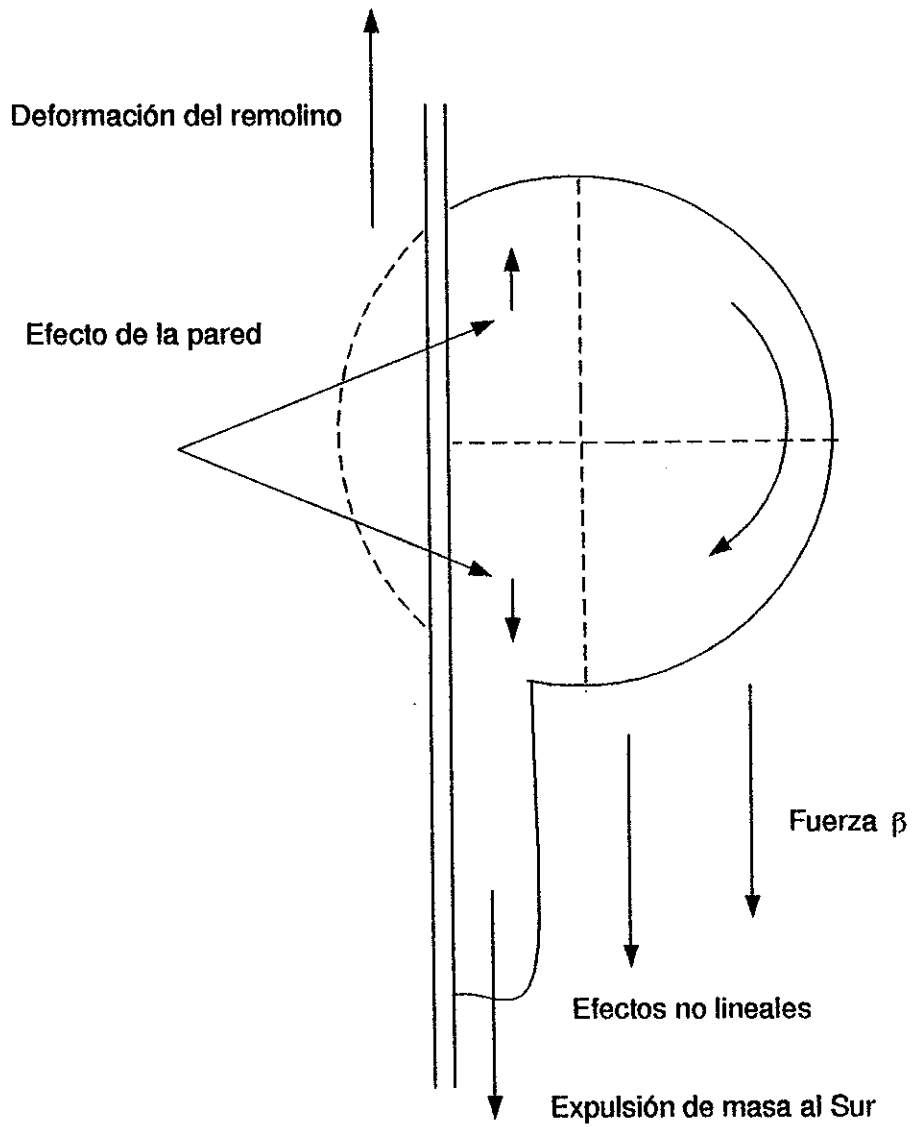


Figura 21: Esquema general de los mecanismos propuestos en este trabajo.

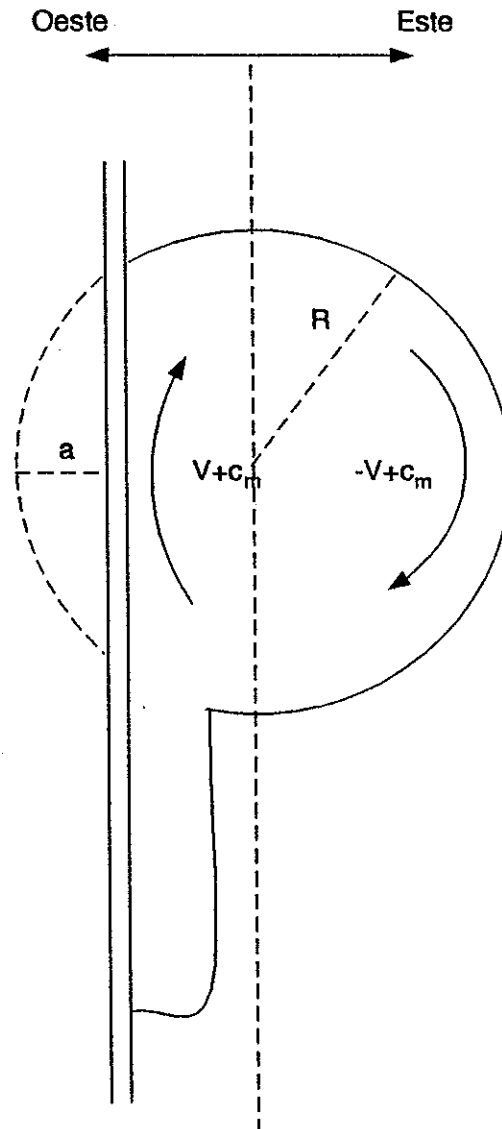


Figura 22: Aproximación de la ecuación de movimiento en x en los lados Oeste y Este del remolino. La expulsión de masa al Sur no se toma en cuenta.

donde $\delta H = \frac{\delta H_E}{\delta H_W}$; este término puede ser aproximado como

$$\begin{aligned}\delta H &= \frac{\delta H_E}{\delta H_W} \sim \frac{\frac{H}{R}}{\frac{H}{R-a}} \\ &\sim 1 - \frac{a}{R}.\end{aligned}$$

La distancia a es la disminución del radio al comprimirse el remolino sólo en la parte Oeste; debido a que $a \ll R$ y que la compresión es debida al efecto β , a se puede aproximar como βR , por lo que δH resulta

$$\delta H \sim 1 - \beta.$$

Por otro lado, en el Este se puede aproximar $u_y = \omega$ (ver ec. (25)) debido a que en esta zona el remolino conserva aproximadamente su forma circular. Por lo tanto

$$\begin{aligned}c_m &= V \left(\frac{\beta - \frac{\omega}{f_0}}{2 - \beta} \right) \\ &= V \left(\frac{\beta - \varepsilon}{2 - \beta} \right).\end{aligned}\tag{29}$$

Con esta aproximación, es claro que cuando $\beta > \varepsilon$ la tendencia inicial del remolino es hacia el Norte y $\beta < \varepsilon$ lo impulsa hacia el Sur. El denominador se puede considerar siempre positivo debido a que en todos los casos estudiados $\beta \ll 1$.

