

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Óptica con orientación en Óptica Física**

**Estudio sobre la generación de fotones individuales
anunciados y cuánticamente puros en cristales
uniaxiales y biaxiales**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Kalo Traslosheros Zavala

Ensenada, Baja California, México

2016

Tesis defendida por

Kalo Traslosheros Zavala

y aprobada por el siguiente Comité

Dra. Karina Garay Palmett
Director del Comité

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Dr. Víctor Ruiz Cortes

Dr. Fernando Rojas Iñiguez

Dr. Enrique Gómez Treviño



Dr. Pedro Negrete Regagnon
Coordinador del Programa de Posgrado en Óptica

Dra. Rufina Hernández Martínez
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Kalo Traslosheros Zavala como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física.

Estudio sobre la generación de fotones individuales anunciados y cuánticamente puros en cristales uniaxiales y biaxiales

Resumen aprobado por:

Dra. Karina Garay Palmett

Directora de tesis

Diversos protocolos de comunicación y computación cuántica precisan de la disponibilidad de fuentes de fotones individuales. Típicamente, estos protocolos se basan en la interferencia de fotones provenientes de fuentes independientes, efecto que presentará una visibilidad óptima sólo si los fotones son indistinguibles, estando en estados cuánticamente puros. Con el propósito de satisfacer esta necesidad, el enfoque del presente trabajo de investigación está dirigido a proponer diseños de fuentes de fotones individuales anunciados y cuánticamente puros, factibles de implementación experimental. Para ello se ha realizado un estudio teórico y numérico del proceso de conversión paramétrica descendente espontánea acoplado a fibras ópticas monomodales, considerando como medio de generación cristales uniaxiales y biaxiales. Por una parte, se encontraron condiciones que conllevan a la factorabilidad del estado de dos fotones, minimizando así las correlaciones espaciales, espectrales y mixtas que se presentan usualmente en la pareja de fotones. Por otro lado, se desarrolló una herramienta numérica basada en una derivación semi-analítica, con un número reducido de aproximaciones, la cual posibilita la obtención de cantidades que describen a las fuentes estudiadas: pureza del estado de fotón individual, tasa de generación y eficiencia de anunciamiento. Asimismo, se implementó un algoritmo genético con la finalidad de encontrar parámetros experimentales que optimicen simultáneamente la pureza y la eficiencia de anunciamiento de una fuente en particular. Finalmente, como parte de los resultados tres fuentes de parejas de fotones son discutidas: i) Fuente basada en BBO, en una configuración de empatamiento de fases tipo I, no-colineal y con emisión degenerada en 810nm. ii) Fuente basada en BBO, en una configuración de empatamiento de fases tipo I, no-colineal y con emisión degenerada en 1550nm. iii) Fuente basada en PPKTP, en una configuración de empatamiento de fases tipo II, co-lineal y con emisión no degenerada en 775nm y 1590nm. Para todos los casos se determinaron condiciones experimentales que pueden conducir a la implementación de una fuente óptima de fotones individuales anunciados.

Palabras Clave: **conversión paramétrica descendente espontánea, fotones individuales anunciados, pureza de estados cuánticos, eficiencia de anunciamiento, optimización.**

Abstract of the thesis presented by Kalo Traslosheros Zavala as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Sciences in Optics.

Study concerning the generation of heralded pure single photons in uniaxial and biaxial crystals

Abstract approved by:

Dra. Karina Garay Palmett

Thesis Advisor

Many quantum communication and computing protocols rely on the availability of single photon sources. Typically, these protocols are based on the interference of photons from independent sources, and this effect will only occur completely if the photons are both indistinguishable, and in a pure quantum state. With the intention of satisfying this need, this research work is set to propose pure heralded single photon sources, feasible of experimental implementation. To this end, a theoretical and numerical study of the coupled to single mode fibers spontaneous parametric downconversion process in uniaxial and biaxial crystals has been conducted. On one hand, factorability conditions of the two photon state have been found, minimizing the spatial, spectral and mixed correlations usually present in the photon pairs. On the other hand, a numerical tool has been developed, based on a semi-analytical derivation, with a reduced number of approximations, which allows the calculation of the quantities that describe the studied sources: purity of the individual photon, photon pair rate generation and heralding efficiency. Moreover, with the goal of finding experimental parameters for the simultaneous optimization of purity and heralding efficiency of a particular source, a genetic algorithm was implemented. Finally, as part of the results, three different sources are discussed: i) Source based on a BBO crystal, in a non-collinear type I phase-matching configuration, with degenerate emission at 810nm. ii) Source based on a BBO crystal, in a non-collinear type I phase-matching configuration, with degenerate emission at 1550nm. iii) Source based on a PPKTP crystal, in a collinear type II phase-matching configuration, with non-degenerate emission at 775nm and 1550nm. For all cases, experimental conditions that can lead to the implementation of an optimal source of heralded single photons has been determined.

Keywords: spontaneous parametric downconversion, heralded single photon, quantum purity, heralding efficiency, optimization.

Dedicatoria

A mi padre, quien me enseñó el camino de la ciencia.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, al universo, a la naturaleza, a las coincidencias, y todo lo que me permite poder estar aquí y ahora. Poder ser.

Quiero agradecer a mis padres, Maria Elena y Carlos, porque además de brindarme su cariño incondicional, desde pequeño desarrollaron mi curiosidad científica. A mi madre, por su nobleza, por ser esa mujer fuerte, que me ha apoyado siempre, te amo mamá. A mi padre, por haber sido un ser humano digno de admiración, un gran amigo, y por seguir siendo una inspiración para mí. Eres parte de mí.

También quiero agradecer a mi abuela Amalia, a la cual no encuentro otra palabra para describirla más que ángel.

A los demás miembros de mi familia: abuelos, tíos, primos, con los que sé que siempre puedo contar.

A mis amigos de la vida: Joaquin, Caro, Daniel, Adrián, Mario, Peruzy, Chamo, Shembis, Vitor, Laura, Natys, Oscar, Toti, por regalarme tantos momentos de alegría y compartir conmigo mis momentos de amargura.

A mis amigos de la maestría: a mi hermano Aldo, la insuperable Alina, la incansable Fabiola, el dios de la óptica Jovanni, porque sin ustedes este proyecto no hubiera sido posible. Estoy en deuda. A Aaron y Daniel, por las charlas iluminadoras, consejos y ser ejemplo de que las cosas se pueden hacer.

A Michel, por escucharme, motivarme, ser mi amiga, mi cómplice. Ocupas un lugar especial en mi corazón.

A mi asesora Karina, por su dedicación, por ser ejemplo de alguien apasionada por

su trabajo, con ganas de compartir su conocimiento, por escuchar mis dudas y opiniones, gracias, te considero una amiga.

A mis sinodales, por darle seguimiento a este trabajo y hacer aportaciones certeras.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

...a mí por no rendirme.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	iii
Resumen en inglés	iv
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Lista de figuras	x
Lista de tablas	xiv
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Panorama y motivación	1
1.2 ¿Qué es un fotón?	3
1.3 ¿Qué es una fuente de luz no-clásica?	5
1.4 Estados puros y estados mixtos	6
1.5 Métodos para la generación de fotones individuales	8
1.6 Diseños de fuentes de fotones individuales basados en SPDC	10
1.7 Problema y objetivo	11
1.7.1 Objetivos específicos	11
1.8 Antecedentes	12
1.9 Estructura de la tesis	14
Capítulo 2. Conversión Paramétrica Descendente Espontánea	16
2.1 Polarización no-lineal	16
2.2 Conversión paramétrica descendente espontánea	17
2.3 Propiedades de empatamiento de fases en medios birrefringentes	19
2.4 Índices de refracción dependientes de la dirección de propagación	23
2.5 Estado de dos fotones generado por SPDC	27
2.6 Caracterización de fuentes de fotones individuales anunciados puros basadas en SPDC	34
2.6.1 Pureza del estado de fotón individual: Descomposición de Schmidt	35
Capítulo 3. SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales	38
3.1 Estado de dos fotones acoplado	39
3.2 Derivación de expresiones semianalíticas	47
Capítulo 4. Preparación de estados de fotón individual anunciado	51
4.1 Criterios de factorabilidad para el estado de dos fotones sin acoplar	52
4.1.1 Optimización de fuentes de fotón individual anunciado mediante algoritmo genético	58
Capítulo 5. Resultados	61
5.1 Propiedades de empatamiento de fases	61

5.2	Diseños específicos de fuentes de fotones individuales puros anunciados	64
5.2.1	BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la ventana de eficiencia de colección óptima de los fotodiodos de Silicio	65
5.2.2	BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la banda de telecomunicaciones	75
5.2.3	PPKTP: fuente de SPDC con un fotón anunciador en la ventana de eficiencia de colección óptima de los fotodiodos de Silicio y un fotón anunciado en el rango espectral de telecomunicaciones	81
5.3	Generalización del análisis de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales, a cualquier ángulo azimutal de colección (a lo largo del anillo de emisión)	84
Capítulo 6. Conclusiones		88
Lista de referencias bibliográficas		91
Apéndice		93
A.1	Variables vartheta 1-6	94
A.2	Equivalencia entre el cálculo numérico completo y el cálculo numérico obtenido mediante el desarrollo semi-analítico	97
A.3	Descomposición de Schmidt de un sistema bipartita	98

Lista de figuras

Figura		Página
1	Esquema de correlación entre una variable del fotón señal y una del fotón acompañante. a) Correlación negativa, b) ausencia de correlación. Variable s : variable asociada al fotón señal, variable i : variable asociada al fotón acompañante.	13
2	Esquema de conversión paramétrica descendente espontánea. Fotón de bombeo incidiendo con una frecuencia ω_p y un vector de onda \vec{k}_p , fotón señal generado a una frecuencia ω_s con un vector de onda \vec{k}_s , fotón acompañante generado a una frecuencia ω_i con un vector de onda \vec{k}_i	18
3	Representación de los principios de conservación de a) energía y b) momento en SPDC.	18
4	Esquema de la descomposición de una onda linealmente polarizada \vec{E} al viajar a través de un cristal uniaxial con un vector de onda asociado \vec{k}	20
5	Esquema que ilustra la especificación de la dirección de un haz de luz incidente con un vector de onda asociado \vec{k} con respecto a los ejes cristalográficos x, y, z mediante los ángulos θ_p y ϕ_p en un cristal biaxial.	20
6	Tipos de empatamiento de fases. a) Empatamiento de fases tipo I, b) empatamiento de fases tipo II.	21
7	Esquemas de cuasi-empatamiento de fases donde se muestra a) la inversión periódica de la polarización macroscópica del medio, b) la variación de la no-linealidad como función de la dirección de propagación y c) la fase extra añadida para lograr el empatamiento de fases.	22
8	Sistemas de referencia para el caso general que incluye cristales uniaxiales y biaxiales. Ejes cristalográficos (x, y, z) , ejes rotados (x', y', z') y ejes de laboratorio (x'', y'', z'')	23
9	Diagrama del proceso de SPDC en un cristal birrefringente. Especificación de los ángulos polares y azimutales θ_p, ϕ_p para el haz de bombeo \hat{s}_p con respecto a los ejes cristalográficos. Los ángulos polares y azimutales θ_s, ϕ_s para el haz señal \hat{s}_s y θ_i, ϕ_i para el haz acompañante \hat{s}_i están referenciados con respecto a los ejes de laboratorio.	25
10	Transformación de coordenadas para la descripción del haz de bombeo. a) Sistema (x, y, z) ubicado en la segunda cara del cristal. b) Consideración del término de <i>walk-off</i>	32
11	Esquema de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales para el caso de un haz de bombeo con radio de cintura W_0 y modos de colección con radios de cintura W_f	39

12	Relación entre los sistema coordenados. El sistema (x, y, z) está ubicado en la segunda cara del cristal en el centro del cono de emisión, el sistema (x', y', z') resulta de rotar un ángulo ϕ alrededor del eje z y desplazar una distancia h en la dirección de x y una distancia d en la dirección y , el sistema (x'', y'', z'') resulta de rotar el sistema (x', y', z') un ángulo θ alrededor del eje y' , el sistema (x''', y''', z''') resulta de permitir la sintonización de la cintura de los haces señal y acompañante una distancia ζ	44
13	Esquema de fotón individual anunciado. Al realizar una medición sobre el estado de dos fotones, el fotón remanente se proyecta en un estado puro solo si la función de amplitud conjunta que describe al estado bi-partita es factorizable.	51
14	Aproximación de la función sinc por gaussiana.	52
15	Correlaciones externas e internas entre las variables fotónicas: frecuencias de los fotones señal y acompañante respectivamente ω_s, ω_i ; ángulos polares de emisión de los fotones señal y acompañante respectivamente θ_s, θ_i ; ángulos azimutales de emisión de los fotones señal y acompañante respectivamente ϕ_s, ϕ_i	55
16	Dependencia de la JSI con la función espectral de bombeo $\alpha(\omega_s + \omega_i)$. a) Producto de la función de empatamiento de fases transversal ϕ_T y longitudinal ϕ_L dando como resultado la función de empatamiento de fases ϕ . b) Producto de la función de empatamiento de fases ϕ con una función de bombeo $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ caracterizada por un ancho de banda de bombeo menor al ancho de banda umbral, c) producto de la función de empatamiento de fases ϕ con una función de bombeo $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ caracterizada por un ancho de banda de bombeo mayor al ancho de banda umbral.	58
17	Algoritmo genético. a) Ejemplo de evolución de la población inicial hasta converger al mínimo de la función, b) diagrama de flujo del algoritmo genético.	59
18	Gráficas de empatamiento de fases para un cristal de BBO (uniaxial). a) $\Delta K(\Delta_{s,i}, \omega_p)$ con ω_p la frecuencia de bombeo y $\Delta_{s,i}$ la desintonización de las frecuencias ω_s y ω_i con respecto a la frecuencia de bombeo media, $\omega_p/2$, b) $\Delta K(\theta_p, \theta_{s,i})$ con θ_p el ángulo polar de bombeo y $\theta_{s,i}$ el ángulo polar de emisión de la pareja de fotones. c) $\Delta K(\theta_p, \lambda_{s,i})$ con $\lambda_{s,i}$ la longitud de onda de los fotones generados. d) $\Delta K(\phi_p, \theta_p)$ con ϕ_p el ángulo azimutal de bombeo.	62
19	Gráficas de empatamiento de fases para un cristal de BiBO (biaxial). a) $\Delta K(\Delta_{s,i}, \omega_p)$ con ω_p la frecuencia de bombeo y $\Delta_{s,i}$ la desintonización de las frecuencias ω_s y ω_i con respecto a la frecuencia de bombeo media, $\omega_p/2$. b) $\Delta K(\theta_p, \theta_{s,i})$ con θ_p el ángulo polar de bombeo y $\theta_{s,i}$ el ángulo polar de emisión de la pareja de fotones. c) $\Delta K(\theta_p, \lambda_{s,i})$ con $\lambda_{s,i}$ la longitud de onda de los fotones generados. d) $\Delta K(\phi_p, \theta_p)$ con ϕ_p el ángulo azimutal de bombeo.	64

Figura	Página	
20	Gráficas de empatamiento de fases para un cristal de PPKTP (biaxial). a) $\Delta K(\Lambda, \lambda_p)$ con Λ el periodo de la no linealidad del cristal periodicamente polarizado y λ_p la longitud de onda de bombeo. b) $\Delta K(\Lambda, \lambda_{s,i})$ con $\lambda_{s,i}$ la longitud de onda de los fotones señal y acompañante.	65
21	Síntesis de la JSI del estado de dos fotones para fuente típica. a) Envolverte espectral de bombeo, b) función de empatamiento de fases transversal, c) función de empatamiento de fases longitudinal, d) JSI.	66
22	Correlaciones externas para una fuente de SPDC típica. a) Correlación en ángulo polar, b) correlación en ángulo polar-espectral, c) correlación en ángulo azimutal.	68
23	Síntesis de la JSI del estado de dos fotones para una fuente factorizable. a) Envolverte espectral de bombeo, b) función de empatamiento de fases transversal, c) función de empatamiento de fases longitudinal, d) JSI.	69
24	Correlaciones externas de una fuente de SPDC acondicionada para ser factorizable. a) Correlación en ángulo polar, b) correlación espacial polar-espectral, c) correlación espacial azimutal.	70
25	Intensidad espectral conjunta a) e intensidad espectral conjunta condicionada b) para una fuente no acondicionada para ser factorizable. Note que estos resultados corresponden a la versión acoplada a fibras monomodales de la fuente descrita en la figura 21.	71
26	Intensidad espectral conjunta a) e intensidad espectral conjunta condicionada b) para una fuente acondicionada para ser factorizable. Note que estos resultados corresponden a la versión acoplada a fibras monomodales de la fuente descrita en la figura 23.	72
27	Propiedades espectrales de una fuente de SPDC acoplada a fibras ópticas monomodales, optimizada en factorabilidad y eficiencia de anunciamiento. a) JSI. b) JSI condicionada. Note el incremento en la pureza y eficiencia de anunciamiento comparado con el resultado en la figura 26.	73
29	Resultado de pureza, eficiencia de anunciamiento η_H y valor del parámetro de la fuente de SPDC, como función del coeficiente de importancia de pureza α introducido en la ecuación (129). a) Para la longitud del cristal L , b) la cintura del haz de bombeo W_0 , c) el ancho de banda de bombeo $\Delta\lambda$, d) la cintura de los modos de colección W_f	73
28	Comportamiento de eficiencia de anunciamiento η_H , número de pares de fotones N y pureza, en relación con los parámetros experimentales. a) En función de la longitud del cristal L , b) en función del ancho de banda de bombeo $\Delta\lambda$, c) en función de la cintura del haz de bombeo W_0 , d) en función de la cintura de los modos de colección W_f	74

Figura	Página
30 Fuente de BBO con fotones emitidos en la banda de telecomunicaciones. Dispositivo experimental para medir correlaciones espectrales.	76
31 JSI acoplada para una fuente de BBO emitiendo en longitudes de onda de telecomunicaciones.	78
32 Comportamiento de pureza, eficiencia de anuncio η_H y número de fotones N con respecto al ancho de banda de filtros aplicados a los modos de generación. a) Para la fuente no acondicionada, b) para la fuente con ángulo de emisión polar a 9.26° y c) para la fuente optimizada con ángulo de emisión polar a 7.25° . Las líneas continuas representan cuentas en coincidencias, las líneas segmentadas cuentas individuales.	80
33 JSI acoplada para un cristal de PPKTP.	82
34 Parámetros principales de optimización para fuente de PPKTP. a) Pureza y eficiencia de anuncio η_H en función del ancho de banda de bombeo $\Delta\lambda$, b) pureza y eficiencia de anuncio η_H en función de la cintura del haz de bombeo W_0 , c) pureza y eficiencia de anuncio η_H en función de la cintura del modo de colección del modo señal W_s	83
35 Distribución angular de emisión SPDC para diferentes cinturas del haz de bombeo. Fuente de BBO tipo I con ángulo de emisión externo de 3 grados. a) $W_0 = 250\mu m$, b) $W_0 = 50\mu m$, c) $W_0 = 25\mu m$, d) $W_0 = 10\mu m$, e) $W_0 = 5\mu m$, f) $W_0 = 2.5\mu m$	85
36 JSI acoplada como función del ángulo azimutal de medición. a) Para $\phi_s = 0$, b) para $\phi_s = 15$, c) $\phi_s = 30$, d) para $\phi_s = 45$, e) para $\phi_s = 60$, f) para $\phi_s = 75$, g) para $\phi_s = 90$	86
37 Pureza a), Eficiencia de anuncio η_H b), Número de fotones individuales $N_{s,i}$ c), Número fotones en coincidencia N d), en función del ángulo azimutal de detección para una fuente de SPDC, basada en BBO y con ángulo polar de emisión de 16°	87
A.1 Comparación de la JSI utilizando el cálculo completo y el cálculo semi-analítico para la fuente correlacionada y la fuente factorizable basada en PPKTP.	97

Lista de tablas

Tabla		Página
1	Resultados de aplicar el algoritmo genético a la fuente de BBO con emisión en $\lambda = 1550\mu m$ a un ángulo de 9.26°	78
2	Resultados de aplicar el algoritmo genético a la fuente de BBO con emisión en $\lambda = 1550\mu m$ permitiendo la optimización en ángulo polar de emisión.	79

Capítulo 1. Introducción

1.1. Panorama y motivación

Durante el siglo XVII existían dos teorías rivales relativas a la naturaleza de la luz: la teoría corpuscular propuesta por Newton y la teoría ondulatoria expuesta por su contemporáneo Huygens (Hecht, 2000). La teoría ondulatoria fue justificada convincentemente tanto por Young en 1801 con su experimento de la doble rendija, como por Fresnel y su interpretación ondulatoria de la difracción en 1815. Posteriormente, Maxwell le dió un sustento teórico firme con la derivación de la ecuación de onda en 1865. Para finales del siglo XIX la teoría corpuscular había quedado relegada a un simple interés histórico.

La situación cambió drásticamente en 1901 con la hipótesis heurística de Planck de que la radiación es absorbida y emitida en pequeños paquetes de energía o *quanta* -la cual logró resolver el problema de la catástrofe ultravioleta- y la explicación de Einstein del efecto fotoeléctrico en 1905 usando dicha cuantización de la energía. Además, contribuciones de personajes como Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Von Neumann, entre otros, cimentaron el nacimiento de la mecánica cuántica, lo que dió lugar en los 1920's al surgimiento de la teoría formal de la cuantización de la luz con la disertación de Dirac acerca de la teoría cuántica de la radiación, y al término *fotón* sugerido por Lewis. Un cambio revolucionario en el concepto de la luz se presentaba; ésta exhibía ahora una naturaleza dual, es decir, dependiendo de la implementación experimental se manifestaría ya sea su característica ondulatoria o corpuscular, y la teoría cuántica era la única capaz de explicar toda la gama de fenómenos (Fox, 2006).

Desde sus inicios, la mecánica cuántica predijo resultados a simple vista contraintuitivos, de hecho, varios experimentos pensados ("gedankenexperiment") fueron concebidos como un intento por resolver estas paradojas que iban en contra de la manera en la que se concebía el mundo que nos rodea.

La invención del láser en 1960 abrió las puertas al campo de la óptica cuántica experimental (Maiman, 1960). Por primera vez fue posible producir un haz de luz coherente con poca divergencia. Rápidamente se empezaron a descubrir fenómenos no lineales

surgidos de la interacción de este haz de luz intenso con materiales dieléctricos, siendo el primero de ellos la generación del segundo armónico (Franken *et al.*, 1961).

Fue hasta finales del siglo XX cuando pudieron ser demostradas nuevas técnicas de generación de estados de luz no-clásica, la primera de ellas una fuente tipo cascada que usaba el decaimiento en dos etapas de un átomo excitado de calcio (Kocher y Commins, 1967). Gracias a este tipo de fuentes se pudieron realizar en el laboratorio -usando fotones entrelazados- aquellos experimentos pensados. El más famoso tal vez fue el que refutó la teoría de variables ocultas en la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen (Einstein *et al.*, 1935) (Aspect *et al.*, 1981) contradiciendo así los principios de realismo (los estados físicos existen antes de ser medidos) y localidad (los efectos físicos tienen una velocidad de propagación finita) al violar las desigualdades de Bell; una manera de poner a prueba cuantitativamente la hipótesis de que la naturaleza es gobernada por el realismo local, estudiando la estadística presente entre los elementos de un estado físico (Bell, 1964). De hecho recientemente se han demostrado pruebas de violación a las desigualdades de Bell sin ambigüedades (Shalm, 2015).

Más allá de las pruebas a los modelos de la física fundamental, como las pruebas de realismo local o la búsqueda de ondas gravitacionales, la disponibilidad de fuentes de fotones individuales y parejas de fotones, así como detectores sensibles a nivel de fotones individuales, es de gran relevancia en la física aplicada y el desarrollo de tecnologías: la comunicación cuántica, a partir de la cual, en teoría, es posible generar protocolos de comunicación inviolables, tales como la distribución de llave cuántica (QKD, por sus siglas en inglés) aprovechando aspectos fundamentales de la mecánica cuántica como el hecho de que la medición de un estado cuántico perturba el sistema, para así, alertar al emisor y al receptor en caso de una comunicación puesta en peligro; la computación cuántica es una tecnología que promete una mejora exponencial a la computación de hoy en día, pero que conlleva retos importantes que incluyen fuentes de fotones a petición para un rango estrecho de frecuencias específicas, que presenten a su vez pureza y brillantez; la metrología para la cual el control de estados de luz no-clásica significa una mayor resolución que va más allá del límite clásico (Migdall *et al.*, 2013).

Muchos de los protocolos de comunicación y computación cuántica se fundamentan

en la incidencia simultánea de dos fotones provenientes de fuentes independientes en los puertos de un divisor de haz (Knill *et al.*, 2001). Este efecto, conocido como “Interferencia de Hong-Ou-Mandel” (Hong *et al.*, 1987) presentará una visibilidad óptima solamente si los dos fotones son indistinguibles en estados cuánticamente puros (Ghosh y Mandel, 1987) (Bovino *et al.*, 2005) (Rohde y Ralph, 2005).

1.2. ¿Qué es un fotón?

Se puede presentar al fotón como la unidad fundamental de excitación asociada a un modo cuantizado del campo electromagnético. El formalismo surge de considerar las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en una cavidad óptica con paredes perfectamente conductoras (Gerry y Knight, 2005). La cavidad define una serie de soluciones longitudinales conocidas como modos; ondas estacionarias con un número entero de longitudes de onda en su camino óptico. Las soluciones dependientes del tiempo de estos modos tienen la forma de oscilaciones armónicas cuantizadas y por tanto tienen niveles de energía E_i discretos:

$$E_i = \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i, \quad (1)$$

con $n_i = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, \hbar la constante de Planck reducida y ω_i las frecuencias permitidas por las condiciones de frontera impuestas en la cavidad.

Se pueden definir operadores escalera \hat{a}_i^\dagger y \hat{a}_i conocidos como operadores de creación y aniquilación, respectivamente, los cuales incrementan o decrementan por uno el número de excitaciones del campo en un modo i dado, es decir, crean o destruyen un fotón en el modo i :

$$\hat{a}_i^\dagger |0\rangle = |1\rangle, \quad (2)$$

$$\hat{a}_i |1\rangle = |0\rangle, \quad (3)$$

donde $|1\rangle$ es el vector de estado de un modo que contiene un fotón y $|0\rangle$ representa un modo que no contiene fotones, el llamado “estado vacío”. Es importante mencionar que aunque el valor esperado del campo electromagnético en el estado vacío es cero, el valor esperado de la intensidad del campo es diferente de cero (Scully y Zubairy, 1997); la energía del estado base del oscilador armónico cuántico da lugar a que ningún modo se encuentre “vacío”, fluctuaciones con energía $\sum_i (1/2)\hbar\omega_i$ siempre estarán presentes.

Debido a que los fotones son soluciones a las ecuaciones de Maxwell, se podría pensar que éstos tienen una onda plana asociada con una polarización, momento y energía específicos. Sin embargo, este no puede ser el caso ya que un fotón con una sola frecuencia tendría que tener una duración infinita debido al principio de incertidumbre entre la energía y el tiempo. De igual manera un momento bien definido equivaldría a un fotón totalmente indefinido en el espacio. Entonces, el fotón individual no puede ser pensado como una simple onda plana con polarización, momento y energía únicos, esos estados son más bien casos especiales. La superposición de estados es el común denominador. Tras su detección la luz se muestra con atributos bien definidos, pero en el tránsito las cosas son muy diferentes. Es por eso que muchos optan por una descripción más pragmática del fotón: lo que hace “click” en el detector (Glauber, 1963).

Lo anterior pone en evidencia la necesidad de una definición más formal para el fotón. Una descripción general que incluya la distribución de direcciones de propagación y que lleve implícita la variable de frecuencia. En este sentido, se puede describir al fotón en términos de su momento $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, conectado a la frecuencia a través de la relación de dispersión

$$|\vec{k}(\omega)| = \frac{n(\omega)\omega}{c}, \quad (4)$$

con $n(\omega)$ el índice de refracción en el medio en el que se encuentre el fotón y c la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, en lo sucesivo se estará utilizando el siguiente formalismo para describir al fotón:

$$|\psi_i(\vec{k})\rangle = \int d\vec{k}_i f(\vec{k}_i) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle. \quad (5)$$

De esta forma, para conocer el estado de fotón individual se debe sumar sobre todos los posibles momentos, con un peso dado por la función de distribución de momentos del fotón en particular, $f(\vec{k})$.

1.3. ¿Qué es una fuente de luz no-clásica?

Formalmente, la distinción entre una fuente de luz no-clásica y una fuente de luz clásica puede hacerse expandiendo el estado cuántico del campo electromagnético en una base de estados coherentes, pesados por una distribución de quasiprobabilidad. Si la quasiprobabilidad es positiva y finita, entonces la luz se considera clásica, si no lo es, se considera no-clásica.

Ejemplos de luz clásica incluyen fuentes térmicas como luz emitida por un cuerpo negro y luz coherente como la emitida por un láser. En contraste, fuentes de luz no clásica incluyen: estados comprimidos, para los cuales la varianza de una de las cuadraturas del campo (posición, momento) es menor a $1/2$; estados de número o estados de Fock, los cuales son estados con un número bien definido de fotones en cada modo y eigenestados de la energía y el momento; estados de fotón individual como un caso específico de estados de Fock (Migdall *et al.*, 2013).

Es posible hacer una definición cualitativa en términos de estadística de fotones comparando la varianza con respecto a la distribución de número de fotones en el tiempo: mientras que la varianza de una fuente clásica es por lo menos Poissoniana, la emisión de una fuente de luz no-clásica tiene una varianza menor (sub-Poissoniana). Esto proviene del hecho de que las fuentes de fotones individuales no pueden emitir fotones por cierto tiempo después de haber emitido el fotón anterior (antibunching) lo que le da cierto grado de orden a la salida de la fuente. En contraste, las fuentes clásicas como las fuentes térmicas, tienen una probabilidad alta de generar fotones adicionales cerca de los ya existentes (bunching) lo que va de la mano con mayores fluctaciones estadísticas.

1.4. Estados puros y estados mixtos

Las representaciones de estados de fotones individuales que fueron consideradas en la sección 1.2 son ejemplos de estados cuánticamente puros; pueden ser completamente descritos por un vector de estado $|\Psi\rangle$. Sin embargo, un sistema cuántico puede encontrarse en un *estado mixto*, una mezcla estadística de varios estados. De manera explícita, supongamos que un sistema cuántico tiene la probabilidad p_1 de encontrarse en el estado $|\Psi_1\rangle$, o puede encontrarse en el estado $|\Psi_2\rangle$ con una probabilidad p_2 , o en el estado $|\Psi_3\rangle$ con una probabilidad p_3 y así sucesivamente. Resulta importante definir un operador matemático que describa estos estados y que proporcione una medida cuantificable de pureza: el operador de densidad.

Formalmente, se dice que un sistema cuántico está en un estado puro cuando puede ser representado como una superposición lineal de vectores base $|n\rangle$, $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ (Lambropoulos y Petrosyan, 2007). El operador de densidad $\hat{\rho}$ para tal sistema es definido como:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|. \quad (6)$$

Usando dicha representación de $|\Psi\rangle$, se tiene que:

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m c_n c_m^* |n\rangle \langle m| = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|, \quad (7)$$

donde $\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle$ son los elementos de matriz del operador de densidad, los cuales para estados puros están dados por $\rho_{nm} = c_n c_m^*$. El operador de densidad para un estado puro tiene las propiedades:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) \equiv \sum_n \rho_{nn} = 1 \quad \text{y} \quad |\rho_{mn}|^2 = \rho_{mm}^2 \rho_{nn}^2, \quad (8)$$

de lo que se obtiene que

$$Tr(\hat{\rho}^2) = 1 \quad \text{y} \quad \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}. \quad (9)$$

No obstante, como ya fue mencionado, un sistema cuántico puede no estar en estado puro. De hecho, en la mayoría de los casos los sistemas físicos no lo están. Una razón básica para esto es que los sistemas cuánticos pudieron haber interactuado con otros sistemas, lo que resulta en inseparabilidad de los vectores de estado de los sistemas individuales, propiedad conocida como entrelazamiento. Para un sistema en una mezcla de estados $|\Psi_j\rangle$ con $P_j \geq 0$ la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado particular $|\Psi_j\rangle$, el operador de densidad puede ser escrito como

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j|. \quad (10)$$

De lo que, expresando cada $|\Psi_j\rangle$ en sus vectores base se obtiene

$$\hat{\rho} = \sum_j \sum_{nm} P_j c_n^j (c_m^j)^* |n\rangle \langle m|, \quad (11)$$

$$Tr(\hat{\rho}) \equiv \sum_n \rho_{nn} = \sum_j P_j \sum_n |c_n^j|^2 = \sum_j P_j. \quad (12)$$

Para que $Tr(\hat{\rho}) = 1$, se debe de cumplir $\sum_j P_j = 1$, lo cual es consistente con la interpretación de P_j como la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $|\Psi_j\rangle$. Es importante notar que para los elementos de matriz del operador de densidad de un estado mixto, se tiene

$$\rho_{nm}\rho_{mn} = \sum_j \sum_{j'} P_j P_{j'} c_n^j (c_n^{j'})^* c_m^{j'} (c_m^j)^*, \quad (13)$$

$$\rho_{nn}\rho_{mm} = \sum_j \sum_{j'} P_j P_{j'} |c_n^j|^2 |c_m^{j'}|^2 \neq \rho_{nm}\rho_{mn}, \quad (14)$$

por lo que

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1, \quad (15)$$

lo cual es una diferencia considerable entre los operadores de densidad de los estados puros y mixtos.

En el contexto de los protocolos de información cuántica, para muchos de los casos cualquier impureza en el estado cuántico es perjudicial. Los estados mixtos son incoherentes y no son capaces de producir la interferencia cuántica de calidad requerida en la implementación de éstos. Por tanto, es un reto y un tema de investigación de gran interés el generar estados de fotones individuales cuánticamente puros (Ladd *et al.*, 2010)(Charles *et al.*, 2010).

1.5. Métodos para la generación de fotones individuales

Una pregunta importante que se puede hacer es ¿Cómo sería una fuente de fotones individuales puros ideal? Para contestar esta pregunta es necesario analizar que características debe poseer este tipo de fuentes. Primeramente, los fotones producidos por fuentes independientes deben ser indistinguibles por lo que se debe tener control sobre todos los grados de libertad -distribución de frecuencias, tiempo de emisión, estructura espacial, momento, y polarización- para asegurarnos que sean idénticas (Mosley, 2007). Por otra parte, además de que los fotones deben de ser cuánticamente puros, estos deben estar disponibles a petición: se puede pensar en una “pistola de fotones”, la cual cada que uno presiona el gatillo dispara un fotón con una probabilidad de uno.

