

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Ciencias de la Computación**

**Implementación de un método no-calibrado de
autocalización monocular aplicable en robótica**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Mariana Alejandra Chan Ley

Ensenada, Baja California, México

2017

Tesis defendida por

Mariana Alejandra Chan Ley

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Gustavo Olague Caballero

Director del Comité

Dr. Pedro Gilberto López Mariscal

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

MC. Jose Luis Briseño Cervantes



Dr. Jesús Favela Vara

Coordinador del Programa de Posgrado en Ciencias de la Computación

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Mariana Alejandra Chan Ley © 2017

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor

Resumen de la tesis que presenta **Mariana Alejandra Chan Ley** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Computación

Implementación de un método no-calibrado de autocalización monocular aplicable en robótica

Resumen aprobado por:

Dr. Gustavo Olague Caballero
Director de Tesis

En este trabajo de tesis se abordan dos problemas importantes para el área de visión por computadora, la localización automática de una cámara fotográfica y la reconstrucción tridimensional a partir de imágenes adquiridas por una cámara sin calibración previa. Para el problema de la localización automática se presenta un método no-calibrado, utilizando las propiedades proyectivas ligadas al modelo de proyección de la cámara. Para la reconstrucción tridimensional de la escena se utilizaron conceptos y teoremas de geometría proyectiva que nos permiten calcular un conjunto de matrices de transformación perspectiva. Y con ellas poder conocer las coordenadas de los demás puntos en la imagen. Los experimentos realizados confirman la validez de nuestra propuesta.

Palabras Clave: **Geometría proyectiva, reconstrucción tridimensional, cámaras no-calibradas.**

Abstract of the thesis presented by **Mariana Alejandra Chan Ley** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Computer Science in Computer science.

Implementation of an uncalibrated method of monocular autocalization applicable in robotics

Abstract approved by:

Dr. Gustavo Olague Caballero
Thesis Director

This thesis deals with important problems for the area of computer vision, the automatic location of a camera and the three - dimensional reconstruction from images acquired by a camera without previous calibration. For the automatic localization problem an uncalibrated method is presented, using the projective properties linked to the projection model of the camera. For the three-dimensional reconstruction of the scene we use concepts and theorems of projective geometry that we can not calculate a set of perspective transformation matrices. And with them to know the coordinates of the other points in the image. The experiments carried out confirm the validity of our proposal.

Keywords: **Projective geometry, 3-D reconstruction, uncalibrated cameras**

Dedicatoria

*Con cariño, a mis padres Ana Rubí y Rosendo
y a Juan José, mi compañero de vida*

Agradecimientos

Quiero agradecer de todo corazón a mis padres Ana Rubí †, que en paz descansa y Rosendo, por todo su amor, cariño, apoyo y comprensión que me ofrecieron durante los años que estuve realizando mi tesis, así como todos los sacrificios que tuvieron que hacer para que yo pueda llegar a este momento. Es un honor ser su hija y es una alegría inmensa ser parte de esta familia.

Al amor de mi vida Juan José, gracias por toda tu paciencia y cariño, gracias a ti he logrado superar todas las dificultades que me han ido surgiendo a lo largo de la maestría, muchas gracias por estar siempre dispuesto a escucharme y confiar en mí.

Agradezco a mi asesor, Dr. Gustavo Olague Caballero, por la oportunidad que me dio de trabajar a su lado y haberme guiado a la culminación de esta tesis. Gracias Doctor por confiar en mí, por tenerme paciencia, así como ayudarme y apoyarme en los momentos más difíciles. Siempre le estaré agradecida.

Agradezco al Dr. Rafael Kelly Martínez, al Dr. Gilberto López y al M. en C. José Luis Briseño por todo el tiempo dedicado a la corrección de esta tesis, así como sus invaluable comentarios que tuve de su parte para mejorarla.

Gracias a mis compañeros del laboratorio, Héctor y Aarón, por brindarme su confianza, amistad y haber hecho mi estadía en el CICESE más amena.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, por haberme admitido y otorgarme la infraestructura necesaria para llevar a cabo este trabajo de tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	x
1. Introducción	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Organización del documento	2
1.3 Metodología	3
2. Marco Teórico	4
2.1 Geometría Proyectiva	4
2.1.1 Espacio proyectivo	5
2.1.2 Base proyectiva.	7
2.1.3 Transformación Proyectiva	8
2.1.4 La birrazón	9
2.1.5 Las cónicas en geometría proyectiva	13
2.1.6 Teorema de Chasles	18
2.1.7 Transformaciones perspectivas	20
2.2 Álgebra de Grassman-Cayley	23
2.3 El álgebra de Grassmann-Cayley ó álgebra doble	24
2.4 Coordenadas de Plücker	25
2.4.1 La matriz de Plücker	27
2.4.2 Intersección de una línea con un plano	28
3. Centro de proyección de una cámara fotográfica	30
3.1 Modelo de la transformación proyectiva realizada por la cámara	31
3.1.1 Ventajas de un método no-calibrado	33
3.2 Cálculo del centro de proyección de una cámara fotográfica	34
3.2.1 Cálculo de la línea de vista de un punto	36
3.2.2 Cálculo del punto de intersección de dos líneas de vista	62
4. Reproyección de puntos de una fotografía	67
4.1 Cálculo de la matriz de transformación proyectiva P	69
4.2 Cálculo de los vectores que forman la base	71
4.3 Cálculo de las matrices de transformación perspectiva P_1, P_2, P_3	71
4.4 Reproyección de los puntos en la imagen	85
5. Experimentación y Resultados	86
5.1 Experimento 1	86
5.1.1 Resultados del experimento 1	98
5.2 Experimento 2	103
5.2.1 Resultados del experimento 2	108
5.3 Experimento 3	110
5.3.1 Resultados experimentales	120
6. Conclusiones y trabajo futuro	124

6.1	Conclusión	124
6.2	Trabajo futuro	125
	Literatura citada	126
A	Certificado de Calibración de la Mira de Calibración Tridimensional AICON 3D Systems GmbH	128

Lista de figuras

Figura		Página
1	Birrazón de un lápiz de líneas.	11
2	Birrazón de un lápiz de líneas con la fórmula de Möbius.	12
3	Lápiz de planos.	13
4	Homografía entre dos cónicas.	14
5	Teorema de Chasles.	19
6	Distorsiones perspectivas	21
7	Perspectividad en \mathbb{P}^2	22
8	Transformación perspectiva en \mathbb{P}^2	22
9	Representación del modelo de <i>cámara oscura</i>	31
10	Plano de la imagen frente al centro de proyección.	32
11	Planteamiento geométrico para la solución	37
12	Planteamiento geométrico para la solución, usando la fotografía	40
13	La cónica \mathbf{Q}_1	41
14	La cónica \mathbf{Q}_2	42
15	Intersección de las líneas de vista L_1 y L_2	63
16	Primera transformación perspectiva	73
17	Segunda transformación perspectiva	78
18	Tercera transformación perspectiva	82
19	Base de madera con 6 esferas azules.	86
20	Imagen original en el espacio de colores HSV.	88
21	Diferentes elementos la Figura 19 en HSV.	88
22	Segmentación en cada elemento de la Figura 19 en HSV.	89
23	Resultado final de la segmentación HSV.	89
24	Detección de círculos.	90
25	Círculos detectados.	90
26	Círculos en el espacio tridimensional.	91
27	Punto A.	92
28	Plano $\Pi^{(0)}$	93
29	Línea L_2	93
30	Lápiz de $\mathbf{X}^{(1)}$	94

Figura	Página
31 Puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$, $\mathbf{V}^{(5)}$ y $\mathbf{V}^{(6)}$.	95
32 Cónicas μ y λ .	95
33 Punto $\mathbf{V}^{(1)}$.	96
34 Punto $\mathbf{X}^{(7)}$.	96
35 Línea de vista A .	97
36 Líneas de vista.	98
37 Centro óptico de la imagen.	99
38 Imágenes de prueba.	100
39 Ventana de OpenGL que muestra el centro óptico de la imagen.	101
40 Mira de Calibración tridimensional AICON 3D Systems GmbH.	103
41 Tipos de cibles en la mira de calibración. a) Cible codificado. b) Cible no-codificado	104
42 Imagen binarizada con el algoritmo de Otsu.	105
43 Círculos detectados.	106
44 Círculo removido.	106
45 Imagen recortada.	106
46 Centroides de los objetos en la imagen recortada.	107
47 Centro óptico de la imagen.	107
48 Imágenes de prueba.	109
49 Cuadrícula para guía del plano a replantear.	110
50 Reconstrucción de los puntos en el espacio tridimensional.	120
51 Imagen tomada de referencia para realizar la reconstrucción tridimensional.	120
52 Los puntos en el espacio después de la primera transformación perspectiva.	121
53 Los puntos en el espacio después de la segunda transformación perspectiva.	121
54 Plano a replantear con un ángulo de 30 grados con la horizontal.	123

Lista de tablas

Tabla		Página
1	Posición en el espacio de las esferas azules de la Figura 19.	87
2	Ubicación del centro óptico de la Figura 19 en cm.	99
3	Resultados del experimento 1 con las imágenes de la Figura 38.	99
4	Promedio de errores en el cálculo del centro óptico en el experimento 1.	100
5	Ubicación del centro óptico utilizando OpenCV (en cm).	100
6	Resultados del experimento 1 parte 2 con las imágenes de la Figura 38.	101
7	Promedio de errores en el cálculo del centro óptico en el experimento 1.2.	101
8	Posición en el espacio de los marcadores codificados de la Figura 40.	104
9	Ubicación del centro óptico de la Figura 40 en mm.	108
10	Resultados del experimento 2 con las imágenes de la Figura 48.	108
11	Promedio de errores en el cálculo del centro óptico en el experimento 2.	108
12	Posición en el espacio de las intersecciones de la cuadrícula empleadas	111
13	Puntos de intersección identificados en la imagen en pixeles	112
14	Puntos elegidos en coordenadas del plano del espacio tridimensional	112
15	Puntos elegidos en la fotografía	112
16	Coordenadas promedio de los puntos reconstruidos	122
17	Error promedio en la reconstrucción tridimensional	122

Capítulo 1. Introducción

Actualmente se realiza investigación para lograr que los robots puedan desempeñarse autónomamente en lugares difíciles, como los son las calles, o terrenos irregulares. El hecho de darles autonomía a los robots, los hará capaces de desplazarse por lugares desconocidos que sean peligrosos para las personas. El principal sentido que utilizan los seres humanos para realizar esta tarea, es el sentido de la vista, por tal motivo una manera de darles autonomía a los robots es proveerlos de un sistema de visión artificial, como por ejemplo con una cámara.

Una cámara es un dispositivo muy útil, no sólo produce una imagen realista de una escena, sino que también provee información acerca de las propiedades geométricas de la misma. Reconstruir una escena mediante imágenes es una de las tareas más importantes dentro del área de la visión por computadora.

El mapeo del entorno realizado por un robot, es esencial para la navegación autónoma. Una tarea fundamental a realizar en este proceso es saber en dónde se encuentra el robot. Para esto existen técnicas de reconstrucción 3D que constituyen un desarrollo esencial en todas aquellas disciplinas en las que es necesaria la recuperación de la estructura tridimensional de una escena (Pollefeys *et al.*, 2003; Zhang, 1998; Horn y Brooks, 1989). Normalmente para realizar ésta reconstrucción, se requiere cierta calibración de la cámara con la que fueron obtenidos los datos, sin embargo este trabajo aborda un método no calibrado para poder realizar la reconstrucción.

El problema descrito en el párrafo anterior se define como Localización y Mapeo Simultáneo (SLAM por sus siglas en inglés), el cual, es un proceso por medio del cual, robots móviles pueden construir un mapa de un ambiente y al mismo tiempo utilizar ese mapa para calcular su propia localización y la trayectoria que seguirán Durrant-Whyte y Bailey (2006).

Tomando todo lo anterior en cuenta, en este trabajo se presenta un método con el que es posible encaminar los esfuerzos hacia la autonomía en robots mediante un sistema no calibrado, que calcula la posición de *una cámara convencional*, como las que comúnmente se incluyen en los dispositivos robóticos, de manera que puedan autolocalizarse de una manera económica, a diferencia de sistemas más complejos como los de visión estereoscópica.

1.1. Objetivos

Este proyecto constituye la continuación del proyecto anterior '*¿Dónde está el fotógrafo? Utilizando el álgebra de Grassmann-Cayley*', que trataba los aspectos relativos a encontrar la posición de una cámara fotográfica en un espacio tridimensional, en base a un conjunto de puntos conocidos en la escena, así como de sus correspondientes puntos en la imagen. Actualmente, el objetivo fundamental parte de esta idea y de su aplicación en un robot humanoide, para poder conocer las coordenadas en las que se encuentra con respecto a su entorno; y a partir de ahí, realizar una reconstrucción tridimensional de los elementos que se encuentran a su alrededor.

Objetivo general

Desarrollar un método mediante el cual, un robot pueda crear un mapa tridimensional de su ambiente y determinar simultáneamente su ubicación dentro de ese mapa.

Objetivos Específicos

- Implementar los algoritmos para ubicación del robot
- Implementación de algoritmos para detección de puntos de interés.
- Integración de los algoritmos y adaptarlos para su utilización en secuencia de imágenes
- Implementación de algoritmos para reconstrucción tridimensional y empataamiento de imágenes
- Análisis e implementación de los algoritmos existentes en el estado del arte para realizar comparaciones de los resultados

1.2. Organización del documento

Este trabajo de tesis se encuentra dividido en 6 capítulos, después de la introducción y presentación de objetivos del capítulo 1, el resto del trabajo se distribuye de la siguiente manera:

En el capítulo 2., se describen los conceptos teóricos que serán utilizados para entender cada una de la partes de este trabajo. Se presenta una breve introducción a la geometría proyectiva y sus propiedades. Éstas descripciones están acompañadas de ejemplos que permiten visualizar los conceptos presentados. También se introduce el Álgebra de Grassman-Cayley, que nos permite manipular elementos de un espacio proyectivo de manera algebraica. En la última sección de este capítulo se introducirá un caso particular del Álgebra de Grassman, las *coordenadas de Plücker*.

En el capítulo 3. se describe el funcionamiento del método propuesto por (Altamirano Gómez, 2012), que fue utilizado para medir la ubicación de la cámara fotográfica. Así mismo, se discuten los aspectos relevantes de este sistema para el presente trabajo, y se detallan los puntos que se modificaron para utilizarlo.

En el capítulo 4. se describirá un método para realizar una reconstrucción de un plano del espacio tridimensional, mediante un conjunto de puntos conocidos tanto en la imagen como en la fotografía. Se hará uso de conceptos y teoremas de geometría proyectiva.

En el capítulo 5. se describen los experimentos llevados a cabo para poder comprobar las teorías planteadas y los resultados que se obtuvieron de manera experimental

Finalmente en el capítulo 6. se presentan las conclusiones más relevantes sobre el trabajo reportado a través de los capítulos anteriores y se mencionan los posibles trabajos futuros acordes al tema en cuestión.

1.3. Metodología

Obtención de las imágenes que serán utilizadas. Para proceder al análisis de la escena, en primer lugar será preciso obtener una imagen de la cual se calculará las coordenadas del robot.

Preprocesado de la imagen. Se realizará un preprocesado de la imagen con el objetivo de identificar los puntos de referencia dentro de la escena, eliminar posibles ruidos introducidos por la cámara, etc. De esta manera, se facilitará la obtención de mejores resultados.

Cálculo de la ubicación del robot. Una vez seleccionados los datos, será necesario realizar los cálculos correspondientes que serán explicados en el Capítulo 3.

Capítulo 2. Marco Teórico

En este capítulo se realiza una introducción a las áreas relevantes que se requieren para entender los conceptos abarcados en esta tesis, así como la notación que será empleada. Los conceptos usados a lo largo del documento, así como algunas de las demostraciones a los teoremas empleados

2.1. Geometría Proyectiva

Cuando se trata con imágenes del mundo real, comúnmente, se observan elementos al infinito, por ejemplo, el horizonte, el cual es una imagen de los puntos en el espacio lejanos más allá de cierto umbral. Desafortunadamente, la geometría Euclidiana no es suficiente para representar elementos al infinito, por lo que es muy difícil tratar con estos elementos dentro del marco Euclidiano. Por tal motivo, es necesario emplear una geometría más general donde sea posible trabajar con puntos al infinito. Esta geometría es conocida como geometría proyectiva.

Esta sección abarca la geometría de las transformaciones proyectivas del plano, donde estas transformaciones modelan la distorsión geométrica que aparece cuando un plano es mapeado hacia otro mediante una cámara. Bajo transformaciones perspectivas, algunas propiedades geométricas son preservadas, como la colinealidad, pero otras no se mantienen, como lo son las líneas paralelas. La geometría proyectiva modela esta transformación y también provee una representación matemática apropiada para realizar cálculos (Hartley y Zisserman, 2003).

Los primeros estudios sobre geometría datan del antiguo Egipto y Babilonia (2000 a.C), pero fue hasta la antigua Grecia donde los matemáticos de la época enuncian las propiedades de la misma. Euclides en su libro *Elementos*, presenta los principales teoremas geométricos mediante un pequeño número de axiomas. Sin embargo, la geometría Euclidea no implica todo lo correspondiente a la geometría. Los artistas del renacimiento estudiaron la perspectiva y establecieron reglas que son utilizadas para representar la profundidad de una escena tridimensional al ser dibujada sobre una superficie plana como lo es un lienzo. Estas reglas parten de un estudio de las relaciones geométricas entre un punto en la escena, su proyección en el lienzo y el punto de vista del observador. En éste ámbito, destacan los estudios sobre la perspectiva realizados por Leonardo Da Vinci. A pesar de éstos antecedentes, es hasta el siglo XIX que se establecen las bases matemáticas formales de la geometría proyectiva moderna cuando en 1822 Poncelet publicó su

Traité des propriétés projectives des figures, el primer tratado sobre geometría proyectiva (Semple y Kneebone, 1952).

2.1.1. Espacio proyectivo

Un espacio proyectivo \mathbb{P}^n corresponde a un espacio de $n + 1$ dimensiones menos el origen $(0, \dots, 0)$; donde dos $(n + 1)$ -tuplas (x_1, \dots, x_{n+1}) y $\alpha (x'_1, \dots, x'_{n+1})$ representan el mismo elemento del espacio proyectivo .

El espacio proyectivo \mathbb{P}^n consta de los subespacios vectoriales unidimensionales del espacio vectorial \mathbb{R}^{n+1} .

A continuación, se muestra como representar a los elementos de un espacio proyectivo. Un elemento de un espacio proyectivo \mathbb{P}^n es un punto ó un hiperplano representado por un vector de la siguiente forma:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}].$$

Además, este vector es equivalente al vector:

$$\alpha[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}], \forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para tratar esta equivalencia de forma consistente, se introduce un concepto conocido como *coordenadas homogéneas* (Möbius, 1885):

Definición 2.1.1 (Coordenadas homogéneas).

Sea $E(F)$ un espacio vectorial y sea $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ un vector que pertenece a $E(F)$; el vector $[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]^T$ es llamado vector de coordenadas homogéneas si:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]^T = \alpha[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]^T, \forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

A continuación se introduce la notación que usaremos. Este trabajo al ser una continuación del trabajo realizado por Altamirano Gómez (2012), emplearemos la misma notación. Un conjunto de componentes entre paréntesis, $()$, será utilizado para representar a un vector que pertenece a un espacio vectorial $E(F)$. Por otro lado, utilizamos un conjunto de componentes entre corchetes, $[]$, para representar a un vector de coordenadas homogéneas; es decir, un vector que pertenece

al espacio vectorial $E(F)$ y que además satisface la relación de equivalencia:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]^T = \alpha [x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]^T, \forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

ésta es la notación utilizada en el resto del documento.

De acuerdo a la Definición 2.1.1, existe una infinidad de vectores diferentes que representan a un mismo elemento de un espacio proyectivo. La convención utilizada para elegir al vector de coordenadas homogéneas que representa a un punto, es estableciendo que su última componente sea 1. Es decir, sea $[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]^T$ un vector de coordenadas homogéneas que representa a un elemento de un espacio proyectivo \mathbb{P}^n , debemos calcular el vector de coordenadas homogéneas que es equivalente a este vector pero que su última componente es 1.

Notemos que, usar esta convención para representar a un elemento de \mathbb{P}^n es similar a decir que el espacio proyectivo \mathbb{P}^n es el hiperplano $x_{n+1} = 1$ de $E(F)$, donde $E(F)$ es el espacio vectorial a partir del cual se construyó al espacio proyectivo \mathbb{P}^n .

Para representar a los elementos de un espacio proyectivo, se usará la siguiente notación. Representaremos un punto de un espacio proyectivo \mathbb{P}^n mediante una letra mayúscula en negrita.

En casi todos los casos utilizaremos la letra **X** para representar puntos de un espacio proyectivo \mathbb{P}^n . Ocasionalmente, para facilitar algunas explicaciones, usaremos las letras **V, W, Y, Z**; en este caso se hará la aclaración respectiva.

Las componentes de sus coordenadas homogéneas las representaremos por la misma letra, pero en minúscula y con un subíndice indicando el número de componente; de la siguiente forma:

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]^T.$$

Para referirnos a puntos diferentes, utilizaremos un superíndice entre paréntesis; de igual forma, las componentes de sus coordenadas homogéneas utilizarán un superíndice. Entonces, dos puntos $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$ que pertenecen a un espacio proyectivo \mathbb{P}^n los representaremos como:

$$\mathbf{X}^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_{n+1}^{(1)}]^T,$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, x_{n+1}^{(2)}]^T.$$

Donde P es una matriz de tamaño $n+1$ y se encuentra definida a un factor de proporcionalidad desconocido. Además, P se calcula utilizando las coordenadas homogéneas que representan a los puntos que forman las bases B_1 y B_2 .

A continuación, agregaremos una característica a la notación utilizada para representar a los puntos de un espacio proyectivo. Sea $\mathbf{X}^{(j)}$ un punto que pertenece a un espacio proyectivo \mathbb{P}^n , y sea B_i la base con respecto a la cual se encuentran referenciadas las coordenadas homogéneas del punto $\mathbf{X}^{(j)}$; entonces, denotaremos al punto $\mathbf{X}^{(j)}$ como:

$$\mathbf{X}_{[B_i]}^{(j)} = \left[x_{1[B_i]}^{(j)}, x_{2[B_i]}^{(j)}, \dots, x_{n[B_i]}^{(j)}, x_{n+1[B_i]}^{(j)} \right]^T.$$

Esta notación sólo se utilizará cuando trabajemos con puntos cuyas coordenadas homogéneas se encuentren referenciadas a diferentes bases. En caso contrario, se omitirá el subíndice $[B_i]$.

2.1.3. Transformación Proyectiva

Definición 2.1.2 (Transformación proyectiva).

Una *transformación proyectiva* de \mathbb{P}^n a \mathbb{P}^m , denotada por t , es una transformación lineal, no singular, de las coordenadas homogéneas que representan a un punto $\mathbf{X}^{(i)} \in \mathbb{P}^n$ hacia las de un punto $\mathbf{X}^{(j)} \in \mathbb{P}^m$.

$$t : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m.$$

Una transformación proyectiva puede representarse mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{X}^{(j)} = P\mathbf{X}^{(i)}.$$

Donde P es la matriz de tamaño $(m+1) \times (n+1)$ asociada con la transformación proyectiva t ; es decir:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m+1,1} & \cdots & p_{m+1,n+1} \end{bmatrix}.$$

Sea P una matriz de tamaño $n \times m$, asociada a una transformación proyectiva; P se encuentra definida a un factor de escala desconocido. Es decir:

$$P = \alpha P, \forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por lo anterior, la matriz P cuenta con $(n+1)(m+1) - 1$ grados de libertad (GDL). Al punto

$\mathbf{X}^{(j)} \in \mathbb{P}^m$ se le conoce como la *imagen* del punto $\mathbf{X}^{(i)}$.

Para el caso en el cual $m = n$, la transformación proyectiva lleva el nombre de *homografía*. Una homografía equivale a un cambio de base y es definida de manera única por la imagen de una base proyectiva de \mathbb{P}^n .

Determinar una homografía, es equivalente a determinar a un factor multiplicativo desconocido la matriz asociada a la transformación. Esta matriz contiene $(n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$ parámetros independientes.

Cada correspondencia entre un punto de la base y su imagen proporciona $(n + 1)$ ecuaciones lineales. De éstas, solo n ecuaciones son independientes. Ésto debido a que los puntos de la base se encuentran en coordenadas homogéneas, por lo que una de las ecuaciones se forma a partir de la combinación lineal de las otras dos. Tenemos entonces $n(n + 2) = n^2 + 2n$ ecuaciones conteniendo $n^2 + 2n$ incógnitas.

Si los puntos utilizados forman una base proyectiva, éstas ecuaciones son independientes y existe una solución única. Si los puntos no forman una base proyectiva, el número de ecuaciones independientes es insuficiente para determinar todos los parámetros de la transformación proyectiva. Por lo tanto, una homografía de \mathbb{P}^n se encuentra definida por las imágenes de $n + 2$ puntos formando una base proyectiva.

2.1.4. La birrazón

La birrazón es una *invariante proyectiva*, es decir, su valor no cambia al aplicar transformaciones proyectivas, es por eso que es muy importante para este estudio. Una *birrazón* es una cantidad que nos indica cuál es la proporción entre dos razones; matemáticamente puede calcularse mediante la división de dos divisiones. Así, en geometría podemos obtener la birrazón entre longitudes, entre ángulos, entre áreas de figuras geométricas, etc. (Morin, 1993) (Gros y Quan, 1992).

Teorema 2..1 (Conservación de la birrazón) *Toda homografía conserva la birrazón.*

La demostración de este teorema se puede consultar en Semple y Kneebone (1952).

Hay tres casos en particular que nos interesan para este estudio que serán explicados a continuación.

Birrazón de 4 puntos colineales

Definición 2.1.3 (Birrazón de 4 puntos colineales).

En un espacio proyectivo \mathbb{P}^1 , la birrazón de cuatro puntos sobre la misma línea proyectiva, se denota por: $\lambda = [\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}]$, y puede ser calculada en función de las coordenadas homogéneas de los puntos (Möbius, 1885):

$$\lambda = \frac{|\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(3)}| |\mathbf{X}^{(2)}\mathbf{X}^{(4)}|}{|\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(4)}| |\mathbf{X}^{(2)}\mathbf{X}^{(3)}|}. \quad (2)$$

donde λ es la birrazón y $|\mathbf{X}^{(i)}\mathbf{X}^{(j)}|$ es el determinante de la matriz formada por los puntos $\mathbf{X}^{(i)}$ y $\mathbf{X}^{(j)}$ de la siguiente forma:

$$|\mathbf{X}^{(i)}\mathbf{X}^{(j)}| = \left| \begin{bmatrix} x_1^{(i)} & x_1^{(j)} \\ x_2^{(i)} & x_2^{(j)} \end{bmatrix} \right|.$$

donde $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ son las coordenadas homogéneas de un punto $\mathbf{X}^{(i)}$ (Morin, 1993).

Birrazón de un lápiz de 4 líneas

Un lápiz de líneas es un conjunto de líneas que se intersectan en un mismo punto; a este punto se le conoce como *vértice* del lápiz.

Definición 2.1.4 (Birrazón de un lápiz de 4 líneas).

La birrazón de un lápiz de cuatro líneas, es igual a la birrazón de sus puntos de intersección con una quinta línea arbitraria, que sea transversal al lápiz y que no contenga al vértice del lápiz.

Por ejemplo en la Figura 1 se observa que se tienen cuatro líneas formando un lápiz con vértice en $\mathbf{X}^{(0)}$; l_5 es una línea que intersecta al lápiz y que no contiene a $\mathbf{X}^{(0)}$; los puntos $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}$

son los puntos de intersección del lápiz con la línea l_5 . Entonces, la birrazón del lápiz formado por las líneas l_1, l_2, l_3 y l_4 se denota como $[\mathbf{X}^{(0)}; \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}]$ y se calcula mediante la birrazón entre los puntos $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}$ y $\mathbf{X}^{(4)}$. Es decir:

$$[\mathbf{X}^{(0)}; \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}] = [\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}].$$

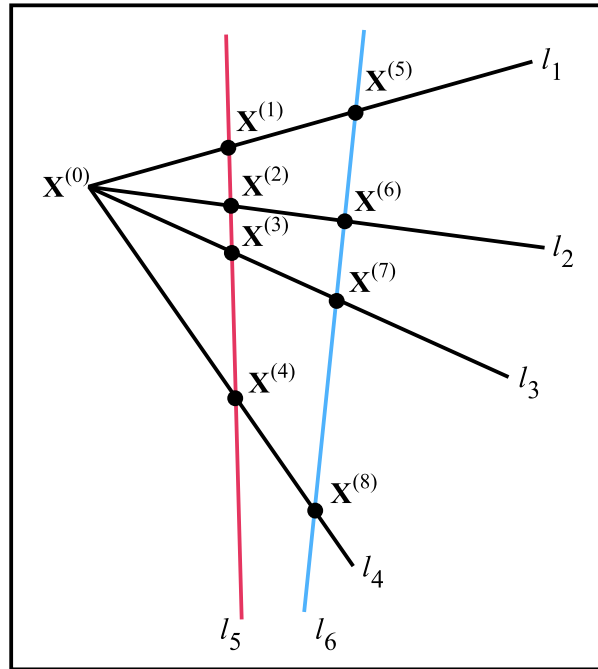


Figura 1. Birrazón de un lápiz de líneas.

El valor de la birrazón es independiente de la elección de la línea que intersecciona al lápiz, siempre y cuando no contenga al punto $\mathbf{X}^{(0)}$. Si consideramos la recta l_6 de la Figura 1. Los puntos de intersección con el lápiz de líneas, son $\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}, \mathbf{X}^{(7)}, \mathbf{X}^{(8)}$, entonces de acuerdo a la Definición 2.1.4:

$$[\mathbf{X}^{(0)}; \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}] = [\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}, \mathbf{X}^{(7)}, \mathbf{X}^{(8)}].$$

Y por lo tanto:

$$[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}] = [\mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}, \mathbf{X}^{(7)}, \mathbf{X}^{(8)}].$$

También es posible calcular la birrazón del lápiz de rectas en función de las coordenadas homogéneas de los puntos que conforman el lápiz (Möbius, 1885). Sean $\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}$ y $\mathbf{X}^{(4)}$ puntos que pertenecen a un espacio proyectivo \mathbb{P}^2 y que forman un lápiz de líneas como se

muestra en la Figura 2. Entonces, su birrazón se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{\left| \mathbf{X}^{(0)} \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(3)} \right| \left| \mathbf{X}^{(0)} \mathbf{X}^{(2)} \mathbf{X}^{(4)} \right|}{\left| \mathbf{X}^{(0)} \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(4)} \right| \left| \mathbf{X}^{(0)} \mathbf{X}^{(2)} \mathbf{X}^{(3)} \right|}. \quad (3)$$

Donde $\mathbf{X}^{(0)}$ es el vértice del lápiz; y los puntos $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, $\mathbf{X}^{(3)}$, $\mathbf{X}^{(4)}$ se encuentran cada uno en líneas diferentes del lápiz y no son colineales. Además, $\left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(j)} \mathbf{X}^{(k)} \right|$ es el determinante de la matriz formada por los puntos $\mathbf{X}^{(i)}$, $\mathbf{X}^{(j)}$ y $\mathbf{X}^{(k)}$ de la siguiente forma:

$$\left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(j)} \mathbf{X}^{(k)} \right| = \begin{vmatrix} x_1^{(i)} & x_1^{(j)} & x_1^{(k)} \\ x_2^{(i)} & x_2^{(j)} & x_2^{(k)} \\ x_3^{(i)} & x_3^{(j)} & x_3^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Donde $\left[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)} \right]$ son las coordenadas homogéneas que representan un punto $\mathbf{X}^{(i)}$.

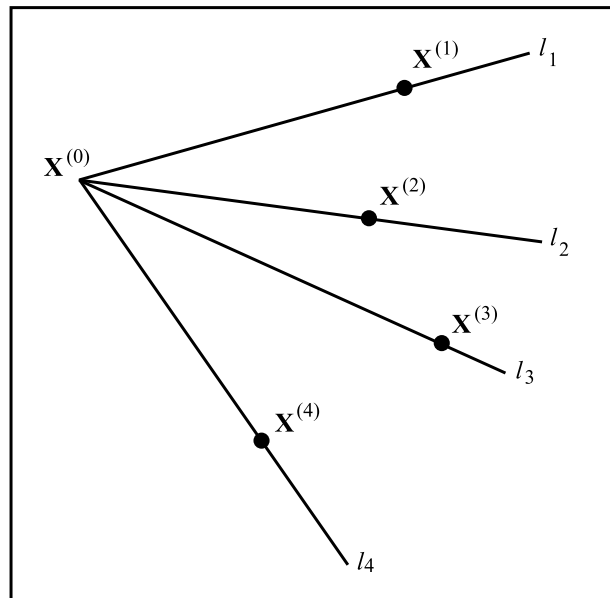


Figura 2. Birrazón de un lápiz de líneas con la fórmula de Möbius.

Birrazón de un lápiz de 4 planos.

Así como un lápiz de rectas es un conjunto de rectas que se unen en un mismo punto, un lápiz de planos es un conjunto de planos que se intersectan en una misma línea.

Definición 2.1.5 (Birrazón de un lápiz de 4 planos).

En un espacio proyectivo \mathbb{P}^3 , sean $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \Pi^{(3)}$ y $\Pi^{(4)}$ cuatro planos formando un lápiz, y sean l_1, l_2, l_3 y l_4 las líneas que se forman al intersectar al lápiz de planos con un plano cualquiera $\Pi^{(i)}$, como se muestra en la Figura 3. Entonces, la *birrazón del lápiz de 4 planos* se define como la birrazón de las 4 líneas l_1, l_2, l_3 y l_4 .

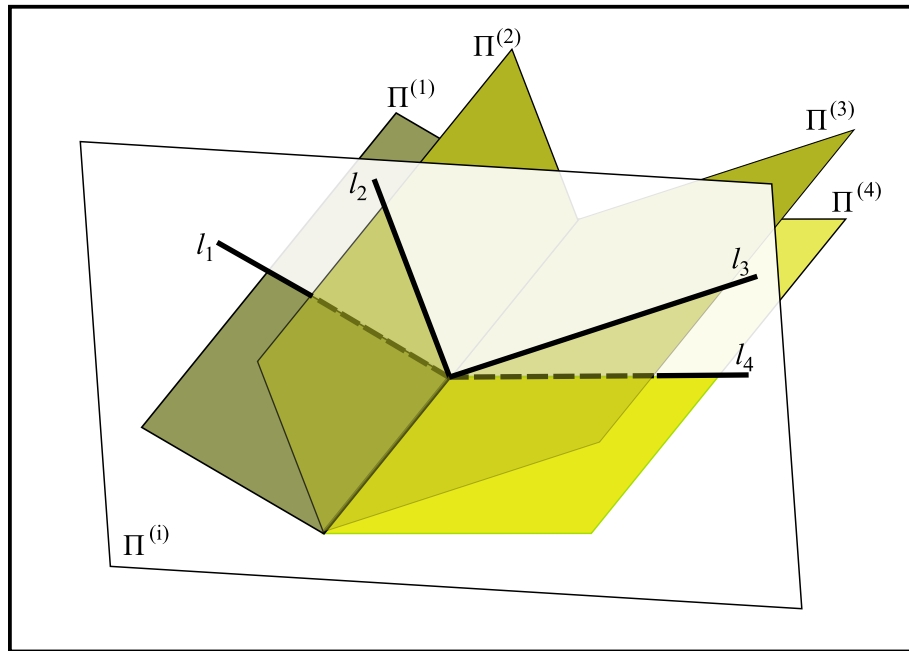


Figura 3. Lápiz de planos.

2.1.5. Las cónicas en geometría proyectiva

Las cónicas juegan un papel muy importante en geometría proyectiva. Una *sección cónica* ó simplemente *cónica* es obtenida de la intersección de un plano en \mathbb{R}^3 con un doble cono en \mathbb{R}^3 .

En geometría proyectiva, no existe distinción alguna entre los diferentes tipos de cónicas: elipse, parábola e hipérbola. Por lo anterior, todas las cónicas no degeneradas son equivalentes mediante transformaciones proyectivas; por ejemplo, una elipse se puede transformar en una hipérbola ó viceversa.

Algebráicamente, una cónica es una curva planar descrita en su forma canónica por la siguiente ecuación:

$$A(x_1^{(i)})^2 + Bx_1^{(i)}x_2^{(i)} + C(x_2^{(i)})^2 + Dx_1^{(i)}x_3^{(i)} + Ex_2^{(i)}x_3^{(i)} + F(x_3^{(i)})^2 = 0,$$

o también se puede representar en forma matricial mediante:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = 0,$$

donde $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$ y \mathbf{Q} es la matriz asociada a la cónica \mathbf{Q} , y esta dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix}$$

Para evitar confusiones, se utilizará la letra \mathbf{Q} en cursiva y negrita para referirnos a la forma geométrica y la letra Q normal para referirnos a la matriz asociada a dicha cónica. Entonces, Q es una matriz simétrica de tamaño 3×3 . Además, es una matriz homogénea, es decir, las matrices Q y αQ representan a la misma cónica; donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y es diferente de cero.

Toda homografía transforma entonces una cónica en otra cónica, en ciertos casos en una cónica degenerada, como lo son una línea ó un par de líneas.

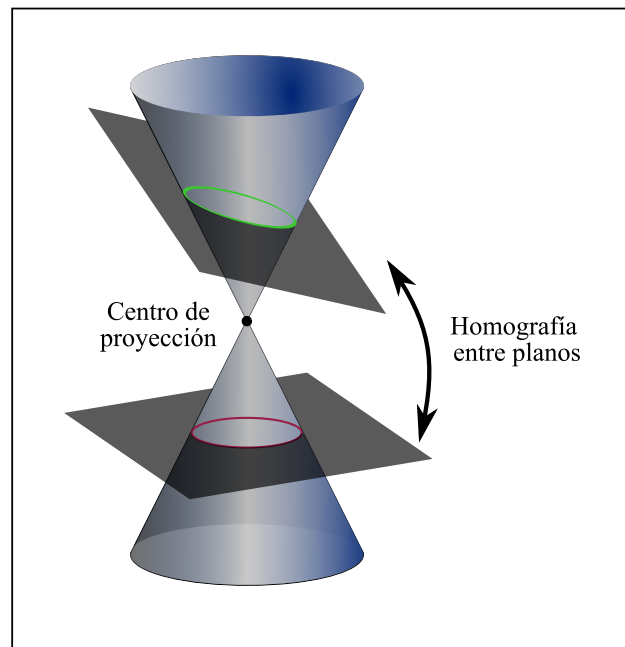


Figura 4. Homografía entre dos cónicas.

Podemos visualizar el desarrollo anterior de la siguiente forma: una cónica se obtiene a partir de la intersección de un plano con un cono. Si consideramos al origen del cono como el centro de

proyección de una transformación proyectiva; entonces, dos planos cualesquiera intersectando al cono están relacionados por medio de una homografía, cuyo centro de proyección es el origen del cono, ver Figura 4.

Número de grados de libertad de una cónica

Sea \mathcal{Q} una cónica que pertenece a un espacio proyectivo \mathbb{P}^2 ; podemos representarla por medio de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{X}^T Q \mathbf{X} = 0, \quad (4)$$

donde $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$ es el vector de coordenadas homogéneas que representan a un punto de \mathbb{P}^2 , y Q es la matriz asociada a la cónica \mathcal{Q} .

Calcularemos a continuación el número de parámetros linealmente independientes que son necesarios para definir a una cónica. Para ésto comencemos por analizar la matriz Q . Por la Ecuación (4), Q es una matriz de tamaño 3×3 , por lo que posee 9 elementos. Como Q es simétrica, entonces de los 9 elementos sólo 6 son linealmente independientes. Además, la matriz Q se encuentra definida mediante un factor de proporcionalidad desconocido por lo que finalmente de los 6 parámetros solo 5 son linealmente independientes. Por lo tanto, Q tiene 5 grados de libertad. A continuación se presenta la demostración.