V.3.2 Limitaciones

Los argumentos descritos en la sección anterior son aceptables sólo para cierto rango de los números adimensionales; la restricción que deben cumplir para que tenga sentido establecer el balance geostrófico en el Oeste son

$$\varepsilon \ll 1, \beta \ll 1.$$

Cuando estas restricciones son violadas el proceso se vuelve aún más complicado y es difícil explicarlo con argumentos tan sencillos como los presentados. De hecho, se puede observar numéricamente que valores grandes de β hacen inestable al remolino antes de llegar a la frontera. En estos casos, al interactuar con la pared, el impulso hacia el Norte está presente (como debe ser), pero al mismo tiempo la expulsión de masa al Sur es mayor creando un escenario bastante complejo. Por el contrario, los incrementos en el número de Rossby también incrementan la pérdida de masa pero la forma circular no es modificada de manera tan sensible.

Evidentemente el análisis anterior no muestra todos los fenómenos antes mencionados; por ejemplo, no aparece la fuerza β ni el efecto meridional de la pared, puesto que éstos actúan en el balance de momento en y .

Tampoco toma en cuenta el frente costero que transporta agua al Sur. Esto significa que la relación (29) se aplica a cada instante de tiempo conforme el remolino pierde masa y ajusta números nuevos β y ε . En otras palabras, los números adimensionales están variando en el tiempo, ε aumentando y β disminuyendo, por lo que c_m tiende a ser negativo.

V.4 Comparación con otros trabajos

Los resultados encontrados pueden ser explicados aceptablemente con los argumentos expuestos anteriormente; sin embargo, existe aún mucha discusión acerca de los efectos que participan en la interacción remolino pared. A continuación, se discuten algunos de los mecanismos propuestos en comparación con los descritos por otros autores.

Fuerza β . Este efecto es bien conocido debido a que es fácil identificar su influencia al Sur en los anticiclones y al Norte en los ciclones. Como se mencionó, Nof (1981) argumenta que la propagación del vórtice al Oeste produce una fuerza de Coriolis al Norte que la compensa y produce que sólo haya movimiento zonal. Nof (1984) estudia

analíticamente en un modelo de 2 capas el caso con la pared vertical occidental, la cual impide el desplazamiento zonal del remolino y menciona que la fuerza β debe empujarlo hacia el Sur; en su análisis no considera pérdida de masa ni la deformación del remolino. Sin embargo, más tarde Shi y Nof (1994) consideran que la influencia de la fuerza β no es la dominante en la propagación meridional.

Efectos no lineales. En este trabajo, se encontró que la intensidad del remolino aumenta la expulsión de masa al Sur y viceversa; este resultado es compatible con la conservación de la energía total, ya que al perder masa disminuye la energía potencial, lo cual implica un aumento de la energía cinética; esta explicación es, al parecer, nueva. Shi y Nof (1994) encuentran resultados similares en un estudio numérico y analítico pero no los argumentan.

Expulsión de masa al Sur. Este fenómeno resultó de extrema importancia en la evolución del remolino al chocar, pero es poco comentado en otros trabajos. Nof (1988a,b) estudia la interacción de remolinos poco intensos con la pared en tiempos muy cortos, $O(f_0^{-1})$, para tratar el problema analíticamente en forma estacionaria; según sus resultados la presencia de la pared bloquea la circulación dentro del remolino y, para compensar dicho estrangulamiento, parte del fluido debe ser expulsado cerca de la frontera. Además, muestra evidencia experimental con pruebas sencillas de laboratorio. Debido a los cortos tiempos que analiza, a que sus resultados están en el contexto de la dinámica cuasigeostrófica y que no incluye el efecto β , sus resultados son sólo cualitativamente comparables a los del presente trabajo.

Nof (1988b) le atribuye a la expulsión de masa un efecto dinámico sobre el remolino: en analogía a un cohete, la masa expulsada impulsa al vórtice hacia el Norte. Shi y Nof (1994) mencionan este mismo argumento aunque no lo cuantifican. Este efecto parece ajustarse a los resultados de este trabajo debido a que los casos donde existen desplazamientos al Norte la pérdida de masa es mayor; sin embargo, el hecho de que se tiene una capa activa inmersa en otra totalmente en reposo no permite afirmar la

influencia de tal efecto.

Efecto imagen. Para cumplir la condición de frontera (que no haya penetración de fluido a través de la pared) es equivalente tener un remolino imagen (ciclónico) del otro lado de la pared que induce al remolino original a moverse hacia el Norte. Este efecto fue mencionado originalmente por Sommerfeld (1950) para vórtices puntuales. Smith (1986) lo considera dominante hacia el Norte en un estudio numérico donde añade efectos topográficos en un modelo euleriano de 2 capas. Shi y Nof (1994) presentan sólo un caso de un remolino anticiclónico aislado y consideran 3 esfuerzos sobre el remolino: la fuerza β , el efecto cohete y el efecto imagen, el primero empujando al remolino al Sur y los dos últimos al Norte (ver fig. 23); a pesar de que los estiman del mismo orden de magnitud su experimento muestra una traslación débil al Norte, la cual atribuyen al efecto imagen, pero no lo demuestran.

A pesar de que son estudios diferentes entre sí y respecto del presente, el efecto imagen podría tener influencia en los resultados encontrados cuando $\beta > \epsilon$, es decir, cuando emigran al Norte; sin embargo, el carácter lagrangeano del modelo de partículas y los casos que son fuertemente alineales no permiten establecerlo claramente. Además, al perder masa, ϵ crece por lo que la influencia del efecto imagen disminuiría y los remolinos terminan emigrando al Sur hasta disiparse.