Ya que la realidad aún está lejos del caso ideal, podemos comenzar por ver la aproximación más sencilla de una fuente de fotones individuales. ¿Por qué no sencillamente tomar una fuente térmica (por ejemplo una lámpara de descarga) o un láser pulsado y atenuarlo hasta el nivel de cuentas individuales? La respuesta está en la estadística, ambas fuentes podrían tener menos (cero) o más de un fotón por intervalo de tiempo o pulso, lo que claramente se contrapone con lo que se busca en el caso ideal.

En la práctica, los diferentes métodos para generar fotones individuales se pueden dividir en dos categorías: emisores individuales y emisores múltiples.

En el caso de los emisores individuales, la fuente puede ser un átomo, una molécula o un par electrón-hueco en un punto cuántico, con una transición radiativa adecuada entre dos de sus estados cuánticos. La cavidad y el emisor están fuertemente acoplados de manera que sea posible coleccionar la emisión en los modos electromagnéticos de la misma (Chunnillall *et al.*, 2014). Aunque este tipo de fuentes ofrecen la creación casi determinística de fotones, la eficiencia de colección es pobre y se requieren técnicas de fabricación complicadas y equipos de vacío y/o criogénicos.

Con respecto a los emisores múltiples generalmente un tren de pulsos pasa a través de un medio no lineal (cristal o fibra óptica) y genera parejas de fotones de manera simultánea. La creación de parejas de fotones es aleatoria en el tiempo y eventos multifotónicos (creación de más de una pareja) pueden surgir; no obstante, la detección de uno de los fotones creados puede *anunciar* la presencia del otro (Mosley *et al.*, 2008). Esta opción presenta mayor flexibilidad en cuanto al control de las propiedades de generación y correlaciones de los fotones emitidos.

Ya sea que la pareja de fotones se genere en un cristal por conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC por sus siglas en inglés) (Burnham y Weinberg, 1970) o en una fibra por mezclado de cuatro ondas espontáneo (SFWM por sus siglas en inglés) (Stolen, 1975), estas fuentes producen estados de dos fotones correlacionados en grados de libertad de variable continua -como lo son el espacio y la frecuencia-, lo cual tras la foto-detección de uno de los fotones en el proceso de anunciamiento, proyecta al fotón individual remanente en un estado mixto.

Una estrategia común para lograr la pureza de los fotones individuales anunciados es mediante filtrado espacial y temporal del estado de dos fotones, matemáticamente hablando, de la función de intensidad conjunta (U'Ren *et al.*, 2005). Sin embargo, esta estrategia tiene la desventaja de que para lograr la pureza óptima es necesario que el filtrado sea agudo, comprometiendo así la tasa de fotones disponibles.

Además de la necesidad de que pureza y tasa de generación (flujo emitido) sean altas,

es importante a su vez que la fuente presente una buena eficiencia de anunciamiento, entendida como la razón entre el valor esperado de número de pares de fotones generados y el valor esperado del número de fotones individuales en el modo anunciador. En términos simples, que cada que se detecte uno de los fotones anunciadores efectivamente se tenga un fotón anunciado disponible.

Es por eso que idealmente se busca acondicionar la fuente haciendo ingeniería del estado de dos fotones para lograr la factorabilidad y no tener que recurrir al filtrado.

1.6. Diseños de fuentes de fotones individuales basados en SPDC

Si bien las primeras fuentes de SPDC fueron observadas a finales de los 1960's (Magde y Mahr, 1967) (Byer y Harris, 1968), éstas aumentaron su popularidad a partir de la demostración de una fuente altamente brillante con fotones entrelazados en polarización (Kwiat *et al.*, 1999). Desde entonces el cristal de Beta Borato de Bario (BBO), en una configuración de empatamiento de fases tipo I, que se bombea con una longitud de onda centrada en 405 nm produciendo parejas de fotones con longitud de onda centrada en 810 nm, se ha venido utilizando ampliamente. No obstante, es deseable tener fotones en la ventana de telecomunicaciones para que éstos sean compatibles con la red de telecomunicaciones actual (varias tecnologías de procesamiento cuántico se basan en la transmisión de fotones por fibra óptica). Como es sabido, en el presente dicha red opera en el infrarrojo, específicamente entre las zonas de menores pérdidas por absorción y dispersión (Agrawal, 2013). Para satisfacer esta demanda, una fuente que emita pares de fotones alrededor de 1500 nm podría ser aplicada, con la desventaja de que los detectores disponibles para esta banda espectral, basados en Arsenuro de Indio y Galio (InGaAs) tienen una limitación en cuanto a la eficiencia de detección ($< 50\%$) (Migdall *et al.*, 2013). Por lo tanto, un diseño óptimo desde el punto de vista práctico sería una fuente de SPDC con emisión de un fotón anunciador en el infrarrojo cercano, correspondiente al rango de eficiencia máxima de detección de los fotodiodos de Silicio (Si) ($> 50\%$) y otro anunciado en la banda de telecomunicaciones.

1.7. Problema y objetivo

En virtud de la creciente necesidad de fuentes de fotones individuales, esta tesis tiene como objetivo estudiar teórica y numéricamente el proceso de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales, considerando como medio de generación cristales uniaxiales y biaxiales, tales como BBO y PPKTP. Esto con el fin de proponer diseños de fuentes de fotones individuales puros anunciados factibles de implementación experimental. La importancia de este trabajo reside en acondicionar este tipo de fuentes para optimizar las tres cantidades claves que las describen: pureza, tasa de generación y eficiencia de anunciamiento.

1.7.1. Objetivos específicos

Componente teórica:

- Derivar expresiones del estado cuántico de parejas de fotones producidas en cristales birrefringentes.
- Derivar condiciones analíticas para la factorabilidad de las parejas de fotones.
- Derivar expresiones que representen los estados cuánticos de las parejas de fotones acoplados a fibras ópticas monomodales.
- Derivar expresiones para calcular las tasas de cuentas individuales y en coincidencias para SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales.
- Mientras sea posible, para todo lo anterior se buscará llegar a expresiones analíticas cerradas, aunque sea en algunos límites.

Componente numérica:

- Estudiar las propiedades de empatamiento de fases para SPDC en cristales uniaxiales y biaxiales, tales como BBO, Triborato de Bismuto (BiBO) y Titanil fosfato de potasio periódicamente polarizado (PPKTP).

- Modelar numéricamente la caracterización completa del estado de dos fotones generados por el fenómeno de SPDC: tasa de cuentas individuales y en coincidencias, eficiencia de anunciamiento y pureza de los paquetes de onda unifotónicos anunciados.
- Utilizando el modelo anterior, analizar diseños específicos de fuentes de fotones individuales anunciados basados en SPDC en distintos cristales tales como:
 - BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la ventana de eficiencia colección óptima de los fotodiodos de Silicio ($\lambda_{s,i} = 800nm$).
 - BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la banda de telecomunicaciones ($\lambda_{s,i} = 1550nm$).
 - PPKTP: fuente de SPDC con un fotón anunciador en la ventana de eficiencia de colección óptima de los fotodiodos de Silicio ($\lambda_s = 775nm$) y un fotón anunciado el rango espectral de telecomunicaciones ($\lambda_i = 1590nm$).
- Analizar las dependencias de pureza, eficiencia de anunciamiento y tasa de generación con los diferentes parámetros de la fuente, principalmente con: la longitud del cristal, el ancho de banda de bombeo, la cintura del haz de bombeo, la cintura de los modos de colección de las fibras ópticas.
- Optimizar simultáneamente las cantidades que caracterizan las fuentes de fotones individuales anunciados, en particular la medida de pureza y la eficiencia de anunciamiento, mediante la aplicación de un algoritmo genético.

1.8. Antecedentes

En cuanto a las aplicaciones, como ya fue mencionado en la introducción, fuentes de fotones individuales puros son necesarios para implementación de diversos protocolos de comunicación y cómputo cuántico. En particular, el artículo “A scheme for efficient quantum computation with linear optics” (Knill *et al.*, 2001) propone un protocolo de computación cuántica conocido como KLM el cual está basado solamente en elementos ópticos lineales, tales como divisores de haz, moduladores de fase y fuentes y detectores de

fotones individuales. En este esquema, se realizan compuertas lógicas con base en el fenómeno de interferencia de Hong-Ou-Mandel por lo que los fotones individuales puros son fundamentales.

En relación con implementaciones de fuentes de fotones individuales anunciados puros, el precedente más claro es el trabajo de L.E. Vicent y colaboradores, publicado bajo el título “Design of bright, fiber coupled and fully factorable photon pair sources” (Vicent *et al.*, 2010). En este trabajo se muestra teórica y numéricamente que es posible factorizar la función de peso que describe al estado cuántico conformado por el sistema de dos fotones emitido por SPDC. La factorabilidad de dicha función de peso implica suprimir correlaciones en los diferentes grados de libertad de variable continua que presenta la pareja de fotones. Con esto, la detección de uno de los fotones del par en el proceso de anunciamiento, implica la presencia de un fotón con una medida de pureza óptima en el modo conjugado.

En este trabajo se muestran diagramas de correlación entre las variables del fotón señal y el fotón acompañante, como las presentadas en los esquemas de la figura 1.

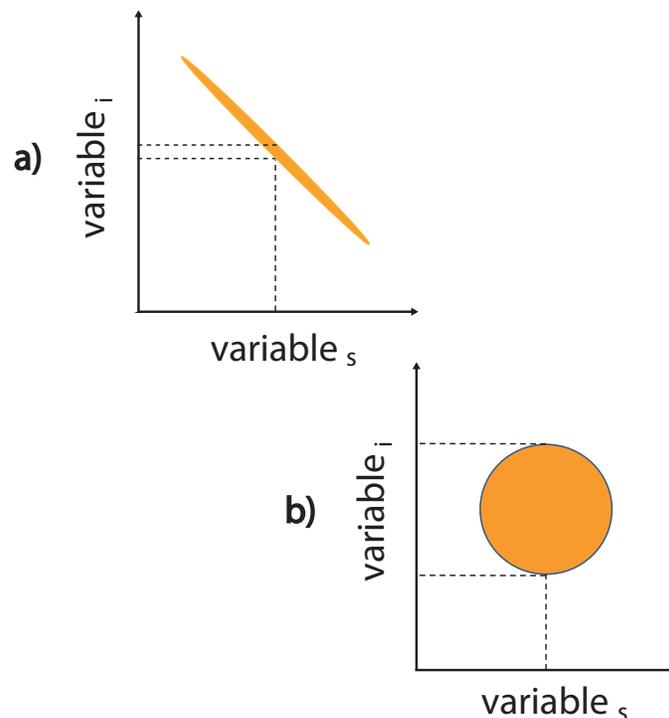


Figura 1: Esquema de correlación entre una variable del fotón señal y una del fotón acompañante. a) Correlación negativa, b) ausencia de correlación. Variable_s: variable asociada al fotón señal, variable_i: variable asociada al fotón acompañante.

Los esquemas presentados en la figura 1a) y b) son útiles para entender el significado físico de las gráficas de correlación. El esquema de la figura 1a) es un ejemplo de correlación negativa en la pareja de fotones: a un valor de la variable del fotón señal le corresponde casi de manera determinística un valor de la variable asociada al fotón acompañante. Por otra parte, el esquema de la figura 1b) muestra ausencia de correlación: para un valor de una variable del fotón señal, existe una incertidumbre significativa asociada con la variable del fotón acompañante.

Posteriormente, basados en los resultados de L.E. Vicent, K. Zielnicki y colaboradores implementaron experimentalmente una fuente de fotones individuales anunciados, trabajo publicado bajo el título “Engineering of near-IR photon pairs to be factorable in space-time and entangled in polarization” (Zielnicki *et al.*, 2015). En este trabajo, se notó que el hecho de realizar ingeniería de estado para factorizar la función de peso que describe al estado de dos fotones, deja al estado de fotón individual con una medida de pureza óptima, sin embargo, compromete la eficiencia de anunciamiento (cantidad discutida en la sección 1.5). Se mostró que dependiendo de la aplicación a la que se ha destinado la fuente, puede ser conveniente considerar una fuente no acondicionada y posteriormente aplicar filtrado. Esto con el inconveniente de sacrificar el flujo generado, ya que en el caso de una fuente típica el parámetro de pureza tiende a uno conforme el ancho del filtro tiende a cero.

Estos resultados reiteran la necesidad de obtener un estado de dos fotones con una función de peso factorizable, así como la necesidad de una optimización simultánea del parámetro de pureza, la tasa de generación de pares de fotones y la eficiencia de anunciamiento.

1.9. Estructura de la tesis

La presente tesis ha sido estructurada de la siguiente manera:

En el capítulo II se describe el proceso de conversión paramétrica descendente espontánea, a partir del cual se generan parejas de fotones. Se discutirán las propiedades de empaquetamiento de fases o conservación de momento, para lo cual es necesario un análisis de las propiedades lineales del medio de generación, en particular la dependen-

cia del índice de refracción del cristal -uniaxial y biaxial- con respecto a la frecuencia y a la dirección de propagación de los campos involucrados. Posteriormente se deriva el estado cuántico de SPDC a la salida del cristal, mostrando la función de amplitud conjunta que describe al estado.

En el capítulo III se describe el estado de dos fotones acoplado a fibras ópticas monomodales, (SMF, por sus siglas en inglés) así como la función de amplitud espectral conjunta $f(\omega_s, \omega_i)$ y la función de amplitud espectral conjunta condicionada $f_s(\omega_s, \omega_i)$. Asimismo se deriva el valor esperado del número de pares de fotones acoplados a las fibras N_f , y del número de fotones individuales anunciados en una de las fibras, por ejemplo la del modo señal N_{fs} . Finalmente, en este capítulo se describe un método semianalítico para evaluar N_f y N_{fs} , con un costo computacional bajo.

En el capítulo IV el enfoque se centra en el acondicionamiento del proceso de SPDC con el fin de obtener estados de dos fotones factorizables. Se describen las condiciones de factorabilidad y el proceso de anunciamiento.

En el capítulo V se muestran los resultados obtenidos en relación con las propiedades de empatación de fases, la función de amplitud conjunta del estado de SPDC y la función espectral conjunta asociada al estado acoplado a SMF para dos fuentes degeneradas de BBO -una fuente que emite fotones en 810 nm y otra que genera fotones en la longitud de onda de las telecomunicaciones (1550 nm)- y una fuente PPKTP que genera uno de sus fotones en 1590 nm. Posteriormente se muestran los comportamientos del parámetro de pureza, el flujo fotónico y la eficiencia de anunciamiento, en función de los diferentes parámetros experimentales. Por último se presentan resultados derivados de un algoritmo genético que fue implementado con el fin de derivar condiciones para lograr simultáneamente una óptima pureza y eficiencia de anunciamiento.

En el capítulo VI se presentarán las conclusiones de este trabajo de investigación.

Capítulo 2. Conversión Paramétrica Descendente Espontánea

En el capítulo anterior se mencionó que la conversión paramétrica descendente espontánea es un método común y flexible para generar fotones anunciados cuánticamente puros. En este capítulo se describe más a fondo este proceso en el contexto de la óptica no lineal y se presenta la derivación del estado cuántico de dos fotones.

2.1. Polarización no-lineal

Los materiales que nos conciernen en óptica se pueden pensar como una colección de partículas cargadas: núcleos de iones y electrones. Cuando un campo eléctrico es aplicado a éstos, las cargas se desplazan; las cargas positivas tienden a moverse en la dirección del campo, mientras que las negativas se mueven en dirección opuesta. En materiales conductores, parte de las partículas cargadas es libre de moverse a través del material mientras el campo eléctrico es aplicado, dando lugar a una corriente. Por otra parte, en los materiales dieléctricos, aunque con cierta “elasticidad”, las cargas están ligadas. Entonces el desplazamiento de las cargas es transitorio cuando el campo es aplicado; son desplazadas ligeramente de sus posiciones usuales y es este movimiento lo que resulta en una colección de momentos dipolares inducidos. En otras palabras, el efecto del campo sobre un medio dieléctrico es inducir una polarización.

Cuando la intensidad del campo incidente es mucho menor que la intensidad que liga el electrón al átomo, el efecto de la polarización será proporcional al campo incidente, dando lugar a un efecto lineal:

$$P_i^{(L)}(\omega) = \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j(\omega), \quad (16)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, E_j es el campo en cualquiera de las tres direcciones cartesianas (i, j, k) y $\chi_{ij}^{(1)}$ representa la susceptibilidad eléctrica a primer orden, un tensor de segundo rango. (Se usa notación de Einstein por lo que se suprime el símbolo de sumatoria, pero queda implícita la suma cuando hay índice repetido).

Este comportamiento lineal puede modelarse como un movimiento armónico ya que podemos suponer que los electrones están atados a los iones de la misma manera que una masa a un resorte. Sin embargo, para campos mayores, comparables con el campo eléctrico atómico, la fuerza de restitución se vuelve no lineal y da lugar a términos anarmónicos (Butcher y Cotter, 1990) . Lo cual se expresa:

$$P_k^{(L+NL)}(\omega) = \epsilon_0 \chi_{ik}^{(1)} E_i(\omega) + \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_i(\omega) E_j(\omega) + \epsilon_0 \chi_{ijsk}^{(3)} E_i(\omega) E_j(\omega) E_s(\omega) + \dots, \quad (17)$$

$\chi^{(2)}$ y $\chi^{(3)}$ son conocidas como las susceptibilidades eléctricas de segundo y tercer orden, las cuales producen distintos procesos físicos y se manifiestan en materiales diferentes. Las interacciones ópticas no-lineales de segundo orden pueden ocurrir solamente en cristales no centrosimétricos (Boyd, 2008) -es decir, cristales que no presentan simetría de inversión. Ya que los líquidos, gases, sólidos amorfos (como el vidrio), e incluso muchos cristales presentan simetría de inversión, $\chi^{(2)}$ desaparece y como consecuencia dichos medios no pueden dar lugar a interacciones ópticas no lineales de segundo orden. Por otro lado, las interacciones ópticas de tercer orden (aquellas descritas por la susceptibilidad $\chi^{(3)}$) pueden ocurrir tanto para medios centrosimétricos como no centrosimétricos.

Un medio con una no-linealidad de segundo orden significativa puede dar lugar a diferentes procesos no lineales, por ejemplo la generación del segundo armónico y la conversión paramétrica descendente (PDC) en cristales birrefringentes.

2.2. Conversión paramétrica descendente espontánea

Una fuente de SPDC está constituida por un cristal no lineal $\chi^{(2)}$, el cual es iluminado por un haz de bombeo; fotones individuales del haz de bombeo (p) decaen espontáneamente en parejas de fotones que son llamados señal (s) y acompañante (i). En la figura 2 se muestra un esquema de una fuente típica de SPDC.

El proceso se dice espontáneo cuando no hay ninguna señal de entrada o “semilla”, a la frecuencia de alguno de los modos de generación, que estimule el proceso, sino que éste se origina desde las fluctuaciones cuánticas del vacío. “Conversión descendente”

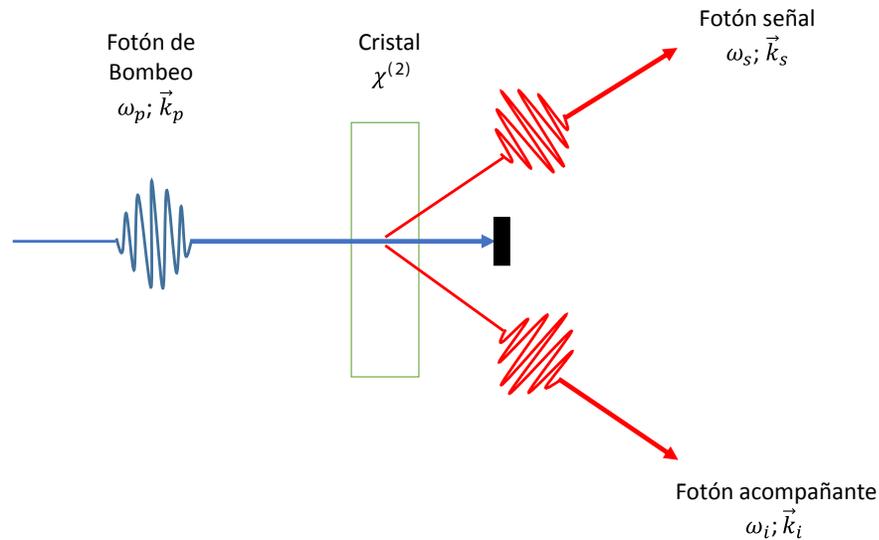


Figura 2: Esquema de conversión paramétrica descendente espontánea. Fotón de bombeo incidiendo con una frecuencia ω_p y un vector de onda \vec{k}_p , fotón señal generado a una frecuencia ω_s con un vector de onda \vec{k}_s , fotón acompañante generado a una frecuencia ω_i con un vector de onda \vec{k}_i .

hace referencia al hecho de que los campos producidos siempre tienen menor frecuencia que el campo de bombeo. El proceso además es “paramétrico”, es decir que no hay transferencia neta de energía al medio por lo que la energía se conserva en el proceso, lo cual se expresa como:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (18)$$

donde ω_p representa la frecuencia de los fotones de bombeo y ω_s, ω_i las frecuencias de los fotones producidos. En la figura 3 a) se ilustra mediante un diagrama de niveles de energía esta condición.

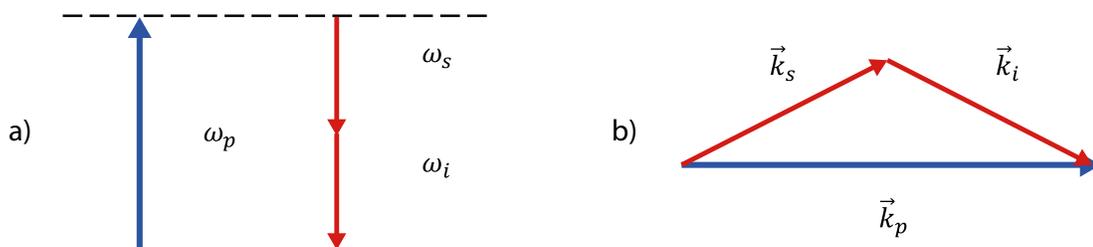


Figura 3: Representación de los principios de conservación de a) energía y b) momento en SPDC.

Por otro lado, se debe conservar el momento [ver figura 3 b)], condición también co-

nocida como empatamiento de fases:

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i, \quad (19)$$

donde \vec{k}_p , \vec{k}_s , \vec{k}_i representan los vectores de onda correspondientes a los campos de bombeo, señal y acompañante, respectivamente. Son los principios de conservación de energía y momento los que conllevan a correlaciones en grados de libertad de variable continua entre las variables fotónicas.

2.3. Propiedades de empatamiento de fases en medios birrefringentes

Para que un cristal exhiba una no-linealidad de segundo orden, $\chi^{(2)}$, éste debe de carecer de simetría de inversión; a este tipo de cristales se les conoce como cristales no centrosimétricos y esto significa que son medios ópticamente anisotrópicos, lo que da lugar a la propiedad de birrefringencia: “el índice de refracción del cristal es dependiente tanto de la polarización, como de la dirección de propagación de la luz que viaja en él.” En el caso de cristales *uniaxiales* existe un sólo eje de simetría rotacional conocido como eje óptico (\vec{e}_o ver figura 4), por lo que la dirección del haz de bombeo puede ser especificado solamente por el ángulo θ_p medido desde \vec{e}_o . Luz con polarización lineal arbitraria que viaja a través de un cristal uniaxial se va a descomponer en dos polarizaciones ortogonales: el rayo extraordinario (e-ray) polarizado en el plano definido por el eje óptico y el vector de onda incidente (el plano principal) y el rayo ordinario (o-ray) polarizado perpendicularmente a este plano.

Por su parte, los cristales *biaxiales* carecen de simetría de rotación por lo que es necesario describirlos en términos de dos ejes ópticos, de modo que para especificar la dirección de un haz de luz incidente dos ángulos son requeridos: θ_p y ϕ_p . En este caso, como se muestra en la figura 5, se toman en cuenta los ejes cristalográficos $\{x, y, z\}$ de manera que θ_p representa el ángulo desde el vector de propagación (\vec{k}) hasta el eje z y ϕ_p el ángulo entre la proyección del vector \vec{k} sobre el plano $x - y$ y el eje x . En general, para cristales uniaxiales y biaxiales existen dos índices de refracción para una sola dirección

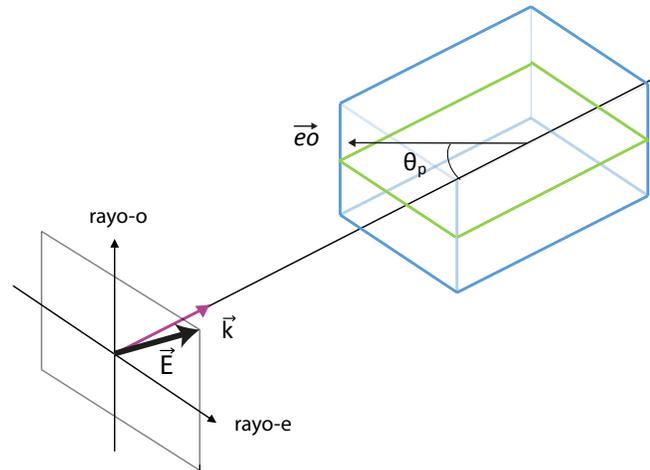


Figura 4: Esquema de la descomposición de una onda linealmente polarizada \vec{E} al viajar a través de un cristal uniaxial con un vector de onda asociado \vec{k} .

de propagación, asociados a las dos polarizaciones en las que se descompone el haz. En el caso de cristales uniaxiales, éstos son los índices ordinario (n_o) y extraordinario (n_e), mientras que para cristales biaxiales, son referidos como índice rápido (n_r) e índice lento (n_l).

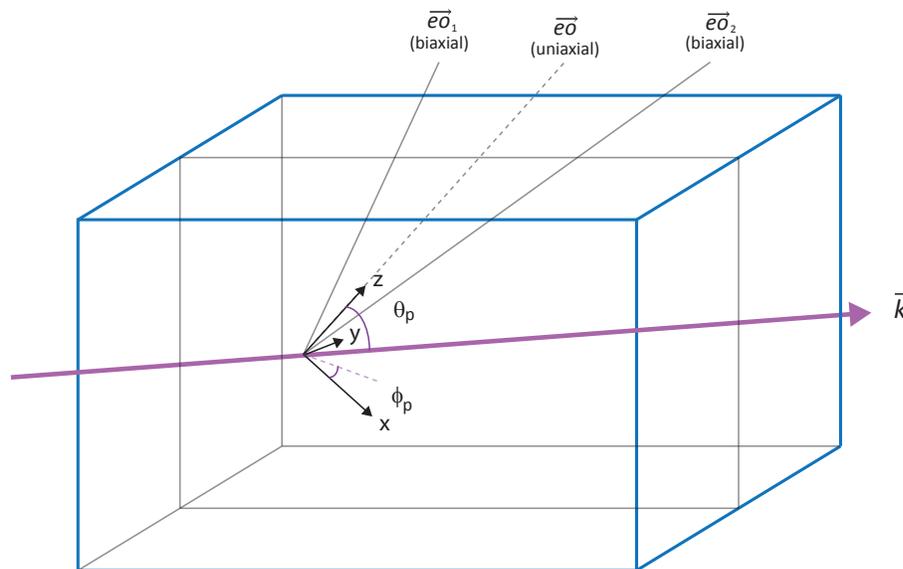


Figura 5: Esquema que ilustra la especificación de la dirección de un haz de luz incidente con un vector de onda asociado \vec{k} con respecto a los ejes cristalográficos x, y, z mediante los ángulos θ_p y ϕ_p en un cristal biaxial.

Habiendo dos posibles índices de refracción para cada frecuencia, es posible cumplir la condición de emparejamiento de fases entre los campos interactuantes en diversas

configuraciones: i) empatamiento de fases tipo I, en la que los fotones producidos tienen la misma polarización, que es ortogonal a la del bombeo, ii) empatamiento de fases tipo II, en la cual los fotones generados tienen polarizaciones ortogonales, uno de ellos igualando la polarización del bombeo.

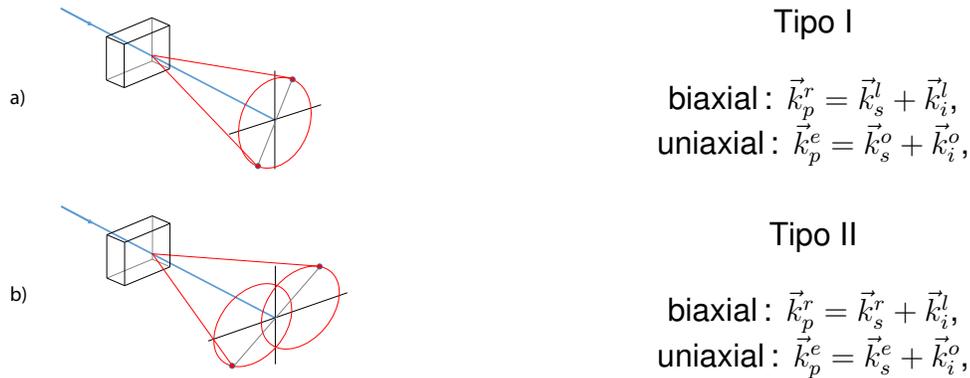


Figura 6: Tipos de empatamiento de fases. a) Empatamiento de fases tipo I, b) empatamiento de fases tipo II.

En la figura 2 se mostró el diagrama de SPDC asociado a un solo fotón de bombeo. Para haces de bombeo no muy enfocados, si observáramos la emisión de SPDC a la salida del cristal, después de varios eventos veríamos que existe simetría azimutal entre las parejas producidas y por tanto que se genera un cono de emisión. En el caso de phase-matching tipo I la forma funcional del índice de refracción es la misma para los fotones generados, entonces los conos de emisión que generan los fotones señal y acompañante se traslapan y se ven como uno solo, tal y como se ilustra en la figura 6a). Para el caso del tipo II las formas funcionales del índice de refracción para los fotones emitidos son distintas. Por lo tanto, la distribución angular de emisión consiste de dos conos, como puede apreciarse en la figura 6b).

Generación de parejas de fotones por SPDC se puede dar también por cuasi empatamiento de fases (QPM, por sus siglas en inglés). Este método se basa en el uso de un medio no lineal con una estructura periódica de la no linealidad a lo largo de la dirección de propagación [ver figura 7 b)], la cual afecta localmente la fase de los campos logrando que éstos interfieran constructivamente a medida que se propagan a lo largo del cristal. Los cristales no lineales que se usan para realizar la técnica de QPM son en general de algún material ferroeléctrico, en los cuales la dirección de la polarización macroscópi-

ca del medio es invertida periódicamente [ver figura 7 a)] aplicando campos eléctricos fuertes (Fejer *et al.*, 1992).

La variación unidimensional de $\chi^{(2)}$ con respecto al campo eléctrico se puede representar por una serie de Fourier siempre que ésta sea periódica (Boyd, 2008):

$$d(z) = d_{ef} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp \left[-i \frac{2\pi m}{\Lambda} z \right], \quad (20)$$

donde d_{ef} representa un coeficiente no lineal efectivo, Λ representa el periodo y los coeficientes de la serie de Fourier están dados por

$$A_m = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} f(z) \exp \left[\frac{2\pi m}{\Lambda} z \right] dz. \quad (21)$$

Es posible modificar la fase extra añadida por el QPM cambiando la periodicidad de la no-linealidad Λ del material, posibilitando configuraciones que generalmente no se pueden cumplir con la técnica de empatamiento de fases convencional [ver figura 7 c)]. Por ejemplo el caso en que los campos de bombeo, señal y acompañante tienen la misma polarización extraordinaria (cristales uniaxiales) o rápida (cristales biaxiales).

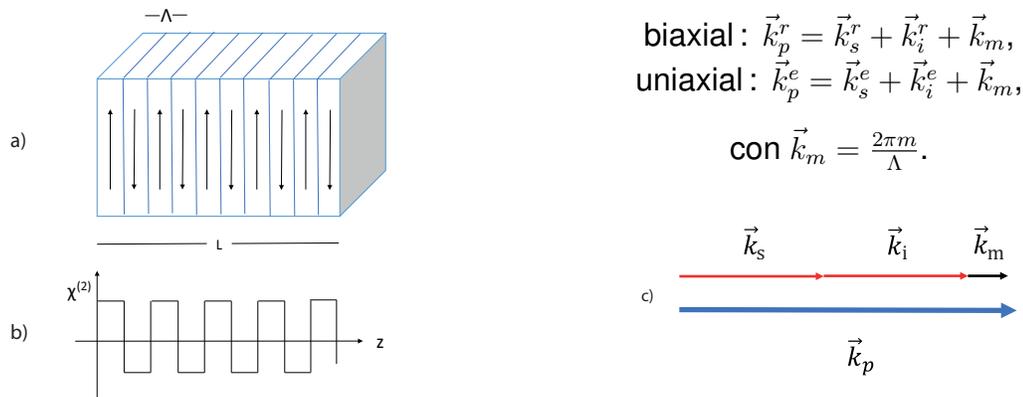


Figura 7: Esquemas de cuasi-empatamiento de fases donde se muestra a) la inversión periódica de la polarización macroscópica del medio, b) la variación de la no-linealidad como función de la dirección de propagación y c) la fase extra añadida para lograr el empatamiento de fases.

2.4. Índices de refracción dependientes de la dirección de propagación

Un análisis de las propiedades de empataimiento de fases en SPDC demanda de una descripción detallada del índice de refracción que experimentan los campos interactuantes. Fotones individuales de un par generado por SPDC se pueden propagar en diferentes direcciones, a esta configuración se le conoce como no-colineal. El caso colineal, donde los fotones de bombeo y el par emitido se propagan en la misma dirección, es generalmente bien comprendido, mientras que el caso no-colineal es más complicado de modelar. Una de las ventajas de la configuración no colineal es la posibilidad de discriminar la pareja de fotones y los fotones de bombeo.

Un paso necesario para encontrar la condición de empataimiento de fases es conocer la dependencia de los índices de refracción con respecto a la frecuencia y la dirección de propagación. Con la finalidad de determinar esta dependencia para los haces de bombeo, señal y acompañante, tomando en cuenta el caso más general que incluye tanto a cristales uniaxiales como biaxiales, se realizó un análisis con base en el tratamiento de N. Boeuf y colaboradores (Boeuf *et al.*, 2000), como se describe a continuación.