Sea \mathcal{Q} una cónica que pasa por un conjunto de puntos, donde cada punto i es representado por medio de coordenadas homogéneas $\mathbf{X}^{(i)} = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}]$. Entonces, estos puntos satisfacen la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{X}^{(i)})^T Q \mathbf{X}^{(i)} = 0.$$

Desarrollando esta ecuación, obtenemos la ecuación de la cónica \mathcal{Q} en su forma canónica:

$$A(x_1^{(i)})^2 + Bx_1^{(i)}x_2^{(i)} + C(x_2^{(i)})^2 + Dx_1^{(i)}x_3^{(i)} + Ex_2^{(i)}x_3^{(i)} + F(x_3^{(i)})^2 = 0, \quad (5)$$

donde:

$$A = q_{11}; B = q_{12} + q_{21}; C = q_{22}; D = q_{13} + q_{31}; E = q_{23} + q_{32}; F = q_{33}.$$

Reescribiendo la ecuación anterior en forma matricial obtenemos:

$$\left[(x_1^{(i)})^2, x_1^{(i)}x_2^{(i)}, (x_2^{(i)})^2, x_1^{(i)}x_3^{(i)}, x_2^{(i)}x_3^{(i)}, (x_3^{(i)})^2 \right] [A, B, C, D, E, F]^T = 0.$$

La ecuación anterior está en función de coordenadas homogéneas. Para obtenerla en forma no-homogénea, debemos dividir entre la coordenada $(x_3^{(i)})^2$; entonces:

$$\left[\frac{(x_1^{(i)})^2}{(x_3^{(i)})^2}, \frac{x_1^{(i)} x_2^{(i)}}{(x_3^{(i)})^2}, \frac{(x_2^{(i)})^2}{(x_3^{(i)})^2}, \frac{x_1^{(i)} x_3^{(i)}}{(x_3^{(i)})^2}, \frac{x_2^{(i)} x_3^{(i)}}{(x_3^{(i)})^2}, 1 \right] [A, B, C, D, E, F]^T = 0.$$

Para reducir la ecuación a una forma más simple hacemos los siguientes cambios de variable:

$$x^{(i)} = \frac{x_1^{(i)}}{x_3^{(i)}},$$

$$y^{(i)} = \frac{x_2^{(i)}}{x_3^{(i)}}.$$

Así, obtenemos finalmente la ecuación de la cónica en forma no-homogénea:

$$\left[(x^{(i)})^2, x^{(i)} y^{(i)}, (y^{(i)})^2, x^{(i)}, y^{(i)}, 1 \right] [A, B, C, D, E, F]^T = 0.$$

Los coeficientes A, B, C, D, E y F también se encuentran a un factor de escala, por lo que solamente las razones entre ellos son variables independientes; por esta razón, realizamos los siguientes cambios de variable:

$$A' = \frac{A}{F}, B' = \frac{B}{F}, C' = \frac{C}{F}, D' = \frac{D}{F}, E' = \frac{E}{F}, F' = \frac{F}{F}.$$

Obtenemos entonces la siguiente ecuación:

$$\left[(x^{(i)})^2, x^{(i)} y^{(i)}, (y^{(i)})^2, x^{(i)}, y^{(i)}, 1 \right] [A', B', C', D', E', F']^T = 0.$$

Como $F' = 1$, entonces:

$$\left[(x^{(i)})^2, x^{(i)} y^{(i)}, (y^{(i)})^2, x^{(i)}, y^{(i)} \right] [A', B', C', D', E']^T = -1.$$

La ecuación anterior tiene 5 incógnitas: A', B', C', D' y E' . Así, cada punto $\mathbf{X}^{(i)}$ que pertenece a la cónica \mathbf{Q} , forma una ecuación que pone una restricción en los coeficientes que determinan dicha cónica. Por lo tanto, utilizando 5 puntos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en forma

matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Solucionando este sistema de ecuaciones obtenemos los coeficientes A' , B' , C' , D' , E' que representan a la cónica:

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una cónica se encuentra determinada de forma única por medio de 5 puntos linealmente independientes; es decir, considerando 5 puntos cualesquiera cuatro de ellos no-colineales.

Ecuación de una cónica, a la cual pertenecen los puntos de la base canónica.

Si la base canónica $\mathbf{X}^{(1)} = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{X}^{(2)} = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{X}^{(3)} = [0, 0, 1]^T$ y $\mathbf{X}^{(4)} = [1, 1, 1]^T$ pertenece a la cónica \mathbf{Q} ; entonces, se satisfacen las siguientes ecuaciones.

Sustituyendo $\mathbf{X}^{(1)}$ en la Ecuación (5), se tiene:

$$(A)(1)^2 + (B)(0)(0) + (C)(0)^2 + (D)(1)(0) + (E)(0)(0) + (F)(0)^2 = 0,$$

y por lo tanto:

$$A = 0. \tag{6}$$

Sustituyendo $\mathbf{X}^{(2)}$ en la Ecuación (5):

$$(A)(0)^2 + (B)(0)(1) + (C)(1)^2 + (D)(0)(0) + (E)(1)(0) + (F)(0)^2 = 0,$$

y por lo tanto:

$$C = 0. \quad (7)$$

Sustituyendo $\mathbf{X}^{(3)}$ en la Ecuación (5), se tiene que:

$$(A)(0)^2 + (B)(0)(0) + (C)(1)^2 + (D)(0)(1) + (E)(0)(1) + (F)(1)^2 = 0,$$

y por lo tanto:

$$F = 0. \quad (8)$$

Sustituyendo $\mathbf{X}^{(4)}$ en la Ecuación (5):

$$(A)(1)^2 + (B)(1)(1) + (C)(1)^2 + (D)(1)(1) + (E)(1)(1) + (F)(1)^2 = 0,$$

y por lo tanto:

$$A + B + C + D + E + F = 0. \quad (9)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (6) a (9) en la Ecuación (5), obtenemos que la ecuación de la cónica \mathbf{Q} se reduce a:

$$Bx_1^{(i)}x_2^{(i)} + Dx_1^{(i)}x_3^{(i)} + Ex_2^{(i)}x_3^{(i)} = 0.$$

ésta es la ecuación de una cónica a la que pertenecen los puntos que forman la base canónica. Además, por la Ecuación (9): $B + D + E = 0$.

2.1.6. Teorema de Chasles

Michel Chasles (1793-1880) fue un matemático francés que vivió en el siglo XVIII y que realizó contribuciones notables a la geometría proyectiva. En 1852 publicó *Traité de géométrie* donde discute las nociones de birrazón, lápiz e involución desde el punto de vista de la geometría sintética; es decir, haciendo uso únicamente de axiomas, teoremas y argumentos lógicos. En un trabajo posterior publicado en 1865 y titulado *Traité des sections coniques* aplica estas técnicas y definiciones en el estudio de las secciones cónicas y establece lo que después se le conocería como *el Teorema de Chasles*.

Existen diferentes formas de enunciar este teorema; a continuación se presenta de la forma

como fue enunciado por Chasles (1865).

Teorema 2..2 (Teorema de Chasles) *Si de cuatro puntos $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ y $X^{(4)}$ que pertenecen a una cónica trazamos líneas hacia un quinto punto $X^{(i)}$ de la cónica: la birrazón entre estas líneas es un valor constante, sin importar cual sea ese punto. 5.*

Esto significa que sin importar cual sea el quinto punto de la cónica que elijamos, el valor de la birrazón, permanecera constante como se muestra en la Figura 5.

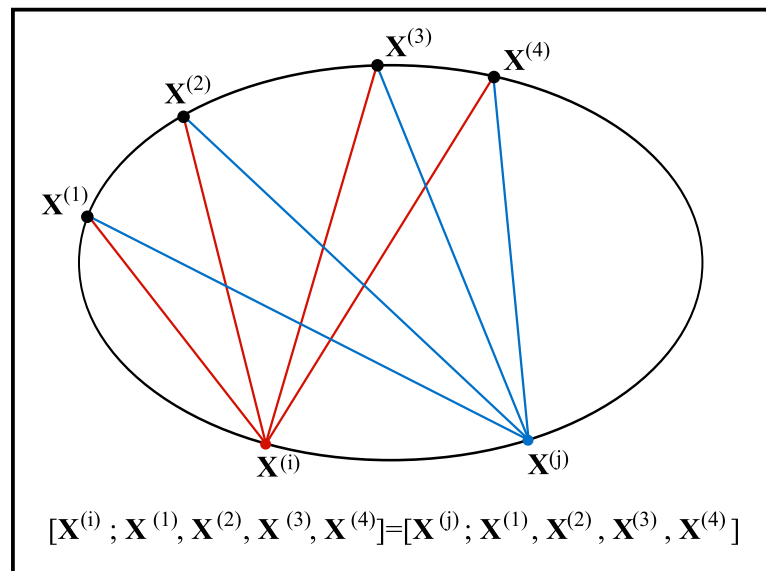


Figura 5. Teorema de Chasles.

Teorema 2..3 (Recíproco del Teorema de Chasles) *En el plano proyectivo, sean 4 puntos $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ y $X^{(4)}$, tres de ellos no colineales, el lugar del vértice de un lápiz de líneas que pasa por esos cuatro puntos y que tienen una birrazón dada, es una cónica.*

El lugar geométrico definido por los vértices de los lápices de líneas que poseen el mismo valor de birrazón con respecto a los mismos cuatro puntos, es una cónica, ver Figura 5.

Demostración.

Sean 4 puntos $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ y $X^{(4)}$ formando una base del plano proyectivo y sea λ un número real. A continuación calcularemos todos los puntos $X^{(i)}$ del plano proyectivo que satisfacen la

birrazón λ . Entonces, el lápiz que forma $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}$ con un punto $\mathbf{X}^{(i)}$ como vértice, debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{\left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(3)} \right| \left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(2)} \mathbf{X}^{(4)} \right|}{\left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(4)} \right| \left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(2)} \mathbf{X}^{(3)} \right|}.$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(3)} \right| \left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(2)} \mathbf{X}^{(4)} \right| - \lambda \left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(4)} \right| \left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(2)} \mathbf{X}^{(3)} \right| = 0. \quad (10)$$

Donde cada determinante $\left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(j)} \mathbf{X}^{(k)} \right|$ de la ecuación anterior es un polinomio homogéneo de primer grado en función de las variables $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ y $x_3^{(i)}$ de la siguiente forma:

$$\left| \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}^{(j)} \mathbf{X}^{(k)} \right| = (x_2^{(j)} x_3^{(k)} - x_2^{(k)} x_3^{(j)}) x_1^{(i)} + (x_1^{(k)} x_3^{(j)} - x_1^{(j)} x_3^{(k)}) x_2^{(i)} + (x_1^{(j)} x_2^{(k)} - x_1^{(k)} x_2^{(j)}) x_3^{(i)}.$$

La multiplicación de dos determinantes nos produce entonces una ecuación cuadrática. Por lo tanto, la Ecuación (10) es un polinomio homogéneo de segundo grado que representa a una cónica. Los puntos $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}$ y $\mathbf{X}^{(4)}$ satisfacen esta ecuación y pertenecen a dicha cónica.

Corolario: *Toda ecuación de segundo grado es una cónica*

2.1.7. Transformaciones perspectivas

Existe un tipo especial de transformaciones proyectivas conocidas como transformaciones perspectivas. Las imágenes de un plano en el espacio capturadas por una cámara, presentan distorsiones perspectivas. Se abordará éste tema para los casos del espacio proyectivo \mathbb{P}^2 . Para ésto, comenzaremos por explicar que entendemos por perspectiva. Decimos que dos puntos están en perspectiva desde un tercer punto si los tres puntos son colineales (Veblen y Young (1938); Brannan *et al.* (1999)).

La imagen de un plano capturada por una cámara experimenta distorsión perspectiva. Se puede observar que figuras rectangulares como las ventanas de la Figura 6 (a), no aparecen como rectángulo en las imágenes. Otra propiedad que se pierde es el paralelismo como se puede apreciar en las Figuras 6 (b) y 6 (c).



(a) .



(b) .



(c) .

Figura 6. Distorsiones perspectivas

Presentamos a continuación la definición de un tipo de transformación lineal conocida como perspectiva (Brannan *et al.*, 1999).

Definición 2.1.6 (Perspectividad en \mathbb{P}^2).

Una *perspectividad* es una función que mapea un punto X de un plano $\Pi^{(1)}$ hacia un punto Y de otro plano $\Pi^{(2)}$, donde X y Y se encuentran en perspectiva desde un punto O , ver Figura 7.

El punto O es el centro de la perspectiva; además, los planos $\Pi^{(1)}$ y $\Pi^{(2)}$ se encuentran embebidos dentro de un espacio tridimensional \mathbb{R}^3 .

Una vez definida una perspectiva, se puede introducir un concepto que se utilizará mucho a lo largo de este trabajo, la transformación perspectiva (Brannan *et al.*, 1999).

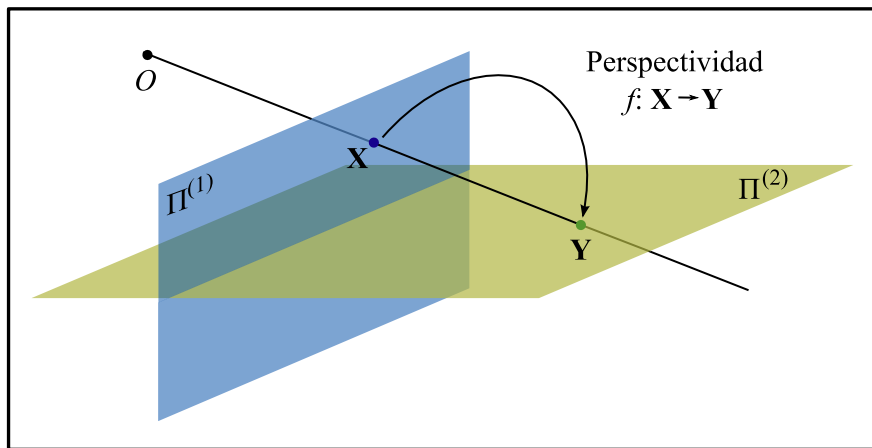


Figura 7. Perspectividad en \mathbb{P}^2

Definición 2.1.7 (Transformación perspectiva en \mathbb{P}^2).

Sean $\mathbf{X}^{(i)}$ y $\mathbf{Y}^{(i)}$ dos puntos de un plano proyectivo $\Pi^{(1)}$ tales que $\mathbf{Y}^{(i)}$ es la imagen del punto $\mathbf{X}^{(i)}$ por una transformación proyectiva t . Además, el plano proyectivo $\Pi^{(1)}$ se encuentra embebido dentro de un espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , donde un vector $\mathbf{x}^{(i)}$ es el vector asociado con la posición del punto $\mathbf{X}^{(i)}$ dentro de \mathbb{R}^3 y un vector $\mathbf{y}^{(i)}$ es el vector asociado con la posición del punto $\mathbf{Y}^{(i)}$ dentro de \mathbb{R}^3 , ver Figura 8.

Entonces, una transformación proyectiva $t : \mathbf{X}^{(i)} \rightarrow \mathbf{Y}^{(i)}$ es una *transformación perspectiva* si existen los planos $\Pi^{(1)}$ y $\Pi^{(2)}$ tales que la transformación lineal:

$$f : \mathbf{x}^{(i)} \rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$$

mapea rígidamente al plano $\Pi^{(1)}$ en el plano $\Pi^{(2)}$ en \mathbb{R}^3 .

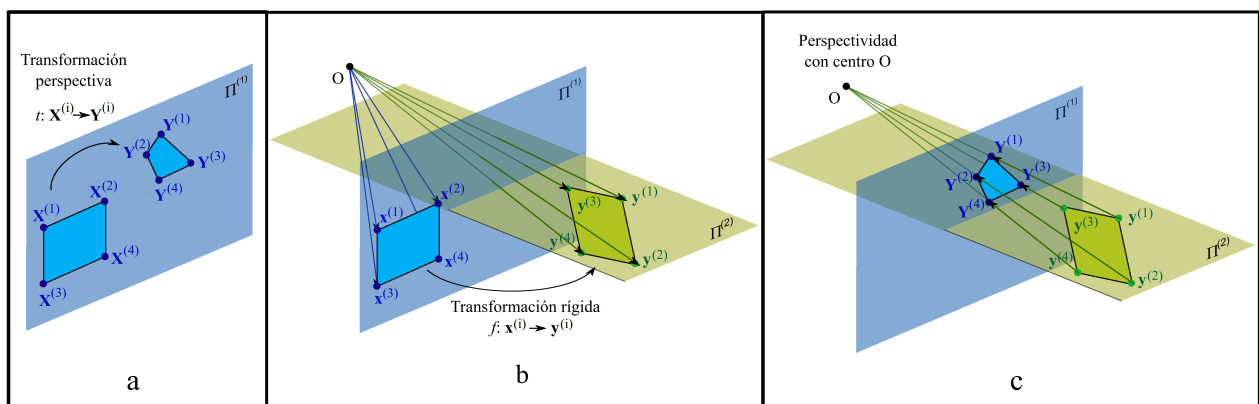


Figura 8. Transformación perspectiva en \mathbb{P}^2

Es decir, si $\Pi^{(1)}$ es un plano proyectivo; entonces, una transformación es perspectiva si: existe alguna forma de trasladar y rotar al plano $\Pi^{(1)}$, de tal forma que los puntos del plano trasladado y

rotado se encuentren en perspectiva, desde un punto O de \mathbb{R}^3 , con los puntos del plano $\Pi^{(1)}$. El punto O es el centro de proyección de la transformación perspectiva.

2.1.7.1. Teorema de las perspectivas

Una transformación proyectiva puede ser descompuesta en un conjunto de transformaciones como lo enuncia el siguiente Teorema :

Teorema 2..5 (Teorema de las perspectivas) *En un espacio proyectivo \mathbb{P}^2 cada transformación proyectiva puede ser expresada como la composición de, a lo más, tres transformaciones perspectivas (Brannan et al., 1999).*

En el Capítulo 4. se hará uso de este teorema para construir un conjunto de matrices que servirán para caracterizar una transformación, una vez conseguido esto, se aplicará el inverso de esas matrices, para obtener una reconstrucción de un plano del espacio tridimensional.

2.2. Álgebra de Grassman-Cayley

En 1844, el matemático alemán Hermann Grassmann (1809-1877) publica *Die lineale Ausdehnungslehre*, donde introduce un marco de trabajo matemático para relacionar el álgebra y la geometría. A esto le dió el nombre de *teoría de extensores*. Desafortunadamente, dada la complejidad y lo novedoso de las ideas ahí planteadas, este trabajo no fue completamente comprendido y permaneció olvidado por mucho tiempo.

Los matemáticos actuales lo consideran como precursor de las teorías matemáticas modernas como álgebra vectorial, álgebra exterior , álgebra de Clifford y álgebra geométrica.

En 1985, Marilena Barabei, Andrea Brini y Gian-Carlo Rota publican un artículo titulado *On the exterior calculus of invariant theory*. En este artículo formulan las ideas establecidas previamente por H. Grassmann, pero utilizando una terminología matemática moderna. Así, definen un álgebra para las operaciones *unión* e *intersección* sobre un espacio geométrico formado por *extensores* (Barnabei *et al.*, 1985). La incorporación a esta teoría del trabajo en álgebra lineal y álgebra de

matrices realizado por el matemático británico Arthur Cayley (1821-1895), da como resultado lo que se conoce como *álgebra doble* ó *álgebra de Grassmann-Cayley*. Esta álgebra, permite establecer un marco de trabajo natural para la geometría proyectiva.

Cabe mencionar que el álgebra de Grassman-Cayley, no se limita específicamente a los conceptos que veremos a continuación, el trabajo realizado por Grassman, es muy extenso y de gran valor matemático, sin embargo, en esta tesis sólo se presentarán los conceptos necesarios para comprender las herramientas utilizadas en el desarrollo de la misma. Para un estudio más profundo sobre los conceptos de este tema, se recomienda revisar Barnabei *et al.* (1985), Hestenes (2001) y White (2004).

2.3. El álgebra de Grassmann-Cayley ó álgebra doble

En las secciones anteriores hemos definido los conceptos básicos que nos permitirán introducirnos en el álgebra de Grassmann-Cayley. Un álgebra se encuentra definida a partir de un espacio vectorial y una operación sobre elementos de ése espacio. Así, la operación ∇ sobre elementos del espacio $G(E)$ da origen al álgebra exterior del operador unión, ya que nos permite *unir* elementos del espacio vectorial; mientras que la operación Δ sobre elementos del espacio $G(E)$ da origen al álgebra exterior del operador intersección. Esta operación puede ser interpretada como la operación contraria a la operación unión, puesto que nos permite obtener un espacio vectorial que es común a dos subespacios vectoriales. Se les da el nombre de álgebras exteriores porque realizan operaciones sobre elementos de $G(E)$ llamados extensores.

El concepto de extensor, se puede interpretar de la siguiente forma: un elemento algebraico, ya sean puntos, líneas, planos, etc., puede ser *extendido* para formar un elemento de mayor orden. Por ejemplo, un punto puede ser extendido mediante otro punto para formar una línea, de la misma forma, una línea puede ser extendida con otro punto para formar un plano.

Se presenta entonces la siguiente definición (Barnabei *et al.*, 1985; Faugeras *et al.*, 2001).

Definición 2.3.1 (Álgebra de Grassmann-Cayley ó álgebra doble).

Sea $E(F)$ un espacio vectorial de dimensión n ; y sea $G_k(E)$, con $k = 0, \dots, n$; el conjunto de espacios vectoriales generados por extensores de paso k . Entonces, el conjunto de todos los espacios vectoriales $G_k(E)$, con $k = 0, \dots, n$; forman un espacio vectorial $G(E)$.

Además, definimos la operación unión entre elementos de $G(E)$ de la siguiente forma:

$$f_{\nabla} : G(E) \times G(E) \rightarrow G(E),$$

donde $f_{\nabla}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \nabla \mathbf{Y}$; con $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in G(E)$.

De la misma manera, definimos la operación intersección entre elementos de $G(E)$ de la siguiente forma:

$$f_{\Delta} : G(E) \times G(E) \rightarrow G(E),$$

donde $f_{\Delta}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \Delta \mathbf{Y}$; con $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in G(E)$.

Estas dos operaciones sobre el espacio vectorial $G(E)$ definen dos estructuras algebraicas.

Entonces, el espacio vectorial $G(E)$, dotado de las operaciones unión, denotada por ∇ , e intersección, denotada por Δ , posee dos estructuras algebraicas y se le da el nombre de *álgebra doble* ó *álgebra de Grassmann-Cayley* sobre el espacio vectorial $E(F)$.

El operador *unión*, denotado ∇ , genera una unión entre dos subespacios de $G(E)$; por otro lado, el operador *intersección*, denotado por Δ , genera la intersección entre subespacios de $G(E)$. Éstas dos operaciones pueden ser vistas como una analogía con las operaciones *unión* e *intersección* en teoría de conjuntos

Para el caso en donde $G(E)$ corresponde al espacio proyectivo real de dimensión 3; es decir \mathbb{P}^3 , el álgebra de Grassmann-Cayley nos permite realizar las siguientes operaciones: La unión de dos puntos $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$ es una línea $L_{X^{(1)}X^{(2)}}$ que pasa por esos puntos:

$$L_{X^{(1)}X^{(2)}} = \mathbf{X}^{(1)} \nabla \mathbf{X}^{(2)}.$$

La unión de tres puntos $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$ y $\mathbf{X}^{(3)}$ es un plano $\Pi_{X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}}$ que pasa por esos puntos:

$$\Pi_{X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}} = \mathbf{X}^{(1)} \nabla \mathbf{X}^{(2)} \nabla \mathbf{X}^{(3)}.$$

La intersección de un plano Π con una línea L es un punto \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \Pi \Delta L.$$

2.4. Coordenadas de Plücker

En el siglo XIX, el físico y matemático Julius Plücker (1801-1868) propuso una representación que asigna, de forma única, seis coordenadas homogéneas a cada línea tridimensional; di-

chas coordenadas llevan el nombre de *coordenadas de Plücker*. Posteriormente, el matemático alemán Hermann Grassmann (1809-1877) generalizó esta idea para representar subespacios k -dimensionales, que pertenecen a un espacio vectorial n -dimensional, mediante un conjunto de coordenadas. Esta representación se le conoce como coordenadas de Grassmann, siendo las coordenadas de Plücker un caso especial de ellas.

Para un estudio más a fondo acerca de las coordenadas de Plücker donde se construyen las coordenadas de Plücker mediante el álgebra de Grassman Cayley, se recomienda revisar (Altamirano Gómez, 2012), Barnabei *et al.* (1985), Faugeras *et al.* (2001) y White (1994). En esta sección se presentarán únicamente, las definiciones que nos van a servir para realizar nuestro trabajo.

En la sección 2.2 se definió el operador unión ∇ , con este operador es posible *extender* un punto.

Sean $\mathbf{X}^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}]^T$ y $\mathbf{X}^{(2)} = [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}]^T$ dos puntos de \mathbb{P}^3 , estos puntos son en realidad extensores de paso 1, la unión de estos dos extensores será un extensor de paso 2 que corresponde a la línea L que pasa por éstos dos puntos:

$$\mathbf{X}^{(1)} \nabla \mathbf{X}^{(2)}. \quad (11)$$

Entonces, la línea $\mathbf{X}^{(1)} \nabla \mathbf{X}^{(2)}$ representa a una línea de un espacio tridimensional \mathbb{P}^3 y se le llama *coordenadas de Plücker*. Presentamos entonces la siguiente definición (Barnabei *et al.*, 1985; Faugeras *et al.*, 2001):

Definición 2.4.1 (Coordenadas de Plücker).

Sean $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$ dos puntos de \mathbb{P}^3 , representados por sus vectores de coordenadas homogéneas de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}]^T$$

y:

$$\mathbf{X}^{(2)} = [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}]^T.$$

Entonces, se le da el nombre de *coordenadas de Plücker* a la séxtupla:

$$(l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{24}, l_{34}),$$

donde:

$$l_{ij} = x_i^{(1)} x_j^{(2)} - x_i^{(2)} x_j^{(1)}.$$

Las coordenadas de Plücker representan a la línea que pasa por los puntos $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$.

Dado que las coordenadas de Plücker que representan a una línea, se obtienen a partir de las coordenadas homogéneas que representan a dos puntos que pertenecen a dicha línea. Entonces, las coordenadas de Plücker son coordenadas homogéneas. Es decir, un vector formado por las coordenadas de Plücker de la siguiente forma:

$$[l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{42}, l_{34}]^T$$

es equivalente al vector:

$$\alpha [l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{42}, l_{34}]^T; \forall \alpha : \alpha \neq 0.$$

2.4.1. La matriz de Plücker

La matriz de Plücker es una forma de representar una línea por medio de una matriz cuadrada de tamaño 4×4 cuyos elementos son las coordenadas de Plücker. Esta representación es útil para la manipulación algebraica de las propiedades de incidencia de una línea.

Sean $l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{42}, l_{34}$ las coordenadas de Plücker de una línea L , donde:

$$l_{ij} = x_i^{(1)}x_j^{(2)} - x_i^{(2)}x_j^{(1)}.$$

Podemos verificar que si $i, j = 1, 2, 3, 4$, entonces:

- Si $i \neq j$, entonces $l_{ij} = -l_{ji}$.
- Si $i = j$, entonces $l_{ij} = 0$.

Obtenemos 16 elementos l_{ij} que representan a la línea L , los cuales pueden ser escritos en forma matricial como:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo cada valor de l_{ij} en la ecuación anterior:

$$L = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}x_1^{(2)} - x_1^{(2)}x_1^{(1)} & x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)} & x_1^{(1)}x_3^{(2)} - x_1^{(2)}x_3^{(1)} & x_1^{(1)}x_4^{(2)} - x_1^{(2)}x_4^{(1)} \\ x_2^{(1)}x_1^{(2)} - x_2^{(2)}x_1^{(1)} & x_2^{(1)}x_2^{(2)} - x_2^{(2)}x_2^{(1)} & x_2^{(1)}x_3^{(2)} - x_2^{(2)}x_3^{(1)} & x_2^{(1)}x_4^{(2)} - x_2^{(2)}x_4^{(1)} \\ x_3^{(1)}x_1^{(2)} - x_3^{(2)}x_1^{(1)} & x_3^{(1)}x_2^{(2)} - x_3^{(2)}x_2^{(1)} & x_3^{(1)}x_3^{(2)} - x_3^{(2)}x_3^{(1)} & x_3^{(1)}x_4^{(2)} - x_3^{(2)}x_4^{(1)} \\ x_4^{(1)}x_1^{(2)} - x_4^{(2)}x_1^{(1)} & x_4^{(1)}x_2^{(2)} - x_4^{(2)}x_2^{(1)} & x_4^{(1)}x_3^{(2)} - x_4^{(2)}x_3^{(1)} & x_4^{(1)}x_4^{(2)} - x_4^{(2)}x_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

o en una forma más compacta:

$$L = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{X}^{(2)})^T - \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{X}^{(1)})^T. \quad (12)$$

A esta representación de la línea se le conoce como *matriz de Plücker* y tiene las siguientes propiedades:

1. L es una matriz antisimétrica: $l_{ij} = -l_{ji}$.
2. Tiene rango 2.

2.4.2. Intersección de una línea con un plano

Utilizando los operadores unión e intersección, podemos calcular las coordenadas del punto en el cuál se interseca un plano con una línea en el espacio tridimensional.

Sea \mathbb{P}^3 el espacio proyectivo de dimensión 3, el cual es construido a partir de un espacio vectorial $E(F)$ de dimensión 4. Entonces, un plano Π que pertenece a \mathbb{P}^3 se representa mediante el siguiente vector de coordenadas homogéneas:

$$\Pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]^T. \quad (13)$$

Para calcular el punto donde una línea se interseca en términos de la matriz de Plücker y del plano de intersección Π , se escribe como se representa a continuación:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ -l_{12} & 0 & l_{23} & l_{24} \\ -l_{13} & -l_{23} & 0 & l_{34} \\ -l_{14} & -l_{24} & -l_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

La ecuación anterior, nos permite determinar el punto de intersección de una línea con un plano. Es necesario hacer notar que, en un espacio proyectivo no existe la noción de paralelismo; por lo tanto, siempre existe un punto de intersección entre dos líneas coplanarias. Además, dado que un plano está formado por líneas, entonces siempre existe un punto de intersección entre un plano y una línea.

Capítulo 3. Centro de proyección de una cámara fotográfica

Cuando una persona camina, o se desplaza dentro de un espacio cualquiera, ya sea, una habitación, un pasillo o un espacio en el exterior a cielo abierto, prácticamente sin darse cuenta esta realizando cálculos acerca del entorno que lo rodea, ésto con el fin de identificar los objetos alrededor, posibles amenazas a su integridad, así como para saber por donde desplazarse. Pero estos cálculos, únicamente se realizan tratando de identificar una distancia relativa entre la persona y los objetos que lo rodean, es decir, uno no sabe exactamente cuantos metros o centímetros hay entre su persona y el objeto, simplemente realiza un cálculo relativo que le indica la proximidad de un objeto.

Por tal motivo, si deseamos que un robot se desplace en un entorno de manera autónoma, es necesario proveerlo de un sistema de visión artificial que realice cálculos de alguna manera que le permita situarle en su ambiente de forma semejante.

El primer paso a realizar para que un robot pueda desplazarse es saber en donde se encuentra con respecto a su entorno, es decir, con respecto a los objetos que se encuentran a su alrededor. Con esta idea en mente, en el presente capítulo, se presenta un método no-calibrado para calcular la posición del centro de proyección de una cámara fotográfica, que se encuentre en el robot.

Esta posición se calcula de forma relativa a un conjunto de puntos conocidos que son utilizados como referencia. Este método fue desarrollado por Tripp (1987) para el caso del plano proyectivo. Posteriormente, Morin (1993) lo extiende hacia el caso de un espacio proyectivo tridimensional. Altamirano Gómez (2012), realizó los cálculos para implementar dicho método utilizando el álgebra de Grassmann-Cayley, y una representación de la línea en el espacio tridimensional mediante coordenadas de Plücker. El uso del álgebra de Grassmann-Cayley permite manejar de forma más sencilla las propiedades de incidencia que utiliza esta método.

Para poder realizar este método es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones iniciales:

- Se utiliza el modelo de cámara *pinhole*, para modelar la transformación que realiza la cámara al tomar una fotografía.
- Es necesario tener la información de un conjunto de puntos de referencia en el espacio tridimensional y sus proyecciones en la fotografía.

- Se realiza un *posicionamiento relativo*. Es decir, se calcula el centro de proyección con respecto un sistema coordenado proyectivo, obtenido a partir de los puntos de referencia.
- Ningún conocimiento previo de los parámetros de la cámara es utilizado. Sólo se utiliza información proveniente de las imágenes y de un número mínimo de puntos tridimensionales que servirán como referencia.

3.1. Modelo de la transformación proyectiva realizada por la cámara

El modelo matemático nos da información acerca del proceso de formación de la imagen. Una vez identificado el modelo matemático que rige el comportamiento de la cámara, se puede proceder a la obtención de las coordenadas bidimensionales de un punto de la imagen captada a partir de las coordenadas tridimensionales de un punto en la realidad. El modelo que se empleará es el modelo de cámara oscura, también llamado modelo *pinhole*.

Idealmente, una cámara oscura es un cajón oscuro con un pequeño orificio en una de sus paredes, a través del cual se proyecta el mundo real sobre el plano de la imagen. De esta forma, el objeto que se encuentra en el exterior es proyectado en una de las paredes como una imagen invertida. Esta imagen invertida es la fotografía.

El punto donde se encuentra el orificio de la cámara, es llamado centro de proyección, centro de la cámara o centro óptico, y el plano de la imagen se denota por Π .

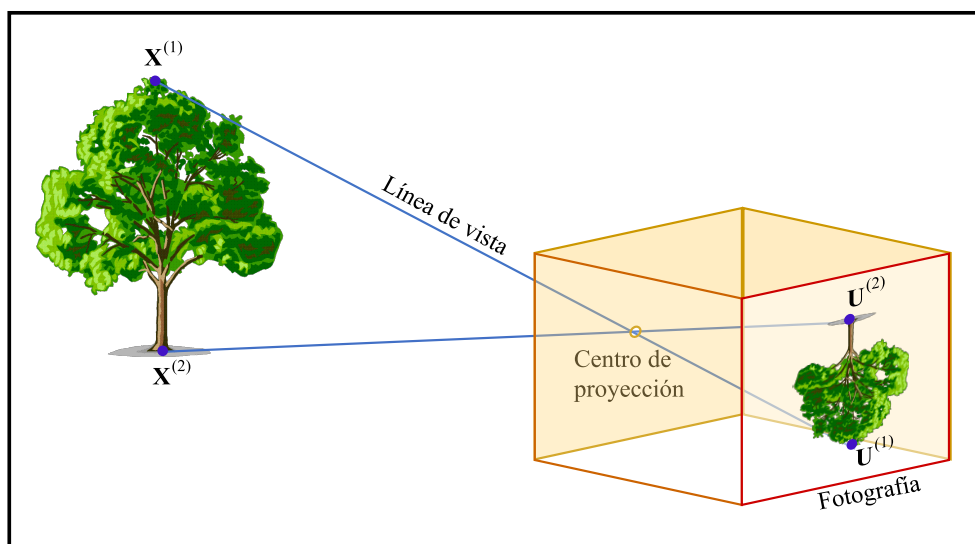


Figura 9. Representación del modelo de *cámara oscura*.

De acuerdo a este modelo, cada punto \mathbf{X} con coordenadas $(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})$ del espacio tridimensional es proyectado a través de una línea que pasa por \mathbf{X} y por el orificio de la cámara. A esta línea se le da el nombre de *línea de vista*, y al orificio de la cámara se le conoce como *centro de proyección*. A la proyección del punto \mathbf{X} en la fotografía la denotaremos como \mathbf{U} ; y corresponde a la intersección de la línea de vista y el plano donde se forma la fotografía, ver la Figura 9. Con base en la semejanza de triángulos, la relación entre el punto tridimensional con su proyección esta dada por:

$$U^{(1)} = -f \frac{x_{(1)}}{x_{(3)}} \quad (15)$$

$$U^{(2)} = -f \frac{x_{(2)}}{x_{(3)}} \quad (16)$$

donde f es la *longitud de foco*, o sea la distancia entre el centro de proyección y el plano de la imagen. Es importante notar que hay un signo negativo en la Ecuación 16, debido a que el punto en el espacio y su proyección están en direcciones opuestas al centro de proyección.

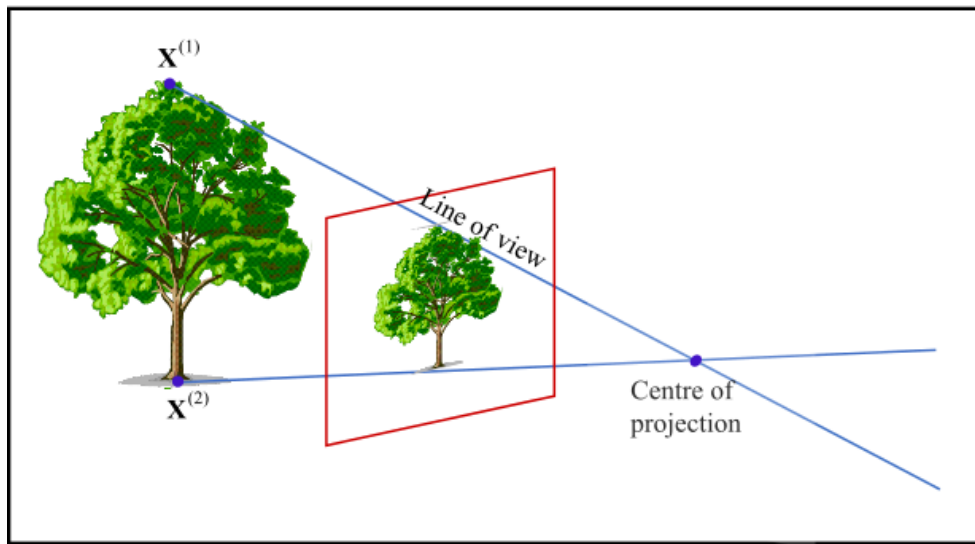


Figura 10. Plano de la imagen frente al centro de proyección.

Esto determina una transformación proyectiva y hace que la imagen de un objeto aparezca invertida en el plano de la imagen. Para eliminar este efecto es posible voltear la imagen. Esto corresponde a posicionar el plano de la imagen enfrente del centro de proyección, como se muestra en la Figura 10.

En el campo de la visión por computadora, la precisión del modelo *pinhole* es generalmente suficiente. Utilizando este modelo, la transformación efectuada por la cámara es una proyección

perspectiva que pertenece a las transformaciones proyectivas de \mathbb{P}^3 en \mathbb{P}^2 . Esta transformación se expresa como una transformación lineal de las coordenadas homogéneas de la siguiente forma:

$$\mathbf{U} = P\mathbf{X}.$$

Donde $\mathbf{U} = [u_1, u_2, 1]^T$ es el vector de coordenadas homogéneas de un punto en la fotografía, $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, 1]^T$ es el vector de coordenadas homogéneas de un punto en el espacio y P es la matriz asociada a la transformación proyectiva.

3.1.1. Ventajas de un método no-calibrado

La manera convencional en la que se realiza una reconstrucción tridimensional, es utilizando una matriz de calibración, el método es desarrollado por Faugeras y Toscani (1987). A pesar de que un sistema calibrado permite realizar mediciones métricas muy exactas; estos sistemas presentan algunos problemas:

- La calibración ha demostrado ser una etapa delicada y numéricamente inestable y forma parte de la clase de problemas mal condicionados (Faugeras y Toscani, 1987).
- Los parámetros de calibración son muy sensibles a los cambios del medio ambiente: un cambio de temperatura, un choque mecánico ó incluso un cambio de enfoque hace necesaria una nueva calibración. .
- En algunos casos, la calibración resulta inservible. Por ejemplo, cuando se requiere que la cámara se mueva. Al haber movimiento los parámetros intrínsecos son modificados completamente en cada movimiento realizado por la cámara. Por otro lado, los parámetros extrínsecos, que determinan la posición del sistema coordenado de la cámara con respecto al sistema coordenado mundo; son diferentes para cada punto de vista. Para solucionar esto habría que realizar una calibración previa para cada punto de vista; sin embargo, ésto implica un costo computacional demasiado alto.

Las razones anteriores, han conducido a los investigadores a proponer nuevos métodos, que permitan evitar una calibración explícita. Así, surgen la idea de la *autocalibración* (Hartley y Zisserman, 2003). Ésta consiste en determinar los parámetros de la cámara directamente a partir

de fotografías no-calibradas; es decir, sin un conocimiento de las coordenadas tridimensionales de los puntos en la escena. De aquí, se desprende el concepto de posicionamiento relativo; éste consiste en utilizar los puntos observados, para construir el sistema coordenado con respecto al cual se calcula la posición de la cámara (Mohr y Morin, 1991).