Una diferencia notable con el artículo de Shi y Nof es que con el modelo de partículas se puede seguir la evolución del choque durante tiempos largos (abriendo la frontera Sur para perder partículas) y analizar las implicaciones de la expulsión de masa, mientras que en un modelo euleriano no es tan evidente.

Por último, no se han encontrado en la literatura referencias dinámicas sobre el efecto de la pared y la deformación del remolino mencionadas en el texto.

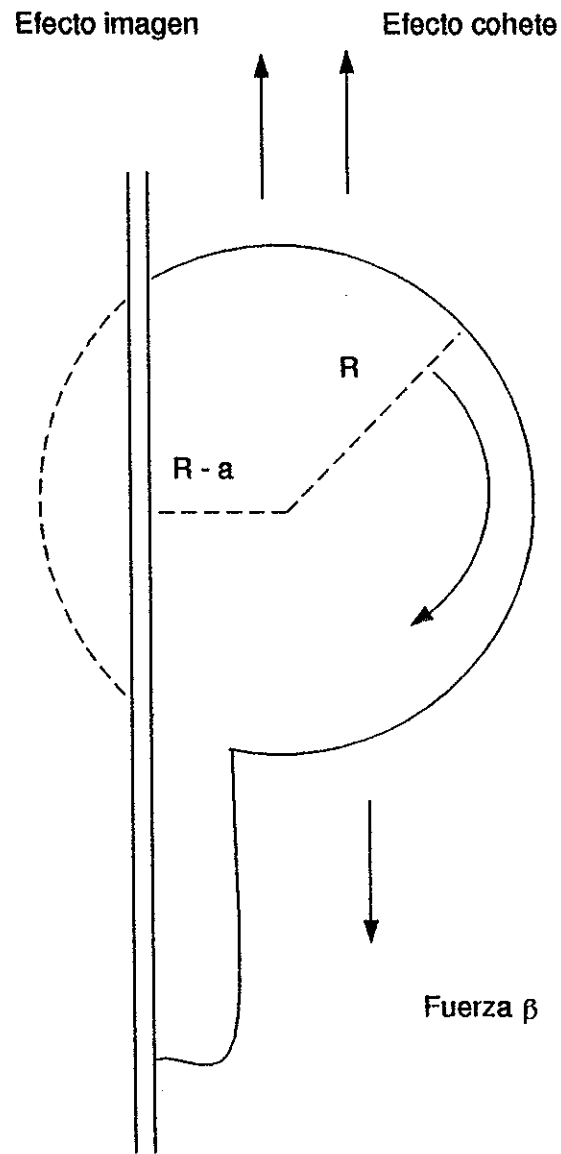


Figura 23: Mecanismos físicos en la interacción remolino-pared propuestos por Shi y Nof (1994).

VI CONCLUSIONES

De los capítulos anteriores se puede concluir lo siguiente:

1) Todos los remolinos anticiclónicos que inciden en una pared vertical occidental expulsan masa hacia el Sur proporcionalmente a ε y a β .

2) Esta expulsión es producida por: a) El sentido de giro del remolino y su intensidad que favorecen la acumulación en la parte Suroeste; b) el efecto de la pared al acelerar al fluido incidente en la parte Suroeste hacia el Sur; c) la fuerza β , que siempre es negativa.

3) Los resultados encontrados sugieren que el efecto β juega dos papeles: a) Empuja al remolino hacia el Sur una vez que hace contacto con la pared debido a la fuerza β . b) Es responsable directo de la deformación del remolino al chocar debido a que la rapidez con la que incide en la frontera es proporcional a β . Esta deformación lo impulsa al Norte y domina a la fuerza β cuando $\varepsilon < \beta$.

4) Numéricamente, se encontró que la no-linealidad del remolino lo impulsa al Sur.

5) La expulsión de masa al Sur produce que se recupere la geometría circular, disminuyendo el impulso al Norte. También implica la disminución de β pues disminuye el radio del remolino y aumenta ε por conservación de energía, ya que pierde energía potencial y gana energía cinética. Esto significa que todos los remolinos tienden a tener $\varepsilon > \beta$. En este rango, la fuerza β y los efectos no lineales los inducen al Sur hasta disiparse.

6) Los efectos imagen y cohete mencionados por Shi y Nof (1994) no resultan evidentes en los experimentos realizados, aunque se podrían asociar al movimiento al Norte cuando $\beta > \varepsilon$.

LITERATURA CITADA

- Cushman-Roisin, B., W. H. Heil y D. Nof, 1985. Oscillations and Rotations of elliptical warm-core rings. *J. Geophys. Res.*, 90: 11756-11764.
- Cushman-Roisin, B. Frontal geostrophic dynamics. 1986. *J. Phys. Oceanogr.*, 16:132-143.
- Cushman-Roisin, B., E. P. Chassignet y B. Tang, 1990. Westward motion of mesoscale eddies. *J. Phys. Oceanogr.*, 20:758-768.
- Elliott, B. A. 1982. Anticyclonic rings in the Gulf of México. *J. Phys. Oceanogr.*, 12: 1292-1309.
- Flierl, G. R. 1984. Rossby wave radiation from a strongly nonlinear warm eddy. *J. Phys. Oceanogr.*, 14: 47-58.
- Flierl, G. R. 1987. Isolated eddy models in geophysics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 19: 493-530.
- Joyce, T. M. 1991. Review of U. S. contributions to warm-core rings. *Reviews of Geophysics, supplement*, 610:616.
- Ichiye, T. 1962. Circulation and water mass distribution in the Gulf of México. *Geofísica Internacional*, 2: 47-64.
- Killworth, P. D. 1983. On the motion of isolated lenses on a beta-plane. *J. Phys. Oceanogr.*, 13: 368-376.
- Kirwan, A. D., J. K. Lewis, A. W. Indest, P. Reinersman e I. Quintero, 1988. Observed and simulated kinematic properties of loop current rings. *J. Geophys. Res.*, 93: 1189-1198.
-