Primero se definen dos sistemas de referencia: el sistema cristalográfico y el sistema de laboratorio, tal como se ilustra en la figura 8.

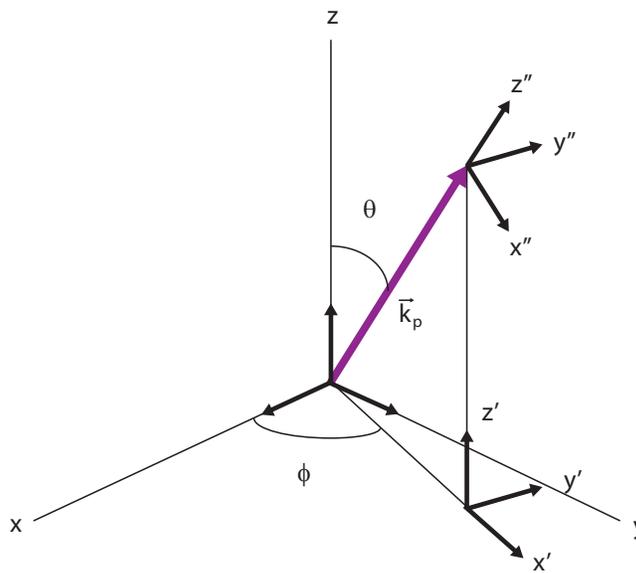


Figura 8: Sistemas de referencia para el caso general que incluye cristales uniaxiales y biaxiales. Ejes cristalográficos (x, y, z) , ejes rotados (x', y', z') y ejes de laboratorio (x'', y'', z'') .

En la figura 8 los ejes x, y, z corresponden con los ejes del cristal. A lo largo de estos ejes se pueden derivar relaciones empíricas para evaluar el índice de refracción como función de la longitud de onda: $n_x(\lambda), n_y(\lambda), n_z(\lambda)$. Estas relaciones se conocen como ecuaciones de Sellmeier (Dmitrev *et al.*, 1995) y generalmente tienen la forma $n^2(\lambda) = A + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2}$, donde los coeficientes A, B_1, B_2, C_1, C_2 dependen de las propiedades de cada material.

Según el esquema de la figura 8, si se rotan los ejes del cristal un ángulo ϕ alrededor del eje z se obtienen las coordenadas x', y', z' . Si a estas nuevas coordenadas primadas se les rota un ángulo θ alrededor del eje y' se llega a las coordenadas de laboratorio x'', y'', z'' . Usando coordenadas esféricas el vector de onda de bombeo es expresado en términos de los ejes principales del cristal x, y, z . Resulta más natural, sin embargo, expresar los vectores de onda de señal y acompañante en el sistema de referencia de laboratorio definido por los ejes x'', y'', z'' . De esta manera, los vectores de onda de bombeo, señal y acompañante quedan expresados como:

$$\vec{k}_p = n_p(\theta_p, \phi_p) \frac{\omega_p}{c} \hat{s}_p, \quad (22)$$

$$\vec{k}_s = n_s(\theta_s, \phi_s) \frac{\omega_s}{c} \hat{s}_s, \quad (23)$$

$$\vec{k}_i = n_i(\theta_i, \phi_i) \frac{\omega_i}{c} \hat{s}_i, \quad (24)$$

donde $n_j(j = p, s, i)$ son los índices de refracción de los fotones (para sus estados de polarización individuales) en la dirección de propagación \hat{s}_j . Como se observa en la figura 9, θ_p es el ángulo entre \hat{s}_p y el eje \hat{z} , mientras que ϕ_p es el ángulo azimutal medido desde el eje \hat{x} a la proyección de \hat{s}_p sobre el plano $x - y$. Para los haces producidos, los ángulos θ_s y θ_i son especificados con respecto a \hat{s}_p , los ángulos azimutales ϕ_s y ϕ_i hacen referencia a rotaciones en el plano normal a \hat{s}_p .

Entonces, de manera explícita para el haz de bombeo se tiene que:

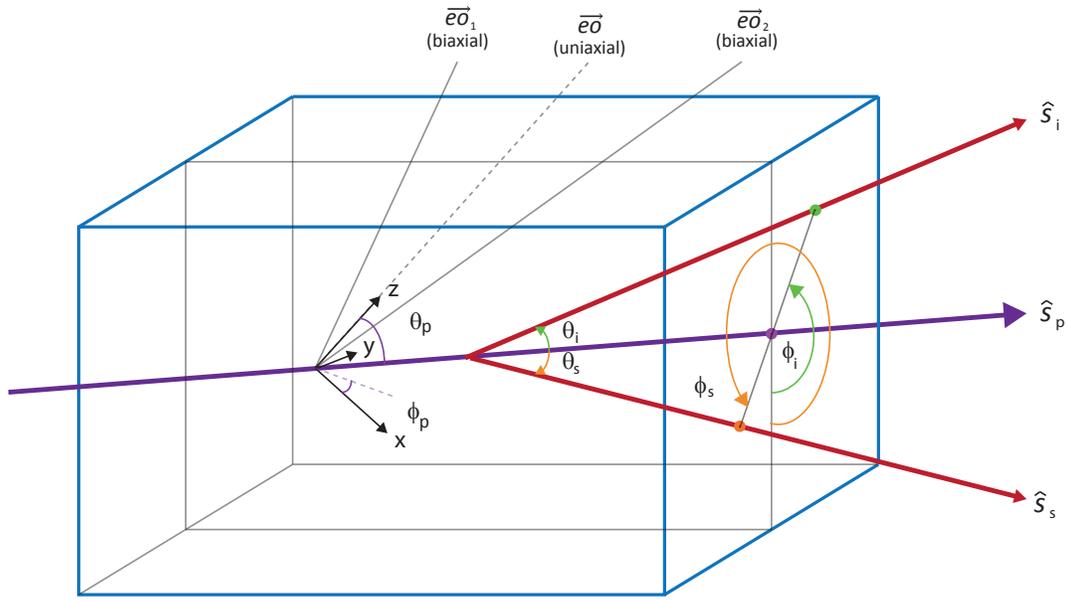


Figura 9: Diagrama del proceso de SPDC en un cristal birrefringente. Especificación de los ángulos polares y azimutales θ_p, ϕ_p para el haz de bombeo \hat{s}_p con respecto a los ejes cristalográficos. Los ángulos polares y azimutales θ_s, ϕ_s para el haz señal \hat{s}_s y θ_i, ϕ_i para el haz acompañante \hat{s}_i están referenciados con respecto a los ejes de laboratorio.

$$\hat{s}_p = \begin{bmatrix} \sin \theta_p \cos \phi_p \\ \sin \theta_p \sin \phi_p \\ \cos \theta_p \end{bmatrix}_{x,y,z} . \quad (25)$$

Para los haces señal y acompañante se tiene que las direcciones de propagación referidas al sistema de laboratorio son:

$$\hat{s}_s = \begin{bmatrix} \sin \theta_s \cos \phi_s \\ \sin \theta_s \sin \phi_s \\ \cos \theta_s \end{bmatrix}_{x'',y'',z''} , \quad \hat{s}_i = \begin{bmatrix} \sin \theta_i \cos \phi_i \\ \sin \theta_i \sin \phi_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix}_{x'',y'',z''} . \quad (26)$$

La transformación entre los sistemas de coordenadas esta dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_p \cos \phi_p & -\sin \phi_p & \sin \theta_p \cos \phi_p \\ \cos \theta_p \sin \phi_p & \cos \phi_p & \sin \theta_p \sin \phi_p \\ -\sin \theta_p & 0 & \cos \theta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}. \quad (27)$$

De esta manera se encuentra el índice de refracción $n(\hat{s})$ en una dirección específica $\hat{s} = (s_x, s_y, s_z)$, usando la ecuación indicatriz dada por la *ecuación de Fresnel de normales de onda*, expresada en términos de los ejes cristalográficos

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2(\hat{s})} - \frac{1}{n_x^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2(\hat{s})} - \frac{1}{n_y^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2(\hat{s})} - \frac{1}{n_z^2}} = 0, \quad (28)$$

donde n_x , n_y y n_z son los índices de refracción a una longitud de onda dada, los cuales para un cristal biaxial obedecen la relación $n_x < n_y < n_z$, mientras que para un cristal uniaxial se tiene que $n_x = n_y = n_o$ y $n_z = n_e$. La ecuación anterior puede ser reescrita como:

$$x^2 - \left[s_x^2 \left(\frac{1}{n_y^2} + \frac{1}{n_z^2} \right) + s_y^2 \left(\frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_z^2} \right) + s_z^2 \left(\frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_y^2} \right) \right] x + \left[\frac{s_x^2}{n_y^2 n_z^2} + \frac{s_y^2}{n_x^2 n_z^2} + \frac{s_z^2}{n_x^2 n_y^2} \right] = 0, \quad (29)$$

con $x = \frac{1}{n^2(\hat{s})}$. Al resolver para x , se obtiene una solución general para cada polarización posible (rápida o lenta), la cual en el caso particular de los cristales uniaxiales se relaciona con las polarizaciones extraordinaria y ordinaria, respectivamente:

$$n_r = \sqrt{\frac{2}{B + \sqrt{B^2 - 4C}}}, \quad (30)$$

$$n_l = \sqrt{\frac{2}{B - \sqrt{B^2 - 4C}}}, \quad (31)$$

donde

$$B = s_x^2 \left(\frac{1}{n_y^2} + \frac{1}{n_z^2} \right) + s_y^2 \left(\frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_z^2} \right) + s_z^2 \left(\frac{1}{n_x^2} + \frac{1}{n_y^2} \right), \text{ y}$$

$$C = \frac{s_x^2}{n_y^2 n_z^2} + \frac{s_y^2}{n_x^2 n_z^2} + \frac{s_z^2}{n_x^2 n_y^2}.$$

Teniendo la forma funcional de los índices de refracción es posible conocer las propiedades de empaquetamiento de fases que dan lugar al proceso de SPDC en un cristal determinado.

A continuación se detallará la derivación del estado cuántico de dos fotones generado por SPDC.

2.5. Estado de dos fotones generado por SPDC

En la representación de interacción de Schrödinger, para determinar el estado cuántico a un tiempo t , dado el estado inicial $|\Psi_0\rangle$, se usa el operador unitario de evolución temporal (Cohen-Tannoudji *et al.*, 1978):

$$|\Psi_t\rangle = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right] |\Psi_0\rangle, \quad (32)$$

donde $\hat{H}(t')$ es el Hamiltoniano de interacción del sistema. En el régimen espontáneo la creación de fotones por PDC se debe solamente a las fluctuaciones del vacío, lo que significa que el estado inicial de dos fotones es $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$. Además, dado que la interacción es débil, es posible utilizar el método perturbativo y expandir la exponencial en serie de potencias manteniendo el término a primer orden (Mandel y Wolf, 1995):

$$|\Psi_t\rangle \approx \left[1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right] |0\rangle. \quad (33)$$

Lo anterior quiere decir que la probabilidad de generar un par de fotones en cada interacción es pequeña y las probabilidades de generar dos o más pares es despreciable. El Hamiltoniano de interacción que gobierna el proceso de SPDC está dado por

$$H = \frac{1}{2} \int (W_e + W_m) dV, \quad (34)$$

donde $W_e = \vec{E} \cdot \vec{D}$ y $W_m = \vec{H} \cdot \vec{B}$ son la densidad de energía eléctrica y magnética, respectivamente, con \vec{E} el campo eléctrico total en el medio, \vec{D} el vector de desplazamiento eléctrico, \vec{B} el flujo de campo magnético y \vec{H} la intensidad de campo magnético. Se puede demostrar que $W_e = W_m$. Por otro lado, el vector de desplazamiento \vec{D} está relacionado con el campo eléctrico \vec{E} y la polarización macroscópica del medio \vec{P} , mediante la relación

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (35)$$

la cual según lo discutido en la sección 2.1, tiene una componente lineal y una componente no-lineal. Esta última siendo de segundo orden para el caso de SPDC:

$$P_k^{(L+NL)} = \epsilon_0 \chi_{ik}^{(1)} E_i + \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_i E_j. \quad (36)$$

En las ecuaciones (33) y (34), el Hamiltoniano se puede escribir como $H_0 + H_1$, donde H_0 es la energía asociada a efectos lineales, derivada de la interacción de la luz con el material, y H_1 comprende la interacción no lineal, la cual se puede expresar como

$$H_1(t) = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{P}^{(NL)} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \chi_{ijk}^{(2)} E_k(\vec{r}, t) E_i(\vec{r}, t) E_j(\vec{r}, t) dV, \quad (37)$$

donde V es el volumen de interacción y $\vec{E}(\vec{r}, t)$ es el campo electromagnético total presente en el mismo, dado por la superposición de los campos de bombeo, señal y acompañante: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^p(\vec{r}, t) + \vec{E}^s(\vec{r}, t) + \vec{E}^i(\vec{r}, t)$. En la ecuación (37) los subíndices i, j, k indican las componentes cartesianas del campo. Lo anterior implica que el producto de las componentes del campo total se pueda escribir como:

$$E_k E_i E_j = (E_k^p + E_k^s + E_k^i)(E_i^p + E_i^s + E_i^i)(E_j^p + E_j^s + E_j^i). \quad (38)$$

Además el campo puede ser expandido en términos de ondas planas $\vec{E} = \vec{E}^+(\hat{a}^\dagger, -\vec{k}, \omega) + \vec{E}^-(\hat{a}, \vec{k}, -\omega)$. Por lo que de forma explícita el producto está dado por:

$$E_k E_i E_j = (E_k^{+p} + E_k^{-p} + E_k^{+s} + E_k^{-s} + E_k^{+i} + E_k^{-i})(E_i^{+p} + E_i^{-p} + E_i^{+s} + E_i^{-s} + E_i^{+i} + E_i^{-i}) \\ \times (E_j^{+p} + E_j^{-p} + E_j^{+s} + E_j^{-s} + E_j^{+i} + E_j^{-i}). \quad (39)$$

En este producto están implícitos todos los procesos de mezclado de tres ondas. No obstante, es posible retener sólo aquellos términos asociados con interacciones en las que se aniquila un fotón de bombeo para crear pares de fotones señal y acompañante. Es decir, términos del tipo $E^{-p} E^{+s} E^{+i}$ en cualquiera de sus componentes. Lo anterior se justifica porque al evaluar el valor esperado del número de fotones con respecto al estado de SPDC, los términos omitidos en el Hamiltoniano completo conducen a cero.

Por otra parte, aunque la forma general de $\chi^{(2)}$ es un tensor de rango tres, las simetrías entre los elementos del cristal birrefringente facilitan la reducción de este operador. El tensor de susceptibilidad $d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)}$ puede ser reexpresado en forma matricial d_{ij} , y para direcciones de propagación y polarizaciones fijas es posible expresar la polarización no lineal en términos de una relación escalar, dependiendo del tipo de cristal (positivo o negativo) y el tipo de interacción (empatamiento de fases tipo I o II), por medio de un coeficiente de no-linealidad efectivo d_{ef} (Boyd, 2008). Dicho esto el Hamiltoniano en la ecuación (37) se reduce a:

$$H_1(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \kappa d_{ef} \int_V d(z) E^{-p}(\vec{r}, t) E^{+s}(\vec{r}, t) E^{+i}(\vec{r}, t) dV, \quad (40)$$

con κ el factor de degeneración

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \omega_s = \omega_i, \\ 1 & \text{para cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (41)$$

El análisis anterior incluye los casos de generación por la técnica de QPM, de ahí el término $d(z)$ que aparece en la ecuación (40). Para cristales sin modulación de la no-linealidad $d(z) = 1$.

El campo eléctrico de los modos generados se considera cuantizado

$$\hat{E}_\mu^+(\vec{r}, t) = -i \sum_\mu \exp \left[i(\omega_\mu t - \vec{k}_\mu \cdot \vec{r}) \right] l(\omega_\mu) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu), \quad (42)$$

donde $\mu = s, i$ y $l(\omega_\mu) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_\mu}{2\epsilon_0 n^2(\omega_\mu) V}}$ es un término que proviene de la cuantización del campo eléctrico en un medio material. Dado que el campo de bombeo es mucho más intenso que los campos generados (proceso espontáneo), éste puede ser tratado como un campo clásico y expresado como

$$E_p^-(\vec{r}, t) = E_0 \int \alpha(\omega_p) GB(x', y', z') \exp[-i(\omega_p t - \vec{k}_p \cdot \vec{z}')] d\omega_p, \quad (43)$$

siendo $\alpha(\omega_p)$ la envolvente espectral de bombeo, la cual en el presente tratamiento se asume gaussiana:

$$\alpha(\omega_p) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sigma}} \exp\left[-\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma^2}\right], \quad (44)$$

con ω_{p0} y σ representando la frecuencia central y el ancho de banda, respectivamente. Por su parte, $GB(x', y', z')$ representa la distribución espacial del bombeo, la cual se asume gaussiana (Yariv, 1988):

$$GB(x', y', z') = \sqrt{\frac{2}{\pi W_{0x} W_{0y}}} \frac{1}{\sqrt{1 + i \frac{z'}{z_{Rx}}}} \frac{1}{\sqrt{1 + i \frac{z'}{z_{Ry}}}} \exp\left[-\frac{x'^2}{W_{0x}^2 (1 + i \frac{z'}{z_{Rx}})}\right] \\ \times \exp\left[-\frac{y'^2}{W_{0y}^2 (1 + i \frac{z'}{z_{Ry}})}\right], \quad (45)$$

donde se ha considerado que en general la sección transversal del haz es elíptica, con radios de cintura W_{0x} y W_{0y} . Note además que se ha incluido la difracción del haz en la dirección de propagación; $z_{R_x} = k_p W_{0x}^2/2$ y $z_{R_y} = k_p W_{0y}^2/2$ son las distancias de Rayleigh-diferentes en x y y - que dependen de las cinturas del haz de bombeo. En la ecuación (45) x', y', z' representan las coordenadas espaciales para un sistema de referencia centrado en la cintura del haz de bombeo.

En la ecuación (43), E_0 representa la amplitud del campo eléctrico, la cual está relacionada a la energía por pulso y se puede escribir como:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{P_p}{\epsilon_0 c n(\omega_{p0}) W_{0x} W_{0y} \sigma}}, \quad (46)$$

donde P_p representa la potencia pico del láser de bombeo. La expresión de la ecuación (46) es válida para haces de bombeo con estructura espectral y espacial gaussiana. Note que E_0 tiene unidades de campo eléctrico V/m .

Para el tratamiento aquí descrito, resulta conveniente expresar la ecuación (45) en términos de las variables espaciales x, y, z asociadas a un sistema de referencia anclado en la segunda cara del cristal, según se muestra en la figura 10, donde z_0 representa la posición de la cintura y ρ el ángulo de *walk-off* (Butcher y Cotter, 1990) formado entre el vector de propagación y la dirección del flujo de energía, dado por el vector de Poynting. Las relaciones para la transformación del sistema de referencia se muestran en la figura 10.

Reemplazando la expresión para los campos E_p^-, E_s^+, E_i^+ en la ecuación (40) y posteriormente ésta en la ecuación (33) se obtiene que el estado de dos fotones a la salida del cristal está dado por:

$$|\Psi\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i + \eta |\Psi_2\rangle, \quad (48)$$

donde $|\Psi_2\rangle$ es la componente de dos fotones asociada al proceso de SPDC, dada por

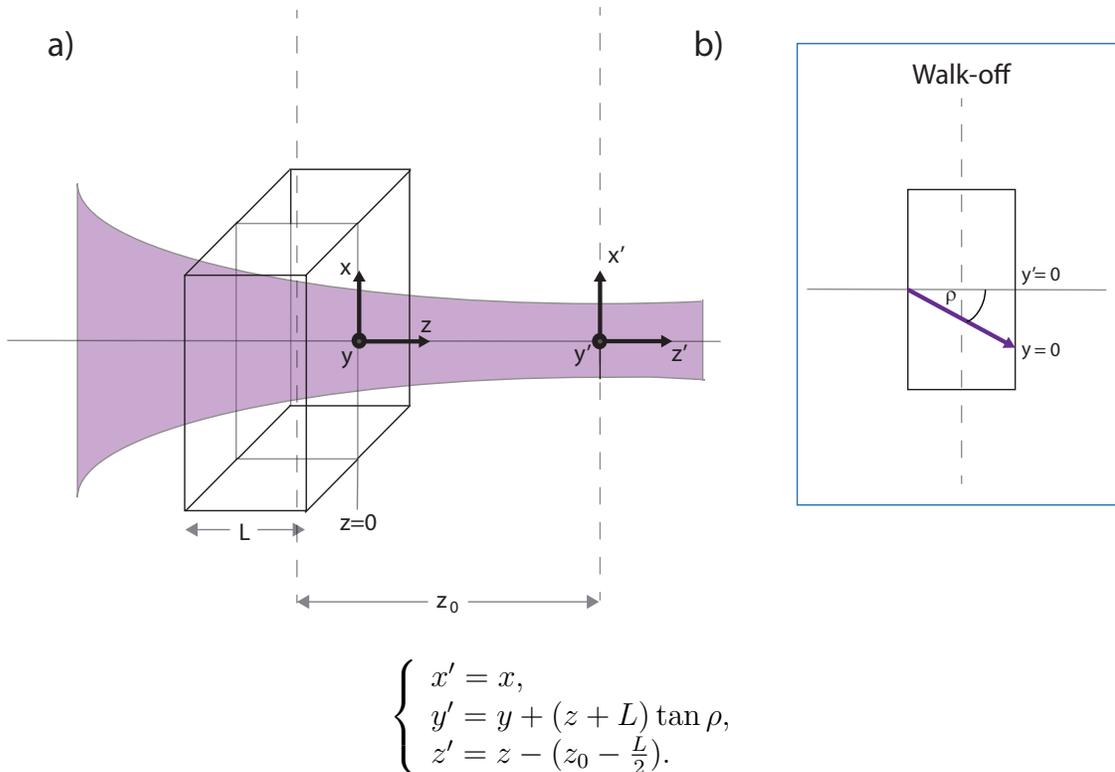


Figura 10: Transformación de coordenadas para la descripción del haz de bombeo. a) Sistema (x, y, z) ubicado en la segunda cara del cristal. b) Consideración del término de *walk-off*.

$$|\Psi_2\rangle = \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_i F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle_s |0\rangle_i, \quad (49)$$

y η es una constante asociada a la eficiencia de generación.

En la derivación de la ecuación (49) se hicieron las siguientes consideraciones:

- Se supone que las dimensiones transversales del cristal son mucho más grandes que las del haz de bombeo, por lo cual los límites de integración en las variables x y y se pueden extender al infinito.
- Los límites de integración en la variable temporal también se pueden extender al infinito [ver ecuación (33)], debido a que la probabilidad de generación de parejas de fotones es baja, no habiendo algún evento en la frontera temporal (Mandel y Wolf, 1995).

En la ecuación (49) $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ es la función de amplitud conjunta, la cual representa

una amplitud de probabilidad que relaciona el estado cuántico con los resultados de sus propiedades observables. Esta función a su vez contiene la información sobre las correlaciones de origen no clásico en los diferentes grados de libertad de la pareja de fotones: frecuencia, momento transversal y polarización. Sin embargo, la cantidad que es posible medir en un laboratorio y que representa una distribución de probabilidad es la función de intensidad conjunta definida como $\langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle = |F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)|^2$.

Se puede demostrar que $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ se puede escribir como el producto de tres funciones

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i) \phi_T(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_L(\vec{k}_s, \vec{k}_i), \quad (50)$$

donde $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ es la función envolvente espectral de bombeo [ver ecuación (44)]

$$\alpha(\omega_s + \omega_i) = \exp \left[-\frac{(\omega_s + \omega_i - \omega_{p0})^2}{\sigma^2} \right], \quad (51)$$

en la que se evidencia la conservación de la energía; $\phi_T(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ es la función de empatamiento de fases transversal (dado que depende solo de las variables transversales $k_{\perp s}, k_{\perp i}$) y es controlada por los radios de las cinturas del haz gaussiano

$$\phi_T(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \exp \left[-\frac{1}{4}(W_{0x}^2 k_x^2 + W_{0y}^2 k_y^2) \right]. \quad (52)$$

Por su parte, la función $\phi_L(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ es la función de empatamiento de fases longitudinal, la cual depende de la longitud del cristal y está dada por

$$\phi_L(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \exp \left[\frac{iL}{2}(k_p + k_z + \tan \rho k_y) \right] \text{sinc} \left(\frac{L}{2} \Delta K \right), \quad (53)$$

con ΔK dado por

$$\Delta K = k_p - k_z + \tan \rho k_y - \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2k_p} + m \frac{2\pi}{\Lambda}. \quad (54)$$

En las anteriores expresiones k_p representa el módulo del vector \vec{k}_p , $k_x = k_{sx} + k_{ix}$, $k_y = k_{sy} + k_{iy}$, $k_z = k_{sz} + k_{iz}$. Note que en la ecuación (54) se incluye el término asociado al corrimiento de fases proveniente del QPM. Para cristales sin modulación del índice de refracción no lineal $m = 0$.

2.6. Caracterización de fuentes de fotones individuales anunciados puros basadas en SPDC

En este punto, resulta importante definir las cantidades que caracterizan a las fuentes de fotones individuales anunciados puros: la tasa de generación de pares, la tasa de generación de fotones individuales y la pureza de los fotones individuales anunciados.

Habiendo derivado una expresión para el estado que describe el sistema de dos fotones [ecuación (49)], es posible conocer el valor esperado del número de pares de fotones generados N , expresión que caracteriza el flujo de la fuente. Para esto, se utiliza el operador de número definido como:

$$\hat{n}_\mu(\vec{k}_\mu) = \hat{a}_\mu^\dagger(\vec{k}_\mu)\hat{a}_\mu(\vec{k}_\mu), \quad (55)$$

para $\mu = s, i$. De tal manera que

$$\begin{aligned} N &= \eta^2 \int \int \langle \Psi_2 | \hat{n}_s(\vec{k}_s) \hat{n}_i(\vec{k}_i) | \Psi_2 \rangle d\vec{k}_s d\vec{k}_i, \\ &= \eta^2 \int \int |F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)|^2 d\vec{k}_s d\vec{k}_i. \end{aligned} \quad (56)$$

Asimismo, es posible calcular el valor esperado del número de fotones individuales por pulso de bombeo:

$$\begin{aligned} N_s &= \eta^2 \int \langle \Psi_2 | \hat{n}_s(\vec{k}_s) | \Psi_2 \rangle d\vec{k}_s, \\ &= \eta^2 \int \left| \int F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) d\vec{k}_i \right|^2 d\vec{k}_s. \end{aligned} \quad (57)$$

Es importante notar la diferencia entre las expresiones de las ecuaciones (56) y (57), siendo la primera una integral de la función de intensidad conjunta sobre los vectores de onda de los fotones señal y acompañante y la segunda una integral incoherente de la función de amplitud conjunta, primeramente integrando ésta sobre el vector de onda del fotón señal y después integrando la norma cuadrada del resultado de la primera integral sobre el vector de onda del fotón acompañante.

2.6.1. Pureza del estado de fotón individual: Descomposición de Schmidt

Como se mencionó en la sección 2.5, la función de amplitud conjunta $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ de la ecuación (50) contiene la información sobre las correlaciones de origen no clásico en la pareja de fotones. Una herramienta útil para analizar estas correlaciones es realizar una descomposición de Schmidt de dicha función, expresando el estado de dos fotones de la ecuación (49) en términos de un conjunto completo de estados base ortonormales $\hat{A}_n^\dagger |0\rangle$ y $\hat{B}_n^\dagger |0\rangle$ (U'Ren *et al.*, 2005), tal que:

$$|\Psi\rangle = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \hat{A}_n^\dagger \hat{B}_n^\dagger |0\rangle, \quad (58)$$

donde $\sum_n \lambda_n = 1$ y los valores λ_n son conocidos como los coeficientes de Schmidt. En esta descripción, los operadores de creación efectivos \hat{A}_n^\dagger y \hat{B}_n^\dagger para los fotones señal y acompañante, están dados en términos de las funciones de Schmidt $\psi_n(\vec{k}_s)$ y $\phi_n(\vec{k}_i)$ como

$$\hat{A}_n^\dagger = \int d\vec{k}_s \psi_n(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) |0\rangle, \quad (59)$$

y

$$\hat{B}_n^\dagger = \int d\vec{k}_i \phi_n(\vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) |0\rangle, \quad (60)$$

mientras que la función de amplitud conjunta $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ puede ser expresada como

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(\vec{k}_s) \phi_n(\vec{k}_i). \quad (61)$$

Por su parte, para el cálculo de las funciones de Schmidt, el primer paso es determinar las matrices de densidad reducidas de los dos sub-sistemas correspondientes a los fotones señal y acompañante, los cuales están definidos por

$$\hat{\rho}_\mu(\vec{k}_\mu, \vec{k}_\mu) = \int d\vec{k}' F(\vec{k}_\mu, \vec{k}') F^*(\vec{k}_\mu, \vec{k}'), \quad (62)$$

para $\mu = s, i$. Y como segundo paso, resolver las siguientes ecuaciones integrales de eigen-valor

$$\int d\vec{k}' \rho_s(\vec{k}'_s, \vec{k}') \psi_n(\vec{k}') = \lambda_n \psi_n(\vec{k}_s), \quad (63)$$

$$\int d\vec{k}' \rho_i(\vec{k}'_i, \vec{k}') \phi_n(\vec{k}') = \lambda_n \phi_n(\vec{k}_i). \quad (64)$$

El grado de entrelazamiento de la pareja de fotones puede ser cuantificado por el parámetro de cooperatividad definido en términos de los eigenvalores de Schmidt como:

$$K \equiv \frac{1}{\sum_n (\lambda_n^2)} \equiv \frac{1}{Tr(\hat{\rho}_\mu^2)}. \quad (65)$$

El valor de K es un indicador de los modos de Schmidt presentes, lo que a su vez representa una medida de entrelazamiento entre los pares de fotones. Por consiguiente, una medida de pureza del fotón individual anunciado está dada por:

$$p = 1/K, \quad (66)$$

lo cual es congruente con la ecuación (9). Un estado de dos fotones para el cual la cooperatividad asume el mínimo valor posible $K = 1$, representa un estado en el que hay un

solo par de modos (funciones) de Schmidt y por lo tanto no exhibe entrelazamiento espacial o espectral. La existencia de un solo par de modos de Schmidt es equivalente a decir que el estado de dos fotones producido por SPDC es factorizable. Bajo estas condiciones las propiedades espectrales y espaciales de los fotones señal y acompañante son independientes de manera que la detección del fotón señal no ofrece información sobre el fotón acompañante.

Capítulo 3. SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales

Una manera de suprimir las correlaciones espaciales en el estado de dos fotones producido por SPDC es acoplando los fotones emitidos a fibras ópticas monomodales (Dragan, 2004). El hecho de coleccionar los fotones producidos por SPDC mediante fibras ópticas *monomodales* implica tener certeza acerca del modo espacial en el que viajan ambos fotones en las fibras ópticas. En contraposición, el caso hipotético de acoplar los fotones producidos por SPDC a fibras ópticas multimodales -donde existe una incertidumbre asociada al modo en el que viajan los fotones en la fibra y salen de ella- sería indeseable en dos sentidos: a) una descripción del estado de dos fotones acoplado tendría que tener en cuenta todas las posibles combinaciones asociadas a los posibles modos en los que pudiera viajar cada fotón individual del par, lo que introduce correlaciones espaciales, b) en aplicaciones basadas en interferencia cuántica con fotones provenientes de fuentes independientes, la incertidumbre asociada al modo en el que saldrían los fotones individuales anunciados descartaría la indistinguibilidad deseada.

Como se verá más adelante, acoplar los fotones emitidos a las fibras ópticas monomodales matemáticamente representa integrar sobre las variables transversales, lo que da como resultado que la nueva función de amplitud conjunta dependa solamente de las variables espectrales, ya que, en cada fibra óptica, no habrá diferencia entre fotones acoplados con la misma frecuencia y distinto vector de onda (antes de la fibra).

En este capítulo se deducirá el estado de dos fotones acoplado y posteriormente se encontrarán expresiones semianalíticas útiles para generar una herramienta matemática que facilite la evaluación del valor esperado del número de pares de fotones acoplados a ambas fibras ópticas (tasa de coincidencias), así como el valor esperado del número de fotones individuales acoplados a una sola de ellas (tasa de cuentas individuales), cantidades necesarias para conocer la brillantez de la fuente y la eficiencia de anuncio.

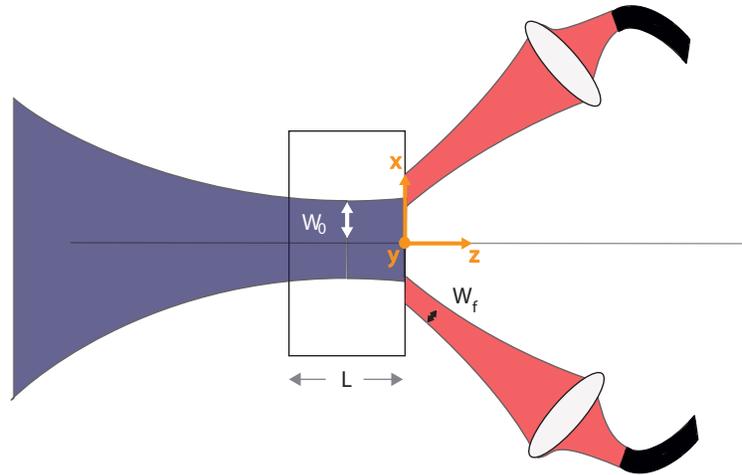


Figura 11: Esquema de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales para el caso de un haz de bombeo con radio de cintura W_0 y modos de colección con radios de cintura W_f .

3.1. Estado de dos fotones acoplado

Se desea estudiar las propiedades espectrales de las parejas de fotones producidas por SPDC y posteriormente acopladas a fibras ópticas monomodales, como se muestra en el esquema de la figura 11. Con este fin, es conveniente estudiar el problema recíproco equivalente, considerando que la luz se produce en las fibras ópticas, viaja en el espacio libre, pasa a través de lentes acopladoras y se propaga hacia el cristal (Vicent *et al.*, 2010). Entonces, la función de amplitud conjunta acoplada estará dada por el traslape espacial del modo de colección de la fibra, el cual se modela como gaussiano

$$u(x''', y''', z''')_\mu = \frac{1}{1 + i \frac{z'''}{z_R}} \exp \left[-\frac{x'''^2 + y'''^2}{W_\mu^2 (1 + i \frac{z'''}{z_R})} \right], \quad (67)$$

con la función de amplitud conjunta en el espacio libre (justo a la salida del cristal). En la ecuación (67) $\mu = s, i$, W_μ representa la cintura del modo de colección, la cual puede ser diferente para el modo señal o acompañante, las variables x''' , y''' , z''' representan coordenadas cartesianas de un sistema de referencia anclado en la cintura del modo de colección y $z_R = k_\mu W_\mu^2 / 2$ es la distancia de Rayleigh.