Además, una ventaja significativa del enfoque algebraico presentado en este trabajo, es que los resultados derivados en esta forma son más fácilmente utilizados para realizar algoritmos y métodos computacionales prácticos.

3.2. Cálculo del centro de proyección de una cámara fotográfica

Para poder calcular la posición en la que se encuentra la cámara se hará uso de los teoremas y conceptos planteados en la sección anterior.

El método presentado a continuación, tiene un enfoque geométrico-algebraico. El enfoque geométrico, consiste en utilizar propiedades proyectivas, asociadas al modelo de proyección de la cámara. Generando una configuración con la que podremos emplear teoremas de geometría proyectiva que nos facilitan el manejo de las propiedades que son invariantes bajo homografías. El método está basado en el Teorema de Chasles y en la conservación de la birrazón en las transformaciones proyectivas.

Por su lado, el enfoque algebraico, se emplea debido a la necesidad de implementar el método en un sistema computacional. El álgebra de Grassman-Cayley nos facilita este tipo de cálculos, en particular un caso especial de esta, que son las coordenadas de Plücker. Estas nos permiten representar líneas de manera matricial, y con esto, se facilitan las ecuaciones matemáticas que son implementadas en el sistema computacional.

Como se mostró en la Figura 9; el centro de proyección de una cámara, corresponde a la intersección de las líneas de vista de los puntos proyectados sobre el plano de la fotografía. Por lo tanto, conociendo al menos dos puntos y sus respectivas líneas de vista; es posible calcular el punto donde se intersectan dichas líneas. Este punto es el centro de proyección de la cámara que al ser calculado, nos indicará su posición.

Para la adquisición de las imágenes se requiere una cámara fotográfica que se encuentre posicionada dentro de un espacio proyectivo tridimensional \mathbb{P}^3 .

Para realizar el cálculo, un punto $\mathbf{X}^{(i)}$ que pertenezca al espacio dentro de la imagen, será representado por medio de un vector de coordenadas homogéneas, de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}^{(i)} = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, 1]^T.$$

El centro de proyección de la cámara fotográfica es el punto que deseamos encontrar, éste se denotará como $\mathbf{X}^{(0)}$:

$$\mathbf{X}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, 1]^T.$$

Una fotografía tomada con una cámara, corresponde a una transformación proyectiva. Ésta mapea los puntos que pertenecen al espacio \mathbb{P}^3 , hacia los puntos que pertenecen a un espacio \mathbb{P}^2 . Donde \mathbb{P}^2 , es el plano de la fotografía. Así, la proyección en la fotografía de un punto $\mathbf{X}^{(i)}$ se denotará como $\mathbf{U}^{(i)}$; y será representado mediante un vector de coordenadas homogéneas de la siguiente forma:

$$\mathbf{U}^{(i)} = [u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, 1]^T.$$

Donde las coordenadas de todo punto $\mathbf{U}^{(i)}$ son conocidas, puesto que son las coordenadas en píxeles de un punto en la fotografía. Estas coordenadas son calculadas en el desarrollo experimental mediante técnicas de reconocimiento.

El problema del cálculo del centro de proyección de una cámara fotográfica, se plantea como un problema computacional de la siguiente forma:

Objetivo: Calcular el centro de proyección de una cámara fotográfica.

Entrada: Un conjunto de 6 puntos: $\{\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}, \mathbf{X}^{(5)}, \mathbf{X}^{(6)}\} \in \mathbb{P}^3$; y sus proyecciones en la fotografía: $\{\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}, \mathbf{U}^{(5)}, \mathbf{U}^{(6)}\} \in \mathbb{P}^2$.

Salida: El centro de proyección de la cámara: $\mathbf{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Para poder calcular donde se encuentra la cámara se hace el siguiente planteamiento: Todos los puntos que se encuentran en la fotografía se proyectan hacia el centro óptico de la cámara fotográfica como se vió en la sección 3.1. Entonces el punto donde se cruzan todas las líneas de vista, corresponde al centro de proyección de la cámara fotográfica. Sabiendo esto, se puede afirmar que para calcular el centro de proyección se debe calcular la intersección de al menos dos líneas de vista. Por lo que el método para calcular el centro de proyección, puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Cálculo de la línea de vista de un punto $\mathbf{X}^{(1)}$.
2. Cálculo de la línea de vista de un punto $\mathbf{X}^{(2)}$.
3. Cálculo del punto de intersección de ambas líneas de vista.

A su vez, cada uno de estos pasos se divide en otros pasos, siendo el que requiere de mayor procesamiento, el cálculo de la línea de vista, es por ello que se presenta a continuación:

3.2.1. Cálculo de la línea de vista de un punto

Sea $\mathbf{X}^{(1)}$ un punto de \mathbb{P}^3 , y sea $\mathbf{U}^{(1)}$ su proyección en la fotografía; entonces, buscamos determinar la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$. Esta línea de vista se extiende desde el punto seleccionado, hasta el centro de proyección de la cámara denotado por $\mathbf{X}^{(0)}$.

Para calcular cualquier línea se requieren al menos dos puntos sobre ella, sin embargo para este caso solo se tiene una coordenada conocida, ya que $\mathbf{X}^{(0)}$ aún no se conoce. Para calcular dicha línea, necesitamos conocer otro punto sobre ella. El punto $\mathbf{X}^{(1)}$, se considerará conocido. Por lo tanto, debemos encontrar otro punto diferente de $\mathbf{X}^{(1)}$, y que también pertenezca a su línea de vista. Para encontrar este otro punto, haremos uso de información obtenida de la fotografía y de una invariante proyectiva: la birrazón.

3.2.1.1. Planteamiento geométrico preliminar

Como se había mencionado anteriormente, se requiere un conjunto de 6 puntos y sus correspondientes proyecciones en la fotografía, pero por ahora, no se van a utilizar todos, se elige un conjunto de 5 puntos de \mathbb{P}^3 , los denotaremos: $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, $\mathbf{X}^{(3)}$, $\mathbf{X}^{(4)}$, $\mathbf{X}^{(5)}$; también sus correspondientes proyecciones en la fotografía: $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$, $\mathbf{U}^{(5)}$, respectivamente.

Cuando se eligen estos puntos, es necesario tener en cuenta algunas restricciones: Cualquiera 4 de estos 5 puntos, deben ser linealmente independientes, es decir, no deben pertenecer al mismo plano. La razón de lo anterior, es porque estos puntos nos servirán para calcular una nueva base de un espacio proyectivo tridimensional; también es por este motivo que se requieren 5 puntos. Así, estos puntos pueden ser utilizados para definir un sistema coordenado, con respecto al cual se calculará la posición de la cámara.

Entonces, utilizando el conjunto de puntos $\{\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{U}^{(i)}\}$, con $i = 1, 2, \dots, 5$; se construye una configuración geométrica que nos permite calcular la posición del centro de proyección, de forma relativa a los puntos $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(4)}, \mathbf{X}^{(5)}$.

En la Figura 11, se muestra dicha configuración. Ésta consiste en un lápiz de planos que se intersectan en la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$. Estos planos se forman al extender la línea de vista que queremos calcular, con cada punto $\mathbf{X}^{(2)} \dots \mathbf{X}^{(5)}$; éstos planos los denotamos como $\Pi^{(2)}, \Pi^{(3)}, \Pi^{(4)}$ y $\Pi^{(5)}$.

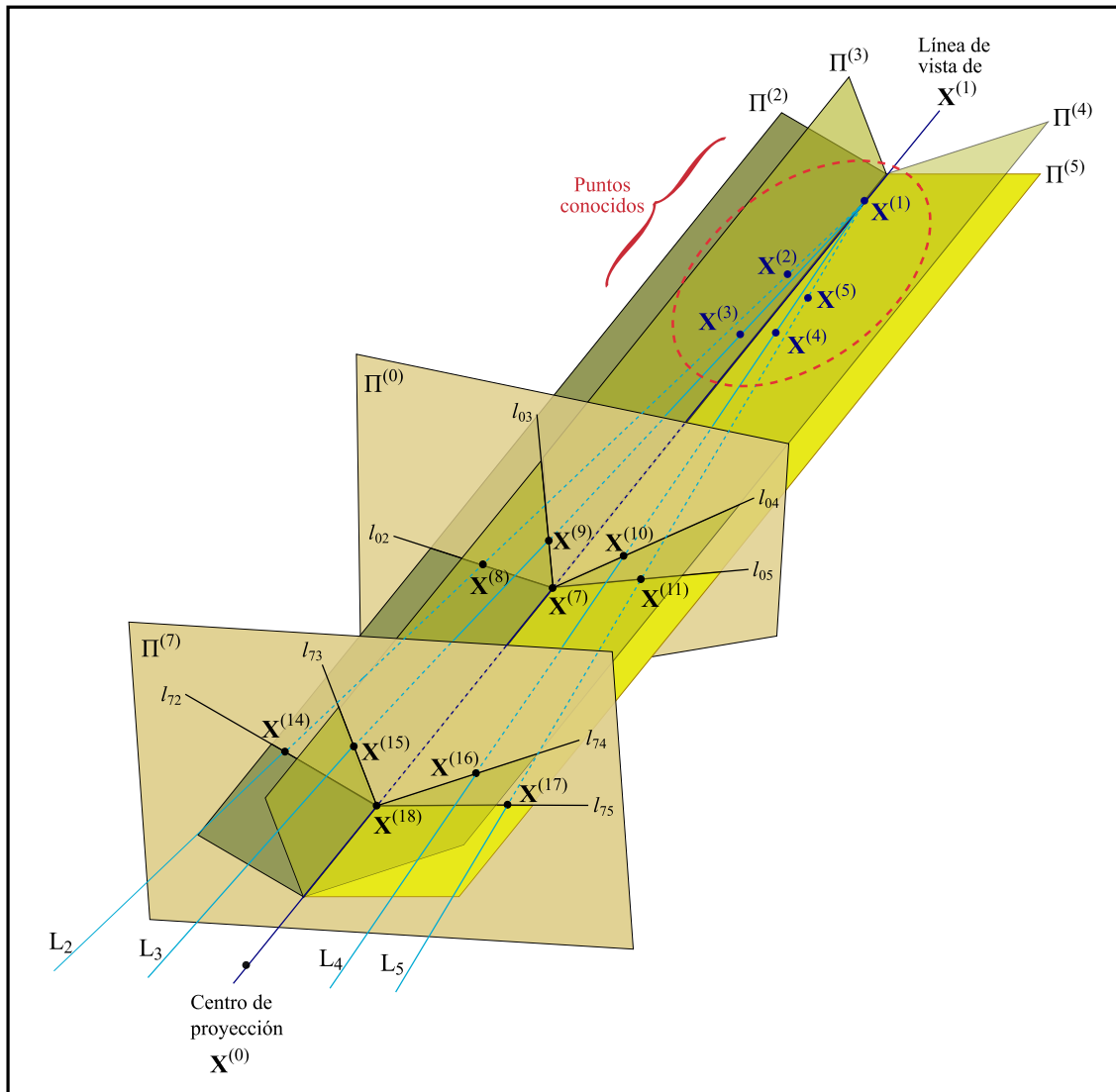


Figura 11. Planteamiento geométrico para la solución

Ahora, se elige $\Pi^{(0)}$, un plano arbitrario de \mathbb{P}^3 que intersecte al lápiz de planos y que no contenga al punto $\mathbf{X}^{(1)}$. Como se vio en la Sección 2.1.4, cuando un plano intersecta a un lápiz de planos, se obtiene un lápiz de líneas que pertenecen a $\Pi^{(0)}$; tal que: cada línea l_{0i} se forma de la

intersección del plano $\Pi^{(0)}$ con el plano $\Pi^{(i)}$ donde $i = 2, 3, 4, 5$ correspondientes a los puntos que definen cada plano. El vértice de este lápiz de líneas es el punto donde $\Pi^{(0)}$ interseca a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$, como se muestra en la Figura 11. Este punto se denota $\mathbf{X}^{(7)}$ y es el punto que hallaremos para definir la línea de vista.

El plano denotado en la Figura 11 como $\Pi^{(7)}$ representa al plano de la fotografía y es distinto de $\Pi^{(0)}$. Este plano, también interseca al lápiz de planos, formando un correspondiente lápiz de rectas formado por las líneas $l_{(72)}, l_{(73)}, l_{(74)}, l_{(75)}$. Cada línea l_{7i} es la línea que se forma de la intersección del plano $\Pi^{(7)}$ con el plano $\Pi^{(i)}$.

Por el Teorema 2.1, la birrazón del lápiz de rectas formado en el plano $\Pi^{(7)}$ que representa a la fotografía, es la misma que la birrazón del lápiz de rectas del plano $\Pi^{(0)}$. Así, la birrazón nos permite relacionar los planos Π^0 y Π^7 del espacio tridimensional \mathbb{P}^3 .

Para poder calcular la birrazón del lápiz de rectas formado en el plano $\Pi^{(7)}$ se puede formar una configuración geométrica de líneas; las cuales se intersecan todas en el punto $\mathbf{X}^{(1)}$, de forma que cada línea L_i es la línea tridimensional que pasa por el punto $\mathbf{X}^{(1)}$ y por el punto $\mathbf{X}^{(i)}$ donde $i = 2, 3, 4, 5$.

Por la construcción geométrica realizada, la línea L_2 pertenece al plano $\Pi^{(2)}$, la línea L_3 pertenece al plano $\Pi^{(3)}$, y así sucesivamente. Así, cada punto de intersección de cada línea L_i con el plano $\Pi^{(0)}$, pertenece a l_{0i} .

De acuerdo a lo visto en la Sección 2.4, los puntos de intersección de las líneas L_{0i} con el plano $\Pi^{(0)}$ se calculan de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}^{(8)} = L_2 \triangle \Pi^{(0)},$$

$$\mathbf{X}^{(9)} = L_3 \triangle \Pi^{(0)},$$

$$\mathbf{X}^{(10)} = L_4 \triangle \Pi^{(0)},$$

y

$$\mathbf{X}^{(11)} = L_5 \triangle \Pi^{(0)}.$$

Las líneas l_{72}, l_{73}, l_{74} y l_{75} , forman un lápiz de líneas sobre el plano $\Pi^{(7)}$; cuyo vértice es el punto que interseca a la línea de vista de $\mathbf{X}^{(1)}$. La birrazón de este lápiz de líneas, es equivalente

a la birrazón del lápiz de planos, ver Sección 2.1.4. Por lo tanto, es equivalente a la birrazón del lápiz de líneas formado sobre el plano $\Pi^{(0)}$, ver Figura 11.

Recapitulando: la intersección del lápiz de planos descrito al inicio de la sección, con dos planos diferentes: Π^0 y Π^7 ; forma dos lápices de líneas, uno en cada plano. éstos lápices tienen la misma birrazón. Por lo tanto, el lápiz de planos nos permite relacionar, por medio de una invariante proyectiva, dos planos que pertenecen a un espacio proyectivo tridimensional.

Notemos que para calcular el vértice del lápiz de líneas que se forma de la intersección con algún plano, no es necesario calcular las ecuaciones que definen el lápiz de planos, es suficiente con calcular la birrazón del lápiz de líneas en algún plano y utilizar este valor para calcular el vértice del lápiz de líneas sobre el otro plano.

Este principio geométrico, es el que se utiliza para encontrar la línea de vista de un punto. Ya que la fotografía es uno de los planos que intersecta al lápiz de planos; entonces, se utiliza la fotografía para calcular su birrazón. Posteriormente, se utiliza este valor para calcular el vértice del lápiz de líneas, que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$ de \mathbb{P}^3 , ver Figura 12.

Los puntos $\mathbf{X}^{(7)}$ a $\mathbf{X}^{(11)}$, se representan cada uno, por medio de un vector de coordenadas del espacio tridimensional \mathbb{P}^3 . Sin embargo, todos ellos pertenecen al plano $\Pi^{(0)}$, el cual es un espacio proyectivo bidimensional. Por lo tanto, para simplificar los cálculos, los puntos $\mathbf{X}^{(7)}$ a $\mathbf{X}^{(11)}$ son expresados mediante vectores de coordenadas que pertenecen a un espacio proyectivo bidimensional. Entonces : El punto denotado como $\mathbf{V}^{(1)}$, con $\mathbf{V}^{(1)} \in \mathbb{P}^2$; corresponde al punto $\mathbf{X}^{(7)} \in \mathbb{P}^3$. El punto denotado como $\mathbf{V}^{(2)}$, con $\mathbf{V}^{(2)} \in \mathbb{P}^2$; corresponde al punto $\mathbf{X}^{(8)} \in \mathbb{P}^3$. Y así sucesivamente hasta el punto $\mathbf{V}^{(5)}$ que corresponde al punto $\mathbf{X}^{(11)}$.

Así, por el Teorema de Chasles, definido en la Sección 2.1.6; el vértice del lápiz de rectas del plano $\Pi^{(0)}$, es uno de los puntos que pertenecen a una cónica. Ésta la denotamos como \mathbf{Q}_1 , y su birrazón como λ_1 ; como se muestra en la Figura 13.

Entonces, todos los puntos que satisfacen la birrazón λ_1 , también pertenecen a la cónica \mathbf{Q}_1 . Sin embargo, hay una infinidad de puntos en la cónica que satisfacen este teorema, nosotros buscamos el punto que, además de satisfacer dicha birrazón, pertenece a la línea de vista de $\mathbf{X}^{(1)}$. Es decir, el punto denotado como $\mathbf{X}^{(7)}$.

Para calcular dicho punto, se utiliza el siguiente razonamiento: Si con 5 puntos es posible definir una cónica utilizando la birrazón entre estos puntos, entonces por el Teorema de Chasles,

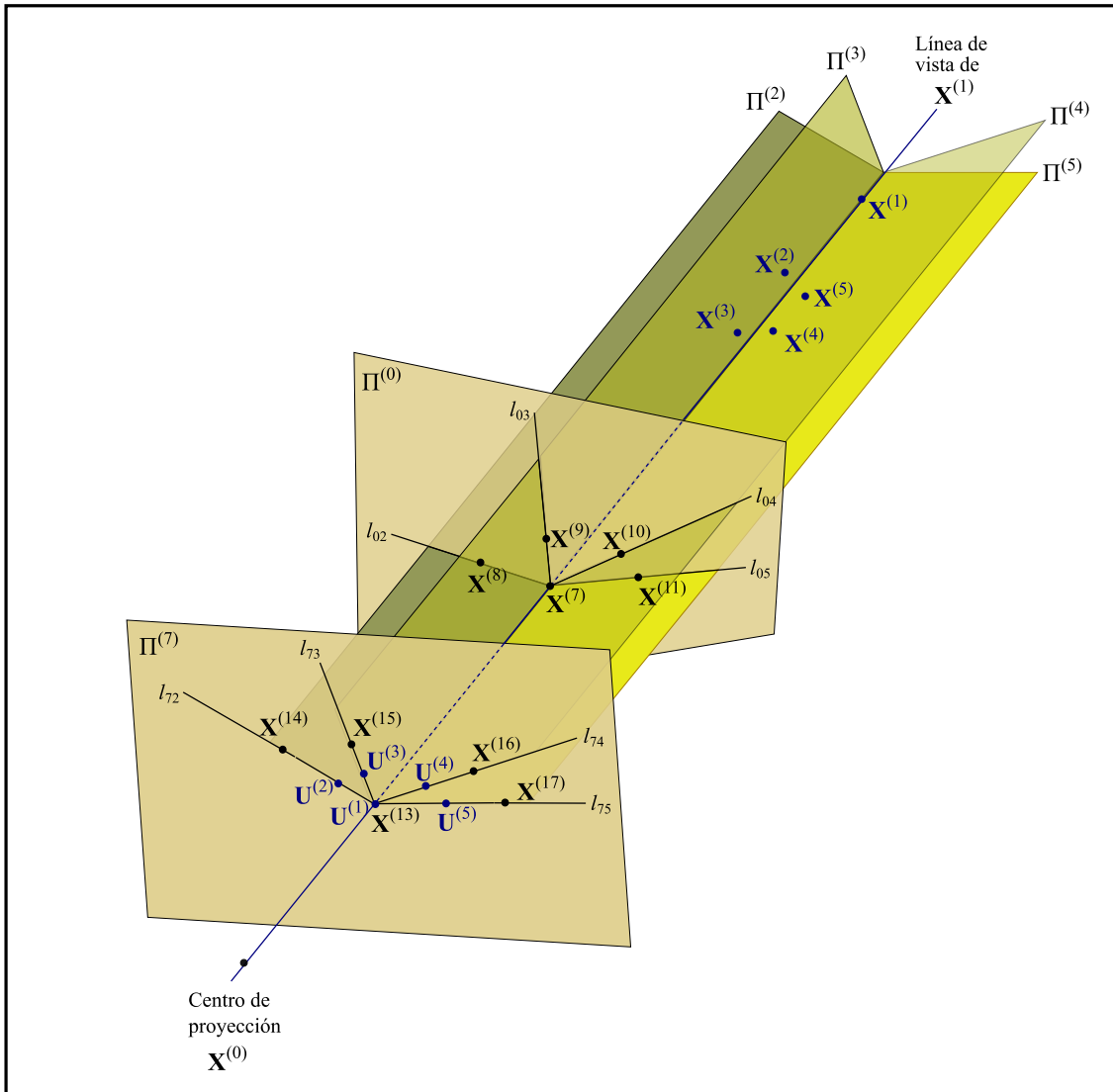


Figura 12. Planteamiento geométrico para la solución, usando la fotografía

una birrazón λ_2 , nos define una segunda cónica, y los puntos $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)}$, $V^{(4)}$; forman una cónica Q_2 . Por construcción, Q_1 y Q_2 se intersectan en $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)}$ y $V^{(4)}$. Así, calculando los puntos de intersección de las cónicas Q_1 y Q_2 ; obtenemos las coordenadas que representan al punto $V^{(1)}$. Entonces, el problema se reduce a calcular la ecuación de la cónica Q_2 . Como las coordenadas que representan a los puntos $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)}$ y $V^{(4)}$ son conocidas; entonces, solo nos falta calcular una birrazón λ_2 .

Con este objetivo, introducimos un sexto punto $X^{(6)}$, y su respectiva proyección en la fotografía, denotada por U^6 . Como se muestra en la Figura 14, utilizando los puntos $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, $X^{(4)}$ y $X^{(6)}$; se construye un segundo lápiz de planos que intersecta a la línea de vista del punto $X^{(1)}$ que tiene un punto diferente al lápiz de líneas anterior con birrazón λ_1 . La birrazón de este lápiz la

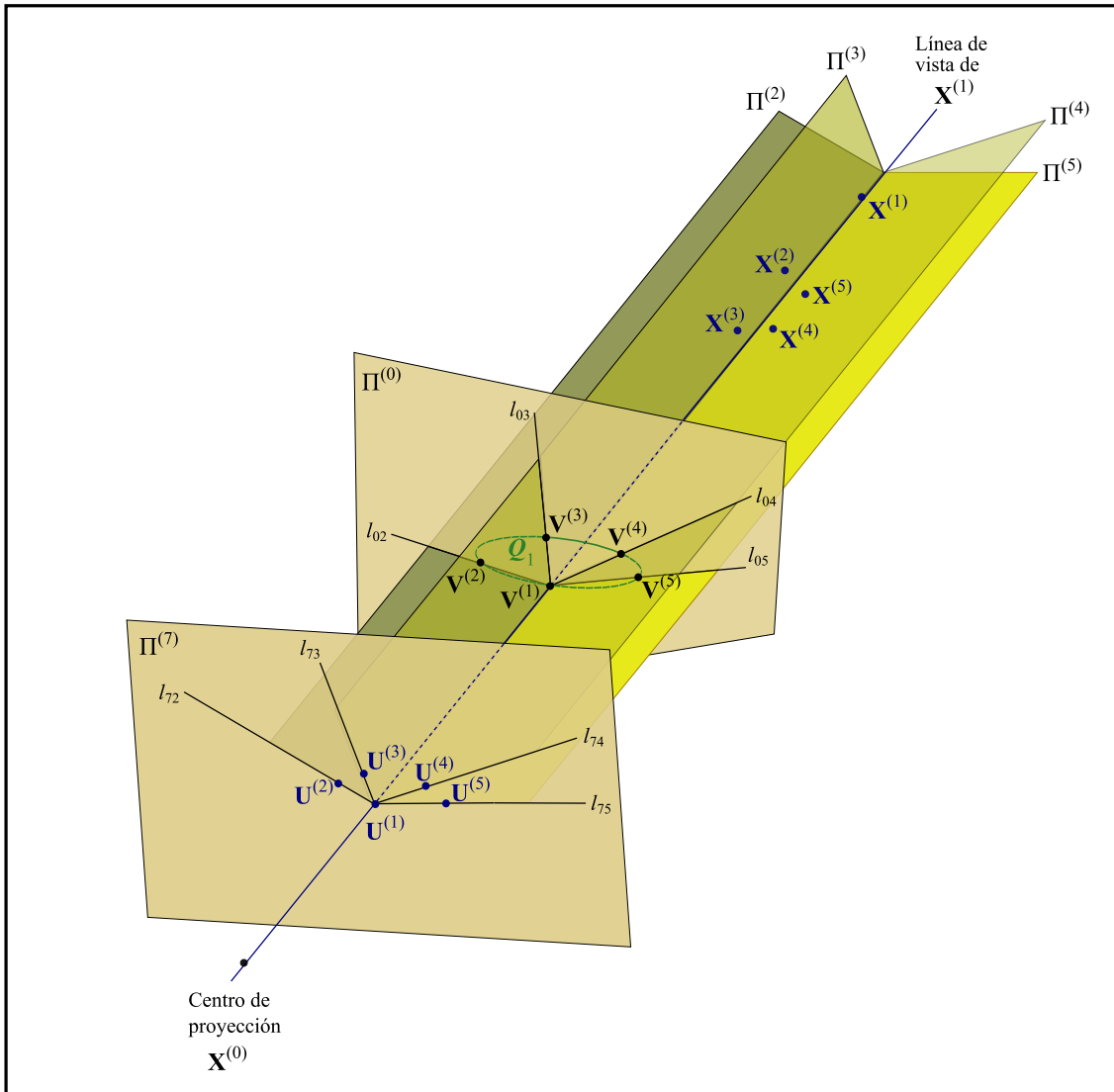


Figura 13. La cónica Q_1

denotaremos λ_2 , y se calcula a partir de los puntos de la fotografía: $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, $U^{(4)}$ y $U^{(6)}$.

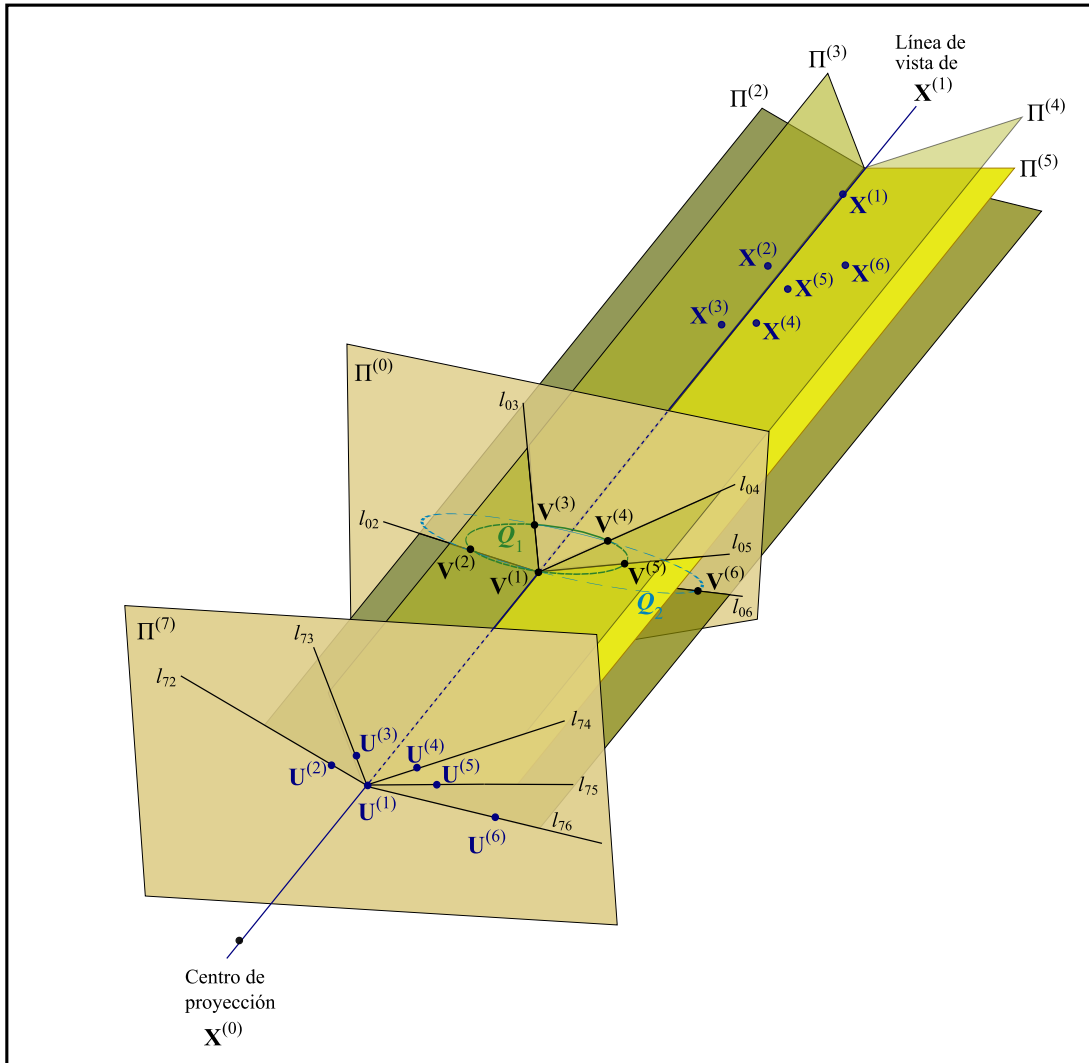


Figura 14. La cónica Q_2

3.2.1.2. Cálculo de la línea de vista

En la sección anterior se explicó el planteamiento geométrico utilizado para calcular la línea de vista, y las consideraciones que se hicieron a fin de describir la línea de vista que contiene a un punto en particular $\mathbf{X}^{(1)}$. A continuación, se resume el procedimiento y posteriormente se explica paso a paso con su respectiva resolución matemática.

1. Calcular una birrazón λ_1 en la fotografía.
2. Definir un plano $\Pi^{(0)}$ que no pase por el punto $\mathbf{X}^{(1)}$.
3. Calcular la ecuación de una cónica \mathbf{Q}_1 , definida por la birrazón λ_1 ; y que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$.
4. Calcular de una birrazón λ_2 en la fotografía.
5. Calcular la ecuación de una cónica \mathbf{Q}_2 , definida por la birrazón λ_2 ; y que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$.
6. Calcular la intersección de las cónicas \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 .
7. Calcular las coordenadas que representan al vértice del lápiz de líneas en \mathbb{P}^3 .
8. Calcular de las coordenadas de Plücker de la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$.

A continuación, se explica a detalle cada etapa.

3.2.1.3. Cálculo de la birrazón λ_1 en la fotografía

Sean $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$ y $\mathbf{U}^{(5)}$, cinco puntos en la fotografía. Entonces, seleccionando a $\mathbf{U}^{(1)}$ como vértice; se forma un lápiz de líneas que pasa por los puntos $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$ y $\mathbf{U}^{(5)}$. Este lápiz tiene una birrazón λ_1 , la cual se calcula de la siguiente forma, ver Sección 2.1.4:

$$\lambda_1 = \left[\mathbf{U}^{(1)}; \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}, \mathbf{U}^{(5)} \right],$$

así:

$$\lambda_1 = \frac{\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(2)} & \mathbf{U}^{(4)} \\ \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(2)} & \mathbf{U}^{(5)} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(3)} & \mathbf{U}^{(5)} \\ \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(3)} & \mathbf{U}^{(4)} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(2)} & \mathbf{U}^{(4)} \\ \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(2)} & \mathbf{U}^{(5)} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(3)} & \mathbf{U}^{(4)} \\ \mathbf{U}^{(1)} & \mathbf{U}^{(3)} & \mathbf{U}^{(5)} \end{array} \right|}.$$

Entonces, λ_1 es la birrazón del lápiz de líneas que pasa por $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$, $\mathbf{U}^{(5)}$ y tiene como vértice al punto $\mathbf{U}^{(1)}$.

3.2.1.4. Definir un plano $\Pi^{(0)}$ que no pase por el punto $\mathbf{X}^{(1)}$.

Se requiere buscar un plano $\Pi^{(0)} = [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}, \pi_4^{(0)}]^T$; que intersecte a la línea de vista de $\mathbf{X}^{(1)}$, en un punto diferente a $\mathbf{X}^{(1)}$. Por lo tanto, el plano $\Pi^{(0)}$ satisface la siguiente ecuación:

$$(\Pi^{(0)})^T \mathbf{X}^{(1)} \neq 0. \quad (17)$$

Para simplificar los cálculos para el siguiente paso; se selecciona, sin pérdida de generalidad, un plano que mantenga la escala en las primeras dos coordenadas de un punto; es decir un plano cuya ecuación en forma no homogénea es:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Así, el plano está determinado por los coeficientes $\pi_1^{(0)} = 0$, $\pi_2^{(0)} = 0$, $\pi_3^{(0)} = 1$ y $\pi_4^{(0)} = -\alpha$. Y por lo tanto, puede ser escrito como un vector homogéneo de la siguiente forma:

$$\Pi^{(0)} = [0, 0, 1, -\alpha]^T. \quad (18)$$

Además, para que este plano satisfaga la Ecuación (17); α debe ser diferente de $x_3^{(1)}$.

Debido a que existe una transformación proyectiva, que nos mapea cualquier plano de \mathbb{P}^2 en otro plano de \mathbb{P}^2 . Entonces, la elección del plano definido por la Ecuación (18) no afecta la generalidad del método, solamente evitará el tener que realizar cambios de variable en la etapa siguiente.

De esta forma, hemos elegido el plano $\Pi^{(0)} = [0, 0, 1, -\alpha]^T$, con $\alpha \neq x_3^{(1)}$; al cual no pertenece el punto $\mathbf{X}^{(1)}$.

3.2.1.5. Cálculo de la ecuación de una cónica Q_1 , definida por la birrazón λ_1 ; y que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$

Lo primero que se requiere calcular en este punto, son las ecuaciones de las líneas $L_{(2)}$ a $L_{(5)}$, este cálculo se realiza mediante su matriz de Plücker, ver Sección 2.4.1. Así, para la línea L_2 tenemos que:

$$L_2 = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{X}^{(2)})^T - \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{X}^{(1)})^T,$$

entonces:

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(2)} & l_{13}^{(2)} & l_{14}^{(2)} \\ l_{21}^{(2)} & 0 & l_{23}^{(2)} & -l_{42}^{(2)} \\ -l_{13}^{(2)} & -l_{23}^{(2)} & 0 & l_{34}^{(2)} \\ -l_{14}^{(2)} & l_{42}^{(2)} & -l_{34}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para la línea L_3 :

$$L_3 = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{X}^{(3)})^T - \mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{X}^{(1)})^T,$$

entonces:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(3)} & l_{13}^{(3)} & l_{14}^{(3)} \\ l_{21}^{(3)} & 0 & l_{23}^{(3)} & -l_{42}^{(3)} \\ -l_{13}^{(3)} & -l_{23}^{(3)} & 0 & l_{34}^{(3)} \\ -l_{14}^{(3)} & l_{42}^{(3)} & -l_{34}^{(3)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para la línea L_4 :

$$L_4 = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{X}^{(4)})^T - \mathbf{X}^{(4)}(\mathbf{X}^{(1)})^T,$$

entonces:

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(4)} & l_{13}^{(4)} & l_{14}^{(4)} \\ l_{21}^{(4)} & 0 & l_{23}^{(4)} & -l_{42}^{(4)} \\ -l_{13}^{(4)} & -l_{23}^{(4)} & 0 & l_{34}^{(4)} \\ -l_{14}^{(4)} & l_{42}^{(4)} & -l_{34}^{(4)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para la línea L_5 tenemos que:

$$L_5 = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{X}^{(5)})^T - \mathbf{X}^{(5)}(\mathbf{X}^{(1)})^T,$$

entonces:

$$L_5 = \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(5)} & l_{13}^{(5)} & l_{14}^{(5)} \\ l_{21}^{(5)} & 0 & l_{23}^{(5)} & -l_{42}^{(5)} \\ -l_{13}^{(5)} & -l_{23}^{(5)} & 0 & l_{34}^{(5)} \\ -l_{14}^{(5)} & l_{42}^{(5)} & -l_{34}^{(5)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, como vimos en la Sección 3.2.1.1; la proyección de estas líneas tridimensionales sobre la fotografía, es un lápiz de líneas cuya birrazón es λ_1 .

Además, la proyección de las líneas L_2, L_3, L_4 y L_5 sobre el plano $\Pi^{(0)}$ son las líneas l_{02}, l_{03}, l_{04} y l_{05} . Las cuales forman un lápiz de líneas cuya birrazón es también λ_1 , y cuyo vértice pertenece a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$; como se muestra en la Figura 11. Entonces, la birrazón del lápiz de líneas l_{02}, l_{03}, l_{04} y l_{05} es:

$$\lambda_1 = [\mathbf{V}^{(1)}; \mathbf{V}^{(2)}, \mathbf{V}^{(3)}, \mathbf{V}^{(4)}, \mathbf{V}^{(5)}]. \quad (19)$$

Donde $\mathbf{V}^{(1)} \in \Pi^{(0)}$ es el vértice del lápiz de líneas, $\mathbf{V}^{(2)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{02} , $\mathbf{V}^{(3)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{03} , $\mathbf{V}^{(4)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{04} , y $\mathbf{V}^{(5)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{05} .

Como se explicó en la Sección 3.2.1.1; la intersección del plano $\Pi^{(0)}$ con cada línea tridimensional L_2, L_3, L_4 y L_5 ; es un punto que pertenece a la línea $l_{02}, l_{03}, l_{04}, l_{05}$, respectivamente. Por lo tanto, los puntos $\mathbf{V}^{(2)}, \mathbf{V}^{(3)}, \mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(5)}$; se calculan utilizando el operador intersección del álgebra de Grassmann-Cayley. Así, se puede aplicar la propiedad de incidencia de un plano con una línea tridimensional, como se explicó en la Sección 2.4.2.

Dado que, los puntos $\mathbf{V}^{(i)}$ pertenecen al plano $\Pi^{(0)}$; entonces, son representados por un vector de coordenadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}^{(i)} = [v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, 1]^T.$$

La intersección de un plano con una línea, donde ambos pertenecen a un espacio tridimensional; nos proporciona un punto $\mathbf{X}^{(i)}$. El cual es representado por medio de un vector de coordenadas, de un espacio tridimensional. Para expresar este punto sobre el plano $\Pi^{(0)}$ debemos utilizar la información conocida acerca del plano $\Pi^{(0)}$. En nuestro caso, la elección del plano $\Pi^{(0)} = [0 \ 0 \ 1 \ -\alpha]^T$, nos permite saber que: todos los puntos que pertenecen a este plano tienen en su tercera coordenada un valor α .