- Müller, P. 1995. Ertel's potential vorticity theorem in physical oceanography. *Reviews of Geophysics*, 33 (1):67-97.
- Nof, D. 1981. On the beta-induced movement of isolated baroclinic eddies. *J. Phys. Oceanogr.*, 11: 1662-1672.
- Nof, D. 1983. On the migration of isolated eddies with application to Gulf Stream rings. *J. Mar. Res.*, 41:399-425.
- Nof, D. 1984. On the interaction between thin isolated eddies and longshore currents. *J. Phys. Oceanogr.*, 14: 125-137.
- Nof, D. 1988a. Draining vortices. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 42: 187-208.
- Nof, D. 1988b. Eddy-wall interactions. *J. Mar. Res.*, 46: 527-555.
- Pavía, E. G. y B. Cushman-Roisin, 1988. Modeling of oceanic fronts using a particle method. *J. Geophys. Res.*, 93: 3554-3562.
- Pavía, E. G. y B. Cushman-Roisin, 1990. Merging of frontal eddies. *J. Phys. Oceanogr.*, 20 (12): 1886-1906.
- Pavía, E. G. 1992. The breakup of frontal filaments. *J. Phys. Oceanogr.*, 22: 399-403.
- Pavía, E. G. y J. M. López-Mariscal, 1994. Long-term evolution of elongated warm eddies. *J. Phys. Oceanogr.*, 24 (10): 2201-2208.
- Pedlosky, J. 1987. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag. 2a. ed., 710 pp.
- Ripa, P. 1987. On the stability of elliptical vortex solutions of the shallow-water equations. *J. Fluid Mech.* 183: 343-363.
- Ripa, P. 1992. A tale of three theorems. *Rev. Mex. Fís.*, 38 (2): 229-242.
-

- Shi, Ch. y D. Nof, 1994. The destruction of lenses and generation of vortices. *J. Phys. Oceanogr.*, 24: 1120-1136.
- Smith, D. C., IV. 1986. A numerical study of loop current eddy interaction with topography in the western Gulf of Mexico. *J. Phys. Oceanogr.*, 16: 1260-1272.
- Sommerfeld, A. 1950. Mechanics of deformable bodies. Academic Press. 396 pp.
- Vukovich, F. M., B. W. Crissman, M. Bushnell y W. J. King, 1979. Some aspects of the oceanography of the Gulf of Mexico using satellite and in situ data. *J. Geophys. Res.* 84: 7749-7768.
- Vukovich, F. M. y E. Waddell, 1991. Interaction of a warm core ring with the western slope in the Gulf of Mexico. *J. Phys. Oceanogr.*, 21: 1062-1074.
- Young, W. R. 1986. Elliptical vortices in shallow water. *J. Fluid Mech.*, 171: 101-119.
-

APÉNDICES

A SOLUCIÓN EXACTA EN PLANO f Y MPEC EN PLANO β

A.1 Solución exacta en plano f : el rodón

Las ecuaciones primitivas de aguas someras tienen una solución exacta en plano f (Cushman-Roisin *et al.*, 1985). La forma general de esta solución es un remolino anti-ciclónico de perfil de profundidad parabólico que rota como cuerpo sólido; los campos de velocidad y profundidad son

$$h = H \left[1 - \left(\frac{x \cos(\Omega t) - y \sin(\Omega t)}{a} \right)^2 - \left(\frac{x \sin(\Omega t) + y \cos(\Omega t)}{b} \right)^2 \right] \quad (30)$$

$$u = \left[\Omega + \left(\frac{a}{b} \cos^2(\Omega t) + \frac{b}{a} \sin^2(\Omega t) \right) (\Omega (f_0 - \Omega))^{1/2} \right] y + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (\Omega (f_0 - \Omega))^{1/2} x \cos(\Omega t) \sin(\Omega t)$$

$$v = - \left[\Omega + \left(\frac{b}{a} \cos^2(\Omega t) + \frac{a}{b} \sin^2(\Omega t) \right) (\Omega (f_0 - \Omega))^{1/2} \right] x + \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) (\Omega (f_0 - \Omega))^{1/2} y \cos(\Omega t) \sin(\Omega t).$$

El campo h es una elipse con semieje mayor a y semieje menor b . Esta elipse rota en sentido de las manecillas del reloj con rapidez angular Ω respecto al plano f , el cual rota con rapidez $\frac{f_0}{2}$ ($\Omega < \frac{f_0}{2}$) respecto a las estrellas (ver figura 24). H es la profundidad máxima y es igual a