Se comenzará definiendo estados de fotón individuales $|\omega\rangle_{F\mu}$ (con $\mu = s, i$) correspondientes a los modos de colección de las fibras ópticas

$$|\omega\rangle_{F\mu} = \hat{b}_\mu^\dagger(\omega) |0\rangle. \quad (68)$$

Este operador de creación $\hat{b}_\mu^\dagger(\omega)$ está definido en términos de un factor de peso $u_\mu^*(\vec{k})$, con $u_\mu(\vec{k}) = \mathcal{F}[u(x''', y''', z''')]$, donde \mathcal{F} denota transformada de Fourier, de tal manera que

$$\hat{b}_\mu^\dagger(\omega) = \int_{|\vec{k}|=\omega/c} u_\mu^*(\vec{k}) \hat{a}_\mu^\dagger(\vec{k}) d^2k. \quad (69)$$

Imponiendo la relación usual de conmutación $[\hat{b}_\mu, \hat{b}_\mu^\dagger] = 1$, el nuevo operador de creación debe obedecer la condición de normalización

$$\int_{|\vec{k}|=\omega/c} |u_\mu(\vec{k})|^2 d^2k = 1. \quad (70)$$

Para obtener el estado acoplado se proyecta el estado de dos fotones [ver ecuación (49)] a la nueva base de modos de colección de las fibras ópticas.

$$|\Psi_c\rangle = \hat{\Pi} |\Psi_2\rangle, \quad (71)$$

donde el operador de proyección está definido como (Vicent *et al.*, 2010):

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{c^2} \int |\omega_s\rangle_{F_s} \langle\omega_s|_{F_s} d\omega_s \otimes \int |\omega_i\rangle_{F_i} \langle\omega_i|_{F_i} d\omega_i. \quad (72)$$

Sustituyendo las ecuaciones (68), (69) y (72) en la ecuación (71) se obtiene

$$|\Psi_c\rangle = |0\rangle + \frac{\eta}{c^2} \int \int d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle_{F_s} |\omega_i\rangle_{F_i}, \quad (73)$$

con la función de amplitud espectral conjunta dada por

$$f(\omega_s, \omega_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i)g(\omega_s, \omega_i), \quad (74)$$

donde

$$g(\omega_s, \omega_i) = \int_{|\vec{k}_s|=\frac{\omega_s}{c}} \int_{|\vec{k}_i|=\frac{\omega_i}{c}} \phi_T^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_L^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) u_s^*(\vec{k}_s) u_i^*(\vec{k}_i) d^2 k_s d^2 k_i, \quad (75)$$

es la función de empatamiento de fases acoplada. Note que en la ecuación (75) ahora se integra la versión de la función de empatamiento de fases $\phi_T(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_L(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ en el espacio libre, la cual implica que los ángulos polares son refractados $\theta_{\mu f} = \arcsin[\sin \theta_{\mu}/n(\vec{k}_{\mu})]$ para $\mu = s, i$ [ver ecuaciones (53) y (52)].

Análogamente con lo realizado en la subsección 2.6, es posible obtener el valor esperado de número de pares de fotones por pulso de bombeo acoplados a las fibras ópticas en ambos modos (señal y acompañante), lo que equivale experimentalmente a detectar cuentas en coincidencias en los fotodiodos de avalancha (APD, por sus siglas en inglés) dispuestos uno para cada fotón del par y es una medida del flujo de la fuente

$$\begin{aligned} N_f &= \int \int \langle \Psi_c | \hat{n}_s(\omega_s) \hat{n}_i(\omega_i) | \Psi_c \rangle d\omega_s d\omega_i \\ &= \frac{\eta^2}{c^2} \int \int l_c(\omega_s, \omega_i) |f(\omega_s, \omega_i)|^2 d\omega_s d\omega_i, \end{aligned} \quad (76)$$

donde, en este caso, $\hat{n}_s(\omega_s)$ y $\hat{n}_i(\omega_i)$ son operadores de número definidos como

$$\hat{n}_{\mu}(\omega_{\mu}) = \hat{b}_{\mu}^{\dagger}(\omega_{\mu}) \hat{b}_{\mu}(\omega_{\mu}), \quad (77)$$

para $\mu = s, i$. Se puede demostrar que el término constante en la ecuación (76) está dado por

$$\eta^2 = \frac{2\sqrt{2} \kappa A_m^2 P_{av} d_{ef}^2 L^2 W_x W_y}{\sqrt{\pi} \epsilon_0 c \sigma}, \quad (78)$$

mientras que la función $l_c(\omega_s, \omega_i)$ está dada por

$$l_c(\omega_s, \omega_i) = \frac{\omega_s \omega_i}{n(\omega_s) n(\omega_i)}. \quad (79)$$

Asimismo, es posible obtener el valor esperado del número de fotones por pulso de bombeo acoplados a la fibra, incluyendo eventos de detección exclusivamente del modo señal en este caso.

$$\begin{aligned} N_{fs} &= \int \langle \Psi_c | \hat{n}_s(\omega_s) | \Psi_c \rangle d\omega_s \\ &= \frac{\eta^2}{c^2} \int \int l_c(\omega_s, \omega_i) f_s(\omega_s, \omega_i) d\omega_s d\omega_i, \end{aligned} \quad (80)$$

donde $f_s(\omega_s, \omega_i)$ es la función espectral conjunta condicionada (a la detección del modo señal) dada por

$$f_s(\omega_s, \omega_i) = |\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2 h(\omega_s, \omega_i), \quad (81)$$

con

$$h(\omega_s, \omega_i) = \int \left| \int u_s^*(\vec{k}_s) \phi_T^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_L^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) d^2 k_s \right|^2 d^2 k_i. \quad (82)$$

A partir de las ecuaciones (76) y (80) se puede definir la *eficiencia de anuncio*, es decir, la probabilidad de que un fotón esté presente en el modo acompañante, dada la detección de un fotón en el modo señal

$$\eta_H = \frac{N_f}{N_{fs}}. \quad (83)$$

Note que para este caso η_H es proporcional a $W_i^2 \sec \theta_{if}$, término que resulta de la condición de normalización en la ecuación (70).

El análisis para obtener la medida de pureza de la función de amplitud espectral conjunta acoplada $f(\omega_s, \omega_i)$ es análogo al presentado en la subsección 2.6.1, simplemente cambiando la dependencia de los vectores de propagación \vec{k}_μ por la dependencia en frecuencia ω_μ .

La expresión gaussiana de la ecuación (67) está definida en el sistema de coordenadas x''', y''', z''' centrado en la cintura del modo de colección, por lo que resulta conveniente reexpresarla en términos del sistema coordenado que se usó en la derivación del estado de dos fotones, el cual está ubicado en la segunda cara del cristal, en el centro del cono de emisión [ver figura 12].

A continuación se describe el tratamiento para la derivación de una expresión analítica de los modos de colección en el espacio de momentos.

El sistema de referencia inicial x, y, z está anclado en la segunda cara del cristal con origen en el centro del cono de emisión. El sistema x', y', z' resulta de una rotación por un ángulo ϕ alrededor del eje z y posteriormente una traslación por una distancia h en la dirección de x y una distancia d en la dirección y . Esto con el fin de poder posicionar la fibra en cualquier dirección azimutal a lo largo del anillo de emisión.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - h \\ y - d \\ z \end{bmatrix}, \quad (84)$$

el sistema x'', y'', z'' resulta de rotar por un ángulo θ el sistema x', y', z' alrededor del eje y' con la finalidad de posicionar correctamente la fibra en la dirección polar de emisión:

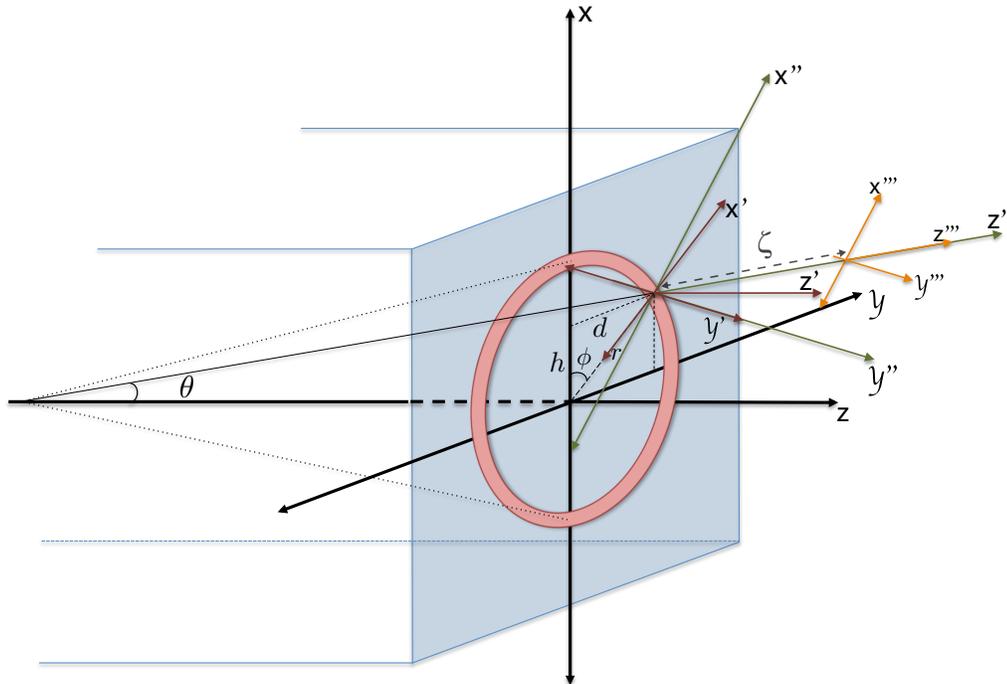


Figura 12: Relación entre los sistema coordenados. El sistema (x, y, z) está ubicado en la segunda cara del cristal en el centro del cono de emisión, el sistema (x', y', z') resulta de rotar un ángulo ϕ alrededor del eje z y desplazar una distancia h en la dirección de x y una distancia d en la dirección y , el sistema (x'', y'', z'') resulta de rotar el sistema (x', y', z') un ángulo θ alrededor del eje y' , el sistema (x''', y''', z''') resulta de permitir la sintonización de la cintura de los haces señal y acompañante una distancia ζ .

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (85)$$

por último se permite la sintonización de la cintura de los haces señal y acompañante:

$$\begin{cases} x''' = x'', \\ y''' = y'', \\ z''' = z'' - \zeta. \end{cases} \quad (86)$$

Con esto,

$$\begin{cases} x''' = (x - h) \cos \theta \cos \phi + (y - d) \cos \theta \sin \phi, \\ y''' = -(x - h) \sin \phi + (y - d) \cos \phi, \\ z''' = (x - h) \sin \theta \cos \phi + (y - d) \sin \theta \sin \phi - \zeta. \end{cases} \quad (87)$$

Conociendo las transformaciones de coordenadas de la ecuación (87), el paso siguiente consiste en realizar la transformada de Fourier de la función que define a los modos de colección $u(x''', y''', z''')$. No obstante, sin el uso de aproximaciones resulta complicado obtener una expresión analítica cerrada de la función del modo en el espacio de momentos. Si se escribe explícitamente el término divergente del haz gaussiano:

$$1 + i \frac{z'''}{z_R} = 1 + \frac{i}{z_R} [\zeta + h \sin \theta \cos \phi + d \sin \theta \sin \phi] + i \frac{\sin \theta}{z_R} [x \cos \phi + y \sin \phi], \quad (88)$$

y se toma el promedio de los valores entre los que oscilan las variables x y y , es posible mantener solamente el primer término

$$1 + i \frac{z'''}{z_R} \approx 1 + \frac{i}{z_R} \zeta. \quad (89)$$

Esta aproximación restringe la validez del cálculo a una región paraxial en los modos de colección, pero gracias a ella fue posible encontrar una expresión analítica cerrada de la transformada de Fourier

$$u_\mu(k_x, k_y) = \frac{1}{2} W_f^2 \sec \theta \exp [\Gamma_{\mu 1} k_x^2 + \Gamma_{\mu 2} k_y^2 + \Gamma_{\mu 3} k_x + \Gamma_{\mu 4} k_y + \Gamma_{\mu 5} k_x k_y + \Gamma_{\mu 6}] \\ \times \exp [i(\Lambda_{\mu 1} + \Lambda_{\mu 2} k_y^2 + \Lambda_{\mu 3} k_x + \Lambda_{\mu 4} k_y + \Lambda_{\mu 5} k_x k_y + \Lambda_{\mu 6})], \quad (90)$$

con $\mu = s, i$ y donde se han introducido las siguientes definiciones:

$$\Gamma_{\mu 1} = -\frac{W_{\mu f}^2}{4} (\sec^2 \theta_{\mu f} \cos^2 \phi_{\mu} + \sin^2 \phi_{\mu}), \quad (91)$$

$$\Gamma_{\mu 2} = -\frac{W_{\mu f}^2}{4} (\sec^2 \theta_{\mu f} \sin^2 \phi_{\mu} + \cos^2 \phi_{\mu}), \quad (92)$$

$$\Gamma_{\mu 3} = \frac{k_{\mu f} W_{\mu f}^2}{2} \sec \theta_{\mu f} \tan \theta_{\mu f} \cos \phi_{\mu}, \quad (93)$$

$$\Gamma_{\mu 4} = \frac{k_{\mu f} W_{\mu f}^2}{2} \sec \theta_{\mu f} \tan \theta_{\mu f} \sin \phi_{\mu}, \quad (94)$$

$$\Gamma_{\mu 5} = -\frac{W_{\mu f}^2}{4} \tan^2 \theta_{\mu f} \sin 2\phi_{\mu}, \quad (95)$$

$$\Gamma_{\mu 6} = -\frac{k_{\mu f}^2 W_{\mu f}^2}{4} \tan^2 \theta_{\mu f}, \quad (96)$$

$$\Lambda_{\mu 1} = \frac{1}{2k_{\mu f}} [\zeta_{\mu} (\sec^2 \theta_{\mu f} \cos^2 \phi_{\mu} + \sin^2 \phi_{\mu})], \quad (97)$$

$$\Lambda_{\mu 2} = \frac{1}{2k_{\mu f}} [\zeta_{\mu} (\cos^2 \phi_{\mu} + \sec^2 \theta_{\mu f} \sin^2 \phi_{\mu})], \quad (98)$$

$$\Lambda_{\mu 3} = -\zeta_{\mu} (\tan \theta_{\mu f} \sec \theta_{\mu f} \cos \phi_{\mu}) - h_{\mu}, \quad (99)$$

$$\Lambda_{\mu 4} = -d_{\mu} - \zeta_{\mu} \tan \theta_{\mu f} \sec \theta_{\mu f} \sin \phi_{\mu}, \quad (100)$$

$$\Lambda_{\mu 5} = \frac{1}{k_{\mu f}} (\zeta_{\mu} \tan^2 \theta_{\mu f} \sin \phi_{\mu} \cos \phi_{\mu}), \quad (101)$$

$$\Lambda_{\mu 6} = \frac{1}{2} \zeta_{\mu} k_{\mu f} (\tan^2 \theta_{\mu f} - 2), \quad (102)$$

con $\theta_{\mu f}$ el ángulo de emisión externo (refractado), y los desplazamientos d_{μ} y h_{μ} dados por

$$h_{\mu} = \frac{L}{2} \tan \theta_{\mu} \cos \phi_{\mu}, \quad (103)$$

$$d_{\mu} = \frac{L}{2} \tan \theta_{\mu} \sin \phi_{\mu}. \quad (104)$$

Note que las expresiones de los términos constantes en la ecuación (90), $\Gamma_{\mu j}$, $\Lambda_{\mu j}$ (para $j = 1 : 6$) están en función de la cintura y la posición del modo de colección ($W_{\mu f}$ y ζ_{μ} , respectivamente), la constante de propagación en el espacio libre evaluada en la frecuencia central de emisión de los fotones generados ($k_{\mu f}$), el ángulo central de emisión ($\theta_{\mu f}$) y el

ángulo azimutal de emisión (ϕ_μ).

3.2. Derivación de expresiones semianalíticas

Teniendo una expresión cerrada de los modos de colección en el espacio de momentos, es posible continuar con el propósito de generar una herramienta numérica que nos permita calcular la función espectral conjunta acoplada y la función espectral conjunta condicionada, las cuales como se puede ver en las ecuaciones (76) y (80) son necesarias para calcular el valor esperado del número de pares de fotones acoplados a ambas fibras ópticas, así como el valor esperado del número de fotones individuales acoplados a una sola de ellas. Si observamos la ecuación (74) se puede notar que de querer calcularla numéricamente se debe integrar sobre las variables transversales,

$$\begin{aligned} f(\omega_s, \omega_i) &= \alpha(\omega_s + \omega_i)g(\omega_s, \omega_i), \\ &= \alpha(\omega_s + \omega_i) \int \int \int \int \phi_T^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_L^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) u_s^*(\vec{k}_s) u_i^*(\vec{k}_i) dk_{sx} dk_{sy} dk_{ix} dk_{iy}. \end{aligned} \quad (105)$$

La evaluación numérica de estas cuatro integrales representa un costo computacional muy grande, de ahí la necesidad de identificar bajo que condiciones se puede simplificar el problema, buscando una versión analítica cerrada o bien semianalítica de la función $g(\omega_s, \omega_i)$. Un paso clave en este punto es el de introducir una identidad de la función sinc:

$$\text{sinc}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp[i x \xi] d\xi, \quad (106)$$

de esta manera reemplazando las ecuaciones (52), (53) y (90) en 75 se llega a

$$\begin{aligned} g(\omega_s, \omega_i) &= \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{4} (W_x^2 k_x^2 + W_y^2 k_y^2) \right] \exp \left[i \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2k_p} z_0 \right] \\ &\quad \times \exp \left[i \frac{L}{2} (k_p + k_y \tan \rho + k_z - \frac{2\pi}{\Lambda}) \right] \exp \left[i \frac{L}{2} \Delta K \xi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp [\Gamma_{s1}k_x^2 + \Gamma_{s2}k_y^2 + \Gamma_{s3}k_x + \Gamma_{s4}k_y + \Gamma_{s5}k_xk_y + \Gamma_{s6}] \\
& \times \exp [-i(\Lambda_{s1} + \Lambda_{s2}k_y^2 + \Lambda_{s3}k_x + \Lambda_{s4}k_y + \Lambda_{s5}k_xk_y + \Lambda_{s6})] \\
& \times \exp [\Gamma_{i1}k_x^2 + \Gamma_{i2}k_y^2 + \Gamma_{i3}k_x + \Gamma_{i4}k_y + \Gamma_{i5}k_xk_y + \Gamma_{i6}] \\
& \times \exp [-i(\Lambda_{i1} + \Lambda_{i2}k_y^2 + \Lambda_{i3}k_x + \Lambda_{i4}k_y + \Lambda_{i5}k_xk_y + \Lambda_{i6})] d^2k_s d^2k_i d\xi. \quad (107)
\end{aligned}$$

En aproximación paraxial, la componente longitudinal del vector de onda se puede escribir como: $k_{\mu z} = k_\mu - \frac{k_{\mu x}^2}{2k_\mu} - \frac{k_{\mu y}^2}{2k_\mu}$ con $\mu = s, i$. De esta manera es posible evaluar las integrales transversales de manera analítica, de modo que $g(\omega_s, \omega_i)$ queda dada en términos de una sola integral, asociada con la variable ξ en la ecuación (106), la cual debe ser evaluada numéricamente:

$$g(\omega_s, \omega_i) = \frac{1}{2} \int_{-1/\sqrt{\Delta}}^1 \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \exp \left[\frac{1}{\mathbb{P}} \left(\mathbb{M} + \frac{\mathbb{N}}{\Delta} \right) \right] d\xi, \quad (108)$$

con las variables Δ , \mathbb{P} , \mathbb{M} , y \mathbb{N} dadas por

$$\begin{aligned}
\Delta &= -4\Omega_1\Omega_{10}^2\Omega_2 + (\Omega_{11}^2 - 4\Omega_1\Omega_3)(\Omega_{12}^2 - 4\Omega_2\Omega_4) + \Omega_9^2(\Omega_{10}^2 - 4\Omega_3\Omega_4) - 2\Omega_{10}\Omega_{11}\Omega_{12}\Omega_9, \\
\mathbb{N} &= [\Omega_{10}(-4\Omega_1\Omega_2\Omega_6 + 2\Omega_{11}\Omega_2\Omega_5 - \Omega_{11}\Omega_7\Omega_9 + \Omega_6\Omega_9^2) + (\Omega_{11}^2 - 4\Omega_1\Omega_3)(\Omega_{12}\Omega_7 - 2\Omega_2\Omega_8), \\
& \quad + \Omega_{12}\Omega_9(2\Omega_3\Omega_5 - \Omega_{11}\Omega_6) - 2\Omega_3\Omega_8\Omega_9^2]^2 \\
\mathbb{M} &= 4\Omega_1(-4\Omega_{13}\Omega_2\Omega_3 + \Omega_2\Omega_6^2 + \Omega_3\Omega_7^2) + \Omega_{11}^2(4\Omega_{13}\Omega_2 - \Omega_7^2) + 2\Omega_{11}\Omega_6(\Omega_7\Omega_9 - 2\Omega_2\Omega_5) \\
& \quad + \Omega_9^2(4\Omega_{13}\Omega_3 - \Omega_6^2) + 4\Omega_3\Omega_5(\Omega_2\Omega_5 - \Omega_7\Omega_9), \\
\mathbb{P} &= 4(\Omega_3(\Omega_9^2\Omega_1\Omega_2) + \Omega_{11}^2\Omega_2),
\end{aligned}$$

donde se han definido los términos Ω_{1-13} como:

$$\Omega_1 = -\frac{W_x^2}{4} + \Gamma_{s1} + \frac{i}{2} \left(\frac{z_0}{k_p} - \frac{L}{2k_s} + 2\Lambda_{s1} \right) - \frac{iL}{4} \left(\frac{1}{k_p} - \frac{1}{k_s} \right) \xi,$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= -\frac{W_y^2}{4} + \Gamma_{s2} + \frac{i}{2} \left(\frac{z_0}{k_p} - \frac{L}{2k_s} + 2\Lambda_{s2} \right) - \frac{iL}{4} \left(\frac{1}{k_p} - \frac{1}{k_s} \right) \xi, \\
\Omega_3 &= -\frac{W_x^2}{4} + \Gamma_{i1} + \frac{i}{2} \left(\frac{z_0}{k_p} - \frac{L}{2k_i} + 2\Lambda_{i1} \right) - \frac{iL}{4} \left(\frac{1}{k_p} - \frac{1}{k_i} \right) \xi, \\
\Omega_4 &= -\frac{W_y^2}{4} + \Gamma_{i2} + \frac{i}{2} \left(\frac{z_0}{k_p} - \frac{L}{2k_i} + 2\Lambda_{i2} \right) - \frac{iL}{4} \left(\frac{1}{k_p} - \frac{1}{k_i} \right) \xi, \\
\Omega_5 &= \Gamma_{s3} + i\Lambda_{s3}, \\
\Omega_6 &= \Gamma_{i3} + i\Lambda_{i3}, \\
\Omega_7 &= \Gamma_{s4} + i\Lambda_{s4} + \frac{iL \tan \rho}{2} (1 + \xi), \\
\Omega_8 &= \Gamma_{i4} + i\Lambda_{i4} + \frac{iL \tan \rho}{2} (1 + \xi), \\
\Omega_9 &= \Gamma_{s5} + i\Lambda_{s5}, \\
\Omega_{10} &= \Gamma_{i5} + i\Lambda_{i5}, \\
\Omega_{11} &= -\frac{W_x^2}{2} + \frac{i}{k_p} \left(z_0 - \frac{L}{2} \xi \right), \\
\Omega_{12} &= -\frac{W_y^2}{2} + \frac{i}{k_p} \left(z_0 - \frac{L}{2} \xi \right), \\
\Omega_{13} &= (\Gamma_{s6} + \Gamma_{i6}) + i(\Lambda_{s6} + \Lambda_{i6}) + \frac{iL}{2} \left(k_p + k_s + k_i - \frac{2\pi m}{\Lambda} \right) \\
&\quad + \frac{iL}{2} \left(k_p - k_s - k_i + \frac{2\pi m}{\Lambda} \right) \xi.
\end{aligned}$$

Similarmente, en el caso de la función espectral conjunta condicionada $f_s(\omega_s, \omega_i)$ de la ecuación (81), es necesario evaluar numéricamente las cuatro integrales sobre las coordenadas transversales, lo cual resulta en

$$f_s(\omega_s, \omega_i) = |\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2 h(\omega_s, \omega_i), \quad (109)$$

$$\begin{aligned}
&= |\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2 \int \int \left| \int \int u_s^*(\vec{k}_s) \phi_T^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_L^{libre}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) dk_{sx} dk_{sy} \right|^2 dk_{ix} dk_{iy}. \\
&\hspace{15em} (110)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, siguiendo un tratamiento análogo a la derivación de una expresión semi-analítica de $g(\omega_s, \omega_i)$, se llega a una expresión semianalítica para $h(\omega_s, \omega_i)$ dada por:

$$h(\omega_s, \omega_i) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 \Psi(\xi_1, \xi_2), \quad (111)$$

donde

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}_1 \mathbb{K}_2^* (4\vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_5^2)}} \exp \left[-\frac{\vartheta_1 \vartheta_4^2 + \vartheta_2 (\vartheta_3^2 - 4\vartheta_1 \vartheta_6) + \vartheta_5 (-\vartheta_3 \vartheta_4 + \vartheta_5 \vartheta_6)}{4\vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_5^2} \right], \quad (112)$$

y

$$\mathbb{K}_j = -(\Gamma_{s5} + i\Lambda_{s5})^2 + \frac{1}{4} \left[-W_x^2 + 4\Gamma_{s1} + i \left(\frac{2z_0}{k_p} - \frac{L}{k_s} + 4\Lambda_{s1} \right) + iL \left(\frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_p} \right) \xi_j \right] \\ \times \left[-W_y^2 + 4\Gamma_{s2} + i \left(\frac{2z_0}{k_p} - \frac{L}{k_s} + 4\Lambda_{s2} \right) + iL \left(\frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_p} \right) \xi_j \right], \quad (113)$$

para $j = 1, 2$. Las definiciones de los términos $\vartheta_{1-6}(\xi_1, \xi_2)$ en la ecuación (112) han sido presentadas en el apéndice, sección A.1. En la sección A.2 del mismo, se muestra un ejemplo de equivalencia entre la versión completa y la versión semianalítica del cálculo para obtener la función espectral conjunta acoplada.

Capítulo 4. Preparación de estados de fotón individual anunciado

En el capítulo 2 se derivó el estado cuántico de dos fotones emitido por el proceso de SPDC justo a la salida del cristal. Este estado se describe por su función de amplitud conjunta la cual puede o no ser factorizable. En caso de lograr la factorabilidad de dicha función, la detección, mediante un fotodiodo de avalancha, de uno de los fotones del par, por ejemplo el fotón señal, proyectará al fotón remanente (acompañante) a un estado de fotón individual puro, adecuado para su aplicación en procesamiento de información cuántica (Ladd *et al.*, 2010)(Charles *et al.*, 2010).

En este capítulo se derivan criterios analíticos que conllevan a la factorabilidad del estado de dos fotones, así como una medida que permita cuantificar la pureza del estado de fotón individual anunciado. Por último, con la finalidad de cumplir con los objetivos de maximizar simultáneamente la medida de pureza y la eficiencia de anunciamento, se describirá una herramienta numérica de gran utilidad para resolver problemas de optimización basada en un algoritmo genético.

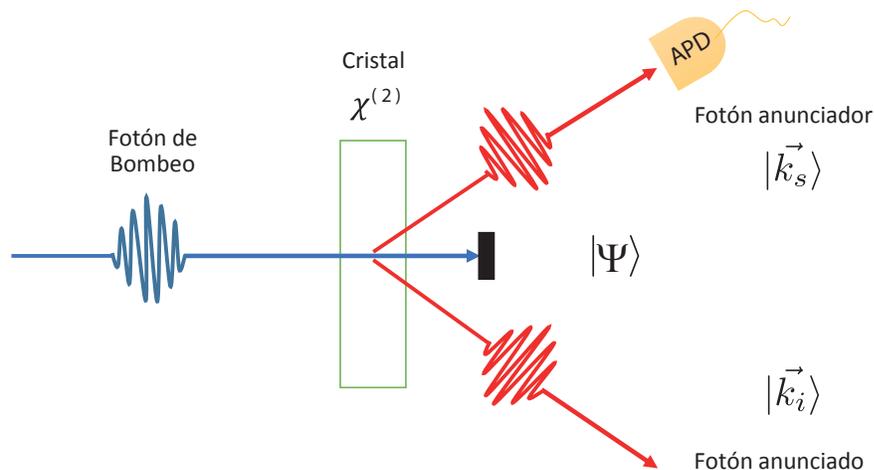


Figura 13: Esquema de fotón individual anunciado. Al realizar una medición sobre el estado de dos fotones, el fotón remanente se proyecta en un estado puro solo si la función de amplitud conjunta que describe al estado bi-partita es factorizable.

4.1. Criterios de factorabilidad para el estado de dos fotones sin acoplar

En el caso particular de parejas de fotones generadas por SPDC se dice que el estado cuántico de dos fotones es factorizable si es posible escribir la función de amplitud conjunta $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ como un producto de dos funciones $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = S(\vec{k}_s)I(\vec{k}_i)$. Si analizamos las tres funciones que conforman la función de amplitud conjunta del estado de dos fotones sin acoplamiento a fibras ópticas monomodales, todas contienen términos mixtos involucrando productos de variables del fotón señal y el fotón acompañante, las cuales es preciso suprimir a fin de lograr la factorabilidad.

$$\begin{aligned}\alpha(\omega_s + \omega_i) &= \exp \left[-\frac{(\omega_s + \omega_i - \omega_{p0})^2}{\sigma^2} \right] \rightarrow \text{término mixto 1,} \\ \phi_T(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \exp \left[-\frac{1}{4}(W_{0x}^2 k_x^2 + W_{0y}^2 k_y^2) \right] \rightarrow \text{término mixto 2,} \\ \phi_L(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \exp \left[\frac{iL}{2}(k_p + k_z + \tan \rho k_y) \right] \text{sinc} \left(\frac{L}{2} \Delta K \right) \rightarrow \text{término mixto 3.}\end{aligned}$$

La idea es buscar bajo que condiciones la suma de esos términos mixtos sea igual a cero. Se puede notar primeramente que todas las funciones involucradas son gaussianas con excepción de $\phi_L(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$. Afortunadamente, es posible hacer una aproximación de la función sinc por una gaussiana teniendo en cuenta que ambas funciones tengan los mismos anchos a la mitad del máximo (FWHM), tal y como se muestra en la figura 14. Usando

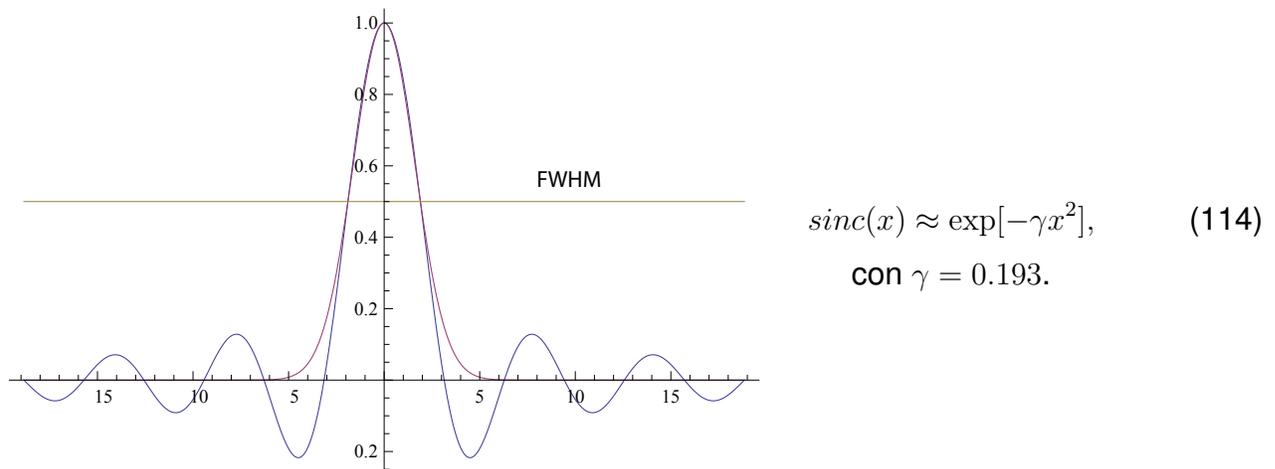


Figura 14: Aproximación de la función sinc por gaussiana.

esta aproximación y suponiendo cinturas del haz de bombeo iguales ($W_{0x} = W_{0y} = W_0$) es posible reescribir la función de amplitud conjunta como

$$F(k_{sx}, k_{sy}, \omega_s; k_{ix}, k_{iy}, \omega_i) = \exp \left\{ - \left[\frac{(\omega_s + \omega_i - \omega_{p0})^2}{\sigma^2} + \gamma \frac{L^2}{4} \Delta K^2 + \frac{W_0^2}{4} |\vec{k}_\perp|^2 \right] \right\}, \quad (115)$$

donde $|\vec{k}_\perp|^2 = k_x^2 + k_y^2 = (k_{sx} + k_{ix})^2 + (k_{sy} + k_{iy})^2$ y ΔK está dado por la ecuación (54).

En este paso también se omitió el término de fase $\exp[\frac{iL}{2}(k_p + k_z + \tan \rho k_y)]$ ya que éste es factorizable.

Habiendo hecho estas aproximaciones se procede a hacer un cambio de coordenadas con el fin de expandir en serie de Taylor el vector de onda \vec{k}_μ , lo cual a primer orden permitirá identificar los términos mixtos que introducen correlaciones y buscar bajo que condiciones éstos se pueden suprimir.