Por lo tanto, el punto tridimensional donde se intersecta el plano $\Pi^{(0)}$ con la línea L_2 es:

$$\mathbf{x}^{(7)} = L_2 \triangle \Pi^{(0)}.$$

Utilizando la representación de la línea mediante la matriz de Plücker tenemos que:

$$\mathbf{x}^{(7)} = \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(2)} & l_{13}^{(2)} & l_{14}^{(2)} \\ l_{21}^{(2)} & 0 & l_{23}^{(2)} & -l_{42}^{(2)} \\ -l_{13}^{(2)} & -l_{23}^{(2)} & 0 & l_{34}^{(2)} \\ -l_{14}^{(2)} & l_{42}^{(2)} & -l_{34}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{x}^{(7)} = \begin{bmatrix} l_{13}^{(2)} - \alpha l_{14}^{(2)} \\ l_{23}^{(2)} + \alpha l_{42}^{(2)} \\ -\alpha l_{34}^{(2)} \\ -l_{34}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

De forma equivalente, dividiendo entre la componente $x_4^{(7)}$, podemos escribir:

$$\mathbf{x}^{(7)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(2)} - \alpha l_{14}^{(2)}}{l_{34}^{(2)}} \\ -\frac{l_{23}^{(2)} + \alpha l_{42}^{(2)}}{l_{34}^{(2)}} \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Y por lo tanto, el punto que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$ es:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{l_{13}^{(2)} - \alpha l_{14}^{(2)}}{\alpha l_{34}^{(2)}} \\ -\frac{l_{23}^{(2)} + \alpha l_{42}^{(2)}}{\alpha l_{34}^{(2)}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Realizando un análisis similar tenemos que:

El punto tridimensional donde se intersecta el plano $\Pi^{(0)}$ con la línea L_3 es:

$$\mathbf{x}^{(8)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(3)} - \alpha l_{14}^{(3)}}{l_{34}^{(3)}} \\ -\frac{l_{23}^{(3)} + \alpha l_{42}^{(3)}}{l_{34}^{(3)}} \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Y por lo tanto, el punto que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$ es:

$$\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(3)} - \alpha l_{14}^{(3)}}{\alpha l_{34}^{(3)}} \\ -\frac{l_{23}^{(3)} + \alpha l_{42}^{(3)}}{\alpha l_{34}^{(3)}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El punto tridimensional donde se intersecta el plano $\Pi^{(0)}$ con la línea L_4 es:

$$\mathbf{x}^{(9)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(4)} - \alpha l_{14}^{(4)}}{l_{34}^{(4)}} \\ -\frac{l_{23}^{(4)} + \alpha l_{42}^{(4)}}{l_{34}^{(4)}} \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Y por lo tanto, el punto que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$ es:

$$\mathbf{v}^{(4)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(4)} - \alpha l_{14}^{(4)}}{\alpha l_{34}^{(4)}} \\ -\frac{l_{23}^{(4)} + \alpha l_{42}^{(4)}}{\alpha l_{34}^{(4)}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El punto tridimensional donde se intersecta el plano $\Pi^{(0)}$ con la línea L_5 es:

$$\mathbf{x}^{(10)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(5)} - \alpha l_{14}^{(5)}}{l_{34}^{(5)}} \\ -\frac{l_{23}^{(5)} + \alpha l_{42}^{(5)}}{l_{34}^{(5)}} \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Y por lo tanto, el punto que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$ es:

$$\mathbf{V}^{(5)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(5)} - \alpha l_{14}^{(5)}}{\alpha l_{34}^{(5)}} \\ -\frac{l_{23}^{(5)} + \alpha l_{42}^{(5)}}{\alpha l_{34}^{(5)}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el punto $\mathbf{V}^{(1)} \in \Pi^{(0)}$ se calcula a partir de la Ecuación (19):

$$\lambda_1 = [\mathbf{V}^{(1)}; \mathbf{V}^{(2)}, \mathbf{V}^{(3)}, \mathbf{V}^{(4)}, \mathbf{V}^{(5)}].$$

Expresando la ecuación anterior en términos de determinantes, tenemos:

$$\lambda_1 = \frac{|\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(4)}| |\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(5)}|}{|\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(5)}| |\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(4)}|}.$$

La solución a esta ecuación, es el vértice del lápiz de líneas; es decir, el punto $\mathbf{V}^{(1)}$. En otras palabras, lo que buscamos es: el punto que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$, y que tiene birrazón λ_1 con respecto al lápiz de líneas al cual pertenecen los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(5)}$. De acuerdo al Teorema de Chasles, el punto $\mathbf{V}^{(1)}$ se encuentra sobre una cónica, ver Sección 2.1.6. Dicha cónica la denotamos como \mathbf{Q}_1 , y está definida por la siguiente ecuación:

$$|\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(4)}| |\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(5)}| - \lambda_1 |\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(5)}| |\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(4)}| = 0. \quad (20)$$

Donde $|\mathbf{V}^{(i)}\mathbf{V}^{(j)}\mathbf{V}^{(k)}|$, es el determinante de la matriz formada por los puntos $\mathbf{V}^{(i)}$, $\mathbf{V}^{(j)}$ y $\mathbf{V}^{(k)}$ de la siguiente forma:

$$|\mathbf{V}^{(i)}\mathbf{V}^{(j)}\mathbf{V}^{(k)}| = \left| \begin{bmatrix} v_1^{(i)} & v_1^{(j)} & v_1^{(k)} \\ v_2^{(i)} & v_2^{(j)} & v_2^{(k)} \\ v_3^{(i)} & v_3^{(j)} & v_3^{(k)} \end{bmatrix} \right|.$$

Donde $v_1^{(i)}$, $v_2^{(i)}$ y $v_3^{(i)}$ son las coordenadas homogéneas de un punto $\mathbf{V}^{(i)}$.

Desarrollando la Ecuación (20), obtenemos la ecuación de la cónica \mathbf{Q}_1 en su forma general:

$$A_1(v_1^{(i)})^2 + B_1v_1^{(i)}v_2^{(i)} + C_1(v_2^{(i)})^2 + D_1v_1^{(i)}v_3^{(i)} + E_1v_2^{(i)}v_3^{(i)} + F_1(v_3^{(i)})^2 = 0.$$

Donde:

$$A_1 = \lambda_1 \left[(v_2^{(2)} v_3^{(5)}) - (v_2^{(5)} v_3^{(2)}) \right] \left[(v_2^{(3)} v_3^{(4)}) - (v_2^{(4)} v_3^{(3)}) \right] + \\ - \left[(v_2^{(2)} v_3^{(4)}) - (v_2^{(4)} v_3^{(2)}) \right] \left[(v_2^{(3)} v_3^{(5)}) - (v_2^{(5)} v_3^{(3)}) \right],$$

$$B_1 = \lambda_1 \left[(v_2^{(2)} v_3^{(5)}) - (v_2^{(5)} v_3^{(2)}) \right] \left[(-v_1^{(3)} v_3^{(4)}) + (v_1^{(4)} v_3^{(3)}) \right] + \\ + \lambda_1 \left[(-v_1^{(2)} v_3^{(5)}) + (v_1^{(5)} v_3^{(2)}) \right] \left[(v_2^{(3)} v_3^{(4)}) - (v_2^{(4)} v_3^{(3)}) \right] + \\ - \left[(v_2^{(2)} v_3^{(4)}) - (v_2^{(4)} v_3^{(2)}) \right] \left[(-v_1^{(3)} v_3^{(5)}) + (v_1^{(5)} v_3^{(3)}) \right] + \\ - \left[(v_2^{(3)} v_3^{(5)}) - (v_2^{(5)} v_3^{(3)}) \right] \left[(-v_1^{(2)} v_3^{(4)}) + (v_1^{(4)} v_3^{(2)}) \right],$$

$$C_1 = \lambda_1 \left[(-v_1^{(2)} v_3^{(5)}) + (v_1^{(5)} v_3^{(2)}) \right] \left[(-v_1^{(3)} v_3^{(4)}) + (v_1^{(4)} v_3^{(3)}) \right] + \\ - \left[(-v_1^{(2)} v_3^{(4)}) + (v_1^{(4)} v_3^{(2)}) \right] \left[(-v_1^{(3)} v_3^{(5)}) + (v_1^{(5)} v_3^{(3)}) \right],$$

$$D_1 = \lambda_1 \left[(v_2^{(2)} v_3^{(5)}) - (v_2^{(5)} v_3^{(2)}) \right] \left[(v_1^{(3)} v_2^{(4)}) - (v_1^{(4)} v_2^{(3)}) \right] + \\ + \lambda_1 \left[(v_1^{(2)} v_2^{(5)}) - (v_1^{(5)} v_2^{(2)}) \right] \left[(v_2^{(3)} v_3^{(4)}) - (v_2^{(4)} v_3^{(3)}) \right] + \\ - \left[(v_2^{(2)} v_3^{(4)}) - (v_2^{(4)} v_3^{(2)}) \right] \left[(v_1^{(3)} v_2^{(5)}) - (v_1^{(5)} v_2^{(3)}) \right] + \\ - \left[(v_1^{(2)} v_2^{(4)}) - (v_1^{(4)} v_2^{(2)}) \right] \left[(v_2^{(3)} v_3^{(5)}) - (v_2^{(5)} v_3^{(3)}) \right],$$

$$E_1 = \lambda_1 \left[(-v_1^{(2)} v_3^{(5)}) + (v_1^{(5)} v_3^{(2)}) \right] \left[(v_1^{(3)} v_2^{(4)}) - (v_1^{(4)} v_2^{(3)}) \right] + \\ + \lambda_1 \left[(v_1^{(2)} v_2^{(5)}) - (v_1^{(5)} v_2^{(2)}) \right] \left[(-v_1^{(3)} v_3^{(4)}) + (v_1^{(4)} v_3^{(3)}) \right] + \\ - \left[(-v_1^{(2)} v_3^{(4)}) + (v_1^{(4)} v_3^{(2)}) \right] \left[(v_1^{(3)} v_2^{(5)}) - (v_1^{(5)} v_2^{(3)}) \right] + \\ - \left[(-v_1^{(3)} v_3^{(5)}) + (v_1^{(5)} v_3^{(3)}) \right] \left[(v_1^{(2)} v_2^{(4)}) - (v_1^{(4)} v_2^{(2)}) \right],$$

y

$$F_1 = \lambda_1 \left[(v_1^{(2)} v_2^{(5)}) - (v_1^{(5)} v_2^{(2)}) \right] \left[(v_1^{(3)} v_2^{(4)}) - (v_1^{(4)} v_2^{(3)}) \right] + \\ - \left[(v_1^{(2)} v_2^{(4)}) - (v_1^{(4)} v_2^{(2)}) \right] \left[(v_1^{(3)} v_2^{(5)}) - (v_1^{(5)} v_2^{(3)}) \right].$$

De acuerdo a lo establecido en la Sección 2.1.5; esta ecuación puede ser escrita en forma matri-

cial, de la siguiente manera:

$$(\mathbf{V}^{(i)})^T Q_1 \mathbf{V}^{(i)} = 0$$

donde:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{B_1}{2} & \frac{D_1}{2} \\ \frac{B_1}{2} & C_1 & \frac{E_1}{2} \\ \frac{D_1}{2} & \frac{E_1}{2} & F_1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, se plantea que de entre todos los puntos que pertenecen a la cónica Q_1 ; la pregunta que debemos resolver es: ¿Cuál es el punto que pertenece a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$?, ver Figura 13.

Para encontrar este punto, debemos realizar una construcción igual a la anterior: Primero, debemos calcular la birrazón, en la fotografía, de un lápiz de líneas cuyo vértice es el punto $\mathbf{U}^{(1)}$ y que pasa por los puntos $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$ y otro punto $\mathbf{U}^{(6)}$ diferente de $\mathbf{U}^{(5)}$. Después, debemos calcular la intersección de las líneas tridimensionales con el plano $\Pi^{(0)}$, definido anteriormente. Así, obtendremos la ecuación de otra cónica sobre el plano $\Pi^{(0)}$. La intersección de las dos cónicas son los puntos $\mathbf{V}^{(1)}$, $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$ y $\mathbf{V}^{(4)}$. A continuación se explica a detalle cada paso para calcular la segunda cónica.

3.2.1.6. Cálculo de la birrazón λ_2 en la fotografía

Sean $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$ y $\mathbf{U}^{(4)}$ los mismos cuatro puntos de la fotografía, utilizados en las secciones anteriores. Además, sea $\mathbf{U}^{(6)}$ un punto en la fotografía, diferente al punto $\mathbf{U}^{(5)}$. Así, seleccionando a $\mathbf{U}^{(1)}$ como vértice, podemos formar un lápiz de líneas que pase por los puntos $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$ y $\mathbf{U}^{(6)}$. Este lápiz tiene una birrazón λ_2 que se calcula de la siguiente forma, ver Sección 2.1.4:

$$\lambda_2 = \left[\mathbf{U}^{(1)}; \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}, \mathbf{U}^{(6)} \right],$$

entonces:

$$\lambda_2 = \frac{\left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{U}^{(4)} \right| \left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{U}^{(6)} \right|}{\left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{U}^{(6)} \right| \left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{U}^{(4)} \right|}.$$

De esta forma, λ_2 es la birrazón del lápiz de líneas que pasa por $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$, $\mathbf{U}^{(6)}$; y tiene como vértice al punto $\mathbf{U}^{(1)}$.

3.2.1.7. Cálculo de la cónica Q_2 , definida por la birrazón λ_2 ; y que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$.

Las líneas L_2 , L_3 y L_4 fueron calculadas anteriormente, por lo que sólo nos resta calcular la matriz de Plücker de la línea L_6 :

$$L_6 = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{X}^{(6)})^T - \mathbf{X}^{(6)}(\mathbf{X}^{(1)})^T$$

así:

$$L_6 = \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(6)} & l_{13}^{(6)} & l_{14}^{(6)} \\ l_{21}^{(6)} & 0 & l_{23}^{(6)} & -l_{42}^{(6)} \\ -l_{13}^{(6)} & -l_{23}^{(6)} & 0 & l_{34}^{(6)} \\ -l_{14}^{(6)} & l_{42}^{(6)} & -l_{34}^{(6)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, como vimos en la sección 3.2.1.1; la proyección de estas líneas tridimensionales sobre la fotografía, forman un lápiz de líneas cuya birrazón es λ_2 .

Además, la proyección de las líneas L_2 , L_3 , L_4 y L_6 sobre el plano $\Pi^{(0)}$ son las líneas l_{02} , l_{03} , l_{04} y l_{06} ; éstas forman un lápiz de líneas cuya birrazón es también λ_2 y cuyo vértice pertenece a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$. Entonces, la birrazón del lápiz de líneas l_{02} , l_{03} , l_{04} y l_{06} es:

$$\lambda_2 = [\mathbf{V}^{(1)}; \mathbf{V}^{(2)}, \mathbf{V}^{(3)}, \mathbf{V}^{(4)}, \mathbf{V}^{(6)}] \quad (21)$$

donde $\mathbf{V}^{(1)} \in \Pi^{(0)}$ es el vértice del lápiz de líneas, $\mathbf{V}^{(2)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{02} , $\mathbf{V}^{(3)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{03} , $\mathbf{V}^{(4)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{04} y $\mathbf{V}^{(6)} \in \Pi^{(0)}$ es un punto que pertenece a la línea l_{06} .

Como se explicó en la Sección 3.2.1.1, la intersección del plano $\Pi^{(0)}$ con cada línea tridimensional L_2 , L_3 , L_4 y L_6 ; es un punto que pertenece a la línea l_2 , l_3 , l_4 , l_6 , respectivamente. Por lo tanto, los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(6)}$; se calculan utilizando el operador intersección del álgebra de Grassmann-Cayley. Así, se puede aplicar la propiedad de incidencia de un plano con una línea tridimensional, como se explicó en la Sección 2.4.2.

La intersección de un plano con una línea, donde ambos pertenecen a un espacio tridimensional; nos proporciona un punto $X^{(i)}$, representado por medio de un vector de coordenadas, de un espacio tridimensional. Para expresar este punto sobre el plano $\Pi^{(0)}$, debemos utilizar la información conocida acerca de éste plano. La elección del plano $\Pi^{(0)} = [0, 0, 1, -\alpha]^T$, nos permite saber

que: todos los puntos que pertenecen a este plano tienen en su tercera coordenada un valor α .

Los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$ y $\mathbf{V}^{(4)}$ ya fueron calculados anteriormente, por lo que sólo nos resta calcular el punto $\mathbf{V}^{(6)}$.

Por lo tanto, el punto en el espacio tridimensional, donde se intersecta el plano $\Pi^{(0)}$ con la línea L_6 es:

$$\mathbf{X}^{(11)} = L_6 \triangle \Pi^{(0)}.$$

Utilizando la representación de la línea mediante la matriz de Plücker, tenemos que:

$$\mathbf{X}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(2)} & l_{13}^{(2)} & l_{14}^{(2)} \\ l_{21}^{(2)} & 0 & l_{23}^{(2)} & -l_{42}^{(2)} \\ -l_{13}^{(2)} & -l_{23}^{(2)} & 0 & l_{34}^{(2)} \\ -l_{14}^{(2)} & l_{42}^{(2)} & -l_{34}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{X}^{(11)} = \begin{bmatrix} l_{13}^{(6)} - \alpha l_{14}^{(6)} \\ l_{23}^{(6)} + \alpha l_{42}^{(6)} \\ -\alpha l_{34}^{(6)} \\ -l_{34}^{(6)} \end{bmatrix}.$$

De forma equivalente, podemos escribir:

$$\mathbf{X}^{(11)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(6)} - \alpha l_{14}^{(6)}}{l_{34}^{(6)}} \\ -\frac{l_{23}^{(6)} + \alpha l_{42}^{(6)}}{l_{34}^{(6)}} \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Y por lo tanto, el punto que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$ es:

$$\mathbf{V}^{(6)} = \begin{bmatrix} -\frac{l_{13}^{(6)} - \alpha l_{14}^{(6)}}{\alpha l_{34}^{(6)}} \\ -\frac{l_{23}^{(6)} + \alpha l_{42}^{(6)}}{\alpha l_{34}^{(6)}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el punto $\mathbf{V}^{(1)} \in \Pi^{(0)}$, se calcula a partir de la Ecuación (21):

$$\lambda_2 = \left[\mathbf{V}^{(1)}; \mathbf{V}^{(2)}, \mathbf{V}^{(3)}, \mathbf{V}^{(4)}, \mathbf{V}^{(6)} \right],$$

así:

$$\lambda_2 = \frac{\left| \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(4)} \right| \left| \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(6)} \right|}{\left| \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(6)} \right| \left| \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(4)} \right|}.$$

La solución a esta ecuación, es el vértice del lápiz de líneas; es decir, el punto $\mathbf{V}^{(1)}$. En otras palabras, lo que buscamos es: el punto que pertenece al plano $\Pi^{(0)}$, y que tiene birrazón λ_2 con respecto al lápiz de líneas al cual pertenecen los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(6)}$. De acuerdo al Teorema de Chasles, el punto $\mathbf{V}^{(1)}$ se encuentra sobre una cónica, ver Sección 2.1.6. Dicha cónica la denotamos como \mathbf{Q}_2 , y está definida por la siguiente ecuación:

$$\left| \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(4)} \right| \left| \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(6)} \right| - \lambda_2 \left| \mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(6)} \right| \left| \mathbf{V}^{(2)}\mathbf{V}^{(3)}\mathbf{V}^{(4)} \right| = 0. \quad (22)$$

Donde $\left| \mathbf{V}^{(i)}\mathbf{V}^{(j)}\mathbf{V}^{(k)} \right|$, es el determinante de la matriz formada por los puntos $\mathbf{V}^{(i)}$, $\mathbf{V}^{(j)}$ y $\mathbf{V}^{(k)}$. De acuerdo a lo establecido en la Sección 2.1.5; esta ecuación puede ser escrita de forma matricial, de la siguiente manera:

$$(\mathbf{V}^{(i)})^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{V}^{(i)} = 0$$

donde:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} A_2 & \frac{B_2}{2} & \frac{D_2}{2} \\ \frac{B_2}{2} & C_2 & \frac{E_2}{2} \\ \frac{D_2}{2} & \frac{E_2}{2} & F_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el punto $\mathbf{V}^{(1)} \in \Pi^{(0)}$, pertenece a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$. Además, pertenece a las cónicas \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 . Por lo tanto, es uno de los puntos en los cuales estas cónicas se intersectan, como se muestra en la Figura 14.

3.2.1.8. Intersección de las cónicas \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2

Una vez calculadas las ecuaciones de ambas cónicas, el siguiente paso es calcular la intersección de ellas. Por la manera en la que fueron planteadas y calculadas las cónicas, sabemos que se van a intersectar en los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y en el punto $\mathbf{V}^{(1)}$ que representa la intersección de ambas cónicas y es el punto que pertenece a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$.

Para simplificar la solución de este par de ecuaciones, se utiliza un teorema proyectivo: un cambio de un sistema coordenado proyectivo a otro, transforma una cónica en otra cónica, ver Sección 2.1.5. De ésta forma, transformaremos las cónicas \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 para que los puntos de la base canónica pertenezcan a la cónica \mathbf{Q}_1 . Así, el sistema de ecuaciones será más sencillo de resolver. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones es importante calcular la inversa de la transformación para obtener el punto $\mathbf{V}^{(1)}$ expresado en términos de la base proyectiva del plano $\Pi^{(0)}$, y posteriormente cambiarlo a coordenadas del espacio tridimensional. El desarrollo detallado se presenta a continuación. Sean $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$, $\mathbf{V}^{(5)}$ y $\mathbf{V}^{(6)}$, los cinco puntos calculados con anterioridad. A continuación se calcula la matriz P , asociada con la transformación proyectiva, que nos mapea los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(5)}$ en la base canónica.

De esta forma, el punto $\mathbf{V}^{(2)}$ es transformado por la matriz P , en el punto $\mathbf{W}^{(2)} = [1, 0, 0]^T$:

$$[1, 0, 0]^T = P\mathbf{V}^{(2)}.$$

Desarrollando la ecuación matricial anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

De forma similar, el punto $\mathbf{V}^{(3)}$ es transformado por la matriz P , en el punto $\mathbf{W}^{(3)} = [0, 1, 0]^T$:

$$[0, 1, 0]^T = P\mathbf{V}^{(3)}.$$

Desarrollando la ecuación matricial anterior:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

De forma similar, el punto $\mathbf{V}^{(4)}$ es transformado por la matriz P , en el punto $\mathbf{W}^{(4)} = [0, 0, 1]^T$:

$$[0, 0, 1]^T = P\mathbf{V}^{(4)}.$$

Desarrollando la ecuación matricial anterior:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(4)} \\ v_2^{(4)} \\ v_3^{(4)} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Y finalmente, el punto $\mathbf{V}^{(5)}$ es transformado por la matriz P , en el punto $\mathbf{W}^{(5)} = [1, 1, 1]^T$:

$$[1, 1, 1]^T = P\mathbf{V}^{(5)}.$$

Desarrollando la ecuación matricial anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(5)} \\ v_2^{(5)} \\ v_3^{(5)} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Las Ecuaciones (23) a (26) forman el siguiente sistema, escrito en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & v_3^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & v_3^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & v_3^{(2)} \\ v_1^{(3)} & v_2^{(3)} & v_3^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1^{(3)} & v_2^{(3)} & v_3^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1^{(3)} & v_2^{(3)} & v_3^{(3)} \\ v_1^{(4)} & v_2^{(4)} & v_3^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1^{(4)} & v_2^{(4)} & v_3^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1^{(4)} & v_2^{(4)} & v_3^{(4)} \\ v_1^{(5)} & v_2^{(5)} & v_3^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1^{(5)} & v_2^{(5)} & v_3^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1^{(5)} & v_2^{(5)} & v_3^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix}.$$

Entonces, los coeficientes p_{ij} de la matriz de transformación P , se calculan solucionando la ecuación anterior.

La inversa de la matriz P , nos transforma la base canónica en los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(5)}$.

De acuerdo con lo visto en la Sección 2.1.5; al aplicar la transformación P a la matriz Q_1 , la

cual está asociada a la cónica \mathbf{Q}_1 , obtenemos una cónica \mathbf{Q}'_1 . Donde los puntos que forman la base canónica: $\mathbf{W}^{(2)} = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{W}^{(3)} = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{W}^{(4)} = [0, 0, 1]^T$ y $\mathbf{W}^{(5)} = [1, 1, 1]^T$; pertenecen a la cónica \mathbf{Q}'_1 . Entonces, la ecuación de la cónica \mathbf{Q}'_1 en su forma general es:

$$A'_1(w_1^{(i)})^2 + B'_1w_1^{(i)}w_2^{(i)} + C'_1(w_2^{(i)})^2 + D'_1w_1^{(i)}w_3^{(i)} + E'_1w_2^{(i)}w_3^{(i)} + F'_1(w_3^{(i)})^2 = 0.$$

De acuerdo con lo visto en la Sección 2.1.5, una cónica que pasa por los puntos que forman la base canónica, satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A'_1 &= 0 \\ C'_1 &= 0 \\ F'_1 &= 0 \\ B'_1 + D'_1 + F'_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación general de la cónica \mathbf{Q}'_1 se reduce a la siguiente ecuación:

$$B'_1w_1^{(i)}w_2^{(i)} + D'_1w_1^{(i)}w_3^{(i)} + E'_1w_2^{(i)}w_3^{(i)} = 0. \quad (27)$$

Entonces, aplicando la transformación P a la matriz Q_2 , asociada a la cónica \mathbf{Q}_2 ; se obtiene una cónica \mathbf{Q}'_2 . La cual pasa por los puntos $\mathbf{W}^{(2)} = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{W}^{(3)} = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{W}^{(4)} = [0, 0, 1]^T$ y $\mathbf{W}^{(6)} = P\mathbf{V}^{(6)}$.

Así, la cónica \mathbf{Q}'_2 , tiene asociada una matriz Q'_2 :

$$Q'_2 = P^T Q_2 P.$$

Como se explicó anteriormente, la cónica \mathbf{Q}'_2 , al igual que la cónica \mathbf{Q}'_1 , contiene a los puntos: $[1 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 1 \ 0]^T$ y $[0 \ 0 \ 1]^T$ y satisface las ecuaciones:

$$\begin{aligned} A'_2 &= 0 \\ C'_2 &= 0 \\ F'_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación general de la cónica \mathcal{Q}'_2 , se reduce a la siguiente ecuación:

$$B'_2 w_1^{(i)} w_2^{(i)} + D'_2 w_1^{(i)} w_3^{(i)} + E'_2 w_2^{(i)} w_3^{(i)} = 0. \quad (28)$$

Por la forma en que fueron construidas, se intersectan en los puntos $\mathbf{W}^{(2)} = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{W}^{(3)} = [0 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{W}^{(4)} = [0 \ 0 \ 1]^T$ y en un cuarto punto $\mathbf{W}^{(1)} = [w_1^{(1)} \ w_2^{(1)} \ w_3^{(1)}]^T$. éstos cuatro puntos satisfacen de forma simultánea las birrazones λ_1 y λ_2 . Dado que los puntos $\mathbf{W}^{(2)}$, $\mathbf{W}^{(3)}$ y $\mathbf{W}^{(4)}$ corresponden a las homografías de los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$ y $\mathbf{V}^{(4)}$, entonces el punto $\mathbf{W}^{(1)}$ corresponde al punto $\mathbf{V}^{(1)}$ que es el punto de intersección en el plano $\Pi^{(0)}$ de la línea de vista de $\mathbf{X}^{(1)}$ con $\Pi^{(0)}$.

Calcularemos entonces a continuación el punto $\mathbf{W}^{(1)}$ y posteriormente lo transformaremos usando la inversa de la matriz de transformación P para obtener así el punto $\mathbf{V}^{(1)} \in \Pi^{(0)}$.

Entonces, las cónicas \mathcal{Q}'_1 y \mathcal{Q}'_2 , forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$B'_1 w_1^{(1)} w_2^{(1)} + D'_1 w_1^{(1)} w_3^{(1)} + E'_1 w_2^{(1)} w_3^{(1)} = 0 \quad (29)$$

$$B'_2 w_1^{(1)} w_2^{(1)} + D'_2 w_1^{(1)} w_3^{(1)} + E'_2 w_2^{(1)} w_3^{(1)} = 0 \quad (30)$$

A continuación, se calcula la solución de este sistema de ecuaciones. Dado que el punto $\mathbf{W}^{(1)}$, se encuentra representado por su vector, en coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{W}^{(1)} = [w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_3^{(1)}]^T.$$

Entonces, como estamos trabajando con coordenadas homogéneas, la componente $w_3^{(1)} = 1$, ésto es equivalente a seleccionar $w_3^{(1)} = \beta$, con $\beta \in \mathbb{R}$.

Cuando $w_3^{(1)} = 1$, las Ecuaciones (29) y (30) se reducen a:

$$B'_1 w_1^{(1)} w_2^{(1)} + D'_1 w_1^{(1)} + E'_1 w_2^{(1)} = 0$$

$$B'_2 w_1^{(1)} w_2^{(1)} + D'_2 w_1^{(1)} + E'_2 w_2^{(1)} = 0$$

Despejando $w_1^{(1)}$, de la primera ecuación del sistema, obtenemos la siguiente ecuación:

$$w_1^{(1)} = -\frac{E_1' w_2^{(1)}}{B_1' w_2^{(1)} + D_1'} \quad (31)$$

Despejando $w_1^{(1)}$, de la segunda ecuación del sistema, obtenemos la siguiente ecuación:

$$w_1^{(1)} = -\frac{E_2' w_2^{(1)}}{B_2' w_2^{(1)} + D_2'} \quad (32)$$

Entonces las ecuaciones nos quedan en función de una sola variable $w_2^{(1)}$ que se pueden resolver por cualquier método, en este caso se empleó igualación dando como resultado:

$$w_2^{(1)}(E_1' B_2' w_2^{(1)} - E_2' B_1' w_2^{(1)} + E_1' D_2' - E_2' D_1') = 0. \quad (33)$$

Que es una ecuación cuadrática, la cual tiene dos soluciones:

$$w_2^{(1)} = 0 \quad (34)$$

$$w_2^{(1)} = \frac{E_2' D_1' - E_1' D_2'}{E_1' B_2' - E_2' B_1'} \quad (35)$$

Para $w_2^{(1)} = 0$, sustituimos en la Ecuación (31), obtenemos que:

$$w_1^{(1)} = 0.$$

Por lo tanto, una solución al sistema, formado por las Ecuaciones (29) y (30) es:

$$\mathbf{W}^{(1)} = [0, 0, 1]^T.$$

Para $w_2^{(1)} = \frac{E_2' D_1' - E_1' D_2'}{E_1' B_2' - E_2' B_1'}$ en la Ecuación (31), se obtiene:

$$w_1^{(1)} = -\frac{-E_2'^2 D_1' + E_2' E_1' D_2'}{B_2' D_1' E_2' - B_1' D_2' E_2'}.$$

Por lo tanto, la cuarta solución al sistema, formado por las Ecuaciones (29) y (30) es:

$$\mathbf{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{E_2'^2 D_1' + E_2' E_1' D_2'}{B_2' D_1' E_2' - B_1' D_2' E_2'} \\ \frac{E_2' D_1' - E_1' D_2'}{E_1' B_2' - E_2' B_1'} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, se han calculado las soluciones al sistema formado por las Ecuaciones (29) y (30). Esta solución, se encuentra referenciada respecto a la base canónica. Entonces, se debe realizar un cambio de base, para obtener las soluciones pero ahora con coordenadas en el plano $\Pi^{(0)}$. La transformación que realiza este cambio de base, es la inversa de la matriz P de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}^{(2)} = P^{-1} [1, 0, 0]^T,$$

$$\mathbf{V}^{(3)} = P^{-1} [0, 1, 0]^T,$$

$$\mathbf{V}^{(4)} = P^{-1} [0, 0, 1]^T,$$

y el punto calculado

$$\mathbf{V}^{(1)} = P^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{E_2'^2 D_1' + E_2' E_1' D_2'}{B_2' D_1' E_2' - B_1' D_2' E_2'} \\ \frac{E_2' D_1' - E_1' D_2'}{E_1' B_2' - E_2' B_1'} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Estos cuatro puntos: $\mathbf{V}^{(1)}$, $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$ y $\mathbf{V}^{(4)}$; pertenecen al plano $\Pi^{(0)}$. Además, satisfacen simultáneamente las birrazones λ_1 y λ_2 . Por el planteamiento geométrico inicial, el punto $\mathbf{V}^{(1)}$ pertenece a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$.

3.2.1.9. Cálculo de las coordenadas que representan al vértice del lápiz de líneas, en \mathbb{P}^3

El punto $\mathbf{V}^{(1)}$, calculado anteriormente, se encuentra expresado en coordenadas homogéneas. éstas pertenecen al plano $\Pi^{(0)}$; es decir, representan un punto en un espacio bidimensional, de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}^{(1)} = [v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}]^T.$$

Para construir la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$, necesitamos 2 puntos en coordenadas del espacio proyectivo \mathbb{P}^3 . Las coordenadas de $\mathbf{V}^{(1)}$ se encuentran en un espacio proyectivo \mathbb{P}^2 ; sin embargo, sabemos que este punto se encuentra sobre un plano $\Pi^{(0)} = [0 \ 0 \ -\frac{1}{\alpha} \ 1]^T$. Por lo tanto, podemos

encontrar sus coordenadas dentro del espacio \mathbb{P}^3 de la siguiente forma.

Un punto $\mathbf{X}^{(7)} = [x_1^{(01)}, x_2^{(01)}, x_3^{(01)}, 1]^T$, pertenece al plano $\Pi^{(0)} = [0, 0, 1, -\alpha]^T$ si:

$$[0, 0, 1, -\alpha] [x_1^{(01)}, x_2^{(01)}, x_3^{(01)}, 1]^T = 0$$

por lo tanto:

$$x_3^{(01)} = \alpha.$$

Entonces, las coordenadas de $\mathbf{V}^{(1)}$ en \mathbb{P}^3 , representan a un punto que denotamos como $\mathbf{X}^{(7)}$. Y se calculan de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}^{(7)} = \begin{bmatrix} \alpha \frac{v_1^{(1)}}{v_3^{(1)}} \\ \alpha \frac{v_2^{(1)}}{v_3^{(2)}} \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por la construcción geométrica planteada inicialmente, el punto $\mathbf{X}^{(7)}$ pertenece a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$. Además, estos dos puntos son diferentes entre si.

3.2.1.10. Cálculo de las coordenadas de la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$

Sean $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(7)}$, las coordenadas que representan a dos puntos que pertenecen a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(1)}$; a continuación, se calcula la matriz de Plücker asociada con dicha línea de vista.

Entonces, la matriz de Plücker de la línea de vista a la que pertenecen los puntos $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(7)}$, la denotamos como L_1 ; y se calcula de la siguiente forma:

$$L_1 = \mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{X}^{(7)})^T - \mathbf{X}^{(7)}(\mathbf{X}^{(1)})^T.$$

Dicha matriz, representa a la línea de vista de un punto en particular $\mathbf{X}^{(1)}$.

Con todo el procedimiento descrito anteriormente se obtiene la línea de vista de un punto del espacio tridimensional, sin embargo esto no es suficiente debido a que la cámara podría estar situada en cualquier punto sobre esa línea. Para poder calcular la posición de la cámara, es

necesario calcular cuando menos dos líneas de vista y calcular la intersección entre ellas. Por esto en la siguiente sección se describirá el procedimiento para calcular la intersección de dos líneas de vista

3.2.2. Cálculo del punto de intersección de dos líneas de vista

Siguiendo el procedimiento explicado en la sección anterior, podemos calcular la línea de vista de dos puntos diferentes. Sean L_1 y L_2 la representación en matrices de Plücker, de las líneas de vista de los puntos $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$, respectivamente. Se calcula a continuación, el punto de intersección de ambas líneas.

Por las propiedades del operador intersección, dos líneas de \mathbb{P}^3 que se intersectan satisfacen lo siguiente:

$$L_1 \triangle L_2 = 0.$$

En este caso, el operador intersección no permite calcular directamente, el extensor que representa la intersección de las dos líneas. Sin embargo, es posible calcular el punto de intersección, utilizando el operador intersección entre la línea L_2 y un plano, en este caso lo denotaremos como $\Pi^{(8)}$. Donde que $L_1 \in \Pi^{(8)}$, como se muestra en la Figura 15; es decir:

$$\mathbf{X}^{(0)} = L_2 \triangle \Pi^{(8)}.$$

Entonces, el cálculo del punto de intersección de dos líneas L_1 y L_2 , se divide en dos etapas:

1. Cálculo de un plano $\Pi^{(8)}$, tal que: $L_1 \in \Pi^{(8)}$.
2. Cálculo del punto de intersección, del plano $\Pi^{(8)}$ con la línea L_2 .

3.2.2.1. Cálculo de un plano $\Pi^{(8)}$, tal que: $L_1 \in \Pi^{(8)}$.

Un plano de \mathbb{P}^3 , se define a partir de 3 puntos que pertenecen a dicho plano. Dado que, se busca que la línea L_1 pertenezca al plano $\Pi^{(8)}$; entonces, para calcular los coeficientes que definen a este plano, se utiliza:

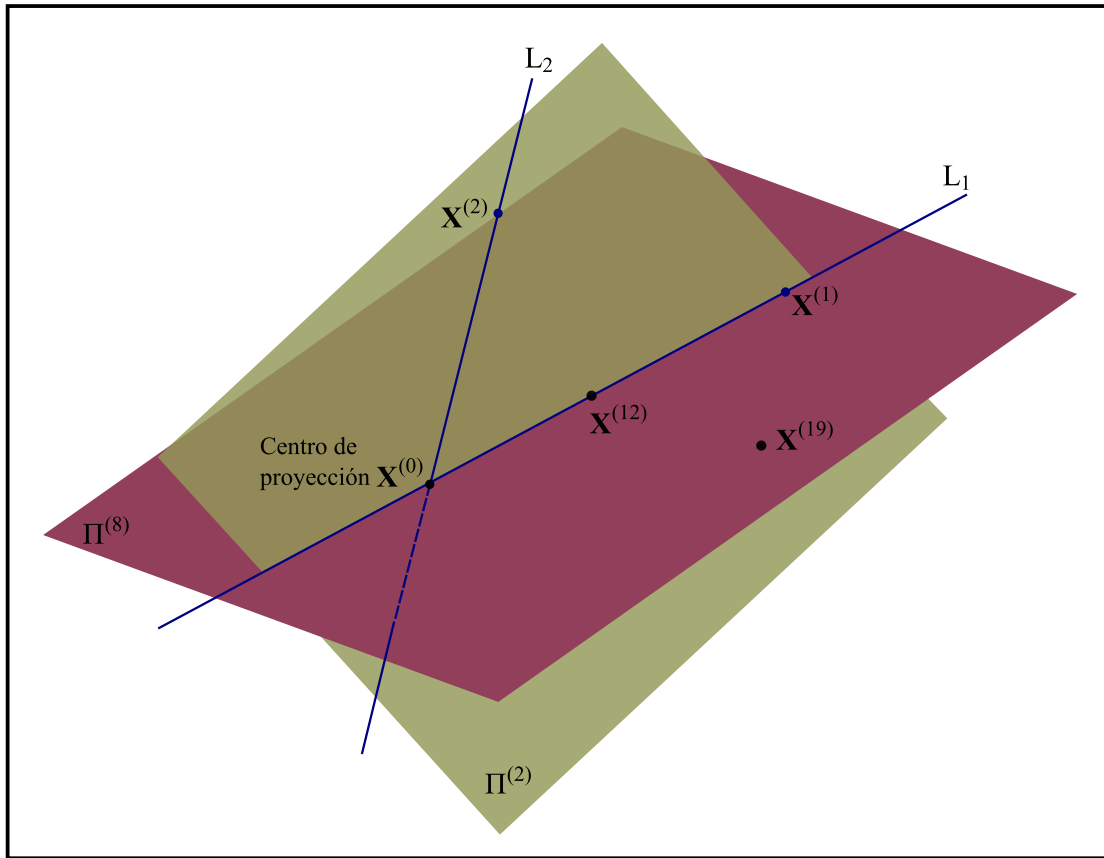


Figura 15. Intersección de las líneas de vista L_1 y L_2 .

1. Dos puntos que pertenezcan a la línea L_1 .
2. Un tercer punto seleccionado arbitrariamente, con la restricción que no pertenezca al plano definido por las líneas L_1 y L_2 .

Así, se utilizan los dos puntos con los que se calculó la matriz de Plücker de la línea L_1 . Estos puntos, se denotaron como $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(7)}$.

El tercer punto, se denota como $\mathbf{X}^{(19)}$, y no debe pertenecer al plano definido por las líneas L_1 y L_2 . Ya que, si no se satisface esta restricción; entonces, el plano $\Pi^{(8)}$ se intersectará con la línea L_2 en una infinidad de puntos. A continuación, se calcula el plano definido por las líneas L_1 y L_2 ; posteriormente, se selecciona un punto que no pertenezca a este plano.