$$H = \frac{ab}{2g'} (\Omega (f_0 - \Omega))^{1/2} (f_0 - 2\Omega) \quad (31)$$

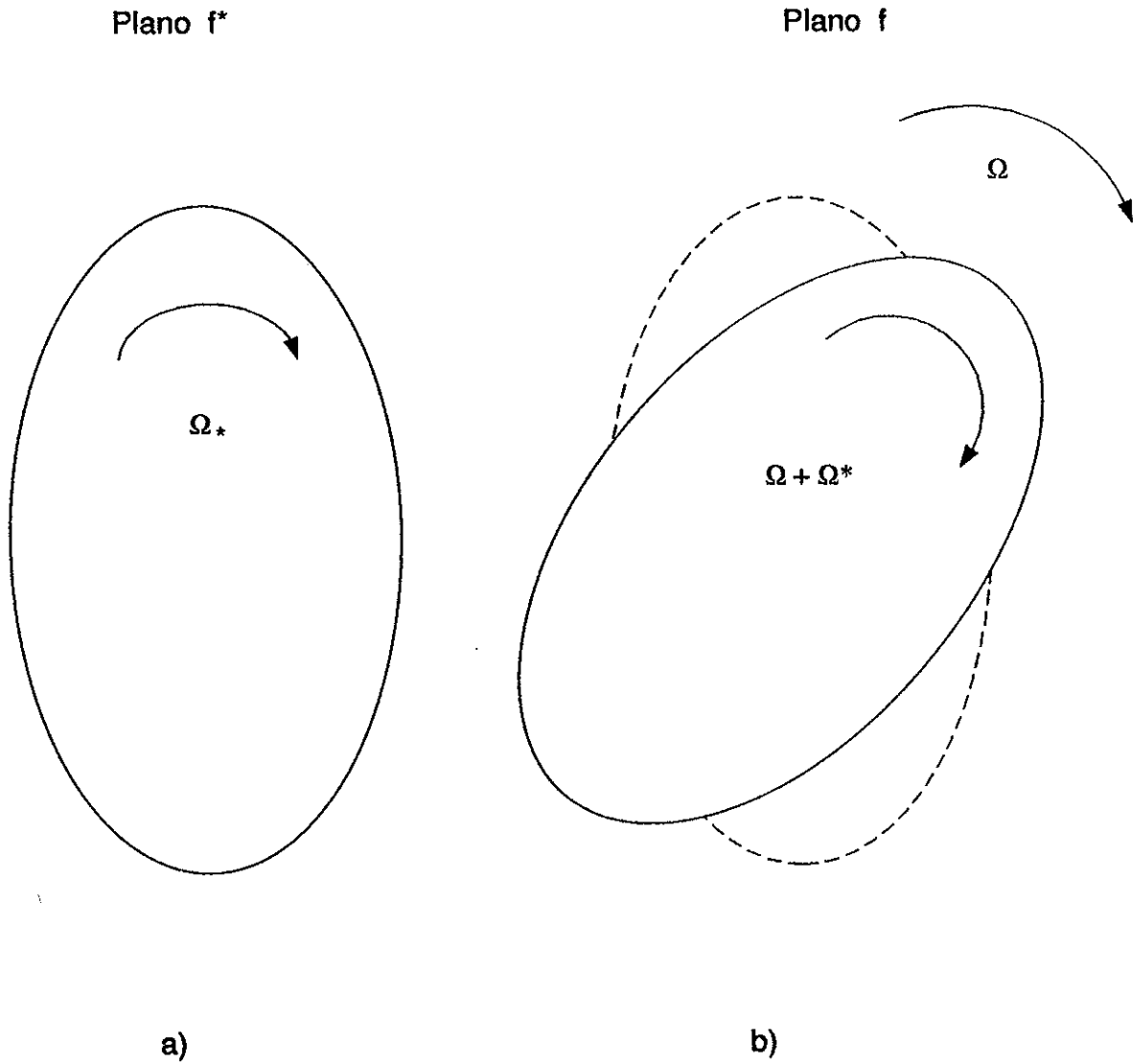


Figura 24: Rodón elíptico en a) plano f^* , donde es estacionario y el fluido rota con frecuencia Ω_* y b) plano f , donde la elipse gira con frecuencia Ω y el fluido con $\Omega + \Omega_*$.

Si el remolino es circular ($a = b = R$) los campos son estacionarios

$$h = H \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) \quad (32)$$

$$u = \omega y$$

$$v = -\omega x,$$

con la velocidad angular

$$\omega = \Omega + (\Omega(f - \Omega))^{1/2} < f_0. \quad (33)$$

Todos los experimentos numéricos de esta tesis son inicializados con un rodón descrito por (32); se especifican R y Ω y a partir de ellos se obtienen H y ω .

La solución general (30) es estacionaria sólo en un sistema de referencia que rote con la misma rapidez angular Ω que la elipse (Ripa, 1987); este nuevo marco se obtiene con el cambio de coordenadas

$$x_* + iy_* = e^{i\Omega t} (x + iy)$$

$$u_* + iv_* = e^{i\Omega t} [(u - \Omega y) + i(v + \Omega x)].$$

Los campos resultantes en el nuevo sistema son:

$$h = H \left[1 - \left(\frac{x_*}{a} \right)^2 - \left(\frac{y_*}{b} \right)^2 \right]$$

$$u_* = \frac{a}{b} \Omega_* y_*$$

$$v_* = -\frac{b}{a} \Omega_* x_*,$$

donde $\Omega_* = (\Omega(f - \Omega))^{1/2}$. Con este sistema Ripa (1987) estudió la estabilidad de los rodones.

A.2 Solución exacta en semiplano β

Las EP de aguas someras no tienen solución exacta en plano β (Flierl, 1987). Por lo tanto, no es posible reproducir una expresión analítica para un remolino en este plano. Sólo se sabe de antemano que son vórtices anticiclónicos aproximadamente circulares que se desplazan hacia el Oeste (Nof, 1981; Killworth, 1983).

En este apéndice se muestra una solución exacta de las EP sustituyendo la contribución de β en la segunda ecuación de movimiento por una constante arbitraria. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - (f_0 + \beta y)v = -g' \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f_0 u + f_0 c = -g' \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0,$$

donde el término β de la segunda ecuación ($\beta y u$) fue sustituido por la constante $f_0 c$; c es una constante arbitraria tal que $f_0 c \sim O(\beta y u)$. Este nuevo sistema tiene una solución exacta de la forma

$$h = H \left\{ 1 - \left[\frac{(x + ct)^2 + y^2 + \frac{\beta y^3}{3\omega} + \frac{2cy}{\omega} (1 - \Delta)}{R^2} \right] \right\} \quad (34)$$

$$u = \omega y + \frac{\beta}{2} y^2 - \Delta c$$

$$v = -\omega (x + ct),$$

con la constante Δ arbitraria y la profundidad máxima dada como

$$H = \frac{R^2}{2g'} \omega (f_0 - \omega),$$

o utilizando (33),

$$H = \frac{R^2}{2g'} (\Omega (f - \Omega))^{1/2} (f - 2\Omega),$$

que es equivalente a la ecuación (31) con $a = b = R$. Otra propiedad del sistema (34) es que se reduce a la solución exacta de plano f (32) cuando $\beta = 0$. Nótese que el cambio de coordenadas $x' \rightarrow x + ct, y' \rightarrow y$ elimina la dependencia en el tiempo, es decir, este sistema representa un remolino que se propaga estacionariamente al Este o al Oeste dependiendo del signo de c . En efecto, al calcular la velocidad del centro de masa del remolino \bar{u} (Killworth, 1983; Cushman-Roisin *et al.*, 1990) en la dinámica modificada se encuentra

$$\bar{u} = \frac{1}{V_T} \frac{D}{Dt} \int h x dS = -c,$$

donde la integral es sobre la superficie del remolino y $V_T = \int h dS$ es el volumen total.