Los vectores de onda obedecen la relación de dispersión $k_\mu = \frac{n(\omega_\mu)\omega_\mu}{c}$. Al escribir sus componentes en coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} k_{\mu x} = k_\mu \sin \theta_\mu \cos \phi_\mu, \\ k_{\mu y} = k_\mu \sin \theta_\mu \sin \phi_\mu, \\ k_{\mu z} = k_\mu \cos \theta_\mu, \end{cases} \quad (116)$$

se puede representar la función de amplitud conjunta $F(k_{sx}, k_{sy}, \omega_s; k_{ix}, k_{iy}, \omega_i)$ en términos de $F(\omega_s, \theta_s, \phi_s; \omega_i, \theta_i, \phi_i)$. En este análisis se aproximarán las funciones alrededor de sus valores centrales $v_0 = \{\omega_{s0}, \theta_{s0}, \phi_{s0}; \omega_{i0}, \theta_{i0}, \phi_{i0}\}$ y para simplificar el cálculo se fija la posición azimutal en $\phi_{s0} = 0$, lo cual es equivalente a coleccionar la emisión proveniente desde una posición angular fija sobre el cono de emisión. Se asume además que el proceso es degenerado ($\omega_{s0} = \omega_{i0} = \omega_0$) y ($\theta_{s0} = \theta_{i0} = \theta_0$), por lo que las posiciones centrales quedarán finalmente como $v_0 = \{\omega_0, \theta_0, 0; \omega_0, -\theta_0, 0\}$.

También, por comodidad, es posible definir variables de desintonización: $\Omega_s \equiv \omega_s - \omega_0$, $\Omega_i \equiv \omega_i - \omega_0$, $\Theta_s \equiv \theta_s - \theta_0$, $\Theta_i \equiv \theta_i - \theta_0$, $\Phi_s \equiv \phi_s - \phi_0$, $\Phi_i \equiv \phi_i - \phi_0$.

Se comienza expandiendo ΔK [ver ecuación (54)], que a primer orden queda como:

$$\Delta K \approx \Delta K^{(0)} + \Delta K^{(1)}. \quad (117)$$

Asumimos que para el orden cero se cumplen las condiciones de empataamiento de fases por lo que

$$\Delta K^{(0)} = \Delta K \Big|_{v_0} = 0, \quad (118)$$

para el orden uno resulta:

$$\Delta K^{(1)} = \frac{\partial \Delta K}{\partial \omega_s} \Big|_{v_0} \Omega_s + \frac{\partial \Delta K}{\partial \omega_i} \Big|_{v_0} \Omega_i + \frac{\partial \Delta K}{\partial \theta_s} \Big|_{v_0} \Theta_s + \frac{\partial \Delta K}{\partial \theta_i} \Big|_{v_0} \Theta_i + \frac{\partial \Delta K}{\partial \phi_s} \Big|_{v_0} \Phi_s + \frac{\partial \Delta K}{\partial \phi_i} \Big|_{v_0} \Phi_i, \quad (119)$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta K}{\partial \omega_s} \Big|_{v_0} &= k'_p - k'_s \cos \theta_{s0}, & \frac{\partial \Delta K}{\partial \theta_i} \Big|_{v_0} &= k_{s0} \sin \theta_{i0}, \\ \frac{\partial \Delta K}{\partial \omega_i} \Big|_{v_0} &= k'_p - k'_i \cos \theta_{i0}, & \frac{\partial \Delta K}{\partial \phi_s} \Big|_{v_0} &= k_{s0} \sin \theta_{s0}, \\ \frac{\partial \Delta K}{\partial \theta_s} \Big|_{v_0} &= k_{i0} \sin \theta_{s0}, & \frac{\partial \Delta K}{\partial \phi_i} \Big|_{v_0} &= k_{i0} \sin \theta_{i0}. \end{aligned}$$

Análogamente para $k_x = k_{sx} + k_{ix}$ y $k_y = k_{sy} + k_{iy}$ se tiene que

$$k_{x,y} \approx k_{x,y}^{(0)} + k_{x,y}^{(1)}. \quad (120)$$

Para los valores centrales se cumple $k_{x,y}^{(0)} = 0$ y de manera similar a ΔK , para $k_{x,y}$ solamente sobreviven los términos a primer orden:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial k_x}{\partial \omega_s} \right|_{v_0} &= k'_s \sin \theta_{s0}, & \left. \frac{\partial k_x}{\partial \theta_i} \right|_{v_0} &= k_{i0} \cos \theta_{i0}, \\
\left. \frac{\partial k_x}{\partial \omega_i} \right|_{v_0} &= k'_i \sin \theta_{i0}, & \left. \frac{\partial k_y}{\partial \phi_s} \right|_{v_0} &= k_{s0} \sin \theta_{s0}, \\
\left. \frac{\partial k_x}{\partial \theta_s} \right|_{v_0} &= k_{s0} \cos \theta_{s0}, & \left. \frac{\partial k_y}{\partial \phi_i} \right|_{v_0} &= k_{i0} \sin \theta_{i0}.
\end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado ΔK , k_x y k_y aparecerán términos mixtos. Los términos mixtos están directamente relacionados con las correlaciones entre las variables fotónicas. Existen correlaciones internas entre las distintas variables de un solo fotón y correlaciones externas entre las variables del fotón señal y el fotón acompañante. En este cálculo nos concentraremos en suprimir exclusivamente las correlaciones externas (del tipo $A_s B_i$ o $A_i B_s$ con $A, B = \Omega, \Theta, \Phi$) debido a que estas son las que proyectan al fotón individual anunciado a un estado mixto.

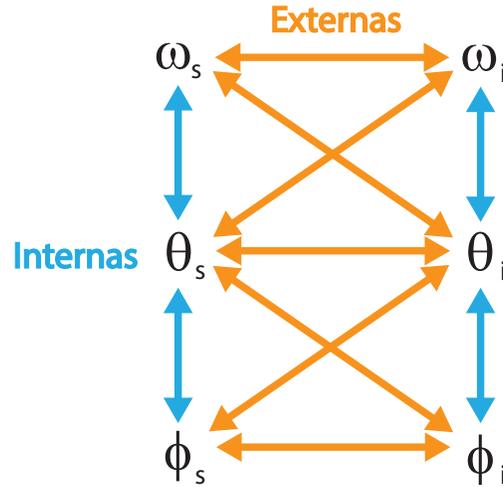


Figura 15: Correlaciones externas e internas entre las variables fotónicas: frecuencias de los fotones señal y acompañante respectivamente ω_s, ω_i ; ángulos polares de emisión de los fotones señal y acompañante respectivamente θ_s, θ_i ; ángulos azimutales de emisión de los fotones señal y acompañante respectivamente ϕ_s, ϕ_i .

Si se supone un ancho de banda de bombeo lo suficientemente grande, los términos mixtos en frecuencia del tipo $\Omega_s \Omega_i$ se suprimen si se cumple la siguiente relación:

$$\frac{W_0}{\sqrt{\gamma}L} = \frac{k'_p - k \cos \theta}{k' \cos \theta}, \quad (121)$$

con $k = |\vec{k}_s| = |\vec{k}_i|$ y $\theta = \theta_0$. Similarmente, los términos mixtos espectrales-espaciales del tipo $\Theta_s \Omega_i$ y $\Omega_s \Theta_i$ se cancelan entre sí cuando se cumplen las relaciones:

$$-\frac{W_0^2}{\gamma L^2} \frac{k'_s \sin \theta_{s0}}{k'_p - k'_s \cos \theta_{s0}} = \tan \theta_{i0}, \quad (122)$$

$$-\frac{W_0^2}{\gamma L^2} \frac{k'_i \sin \theta_{i0}}{k'_p - k'_i \cos \theta_{i0}} = \tan \theta_{s0}. \quad (123)$$

A su vez, los términos mixtos espaciales del tipo $\Theta_s \Theta_i$ se suprimen si:

$$\frac{W_0^2}{\gamma L^2} = -\tan \theta_{s0} \tan \theta_{i0}. \quad (124)$$

Es interesante notar que la condición que emana de suprimir las correlaciones espectrales para un ancho de banda de bombeo lo suficientemente grande no es independiente y pudo ser obtenida de las últimas tres ecuaciones. Lo anterior evidencia que la supresión de correlaciones espaciales y mixtas en la pareja de fotones, implica a su vez cancelación de las correlaciones espectrales, siempre que el bombeo tenga un ancho de banda lo suficientemente grande.

Las ecuaciones (122), (123) y (124) imponen restricciones sobre las velocidades de grupo de los campos involucrados, condición conocida como empatamiento de velocidades de grupo (GVM, por sus siglas en inglés) y en este caso dada por:

$$k'_s = k'_p \cos \theta_{s0}, \quad (125)$$

$$k'_i = k'_p \cos \theta_{i0}. \quad (126)$$

Las correlaciones espectrales-azimutales ($\Omega_s \Phi_i, \Omega_i \Phi_s$) y polares-azimutales ($\Theta_s \Phi_i, \Theta_i \Phi_s$) dependen linealmente del término de *walk-off*, ρ , por lo que en ausencia de *walk-off*, estas correlaciones desaparecen.

Por su parte las correlaciones azimutales $\Phi_s \Phi_i$ no se pueden eliminar, sin embargo es posible utilizar filtros espaciales para reducir los ángulos de detección. La máxima desviación de los valores centrales, con respecto a $\phi_0 = 0$, dentro de la cual las correlaciones se vuelven despreciables está dada por:

$$\Phi_{max} \leq \left[(W_0^2 + \gamma L^2 \tan^2 \rho) k^2 \sin^2 \theta_0 \right]^{-1}. \quad (127)$$

Note que un ancho de bombeo “lo suficientemente grande” implica la condición de tener un ancho de banda de bombeo mayor a un ancho de banda umbral $\bar{\sigma}$ [ver figura 16]

$$\sigma \geq \bar{\sigma}, \quad (128)$$

esto con el fin de que las correlaciones en el estado de dos fotones estén determinadas solamente por las propiedades del cristal, a través del producto de la función de empatamiento de fases transversal con la función de empatamiento de fases longitudinal, $\phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \phi_T(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_L(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$, de las ecuaciones (53) y (52) y no de la función de bombeo $\alpha(\omega_s, \omega_i)$. Como se observa en la figura 16, la función de intensidad conjunta depende del producto de las tres funciones ya mencionadas, por lo que el ancho de banda de bombeo umbral ($\bar{\sigma}$) estará determinado por el ancho ($\bar{\sigma}$) de la función de empatamiento de fases. En caso de ser menor, la función de bombeo introducirá correlaciones indeseadas, como se muestra en la figura 16 a).

El análisis anterior permite la identificación de parámetros y condiciones experimentales que conlleva, a primer orden en \vec{k} y para $\phi_0 = 0$ y $\rho = 0$, a la factorización del estado de dos fotones en todos sus grados de libertad de variable continua. No obstante, correlaciones residuales estarán presentes, las cuales están asociadas a los lóbulos laterales de la función sinc (aquí suprimidos debido a la aproximación gaussiana) y a la curvatura en la función de empatamiento de fases longitudinal, relacionada con los términos de orden superior en la expansión en serie de Taylor de \vec{k} . Es importante resaltar que los criterios arriba descritos conducen a la factorabilidad del estado de SPDC que se tendría justo a la salida del cristal. Correlaciones espaciales residuales pueden ser suprimidas al acoplar

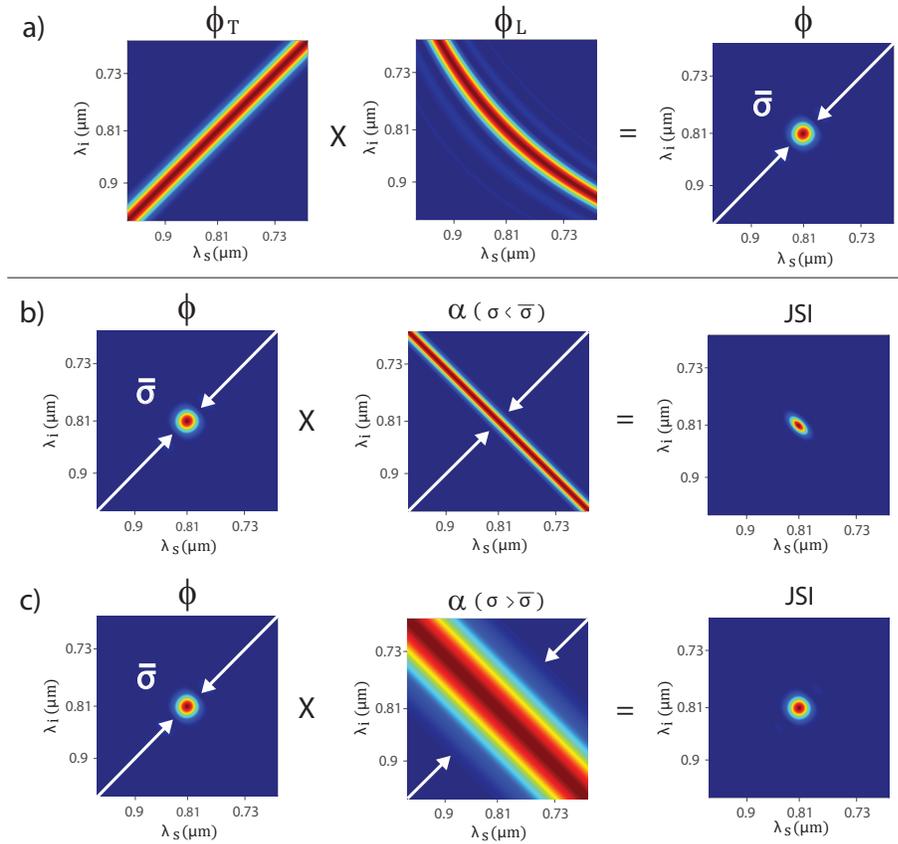


Figura 16: Dependencia de la JSI con la función espectral de bombeo $\alpha(\omega_s + \omega_i)$. a) Producto de la función de empataimiento de fases transversal ϕ_T y longitudinal ϕ_L dando como resultado la función de empataimiento de fases ϕ . b) Producto de la función de empataimiento de fases ϕ con una función de bombeo $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ caracterizada por un ancho de banda de bombeo menor al ancho de banda umbral, c) producto de la función de empataimiento de fases ϕ con una función de bombeo $\alpha(\omega_s + \omega_i)$ caracterizada por un ancho de banda de bombeo mayor al ancho de banda umbral.

los fotones generados a fibras ópticas monomodales, antes de que estos sean dirigidos hacia los detectores. Si bien las correlaciones espaciales son eliminadas, las condiciones de acoplamiento a las fibras pudieran introducir correlaciones espectrales y además de ellas dependerán tanto la cantidad de flujo de fotones llegando a los detectores, como la eficiencia de anunciamiento. De allí que un análisis de las correlaciones espectrales en el estado de dos fotones acoplado a fibras ópticas monomodales [ver ecuación (74)] es imprescindible, y que además sea aplicable a cualquier ángulo azimutal de detección.

4.1.1. Optimización de fuentes de fotón individual anunciado mediante algoritmo genético

Conociendo las expresiones para calcular el parámetro de pureza de fotón individual [ecuación (66)] y la eficiencia de anunciamiento de la fuente [ecuación (83)], el siguien-

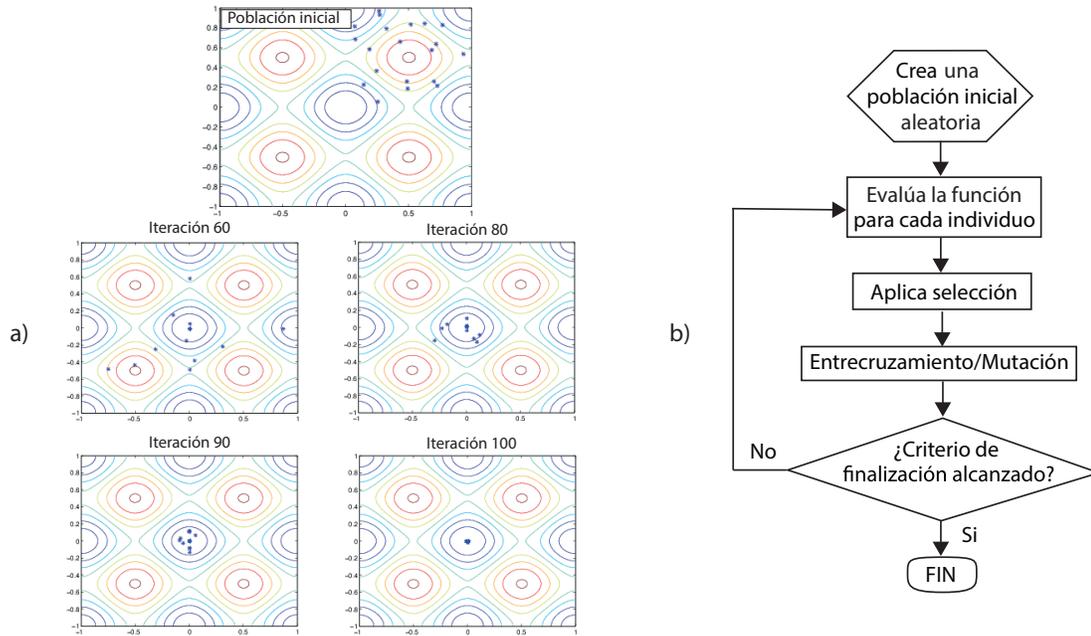


Figura 17: Algoritmo genético. a) Ejemplo de evolución de la población inicial hasta converger al mínimo de la función, b) diagrama de flujo del algoritmo genético.

te paso en la búsqueda del cumplimiento de los objetivos es encontrar una manera de optimizar ambas cantidades simultáneamente. Para este fin, tomando en cuenta la complejidad del problema y su carácter altamente no-lineal, una herramienta clave a aplicar para la optimización de las cantidades que describen a las fuentes es un algoritmo genético.

Un algoritmo genético (GA, por sus siglas en inglés) es un método para resolver problemas de optimización basado en un proceso de selección natural que imita la evolución biológica. El algoritmo modifica repetidamente una población de soluciones independientes. En cada paso, el algoritmo genético selecciona aleatoriamente individuos de la población actual y las usa como padres para producir hijos de la siguiente generación. En las generaciones sucesivas, la población “evoluciona” hacia una solución óptima.

Dada una función de optimización, a la cual se le conoce como función “fitness”, el GA encontrará el mínimo. Como ya se mencionó, se busca la optimización simultánea del parámetro de pureza y de la eficiencia de anunciamento, por lo que la función fitness se definió como:

$$\text{Fitness} = -(\alpha \text{ Pureza} + \beta \eta_H), \quad (129)$$

donde α y β son coeficientes que pueden cambiar de acuerdo al porcentaje de importancia que se le quiera dar a las cantidades a optimizar, cumpliendo por supuesto con la relación $\beta = 1.0 - \alpha$.

La idea de como funciona el algoritmo se puede resumir de la siguiente manera [ver también diagrama de flujo de la figura 17 b)]:

1. El algoritmo comienza creando una población inicial aleatoria.
2. Posteriormente crea una secuencia de poblaciones nuevas. Para crear la nueva población el algoritmo realiza los siguientes pasos:
 - a) Evalúa cada miembro de la población actual obteniendo el valor de la función para cada individuo.
 - b) Selecciona miembros llamados padres basándose en los valores obtenidos.
 - c) Algunos de los individuos en la generación actual que hayan obtenido los valores más bajos son elegidos como *élite*. Estos individuos *élite* pasan a la siguiente generación.
 - d) Se producen hijos de los padres. Ya sea generando cambios aleatorios de los padres -*mutación*- o combinando los vectores de un par de padres -*recombinación*.
 - e) Reemplaza la población actual con los hijos para formar la siguiente generación.
3. El algoritmo se detiene cuando algún criterio como tiempo, número de generaciones, estancamiento de generaciones o cambio de la función menor a una tolerancia es cumplido.

Con poblaciones lo suficientemente grandes, y después de varias generaciones uno se puede asegurar -debido a la aleatoriedad de las poblaciones- que se llega al mínimo global de la función.

Capítulo 5. Resultados

Basados en el desarrollo analítico de los capítulos anteriores, así como en las herramientas numéricas descritas, aquí se presentarán resultados relacionados con:

1. Propiedades de empatamiento de fases para SPDC en cristales de:
 - Beta borato de bario (BBO).
 - Triborato de bismuto (BiBO)
 - Titanil-fosfato de potasio periódicamente polarizado (PPKTP)

2. Diseños específicos de fuentes de fotones individuales anunciados basados en SPDC en distintos cristales
 - BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la ventana de eficiencia colección óptima de los fotodiodos de Silicio ($\lambda_{s,i} = 800nm$).
 - BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la banda de telecomunicaciones ($\lambda_{s,i} = 1550nm$).
 - PPKTP: fuente de SPDC con un fotón anunciador en la ventana de eficiencia de colección óptima de los fotodiodos de Silicio ($\lambda_s = 775nm$) y un fotón anunciado el rango espectral de telecomunicaciones ($\lambda_i = 1590nm$).

3. Generalización del análisis de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales, a cualquier ángulo azimutal de colección (a lo largo del anillo de emisión).

5.1. Propiedades de empatamiento de fases

Una manera natural de comenzar el estudio para el diseño de fuentes de fotones individuales anunciados basados en SPDC es realizando gráficas de empatamiento de fases.

En la práctica, se cuenta con un láser de bombeo que emite a una cierta longitud de onda central, y se sabe a que longitud de onda se desean generar los fotones señal y

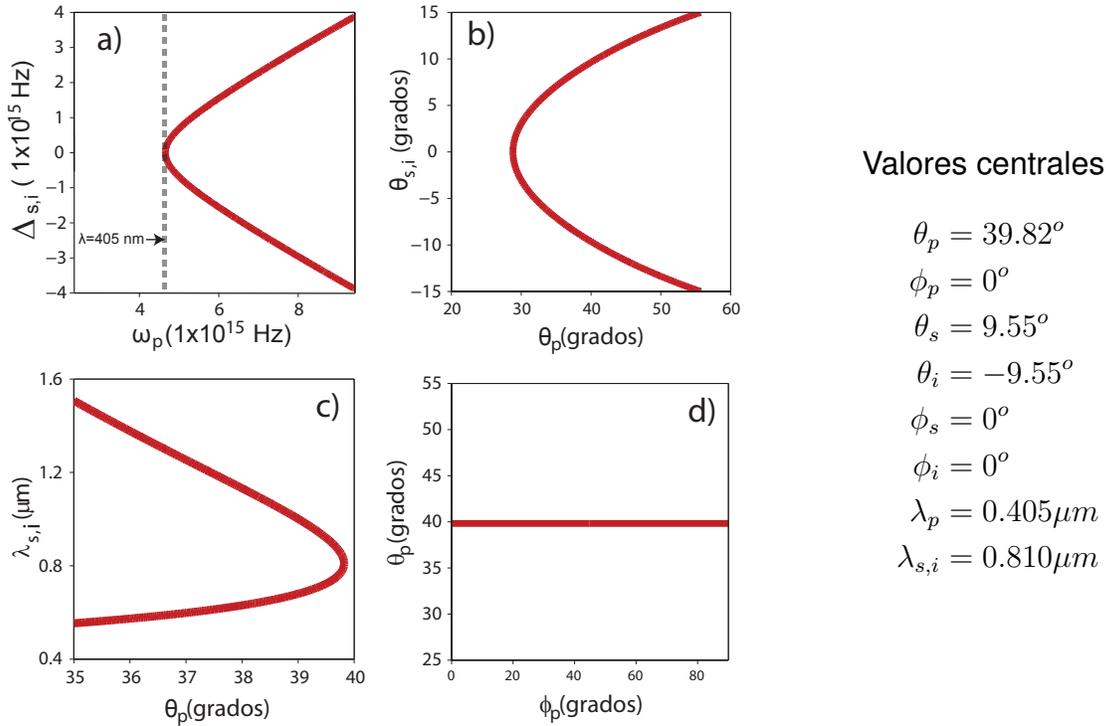


Figura 18: Gráficas de empatamiento de fases para un cristal de BBO (uniaxial). a) $\Delta K(\Delta_{s,i}, \omega_p)$ con ω_p la frecuencia de bombeo y $\Delta_{s,i}$ la desintonización de las frecuencias ω_s y ω_i con respecto a la frecuencia de bombeo media, $\omega_p/2$, b) $\Delta K(\theta_p, \theta_{s,i})$ con θ_p el ángulo polar de bombeo y $\theta_{s,i}$ el ángulo polar de emisión de la pareja de fotones. c) $\Delta K(\theta_p, \lambda_{s,i})$ con $\lambda_{s,i}$ la longitud de onda de los fotones generados. d) $\Delta K(\phi_p, \theta_p)$ con ϕ_p el ángulo azimutal de bombeo.

acompañante. En los casos de empatamiento de fases tipo I y tipo II, después de imponer las condiciones de factorabilidad, se pueden conocer los ángulos polares de emisión óptimos, y una vez conociendo éstos, es posible determinar el ángulo de empatamiento de fases; es decir, el valor de θ_p para el cual se cumple el empatamiento de fases. Experimentalmente, el cristal será cortado a éste ángulo, por lo que también se le conoce como ángulo de corte. En el caso de cuasi-empatamiento de fases, se escoge $\theta_p = 90^\circ$ e igualmente, con la información de las longitudes de onda de bombeo, señal y acompañante es posible determinar una periodicidad Λ para la cual, la fase añadida por ésta conlleve al empatamiento de fases.

En las figuras 18 y 19 se analiza el comportamiento de la ecuación $\Delta K = 0$, con ΔK dado por la ecuación (54). Dado que dicha función depende de seis variables, se observa la relación entre dos de ellas, dejando fijas las restantes.

De este estudio se observa que las soluciones que cumplen las condiciones de empa-

tamiento de fases implican relaciones espaciales (angulares), espectrales (en frecuencia) y espaciales-espectrales específicas.

Primeramente se realizaron las gráficas para un cristal uniaxial (BBO). En la gráfica 18a) se observa el comportamiento de la función $\Delta K(\Delta_{s,i}, \omega_p)$, donde $\Delta_{s,i} = \omega_{s,i} - \omega_p/2$ representa la desintonización de las frecuencias generadas con respecto a $\omega_p/2$. Se nota que al variar la frecuencia de bombeo, se produce un cambio en la desintonización o diferencia entre las frecuencias de los fotones emitidos (señal y acompañante), siendo el caso de diferencia cero o emisión degenerada correspondiente con el bombeo en $\lambda_p = 405nm$. Por otra parte, si uno desea cambiar el ángulo en el que se emiten los fotones generados por SPDC, esto implica un ángulo de empatamiento de fases (θ_p) distinto, como se muestra en la gráfica de la figura 18b), en términos experimentales, se cortarían el cristal a un ángulo distinto y este ángulo de corte permitirá solamente ciertos ángulos de emisión, así como ciertos valores de longitudes de onda (o frecuencias) emitidas [ver gráfica de la figura 18c)]. Por otra parte, en la gráfica de la figura 18d) se puede observar que las condiciones de empatamiento de fases para el caso de un cristal uniaxial no dependen del ángulo azimutal de bombeo (ϕ_p).

En esta parte fue importante comparar las propiedades de empatamiento de fases del cristal uniaxial (BBO) con las de un cristal biaxial. En este caso se presentan resultados para un cristal de BiBO. Las gráficas mostradas en la figura 19 fueron corroboradas con el trabajo de Guangwen Huo y colaboradores titulado "Calculation of effective nonlinear coefficient in BiBO for spontaneous parametric down conversion" (Huo *et al.*, 2013). Las gráficas de la figura 19 a)-c) tienen la misma interpretación física que las ya descritas para el cristal uniaxial y describen las funciones $\Delta K(\Delta_{s,i}, \omega_p)$, $\Delta K(\theta_{s,i}, \theta_p)$ y $\Delta K(\lambda_{s,i}, \theta_p)$, con comportamientos similares. Sin embargo, se puede apreciar que las condiciones de empatamiento de fases para el caso de los cristales biaxiales si dependen del ángulo azimutal de bombeo $\Delta K(\theta_p, \phi_p)$ [ver figura 19d)], es decir, aunado a las relaciones vistas en los cristales uniaxiales, solo existen ciertos valores de ángulo azimutal de bombeo para los cuales se producirán parejas de fotones por SPDC.

Por último, se presentan resultados de las propiedades de empatamiento de fases para un cristal biaxial de KTP en configuración de cuasi-empatamiento de fases colineal (a

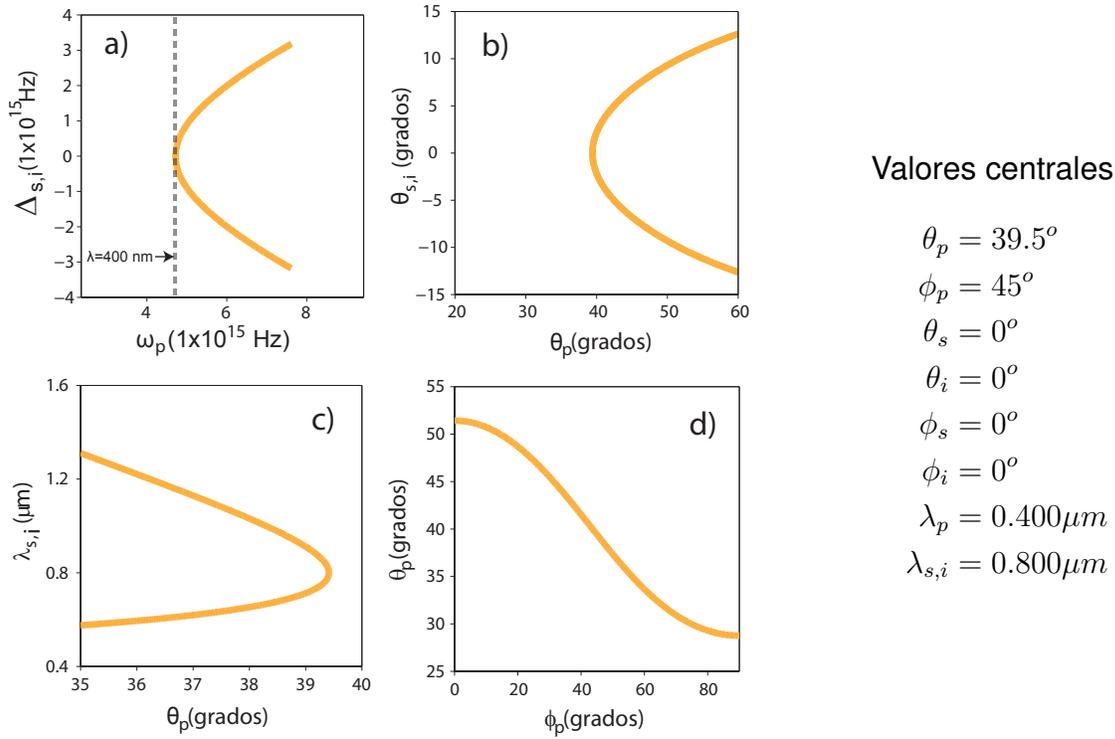


Figura 19: Gráficas de empatamiento de fases para un cristal de BiBO (biaxial). a) $\Delta K(\Delta_{s,i}, \omega_p)$ con ω_p la frecuencia de bombeo y $\Delta_{s,i}$ la desintonización de las frecuencias ω_s y ω_i con respecto a la frecuencia de bombeo media, $\omega_p/2$. b) $\Delta K(\theta_p, \theta_{s,i})$ con θ_p el ángulo polar de bombeo y $\theta_{s,i}$ el ángulo polar de emisión de la pareja de fotones. c) $\Delta K(\theta_p, \lambda_{s,i})$ con $\lambda_{s,i}$ la longitud de onda de los fotones generados. d) $\Delta K(\phi_p, \theta_p)$ con ϕ_p el ángulo azimutal de bombeo.

ángulo polar de emisión $\theta_{s,i} = 0$). Por una parte, fijas las longitudes de onda de emisión en sus valores centrales, se observa el comportamiento de la función $\Delta K(\lambda_p, \Lambda)$ [ver figura 20a)], donde Λ es el periodo de la no linealidad. En la figura 20b), se fija la longitud de onda de bombeo y la longitud de onda del fotón señal en sus valores centrales respectivos, y se observa el comportamiento de la función $\Delta K(\lambda_i, \Lambda)$. Con la información obtenida, es posible escoger una periodicidad adecuada para la fabricación del cristal periódicamente polarizado.

El estudio de las propiedades de empatamiento de fases es la base para el diseño de fuentes de fotones individuales anunciados puros.

5.2. Diseños específicos de fuentes de fotones individuales puros anunciados

Después de la realización de un análisis de las propiedades de empatamiento de fases, un siguiente paso en el diseño de fuentes de fotones individuales anunciados puros consiste en analizar las correlaciones presentes en el estado de dos fotones.

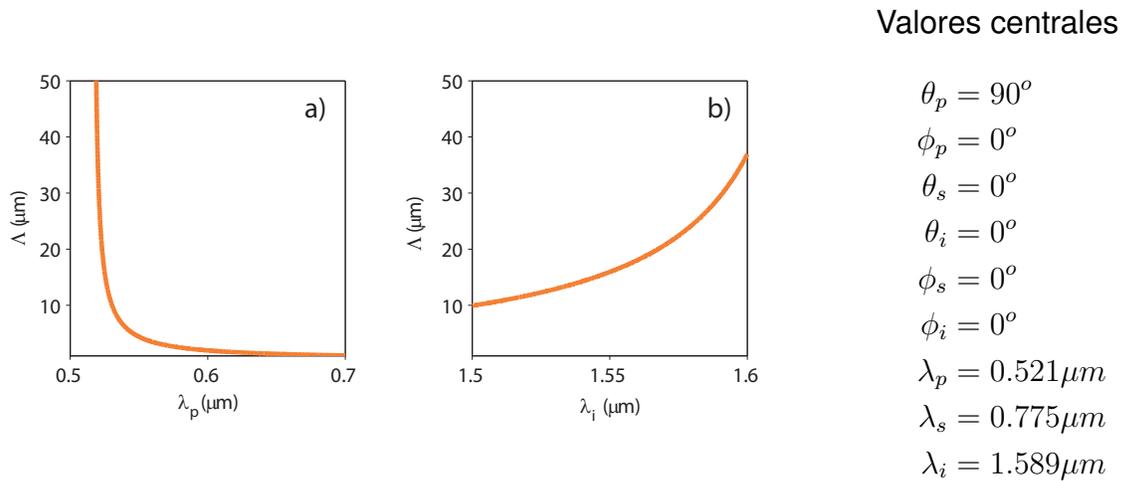


Figura 20: Gráficas de empatamiento de fases para un cristal de PPKTP (biaxial). **a)** $\Delta K(\Lambda, \lambda_p)$ con Λ el periodo de la no linealidad del cristal periódicamente polarizado y λ_p la longitud de onda de bombeo. **b)** $\Delta K(\Lambda, \lambda_{s,i})$ con $\lambda_{s,i}$ la longitud de onda de los fotones señal y acompañante.