Sea $\Pi^{(2)} = [\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \pi_3^{(2)}, \pi_4^{(2)}]$, el plano al cuál pertenecen L_1 y L_2 ; entonces, los puntos $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$ y $\mathbf{X}^{(7)}$ pertenecen a $\Pi^{(2)}$. ésto se debe a que: $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(7)} \in L_1$, y $\mathbf{X}^{(2)} \in L_2$. Entonces, estos

puntos satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\pi_1^{(2)} x_1^{(1)} + \pi_2^{(2)} x_2^{(1)} + \pi_3^{(2)} x_3^{(1)} + \pi_4^{(2)} &= 0 \\ \pi_1^{(2)} x_1^{(2)} + \pi_2^{(2)} x_2^{(2)} + \pi_3^{(2)} x_3^{(2)} + \pi_4^{(2)} &= 0 \\ \pi_1^{(2)} x_1^{(7)} + \pi_2^{(2)} x_2^{(7)} + \pi_3^{(2)} x_3^{(7)} + \pi_4^{(2)} &= 0\end{aligned}$$

Dado que, los coeficientes del plano son coordenadas homogéneas de \mathbb{P}^3 ; entonces, se establece que: $\pi_4^{(2)} = \alpha_2$, donde $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, y $\alpha_2 \neq 0$. Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\pi_1^{(2)} x_1^{(1)} + \pi_2^{(2)} x_2^{(1)} + \pi_3^{(2)} x_3^{(1)} &= -\alpha_2 \\ \pi_1^{(2)} x_1^{(2)} + \pi_2^{(2)} x_2^{(2)} + \pi_3^{(2)} x_3^{(2)} &= -\alpha_2 \\ \pi_1^{(2)} x_1^{(12)} + \pi_2^{(2)} x_2^{(7)} + \pi_3^{(2)} x_3^{(7)} &= -\alpha_2\end{aligned}$$

Reescribiendo de forma matricial, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(7)} & x_2^{(7)} & x_3^{(7)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1^{(2)} \\ \pi_2^{(2)} \\ \pi_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

La solución a este sistema de ecuaciones, son los coeficientes del plano $\Pi^{(2)}$:

$$\begin{bmatrix} \pi_1^{(2)} \\ \pi_2^{(2)} \\ \pi_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(7)} & x_2^{(7)} & x_3^{(7)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha_2 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Además, el punto $\mathbf{X}^{(19)}$ no debe pertenecer al plano $\Pi^{(2)}$, por lo tanto:

$$\pi_1^{(2)} x_1^{(19)} + \pi_2^{(2)} x_2^{(19)} + \pi_3^{(2)} x_3^{(19)} + \alpha_2 \neq 0.$$

La ecuación anterior tiene 3 incógnitas: $x_1^{(19)}$, $x_2^{(19)}$ y $x_3^{(19)}$. Estableciendo que $x_1^{(19)} = 0$, y $x_2^{(19)} = 0$; entonces, la restricción anterior se reduce a la siguiente ecuación:

$$\pi_3^{(2)} x_3^{(19)} + \alpha_2 \neq 0.$$

Por lo tanto:

$$x_3^{(19)} \neq -\frac{\alpha_2}{\pi_3^{(2)}}.$$

Entonces, el punto $\mathbf{X}^{(19)}$ que no pertenece al plano $\Pi^{(2)}$ es:

$$\mathbf{X}^{(19)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^{(19)} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3^{(19)} \neq -\frac{\alpha_2}{\pi_3^{(2)}}.$$

Así, se determinaron los tres puntos que se utilizan para construir el plano $\Pi^{(8)}$. A continuación, se utilizan estos puntos para calcular los coeficientes de dicho plano. Entonces, los puntos $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(7)}$ y $\mathbf{X}^{(19)}$, definen un plano $\Pi^{(8)} = [\pi_1^{(8)}, \pi_2^{(8)}, \pi_3^{(8)}, \pi_4^{(8)}]$; cuyos coeficientes: $\pi_1^{(8)}$, $\pi_2^{(8)}$, $\pi_3^{(8)}$ y $\pi_4^{(8)}$, se calculan resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_1^{(8)} x_1^{(1)} + \pi_2^{(8)} x_2^{(1)} + \pi_3^{(8)} x_3^{(1)} + \pi_4^{(8)} &= 0 \\ \pi_1^{(8)} x_1^{(7)} + \pi_2^{(8)} x_2^{(7)} + \pi_3^{(8)} x_3^{(7)} + \pi_4^{(8)} &= 0 \\ \pi_1^{(8)} x_1^{(19)} + \pi_2^{(8)} x_2^{(19)} + \pi_3^{(8)} x_3^{(19)} + \pi_4^{(8)} &= 0 \end{aligned}$$

Dado que los coeficientes del plano, son coordenadas homogéneas; entonces, podemos establecer que $\pi_4^{(8)} = \alpha_1$. Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_1^{(8)} x_1^{(1)} + \pi_2^{(8)} x_2^{(1)} + \pi_3^{(8)} x_3^{(1)} &= -\alpha_1 \\ \pi_1^{(8)} x_1^{(7)} + \pi_2^{(8)} x_2^{(7)} + \pi_3^{(8)} x_3^{(7)} &= -\alpha_1 \\ \pi_1^{(8)} x_1^{(19)} + \pi_2^{(8)} x_2^{(19)} + \pi_3^{(8)} x_3^{(19)} &= -\alpha_1 \end{aligned}$$

Reescribiendo de forma matricial, tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(7)} & x_2^{(7)} & x_3^{(7)} \\ x_1^{(19)} & x_2^{(19)} & x_3^{(19)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1^{(8)} \\ \pi_2^{(8)} \\ \pi_3^{(8)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

La solución a este sistema de ecuaciones, son los coeficientes del plano $\Pi^{(8)}$:

$$\begin{bmatrix} \pi_1^{(8)} \\ \pi_2^{(8)} \\ \pi_3^{(8)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(7)} & x_2^{(7)} & x_3^{(7)} \\ x_1^{(19)} & x_2^{(19)} & x_3^{(19)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Una vez calculado el plano $\Pi^{(8)}$, tal que $L_1 \in \Pi^{(8)}$; se procede a calcular la intersección de este plano con la línea L_2 .

3.2.2.2. Cálculo del punto de intersección, del plano $\Pi^{(8)}$ con la línea L_2

En párrafos anteriores, se describió como calcular el plano $\Pi^{(8)}$. Ahora, sea L_2 la matriz de Plücker que representa a la línea de vista del punto $\mathbf{X}^{(2)}$; entonces, el punto de intersección del plano con la línea, viene dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(0)} &= L_2 \triangle \Pi^{(8)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & l_{12}^{(2)} & l_{13}^{(2)} & l_{14}^{(2)} \\ -l_{12}^{(2)} & 0 & l_{23}^{(2)} & l_{24}^{(2)} \\ -l_{13}^{(2)} & -l_{23}^{(2)} & 0 & l_{34}^{(2)} \\ -l_{14}^{(2)} & -l_{24}^{(2)} & -l_{34}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1^{(8)} \\ \pi_2^{(8)} \\ \pi_3^{(8)} \\ \pi_4^{(8)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde el punto $\mathbf{X}^{(0)}$, es el centro de proyección de la cámara fotográfica.

Capítulo 4. Reproyección de puntos de una fotografía

La reconstrucción de escenas tridimensionales a partir de imágenes ha sido aplicada en diversas áreas. Una de sus principales áreas de aplicación es la industria del entretenimiento donde es utilizada para la generación de personas, animales y objetos. También se ha aplicado en el área médica para generar modelos de todo tipo de órganos, así como del cerebro y los huesos. Otras aplicaciones incluyen modelar cuerpos, navegación de robots, reconocimiento de objetos, simulación de fenómenos naturales, e incluso la reconstrucción de hallazgos arqueológicos.

Otras técnicas de reconstrucción se basan en marcas de luz que se adhieren en los objetos a reconstruir (comúnmente son utilizados sobre personas). Estas marcas son rastreadas por sensores visuales y, posteriormente, recrean el modelo tridimensional.

Aunque pueden ser muy precisas, el costo es alto comparado con el costo de una cámara digital. Además, sólo obtienen la reconstrucción del objeto sin su textura, por lo cual, hay que aplicar otros algoritmos para extraer la textura y empatarla con el modelo reconstruido.

Una alternativa es la reconstrucción tridimensional a partir de imágenes debido al bajo costo y a los buenos resultados que se han obtenido con esta técnica. Dentro del área de Visión por Computadora, el problema de la reconstrucción tridimensional a partir de imágenes, se ha clasificado de acuerdo a: las características de los objetos que se van reconstruir, la información a priori de las escenas y de la cámara, y el número de imágenes que se emplean (Hartley y Zisserman, 2003).

Cuando los objetos dentro de las imágenes presentan características con propiedades ortogonales o cuando existe información acerca de las cámaras que se usan para adquirir las imágenes, se cuenta con algoritmos muy robustos que generan reconstrucciones tridimensionales de gran calidad. Sin embargo, tales algoritmos están sujetos, en primer lugar, a que existan objetos con propiedades ortogonales; y en segundo lugar, a que se tenga información como la posición, el desplazamiento, la orientación y los parámetros de la cámara que adquiere las imágenes.

Por tal motivo, las investigaciones se han enfocado a imágenes donde no se tengan definidas las características de los objetos o no se tenga información a priori de las cámaras (cámaras sin calibrar). De estas investigaciones se ha concluido que, para obtener una reconstrucción tridimensional, se deben tener dos o más imágenes. Para el caso de más de dos imágenes existen

algoritmos robustos que generan reconstrucciones tridimensionales realistas. Sin embargo, los inconvenientes que existen con estos algoritmos son: encontrar la correspondencia de puntos en todas las imágenes, resolver los problemas de oclusión que se presenten y manejar un mayor número de puntos que se traduce en más operaciones. Para disminuir estos problemas es preferible utilizar una sola imagen como referencia. Existen diversos algoritmos para obtener una reconstrucción tridimensional a partir de dos imágenes utilizando cámaras sin calibración previa. Estos algoritmos hacen uso de la geometría epipolar y la matriz fundamental para calibrar la cámara, estimar los parámetros de orientación y posición, y obtener la reconstrucción tridimensional. Sin embargo, la calibración de la cámara es muy sensible, y para realizarla es necesario conocer los parámetros intrínsecos de la cámara. Otra complicación de este método, es que una ligera variación en el enfoque, requeriría una nueva calibración.

Se ha demostrado que, al aplicar la geometría epipolar, existen configuraciones de la cámara donde no es posible realizar la calibración de la misma. A estas configuraciones se les conoce como degeneraciones o configuraciones críticas. Debido a esto se propusieron soluciones que no requieren calibrar la cámara, y de obtener la reconstrucción tridimensional en una superficie plana. Las soluciones propuestas no emplean la geometría epipolar para relacionar las imágenes; en lugar de esto, emplean directamente el modelo de la cámara oscura, para calcular los puntos estimados y un conjunto de puntos conocidos o de referencia.

Para poder realizar la reconstrucción tridimensional se hará uso del Teorema visto en la sección 2.1.7.1, que nos dice que una transformación proyectiva puede ser expresada como la composición de tres transformaciones perspectivas. Como la transformación realizada por una cámara fotográfica es una transformación proyectiva, quiere decir que podremos descomponer esa transformación para conseguir las tres transformaciones perspectivas, esto lo hacemos mediante la información de la posición de un conjunto de puntos conocidos tanto en el espacio tridimensional, como su ubicación en la imagen.

Con ese conjunto de puntos, modelaremos la transformación realizada, para obtener las matrices que caracterizan la transformación, y aplicando las inversas de esas matrices, podremos obtener una reconstrucción del resto de los puntos en el plano de la imagen.

Los pasos a seguir se enumeran a continuación:

1. Cálculo de la matriz de transformación proyectiva P .

2. Cálculo de los vectores que forman la base B_1 .
3. Cálculo de las matrices de transformación perspectiva P_1, P_2, P_3 .
4. Reproyección de los puntos en la imagen mediante la inversa de las matrices de transformación perspectiva.

4.1. Cálculo de la matriz de transformación proyectiva P .

La matriz de transformación proyectiva P es una matriz que nos caracteriza la transformación perspectiva de la siguiente forma:

Como ya se ha mencionado anteriormente, la transformación realizada por una cámara fotográfica es una transformación proyectiva; también, por lo visto en la Sección 2.1.7 esta transformación equivale a un cambio de base del sistema. Entonces podemos representarla de la siguiente forma:

Sea $\mathbf{X}_{[B_1]}$ un punto de \mathbb{P}^2 expresado con respecto a una base B_1 , y sea $\mathbf{X}_{[B_4]}$ un punto de \mathbb{P}^2 expresado respecto a una base diferente B_4 ; entonces, el cambio de base de B_1 a B_4 es realizado por una transformación proyectiva:

$$t : \mathbf{X}_{[B_1]} \rightarrow \mathbf{X}_{[B_4]}$$

donde $\mathbf{X}_{[B_1]}$ es un punto de \mathbb{P}^2 expresado con respecto a una base B_1 , y $\mathbf{X}_{[B_4]}$ un punto de \mathbb{P}^2 expresado con respecto a una base diferente B_4 ; entonces, el cambio de base de B_1 a B_4 es realizado por una transformación proyectiva P de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}_{[B_4]} = P\mathbf{X}_{[B_1]}.$$

Donde P es una matriz de tamaño 3×3 asociada con la transformación proyectiva t , y los puntos con base B_4 representan el final de la transformación, es decir, los puntos $\mathbf{U}^{(i)}$ de la fotografía:

$$\mathbf{U}^{(i)} = P\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)}$$

La matriz P esta dada por:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

donde necesitamos hallar los elementos internos de la matriz. Las coordenadas del punto $\mathbf{U}^{(i)}$ están dadas por $\mathbf{U}^{(i)} = [u_1, u_2, 1]^T$ y las coordenadas del punto $\mathbf{X}_{1[B_1]}^{(i)} = [x_{1[B_1]}^{(i)}, x_{2[B_1]}^{(i)}, x_{3[B_1]}^{(i)}]^T$, entonces la Ecuación 4.1 se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1[B_1]}^{(i)} \\ x_{2[B_1]}^{(i)} \\ x_{3[B_1]}^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Para poder encontrar los componentes de la matriz P , los escribimos como un vector columna:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1[B_1]}^{(i)} & x_{2[B_1]}^{(i)} & x_{3[B_1]}^{(i)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{1[B_1]}^{(i)} & x_{2[B_1]}^{(i)} & x_{3[B_1]}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1[B_1]}^{(i)} & x_{2[B_1]}^{(i)} & x_{3[B_1]}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix}.$$

Para resolver este sistema se necesitan al menos 8 ecuaciones, ésto debido a que la matriz P es una matriz homogénea, y de las 9 incógnitas, solo 8 son linealmente independientes. Como nos muestra la ecuación matricial anterior, a partir de un punto $\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)}$ y de su proyección en la fotografía obtenemos 3 ecuaciones, de las cuales 2 son linealmente independientes. Por lo tanto, podemos resolver el sistema de ecuaciones anterior, si conocemos las coordenadas de al menos cuatro puntos que pertenecen al plano II, así como las coordenadas de sus proyecciones en la fotografía.

4.2. Cálculo de los vectores que forman la base

Una vez calculada la matriz P ; los vectores $\mathbf{i}_{[B_4]}$, $\mathbf{j}_{[B_4]}$ y $\mathbf{k}_{[B_4]}$, se calculan aplicando esta transformación proyectiva a los vectores estándar \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} . Ésto se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{[B_4]} &= P (1, 0, 0)^T, \\ \mathbf{j}_{[B_4]} &= P (0, 1, 0)^T, \\ \mathbf{k}_{[B_4]} &= P (0, 0, 1)^T.\end{aligned}$$

Lo que corresponde a los vectores columna de la matriz calculada P

4.3. Cálculo de las matrices de transformación perspectiva P_1, P_2, P_3

Como se vio en la Sección 2.1.7.1, una transformación proyectiva puede ser expresada como la composición de tres transformaciones perspectivas:

$$t_1 : \mathbf{X}_{[B_1]} \rightarrow \mathbf{X}_{[B_2]},$$

$$t_2 : \mathbf{X}_{[B_2]} \rightarrow \mathbf{X}_{[B_3]},$$

$$t_3 : \mathbf{X}_{[B_3]} \rightarrow \mathbf{X}_{[B_4]}.$$

Para ésto construiremos tres matrices P_1, P_2, P_3 tales que su efecto sobre los vectores unitarios estándar \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} sea el mismo que el de la matriz P . Así, los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} forman la base B_1 . Dado que una matriz de tamaño 3×3 se encuentra determinada por su efecto sobre tres vectores linealmente independientes, entonces:

$$P = P_3 P_2 P_1$$

por lo tanto:

$$\mathbf{X}_{[B_4]} = P_3 P_2 P_1 \mathbf{X}_{[B_1]}.$$

La ecuación anterior podemos descomponerla en tres ecuaciones matriciales, cada una representando una transformación perspectiva entre sistemas coordenados intermedios. Así la primera

transformación perspectiva, denotada por t_1 , está representada por la ecuación:

$$\mathbf{X}_{[B_2]} = P_1 \mathbf{X}_{[B_1]}.$$

Donde $\mathbf{X}_{[B_1]}$ es un punto referido a la base $B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y $\mathbf{X}_{[B_2]}$ es un punto referido a una base $B_2 = \{\mathbf{i}_{[B_2]}, \mathbf{j}_{[B_2]}, \mathbf{k}_{[B_2]}\}$; donde $\mathbf{i}_{[B_2]} = P\mathbf{i}$, $\mathbf{j}_{[B_2]} = P\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}_{[B_2]} = P\mathbf{k}$.

La segunda transformación perspectiva, denotada por t_2 , está representada por la ecuación:

$$\mathbf{X}_{[B_3]} = P_2 \mathbf{X}_{[B_2]}.$$

Donde $\mathbf{X}_{[B_3]}$ es un punto referido a una base $B_3 = \{\mathbf{i}_{[B_3]}, \mathbf{j}_{[B_3]}, \mathbf{k}_{[B_3]}\}$; donde $\mathbf{i}_{[B_3]} = P\mathbf{i}$, $\mathbf{j}_{[B_3]} = P\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}_{[B_3]} = P\mathbf{k}$.

La tercera transformación perspectiva, denotada por t_3 , está representada por la ecuación:

$$\mathbf{X}_{[B_4]} = P_3 \mathbf{X}_{[B_3]}.$$

Donde $\mathbf{X}_{[B_4]}$ es un punto referido a la base $B_4 = \{\mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_4]}\}$; con $\mathbf{i}_{[B_4]} = P\mathbf{i}$, $\mathbf{j}_{[B_4]} = P\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}_{[B_4]} = P\mathbf{k}$.

Los vectores base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_4]}$ y $\mathbf{k}_{[B_4]}$ son información conocida a priori. Así, el problema se reduce a determinar los vectores $\mathbf{j}_{[B_2]}, \mathbf{k}_{[B_2]}$ tales que las transformaciones entre las bases B_1 hacia B_2 , B_2 hacia B_3 y B_3 hacia B_4 sean transformaciones perspectivas. Es decir, cada transformación debe rotar ó trasladar un plano del espacio tridimensional. Usaremos la notación $\mathbf{w} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ para denotar al plano generado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} que pasa por el punto cuyo vector de posición es \mathbf{w} . Es decir:

$$\mathbf{w} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{w} + \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por construcción, dicho plano es paralelo a los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Primera transformación perspectiva

A continuación, calcularemos la matriz P_1 ; la cual nos transforma la base $B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ en la base $B_2 = \{\mathbf{i}_{[B_2]}, \mathbf{j}_{[B_2]}, \mathbf{k}_{[B_2]}\}$.

En primer lugar, debemos definir los valores de los vectores $\mathbf{j}_{[B_2]}$ y $\mathbf{k}_{[B_2]}$ que nos aseguren que la transformación efectuada por la matriz P_1 será una transformación perspectiva. Para ésto, estableceremos que el plano $\mathbf{i} + \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ será transformado de forma rígida; es decir, será trasladado y rotado de tal forma que las distancias entre los elementos del espacio generado $\langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ se conserven en el espacio generado $\langle \mathbf{j}_{[B_2]}, \mathbf{k}_{[B_2]} \rangle$. Una forma de asegurar ésto, es estableciendo que la magnitud de los vectores \mathbf{j} y \mathbf{k} así como el ángulo entre ellos, será el mismo que la magnitud y ángulo de los vectores $\mathbf{j}_{[B_2]}$ y $\mathbf{k}_{[B_2]}$. Además, dado que la composición de las transformaciones nos debe convertir la base B_1 en la base B_4 ; entonces, la matriz P_1 debe transformar el vector \mathbf{i} en el vector $\mathbf{i}_{[B_4]}$. Donde \mathbf{i} pertenece a la base B_1 y $\mathbf{i}_{[B_4]}$ pertenece a la base B_4 ; ver Figura 16.

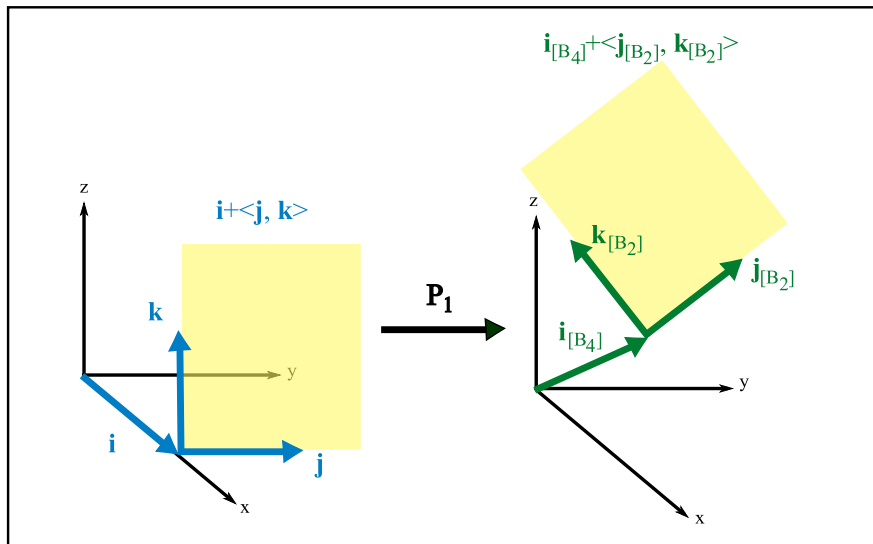


Figura 16. Primera transformación perspectiva

Entonces, establecemos los siguientes valores para los vectores que forman la base B_1 :

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P\mathbf{i}, \quad (37)$$

y:

$$\mathbf{j}_{[B_2]} = \frac{\mathbf{j}_{[B_4]}}{\|\mathbf{j}_{[B_4]}\|}. \quad (38)$$

Por las razones planteadas, el vector $\mathbf{k}_{[B_2]}$ debe ser perpendicular al vector $\mathbf{j}_{[B_4]}$ y pertenecer al plano $\langle \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_4]} \rangle$. A continuación calcularemos el vector $\mathbf{k}_{[B_2]}$ que satisface esta última restricción.

Dado que $\mathbf{k}_{[B_2]}$ pertenece al plano $\langle \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_4]} \rangle$, entonces puede ser escrito como una combi-

nación lineal de los vectores $\mathbf{j}_{[B_4]}$, $\mathbf{k}_{[B_4]}$; de la siguiente forma:

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = \alpha \mathbf{j}_{[B_4]} + \beta \mathbf{k}_{[B_4]}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Aplicando el producto punto del vector $\mathbf{k}_{[B_2]}$ con el vector $\mathbf{j}_{[B_4]}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{[B_2]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]} &= (\alpha \mathbf{j}_{[B_4]} + \beta \mathbf{k}_{[B_4]}) \cdot \mathbf{j}_{[B_4]} \\ &= \alpha (\mathbf{j}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]}) + \beta (\mathbf{k}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]}). \end{aligned}$$

Como los vectores $\mathbf{k}_{[B_2]}$ y $\mathbf{j}_{[B_4]}$ son perpendiculares; entonces, su producto punto es igual a cero. Además, $\mathbf{j}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]} = \|\mathbf{j}_{[B_4]}\|^2$; por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a:

$$\alpha \|\mathbf{j}_{[B_4]}\|^2 + \beta (\mathbf{k}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]}) = 0.$$

Así, seleccionando $\alpha = 1$ obtenemos:

$$\beta = -\frac{\|\mathbf{j}_{[B_4]}\|^2}{\mathbf{k}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]}}.$$

Y por lo tanto, sustituyendo los valores calculados de α y β en la Ecuación (39), se obtiene:

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = \mathbf{j}_{[B_4]} - \frac{\|\mathbf{j}_{[B_4]}\|^2}{\mathbf{k}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]}} \mathbf{k}_{[B_4]}. \quad (40)$$

Dado que queremos que el plano generado por los vectores $\mathbf{j}_{[B_2]}$ y $\mathbf{k}_{[B_2]}$ se transforme de forma rígida; entonces, ambos vectores deben tener una magnitud unitaria. Por la Ecuación (38), el vector $\mathbf{j}_{[B_2]}$ es de magnitud unitaria. Entonces, hacemos que $\mathbf{k}_{[B_2]}$ sea un vector unitario dividiéndolo entre su magnitud, de la siguiente forma:

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = \frac{\mathbf{j}_{[B_4]} - \frac{\|\mathbf{j}_{[B_4]}\|^2}{\mathbf{k}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]}} \mathbf{k}_{[B_4]}}{\|\mathbf{j}_{[B_4]} - \frac{\|\mathbf{j}_{[B_4]}\|^2}{\mathbf{k}_{[B_4]} \cdot \mathbf{j}_{[B_4]}} \mathbf{k}_{[B_4]}\|}. \quad (41)$$

Las Ecuaciones (37), (38) y (41) son los vectores que forman la base B_2 . Por las restricciones que se establecieron para calcularlos, la transformación entre la base B_1 y B_2 es una transformación perspectiva. Además, el vector \mathbf{i} es transformado en el vector $\mathbf{i}_{[B_4]}$; donde \mathbf{i} pertenece a la base B_1 , y $\mathbf{i}_{[B_4]}$ pertenece a la base B_2 .

Así, una vez definidos los vectores que forman la base B_2 ; podemos calcular la matriz P_1 , la cual tiene la siguiente forma:

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{111} & p_{121} & p_{131} \\ p_{211} & p_{221} & p_{231} \\ p_{311} & p_{321} & p_{331} \end{bmatrix}.$$

Para calcular cada coeficiente p_{ij1} se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P_1 \mathbf{i} \quad (42)$$

$$\mathbf{j}_{[B_2]} = P_1 \mathbf{j} \quad (43)$$

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = P_1 \mathbf{k} \quad (44)$$

Sustituyendo los valores correspondientes a los vectores \mathbf{i} , $\mathbf{i}_{[B_4]}$ en la Ecuación (42), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{111} & p_{121} & p_{131} \\ p_{211} & p_{221} & p_{231} \\ p_{311} & p_{321} & p_{331} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{121} \\ p_{131} \\ p_{211} \\ p_{221} \\ p_{231} \\ p_{311} \\ p_{321} \\ p_{331} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

De forma similar, sustituyendo los valores correspondientes a los vectores \mathbf{j} , $\mathbf{j}_{[B_2]}$ en la Ecuación

(43), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} \\ \dot{j}_{2[B_2]} \\ \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{111} & p_{121} & p_{131} \\ p_{211} & p_{221} & p_{231} \\ p_{311} & p_{321} & p_{331} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} \\ \dot{j}_{2[B_2]} \\ \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{121} \\ p_{131} \\ p_{211} \\ p_{221} \\ p_{231} \\ p_{311} \\ p_{321} \\ p_{331} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Finalmente, sustituyendo los valores correspondientes a los vectores \mathbf{k} , $\mathbf{k}_{[B_2]}$ en la Ecuación (44), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} k_{1[B_2]} \\ k_{2[B_2]} \\ k_{3[B_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{111} & p_{121} & p_{131} \\ p_{211} & p_{221} & p_{231} \\ p_{311} & p_{321} & p_{331} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} k_{1[B_2]} \\ k_{2[B_2]} \\ k_{3[B_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{121} \\ p_{131} \\ p_{211} \\ p_{221} \\ p_{231} \\ p_{311} \\ p_{321} \\ p_{331} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Las Ecuaciones (45), (46) y (47) forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} \\ j_{2[B_2]} \\ j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_2]} \\ k_{2[B_2]} \\ k_{3[B_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{121} \\ p_{131} \\ p_{211} \\ p_{221} \\ p_{231} \\ p_{311} \\ p_{321} \\ p_{331} \end{bmatrix},$$

cuya solución son los coeficientes de la matriz P_1 . Despejando el vector de coeficientes p_{ij1} de la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{121} \\ p_{131} \\ p_{211} \\ p_{221} \\ p_{231} \\ p_{311} \\ p_{321} \\ p_{331} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} \\ j_{2[B_2]} \\ j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_2]} \\ k_{2[B_2]} \\ k_{3[B_2]} \end{bmatrix}.$$

entonces, los coeficientes p_{ij1} corresponden a:

$$[p_{111}, p_{121}, p_{131}, p_{211}, p_{221}, p_{231}, p_{311}, p_{321}, p_{331}]^T = [i_{1[B_4]}, j_{1[B_2]}, k_{1[B_2]}, i_{2[B_4]}, j_{2[B_2]}, k_{2[B_2]}, i_{3[B_4]}, j_{3[B_2]}, k_{3[B_2]}]^T.$$

de manera matricial:

$$P_1 = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & j_{1[B_2]} & k_{1[B_2]} \\ i_{2[B_4]} & j_{2[B_2]} & k_{2[B_2]} \\ i_{3[B_4]} & j_{3[B_2]} & k_{3[B_2]} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Segunda transformación perspectiva

Siguiendo un procedimiento similar al de la sección anterior, calculamos la matriz asociada a la segunda transformación perspectiva. Dicha matriz se denota como P_2 , y nos transforma la base $B_2 = \{\mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_2]}, \mathbf{k}_{[B_2]}\}$ en la base $B_3 = \{\mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_2]}\}$.

Notemos que la transformación efectuada por la matriz P_2 , no afecta a los vectores $\mathbf{i}_{[B_4]}$ y $\mathbf{k}_{[B_2]}$; ya que son mapeados hacia ellos mismos. En consecuencia, esta matriz transforma de forma rígida al plano generado por los vectores $\mathbf{i}_{[B_4]}$ y $\mathbf{k}_{[B_2]}$. Por lo tanto, P_2 representa a una transformación perspectiva. Además, dado que la composición de las transformaciones debe convertir a la base B_1 en la base B_4 ; entonces, la matriz P_2 debe transformar al vector $\mathbf{j}_{[B_2]}$ en el vector $\mathbf{j}_{[B_4]}$. Donde el vector $\mathbf{j}_{[B_2]}$ pertenece a la base B_2 y el vector $\mathbf{j}_{[B_4]}$ pertenece a la base B_3 , ver Figura 17.

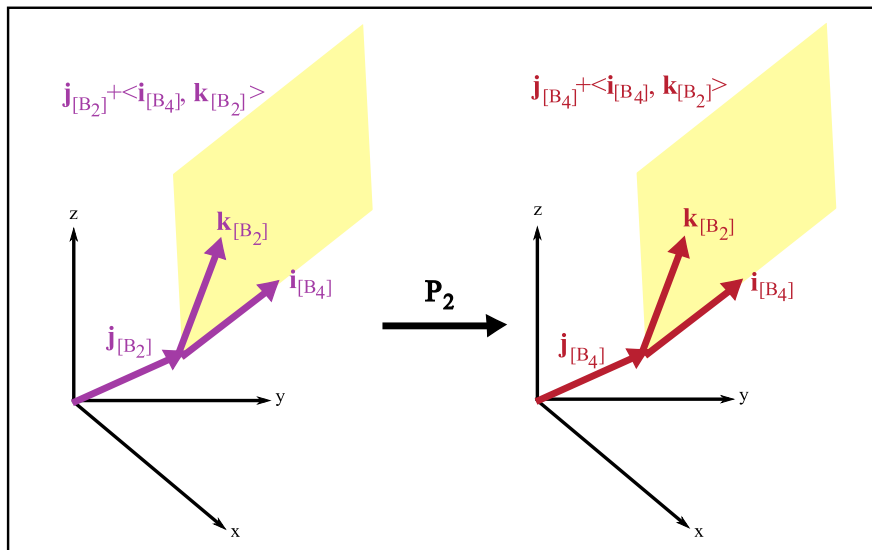


Figura 17. Segunda transformación perspectiva

Entonces, los vectores que forman la base B_3 son:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P\mathbf{i},$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = P\mathbf{j},$$

y

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = P_1\mathbf{k}.$$

Así, utilizando los vectores que forman las bases B_2 y B_3 , calculamos la matriz P_2 ; la cual tiene la siguiente forma:

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_{112} & p_{122} & p_{132} \\ p_{212} & p_{222} & p_{232} \\ p_{312} & p_{322} & p_{332} \end{bmatrix}.$$

Para calcular cada coeficiente p_{ij2} , se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P_2\mathbf{i}_{[B_4]} \quad (49)$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = P_2\mathbf{j}_{[B_2]} \quad (50)$$

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = P_2\mathbf{k}_{[B_2]} \quad (51)$$

Sustituyendo los valores correspondientes al vector $\mathbf{i}_{[B_4]}$ en la Ecuación (49), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{112} & p_{122} & p_{132} \\ p_{212} & p_{222} & p_{232} \\ p_{312} & p_{322} & p_{332} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{112} \\ p_{122} \\ p_{132} \\ p_{212} \\ p_{222} \\ p_{232} \\ p_{312} \\ p_{322} \\ p_{332} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Sustituyendo los valores correspondientes al vector $\mathbf{j}_{[B_2]}$ en la Ecuación (50), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} \\ \dot{j}_{2[B_2]} \\ \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{112} & p_{122} & p_{132} \\ p_{212} & p_{222} & p_{232} \\ p_{312} & p_{322} & p_{332} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} \\ \dot{j}_{2[B_2]} \\ \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} \\ \dot{j}_{2[B_2]} \\ \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{112} \\ p_{122} \\ p_{132} \\ p_{212} \\ p_{222} \\ p_{232} \\ p_{312} \\ p_{322} \\ p_{332} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Finalmente, sustituyendo los valores correspondientes a los vectores $\mathbf{k}_{[B_2]}$ y $\mathbf{k}_{[B_4]}$ en la Ecuación (51), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{112} & p_{122} & p_{132} \\ p_{212} & p_{222} & p_{232} \\ p_{312} & p_{322} & p_{332} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{1[B_2]} \\ k_{2[B_2]} \\ k_{3[B_2]} \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{112} \\ p_{122} \\ p_{132} \\ p_{212} \\ p_{222} \\ p_{232} \\ p_{312} \\ p_{322} \\ p_{332} \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Las Ecuaciones (52), (53) y (54) forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} \\ j_{2[B_2]} \\ j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{112} \\ p_{122} \\ p_{132} \\ p_{212} \\ p_{222} \\ p_{232} \\ p_{312} \\ p_{322} \\ p_{332} \end{bmatrix}.$$

La solución de este sistema de ecuaciones son los coeficientes de la matriz P_2 :

$$\begin{bmatrix} p_{112} \\ p_{122} \\ p_{132} \\ p_{212} \\ p_{222} \\ p_{232} \\ p_{312} \\ p_{322} \\ p_{332} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} \\ j_{2[B_2]} \\ j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Tercera transformación perspectiva

Para calcular la matriz asociada a la tercera transformación perspectiva, se sigue un procedimiento similar al anterior. Dicha matriz es denotada como P_3 , y nos transforma la base $B_3 = \{\mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_2]}\}$ en la base $B_4 = \{\mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_4]}\}$.

P_3 representa a una transformación perspectiva, que convierte a la base B_1 en la base B_4 ; entonces, la matriz P_3 transforma al vector \mathbf{k}_{B_2} en el vector $\mathbf{k}_{[B_4]}$. Donde el vector \mathbf{k}_{B_2} pertenece a la base B_3 , y el vector \mathbf{k}_{B_4} pertenece a la base B_4 , ver Figura 18.

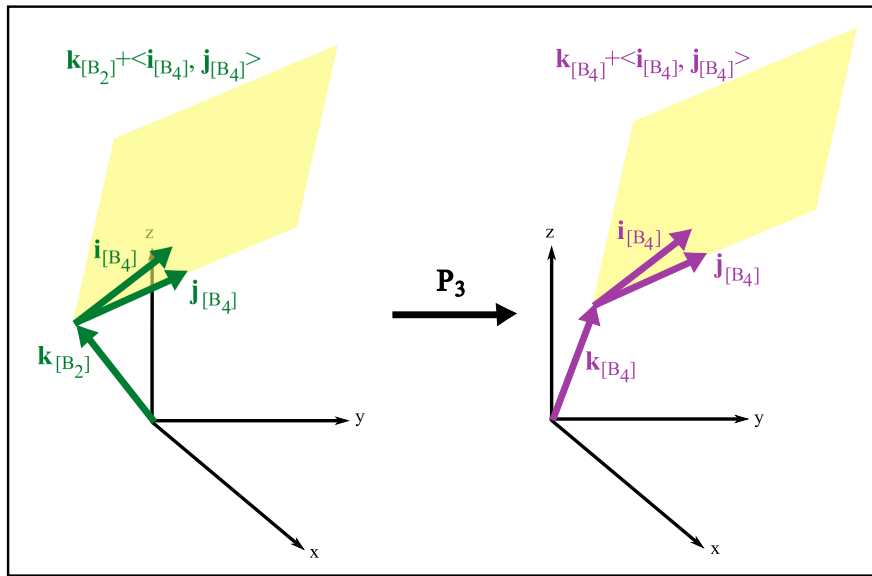


Figura 18. Tercera transformación perspectiva

Entonces, los vectores que forman la base B_4 son:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P\mathbf{i},$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = P\mathbf{j},$$

$$\mathbf{k}_{[B_4]} = P\mathbf{k}.$$

Así, utilizando los vectores que forman las bases B_3 y B_4 , calculamos la matriz P_3 ; la cual tiene la siguiente forma:

$$P_3 = \begin{bmatrix} p_{113} & p_{123} & p_{133} \\ p_{213} & p_{223} & p_{233} \\ p_{313} & p_{323} & p_{333} \end{bmatrix}.$$

Para calcular cada coeficiente p_{ij3} , se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P_3\mathbf{i}_{[B_3]} \quad (56)$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = P_3\mathbf{j}_{[B_3]} \quad (57)$$

$$\mathbf{k}_{[B_4]} = P_3\mathbf{k}_{[B_3]} \quad (58)$$

Sustituyendo los valores correspondientes al vector $\mathbf{i}_{[B_4]}$ en la Ecuación (56), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{113} & p_{123} & p_{133} \\ p_{213} & p_{223} & p_{233} \\ p_{313} & p_{323} & p_{333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{113} \\ p_{123} \\ p_{133} \\ p_{213} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{313} \\ p_{323} \\ p_{333} \end{bmatrix}. \quad (59)$$

De forma similar, sustituyendo los valores correspondientes a los vectores $\mathbf{j}_{[B_2]}$ y $\mathbf{j}_{[B_4]}$ en la Ecuación (57), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_4]} \\ \dot{j}_{2[B_4]} \\ \dot{j}_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{113} & p_{123} & p_{133} \\ p_{213} & p_{223} & p_{233} \\ p_{313} & p_{323} & p_{333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} \\ \dot{j}_{2[B_2]} \\ \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_4]} \\ \dot{j}_{2[B_4]} \\ \dot{j}_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{113} \\ p_{123} \\ p_{133} \\ p_{213} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{313} \\ p_{323} \\ p_{333} \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Finalmente, sustituyendo los valores correspondientes al vector $\mathbf{k}_{[B_4]}$ en la Ecuación (58), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{113} & p_{123} & p_{133} \\ p_{213} & p_{223} & p_{233} \\ p_{313} & p_{323} & p_{333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{113} \\ p_{123} \\ p_{133} \\ p_{213} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{313} \\ p_{323} \\ p_{333} \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Las Ecuaciones (59), (60) y (61) forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ \dot{j}_{1[B_4]} \\ \dot{j}_{2[B_4]} \\ \dot{j}_{3[B_4]} \\ k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} \\ \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} \\ k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{113} \\ p_{123} \\ p_{133} \\ p_{213} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{313} \\ p_{323} \\ p_{333} \end{bmatrix}.$$

La solución de este sistema de ecuaciones son los coeficientes de la matriz P_3 :

$$\begin{bmatrix} p_{113} \\ p_{123} \\ p_{133} \\ p_{213} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{313} \\ p_{323} \\ p_{333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{1[B_2]} & j_{2[B_2]} & j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_4]} \\ j_{2[B_4]} \\ j_{3[B_4]} \\ k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix} \quad (62)$$

La cual transforma, de forma perspectiva, los vectores que forman la base B_3 hacia los que forman la base B_3 .

Los coeficientes de cada matriz de transformación P_1 , P_2 y P_3 son entonces obtenidos por medio de las Ecuaciones (48), (55) y (62). Estas matrices representan transformaciones perspectivas; además, su producto es equivalente a la matriz de transformación proyectiva P :

$$P = P_3 P_2 P_1$$

4.4. Reproyección de los puntos en la imagen

Una vez calculadas las matrices P_1 , P_2 y P_3 asociadas con transformaciones perspectivas, es posible re proyectar cualquier punto de la fotografía hacia el plano Π mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)} = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} \mathbf{U}^{(i)}.$$

Donde $\mathbf{U}^{(i)}$ es un punto de la fotografía, y $\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)}$ es el punto correspondiente sobre el plano Π . Con este procedimiento se pueden calcular la re proyección de todos los puntos de la imagen a un plano del espacio tridimensional.