El valor de la velocidad de propagación c se obtiene al exigir que h sea cero en $x = 0, y = \pm R, t = 0$. En estos puntos se anulan los dos últimos términos de la ecuación (34):

$$\frac{\beta R^3}{3\omega R^2} + \frac{2cR}{\omega R^2} (1 - \Delta) = 0,$$

al despejar c

$$c = \frac{\beta R^2}{6(\Delta - 1)}.$$

Sustituyendo este valor en el campo h se obtiene

$$h = H \left\{ 1 - \left[\frac{(x + ct)^2 + y^2}{R^2} - \frac{\beta_0}{3\omega} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \right] \right\}.$$

Del valor de c se obtiene una restricción para Δ al exigir que el remolino se mueva al Oeste:

$$c > 0 \implies \Delta > 1.$$

La forma de este remolino es asimétrica en la dirección Norte-Sur debido a las correcciones en el campo de h . Al implementar la modificación de la segunda ecuación en el modelo numérico, se realizaron varias corridas inicializando con un rodón circular con $R = 10^5 m$, $g' = 10^{-2} ms^{-2}$, $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$, $\beta = 2 \times 10^{-10} m^{-1} s^{-1}$. El valor de β se tomó un orden de magnitud mayor que el típico del océano para que se pudiera apreciar la asimetría del remolino en la dirección meridional. La figura 25 muestra que los contornos de h de la solución numérica comparados con el de la solución analítica coinciden bastante bien, por lo que se considera que el código permite reproducir satisfactoriamente al remolino emigrando al Oeste.

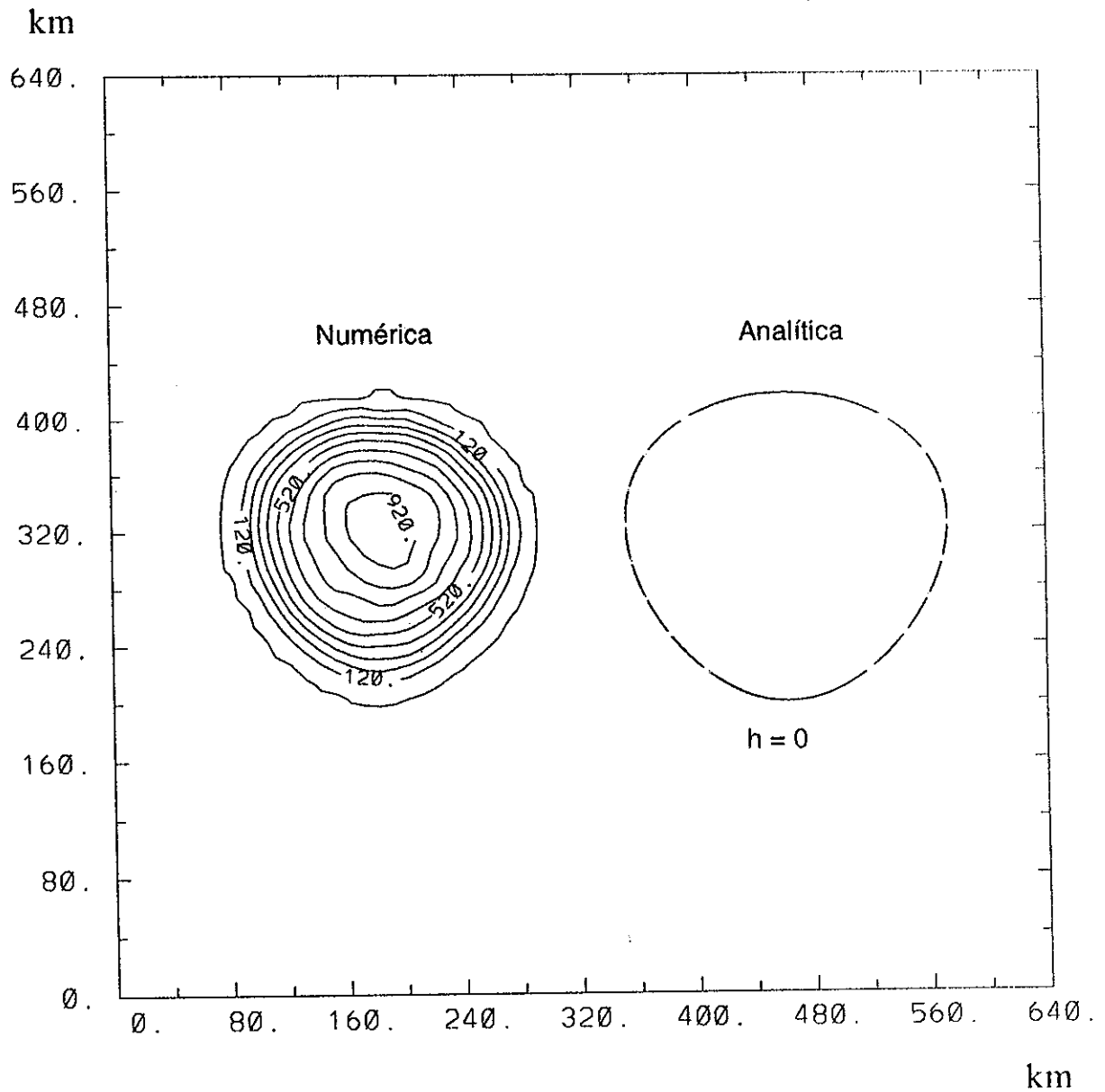


Figura 1: Contornos de profundidad de la solución numérica de un remolino en el plano β modificado comparados con el contorno $h=0$ de la solución analítica.

B VALIDEZ DEL REBOTE ELASTICO

B.1 Conservación de energía

En ausencia de fricción, el modelo de aguas someras conserva energía. La expresión analítica es

$$E = \frac{1}{2} \int_S \{h(u^2 + v^2) + g'h^2\} dS,$$

donde la integral de superficie es sobre todo el dominio. Una prueba esencial para verificar la validez del rebote elástico es que la energía, medida numéricamente, se conserve.

En función de los campos u, v y h en la malla, la energía es

$$E = \frac{1}{2} \sum \sum \{h_{ij}(u_{ij}^2 + v_{ij}^2) + g'h_{ij}^2\} \Delta x \Delta y.$$

De estos tres se cuenta solamente con h_{ij} . Para obtener u_{ij} y v_{ij} se extrapolaron las velocidades de las partículas a la malla de la siguiente forma

$$u_{ij}^2 = \frac{\sum w_k V_k u_k^2}{\sum w_k V_k},$$

es decir, se reparten las velocidades al cuadrado a los 9 puntos más cercanos promediando con los pesos w_k y con los volúmenes de las partículas V_k .