Analizar correlaciones experimentalmente implica realizar una estadística de mediciones en alguno de los grados de libertad asociados a los fotones señal y acompañante, tomando cuentas en coincidencias. En el caso por ejemplo de medir correlaciones en frecuencia, se discriminan las frecuencias por medio de monocromadores y posteriormente se detectan los fotones mediante APDs y se registran los eventos simultáneos. Por último se observa el tipo de relación que sigue dicha estadística.

Por otra parte, analizar correlaciones numéricamente implica graficar la función de intensidad conjunta -ya sea del estado de dos fotones acoplado a fibras ópticas monomodales o su versión en el espacio libre-, la cual muestra una función de distribución de probabilidad.

5.2.1. BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la ventana de eficiencia de colección óptima de los fotodiodos de Silicio

Es ilustrativo mostrar comparativamente las correlaciones en los diferentes grados de libertad que presenta, justo a la salida del cristal, el estado de dos fotones correspondiente a una fuente típica de SPDC (en el sentido de no estar acondicionada) y una fuente de SPDC acondicionada para ser factorizable, empleando las condiciones presentadas en el capítulo 4. Para ello se considera un cristal de BBO y una configuración de empatamiento de fases tipo I.

Cabe mencionar que los resultados de las funciones de intensidad conjunta que se mostrarán a continuación son aproximadas, debido a que para observar la correlación entre dos variables, se dejan las restantes en sus valores centrales. Un caso no aproximado, implicaría integrar sobre las variables restantes. Sin embargo, las funciones de intensidad conjunta aproximadas proveen un acercamiento suficiente para describir gráficamente el comportamiento de las correlaciones presentes en el estado de dos fotones producido por SPDC.

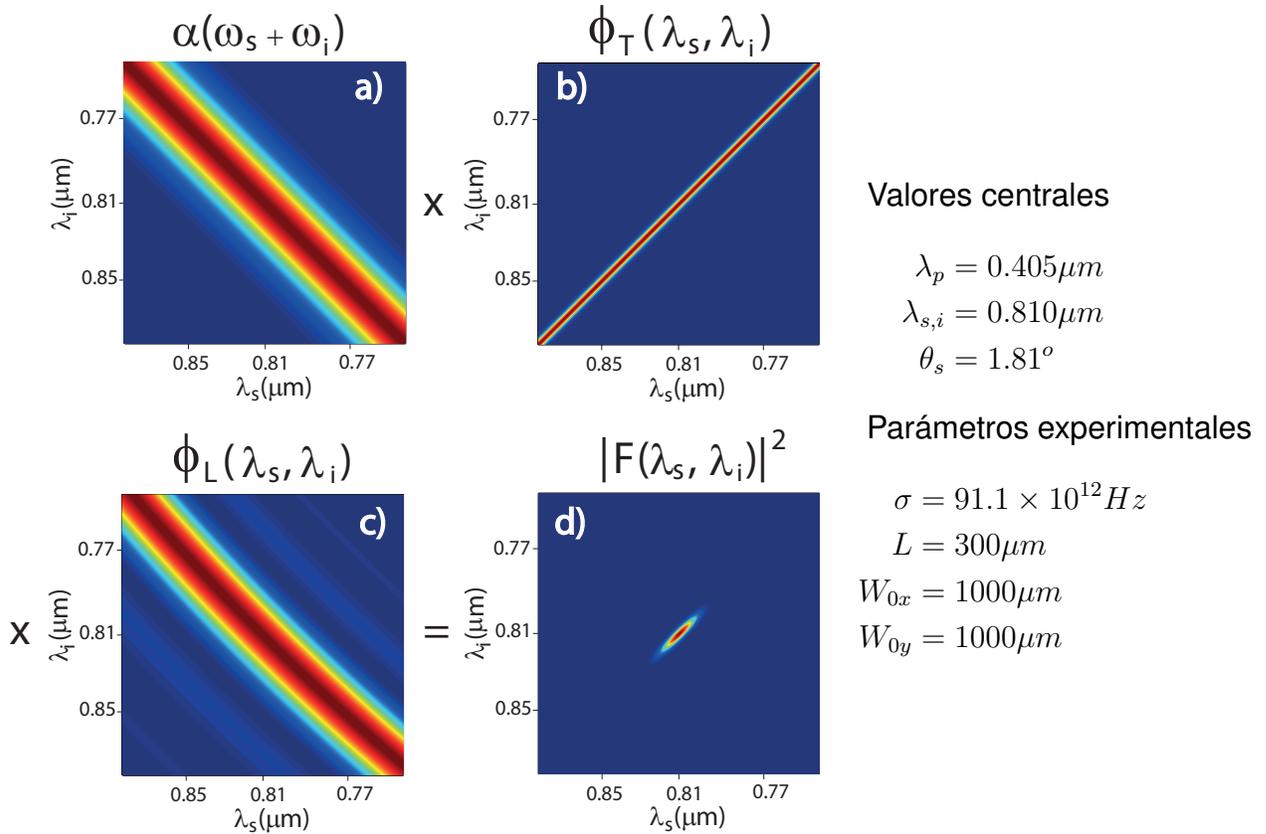


Figura 21: Síntesis de la JSI del estado de dos fotones para fuente típica. a) Envoltura espectral de bombeo, b) función de empatamiento de fases transversal, c) función de empatamiento de fases longitudinal, d) JSI.

Se puede observar en la figura 21d) la función de intensidad espectral conjunta para la fuente típica, así como las funciones que la componen: la envoltura espectral de bombeo [figura21a)], la función de empatamiento de fases transversal [figura21b)] y la función de empatamiento de fases longitudinal [figura21c)] [ver ecuaciones (44), (53) y (52)]. Siendo la JSI el resultado del producto de las tres funciones que la conforman, su ancho y orientación estarán determinados por el ancho y orientación de la función más angosta de las tres. En este caso, los valores centrales de los parámetros experimen-

tales de la fuente son tales que la función de empatamiento de fases transversal es la más angosta, por lo que la JSI resultante se orientará en dirección a ésta. Note que los parámetros de la fuente están dados en la figura 21.

La fuente de SPDC descrita en la figura 21 exhibe correlación espectral positiva; la relación que hay entre la frecuencia del fotón señal y la frecuencia del fotón acompañante es tal que si una resulta menor que la frecuencia central de emisión, es probable que la frecuencia del modo conjugado resultará también menor que su frecuencia central; de igual manera, si una resulta mayor que la frecuencia central, es probable que la frecuencia del modo conjugado resultará también mayor que la frecuencia central.

La figura 22a) muestra la función de intensidad conjunta con respecto a los ángulos polares externos, la cual evidencia correlación negativa en ángulo polar. Se puede ver que la distribución de probabilidad es muy delgada, de manera que existe muy poca incertidumbre; a un ángulo polar de emisión para el fotón señal le corresponde casi de manera determinista un ángulo polar de emisión para el fotón acompañante. La figura 22b) muestra la correlación espacial polar- espectral, lo cual hace evidente que existe una relación entre el ángulo polar de emisión del fotón señal y la frecuencia del fotón acompañante. Por último, en la figura 22c) se observa una correlación positiva en ángulo azimutal.

En contraparte, en la figura 23 se puede observar que la fuente acondicionada, resultante de imponer los criterios de factorabilidad, muestra ausencia de correlación en espectro. Los parámetros de esta fuente están dados en la figura. Las condiciones de la ecuación (125) aseguran la supresión de correlaciones espectrales [ver figura 23d)]. La condición de la ecuación (128) implica tener un bombeo lo suficientemente grande [ver figura 23a)] para que la JSI solamente dependa de las funciones de empatamiento de fase transversal y longitudinal. Como se observa en las figuras 23b) y 23c) las funciones de empatamiento de fases están dispuestas a 45° y -45° y tienen anchos similares, por lo que al realizar el producto se obtiene el estado factorizable deseado.

Además, en la figura 24a) se observa ausencia de correlación entre los ángulos polares externos de emisión de los fotones señal y acompañante, esto debido a imponer la

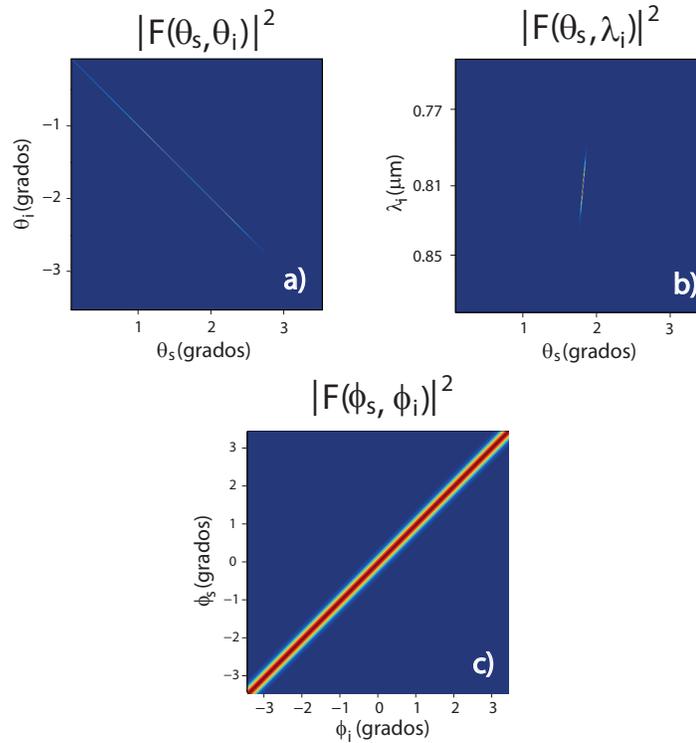


Figura 22: Correlaciones externas para una fuente de SPDC típica. a) Correlación en ángulo polar, b) correlación en ángulo polar- espectral, c) correlación en ángulo azimutal.

condición de la ecuación (124). La figura 24b) a su vez muestra ausencia de correlación entre el ángulo polar de emisión externo del fotón señal y la frecuencia del fotón acompañante, esto logrado imponiendo las condiciones dadas por las ecuaciones (122) y (123). Como ya fue mencionado en el capítulo 4, no se pueden suprimir las correlaciones en ángulo azimutal, sin embargo, la ecuación (127) brinda información acerca del ancho de banda del filtro a aplicar para que dicha correlación sea despreciable.

A continuación, se realiza una comparación entre las versiones acopladas de las fuentes ya mencionadas. Dado que las condiciones de factorabilidad presentadas en el capítulo 4 no proveen información sobre los parámetros de acoplamiento -tales como las cinturas de los modos de colección-, a manera de ejemplo, fue modelado el acoplamiento de la fuente típica y la fuente acondicionada considerando una cintura de modos de colección de $W_f = 100\mu\text{m}$.

En la figura 25a) se observa la JSI acoplada para la fuente típica. Aunque debido al acoplamiento a fibras ópticas monomodales las correlaciones espaciales son suprimidas,

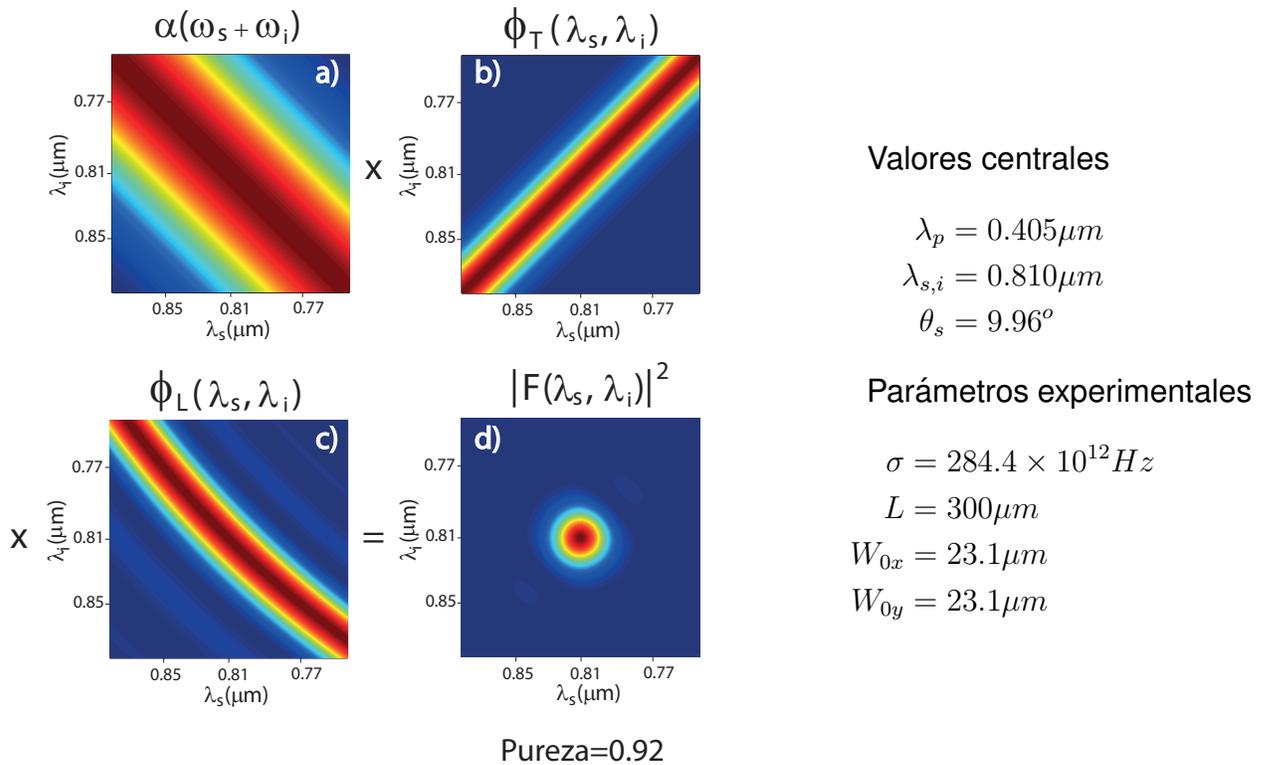


Figura 23: Síntesis de la JSI del estado de dos fotones para una fuente factorizable. a) Envoltura espectral de bombeo, b) función de empatamiento de fases transversal, c) función de empatamiento de fases longitudinal, d) JSI.

se observa que la JSI presenta correlación negativa. Se puede notar que en comparación con la figura 21d), el parámetro de acoplamiento dado por la cintura de los modos de colección fue tal que la correlación en espectro pasó de ser positiva justo a la salida del cristal, a ser negativa después del acoplamiento a SMF. Cabe mencionar que la medida de pureza es obtenida de la JSI acoplada. La función de intensidad conjunta condicionada del modo señal en la figura 25b) se calcula con el objetivo de obtener la tasa de emisión de fotones en el modo señal y a partir de ésta evaluar la eficiencia de anunciamiento.

Por su parte, la figura 26a) muestra supresión de correlaciones espectrales en la JSI acoplada de la fuente acondicionada para ser factorizable. Sin embargo, al comparar con su versión en el espacio libre de la figura 23d) es posible notar que su forma cambia ligeramente. Los parámetros experimentales fueron tales que el valor de la medida de pureza obtenido fue de 0.91, lo cual es aceptable pero no ideal, no obstante, la eficiencia de anunciamiento resultó muy por debajo del valor deseado y reportado en los antecedentes.

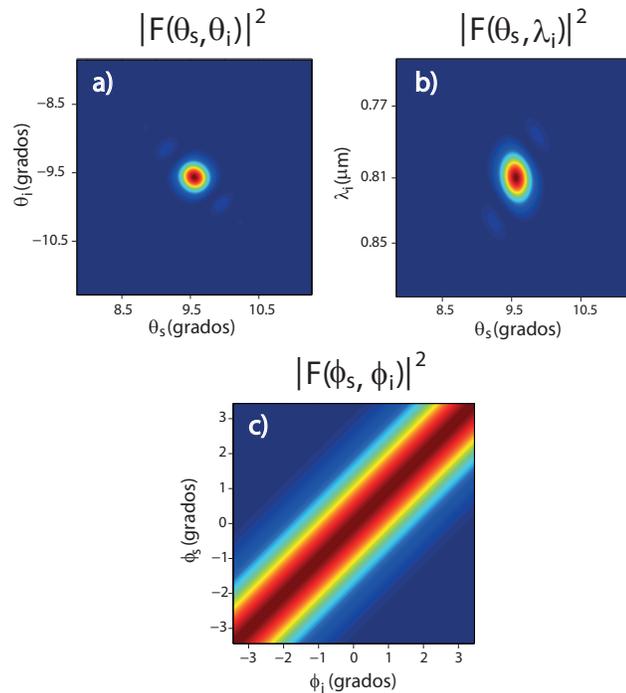


Figura 24: Correlaciones externas de una fuente de SPDC acondicionada para ser factorizable. a) Correlación en ángulo polar, b) correlación espacial polar-espectral, c) correlación espacial azimutal.

En busca de la optimización de la fuente acondicionada para ser factorizable, se identificó que para un ancho de banda del láser de bombeo de $\Delta\lambda = 9\text{nm}$ equivalente a $\sigma = 8.78 \times 10^{13}\text{Hz}$, valores diferentes de las cinturas del haz de bombeo y de los modos de colección que conllevarían a un mejor valor de pureza y eficiencia de anunciamiento son $W_0 = 50.95\mu\text{m}$ y $W_f = 50.95\mu\text{m}$. En la figura 27a) se muestra la JSI correspondiente con los valores obtenidos de pureza 0.99 y eficiencia de anunciamiento 0.37.

Como fue mencionado en la introducción es importante no solamente tener una fuente de fotones puros sino que simultáneamente presente una eficiencia de anunciamiento alta y un buen flujo fotónico; bajo este contexto, se consideran los parámetros experimentales que se pueden variar. Estos son: la longitud del cristal (L), el ancho de banda del bombeo (σ) o su equivalente en longitudes de onda ($\Delta\lambda$), el ancho de cintura del haz de bombeo W_0 , el ancho de cintura de haz de los modos de colección W_f y la posición de la cintura de los modos de colección z_μ . Si se dejan los parámetros en los valores centrales obtenidos para el estado acoplado [ver figura 27] excepto uno de ellos, se puede estudiar como cambian las cantidades a maximizar: pureza, eficiencia de anunciamiento y número de fotones con respecto a este parámetro. Los resultados de este análisis se presentan en

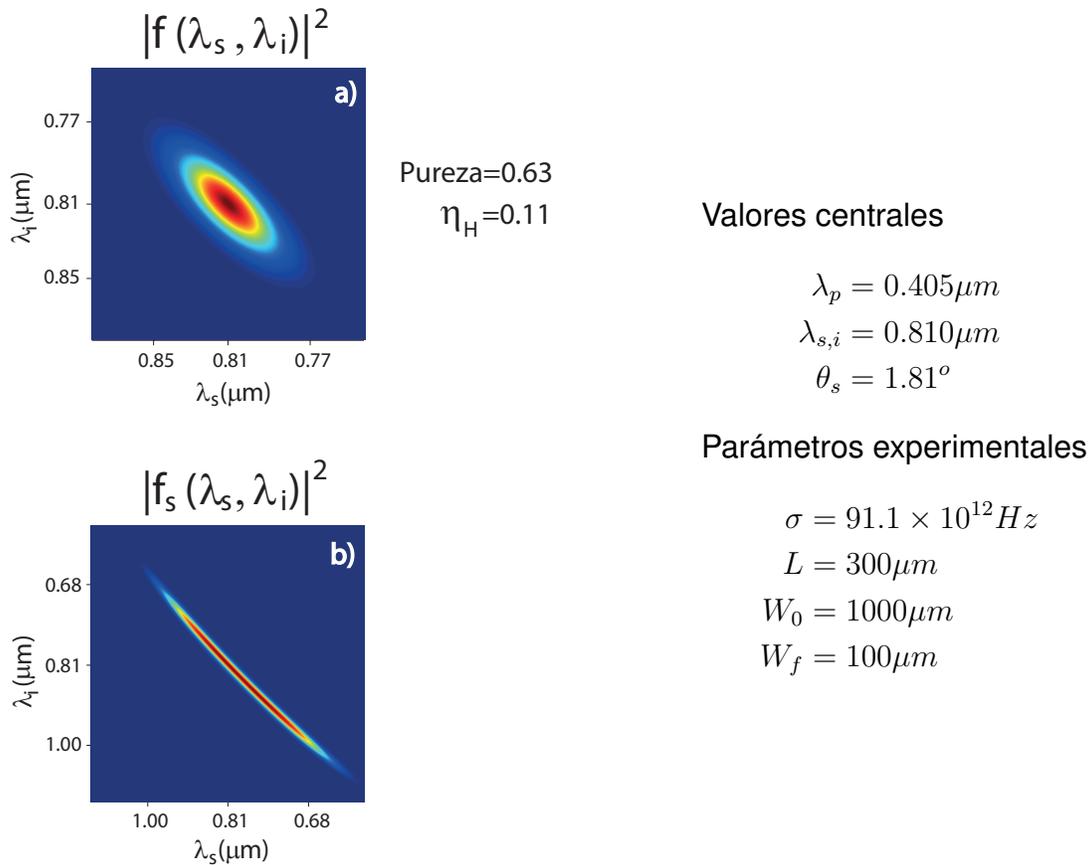


Figura 25: Intensidad espectral conjunta a) e intensidad espectral conjunta condicionada b) para una fuente no acondicionada para ser factorizable. Note que estos resultados corresponden a la versión acoplada a fibras monomodales de la fuente descrita en la figura 21.

la figura 28.

De la figura 28 es posible notar que, en general, el valor del parámetro en el que se encuentra ubicado el máximo para la medida de pureza es diferente al de eficiencia de anunciamiento y el flujo fotónico. Se notó que los parámetros que causan mayor efecto sobre las cantidades de interés son la longitud del cristal [figura 28a)], el ancho de banda de bombeo [figura 28b)], la cintura del haz de bombeo [figura 28c)] y la cintura de los modos de colección [figura 28d)]. La posición de la cintura de los modos de colección produjo cambios en las cantidades hasta la tercera cifra significativa, por lo que para términos prácticos se consideró irrelevante.

Un siguiente paso fue aplicar el algoritmo genético variando solamente uno de los parámetros de la fuente para de esta manera validar los resultados obtenidos, comparándolos con los mostrados en las gráficas de la figura 28. En la figura 29 se presentan

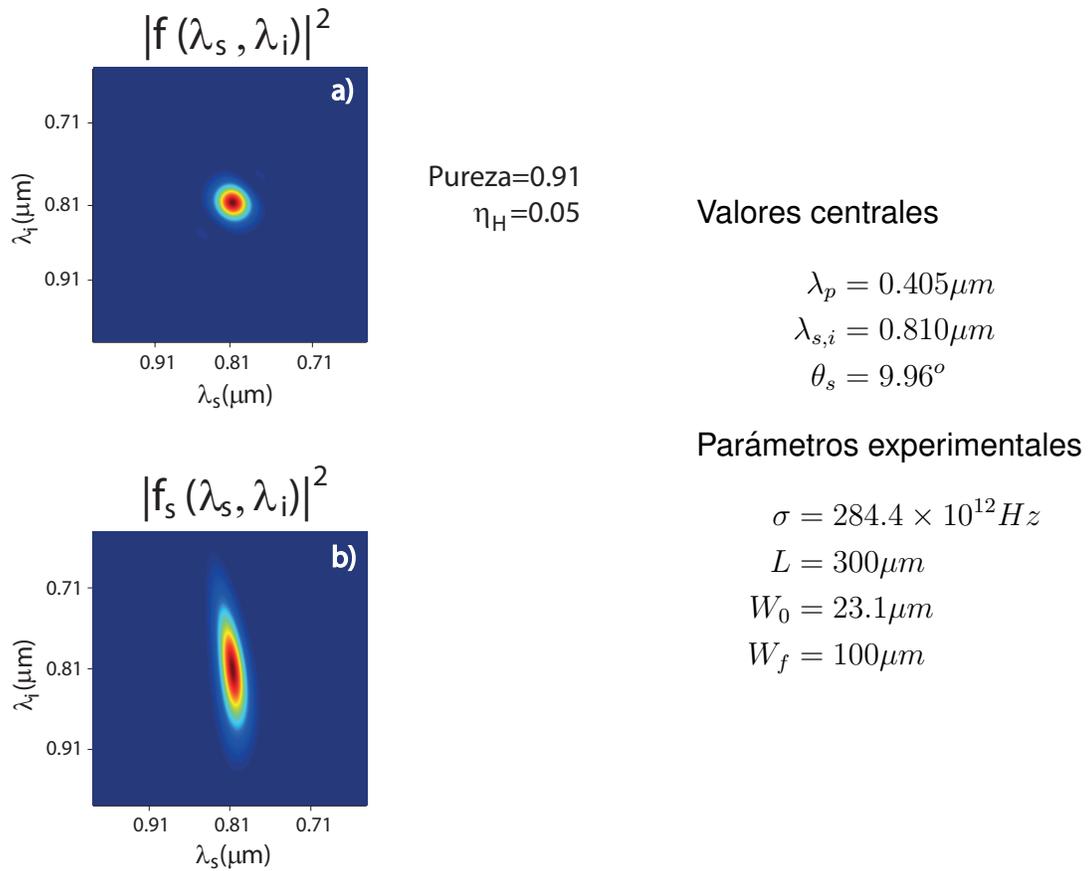


Figura 26: Intensidad espectral conjunta a) e intensidad espectral conjunta condicionada b) para una fuente acondicionada para ser factorizable. Note que estos resultados corresponden a la versión acoplada a fibras monomodales de la fuente descrita en la figura 23.

los resultados obtenidos para cada parámetro, mostrando los valores de pureza y eficiencia de anunciamento correspondientes, como función del coeficiente α definido en la ecuación (129).

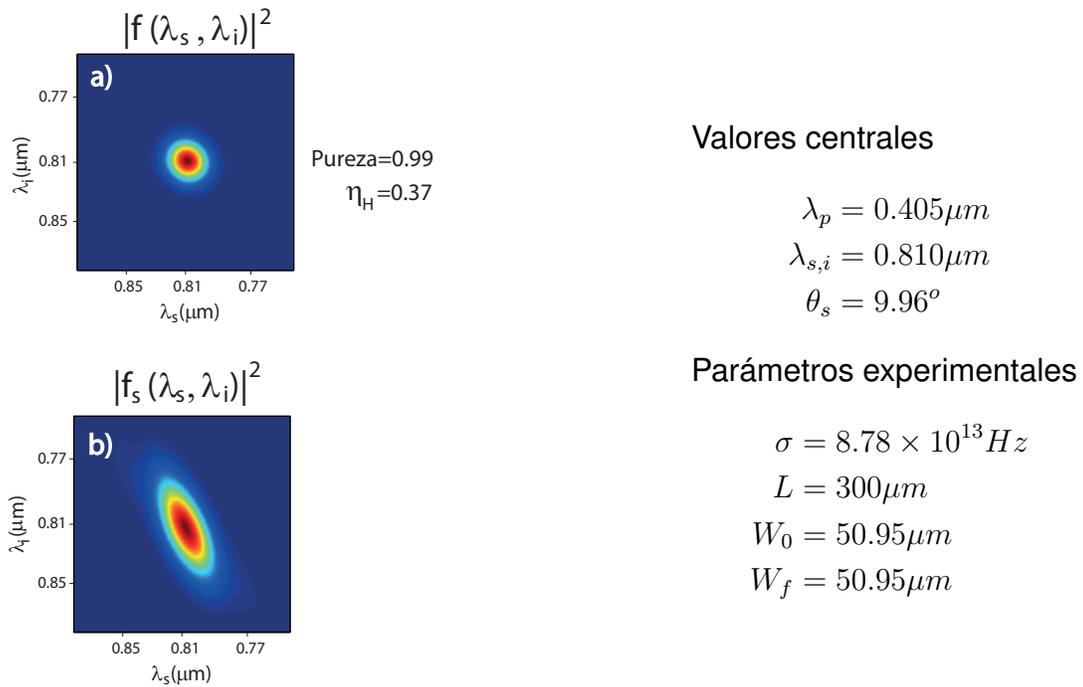


Figura 27: Propiedades espectrales de una fuente de SPDC acoplada a fibras ópticas monomodales, optimizada en factorabilidad y eficiencia de anunciamiento. a) JSI. b) JSI condicionada. Note el incremento en la pureza y eficiencia de anunciamiento comparado con el resultado en la figura 26.

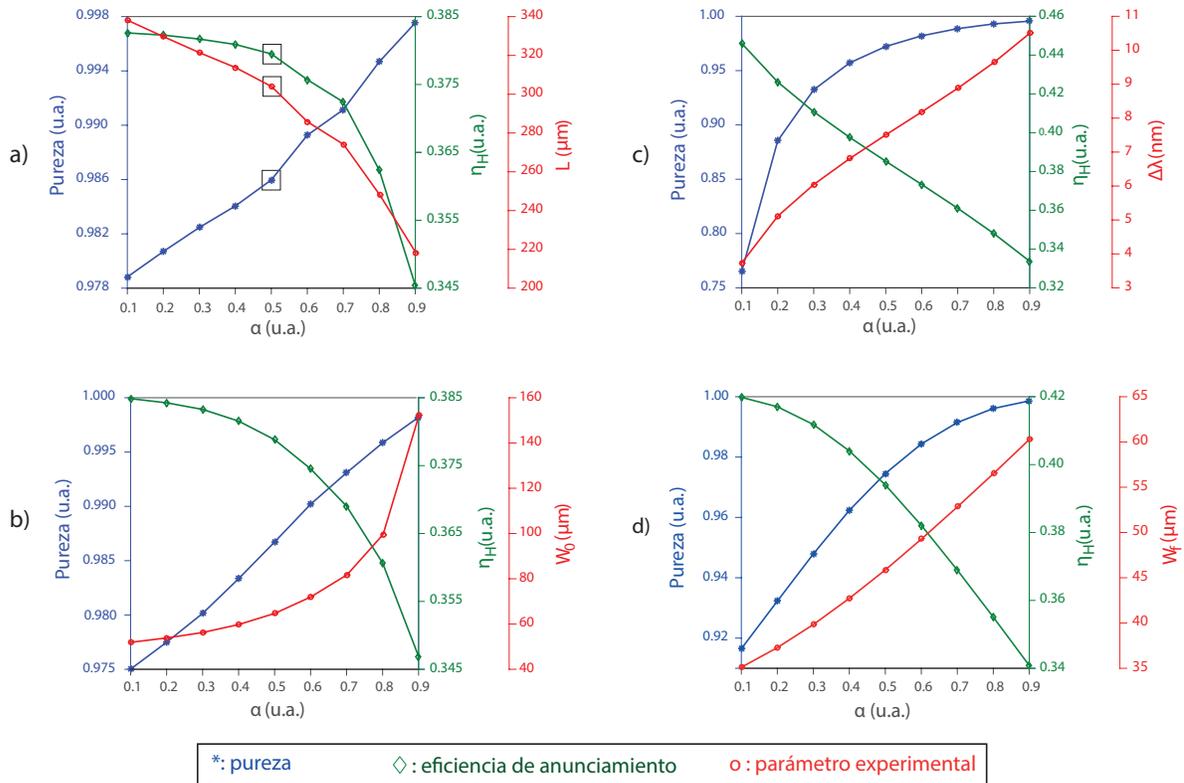


Figura 29: Resultado de pureza, eficiencia de anunciamiento η_H y valor del parámetro de la fuente de SPDC, como función del coeficiente de importancia de pureza α introducido en la ecuación (129). a) Para la longitud del cristal L , b) la cintura del haz de bombeo W_0 , c) el ancho de banda de bombeo $\Delta\lambda$, d) la cintura de los modos de colección W_f .

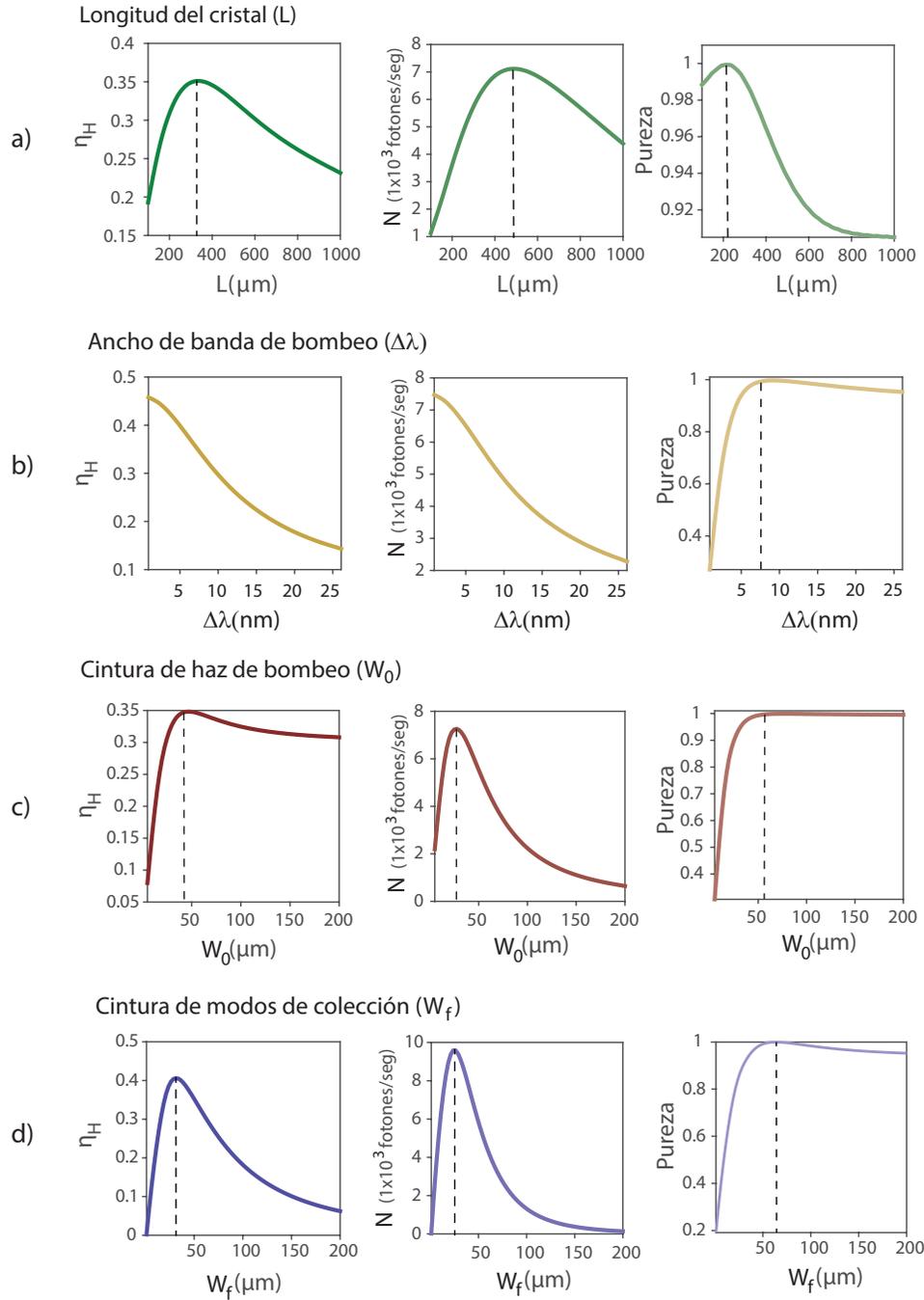


Figura 28: Comportamiento de eficiencia de anuncio η_H , número de pares de fotones N y pureza, en relación con los parámetros experimentales. a) En función de la longitud del cristal L , b) en función del ancho de banda de bombeo $\Delta\lambda$, c) en función de la cintura del haz de bombeo W_0 , d) en función de la cintura de los modos de colección W_f .