Capítulo 5. Experimentación y Resultados

En el presente capítulo se muestran los experimentos realizados para demostrar el funcionamiento y eficacia del procedimiento matemático mostrado en el Capítulo 3. Se describen dos procedimientos experimentales, las consideraciones tomadas y los resultados obtenidos.

5.1. Experimento 1

Como se mencionó anteriormente en el Capítulo 3, se necesita conocer la ubicación en el espacio de 6 puntos no coplanarios y sus correspondientes posiciones en las fotografías, por lo que en este experimento se propone el uso de una base de madera en la que se colocan 6 esferas de unicel de color azul. Lo primero a realizar es conseguir la ubicación de los puntos en la imagen que corresponden a las coordenadas $\mathbf{U}^{(i)}$ que se emplearán. Para hacer esto fue necesario realizar un tratamiento previo a la imagen que ayude a detectar con mejor precisión los puntos, se empleó segmentación de color y un algoritmo detector de círculos con el que calculamos el centro de cada punto. En la Figura 19 se muestra una fotografía tomada de la base propuesta sobre la que se trabajó.

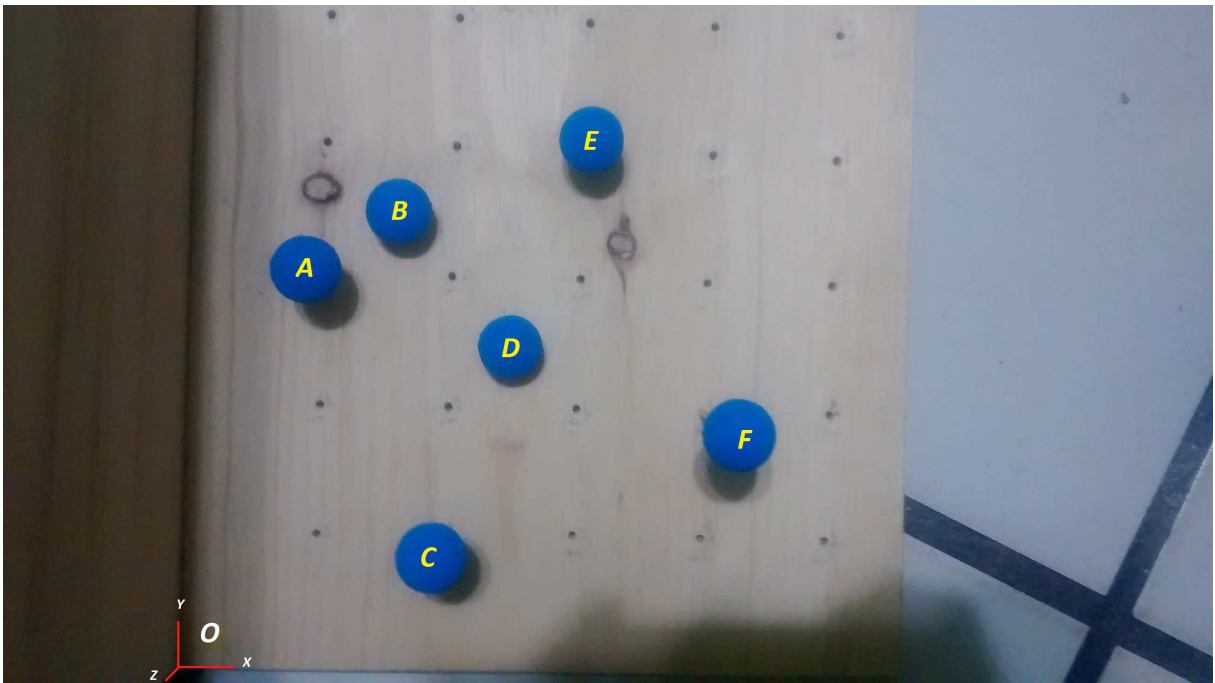


Figura 19. Base de madera con 6 esferas azules.

Tomando como origen el punto O mostrado en la Figura 19, las coordenadas en el espacio tridimensional de cada una de las esferas son las siguientes:

Tabla 1. Posición en el espacio de las esferas azules de la Figura 19.

Círculo	x (cm)	y (cm)	z (cm)
A	5	15.5	3.4
B	8.1	17.9	1.5
C	10.1	5.6	4.75
D	12.6	12.7	1.2
E	15.5	20.7	2.5
F	20.5	10.3	6.7

Utilizado el mismo origen coordenado, la fotografía fue tomada desde del punto $x = 15$, $y = 10$ y $z = 22$ aproximadamente, el cual es el resultado al que se debe llegar. Recordemos que estas coordenadas se encuentran dadas en centímetros.

En la implementación, es común que existan errores de precisión computacional. Por lo tanto, puede presentarse el caso de que las dos líneas calculadas se encuentren muy cerca una de la otra, pero sin llegar a intersectarse. Por esta razón, se recomienda calcular más líneas de vista para que la intersección de ellas se promedie y nos proporcione mejores resultados

El procedimiento empleado para obtener las coordenadas de los puntos es el siguiente:

- Paso 1** Convertir la imagen del espacio de color RGB (rojo, verde y azul por sus siglas en inglés) a HSV (Matiz, Saturación y Valor por sus siglas en inglés) para facilitar la detección de las esferas, ya que permite describir el color deseado a partir de un matiz puro (azul en este caso) y sus combinaciones con negro y blanco, facilitando su ajuste para diferentes condiciones de iluminación, ver Figura 20.
- Paso 2** Separar la imagen en máscaras de acuerdo a cada elemento de la composición H, S, V, ver Figura 21.
- Paso 3** Seleccionar los valores de H, S, y V que caractericen mejor las esferas azules para poder detectarlas y realizar la segmentación de acuerdo a esos valores, ver Figura 22).
- Paso 4** Una vez realizada la identificación de los elementos del color elegido, en este caso azul, se unen los tres elementos segmentados (H, S, y V), ver Figura 23.
- Paso 5** Realizar la detección de círculos en la imagen resultante, ver Figura 24.

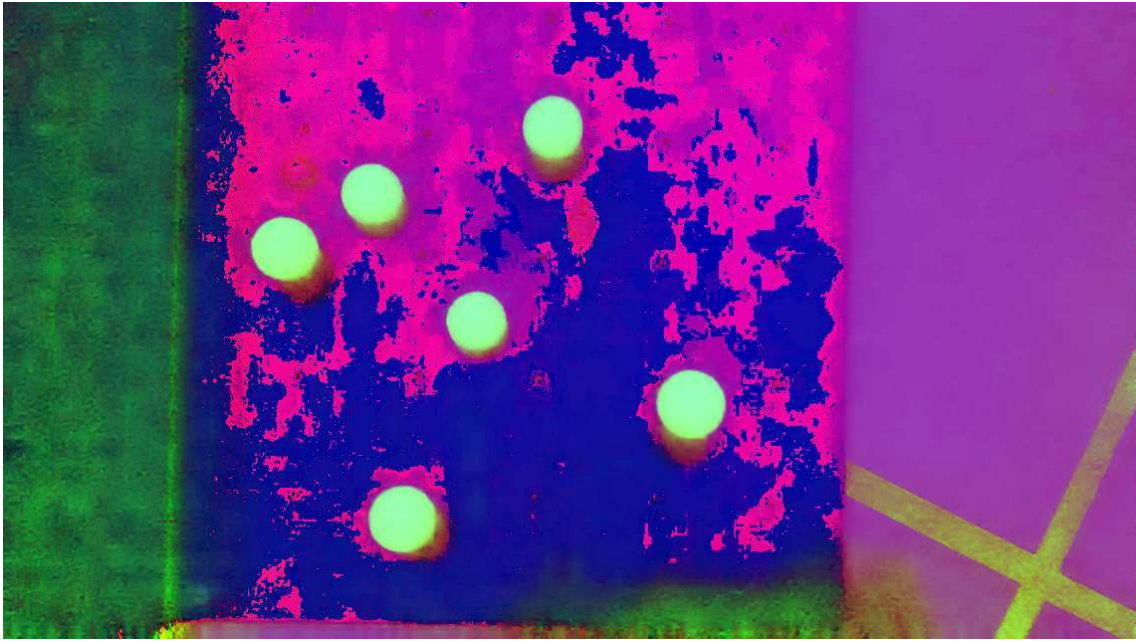


Figura 20. Imagen original en el espacio de colores HSV.



(a) Elemento H.

(b) Elemento S.



(c) Elemento V.

Figura 21. Diferentes elementos de la Figura 19 en HSV.

Paso 6 Una vez que los centros de los círculos son detectados, se muestran en la imagen original. Estos centros corresponden a los puntos $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$, $\mathbf{U}^{(5)}$ y $\mathbf{U}^{(6)}$, mencionados en la Sección 3, que servirán para encontrar la birrazón en el plano de

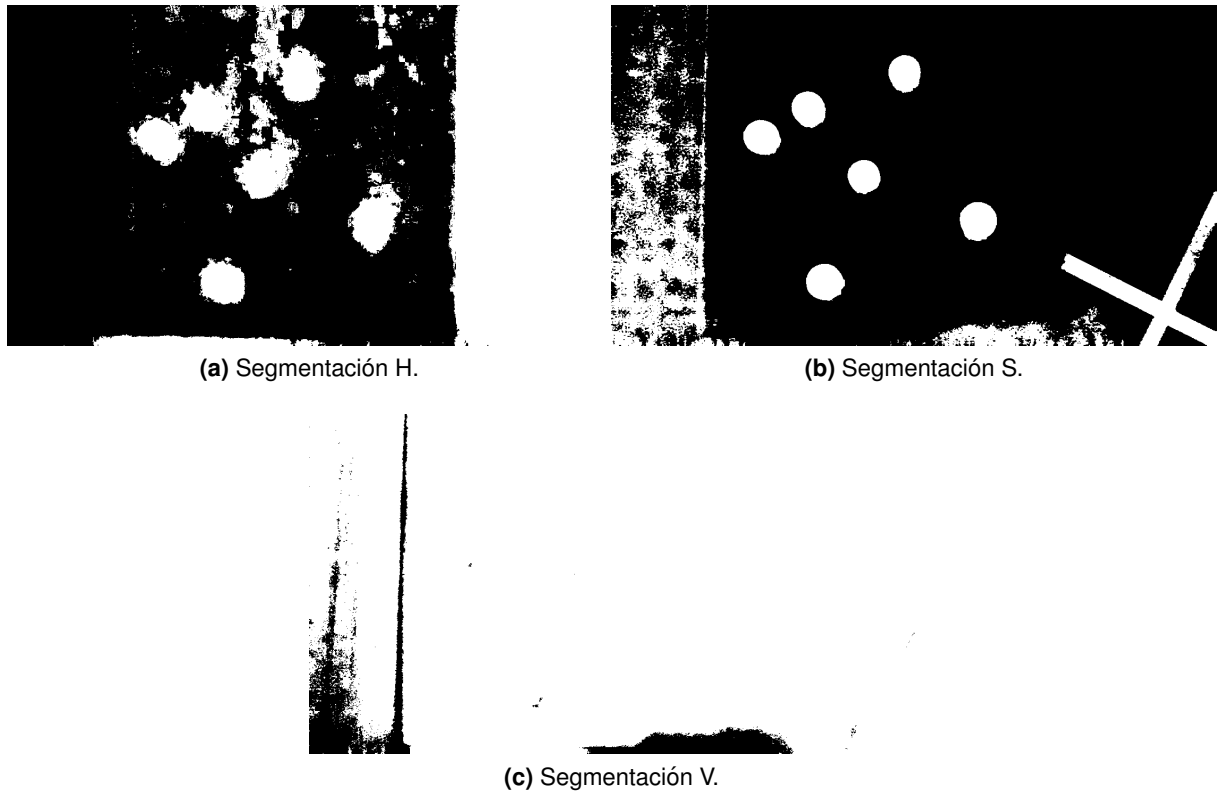


Figura 22. Segmentación en cada elemento de la Figura 19 en HSV.

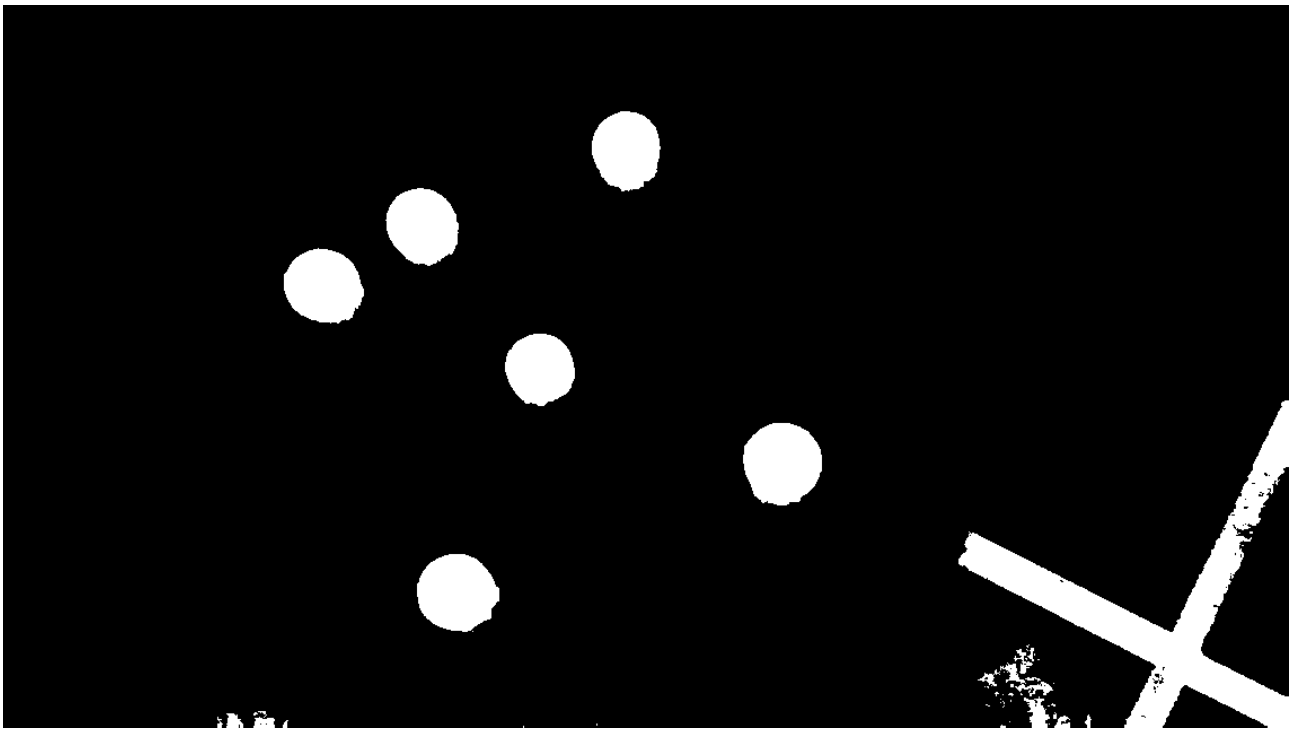


Figura 23. Resultado final de la segmentación HSV.

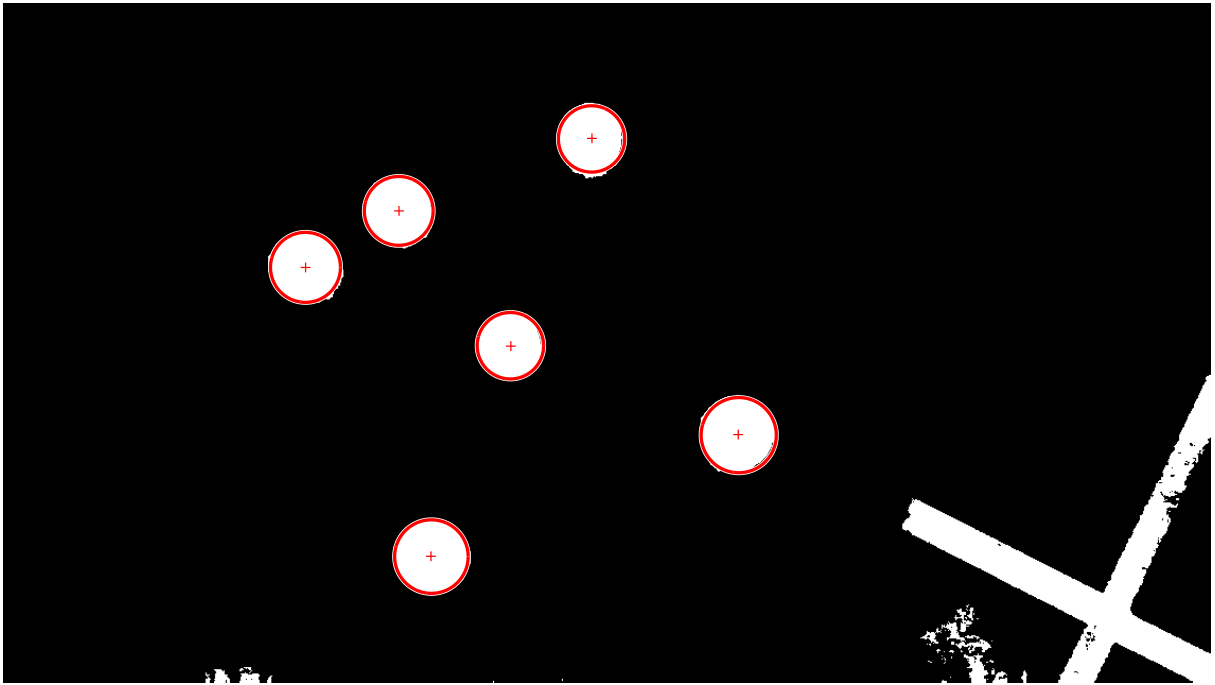


Figura 24. Detección de círculos.

la fotografía, ver Figura 25.

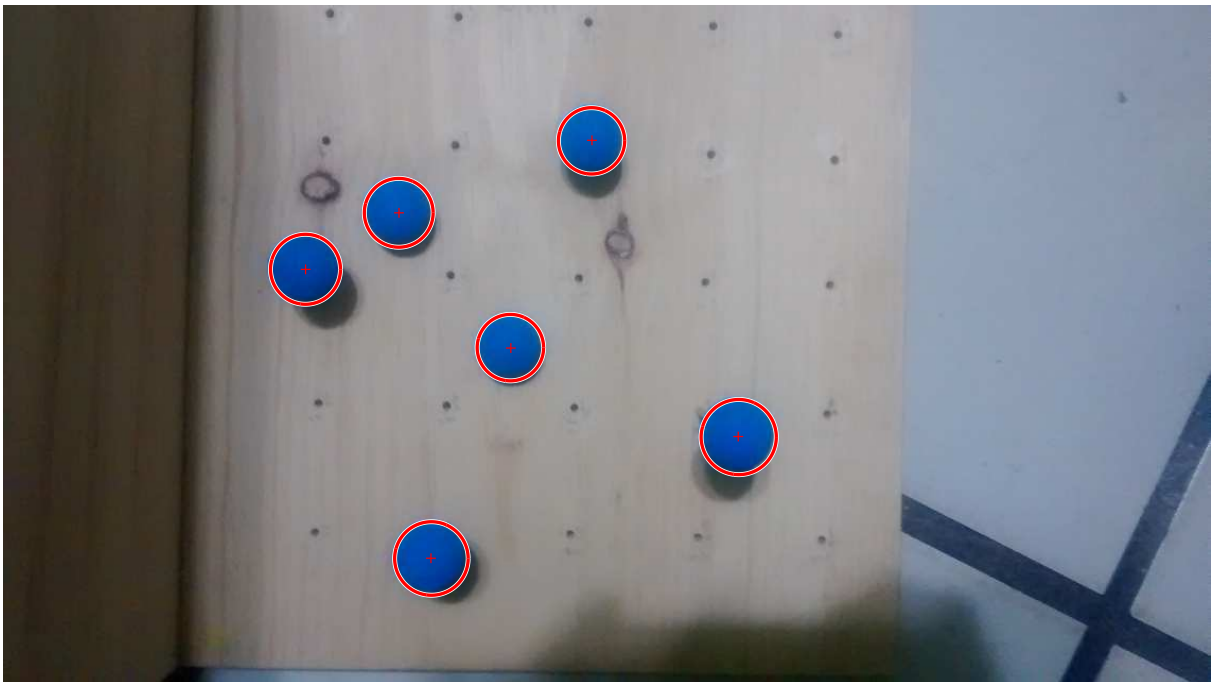


Figura 25. Círculos detectados.

Paso 7 Para poder visualizar las operaciones que fueron realizadas en este procedimiento, se grafica la posición de las esferas en el espacio. Esta información es conocida a priori, ver Figura 26.

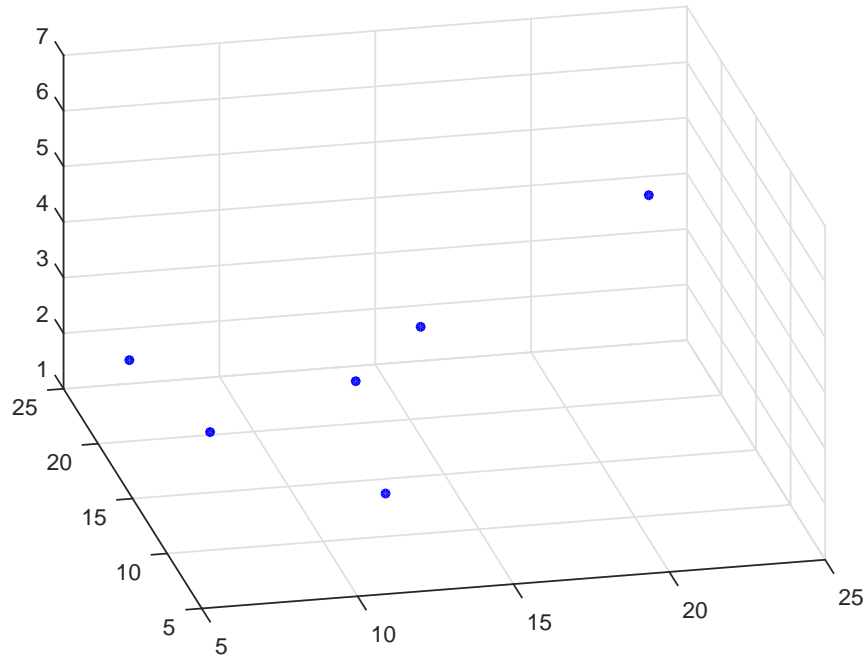


Figura 26. Círculos en el espacio tridimensional.

Cálculo de la línea de vista de un punto.

El procedimiento explicado anteriormente, fue para obtener las coordenadas de los puntos en la imagen. A continuación se explicará el procedimiento para la obtención de una línea de vista de un punto.

Paso 1 Utilizando los puntos conocidos $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$, $\mathbf{U}^{(5)}$ y $\mathbf{U}^{(6)}$, se calcula las birrazones λ y μ de la fotografía, mediante las ecuaciones:

$$\lambda = \frac{\left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{U}^{(4)} \right| \left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{U}^{(5)} \right|}{\left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{U}^{(5)} \right| \left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{U}^{(4)} \right|}$$

$$\mu = \frac{\left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{U}^{(4)} \right| \left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{U}^{(6)} \right|}{\left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{U}^{(6)} \right| \left| \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{U}^{(4)} \right|}$$

Paso 2 Se selecciona un primer punto que servirá como eje del lápiz de líneas, a partir de este punto se calculará la línea primera línea de vista. Para ello, es necesario calcular la birrazón y las cónicas μ y λ relacionadas a ese punto. A este primer punto lo llamaremos $\mathbf{X}^{(1)}$, ver Figura 27.

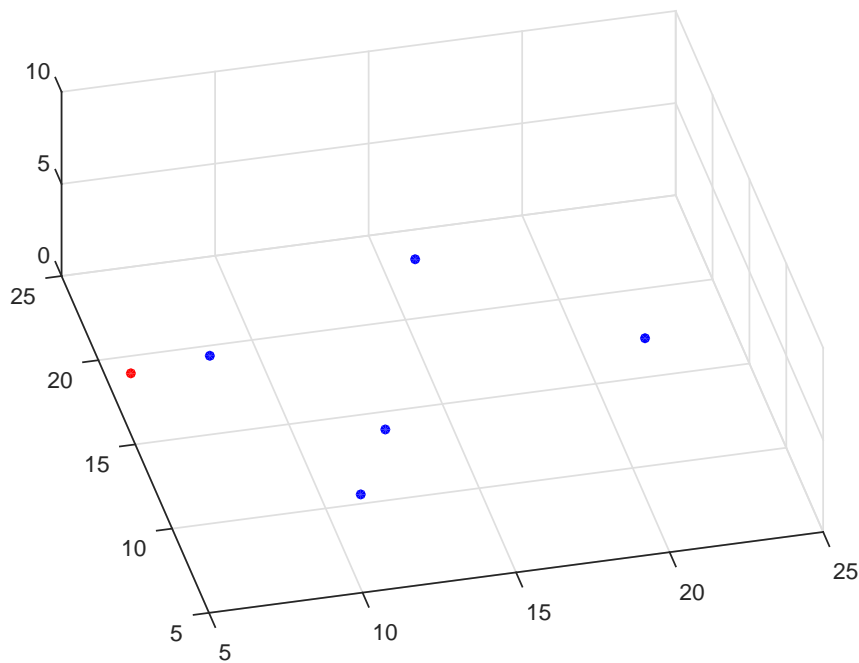


Figura 27. Punto A.

Paso 3 Elegimos un plano de intersección arbitrario $\Pi^{(0)}$ que no pase por el punto $\mathbf{X}^{(1)}$. En los cálculos reales, se utilizó el plano definido por $Pi^{(0)} = [0, 0, 1, -\alpha]$ con $\alpha = 50$. Sin embargo, en este caso se utilizó el plano $\Pi^{(0)} = [0, 0, 1, -20]$ con el propósito de tener una mejor visualización del método utilizado, ver Figura 28.

Paso 4 Se calcula la línea L_2 que pasa a través del punto $\mathbf{X}^{(1)}$ y alguno de los otros puntos elegidos correspondiente al punto $\mathbf{X}^{(2)}$. Esto se realiza mediante la Ecuación 12.

Paso 5 Se calcula el punto donde esta línea intersecta al plano elegido $\Pi^{(0)}$ mediante la ecuación

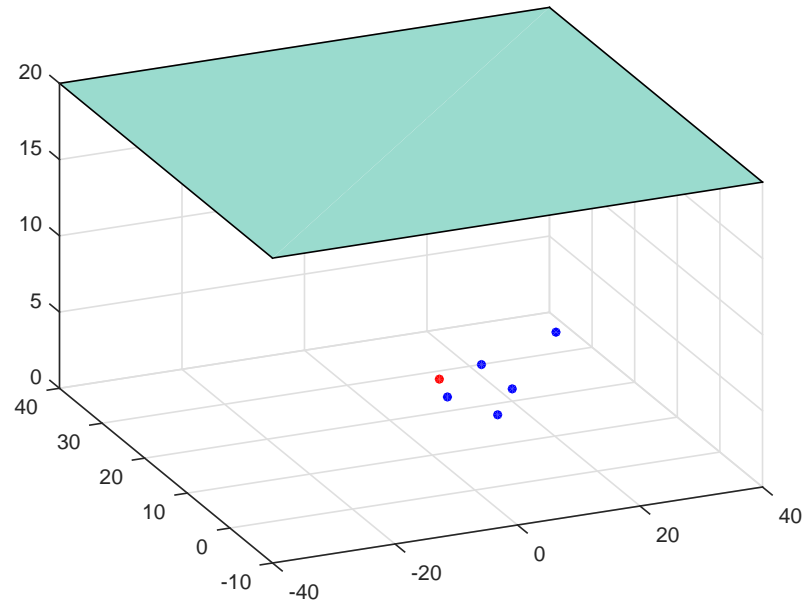


Figura 28. Plano $\Pi^{(0)}$.

ción 14, que corresponde al punto $\mathbf{X}^{(8)}$ del planteamiento geométrico, ver Figura 29.

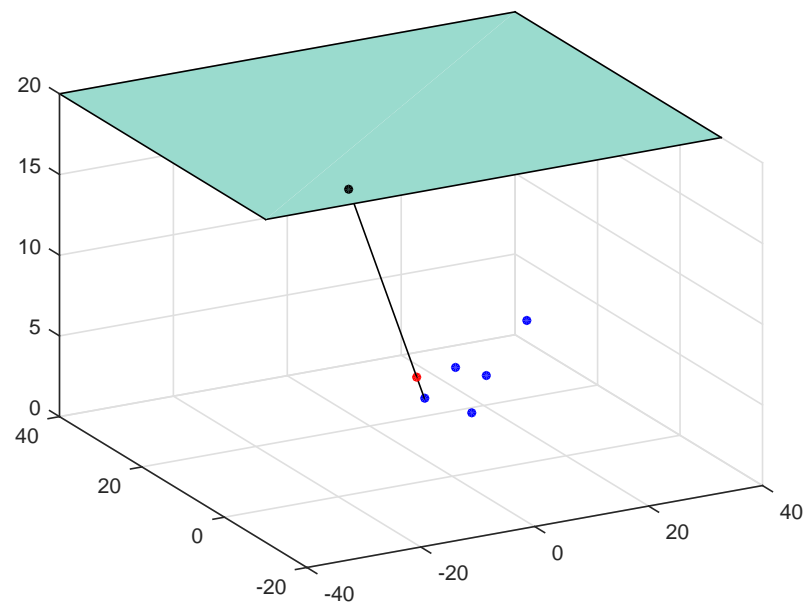


Figura 29. Línea L_2 .

Paso 6 Se repite el paso 4 y 5 para los puntos restantes (correspondientes a los puntos $\mathbf{X}^{(3)}$, $\mathbf{X}^{(4)}$, $\mathbf{X}^{(5)}$ y $\mathbf{X}^{(6)}$). La intersección de estos puntos con el plano tridimensional, nos

permitirán generar el lápiz de rectas en el plano $\Pi^{(0)}$. Los puntos donde las demás líneas del lápiz intersectan al plano corresponden a los puntos $\mathbf{X}^{(8)}$, $\mathbf{X}^{(9)}$, $\mathbf{X}^{(10)}$, $\mathbf{X}^{(11)}$ y $\mathbf{X}^{(12)}$, ver Figura 30.

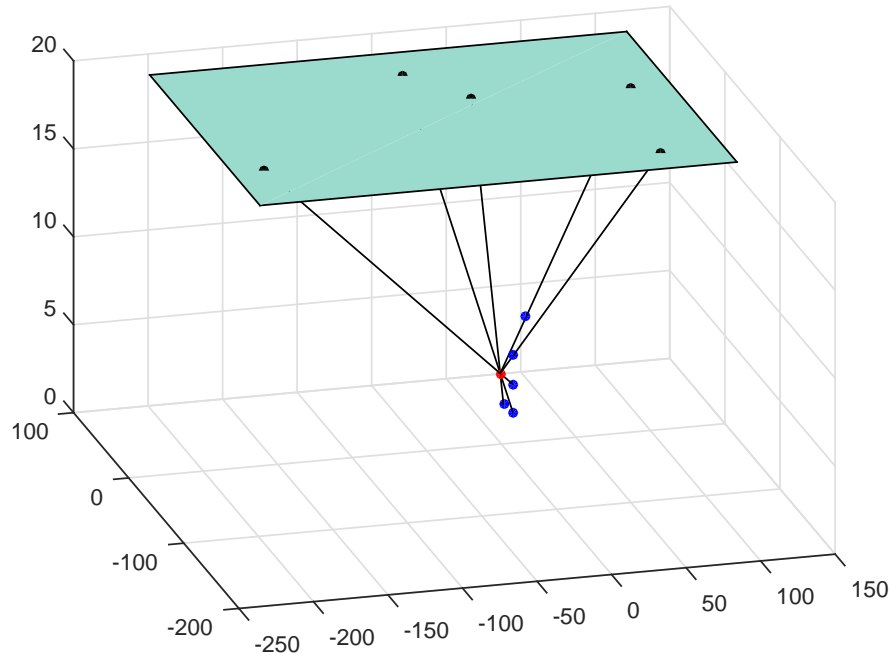


Figura 30. Lápiz de $\mathbf{X}^{(1)}$.

Paso 7 Para realizar los cálculos de las cónicas de manera más fácil, es necesario convertir los puntos $\mathbf{X}^{(8)}$, $\mathbf{X}^{(9)}$, $\mathbf{X}^{(10)}$, $\mathbf{X}^{(11)}$ y $\mathbf{X}^{(12)}$ a coordenadas con respecto al plano $\Pi^{(0)}$ como se explicó en la Sección 3.2.1. Los puntos obtenidos son los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$, $\mathbf{V}^{(5)}$ y $\mathbf{V}^{(6)}$, ver Figura 31.

Paso 8 Se calcula la cónica \mathbf{Q}_1 . El recíproco del Teorema de Chasles explicado en la sección 2.1.6, nos dice que el lugar geométrico definido por los vértices de los lápices de líneas que poseen el mismo valor de birrazón con respecto a los mismos cuatro puntos, es una cónica. Teniendo esto en cuenta, es posible calcular la ecuación de una cónica que pase por los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(5)}$ y con birrazón λ .

Paso 9 Mediante los puntos $\mathbf{V}^{(2)}$, $\mathbf{V}^{(3)}$, $\mathbf{V}^{(4)}$ y $\mathbf{V}^{(6)}$ y la birrazón μ se calcula la segunda cónica. Ambas cónicas se pueden ver en la Figura 32.

Paso 10 Se calcula el punto de intersección de la cónica μ con la cónica λ como se explicó en la sección 3.2.1.8 y se grafica. Este punto es llamado $\mathbf{V}^{(1)}$, ver Figura 33.

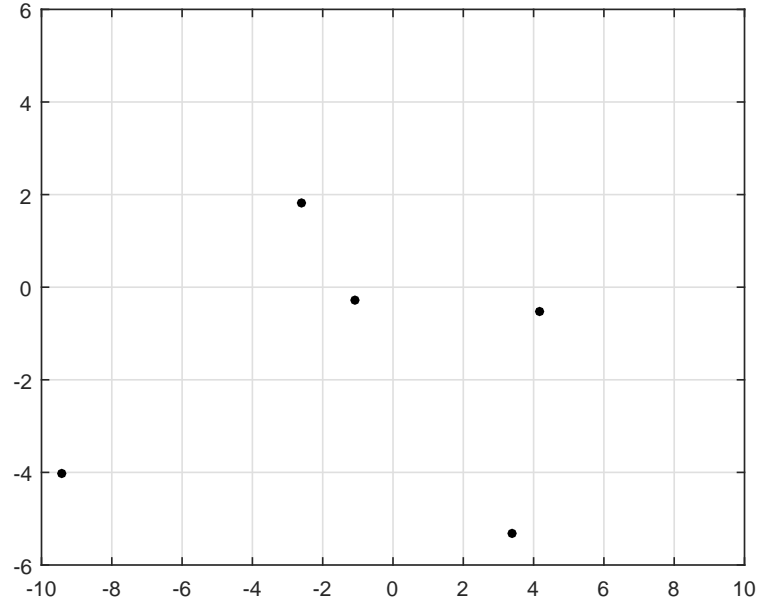


Figura 31. Puntos $V^{(2)}$, $V^{(3)}$, $V^{(4)}$, $V^{(5)}$ y $V^{(6)}$.

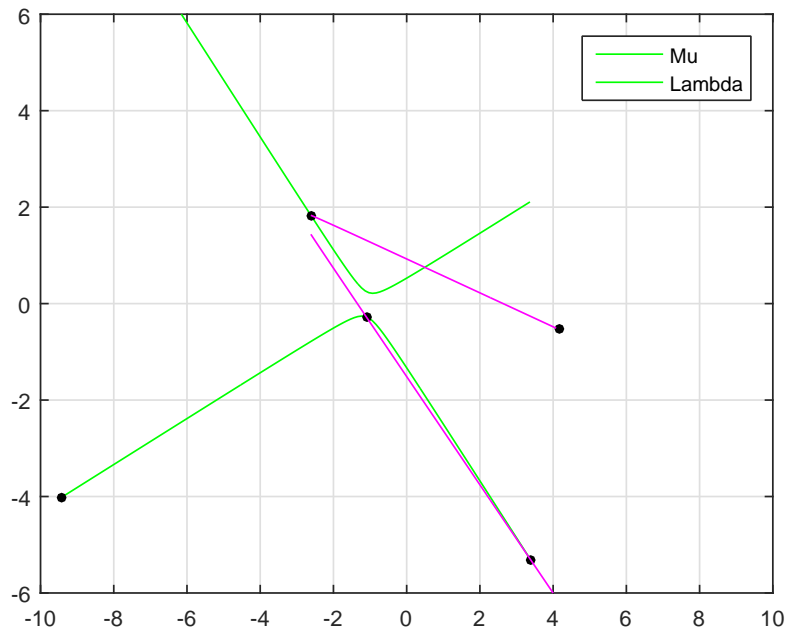


Figura 32. Cónicas mu y lambda.

Paso 11 Las coordenadas que tiene el punto $V^{(1)}$ son coordenadas del plano $\Pi^{(0)}$, es decir, representan a un punto en un espacio bidimensional. Para poder construir la línea de vista, es necesario convertir ese punto a coordenadas del espacio proyectivo $m\mathbb{P}^3$ como se describe en la sección 3.2.1.9. Este punto corresponde al punto $X^{(7)}$ del plan-

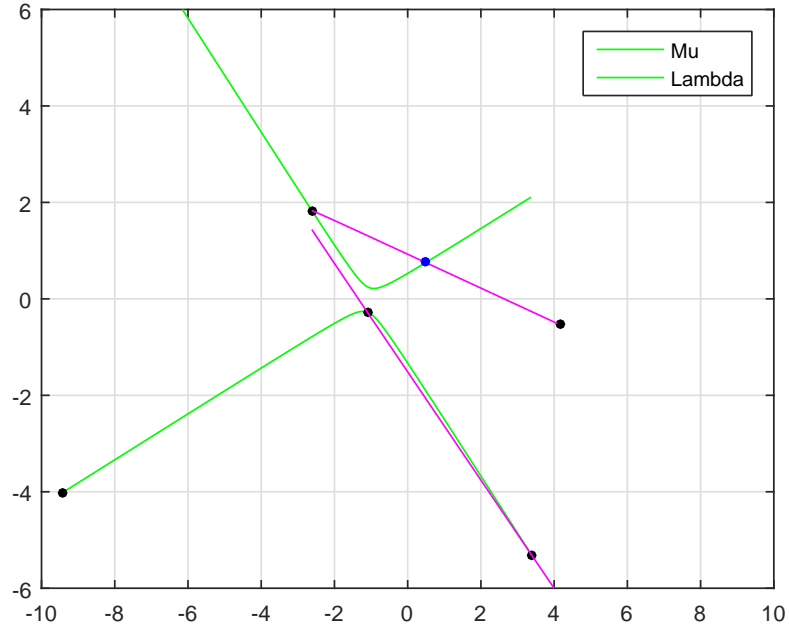


Figura 33. Punto $V^{(1)}$.

teamiento geométrico que se muestra en la Figura 11 de la Sección 3.2.1.1. El punto calculado se muestra en la Figura 34.

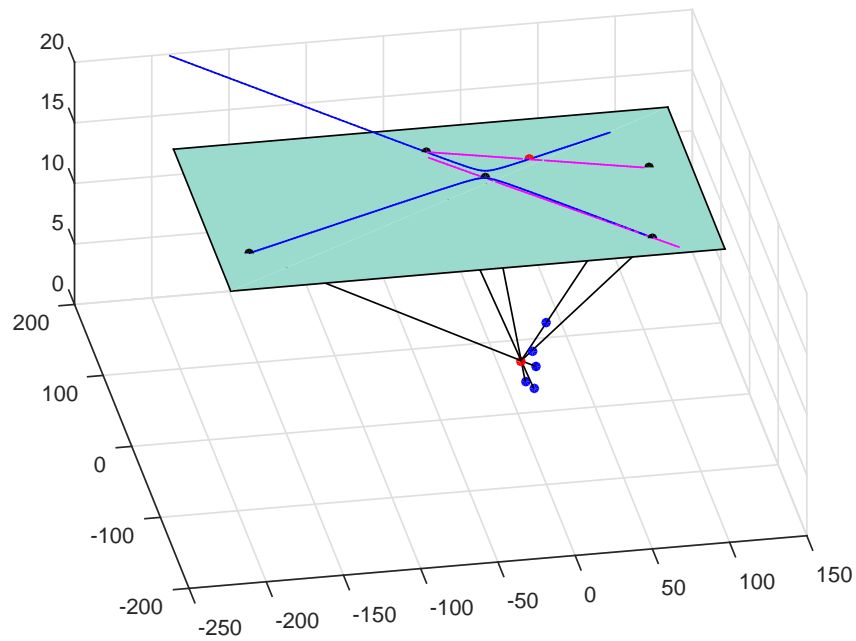


Figura 34. Punto $X^{(7)}$.