La figura 26 muestra las energías total, cinética y potencial contra el tiempo para el caso 11 de la serie 1 ($\beta = 0.02, \epsilon = 0.109$); el contacto con la pared fue a los 20 días. Las 3 están normalizadas con los valores teóricos iniciales del remolino. La serie muestra una variación de la energía total del orden del 5%; esta aceptable variación se consideró como una buena prueba de la condición de frontera. La energía cinética aumenta debido a que el giro del remolino se intensifica y la potencial disminuye ya que pierde profundidad (ver capítulo IV); ambas tienen oscilaciones inerciales, pero su suma (la energía total) no las presenta. La tendencia a aumentar de la energía total se puede deber a las partículas expulsadas al Sur que escapan a velocidades muy altas.

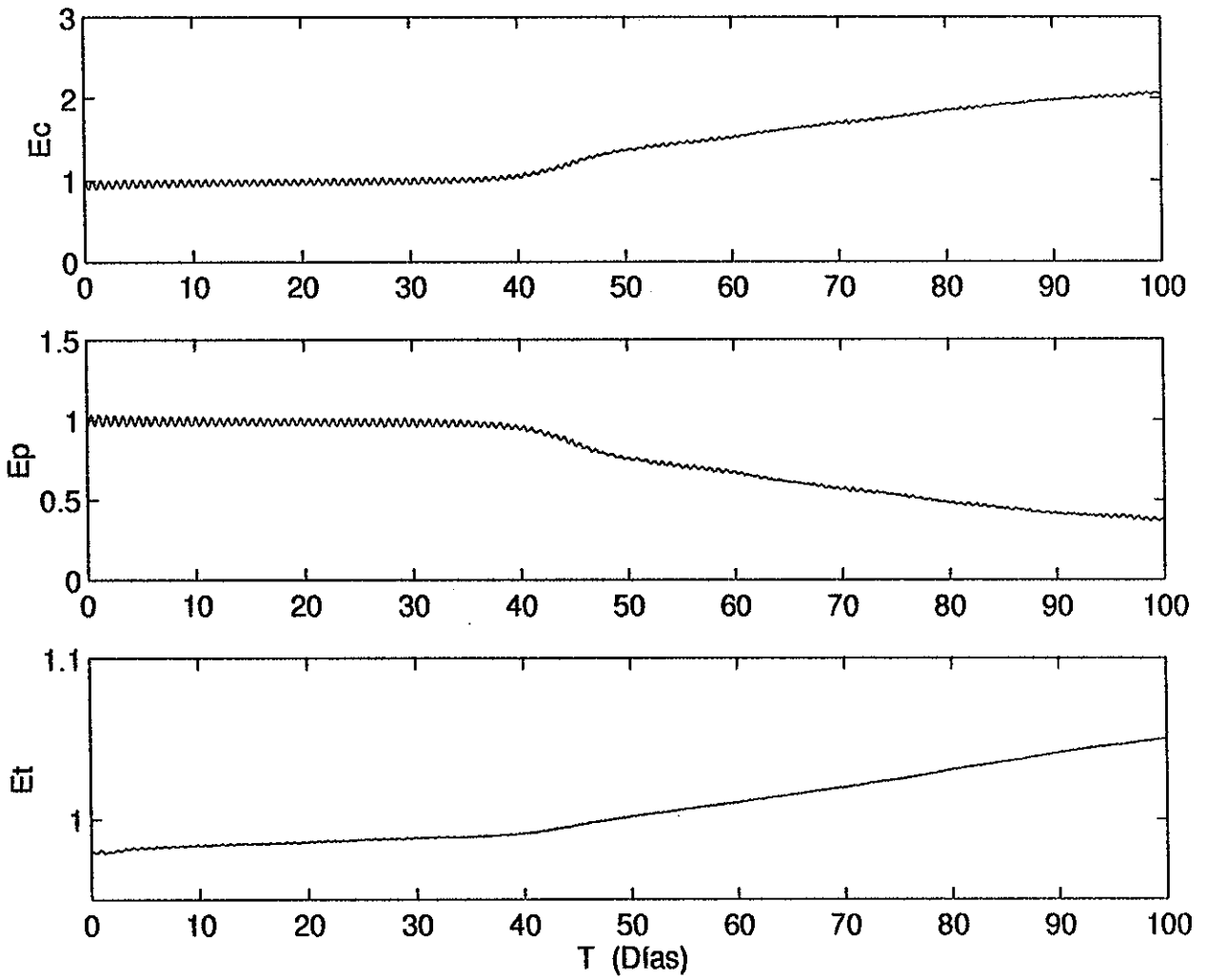


Figura 26: Conservación de energía total en el tiempo del caso 11 de la serie 1 ($\beta=0.02$, $\varepsilon=0.109$). El choque se produce en el día 20. Todas las energías están normalizadas con su valor teórico.

B.2 Rebote elástico aleatorio

Otra forma de evaluar la confiabilidad del rebote elástico fue el de repetir algunos experimentos haciendo rebotar a las partículas en una dirección aleatoria, pero conservando siempre la magnitud de la velocidad para evitar pérdidas de energía.

Para ello, considérese la figura 27, donde la partícula i rebota en la frontera colocada en $x = B$. Sea (x_0, y_0) la posición antes de rebotar (al tiempo t), (x_f, y_f) la posición al tiempo $t + \Delta t$ y (B, y_B) el punto de la frontera donde rebota. La longitud r es la distancia que recorre después de que toca la pared y el ángulo θ es la dirección del rebote, la cual se escoge de manera aleatoria en el rango $(-\pi/2, \pi/2)$.