Se puede ver que los resultados en la figura 29 concuerdan, dentro de los rangos de variación, con los comportamientos presentados en la figura 28. La figura 29a) muestra que para aumentar la pureza es necesario disminuir la longitud del cristal y para aumentar la eficiencia de anunciamiento es necesario tener un cristal más largo. Es importante destacar el caso $\alpha = 0.5$ en el que la medida de pureza se compromete un poco (0.986) y se logra aumentar la eficiencia de anunciamiento a 0.380 para $L = 305\mu m$. Similarmente, se observa que, dentro de los rangos considerados, si se aumenta el ancho de banda del bombeo [figura29b)], las cinturas del haz de bombeo [figura29c)] o de los modos de colección [figura29d)], se mejora la pureza pero se compromete la eficiencia de anunciamiento. Aunque modificar la longitud del cristal implicaría comprar otro cristal, los otros tres parámetros son fácilmente ajustables en un arreglo experimental y proporcionarían una buena versatilidad para la fuente.

5.2.2. BBO: fuente de SPDC con fotones degenerados en frecuencia y sintonizados en la banda de telecomunicaciones

Alternativamente se analizó fue una fuente de BBO en configuración de empatamiento de fases tipo I con fotones degenerados en frecuencia, emitidos en $1550nm$. Es preciso aclarar que se decidió hacer un estudio exhaustivo de esta fuente, porque se tuvo la oportunidad de participar en la implementación experimental de ésta, y en la caracterización de sus propiedades espectrales, mediante mediciones de la función de intensidad espectral conjunta (JSI acoplada). La participación en este experimento resultó ilustrativa para relacionar la teoría con la práctica. A continuación se dará una descripción breve del montaje de la fuente y el proceso de medición. El montaje experimental fue el siguiente:

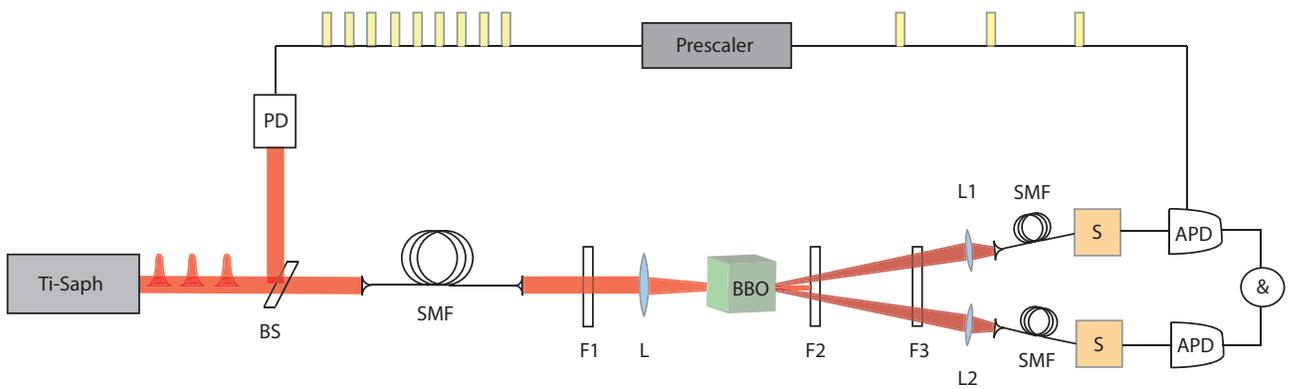


Figura 30: Fuente de BBO con fotones emitidos en la banda de telecomunicaciones. Dispositivo experimental para medir correlaciones espectrales.

En la implementación de la fuente, se utiliza un láser de Titanio Zafiro centrado en $\lambda_p = 775nm$. Los pulsos de luz emitidos se hacen incidir sobre un divisor de haz (BS), la luz reflejada se dirige a un fotodiodo rápido (PD), el cual traduce los pulsos ópticos a pulsos electrónicos que luego son discriminados por el temporizador o “prescaler” dejando pasar 1 de cada 11 pulsos debido a que la frecuencia de repetición del haz de bombeo es mucho mayor a la frecuencia máxima aceptada por los fotodiodos de avalancha (APD). Con esto, se abren compuertas temporales de medición en dichos APD’s, los cuales medirán las cuentas en coincidencias producidas por los fotones señal y acompañante que se acoplen a las fibras ópticas monomodales.

Por otro lado, la luz transmitida pasa primeramente por una fibra óptica monomodal (SMF) con el objetivo de obtener una distribución gaussiana circular, después se coloca un filtro pasabandas (F1) centrado en $775nm \pm 20nm$ para obtener un ancho espectral de bombeo bien definido $\Delta\lambda = 20nm$, posteriormente el haz de bombeo pasa por una lente (L), la cual enfoca el haz -con ella se controla la cintura de haz de bombeo W_0 - que incide sobre un cristal (en este caso BBO) cortado al ángulo de empatamiento de fases θ_p . Luego, se coloca un filtro pasa altas (F2), el cual solamente permite que pasen longitudes de onda por encima de 980nm, bloqueando el haz de bombeo remanente. En seguida se coloca un filtro pasabandas (F3) centrado en $\lambda_{s,i} = 1550nm \pm 20nm$, el cual limita el ancho espectral producido por SPDC.

En la última etapa, las lentes L1 y L2 -con las que se controla la cintura de los modos

de colección W_f - acoplan los fotones señal y acompañante a fibras ópticas monomodales (SMF) ubicadas en los ángulos centrales de emisión θ_s, θ_i . Las fibras están montadas sobre una base móvil -con la que se controla el parámetro de sintonización de los modos de colección ζ -. Las frecuencias de los fotones son discriminadas por medio de espectrómetros (S), en este caso de fibra óptica aprovechando la dispersión de la velocidad de grupo en las fibras y asociando los tiempos de llegada de los fotones con sus frecuencias correspondientes. Para finalizar, los fotones llegan a los APD's y se registran las cuentas en coincidencia generadas.

Después de participar en la implementación de la fuente descrita anteriormente, se optó por aplicar las herramientas numéricas desarrolladas a lo largo de esta tesis, a fin de determinar los parámetros experimentales que permitirían optimizar la fuente, en términos de pureza de fotón individual anunciado y eficiencia de anunciamiento. Los resultados de este estudio se describen a continuación.

Primeramente se muestra la función de intensidad espectral conjunta acoplada [ver figura 31]. Dados los valores centrales de longitud de onda de bombeo y longitud de onda de los fotones señal y acompañante, aplicando los criterios de factorabilidad se obtuvieron los valores centrales de ángulo polar de emisión y los parámetros experimentales mostrados en la figura 31. Se puede ver que esta fuente conduce a un valor de pureza que es 1% menor que la de BBO con emisión en $810nm$, pero con 9% más de eficiencia de anunciamiento.

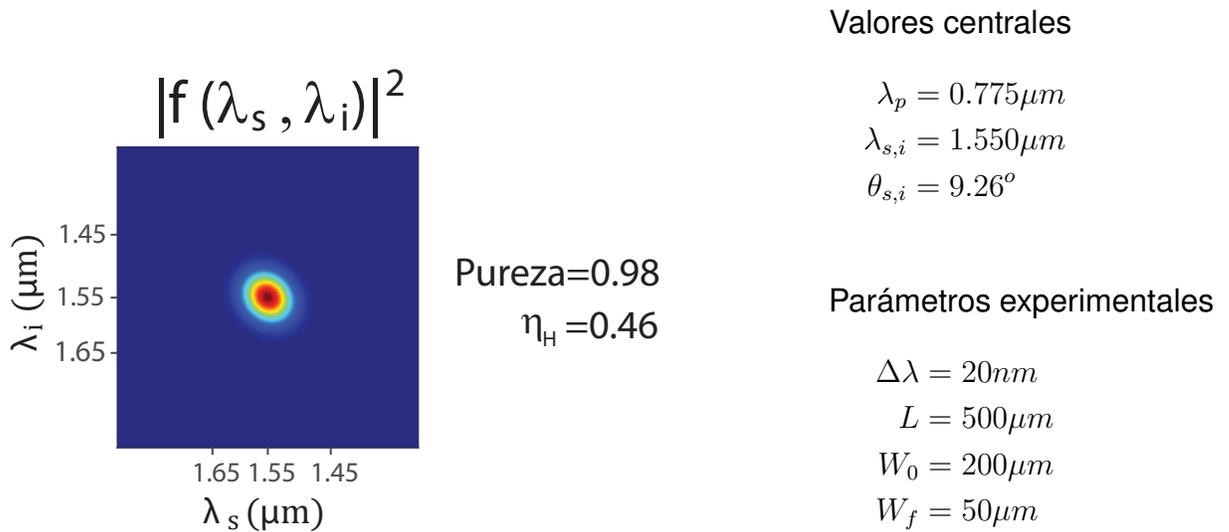


Figura 31: JSI acoplada para una fuente de BBO emitiendo en longitudes de onda de telecomunicaciones.

Un segundo paso fue utilizar el algoritmo genético descrito en la sección 4.1.1, dejando fijo el ángulo de emisión determinado por las condiciones de factorabilidad y variando ahora simultáneamente los parámetros W_0 , W_f , $\Delta\lambda$ y L , dándole la misma importancia a la pureza y a la eficiencia de anunciamiento en la función de optimización (fitness). Los resultados obtenidos desde este análisis se presentan en la tabla 1.

Tabla 1: Resultados de aplicar el algoritmo genético a la fuente de BBO con emisión en $\lambda = 1550\mu m$ a un ángulo de 9.26° .

Rango de variación de los parámetros	Resultados
$50\mu m < W_0 < 1000\mu m$	$560.15\mu m$
$25\mu m < W_f < 500\mu m$	$56.15\mu m$
$1nm < \Delta\lambda < 40nm$	$20.59\mu m$
$100\mu m < L < 1000\mu m$	$497.07\mu m$
Pureza = 0.99	
$\eta_H = 0.45$	
Fitness = $-(0.5\text{Pureza} + 0.5\eta_H)$	

Esto dió como resultado una mejora de 1% en la pureza del estado de fotón individual, comprometiendo la eficiencia de anunciamiento en un 1%.

Debido a que se sabe que para la fuente de BBO, con emisión en $810nm$, a ángulos pequeños la eficiencia de anunciamiento es mayor (Zielnicki *et al.*, 2015), el siguiente

paso fue incluir el ángulo de emisión como un parámetro a variar en el GA. Dejando los rangos de evaluación iguales (en las demás variables), se incluyó el parámetro $\theta_{s,i}$, con la intención de encontrar un nuevo conjunto de parámetros que maximizen simultáneamente la medida de pureza y la eficiencia de anunciamento. El ángulo de emisión es permitido variar entre 1° y 10° . Los resultados obtenidos se describen en la tabla 2.

Tabla 2: Resultados de aplicar el algoritmo genético a la fuente de BBO con emisión en $\lambda = 1550\mu m$ permitiendo la optimización en ángulo polar de emisión.

Rango de variación de los parámetros	Resultados
$50\mu m < W_0 < 1000\mu m$	$190.16\mu m$
$25\mu m < W_f < 500\mu m$	$60.95\mu m$
$1nm < \Delta\lambda < 40nm$	$25.29nm$
$100\mu m < L < 1000\mu m$	$684.13\mu m$
$1^\circ < \theta_{s,i} < 10^\circ$	7.25°
Pureza = 0.99	
$\eta_H = 0.48$	
Fitness = $-(0.5\text{Pureza} + 0.5\eta_H)$	

En este caso, el resultado arrojado por el GA para el ángulo polar de emisión fue de 7.25° , menor al determinado por las condiciones de factorabilidad, con diferentes parámetros experimentales, para los cuales se mantuvo la medida de pureza con relación a la fuente con ángulo polar de emisión de 9.26° y se mejoró un 3% la eficiencia de anunciamento. Permitiendo la variación en el ángulo de emisión, fue posible encontrar valores de parámetros que maximizaran aún más las cantidades objetivo. Cabe mencionar que los resultados que arrojó el GA para la fuente con emisión en 7.25° y 9.26° difirieron en dos parámetros principalmente, básicamente en el segundo caso se tiene un haz de bombeo más enfocado (de $560\mu m$ a $190\mu m$) y una longitud de cristal mayor (de $497\mu m$ a $680\mu m$). Por último, se analizó el comportamiento de tres fuentes basadas en un cristal de BBO con emisión en $1550nm$, con respecto al ancho de banda de filtros aplicados ya sea al fotón señal, al fotón acompañante o a ambos. Esto, para una fuente no acondicionada, para la fuente acondicionada con ángulo polar de emisión de 9.26° y la fuente optimizada con ángulo polar de emisión de 7.25° . En este análisis incluimos la otra cantidad importante en la implementación de la fuente: el número de fotones por segundo; ya sea en cuentas simples o en coincidencia.

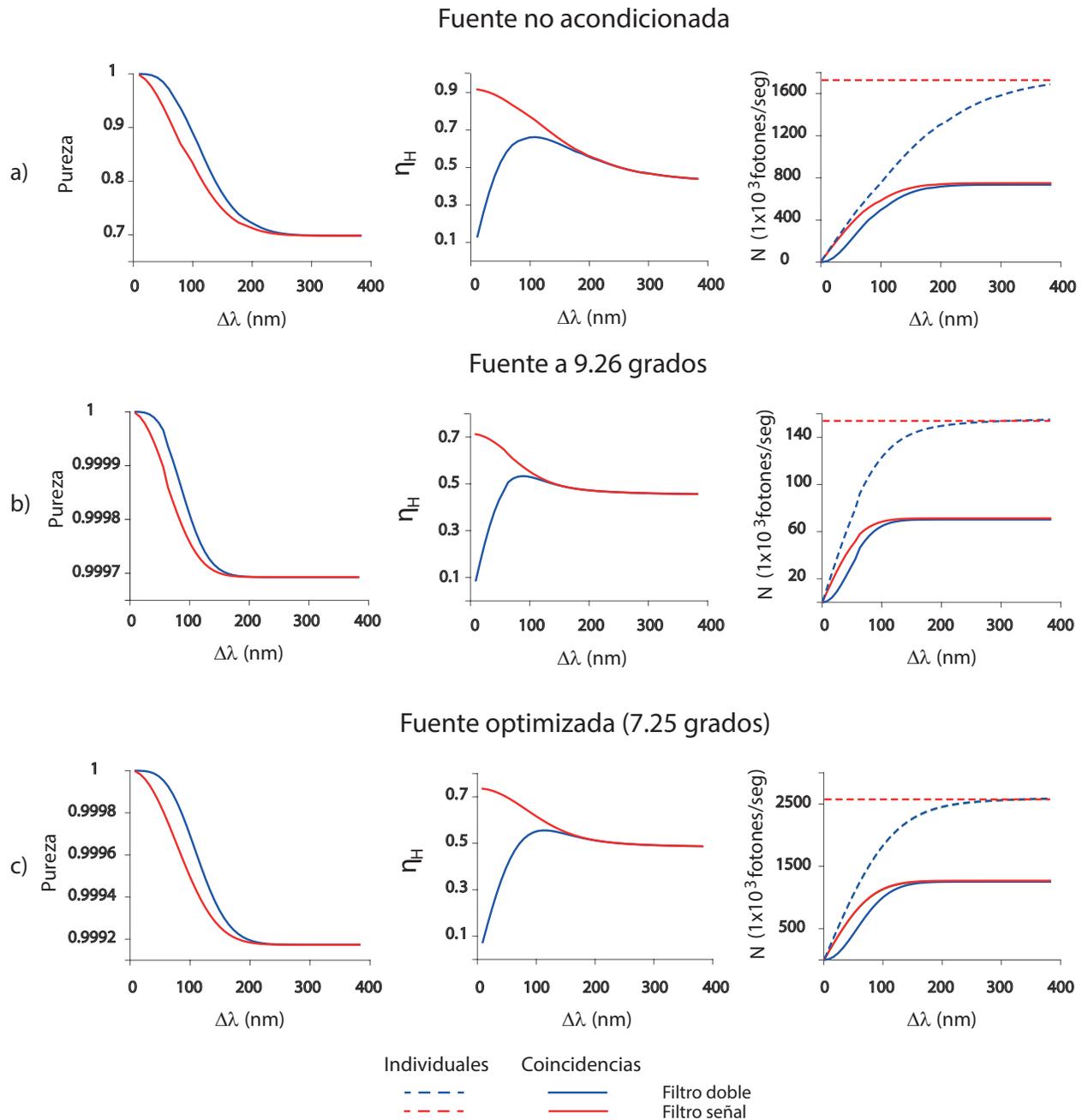


Figura 32: Comportamiento de pureza, eficiencia de anuncio η_H y número de fotones N con respecto al ancho de banda de filtros aplicados a los modos de generación. a) Para la fuente no acondicionada, b) para la fuente con ángulo de emisión polar a 9.26° y c) para la fuente optimizada con ángulo de emisión polar a 7.25° . Las líneas continuas representan cuentas en coincidencias, las líneas segmentadas cuentas individuales.

Un resultado interesante en las gráficas de la figura 32 es que el filtrado asimétrico, en el que solamente se filtra el modo señal, presentó un aumento considerable en la eficiencia de anuncio con respecto al filtrado simétrico, lo cual se hace evidente para

filtros con anchos menores a $150nm$, aproximadamente. Acorde con los antecedentes, para la fuente de BBO con emisión de fotones en $810nm$, la fuente no acondicionada presentó valores de eficiencia de anunciamiento más altos y valores de pureza más bajos que las otras dos fuentes. Es importante notar que la fuente con ángulo de emisión a 7.25° presentó mayor flujo fotónico [figura32]c) en comparación al obtenido para los esquemas de la figura32]a) y figura32]b). De lo anterior se concluye que un diseño óptimo a implementar sería el basado en los parámetros determinados por el GA para el ángulo de emisión a 7.25° .

5.2.3. PPKTP: fuente de SPDC con un fotón anunciador en la ventana de eficiencia de colección óptima de los fotodiodos de Silicio y un fotón anunciado en el rango espectral de telecomunicaciones

Posteriormente, se pasó al estudio de una fuente basada en un cristal biaxial de Titanil-Fosfato de Potasio periódicamente polarizado (PPKTP) en configuración de empatamiento de fases tipo II. En esta configuración, el coeficiente no lineal efectivo de KTP es de $d_{ef}^{KTP} = 7.6pm/V$ (Migdall *et al.*, 2013), en comparación con el de BBO de $d_{ef}^{BBO} = 2.4pm/V$ (Liu y Nagashima, 1999). La notoria diferencia en la no-linealidad del cristal, conlleva a un aumento significativo en el flujo de la fuente, por lo que resulta conveniente su estudio. Primeramente se consideró un bombeo a una longitud de onda de $\lambda_p = 532nm$ con una condición de empatamiento de fases tipo II, colineal y no degenerada, es decir, los fotones son emitidos en la misma dirección que el haz de bombeo, con polarizaciones ortogonales y con distintas frecuencias. En particular, uno de ellos con emisión a una longitud de onda centrada en $\lambda_s = 775nm$ y el otro en $\lambda_i = 1550nm$. Los parámetros de esta configuración de fuente son derivadas tras aplicar los criterios de factorabilidad descritos en la sección 4.1.

En comparación con la fuente de BBO que también emite en longitudes de onda de telecomunicaciones esta fuente es no degenerada, tal que uno de los modos generados está centrado en $775nm$, con la ventaja de que éste se encuentra en una longitud de onda para la cual los detectores de Silicio son más eficientes (Migdall *et al.*, 2013), lo cual puede contribuir a incrementos en la eficiencia de anunciamiento. Fotones en $775nm$ anunciarán la presencia de fotones individuales en la banda de telecomunicaciones.

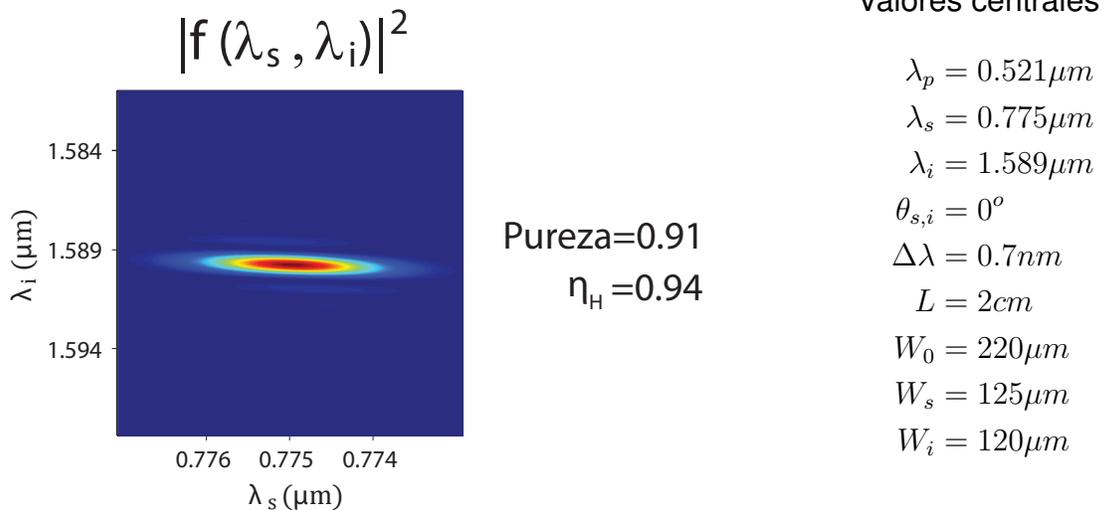


Figura 33: JSI acoplada para un cristal de PPKTP.

La figura 33 muestra la función de intensidad espectral conjunta acoplada, con resultados de pureza y eficiencia de anunciamiento, ambos por encima de 0.9.

Los demás parámetros fueron seleccionados para hacerlos corresponder con las condiciones experimentales de una fuente implementada en el grupo del Prof. Paul Kwiat, en la Universidad de Illinois. Note la desviación en el valor central de la longitud de onda del láser de bombeo, en comparación con la dictada al aplicar las condiciones de factorabilidad. A este hecho se le atribuye una pureza no tan óptima.

En la figura 34 se muestra el comportamiento de eficiencia de anunciamiento y pureza con respecto a los parámetros experimentales más significativos. De estas gráficas se puede notar que esta fuente es muy robusta: con respecto al ancho de banda, la eficiencia de anunciamiento permanece constante dentro del rango dado [ver figura34a)]; con respecto a la cintura del haz de bombeo la pureza permanece constante y la eficiencia de anunciamiento también lo hace a partir de un valor umbral cercano al valor central [ver figura34b)]; con respecto a la variación de la cintura del modo de colección de fotones señal la pureza permanece constante y la eficiencia de anunciamiento varía, con un máximo ubicado cerca del valor central [ver figura34c)].

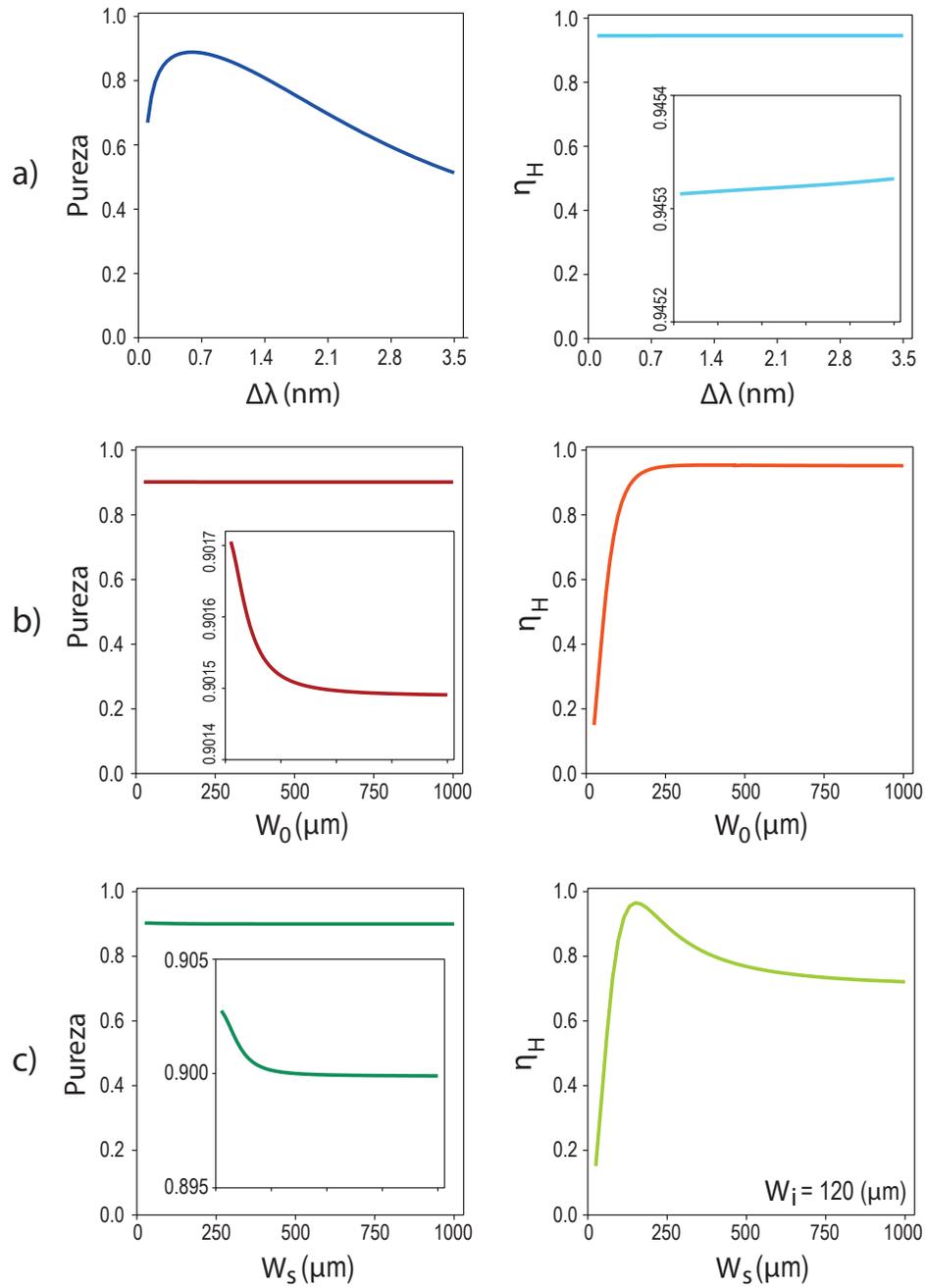


Figura 34: Parámetros principales de optimización para fuente de PPKTP. a) Pureza y eficiencia de anuncio η_H en función del ancho de banda de bombeo $\Delta\lambda$, b) pureza y eficiencia de anuncio η_H en función de la cintura del haz de bombeo W_0 , c) pureza y eficiencia de anuncio η_H en función de la cintura del modo de colección del modo señal W_s .

5.3. Generalización del análisis de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales, a cualquier ángulo azimutal de colección (a lo largo del anillo de emisión)

Una particularidad del nuevo tratamiento de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales descrito en esta tesis, es la posibilidad de calcular intensidades espectrales conjuntas (JSI), valores esperados del número de fotones por pulso de bombeo acoplados a ambas fibras N y valores esperados del número de fotones por pulso de bombeo incluyendo eventos de detección exclusivamente en uno de los modos (para señal N_s , para acompañante N_i) para diferentes valores del ángulo azimutal. El efecto del cambio en la distribución angular de emisión se hace evidente para haces de bombeo muy enfocados, es decir para cinturas de haz de bombeo pequeñas. Esta situación se manifiesta de manera notoria a partir de un valor de cintura de haz de bombeo menor a $W_0 = 10\mu m$ [ver figura 35].

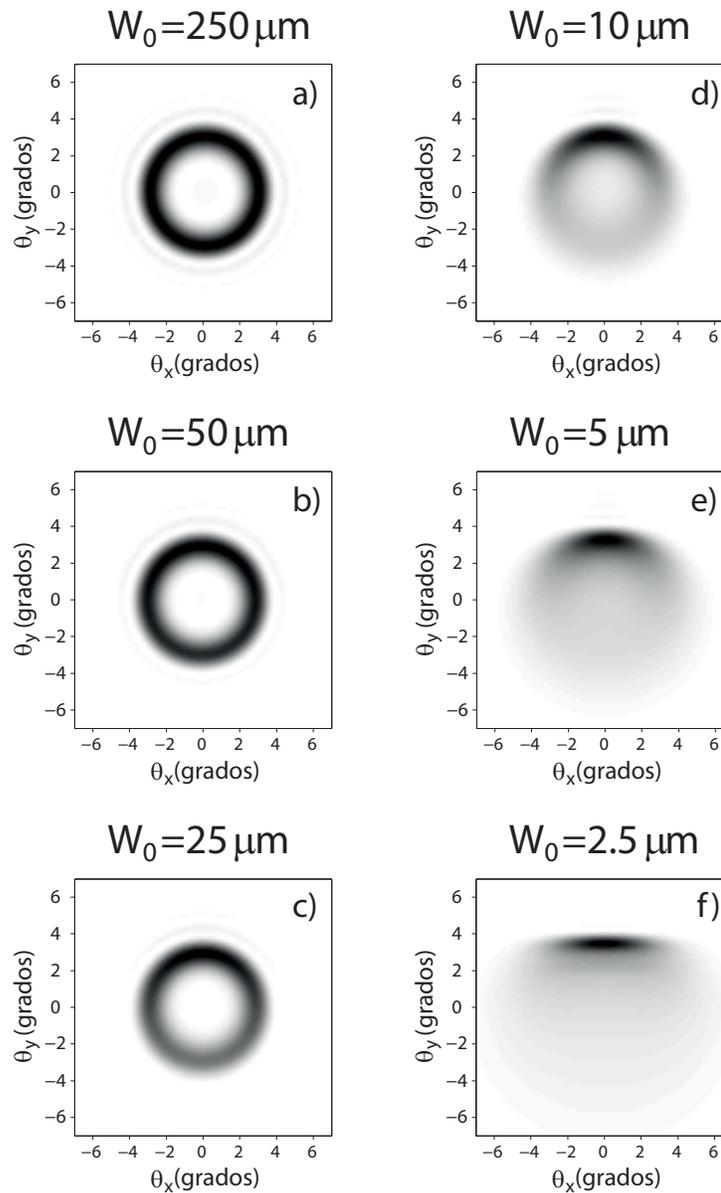


Figura 35: Distribución angular de emisión SPDC para diferentes cinturas del haz de bombeo. Fuente de BBO tipo I con ángulo de emisión externo de 3 grados. a) $W_0 = 250\mu m$, b) $W_0 = 50\mu m$, c) $W_0 = 25\mu m$, d) $W_0 = 10\mu m$, e) $W_0 = 5\mu m$, f) $W_0 = 2.5\mu m$.

Lo anterior implica que la función de intensidad espectral conjunta para estos haces muy enfocados va a depender del ángulo azimutal de colección. Si se fija el valor de la cintura del haz de colección, W_f , es posible ver como varía la JSI en función del ángulo azimutal de colección de los fotones generados, tal y como se observa en la figura 36. Es claro ver en esta figura la variación del grado de correlación espectral de las parejas de fotones conforme ϕ_s varía. Lo anterior afecta los valores de pureza, eficiencia de anuncioamiento y flujo fotónico.

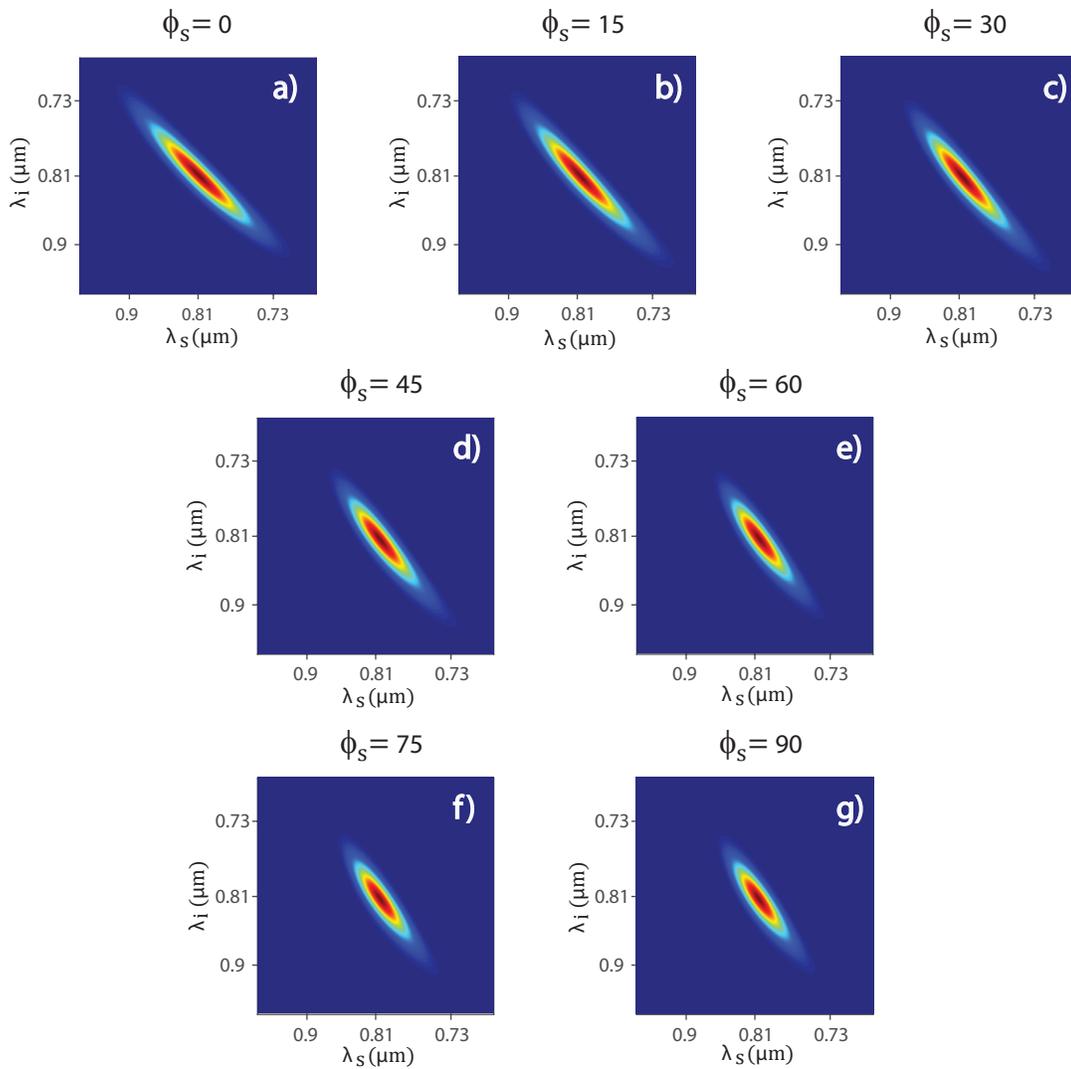


Figura 36: JSI acoplada como función del ángulo azimutal de medición. a) Para $\phi_s = 0$, b) para $\phi_s = 15$, c) $\phi_s = 30$, d) para $\phi_s = 45$, e) para $\phi_s = 60$, f) para $\phi_s = 75$, g) para $\phi_s = 90$.