Paso 12 Se calcula la línea de vista A desde el punto $X^{(1)}$ hasta el punto donde las cónicas μ y

λ se intersectan ($\mathbf{X}^{(7)}$), encontrado en el paso 11, ver Figura 35.

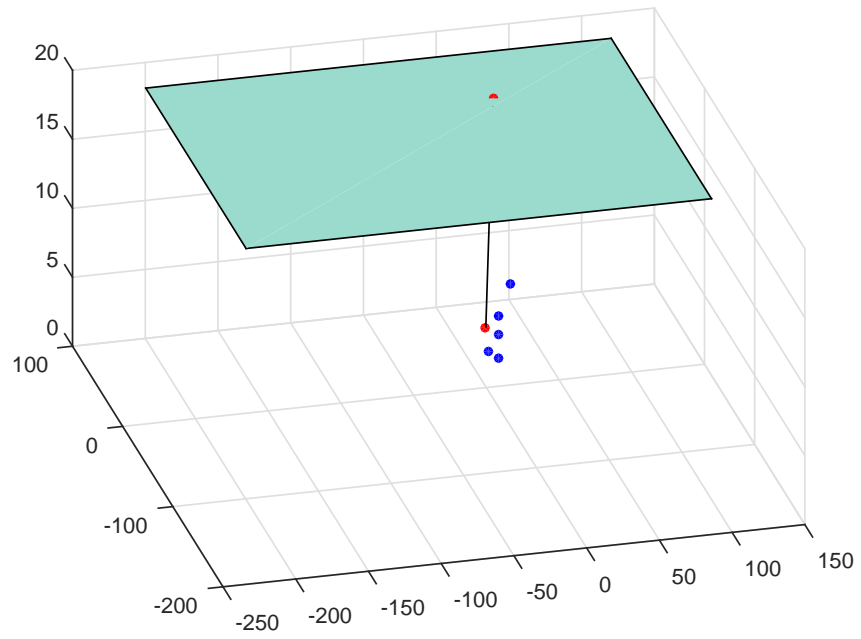


Figura 35. Línea de vista *A*.

Cálculo del centro óptico de una cámara fotográfica.

Finalmente, con el procedimiento descrito anteriormente obtenemos la línea de vista de un punto, sin embargo una sola línea no es suficiente para conseguir la ubicación de la cámara fotográfica. Se requiere de al menos dos líneas de vista, de manera que se pueda calcular la intersección entre ellas y con ésto conseguir la ubicación del centro de proyección de la cámara. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, en la implementación de un experimento es común que existan errores en la medición. Por esto se calcularon las líneas de vista de todos los puntos de referencia, con ésto se obtienen 5 líneas de vista, que se promediaron para obtener un resultado más preciso como se muestra en la Figura 36.

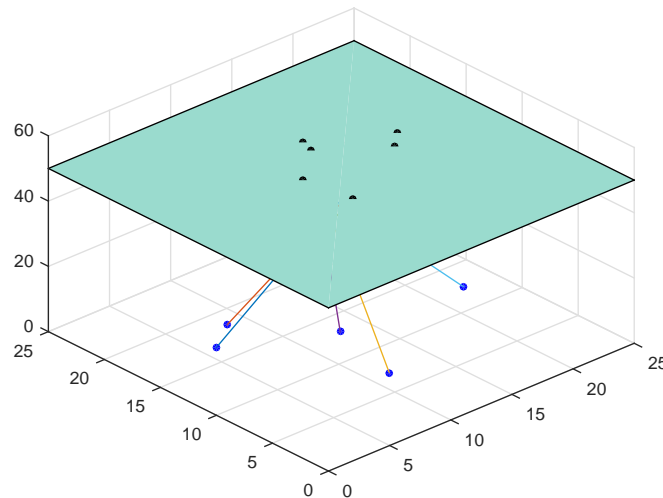


Figura 36. Líneas de vista.

Por medio del procedimiento descrito la Sección 3.2.2, calculamos el centro óptico, ver Figura 37).

5.1.1. Resultados del experimento 1

Para poder verificar los resultados es necesario tener en consideración algo, la posición desde la que fueron tomadas las fotografías en realidad es un valor desconocido que fue tomado de manera aproximada, puesto que es un valor en el espacio tridimensional, y es un posicionamiento relativo a los puntos objetivo. En el caso de la imagen mostrada en la Figura 19, el resultado obtenido se muestra en la Tabla 2.

Como se puede apreciar, se obtuvieron valores del centro óptico bastante aproximados a los

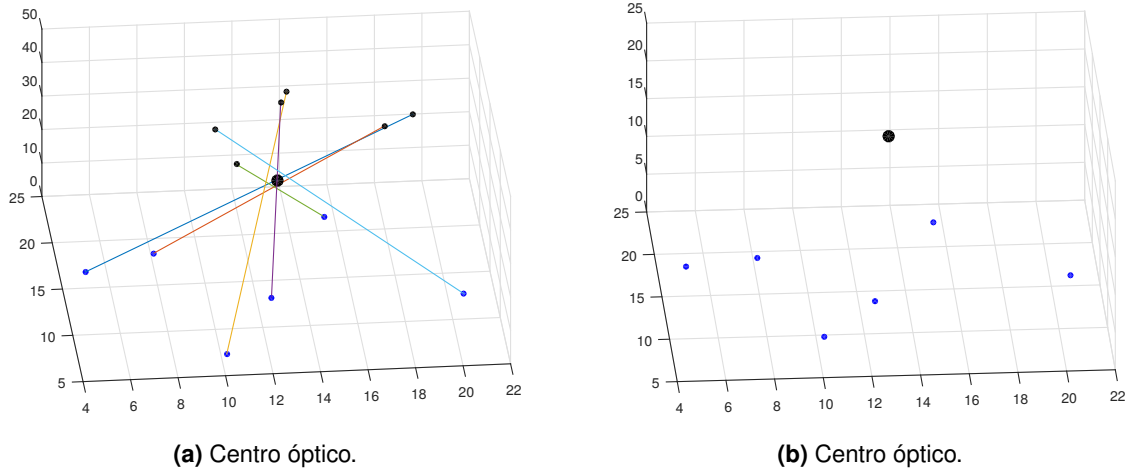


Figura 37. Centro óptico de la imagen.

Tabla 2. Ubicación del centro óptico de la Figura 19 en cm.

x_{medida}	y_{medida}	z_{medida}	$x_{calculada}$	$y_{calculada}$	$z_{calculada}$	Error x	Error y	Error z
15	10	22	14.92	11.15	20.78	0.18	0.35	1.22

medidos. El error en los resultados se debe a los pequeños errores en la medición de la ubicación de las esferas en el espacio y en la localización de los centros de los círculos detectados en la fotografía.

En la Figura 38 se muestran 4 fotografías similares pero con diferentes ubicaciones de centro óptico y en la tabla 3 los resultados obtenidos para cada una de ellas.

Tabla 3. Resultados del experimento 1 con las imágenes de la Figura 38.

Imagen	x_{medida}	y_{medida}	z_{medida}	$x_{calculada}$	$y_{calculada}$	$z_{calculada}$	Error x	Error y	Error z
a)	20	12	22	18.68	12.86	19.93	1.32	0.86	2.07
b)	17	14	32	18.73	11.49	30.81	1.73	0.51	2.19
c)	14	11	18	13.56	9.67	19.51	0.44	1.33	1.51
d)	14.5	11.5	19	13.31	10.12	17.94	1.19	1.38	1.26

Realizando el experimento con 20 imágenes similares a las mostradas en las Figuras 19 y 38, en la tabla 4 se muestra el promedio de errores en cada eje de los centros ópticos calculados.

Experimento 1 parte 2

Los resultados mostrados anteriormente fueron obtenidos mediante el software Matlab®, sin

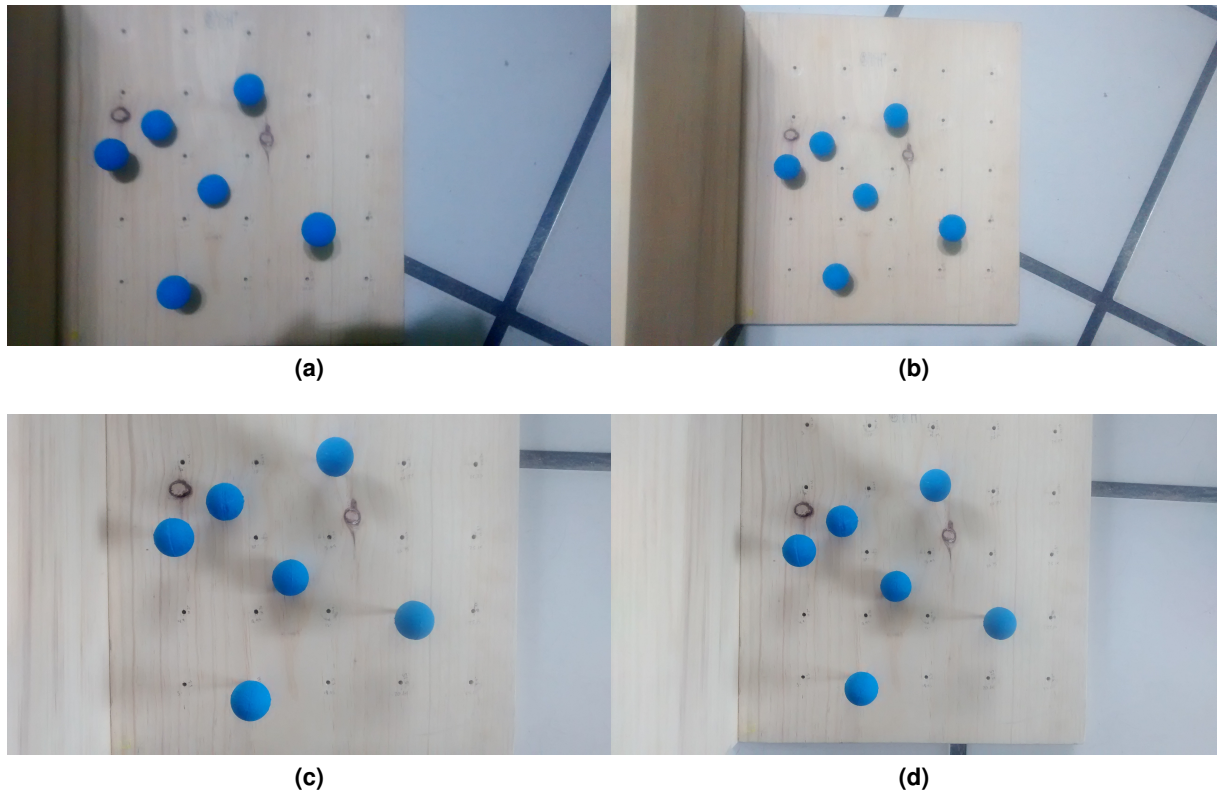


Figura 38. Imágenes de prueba.

Tabla 4. Promedio de errores en el cálculo del centro óptico en el experimento 1.

	x	y	z
Error en cm.	1.15	1.05	1.94

embargo, con el fin de reducir el tiempo de ejecución del programa, se reprodujo en algoritmo en lenguaje C utilizando librerías de OpenCV (*biblioteca libre de visión artificial originalmente desarrollada por Intel en 1999.*) y OpenGL (*biblioteca que permite escribir aplicaciones que produzcan gráficos 2D y 3D.*). En la Figura 39 se muestra la salida del programa.

En la tabla 5 se muestran los resultados obtenidos para la imagen mostrada en la Figura 19.

Tabla 5. Ubicación del centro óptico utilizando OpenCV (en cm).

x_{medida}	y_{medida}	z_{medida}	$x_{calculada}$	$y_{calculada}$	$z_{calculada}$	Error x	Error y	Error z
15	10	22	14.76	11.24	21.13	0.24	1.24	0.87

Utilizando las imágenes de la Figura 38, se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 6.

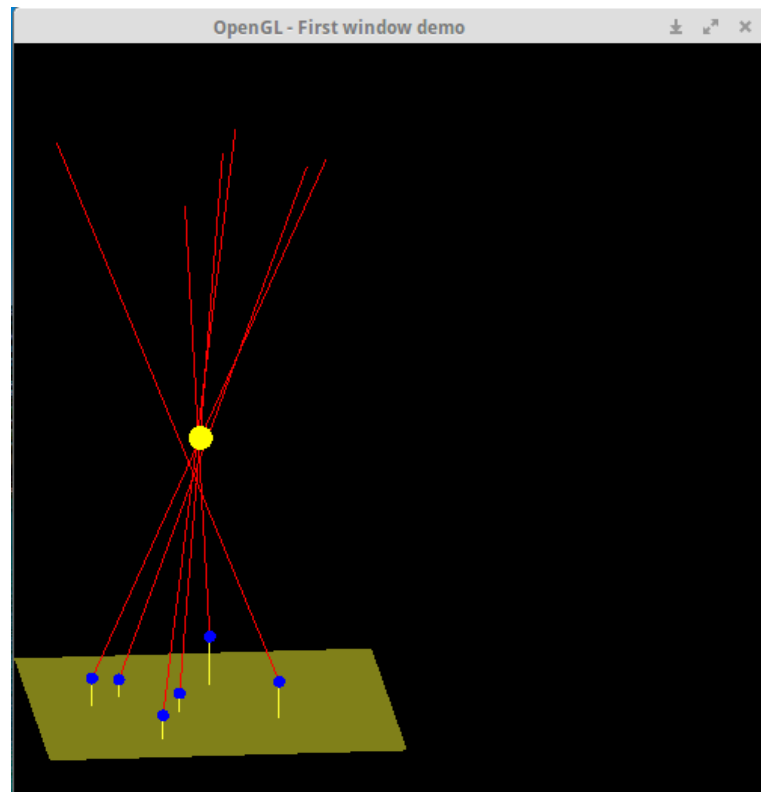


Figura 39. Ventana de openGL que muestra el centro óptico de la imagen.

Tabla 6. Resultados del experimento 1 parte 2 con las imágenes de la Figura 38.

Imagen	x_{medida}	y_{medida}	z_{medida}	$x_{calculada}$	$y_{calculada}$	$z_{calculada}$	Error x	Error y	Error z
a)	20	12	22	18.71	12.59	20.14	1.29	0.59	1.86
b)	17	14	32	18.43	12.49	30.81	1.43	0.51	2.19
c)	14	11	18	13.56	9.67	19.51	0.44	1.33	1.51
d)	14.5	11.5	19	13.31	10.12	17.94	1.19	1.38	1.26

Realizando el experimento con 20 imágenes similares a las mostradas en las Figuras 19 y 38, en la tabla 7 se muestra el promedio de errores en cada eje de los centros ópticos calculados.

Tabla 7. Promedio de errores en el cálculo del centro óptico en el experimento 1.2.

	x	y	z
Error en cm.	1.15	1.05	1.94

A pesar de mostrar resultados similares, el tiempo de ejecución se redujo considerablemente. El tiempo de ejecución en Matlab©, en promedio, fue de 4.831 segundos, mientras que con OpenCV este tiempo era de 0.0984 segundos. El breve periodo de ejecución sugiere que este sería un método aceptable para su implementación en tiempo real.

Con el fin de mejorar un poco los resultados, se propone un segundo experimento. En este, en lugar de utilizar una base de madera y esferas de nieve seca pintadas, se utiliza una mira de calibración con el fin de tener posiciones en el espacio más precisas.

5.2. Experimento 2

En el segundo experimento se utiliza una mira de calibración *AICON 3D Systems GmbH* que se encuentra en el *Laboratorio de evovisión* del *Departamento de Ciencias de la Computación* del CICESE con el fin de tener una mayor precisión en la medición de los puntos en el espacio tridimensional a utilizar. La mira de calibración se muestra en la Figura 40.

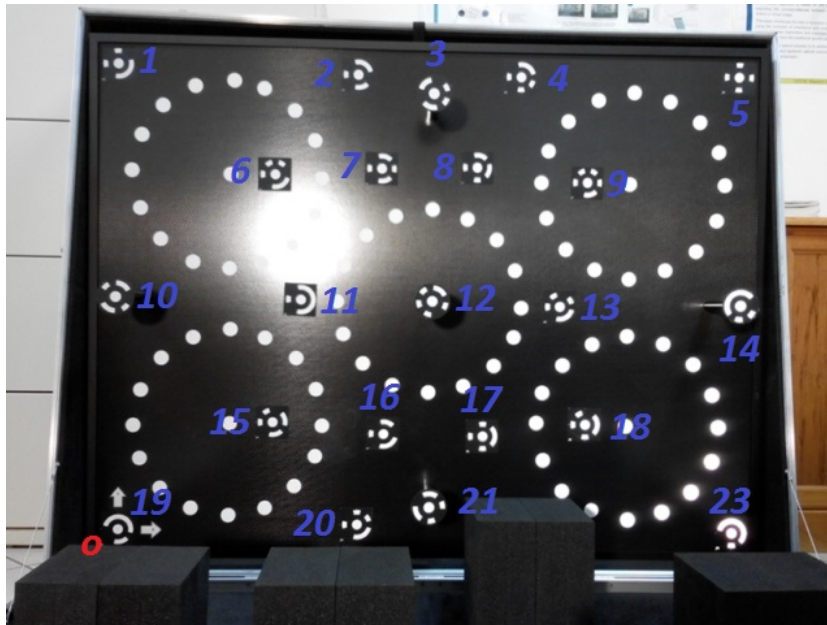


Figura 40. Mira de Calibración tridimensional AICON 3D Systems GmbH.

La mira de calibración consiste de un panel de fibra de carbono que contiene blancos reflejantes llamados cibles. Los cibles se encuentran en dos planos diferentes que tienen una separación de 200 milímetros. Uno de ellos se encuentra al nivel del panel y el otro esta formado por 6 puntos que se encuentran suspendidos sobre postes que sobresalen del panel principal. Otra característica a resaltar, es que la mira de calibración, tiene dos tipos de cibles: codificados y no codificados, que se pueden apreciar en la Figura 41. En este trabajo de tesis, se utilizan únicamente los marcadores codificados.

Tomando como origen el punto o mostrado en la Figura 40, la ubicación en el espacio tridimensional de los marcadores codificados de la mira de calibración son los mostrados en la tabla 8. Estos valores están dados en milímetros.

El procedimiento para calcular los puntos necesarios para ejecutar el algoritmo se basa en el trabajo de Guo *et al.* (2014) y se procede de la siguiente manera:

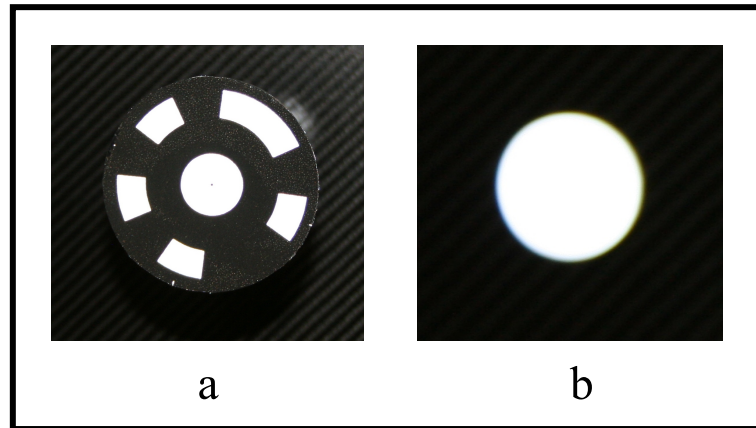


Figura 41. Tipos de cibles en la mira de calibración. a) Cible codificado. b) Cible no-codificado

Tabla 8. Posición en el espacio de los marcadores codificados de la Figura 40.

Imagen	x_{medida}	y_{medida}	z_{medida}
1	-5.7200	974.3400	0.0000
2	490.9770	966.2290	0.2680
3	647.7122	887.2627	200.3216
4	836.4670	969.2350	0.5460
5	1300.8390	975.7150	1.0560
6	317.8590	753.2870	-0.0010
7	542.5330	770.8160	0.1240
8	746.1980	776.9450	0.3040
9	983.0330	748.8440	0.3860
10	49.7018	487.6754	200.0111
11	373.7360	488.7850	-0.1310
12	649.9343	487.9645	199.8659
13	928.1600	481.7550	0.1340
14	1248.5454	488.0429	200.4940
15	317.4820	226.8420	-0.1840
16	553.3040	203.3130	-0.1470
17	766.2950	200.6900	-0.0670
18	987.1700	228.3600	-0.0290
19	0.0000	0.0000	0.0000
20	499.6080	9.5190	-0.1040
21	649.0187	88.0662	199.9343
22	830.7860	7.9340	-0.0910
23	1305.1130	0.0000	0.0000

Paso 1 Binarización de la imagen por medio del algoritmo de Otsu, ver Figura 42. El algoritmo de Otsu es un procedimiento no paramétrico que selecciona el umbral óptimo maximizando la varianza entre clases mediante una búsqueda exhaustiva. Una de sus principales ventajas es su buena respuesta frente a la mayoría de situaciones del

mundo real (imágenes ruidosas, con histogramas planos, mal iluminadas, etc.). Para más información acerca del algoritmo de Otsu, revisar Otsu (1975) .

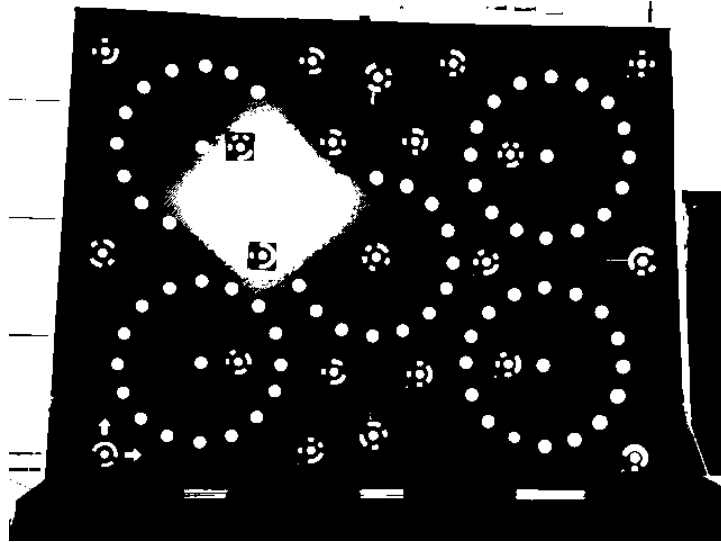


Figura 42. Imagen binarizada con el algoritmo de Otsu.

Paso 2 Detección de círculos utilizando la transformada de Hough, ver Figura 43. La transformada de Hough es una técnica usada para detectar formas geométricas que puedan ser representadas por una expresión matemática. Considera las relaciones globales entre píxeles de borde de objetos permitiendo encontrar ciertos patrones en la imagen como líneas y círculos. Para la detección de circunferencias se utiliza un sencillo sistema de votación similar al utilizado para la detección de rectas donde sólo se requiere encontrar las casillas más votadas. Para mayor información acerca de la transformada de Hough, consultar el artículo Hough (1962).

Paso 3 Una vez obtenidos los centros de los círculos, se procede a realizar la identificación de los marcadores. Para hacerlo se toma un marcador como el que se encuentra marcado con un recuadro rojo en la Figura 44. Se agrega a la imagen un círculo negro de radio arbitrario (5.5 píxeles de radio en este caso) para eliminar el círculo blanco central de cada posible marcador tomando como origen el centro de uno de los círculos detectados.

Paso 4 Se recorta la imagen, de manera que se pueda trabajar únicamente con una marca a la vez. Se toma como centro de este cuadro el centro del círculo en cuestión, ver Figura 45.

Paso 5 Calcular el centroide de todos los objetos blancos en el cuadro nuevo, ver Figura 46.

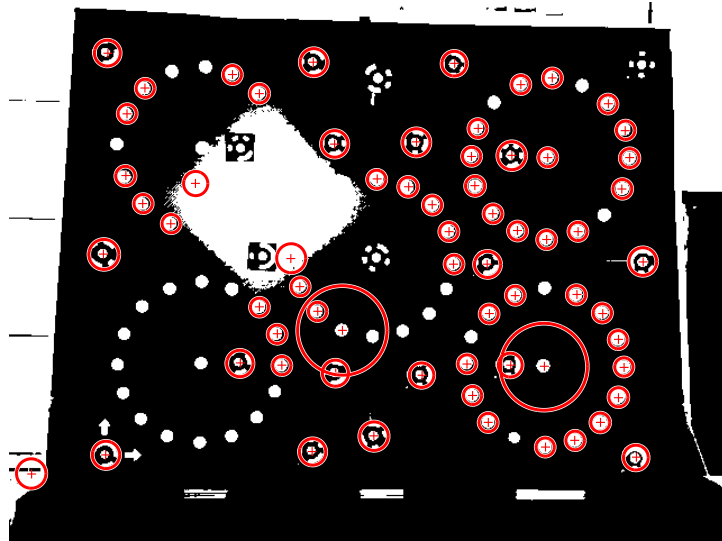


Figura 43. Círculos detectados.

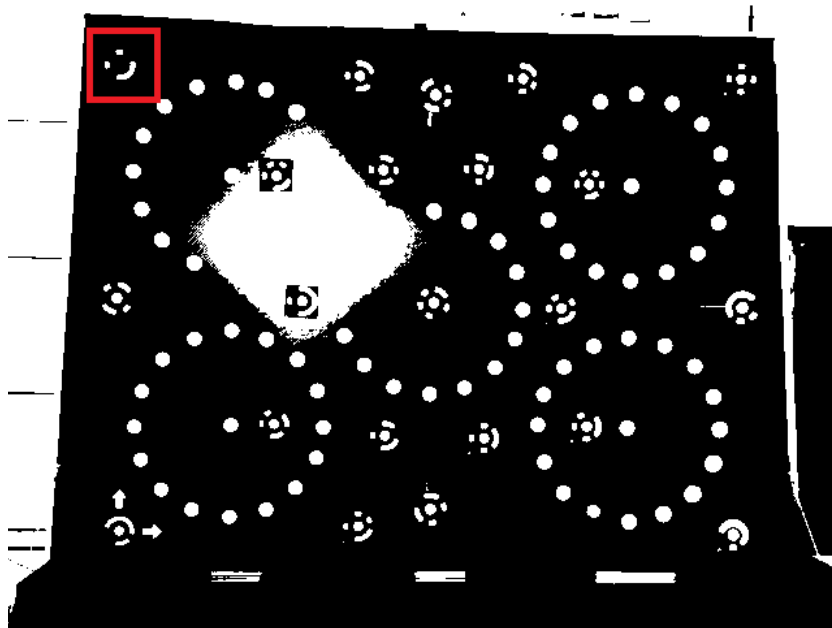


Figura 44. Círculo removido.

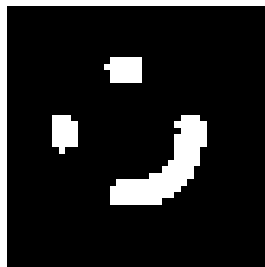


Figura 45. Imagen recortada.

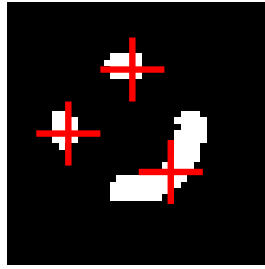


Figura 46. Centroides de los objetos en la imagen recortada.

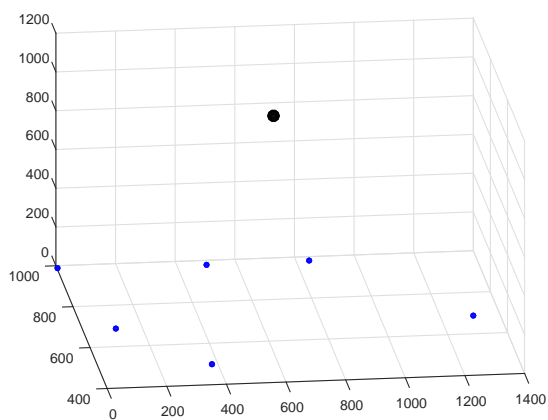
Paso 6 Tomando como origen el centro de la imagen, se calculan los ángulos que se forman entre cada uno de los centroides de cada objeto blanco en la figura y el eje horizontal.

Paso 7 Se comparan los ángulos obtenidos con los almacenados en una base de datos para identificar el número de marcador al que corresponde la imagen. En caso de no encontrar correspondencia, se ignora. Se considera una tolerancia de $\pm 5^\circ$ para cada caso.

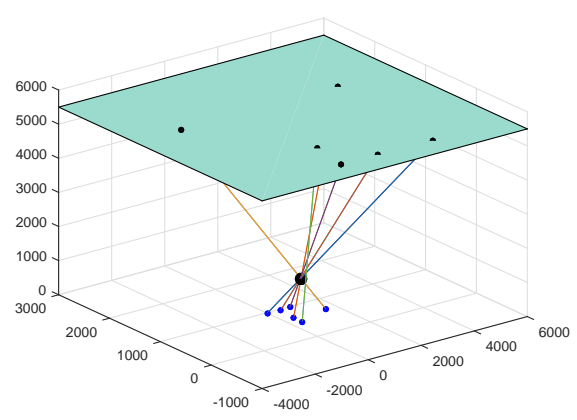
Paso 8 Repetir desde el paso 3 con los demás círculos detectados. Se almacena el número identificador de cada marcador identificado, así como sus correspondientes centros.

Paso 9 Se toman 6 de los centros de los marcadores identificados de manera arbitraria, estos reciben los nombres $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$, $\mathbf{U}^{(4)}$, $\mathbf{U}^{(5)}$ y $\mathbf{U}^{(6)}$, los cuales se definieron en la sección 3.2.1.

Paso 10 Con estos puntos, se realiza el mismo procedimiento descrito en el experimento uno para calcular la línea de vista y el centro óptico, ver Figura 47.



(a) Centro óptico.



(b) Centro óptico.

Figura 47. Centro óptico de la imagen.

5.2.1. Resultados del experimento 2

En el caso de la imagen mostrada en la Figura 40, el resultado obtenido se muestra en la Tabla 9.

Tabla 9. Ubicación del centro óptico de la Figura 40 en mm.

x_{medida}	y_{medida}	z_{medida}	$x_{calculada}$	$y_{calculada}$	$z_{calculada}$	Error x	Error y	Error z
640	480	1400	642.87	478.68	1374.98	2.87	1.32	25.02

Como se puede apreciar, se obtuvieron valores del centro óptico bastante aproximados a los medidos.

En la Figura 48 se muestran 4 fotografías similares pero con diferentes ubicaciones de centro óptico y en la tabla 10 los resultados obtenidos para cada una de ellas.

Tabla 10. Resultados del experimento 2 con las imágenes de la Figura 48.

Imagen	x_{medida}	y_{medida}	z_{medida}	$x_{calculada}$	$y_{calculada}$	$z_{calculada}$	Error x	Error y	Error z
a)	640	580	1100	641.57	581.02	1119.63	1.57	1.02	19.63
b)	660	500	1300	662.78	501.65	1274.94	2.78	1.65	25.06
c)	450	460	1500	448.56	462.22	1518.43	1.44	2.22	18.43
d)	620	480	1000	622.15	477.96	1021.17	2.15	2.04	21.17

Realizando el experimento con 20 imágenes similares a las mostradas en las Figuras 40 y 48, en la tabla 11 se muestra el promedio de errores en cada eje de los centros ópticos calculados.

Tabla 11. Promedio de errores en el cálculo del centro óptico en el experimento 2.

	x	y	z
Error en mm.	1.81	1.73	21.67

El error en los resultados se debe a los pequeños errores en la medición de la ubicación de los marcadores codificados en el espacio y en la localización de los centros de los marcadores identificados en la fotografía. Sin embargo, se observa una notable mejoría en la precisión del cálculo del centro óptico utilizando la mira de calibración. Sin embargo, el experimento 1 ofrece una alternativa más práctica para llevar a cabo experimentos en situaciones reales. Esto habla de la robustez numérica del planteamiento matemático, puesto que funciona aun en condiciones no ideales.

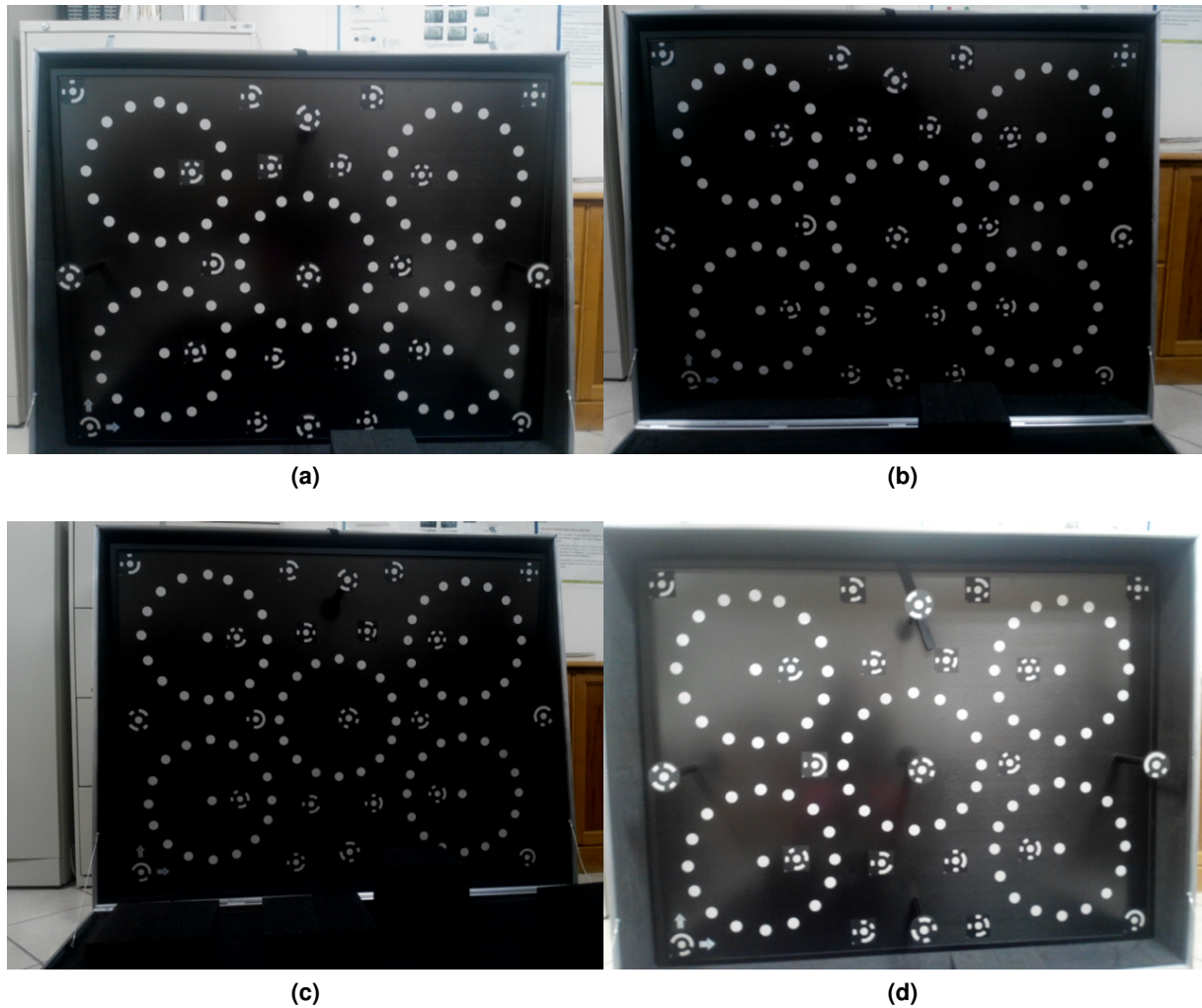


Figura 48. Imágenes de prueba.

Si bien la precisión que se obtiene al tener la certeza de las coordenadas del espacio tridimensional que ofrece la mira de calibración tridimensional es mucho mejor, ésto lo logra sacrificando tiempo de procesamiento, al realizar más operaciones, el tiempo de ejecución y de cálculo se vuelve aun más complejo.

Considerando una situación real en la que se quiera realizar este método, la opción de los marcadores azules es más viable, puesto que no es necesario que los puntos tengan una precisión tan buena y aun así se obtienen buenos resultados; en cambio, el uso de equipo especializado necesita demasiados cuidados especiales como los requeridos al utilizar una mira de calibración.

5.3. Experimento 3

En este experimento se lleva a cabo una reconstrucción tridimensional de un plano del espacio tridimensional por medio de transformaciones perspectivas

Previamente es necesario realizar un pre-procesado de la imagen para poder extraer sus características, con el objetivo de obtener los puntos conocidos que serán utilizados para calcular las matrices de transformación perspectiva. Para poder tener puntos de referencia y con ellos calcular la matriz de transformación, necesitamos tener las coordenadas de referencia de al menos 5 puntos en el plano del espacio tridimensional. Para poder tener certeza de las coordenadas se creó una guía en forma de una cuadrícula similar a un tablero de ajedrez, donde todos los cuadros tienen una medida fija, de esta forma, al replantear los puntos se puede tener certeza de las coordenadas en el espacio y se puede calcular el error de los cálculos de una manera más fácil. La cuadrícula empleada es como la que se muestra en la Figura 49.

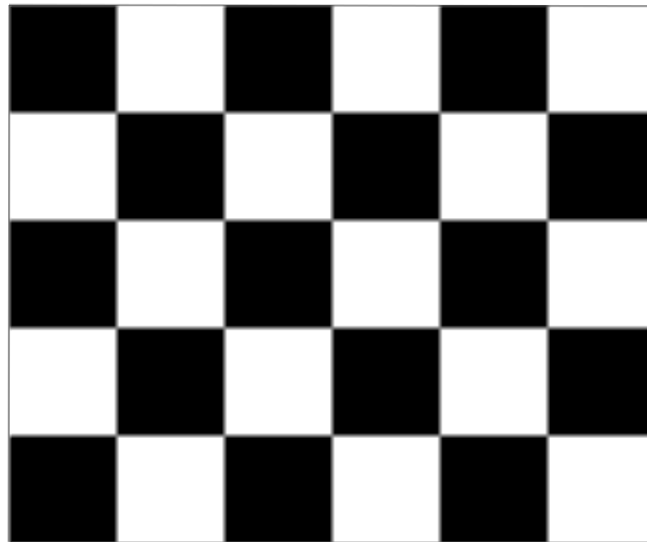


Figura 49. Cuadrícula para guía del plano a replantear.

Como la cuadrícula fue elaborada en una impresora láser, y sin escalamiento, se tiene certeza de las coordenadas de las intersecciones. Es por ello que las coordenadas de los puntos de intersección de las figuras son los que se muestran en la Tabla 12.

A continuación se explicará el procedimiento para realizar la reconstrucción tridimensional de la cuadrícula:

Tabla 12. Posición en el espacio de las intersecciones de la cuadrícula empleadas

Punto	x_1 (mm)	x_2 (mm)	x_3 (mm)
1	40	40	1
2	40	80	1
3	40	120	1
4	40	160	1
5	80	40	1
6	80	80	1
7	80	120	1
8	80	160	1
9	120	40	1
10	120	80	1
11	120	120	1
12	120	160	1
13	160	40	1
14	160	80	1
15	160	120	1
16	160	160	1
17	200	40	1
18	200	80	1
19	200	120	1
20	200	160	1

Paso 1 Identificación de los puntos de intersección de los cuadros en la fotografía. Para localizar las esquinas de la cuadrícula se emplea el método introducido por Geiger en Geiger *et al.* (2012), que consiste en calcular la probabilidad de cada pixel de la imagen, de que sea una esquina usando dos diferentes patrones de esquina, uno para las que se encuentran alineadas con los bordes y otro para las que se encuentran rotadas a 45 grados. Cada patrón se convoluciona con la imagen de entrada para obtener una lista con las esquinas encontradas. Los puntos encontrados, se muestran en la Tabla 13.

Paso 2 Una vez encontrados los puntos de intersección, elegimos un conjunto de puntos muestra y sus correspondientes proyecciones en la fotografía. Los puntos elegidos en el espacio se muestran en la Tabla 14, mientras que sus correspondientes proyecciones se muestran en la Tabla 15.