Para obtener el punto y_B , sea la recta que une a (x_0, y_0) y (x_f, y_f) :

$$y = \left(\frac{y_0 - y_f}{x_0 - x_f} \right) (x - x_f) + y_f,$$

que, evaluada en (B, y_B) , resulta

$$y_B = \left(\frac{y_0 - y_f}{x_0 - x_f} \right) (B - x_f) + y_f.$$

Entonces, la distancia r es

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(y_f - y_B)^2 + (x_f - B)^2} \\ &= \sqrt{\left[y_f - \left(\frac{y_0 - y_f}{x_0 - x_f} \right) (B - x_f) - y_f \right]^2 + (x_f - B)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la nueva posición tiene coordenadas

$$(B + r \cos \theta, y_B + r \sin \theta).$$

Por otro lado, la magnitud de la velocidad es

$$U = \sqrt{u_i^2 + v_i^2},$$

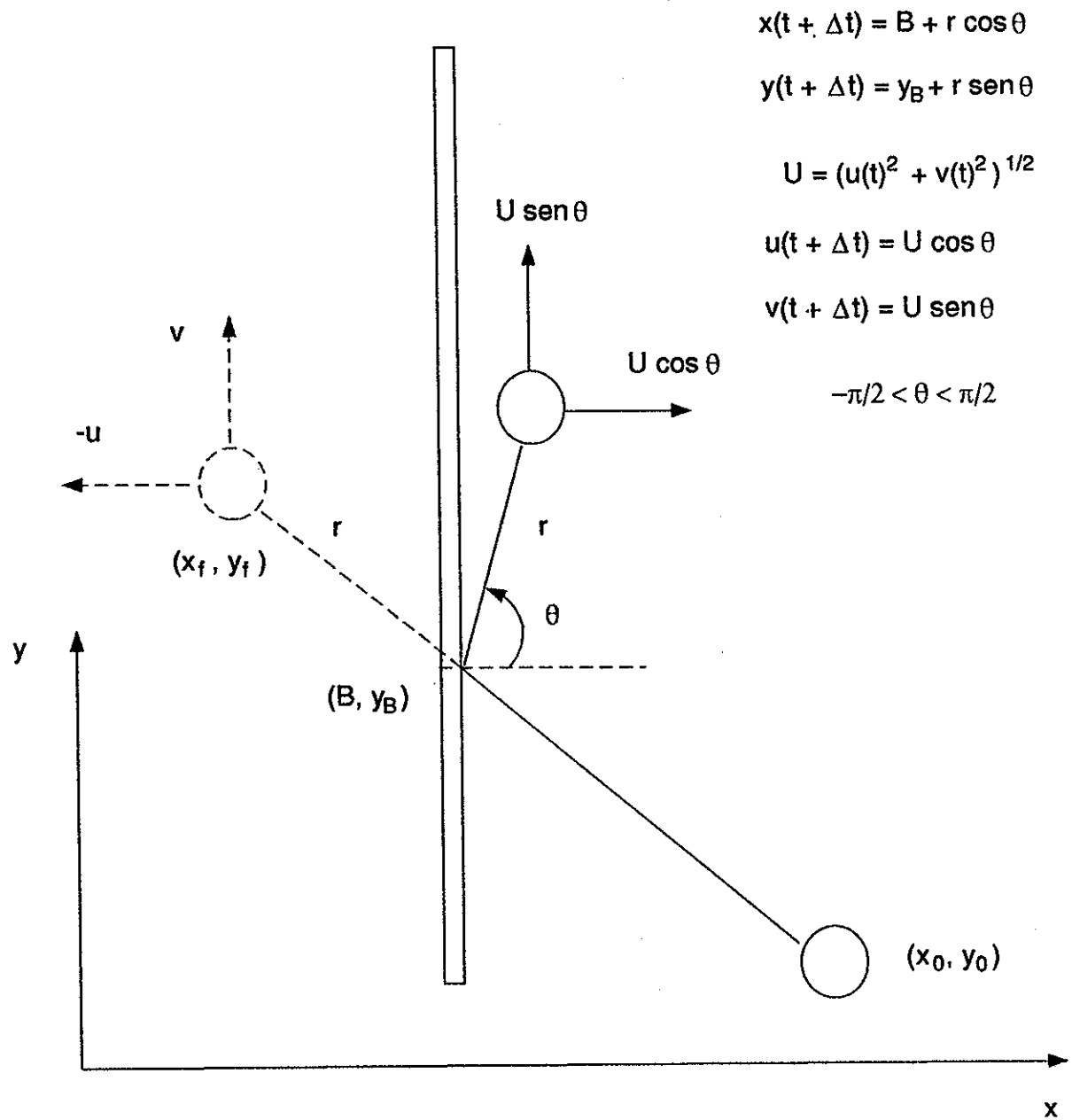


Figura 27: Rebote elástico aleatorio (cualitativamente arroja los mismos resultados que el rebote elástico).

entonces, para que se conserve esta magnitud, las componentes de la nueva velocidad son

$$(U \cos \theta, U \sin \theta).$$

De esta manera, la condición de frontera se implementó en el código numérico con el siguiente condicionante para cada partícula i

```

If  $x_i(t + \Delta t) < B$  then
  construye  $y_B$  con  $(x_0, y_0)$  y  $(x_f, y_f)$ 
  construye  $r$ 
  construye  $U$ 
  escoge aleatoriamente  $\theta$ 
   $x_i(t + \Delta t) = B + r \cos \theta$ 
   $y_i(t + \Delta t) = y_B + r \sin \theta$ 
   $u_i(t + \Delta t) = U \cos \theta$ 
   $v_i(t + \Delta t) = U \sin \theta$ 
end if

```

Los resultados encontrados con el rebote elástico y el aleatorio, coinciden cualitativamente muy bien.

B.3 Variaciones al rebote elástico

Por último, se hicieron algunas variaciones sencillas a la condición como las siguientes:

- a) reposicionar a la partícula no en donde hubiera rebotado, sino en su posición antes de rebotar y cambiando el signo de la velocidad;
- b) reposicionar a la partícula en la frontera con velocidad normal cero;
- c) en lugar de reposicionar a la partícula, dirigir el signo de la velocidad hacia afuera de la frontera hasta que salga de ella.

Con estas variaciones del rebote elástico se encontraron pequeños cambios en los resultados, pero cualitativamente el comportamiento del remolino no fue alterado significativamente. La razón de esta aparente insensibilidad a la condición de frontera puede

ser que esté relacionada con los pequeños cambios (respecto a la malla) de las posiciones de las partículas cuando sienten la pared, es decir, cuando rebotan son reposicionadas aproximadamente 0.5 km normalmente, mientras que la luz de malla es de 10 km. Esto significa que no importa mucho la manera de reposicionarlas puesto que la influencia en la malla (en los gradientes de presión) será mínima. En el caso b) se tiene pérdida de energía, lo cual era de esperarse puesto que se está eliminando una componente de la velocidad.