En la figura 37 se pueden observar los dos casos: por una parte para una cintura de haz de bombeo grande, lo que equivale a un anillo de emisión completamente simétrico, se obtienen valores constantes de pureza, eficiencia de anunciamiento y flujo de emisión [línea azul]; por otra, una cintura de haz de bombeo muy pequeña equivale a una distribución angular asimétrica lo que produce variaciones notables en los valores antes mencionados [línea verde]. Los valores de pureza y eficiencia se muestran muy por debajo de la versión simétrica (constante) [ver figuras 37a) y b)] en contraposición a los valores de cuentas individuales y en coincidencia las cuales aumentan considerablemente [ver figuras 37c) y d)].

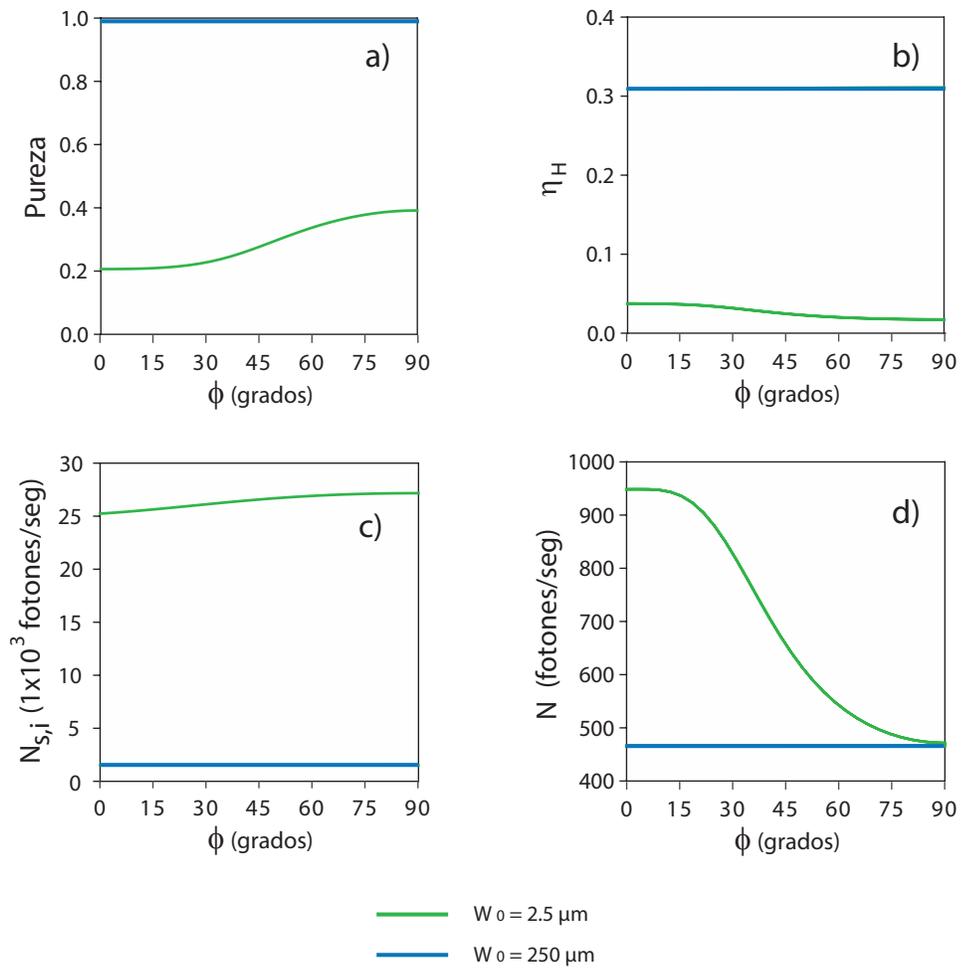


Figura 37: Pureza a), Eficiencia de anuncio η_H b), Número de fotones individuales $N_{s,i}$ c), Número fotones en coincidencia N d), en función del ángulo azimutal de detección para una fuente de SPDC, basada en BBO y con ángulo polar de emisión de 16° .

Capítulo 6. Conclusiones

En esta tesis se realizó un estudio teórico y numérico del proceso de conversión paramétrica descendente espontánea acoplado a fibras ópticas monomodales, considerando como medio de generación cristales uniaxiales y biaxiales.

Primeramente se estudió el formalismo del estado cuántico de la unidad fundamental de excitación del campo electromagnético cuantizado: el fotón. Contextualizando al fotón como la unidad de trabajo de las principales tecnologías cuánticas desarrollándose hoy en día, y a los fotones individuales anunciados puros como una necesidad básica en este campo.

Asimismo fue importante estudiar el proceso no lineal de conversión paramétrica descendente espontánea mediante el cual se generan parejas de fotones. De este estudio se observaron que las soluciones que cumplen las condiciones de empatamiento de fases implican relaciones espaciales (angulares), espectrales (en frecuencia) y espaciales-espectrales específicas, las cuales introducen correlaciones al estado cuántico de dos fotones que se genera a la salida del cristal.

Para la realización del estudio de empatamiento de fases se utilizó una metodología para obtener el índice de refracción en función tanto de la dirección de propagación del haz dentro del cristal como de su polarización y que fuera útil en general para el caso de cristales uniaxiales y biaxiales.

Por medio de un método perturbativo, se derivó el estado cuántico que describe a la pareja de fotones emitida del cristal, así como el estado cuántico de los fotones ya acoplados a fibras ópticas monomodales. Del primero se derivaron condiciones analíticas que conduzcan a la factorabilidad para el caso específico de fuentes degeneradas, a partir de imponer la separabilidad en la función de amplitud conjunta. Por otra parte, del caso acoplado se desarrolló un cálculo semi-analítico que permitió ahorrar tiempo de cómputo en la obtención de valores de pureza, eficiencia de anunciamento y flujo (número de fotones emitido), el cual a su vez amplió el rango de estudio posibilitando la obtención de estos valores en función del ángulo azimutal de colección.

Teniendo esta base numérica para calcular pureza, eficiencia de anunciamiento y flujo, se analizó el comportamiento de estas tres cantidades con respecto a los parámetros experimentales, de las cuales destacaron en influencia el ancho de banda de bombeo, la cintura del haz de bombeo, la cintura de los modos de colección y la longitud del cristal; aunque la herramienta numérica realizada permite incluir otros parámetros, tales como la posición de las cinturas de los modos de colección, se encontró que para los casos estudiados éstas afectan de manera mínima en las cantidades a maximizar.

Adicionalmente, la implementación de un algoritmo genético permitió realizar de una manera más metódica el proceso de optimización de fuentes de fotones individuales anunciados, en términos de pureza y eficiencia de anunciamiento.

Para una fuente de BBO (cristal uniaxial) con fotones generados en 810nm los resultados obtenidos, tras dejar los parámetros centrales fijos y variar uno de ellos para observar el comportamiento de pureza, eficiencia de anunciamiento y flujo, fueron acordes con los obtenidos al variar los pesos de pureza y eficiencia de anunciamiento en el algoritmo genético.

Para una fuente de BBO con emisión de fotones en 1550nm se utilizó el algoritmo genético variando simultáneamente los parámetros experimentales, e incluyendo la variación en el ángulo central de emisión. Con relación a la fuente basada en los criterios de factorabilidad, los resultados del GA arrojaron un valor de ángulo de emisión menor, un haz de bombeo más enfocado y una longitud del cristal mayor, y son tales que conducen a un incremento importante del flujo de fotones emitido.

En todas las fuentes de BBO, con emisión de fotones en 1550nm, se analizó el comportamiento de las tres cantidades a maximizar con respecto al ancho de banda de filtros (en esquema simétrico y asimétrico), de lo cual se observó que el uso de filtrado asimétrico (filtrar el fotón anunciador) contribuye notablemente a mejorar la eficiencia de anunciamiento, comprometiendo, sin embargo, el flujo de emisión.

Se trabajó también con una fuente de PPKTP (cristal biaxial) para la cual se encontraron condiciones tales que se obtuvieron resultados de pureza y eficiencia superiores a 0.9. Se observó que esta fuente resultó más robusta que las anteriores debido a que las

cantidades a maximizar cambiaron poco con respecto a los parámetros experimentales. Además se tiene la ventaja de que uno de sus fotones se emite en una longitud de 775 nm, la cual cae dentro de una ventana de detección eficiente y el otro fotón se obtiene en una longitud de onda compatible con la red de telecomunicaciones.

En un tema aparte se exploró el caso de haces de bombeo muy enfocados, comparándolo con el caso en el que el haz de bombeo genera distribuciones angulares de emisión del tipo anillo. En esta exploración se hizo evidente la utilidad de la herramienta numérica para calcular pureza, eficiencia de anuncio y número de fotones en términos del ángulo azimutal de colección y se notó que mientras que en el caso de una distribución simétrica éstos permanecieron constantes, en el caso de haces enfocados sí variaron.

En términos generales, se desarrolló un estudio teórico del proceso de SPDC acoplado a fibras ópticas monomodales, mediante la implementación de un cálculo semianalítico que conlleva a un menor costo computacional, y con un número reducido de aproximaciones. La nueva herramienta numérica presentada posibilita ampliar el estudio a casos con distintos ángulos azimutales de colección; explorar, con ayuda del algoritmo genético, una manera sistemática de optimización simultánea de las cantidades que caracterizan las fuentes de fotones individuales puros anunciados y proponer diseños de fuentes factibles de implementación experimental.

Trabajo a futuro:

- Optimización de la fuente de PPKTP, tomando en cuenta la configuración no-colineal.
- Añadir la fase de Guoy en la descripción del haz de bombeo con perfil gaussiano.
- Eficientizar el algoritmo genético.
- Contribuir en la generalización de la herramienta numérica SPDCalc (spdcal.org) en la cual se incorporará el tratamiento semianalítico (para cualquier ángulo azimutal de colección) presentado en esta tesis.

Lista de referencias bibliográficas

- Agrawal, G. (2013). *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press.
- Aspect, A., Grangier, P., y Roger, G. (1981). Experimental test of realistic local theories via bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, **47**(7): 460–463.
- Bell, J. (1964). On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, **1**(3): 195–200.
- Boeuf, N., Branning, D., Chaperot, I., Dauler, E., Guérin, S., G. Jaeger, A. M., y Migdall, A. (2000). Calculating characteristics of non-collinear phase-matching in uniaxial and biaxial crystals. *Opt. Eng.*, **39**(4): 1–24.
- Bovino, F., Castagnoli, G., Ekert, A., Horodecki, P., Alves, C., y Sergienko, A. (2005). Direct measurement of nonlinear properties of bipartite quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, **95**: 1–4.
- Boyd, R. (2008). *Nonlinear Optics*. Academic Press.
- Bruno, N., Martin, A., Guerreiro, T., Sanguinetti, B., y R.Thew (2014). Pulsed source of spectrally uncorrelated and indistinguishable photons at telecom wavelengths. *Opt. Express*, **22**(14): 17246–17253.
- Burnham, D. y Weinberg, D. (1970). Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **25**(2): 84–87.
- Butcher, P. y Cotter, D. (1990). *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press.
- Byer, R. y Harris, S. (1968). Power and bandwidth of spontaneous parametric emission. *Phys. Rev. Lett.*, (168): 1064.
- Charles, S., David, F., y Yoshihisa, Y. (2010). *Single-photon Devices and Applications*. Wiley-VCH.
- Chunnillall, J., Degiovanni, I., Kück, S., Müller, I., y Sinclair, A. (2014). Metrology of single-photon sources and detectors: a review. *Opt. Eng.*, **53**(8): 1–17.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., y Laloe, F. (1978). *Quantum Mechanics*. Wiley-VCH.
- Dmitrev, V., Gurzadyan, G., y Nikogosyan, D. (1995). *Handbook of Nonlinear Optical Crystals*. Springer.
- Dragan, A. (2004). Efficient fiber coupling of down-conversion photon pairs. *Phys. Rev. A*, **70**(053814): 1–7.
- Einstein, A., Podolsky, B., y Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, **47**: 777–780.
- Fejer, M., Magel, G., Jundt, D., y Byer, R. (1992). Quasi-phase-matched second harmonic generation: tuning and tolerances. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **28**(11): 2631 – 2654.

- Fox, M. (2006). *Quantum Optics, An Introduction*. Oxford University Press.
- Franken, P., Hill, A., Peters, C., y Weinreich, G. (1961). Generation of optical harmonics. *Phys. Rev. Lett.*, **7**(4): 118–120.
- Gerry, C. y Knight, P. (2005). *Introductory Quantum Optics*. Cambridge.
- Ghosh, R. y Mandel, L. (1987). Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. *Phys. Rev. Lett.*, (17): 1903–1905.
- Glauber, R. (1963). The quantum theory of optical coherence. *Physical Review*, **130**(6): 2529–2539.
- Hecht, E. (2000). *Óptica*. Addison Wesley.
- Hong, C., Ou, Z., y Mandel, L. (1987). Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, **59**(18): 2044–2046.
- Huo, G., Zhang, T., Cheng, G., y Zhao, W. (2013). Calculation of effective nonlinear coefficient in bibo for spontaneous parametric down conversion. *Nonlinear Optical Physics and Materials*, **22**(1): 11.
- Jin, R., Shimizu, R., Wakui, K., Benichi, H., y Sasaki, M. (2013). Widely tunable single photon source with high purity at telecom wavelength. *Optics Express*, **21**(9): 10659–10666.
- Knill, E., Laflamme, R., y Milburn, G. (2001). A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, **409**: 46–52.
- Kocher, C. y Commins, E. (1967). Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Phys. Rev. Lett.*, **18**(15): 575–577.
- Kwiat, P., Waks, E., White, A., Appelbaum, I., y Eberhard, P. (1999). Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, **60**(2): R773–R776.
- Ladd, T., Jelezko, F., Laflamme, R., Nakaumra, Y., Monroe, C., y O'Brien, J. (2010). Quantum computers. *Nature*, **464**(4): 46–53.
- Lambropoulos, P. y Petrosyan, D. (2007). *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Springer.
- Liu, L. y Nagashima, K. (1999). Optimum phase matching and effective nonlinear coefficients of lbo and ktp for continuously changing wavelength. *Optics and Laser Technology*, **31**(4): 283–287.
- Magde, D. y Mahr, H. (1967). Study in ammonium dihydrogen phosphate of spontaneous parametric interaction tunable from 4400 to 16000 amstrongs. *Phys. Rev. Lett.*, (18): 905–907.
- Maiman, T. (1960). Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, **187**: 493–494.
- Mandel, L. y Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press.

- Migdall, A., Polyakov, S., Fan, J., y Bienfang, J. (2013). *Single-Photon Generation and Detection*. Elsevier Inc.
- Mosley, P., Lundeen, J., Smith, B., Wasylczyk, P., U'Ren, A., Silberhorn, C., y Walmsley, I. (2008). Heralded generation of ultrafast single photons in pure quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, **100**(133601): 1–4.
- Mosley, P. J. (2007). *Generation of Heralded Single Photons in Pure Quantum States*. (PhD. Thesis). University of Oxford.
- Rohde, P. y Ralph, T. (2005). Frequency and temporal effects in linear optical quantum computing. *Phys. Rev. A*, **71**(3): 1–9.
- Scully, M. y Zubairy, M. (1997). *Quantum Optics*. Cambridge.
- Shalm, L. (2015). Strong loophole-free test of local realism. *Phys. Rev. Lett.*, **115**: 1–10.
- Stolen, R. (1975). Phase-matched-stimulated four-poton mixing in silica-fiber waveguides. *Journal of Quantum Electronics*, **QE-11**(3): 100–103.
- U'Ren, A., Silberhorn, C., Erdmann, R., Banaszek, K., Grice, W., Walmsley, I., y Raymer, M. (2005). Generation of pure single photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion. *Laser Physics*, **15**(146): 146–161.
- Vicent, L., U'Ren, A., Rangarajan, R., Osorio, C., Torres, J., Zhang, L., y Walmsley, I. (2010). Design of bright, fiber coupled and fully factorable photon pair sources for quantum information processing. *New J.Phys.*, **12**(093027).
- Yariv, A. (1988). *Quantum Electronics*. Wiley.
- Zajonc, A. (2003). Light reconsidered. *Optics and Photonics News*, pp. S2–S5.
- Zielnicki, K., Garay, K., Dirks, R., U'Ren, A., y Kwiat, P. (2015). Engineering of near-ir photon pairs to be factorable in space-time and entangled in polarization. *Optics Express*, **23**(6): 7894–7907.

Apéndice

A.1. Variables vartheta 1-6

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 = & - \left(\frac{1}{16kp^3} \right) \left[- \frac{ikp^2 (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) Wx^4}{ks\mathbb{K}2} \right. \\
 & - \frac{4kp^3 (\Gamma s5 - i\Lambda s5)^2 Wx^2}{\mathbb{K}2} - \frac{4kp^3 (\Gamma s5 + i\Lambda s5)^2 Wx^2}{\mathbb{K}1} \\
 & - \frac{kp (kp (ks (iWx^2 - 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) (kp (ks (iWy^2 - 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) Wx^2}{ks^2\mathbb{K}1} \\
 & - \frac{2kpL\xi2 (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) Wx^2}{ks\mathbb{K}2} \\
 & - \frac{kp (kp (ks (-iWx^2 + 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) Wx^2}{ks^2\mathbb{K}2} \\
 & + \frac{4kpz0 (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) Wx^2}{ks\mathbb{K}2} \\
 & + \frac{i (kp (ks (iWy^2 - 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) (kpWx^2 + i(L\xi1 - 2z0))^2}{ks\mathbb{K}1} \\
 & + \frac{4ikp^3 L(\Gamma s5 + i\Lambda s5)^2 (\xi1 - 1)}{ki\mathbb{K}1} + \frac{4ikp^2 (\Gamma s5 + i\Lambda s5)^2 (2z0 - L\xi1)}{\mathbb{K}1} \\
 & + \frac{ikpL(\xi1 - 1) (kp (ks (iWx^2 - 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) (kp (ks (iWy^2 - 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1))}{kiks^2\mathbb{K}1} \\
 & + \frac{i(2z0 - L\xi1) (kp (ks (iWx^2 - 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) (kp (ks (iWy^2 - 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1))}{ks^2\mathbb{K}1} \\
 & - \frac{4ikp^3 L(\Gamma s5 - i\Lambda s5)^2 (\xi2 - 1)}{ki\mathbb{K}2} - \frac{4ikp^2 (\Gamma s5 - i\Lambda s5)^2 (2z0 - L\xi2)}{\mathbb{K}2} + \frac{iL^2 \xi2^2 (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2))}{ks\mathbb{K}2} \\
 & - \frac{4iLz0\xi2 (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2))}{ks\mathbb{K}2} \\
 & - \frac{ikpL(\xi2 - 1) (kp (ks (-iWx^2 + 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2))}{kiks^2\mathbb{K}2} \\
 & - \frac{i(2z0 - L\xi2) (kp (ks (-iWx^2 + 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2))}{ks^2\mathbb{K}2} \\
 & + \left. \frac{4iz0^2 (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2))}{ks\mathbb{K}2} \right] \\
 \\
 \vartheta_2 = & \left(\frac{1}{16kp^3} \right) \left[- \frac{4Wy^2 (\Gamma s5 - i\Lambda s5)^2 kp^3}{\mathbb{K}2} - \frac{4Wy^2 (\Gamma s5 + i\Lambda s5)^2 kp^3}{\mathbb{K}1} + \frac{4iL(\Gamma s5 + i\Lambda s5)^2 (\xi1 - 1) kp^3}{ki\mathbb{K}1} \right. \\
 & - \frac{4iL(\Gamma s5 - i\Lambda s5)^2 (\xi2 - 1) kp^3}{ki\mathbb{K}2} + \frac{4i(\Gamma s5 + i\Lambda s5)^2 (2z0 - L\xi1) kp^2}{\mathbb{K}1} - \frac{4i(\Gamma s5 - i\Lambda s5)^2 (2z0 - L\xi2) kp^2}{\mathbb{K}2} \\
 & + \frac{iL(\xi1 - 1) (kp (ks (iWx^2 - 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) (kp (ks (iWy^2 - 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) kp}{kiks^2\mathbb{K}1} \\
 & - \frac{Wy^2 (kp (ks (iWx^2 - 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) (kp (ks (iWy^2 - 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) kp}{ks^2\mathbb{K}1} \\
 & - \frac{iL(\xi2 - 1) (kp (ks (-iWx^2 + 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) kp}{kiks^2\mathbb{K}2} \\
 & - \frac{Wy^2 (kp (ks (-iWx^2 + 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) kp}{ks^2\mathbb{K}2} \\
 & - \frac{i (ikpWy^2 + 2z0 - L\xi1)^2 (kp (ks (iWx^2 - 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1))}{ks\mathbb{K}1} \\
 & + \frac{i(2z0 - L\xi1) (kp (ks (iWx^2 - 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1)) (kp (ks (iWy^2 - 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi1 - 1)) + ks(2z0 - L\xi1))}{ks^2\mathbb{K}1} \\
 & + \frac{i (-ikpWy^2 + 2z0 - L\xi2)^2 (kp (ks (-iWx^2 + 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2))}{ks\mathbb{K}2} \\
 & - \left. \frac{i(2z0 - L\xi2) (kp (ks (-iWx^2 + 4i\Gamma s1 + 4\Lambda s1) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2)) (kp (ks (-iWy^2 + 4i\Gamma s2 + 4\Lambda s2) + L(\xi2 - 1)) + ks(2z0 - L\xi2))}{ks^2\mathbb{K}2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_3 = & \left(\frac{1}{16kp^3} \right) \left[\frac{4i\Gamma s3kp^2Wx^2(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s2+4\Lambda s2-iWy^2)))}{\mathbb{K}2ks} \right. \\
& + \frac{4kp^2\Lambda s3Wx^2(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s2+4\Lambda s2-iWy^2)))}{\mathbb{K}2ks} \\
& + \frac{4kp^2(\Gamma s5+i\Lambda s5)(ikpWx^2-L\xi1+2z0)(-2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi1+1)\rho)}{\mathbb{K}1} \\
& + \frac{4kp^2(\Gamma s5-i\Lambda s5)(-ikpWx^2-L\xi2+2z0)(2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi2+1)\rho)}{\mathbb{K}2} \\
& - \frac{4ikp(\Gamma s3+i\Lambda s3)(kpWx^2+i(L\xi1-2z0))(ks(2z0-L\xi1)+kp(L(\xi1-1)+ks(-4i\Gamma s2+4\Lambda s2+iWy^2)))}{\mathbb{K}1ks} \\
& - \frac{8\Gamma s3kpz0(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s2+4\Lambda s2-iWy^2)))}{\mathbb{K}2ks} \\
& + \frac{4\Gamma s3kpL\xi2(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s2+4\Lambda s2-iWy^2)))}{\mathbb{K}2ks} \\
& + \frac{8ikp\Lambda s3z0(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s2+4\Lambda s2-iWy^2)))}{\mathbb{K}2ks} \\
& \left. - \frac{4ikp\Lambda s3L\xi2(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s2+4\Lambda s2-iWy^2)))}{\mathbb{K}2ks} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_4 = & - \left(\frac{1}{16kp^3} \right) \left[\frac{8ikp^3L(\xi1+1)\rho(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2}{\mathbb{K}1} - \frac{8ikp^3L(\xi2+1)\rho(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2}{\mathbb{K}2} \right. \\
& + \frac{8kp^2(\Lambda s3-i\Gamma s3)(\Gamma s5+i\Lambda s5)(ikpWy^2-L\xi1+2z0)}{\mathbb{K}1} \\
& + \frac{8kp^2(\Lambda s3+i\Gamma s3)(\Gamma s5-i\Lambda s5)(-ikpWy^2-L\xi2+2z0)}{\mathbb{K}2} \\
& + \frac{2ikpL(\xi1+1)\rho(ks(2z0-L\xi1)+kp(L(\xi1-1)+ks(-4i\Gamma s1+4\Lambda s1+iWx^2)))}{\mathbb{K}1ks^2} (ks(2z0-L\xi1)+kp(L(\xi1-1)+ks(-4i\Gamma s2+4\Lambda s2+iWy^2))) \\
& - \frac{2ikpL(\xi2+1)\rho(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s1+4\Lambda s1-iWx^2)))}{\mathbb{K}2ks^2} (ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s2+4\Lambda s2-iWy^2))) \\
& - \frac{2ikp(ikpWy^2-L\xi1+2z0)(-2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi1+1)\rho)(ks(2z0-L\xi1)+kp(L(\xi1-1)+ks(-4i\Gamma s1+4\Lambda s1+iWx^2)))}{\mathbb{K}1ks} \\
& \left. + \frac{2ikp(-ikpWy^2-L\xi2+2z0)(2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi2+1)\rho)(ks(2z0-L\xi2)+kp(L(\xi2-1)+ks(4i\Gamma s1+4\Lambda s1-iWx^2)))}{\mathbb{K}2ks} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_5 = & - \left(\frac{1}{16kp^3} \right) \left[\frac{4kp(\Gamma s5+i\Lambda s5)(ikpWx^2-L\xi1+2z0)(ikpWy^2-L\xi1+2z0)}{\mathbb{K}1} \right. \\
& \left. + \frac{4kp(\Gamma s5-i\Lambda s5)(-ikpWx^2-L\xi2+2z0)(-ikpWy^2-L\xi2+2z0)}{\mathbb{K}2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_6 = & - \left(\frac{1}{16kp^3} \right) \left[\frac{8iL(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2(\xi1+1)kp^4}{\mathbb{K}1} - \frac{8iL(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2(\xi2+1)kp^4}{\mathbb{K}2} + \frac{16\Gamma s6(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2kp^3}{\mathbb{K}2} \right. \\
& - \frac{8iksL(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2kp^3}{\mathbb{K}2} + \frac{16\Gamma s6(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2kp^3}{\mathbb{K}1} + \frac{8iksL(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2kp^3}{\mathbb{K}1} - \frac{16i(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2\Lambda s6kp^3}{\mathbb{K}2} \\
& + \frac{16i(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2\Lambda s6kp^3}{\mathbb{K}1} - \frac{8ikiL(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2(\xi1-1)kp^3}{\mathbb{K}1} + \frac{16iL\pi(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2(\xi1-1)kp^3}{\mathbb{K}1\Lambda} - \frac{8iksL(\Gamma s5+i\Lambda s5)^2\xi1kp^3}{\mathbb{K}1} \\
& + \frac{8ikiL(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2(\xi2-1)kp^3}{\mathbb{K}2} - \frac{16iL\pi(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2(\xi2-1)kp^3}{\mathbb{K}2\Lambda} + \frac{8iksL(\Gamma s5-i\Lambda s5)^2\xi2kp^3}{\mathbb{K}2} \\
& + \frac{8(\Lambda s3-i\Gamma s3)(\Gamma s5+i\Lambda s5)(-2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi1+1)\rho)kp^3}{\mathbb{K}1} + \frac{8(i\Gamma s3+\Lambda s3)(\Gamma s5-i\Lambda s5)(2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi2+1)\rho)kp^3}{\mathbb{K}2} \\
& - \frac{i(kp(ks(iWx^2-4i\Gamma s1+4\Lambda s1)+L(\xi1-1))+ks(2z0-L\xi1))(-2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi1+1)\rho)^2kp^2}{ks\mathbb{K}1} \\
& \left. + \frac{i(kp(ks(-iWx^2+4i\Gamma s1+4\Lambda s1)+L(\xi2-1))+ks(2z0-L\xi2))(2i\Gamma s4+2\Lambda s4+L(\xi2+1)\rho)^2kp^2}{ks\mathbb{K}2} \right]
\end{aligned}$$

A.2. Equivalencia entre el cálculo numérico completo y el cálculo numérico obtenido mediante el desarrollo semi-analítico

Se comparó el cálculo completo y el cálculo semi-analítico como una manera de validar este último. En la figura A.1 se puede observar la similitud de las funciones de intensidad espectral conjunta, las cuales arrojan valores de eficiencia de anunciamento y de pureza idénticos. Aunque esta comparación no representa una estadística (debido a que realizarla representaría tiempo de cómputo importante) si provee evidencia de que el cálculo semi-analítico conduce a resultados en muy buena concordancia con los derivados del tratamiento totalmente numérico, al menos en los esquemas para los cuales es válida la aproximación paraxial.

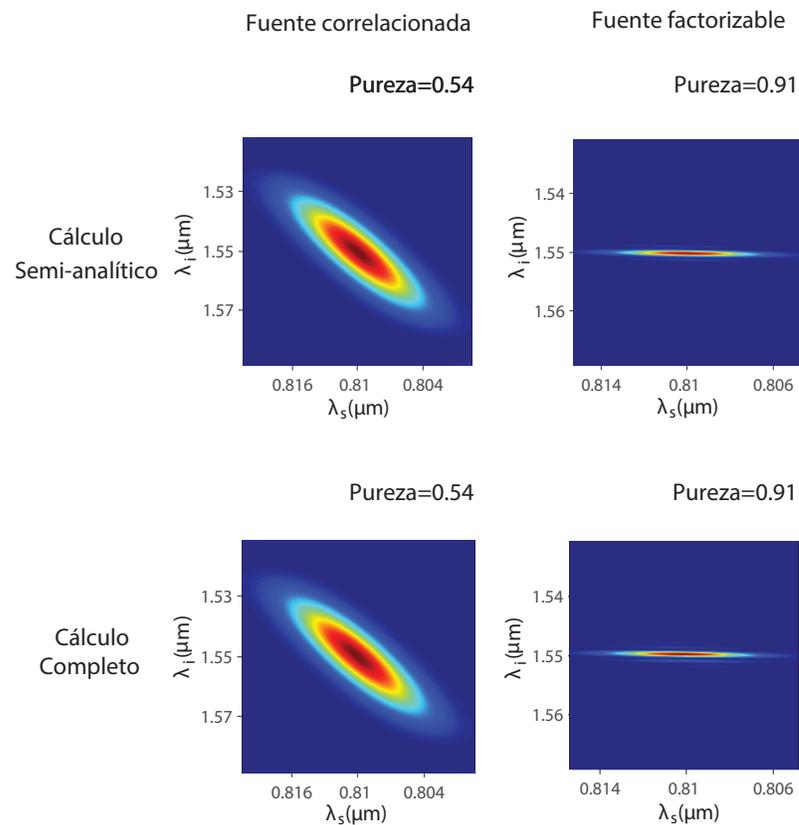


Figura A.1: Comparación de la JSI utilizando el cálculo completo y el cálculo semi-analítico para la fuente correlacionada y la fuente factorizable basada en PPKTP.

A.3. Descomposición de Schmidt de un sistema bipartita

Si se considera un sistema cuántico A acoplado a otro sistema B , el espacio vectorial completo asociado con el sistema compuesto $A+B$ está dado por el producto tensorial de los espacios vectoriales de los subsistemas individuales A y B con los correspondientes vectores base $|n^A\rangle$ y $|n^B\rangle$. Es posible entonces, obtener un operador de densidad reducido del sistema A tomando la traza parcial del operador de densidad total $\hat{\rho}$ (eq. 10) con respecto al sistema B (Lambropoulos y Petrosyan, 2007):

$$\hat{\rho}^A = \sum_n^B \langle n^B | \rho | n^B \rangle = Tr_B(\rho). \quad (130)$$

Cabe notar que si es posible factorizar el vector de estado del sistema compuesto $A + B$ como un producto de vectores estado individuales de los sistemas A y B , $|\Psi\rangle = |\Psi^A\rangle \otimes |\Psi^B\rangle$, entonces $\hat{\rho}^A$ se reduce a la matriz de densidad del sistema A en estado puro $|\Psi^A\rangle$. Por otro lado, el estado del sistema compuesto que no es factorizable $|\Psi\rangle \neq |\Psi^A\rangle \otimes |\Psi^B\rangle$ es llamado estado entrelazado.

Es posible sin embargo, realizar una descomposición de Schmidt y encontrar bases ortonormales $\{|\Psi_i^A\rangle\}$ para A y $\{|\Psi_i^B\rangle\}$ para B de manera que se expanda $|\Psi\rangle$ como:

$$|\Psi\rangle = \sum_i s_i |\Psi_i^A\rangle \otimes |\Psi_i^B\rangle. \quad (131)$$

Por consiguiente, la matriz reducida del sistema A en esta base es diagonal,

$$\hat{\rho}^A = \sum_i p_i |\Psi_i^A\rangle \langle \Psi_i^A|, \quad (132)$$

es decir, $|\Psi_i^A\rangle$ son eigenestados de $\hat{\rho}^A$ con eigenvalores $p_i = s_i^2$. El número de eigenvalores diferentes de cero es llamado número de Schmidt, el cual de ser mayor a uno implica un estado compuesto entrelazado.