Paso 3 A continuación se calcula la matriz de proyección P que servirá posteriormente para calcular los vectores que forma la base del plano de la fotografía. Como se vio en la Sección 2.1.7 la transformación esta dada por:

Tabla 13. Puntos de intersección identificados en la imagen en pixeles

Punto	u_1	u_2	u_3
1	326.20	120.58	1
2	325.68	131.98	1
3	324.93	143.06	1
4	324.14	154.12	1
5	337.17	121.24	1
6	336.37	132.71	1
7	335.79	143.91	1
8	335.00	154.87	1
9	348.11	122.00	1
10	347.23	133.31	1
11	346.60	144.38	1
12	345.82	155.65	1
13	358.98	122.90	1
14	358.08	134.00	1
15	357.19	145.13	1
16	356.34	156.05	1
17	369.90	123.32	1
18	368.93	134.88	1
19	367.98	145.85	1
20	367.04	156.87	1

Tabla 14. Puntos elegidos en coordenadas del plano del espacio tridimensional

Punto	x_1 (mm)	x_2 (mm)	x_3 (mm)
$\mathbf{x}^{(1)}$	40	40	1
$\mathbf{x}^{(2)}$	40	160	1
$\mathbf{x}^{(3)}$	120	80	1
$\mathbf{x}^{(4)}$	200	40	1

Tabla 15. Puntos elegidos en la fotografía

Punto	u_1	u_2	u_3
$\mathbf{U}^{(1)}$	326.20	120.58	1
$\mathbf{U}^{(2)}$	324.14	154.12	1
$\mathbf{U}^{(3)}$	347.23	133.31	1
$\mathbf{U}^{(4)}$	369.90	123.32	1

$$\mathbf{U}^{(i)} = P\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)}$$

escribiéndolo de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1[B_1]}^{(i)} \\ x_{2[B_1]}^{(i)} \\ x_{3[B_1]}^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Para poder encontrar los componentes de la matriz P , los escribimos como un vector columna. Como se vio en la Sección 4.1, para resolver este sistema se necesitan al menos 8 ecuaciones, para poder obtenerlas, utilizamos las coordenadas de cuatro puntos que pertenecen al plano Π , así como las coordenadas de sus proyecciones en la fotografía.

Sustituyendo las coordenadas de los puntos $\mathbf{U}^{(i)}$ y $\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)}$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 326.20 \\ 324.14 \\ 1 \\ 347.14 \\ 154.12 \\ 1 \\ 347.23 \\ 133.31 \\ 1 \\ 369.90 \\ 123.32 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 40 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 160 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 160 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 160 & 1 \\ 120 & 80 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 80 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 80 & 1 \\ 200 & 40 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 40 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 40 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, nos queda:

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.0172 \\ -6.2112^{-19} \\ -0.0205 \\ 0.2793 \\ -1.3526^{-18} \\ 316.3979 \\ 108.7682 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Reordenando los términos de manera matricial:

$$P = \begin{bmatrix} 0.2706 & -0.0205 & 316.3979 \\ 0.0172 & 0.2793 & 108.7682 \\ -6.2112^{-19} & -1.3526^{-18} & 1 \end{bmatrix} .$$

Paso 4 Una vez calculada la matriz P ; los vectores $\mathbf{i}_{[B_4]}$, $\mathbf{j}_{[B_4]}$ y $\mathbf{k}_{[B_4]}$, se calculan aplicando esta transformación proyectiva a los vectores estándar \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} . Ésto se realiza de la siguiente forma:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P(1, 0, 0)^T ,$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = P(0, 1, 0)^T ,$$

$$\mathbf{k}_{[B_4]} = P(0, 0, 1)^T .$$

Sustituyendo los valores de la matriz P obtenemos:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = (0.2706, 0.0172, -6.2112^{-19})^T ,$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = (-0.0205, 0.2793, -1.3526^{-18})^T ,$$

$$\mathbf{k}_{[B_4]} = (316.3979, 108.7682, 1)^T .$$

La transformación de los vectores estándar \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , corresponde a los vectores columna de la matriz de transformación P . Éstos son los vectores que forman la base del plano de la fotografía.

Descomposición en tres transformaciones perspectivas

Como se explicó en la Sección 2.1.7, una transformación proyectiva t puede ser expresada como la composición de tres transformaciones perspectivas como se muestra a continuación

$$t_1 : \mathbf{X}_{[B_1]} \rightarrow \mathbf{X}_{[B_2]},$$

$$t_2 : \mathbf{X}_{[B_2]} \rightarrow \mathbf{X}_{[B_3]},$$

$$t_3 : \mathbf{X}_{[B_3]} \rightarrow \mathbf{U}.$$

Para ésto, se necesita construir tres matrices P_1 , P_2 , P_3 , de tal forma que, su efecto sobre los vectores unitarios estándar \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , sea el mismo que el de la matriz P . Es decir $P = P_3P_2P_1$. Para calcular estas matrices se sigue el siguiente procedimiento:

Paso 1 Calcular la matriz de la primera transformación perspectiva, la cual está representada por la ecuación:

$$\mathbf{X}_{[B_2]} = P_1\mathbf{X}_{[B_1]}.$$

Donde $\mathbf{X}_{[B_1]}$ es un punto referido a la base $B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, y $\mathbf{X}_{[B_2]}$ es un punto referido a una base $B_2 = \{\mathbf{i}_{[B_2]}, \mathbf{j}_{[B_2]}, \mathbf{k}_{[B_2]}\}$. Como se vió en el desarrollo explicado en la Sección 4.3, los vectores base de la primera transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{[B_2]} &= P\mathbf{i} \\ \mathbf{j}_{[B_2]} &= \frac{\mathbf{j}_{[B_2]}}{\|\mathbf{j}_{[B_2]}\|} \\ \mathbf{k}_{[B_2]} &= \frac{\mathbf{j}_{[B_2]} - \frac{\|\mathbf{j}_{[B_2]}\|^2}{\mathbf{k}_{[B_2]} \cdot \mathbf{j}_{[B_2]}} \mathbf{k}_{[B_2]}}{\|\mathbf{j}_{[B_2]} - \frac{\|\mathbf{j}_{[B_2]}\|^2}{\mathbf{k}_{[B_2]} \cdot \mathbf{j}_{[B_2]}} \mathbf{k}_{[B_2]}\|}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores correspondientes, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{[B_4]} &= (0.2706, 0.0172, -6.2112^{-19})^T, \\ \mathbf{j}_{[B_2]} &= (-0.0732, 0.9973, -4.8420^{-18})^T, \\ \mathbf{k}_{[B_2]} &= (-0.9973, -0.732, -0.0031)^T.\end{aligned}$$

La matriz P_1 esta dada por:

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{111} & p_{121} & p_{131} \\ p_{211} & p_{221} & p_{231} \\ p_{311} & p_{321} & p_{331} \end{bmatrix}.$$

Los elementos de la matriz se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{121} \\ p_{131} \\ p_{211} \\ p_{221} \\ p_{231} \\ p_{311} \\ p_{321} \\ p_{331} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ j_{1[B_2]} \\ j_{2[B_2]} \\ j_{3[B_2]} \\ k_{1[B_2]} \\ k_{2[B_2]} \\ k_{3[B_2]} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo los valores correspondientes, de los vectores $\mathbf{i}_{[B_4]}$, $\mathbf{j}_{[B_2]}$ y $\mathbf{k}_{[B_2]}$; obtenemos:

$$\begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{121} \\ p_{131} \\ p_{211} \\ p_{221} \\ p_{231} \\ p_{311} \\ p_{321} \\ p_{331} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.0172 \\ -6.2112^{-19} \\ -0.0732 \\ 0.9973 \\ -4.8420^{-18} \\ -0.9973 \\ -0.732 \\ -0.0031 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, la matriz de transformación P_1 queda:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2706 & -0.0732 & -0.9973 \\ 0.0172 & 0.9973 & -0.732 \\ -6.2112^{-19} & -4.8420^{-18} & -0.0031 \end{bmatrix}.$$

Paso 2 Ahora, se calcula la segunda transformación perspectiva, la cual está representada por la ecuación:

$$\mathbf{X}_{[B_3]} = P_2 \mathbf{X}_{[B_2]}.$$

Donde $\mathbf{X}_{[B_3]}$, es un punto referido a una base $B_3 = \{\mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_2]}\}$. Como se vio en el desarrollo explicado en la Sección 2.1.7.1:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = P\mathbf{i},$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = P\mathbf{j},$$

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = P_1\mathbf{k}.$$

Entonces, sustituyendo los valores correspondientes, obtenemos:

$$\mathbf{i}_{[B_4]} = (0.24615, 0.0042148, -0.00050097)^T,$$

$$\mathbf{j}_{[B_4]} = (0.022344, -0.99975, 0.000062812)^T,$$

$$\mathbf{k}_{[B_2]} = (85.484, 413.27, 1.3656)^T.$$

Además,

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_{112} & p_{122} & p_{132} \\ p_{212} & p_{222} & p_{232} \\ p_{312} & p_{322} & p_{332} \end{bmatrix}.$$

Donde los elementos de la matriz P_2 , se obtienen resolviendo el siguiente sistema de

ecuaciones, representado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} p_{112} \\ p_{122} \\ p_{132} \\ p_{212} \\ p_{222} \\ p_{232} \\ p_{312} \\ p_{322} \\ p_{332} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{1[B_4]} & i_{2[B_4]} & i_{3[B_4]} \\ \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} \\ k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_2]} & k_{2[B_2]} & k_{3[B_2]} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{1[B_4]} \\ i_{2[B_4]} \\ i_{3[B_4]} \\ \dot{j}_{1[B_2]} \\ \dot{j}_{2[B_2]} \\ \dot{j}_{3[B_2]} \\ k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo los valores correspondientes, de los vectores $\mathbf{i}_{[B_4]}$, $\mathbf{j}_{[B_2]}$, $\mathbf{k}_{[B_2]}$ y $\mathbf{k}_{[B_4]}$, y resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

y por lo tanto:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5.2218^{-13} & -1.0268^5 \\ -1.176^{-13} & 1 & -3.5211^4 \\ 1.0646^{-15} & -1.6374^{-15} & 323.5105 \end{bmatrix}.$$

Paso 3 Finalmente, la tercera transformación perspectiva está representada por la ecuación:

$$\mathbf{U} = P_3 \mathbf{X}_{[B_3]}.$$

Donde \mathbf{U} , es un punto referido a la base $B_4 = \{\mathbf{i}_{[B_4]}, \mathbf{j}_{[B_4]}, \mathbf{k}_{[B_4]}\}$. Como se vió en el desarrollo explicado en la Sección 2.1.7.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{[B_4]} &= P\mathbf{i}, \\ \mathbf{j}_{[B_4]} &= P\mathbf{j}, \\ \mathbf{k}_{[B_4]} &= P\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo los valores correspondientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{[B_4]} &= (0.24615, 0.0042148, -0.00050097)^T, \\ \mathbf{j}_{[B_4]} &= (0.0075211, -0.336510.000021143)^T, \\ \mathbf{k}_{[B_4]} &= (85.484, 413.27, 1.3656)^T. \end{aligned}$$

Además,

$$P_3 = \begin{bmatrix} p_{113} & p_{123} & p_{133} \\ p_{213} & p_{223} & p_{233} \\ p_{313} & p_{323} & p_{333} \end{bmatrix}.$$

Donde los elementos de la matriz P_3 , se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, representado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} p_{113} \\ p_{123} \\ p_{133} \\ p_{213} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{313} \\ p_{323} \\ p_{333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{1[B_4]} & \dot{i}_{2[B_4]} & \dot{i}_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{i}_{1[B_4]} & \dot{i}_{2[B_4]} & \dot{i}_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{i}_{1[B_4]} & \dot{i}_{2[B_4]} & \dot{i}_{3[B_4]} \\ \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{j}_{1[B_2]} & \dot{j}_{2[B_2]} & \dot{j}_{3[B_2]} \\ k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1[B_4]} & k_{2[B_4]} & k_{3[B_4]} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{i}_{1[B_4]} \\ \dot{i}_{2[B_4]} \\ \dot{i}_{3[B_4]} \\ \dot{j}_{1[B_4]} \\ \dot{j}_{2[B_4]} \\ \dot{j}_{3[B_4]} \\ k_{1[B_4]} \\ k_{2[B_4]} \\ k_{3[B_4]} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo los valores correspondientes, de los vectores $\mathbf{i}_{[B_4]}$, $\mathbf{j}_{[B_2]}$, $k_{[B_4]}$ y $\dot{j}_{[B_4]}$; y resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

y por lo tanto:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.9967 & 0.0526 & -4.6646 \\ 0.0454 & 0.2834 & 63.5729 \\ -4.9102^{-17} & 1.4223^{-17} & 0.98917 \end{bmatrix}.$$

Paso 4 Una vez calculadas las matrices P_1 , P_2 y P_3 asociadas con transformaciones perspectivas, es posible re proyectar cualquier punto de la fotografía hacia el plano II mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)} = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} \mathbf{U}^{(i)}.$$

Donde $\mathbf{U}^{(i)}$ es un punto de la fotografía, y $\mathbf{X}_{[B_1]}^{(i)}$ es el punto correspondiente sobre el plano II.

5.3.1. Resultados experimentales

Para poder verificar la validez del método se emplearon un conjunto de fotografías en diferentes circunstancias: un conjunto de fotografías de frente pero a diferentes distancias, y un conjunto de fotografías a diferentes ángulos. A manera de ejemplo, en la Figura 50 se pueden ver los puntos obtenidos después de realizar la reconstrucción mediante la inversa de las matrices calculadas anteriormente. La figura de referencia en este caso es la Figura 51.

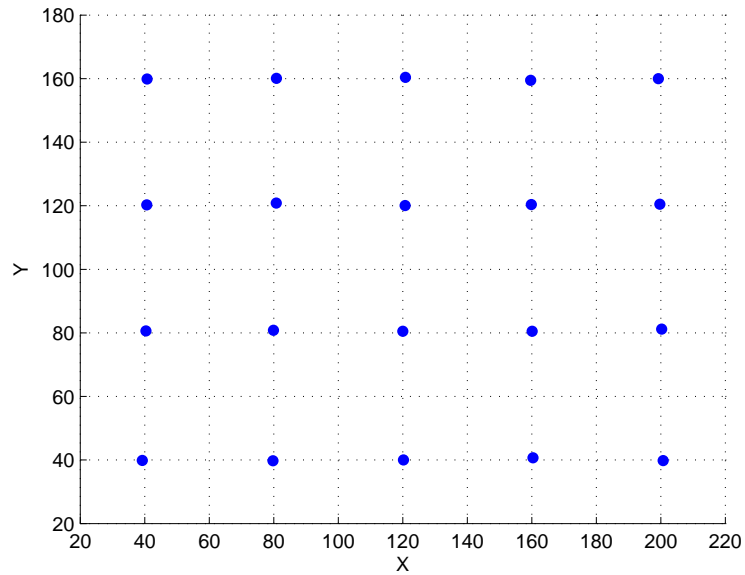


Figura 50. Reconstrucción de los puntos en el espacio tridimensional.



Figura 51. Imagen tomada de referencia para realizar la reconstrucción tridimensional.

Una ventaja de este método es que es posible visualizar el desplazamiento realizado en cada una de las etapas de la transformación como se aprecia en las Figuras 52 y 53

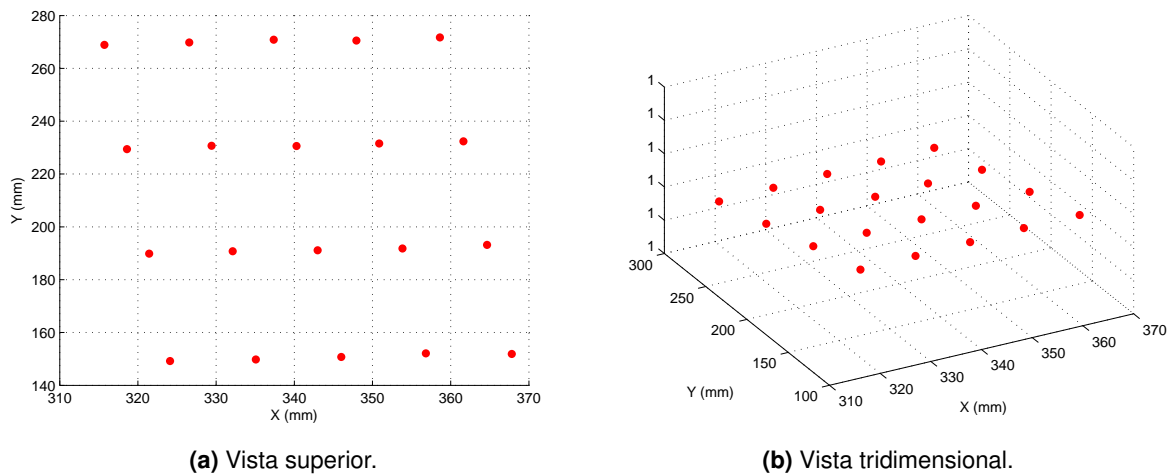


Figura 52. Los puntos en el espacio después de la primera transformación perspectiva.

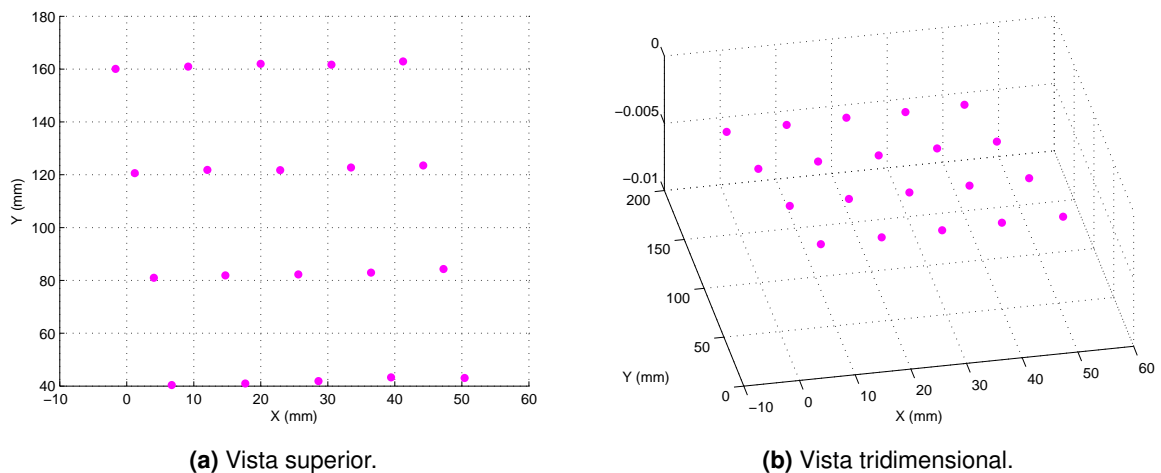


Figura 53. Los puntos en el espacio después de la segunda transformación perspectiva.

Como se puede apreciar en la Figura 50, se obtuvieron valores bastante aproximados a los medidos. El error se puede deber a diversos factores que no necesariamente implican que el planteamiento matemático está mal, si no que el error se debe al método de identificación de las intersecciones.

También se realizó el experimento para imágenes en diferentes ángulos, siendo la que aún contaba con un rango de error aceptable el plano a 30° con respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura 54.

Tabla 16. Coordenadas promedio de los puntos reconstruidos

X promedio calculada	Y promedio calculada	Z promedio calculada
39,2600	39,8804	1
40,4050	80,6149	1
40,6441	120,2899	1
40,7257	159,8669	1
79,7666	39,7759	1
79,9431	80,8235	1
80,8085	120,8474	1
80,8484	160,0719	1
120,2343	40,0000	1
120,0282	80,5053	1
120,7278	120,0762	1
120,8539	160,4242	1
160,4083	40,7105	1
160,1078	80,5022	1
159,8625	120,3735	1
159,6612	159,4501	1
200,7210	39,7826	1
200,2665	81,1875	1
199,7297	120,5005	1
199,2647	159,9646	1

Tabla 17. Error promedio en la reconstrucción tridimensional

Error promedio en X(mm)	Error promedio en Y(mm)	Error promedio en Z(mm)
0.7399	0.1195	3.55^{-15}
0.4050	0.6149	2.66^{-15}
0.6441	0.2899	1.78^{-15}
0.7257	0.1330	4.44^{-16}
0.2333	0.2240	9.10^{-15}
0.0568	0.8235	7.77^{-15}
0.8085	0.8474	6.66^{-15}
0.8484	0.0719	5.33^{-15}
0.2343	0	1.40^{-14}
0.0282	0.5053	1.27^{-14}
0.7278	0.0762	1.15^{-14}
0.8539	0.4242	1.09^{-14}
0.4083	0.7105	1.93^{-14}
0.1078	0.5022	1.78^{-14}
0.1374	0.3735	1.69^{-14}
0.3387	0.5498	1.55^{-14}
0.7210	0.2173	2.44^{-14}
0.2665	1.1875	2.31^{-14}
0.2702	0.5005	2.22^{-14}
0.7352	0.0353	2.07^{-14}



Figura 54. Plano a replantear con un ángulo de 30 grados con la horizontal.

En ese caso los errores fueron mayores, pero el error máximo calculado fue de 4.1492 mm a una distancia de dos metros.

Capítulo 6. Conclusiones y trabajo futuro

Este capítulo describe las conclusiones a las que se llegaron al realizar el trabajo.

6.1. Conclusión

En esta tesis se abordaron dos problemas, uno consiste en realizar el proceso de autocalibración de una cámara fotográfica y por otro lado, se aplicó un teorema geométrico proyectivo, para transformar puntos de una fotografía, hacia un plano del espacio tridimensional. Ambas soluciones pueden servir, cuando se tiene un robot y se quiere saber su ubicación actual dentro de un espacio tridimensional.

Estas soluciones hacen uso de conceptos y teoremas de la geometría proyectiva, los experimentos fueron realizados en Matlab, sin embargo este programa demora en el tiempo de procesamiento. Para mejorar la velocidad fue necesario implementar el programa en lenguaje C, que realiza los procedimientos de una manera más eficiente que en Matlab, por lo que se implementó en tiempo real. El tiempo que tarda el algoritmo en ejecutarse es bastante rápido, pudiéndose utilizar a una tasa de 10 cuadros por segundo. Esto dependiendo del tamaño de la imagen que se esté utilizando. Sin embargo, esta herramienta no permite visualizar los datos de manera gráfica tan fácilmente como Matlab. Pero para el propósito de que un robot realice estos cálculos, no se requiere la visualización de las gráficas, puesto que todos los procesos los calcularía y realizaría internamente.

En el enfoque tomado en este documento no se requiere la calibración de las cámaras, por tal motivo es independiente de los parámetros de la cámara y de las condiciones en las que se haya tomado la fotografía. Tampoco se requiere de cámaras profesionales que aumenten el costo de la experimentación, por lo que tales características hacen de este trabajo una propuesta viable económicamente para soluciones reales.

En el caso de la reconstrucción tridimensional, se aplicaron los algoritmos para la reconstrucción de un plano del espacio tridimensional, dando muy buenos resultados, incluso en ángulos en los que la distorsión realizada por la transformación, no afecta el desempeño del algoritmo, obteniendo una buena precisión.

Cabe señalar que el algoritmo mejora dramáticamente cuando se utiliza un número mayor de puntos de referencia, y sus correspondencias para calcular las matrices de proyección.

Una crítica muy válida al respecto de este trabajo es acerca de la precisión del método, si bien, la intención de los experimentos realizados era probar que el planteamiento matemático detrás de este procedimiento funcionaba para realizar un posicionamiento relativo. Lo cual fue demostrado que si funciona independientemente de la precisión en el detector de puntos. Dando como resultado, un proceso rápido, económico y viable para aplicaciones futuras.

6.2. Trabajo futuro

El trabajo realizado abre pautas para seguir avanzando hacia varias líneas de trabajo. Una extensión de la reconstrucción tridimensional del plano proyectivo, es extender este método al espacio proyectivo para poder realizar reconstrucciones de espacios

Pensando en la idea de utilizar este método en un robot que tenga la posibilidad de desplazarse y que cuente con una cámara, sería posible realizar una reconstrucción tridimensional mediante el desplazamiento realizado por una cámara. Como primer paso sería calcular las líneas de vista de un mismo punto pero desde dos ángulos diferentes y de esta forma conseguir información de la coordenada que se pierde al realizar la transformación perspectiva hacia el plano de la fotografía, es decir, calcular la línea de vista de un punto en el espacio tridimensional, realizar un desplazamiento lateral de manera que se podría generar un efecto de un par estéreo al calcular la línea de vista del mismo punto desde diferentes puntos de vista, y por ultimo calcular la intersección de ambas líneas de vista. Para esto, también sería necesario implementar un algoritmo de correspondencia de imágenes.

Los dos métodos presentados pueden unirse para realizar reconstrucciones tridimensionales de escenas, de manera que con la misma fotografía se pueda realizar la ubicación de la cámara y el replanteo de las coordenadas del espacio tridimensional.

Una de las consideraciones tomadas para el presente trabajo, fue que el modelo de cámara utilizado es el modelo pinhole. Utilizando otros modelos podría ser posible utilizar otras herramientas en cámaras que no satisfagan dicho modelo, como el modelo de ojo de pez¹, o de cámaras estéreo.

En el problema de la reconstrucción tridimensional, sería interesante emplear un algoritmo de Kalman para predecir donde se encontraría el siguiente punto, y en base a ello poder reducir los errors generados al reconstruir en base a retroalimentación.

¹Del inglés *fish eye*

Literatura citada

- Altamirano Gómez, G. E. (2012). *¿Dónde está el fotógrafo? Utilizando el álgebra de Grassmann-Cayley*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada.
- Barnabei, M., Brini, A., y Rota, G.-C. (1985). On the exterior calculus of invariant theory. *Journal of Algebra*, **96**(1): 120–160.
- Brannan, D. A., Esplen, M. F., y Gray, J. J. (1999). *Geometry*. Cambridge University Press, primera edición. Cambridge, p. 497.
- Byers, K. M. y Henle, J. M. (2004). Where the camera was. *Mathematics Magazine*, **77**(4): 251–259.
- Chasles, M. (1865). *Traité des sections coniques: faisant suite au Traité de géométrie supérieure*, Vol. 1. Gauthier-Villars.
- Durrant-Whyte, H. y Bailey, T. (2006). Simultaneous localisation and mapping (slam): Part i the essential algorithms.
- Eggar, M. H. (1998). Pinhole cameras, perspective, and projective geometry. *The American Mathematical Monthly*, **105**(7): 618–630.
- Faugeras, O. y Toscani, G. (1987). Camera calibration for 3D computer vision. En: *Proceedings of the International Workshop on Machine Vision and Machine Intelligence*. pp. 240–247, Febrero 2-5. Tokyo, Japan.
- Faugeras, O., Luong, Q.-T., y Papadopoulou, T. (2001). *The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern The Formation of Images of A Scene and Some of Their Applications*. MIT Press, primera edición. Cambridge, p. 644.
- Geiger, A., Moosmann, F., Car, ., y Schuster, B. (2012). Automatic camera and range sensor calibration using a single shot. En: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May. pp. 3936–3943.
- Gros, P. y Quan, L. (1992). Projective Invariants for Vision. Technical Report RT 90 IMAG - 15 LIFIA. no note.
- Guo, C., Cheng, X., Cui, H., Dai, N., y Weng, J. (2014). A new technique of recognition for coded targets in optical 3d measurement. En: *SPIE/COS Photonics Asia*. International Society for Optics and Photonics, pp. 92761H–92761H.
- Hartley, R. y Zisserman, A. (2003). *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge university press.
- Hestenes, D. (2001). Old wine in new bottles: A new algebraic framework for computational geometry. En: *Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*. Springer, pp. 3–17.
- Horn, B. K. y Brooks, M. J. (1989). *Shape from shading*. MIT press.
- Hough, P. (1962). Method and means for recognizing complex patterns. US Patent 3,069,654.
- Kawasaki, H., Furukawa, R., Sagawa, R., y Yagi, Y. (2008). Dynamic scene shape reconstruction using a single structured light pattern. En: *Computer Vision and Pattern Recognition, 2008. CVPR 2008. IEEE Conference on*. IEEE, pp. 1–8.

- Möbius, A. F. (1885). *Gesammelte Werke*, Vol. 1. Verlag Von S. Hirzel, primera edición. Leipzig, p. 629.
- Mohr, R. y Morin, L. (1991). Relative positioning from geometric invariants. En: *Computer Vision and Pattern Recognition, 1991. Proceedings CVPR'91., IEEE Computer Society Conference on.* IEEE, pp. 139–144.
- Mohr, R. y Morin, L. (1993). Geometric solutions to some 3d vision problems. *Geometric Reasoning for Perception and Action*, pp. 139–162.
- Morin, L. (1993). *Quelques contributions des invariants projectifs à la vision par ordinateur..* Tesis de doctorado, Institut National Polytechnique de Grenoble, France.
- Olague, G. (2016). *Evolutionary Computer Vision: The First Footprints.* Natural Computing Series. Springer Berlin Heidelberg.
- Otsu, N. (1975). A threshold selection method from gray-level histograms. *Automatica*, **11**(285-296): 23–27.
- Pollefeys, M., Van Gool, L., Vergauwen, M., Cornelis, K., Verbiest, F., y Tops, J. (2003). 3d recording for archaeological fieldwork. *IEEE Computer Graphics and applications*, **23**(3): 20–27.
- Semple, J. G. y Kneebone, G. (1952). *Algebraic Projective Geometry.* Oxford University Press, primera edición. Oxford, p. 404.
- Tripp, C. (1987). Where is the camera? the use of a theorem in projective geometry to find from a photograph the location of the camera. *The Mathematical Gazette*, **71**(455): pp. 8–14.
- Veblen, O. y Young, J. W. (1938). *Projective Geometry*, Vol. I. Blaisdell Publishin Company, segunda edición. New York, p. 345.
- White, N. L. (1994). Grassmann—cayley algebra and robotics. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **11**(1): 91–107.
- White, N. L. (2004). Geometric applications of the grassmann-cayley algebra.
- Zhang, Z. (1998). Determining the epipolar geometry and its uncertainty: A review. *International journal of computer vision*, **27**(2): 161–195.

**Apéndice A Certificado de Calibración de la Mira de Calibración Tri-
dimensional AICON 3D Systems GmbH**

Calibration certificate

Object: 3D calibration panel (CFK)
 Serial no.: 969304039
 Customer: CICESE / Depto. de Recursos Materiales
 Mr. Juan Carlos Padilla Jiménez
 Km. 107 Carretera Tijuana-Ensenada
 22680 Ensenada, Baja California
 Date of calibration: 18.02.04
 Place of calibration: Braunschweig
 Person in charge: Dipl.-Ing. Andreas Kahle
 Certificate number: 869304016
 Measurement system: AICON DPA Pro measuring system 4 - 900103069

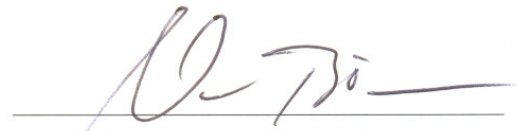
The calibration is matching the VDI/VDE 2634, page 1 and processed by the use of an optical 3D-measurement system. The CFK-scale bars with the calibration marks

8103 DKD 02 and
8316 DKD 02

of the Deutscher Kalibrierdienst **DKD** Essen are used as reference lengths. The CFK-scales are used as a reference standard. The fundamental task of the scales is to realize the legal units in compliance with the International System of Units (SI). The calibration can be traced back to the International System of Units by the use of the certified scales. A high resolution digital camera is taking images of the reference points of the calibration object and the end points of the reference lengths from various angles. Afterwards the digital images are processed and the reference lengths are transmitted to the reference points, which need to be calibrated.

Enclosed are the calibration report and copies of the calibration certificate for the scales and a copy of the certificate of the above mentioned AICON DPA Pro Measurement System.

AICON 3D Systems GmbH
 Biberweg 30 C
 D-38114 Braunschweig
 Phone (05 31) 58 000 58
 Fax (05 31) 58 000 60
 E-Mail info@aicon.de
 Internet <http://www.aicon.de>


 Dr.-Ing. **Werner Bösemann**
 President

Calibration report

.....**AICON**
3D Systems GmbH

Biberweg 30 C
 38114 Braunschweig

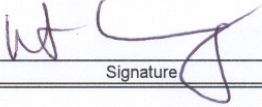
Object: 3D calibration panel (CFK), Serial no. 969304039

Reference no: 869304016

Customer: SAE Cicese Mexico, Mr. J.C. Padilla Jiménez

Point no.	Co-ordinates (mm)			Standard deviation (mm)		
	X	Y	Z	sx	sy	sz
80	0,000	0,000	0,000	0,010	0,002	0,006
81	1305,113	0,000	0,000	0,010	0,001	0,007
82	1300,839	975,715	1,056	0,009	0,002	0,007
83	-5,720	974,340	0,000	0,010	0,001	0,007
84	499,608	9,519	-0,104	0,008	0,001	0,006
85	830,786	7,934	-0,091	0,008	0,000	0,007
86	766,295	200,690	-0,067	0,008	0,000	0,007
87	553,304	203,313	-0,147	0,008	0,001	0,006
88	542,533	770,816	0,124	0,008	0,000	0,006
89	746,198	776,945	0,304	0,007	0,001	0,006
90	490,977	966,229	0,268	0,008	0,000	0,006
91	836,467	969,235	0,546	0,008	0,001	0,006
92	373,736	488,785	-0,131	0,008	0,000	0,006
93	928,160	481,755	0,134	0,007	0,000	0,006
94	317,482	226,842	-0,184	0,008	0,001	0,006
95	987,170	228,360	-0,029	0,008	0,000	0,006
96	317,859	753,287	-0,001	0,008	0,000	0,006
97	983,033	748,844	0,386	0,007	0,001	0,006
98	649,934	487,965	199,866	0,007	0,000	0,006
99	647,712	887,263	200,322	0,008	0,000	0,006
100	1248,545	488,043	200,494	0,008	0,000	0,006
101	49,702	487,675	200,011	0,009	0,000	0,006
102	649,019	88,066	199,934	0,008	0,001	0,006
1010	651,736	685,942	0,018	0,008	0,000	0,006
1020	726,824	665,940	0,030	0,007	0,000	0,006
1030	790,074	622,994	0,045	0,007	0,000	0,006
1040	830,308	557,735	0,034	0,007	0,000	0,006
1050	844,758	477,682	-0,036	0,007	0,000	0,006
1060	829,399	414,520	-0,069	0,007	0,000	0,007
1070	787,706	352,589	-0,134	0,007	0,000	0,006
1080	722,769	308,406	-0,181	0,007	0,000	0,007
1090	647,918	294,028	-0,209	0,008	0,001	0,007
1100	570,868	308,709	-0,252	0,007	0,001	0,006
1110	507,178	354,439	-0,271	0,007	0,001	0,006

Object: 3D calibration panel (CFK), Serial no. 969304039						
Reference no: 869304016						
Customer: SAE Cicese Mexico, Mr. J.C. Padilla Jiménez						
Point no.	Co-ordinates (mm)			Standard deviation (mm)		
	X	Y	Z	sx	sy	sz
1120	464,393	416,660	-0,258	0,007	0,001	0,006
1130	450,277	486,177	-0,251	0,007	0,001	0,006
1140	463,894	562,794	-0,181	0,007	0,000	0,006
1150	510,874	628,294	-0,150	0,008	0,000	0,006
1160	573,425	670,173	-0,065	0,007	0,000	0,006
2000	1073,596	746,618	0,331	0,008	0,001	0,006
2010	1078,601	940,361	0,630	0,008	0,002	0,006
2020	1155,411	922,195	0,687	0,009	0,002	0,006
2030	1219,902	879,467	0,692	0,009	0,002	0,006
2040	1262,010	816,575	0,638	0,009	0,002	0,006
2050	1276,701	746,744	0,553	0,009	0,001	0,007
2060	1261,106	670,768	0,412	0,009	0,001	0,007
2070	1218,881	604,762	0,270	0,009	0,001	0,007
2080	1153,600	563,215	0,172	0,009	0,001	0,007
2090	1076,041	543,193	0,129	0,008	0,001	0,007
2100	1002,017	562,371	0,102	0,007	0,001	0,006
2110	939,170	605,065	0,114	0,007	0,001	0,006
2120	896,414	671,608	0,167	0,007	0,001	0,006
2130	884,075	747,045	0,226	0,008	0,001	0,006
2140	898,024	814,740	0,314	0,008	0,001	0,006
2150	939,259	878,058	0,431	0,008	0,001	0,006
2160	1002,779	923,227	0,531	0,008	0,001	0,006
3000	1074,273	226,333	-0,138	0,008	0,000	0,006
3010	1074,398	420,557	0,024	0,008	0,000	0,007
3020	1152,571	404,950	0,056	0,009	0,000	0,007
3030	1217,671	361,735	0,047	0,009	0,000	0,007
3040	1259,037	296,414	-0,018	0,009	0,000	0,007
3050	1273,447	226,959	-0,037	0,009	0,001	0,007
3060	1260,566	153,008	-0,088	0,009	0,001	0,007
3070	1216,988	86,678	-0,131	0,009	0,001	0,007
3080	1154,616	42,690	-0,164	0,009	0,001	0,007
3090	1080,968	25,166	-0,182	0,009	0,001	0,007
3100	1002,709	44,156	-0,193	0,008	0,000	0,006
3110	938,895	84,936	-0,185	0,008	0,000	0,006
3120	896,864	150,666	-0,171	0,008	0,000	0,007
3130	881,386	230,856	-0,166	0,007	0,000	0,006
3140	892,978	295,856	-0,105	0,008	0,000	0,007
3150	936,076	355,592	-0,074	0,007	0,000	0,006
3160	999,473	401,768	-0,028	0,008	0,000	0,006
4000	227,191	223,881	-0,281	0,009	0,001	0,007

Object: 3D calibration panel (CFK), Serial no. 969304039						
Reference no: 869304016						
Customer: SAE Cicese Mexico, Mr. J.C. Padilla Jiménez						
Point no.	Co-ordinates (mm)			Standard deviation (mm)		
	X	Y	Z	sx	sy	sz
4010	226,198	424,011	-0,283	0,009	0,001	0,006
4020	299,029	406,313	-0,281	0,008	0,001	0,006
4030	365,185	363,929	-0,280	0,007	0,001	0,006
4040	407,922	297,857	-0,289	0,007	0,001	0,006
4050	421,775	219,920	-0,293	0,008	0,001	0,006
4060	407,910	154,816	-0,287	0,008	0,001	0,006
4070	364,909	91,291	-0,267	0,008	0,002	0,006
4080	303,888	44,825	-0,231	0,009	0,002	0,006
4090	227,841	29,531	-0,207	0,009	0,002	0,007
4100	149,112	45,080	-0,203	0,009	0,002	0,006
4110	84,996	87,249	-0,180	0,009	0,002	0,006
4120	42,149	150,024	-0,180	0,009	0,002	0,006
4130	28,040	219,562	-0,228	0,009	0,002	0,007
4140	42,657	294,042	-0,245	0,009	0,001	0,006
4150	84,309	361,710	-0,238	0,009	0,001	0,006
4160	149,403	405,945	-0,246	0,009	0,001	0,006
5000	225,359	751,187	-0,149	0,009	0,000	0,006
5010	232,648	946,645	-0,030	0,009	0,001	0,006
5020	294,718	931,902	-0,024	0,009	0,001	0,006
5030	358,391	887,878	0,016	0,008	0,000	0,006
5040	400,716	826,413	0,001	0,008	0,000	0,006
5050	415,385	747,051	-0,066	0,008	0,000	0,006
5060	402,042	670,401	-0,156	0,008	0,000	0,006
5070	355,664	605,006	-0,218	0,008	0,000	0,006
5080	289,661	565,450	-0,255	0,008	0,000	0,006
5090	223,301	553,024	-0,285	0,009	0,000	0,006
5100	147,743	565,348	-0,266	0,009	0,000	0,007
5110	81,025	612,188	-0,252	0,009	0,000	0,006
5120	39,516	676,235	-0,215	0,009	0,000	0,006
5130	22,169	754,696	-0,168	0,009	0,001	0,006
5140	42,477	828,853	-0,135	0,009	0,001	0,006
5150	85,697	890,894	-0,109	0,010	0,001	0,007
5160	152,263	933,188	-0,061	0,009	0,001	0,006
measured:	18.02.04	in: Braunschweig		by: Dipl.-Ing. Andreas Kahle		
calculated:	18.02.04	in: Braunschweig		by: Dipl.-Ing. Andreas Kahle		
verified:	19.02.04	by: Dipl.-Ing. Robert Godding		 Signature		

